# Лабораторная работа 1.4.1
# Изучение экспериментальных погрешностей на примере физического маятника
# 29 сентября 2023 г.

## 1. Цели и задачи

- на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями
- проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения
- убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника
- оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

## 2. Оборудование

Металлический стержень с опорной призмой; дополнительный груз; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения цента масс маятника; секундомер; счётчик колебаний (механический или электронный); линейки металлические различной длины; штангенциркуль; электронные весы; математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

**Секундомер:** $\Delta T_{\text{сек}} = 0{,}01$ с
**Линейка:** $\Delta_l = 0{,}01$ см
**Электронные весы:** $\Delta_m = 0{,}1$ г

## 3. Теория

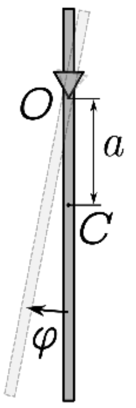


Рис. 1. Схема установки.

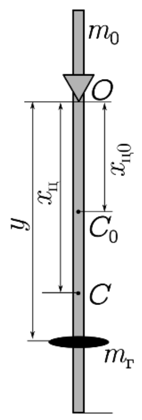


Рис. 2. Схема установки с грузом.

Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g\left(1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}}\right)x_{\text{ц}}}} \tag{1}$$

Ускорение свободного падения:

$$g = 4\pi^2 \frac{J_0 + m_\text{г} y^2}{T M x_\text{ц}} \tag{2}$$

# 4. Результаты измерений

Измерим все необходимые величины:

Длина стержня: $l = 100{,}01 \pm 0{,}01$ см

Центр масс стержня: $l_\text{ц.м.} = 50 \pm 0{,}1$ см

Расстояние от острия призмы до ц.м.: $x_{\text{ц}0} = 24{,}4 \pm 0{,}1$ см

Центр масс стержня с призмой: $x_\text{ц.м.} = 52{,}1 \pm 0{,}1$ см

Масса призмы: $m_\text{пр} = 78{,}4 \pm 0{,}1$ г

Масса стержня: $m_\text{ст} = 891{,}7 \pm 0{,}1$ г

Масса груза: $m_\text{гр} = 291{,}0 \pm 0{,}1$ г

Момент инерции подвеса:

$$J_0 = m_\text{ст} \cdot x_{\text{ц}0}^2 + m_\text{ст} \cdot l^2 = 0{,}127 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$$

Измерим период колебаний стержня без груза (таблица 1):

Таблица 1. Измерения колебаний стержня без груза.

| $T$, с | 30,77 | 30,77 | 30,77 | 30,78 |
|---|---|---|---|---|

Период одного колебания:

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_i (T_i - \langle T \rangle)^2} = 0{,}0058 \text{ с}$$

$$\Delta T = \sqrt{\sigma_T^2 + \Delta_T^2} = 0{,}012 \text{ с}$$

$$T = 30{,}773 \pm 0{,}012 \text{ с} \approx 30{,}77 \pm 0{,}01 \text{ с}$$

Измерим период колебаний стержня с дополнительным грузом в разных положениях, результаты запишем в таблицу 2.

Таблица 2. Измерения колебания маятника с разными положениями дополнительного груза

| $x_\text{ц}$, см | $y$, см | $n$ | $t_1$, с | $t_2$, с | $t_3$, с | $T$, с | $g$, м/с$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28,60 | 42,60 | 10 | 14,90 | 14,90 | 14,90 | 1,490 | 8,89 |
| 29,30 | 45,64 | 10 | 15,04 | 15,04 | 15,04 | 1,504 | 8,88 |
| 29,80 | 47,80 | 10 | 15,13 | 15,13 | 15,14 | 1,513 | 8,89 |
| 22,70 | 17,03 | 10 | 14,23 | 14,23 | 14,23 | 1,423 | 9,25 |
| 11,30 | -33,37 | 10 | 20,08 | 20,08 | 20,08 | 2,008 | 10,85 |
| 15,80 | -13,87 | 10 | 16,09 | 16,09 | 16,09 | 1,609 | 10,12 |
| 18,50 | -2,17 | 10 | 14,82 | 14,82 | 14,82 | 1,482 | 9,82 |
| 33,60 | 64,27 | 10 | 16,15 | 16,15 | 16,15 | 1,615 | 8,85 |

