

Analysis I und Lineare Algebra für  
Ingenieurwissenschaften  
Hausaufgabe 08 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 21, 2020

## Contents

<b>1</b>	<b>Aufgabe 1</b>	<b>2</b>
1.1	a) . . . . .	2
1.2	b) . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Aufgabe 2</b>	<b>2</b>
2.1	a) und c) . . . . .	2
2.2	b) . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Aufgabe 3</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Aufgabe 4</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Aufgabe 5</b>	<b>4</b>
5.1	a) . . . . .	4
5.2	b) . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Aufgabe 6</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Aufgabe 7</b>	<b>7</b>

## 1 Aufgabe 1

### 1.1 a)

Da der Grenzwert des Terms bei direktem Einsetzen nicht definiert ist (" $\frac{0}{0}$ "), muss die Regel von de l'Hospital angewandt werden. Also gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2 \cos(2x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} e^x}{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos(2x)} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Damit existiert dessen Grenzwert.

### 1.2 b)

Siehe a)

Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} -\cos(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} 2} \\ &= \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

Damit existiert dessen Grenzwert nach zweifacher Anwendung der Regel.

## 2 Aufgabe 2

### 2.1 a) und c)

$$\begin{aligned}x_1 &= \underline{1, 2} \\ x_2 &= \underline{1, 143575834} \\ x_3 &= \underline{1, 134909462} \\ x_4 &= \underline{1, 134724221} \\ x_5 &= \underline{1, 134724138} \\ x_6 &= \underline{1, 134724138}\end{aligned}$$

## 2.2 b)

aus HA07-3:  $a_6 = \frac{9}{8}$   $b_6 = \frac{73}{64}$

$$y_6 = \frac{a_6 + b_6}{2} = \frac{\frac{9}{8} + \frac{73}{64}}{2} = \frac{145}{128} = 1,1328125$$
$$x_6 = 1,134724138 > 1,1328125 = y_6$$

Das Bisektionsverfahren liefert mit 1,132 einen kleineren Funktionswert, als das Newton-Verfahren mit 1,134

## 3 Aufgabe 3

Mittelwertsatz:  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi)$  wenn  $y < x$

$$f'(\xi) = \tan'(\xi) = \frac{\sin'(\xi)}{\cos'(\xi)} = \frac{\cos^2(\xi) + \sin^2(\xi)}{\cos^2(\xi)} = \frac{1}{\cos^2(\xi)}$$

Da sich der Nenner des Bruchs zwischen  $]0, 1]$  bewegt, gilt:  $\frac{1}{\cos^2(\xi)} \geq 1$

$$\frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \frac{\tan(x)}{x} = \frac{1}{\cos^2(\xi)} \geq 1$$
$$|\tan(x)| \geq |x|$$

Analog dazu muss also auch  $|\tan(y)| \geq |y|$  sein, wodurch auch  $|\tan(x) + \tan(y)| \geq |x + y|$  gelten muss.

## 4 Aufgabe 4

$$f(x) = \frac{x-2}{(3-x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(3-x)^2 - (x-2)(2x-6)}{((3-x)^2)^2} = \frac{(9+x^2-6x) - (2x^2-6x-4x+12)}{(3-x)^4}$$
$$= \frac{-x^2+4x-3}{(3-x)^4} = \frac{(3-x)(x-1)}{(3-x)^4} = \frac{x-1}{(3-x)^3}$$

Kandidaten:  $x_1 = 0$  (Randpunkt),  $x_2 = 1$  (Nullstelle von  $f'(x)$ ),  $x_3 = 3$  (Randpunkt)

$$f(0) = \frac{0-2}{(3-0)^2} = -\frac{2}{9}$$

$$f(1) = \frac{1-2}{(3-1)^2} = -\frac{1}{4}$$

$f(3)$  ist aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen (und nicht definiert), also mit dem Grenzwert annähern:

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{(3-x)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Also befindet sich das globale Maximum bei  $x_3 = 3$ , bei  $x_1 = 0$  ein lokales Maximum und bei  $x_2 = 1$  ein globales Minimum.

## 5 Aufgabe 5

### 5.1 a)

Es gilt für die Ableitung von  $g$

$$\begin{aligned} g'(t) &= ((s'(t))^2 + (\omega s(t))^2)' \\ &= ((s'(t))^2)' + ((\omega s(t))^2)' \\ &= 2s'(t)s''(t) + 2(\omega s(t))(\omega s'(t)) \\ &= 2s'(t)s''(t) + 2\omega^2 s(t)s'(t) \\ &= 2s'(t)(s''(t) + \omega^2 s(t)) \end{aligned}$$

