MATEMÁTICA

Um livro feito por alunos para alunos

UEL PET FNDE MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Allysson Antonucci de Campos, Ana Clara de Pontes Martins, Beatriz de Oliveira, Bella Rocxane Martins Figliaggi, Catharina de Moura Moreira, Gustavo Sylvio de Paula Menani, Henrique Kendi Tokura, Kalel Bispo Gimenez de Araujo, Leonardo de Almeida Carvalho, Leonardo Gustavo Ronchin Alves, Luana Ayumi Tamura, Paulo Fernando Mercadante Damazio & Vitor Pereira Matias

Coordenação
Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho.

Organização
Gustavo Sylvio de Paula Menani, Nabila Iasbik Giroti, Kalel Bispo Gimenez de Araujo & Vitor Pereira Matias.

MATEMÁTICA

Um livro feito por alunos para alunos

CCE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAD
Pró-Reitoria de Graduação

Gráfica UEL
2022

Revisão
Arthur Gracioli Aching, Eric Marcelo Vizu, Felipe Mancini Ramos, Gustavo Alexsander Rodrigues Bastos Alves, Luisi Cristine Aparecida Caciatori, Matheus Sadao Susuki, Pablo Marcelo Arboleya Nogueira, Pedro Henrique de Oliveira Matos & Pedro Silva Bufalo.

Revisão Ortográfica e Gramatical
Profª. Drª. Cristina Valéria Bulhões Simon.

Curadoria
Ana Clara de Pontes Martins, Beatriz de Oliveira, Leonardo Gustavo Ronchin Alves & Luana Ayumi Tamura.

Ilustração
Bella Rocxane Martins Figliaggi, Catharina de Moura Moreira, Kalel Bispo Gimenez de Araujo & Leonardo de Almeida Carvalho.

Compilação
Allysson Antonucci de Campos, Gustavo Sylvio de Paula Menani, Henrique Kendi Tokura, Nabila Iasbik Giroti, Paulo Fernando Mercadante Damazio. & Vitor Pereira Matias.

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

M425 Matemática: um livro feito por alunos para alunos / Allysson Antonucci de Campos...[et al.]; coordenação: Paulo Antonio Liboni Filho; organização: Gustavo Sylvio de Paula Menani...[et al.] – Londrina : Gráfica UEL, 2022.
342 p. : il.

Vários autores.
ISBN 978-65-00-50901-4

1. Matemática (Ensino médio) – Problemas, exercícios, etc. 2. Funções (Matemática). 3. Equações. 4. Matrizes. 5. Geometria I. Campos, Allysson Antonucci de. II. Liboni Filho, Paulo Antonio. III. Menani, Gustavo Sylvio de Paula. IV. Título.

CDU 51(075.3)

Bibliotecária: Fátima Silvério Biz Accorsini – CRB9 820.

Expediente

Reitoria
Profª. Drª. Marta Regina Gimenez Favaro
Prof. Dr. Airton José Petris

Pró-Reitoria de Graduação
Profª. Drª. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho

Centro de Ciências Exatas
Prof. Dr. Silvano Cesar da Costa
Prof. Dr. Alan Salvany Felinto

Chefia de Departamento
Profª. Drª. Michele de Oliveira Alves
Profª. Drª. Magna Natália Marin Pires

Coordenação de Colegiado
Profª. Drª. Sandra Malta Barbosa
Profª. Drª. Neuza Teramon

Comitê Local de Acompanhamento e Avaliação
Cristina Duarte Ruiz

Tutor PET Matemática
Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho

Prefácio

Escrever um livro é uma tarefa difícil. A correria das obrigações cotidianas, a insegurança de quem escreve e o desejo de que o texto seja o melhor possível são obstáculos para que as páginas vazias se tornem páginas de uma obra.

Com este livro o desafio não é menor. Especialmente porque não é fruto de apenas um autor, mas é obra de um grupo que avocou para si a responsabilidade de produzir um material gratuito, de qualidade, acessível a todos e que contenha todo o conteúdo matemático tipicamente visto durante o Ensino Médio.

Foram múltiplos e plurais os talentos, pensamentos e pessoas envolvidas na produção deste livro: os autores dos capítulos, os revisores, os diagramadores, os responsáveis pelas artes, pela estrutura pedagógica, pela organização e sistematização do trabalho, dentre outras inúmeras tarefas.

Apesar de plural, há um ponto comum dentre as várias pessoas que participaram da confecção deste trabalho: estudantes do Programa de Educação Tutorial – PET – do curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, nossa UEL. Afinal, esta obra é feita por estudantes, para estudantes. A vocês, profundo agradecimento, respeito e admiração.

Com o livro pronto, percebe-se nele as características do grupo que o escreveu: é audacioso, transformador e de alma grande. Que esta obra seja útil para aqueles que não dispõe de material de estudo e que seja utilizado por todos os que frequentam cursinhos comunitários e que buscam uma vaga em uma universidade como a UEL – pública, gratuidade e de qualidade.

Esta obra não seria possível sem o sistema de editoração LATEX. Em especial, agradecimento à Mathias Legrand, criador do modelo “The Legrand Orange Book Template” que foi adaptado para a diagramação do livro.

Agradecimentos especiais à coordenadora do Disque-Gramática, projeto de extensão do Departamento de Letras Vernáculas e Clássicas da UEL, Profa. Dra. Cristina Valéria Bulhões Simon, que não poupou esforços para a correção ortográfica e gramatical deste livro.

Por fim, agradecimento à Universidade Estadual de Londrina, por acolher e viabilizar ações tão potentes e transformadoras. Agradecimento ao Governo Federal, Ministério da Educação (MEC) e ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), pelo financiamento do programa.

Londrina, outubro de 2022

Prof. Dr. Paulo Liboni

Tutor do Programa de Educação Tutorial Matemática/UEL

Sumário

1 Noções Básicas

2 Conjuntos numéricos

3 Funções

9 Trigonometria

10 Geometria Plana

11 Geometria Espacial

12 Geometria Analítica

1 Noções Básicas

Noções Básicas

Conteúdos como escala, razão e proporção são frequentemente encontrados em diversas questões de diferentes matérias, deixando evidente a importância de conhecer melhor suas definições. De modo análogo, a porcentagem está em todo lugar, sendo assim é uma ferramenta indispensável tanto para os alunos que prestarão provas de vestibulares ou concursos, quanto para o entendimento econômico da sociedade. Na sequência, veremos a notação científica, uma importante padronização de números. E, por fim, veremos racionalização e produtos notáveis, que estão conectados um com o outro. Trata-se de ferramentas matemáticas extremamente úteis para a manipulação e simplificação de frações. Este Apêndice é um capítulo extra e necessário, pois trata-se de assuntos da matemática básica que permitem ao leitor ter uma visão mais ampla dos conteúdos, além disso garante um profundo desfruto para a resolução de exercícios diversos.

1 Escala, razão e proporção

Frequentemente, nos grandes vestibulares e na prova do ENEM, esses conceitos aparecem em questões de diversas áreas do conhecimento, como Matemática, Física, Biologia e Química. Afinal, pode ser aplicada para inúmeros tipos de problemas.

A princípio, vamos entender a definição de grandeza e, em seguida, dar início aos estudos relacionados a razão, proporção e escala.

1.1 Grandeza

Grandeza é tudo o que é mensurável, ou seja, tudo aquilo que podemos medir e atribuir uma informação numérica e/ou vetorial.

Exemplo 1.1.1 São exemplos de grandezas:

1. O comprimento é uma grandeza, medida geralmente em quilômetros, metros ou centímetros.
2. O tempo é uma grandeza, pois pode ser expresso em horas, minutos ou segundos.
3. A massa é uma grandeza, uma vez que pode ser expressa em quilogramas (ou gramas).
4. O tempo de 5 segundos é um exemplo numérico de grandeza, representada por um valor numérico e uma unidade de medida.

1.2 Razão

A palavra razão é originária do latim *ratio*, e significa "divisão". No âmbito da matemática, a razão representa a comparação entre duas grandezas, ou seja, a comparação entre dois números. Pode ser representada na forma fracionária, decimal ou percentual.

Definição 1.1 Dados dois números quaisquer a e b, com b diferente de zero, chamamos de razão entre a e b o quociente $\frac{a}{b}$, sendo a o numerador e b o denominador.

Exemplo 1.2.1 A razão entre 3 e 7 é dada por $\frac{3}{7}$.

Exemplo 1.2.2 A razão entre 72 e 9 é dada por $\frac{72}{9} = 8$.

Exemplo 1.2.3 Para calcular o consumo médio de um automóvel, basta dividir a quantidade de quilômetros percorridos pela quantidade de combustível gasto nesse percurso. Essas grandezas (quantidade de quilômetros percorridos e quantidade de combustível) possuem suas unidades de medida padronizadas: a distância deve ser observada em quilômetros (km), e o combustível, em litros (l).

Imagine um carro com 25 litros de combustível. Após percorrer 500 km, verificou-se que o carro tinha apenas 5 litros. O cálculo do consumo médio desse carro pode ser feito dividindo-se a distância percorrida pela quantidade de litros que o automóvel gastou, isto é:

$$\text{Consumo: } \frac{500 \text{ km}}{25 \text{ l} - 5 \text{ l}} = \frac{500 \text{ km}}{20 \text{ l}} = 25 \text{ km/l.}$$

Esse tipo de cálculo tem como objetivo descobrir quantos quilômetros podem ser percorridos com apenas um litro de combustível e, assim, prever quantos litros serão necessários em cada viagem e também o custo desse combustível.

