Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 04 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

August 27, 2020

Contents

1 Aufgabe 1

1.1 a)

$$\begin{aligned} p(z) &= z^2 + 3z - 1 + 2i \\ &= (z^2 - 2z) + (5z - 5) + (4 + 2i) \\ &= 2T_2(z) + 5T_1(z) + (4 + 2i)T_0(z) \end{aligned}$$

1.2 b)

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin(x)\frac{1}{2} + \cos(x)\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Umformung der Regel von T_1:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x_1 - 2x_2 \\ \Leftrightarrow 2x_2 &= 3x_1 \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{3}{2}x_1 \end{aligned}$$

Damit gilt für T_1:

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Damit gelten die Addition und Skalarmultiplikation in T_1. Und daraus folgt:

$$T_1 \subset \mathbb{R}^2$$

Umformung der Regel von T_2:

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 x_2^3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} &= x_2^3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x_1}} &= x_2 \end{aligned}$$

Damit gilt für T_2:

$$T_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x_1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Daraus folgt, dass keiner der Vektoren in T_2 als vielfaches eines anderen Vektors aus T_2 dargestellt werden kann. Ebenso gibt es keine zwei Vektoren $v, w \in T_2, v \neq -w$ für die gilt $v + w \in T_2$.

Daraus folgt:

$$T_2 \not\subset \mathbb{R}^2$$

2.2 b)

$\forall f, g \in T$ gilt $f + g \in T$, da alle f und g an der Stelle $x = -2$ eine Nullstelle besitzen und $f + g$ muss dem zu folge ebenfalls bei $x = -2$ eine Nullstelle besitzen. Analog gilt auch $\forall f \in T$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $\lambda f \in T$. Auch hier hat f eine Nullstelle bei $x = -2$, die bei λf erhalten bleibt.

Also gilt:

$$T \subset V$$

3 Aufgabe 3

3.1 a)

Ansatz zum überprüfen auf lineare Abhänigkeit:

$$
\begin{aligned}
0 &= a_0 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3a_0 \\ 0 \\ 2a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3a_1 \\ 5a_1 \\ 3a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ -a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3(a_0 - a_1) \\ 5a_1 + a_2 \\ 2a_0 + 3a_1 - a_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt $a_0 = a_1$ aus der ersten Komponente, $5a_1 = -a_2$ aus der zweiten Komponente. Die Folgerung aus der dritte Komponente steht im widerspruch zu den ersten beiden, da diese immer ungleich 0 ist, wenn die ersten beiden Komponenten gleich 0 sind.

Damit gilt nur die triviale Lösung $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ und damit sind die Vektoren linear unabhängig.

3.2 b)

Ansatz zum überprüfen auf lineare Abhänigkeit:

$$
\begin{aligned}
0 &= a_1 p_1(z) + a_2 p_2(z) + a_3 p_3(z) + a_4 p_4(z) \\
&= a_1 + a_2(3z - 1) + a_3(z^2 - 1) + a_4(2z^3 - 3z^2) \\
&= a_1 + 3a_2 z - a_2 + a_3 z^2 - a_3 + 2a_4 z^3 - 3a_4 z^2 \\
&= (a_1 - a_2 - a_3) + 3a_2 z + (a_3 - 3a_4) z^2 + 2a_4 z^3
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich durch Koeffizientenvergleich die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\text{(I)}\ 0 &= a_1 - a_2 - a_3 \\
\text{(II)}\ 0 &= 3a_2 \\
\text{(III)}\ 0 &= a_3 - 3a_4 \\
\text{(IV)}\ 0 &= 2a_4
\end{aligned}
$$

Aus II und IV folgen jewals $a_2 = a_4 = 0$. Damit folgt aus III $a_3 = 0$. Und schließlich folgt dann aus I $a_1 = 0$.

Damit ist die triviale Lösung $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ die einzige Lösung und damit sind die Polynome/Vektoren linear unabhängig.

3.3 c)

Ansatz zum überprüfen auf lineare Abhänigkeit:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \\ &= a_1 \sin(x) + a_2 \sin(4x) \end{aligned}$$

Es gibt neben der trivialen Lösung $a_1 = a_2 = 0$ gibt es keine weiteren Lösungen für die gilt:

$$\forall x, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, 0 = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(4x)$$

Damit sind f_1 und f_2 linear unabhängig.

