Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 09 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 24, 2020

Contents

1 Aufgabe 1

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\
f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}} \\
T_2(x) &= \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2
\end{aligned}
$$

ξ muss zwischen dem Entwicklungspunkt $f(0)$ und x liegen, also: $\xi \in]1, x[\cup$
$]x, 1[$

$$
\begin{aligned}
R_2(x) &= \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 = \frac{1}{16}\xi^{-\frac{5}{2}}(x-1)^3 \\
T_4(x) &= \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^4(1)}{3!}(x-1)^4 \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{3}{48}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4
\end{aligned}
$$

Für x gilt:

$$|x-1| \leq \frac{1}{2}$$

Für $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$$x - 1 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

Für $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$$
\begin{aligned}
x - 1 \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow L = \left[1, \frac{3}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Den Maximalen Fehler des Restglieds von T_2, abschätzen. $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ und $\xi \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$

$$R_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{16}\xi^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3 = \frac{1}{128}\xi^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{128\sqrt{\xi^5}} \leq \frac{1}{128\sqrt{1^5}} = \frac{1}{128} = 0,0078125$$

$$T_2(1,1) = 1,04875$$

$$T_4(1,1) = 1.048808594$$

Taschenrechner $\sqrt{1,1} = 1,048808848$

T_4 lieftert eine genauere Approximation von $\sqrt{1,1}$, nämlich auf sechs Nachkommastellen genau, anstatt nur drei bei T_2

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Zu zeigen ist

$$f^{(n)}(x) = n!\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n\frac{1}{(3+x)^{n+1}}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA:

Es gilt

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= 0!\left(\frac{1}{(3-x)^{0+1}} + (-1)^0\frac{1}{(3+x)^{0+1}}\right) \\ &= \frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x} \\ &= \frac{(3+x)+(3-x)}{(3+x)(3-x)} \\ &= \frac{6}{9-x^2} = f(x) \end{aligned}$$

IV:

Es gelte für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = n!\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n\frac{1}{(3+x)^{n+1}}\right)$$

IS:

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\
&= \left(n!\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}}\right)\right)' \\
&= n!\left(\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}}\right)' + (-1)^n \left(\frac{1}{(3+x)^{n+1}}\right)'\right) \\
&= n!\left(\left((3-x)^{-(n+1)}\right)' + (-1)^n \left((3+x)^{-(n+1)}\right)'\right) \\
&= n!\left(\left(-(n+1)(3-x)^{-(n+2)}(-1)\right) + (-1)^n \left(-(n+1)(3+x)^{-(n+2)}\right)\right) \\
&= n!(n+1)\left((-1)(3-x)^{-(n+2)}(-1) + (-1)^n(-1)(3+x)^{-(n+2)}\right) \\
&= (n+1)!\left((3-x)^{-(n+2)} + (-1)^{n+1}(3+x)^{-(n+2)}\right) \\
&= (n+1)!\left(\frac{1}{(3-x)^{n+2}} + (-1)^{n+1}\frac{1}{(3+x)^{n+2}}\right)
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
f^{(n)}(x) = n!\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}}\right)
$$

2.2 b)

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= n!\left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}}\right) \\
&= n!\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right) \\
&= n!\left(\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}3^{n+1}} + \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{3^{n+1}3^{n+1}}\right) \\
&= n!\left(\frac{3^{n+1} + (-1)^n 3^{n+1}}{3^{2n+2}}\right)
\end{aligned}
$$

dann gilt für ungerade n

$$
f^{(n)}(0) = n!\left(\frac{3^{n+1} - 3^{n+1}}{3^{2n+2}}\right) = 0
$$

und für gerade n gilt

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= n!\left(\frac{2\cdot 3^{n+1}}{3^{2n+2}}\right) \\
&= \frac{2n!}{3^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Seien $n, n_e, n_o \in \mathbb{N}$ mit $n_o = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $n_e = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
Dann gilt für T_n mit $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n_o} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{2(2k)!}{(2k)!3^{2k+1}} x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{2x^{2k}}{3^{2k+1}}
\end{aligned}
$$

mit dem jeweils entsprechenden Restglied

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)!\left(\frac{1}{(3-\xi)^{n+2}} + (-1)^{n+1}\frac{1}{(3+\xi)^{n+2}}\right)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)!\left(\frac{(3+\xi)^{n+2}+(-1)^{n+1}(3-\xi)^{n+1}}{(3-\xi)^{n+2}(3+\xi)^{n+2}}\right)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(3+\xi)^{n+2} + (-1)^n(3-\xi)^{n+2}}{(3-\xi)^{n+2}(3+\xi)^{n+2}} x^{n+1}
\end{aligned}
$$

2.3 c)