Exemplo 1.2.4 Suponha que, de um total de 25.000 candidatos, 5.000 foram aprovados no vestibular da UEL. Sendo assim, a razão dos candidatos aprovados é dada por:

$$\frac{5.000}{25.000} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \text{ (a cada } 5 \text{ inscritos, } 1 \text{ foi aprovado).}$$

Exemplo 1.2.5 Uma festa de aniversário tinha 100 convidados, dos quais 25 eram crianças. Assim, a razão entre o número de crianças e o número total de convidados é:

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ (a cada } 4 \text{ convidados, } 1 \text{ era criança).}$$

Obs. É importante sempre se atentar com a ordem dos números. O primeiro número é sempre o numerador, e o segundo é sempre o denominador. Por exemplo, a razão de a por b (ou razão entre a e b), nessa ordem, é dada pelo quociente: $\frac{a}{b}$.

Obs. Nós podemos representar uma razão de três maneiras diferentes. Por exemplo, a razão entre 1 e 2 é dada por:

1. **Forma fracionária:** 1 é o numerador e 2 é o denominador, desse modo,
$$\frac{1}{2}.$$
2. **Forma decimal:** Para determinar a forma decimal, basta realizar a divisão do numerador pelo denominador, ou seja,
$$\frac{1}{2} = 0,5.$$
3. **Forma percentual:** Basta multiplicar a forma decimal por 100, isto é,
$$0,5 \cdot 100 = 50\%.$$

Exercício resolvido 1 (UERJ 2020/1) Admita que, em dezembro de 2014, uma filha tinha 20 anos e seu pai, 50. Em dezembro de 2024, a razão entre as idades da filha e do pai será de:

(a) $\frac{1}{5}$

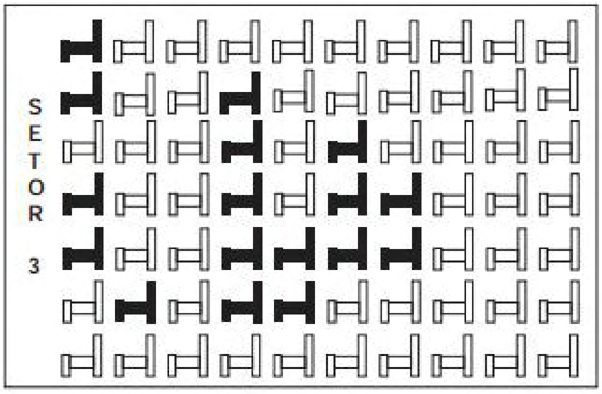
(b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{3}{4}$

(d) $\frac{4}{3}$

Resolução: Bom, se em 2014 a filha tinha 20 anos e seu pai tinha 50, então em 2024, isto é, 10 anos depois, a filha terá 30 anos e o pai terá 60 anos. Portanto, a razão entre as idades da filha e do pai será de $\frac{30}{60} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Logo, a alternativa correta é a letra (b).

Exercício resolvido 2 (ENEM – 2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

(a) $\frac{17}{70}$.

(b) $\frac{17}{53}$.

(c) $\frac{53}{70}$.

(d) $\frac{53}{17}$.

(e) $\frac{70}{17}$.

Resolução: Vejamos, a quantidade total de poltronas da seção 3 é dada por: $10 \cdot 7 = 70$ poltronas. As poltronas são dispostas em linhas e colunas e, segundo a imagem, temos 10 colunas e 7 linhas. Além disso, temos um total de 17 poltronas reservadas, basta contar todas as poltronas que são pretas. Logo, a razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é $\frac{17}{70}$. Ou seja, a alternativa correta é a letra (a).

1.3 Proporção

Proporção é a igualdade entre duas razões. Mais especificamente, a proporção é uma ferramenta matemática que nos permite determinar certos valores a partir de resultados previamente definidos. O estudo das proporções é muito importante, pois é usado frequentemente na natureza e em nosso cotidiano. Por exemplo, quando se deseja fazer uma receita de torta de frango, com rendimento de até 4 porções, para apenas 2 pessoas, basta realizar metade da receita. Desse modo, continuaremos respeitando a proporção de cada ingrediente da receita, mas em quantidade reduzida.

Definição 1.2 Dados os números a, b, c e d, com b e d diferentes de zero, chamamos de proporção a igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ quando as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ possuem o mesmo resultado. Isto é, se $a \cdot d = b \cdot c$, então os números a, b, c e d são proporcionais.

Exemplo 1.3.1 Verifique se os números 2, 4, 8 e 16 são proporcionais:

Primeiramente, vamos analisar a razão $\frac{2}{4}$. Podemos simplificar essa fração dividindo ambos os termos por 2, ou seja,

$$\frac{2}{4} = \frac{\frac{2}{2}}{\frac{4}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Agora, estudando a razão $\frac{8}{16}$, observe que podemos simplificá-la dividindo ambos os termos por 8, isto é,

$$\frac{8}{16} = \frac{\frac{8}{8}}{\frac{16}{8}} = \frac{1}{2}.$$

Por fim, simplificando ambas as frações obtemos razões iguais, portanto, os números 2, 4, 8 e 16 são proporcionais, ou ainda $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$.

Obs. Uma outra maneira de resolver o exemplo anterior seria multiplicar os números 2 e 8, e depois, 1 e 16, e verificar que são iguais, ou seja, $2 \cdot 8 = 1 \cdot 16$. Daí então poderíamos dizer que os números 2, 4, 8 e 16 são proporcionais.

Exemplo 1.3.2 Verifique se os números 3, 4, 2 e 5 são proporcionais:

Vejamos,

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 3 \cdot 5 = 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 15 = 8.$$

Note que a que a igualdade não é verdadeira, logo, os números não são proporcionais.

Exemplo 1.3.3 Um posto de gasolina dá um desconto de 8 centavos para cada 10 litros completos de gasolina. Se uma pessoa coloca 30 litros de gasolina no seu carro, qual será o desconto?

Construindo a tabela:

10 litros	8 centavos
12 litros	8 centavos
20 litros	16 centavos
30 litros	24 centavos

Observe que $\frac{8}{10} = \frac{24}{30}$ é verdadeira, pois $8 \cdot 30 = 10 \cdot 24$. Lê-se 8 está para 10, assim como 24 está para 30. Portanto, se uma pessoa coloca 30 litros de gasolina no seu carro, terá o desconto de 24 centavos.

Propriedades

Sejam a, b, c e d números reais, tais que b e d são diferentes de zero. Se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

então teremos as seguintes propriedades:

1. Multiplicando o numerador da primeira razão pelo denominador da segunda, e o numerador da segunda razão pelo denominador da primeira, segue que $a \cdot d = b \cdot c$. Portanto,
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$
2. Aqui, a soma do numerador com o denominador da primeira razão sobre b é igual a soma do numerador com o denominador da segunda razão sobre d. O mesmo vale para a subtração. Veja:
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$
3. A soma dos denominadores, a e c, sobre a soma dos denominadores, b e d, é igual a primeira razão (e, obviamente, igual a segunda razão também). Portanto,
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \text{ e } \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$
4. O produto dos denominadores, a e c, sobre o produto dos denominadores, b e d, é igual ao quadrado primeira razão (e, evidentemente, igual ao quadrado da segunda razão também). Ou seja,
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}.$$

Obs. Sempre que igualamos duas razões, estamos estabelecendo uma proporção.

A proporção também é útil para prever resultados através da regra de três e das propriedades de proporção. Mas para isso, é necessário avaliar se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais. Esse método só é aplicável se, de fato, há uma relação de proporção.

Grandezas diretamente proporcionais

Como foi explicado anteriormente, uma grandeza é definida como tudo aquilo que pode ser medido ou calculado, como velocidade, área ou volume de um material. Em grandezas diretamente proporcionais, à medida que uma dessas grandezas aumenta, a outra também aumenta na mesma proporção. Um exemplo é a relação velocidade e distância de um determinado objeto: quanto maior a velocidade, maior a distância percorrida por ele (no mesmo período de tempo) e, quanto menor a velocidade, menor a distância percorrida. Outro exemplo de grandezas diretamente proporcionais é a altura de um objeto e o comprimento da sombra projetada por ele (quanto mais alto o objeto, maior será a sombra projetada).

Exemplo 1.3.4 Em uma gráfica, uma determinada impressora imprime 100 folhas em 5 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 1.000 folhas?

A tabela abaixo pode ser construída a fim de relacionar as grandezas folhas e minutos, auxiliando nos cálculos:

Folhas	Minutos
100	5
1.000	x

De acordo com a tabela, nota-se que o tempo gasto para imprimir 1.000 folhas é de 50 minutos, pois ao multiplicar o número de folhas por 10 devemos multiplicar também o tempo por 10. Isso se deve ao fato das grandezas serem diretamente proporcionais. Portanto, $x = 50$ minutos.

Grandezas inversamente proporcionais

À medida que uma dessas grandezas aumenta, a outra necessariamente diminui, ou o oposto. Por exemplo, a velocidade e o tempo são grandezas inversamente proporcionais. De fato, quanto maior a velocidade para percorrer um determinado trajeto, menor será o tempo gasto. Outros exemplos de grandezas inversamente proporcionais são: número de torneiras de mesma vazão e tempo para encher um determinado tanque (quanto mais torneiras estiverem abertas, menor o tempo para completar o tanque); desconto dado em um produto e o valor final pago (quanto maior o desconto, menor será o valor final pago pelo produto).

Exemplo 1.3.5 Para encher um tanque são necessárias 60 vasilhas de 6 litros cada uma. Se forem usadas vasilhas de 2 litros cada uma, quantas serão necessárias?

