Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 02 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (), Christopher Neumann (), Dennis Schulze (458415)

November 18, 2020

Contents

Aufgabe 1

a)

Zu zeigen ist

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

IA: Es gilt für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = (2(1)-1) = 1 = (1)^2$$

IB: Es gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

IV: Damit gilt dann

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\end{aligned}$$

Folglich gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

b)

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

IA: Es gilt

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges n $\in \mathbb{N}$ mit n > 1

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

IB: Dann gilt

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)&=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&=\frac{n+1}{2n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&=\frac{n+1}{2n}\cdot\left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\\&=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{((n+1)-1)((n+1)+1)}{(n+1)^2}\\&=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\\&=\frac{(n+1)\cdot n(n+2)}{2n(n+1)(n+1)}=\frac{n+2}{2(n+1)}\end{aligned}$$

Damit gilt für alle n $\in \mathbb{N}$ mit n > 1

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

c)

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4,\text{ gilt } 2^n\geq n^2$$

IA: Es gilt für n $= 4$

$$\begin{aligned}2^4&\geq 4^2\\ \Leftrightarrow 16&\geq 16\end{aligned}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges $n\in\mathbb{N}$ mit n ≥ 4

$$2^n\geq n^2$$

IB: Dann gilt

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &\geq (n+1)^2 \\
\Leftrightarrow 2 \cdot 2^n &\geq 2 \cdot n^2 = n^2 + 2n + 1 \\
\Rightarrow n^2 &= 2n + 1 \\
\Leftrightarrow 0 &= n^2 - 2n - 1 \\
\Rightarrow n_1 &= 1 - \sqrt{2} \text{ und } n_2 = 1 + \sqrt{2}, n_i \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow n_1 &< 4 \text{ und } n_2 < 4 \text{ (siehe IV.)} \\
\Rightarrow n^2 &> 2n + 1 \\
\Rightarrow 2 \cdot n^2 &> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \\
\Rightarrow 2 \cdot 2^n &> (n+1)^2 \\
\Leftrightarrow 2^{n+1} &> (n+1)^2
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit n ≥ 4

$$2^n \geq n^2$$

Aufgabe 2

a)

die Exponentialfunktion ist nicht surjektiv => eine komposition mit exp ist nicht surjektiv

die Exponentialfunktion ist injektiv => eine komposition mit exp ist injektiv, wenn die andere funktion injektiv ist

=> f ist nur injektiv

b)

die Betragsfunktion ist weder injektiv noch surjektiv => eine komposition mit der Betragsfunktion ist weder injektiv noch surjektiv

=> g ist weder injektiv noch surjektiv

Aufgabe 3

a)

$$D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{\, x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0 \,\}$$

b)

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2)(x) &= \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 - 4 \\ &= \frac{1}{x^6} - 4\end{aligned}$$

$$D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(x) &= \frac{1}{(x^2-4)^3} \\ &= \frac{1}{((x-2)(x+2))^3}\end{aligned}$$

$$D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

c)

$$f_1^{-1}([0, 12]) = [2, 4]$$

d)

Aufgabe 4

a)

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+3}{x+1} \\ \Leftrightarrow y(x+1) &= x+3 \\ \Leftrightarrow yx + y &= x+3 \\ \Leftrightarrow (y-1)x + y &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3-y}{y-1}, y \neq 1 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$f^{-1}(y) = \frac{3-y}{y-1}$$
$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

b)

$$\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(y) &= \frac{\left(\frac{3-y}{y-1}\right) + 3}{\left(\frac{3-y}{y-1}\right) + 1} \\
&= \frac{\left(\frac{3-y+3y-3}{y-1}\right)}{\left(\frac{3-y+y-1}{y-1}\right)} \\
&= \frac{\frac{2y}{y-1}}{\frac{2}{y-1}} \\
&= \frac{2y}{y-1} \cdot \frac{y-1}{2} \\
&= y
\end{aligned}$$

c)