

Capítulo 2

Sucesiones de números reales

2.1. Introducción

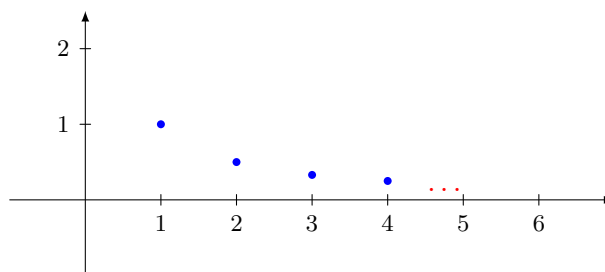
DEFINICIÓN 2.1.1. Llamamos sucesión de números reales a una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \rightarrow f(n) = x_n$.

Habitualmente denotaremos la sucesión como $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ o simplemente por $\{x_n\}$.

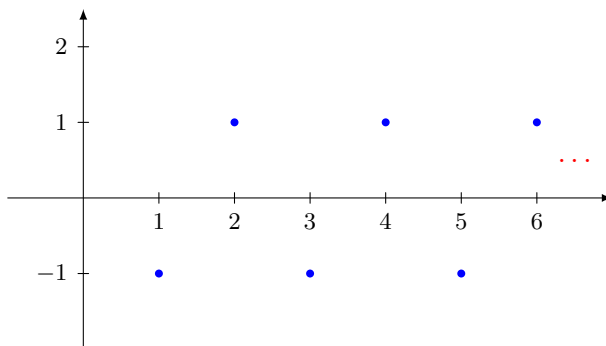
A los valores $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, se les llama términos de la sucesión, siendo x_n el término enésimo o término general de la sucesión. La sucesión se representa por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o simplemente por $\{x_n\}$ y al conjunto de sus imágenes por $\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$.

EJEMPLO 2.1.1. A continuación presentamos varios ejemplos de sucesiones

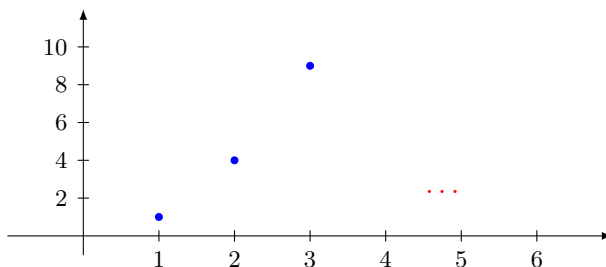
1. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$



2. $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$



$$3. \{n^2\} = \{1, 4, 9, \dots\}$$



No es necesario expresar $\{x_n\}$ en función de n mediante una fórmula. Por ejemplo el conjunto de los números primos forma una sucesión $\{p_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$, a pesar de que no se conoce ninguna fórmula explícita que genere $\{p_n\}$.

OBSERVACIÓN 2.1.1. La mejor fuente de información existente sobre sucesiones de números enteros es “The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences”, disponible en <http://oeis.org/>. Un extraordinario trabajo de recopilación iniciado por el matemático N. J. A. Sloane en 1964 cuando era todavía un estudiante.

DEFINICIÓN 2.1.2. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es una sucesión recurrente de orden p si cada término viene dado en función de los p términos anteriores, es decir

$$x_{n+p} = g(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p-1}), \quad n \geq 1, \quad (2.1.1)$$

siendo p un valor fijo.

La igualdad (2.1.1) se denomina ley de recurrencia. Para generar los términos de una sucesión recurrente de orden p es preciso conocer los p -primeros términos de la sucesión. Los valores, x_1, x_2, \dots, x_p , se denominan valores iniciales de la sucesión. Si partimos de una misma ley de recurrencia (2.1.1) pero con distintos valores iniciales, se generan sucesiones distintas.

OBSERVACIÓN 2.1.2. i) La mayoría de los métodos numéricos que estudiaremos generan una sucesión recurrente con el objetivo de aproximar la solución del problema estudiado.

ii) Para estudiar la convergencia de sucesiones recurrentes es muy útil el Principio de Inducción. En determinados casos el estudio de la convergencia se reduce a probar que la sucesión es monótona y acotada.

2.2. Límite de una sucesión

DEFINICIÓN 2.2.1. Una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ (escribimos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ o $\{x_n\} \rightarrow x$) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon$.

En tal caso decimos que x es el límite de la sucesión $\{x_n\}$. Si una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite se llama convergente.

Intuitivamente, “ $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ ” significa que el término x_n está tan próximo “como queramos” del número real x siempre que n sea “suficientemente grande”.

Como $|x_n - x| < \varepsilon$ es equivalente a $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, podemos afirmar que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ converge a x si en cualquier entorno de x se encuentran todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$, salvo quizás un número finito.

