Capítulo 5

Derivación de funciones reales de variable real

5.1. Derivada de una función

5.1.1. Introducción

DEFINICIÓN 5.1.1. *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Se dice que la función f es derivable en el punto x_0 si el siguiente límite existe y es finito*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{5.1.1}$$

Al valor de este límite se le llama derivada de la función f en el punto x_0 y se denota por $f'(x_0)$.

La expresión $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se llama cociente incremental o tasa de variación media de la función f en el intervalo de extremos x y x_0, y mide la variación de la función $f(x)$ con respecto a la variación de la variable x.

Si hacemos $x - x_0 = h$ en (5.1.1) podemos expresar la derivada en la forma

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

5.1.2. Derivadas laterales

DEFINICIÓN 5.1.2. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y supongamos que f está definida en un intervalo de la forma $[x_0, x_0+\delta)$ con $\delta>0$. Si el siguiente límite existe y es finito*

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

diremos que la función f es derivable por la derecha en x_0. Al valor de este límite lo llamaremos derivada por la derecha de la función f en el punto x_0 y lo denotaremos por $f'(x_0^+)$.

Análogamente, si f está definida en un intervalo de la forma $(x_0-\delta, x_0]$ con $\delta>0$, podemos considerar el límite

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Si este límite existe y es finito diremos que f es derivable por la izquierda en x_0. Al valor de ese límite lo llamaremos derivada por la izquierda de la función f en el punto x_0 y lo denotaremos por $f'(x_0^-)$.

PROPOSICIÓN 5.1.1. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$. Entonces, f es derivable en x_0 si y sólo si f es derivable por la izquierda y por la derecha en x_0 y además*

$$f'(x_0^-)=f'(x_0^+)=f'(x_0).$$

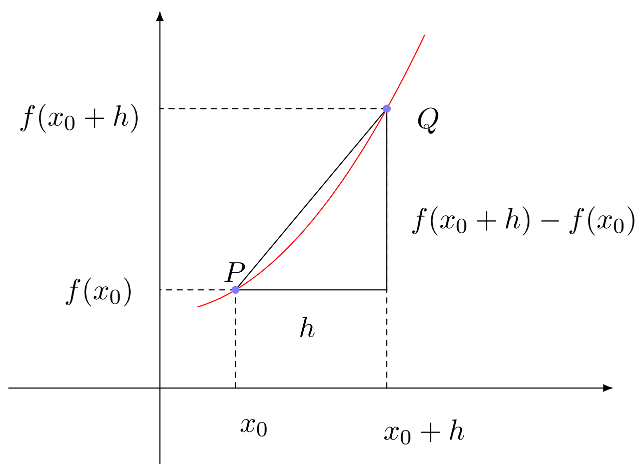
5.1.3. Interpretación geométrica y física de la derivada

Interpretación geométrica

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y supongamos que f es derivable en un punto $x_0\in(a,b)$. El cociente incremental

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P\equiv(x_0,f(x_0))$ y $Q\equiv(x_0+h,f(x_0+h))$.



Cuando $h \to 0$, la recta que pasa por los puntos P y Q se aproxima a la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $P \equiv (x_0, f(x_0))$. Por tanto, la derivada $f'(x_0)$ se corresponde geométricamente con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Interpretación física

Supongamos una partícula que se mueve en línea recta y que recorre una distancia $s = s(t)$ al cabo de un cierto tiempo t. La velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ viene dada por el cociente incremental

$$\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}.$$

Si en la expresión anterior tomamos el límite cuando h tiende a cero obtenemos la velocidad instantánea en t_0 dada por

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = s'(t_0),$$

es decir, la velocidad en el instante $t = t_0$ es la derivada de la función $s(t)$ en el punto t_0.

5.1.4. Ecuaciones de la recta tangente y la recta normal

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in (a, b)$. La recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene de pendiente $f'(x_0)$ por lo que su ecuación viene dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y es perpendicular a la recta tangente se denomina recta normal a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Pueden presentarse dos situaciones:

1) Si $f'(x_0) \neq 0$, la pendiente de la recta normal es $-1/f'(x_0)$ y su ecuación viene dada por

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0).$$

2) Si $f'(x_0) = 0$, la recta tangente es la recta horizontal de ecuación $y = f(x_0)$. En este caso la recta normal será la recta vertical de ecuación $x = x_0$.

