

Analysis I und Lineare Algebra für
Ingenieurwissenschaften
Hausaufgabe 02 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

25. November 2020

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1	2
a)	2
b)	2
c)	3
Aufgabe 2	4
a)	4
b)	4
Aufgabe 3	5
a)	5
b)	5
c)	5
d)	5
Aufgabe 4	6
a)	6
b)	7
c)	7

Aufgabe 1

a)

Zu zeigen ist

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

IA: Es gilt für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1) = (2(1)-1) = 1 = (1)^2$$

IB: Es gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

IV: Damit gilt dann

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Folglich gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

b)

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

IA: Es gilt

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

IB: Es gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

IV: Dann gilt

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{((n+1) - 1)((n+1) + 1)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n(n+2)}{2n(n+1)(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

c)

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, \text{ gilt } 2^n \geq n^2$$

IA: Es gilt für $n = 4$

$$\begin{aligned} 2^4 &\geq 4^2 \\ \Leftrightarrow 16 &\geq 16 \end{aligned}$$

IV: Es gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$

$$2^n \geq n^2$$

IB: Dann gilt

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

IS: Es gilt

$$\begin{aligned} & 2^{n+1} \geq (n+1)^2 \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 = n^2 + 2n + 1 \\ \Rightarrow & n^2 = 2n + 1 \\ \Leftrightarrow & 0 = n^2 - 2n - 1 \\ \Rightarrow & n_1 = 1 - \sqrt{2} \text{ und } n_2 = 1 + \sqrt{2}, n_i \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & n_1 < 4 \text{ und } n_2 < 4 \text{ (siehe IV.)} \\ \Rightarrow & n^2 > 2n + 1 \\ \Rightarrow & 2 \cdot n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \\ \Rightarrow & 2 \cdot 2^n > (n+1)^2 \\ \Leftrightarrow & 2^{n+1} > (n+1)^2 \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$

$$2^n \geq n^2$$

Für $n = 0, 1, 2, 3$ gilt jeweils

$$\begin{aligned} 2^0 &> (0)^2 \Leftrightarrow 1 > 0 \\ 2^1 &> (1)^2 \Leftrightarrow 2 > 1 \\ 2^2 &= (2)^2 \Leftrightarrow 4 = 4 \\ 2^3 &< (3)^2 \Leftrightarrow 8 < 9 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

f ist streng monoton fallend

$\Rightarrow f$ ist injektiv

\exp nur injektiv auf \mathbb{R} , ($\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[, x \mapsto e^x$)
 $\Rightarrow f$ ist nur injektiv

b)

Da gilt $|-x|^5 = |x|^5$, folgt daraus, dass g nicht injektiv ist.

Des weiteren ist g nach unten beschränkt ($g(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$), daraus

folgt, dass g nicht surjektiv.
Damit ist g weder injektiv noch surjektiv.

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned} D_{f_3} &= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2)(x) &= \left(\frac{1}{x^3} \right)^2 - 4 \\ &= \frac{1}{x^6} - 4 \end{aligned}$$

$$D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(x) &= \frac{1}{(x^2 - 4)^3} \\ &= \frac{1}{((x - 2)(x + 2))^3} \end{aligned}$$

$$D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

c)

$$f_1^{-1}([0, 12]) = [2, 4]$$

d)

Behauptung 1: f_1 ist gerade

Zu zeigen ist: $f_1(-x) = f_1(x)$
Es gilt

$$\begin{aligned} f_1(-x) &= (-x)^2 - 4 \\ &= (-1)^2 x^2 - 4 \\ &= x^2 - 4 = f_1(x) \end{aligned}$$

Damit ist f_1 gerade.

Behauptung 2: f_3 ist gerade

Zu zeigen ist: $f_3(-x) = f_3(x)$

Es gilt

$$\begin{aligned} f_3(-x) &= \frac{\sin((-x)^2)}{\cos(-x)} \\ &= \frac{\sin((-1)^2 x^2)}{\cos(x)} \\ &= \frac{\sin(x^2)}{\cos(x)} = f_3(x) \end{aligned}$$

Damit ist auch f_3 gerade.

Aufgabe 4

a)

Es gilt

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+3}{x+1} \\ \Leftrightarrow y(x+1) &= x+3 \\ \Leftrightarrow yx+y &= x+3 \\ \Leftrightarrow (y-1)x+y &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3-y}{y-1}, y \neq 1 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \frac{3-y}{y-1} \\ D_{f^{-1}} &= \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(y) &= \frac{\left(\frac{3-y}{y-1}\right) + 3}{\left(\frac{3-y}{y-1}\right) + 1} \\&= \frac{\left(\frac{3-y+3y-3}{y-1}\right)}{\left(\frac{3-y+y-1}{y-1}\right)} \\&= \frac{\frac{2y}{y-1}}{\frac{2}{y-1}} \\&= \frac{2y}{y-1} \cdot \frac{y-1}{2} \\&= y\end{aligned}$$

c)

Behauptung: f ist auf $] -1, \infty[$ monoton fallend

Zu zeigen ist $f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1, x_2 \in] -1, \infty[$ mit $x_1 < x_2$

Es gelte $f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1, x_2 \in] -1, \infty[$
dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + 3}{x_1 + 1} &> \frac{x_2 + 3}{x_2 + 1} \\&\Leftrightarrow (x_1 + 3)(x_2 + 1) > (x_2 + 3)(x_1 + 1) \\&\Leftrightarrow x_1x_2 + x_1 + 3x_2 + 3 > x_1x_2 + x_2 + 3x_1 + 3 \\&\Leftrightarrow x_1 + 3x_2 > x_2 + 3x_1 \\&\Leftrightarrow 2x_2 > 2x_1 \\&\Leftrightarrow x_2 > x_1 \Leftrightarrow x_1 < x_2\end{aligned}$$

da gilt $x_1 < x_2$ und es gilt $f(x_1) > f(x_2)$, woraus folgt,
dass f auf $] -1, \infty[$ monoton fallend ist.