Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 03

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

August 23, 2020

Contents

1 Aufgabe 1

1.1 a)

1.1.1 $\mathbf{z_1}$

$$\begin{aligned} z_1 = 4e^{-\frac{\pi}{6}i} &= 4(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) \\ &= 4(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) \\ &= 2\sqrt{3} - 2i \end{aligned} \tag{1}$$

1.1.2 $\mathbf{z_2}$

$$\begin{aligned} z_2 = 2e^{\frac{16}{3}\pi i} &= 2e^{(\frac{4}{3}+4)\pi i} = 2e^{\frac{4}{3}\pi i} \\ &= -2e^{\frac{1}{3}\pi i} \\ &= -2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) \\ &= -2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \\ &= -1 - \sqrt{3}i \end{aligned} \tag{2}$$

1.2 b)

1.2.1 $\mathbf{z_1}$

$$r^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 18$$

$$\tan(\phi) = \frac{-3}{-3}$$

Der Nenner ist kleiner als 0:

$$\Rightarrow \phi = \arctan(\frac{-3}{-3}) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Damit ist z_1 in Eulerdarstellung:

$$z_1 = \sqrt{18}e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

1.2.2 z_2

$$r^2 = 2^2 + (\sqrt{12})^2 = 4 + 12 = 16$$
$$\Leftrightarrow r = 4$$

$$\tan(\phi) = \frac{\sqrt{12}}{2}$$

Der Nenner ist größer 0:

$$\Rightarrow \phi = \arctan(\frac{\sqrt{12}}{2}) = \frac{\pi}{3}$$

Damit ist z_2 in Eulerdarstellung:

$$z_2 = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$$

2 Aufgabe 2

2.1 a)

$$\begin{aligned} z^3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i &= 0 \\ \Leftrightarrow z^3 + 2e^{\frac{-\pi}{4}i} &= 0 \\ \Leftrightarrow z^3 &= -2e^{\frac{-\pi}{4}i} \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt[3]{-2}e^{\frac{-\pi}{12}i} = z_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Die anderen Lösungen z_2 und z_3 lassen sich finden, wenn man den Term $\frac{2k\pi}{3}$ mit $k \in \{1, 2\}$ hinzu addiert. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[3]{-2}e^{(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})i}, k \in \{0,1,2\} \\ \Leftrightarrow z_k &= \sqrt[3]{-2}e^{(\frac{-\pi}{12}+\frac{8k\pi}{12})i} \\ \Leftrightarrow z_k &= \sqrt[3]{-2}e^{\frac{(8k-1)\pi}{12}i} \end{aligned} \tag{4}$$

2.2 b)

$$\begin{aligned} z^5 = \frac{1+i}{1-i} &\Leftrightarrow z^5 = \frac{(1+i)^2}{2} \\ &\Leftrightarrow z^5 = \frac{2i}{2} \Leftrightarrow z^5 = i \\ &\Leftrightarrow z^5 = e^{\frac{\pi}{2}i} \\ &\Leftrightarrow z = e^{\frac{\pi}{10}i} \end{aligned} \tag{5}$$

Analog zu 2a) erhält man die anderen Lösungen mit den Term $\frac{2k\pi}{5}$ mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Womit man erhält:

$$\begin{aligned} z_k &= e^{(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})i}, k \in \{0,1,2,3,4\} \\ \Leftrightarrow z_k &= e^{(\frac{\pi}{10}+\frac{4k\pi}{10})i} \\ \Leftrightarrow z_k &= e^{\frac{(1+4k)\pi}{10}i} \end{aligned} \tag{6}$$

3 Aufgabe 3

3.1 a)

$$\deg(p(z)) = 4$$

Die Nullstellen von p sind $\{4, i, \text{-}5\}$, wobei $z_2 = i$ eine zwei-fache Nullstelle ist.

3.2 b)

$$p(z) = \frac{z^5 + 4z^4 - 3z^3 + 2z^2 - z + 1}{z^2 - 3}$$

Anmerkung: Die folgenden "Gleichungen" sind nicht als solche zu betrachten. Sie zeigen lediglich die einzelnen Schritte der Polynomdivision.

$$\begin{aligned} (z^5 + 4z^4 - 3z^3 + 2z^2 - z + 1)/(z^2 - 3) &= 0 \\ (4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - z + 1)/(z^2 - 3) &= z^3 \\ (-6z^3 - 10z^2 - z + 1)/(z^2 - 3) &= z^3 + 4z^2 \\ (-10z^2 + 17z + 1)/(z^2 - 3) &= z^3 + 4z^2 - 6z \\ (17z + 31)/(z^2 - 3) &= z^3 + 4z^2 - 6z - 10 \end{aligned} \tag{7}$$

