Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 05 - Geuter 29

Moaz Haque, Felix Oechelhaeuser, Leo Pirker, Dennis Schulze

September 1, 2020

Contents

1 Aufagbe 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2\mathrm{II}, 3\mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 16 \\ 0 & -6 & 3 & -15 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\mathrm{III}, \frac{1}{6}\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{6} & \frac{16}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}+\frac{4}{6}\mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Daraus folgt $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -1$.

2 Aufgabe 2

2.1 a)

$$\begin{bmatrix} -2 & 2i & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 4i & -i & 7 & -2 \\ 1 & i & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 2i & 0 & 2 & 0 & -4 \\ -4 & 4i & -i & 7 & -2 & -8 \\ 1 & i & 2 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -i & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 4i & -i & 7 & -2 & -8 \\ 1 & i & 2 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -i & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 4i & -i & 7 & -2 & -8 \\ 0 & 2i & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}+4\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -i & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -i & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2i & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -i & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2i & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -i & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{-i}{2}\mathrm{II},i\mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -i & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -i & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 3i & -2i & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}+i\mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -i & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2-i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 3i & -2i & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}+i\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-3i & 1+2i & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2-i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 3i & -2i & 0 \end{array}\right]$$

2.2 b)

Aus dem LGS

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-3i & 1+2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3i & -2i & 0 \end{array}\right]$$

ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{(I) } 0 &= x_1 + (-1-3i)x_4 + (1+2i)x_5 \\
\text{(II) } 0 &= x_2 - 3x_4 + (2-i)x_5 \\
\text{(III) } 0 &= x_2 + 3ix_4 - 2ix_5
\end{aligned}$$

2.3 c)

Zum überprüfen werden die die beiden Vektoren in das hergeleitete System aus 2a) eingesetzt.
Für den ersten der Vektor ergibt sich die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1-3i & 1+2i \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2-i \\ 0 & 0 & 1 & 3i & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}$$

bei der erkennbar ist, dass sie wahr ist. Damit ist der erste Vektor eine Lösung des LGS.

Für den zweiten Vektor ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} &\neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1-3i & 1+2i \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2-i \\ 0 & 0 & 1 & 3i & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i \\ 1+2i \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

bei der nach Umformung erkennbar wird, dass sie nicht gleich sein kann. Damit ist der zweite Vektor keine Lösung des LGS.

2.4 d)

3 Aufgabe 3

3.1 a)

Für A_1:
Nur die Spalten 1 und 2 sind voneinander linear abhängig, womit gilt $\text{Rang}(A_1) =$

2.

Für A_2:
3 Zeilen der Matrix sind ungleich 0. Die 3. oder 4. Spalte kann als Linearkombination der anderen Spalten dargestellt werden. Damit gilt $\text{Rang}(A_2) = 3$.

Für A_3:
Nur 2 Zeilen sind ungleich 0 und beide Spalten sind linear unabhängig voneinander. Damit gilt $\text{Rang}(A_3) = 2$.

Für A_4:
Die beiden Spalten sind linear unabhängig voneinander und es gilt damit $\text{Rang}(A_4) = 2$.

3.2 b)

Für A_1:
Zwei der Spalten sind linear abhängig ($\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$), womit sie keine Basis von $\text{Bild}(A_1)$ ist.

Für A_2:

3.3 c)

3.4 d)

3.5 e)

4 Aufgabe 4

5 Aufgabe 5

5.1 a)

5.2 b)

5.3 c)

5.4 d)