Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 03

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

August 22, 2020

Contents

1 Aufgabe 1

1.1 a)

1.1.1 $\mathbf{z_1}$

$$\begin{aligned} z_1 = 4e^{-\frac{\pi}{6}i} &= 4(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) \\ &= 4(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) \\ &= 2\sqrt{3} - 2i \end{aligned} \tag{1}$$

1.1.2 $\mathbf{z_2}$

$$\begin{aligned} z_2 = 2e^{\frac{16}{3}\pi i} &= 2e^{(\frac{4}{3}+4)\pi i} = 2e^{\frac{4}{3}\pi i} \\ &= -2e^{\frac{1}{3}\pi i} \\ &= -2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) \\ &= -2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) \\ &= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{aligned} \tag{2}$$

1.2 b)

1.2.1 $\mathbf{z_1}$

$$r^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 18$$

$$\tan(\phi) = \frac{-3}{-3}$$

Der Nenner ist kleiner als 0:

$$\Rightarrow \phi = \arctan(\frac{-3}{-3}) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Damit ist z_1 in Eulerdarstellung:

$$z_1 = \sqrt{18}e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

1.2.2 $\mathbf{z_2}$

$$r^2 = 2^2 + (\sqrt{12})^2 = 4 + 12 = 16$$
$$\Leftrightarrow r = 4$$

$$\tan(\phi) = \frac{\sqrt{12}}{2}$$

Der Nenner ist größer 0:

$$\Rightarrow \phi = \arctan(\frac{\sqrt{12}}{2}) = \frac{\pi}{3}$$

Damit ist z_2 in Eulerdarstellung:

$$z_2 = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$$

2 Aufgabe 2

2.1 a)

$$\begin{aligned} & z^3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0 \\ \Leftrightarrow & z^3 + 2e^{\frac{-\pi}{4}i} = 0 \\ \Leftrightarrow & z^3 = -2e^{\frac{-\pi}{4}i} \\ \Leftrightarrow & z = \sqrt[3]{-2}e^{\frac{-\pi}{12}i} = z_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Die anderen Lösungen z_2 und z_3 lassen sich finden, wenn man den Term $\frac{2k\pi}{3}$ mit k $\in \{1, 2\}$ hinzu addiert. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} & z_k = \sqrt[3]{-2}e^{(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})i}, k \in 0, 1, 2 \\ \Leftrightarrow & z_k = \sqrt[3]{-2}e^{(\frac{-\pi}{12} + \frac{8k\pi}{12})i} \\ \Leftrightarrow & z_k = \sqrt[3]{-2}e^{\frac{(8k-1)\pi}{12}i} \end{aligned} \tag{4}$$

2.2 b)

$$\begin{aligned} z^5 = \frac{1+i}{1-i} & \Leftrightarrow z^5 = \frac{(1+i)^2}{2} \\ & \Leftrightarrow z^5 = \frac{2i}{2} \Leftrightarrow z^5 = i \\ & \Leftrightarrow z^5 = e^{\frac{\pi}{2}i} \\ & \Leftrightarrow z = e^{\frac{\pi}{10}i} \end{aligned} \tag{5}$$

Analog zu 2a) erhält man die anderen Lösungen mit den Term $\frac{2k\pi}{5}$ mit k $\in$ {1, 2, 3, 4}. Womit man erhält:

$$\begin{aligned} z_k &= e^{(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})i}, k \in 0,1,2,3,4 \\ \Leftrightarrow z_k &= e^{(\frac{\pi}{10}+\frac{4k\pi}{10})i} \\ \Leftrightarrow z_k &= e^{\frac{(1+4k)\pi}{10}i} \end{aligned} \tag{6}$$

3 Aufgabe 3

3.1 a)

$$\deg(p(z)) = 4$$

Die Nullstellen von p sind {4, i, -5}, wobei $z_2 = i$ eine zwei-fache Nullstelle ist.

3.2 b)

$$p(z) = \frac{z^5 + 4z^4 - 3z^3 + 2z^2 - z + 1}{z^2 - 3}$$

Die folgenden "Gleichungen" sind nicht als solche zu betrachten. Sie zeigen lediglich die einzelnen Schritte der Polynomdivision.

$$\begin{aligned} (z^5 + 4z^4 - 3z^3 + 2z^2 - z + 1)/(z^2 - 3) &= 0 \\ (4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - z + 1)/(z^2 - 3) &= z^3 \\ (-6z^3 - 10z^2 - z + 1)/(z^2 - 3) &= z^3 + 4z^2 \\ (-10z^2 + 17z + 1)/(z^2 - 3) &= z^3 + 4z^2 - 6z \\ (17z + 31)/(z^2 - 3) &= z^3 + 4z^2 - 6z - 10 \end{aligned} \tag{7}$$

Das Polynom nach der Division:

$$p(z) = z^3 + 4z^2 - 6z - 10 + \frac{17z + 31}{z^2 - 3}$$

4 Aufgabe 4

4.1 a)

$$\begin{aligned} p(2i) &= (2i)^4 + (2i)^3 + 2(2i)^2 + 4(2i) - 8 \\ &= 16 - 8i - 8 + 8i - 8 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

4.2 b)

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^4 + z^3 + 2z^2 + 4z - 8}{z^2 + 4}$$

Wie in 3b) sind die "Gleichungen" nur repräsentativ für den Schritt, der gerade durchgeführt wird.

$$\begin{aligned} (z^4 + z^3 + 2z^2 + 4z - 8)/(z^2 + 4) &= 0 \\ (z^3 - 2z^2 + 4z - 8)/(z^2 + 4) &= z^2 \\ (-2z^2 - 8)/(z^2 + 4) &= z^2 + z \\ (0)/(z^2 + 4) &= z^2 + z - 2 \end{aligned} \tag{9}$$

Das Polynom ist dann nach der Division:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = z^2 + z - 2$$

4.3 c)

5 Aufgabe 5

5.1 a)

5.2 b)

6 Aufgabe 6

6.1 a)

6.2 b)