Das Polynom nach der Division:

$$p(z) = z^3 + 4z^2 - 6z - 10 + \frac{17z + 31}{z^2 - 3}$$

4 Aufgabe 4

4.1 a)

$$\begin{aligned} p(2i) &= (2i)^4 + (2i)^3 + 2(2i)^2 + 4(2i) - 8 \\ &= 16 - 8i - 8 + 8i - 8 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

4.2 b)

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^4 + z^3 + 2z^2 + 4z - 8}{z^2 + 4}$$

Anmerkung: Wie in 3b) sind die "Gleichungen" nur repräsentativ für die einzelnen Schritte der Polynomdivision.

$$\begin{aligned} (z^4 + z^3 + 2z^2 + 4z - 8)/(z^2 + 4) &= 0 \\ (z^3 - 2z^2 + 4z - 8)/(z^2 + 4) &= z^2 \\ (-2z^2 - 8)/(z^2 + 4) &= z^2 + z \\ (0)/(z^2 + 4) &= z^2 + z - 2 \end{aligned} \tag{9}$$

Das Polynom ist dann nach der Division:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = z^2 + z - 2$$

4.3 c)

Da $q \mid p$ (siehe 4b) sind die Nullstellen von q auch gleichzeitig die Nullstellen von p. Die Nullstellen $z_{1,2}$ von q sind:

$$\begin{aligned} q(z) = z^2 + 4 &= (z + 2i)(z - 2i) \\ \Rightarrow z_{1,2} &= \pm 2i \end{aligned}$$

Die anderen beiden Nullstellen von p erhält man vom Polynom $z^2 + z - 2$ aus 4b:

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + z - 2 \\ \Rightarrow z_{3,4} &= \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\ \Leftrightarrow z_{3,4} &= \frac{-1}{2} \pm \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

Damit kann man p jewals komplex und reell zerlegen zu

$$\begin{aligned} p(z) &= z^4 + z^3 + 2z^2 + 4z - 8 \\ &= (z-2i)(z+2i)(z+2)(z-1) \\ &= (z^2+4)(z+2)(z-1) \end{aligned} \tag{11}$$

mit den Nullstellen $z_0 \in \{$-2, -2i, 2i, 1$\}$.

5 Aufgabe 5

5.1 a)

Bestimmen der Nullstellen des Nennerpolynoms $q(z) = z^2 + 2z + 2$:

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + 2z + 2 \\ \Rightarrow z_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1-2} \\ \Leftrightarrow z_{1,2} &= -1 \pm i \end{aligned} \tag{12}$$

Die Linearfaktoren von q sind dann $(z+1-i)$ und $(z+1+i)$. Daraus ergibt sich dann der Ansatz:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+7}{(z+1-i)(z+1+i)} \\ &= \frac{A}{(z+1-i)} + \frac{B}{(z+1+i)} \end{aligned} \tag{13}$$

Durch die Zuhaltemethode erhält man dann:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-1+i)+7}{(-1+i)+1+i} \\ &= \frac{6+i}{2i} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{(6+i)(-2i)}{2i(-2i)} = \frac{2-12i}{4} = \frac{1-6i}{2} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(-1-i)+7}{(-1-i)+1-i} \\ &= \frac{6-i}{-2i} \\ \Leftrightarrow B &= \frac{(6-i)2i}{(-2i)2i} = \frac{2-12i}{4} = \frac{1-6i}{2} \end{aligned} \tag{15}$$

5.2 b)

Ansatz für die reelle Zerlegung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2+i}{x-(1+2i)} + \frac{2-i}{x-(1-2i)} \\
&= \frac{Cx+D}{(x-(1+2i))(x-(1-2i))} = \frac{Cx+D}{x^2-2x+5} = \frac{Cx+D}{(x-1)^2+4} \\
&= \frac{(2+i)(x-(1-2i)) + (2-i)(x-(1+2i))}{(x-(1+2i))(x-(1-2i))} \\
&= \frac{(2x-(2-4i)+xi-(i-2i^2)) + (2x-(2+4i)-xi+(i+2i^2))}{(x-1)^2+4} \\
&= \frac{2x-2+2+2x-2-2}{(x-1)^2+4} \\
&= \frac{2x-2+2x-2}{(x-1)^2+4} \\
&= \frac{4x-4}{(x-1)^2+4}
\end{aligned} \tag{16}$$

Daraus folgt $D = -4$ und $C = 4$.

6 Aufgabe 6

6.1 a)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3-4x^2-2x+17}{x^2-6x+9}$$

Der Grad vom Zahlerpolynom ist größer ($\deg(p) > \deg(q)$), weshalb eine Ploynomdivision notwendig ist.

Anmerkung: Die folgenden "Gleichungen" sind hier wieder repräsentativ für die Schritte der Division.

$$\begin{aligned}
(x^3-4x^2-2x+17)/(x^2-6x+9) &= 0 \\
(2x^2-11x+17)/(x^2-6x+9) &= x \\
(x-1)/(x^2-6x+9) &= x+2
\end{aligned} \tag{17}$$

Es können keine weiteren Schritte durchgeführt werden, weil $deg(x-1) < deg(q)$. Somit gilt $q \nmid p$, da ein Restpolynom übrig bleibt.

