

Analysis I und Lineare Algebra für
Ingenieurwissenschaften
Hausaufgabe 09 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 24, 2020

Contents

1	Aufgabe 1	2
2	Aufgabe 2	3
2.1	a)	3
2.2	b)	4
2.3	c)	5
3	Aufgabe 3	6
4	Aufgabe 4	7
4.1	a)	7
4.2	b)	8
5	Aufgabe 5	8
5.1	a)	8
5.2	b)	8
6	Aufgabe 6	8
6.1	a)	8
6.2	b)	9
7	Aufgabe 7	10
7.1	a)	10
7.2	b)	10

1 Aufgabe 1

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}}$$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 \end{aligned}$$

ξ muss zwischen dem Entwicklungspunkt $f(0)$ und x liegen, also: $\xi \in]1, x[\cup]x, 1[$

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 = \frac{1}{16}\xi^{-\frac{5}{2}}(x-1)^3 \\ T_4(x) &= \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{3}{48}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 \end{aligned}$$

Für x gilt:

$$|x-1| \leq \frac{1}{2}$$

Für $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$$x-1 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

Für $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$$\begin{aligned} x-1 \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ \Rightarrow L &= \left[1, \frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

Den Maximalen Fehler des Restglieds von T_2 , abschätzen. $x \in [1, \frac{3}{2}]$ und $\xi \in]1, \frac{3}{2}[$

$$R_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{16}\xi^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3 = \frac{1}{128}\xi^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{128\sqrt{\xi^5}} \leq \frac{1}{128\sqrt{1^5}} = \frac{1}{128} = 0,0078125$$

$$T_2(1, 1) = 1,04875$$

$$T_4(1, 1) = 1.048808594$$

Taschenrechner $\sqrt{1,1} = 1,048808848$

T_4 liefert eine genauere Approximation von $\sqrt{1,1}$, nämlich auf sechs Nachkommastellen genau, anstatt nur drei bei T_2

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Zu zeigen ist

$$f^{(n)}(x) = n! \left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}} \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA:

Es gilt

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= 0! \left(\frac{1}{(3-x)^{0+1}} + (-1)^0 \frac{1}{(3+x)^{0+1}} \right) \\ &= \frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x} \\ &= \frac{(3+x) + (3-x)}{(3+x)(3-x)} \\ &= \frac{6}{9-x^2} = f(x) \end{aligned}$$

IV:

Es gelte für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = n! \left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}} \right)$$

IS:

Dann gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\
&= \left(n! \left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}} \right) \right)' \\
&= n! \left(\left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} \right)' + (-1)^n \left(\frac{1}{(3+x)^{n+1}} \right)' \right) \\
&= n! \left(\left((3-x)^{-(n+1)} \right)' + (-1)^n \left((3+x)^{-(n+1)} \right)' \right) \\
&= n! \left(\left(-(n+1)(3-x)^{-(n+2)}(-1) \right) + (-1)^n \left(-(n+1)(3+x)^{-(n+2)} \right) \right) \\
&= n!(n+1) \left((-1)(3-x)^{-(n+2)}(-1) + (-1)^n (-1)(3+x)^{-(n+2)} \right) \\
&= (n+1)! \left((3-x)^{-(n+2)} + (-1)^{n+1} (3+x)^{-(n+2)} \right) \\
&= (n+1)! \left(\frac{1}{(3-x)^{n+2}} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(3+x)^{n+2}} \right)
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$f^{(n)}(x) = n! \left(\frac{1}{(3-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(3+x)^{n+1}} \right)$$

2.2 b)

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= n! \left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}} \right) \\
&= n! \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right) \\
&= n! \left(\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}3^{n+1}} + \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{3^{n+1}3^{n+1}} \right) \\
&= n! \left(\frac{3^{n+1} + (-1)^n 3^{n+1}}{3^{2n+2}} \right)
\end{aligned}$$

dann gilt für ungerade n

$$f^{(n)}(0) = n! \left(\frac{3^{n+1} - 3^{n+1}}{3^{2n+2}} \right) = 0$$

und für gerade n gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= n! \left(\frac{2 \cdot 3^{n+1}}{3^{2n+2}} \right) \\
&= \frac{2n!}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

Seien $n, n_e, n_o \in \mathbb{N}$ mit $n_o = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und $n_e = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
Dann gilt für T_n mit $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n_o} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{2(2k)!}{(2k)! 3^{2k+1}} x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n_e} \frac{2x^{2k}}{3^{2k+1}}
\end{aligned}$$

mit dem jeweils entsprechenden Restglied

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)! \left(\frac{1}{(3-\xi)^{n+2}} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(3+\xi)^{n+2}} \right)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)! \left(\frac{(3+\xi)^{n+2} + (-1)^{n+1} (3-\xi)^{n+1}}{(3-\xi)^{n+2} (3+\xi)^{n+2}} \right)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(3+\xi)^{n+2} + (-1)^n (3-\xi)^{n+2}}{(3-\xi)^{n+2} (3+\xi)^{n+2}} x^{n+1}
\end{aligned}$$

2.3 c)

