Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 05 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

16. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a)

Es gilt

$$
\begin{aligned}
[A|b] &= \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2i & 0 & 2 & -4 \\ -4 & 4i & -i & 7 & -8 \\ 1 & i & 2 & -1 & 4 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2i & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -i & 3 & 0 \\ 1 & i & 2 & -1 & 4 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{2\text{III}+\text{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2i & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -i & 3 & 0 \\ 0 & 4i & 4 & 0 & 4 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2i & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 4i & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -i & 3 & 0 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{\text{II}-4i\text{III}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2i & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 4i & 0 & -12i & 4 \\ 0 & 0 & -i & 3 & 0 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{\text{I}-\frac{1}{2}\text{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 2+6i & -6 \\ 0 & 2i & 0 & -6i & 2 \\ 0 & 0 & -i & 3 & 0 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{\frac{-1}{2}\text{I},\frac{-i}{2}\text{II},i\text{III}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-3i & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & i \\ 0 & 0 & 1 & 3i & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

b)

Aus dem LGS aus a) folgt mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
\text{(I) } 0 &= x_1 + (-1-3i)x_4 \Rightarrow x_1 = (1+3i)x_4 \\
\text{(II) } 0 &= x_2 - 3x_4 \Rightarrow x_2 = 3x_4 \\
\text{(III) } 0 &= x_3 + 3ix_4 \Rightarrow x_3 = -3ix_4
\end{aligned}
$$

damit gilt dann für den Kern(A)

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(A) &= \left\{ \begin{bmatrix} (1+3i)z \\ 3z \\ -3iz \\ z \end{bmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1+3i \\ 3 \\ -3i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathbb{L}(A, 0)\end{aligned}$$

c)

Es gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1-3i \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vergleiche mit dem LGS aus a)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{L}(A, b)$$

desweiteren gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1-3i \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vergleiche mit dem LGS aus a)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbb{L}(A, b)$$

d)

aus b):

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} (1+3i)t \\ 3t \\ 3it \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{C} \right\}$$

aus c):

$$\mathbb{L}(A,b) = \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{L}(A,0)$$

Aufgabe 2

a)

$\mathrm{Rang}(A_1) = 3$, $\mathrm{Rang}(A_2) = 3$, $\mathrm{Rang}(A_3) = 2$, $\mathrm{Rang}(A_4) = 2$

b)

$$A_1 : \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \neq B(A_1)$$

da:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 : \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = B(A_2)$$

da:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 : \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \neq B(A_3)$$

da:

$$\begin{bmatrix}12\\0\end{bmatrix} = \frac{12}{11}\begin{bmatrix}11\\0\end{bmatrix}$$

$$A_4 : \text{span}\left\{\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\right\} = B(A_3)$$

da:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} \neq \lambda_2 \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

c)

allg: $\dim(\text{Kern}(A)) = n - r = n - \text{Rang}(A)$

$$\dim(\text{Kern}(A_1)) = 4 - 3 = 1$$

$$\dim(\text{Kern}(A_2)) = 3 - 3 = 0$$

d)

$$\begin{bmatrix}3 & 4\\0 & 2\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow K_B(A_4) = \begin{bmatrix}6\\2\\3\\0\end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

Gegeben seien

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2, \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}ia+b\\2ic\end{bmatrix}, g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2, \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}a\\c+1\end{bmatrix}$$

a)

f:

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \in \mathbb{C}^3, \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix}, \overrightarrow{w} = \begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}$$

$$f(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = f\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} i(a_1+a_2)+b_1+b_2 \\ 2i(c_1+c_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ia_1+b_1 \\ 2ic_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ia_2+b_2 \\ 2ic_2 \end{bmatrix}$$
$$= f(\overrightarrow{v}) + f(\overrightarrow{w})$$

$\Rightarrow$ f ist geschlossen in Addition

$$\lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda\overrightarrow{v}) = f\left(\lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda i a_1 + \lambda b_1 \\ \lambda 2ic_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(ia_1+b_1) \\ \lambda 2ic_1 \end{bmatrix}$$
$$= \lambda f(\overrightarrow{v})$$

$\Rightarrow$ f ist homogen

$\Rightarrow$ f ist additiv und homogen $\Rightarrow$ f ist linear

g:

$$\lambda \in \mathbb{R}, g(\lambda\overrightarrow{v}) = g\left(\lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda c_1 + 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda(c_1+1) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ c_1+1 \end{bmatrix} = \lambda g(\overrightarrow{v})$$

$\Rightarrow$ nicht homogen

$\Rightarrow$ g ist nicht linear

b)

$$f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ für alle } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

$$f : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ia+b \\ 2ic \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2i$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}$$

c)

Kern(f) = Kern(A) Also:

$$\text{Kern}(A) : A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-i\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}i\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_1 = it, x_2 = t, x_3 = 0$$

$$\text{Kern}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} it \\ t \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Für $x_2 = t = 1$:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \text{B}(\text{Kern}(f))$$

$\left\{\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ ist eine Basis von Kern(f)

d)

Ist f injektiv/surjektiv?

f ist nicht injektiv, da:

$$\dim(\text{Kern}(f)) = 1 \neq 0$$

f ist surjektiv, da:

$$\dim(\mathbb{C}^3) - \dim(\text{Kern}(f)) = 3 - 1 = 2 = \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\mathbb{C}^2)$$