$$y = \frac{\left(m_{\text{пр}} + m_{\text{ст}} + m_{\text{гр}}\right) \cdot x_{\text{ц}} - \left(m_{\text{пр}} + m_{\text{ст}}\right) \cdot x_{\text{ц}0}}{m_{\text{гр}}}$$

$$M = m_{\text{пр}} + m_{\text{ст}} + m_{\text{гр}}$$

$$\Delta y = \frac{\sqrt{\left(M \cdot \Delta x_{\text{ц}}\right)^2 + \left(\left(m_{\text{пр}} + m_{\text{ст}}\right) \cdot \Delta x_{\text{ц}0}\right)^2}}{m_{\text{гр}}}$$

## 4.1. Минимум $T(y)$

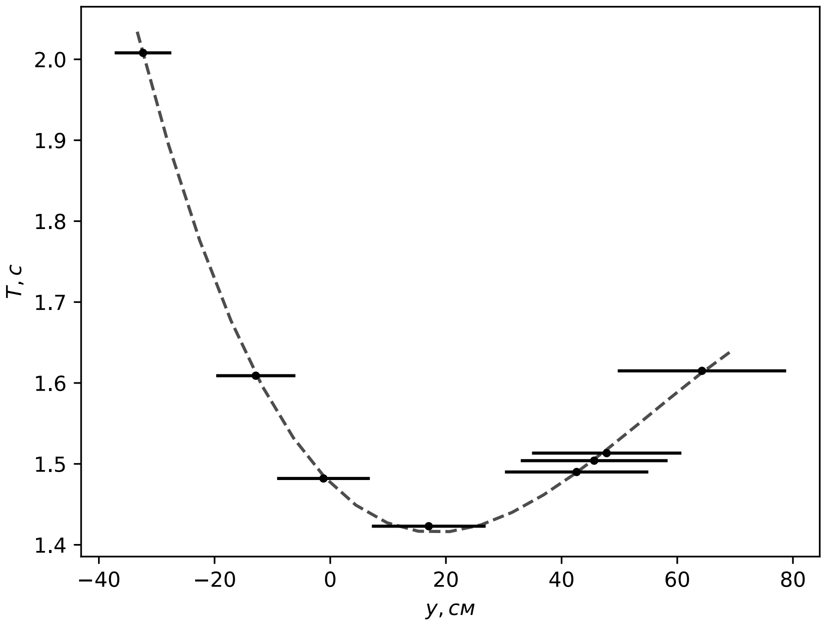


Рис. 3. Зависимость периода колебаний $T$ от положения груза $y$

Минимум приходится на $y = 17{,}0$ см, что совпадает с теоретическим значением.

## 4.2. Усреднение $g$

$$T_{\text{ср}} = \frac{\langle t \rangle}{N}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i \left(t_i - \langle t \rangle\right)^2}$$

$$\Delta T_{\text{ср}} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \Delta_{\text{сек}}^2}}{N} \approx 0{,}001 \text{ с}, \Delta_{\text{сек}} \gg \sigma$$

$$\Delta g = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i \left(g_i - \langle g \rangle\right)^2} = 0{,}7 \text{ м/с}^2$$

$$g = 9{,}4 \pm 0{,}7 \text{ м/с}^2$$

Вычисление $y$ создаёт большую погрешность, из-за чего значение $g$ существенно отклоняется от его настоящего значения.

