Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 06 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 4, 2020

Contents

1 Aufgabe 1

1.1 a)

$$f_{B_1,B_1} = K_{B_1}(f(K_{B_1}^{-1}(e_i))) = K_{B_1}(f(b_i)) \tag{1}$$

$$K_{B_1} = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

da:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right] \tag{3}$$

1. Spalte:

$$f_{B_1,B_1}(e_1) = K_{B_1}\left(f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{B_1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

2. Spalte:

$$f_{B_1,B_1}(e_2) = K_{B_1}\left(f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{B_1}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

3. Spalte:

$$f_{B_1,B_1}(e_3) = K_{B_1}\left(f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{B_1}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$f_{B_1,B_1} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

1.2 b)

$$id_{B_2,B_1} = K_{B_1}(K_{B_2}^{-1}(e_i)) = K_{B_1}(v_i) \tag{8}$$

1. Spalte:

$$id_{B_2,B_1}(e_1) = K_{B_1}(v_1) = K_{B_1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

2. Spalte:

$$id_{B_2,B_1}(e_2) = K_{B_1}(v_2) = K_{B_1}\left(\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix} \tag{10}$$

3. Spalte:

$$id_{B_2,B_1}(e_3) = K_{B_1}(v_3) = K_{B_1}\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\Rightarrow id_{B_2,B_1} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\0 & 1 & 1\\-1 & -1 & 4\end{bmatrix} \tag{12}$$

1.3 c)

$$id_{B_1,B_2} =(id_{B_2,B_1})^{-1} \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}id_{B_2,B_1} & I_3\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\-1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{III+I} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right] \tag{14}$$

$$\xrightarrow{III-II} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{II-III} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right] \tag{15}$$

$$\xrightarrow{I-2II} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 3 & -4 & 2\\0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right] \tag{16}$$

$$\xrightarrow{I+2II} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 5 & -6 & 4\\0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}I_3 & (id_{B_2,B_1})^{-1}\end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\Rightarrow id_{B_1,B_2} = (id_{B_2,B_1})^{-1} = \begin{bmatrix}5 & -6 & 4\\-1 & 2 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix} \tag{18}$$

1.4 d)

2 Aufgabe 2

2.1 a)

Da f eine lineare Abbildung ist, gelten

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ und } f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} f(4x) &= 2f(2x+3) - 3f(2) \\ &= 2(-x+1) - 3(3x+2) \\ &= -2x + 2 - 9x - 6 \\ &= -11x - 4 \end{aligned}$$

2.2 b)

Ansatz für Bild(f):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} f(4x) = \frac{-11}{4} x - 1 \\ f(1) &= \frac{1}{2} f(2) = \frac{3}{2} x + 1 \end{aligned}$$

Prüfe, ob $f(x)$ und $f(1)$ linear abhängig sind:
Seien a_1, $\mathrm{a}_2 \in \mathbb{R}$ damit gelte

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 f(1) + a_2 f(x) \\ &= a_1(\frac{3}{2}x + 1) + a_2(\frac{-11}{4}x - 1) \\ &= \frac{3a_1}{2}x + a_1 + \frac{-11a_2}{4}x - a_2 \\ &= a_1 - a_2 + \frac{6a_1 - 11a_2}{4}x \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{(I) } 0 &= a_1 - a_2 \\ \text{(II) } 0 &= \frac{1}{4}(6a_1 - 11a_2) \\ \Leftrightarrow 0 &= 6a_1 - 11a_2 \end{aligned}$$

wo aus I folgt $a_1 = a_2$ und aus II folgt $a_1 = \frac{11}{6}a_2$, was I widersprechen würde, wenn gilt $a_1 \neq 0 \neq a_2$. Daruas folgt $a_1 = a_2 = 0$ und damit sind $f(x)$ und $f(1)$ linear unabhängig.

Damit gilt $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{span}\{f(1), f(x)\}$, woraus folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$.

