Capítulo 9

Integración Numérica

9.1. Introducción

La idea para obtener fórmulas de integración numérica con el objetivo de aproximar la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx,$$

consiste en calcular el polinomio de interpolación de la función f en algunos puntos del intervalo $[a, b]$ y aproximar el valor de la integral de la función por el valor de la integral del polinomio de interpolación.

Supongamos que conocemos los valores de la función f en $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[a, b]$ y sea p_n el polinomio de grado menor o igual que n que interpola a la función f en esos puntos. Entonces

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x),$$

donde $E_n(x)$ denota el error de interpolación. En tal caso,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p_n(x)\,dx + \int_a^b E_n(x)\,dx\,.$$

El término $\displaystyle\int_a^b p_n(x)\,dx$ nos da el valor aproximado de la integral,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p_n(x)\,dx$$

mientras que $\displaystyle\int_a^b E_n(x)\,dx$ nos da el error de discretización que llamaremos $e_n(f)$.

Si utilizamos la fórmula de Lagrange para el polinomio de interpolación entonces

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x),$$

de donde,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\simeq \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)\right) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)\,.\end{aligned}$$

Por tanto una fórmula de tipo interpolatorio adoptará la expresión general

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i). \tag{9.1.1}$$

Se trata de una combinación lineal apropiada de los valores de la función f en los puntos x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$, donde los coeficientes a_i que figuran en (9.1.1) sólo dependen de los puntos x_i y no de la función f.

Suponiendo que $f \in C^{n+1}[a, b]$ entonces sabemos que

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

donde ξ_x es un punto intermedio entre $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$.

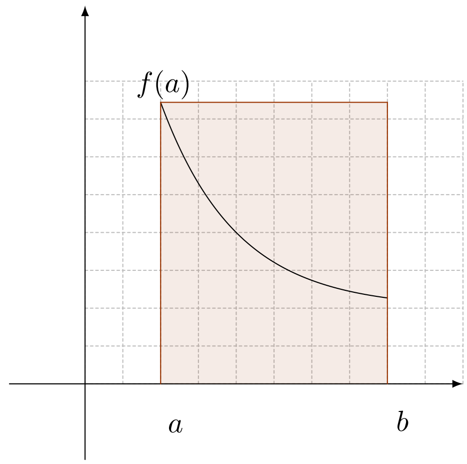
9.1.1. Fórmula del rectángulo

La fórmula de integración más sencilla es la que utiliza el valor de la función f en un sólo punto $x_0 \in [a, b]$. En este caso el polinomio de interpolación de la función f es constante, es decir $p_0(x) = f(x_0)$, por lo que

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b p_0(x)dx = \int_a^b f(x_0)dx = f(x_0)(b-a)\,.$$

Si $x_0 = a$ se obtiene la fórmula del rectángulo izquierda dada por

$$\int_a^b f(x)dx \simeq f(a)(b-a). \tag{9.1.2}$$

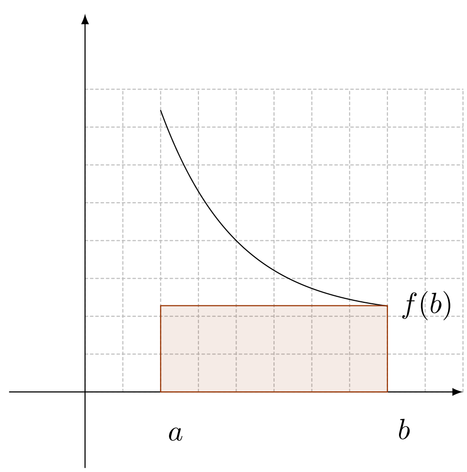


Si la función $f \in C^1[a,b]$ el error cometido al utilizar la fórmula (9.1.2) es

$$e_0(f) = \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2, \text{ con } \xi \in (a,b).$$