## 4.3. Метод наименьших квадратов

Из формулы 2 следует:

$$T^2 x_ц = \frac{4\pi^2}{gM}(J_0 + m_г y^2)$$

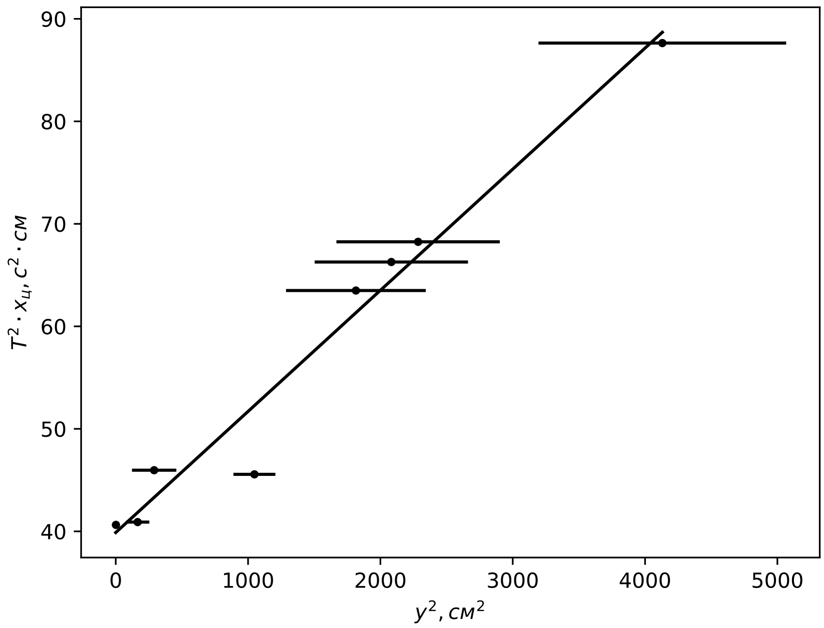


Рис. 4. Зависимость $T^2 x_{цм}$ от $y^2$

Метод наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = 0{,}012$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle = 39{,}886$$

$$D_{xx} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\sum_i \frac{E_{yy}}{E_{xx}} - k^2}{n-2}} = 0{,}00089$$

$$\sigma_b = \sigma_k \sqrt{\langle x^2 \rangle} = 1{,}75$$

$$\Delta g = g \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2}$$

$$g = \frac{b \cdot \left(m_{пр} + m_{ст} + m_{гр}\right)}{4 J_0 \pi^2} = 9{,}98 \pm 0{,}44 \text{ м/с}^2$$

Таким образом, МНК получился точнее, однако большая погрешность от вычисления $y$ всё ещё присутствует.

## 4.4. Приведённая длина

$$l_{привед} = x_{ц0} + \frac{l^2}{12 x_{ц0}} = 58{,}6 \text{ см}$$

Проверим справедливость теоремы Гюйгенса: снимим призму и поместим её на расстоянии $l_{\text{привед}}$ от исходного, измерим время 20 колебаний:

$$t_{\text{привед}} = 30{,}59 \text{ с}$$

$$T_{\text{привед}} = \frac{t_{\text{привед}}}{20} = 1{,}5295 \text{ с}$$

Что в пределах погрешности (человеческой реакции) совпадает с периодом колебаний $T$.

## 4.5. Добротность

Амплитуда маятника уменьшается в два раза за $n = 580$ колебаний

$$\text{Время затухания: } \tau_{\text{зат}} = \frac{nT}{\ln 2} = 5833 \text{ с}$$

$$\text{Декремент затухания: } \gamma = \frac{1}{\tau_{\text{зат}}} = 0{,}00017 \text{ Гц}$$

$$\text{Добротность: } Q = \frac{\pi n}{\ln 2} \approx 2628$$

# 5. Вывод

В работе была проверена формула периода колебаний физического маятника, опеределено значение ускорение свободного падения и оценены погрешности.

Также была проверена справедливость теоемы Гюйгенса об обратимости точке опоры и центра качания маятника.