Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 02 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (), Christopher Neumann (), Dennis Schulze (458415)

November 14, 2020

Contents

Aufgabe 1

a)

b)

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$$

IA: Es gilt

$$\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges n $\in\mathbb{N}$ mit n $>$ 1

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

IB: Dann gilt

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{((n+1)-1)((n+1)+1)}{(n+1)^2}\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\\
&= \frac{(n+1)\cdot n(n+2)}{2n(n+1)(n+1)}=\frac{n+2}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle n $\in\mathbb{N}$ mit n $>$ 1

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

c)

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, \text{ gilt } 2^n \geq n^2$$

IA: Es gilt für n = 4

$$\begin{aligned} 2^4 &\geq 4^2 \\ \Leftrightarrow 16 &\geq 16 \end{aligned}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit n ≥ 4

$$2^n \geq n^2$$

IB: Dann gilt

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &\geq (n+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 2^n &\geq 2 \cdot n^2 = n^2 + 2n + 1 \\ \Rightarrow n^2 &= 2n + 1 \\ \Leftrightarrow 0 &= n^2 - 2n - 1 \\ \Rightarrow n_1 &= 1 - \sqrt{2} \text{ und } n_2 = 1 + \sqrt{2} \\ \Rightarrow n_1 &< 4 \text{ und } n_2 < 4 \text{ (siehe IV.)} \\ \Rightarrow n^2 &> 2n + 1 \\ \Rightarrow 2 \cdot n^2 &> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \\ \Rightarrow 2 \cdot 2^n &> (n+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2^{n+1} &> (n+1)^2 \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit n ≥ 4

$$2^n \geq n^2$$

Aufgabe 2

a)

b)

Aufgabe 3

a)

b)

c)

d)

Aufgabe 4

a)

b)

c)