5.2. Propiedades de las funciones derivables

TEOREMA 5.2.1 (**Derivable ⇒ Continua**). *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.*

EJERCICIO 5.2.1. *Poner un ejemplo de una función continua en un punto que no sea derivable en ese punto.*

PROPOSICIÓN 5.2.1 (**Derivación de funciones elementales**).

a) $\dfrac{d}{dx}\, x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

b) $\dfrac{d}{dx}\, a^{x} = a^{x}\, \ln a, \quad a > 0;$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\, e^{x} = e^{x}.$

c) $\dfrac{d}{dx}\, \log_a x = \dfrac{1}{x}\, \log_a e, \quad a > 0;$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\, \ln x = \dfrac{1}{x}\,.$

d) $\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{sen} x = \cos x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\, \cos x = -\operatorname{sen} x.$

e) $\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$

f) $\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{arsen} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\, \operatorname{arcos} x = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

g) $\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{artg} x = \dfrac{1}{1 + x^2}.$

PROPOSICIÓN 5.2.2 (**Reglas de derivación**). *Sean f, g dos funciones derivables en x_0. Entonces*

1. *$f+g$ es derivable en x_0 y*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. *$f\,g$ es derivable en x_0 y se cumple que*
$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$
3. *Si $g(x_0) \neq 0$, entonces f/g es derivable en x_0 y*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$
4. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la función $\lambda\,f$ es derivable en x_0 y se cumple que*
$$(\lambda\,f)'\,(x_0) = \lambda\,f'(x_0).$$

TEOREMA 5.2.2 (**Regla de la cadena**). *Sean f, g dos funciones tales que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ y consideremos la función compuesta $g \circ f$.*

Si f es derivable en $x_0 \in \mathrm{Dom(f)}$ y g es derivable en $f(x_0) \in \mathrm{Dom}(g)$, entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y además
$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)]\,f'(x_0).$$

EJERCICIO 5.2.2. *Aplicar la regla de la cadena a la composición $f^{-1} \circ f$ para obtener la fórmula para la derivada de la función inversa.*

5.3. Aplicaciones de la derivada

5.3.1. Regla de L'Hôpital

El siguiente resultado es de gran utilidad para resolver indeterminaciones cuando se calculan límites.

TEOREMA 5.3.1 (**Regla de L'Hôpital**). *Sean f, g dos funciones derivables en $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, para algún $r > 0$, tales que*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$
Si $g'(x) \neq 0\, \forall x \in (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ y existe $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además ambos límites coinciden
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

OBSERVACIÓN 5.3.1. *La regla de L'Hôpital es aplicable también cuando*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

lo que permite utilizarla para resolver indeterminaciones del tipo "∞/∞", y es también aplicable cuando $x \to \infty$ para resolver indeterminaciones del tipo "$0/0$" e "∞/∞".

5.3.2. Máximos y mínimos relativos

DEFINICIÓN 5.3.1. *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Diremos que f tiene un máximo relativo en x_0 si existe un $r > 0$, tal que*

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r). \tag{5.3.1}$$

Análogamente, diremos que f tiene un mínimo relativo en x_0 si existe un $r > 0$, tal que

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r). \tag{5.3.2}$$

En cualquiera de los dos casos anteriores se dice que f tiene un extremo relativo en x_0. El extremo es estricto si las desigualdades anteriores son estrictas. El extremo es absoluto si las desigualdades se cumplen para todo $x \in D$.

Los puntos donde una función tiene un máximo o un mínimo relativo se llaman extremos locales o extremos relativos.

