

Analysis I und Lineare Algebra für  
Ingenieurwissenschaften  
Hausaufgabe 02 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

18. November 2020

**Inhaltsverzeichnis**

<b>Aufgabe 1</b>	<b>2</b>
a) . . . . .	2
b) . . . . .	2
c) . . . . .	3
<b>Aufgabe 2</b>	<b>4</b>
a) . . . . .	4
b) . . . . .	4
<b>Aufgabe 3</b>	<b>5</b>
a) . . . . .	5
b) . . . . .	5
c) . . . . .	5
d) . . . . .	5
<b>Aufgabe 4</b>	<b>5</b>
a) . . . . .	5
b) . . . . .	6
c) . . . . .	6

## Aufgabe 1

a)

Zu zeigen ist

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

IA: Es gilt für  $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1) = (2(1)-1) = 1 = (1)^2$$

IB: Es gelte für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

IV: Damit gilt dann

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Folglich gilt dann für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

b)

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

IA: Es gilt

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > 1$

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

IB: Dann gilt

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{((n+1) - 1)((n+1) + 1)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n(n+2)}{2n(n+1)(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} \end{aligned}$$

Damit gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > 1$

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

c)

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, \text{ gilt } 2^n \geq n^2$$

IA: Es gilt für  $n = 4$

$$\begin{aligned} 2^4 &\geq 4^2 \\ \Leftrightarrow 16 &\geq 16 \end{aligned}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 4$

$$2^n \geq n^2$$

IB: Dann gilt

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned} & 2^{n+1} \geq (n+1)^2 \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 = n^2 + 2n + 1 \\ \Rightarrow & n^2 = 2n + 1 \\ \Leftrightarrow & 0 = n^2 - 2n - 1 \\ \Rightarrow & n_1 = 1 - \sqrt{2} \text{ und } n_2 = 1 + \sqrt{2}, n_i \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & n_1 < 4 \text{ und } n_2 < 4 \text{ (siehe IV.)} \\ \Rightarrow & n^2 > 2n + 1 \\ \Rightarrow & 2 \cdot n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \\ \Rightarrow & 2 \cdot 2^n > (n+1)^2 \\ \Leftrightarrow & 2^{n+1} > (n+1)^2 \end{aligned}$$

Damit gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 4$

$$2^n \geq n^2$$

## Aufgabe 2

**a)**

die Exponentialfunktion ist nicht surjektiv  $\Rightarrow$  eine komposition mit exp ist nicht surjektiv

die Exponentialfunktion ist injektiv  $\Rightarrow$  eine komposition mit exp ist injektiv, wenn die andere funktion injektiv ist

$\Rightarrow f$  ist nur injektiv

**b)**

die Betragsfunktion ist weder injektiv noch surjektiv  $\Rightarrow$  eine komposition mit der Betragsfunktion ist weder injektiv noch surjektiv

$\Rightarrow g$  ist weder injektiv noch surjektiv

### Aufgabe 3

a)

$$D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\}$$

b)

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2)(x) &= \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 - 4 \\ &= \frac{1}{x^6} - 4\end{aligned}$$

$$D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(x) &= \frac{1}{(x^2 - 4)^3} \\ &= \frac{1}{((x - 2)(x + 2))^3}\end{aligned}$$

$$D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

c)

$$f_1^{-1}([0, 12]) = [2, 4]$$

d)

### Aufgabe 4

a)

$$\begin{aligned}y &= \frac{x + 3}{x + 1} \\ \Leftrightarrow y(x + 1) &= x + 3 \\ \Leftrightarrow yx + y &= x + 3 \\ \Leftrightarrow (y - 1)x + y &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3 - y}{y - 1}, y \neq 1\end{aligned}$$

Damit gilt

$$f^{-1}(y) = \frac{3-y}{y-1}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

**b)**

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(y) &= \frac{\left(\frac{3-y}{y-1}\right) + 3}{\left(\frac{3-y}{y-1}\right) + 1} \\ &= \frac{\left(\frac{3-y+3y-3}{y-1}\right)}{\left(\frac{3-y+y-1}{y-1}\right)} \\ &= \frac{\frac{2y}{y-1}}{\frac{2}{y-1}} \\ &= \frac{2y}{y-1} \cdot \frac{y-1}{2} \\ &= y \end{aligned}$$

**c)**