Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 05 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

6. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1 **2**
- a) . . . 2
- b) . . . 2
- c) . . . 3
- d) . . . 4

Aufgabe 2 **4**
- a) . . . 4
- b) . . . 4
- c) . . . 5
- d) . . . 6

Aufgabe 3 **6**

Aufgabe 4 **7**
- a) . . . 7
- b) . . . 8
- c) . . . 9
- d) . . . 9

Aufgabe 1

a)

$$f_{B_1,B_1} = [\mathrm{K}_{B_1}(f(b_1)), \mathrm{K}_{B_1}(f(b_2)), \mathrm{K}_{B_1}(f(b_3))]$$

1.Spalte:

$$\mathrm{K}_{B_1}(f(b_1)) = \mathrm{K}_{B_1}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 2 \cdot e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = v_1$$

2.Spalte:

$$\mathrm{K}_{B_1}(f(b_2)) = \mathrm{K}_{B_1}\left(\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = -4 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.Spalte(siehe 1.Spalte):

$$\mathrm{K}_{B_1}(f(b_1)) = \mathrm{K}_{B_1}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = v_3$$

$$f_{B_1,B_1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b)

allg:

$$\mathrm{id}_{B_2,B_1} = \mathrm{K}_{B_1} \circ \mathrm{K}_{B_2}^{-1} = \mathrm{K}_{B_1}(\mathrm{K}_{B_2}^{-1}(e_i)) = \mathrm{K}_{B_1}(v_j)$$

1.Spalte:

$$\mathrm{K}_{B_1}(\mathrm{K}_{B_2}^{-1}(e_1)) = \mathrm{K}_{B_1}(v_1) = \mathrm{K}_{B_1}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{K}_{B_1}(2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-2) \cdot e_3)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = v_1$$

2.Spalte:

$$\mathrm{K}_{B_1}(\mathrm{K}_{B_2}^{-1}(e_2)) = \mathrm{K}_{B_1}(v_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = v_2$$

3.Spalte:

$$\mathrm{K}_{B_1}(\mathrm{K}_{B_2}^{-1}(e_3)) = \mathrm{K}_{B_1}(v_3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = v_3$$

$$\mathrm{id}_{B_2,B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

c)

allg:

$$\mathrm{id}_{B_1,B_2} = \mathrm{K}_{B_2} \circ \mathrm{K}_{B_1}^{-1} = \mathrm{K}_{B_2}(\mathrm{K}_{B_1}^{-1}(e_i)) = \mathrm{K}_{B_2}(b_j)$$

1.Spalte:

$$\mathrm{K}_{B_2}(b_1) = \mathrm{K}_{B_2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{K}_{B_2}\left(\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$$

LGS:

$$\text{I: } 1 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3$$

$$\text{II: } 0 = 0\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_3 = -2\lambda_2$$

$$\text{III: } 0 = -2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3$$

Also:

$$\text{III: } 0 = -2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 8\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = -5\lambda - 2$$

$$\Rightarrow \text{I: } 1 = -10\lambda_2 + 4\lambda_2 + 4\lambda_2$$

$$2\lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda_3 = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{K}_{B_2}\left(\frac{5}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.Spalte (auf die selbe Weise, wie 1.Spalte):

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

$$\Rightarrow \mathrm{K}_{B_2}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{K}_{B_2}\left(-3\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.Spalte (siehe 1.Spalte):

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{K}_{B_2}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \mathrm{K}_{B_2}\left(2\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\2\\-2\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{id}_{B_1,B_2} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -3 & 2\\-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{aligned}f_{B_2,B_2} &= \mathrm{id}_{B_1,B_2}\cdot f_{B_1,B_1}\cdot \mathrm{id}_{B_2,B_1}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -3 & 2\\-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -4 & -2\\0 & -2 & 1\\-2 & 2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\0 & 2 & 1\\-2 & -2 & 4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\0 & 2 & 1\\-2 & -2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\0 & -2 & -1\\-2 & -2 & 4\end{bmatrix} = f_{B_2,B_2}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

