Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 06 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 4, 2020

Contents

1 Aufgabe 1

1.1 a)

1.2 b)

1.3 c)

1.4 d)

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Da f eine lineare Abbildung ist, gelten

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ und } f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} f(4x) &= 2f(2x+3) - 3f(2) \\ &= 2(-x+1) - 3(3x+2) \\ &= -2x + 2 - 9x - 6 \\ &= -11x - 4 \end{aligned}$$

2.2 b)

Ansatz für Bild(f):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} f(4x) = \frac{-11}{4} x - 1 \\ f(1) &= \frac{1}{2} f(2) = \frac{3}{2} x + 1 \end{aligned}$$

Prüfe, ob $f(x)$ und $f(1)$ linear abhängig sind:
Seien a_1, $\mathrm{a}_2 \in \mathbb{R}$ damit gelte

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 f(1) + a_2 f(x) \\ &= a_1 (\frac{3}{2} x + 1) + a_2 (\frac{-11}{4} x - 1) \\ &= \frac{3a_1}{2} x + a_1 + \frac{-11a_2}{4} x - a_2 \\ &= a_1 - a_2 + \frac{6a_1 - 11a_2}{4} x \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die Gleichungen

$$\text{(I) } 0 = a_1 - a_2$$
$$\text{(II) } 0 = \frac{1}{4}(6a_1 - 11a_2)$$
$$\Leftrightarrow 0 = 6a_1 - 11a_2$$

wo aus I folgt $a_1 = a_2$ und aus II folgt $a_1 = \frac{11}{6}a_2$, was I widersprechen würde, wenn gilt $a_1 \neq 0 \neq a_2$. Daruas folgt $a_1 = a_2 = 0$ und damit sind $f(x)$ und $f(1)$ linear unabhängig.

Damit gilt $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{span}\{f(1), f(x)\}$, woraus folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$.

2.3 c)

Es gelten $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$ und $\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 1}) = 2$.
Damit ergibt sich aus der Dimensionsformel

$$\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 1}) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$$
$$\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 1}) - \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2 - 2 = 0$$

Damit gilt für die Basis B_K vom $\mathrm{Kern}(f)$

$$B_K = \{\}$$

2.4 d)

Bestimmen von K_{B_1} mit a, b, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$ax + b \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$
$$\text{mit } \lambda_1(2x+3) + \lambda_2 2 = ax + b$$
$$2\lambda_1 x + \lambda_1 3 + \lambda_2 2 = ax + b$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$\text{(I) } a = 2\lambda_1$$
$$\text{(II) } b = \lambda_1 3 + \lambda_2 2$$

Daraus ergeben sich einmal nach I $\lambda_1 = \frac{a}{2}$
und anschließend nach II $\lambda_2 = \frac{2b-3a}{4}$.

Daraus folgt

$$K_{B_1} : ax + b \mapsto \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{2b-3a}{4} \end{bmatrix}$$

Bestimmen von K_{B_2} mit c, d, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$:

$$cx + d \mapsto \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \beta_1(-x+1) + \beta_2(3x+2) &= cx + d \\ -\beta_1 x + \beta_1 + 3\beta_2 x + 2\beta_2 &= cx + d \\ (3\beta_2 - \beta_1)x + \beta_1 + 2\beta_2 &= cx + d \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ e &= A\beta \end{aligned}$$

was umgeschrieben werden kann zu

$$\begin{aligned} [A|e] = &\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & c \\ 1 & 2 & d \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{\text{II+I}} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & c \\ 0 & 5 & c+d \end{array}\right] \xrightarrow{-\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -c \\ 0 & 5 & c+d \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{\text{5I+3II}} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & -2c+3d \\ 0 & 15 & 3c+3d \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}\text{I}, \frac{1}{15}\text{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-2c+3d}{5} \\ 0 & 1 & \frac{c+d}{5} \end{array}\right] \end{aligned}$$

und daraus folgt $\beta_1 = \frac{-2c+3d}{5}$ und $\beta_2 = \frac{c+d}{5}$.
Damit ergibt sich

$$K_{B_2} : cx + d \mapsto \begin{bmatrix} \frac{-2c+3d}{5} \\ \frac{c+d}{5} \end{bmatrix}$$

Daraus folgt mit $\mathrm{b_n} \in B_1$

$$\begin{aligned} f_{B_1,B_2}(e_n) &= K_{B_2}(f(K_{B_1}^{-1}(e_n))) \text{ mit } n \in \{1, 2\} \\ \Leftrightarrow f_{B_1,B_2}(e_n) &= K_{B_2}(f(b_n)) \end{aligned}$$

Einsetzen der basen:

$$\begin{aligned}
K_{B_2}(f(b_1)) = K_{B_2}(f(2x+3)) &= K_{B_2}(-x+1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
K_{B_2}(f(b_2)) = K_{B_2}(f(2)) &= K_{B_2}(3x+2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$f_{B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Aufgabe 3

Behautung:
Die Zahlenfolgt $(x_n)_n$ konvergiert gegen 0, wenn n gegen ∞ strebt.

zu zeigen: $\forall\ \epsilon > 0$ gibt es ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$|x_n - 0| = \left| \frac{2}{n+1} - 0 \right| < \epsilon, \forall n \geq N_\epsilon$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2}{n+1} - 0 \right| &< \epsilon \\
\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} &< \epsilon \\
\Leftrightarrow \frac{2}{\epsilon} &< n+1 \\
\Leftrightarrow \frac{2}{\epsilon} - 1 &< n
\end{aligned}$$

Man wählt nun ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\epsilon > \frac{2}{\epsilon} - 1$. Dann gilt $\forall\ n \geq N_\epsilon$:

$$\left| \frac{2}{n+1} - 0 \right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N_\epsilon + 1} < \epsilon$$

Als Beispiel:

$$\begin{aligned}\epsilon = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} = 100 \\ \Rightarrow N_\epsilon > \frac{2}{\epsilon} - 1 = 199 \\ \Rightarrow N_\epsilon = 200\end{aligned}$$

4 Aufgabe 4

Ansatz für PBZ mit A, $B \in \mathbb{R}$:

$$\frac{3}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$$

Umgeformt nach A mit $k = -1$:

$$A = \frac{3}{(-1)+2} = 3$$

Umgeformt nach B mit $k = -2$:

$$B = \frac{3}{(-2)+1} = -3$$

Dann gilt mit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{k+1} + \frac{-3}{k+2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{k+2} \\ &= 3 + \frac{3}{n+2}\end{aligned}$$

und nun muss noch gezeigt werden, dass der Term $\frac{3}{n+2}$ konvergiert.

Behautung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+2} = 0$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig.
Dann gilt

$$\left|\frac{3}{n+2} - 0\right| = \frac{3}{n+2} < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} < n+2 \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 2 < n$$

Man wählt nun ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\epsilon > \frac{3}{\epsilon} - 2$.
Dann gilt

$$\left|\frac{3}{n+2} - 0\right| = \frac{3}{n+2} \leq \frac{3}{N_\epsilon + 2} < \epsilon$$

und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{(k+1)(k+2)} \right) = 3$$

5 Aufgabe 5

5.1 a)

5.2 b)

5.3 c)

6 Aufgabe 6

6.1 a)

6.2 b)

6.3 c)

6.4 d)