2.3 c)

Es gelten $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$ und $\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 1}) = 2$.
Damit ergibt sich aus der Dimensionsformel

$$\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 1}) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$$
$$\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 1}) - \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2 - 2 = 0$$

Damit gilt für die Basis B_K vom Kern(f)

$$B_K = \{\}$$

2.4 d)

Bestimmen von K_{B_1} mit a, b, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$ax + b \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$
$$\text{mit } \lambda_1(2x+3) + \lambda_2 2 = ax + b$$
$$2\lambda_1 x + \lambda_1 3 + \lambda_2 2 = ax + b$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$\text{(I) } a = 2\lambda_1$$
$$\text{(II) } b = \lambda_1 3 + \lambda_2 2$$

Daraus ergeben sich einmal nach I $\lambda_1 = \frac{a}{2}$
und anschließend nach II $\lambda_2 = \frac{2b-3a}{4}$.
Daraus folgt

$$K_{B_1} : ax + b \mapsto \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{2b-3a}{4} \end{bmatrix}$$

Bestimmen von K_{B_2} mit c, d, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$:

$$cx + d \mapsto \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$
$$\text{mit } \beta_1(-x+1) + \beta_2(3x+2) = cx + d$$
$$-\beta_1 x + \beta_1 + 3\beta_2 x + 2\beta_2 = cx + d$$
$$(3\beta_2 - \beta_1)x + \beta_1 + 2\beta_2 = cx + d$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$
$$e = A\beta$$

was umgeschrieben werden kann zu

$$
\begin{aligned}
[A|e] &= \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & c \\ 1 & 2 & d \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{\text{II+I}} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & c \\ 0 & 5 & c+d \end{array}\right] \xrightarrow{-\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -c \\ 0 & 5 & c+d \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{\text{5I+3II}} \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & -2c+3d \\ 0 & 15 & 3c+3d \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}\text{I}, \frac{1}{15}\text{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-2c+3d}{5} \\ 0 & 1 & \frac{c+d}{5} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

und daraus folgt $\beta_1 = \frac{-2c+3d}{5}$ und $\beta_2 = \frac{c+d}{5}$.
Damit ergibt sich

$$
K_{B_2} : cx + d \mapsto \begin{bmatrix} \frac{-2c+3d}{5} \\ \frac{c+d}{5} \end{bmatrix}
$$

Daraus folgt mit $\mathrm{b_n} \in B_1$

$$
\begin{aligned}
& f_{B_1,B_2}(e_n) = K_{B_2}(f(K_{B_1}^{-1}(e_n))) \text{ mit } n \in \{1,2\} \\
\Leftrightarrow\ & f_{B_1,B_2}(e_n) = K_{B_2}(f(b_n))
\end{aligned}
$$

Einsetzen der basen:

$$\begin{aligned}
K_{B_2}(f(b_1)) = K_{B_2}(f(2x+3)) &= K_{B_2}(-x+1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
K_{B_2}(f(b_2)) = K_{B_2}(f(2)) &= K_{B_2}(3x+2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$f_{B_1,B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Aufgabe 3

Behauptung:
Die Zahlenfolgt $(x_n)_n$ konvergiert gegen 0, wenn n gegen ∞ strebt.

<u>zu zeigen</u>: $\forall\ \epsilon > 0$ gibt es ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$|x_n - 0| = \left| \frac{2}{n+1} - 0 \right| < \epsilon, \forall n \geq N_\epsilon$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2}{n+1} - 0 \right| &< \epsilon \\
\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} &< \epsilon \\
\Leftrightarrow \frac{2}{\epsilon} &< n+1 \\
\Leftrightarrow \frac{2}{\epsilon} - 1 &< n
\end{aligned}$$

Man wählt nun ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\epsilon > \frac{2}{\epsilon} - 1$. Dann gilt $\forall\ n \geq N_\epsilon$:

$$\left| \frac{2}{n+1} - 0 \right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N_\epsilon + 1} < \epsilon$$

Als Beispiel:

$$\begin{aligned}\epsilon = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} &= 100 \\ \Rightarrow N_\epsilon &> \frac{2}{\epsilon} - 1 = 199 \\ \Rightarrow N_\epsilon &= 200\end{aligned}$$

4 Aufgabe 4

Ansatz für PBZ mit A, $B \in \mathbb{R}$:

$$\frac{3}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$$

Umgeformt nach A mit $k = -1$:

$$A = \frac{3}{(-1)+2} = 3$$

Umgeformt nach B mit $k = -2$:

$$B = \frac{3}{(-2)+1} = -3$$

Dann gilt mit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{k+1} + \frac{-3}{k+2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{k+2} \\ &= 3 + \frac{3}{n+2}\end{aligned}$$

und nun muss noch gezeigt werden, dass der Term $\frac{3}{n+2}$ konvergiert.