La fórmula del rectángulo derecha se obtiene si $x_0 = b$,

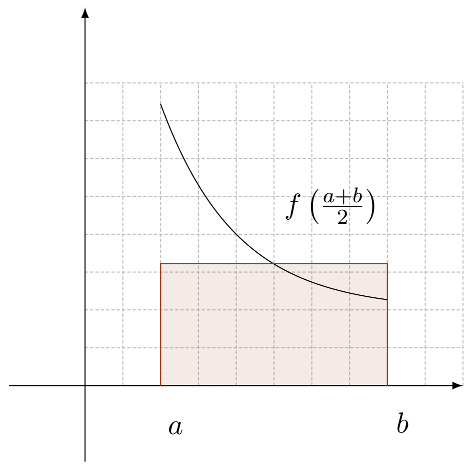
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq f(b)(b-a)\,, \quad e_0(f) = -\frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2,\ \xi \in (a,b).$$



Geométricamente, si $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, la fórmula del rectángulo aproxima el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ por el área del rectángulo de base $b-a$ y de altura $f(a)$ ó $f(b)$.

Si $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$, se obtiene la fórmula del punto medio dada por

$$\int_a^b f(x)dx \simeq f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\,. \tag{9.1.3}$$



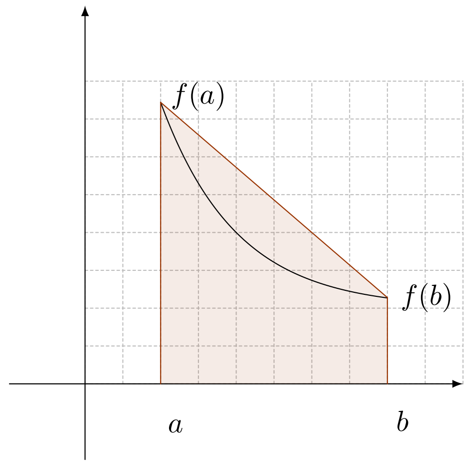
A pesar de ser una fórmula de un punto (y por tanto interpolamos a f con polinomios de grado 0), la fórmula del punto medio es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que 1. Si suponemos que la función $f \in C^2[a,b]$, se obtiene la siguiente expresión para el error en la fórmula del punto medio

$$e_0(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,\ \xi \in (a,b).$$

9.1.2. Fórmula del trapecio

Se trata de una fórmula de integración con dos puntos $x_0 = a$ y $x_1 = b$. En este caso el polinomio de interpolación de la función f es la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ y se obtiene la siguiente fórmula de integración numérica

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right) = \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))\,.$$



Geométricamente, si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, la fórmula del trapecio aproxima el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ por el área del trapecio de base $b - a$ y de alturas $f(a)$ y $f(b)$.

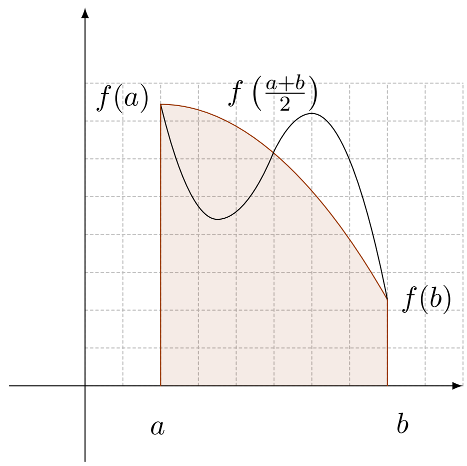
Si $f \in C^2[a, b]$ tenemos la siguiente fórmula del error

$$e_1(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3, \quad \xi \in (a, b).$$

9.1.3. Fórmula de Simpson

Se trata de una fórmula de 3 puntos (es decir, interpolamos con polinomios de grado menor o igual que 2) pero consigue exactitud para todos los polinomios de grado menor o igual que 3. Se obtiene interpolando en los puntos $x_0 = a$, $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$. Integrando el polinomio de interpolación se obtiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \qquad (9.1.4)$$



Suponiendo que $f \in C^4[a,b]$ se cumple que

$$e_2(f) = -\frac{f^{4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5 \quad , \xi \in (a,b).$$

