Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 02

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

August 19, 2020

Contents

1 Aufgabe 1

1.1 a)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

IA: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$
$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$$
$$= 1$$
$$= 1^2$$

IV: Es gelte für ein beliebiges n $\in \mathbb{N}$ mit n > 0

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

IB: Dann gilt

$$\sum k = 1^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

IS: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3(n+1)(2n+2)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3(n+1)(2n+1) + 3(n+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)(2n+1) + (n+1)(2n+1) + 3(n+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)(2n+1) + (n+1)(2n+4)}{6}$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)(2n+1) + 2(n+1)(n+2)}{6}$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6}$$

Damit gilt für alle n $\in \mathbb{N}$ mit n > 0

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.2 b)

$$\prod_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

IA: Es gilt

$$\prod_{k=2}^{2} 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{2+1}{4}$$
$$= \frac{3}{4}$$
$$= 1 - \frac{1}{4}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges n $\in \mathbb{N}$ mit n > 1

$$\prod_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{n+1}{2n}$$

IB: Dann gilt

$$\prod_{k=2}^{n+1} 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

IS: Es gilt

$$\prod_{k=2}^{n+1} 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{k^2} \cdot (1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n} \cdot (1 - \frac{1}{(n+1)^2})$$

$$= \frac{n+1}{2n} \cdot (\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2})$$

$$= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{((n+1)-1)((n+1)+1)}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot n(n+2)}{2n(n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Damit gilt für alle n $\in \mathbb{N}$ mit n > 1

$$\prod_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{n+1}{2n}$$

1.3 c)

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$, n ≥ 4, gilt $2^{\mathrm{n}} \geq \mathrm{n}^2$

IA: Es gilt für n $= 4$

$$2^4 \geq 4^2$$

$$\Leftrightarrow 16 \geq 16$$

IV: Es gelte für ein beliebiges n $\in \mathbb{N}$ mit n ≥ 4

$$2^n \geq n^2$$

IB: Dann gilt

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

IS: Es gilt

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = n^2 - 2n - 1$$

$$\Rightarrow n_1 = 1 - \sqrt{2} \wedge n_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow n_1 < 4 \wedge n_2 < 4$$

$$\Rightarrow n^2 > 2n + 1$$

$$\Rightarrow 2 \cdot n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^n > (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2$$

Damit gilt ∀ n ∈ ℕ mit n ≥ 4

$$2^n \geq n^2$$

2 Aufgabe 2

D(f) := "Definitionsbereich von f"
U(f) := "Inverse von f"
$(f_1 \circ f_2)(x) := f_2(f_1(x))$

2.1 a)

$D(f_1) = \mathbb{R}$
$D(f_2) = \mathbb{R} \setminus$ {-1}

2.2 b)

$$(f_1 \circ f_2)(x)$$

$$= f_1(f_2(x))$$

$$= f_1(\frac{1}{x+1})$$

$$= \frac{1}{(x+1)^4} - 1$$

$D(f_1 \circ f_2) = \mathbb{R} \setminus$ {-1}

$$(f_2 \circ f_1)(x)$$
$$= f_2(f_1(x))$$
$$= f_2(x^4 - 1)$$
$$= \frac{1}{x^4}$$

$D(f_2 \circ f_1) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.3 c)

U(f_1)(]0, 15])
= [-2, -1[$\cup$]1, 2]

2.4 d)

f_1 ist nach unten beschränkt mit m = -1.
f_1 ist nicht nach oben beschränkt.

3 Aufgabe 3

3.1 a)

f(x) = y = $\frac{2x+3}{x+2}$
Beim Inversen von f gilt:

$$x = \frac{2y+3}{y+2}$$
$$\Leftrightarrow x(y+2) = 2y+3$$
$$\Leftrightarrow xy + 2x = 2y + 3$$
$$\Leftrightarrow xy - 2y = 3 - 2x$$
$$\Leftrightarrow y(x-2) = 3 - 2x$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{3-2x}{x-2}$$

$\Rightarrow$ U(f)(x) = y = $\frac{3-2x}{x-2}$, x ungleich 2
$D_{U(f)} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

