Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabe 04 - Al-Maweri 13

Daniel Geinets (453843), Christopher Neumann (409098), Dennis Schulze (458415)

9. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Es gilt

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

daruas folgt dann der Ansatz mit $A, B, C \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

wo für C mit $x = -1$ gilt

$$1 = C$$

damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)^3} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} \\ &= \frac{A(x+1)^2}{(x+1)^3} + \frac{B(x+1)}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3} \\ &= \frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx + B + 1}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}1 &= A + B + 1 \Rightarrow A = -B \\ 0 &= 2A + B \\ 0 &= A \Rightarrow B = 0\end{aligned}$$

daraus folgt, dass der Ausgangsterm seine eigene Partialbruchzerlegung ist sowohl im reellen als auch im komplexen.

Aufgabe 2

a)

Es gilt

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| 2x_1 = x_2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

dann gilt mit $v, w \in T_1$ und $r, x, y, a, b \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in T_1 \\
rv = r \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} rx \\ ry \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} rx \\ 2rx \end{bmatrix} \in T_1 \\
v + w &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ 2(x + a) \end{bmatrix} \in T_1
\end{aligned}
$$

daraus folgt

$$T_1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

Bei T_2 gilt mit $v, w \in T_1$ und $r, x, y, a, b \in \mathbb{R}$

$$0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in T_2$$

$$rv = r \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx \\ ry \end{bmatrix} \notin T_2$$

gilt, weil es für $2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ zum beispiel nicht erfüllt ist.

$$v + w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ 2(x + a) \end{bmatrix} \notin T_2$$

gilt, weil es für $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ zum beispiel nicht erfüllt ist.

daraus folgt

$$T_2 \not\subseteq \mathbb{R}^2$$

Die Menge T_3 ist keine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, da $T_3 = T_1 \cap T_2$ gilt und T_2 keine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

b)

Es gilt für $f, g \in T$ und $r, x \in \mathbb{R}$

$$0 \cdot f(x) = 0 \in T$$
$$r \cdot f(1) = r \cdot 0 = 0 \Rightarrow r \cdot f \in T$$
$$f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f + g \in T$$

damit gilt

$$T \subseteq V$$

Aufgabe 3

a)

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}p(z) &= z^2 + 2z + 1 + i \\ &= 0,5(2z^2 - 1) + 2z + 1,5 + i \\ &= 0,5T_2(z) + 2T_1(z) + (1,5 + i)T_0(z)\end{aligned}$$

c)

$$\cos(x + \pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)$$

Aufgabe 4

a)

Nein, denn

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

b)

$$\text{Basis}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\} \text{ mit } \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

c)

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\} \text{ ist EZS von } \mathbb{R}^2$$