Construindo a tabela:

Num. de vasilhas	Capacidade da vasilha (litros)
60	6
x	2

De acordo com a tabela, a capacidade da vasilha foi diminuída três vezes, dessa forma, necessitaremos de 180 vasilhas. Como dividiu-se a capacidade da vasilha por 3, ou seja, $6 \cdot \frac{1}{3} = 2$, devemos multiplicar o número de vasilhas por 3. Isso se deve ao fato das grandezas serem inversamente proporcionais. Portanto, $x = 180$ vasilhas.

Exercício resolvido 3 (ENEM 2017) Uma televisão pode ser posicionada de modo que se consiga enxergar os detalhes de uma imagem em alta definição. Considere que a distância ideal, com conforto visual, para se assistir à televisão de 32 polegadas é de $1,8$ metros. Suponha que haja uma relação de proporcionalidade direta entre o tamanho da tela (medido em polegada) e a distância ideal. Considere que um espectador dispõe de uma televisão de 60 polegadas e que ele deseja se posicionar em frente a ela, com conforto visual.

A distância da televisão, em metros, em que o espectador deve se posicionar para que tenha conforto visual é mais próxima de

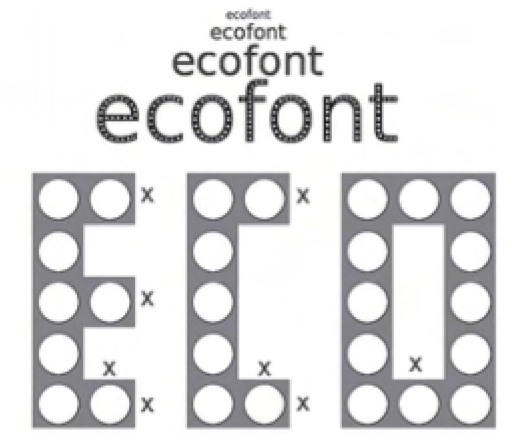
(a) $0,33$
(b) $0,96$
(c) $1,57$
(d) $3,37$
(e) $3,60$

Resolução: Bom, segue do enunciado que $1,8\ m$ é a distância ideal para uma televisão de 32 polegadas e, sabendo que existe uma proporcionalidade direta entre os dados, podemos escrever

$$\frac{32}{1,8} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 1,8}{32} = 3,375.$$

Logo, a distância em que o espectador deve se posicionar para que tenha conforto visual é mais próxima de $3,37\ m$, ou seja, alternativa (d).

Exercício resolvido 4 (ENEM 2018) A Ecofont possui design baseado na velha fonte Vera Sans. Porém, ela tem um diferencial: pequenos buraquinhos circulares congruentes, e em todo o seu corpo, presentes em cada símbolo. Esses furos proporcionam um gasto de tinta menor na hora da impressão.



Disponível em: www.goo.gl. Acesso em: 2 dez. 2017 (adaptado).

Suponha que a palavra ECO esteja escrita nessa fonte, com tamanho 192, e que seja composta por letras formadas por quadrados de lados x com furos circulares de raio $r = \frac{1}{3}$. Para que a área a ser pintada seja reduzida a $\frac{1}{16}$ da área inicial, pretende-se reduzir o tamanho da fonte. Sabe-se que, ao alterar o tamanho da fonte, o tamanho da letra é alterado na mesma proporção.

(a) 64
(b) 48
(c) 24
(d) 21
(e) 12

Resolução: Bom, sabemos que para essa fonte de tamanho 192, o lado de cada quadrado será x, logo a área de cada quadrado será x^2. Se diminuirmos a fonte para outro tamanho, de forma a reduzir a área para $\frac{1}{16}$ da área inicial, teremos que o quadrado terá um novo lado medindo:

$$y^2 = \left(\frac{1}{16}\right) \cdot x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right) \cdot x^2} \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot x.$$

Logo, como a alteração do tamanho da fonte e o tamanho da letra seguem na mesma proporção, concluímos que $\frac{192}{4} = 48$. Logo, a alternativa correta é a letra (b).

1.4 Escala

A escala é um importante recurso para se representar a relação de proporção entre o tamanho real de algo e a sua representação. Isto é, um conjunto de ferramentas que possibilita mecanismos de ampliação e redução. No caso de um desenho ou mapa, por exemplo, podemos entendê-la como a razão entre as dimensões apresentadas no desenho e o objeto real por ele representado. Estas dimensões devem estar sempre na mesma unidade.

Exemplo 1.4.1 Alguns bons exemplos do uso da escala são:

1. Todo mapa é uma representação gráfica (ou representação reduzida) do tamanho real de uma região.
2. As miniaturas de carros são exemplos de escala, pois representam um objeto do mundo real.
3. A planta de uma casa é um bom exemplo de escala, uma vez que representa o tamanho real da casa através de um desenho.

Definição 1.3 Definimos a escala como a razão entre as dimensões expressas no desenho e as dimensões do objeto real (representado na realidade). Portanto,

$$\text{Escala: } \frac{\text{dimensões expressas no desenho}}{\text{dimensões do objeto real}}.$$

Exemplo 1.4.2 Suponha que a escala de um determinado mapa seja $1:75$. Isto quer dizer que cada centímetro do mapa exprime 75 centímetros da área real.

Exemplo 1.4.3 Um carro em miniatura foi construído na escala $1:18$, ou seja, cada centímetro da miniatura representa 18 centímetros do carro real.

Obs. Podemos categorizar a escala da seguinte forma:
Escala natural: Quando as dimensões do desenho são as mesmas do tamanho real do objeto na realidade (espelho plano, por exemplo).
Escala de redução: Quando representamos um objeto do mundo real em tamanho reduzido, isto é, as dimensões do desenho são menores do que as dimensões do objeto real (mapa geográfico de alguma região).
Escala de ampliação: Quando queremos representar as dimensões de um objeto maiores do que as suas dimensões no mundo real (foto retirada de um microscópio, por exemplo).

Exercício resolvido 5 (Mackenzie) Considerando que a distância real entre Yokohama e Fukushima, duas importantes localidades onde serão realizadas competições dos Jogos Olímpicos de Verão 2020 é de 270 quilômetros, em um mapa, na escala de $1:1.500.000$, essa distância seria de

(a) $1,8$
(b) $40,5$
(c) $1,8$
(d) 18
(e) $4,05$

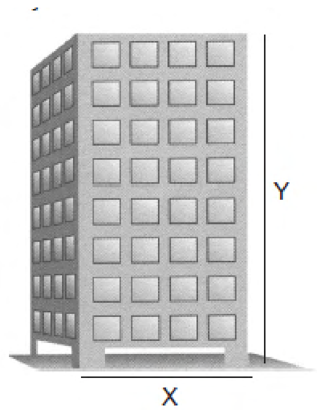
Resolução: Como não temos nenhum tipo de referência quanto à unidade de medida da escala, ela é compreendida como dada em centímetros. Nessa questão, cada centímetro na representação do mapa equivale a $1.500.000$ cm da distância real entre as cidades. Primeiramente, precisamos converter todas as unidades para centímetros: 270 km $= 270.000$ m $= 27.000.000$ cm.

Desse modo,

$$27.000.000 : 1.500.000 = \frac{27.000.000}{1.500.000} = \frac{270}{15} = 18.$$

Isto é, a distância entre as cidades na escala de $1 : 1.500.000$ seria de 18 cm. Portanto, a alternativa correta é a letra (d).

Exercício resolvido 6 (PUC - RS) Se tomássemos como base o desenho de um prédio em que X mede 12 metros e Y mede 24 metros, e fizéssemos um mapa da sua fachada reduzindo-a em 60 vezes, qual seria a escala numérica desta representação?



(a) $1 : 60$
(b) $1 : 120$
(c) $1 : 10$
(d) $1 : 60.000$
(e) $1 : 100$

Resolução: O denominador de uma escala representa a quantidade de vezes que um objeto ou lugar foi reduzido em sua representação.

Com base no enunciado, “um mapa da sua fachada reduzindo-a em 60 vezes” é um mapa em que cada 1 centímetro representa 60 centímetros reais. Ou seja, é uma escala de um para sessenta. Em símbolos, $1 : 60$. Desse modo, a altura e largura do prédio tornam-se irrelevantes e, portanto, a alternativa correta é a letra (a).

2 Porcentagem

A palavra “porcentagem” ou seu simbolo $\%$ estão muito presentes no cotidiano, por exemplo, para representarem partes de um todo, descontos ou aumento, juros e entre outros. Sendo assim sua interpretação depende da situação a qual foi utilizada.

Para entender conceito de porcentagem ou percentagem, primeiramente lembramos que as fração cujo denominador é o número 100 recebem o nome de frações centesimais e para elas podemos ao invés de colocar o denominador apenas colocar na frente do numerador o símbolo “$\%$”. Por exemplo, ao invés de $\frac{30}{100}$ escrevemos 30% e nesse caso lê-se: trinta por cento.

