

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 01 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (), Christopher Neumann (), Dennis Schulze (458415)

November 12, 2020

Contents

Aufgabe 2	2
a)	2
b)	2
c)	2
Aufgabe 3	2
a)	2
b)	2
c)	2
d)	3
Aufgabe 4	3
a)	3
b)	4
c)	5
Aufgabe 5	5
a)	5
a	5
b	6
b)	6
a	6
b	6

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned} & 9x^4 + 12zyx^2 + 4z^2y^2 \\ \Leftrightarrow & (3x^2 + 2yz)^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & x^{-2} - 36y^6 \\ \Leftrightarrow & (x^{-1} + 6y^3)(x^{-1} - 6y^3) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & y^{-2} - 2 + y^2 \\ \Leftrightarrow & (y^{-1} - y)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned} & (\{x, y\} \times \{\text{blau}, \text{rot}, \text{gelb}\}) \setminus \{(x, y, z), z, x, (y, \text{rot}), (x, \text{blau}, \text{rot}), (\text{gelb}, y)\} \\ \Leftrightarrow & (\{x, y\} \times \{\text{blau}, \text{rot}, \text{gelb}\}) \setminus \{(y, \text{rot})\} \\ \Leftrightarrow & \{(x, \text{blau}), (x, \text{rot}), (x, \text{gelb}), (y, \text{blau}), (y, \text{gelb})\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & [6, 11] \setminus ([4, 6] \setminus [5, 7]) \\ \Leftrightarrow & [6, 11] \setminus [4, 5[\\ \Leftrightarrow & [6, 11] \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & ([6, 11] \setminus [4, 6]) \setminus [5, 7] \\ \Leftrightarrow &]6, 11] \setminus [5, 7] \\ \Leftrightarrow &]7, 11] \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R} \mid x^6 > 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \\ \Leftrightarrow & (\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \cap]-\infty, 0] \\ \Leftrightarrow &]-\infty, -1[\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

$$\frac{3x}{x-5} < 2, x \neq 5$$

Fall 1: $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-5} &< 2 \\ \Leftrightarrow 3x &< 2(x-5) \\ \Leftrightarrow 3x &< 2x-10 \\ \Leftrightarrow x &< -10 \end{aligned}$$

Widerspruch zwischen $x < -10$ und $x > 5$.

Fall 2: $x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5$

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-5} &< 2 \\ \Leftrightarrow 3x &> 2(x-5) \\ \Leftrightarrow 3x &> 2x-10 \\ \Leftrightarrow x &> -10 \end{aligned}$$

Damit gilt für die Lösungsmenge L

$$L =]-10, 5[$$

b)

$$\frac{x^2 - 1}{6x - 9} \geq 1, x \neq \frac{3}{2}$$

$$\text{Fall 1: } 6x - 9 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 1}{6x - 9} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 1 &\geq 6x - 9 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) &\geq 0\end{aligned}$$

$$\text{Subfall 1: } x - 2 \geq 0 \text{ und } x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

$$\text{Subfall 2: } x - 2 < 0 \text{ und } x - 4 < 0 \Rightarrow x < 2$$

Damit gilt für die Lösungsmenge L_1 dieses Falls

$$L_1 =]\frac{3}{2}, 2[$$

$$\text{Fall 2: } 6x - 9 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 1}{6x - 9} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 1 &\leq 6x - 9 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) &\leq 0\end{aligned}$$

$$\text{Subfall 1: } x - 2 \leq 0 \text{ und } x - 4 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$\text{Subfall 2: } x - 2 > 0 \text{ und } x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

Damit gilt für die Lösungsmenge L_2 dieses Falls

$$L_2 =]-\infty, \frac{3}{2}[$$

Dann gilt für die Lösungsmenge L

$$L =]-\infty, \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, 2[$$

c)

$$|2x + 3| \leq 5x - 3$$

$$\text{Fall 1: } 2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-3}{2}$$

$$\begin{aligned} |2x + 3| &\leq 5x - 3 \\ \Leftrightarrow 2x + 3 &\leq 5x - 3 \\ \Leftrightarrow 6 &\leq 3x \\ \Leftrightarrow 2 &\leq x \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$L_1 = [2, \infty[$$

$$\text{Fall 2: } 2x + 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{-3}{2}$$

$$\begin{aligned} |2x + 3| &\leq 5x - 3 \\ \Leftrightarrow -(2x + 3) &\leq 5x - 3 \\ \Leftrightarrow -2x - 3 &\leq 5x - 3 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 7x \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$L_2 = \{\}$$

Damit gilt für die Lösungsmenge L

$$L = L_1 \cup L_2 = [2, \infty[$$

Aufgabe 5

a)

a

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^7 2(k-3)^2 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^4 2k^2 \\ \Leftrightarrow 2 + 8 + 18 + 32 &\Leftrightarrow 60 \end{aligned}$$

b

$$\prod_{k=0}^3 k! \Leftrightarrow 0! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \\ \Leftrightarrow 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 \Leftrightarrow 12$$

b)

a

$$\sum_{k=0}^n 2 \cdot 2^k \Leftrightarrow 2 \sum_{k=0}^n 2^k \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \Leftrightarrow 2^{n+2} - 2$$

b

$$\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{5}\right)^k \Leftrightarrow \frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{5}} \Leftrightarrow \frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{6}{5}} \Leftrightarrow \frac{5 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n}{6}$$