

# Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

## Hausaufgabe 03

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

August 22, 2020

### Contents

<b>1</b>	<b>Aufgabe 1</b>	<b>2</b>
1.1	a) . . . . .	2
	1.1.1 $z_1$ . . . . .	2
	1.1.2 $z_2$ . . . . .	2
1.2	b) . . . . .	2
	1.2.1 $z_1$ . . . . .	2
	1.2.2 $z_2$ . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Aufgabe 2</b>	<b>3</b>
2.1	a) . . . . .	3
2.2	b) . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Aufgabe 3</b>	<b>4</b>
3.1	a) . . . . .	4
3.2	b) . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Aufgabe 4</b>	<b>5</b>
4.1	a) . . . . .	5
4.2	b) . . . . .	5
4.3	c) . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Aufgabe 5</b>	<b>6</b>
5.1	a) . . . . .	6
5.2	b) . . . . .	7

<b>6</b>	<b>Aufgabe 6</b>	<b>7</b>
6.1	a) . . . . .	7
6.2	b) . . . . .	7

## 1 Aufgabe 1

### 1.1 a)

#### 1.1.1 $z_1$

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 4e^{-\frac{\pi}{6}i} = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
 &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\
 &= 2\sqrt{3} - 2i
 \end{aligned} \tag{1}$$

#### 1.1.2 $z_2$

$$\begin{aligned}
 z_2 &= 2e^{\frac{16}{3}\pi i} = 2e^{(\frac{4}{3}+4)\pi i} = 2e^{\frac{4}{3}\pi i} \\
 &= -2e^{\frac{1}{3}\pi i} \\
 &= -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
 &= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
 &= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i
 \end{aligned} \tag{2}$$

### 1.2 b)

#### 1.2.1 $z_1$

$$\begin{aligned}
 r^2 &= (-3)^2 + (-3)^2 = 18 \\
 \tan(\phi) &= \frac{-3}{-3}
 \end{aligned}$$

Der Nenner ist kleiner als 0:

$$\Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{-3}{-3}\right) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Damit ist  $z_1$  in Eulerdarstellung:

$$z_1 = \sqrt{18}e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

### 1.2.2 $z_2$

$$r^2 = 2^2 + (\sqrt{12})^2 = 4 + 12 = 16$$

$$\Leftrightarrow r = 4$$

$$\tan(\phi) = \frac{\sqrt{12}}{2}$$

Der Nenner ist größer 0:

$$\Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Damit ist  $z_2$  in Eulerdarstellung:

$$z_2 = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$$

## 2 Aufgabe 2

### 2.1 a)

$$z^3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 + 2e^{\frac{-\pi}{4}i} = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 = -2e^{\frac{-\pi}{4}i} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-2}e^{\frac{-\pi}{12}i} = z_1$$

Die anderen Lösungen  $z_2$  und  $z_3$  lassen sich finden, wenn man den Term  $\frac{2k\pi}{3}$  mit  $k \in \{1, 2\}$  hinzu addiert. Somit erhält man:

$$z_k = \sqrt[3]{-2}e^{(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})i}, k \in 0, 1, 2$$

$$\Leftrightarrow z_k = \sqrt[3]{-2}e^{(\frac{-\pi}{12} + \frac{8k\pi}{12})i} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow z_k = \sqrt[3]{-2}e^{\frac{(8k-1)\pi}{12}i}$$

### 2.2 b)

$$z^5 = \frac{1+i}{1-i} \Leftrightarrow z^5 = \frac{(1+i)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow z^5 = \frac{2i}{2} \Leftrightarrow z^5 = i \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow z^5 = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\Leftrightarrow z = e^{\frac{\pi}{10}i}$$

Analog zu 2a) erhält man die anderen Lösungen mit den Term  $\frac{2k\pi}{5}$  mit  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Womit man erhält:

$$\begin{aligned} z_k &= e^{(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5})i}, k \in 0, 1, 2, 3, 4 \\ \Leftrightarrow z_k &= e^{(\frac{\pi}{10} + \frac{4k\pi}{10})i} \\ \Leftrightarrow z_k &= e^{\frac{(1+4k)\pi}{10}i} \end{aligned} \tag{6}$$

### 3 Aufgabe 3

#### 3.1 a)

$$\deg(p(z)) = 4$$

Die Nullstellen von p sind  $\{4, i, -5\}$ , wobei  $z_2 = i$  eine zwei-fache Nullstelle ist.