Na frase “20% das bolinhas são brancas”, intuitivamente significa que a cada 100 bolinhas, 20 são brancas, na imagem temos essa proporção :

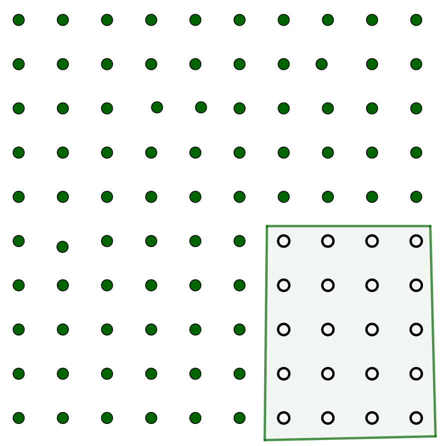


Figura 2.0.1: Porcentagem de bolinhas brancas

As porcentagens são utilizadas, sobretudo, quando existe necessidade de expressar uma parte de um valor, por exemplo, quando temos um pacote de balinhas e percebemos que das 20 balinhas totais, apenas 5 são de morango, podemos falar que 25% das balinhas do pacote são de morango. Pois,

$$\frac{5}{20} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%.$$

Representação de Porcentagem

As porcentagens podem ser escritas na forma de fração centesimal (divisão por 100) ou como número decimal:

$$30\% = \frac{30}{100} = 0,3.$$

Obs. Chamaremos de notação de porcentagem aquela que o número é acompanhado por $\%$.

Cálculo de Porcentagem

- Parte sobre todo:

Obs. Quando pensamos em parte de um todo, significa que de um conjunto (todo) foi retirado, ou selecionado alguns membros (parte) e queremos saber o quanto aqueles membros representam do conjunto total. Por exemplo, na Imagem (2.0.1) de um todo de 100 bolinhas, queríamos saber sobre uma parte quanto delas são brancas.

1. Para calcular quanto a parte é, em porcentagem, sobre um todo, basta dividir a parte pelo todo e escrever em notação de porcentagem:

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}} = \text{resultado}$$
$$\Rightarrow \frac{\text{resultado} \cdot 100}{100} = (\text{resultado} \cdot 100)\%.$$

2. Outra maneira de calcular a porcentagem de uma parte sobre um todo é pela regra de três em que o todo corresponde ao 100% e a parte à $x\%$.

$$\text{todo} \longrightarrow 100\%$$
$$\text{parte} \longrightarrow x$$

Multiplicando cruzado, temos:

$$\text{todo} \cdot x = \text{parte} \cdot 100$$
$$x = \frac{\text{parte} \cdot 100}{\text{todo}}\%.$$

Exemplo 2.0.1 Calcular a porcentagem de 3 (parte) sobre 4 (todo).
Quando queremos calcular a porcentagem de uma parte (3) sobre um todo (4) dividimos a parte pelo todo, isto é,

$$\frac{3}{4} = 0,75.$$

Como foi visto, $0,75$ pode ser representado da seguinte forma:

$$0,75 \cdot \frac{100}{100} = \frac{75}{100} = 75\%.$$

Logo, 3 é 75% de 4.
Do mesmo modo, poderíamos ter feito pela regra de três:

$$4 \longrightarrow 100\%$$
$$3 \longrightarrow x$$

Assim,

$$4 \cdot x = 3 \cdot 100\% \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{4}\% \Rightarrow x = 75\%.$$

Exemplo 2.0.2 Vejamos quais são as porcentagens de meninos e de meninas em uma turma de matemática com 40 alunos, sendo 29 meninas.

– Porcentagem de meninas é 29 (o total de meninas) sobre 40 (total de alunos), ou seja, queremos saber a porcentagem de uma parte sobre um todo, sendo assim:

$$\frac{29}{40} = 0,725 = 72,5\%.$$

– Porcentagem de meninos é o número 11 (parte), pois $40-29 = 11$, sobre 40 (todo),

$$\frac{11}{40} = 0,275 = 27,5\%.$$

Note que ao somar a porcentagem de meninas $(72,5\%)$ com a de meninos $(27,5\%)$ resulta em 100%. De fato,

$$72,5\% + 27,5\% = 100\%,$$

visto que a quantidade de meninas e meninos representa a quantidade total de alunos, ou seja, 100% dos alunos.

- Colocar uma fração em porcentagem:
Para transformar uma fração qualquer em notação de porcentagem devemos encontrar o resultado da fração e passa-lo para a notação de porcentagem.

Exemplo 2.0.3 Seja $\frac{8}{50}$ uma fração, para representá-la em porcentagem é necessário realizar a divisão e multiplicar por $\frac{100}{100}$, assim

$$\frac{8}{50} = 0,16 \cdot \frac{100}{100} = 16\%.$$

Logo, $\frac{8}{50}$ representa 16%.

Exemplo 2.0.4 Um grupo de 4 amigos dividiu uma pizza de 8 pedaços.

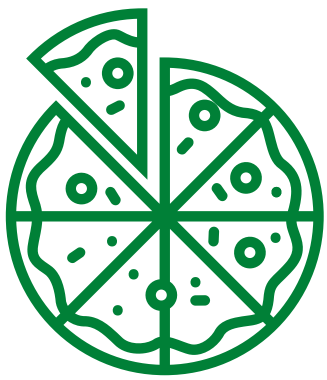


Figura 2.0.2: Pizza 8 pedaços

Se a pizza for dividida igualmente entre o grupo, cada pessoa irá comer $\frac{8}{4} = 2$ pedaços. Sendo assim, cada um irá comer $\frac{2}{8}$ da pizza, ou seja,

$$\frac{2}{8} = 0,25 = 25\%.$$

- Cálculo de porcentagem de um valor:
Para definir um percentual x de um valor V basta multiplicar V por $\frac{x}{100}$.

Exemplo 2.0.5 Para saber quanto é 60% de 20, devemos multiplicar 20 pela fração que representa

60%, isto é, $\frac{60}{100}$. Assim,

$$20 \cdot \frac{60}{100} = 12.$$

Logo, 60% de 20 é 12.

Exemplo 2.0.6 Salários que estão entre $1.903,99$ reais e $2.826,65$ reais têm $7,5\%$ descontados para previdência social. Sendo assim, um trabalhador que está dentro dessa faixa salarial recebe no mínimo $1.903,99$ menos o desconto, ou seja,

$$1.903,99 - (1.903,99 \cdot 7,5\%)$$

Calculando o desconto, segue que

$$(1.903,99 \cdot 7,5\%) = 1.903,99 \cdot \frac{7,5}{100} = 142,80.$$

Logo, o trabalhador que está nessa faixa salarial recebe no mínimo $1.903,99 - 142,80 = 1.761,19$ reais. Analogamente, o valor máximo do salário após o desconto é

$$\begin{aligned} &2.826,65 - (2.826,65 \cdot 7,5\%) \\ &= 2.826,65 - \left(2.826,65 \cdot \frac{7,5}{100}\right) \\ &= 2.826,65 - 212,00 \\ &= 2.614,65. \end{aligned}$$

Sendo assim, o trabalhador pode receber no máximo $2.614,65$ reais.

2.1 Variação percentual

O Exemplo 2.0.6 é uma situação em que ocorre uma variação percentual, visto que o salário do trabalhador variou de $1.903,99$ para $1.761,19$, isto é, reduziu em $142,80$ ou $7,5\%$. Nessa situação, a variação percentual é $7,5\%$.

Definição 2.1 Variação percentual é quanto um valor V variou em porcentagem, ou ainda, é a razão entre a variação (aumento ou desconto) sobre o valor V.

Considere V o valor inicial, V_f o valor final e i a variação percentual, então

$$i = \frac{V_f - V}{V}.$$

Obs. A interpretação de i depende da situação estudada, por exemplo, caso $V_f > 0$ e $V > 0$, podemos interpretar i, como

- Se $i > 0$ ocorre um "aumento", ou seja, a taxa percentual é de crescimento;
- Se $i < 0$ ocorre um "desconto", isto é, a taxa percentual de decrescimento.

No Exemplo 2.0.6 foi descontado $7,5\%$ de $1.903,99$ reais. Para calcular o valor após o desconto realizamos

$$\begin{aligned} 1.903,99 - (1.903,99 \cdot 7,5\%) &= 1.903,99(1 - 7,5\%) \\ &= 1.903,99(1 - 0,075). \end{aligned}$$

Generalizando, seja V o valor inicial e i a variação (considerando $i > 0$), quando queremos calcular o valor após a variação percentual realizamos:

- $V_f = V(1 - i)$, para descontos.
- $V_f = V(1 + i)$, para aumentos.

O valor da variação é fornecido, na maioria das vezes, positivo e fica na interpretação do texto se essa variação foi de crescimento ou decrescimento.

Exemplo 2.1.1 Um produto que no começo do ano custava $R\$200,00$ e passou a custar $R\$160,00$ teve uma variação de decrescimento em 20%. De fato,

$$i = \frac{200,00 - 160,00}{200,00} = -0,2 = -20\%.$$

O que equivale à dizer que o preço teve um decrescimento em 20%.

Exemplo 2.1.2 A poupança terá um rendimento anual de $3,15\%$ em 2020. Um estudante ao investir $R\$5.000,00$, no final do ano terá um valor de $R\$8.157,50$. De fato, vejamos quanto a poupança rendeu, seja o valor inicial $V = 5.000$ e um aumento percentual de $i = 3,15\%$, então

$$5.000 \cdot (1 + 0,0315) = 3.157,50.$$

Somando o valor adquirido com o investido

$$5.000 + 3.157,50 = 8.157,50.$$

2.2 Variação percentual sucessivas

Vamos considerar os intervalos entre os números $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$, em que $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$, e i_n a variação percentual no intervalo (x_{n-1}, x_n), isto é, entre x_0 e x_1 a variação foi de i_1. Sendo assim, $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, i_n$ são as variações percentuais sucessivas.

