Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 09 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

27. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a)

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} = x^{-1} \end{aligned}$$

dann gilt für die Taylorpoynome T_1 und T_2

$$\begin{aligned} T_1(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= 0 + 1 \cdot (x-1) = x - 1 \\ T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &= 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} \end{aligned}$$

für dessen Restglieder gilt

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \frac{f''(\xi)(x-1)^2}{2!} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\xi^2}(x-1)^2 = \frac{-(x-1)^2}{2\xi^2} \\ R_2(x) &= \frac{f'''(\xi)(x-1)^3}{3!} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{\xi^3}(x-1)^3 = \frac{(x-1)^3}{3\xi^3} \end{aligned}$$

dann gilt

$$\ln(x) = T_1(x) + R_1(x) \text{ bzw. } \ln(x) = T_2(x) + R_2(x)$$

Damit die Ungleichungen $\ln(x) < T_1(x)$ und $\ln(x) > T_2(x)$ gelten müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein.

$$0 > R_1(x) \text{ und } 0 < R_2(x)$$

der Nenner der Restglieder ist immer größer 0 für alle $\xi \in]x_0, x[$ dann gilt

$$x - 1 > 0, \forall x \in]1, \infty[$$
$$\Leftarrow (x-1)^2 > 0 \text{ bzw. } (x-1)^3 > 0, \forall x \in]1, \infty[$$
$$\Leftarrow -(x-1)^2 < 0, \forall x \in]1, \infty[$$
$$\Leftarrow 0 > R_1(x) \text{ bzw. } 0 < R_2(x), \forall x \in]1, \infty[$$

b)

<u>Für das Monotoniekriterium:</u>

$x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} < \ln x$, da:

$(x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2})' = 2 - x < 0$, für $x \in]2, \infty[\Rightarrow$ streng monoton fallend

$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$, für $x \in]1, \infty[\Rightarrow$ streng monoton steigend

Somit:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2}\right) \overset{\text{GWS}}{=} -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}(\ln x) \overset{\text{GWS}}{=} \infty$$
$$\Rightarrow x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} < \ln x \text{ , für } x \in]1, \infty[$$

<u>Für den Mittelwertsatz:</u>

Zu zeigen ist, dass ln(x)< x-1 für alle x $\in$]1,∞[

$f(x) = \ln(x)$, $a = 1$, b = x, $\xi \in$]1,∞[

$\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(\xi) = (\ln(\xi))' = \frac{1}{\xi} \Leftrightarrow$

$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{1}{\xi}$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{\xi}\,(x-1)$

$\frac{1}{\xi} < 1$, da $\xi \in$]1,∞[gilt $\xi > 1$ und damit $\frac{1}{\xi} < 1$

$\ln(x) < x - 1$ für alle $x \in$]1,∞[

Aufgabe 2

Es gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3^x = e^{x\ln(3)} = (\ln(3))^0 e^{x\ln(3)} \\
f'(x) &= \ln(3) e^{x\ln(3)} = (\ln(3))^1 e^{x\ln(3)} \\
f''(x) &= (\ln(3))^2 e^{x\ln(3)} \\
f'''(x) &= (\ln(3))^3 e^{x\ln(3)} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (\ln(3))^n e^{x\ln(3)}
\end{aligned}
$$

dann gilt für das Taylorpolynom $\mathrm{T_n}$

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f(x_0)}{n!}x^n \\
&= 1 + \ln(3)x + \frac{(\ln(3))^2}{2}x^2 + \frac{(\ln(3))^3}{6}x^3 + \cdots + \frac{(\ln(3))^n}{n!}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(3))^k x^k}{k!}
\end{aligned}
$$

und es gilt für das Restglied $\mathrm{R_n}$

$$
R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(\ln(3))^{n+1}e^{\ln(3)\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(\ln(3))^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\ln(3)\xi}
$$

Betrachtet man das Restglied nun als Folge mit einem festen $x \in]1, \infty[$ und da dann das n gegen ∞ konvergieren als, fällt auf, dass irgendeine Exponentialfunktion durch die „Fakultätsfunktion“. Da die „Fakultätsfunktion“ schneller als jede Exponentialfunktion, müsste gelten

$$
\lim_{n \leftarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}
$$

Aufgabe 3

a)

Für $x, y > 0, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (x-y)^2 \\
\Leftrightarrow 0 &\leq x^2 - 2xy + y^2 \\
\Leftrightarrow 4xy &\leq x^2 + 2xy + y^2 \\
\Leftrightarrow xy &\leq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{4} \\
\Leftrightarrow (xy)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{x+y}{2} \\
\Leftrightarrow \ln(xy^{\frac{1}{2}}) &\leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
\Leftrightarrow \frac{\ln(xy)}{2} = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2} &\leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)
\end{aligned}
$$

b)

$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, für alle $x \in]-1, 1[$

$$
\begin{aligned}
y &= \operatorname{artanh} x = \tanh^{-1} x \\
\tanh^{-1} x &= y \\
\Leftrightarrow \tanh(\tanh^{-1} x) &= \tanh y \\
\Leftrightarrow x &= \tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \\
\Leftrightarrow e^{2y} - 1 &= xe^{2y} + x \\
\Leftrightarrow (1-x)e^{2y} &= x + 1 \\
\Leftrightarrow e^{2y} &= \frac{x+1}{x-1} \\
\Leftrightarrow 2y &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
\Leftrightarrow y &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, für $-1 < x < 1$