Bevor mit der Partialzerlegung fortgefahren werden kann, muss q in seine Linearfaktoren zerlegt werden.

$$q(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \tag{18}$$

Somit kann dann der folgende Ansatz gewählt werden:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{q(x)} &= \frac{x-1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} \end{aligned} \tag{19}$$

Für A_2 gilt

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} &= \frac{x-1}{(x-3)^2} \\ \Leftrightarrow A_1(x-3) + A_2 &= x-1 \\ \Leftrightarrow A_2 &= (x-1), x = 3 \\ \Leftrightarrow A_2 &= 2 \end{aligned} \tag{20}$$

A_1 muss über einen Koeffizientenvergleich ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{(x-3)^2} &= \frac{A_1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} \\ \Leftrightarrow x-1 &= A_1(x-3) + 2 \\ \Leftrightarrow x-3 &= A_1(x-3) \\ \Leftrightarrow 1 &= A_1 \end{aligned} \tag{21}$$

Damit gilt für die rationale Funktion f im reellen und komplexen:

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2}$$

6.2 b)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x}$$

Da hier $deg(p) < deg(q)$ gilt, muss keine Polynomdivision durchgeführt werden. Für die Linearfaktoren von q gilt:

$$\begin{aligned} q(x) &= x^3 + 2x \\ &= x(x^2+2) \\ &= x(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i) \end{aligned} \tag{22}$$

Daraus ergibt sich der Ansatz:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+\sqrt{2}i} + \frac{C}{x-\sqrt{2}i} \end{aligned} \tag{23}$$

Für A mit $x = 0$ gilt

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1}{\sqrt{2}i(-\sqrt{2}i)} \\ &= \frac{-1}{2} \end{aligned} \tag{24}$$

Für B mit $x = -\sqrt{2}i$ gilt

$$\begin{aligned} B &= \frac{2(-\sqrt{2}i)^2 - 2(-\sqrt{2}i) - 1}{(-\sqrt{2}i)((-\sqrt{2}i) - \sqrt{2}i)} \\ &= \frac{-4 + 2\sqrt{2}i - 1}{(-\sqrt{2}i)(-2\sqrt{2}i)} \\ &= \frac{-5 + 2\sqrt{2}i}{-4} \\ &= \frac{5 - 2\sqrt{2}i}{4} \end{aligned} \tag{25}$$

Für C mit $x = \sqrt{2}i$ gilt

$$\begin{aligned} C &= \frac{2(\sqrt{2}i)^2 - 2(\sqrt{2}i) - 1}{(\sqrt{2}i)((\sqrt{2}i) + \sqrt{2}i)} \\ &= \frac{-4 - 2\sqrt{2}i - 1}{(\sqrt{2}i)(2\sqrt{2}i)} \\ &= \frac{-5 - 2\sqrt{2}i}{-4} \\ &= \frac{5 + 2\sqrt{2}i}{4} \end{aligned} \tag{26}$$

Damit gilt für die Funktion f im komplexen:

$$f(x) = \frac{\frac{-1}{2}}{x} + \frac{\frac{5-2\sqrt{2}i}{4}}{x+\sqrt{2}i} + \frac{\frac{5+2\sqrt{2}i}{4}}{x-\sqrt{2}i}$$

Für die Zerlegung im reellen müssen die Koeffizienten B und C mit folgenden Ansatz umgeformt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{5-2\sqrt{2}i}{4}}{x+\sqrt{2}i} + \frac{\frac{5+2\sqrt{2}i}{4}}{x-\sqrt{2}i} &= \frac{Dx+E}{x^2+2} \\
&= \frac{\frac{5-2\sqrt{2}i}{4}(x-\sqrt{2}i) + \frac{5+2\sqrt{2}i}{4}(x+\sqrt{2}i)}{x^2+2} \\
&= \frac{\frac{1}{4}((5-2\sqrt{2}i)(4x-4\sqrt{2}i) + (5+2\sqrt{2}i)(4x+4\sqrt{2}i))}{x^2+2} \\
&= \frac{\frac{1}{4}((20x-20\sqrt{2}i-8\sqrt{2}xi-16) + (20x+20\sqrt{2}i+8\sqrt{2}xi-16))}{x^2+2} \\
&= \frac{\frac{1}{4}(40x-32)}{x^2+2} \\
&= \frac{10x-8}{x^2+2}
\end{aligned} \tag{27}$$

Damit sind $D = 10$ und $E = -8$. Und damit gilt für die Funktion f im reellen:

$$f(x) = \frac{\frac{-1}{2}}{x} + \frac{10x-8}{x^2+2}$$