## Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften Hausaufgabe 08 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

#### 20. Januar 2021

# Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1	2
Aufgabe 2	2
Aufgabe 3	3
Aufgabe 4	

### Aufgabe 1

Zeige, dass  $|\tan(x) + \tan(y)| \ge |x+y|$  für alle  $x, y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ 

$$\frac{|\tan(x) + \tan(y)|}{|x + y|} = f'(\varepsilon) = 1 + \frac{1}{\cos(\varepsilon)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\tan(x) + \tan(y)|}{|x + y|} = 1 + \frac{1}{\cos(\varepsilon)^2}$$

$$\Leftrightarrow |\tan(x) + \tan(y)| = (|x + y|) \left(1 + \frac{1}{\cos(\varepsilon)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow |\tan(x) + \tan(y)| = |x + y| + \frac{|x + y|}{\cos(\varepsilon)^2}$$

 $\cos(\varepsilon)^2$  auf  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \geq 0$ , also

$$\frac{|x+y|}{\cos(\varepsilon)^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow |x+y| + \frac{|x+y|}{\cos(\varepsilon)^2} \ge |x+y|$$

$$\Leftrightarrow |\tan(x) + \tan(y)| \ge |x+y|$$

# Aufgabe 2

Es gilt

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|^{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \le |x - y|^{2}$$

Die Funktion f muss zumindest einmal differenzierbar sein, dann gilt mit  $\xi \in ]y,x[$ 

$$|f'(\xi)| \le |x - y|$$

Behauptung:  $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 

Dann gilt

$$|f'(\xi)| = |0| = 0 \le |x - y|$$

Daraus folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x)|$$
  
=  $|0| = 0$   
 $\leq |x - y|^2$ 

## Aufgabe 3

Berechne für  $f(x) = \sqrt{2+x}$ ,  $T_2(x)$  und  $T_4(x)$  mit  $x_0 = 0$ 

$$f(x) = \sqrt{2+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{2+x^3}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{2+x^5}}$$

$$f^4(x) = \frac{15}{16\sqrt{2+x^7}}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \cdot (x+2)^{\frac{1}{2}-n}$$

$$T_2(x) = \sqrt{2} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1}x - \frac{\frac{1}{8\sqrt{2}^3}}{2!}x^2$$
$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{16\sqrt{2}}x^2$$

$$T_4(x) = T_2(x) + \frac{\frac{3}{8\sqrt{2}^5}}{3!}x^3 - \frac{\frac{15}{16\sqrt{2}^7}}{4!}x^4$$
$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{8\sqrt{2}}x^2 + \frac{1}{64\sqrt{2}}x^3 - \frac{5}{1024\sqrt{2}}x^4$$

Abschätzen des  $R_2(x)$ , für  $|x| < \frac{1}{2}$ 

$$|R_{2}(x)| = \left| \frac{\frac{3}{8\sqrt{\varepsilon+2^{5}}}}{3!} x^{3} \right| = \left| \frac{1}{16\sqrt{\varepsilon+2^{5}}} \right| \cdot |x|^{3}$$
Es gilt mit  $\varepsilon + 2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon+2} < 2$ 

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{16\sqrt{\varepsilon+2^{5}}} \right| \cdot |x|^{3} < \frac{1}{16} \cdot \sqrt{2^{5}} \cdot \frac{1}{2^{3}} = \frac{\sqrt{2}}{32} \approx 0.0442$$

## Aufgabe 4

Es gilt

$$f(x) = e^{x} \cos(x)$$

$$f'(x) = e^{x} \cos(x) - e^{x} \sin(x)$$

$$= e^{x} (\cos(x) - \sin(x))$$

$$f''(x) = e^{x} (\cos(x) - \sin(x)) + e^{x} (-\sin(x) - \cos(x))$$

$$= -2e^{x} \sin(x)$$

$$f'''(x) = -2e^{x} \sin(x) - 2e^{x} \cos(x)$$

$$= -2e^{x} (\cos(x) + \sin(x))$$

$$f''''(x) = -2e^{x} (\cos(x) + \sin(x)) - 2e^{x} (-\sin(x) + \cos(x))$$

$$= -4e^{x} \cos(x)$$

desweiteren gilt

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -2$$

dann gilt für  $T_3$ 

$$T_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3$$
$$= 1 + x + 0 \cdot x^2 + (-\frac{1}{3})x^3$$
$$= 1 + x - \frac{1}{3}x^3$$

dann gilt für Restglied  $R_3$ 

$$R_3(x) = \frac{f''''(\xi)}{4!}x^4 = \frac{-4e^{\xi}\cos(\xi)}{4!}x^4 = \frac{-e^{\xi}\cos(\xi)}{3!}x^4$$

dann gilt mit  $|x| = 10^{-2}$ 

$$|R_3(x)| \le 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-e^{\xi} \cos(\xi)}{3!} x^4 \right| \le 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-e^{\xi} \cos(\xi)}{3!} \right| |x^4| \le 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-e^{\xi} \cos(\xi)}{3!} \right| |x|^4 \le 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-e^{\xi} \cos(\xi)}{3!} \right| (10^{-2})^4 \le 10^{-8}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-e^{\xi} \cos(\xi)}{3!} \right| \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{\xi} \cos(\xi)}{3!} \le 1$$

$$\Leftrightarrow e^{\xi} \cos(\xi) \le 6$$

das gilt für alle  $\xi \in ]-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}[\setminus \{0\}]$ . Daraus folgt

$$\forall x \in [-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}], |R_3(x)| \le 10^{-8}$$