

Лабораторная работа 1.2.3

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

22 сентября 2023 г.

1. Цели и задачи

- измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчётами по теоретическим формулам
- проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса–Штейнера.

2. Оборудование

- трифилярный подвес, счётчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых принадлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие).

Секундомер: $\Delta_{\text{сек}} = 0,01$ с

Линейка: $\Delta_{\text{лин}} = 0,05$ см

Штангенциркуль: $\Delta_{\text{шт}} = 0,01$ см

3. Теория

Момент инерции:

$$I = \int r^2 dm. \quad (1)$$

Формула момента инерции подвеса с грузом:

$$I = k m T^2, \text{ где } k = \frac{g R r}{4 \pi^2 z_0} \quad (2)$$

Таблица 1. Моменты инерций тел

Кольцо	$I_k = m_k \frac{R_{\text{внут}}^2 + R_{\text{внеш}}^2}{2}$
Диск	$I_d = \frac{m_d R_d^2}{2}$
Горизонтальный брусок	$I_{\text{бр}} = \frac{m_{\text{бр}}}{12} (w^2 + h^2)$
Вертикальный брусок	$I_{\text{бр}} = \frac{m_{\text{бр}}}{6} w^2$

Погрешности рассчитываются по формуле:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} \quad (3)$$

4. Результаты измерений

Измерим параметры установки.

Таблица 2. Параметры установки

Длина нитей H	$214,40 \pm 0,10$ см
Радиус подвеса R	$114,60 \pm 0,10$ мм
Радиус верхнего диска r	$30,20 \pm 0,10$ мм
Масса подвеса m	$965,7 \pm 0,5$ г
Радиус нижнего диска R_k	$12,40 \pm 0,05$ см

Рассчитаем некоторые параметры установки:

$$\text{Высота подвеса } z_0 = \sqrt{H^2 - R_k^2} = 214,04 \pm 0,10 \text{ см}$$

$$\Delta k = k \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_0}{z_0}\right)^2} = 1,4 \text{ мм}^2 \cdot \text{с}^{-2}$$

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} = 401,8 \pm 1,4 \text{ мм}^2 \cdot \text{с}^{-2}$$

Проведём измерения периода колебаний для различных тел.

4.1. Измерения колебаний

Таблица 3. Измерения момента инерции подвеса Таблица 8. Измерения раздвижного диска

N	t , с.
10	44,702
12	53,272
15	66,091
10	43,978
10	43,910
10	43,862
10	43,828
10	43,776
11	48,132
10	43,698
10	43,985
20	85,395

Таблица 4. Измерения момента инерции кольца

N	t , с.
10	41,705
10	41,681
10	41,638
10	41,676
10	41,593

Таблица 5. Измерения момента инерции диска

N	t , с.
10	39,078
10	39,100
10	39,044
10	39,016
10	39,013

Таблица 6. Измерения момента инерции кольца и диска

N	t , с.
10	38,947
10	38,932
10	38,928
10	38,916
10	38,913

Таблица 7. Измерения момента инерции бруска в горизонтальном положении

N	t , с.
10	37,154
10	37,129
10	37,163

N	t , с.	Δh , см
10	30,336	1,0
10	30,394	1,0
10	30,345	1,0
10	30,357	1,0
10	30,349	1,0
10	30,317	1,0
10	30,631	2,0
10	30,615	2,0
10	30,599	2,0
10	30,985	3,0
10	30,990	3,0
10	30,903	3,0
10	31,450	4,0
10	31,433	4,0
10	31,429	4,0
10	31,984	5,0
10	31,970	5,0
10	31,964	5,0
10	32,606	6,0
10	32,555	6,0
10	32,548	6,0
10	33,424	7,0
10	33,364	7,0
10	33,369	7,0
10	34,252	8,0
10	34,283	8,0
10	34,231	8,0
10	35,248	9,0
10	35,234	9,0
10	35,266	9,0

Таблица 9. Измерения момента инерции бруска в вертикальном положении

N	t , с.
10	29,829
10	29,780
10	29,714

4.2. Моменты инерций

Формула момента инерции подвеса с грузом:

$$I = kmT^2$$

Момент инерции тела:

$$I = km_{\Sigma}T^2 - I_{\text{под}}$$

4.2.1. Подвес

$$I_{\text{под}} = kmT^2 = 7,47 \pm 0,16 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

Теоретическое значение:

$$I'_{\text{под}} = mR_k^2 = 7,42 \pm 0,06 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

