

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 07 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 16, 2020

Contents

1	Aufgabe 1	2
1.1	a)	2
1.2	b)	2
1.3	c)	2
2	Aufgabe 2	3
2.1	a)	3
2.2	b)	4
3	Aufgabe 3	5
3.1	a)	5
3.2	b)	5
4	Aufgabe 4	5
4.1	a)	5
4.2	b)	6
4.2.1	(a)	6
4.2.2	(b)	6
4.2.3	(c)	6
4.2.4	(d)	6
5	Aufgabe 5	7
6	Aufgabe 6	8
6.1	a)	8
6.2	b)	8

1 Aufgabe 1

1.1 a)

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{b} + \frac{1}{g} &= \frac{1}{f} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{b} &= \frac{g-f}{fg} \\ \Leftrightarrow b &= \frac{fg}{g-f}\end{aligned}$$

Damit ist b betrachtet als Funktion

$$b(g) = \frac{fg}{g-f}$$

1.2 b)

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$ gilt, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(x_n) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot f}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - f} = \frac{af}{a-f} = b(a)$$

daraus folgt $b(g)$ ist stetig auf $D(b) = \mathbb{R} \setminus \{f\}$.

1.3 c)

Es gilt für den ersten Term

$$\begin{aligned}\lim_{g \rightarrow \infty} b(g) &= \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{fg}{g-f} \\ &= \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{f}{1 - \frac{f}{g}} \\ &= \frac{f}{1-0} \\ &= f\end{aligned}$$

Es gilt für den zweiten Term

$$\begin{aligned}
 \lim_{g \rightarrow f} b(g) &= \lim_{g \rightarrow f} \frac{fg}{g-f} \\
 &= \frac{\lim_{g \rightarrow f} fg}{\lim_{g \rightarrow f} (g-f)} \\
 &= \frac{f^2}{f-f} \\
 &\Rightarrow \lim_{g \rightarrow f} b(g) = \infty
 \end{aligned}$$

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$ gelten,
dann gilt für $x < 1$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(x_n \pi) + 3) \\
 &= \cos(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \pi) + 3 \\
 &= \cos(a\pi) + 3 = f(a)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ stetig auf $] -\infty, 1[$

und für $x > 1$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n^2 + 1}{x_n + 1} \right) \\
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^2 + 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) + 1} \\
 &= \frac{a^2 + 1}{a + 1} = f(a)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ stetig auf $]1, \infty[$

Zu überprüfen ist noch die Stelle $x = 1$

Es gilt für $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (\cos(\pi x) + 3) \\
 &= \cos(\pi) + 3 = -1 + 3 = 2
 \end{aligned}$$

und es gilt für $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x + 1} \\ &= \frac{1^2 + 1}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

daraus folgt, dass f an der Stelle $x = 1$ nicht stetig ist.

Damit ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig.

2.2 b)

Der linearaffine Anteil von f muss die anderen Terme an den jeweiligen Grenzen berühren.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}f(-1) &= \frac{1}{-1} = -1 \\ f(2) &= \ln(2)\end{aligned}$$

dann die folgenden Punkte $P_1(-1, -1)$ und $P_2(2, \ln(2))$.

Daraus ergeben sich dann folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}a &= \frac{\ln(2) - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{\ln(2) + 1}{3} \\ b &= f(-1) - a(-1) = \frac{\ln(2) + 1}{3} - 1\end{aligned}$$

f ist dann auf \mathbb{R} stetig, wenn der linearaffine Anteil dem folgenden Term entspricht

$$\frac{\ln(2) + 1}{3}x + \frac{\ln(2) + 1}{3} - 1$$

3 Aufgabe 3

3.1 a)

Es gelten

$$\begin{aligned}f(1) &= 1^6 - 1 - 1 = -1 \text{ und} \\f(2) &= 2^6 - 2 - 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 1 \\&= 64 - 2 - 1 = 61\end{aligned}$$

Da f stetig ist und $f(1) < 0$ und $f(2) > 0$ gelten, muss f auf dem Intervall $[1, 2]$ eine Nullstelle besitzen.

