Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Hausaufgabe 08 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 21, 2020

Contents

1 Aufgabe 1

1.1 a)

Da der Grenzwert des Terms bei direktem Einsetzten nicht definiert ist ("$\frac{0}{0}$"), muss die Regel von de l'Hospital angewand werden. Also gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos(2x)} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0} e^x}{\lim_{x\to 0} 2\cos(2x)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Damit existiert dessen Grenzwert.

1.2 b)

Siehe a)
Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0} -\cos(x)}{\lim_{x\to 0} 2} \\
&= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Damit existiert dessen Grenzwert nach zweifacher Anwendung der Regel.

2 Aufgabe 2

2.1 a) und c)

$$\begin{aligned}
x_1 &= \underline{1},2 \\
x_2 &= \underline{1,1}43575834 \\
x_3 &= \underline{1,134}909462 \\
x_4 &= \underline{1,1347242}21 \\
x_5 &= \underline{1,134724138} \\
x_6 &= \underline{1,134724138}
\end{aligned}$$

2.2 b)

aus HA07-3: $a_6 = \frac{9}{8}$ $b_6 = \frac{73}{64}$

$$y_6 = \frac{a_6 + b_6}{2} = \frac{\frac{9}{8} + \frac{73}{64}}{2} = \frac{145}{128} = 1,1328125$$
$$x_6 = 1,134724138 > 1,1328125 = y_6$$

Das Bisektionsverfahren liefert mit 1,132 einen kleineren Funktionswert, als das Newton-Verfahren mit 1,134

3 Aufgabe 3

Mittelwertsatz: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi)$ wenn $y < x$

$$f'(\xi) = \tan'(\xi) = \frac{\sin'(\xi)}{\cos'(\xi)} = \frac{\cos^2(\xi) + \sin^2(\xi)}{cos^2(\xi)} = \frac{1}{cos^2(\xi)}$$

Da sich der Nenner des Bruchs zwischen $]0,1]$ bewegt, gilt: $\frac{1}{cos^2(\xi)} \geq 1$

$$\frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \frac{\tan(x)}{x} = \frac{1}{cos^2(\xi)} \geq 1$$
$$|\tan(x)| \geq |x|$$

Analog dazu muss also auch $|\tan(y)| \geq |y|$ sein, wodurch auch $|\tan(x) + \tan(y)| \geq |x + y|$ gelten muss.

4 Aufgabe 4

$$f(x) = \frac{x-2}{(3-x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(3-x)^2 - (x-2)(2x-6)}{((3-x)^2)^2} = \frac{(9 + x^2 - 6x) - (2x^2 - 6x - 4x + 12)}{(3-x)^4}$$
$$= \frac{-x^2 + 4x - 3}{(3-x)^4} = \frac{(3-x)(x-1)}{(3-x)^4} = \frac{x-1}{(3-x)^2}$$

Kanidaten: $x_1 = 0$ (Randpunkt), $x_2 = 1$ (Nullstelle von $f'(x)$), $x_3 = 3$ (Randpunkt)

$$f(0) = \frac{0-2}{(3-0)^2} = -\frac{2}{9}$$
$$f(1) = \frac{1-2}{(3-1)^2} = -\frac{1}{4}$$

$f(3)$ ist aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen (und nicht definiert), also mit dem Grenzwert annähern:

$$f(3) = \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{(3-x)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Also befindet sich das globale Maximum bei $x_3 = 3$, bei $x_1 = 0$ ein lokales Maximum und bei $x_2 = 1$ ein globales Minimum.

5 Aufgabe 5

5.1 a)

Es gilt für die Ableitung von g

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \left((s'(t))^2 + (\omega s(t))^2\right)' \\
&= ((s'(t))^2)' + ((\omega s(t))^2)' \\
&= 2s'(t)s''(t) + 2(\omega s(t))(\omega s'(t)) \\
&= 2s'(t)s''(t) + 2\omega^2 s(t)s'(t) \\
&= 2s'(t)(s''(t) + \omega^2 s(t))
\end{aligned}$$

Da $s''(t) = -\omega^2 s(t)$ gilt, folgt daraus

$$\begin{aligned}
g'(t) &= 2s'(t)((-\omega^2 s(t)) + \omega^2 s(t)) \\
&= 2s'(t) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Da $g'(t) \geq 0$ und $g'(t) \leq 0$ mit $t \in \mathbb{R}$ gelten, folgt daraus, dass $g(t) = c$, mit $c \in \mathbb{R}$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.
Daraus folgt, dass $(s'(t))^2 + (\omega s(t))^2$ ebenfalls konstant sein muss. Daraus folgt wiederum, dass $(s'(t))^2$ und $(\omega s(t))^2$ konstant sind. Daraus folgt dann, dass $\omega s(t)$ konstant ist und damit gilt $s'(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, woraus wiederum aus der ursprüngilchen Annahme folgt $s(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit gilt dann auch $g(t) = 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

5.2 b)