Partindo de um valor inicial V_0, vamos aplicar uma variação i_1 resultando em V_1 e sobre ele aplica-se i_2 assim sucessivamente até em V_{n-1} aplicar i_n e resultar em V_n, conforme a imagem:

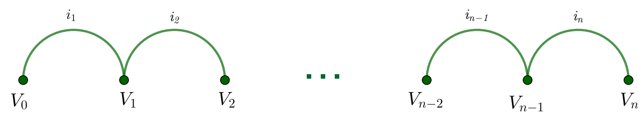


Figura 2.2.1: Variação Percentual Sucessivas

Considere $i > 0$ em caso de acréscimo e $i < 0$ em caso de decréscimo, vejamos como essas variações se aplicam em V_0:

$$V_1 = V_0(1 + i_1)$$
$$V_2 = V_1(1 + i_2) \Rightarrow V_2 = V_0(1 + i_1)(1 + i_2)$$
$$V_3 = V_2(1 + i_3) \Rightarrow V_3 = V_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$$
$$\vdots$$
$$V_n = V_{n-1}(1 + i_n) \Rightarrow V_n = V_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)\cdots(1 + i_n).$$

Definição 2.2 A variação entre x_0 e x_n é chamada de variação percentual acumulada, vamos denotar por i_{ac}, expressa por

$$i_{ac} = \frac{V_n - V_0}{V_0} \Rightarrow V_n = V_0(1 + i_{ac}),$$

ou seja, $i_{ac} = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)\cdots(1 + i_n) - 1.$

Exemplo 2.2.1 A população de uma colmeia em 2017 era de 100.000 abelhas, ela cresceu 5% em 2018, 6% em 2019 e reduziu 3% em 2020. Com isso, em 2020 a população é de P abelhas em que

$$P = 100.000(1 + 0,05)(1 + 0,06)(1 - 0,03) = 107.961.$$

Exemplo 2.2.2 Ao aplicar durante 3 meses, uma variação percentual sucessiva de i, o valor passou de 10.000 para $11.248,64$, qual é a variação i?

Vejamos,

$$11.248,64 = 10.000(1 + i)(1 + i)(1 + i) = 10.000(1 + i)^3$$

Desse modo,

$$i = \sqrt[3]{\frac{11.248,64}{10.000}} - 1 \Rightarrow i = 0,04.$$

Logo, a variação percentual em cada mês foi de 4%.

Um conceito muito utilizado, principalmente, nos ramos econômico é **ponto percentual**. Para entender sua definição vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.2.3 Para sabemos o aumento em porcentagem de 5% para 10%, basta fazer:

$$i = \frac{10\% - 5\%}{5\%} = \frac{\frac{10}{100} - \frac{5}{100}}{\frac{5}{100}} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{5}{100}} = 1.$$

Sendo assim, tivemos um aumento de $i = 1 = 100\%$ de 5% para 10%.

Agora em ponto percentual consideramos apenas a diferença entre os valores absolutos de duas porcentagens, ou seja, o aumento de 5% para 10% foi de $10 - 5 = 5$ pontos percentuais.

Definição 2.3 Ponto percentual é a diferença dos valores absolutos de duas porcentagens.

Exercício resolvido 1 (UFMS) Em um determinado município, a porcentagem de crianças que estão fora da escola é de 15%. O prefeito desse município iniciou uma campanha com a finalidade de que 5 a cada 9 dessas crianças passem a frequentar uma escola imediatamente. Se a meta da campanha for atingida, o número de crianças que estão fora da escola nesse município ficará reduzido a 1.200 crianças. Assim, se o N era o número de crianças desse município, quando o início da campanha, calcule $\dfrac{N}{250}$.

Resolução: Sendo N o número de crianças desse município, então antes da campanha tinha um número de $(15\% \cdot N)$ crianças que não iam a escola. Após a campanha, 5 à cada 9 crianças que não iam a escola começaram a ir. Logo, temos que 4 a cada 9 crianças continuam não indo à escola.

Note que 4 a cada 9 é equivalente a $\dfrac{4}{9}$.

Sendo assim, sabemos que $\dfrac{4}{9}$ das $(15\% \cdot N)$ crianças continuam fora da escola, isto é,

$$\frac{4}{9} \cdot (15\% \cdot N)$$

continuam não indo à escola.

Pelo enunciado, temos ainda

$$\frac{4}{9} \cdot (15\% \cdot N) = 1200.$$

Seja $15\% = \dfrac{15}{100}$, então

$$\begin{aligned}\frac{4}{9} \cdot \frac{15}{100} \cdot N &= 1200\\ \frac{60}{900} \cdot N &= 1200\\ N &= \frac{1200 \cdot 900}{60}\\ N &= 18000.\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{N}{250} = \dfrac{18000}{250} = 72.$

Exercício resolvido 2 (UF-GO) Segundo os dados da Folha de São Paulo $(30/8/2001$, página $82)$, o total de exportações feitas pelos bilhões de dólares. Esse valor é de $16,42\%$ maior do que o total exportado por eles, de janeiro a julho de 2000. Calcule o total exportado pelos gaúchos, nesse período de 2000.

Resolução: Sendo V o valor exportado pelos gaúchos, de janeiro a julho de 2000, sabemos que $3,75$ bilhões de dólares é $16,42\%$ maior que V, ou ainda, que aumentando $16,42\%$ em V resulta em $3,75$ bilhões, sendo assim

$$V_f = V(1+i) \Rightarrow 3,75 \cdot 10^9 = V(1+16,42\%)$$
$$V = \frac{3,75 \cdot 10^9}{1+0,1642} \Rightarrow V = 3,22 \cdot 10^9.$$

Portanto, de janeiro a julho de 2000 os gaúchos exportaram, aproximadamente, $3,221$ bilhões de dólares.

2.3 Juros

Porcentagem é amplamente utilizada no estudo de matemática financeira, sobretudo nos procedimentos de pagamento de empréstimos ou em investimentos.

Vejamos algumas nomenclaturas usuais dessa área:

- **Capital** é o valor emprestado ou investido, indicado por C.
- **Juros** é o valor cobrado pelo empréstimo ou o valor que rendeu no investimento, indicado por J.
- **Taxa de juros** é o juros numa unidade de tempo como porcentagem do capital indicada por i.
  Uma parcela de juros é dado pelo produto do capital pela taxa, ou seja,
  $$J = C \cdot i.$$
- **Montante** é o valor pago ao final do empréstimo ou o valor total após um investimento, indicaremos por M. O montante é a soma do capital pelo juros, isto é,
  $$M = C + J.$$

Exemplo 2.3.1 Uma empresa pegou um empréstimo de $R\$10.000,00$ em um banco cuja taxa de juros era 2% ao dia (a.d.). Com isso, após um dia a empresa deve pagar um montante de

$$M = C + J = C + (C \cdot i) = C(1+i).$$

Vejamos que, nesse exemplo, a taxa de juros é de $i = 2\%$ ao dia, isto é, o capital C aumenta em $J = 2\% \cdot C$ ao dia. Como $C_1 = 10.000,00$, $i = 2\%$, então

$$M_1 = C_1(1+i) = 10.000(1+0,02) = 10.200,00.$$

Exemplo 2.3.2 Um estudante de matemática quer começar a investir, para isso aplicou 50% do seu capital em um fundo (1) que a taxa de juros era 20% ao ano (a.a), e o restante em um fundo (2) com taxa 10% a.a. Vamos determinar a taxa global de juros recebida pelo estudante após um ano.

Sendo C o capital aplicado, J_1 e J_2, respectivamente, dos fundos (1) e (2), temos que os capitais investidos no fundo (1) e (2) são iguais à $(0,5C)$. Desse modo,

$$J_1 = 0,20 \cdot (0,5C) = 0.1C$$
$$J_2 = 0,10 \cdot (0,5C) = 0.05C$$

Logo, o juros total recebido (J) é de $J = J_1 + J_2 = 0.15C$.

Por fim, a taxa de juros total recebida é

$$J = C \cdot i \Rightarrow i = \frac{J}{C}$$
$$\Rightarrow i = \frac{0.15C}{C}$$
$$\Rightarrow i = 15\%.$$

Portanto, a taxa global de juros recebida pelo estudante após um ano é de 15%.

2.4 Juros simples

O juros simples é aquele que para cada período de tempo considerado ele é sempre igual à $J = C \cdot i$.

Por exemplo, se um trabalhador pegar emprestado um capital de C_0 reais em um banco com uma taxa de juros simples de i ao mês, o montante será de

- $M_1 = C_0 + (C_0 \cdot i)$ reais, caso ele devolva após um mês.
- $M_2 = C_0 + (C_0 \cdot i) + (C_0 \cdot i)$ reais, caso ele devolva após dois meses.
- $M_3 = C_0 + (C_0 \cdot i) + (C_0 \cdot i) + (C_0 \cdot i)$ reais, caso devolva após três meses.

No regime de juros simples, sendo i a taxa de juros, C o capital o juros é dado por

$$J = C \cdot n \cdot i,$$

em que n é a quantidade de períodos passados. Além disso o montante é

$$M = C + J = C \cdot (1 + n \cdot i).$$

Obs. Vejamos algumas abreviações tempo:

Abreviatura	Significado
a.d.	ao dia
a.m.	ao mês
a.b.	ao bimestre
a.t.	ao trimestre
a.s.	ao semestre
a.a.	ao ano

Exemplo 2.4.1 Um empresário que deseja reformar sua loja pegou um empréstimo com o banco a uma taxa de juros simples de $2,64\%$ a.m. A loja ficou pronta após 330 dias, e no mesmo momento o empresário pagou sua dívida de $6.452,00$ reais.