3.2 b)

$$a_0 = 1, b_0 = 2$$

$$x_k = \frac{a + b}{2}$$

$$x_0 = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 1 \\&= \frac{729}{64} - \frac{3}{2} - 1 > 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_1 = 1, b_1 = \frac{3}{2}$$

\vdots

$$a_6 = \frac{9}{8} = 1,125; b_6 = \frac{73}{64} = 1,1406$$

Das Intervall ist dann $[1,125; 1,1406]$.

4 Aufgabe 4

4.1 a)

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\&= \frac{x - x_0}{(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})(x - x_0)} \\&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

damit gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

daraus folgt

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4.2 b)

4.2.1 (a)

$$\begin{aligned}(5x^3 - 2\sin(3x))' &= (5x^3)' - (2\sin(3x))' \\ &= 15x^2 - 6\cos(3x)\end{aligned}$$

4.2.2 (b)

$$(\cos(x)e^x)' = \cos(x)e^x - \sin(x)e^x$$

4.2.3 (c)

$$(e^{2x^2+11} + 7)' = e^{2x^2+11}(4x)$$

4.2.4 (d)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin(x^2 - 2\pi)}{\cos(3\pi - x^2)}\right)' &= \frac{2x \cos(x^2 - 2\pi) \cos(3\pi - x^2) - \sin(x^2 - 2\pi)(-\sin(3\pi - x^2)(-2x))}{\cos^2(3\pi - x^2)} \\ &= \frac{2x(\cos(x^2 - 2\pi) \cos(3\pi - x^2) - \sin(x^2 - 2\pi) \sin(3\pi - x^2))}{\cos^2(3\pi - x^2)} \\ &= \frac{2x \cos((x^2 - 2\pi) + (3\pi - x^2))}{\cos^2(3\pi - x^2)} \\ &= \frac{2x \cos(\pi)}{\cos^2(3\pi - x^2)} \\ &= \frac{-2x}{\cos^2(\pi - x^2)}\end{aligned}$$

5 Aufgabe 5

Für die 1. Ableitung von f gilt

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$$

dann gilt für eine beliebige Tangente $t(x) = ax + b$ am Graphen von f

$$a = f'(x_0) = -\frac{2}{(x_0-2)^2}$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = \frac{2}{x_0-2} + 2 + \frac{2x_0}{(x_0-2)^2}$$

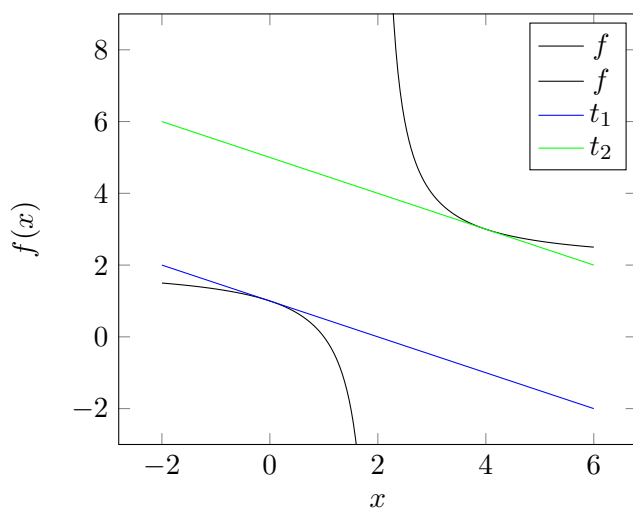
mit der Anforderung, dass $a = -\frac{1}{2}$ sein muss. Damit gilt

$$\begin{aligned} a &= -\frac{2}{(x_0-2)^2} = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(x_0-2)^2}{2} &= 2 \\ \Leftrightarrow (x_0-2)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x_0-2 &= \pm 2 \end{aligned}$$

daraus ergeben sich die beiden Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$. Daraus folgen dann die beiden Tangenten

$$t_1(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$t_2(x) = -\frac{1}{2}x + 5$$



6 Aufgabe 6

6.1 a)

6.2 b)