Es gilt für die erste und zweite Ableitung von h

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(s(t) - s(0)\cos(\omega t) - \frac{s'(0)}{\omega}\sin(\omega t)\right)' \\ &= s'(t) + s(0)\omega\sin(\omega t) - s'(0)\cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(t) &= \big(s'(t) + s(0)\omega\sin(\omega t) - s'(0)\cos(\omega t)\big)' \\ &= s''(t) + s(0)\omega^2\cos(\omega t) + s'(0)\omega\sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 s(t) + s(0)\omega^2\cos(\omega t) + s'(0)\omega\sin(\omega t) \\ &= -\omega^2\left(s(t) - s(0)\cos(\omega t) - \frac{s'(0)}{\omega}\sin(\omega t)\right) \\ &= -\omega^2 h(t) \end{aligned}$$

Was in 5a) gezeigt wurde, kann analog für h gezeigt werden. Damit gilt

$$\begin{aligned} h(t) = 0 &= s(t) - s(0)\cos(\omega t) - \frac{s'(0)}{\omega}\sin(\omega t) \\ \Leftrightarrow s(t) &= s(0)\cos(\omega t) + \frac{s'(0)}{\omega}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

was **eine** Lösung der ursprünglichen Differenzialgleichung ist.

6 Aufgabe 6

Es gelten für die nötigen Ableitungen von f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x \cos(x))' \\
&= e^x \cos(x) + e^x(-\sin(x)) \\
&= e^x(\cos(x) - \sin(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (e^x(\cos(x) - \sin(x)))' \\
&= e^x(\cos(x) - \sin(x)) + e^x(-\sin(x) - \cos(x)) \\
&= -2e^x \sin(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= (-2e^x \sin(x))' \\
&= -2(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)) \\
&= -2e^x(\sin(x) + \cos(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''''(x) &= (-2e^x(\sin(x) + \cos(x)))' \\
&= -2(e^x(\sin(x) + \cos(x)) + e^x(\cos(x) - \sin(x))) \\
&= -4e^x \cos(x)
\end{aligned}$$

und die nötigen Funktionswerte bei $x_0 = 0$ für T_3

$$\begin{aligned}
f(0) &= e^0 \cos(0) = 1 \\
f'(0) &= e^0(\cos(0) - \sin(0)) = 1 \\
f''(0) &= -2e^0 \sin(0) = 0 \\
f'''(0) &= -2e^0(\sin(0) + \cos(0)) = -2
\end{aligned}$$

Dann gilt für die Aproximation von f bei $x_0 = 0$ mit T_3

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{-2}{3!} x^3 \\
&= 1 + x - \frac{1}{3} x^3
\end{aligned}$$

Da f n+1-mal ableitbar ist, gilt für das Restglied mit Abschätzung

$$
\begin{aligned}
R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = \frac{-4e^{\xi}\cos(\xi)}{24}x^4 \\
&\geq \frac{-4x^4}{24}
\end{aligned}
$$

Es soll gelten

$$|f(x) - T_3(x)| = |R_3(x)| \leq 10^{-8}$$

mit der Abschätzung gilt dann

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{-4x^4}{24}\right| &\leq 10^{-8}, \forall x \in \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right] \\
\Leftrightarrow \frac{4x^4}{24} &\leq 10^{-8} \\
\Leftrightarrow x^4 &\leq 6 \cdot 10^{-8} \\
\Leftrightarrow x &\leq \sqrt[4]{6} \cdot 10^{-2}
\end{aligned}
$$

7 Aufgabe 7

Es gelten für die nötigen Ableitungen von f

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \\
f''(x) &= (\frac{1}{1+x})' = \frac{-1}{(1+x)^2} \\
f'''(x) &= (\frac{-1}{(1+x)^2})' = \frac{2}{(1+x)^3}
\end{aligned}
$$

und die nötigen Funktionswerte bei $x = 0$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \ln(1+0) = 0 \\
f'(0) &= \frac{1}{1+0} = 1 \\
f''(0) &= \frac{-1}{(1+0)^2} = -1 \\
f'''(0) &= \frac{2}{(1+0)^3} = 2
\end{aligned}
$$

Für die Approximation T_1 gilt dann

$$T_1(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 = 0 + x = x$$

mit dessen Restglied R_1

$$f(x) - T_1(x) = R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = \frac{-x^2}{2(1+\xi)^2}$$

und für die Approximation T_2 gilt dann

$$T_2(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 0 + x - \frac{x^2}{2} = x - \frac{x^2}{2}$$

mit dessen Restglied R_2

$$f(x) - T_2(x) = R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = \frac{x^3}{3(1+\xi)^3}$$

Für das Restglied R_1 gilt

$$R_1(x) > 0, \forall x \in]0, \infty[\text{ mit } \xi = 0$$

Daraus folgt $T_1(x) > f(x)$ für alle $x \in \,]0,\, \infty[$.
und es gilt für das Restglied R_2

$$R_2(x) < 0, \forall x \in]0, \infty[\text{ mit } \xi = 0$$

daraus folgt wiederum $T_2(x) < f(x)$ für alle $x \in \,]0,\, \infty[$.
Damit gilt

$$\begin{aligned} & T_1(x) > f(x) > T_2(x) \\ \Leftrightarrow & x > \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}, \text{ für } x \in]0, \infty[\end{aligned}$$