#### 3.2 b)

$$p(z) = \frac{z^5 + 4z^4 - 3z^3 + 2z^2 - z + 1}{z^2 - 3}$$

Die folgenden "Gleichungen" sind nicht als solche zu betrachten. Sie zeigen lediglich die einzelnen Schritte der Polynomdivision.

$$\begin{aligned} (z^5 + 4z^4 - 3z^3 + 2z^2 - z + 1)/(z^2 - 3) &= 0 \\ (4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - z + 1)/(z^2 - 3) &= z^3 \\ (-6z^3 - 10z^2 - z + 1)/(z^2 - 3) &= z^3 + 4z^2 \\ (-10z^2 + 17z + 1)/(z^2 - 3) &= z^3 + 4z^2 - 6z \\ (17z + 31)/(z^2 - 3) &= z^3 + 4z^2 - 6z - 10 \end{aligned} \tag{7}$$

Das Polynom nach der Division:

$$p(z) = z^3 + 4z^2 - 6z - 10 + \frac{17z + 31}{z^2 - 3}$$

## 4 Aufgabe 4

### 4.1 a)

$$\begin{aligned} p(2i) &= (2i)^4 + (2i)^3 + 2(2i)^2 + 4(2i) - 8 \\ &= 16 - 8i - 8 + 8i - 8 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

### 4.2 b)

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^4 + z^3 + 2z^2 + 4z - 8}{z^2 + 4}$$

Wie in 3b) sind die "Gleichungen" nur repräsentativ für die einzelnen Schritte der Polynomdivision.

$$\begin{aligned} (z^4 + z^3 + 2z^2 + 4z - 8)/(z^2 + 4) &= 0 \\ (z^3 - 2z^2 + 4z - 8)/(z^2 + 4) &= z^2 \\ (-2z^2 - 8)/(z^2 + 4) &= z^2 + z \\ (0)/(z^2 + 4) &= z^2 + z - 2 \end{aligned} \tag{9}$$

Das Polynom ist dann nach der Division:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = z^2 + z - 2$$

### 4.3 c)

Da  $q \mid p$  (siehe 4b) sind die Nullstellen von  $q$  auch gleichzeitig die Nullstellen von  $p$ . Die Nullstellen  $z_{1,2}$  von  $q$  sind:

$$\begin{aligned} q(z) &= z^2 + 4 = (z + 2i)(z - 2i) \\ &\Rightarrow z_{1,2} = \pm 2i \end{aligned}$$

Die anderen beiden Nullstellen von  $p$  erhält man vom Polynom  $z^2 + z - 2$  aus 4b:

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + z - 2 \\ \Rightarrow z_{3,4} &= \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\ \Leftrightarrow z_{3,4} &= \frac{-1}{2} \pm \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

Damit kann man  $p$  jeweils komplex und reell zerlegen zu

$$\begin{aligned} p(z) &= z^4 + z^3 + 2z^2 + 4z - 8 \\ &= (z - 2i)(z + 2i)(z + 2)(z - 1) \\ &= (z^2 + 4)(z + 2)(z - 1) \end{aligned} \quad (11)$$

mit den Nullstellen  $z_0 \in \{-2, -2i, 2i, 1\}$ .

## 5 Aufgabe 5

### 5.1 a)

Bestimmen der Nullstellen des Nennerpolynoms  $q(z) = z^2 + 2z + 2$ :

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + 2z + 2 \\ \Rightarrow z_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1 - 2} \\ \Leftrightarrow z_{1,2} &= -1 \pm i \end{aligned} \quad (12)$$

Die Linearfaktoren von  $q$  sind dann  $(z + 1 - i)$  und  $(z + 1 + i)$ . Daraus ergibt sich dann der Ansatz:

$$f(z) = \frac{z + 7}{(z + 1 - i)(z + 1 + i)} = \frac{A}{(z + 1 - i)} + \frac{B}{(z + 1 + i)} \quad (13)$$

Durch die Zuhalttemethode erhält man dann:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-1 + i) + 7}{(-1 + i) + 1 + i} \\ &= \frac{6 + i}{2i} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{(6 + i)(-2i)}{2i(-2i)} = \frac{2 - 12i}{4} = \frac{1 - 6i}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(-1 - i) + 7}{(-1 - i) + 1 - i} \\ &= \frac{6 - i}{-2i} \\ \Leftrightarrow B &= \frac{(6 - i)2i}{(-2i)2i} = \frac{2 - 12i}{4} = \frac{1 - 6i}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

## 5.2 b)

Ansatz für die reelle Zerlegung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2+i}{x-(1+2i)} + \frac{2-i}{x-(1-2i)} \\ &= \frac{Cx+D}{(x-(1+2i))(x-(1-2i))} = \frac{Cx+D}{x^2-2x+5} = \frac{Cx+D}{(x-1)^2+4} \\ &= \frac{(2+i)(x-(1-2i)) + (2-i)(x-(1+2i))}{(x-(1+2i))(x-(1-2i))} \\ &= \frac{(2x-(2-4i)+xi-(i-2i^2)) + (2x-(2+4i)-xi+(i+2i^2))}{(x-1)^2+4} \\ &= \frac{2x-2+2+2x-2-2}{(x-1)^2+4} \\ &= \frac{2x-2+2x-2}{(x-1)^2+4} \\ &= \frac{4x-4}{(x-1)^2+4} \end{aligned} \tag{16}$$

Daraus folgt  $D = -4$  und  $C = 4$ .

## 6 Aufgabe 6

### 6.1 a)

### 6.2 b)