Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 03 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

2. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a)

i)

$$z^3 = -27i = 27e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

Es gilt für den Betrag r und das Argument ϕ_n mit $n \in \{0, 1, 2\}$ von z

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{27} = 3 \\ \phi_n &= -\frac{\pi}{2 \cdot 3} + \frac{2n\pi}{3} \\ &= \frac{-\pi + 4n\pi}{6} = \frac{\pi(4n-1)}{6} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$z = 3e^{\frac{\pi(4n-1)}{6}i} \text{ mit } n = 0, 1, 2$$

ii)

$$2z^4 + 4(\sqrt{12} - 2i)z^2 + 16 - 8\sqrt{12}i = 0$$

Es gilt für den ersten Koeffizienten mit $r, \phi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{12 + (-2)^2} = 4 \\ \tan(\phi) &= \frac{-2}{\sqrt{12}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \phi &= \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

damit gilt

$$\sqrt{12} - 2i = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

analog gilt dann für den zweiten Koeffizienten

$$16 - 8\sqrt{12}i = 32e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

dann gilt

$$\begin{aligned}2z^4 + 4(\sqrt{12} - 2i)z^2 + 16 - 8\sqrt{12}i &= 0\\ \Leftrightarrow 2z^4 + 16e^{-\frac{\pi}{6}i}z^2 + 32e^{-\frac{\pi}{3}i} &= 0\\ \Leftrightarrow z^4 + 8e^{-\frac{\pi}{6}i}z^2 + 16e^{-\frac{\pi}{3}i} &= 0\\ \Leftrightarrow (z^2 + 4e^{-\frac{\pi}{6}i})^2 &= 0\end{aligned}$$

daraus folgt dann die Gleichung

$$z^2 = -4e^{-\frac{\pi}{6}i} = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

für z gilt dann mit $s, \phi_k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{4} = 2\\ \phi_k &= \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)\frac{1}{2} \text{ mit } k = 0, 1\\ &= \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{12k\pi}{6}\right)\frac{1}{2} = \left(\frac{\pi(5+12k)}{6}\right)\frac{1}{2}\\ &= \frac{\pi(5+12k)}{12}\end{aligned}$$

damit gilt

$$z = 2e^{\frac{\pi(5+12k)}{12}i} \text{ mit } k = 0, 1$$

NOTE: In diesem Fall sind das beides doppelte Nullstellen.

b)

Es gilt

$$\begin{aligned}ie^{\frac{5\pi}{12}i} &= ie^{\frac{2\pi+3\pi}{4\cdot 3}i}\\ &= ie^{\frac{\pi}{4}i+\frac{\pi}{6}i}\\ &= ie^{\frac{\pi}{4}i}e^{\frac{\pi}{6}i}\\ &= i\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= i\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= i\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}i + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

$$p(i) = (i)^4 - 1 = 1 - 1 = 0$$

b)

Polynomdivision:

$$\begin{aligned}(z^4 - 1)/(z^2 + 1) &= \\ (-z^2 - 1)/(z^2 + 1) &= z^2 \\ (0)/(z^2 + 1) &= z^2 - 1\end{aligned}$$

demnach gilt

$$\frac{p(z)}{q(z)} = z^2 - 1$$

c)

p lässt sich im Komplexen wie folgt zerlegen

$$\begin{aligned}p(z) = z^4 - 1 &= (z^2 + 1)(z^2 - 1) \\ &= (z^2 + 1)(z + 1)(z - 1) \\ &= (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1)\end{aligned}$$

d)

p lässt sich im Reellen wie folgt zerlegen

$$p(z) = z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z + 1)(z - 1)$$

Aufgabe 3

a)

Für den Nenner p gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - 2x + 5 \\ &= (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i)) \end{aligned}$$

damit gilt für die Zerlegung

$$\frac{x}{x^2 - 2x + 5} = \frac{A}{x - (1 + 2i)} + \frac{B}{x - (1 - 2i)}$$

b)

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{i}{x - (1 + 2i)} + \frac{-i}{x - (1 - 2i)} &= \frac{i(x - 1 + \sqrt{2}i) - i(x - 1 - \sqrt{2}i)}{x^2 - 2x + 5} \\ &= \frac{-2\sqrt{2}}{x^2 - 2x + 5} \end{aligned}$$

damit gilt für die reelle Zerlegung

$$f(x) = \frac{-2\sqrt{2}}{x^2 - 2x + 5}$$

Aufgabe 4

a)

Sei p das Zahlerpolynom und q das Nennerpolynom.

Für den p gilt

$$p(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Es muss eine Polynomdivision durchgeführt werden, da gilt $\deg(p) > \deg(q)$. Es folgt eine Polynomdivision:

$$\begin{aligned} &(x^3 - 6x^2 + 10x - 1)/(x^2 - 6x + 9) = \\ &\qquad (x - 1)/(x^2 - 6x + 9) = x \end{aligned}$$

damit gilt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = x + \frac{x-1}{(x-3)^2}$$

daraus ergibt sich der komplexe Ansatz der Zerlegung mit $A, B \in \mathbb{C}$

$$\frac{x-1}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

damit gilt für B mit $x = 3$

$$(3) - 1 = 2 = B$$

und für A gilt

$$x - 1 = Ax - 3A + 2 \Leftrightarrow x - 1 = Ax - 3A + 2$$

daraus ergeben sich

$$\begin{aligned} 1 &= A \\ -1 &= -3A + 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 1$$

Da A und B Elemente der reellen und komplexen Zahlen sind, ist die folgende Zerlegung sowohl reel als auch komplex

$$\frac{p(x)}{q(x)} = x + \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2}$$

b)

Sei p das Zahlerpolynom und q das Nennerpolynom.

Da $\deg(p) < \deg(q)$ gilt, muss keine Polynomdivision durchgeführt werden.
Für q gilt

$$q(x) = x^3 + 2x = x(x^2 + 2) = x(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

daraus ergibt sich dann folgender Ansatz mit $A, B, C \in \mathbb{C}$

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + \sqrt{2}i} + \frac{C}{x - \sqrt{2}i}$$

damit gilt für A mit $x = 0$

$$\frac{-1}{2} = A$$

und es gilt für B mit $x = -\sqrt{2}i$

$$\frac{-4 + 2\sqrt{2}i - 1}{(-\sqrt{2}i)(-2\sqrt{2}i)} = B = \frac{5 - 2\sqrt{2}i}{4}$$

und es gilt für C mit $x = \sqrt{2}i$

$$\frac{-4 - 2\sqrt{2}i - 1}{(\sqrt{2}i)(2\sqrt{2}i)} = C = \frac{5 + 2\sqrt{2}i}{4}$$

damit gilt für die komplexe Zerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\frac{-1}{2}}{x} + \frac{\frac{5-2\sqrt{2}i}{4}}{x + \sqrt{2}i} + \frac{\frac{5+2\sqrt{2}i}{4}}{x - \sqrt{2}i}$$

es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{5-2\sqrt{2}i}{4}}{x + \sqrt{2}i} + \frac{\frac{5+2\sqrt{2}i}{4}}{x - \sqrt{2}i} &= \frac{\frac{1}{4}((5 - 2\sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i) + (5 + 2\sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i))}{x^2 + 2} \\
&= \frac{\frac{1}{4}(5x - 5\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}xi - 4 + 5x + 5\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}xi - 4)}{x^2 + 2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(5x - 4)}{x^2 + 2}
\end{aligned}$$

damit gilt für die reelle Zerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\frac{-1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}(5x - 4)}{x^2 + 2}$$