# Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 07 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 16, 2020

## Contents

# 1 Aufgabe 1

## 1.1 a)

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} + \frac{1}{g} &= \frac{1}{f} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{b} &= \frac{g-f}{fg} \\ \Leftrightarrow b &= \frac{fg}{g-f} \end{aligned}$$

Damit ist b betrachtet als Funktion

$$b(g) = \frac{fg}{g-f}$$

## 1.2 b)

Wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$ gilt, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} b(x_n) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n \cdot f}{\lim_{n\to\infty} x_n - f} = \frac{af}{a-f} = b(a)$$

daraus folgt $b(g)$ ist stetig auf $D(b) = \mathbb{R} \setminus \{f\}$.

## 1.3 c)

Es gilt für den ersten Term

$$\begin{aligned} \lim_{g\to\infty} b(g) &= \lim_{g\to\infty} \frac{fg}{g-f} \\ &= \lim_{g\to\infty} \frac{f}{1-\frac{f}{g}} \\ &= \frac{f}{1-0} \\ &= f \end{aligned}$$

Es gilt für den zweiten Term

$$\begin{aligned}\lim_{g\to f} b(g) &= \lim_{g\to f} \frac{fg}{g-f} \\ &= \frac{\lim_{g\to f} fg}{\lim_{g\to f}(g-f)} \\ &= \frac{f^2}{f-f} \\ &\Rightarrow \lim_{g\to f} b(g) = \infty\end{aligned}$$

# 2 Aufgabe 2

## 2.1 a)

Wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$ gelten,
dann gilt für $x < 1$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f(x_n)) &= \lim_{n\to\infty}(\cos(x_n\pi)+3) \\ &= \cos(\lim_{n\to\infty}(x_n)\pi)+3 \\ &= \cos(a\pi)+3 = f(a)\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ stetig auf $]-\infty, 1[$

und für $x > 1$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f(x_n)) &= \lim_{n\to\infty}(\frac{x_n^2+1}{x_n+1}) \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}(x_n)^2+1}{\lim_{n\to\infty}(x_n)+1} \\ &= \frac{a^2+1}{a+1} = f(a)\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ stetig auf $]1, \infty[$

Zu überprüfen ist noch die Stelle $x = 1$

Es gilt für $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}(\cos(\pi x)+3) \\ &= \cos(\pi)+3 = -1+3 = 2\end{aligned}$$

und es gilt für $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x+1} \\ &= \frac{1^2+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

daraus folgt, dass $f$ an der Stelle $x = 1$ nicht stetig ist.

Damit ist $f$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig.

## 2.2 b)

Der linearaffine Anteil von $f$ muss die anderen Terme an den jeweiligen Grenzen berühren.
Daraus ergebt sich

$$\begin{aligned}f(-1) &= \frac{1}{-1} = -1 \\ f(2) &= \ln(2)\end{aligned}$$

dann die folgenden Punkte $P_1$(-1, -1) und $P_2$(2, ln(2)).
Daraus ergeben sich dann folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}a &= \frac{\ln(2)-(-1)}{2-(-1)} = \frac{\ln(2)+1}{3} \\ b &= f(-1) - a(-1) = \frac{\ln(2)+1}{3} - 1\end{aligned}$$

$f$ ist dann auf $\mathbb{R}$ stetig, wenn der linearaffine Anteil dem folgenden Term entspricht

$$\frac{\ln(2)+1}{3}x + \frac{\ln(2)+1}{3} - 1$$

# 3 Aufgabe 3

## 3.1 a)

Es gelten

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^6 - 1 - 1 = -1 \text{ und} \\ f(2) &= 2^6 - 2 - 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 1 \\ &= 64 - 2 - 1 = 61 \end{aligned}$$

Da $f$ stetig ist und $f(1) < 0$ und $f(2) > 0$ gelten, muss $f$ auf dem Intervall $[1, 2]$ eine Nullstelle besitzen.

## 3.2 b)

$$\begin{aligned} a_0 = 1,\ b_0 = 2 \\ x_k &= \frac{a+b}{2} \\ x_0 &= \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 1 \\ &= \frac{729}{64} - \frac{3}{2} - 1 > 0 \\ \Rightarrow a_1 = 1,\ b_1 = \frac{3}{2} \\ &\vdots \\ a_6 = \frac{9}{8} = 1,125;\ b_6 = \frac{73}{64} = 1,1406 \end{aligned}$$

Das Intervall ist dann [1,125; 1,1406].

# 4 Aufgabe 4

## 4.1 a)

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\ &= \frac{x - x_0}{(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})(x - x_0)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

damit gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

daraus folgt

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## 4.2 b)

### 4.2.1 (a)

$$\begin{aligned}
(5x^3 - 2\sin(3x))' &= (5x^3)' - (2\sin(3x))' \\
&= 15x^2 - 6\cos(3x)
\end{aligned}$$

### 4.2.2 (b)

$$(\cos(x)e^x)' = \cos(x)e^x - \sin(x)e^x$$

### 4.2.3 (c)

$$(e^{2x^2+11}+7)' = e^{2x^2+11}(4x)$$

### 4.2.4 (d)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin(x^2-2\pi)}{\cos(3\pi-x^2)}\right)' &= \frac{2x\cos(x^2-2\pi)\cos(3\pi-x^2) - \sin(x^2-2\pi)(-\sin(3\pi-x^2)(-2x))}{\cos^2(3\pi-x^2)} \\
&= \frac{2x(\cos(x^2-2\pi)\cos(3\pi-x^2) - \sin(x^2-2\pi)\sin(3\pi-x^2))}{\cos^2(3\pi-x^2)} \\
&= \frac{2x\cos((x^2-2\pi)+(3\pi-x^2))}{\cos^2(3\pi-x^2)} \\
&= \frac{2x\cos(\pi)}{\cos^2(3\pi-x^2)} \\
&= \frac{-2x}{\cos^2(\pi-x^2)}
\end{aligned}$$

# 5 Aufgabe 5

Für die 1. Ableitung von $f$ gilt

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$$

dann gilt für eine beliebige Tangente $t(x) = ax + b$ am Graphen von $f$

$$a = f'(x_0) = -\frac{2}{(x_0-2)^2}$$
$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = \frac{2}{x_0-2} + 2 + \frac{2x_0}{(x_0-2)^2}$$

mit der Anforderung, dass $a = -\frac{1}{2}$ sein muss. Damit gilt

$$a = -\frac{2}{(x_0-2)^2} = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x_0-2)^2}{2} = 2$$
$$\Leftrightarrow (x_0-2)^2 = 4$$
$$\Leftarrow x_0 - 2 = \pm 2$$

daraus ergeben sich die beiden Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$. Daraus folgen dann die beiden Tangenten

$$t_1(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$
$$t_2(x) = -\frac{1}{2}x + 5$$