TEOREMA 5.3.2 (**Condición necesaria de extremo relativo**). *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si f tiene un máximo o un mínimo relativo en x_0 y f es derivable en x_0 entonces*

$$f'(x_0) = 0.$$

OBSERVACIÓN 5.3.2. *(i) La condición $f'(x_0) = 0$ no es suficiente para garantizar que una función tenga un máximo o mínimo relativo en $x = x_0$. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ verifica que $f'(0) = 0$ y sin embargo no tiene ningún extremo relativo en $x_0 = 0$.*

(ii) La condición $f'(x_0) = 0$ solo es necesaria para extremos relativos que se alcanzen un un punto x_0 interior al intervalo (a, b) y donde f sea derivable. En un intervalo cerrado $[a, b]$ los puntos $x = a$ y $x = b$ también son candidatos a extremos relativos. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$ alcanza su máximo en $x = -1$, $x = 1$ y su mínimo en $x = 0$, a pesar de que $f'(x) = 0$ solo se cumple para $x = 0$.

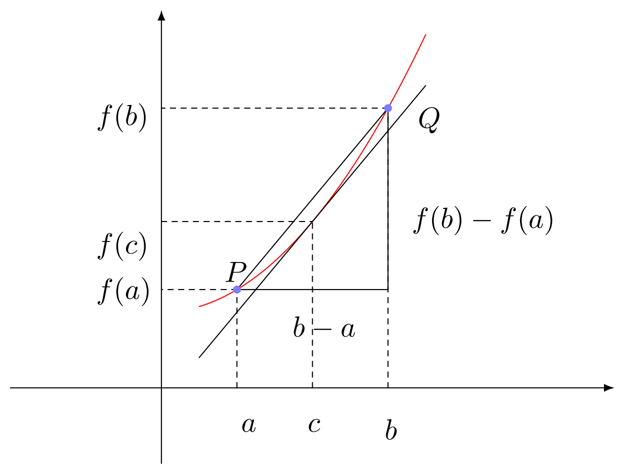
5.3.3. El teorema de Rolle y algunas de sus consecuencias

TEOREMA 5.3.3 (**Teorema de Rolle**). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y además $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

COROLARIO 5.3.1 (**Unicidad de solución**). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene a lo sumo una solución en el intervalo $[a,b]$.*

TEOREMA 5.3.4 (**Teorema del Valor Medio**). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y supongamos f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Si consideramos los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (b, f(b))$, entonces $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q. Por otra parte, $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $C = (c, f(c))$. Por tanto, el teorema del valor medio nos asegura que existe un punto $c \in (a,b)$ tal que la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ es paralela a la recta que une los extremos de la gráfica.

EJERCICIO 5.3.1. *Supongamos que un coche ha recorrido 350 km. en 2 horas y media. Probar que ha superado el límite de velocidad en algún momento.*

Como consecuencia del teorema del valor medio se obtienen los siguientes resultados.

COROLARIO 5.3.2. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto.*

1. *Si* $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$ *entonces* f *es una función constante en* I.
2. *Si* $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ *entonces* f *es una función creciente en* I.
3. *Si* $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$ *entonces* f *es una función estrictamente creciente en* I.
4. *Si* $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$ *entonces* f *es una función decreciente en* I.
5. *Si* $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$ *entonces* f *es una función estrictamente decreciente en* I.
6. *Sea* $g : I \to \mathbb{R}$. *Si* $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in I$ *entonces existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x) - g(x) = c \quad \forall x \in I.$$

Definición 5.3.2. *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *una función derivable en* I. *Decimos que* f *es convexa en* I *si la gráfica de* f *es mayor o igual que cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos de* I.

Si la gráfica de f *es menor o igual que cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos de* I *decimos que* f *es cóncava en* I.

Si f *es convexa a un lado de* x_0 *y cóncava al otro diremos que* f *tiene en* x_0 *un punto de inflexión.*

Ejemplo 5.3.1. *La función* $f(x) = x^2$ *es convexa en* $\mathbb{R}$ *mientras que* $g(x) = -x^2$ *es cóncava en* $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado nos permite analizar los intervalos de convexidad y concavidad de una función.

Teorema 5.3.5. *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *una función dos veces derivable en el intervalo abierto* I.

1. *Si* $f''(x) \geq 0$ *para todo* $x \in I$ *entonces* f *es convexa en I.*
2. *Si* $f''(x) \leq 0$ *para todo* $x \in I$ *entonces* f *es cóncava en I.*
3. *Si* f *tiene en* x_0 *un punto de inflexión entonces* $f''(x_0) = 0$.