Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 08 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 21, 2020

Contents

1 Aufgabe 1 **2**
1.1 a) 2
1.2 b) 2

2 Aufgabe 2 **3**
2.1 a) 3
2.2 b) 3
2.3 c) 3

3 Aufgabe 3 **3**

4 Aufgabe 4 **3**

5 Aufgabe 5 **3**
5.1 a) 3
5.2 b) 3

6 Aufgabe 6 **4**

7 Aufgabe 7 **4**

1 Aufgabe 1

1.1 a)

Da der Grenzwert des Terms bei direktem Einsetzten nicht definiert ist ("$\frac{0}{0}$"), muss die Regel von de l'Hospital angewand werden. Also gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2\cos(2x)} \\
&= \frac{\lim_{x \to 0} e^x}{\lim_{x \to 0} 2\cos(2x)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Damit existiert dessen Grenzwert.

1.2 b)

Siehe a)
Es gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{2} \\
&= \frac{\lim_{x \to 0} -\cos(x)}{\lim_{x \to 0} 2} \\
&= \frac{-1}{2}
\end{aligned}
$$

Damit existiert dessen Grenzwert nach zweifacher Anwendung der Regel.

2 Aufgabe 2

2.1 a)

2.2 b)

2.3 c)

3 Aufgabe 3

4 Aufgabe 4

5 Aufgabe 5

5.1 a)

Es gilt für die Ableitung von g

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \left((s'(t))^2 + (\omega s(t))^2\right)' \\
&= ((s'(t))^2)' + ((\omega s(t))^2)' \\
&= 2s'(t)s''(t) + 2(\omega s(t))(\omega s'(t)) \\
&= 2s'(t)s''(t) + 2\omega^2 s(t)s'(t) \\
&= 2s'(t)(s''(t) + \omega^2 s(t))
\end{aligned}$$

Da $s''(t) = -\omega^2 s(t)$ gilt, folgt daraus

$$\begin{aligned}
g'(t) &= 2s'(t)((-\omega^2 s(t)) + \omega^2 s(t)) \\
&= 2s'(t) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Da $g'(t) \geq 0$ und $g'(t) \leq 0$ mit $t \in \mathbb{R}$ gelten, folgt daraus, dass $g(t) = c$, mit $c \in \mathbb{R}$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.
Daraus folgt, dass $(s'(t))^2 + (\omega s(t))^2$ ebenfalls konstant sein muss. Daraus folgt wiederum, dass $(s'(t))^2$ und $(\omega s(t))^2$ konstant sind. Daraus folgt dann, dass $\omega s(t)$ konstant ist und damit gilt $s'(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, woraus wiederum aus der ursprüngilchen Annahme folgt $s(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit gilt dann für auch $g(t) = 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

5.2 b)

Es gilt für die erste und zweite Ableitung von h

$$
\begin{aligned}
h'(t) &= \left(s(t) - s(0)\cos(\omega t) - \frac{s'(0)}{\omega}\sin(\omega t)\right)' \\
&= s'(t) + s(0)\omega\sin(\omega t) - s'(0)\cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h''(t) &= \big(s'(t) + s(0)\omega\sin(\omega t) - s'(0)\cos(\omega t)\big)' \\
&= s''(t) + s(0)\omega^2\cos(\omega t) + s'(0)\omega\sin(\omega t) \\
&= -\omega^2 s(t) + s(0)\omega^2\cos(\omega t) + s'(0)\omega\sin(\omega t) \\
&= -\omega^2\left(s(t) - s(0)\cos(\omega t) - \frac{s'(0)}{\omega}\sin(\omega t)\right) \\
&= -\omega^2 h(t)
\end{aligned}
$$

Was in 5a) gezeigt wurde, kann analog für h gezeigt werden. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
h(t) = 0 &= s(t) - s(0)\cos(\omega t) - \frac{s'(0)}{\omega}\sin(\omega t) \\
\Leftrightarrow s(t) &= s(0)\cos(\omega t) + \frac{s'(0)}{\omega}\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

was **eine** Lösung der ursprünglichen Differenzialgleichung ist.

6 Aufgabe 6

7 Aufgabe 7