PROPOSICIÓN 2.2.1. Dada una sucesión $\{x_n\}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\{x_n\} \rightarrow x \Leftrightarrow \{x_n - x\} \rightarrow 0$
2. $\{x_n\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{|x_n|\} \rightarrow 0$.
3. La sucesión $\{y_n\} = \{x_{n+p}\}$, $p \in \mathbb{N}$ fijado, es convergente si y sólo si $\{x_n\}$ es convergente, en cuyo caso el límite de ambas coincide.

EJEMPLO 2.2.1. 1. Usar la definición de límite para probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$.

2. ¿La sucesión $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ es convergente?

3. Probar que la sucesión constante $\{c, c, c, \dots\}$ converge a c .

EJEMPLO 2.2.2. El límite de la sucesión $\{r^n\}$, con $r \in \mathbb{R}$, se comporta de la siguiente manera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} \text{No existe el límite,} & \text{si } r \leq -1, \\ 0, & \text{si } -1 < r < 1 \iff |r| < 1, \\ 1, & \text{si } r = 1, \\ +\infty, & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Una propiedad importante del límite de una sucesión es que si existe es único.

TEOREMA 2.2.1 (Unicidad del límite). *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen dos números reales, x e y , tales que $\{x_n\} \rightarrow x$ y también $\{x_n\} \rightarrow y$. Entonces $x = y$.*

DEFINICIÓN 2.2.2. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.*

1) Decimos que $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ (o $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$), si

$$\forall M > 0 \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

2) Decimos que $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ (o $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$), si

$$\forall M > 0 \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n < -M.$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ decimos que la sucesión es divergente.

DEFINICIÓN 2.2.3. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que*

1) $\{x_n\}$ es monótona creciente si $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) $\{x_n\}$ es monótona decreciente si $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En ambos casos se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona. Si en las definiciones anteriores se da la desigualdad estricta diremos que la sucesión es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

DEFINICIÓN 2.2.4. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.*

1) Se dice que $\{x_n\}$ está acotada superiormente si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_n \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.2)$$

Los números reales K que verifican (2.2.2) se llaman cotas superiores de la sucesión $\{x_n\}$.

2) Se dice que $\{x_n\}$ está acotada inferiormente si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_n \geq k, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.3)$$

Los números reales k que verifican (2.2.3) se llaman cotas inferiores de la sucesión $\{x_n\}$.

3) Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada si existen valores $k, K \in \mathbb{R}$ tales que

$$k \leq x_n \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.4)$$

De la definición de límite se sigue sin demasiada dificultad el siguiente resultado.

TEOREMA 2.2.2. *Toda sucesión de números reales convergente está acotada.*

El recíproco del teorema anterior no es cierto (por ejemplo $\{(-1)^n\}$ es una sucesión acotada no convergente). Un recíproco parcial lo proporciona el siguiente resultado.

TEOREMA 2.2.3. *Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.*

DEFINICIÓN 2.2.5. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales.*

Llamamos subsucesión o sucesión parcial de la sucesión $\{x_n\}$ a la sucesión $\{x_{n_k}\}$.

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente, entonces cualquier subsucesión de $\{x_{n_k}\}$ también es convergente y tiene el mismo límite.*

La proposición anterior resulta muy útil para demostrar que una sucesión no es convergente usándola de la siguiente forma: si una sucesión admite dos subsucesiones con límites distintos o una subsucesión no convergente entonces la sucesión de partida no es convergente.

PROPOSICIÓN 2.2.3. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales. Se cumplen las siguientes propiedades:*

- 1) *Si $\{x_n\} \rightarrow x$, $\{y_n\} \rightarrow y$, entonces $\{x_n + y_n\} \rightarrow x + y$.*
- 2) *Si $\{x_n\} \rightarrow 0$ e $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow 0$.*
- 3) *Si $\{x_n\} \rightarrow x$ e $\{y_n\} \rightarrow y$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow xy$.*
- 4) *Si $\{x_n\} \rightarrow x$ e $\{y_n\} \rightarrow y \neq 0$, con $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n/y_n\} \rightarrow x/y$.*
- 5) *(Regla del encaje o del sandwich). Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tienen por límite l y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$
entonces la sucesión $\{z_n\}$ también es convergente y su límite es l .
- 6) *Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ e $\{y_n\} \rightarrow +\infty$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow +\infty$.*
- 7) *Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ e $\{y_n\} \rightarrow -\infty$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow -\infty$.*
- 8) *Si $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ $\{y_n\} \rightarrow y \neq 0$, entonces $\{x_n y_n\} \rightarrow +\infty$ si $y > 0$ ó $\{x_n y_n\} \rightarrow -\infty$ si $y < 0$.*
- 9) *Si $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{1/|x_n|\} \rightarrow +\infty$.*

Hay otras operaciones que no tienen un valor definido, dependen del ejemplo concreto y se llaman “indeterminaciones”. Por ejemplo: “ $+\infty - \infty$ ”, “ $0 \cdot \infty$ ”, “ ∞/∞ ”, “ $0/0$ ”, “ 1^∞ ”, “ ∞^0 ”, “ 0^0 ”.