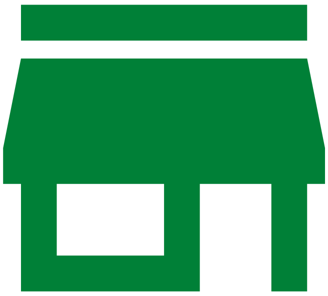


Figura 2.4.1: Loja reformada

Queremos definir qual foi o valor que o empresário pegou de empréstimo, ou seja, qual foi o capital C que o banco emprestou.

Primeiramente, vejamos que a taxa de juros é contada por mês (a.m), e o empresário demorou 330 dias para pagar, sendo assim, considerando que um mês tem 30 dias, o empresário demorou

$$\frac{330}{30} = 11$$

meses para devolver o dinheiro, ou seja, $n = 11$.

Além disso, o montante depois de 11 meses é de $M = 6.452,00$ reais, como $M = C \cdot (1 + n \cdot i)$ e a taxa de juros simples é de $2,64\%$ a.m., então

$$(1 + n \cdot i) = 1 + 11 \cdot \frac{2,64}{100} = 1,2904.$$

Substituindo em $M = C \cdot (1 + n \cdot i)$, segue que

$$\begin{aligned}
&M = C \cdot (1 + n \cdot i)\\
&6.452,00 = C \cdot 1,2904\\
&C = \frac{6.452,00}{1,2904}\\
&C = 5.000,00.
\end{aligned}$$

Portando, o empresário pegou um empréstimo de $5.000,00$ reais com o banco.

2.5 Juros composto

No juros composto ao invés do juros ser o mesmo para todos os períodos, ele é calculado sobre o montante de cada período.

Por exemplo, se o trabalhador pegar emprestado um capital de C_0 reais em um banco com uma taxa de juros composto de i ao mês, temos que o valor do montante é de

- $M_1 = C_0 \cdot (1 + i)$ reais, caso ele devolva após um mês.
- $M_2 = M_1 \cdot (1 + i)$ reais, caso ele devolva após dois meses, ou ainda, substituindo M_1, temos

$$M_2 = [C_0 \cdot (1 + i)] \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2.$$

- $M_3 = M_2 \cdot (1 + i)$ reais, caso ele devolva após três meses, ou ainda, substituindo M_2, temos

$$M_3 = [C_0 \cdot (1 + i)^2] \cdot (1 + i)^2 = C_0 \cdot (1 + i)^3.$$

Portando, no regime de juros composto temos que o montante final é de

$$M = C \cdot (1 + i)^n,$$

em que n é o período de tempo passado.

Exemplo 2.5.1 Um aluno de matemática tem $10.000,00$ reais para investir, de todas as opções ele selecionou dois:

1. Fundo (A) paga uma taxa de juros composto de $5,5\%$ a.a.
2. Fundo (B) paga uma taxa de juros composto de $0,20\%$ a.m.

Esse estudante vai deixar o seu dinheiro rendendo até terminar sua graduação (daqui 4 anos), ele decidiu então criar uma simulação para ver quanto ele teria se investisse em cada Fundo.

1. No Fundo (A) ele investiria um capital de $C = 10.000,00$ a uma taxa de juros de $i = 5,5\%$ a.a. por 4 anos, ou seja, $n = 4\%$. Assim, após esse período teríamos o montante de

$$\begin{aligned}
&M = C \cdot (1 + i)^n\\
&M = 10.000 \cdot (1 + 0,055)^4\\
&M = 10.000 \cdot 1,2388\\
&M = 12.388
\end{aligned}$$

Logo, no Fundo (A) quando o estudante terminasse a faculdade ele teria $12.388,00$ reais.
2. No Fundo (B) ele investiria o mesmo capital de $C = 10.000,00$ a uma taxa de juros de $i = 0,20\%$ a.m. por 4 anos, ou ainda, por $4 \cdot 12 = 48$ meses ($n = 48\%$). Assim, após esse período teríamos o montante de

$$\begin{aligned}
&M = C \cdot (1 + i)^n\\
&M = 10.000 \cdot (1 + 0,002)^{48}\\
&M = 10.000 \cdot 1,1006\\
&M = 11.006,53
\end{aligned}$$

Logo, no Fundo (B) quando o estudante terminasse a faculdade ele teria $11.006,53$ reais.

Exercício resolvido 3 (FGV SP) O sr. Matias tem $R\$12000,00$ para investir pelo prazo de um ano. Ele pretende investir parte numa aplicação A que tem um rendimento esperado de 15% ao ano sobre o valor investido, e parte numa outra aplicação B que dá um rendimento esperado de 20% sobre o valor investido.

a) Qual o rendimento anual esperado, se ele aplicar R\$ $7.000,00$ em A e $R\$5.000,00$ em B?
b) Qual o máximo que deve investir em A para auferir um ganho esperado de, no mínimo, $R\$2200,00$ daqui

a um ano?

Resolução:

a) Queremos saber quanto que sr. Matias terá após um prazo de um ano investindo um capital de $C_A = 7.000,00$ reais na aplicação A e $C_B = 5.000,00$ na aplicação B.
Para isso, vamos calcular o rendimento, ou seja, o juros da aplicação em A e em B, respectivamente

$$\begin{aligned} J_A &= C_A \cdot i_A \\ J_A &= 7.000 \cdot 0,15 \\ J_A &= 1050 \\ J_B &= C_B \cdot i_B \\ J_B &= 5.000 \cdot 0,20 \\ J_B &= 1.000 \end{aligned}$$

Logo, o rendimento total esperado após um ano foi de $R = J_A + J_B = 2.050,00$ reais.

b) Considere C_A o capital investido em A, queremos saber quanto C_A afim de conseguir um rendimento (juros total) de $R = 2.200,00$ reais.
Como sr. Matias possuí $12.000,00$ para investir, se ele colocar C_A em A vai sobrar $(12.000 - C_A)$ para investir em B. Assim, calculando os juros de A e B respectivamente, temos

$$\begin{aligned} J_A &= C_A \cdot i_A \\ J_A &= C_A \cdot 0,15 \\ J_B &= C_B \cdot i_B \\ J_B &= (12.000 - C_A) \cdot 0,20 = 2.400 - 0,2 \cdot C_A \end{aligned}$$

Como queremos que $J_A + J_B = 2.200,00$ reais, então

$$\begin{aligned} J_A + J_B &= 2.200 \\ (C_A \cdot 0,15) + (2.400 - 0,2 \cdot C_A) &= 2.200 \\ 0,05 \cdot C_A &= 200 \\ C_A &= 4.000. \end{aligned}$$

Logo, para obter esse rendimento sr. Matias deve investir $4.000,00$ reais na aplicação A.

Exercício resolvido 4 (UnB DF) Um capital aplicado, a juros simples, a uma taxa de 20% ao ano duplica em:

(a) 24 anos
(b) 6 anos
(c) 12 anos
(d) 10 anos
(e) 5 anos

Resolução: Considere C o capital aplicado, queremos saber quanto tempo n demora para que o montante seja o dobro do capital, ou seja, $M = 2C$. Como a taxa de juros é de $20\% = 0,2$ ao ano, temos então

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1 + n \cdot i) \\ 2C &= C \cdot (1 + n \cdot 0,2) \\ 1 + 0,2n &= \frac{2C}{C} \\ 0,2n &= 2 - 1 \\ n &= \frac{1}{0,2} = 5. \end{aligned}$$

Logo, o capital aplicado a essa taxa de juros será dobrado após 5 anos, ou seja, a resposta correta é (e).

---

3 Notação científica

É muito comum nos depararmos com números reais muito grandes ou muito pequenos, ou seja, números com muitos algarismos, tanto nos cálculos de matemática quanto física, e até mesmo na química. Nesse sentido, a notação científica é uma maneira mais simples de representarmos esses números. Essa representação consiste em escrevê-los por meio do uso de uma potência de base dez. Passemos à definição formal:

Definição 3.1 Seja a um número real igual ou maior que 1 e menor do que 10 e $n \in \mathbb{Z}$. Uma notação científica assume a seguinte forma:

$$a \cdot 10^n.$$

Nessa ordem, a é o coeficiente e n é chamado de ordem de grandeza.

Exemplo 3.0.1

1. $65.000.000 = 6,5 \cdot 10^7$.
2. $0,00000015 = 1,5 \cdot 10^{-7}$.

Mas como podemos transformar um número muito grande ou muito pequeno em notação científica?

1° Passo: Escrever o número em sua forma decimal, de modo que se tenha somente um algarismo diferente de 0 após a vírgula.
2° Passo: Agora devemos colocar no expoente da potência de base 10 o número de casas decimais que tivemos que "andar" com a vírgula. É importante notar que, se ao andarmos com a vírgula o número diminui, então o expoente ficará positivo. Se ocorrer de andarmos com a vírgula e o número aumentar, então o expoente ficará negativo.
3° Passo: Escrever o produto do número decimal obtido pela potência de 10.

Exemplo 3.0.2 Vamos transformar o número $9.600.000.000$ em notação científica.

- Primeiro, vamos "caminhar" com a vírgula obtendo $9,600000000$. Note que desta forma ficamos com apenas um algarismo antes da vírgula;

- Para colocar a vírgula nesta posição, nós tivemos que "andar" um total de 9 casas decimais, visto que nos números inteiros a vírgula se encontra sempre no final do número. Como o número diminuiu, o expoente ficará positivo, ou seja, teremos 10^9.
- Agora, escrevendo em notação científica temos: $9,6 \cdot 10^9$.

Exemplo 3.0.3 Vamos escrever o número $0,0003$ em notação científica.

