

Analysis I und Lineare Algebra für
Ingenieurwissenschaften
Hausaufgabe 09 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 24, 2020

Contents

1	Aufgabe 1	2
2	Aufgabe 2	2
2.1	a)	2
2.2	b)	3
2.3	c)	4
3	Aufgabe 3	5
4	Aufgabe 4	6
4.1	a)	6
4.2	b)	6
5	Aufgabe 5	7
5.1	a)	7
5.2	b)	7
6	Aufgabe 6	7
6.1	a)	7
6.2	b)	7
7	Aufgabe 7	7
7.1	a)	7
7.2	b)	7

1 Aufgabe 1

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Zu zeigen ist

$$f^{(n)}(x) = n! \left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}} \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA:

Es gilt

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= 0! \left(\frac{1}{(3-x)^{0+1}} + (-1)^0 \frac{1}{(3+x)^{0+1}} \right) \\ &= \frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x} \\ &= \frac{(3+x) + (3-x)}{(3+x)(3-x)} \\ &= \frac{6}{9-x^2} = f(x) \end{aligned}$$

IV:

Es gelte für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = n! \left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}} \right)$$

IS:

Dann gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\
&= \left(n! \left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}} \right) \right)' \\
&= n! \left(\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} \right)' + (-1)^n \left(\frac{1}{(3+x)^{n+1}} \right)' \right) \\
&= n! \left(\left((3-x)^{-(n+1)} \right)' + (-1)^n \left((3+x)^{-(n+1)} \right)' \right) \\
&= n! \left(\left(-(n+1)(3-x)^{-(n+2)}(-1) \right) + (-1)^n \left(-(n+1)(3+x)^{-(n+2)} \right) \right) \\
&= n!(n+1) \left((-1)(3-x)^{-(n+2)}(-1) + (-1)^n (-1)(3+x)^{-(n+2)} \right) \\
&= (n+1)! \left((3-x)^{-(n+2)} + (-1)^{n+1} (3+x)^{-(n+2)} \right) \\
&= (n+1)! \left(\frac{1}{(3-x)^{n+2}} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(3+x)^{n+2}} \right)
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$f^{(n)}(x) = n! \left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}} \right)$$

2.2 b)

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= n! \left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}} \right) \\
&= n! \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right) \\
&= n! \left(\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}3^{n+1}} + \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{3^{n+1}3^{n+1}} \right) \\
&= n! \left(\frac{3^{n+1} + (-1)^n 3^{n+1}}{3^{2n+2}} \right)
\end{aligned}$$

dann gilt für ungerade n

$$f^{(n)}(0) = n! \left(\frac{3^{n+1} - 3^{n+1}}{3^{2n+2}} \right) = 0$$

und für gerade n gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= n! \left(\frac{2 \cdot 3^{n+1}}{3^{2n+2}} \right) \\
&= \frac{2n!}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

Seien $n, n_e, n_o \in \mathbb{N}$ mit $n_o = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $n_e = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
Dann gilt für T_n mit $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n_o} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{2(2k)!}{(2k)! 3^{2k+1}} x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{2x^{2k}}{3^{2k+1}}
\end{aligned}$$

mit dem jeweils entsprechenden Restglied

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{n! \left(\frac{(3+\xi)^{n+1} + (-1)^n (3-\xi)^{n+1}}{(3-\xi)^{n+1} (3+\xi)^{n+1}} \right)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(3+\xi)^{n+1} + (-1)^n (3-\xi)^{n+1}}{(n+1)(3-\xi)^{n+1}(3+\xi)^{n+1}} x^{n+1}
\end{aligned}$$

2.3 c)

Zu zeigen ist für $x \in]-1, 1[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 + \xi)^{n+1} + (-1)^n (3 - \xi)^{n+1}}{(n + 1)(3 - \xi)^{n+1}(3 + \xi)^{n+1}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + (-1)^n 2^{n+1}}{(n + 1)2^{n+1}4^{n+1}} x^{n+1}, \xi = 1 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + (-1)^n 2^{n+1}}{(n + 1)2^{n+1}4^{n+1}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+2} + (-1)^n 2^{n+1}}{(n + 1)2^{n+1}2^{2n+2}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(2^{n+1} + (-1)^n)}{(n + 1)2^{3(n+1)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{(n + 1)2^{2(n+1)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n + 1)2^{2(n+1)}} x^{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1)2^{2(n+1)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n + 1)2^{n+1}} x^{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1)2^{2(n+1)}} x^{n+1} \\
&= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1)2^{2(n+1)}} x^{n+1}
\end{aligned}$$

Der Betrag des Zählers ändert sich nicht. Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1)2^{2(n+1)}} x^{n+1} = 0$$

Damit gilt für $x \in]-1, 1[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

3 Aufgabe 3

Für die n-te Ableitung von f gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n} 5^x = \ln(5) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} 5^x \\
&= (\ln(5))^n 5^x
\end{aligned}$$

damit gilt für dessen Taylorreihe T_n mit $x_0 = 0$

$$T_n(x) = 1 + \frac{\ln(5)x}{1!} + \frac{(\ln(5)x)^2}{2!} + \frac{(\ln(5)x)^3}{3!} + \dots + \frac{(\ln(5)x)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(\ln(5)x)^k}{k!}$$

4 Aufgabe 4

4.1 a)

$$\begin{aligned}\sqrt{4^{3(x-2)}} &= 16^{1-x} \\ \Leftrightarrow 4^{\frac{3}{2}(x-2)} &= (4^2)^{1-x} \\ \Leftrightarrow 4^{\frac{3}{2}(x-2)} &= 4^{2(1-x)} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-2) &= 2(1-x) \\ \Leftrightarrow 3(x-2) &= 4(1-x) \\ \Leftrightarrow 3x-6 &= 4-4x \\ \Leftrightarrow 7x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{10}{7}\end{aligned}$$

4.2 b)

$$\begin{aligned}e^{ix-\ln(2)} + \frac{1}{e^{ix+\ln(2)}} &= 1 \\ \Leftrightarrow e^{ix-\ln(2)} + e^{-ix-\ln(2)} &= 1 \\ \Leftrightarrow e^{ix}e^{-\ln(2)} + e^{-ix}e^{-\ln(2)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{e^{ix}}{2} + \frac{e^{-ix}}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(\cos(x) + i\sin(x)) + (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(x) &= 1 \\ \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

5 Aufgabe 5

5.1 a)

5.2 b)

6 Aufgabe 6

6.1 a)

6.2 b)

7 Aufgabe 7

7.1 a)

7.2 b)