Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 08 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

21. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1 2

Aufgabe 2 2

Aufgabe 3 3

Aufgabe 4 4

Aufgabe 1

Zeige, dass $|\tan(x)+\tan(y)| \geq |x+y|$ für alle $x, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$
\begin{aligned}
\frac{|\tan(x)+\tan(y)|}{|x+y|} &= f'(\varepsilon) = \frac{1}{\cos(\varepsilon)^2} \\
\Leftrightarrow \frac{|\tan(x)+\tan(y)|}{|x+y|} &= \frac{1}{\cos(\varepsilon)^2} \\
\Leftrightarrow |\tan(x)+\tan(y)| &= (|x+y|)\left(\frac{1}{\cos(\varepsilon)^2}\right) \\
\Leftrightarrow |\tan(x)+\tan(y)| &= \frac{|x+y|}{\cos(\varepsilon)^2}
\end{aligned}
$$

$\cos(\varepsilon)^2$ auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\geq 0$, also

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(\varepsilon)^2} &\geq 1 \\
\Leftrightarrow \frac{|x+y|}{\cos(\varepsilon)^2} &\geq |x+y| \\
\Leftrightarrow |\tan(x)+\tan(y)| &\geq |x+y|
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Es gilt

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\leq |x-y|^2 \\
\Leftrightarrow \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} &\leq |x-y|
\end{aligned}
$$

Die Funktion f muss zumindest einmal differenzierbar sein, dann gilt mit $\xi \in]y, x[$

$$
|f'(\xi)| \leq |x-y|
$$

Behauptung: $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Dann gilt

$$|f'(\xi)| = |0| = 0 \leq |x-y|$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |f(x)-f(x)|\\ &= |0| = 0\\ &\leq |x-y|^2\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Berechne für $f(x) = \sqrt{2+x}, T_2(x)$ und $T_4(x)$ mit $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{2+x}\\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2+x}}\\ f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{2+x}^3}\\ f'''(x) &= \frac{3}{8\sqrt{2+x}^5}\\ f^4(x) &= \frac{15}{16\sqrt{2+x}^7}\\ \Rightarrow f^{(n)}(x) &= (-1)^n \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \cdot (x+2)^{\frac{1}{2}-n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_2(x) &= \sqrt{2} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1}x - \frac{\frac{1}{8\sqrt{2}^3}}{2!}x^2\\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{16\sqrt{2}}x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_4(x) &= T_2(x) + \frac{\frac{3}{8\sqrt{2}^5}}{3!}x^3 - \frac{\frac{15}{16\sqrt{2}^7}}{4!}x^4\\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{8\sqrt{2}}x^2 + \frac{1}{64\sqrt{2}}x^3 - \frac{5}{1024\sqrt{2}}x^4\end{aligned}$$

Abschätzen des $R_2(x)$,für $|x| < \frac{1}{2}$

$|R_2(x)| = \left| \frac{\frac{3}{8\sqrt{\varepsilon+2}^5}}{3!} x^3 \right| = \left| \frac{1}{16\sqrt{\varepsilon+2}^5} \right| \cdot |x|^3$
Es gilt mit $\varepsilon + 2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon+2} < 2$
$\Rightarrow \left| \frac{1}{16\sqrt{\varepsilon+2}^5} \right| \cdot |x|^3 < \frac{1}{16} \cdot \sqrt{2}^5 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{32} \approx 0.0442$

Aufgabe 4

Es gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \cos(x) \\
f'(x) &= e^x \cos(x) - e^x \sin(x) \\
&= e^x(\cos(x) - \sin(x)) \\
f''(x) &= e^x(\cos(x) - \sin(x)) + e^x(-\sin(x) - \cos(x)) \\
&= -2e^x \sin(x) \\
f'''(x) &= -2e^x \sin(x) - 2e^x \cos(x) \\
&= -2e^x(\cos(x) + \sin(x)) \\
f''''(x) &= -2e^x(\cos(x) + \sin(x)) - 2e^x(-\sin(x) + \cos(x)) \\
&= -4e^x \cos(x)
\end{aligned}$$

desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= 1 \\
f''(0) &= 0 \\
f'''(0) &= -2
\end{aligned}$$

dann gilt für T_3

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 \\
&= 1 + x + 0 \cdot x^2 + (-\frac{1}{3})x^3 \\
&= 1 + x - \frac{1}{3}x^3
\end{aligned}$$

dann gilt für Restglied R_3

$$R_3(x) = \frac{f''''(\xi)}{4!}x^4 = \frac{-4e^\xi \cos(\xi)}{4!}x^4 = \frac{-e^\xi \cos(\xi)}{3!}x^4$$

dann gilt mit $|x| = 10^{-2}$

$$
\begin{aligned}
|R_3(x)| &\leq 10^{-8} \\
\Leftrightarrow \left|\frac{-e^{\xi}\cos(\xi)}{3!}x^4\right| &\leq 10^{-8} \\
\Leftrightarrow \left|\frac{-e^{\xi}\cos(\xi)}{3!}\right||x^4| &\leq 10^{-8} \\
\Leftrightarrow \left|\frac{-e^{\xi}\cos(\xi)}{3!}\right||x|^4 &\leq 10^{-8} \\
\Leftrightarrow \left|\frac{-e^{\xi}\cos(\xi)}{3!}\right|(10^{-2})^4 &\leq 10^{-8} \\
\Leftrightarrow \left|\frac{-e^{\xi}\cos(\xi)}{3!}\right| &\leq 1 \\
\Leftrightarrow \frac{e^{\xi}\cos(\xi)}{3!} &\leq 1 \\
\Leftrightarrow e^{\xi}\cos(\xi) &\leq 6
\end{aligned}
$$

das gilt für alle $\xi \in]-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}[\backslash\{0\}$. Daraus folgt

$$\forall x \in [-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}], |R_3(x)| \leq 10^{-8}$$