Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften
Hausaufgabe 01 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

November 18, 2020

Contents

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned} & 9x^4 + 12zyx^2 + 4z^2y^2 \\ = & (3x^2 + 2yz)^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & x^{-2} - 36y^6 \\ = & (x^{-1} + 6y^3)(x^{-1} - 6y^3) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & y^{-2} - 2 + y^2 \\ = & (y^{-1} - y)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned} & (\{\, x, y \,\} \times \{\, blau, rot, gelb \,\}) \setminus \{\, (x, y, z), z, x, (y, rot), (x, blau, rot), (gelb, y) \,\} \\ = & (\{\, x, y \,\} \times \{\, blau, rot, gelb \,\}) \setminus \{\, (y, rot) \,\} \\ = & \{\, (x, blau), (x, rot), (x, gelb), (y, blau), (y, gelb) \,\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & [6, 11] \setminus ([4, 6] \setminus [5, 7]) \\ = & [6, 11] \setminus [4, 5[\\ = & [6, 11] \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & ([5, 10] \setminus [4, 6]) \setminus [5, 7] \\ = &]6, 10] \setminus [5, 7] \\ = &]7, 10] \end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^6 > 1 \,\} \cap \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \,\} \\
=&(\mathbb{R} \setminus [-1,1]) \cap]-\infty, 0] \\
=&]-\infty, -1[
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

a)

$$\frac{3x}{x-5} < 2, x \neq 5$$

Fall 1: $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$

$$
\begin{aligned}
&\frac{3x}{x-5} < 2 \\
&\Leftrightarrow 3x < 2(x-5) \\
&\Leftrightarrow 3x < 2x - 10 \\
&\Leftrightarrow x < -10
\end{aligned}
$$

Widerspruch zwischen $x < -10$ und $x > 5$.
Fall 2: $x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5$

$$
\begin{aligned}
&\frac{3x}{x-5} < 2 \\
&\Leftrightarrow 3x > 2(x-5) \\
&\Leftrightarrow 3x > 2x - 10 \\
&\Leftrightarrow x > -10
\end{aligned}
$$

Damit gilt für die Lösungsmenge L

$$L =]-10, 5[$$

b)

$$\frac{x^2-1}{6x-9} \geq 1, x \neq \frac{3}{2}$$

Fall 1: $6x-9>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$

$$\frac{x^2-1}{6x-9} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow x^2-1 \geq 6x-9$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+8 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x-4) \geq 0$$

Subfall 1: $x-2 \geq 0$ und $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$
Subfall 2: $x-2 \leq 0$ und $x-4 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$

Damit gilt für die Lösungsmenge L_1 dieses Falls

$$L_1 =]\frac{3}{2}, 2] \cup [4, \infty[$$

Fall 2: $6x-9<0 \Rightarrow x<\frac{3}{2}$

$$\frac{x^2-1}{6x-9} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow x^2-1 \leq 6x-9$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+8 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x-4) \leq 0$$

Subfall 1: $x-2 \leq 0$ und $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$ und $x \geq 4$ (Widerspruch)
Subfall 2: $x-2 \geq 0$ und $x-4 \leq 0 \Rightarrow x \geq 2$ und $x \leq 4$ (Widerspruch zur Annahme)

Damit gilt für die Lösungsmenge L_2 dieses Falls

$$L_2 = \{\}$$

Dann gilt für die Lösungsmenge L

$$L =]\frac{3}{2}, 2] \cup [4, \infty[$$

c)

$$|2x+3| \leq 5x-3$$

Fall 1: $2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-3}{2}$

$$\begin{aligned} |2x+3| &\leq 5x-3 \\ \Leftrightarrow 2x+3 &\leq 5x-3 \\ \Leftrightarrow 6 &\leq 3x \\ \Leftrightarrow 2 &\leq x \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$L_1 = [2, \infty[$$

Fall 2: $2x+3 < 0 \Rightarrow x < \frac{-3}{2}$

$$\begin{aligned} |2x+3| &\leq 5x-3 \\ \Leftrightarrow -(2x+3) &\leq 5x-3 \\ \Leftrightarrow -2x-3 &\leq 5x-3 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 7x \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$L_2 = \{\}$$

Damit gilt für die Lösungsmenge L

$$L = L_1 \cup L_2 = [2, \infty[$$

Aufgabe 5

a)

a

$$\sum_{k=4}^{7} 2(k-3)^2 = \sum_{k=1}^{4} 2k^2$$
$$= 2 + 8 + 18 + 32 = 60$$

b

$$\prod_{k=0}^{3} k! = 0! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3!$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$$

b)

a

$$\sum_{k=0}^{n} 2 \cdot 2^k = 2 \sum_{k=0}^{n} 2^k$$
$$= 2 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+2} - 2$$

b

$$\sum_{k=0}^{n} (-\frac{1}{5})^k = \frac{1 - (-\frac{1}{5})^{n+1}}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{1 - (-\frac{1}{5})^{n+1}}{\frac{6}{5}} = \frac{5 + (-\frac{1}{5})^n}{6}$$