4.2.2. Кольцо

$$I_{\text{к}} = km_{\Sigma}T^2 - I_{\text{под}} = 4,68 \pm 0,16 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

Теоретическое значение:

$$I'_{\text{к}} = m_{\text{к}} \frac{R_{\text{внут}}^2 + R_{\text{внеш}}^2}{2} = 4,665 \pm 0,005 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

4.2.3. Диск

$$I_{\text{д}} = km_{\Sigma}T^2 - I_{\text{под}} = 2,06 \pm 0,16 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

Теоретическое значение:

$$I'_{\text{д}} = \frac{m_{\text{д}}R_{\text{д}}^2}{2} = 2,1400 \pm 0,0031 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

4.2.4. Кольцо + диск

$$I_{\text{кд}} = km_{\Sigma}T^2 - I_{\text{под}} = 6,72 \pm 0,16 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

Теоретические значения:

$$I'_{\text{кд}} = I_{\text{к}} + I_{\text{д}} = 6,805 \pm 0,006 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

4.2.5. Брус

$$I_{\text{бр гор}} = km_{\Sigma}T^2 - I_{\text{под}} = 3,85 \pm 0,15 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{\text{бр верт}} = km_{\Sigma}T^2 - I_{\text{под}} = 0,20 \pm 0,16 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

Теоретические значения:

$$I'_{\text{бр гор}} = \frac{m_{\text{бр}}}{12}(w^2 + h^2) = 4,056 \pm 0,004 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

$$I'_{\text{бр верт}} = \frac{m_{\text{бр}}}{6}w^2 = 0,1280 \pm 0,0010 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

Все значения в пределах погрешности совпадают с теоретическими.

4.3. Раздвижные диски

Построим зависимость $I(h^2)$ по таблице 8, где $I_{\Pi} = kmT^2 - I_{\text{под}}$, $d = \Delta h - 0,5$ см.

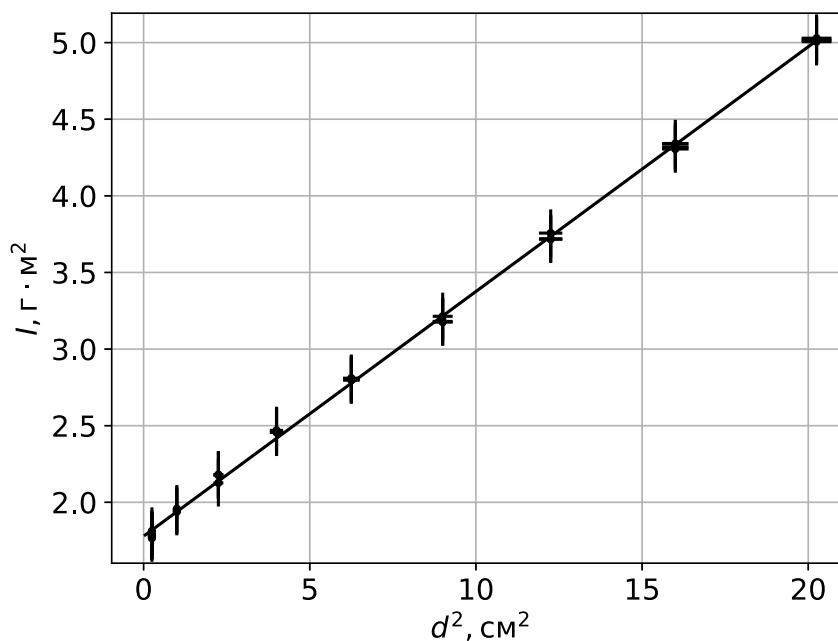


Рис. 1. График зависимости I от d^2

$$I(d) = I_{\Pi} + m_{\Pi}d^2$$

Используя метод χ^2 , найдём коэффициенты прямой:

$$I_{\Pi} = 1,779 \pm 0,008 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

$$m = 1597 \pm 8 \text{ г}$$

Что близко соответствует массе половинок и теоретическому значению момента инерции:

$$m_{\Pi} = 1536,2 \pm 0,5 \text{ г}$$

$$I'_{\Pi} = \frac{m_{\Pi}R_{\Pi}^2}{2} = 1,654 \pm 0,004 \text{ г} \cdot \text{м}^2$$

Следовательно, закон Гюйгенса–Штейнера выполняется.

5. Вывод

С помощью трифилярного подвеса мы определили моменты инерции различных тел с высокой точностью и сравнили их с теоретическими значениями.

Также, мы доказали аддитивность моментов инерции.

Была показана справедливость формулы Гюйгенса–Штейнера.