Da  $s''(t) = -\omega^2 s(t)$  gilt, folgt daraus

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2s'(t)((-\omega^2 s(t)) + \omega^2 s(t)) \\ &= 2s'(t) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Da  $g'(t) \geq 0$  und  $g'(t) \leq 0$  mit  $t \in \mathbb{R}$  gelten, folgt daraus, dass  $g(t) = c$ , mit  $c \in \mathbb{R}$  und für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Daraus folgt, dass  $(s'(t))^2 + (\omega s(t))^2$  ebenfalls konstant sein muss. Daraus folgt wiederum, dass  $(s'(t))^2$  und  $(\omega s(t))^2$  konstant sind. Daraus folgt dann, dass  $\omega s(t)$  konstant ist und damit gilt  $s'(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , woraus wiederum aus der ursprünglichen Annahme folgt  $s(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Damit gilt dann für auch  $g(t) = 0$ , für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

## 5.2 b)

Es gilt für die erste und zweite Ableitung von  $h$

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left( s(t) - s(0) \cos(\omega t) - \frac{s'(0)}{\omega} \sin(\omega t) \right)' \\ &= s'(t) + s(0) \omega \sin(\omega t) - s'(0) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(t) &= (s'(t) + s(0) \omega \sin(\omega t) - s'(0) \cos(\omega t))' \\ &= s''(t) + s(0) \omega^2 \cos(\omega t) + s'(0) \omega \sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 s(t) + s(0) \omega^2 \cos(\omega t) + s'(0) \omega \sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 \left( s(t) - s(0) \cos(\omega t) - \frac{s'(0)}{\omega} \sin(\omega t) \right) \\ &= -\omega^2 h(t) \end{aligned}$$

Was in 5a) gezeigt wurde, kann analog für  $h$  gezeigt werden. Damit gilt

$$\begin{aligned} h(t) = 0 &= s(t) - s(0) \cos(\omega t) - \frac{s'(0)}{\omega} \sin(\omega t) \\ \Leftrightarrow s(t) &= s(0) \cos(\omega t) + \frac{s'(0)}{\omega} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

was **eine** Lösung der ursprünglichen Differenzialgleichung ist.

## 6 Aufgabe 6

Es gelten für die nötigen Ableitungen von  $f$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x \cos(x))' \\
&= e^x \cos(x) + e^x(-\sin(x)) \\
&= e^x(\cos(x) - \sin(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (e^x(\cos(x) - \sin(x)))' \\
&= e^x(\cos(x) - \sin(x)) + e^x(-\sin(x) - \cos(x)) \\
&= -2e^x \sin(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= (-2e^x \sin(x))' \\
&= -2(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)) \\
&= -2e^x(\sin(x) + \cos(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''''(x) &= (-2e^x(\sin(x) + \cos(x)))' \\
&= -2(e^x(\sin(x) + \cos(x)) + e^x(\cos(x) - \sin(x))) \\
&= -4e^x \cos(x)
\end{aligned}$$

und die nötigen Funktionswerte bei  $x_0 = 0$  für  $T_3$

$$\begin{aligned}
f(0) &= e^0 \cos(0) = 1 \\
f'(0) &= e^0(\cos(0) - \sin(0)) = 1 \\
f''(0) &= -2e^0 \sin(0) = 0 \\
f'''(0) &= -2e^0(\sin(0) + \cos(0)) = -2
\end{aligned}$$

Dann gilt für die Approximation von  $f$  bei  $x_0 = 0$  mit  $T_3$

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{-2}{3!} x^3 \\
&= 1 + x - \frac{1}{3} x^3
\end{aligned}$$

Da  $f$   $n+1$ -mal ableitbar ist, gilt für das Restglied mit Abschätzung

$$\begin{aligned} R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 = \frac{-4e^\xi \cos(\xi)}{24} x^4 \\ &\geq \frac{-4x^4}{24} \end{aligned}$$

Es soll gelten

$$|f(x) - T_3(x)| = |R_3(x)| \leq 10^{-8}$$

mit der Abschätzung gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{-4x^4}{24} \right| &\leq 10^{-8}, \forall x \in \left[ -\frac{1}{100}, \frac{1}{100} \right] \\ \Leftrightarrow \frac{4x^4}{24} &\leq 10^{-8} \\ \Leftrightarrow x^4 &\leq 6 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

## 7 Aufgabe 7

Es gelten für die nötigen Ableitungen von  $f$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= \left( \frac{1}{1+x} \right)' = \frac{-1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= \left( \frac{-1}{(1+x)^2} \right)' = \frac{2}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

und die nötigen Funktionswerte bei  $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln(1) = 0 \\ f'(0) &= \frac{1}{1+0} = 1 \\ f''(0) &= \frac{-1}{(1+0)^2} = -1 \\ f'''(0) &= \frac{2}{(1+0)^3} = 2 \end{aligned}$$

Für die Approximation  $T_1$  gilt dann

$$T_1(x) = \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x^1 = 0 + x = x$$

mit dessen Restglied  $R_1$

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = \frac{-x^2}{2(1+\xi)^2}$$

und für die Approximation  $T_2$  gilt dann

$$T_2(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 0 + x - \frac{x^2}{2} = x - \frac{x^2}{2}$$

mit dessen Restglied  $R_2$

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = \frac{x^3}{3(1+\xi)^3}$$