Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 02 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

25. November 2020

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a)

Zu zeigen ist

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

IA: Es gilt für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = (2(1)-1) = 1 = (1)^2$$

IV: Es gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

IB: Damit gilt dann

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\end{aligned}$$

Folglich gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

b)

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

IA: Es gilt

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges n $\in \mathbb{N}$ mit n > 1

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

IB: Dann gilt

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{((n+1)-1)((n+1)+1)}{(n+1)^2}\\
&= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\\
&= \frac{(n+1)\cdot n(n+2)}{2n(n+1)(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle n $\in \mathbb{N}$ mit n > 1

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

c)

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4,\ \text{gilt } 2^n\geq n^2$$

IA: Es gilt für n $= 4$

$$\begin{aligned}
&2^4 \geq 4^2\\
\Leftrightarrow\ &16\geq 16
\end{aligned}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit n ≥ 4

$$2^n\geq n^2$$

IB: Dann gilt

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &\geq (n+1)^2 \\
\Leftrightarrow 2 \cdot 2^n &\geq 2 \cdot n^2 = n^2 + 2n + 1 \\
\Rightarrow n^2 &= 2n + 1 \\
\Leftrightarrow 0 &= n^2 - 2n - 1 \\
\Rightarrow n_1 &= 1 - \sqrt{2} \text{ und } n_2 = 1 + \sqrt{2}, n_i \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow n_1 &< 4 \text{ und } n_2 < 4 \text{ (siehe IV.)} \\
\Rightarrow n^2 &> 2n + 1 \\
\Rightarrow 2 \cdot n^2 &> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \\
\Rightarrow 2 \cdot 2^n &> (n+1)^2 \\
\Leftrightarrow 2^{n+1} &> (n+1)^2
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit n ≥ 4

$$2^n \geq n^2$$

Für $n = 0, 1, 2, 3$ gilt jewals

$$\begin{aligned}
2^0 > (0)^2 &\Leftrightarrow 1 > 0 \\
2^1 > (1)^2 &\Leftrightarrow 2 > 1 \\
2^2 = (2)^2 &\Leftrightarrow 4 = 4 \\
2^3 < (3)^2 &\Leftrightarrow 8 < 9
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

f ist streng monoton fallend
$\Rightarrow f$ ist injektiv

exp nur injektiv auf $\mathbb{R}$, $(\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[, x \mapsto e^x)$
$\Rightarrow f$ ist nur injektiv

b)

Da gilt $|-x|^5 = |x|^5$, folgt daraus, dass g nicht injektiv ist.
Des weiteren ist g nach unten beschränkt ($g(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$),

daraus folgt, dass g nicht surjektiv.
Damit ist g weder injektiv noch surjektiv.

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned} D_{f_3} &= \mathbb{R} \setminus \{\, x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0 \,\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2)(x) &= \left(\frac{1}{x^3} \right)^2 - 4 \\ &= \frac{1}{x^6} - 4 \end{aligned}$$

$$D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(x) &= \frac{1}{(x^2-4)^3} \\ &= \frac{1}{((x-2)(x+2))^3} \end{aligned}$$

$$D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

c)

$$f_1^{-1}([0,12]) = [2,4]$$

d)

Behauptung 1: f_1 ist gerade

Zu zeigen ist: $f_1(-x) = f_1(x)$
Es gilt

$$\begin{aligned} f_1(-x) &= (-x)^2 - 4 \\ &= (-1)^2 x^2 - 4 \\ &= x^2 - 4 = f_1(x) \end{aligned}$$

Damit ist f_1 gerade.

Behauptung 2: f_3 ist gerade

Zu zeigen ist: $f_3(-x) = f_3(x)$
Es gilt

$$\begin{aligned} f_3(-x) &= \frac{\sin((-x)^2)}{\cos(-x)} \\ &= \frac{\sin((-1)^2 x^2)}{\cos(x)} \\ &= \frac{\sin(x^2)}{\cos(x)} = f_3(x) \end{aligned}$$

Damit ist auch f_3 gerade.

Aufgabe 4

a)

Es gilt

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+3}{x+1} \\ \Leftrightarrow y(x+1) &= x+3 \\ \Leftrightarrow yx + y &= x+3 \\ \Leftrightarrow (y-1)x + y &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3-y}{y-1}, y \neq 1 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \frac{3-y}{y-1} \\ D_{f^{-1}} &= \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(y) &= \frac{\left(\frac{3-y}{y-1}\right) + 3}{\left(\frac{3-y}{y-1}\right) + 1} \\
&= \frac{\left(\frac{3-y+3y-3}{y-1}\right)}{\left(\frac{3-y+y-1}{y-1}\right)} \\
&= \frac{\frac{2y}{y-1}}{\frac{2}{y-1}} \\
&= \frac{2y}{y-1} \cdot \frac{y-1}{2} \\
&= y
\end{aligned}
$$

c)

Behauptung: f ist auf $]-1,\infty[$ monoton fallend

Zu zeigen ist $f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1, x_2 \in]-1,\infty[$ mit $x_1 < x_2$

Es gelte $f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1, x_2 \in]-1,\infty[$
dann gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1+3}{x_1+1} &> \frac{x_2+3}{x_2+1} \\
\Leftrightarrow (x_1+3)(x_2+1) &> (x_2+3)(x_1+1) \\
\Leftrightarrow x_1x_2 + x_1 + 3x_2 + 3 &> x_1x_2 + x_2 + 3x_1 + 3 \\
\Leftrightarrow x_1 + 3x_2 &> x_2 + 3x_1 \\
\Leftrightarrow 2x_2 &> 2x_1 \\
\Leftrightarrow x_2 &> x_1 \Leftrightarrow x_1 < x_2
\end{aligned}
$$

da gilt $x_1 < x_2$ und es gilt $f(x_1) > f(x_2)$, woraus folgt, dass f auf $]-1,\infty[$ monoton fallend ist.