Behauptung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+2} = 0$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig.
Dann gilt

$$\left|\frac{3}{n+2} - 0\right| = \frac{3}{n+2} < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} < n+2 \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 2 < n$$

Man wählt nun ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\epsilon > \frac{3}{\epsilon} - 2$.
Dann gilt

$$\left|\frac{3}{n+2} - 0\right| = \frac{3}{n+2} \leq \frac{3}{N_\epsilon + 2} < \epsilon$$

und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{(k+1)(k+2)} \right) = 3$$

5 Aufgabe 5

5.1 a)

Untersuchung von a_n:
Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{42n^2 - 7n + 3}{n^2 + 2n + 10} \\ &= \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{42 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{10}{n^2}} \\ &= \frac{42 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{10}{n^2}} \end{aligned}$$

Dann gilt für den Grenzwert von a_n

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} &\left(\frac{42 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{10}{n^2}} \right) \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 42 - 7 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 + 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 10 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{42 - 7 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0}{1 + 2 \cdot 0 + 10 \cdot 0 \cdot 0} \\ &= \frac{42}{1} = 42 \end{aligned}$$

Untersuchung von b_n:
Es gilt $\forall r \in \mathbb{R}$

$$|\sin(r)| \leq 1 \text{ und ist divergent, wenn } r \to \pm\infty$$

daraus folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi^2}{3}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n\pi^2}{3}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Untersuchung von c_n:

5.2 b)

Untersuchung der Folge x_n:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot (2 - \frac{1}{n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{n}) &&= 2 - 0 = 2
\end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot (2 + \frac{2}{n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} (2 + \frac{2}{n}) &&= 2 - 0 = 2
\end{aligned}$$

damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

Untersuchung von Folge y_n:
Es gilt für $\sqrt{x}, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, wenn

$$x_1 < x_2 \text{ dann ist } \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \text{ mit } x_1 \geq 0, x_2 > 0$$

daruas folgt, dass $\sqrt{n}$ streng monoton steigend ist, woraus folgt, dass sie bestimmt divergent ist.
Damit ist auch die Folge y_n bestimmt divergent, da gilt

$$\sqrt{n} < y_n$$

5.3 c)

Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n}{n}\cdot\frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} 2-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\\ &= 2-0+0=2\end{aligned}$$

6 Aufgabe 6

6.1 a)

Induktionsanfang:

$$x_0 = 1 < 4$$

Induktionsvoraussetzung:

$$x_n < 4$$

Induktionsbehauptung:

$$x_n + 1 < 4$$

Induktionsschluss:

$$x_n < 4 \Leftrightarrow \frac{x}{4} < 1 \Leftrightarrow 4 > \frac{x}{4} + 3 = x_{n+1}$$

Aus $4 > \frac{x}{4}+3$ folgt, dass jedes beliebiges $x_{n+1} < 4$ ist, womit die Bahauptung $x_n < 4$ bewiesen ist.

6.2 b)

$$x_n < 4 \Leftrightarrow x_n - 4 < 0 \Leftrightarrow 3x_n - 12 < 0 \Leftrightarrow 4x_n - 12 < 1x_n$$
$$\Leftrightarrow x_n - 3 < \frac{x_n}{4} \Leftrightarrow x_n < \frac{x_n}{4} + 3 = x_{n+1}$$
$$\Rightarrow$$

Da $x_n < x_{n+1}$ ist die Folge x_n streng monoton wachsend

6.3 c)

x_n ist konvergent, da die Folge beschränkt ist (aus Aufgabe 6.a folgt: $x_{n+1} < 4$) und die Monotonie folgt aus 6.b.

6.4 d)

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{4} + 3 = \frac{x}{4} + 3$$
$$\Rightarrow x = \frac{x}{4} + 3 \Leftrightarrow \frac{3x}{4} = 3 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$$

Der Grenzwert der Folge x_n ist 4