4 Aufgabe 4

4.1 a)

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ ist kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$, da die span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist. Man kann mit Leichtigkeit ein Element in $\mathbb{R}^2$ finden, welches nicht in der Span enthalten ist.

Man überprüfe, ob sich der Beispielvektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ in der Span enthalten ist

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} &= r \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ -2r \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow 0 &= \begin{bmatrix} r - 2 \\ -2r - 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aus der ersten Komponente würde folgen $r = 2$ und aus der zweiten folgt $r = -1$, was ein widerspruch ist. Daraus folgt $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \notin \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$, aber $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

4.2 b)

Die Erzeugendensysteme $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ sind die einzigen Basen, bei denen die beiden Vektoren voneinander linear unabhängig sind.

4.3 c)

Ansatz für E_1:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ -2a_2 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow 0 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ -2a_2 - 1 \end{bmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen:

$$\text{(I) } 0 = a_1 + a_2$$
$$\text{(II) } 0 = -2a_2 - 1$$

Aus II folgt $a_2 = \frac{-1}{2}$ und damit folgt aus I $a_1 = \frac{1}{2}$. Der Koordinatenvektor ist damit $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ für E_1.

Ansatz für E_2:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - 2a_2 \\ 4a_2 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow 0 = \begin{bmatrix} a_1 - 2a_2 \\ 4a_2 - 1 \end{bmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen:

$$\text{(I) } 0 = a_1 - 2a_2$$
$$\text{(II) } 0 = 4a_2 - 1$$

Aus II folgt $a_2 = \frac{1}{4}$ und damit folgt aus I $a_1 = \frac{1}{2}$. Der Koordinatenvektor ist damit $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ für E_2.

5 Aufgabe 5

5.1 a)

$$A \in \mathbb{C}^{1,2}, B \in \mathbb{R}^{2,2}, C \in \mathbb{R}^{2,2}, D \in \mathbb{C}^{1,2}$$

Addition $B + C$ und $A + D$ sind möglich, da diese das gleiche Format besitzen.

$$\begin{aligned} A + D &= \begin{bmatrix} -i & 2+i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12-i & -4+2i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -i+12-i & 2+i+(-4)+2i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12-2i & -2+3i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B + C &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.2 b)

$$A \in \mathbb{C}^{1,2}, B \in \mathbb{C}^{2,2}, C \in \mathbb{C}^{3,2}, D \in \mathbb{C}^{3,3}$$

Multiplikation von $A \cdot B$, $C \cdot B$ und $D \cdot C$ ist möglich, da die Spaltenzahl vom erst genannten mit der Zeilenanzahl vom zweiten übereinstimmt.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1)(1)+(-2i)(i) & (1)(1-i)+(-2i)(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1-i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \cdot B &= \begin{bmatrix} 2-i & 3i \\ 0 & i \\ 2+3i & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2-i)(1)+(3i)(i) & (2-i)(1-i)+(3i)(0) \\ (0)(1)+(i)(i) & (0)(1-i)+(i)(0) \\ (2+3i)(1)+(41)(i) & (2+3i)(1-i)+(41)(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1-i & 1-3i \\ -1 & 0 \\ 2+44i & 5+i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D \cdot C &= \begin{bmatrix} 1-i & 2 & -2-3i \\ -1-3i & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-i & 3i \\ 0 & i \\ 2+3i & 41 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-i)(2-i)+(2)(0)+(-2-3i)(2+3i) & (1-i)(3i)+(2)(i)+(-2-3i)(41) \\ (-1-3i)(2-i)+(0)(0)+(-1)(2+3i) & (-1-3i)(3i)+(0)(i)+(-1)(41) \\ 0 & i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2-i-2i-1)+0+(-4-6i-6i+9) & (3i+3)+(2i)+(-82-123i) \\ (-2+i-6i-3)+0+(-2-3i) & (-3i+9)+0-41 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6-15i & -79-118i \\ -7-8i & -32-3i \\ 0 & i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

6 Aufgabe 6

6.1 a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.2 b)

Alle $A^n, n > 2$ sind Nullmatritzen.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim(B) = 4$