- Primeiro, vamos "caminhar" com a vírgula obtendo $3,0$. Note que desta forma ficamos com apenas um algarismo antes da vírgula;
- Para colocar a vírgula nesta posição, nós tivemos que "andar" um total de 4 casas decimais, visto que nos números inteiros a vírgula se encontra sempre no final do número. Como o número aumentou, o expoente ficará negativo, ou seja, teremos 10^{-4}.
- Agora, escrevendo em notação científica temos: $3 \cdot 10^{-4}$.

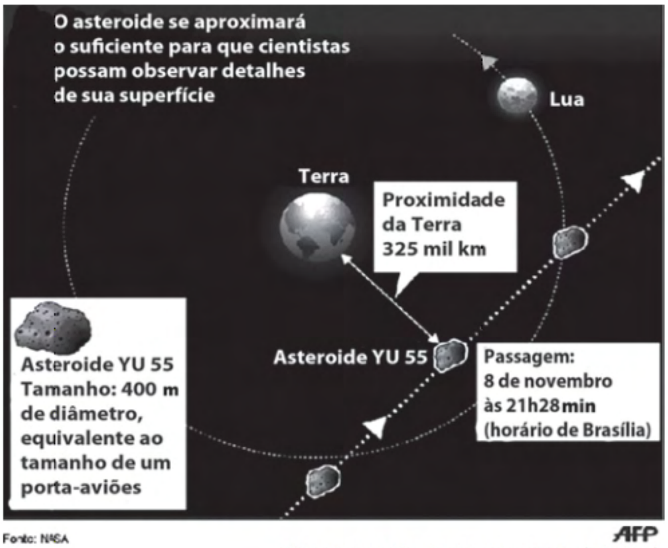
Exercício resolvido 1 (ENEM - 2015) As exportações de soja no Brasil totalizaram $4,129$ milhões em toneladas no mês de julho de 2012 e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012.

A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de:

(a) $4,129 \cdot 10^3$
(b) $4,129 \cdot 10^6$
(c) $4,129 \cdot 10^9$
(d) $4,129 \cdot 10^{12}$
(e) $4,129 \cdot 10^{15}$

Resolução: Sabemos que 1 tonelada $= 1000$ kg e também que um milhão é $1\ 000\ 000 = 10^6$. Dessa maneira, $4,129 \cdot 10^6$ toneladas equivalem a $4,129 \cdot 10^6 \cdot 10^3$ quilogramas. Assim, passando $4,129$ milhões de toneladas para kg, temos $4,129 \cdot 10^9$. Portanto, alternativa correta é a letra (c).

Exercício resolvido 2 (ENEM 2018) A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



Disponível em: http://noticias.terra.com.br (adaptado).

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a

(a) $3,25 \cdot 10^2$ km
(b) $3,25 \cdot 10^3$ km
(c) $3,25 \cdot 10^4$ km
(d) $3,25 \cdot 10^5$ km
(e) $3,25 \cdot 10^6$ km

Resolução: Bom, colocando em notação científica a menor distância que o asteroide YU 55 passou pela superfície da Terra, temos:

$$325 \text{ mil km } = 325.000 \text{ km } = 3,25 \cdot 10^5 \text{ km.}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (d).

3.1 Ordem de grandeza

A ordem de grandeza de um número é a potência de 10 mais próxima dele.

Por exemplo, o número $7,5 \cdot 10^2$, sua ordem de grandeza é 3, visto que 750 é mais próximo de $1.000 = 10^3$.

De modo geral, para saber a ordem de grandeza, faremos o seguinte:

1. Colocar o número em notação científica, exemplo, $a \cdot 10^n$.
2. Se $a < 5,5$ a ordem é 10^n. Caso contrário, se $a \geq 5,5$ a ordem é 10^{n+1}.

4 Racionalização

Chamamos de racionalização o método matemático responsável por "retirar" a raiz do denominador de uma fração. Basicamente, existem três maneiras de aplicar tal método. Vamos aprender cada um dos casos:

4.1 Fração com raiz quadrada no denominador

O primeiro deles é quando temos uma raiz quadrada qualquer no denominador. Observe, por exemplo, o número

$$\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nesse caso, basta multiplicar em cima e embaixo pela mesma raiz, ou seja:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Dessa maneira, teremos no numerador a expressão

$$1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

e no denominador

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3.$$

Logo,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Exemplo 4.1.1 Racionalize as frações:

a) $\frac{3}{\sqrt{4}}$;

$$\frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{\sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{3 \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{4}}{4}.$$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) $\frac{7}{\sqrt{7}}$.

$$\frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7}.$$

4.2 Fração com raiz de índice maior que 2 no denominador

Mas o que fazer quando temos uma raiz de índice maior que 2? Por exemplo, o número

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}}.$$

Devemos seguir multiplicando o numerador e o denominador por um mesmo número (com o intuito de garantir a igualdade). Mas, neste caso, o número será

$$\sqrt[3]{4^2}.$$

A escolha desse número se deve ao denominador inicial $\sqrt[3]{4}$. Temos que subtrair o índice da raiz, 3, do expoente do radicando, 1, obtendo um novo expoente, 2. Em outras palavras:

$$\text{índice da raiz} - \text{expoente do radicando} = \text{novo expoente},$$

ou seja,

$$3 - 1 = 2.$$

Portanto,

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2 \cdot 4}} = \frac{2\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{2\sqrt[3]{4^2}}{4} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{2}.$$

Logo,

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{2}.$$

Com isso, temos a fórmula de racionalização:

$$\frac{1}{\sqrt[a]{x^b}} \cdot \frac{\sqrt[a]{x^{a-b}}}{\sqrt[a]{x^{a-b}}},$$

considerando que $\sqrt[a]{x^b}$, com $x > 0$ e $a > b$.

Exemplo 4.2.1 Racionalize as frações:

a) $\frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$;

$$\frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{3}.$$

b) $\frac{2}{\sqrt[4]{4^3}}$.

$$\frac{2}{\sqrt[4]{4^3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{4^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{4^1}}{\sqrt[4]{4^1}} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{4^1}}{\sqrt[4]{4^3 \cdot 4^1}} = \frac{2\sqrt[4]{4^1}}{\sqrt[4]{4^4}} = \frac{2\sqrt[4]{4^1}}{4} = \frac{\sqrt[4]{4^1}}{2}.$$

4.3 Fração com soma ou subtração envolvendo radicais no denominador

Como fazer a racionalização quando temos uma subtração envolvendo raiz no denominador? Por exemplo, o número

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Nós continuamos usando a técnica de multiplicar o numerador e o denominador pelos mesmos termos, alterando apenas o sinal. Neste caso, o número será

$$\sqrt{2} + 1.$$

Ou seja, são os mesmos termos do denominador mas trocamos o sinal. Nós fazemos isso com o intuito de "eliminar" a raiz no denominador.

Veremos mais adiante que nesse caso essas manipulações são os famosos produtos notáveis que vão poder nos auxiliar na racionalização de frações com denominadores mais elaborados.

Por enquanto, nos contentemos apenas com a ideia de multiplicar a expressão pelos mesmos termos mas com o sinal trocado. Veja:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} &= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)}\\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}\\ &= \sqrt{2}+1.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1.$$

Exemplo 4.3.1 Racionalize as frações:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$;

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} &= \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-1^2}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{3-1}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}.\end{aligned}$$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{12}-2}$.

$$\begin{aligned}\frac{5}{\sqrt{12}-2} &= \frac{5}{\sqrt{12}-2}\cdot\frac{\sqrt{12}+2}{\sqrt{12}+2}\\ &= \frac{5(\sqrt{12}+2)}{(\sqrt{12})^2-2^2}\\ &= \frac{5\sqrt{12}+10}{8}.\end{aligned}$$

Exercício resolvido 1 (FAUEL) Qual o resultado da simplificação da expressão $\dfrac{5}{\sqrt{75}}$?

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(b) $\dfrac{1}{3}$.

(c) $5\sqrt{3}$.

(d) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Resolução: Vejamos, observe inicialmente que $\sqrt{75} = \sqrt{3\cdot 5^2} = 5\sqrt{3}$. Logo, temos que

$$\frac{5}{\sqrt{75}} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (a).

Exercício resolvido 2 (FUVEST) $\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$ é igual a:

(a) $\dfrac{2+\sqrt{6}}{6}$.

(b) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{3}$.

(c) $\dfrac{\sqrt{6}+3}{6}$.

(d) $\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$.

Resolução: Vejamos, temos que

$$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+3}{3}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (d).

---

5 Produtos Notáveis

Os produtos notáveis são expressões algébricas que aparecem com grande frequência nos cálculos matemáticos, por exemplo, na fatoração de polinômios, nas equações de primeiro e segundo grau.

5.1 Produtos notáveis com quadrados

Quadrado da soma de dois termos

O quadrado da soma de dois termos é representado pela seguinte expressão:

$$(a+b)^2,$$

sendo a e b dois números reais quaisquer.

Vejamos os cálculos dessa identidade:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$$

Realizando a distributiva:

$$(a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$$

Logo, temos o seguinte produto notável:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2.$$

Exemplo 5.1.1

1. $(3+b)^2 = 3^2+2\cdot(3\cdot b)+b^2 = 9+6b+b^2$.

2. $(4x+y)^2 = (4x)^2 + 2\cdot(4x\cdot y) + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$.

Quadrado da diferença de dois termos

O quadrado da diferença de dois termos é representado pela seguinte expressão: $(a-b)^2$, sendo a e b dois números reais quaisquer.

Como

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b)$$

Então

$$(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Logo, temos o seguinte produto notável:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Exemplo 5.1.2

1. $(a-5d)^2 = a^2 - 2\cdot(a\cdot 5d) + (5d)^2 = a^2 - 10ad + 25d^2$.
2. $(t-2w)^2 = t^2 - 2\cdot(t\cdot 2w) + (2w)^2 = t^2 - 4tw + 4w^2$.

