Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 05 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

6. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a)

b)

c)

d)

Aufgabe 2

a)

Da f linear ist gelten $f(x+y) = f(x) + f(y)$ und $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} f(2x) &= 2f(x+3) - 6f(1) \\ &= 2(-2x+1) - 6(x+2) \\ &= -4x + 2 - 6x - 12 \\ &= -10x - 10 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(1) &= x + 2 \\ f(x) &= -5x - 5 \end{aligned}$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(ax+b) &= f(ax) + f(b) = af(x) + bf(1) \\ &= a(-5x-5) + b(x+2) \\ &= -5ax - 5a + bx + 2b \\ &= (b-5a)x + (2b-5a) \end{aligned}$$

also gilt

$$f : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b - 5a \\ 2b - 5a \end{bmatrix}$$

f lässt als Matrix wie folgt darstellen

$$f = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

linear abhängig? mit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

daraus ergibt sich ein LGS, dass zu einem Widerspruch führt

$$\text{(I) } 0 = r_2 - 5r_1$$
$$\text{(II) } 0 = 2r_2 - 5r_1$$

daraus folgt, dass die Spalten linear unabhängig sind, Woraus folgt

$$\dim(\text{Bild}(f)) = 2$$

c)

Überführen der Matrix

$$\left[\begin{array}{cc|c}-5 & 1 & 0\\-5 & 2 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c}-5 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left[\begin{array}{cc|c}-5 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{5}\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{array}\right]$$

Für Kern(f) gibt es also nur eine Lösung

$$\text{Kern}(f) = \left\{ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \right\}$$

daraus folgt

$$B_{\text{Kern}(f)} = \{\}$$

d)

Aufgabe 3

Es gilt

$$(3k+1)(3k+4) = 9\left(k + \frac{1}{3}\right)\left(k + \frac{4}{3}\right)$$

daraus ergibt sich dann der folgende Ansatz

$$\frac{3}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{A}{k+\frac{1}{3}} + \frac{B}{k+\frac{4}{3}}$$

für A mit $k = -\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}} = A = \frac{1}{3}$$

und für B mit $k = -\frac{4}{3}$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-\frac{4}{3} + \frac{1}{3}} = A = -\frac{1}{3}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{(3k+1)(3k+4)} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3(k+\frac{1}{3})} - \frac{1}{3(k+\frac{4}{3})} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \cdots + \\
&\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) + \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{3n+4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

IA: Es gilt

$$x_0 = 1 < \frac{4}{3}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < \frac{4}{3}$$

IB: Damit gilt dann

$$x_{n+1} < \frac{4}{3}$$

IS: Es gilt

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &< \frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow \frac{x_n}{4} + 1 &< \frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow \frac{x_n}{4} &< \frac{1}{3} \\
\Leftrightarrow x_n &< \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Folglich gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < \frac{4}{3}$$

b)

Es gelte $x_n < x_{n+1}$.
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
x_n &< x_{n+1} \\
\Leftrightarrow \frac{x_{n-1}}{4} + 1 &< \frac{x_n}{4} + 1 \\
\Leftrightarrow \frac{x_{n-1}}{4} &< \frac{x_n}{4} \\
\Leftrightarrow x_{n-1} &< x_n
\end{aligned}
$$

Diese Umformung kann \$k\$-mal wiederholt werden bis $k = n$ gilt. Daraus folgt dann, dass die Folge x_n streng monoton wachsend.

c)

Die Folge x_n ist nach oben beschränkt mit $M = \frac{4}{3}$ (siehe a)

Die Folge x_n ist streng monoton wachsend (siehe b)

Daraus folgt die Folge x_n konvergiert.

d)

Es gilt für die ersten Folgeglieder

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \frac{x_0}{4} + 1 = \frac{1}{4} + 1 \\
x_2 &= \frac{x_1}{4} + 1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Man kann die Folge also auch wie folgt schreiben

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}$$

dann gilt

$$
\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}
\end{aligned}
$$

dann gilt für den Grenzwert

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3} - \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3} \\
&= \frac{4}{3} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 \cdot 4^n} \\
&= \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$