Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Hausaufgabe 09 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 24, 2020

Contents

1 Aufgabe 1

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Zu zeigen ist

$$f^{(n)}(x) = n!\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA:

Es gilt

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= 0!\left(\frac{1}{(3-x)^{0+1}} + (-1)^0 \frac{1}{(3+x)^{0+1}}\right) \\ &= \frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x} \\ &= \frac{(3+x)+(3-x)}{(3+x)(3-x)} \\ &= \frac{6}{9-x^2} = f(x) \end{aligned}$$

IV:

Es gelte für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = n!\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}}\right)$$

IS:

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\
&= \left(n!\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}}\right)\right)' \\
&= n!\left(\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}}\right)' + (-1)^n \left(\frac{1}{(3+x)^{n+1}}\right)'\right) \\
&= n!\left(\left((3-x)^{-(n+1)}\right)' + (-1)^n \left((3+x)^{-(n+1)}\right)'\right) \\
&= n!\left(\left(-(n+1)(3-x)^{-(n+2)}(-1)\right) + (-1)^n \left(-(n+1)(3+x)^{-(n+2)}\right)\right) \\
&= n!(n+1)\left((-1)(3-x)^{-(n+2)}(-1) + (-1)^n(-1)(3+x)^{-(n+2)}\right) \\
&= (n+1)!\left((3-x)^{-(n+2)} + (-1)^{n+1}(3+x)^{-(n+2)}\right) \\
&= (n+1)!\left(\frac{1}{(3-x)^{n+2}} + (-1)^{n+1}\frac{1}{(3+x)^{n+2}}\right)
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
f^{(n)}(x) = n!\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}}\right)
$$

2.2 b)

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= n!\left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}}\right) \\
&= n!\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right) \\
&= n!\left(\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}3^{n+1}} + \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{3^{n+1}3^{n+1}}\right) \\
&= n!\left(\frac{3^{n+1} + (-1)^n 3^{n+1}}{3^{2n+2}}\right)
\end{aligned}
$$

dann gilt für ungerade n

$$
f^{(n)}(0) = n!\left(\frac{3^{n+1} - 3^{n+1}}{3^{2n+2}}\right) = 0
$$

und für gerade n gilt

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= n!\left(\frac{2\cdot 3^{n+1}}{3^{2n+2}}\right)\\
&= \frac{2n!}{3^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Seien $n, n_e, n_o \in \mathbb{N}$ mit $n_o = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $n_e = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
Dann gilt für T_n mit $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} + \sum_{k=0}^{n_o} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} + 0\\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{2(2k)!}{(2k)!3^{2k+1}}x^{2k}\\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{2x^{2k}}{3^{2k+1}}
\end{aligned}
$$

mit dem jeweils entsprechenden Restglied

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\\
&= \frac{(n+1)!\left(\frac{1}{(3-\xi)^{n+2}} + (-1)^{n+1}\frac{1}{(3+\xi)^{n+2}}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\\
&= \frac{(n+1)!\left(\frac{(3+\xi)^{n+2}+(-1)^{n+1}(3-\xi)^{n+1}}{(3-\xi)^{n+2}(3+\xi)^{n+2}}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\\
&= \frac{(3+\xi)^{n+2}+(-1)^{n}(3-\xi)^{n+2}}{(3-\xi)^{n+2}(3+\xi)^{n+2}}x^{n+1}
\end{aligned}
$$

2.3 c)

Zu zeigen ist für $x \in]-1,1[$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} R_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(3+\xi)^{n+2} + (-1)^{n+1}(3-\xi)^{n+2}}{(3-\xi)^{n+2}(3+\xi)^{n+2}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+2} + (-1)^{n+1}2^{n+2}}{2^{n+2}4^{n+2}} x^{n+1}, \xi = 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+2} + (-1)^{n+1}2^{n+2}}{2^{n+2}4^{n+2}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+4} + (-1)^{n+1}2^{n+2}}{2^{n+2}2^{2n+4}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}(2^{n+2} + (-1)^{n+2})}{2^{3(n+2)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2} + (-1)^{n}}{2^{2(n+2)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{2^{2(n+1)}} x^{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{2(n+2)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{2^{n+2}} + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{2^{2(n+2)}} \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

nach $n+2$ -maliger Anwendung der Regel von de l'Hospital.
Damit gilt für $x \in]-1,1[$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

3 Aufgabe 3

Für die n-te Ableitung von f gilt

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n} 5^x = \ln(5) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} 5^x \\
&= (\ln(5))^n 5^x
\end{aligned}
$$

damit gilt für dessen Taylorreihe T_n mit $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= 1 + \frac{\ln(5)x}{1!} + \frac{(\ln(5)x)^2}{2!} + \frac{(\ln(5)x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\ln(5)x)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(5)x)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

mit dessen Restglied

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\
&= \frac{(\ln(5))^{n+1}5^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \\
&= \frac{(\ln(5))^{n+1}5^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{(x\ln(5))^{n+1}5^{\xi}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \frac{(x\ln(5))^{n+1}5^{\xi}}{(n+1)!}$$

Wenn man die Fakultät für alle $n > 1$ betrachtet, wächst diese schneller als jede Exponentialfunktion. Deshalb sollte gelten

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

4 Aufgabe 4

4.1 a)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{4^{3(x-2)}} &= 16^{1-x} \\
\Leftrightarrow 4^{\frac{3}{2}(x-2)} &= (4^2)^{1-x} \\
\Leftrightarrow 4^{\frac{3}{2}(x-2)} &= 4^{2(1-x)} \\
\Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-2) &= 2(1-x) \\
\Leftrightarrow 3(x-2) &= 4(1-x) \\
\Leftrightarrow 3x-6 &= 4-4x \\
\Leftrightarrow 7x &= 10 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{10}{7}
\end{aligned}
$$

4.2 b)

$$\begin{aligned}
e^{ix-\ln(2)} + \frac{1}{e^{ix+\ln(2)}} &= 1 \\
\Leftrightarrow e^{ix-\ln(2)} + e^{-ix-\ln(2)} &= 1 \\
\Leftrightarrow e^{ix}e^{-\ln(2)} + e^{-ix}e^{-\ln(2)} &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{e^{ix}}{2} + \frac{e^{-ix}}{2} &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{(\cos(x) + i\sin(x)) + (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2} &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{(\cos(x) + i\sin(x)) + (\cos(x) - i\sin(x))}{2} &= 1 \\
\Leftrightarrow \cos(x) &= 1 \\
\Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

5 Aufgabe 5

5.1 a)

5.2 b)

6 Aufgabe 6

6.1 a)

6.2 b)

7 Aufgabe 7

7.1 a)

7.2 b)