3.2 b)

$$
\begin{aligned}
(f \circ U(f))(y) &= f(\frac{3-2y}{y-2}) \\
&= \frac{\frac{2(3-2y)}{y-2}+3}{\frac{3-2y}{y-2}+2} \\
&= \frac{\frac{2(3-2y)+3(y-2)}{y-2}}{\frac{3-2y}{y-2}+2} \\
&= \frac{\frac{6-4y+3y-6}{y-2}}{\frac{3-2y}{y-2}+2} \\
&= \frac{\frac{-y}{y-2}}{\frac{3-2y}{y-2}+2} \\
&= \frac{\frac{-y}{y-2}}{\frac{3-2y+2(y-2)}{y-2}} \\
&= \frac{\frac{-y}{y-2}}{\frac{-1}{y-2}} \\
&= y
\end{aligned}
$$

3.3 c)

Sei h $\in \mathbb{R}$, h $>$ 0, h ist sehr klein

Es gilt für den Nenner:

$$(-2+h)+2>0$$

Daraus folgt für den Zähler:

$$2(-2+h)+3<0$$

$$\Rightarrow f(-2+h)<0$$

Es gilt für den Zähler:

$$2x+3=0 \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

Daraus folgt für den Nenner:

$$\frac{3}{2} + 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow f(\frac{3}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow -2 + h < \frac{3}{2} \wedge f(-2 + h) < f(\frac{3}{2})$$

$\Rightarrow$ f ist monoton wachsend

4 Aufgabe 4

4.1 a)

$$\exp(x^2 - 9) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \exp(x^2 - 9) = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 0$$

nach $\exp(0) = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$\Rightarrow x = -3 \wedge x = 3$$

4.2 b)

$$f_2(x) = \ln \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$$

$$= \ln \frac{(x - 3)(x - 1)}{(x - 2)(x - 4)}$$

$$=> x \neq 2 \wedge x \neq 4$$

Im folgenden wird untersucht, wann der Funktionswerte Beträge annehmen, die größer als 0 sind:

Für Nenner:

Fall 1 (>0):

$$x - 2 > 0 \wedge x - 4 > 0$$

$$\Rightarrow x > 2 \wedge x > 4$$

$$\Rightarrow I_1 =]4, \infty[$$

Fall 2 (>0):

$$\begin{aligned} x-2<0 \land x-4<0 \\ \Rightarrow x<2 \land x<4 \\ \Rightarrow I_2 =]-\infty, 2[\end{aligned}$$

Fall 3 (<0):

$$\begin{aligned} x-2<0 \lor x-4<0 \\ \Rightarrow x<2 \lor x<4 \\ \Rightarrow I_3 =]2, 4[\end{aligned}$$

Für Zähler:
Fall 1 (>0):

$$\begin{aligned} x-3>0 \land x-1>0 \\ \Rightarrow x>3 \land x>1 \\ \Rightarrow I_4 =]3, \infty[\end{aligned}$$

Fall 2 (>0):

$$\begin{aligned} x-3<0 \land x-1<0 \\ \Rightarrow x<3 \land x<1 \\ \Rightarrow I_5 =]-\infty, 1[\end{aligned}$$

Fall 3 (<0):

$$\begin{aligned} x-3<0 \lor x-1<0 \\ \Rightarrow x<3 \lor x<1 \\ \Rightarrow I_6 =]1, 3[\end{aligned}$$

Nenner und Zähler sind > 0:

$$\begin{aligned} L_1 &= (I_1 \cap I_4) \cup (I_2 \cap I_5) \\ &=]-\infty, 1[\cup]4, \infty[\end{aligned}$$

Nenner und Zähler sind < 0:

$$\begin{aligned} L_2 &= I_3 \cap I_6 \\ &=]2, 3[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(f_2) &= L_1 \cup L_2 \\ &=]-\infty, 1[\cup]2, 3[\cup]4, \infty[\\ &= \mathbb{R}\ ([1, 2] \cup [3, 4]) \end{aligned}$$

4.3 c)

Sinus und Cosinus sind beschränkt auf Werte im Intervall [-1, 1]
$\Rightarrow$ der Betrag des Produkts kann auch nur höchstens 1 sein
f3(-x)
= cos(-x) sin(-x) "Sinus ist ungerade und Cosinus ist gerade"
= cos(x) (-sin(x))
= -(cos(x) sin(x))
= -f3(x)
$\Rightarrow$ f3 ist ungerade

5 Aufgabe 5

5.1 a)

$$\sin 2x = \sin x + x$$
$$= \sin x \cos x + \cos x \sin x$$
$$= 2 \sin x \cos x$$

5.2 b)

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$