Questão 1: Dentre os problemas que a COVID-19 nos trouxe, um deles é o distanciamento social seguro; em princípio, cada pessoa deve ficar a uma distância de cerca de $2m$ de todas as outras. Nesse contexto, um problema muito atual é calcular o número máximo de pessoas que pode ser colocadas numa sala, obedecendo esse distanciamento. Na verdade, esse é um problema de ladrilhamento porque podemos imaginar que cada pessoa é o centro de um círculo de raio $1m$, e precisamos saber qual o número máximo de círculos necessários para cobrir o chão dessa sala.

Vamos considerar apenas dois padrões, I e II, para ladrilhamento, conforme mostram as figuras

Figura 1: Padrão I

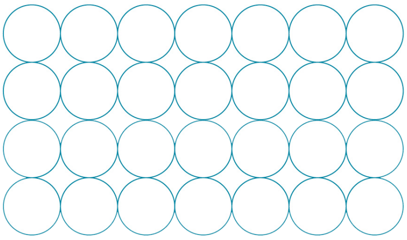
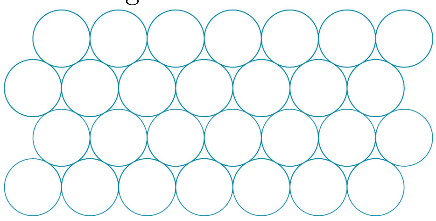


Figura 2: Padrão II



Qual o número máximo de lajotas circulares, com $1m$ de raio, que podemos usar para ladrilhar o chão de uma sala de $10m \times 11m$, usando os padrões I e II para ladrilhamento?

Questão 2:

(a) Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno em W. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear injetora, então a aplicação dada por $f(u, v) = \langle T(u), T(v)\rangle$, para quaisquer $u, v \in V$, define um produto interno em V.

(b) Sejam a e b reais positivos e $u = (\sqrt{a}, \sqrt{b})$, $v = (\sqrt{b}, \sqrt{a})$ em $\mathbb{R}^2$. Utilize a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para comparar a média aritmética $\dfrac{a+b}{2}$ com a média geométrica $\sqrt{ab}$.

Observação 1: Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Sejam $u, v, w \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, um produto interno é a função $\langle\ ,\ \rangle : E \to \mathbb{R}$ tal que

(P1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

(P2) $\langle u + w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$;

(P3) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$;

(P4) $\langle u, u\rangle \geq 0,\ \forall u \in E$ e $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Observação 2: Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$