Zu zeigen ist für $x \in]-1, 1[$

$$
\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0
$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} R_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(3+\xi)^{n+2} + (-1)^{n+1}(3-\xi)^{n+2}}{(3-\xi)^{n+2}(3+\xi)^{n+2}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+2} + (-1)^{n+1}2^{n+2}}{2^{n+2}4^{n+2}} x^{n+1}, \xi = 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+2} + (-1)^{n+1}2^{n+2}}{2^{n+2}4^{n+2}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+4} + (-1)^{n+1}2^{n+2}}{2^{n+2}2^{2n+4}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}(2^{n+2} + (-1)^{n+2})}{2^{3(n+2)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2} + (-1)^{n}}{2^{2(n+2)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}}{2^{2(n+1)}} x^{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{2(n+2)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{2^{n+2}} + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{2^{2(n+2)}} \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

nach $n+2$ -maliger Anwendung der Regel von de l'Hospital.
Damit gilt für $x \in]-1, 1[$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

3 Aufgabe 3

Für die n-te Ableitung von f gilt

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n} 5^x = \ln(5) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} 5^x \\
&= (\ln(5))^n 5^x
\end{aligned}
$$

damit gilt für dessen Taylorreihe T_n mit $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= 1 + \frac{\ln(5)x}{1!} + \frac{(\ln(5)x)^2}{2!} + \frac{(\ln(5)x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\ln(5)x)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(5)x)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

mit dessen Restglied

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(\ln(5))^{n+1} 5^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(\ln(5))^{n+1} 5^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{(x \ln(5))^{n+1} 5^{\xi}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = \frac{(x \ln(5))^{n+1} 5^{\xi}}{(n+1)!}$$

Wenn man die Fakultät für alle $n > 1$ betrachtet, wächst diese schneller als jede Exponentialfunktion. Deshalb sollte gelten

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

4 Aufgabe 4

4.1 a)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{4^{3(x-2)}} &= 16^{1-x} \\
\Leftrightarrow 4^{\frac{3}{2}(x-2)} &= (4^2)^{1-x} \\
\Leftrightarrow 4^{\frac{3}{2}(x-2)} &= 4^{2(1-x)} \\
\Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-2) &= 2(1-x) \\
\Leftrightarrow 3(x-2) &= 4(1-x) \\
\Leftrightarrow 3x - 6 &= 4 - 4x \\
\Leftrightarrow 7x &= 10 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{10}{7}
\end{aligned}
$$

4.2 b)

$$\begin{aligned}
e^{ix-\ln(2)} + \frac{1}{e^{ix+\ln(2)}} &= 1 \\
\Leftrightarrow e^{ix-\ln(2)} + e^{-ix-\ln(2)} &= 1 \\
\Leftrightarrow e^{ix}e^{-\ln(2)} + e^{-ix}e^{-\ln(2)} &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{e^{ix}}{2} + \frac{e^{-ix}}{2} &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{(\cos(x) + i\sin(x)) + (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2} &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{(\cos(x) + i\sin(x)) + (\cos(x) - i\sin(x))}{2} &= 1 \\
\Leftrightarrow \cos(x) &= 1 \\
\Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

5 Aufgabe 5

5.1 a)

5.2 b)

6 Aufgabe 6

6.1 a)

Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{e^{-x}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{0} = \frac{0}{0}$$

damit ist die Regel von de l'Hospital anwendbar und es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{e^{-x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-e^{-x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{(1+x^2)(-e^{-x})} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit existiert dessen Grenzwert.

6.2 b)

Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+\arctan(x))^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}(1+\arctan(x))^{x^{-1}} \\ &= \lim_{x\to 0} e^{x^{-1}\ln(1+\arctan(x))}\end{aligned}$$

und besitzt einen Grenzwert genau dann, wenn der Exponent einen Grenzwert besitzt. Also gilt

$$\lim_{x\to 0} x^{-1}\ln(1+\arctan(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arctan(x))}{x} = \frac{0}{0}$$

wo die bedingung für die Regel von de l'Hospital erfüllt ist. Damit gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x^{-1}\ln(1+\arctan(x)) &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\arctan(x)}\frac{1}{1+x^2}}{1} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\arctan(x))(1+x^2)} = 1\end{aligned}$$

Da dieser Grenzwert existiert, existiert auch der andere. Damit gilt

$$\lim_{x\to 0}(1+\arctan(x))^{\frac{1}{x}} = e$$

mit e der Eulerschen Zahl.

7 Aufgabe 7

7.1 a)

$$\begin{aligned}v(t) = s'(t) &= \left(\frac{v^2}{g}\ln\left(\cosh\left(\frac{gt}{v}\right)\right)\right)' = \frac{v^2 g\sinh(\frac{gt}{v})}{vg\cosh(\frac{gt}{v})} = v\tanh\left(\frac{gt}{v}\right) \\ a(t) = s'(t) &= \left(v\tanh\left(\frac{gt}{v}\right)\right)' = v\cdot\frac{g}{\cosh(\frac{gt}{v})^2 v} = \frac{g}{\cosh(\frac{gt}{v})^2}\end{aligned}$$

7.2 b)

$$\begin{aligned}s(5) &= \frac{50^2 m/s}{9,81 m/s^2}\ln\left(\cosh\left(\frac{9,81 m/s^2\cdot 5s}{50 m/s}\right)\right) = 283,52m \\ \Delta s = s'(t)\cdot\Delta t &= 50m/s\cdot\tanh\left(\frac{9,81m/s^2\cdot 5s}{50m/s}\right)\cdot\frac{1}{2} = \pm 18,84m \\ |\Delta s| &= 18,84m\end{aligned}$$