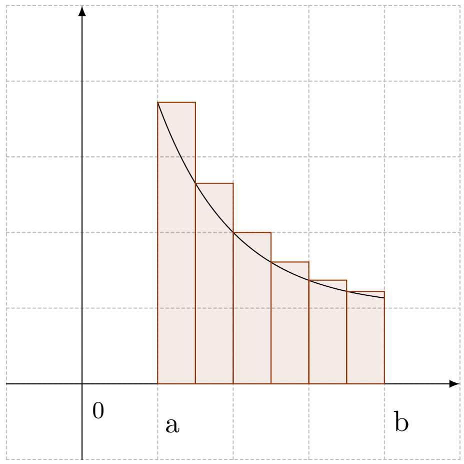
EJERCICIO 9.1.1. *Considérese la integral*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

1. *Aproximar el valor de I aplicando la regla del trapecio.*
2. *Calcular de forma exacta el valor de I estimando el error cometido en el apartado anterior.*
3. *Repetir los apartados anteriores usando la regla de Simpson.*

9.2. Fórmulas de integración compuesta (Divide y vencerás)

Las fórmulas de integración numérica anteriores no son apropiadas cuando el intervalo de integración $[a,b]$ es grande, ya que el error que se comete al utilizarlas también es grande. Lo que haremos será dividir el intervalo inicial en subintervalos más pequeños y aplicar un método de integración numérica simple en cada uno de ellos. De esta forma se obtienen las llamadas fórmulas de integración numérica compuestas.



Si llamamos $h = \dfrac{b-a}{n}$, entonces los puntos $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \cdots, n$, constituyen una partición del intervalo $[a, b]$ y , por la aditividad de la integral respecto al dominio de integración, se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx\,.$$

Ahora aplicaremos alguna de las fórmulas de integración numérica para aproximar la integral de la función en cada uno de los intervalos $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$, de la partición.

9.2.1. Fórmula del rectángulo (izquierda) compuesta

Si utilizamos la fórmula del rectángulo izquierda para aproximar la integral en cada uno de los subintervalos $[x_j, x_{j+1}]$ obtenemos la fórmula de integración compuesta dada por

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j) = h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j).$$

El error de truncatura o discretización será la suma de los errores cometidos en cada uno de los subintervalos. Suponiendo que la función f es de clase 1 en $[a, b]$ se tiene que

$$e(f) = \frac{(b-a)}{2}\, h\, f'(\xi)\,, \qquad \xi \in (a, b).$$

9.2.2. Fórmula del trapecio compuesta

Si utilizamos la fórmula del trapecio en cada subintervalo se llega a la fórmula de integración compuesta

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}(x_{j+1}-x_j) = \frac{h}{2}\Big(f(x_0)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)+f(x_n)\Big).$$

Si $f \in C^2[a,b]$, el error viene dado por

$$e(f) = -\frac{(b-a)}{12}h^2\, f''(\xi)\,, \qquad \xi \in (a,b).$$

9.2.3. Fórmula de Simpson compuesta

Finalmente, utilizando en cada subintervalo la fórmula de Simpson, obtenemos la fórmula de integración

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\simeq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_{j+1}-x_j}{6}\Big[f(x_j)+4f\Big(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\Big)+f(x_{j+1})\Big] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h}{6}\Big(f(x_j)+4f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)+f(x_{j+1}\Big) \\
&= \frac{h}{6}\Big(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)+4\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)\Big)
\end{aligned}$$

para $j = 0, 1, \cdots, n-1$.

Si $f \in C^4[a,b]$, el error en la fórmula de Simpson compuesta viene dado por

$$e(f) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{4)}(\xi)\,, \qquad \xi \in (a,b).$$

Ejercicio 9.2.1. *Se sabe que la longitud de la elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a, b > 0$, *viene dada por la integral elíptica completa de segunda especie*

$$L = 4\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(\theta)}d\theta,$$

siendo $k = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Utilizar Maxima para aproximar, usando la regla de Simpson compuesta, el valor de la longitud de la elipse $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ *con un error menor que* 10^{-6}.