Da f linear ist gelten $f(x+y) = f(x) + f(y)$ und $f(r\cdot x) = r\cdot f(x)$. Damit gilt

$$\begin{aligned}f(2x) &= 2f(x+3) - 6f(1)\\ &= 2(-2x+1) - 6(x+2)\\ &= -4x + 2 - 6x - 12\\ &= -10x - 10\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}f(1) &= x + 2\\ f(x) &= -5x - 5\end{aligned}$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(ax+b) &= f(ax) + f(b) = af(x) + bf(1) \\ &= a(-5x-5) + b(x+2) \\ &= -5ax - 5a + bx + 2b \\ &= (b-5a)x + (2b-5a) \end{aligned}$$

also gilt

$$f : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b-5a \\ 2b-5a \end{bmatrix}$$

f lässt als Matrix wie folgt darstellen

$$f = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Überprüfung auf lineare Abhängigkeit mit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

daraus ergibt sich ein LGS, dass zu einem Widerspruch führt

$$\begin{aligned} \text{(I) } 0 &= r_2 - 5r_1 \\ \text{(II) } 0 &= 2r_2 - 5r_1 \end{aligned}$$

daraus folgt, dass die Spalten linear unabhängig sind, Woraus folgt

$$\dim(\text{Bild}(f)) = 2$$

c)

Überführen der Matrix

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \xrightarrow{\text{I}-\text{II}} &\left[\begin{array}{cc|c} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{5}\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Für $\text{Kern}(f)$ gibt es also nur eine Lösung, weshalb gilt

$$\text{Kern}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

daraus folgt

$$B_{\text{Kern}(f)} = \{\}$$

d)

$$f_{B_1,B_2} = [\mathrm{K}_{B_2}(f(b_1)), \mathrm{K}_{B_2}(f(b_2))]$$

1.Spalte:

$$\mathrm{K}_{B_2}(f(b_1)) = \mathrm{K}_{B_2}(-2x+1) = 1 \cdot b_{2_1} + 0 \cdot b_{2_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.Spalte:

$$\mathrm{K}_{B_2}(f(b_2)) = \mathrm{K}_{B_2}(x+2) = 0 \cdot b_{2_1} + 1 \cdot b_{2_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f_{B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

Es gilt

$$(3k+1)(3k+4) = 9\left(k+\frac{1}{3}\right)\left(k+\frac{4}{3}\right)$$

daraus ergibt sich dann der folgende Ansatz

$$\frac{\frac{1}{3}}{(k+\frac{1}{3})(k+\frac{4}{3})} = \frac{A}{k+\frac{1}{3}} + \frac{B}{k+\frac{4}{3}}$$

für A mit $k = -\frac{1}{3}$ gilt

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = A = \frac{1}{3}$$

und für B mit $k = -\frac{4}{3}$ gilt

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}} = B = -\frac{1}{3}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{(3k+1)(3k+4)} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3(k+\frac{1}{3})} - \frac{1}{3(k+\frac{4}{3})} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \dots \\
&+ \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) + \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{3n+4}
\end{aligned}$$

Für den Grenzwert gilt dann

$$\begin{aligned}
\lim_{n \Leftrightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n+4} \right) &= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+4} \\
&= 1 - \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 3n + \lim_{n\to\infty} 4} \\
&= 1 - \frac{1}{\infty + 4} \overset{\text{GWS}}{=} 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{(3k+1)(3k+4)} = 1$$

Aufgabe 4

a)

IA: Es gilt

$$x_0 = 1 < \frac{4}{3}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < \frac{4}{3}$$

IB: Damit gilt dann

$$x_{n+1} < \frac{4}{3}$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &< \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{x_n}{4} + 1 &< \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{x_n}{4} &< \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x_n &< \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Folglich gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < \frac{4}{3}$$

b)

Zu Zeigen ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < x_{n+1}$$

IA: Es gilt

$$x_0 = 1 < x_1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < x_{n+1}$$

IB: Damit gilt dann

$$x_{n+1} < x_{n+2}$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &< x_{n+2} \\ \Leftrightarrow \frac{x_n}{4} + 1 &< \frac{x_{n+1}}{4} + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x_n}{4} &< \frac{x_{n+1}}{4} \\ \Leftrightarrow x_n &< x_{n+1} \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < x_{n+1}$$

Damit ist die Folge x_n streng monoton wachsend.

c)

Die Folge x_n ist nach oben beschränkt mit $M = \frac{4}{3}$ (siehe a)

Die Folge x_n ist streng monoton wachsend (siehe b)

Daraus folgt, dass die Folge x_n auch nach unten beschränkt ist mit $m = 1$

Daraus folgt die Folge x_n konvergiert.

d)

Es gilt für die ersten Folgeglieder

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \frac{x_0}{4} + 1 = \frac{1}{4} + 1 \\
x_2 &= \frac{x_1}{4} + 1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Man kann die Folge also auch wie folgt schreiben

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}
\end{aligned}$$

dann gilt für den Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{4-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}-\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}\\ &= \frac{4}{3}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\cdot 4^n}\\ &\overset{\text{GWS}}{=} \frac{4}{3}-0=\frac{4}{3}\end{aligned}$$