Zu zeigen ist für $x \in]-1, 1[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 + \xi)^{n+2} + (-1)^{n+1}(3 - \xi)^{n+2}}{(3 - \xi)^{n+2}(3 + \xi)^{n+2}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2} + (-1)^{n+1}2^{n+2}}{2^{n+2}4^{n+2}} x^{n+1}, \xi = 1 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2} + (-1)^{n+1}2^{n+2}}{2^{n+2}4^{n+2}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+4} + (-1)^{n+1}2^{n+2}}{2^{n+2}2^{2n+4}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}(2^{n+2} + (-1)^{n+2})}{2^{3(n+2)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + (-1)^n}{2^{2(n+2)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}}{2^{2(n+1)}} x^{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2^{2(n+2)}} x^{n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{2^{n+2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{2^{2(n+2)}} \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

nach $n + 2$ -maliger Anwendung der Regel von de l'Hospital.
Damit gilt für $x \in] - 1, 1[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

3 Aufgabe 3

Für die n -te Ableitung von f gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n} 5^x = \ln(5) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} 5^x \\
&= (\ln(5))^n 5^x
\end{aligned}$$

damit gilt für dessen Taylorreihe T_n mit $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= 1 + \frac{\ln(5)x}{1!} + \frac{(\ln(5)x)^2}{2!} + \frac{(\ln(5)x)^3}{3!} + \dots + \frac{(\ln(5)x)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(\ln(5)x)^k}{k!}
\end{aligned}$$

mit dessen Restglied

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(\ln(5))^{n+1} 5^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{(\ln(5))^{n+1} 5^\xi x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{(x \ln(5))^{n+1} 5^\xi}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \frac{(x \ln(5))^{n+1} 5^\xi}{(n+1)!}$$

Wenn man die Fakultät für alle $n > 1$ betrachtet, wächst diese schneller als jede Exponentialfunktion. Deshalb sollte gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

4 Aufgabe 4

4.1 a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{4^{3(x-2)}} &= 16^{1-x} \\
\Leftrightarrow 4^{\frac{3}{2}(x-2)} &= (4^2)^{1-x} \\
\Leftrightarrow 4^{\frac{3}{2}(x-2)} &= 4^{2(1-x)} \\
\Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-2) &= 2(1-x) \\
\Leftrightarrow 3(x-2) &= 4(1-x) \\
\Leftrightarrow 3x-6 &= 4-4x \\
\Leftrightarrow 7x &= 10 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{10}{7}
\end{aligned}$$

4.2 b)

$$\begin{aligned} e^{ix-\ln(2)} + \frac{1}{e^{ix+\ln(2)}} &= 1 \\ \Leftrightarrow e^{ix-\ln(2)} + e^{-ix-\ln(2)} &= 1 \\ \Leftrightarrow e^{ix}e^{-\ln(2)} + e^{-ix}e^{-\ln(2)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{e^{ix}}{2} + \frac{e^{-ix}}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(\cos(x) + i\sin(x)) + (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(\cos(x) + i\sin(x)) + (\cos(x) - i\sin(x))}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(x) &= 1 \\ \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

5 Aufgabe 5

5.1 a)

Für $x, y > 0, x, y, \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - y)^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x^2 - 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow 4xy &\leq x^2 + 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow xy &\leq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} = \frac{(x + y)^2}{4} \\ \Leftrightarrow (xy)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{x + y}{2} \\ \Leftrightarrow \ln(xy^{\frac{1}{2}}) &\leq \ln\left(\frac{x + y}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\ln(xy)}{2} &= \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2} \leq \ln\left(\frac{x + y}{2}\right) \end{aligned}$$

5.2 b)

6 Aufgabe 6

6.1 a)

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{e^{-x}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{0} = \frac{0}{0}$$

damit ist die Regel von de l'Hospital anwendbar und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{e^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{(1+x^2)(-e^{-x})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit existiert dessen Grenzwert.

6.2 b)

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x))^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x))^{x^{-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^{-1} \ln(1 + \arctan(x))} \end{aligned}$$

und besitzt einen Grenzwert genau dann, wenn der Exponent einen Grenzwert besitzt. Also gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} \ln(1 + \arctan(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arctan(x))}{x} = \frac{0}{0}$$

wo die bedingung für die Regel von de l'Hospital erfüllt ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} \ln(1 + \arctan(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+\arctan(x)} \frac{1}{1+x^2}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \arctan(x))(1 + x^2)} = 1 \end{aligned}$$

Da dieser Grenzwert existiert, existiert auch der andere. Damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x))^{\frac{1}{x}} = e$$

mit e der Eulerschen Zahl.

7 Aufgabe 7

7.1 a)

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{v^2}{g} \ln \left(\cosh \left(\frac{gt}{v} \right) \right) \right)' = \frac{v^2 g \sinh(\frac{gt}{v})}{v g \cosh(\frac{gt}{v})} = v \tanh \left(\frac{gt}{v} \right)$$
$$a(t) = s'(t) = \left(v \tanh \left(\frac{gt}{v} \right) \right)' = v \cdot \frac{g}{\cosh(\frac{gt}{v})^2 v} = \frac{g}{\cosh(\frac{gt}{v})^2}$$

7.2 b)

$$s(5) = \frac{50^2 m/s}{9,81 m/s^2} \ln \left(\cosh \left(\frac{9,81 m/s^2 \cdot 5s}{50 m/s} \right) \right) = 283,52 m$$
$$\Delta s = s'(t) \cdot \Delta t = 50 m/s \cdot \tanh \left(\frac{9,81 m/s^2 \cdot 5s}{50 m/s} \right) \cdot \frac{1}{2} = \pm 18,84 m$$
$$|\Delta s| = 18,84 m$$