Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften Hausaufgabe 09 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

27. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Aufga	Aufgabe 1															2										
b)																										
Aufgabe 2																										
Aufgabe 3																										
b)																										

Aufgabe 1

 $\mathbf{a})$

Es gilt

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} = x^{-1}$$

dann gilt für die Taylorpoynome T_1 und T_2

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 0 + 1 \cdot (x - 1) = x - 1$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$= 0 + 1 \cdot (x - 1) + \frac{-1}{2}(x - 1)^2 = x - 1 - \frac{(x - 1)^2}{2}$$

für dessen Restglieder gilt

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)(x-1)^2}{2!}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\xi^2} (x-1)^2 = \frac{-(x-1)^2}{2\xi^2}$$

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)(x-1)^3}{3!}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{\xi^3} (x-1)^3 = \frac{(x-1)^3}{3\xi^3}$$

dann gilt

$$\ln(x) = T_1(x) + R_1(x)$$
 bzw. $\ln(x) = T_2(x) + R_2(x)$

Damit die Ungleichungen $\ln(x) < T_1(x)$ und $\ln(x) > T_2(x)$ gelten, müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein.

$$0 > R_1(x)$$
 und $0 < R_2(x)$

der Nenner der Restglieder ist immer größer 0 für alle $\xi \in]x_0, x[$ dann gilt

$$x - 1 > 0, \forall x \in]1, \infty[$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 > 0 \text{ bzw. } (x - 1)^3 > 0, \forall x \in]1, \infty[$$

$$\Rightarrow -(x - 1)^2 < 0, \forall x \in]1, \infty[$$

$$\Rightarrow 0 > R_1(x) \text{ bzw. } 0 < R_2(x), \forall x \in]1, \infty[$$

somit gilt

$$x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} < \ln x < x - 1$$

b)

Für das Monotoniekriterium:

$$x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} < \ln x$$
, da:

$$(x-1-\frac{(x-1)^2}{2})'=2-x<0$$
, für $x\in]2,\infty[\Rightarrow \text{ streng monoton fallend}$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$$
, für $x \in]1, \infty[\Rightarrow \text{ streng monoton steigend}]$

Somit:

$$\lim_{x \to \infty} \left(x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} \right) \stackrel{\text{GWS}}{=} -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (\ln x) \stackrel{\text{GWS}}{=} \infty$$

$$\Rightarrow x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} < \ln x \text{, für } x \in]1, \infty[$$

Für den Mittelwertsatz:

Zu zeigen ist, dass $\ln(x) < x-1$ für alle $x \in [1,\infty]$

$$f(x) = \ln(x), \ a = 1, \ b = x, \ \xi \in]1,\infty[$$

$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi) = (\ln(\xi))' = \frac{1}{\xi} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(x)}{x - 1} = \frac{1}{\xi}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{\xi} \ (x - 1)$$

Aufgabe 2

Es gilt

$$f(x) = 3^{x} = e^{x \ln(3)} = (\ln(3))^{0} e^{x \ln(3)}$$

$$f'(x) = \ln(3) e^{x \ln(3)} = (\ln(3))^{1} e^{x \ln(3)}$$

$$f''(x) = (\ln(3))^{2} e^{x \ln(3)}$$

$$f'''(x) = (\ln(3))^{3} e^{x \ln(3)}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (\ln(3))^{n} e^{x \ln(3)}$$

 dann gilt für das Taylorpolynom $\operatorname{T_n}$

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f(x_0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + \ln(3)x + \frac{(\ln(3))^2}{2}x^2 + \frac{(\ln(3))^3}{6}x^3 + \dots + \frac{(\ln(3))^n}{n!}x^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(\ln(3))^k x^k}{k!}$$

und es gilt für das Restglied R_n

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(\ln(3))^{n+1} e^{\ln(3)\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(\ln(3))^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\ln(3)\xi}$$

Betrachtet man das Restglied nun als Folge mit einem festen $x \in]1, \infty[$ und da dann das n gegen ∞ konvergieren als, fällt auf, dass irgendeine Exponentialfunktion durch die "Fakultätsfunktion" geteilt wird. Da die "Fakultätsfunktion" wächst schneller als jede Exponentialfunktion, müsste gelten

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3

a)

Für $x, y > 0, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 \le (x - y)^{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \le x^{2} - 2xy + y^{2}$$

$$\Leftrightarrow 4xy \le x^{2} + 2xy + y^{2}$$

$$\Leftrightarrow xy \le \frac{x^{2} + 2xy + y^{2}}{4} = \frac{(x + y)^{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow (xy)^{\frac{1}{2}} \le \frac{x + y}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln((xy)^{\frac{1}{2}}) \le \ln\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(xy)}{2} = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2} \le \ln\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

b)

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$
, für alle $x \in]-1,1[$

$$y = \operatorname{artanh} x = \operatorname{tanh}^{-1} x$$

$$\operatorname{tanh}^{-1} x = y$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tanh}(\operatorname{tanh}^{-1} x) = \operatorname{tanh} y$$

$$\Leftrightarrow x = \operatorname{tanh} y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x$$

$$\Leftrightarrow (1 - x)e^{2y} = x + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) , \text{ für } -1 < x < 1$$