5.2 Produto da soma pela diferença de dois termos

O produto da soma pela diferença de dois termos é a seguinte multiplicação: $(a+b)\cdot(a-b)$. Vejamos,

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Logo, temos o seguinte produto notável:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2.$$

Exemplo 5.2.1

1. $(1+a)\cdot(1-a) = 1^2 - a^2 = 1 - a^2$.
2. $(5x^2+2)\cdot(5x^2-2) = (5x^2)^2 - 2^2 = 25x^4 - 4$.

Exemplo 5.2.2 Racionalize a seguinte expressão:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

Para racionalizar precisamos fazer manipulações matemáticas afim de que a expressão final não tenha raiz no denominador.

Nesse caso precisamos retirar o termo $\sqrt{3}$ do denominador sem alterar o valor da fração.

Sendo assim, vamos utilizar o produto da soma pela diferença de dois termos, lembrando que para garantir a igualdade das expressões, ao multiplicar o denominador por um valor temos que fazer o mesmo com o numerador. Vejamos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}+1} &= \frac{1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{1\cdot(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-1^2}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{3-1}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}.\end{aligned}$$

Obs. O produto notável que eleva os termos ao quadrado sem que os termos permaneçam na expressão é o produto das diferenças, visto como

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

No caso, tínhamos a seguinte expressão no denominador: $(\sqrt{3}+1)$.
Com isso tínhamos o termo $(a+b)$, em que $a=\sqrt{3}$ e $b=1$. Sendo assim, multiplicamos pelo termo $(a-b)$, isto é, por $(\sqrt{3}-1)$.
Para o valor da expressão se manter, só podemos multiplicar pelo número 1, note que

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 1.$$

5.3 Produtos notáveis com cubos

Cubo da soma de dois termos

O cubo da soma de dois termos é representado pela seguinte expressão:

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)^2.$$

Como foi visto anteriormente $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, substituindo

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a^2 + 2ab + b^2).$$

Fazendo a distributiva:

$$(a+b)\cdot(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Logo, o produto notável:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Exemplo 5.3.1

1. $(3a+2b)^3 = (3a)^3+3(3a)^2(2b)+3(3a)(2b)^2+(2b)^3 = 9a^3+54a^2b+36ab^2+4b^3$
2. $(x+2y)^3 = (x)^3+3(x)^2(2y)+3(x)(2y)^2+(2y)^3 = x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

Cubo da diferença de dois termos

O cubo da diferença de dois termos é representado pela seguinte expressão:

$$(a-b)^3 = (a-b)\cdot(a-b)^2.$$

Como foi visto anteriormente

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2,$$

substituindo

$$(a-b)^3 = (a-b)\cdot(a^2-2ab+b^2).$$

Fazendo a distributiva:

$$(a-b)\cdot(a^2-2ab+b^2) = a^3-2a^2b+ab^2-ba^2+2ab^2-b^3.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}$$

Logo o produto notável:

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Exemplo 5.3.2

1. $(2-b)^3 = 2^3-3(2)^2(b)+3(2)(b)^2-b^3 = 8-12b+6b^2-b^3.$
2. $(3x-2y)^3 = (3x)^3-3(3x)^2(2y)+3(3x)(2y)^2-(2y)^3 = 27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3.$

Soma e diferença de cubo

Existem dois produtos notáveis envolvendo cubos muito recorrentes, são eles:

1. Diferença de dois cubos:

$$a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2).$$

2. Soma de dois cubos:

$$a^3+b^3 = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2).$$

Vamos verificar a veracidade das expressões:

1. Diferença de dois cubos:

$$\begin{aligned}&(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)\\ &\quad= a\cdot(a^2+ab+b^2)-b\cdot(a^2+ab+b^2)\\ &\quad= (a^3+a^2b+ab^2)-(a^2b+ab^2+b^3)\\ &\quad= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\ &\quad= a^3-b^3.\end{aligned}$$

2. Soma de dois cubos:

$$\begin{aligned}&(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)\\ &\quad= a\cdot(a^2-ab+b^2)+b\cdot(a^2-ab+b^2)\\ &\quad= (a^3-a^2b+ab^2)+(a^2b-ab^2+b^3)\\ &\quad= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\ &\quad= a^3+b^3.\end{aligned}$$

Exemplo 5.3.3 Racionalize:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}}.$$

Como temos $\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}$, vamos utilizar a diferença de cubos, assim

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{(\sqrt[3]{6})^2+(\sqrt[3]{6})(\sqrt[3]{5})+(\sqrt[3]{5})^2}{(\sqrt[3]{6})^2+(\sqrt[3]{6})(\sqrt[3]{5})+(\sqrt[3]{5})^2}\\ &= \frac{(\sqrt[3]{6})^2+(\sqrt[3]{6})(\sqrt[3]{5})+(\sqrt[3]{5})^2}{(\sqrt[3]{6})^3-(\sqrt[3]{5})^3}\\ &= \frac{\sqrt[3]{6^2}+\sqrt[3]{6\cdot5}+\sqrt[3]{5^2}}{6-5}\\ &= \sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{25}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{25}.$$

Exercício resolvido 1 (IBMEC - 04) A diferença entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois números reais é igual:

(a) à diferença dos quadrados dos dois números.
(b) à soma dos quadrados dos dois números.
(c) à diferença dos dois números.
(d) ao dobro do produto dos dois números.
(e) ao quádruplo do produto dos números.

Resolução: O quadrado da soma de dois números reais x e y é definido por:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \ (1)$$

Já o quadrado da diferença de dois números reais x e y é definido por:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \ (2)$$

Como queremos a diferença entre os resultados (1) e (2), segue que:

$$\begin{aligned}(x+y)^2-(x-y)^2 &= x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)\\ &= x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2 = 4xy.\end{aligned}$$

Ou seja, o resultado encontrado é quatro vezes o produto dos números x e y. Logo a alternativa correta é a letra (e).

Exercício resolvido 2 (UFRGS 2016) Se $x+y=13$ e $x \cdot y = 1$, então x^2+y^2 é

(a) 166.
(b) 167.
(c) 168.
(d) 169.
(e) 170.

Resolução: Segue do enunciado que $x+y=13$. Elevando ambos os termos da igualdade ao quadrado, temos:

$$(x+y)^2 = 13^2 \Rightarrow x^2+2xy+y^2 = 169 \Rightarrow x^2+y^2 = 169-2xy.$$

E como $x \cdot y = 1$, segue que:

$$x^2+y^2 = 169-2xy \Rightarrow x^2+y^2 = 169-2\cdot 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 167.$$

Logo, a alternativa correta é a letra (b).

6 Exercícios propostos

Exercício 1.1 (MACK) Dois números naturais têm soma 63 e razão 6. O produto desses números é:

(a) 198
(b) 258
(c) 312
(d) 356
(e) 486

Exercício 1.2 (UEL) A distância entre as cidades mineiras de Belo Horizonte e Montes Claros, em um mapa representado em escala 1 : 7.000.000, é de $6{,}5\ cm$.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a distância real entre essas duas cidades.

(a) 45,5 km
(b) 92,8 km
(c) 107,0 km
(d) 455,0 km
(e) 928,0 km

Exercício 1.3 (UNICAMP 2013) Escala, em cartografia, é a relação matemática entre as dimensões reais do objeto e a sua representação. Assim, em um mapa de escala 1 : 50.000, uma cidade que tem 4,5 km de extensão entre seus extremos será representada com

(a) 9 cm
(b) 90 cm
(c) 225 mm
(d) 11 mm

Exercício 1.4 (UNICAMP) A razão entre a idade de Pedro e a de seu pai é igual a dois nonos. Se a soma das duas idades é igual a 55 anos, então Pedro tem:

(a) 12 anos
(b) 13 anos
(c) 10 anos
(d) 15 anos

Exercício 1.5 (ENEM 2018) Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real. Certo mapa tem escala 1 : 58.000.000.

Disponível em: http://oblogdedaynabrigth.blogspot.com.br. Acesso em: 9 ago. 2012.

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm. A medida real, em quilômetros, desse segmento de reta é

(a) 4.408
(b) 7.632
(c) 44.080
(d) 76.316
(e) 440.800

Exercício 1.6 (ENEM 2014) Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura.

A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é

(a) $\frac{1}{8}$
(b) $\frac{7}{8}$
(c) $\frac{8}{7}$
(d) $\frac{8}{9}$
(e) $\frac{9}{8}$

Exercício 1.7 (ENEM 2016) Um paciente necessita de reidratação endovenosa feita por meio de cinco frascos de soro durante 24 h. Cada frasco tem um volume de 800 ml de soro. Nas primeiras quatro horas, deverá receber 40% do total a ser aplicado. Cada mililitro de soro corresponde a 12 gotas.

O número de gotas por minuto que o paciente deverá receber após as quatro primeiras horas será

(a) 16
(b) 20
(c) 24
(d) 34
(e) 40

Exercício 1.8 (ENEM 2018) Devido ao não cumprimento das metas definidas para a campanha de vacinação contra a gripe comum e o vírus H1N1 em um ano, o Ministério da Saúde anunciou a prorrogação da campanha por mais uma semana. A tabela apresenta as quantidades de pessoas vacinadas dentre os cinco grupos de risco até a data de início da prorrogação da campanha.

Balanço parcial nacional da vacinação contra a gripe			
Grupo de Risco	População (milhão)	População já vacinada	
		Milhão	(%)
Criança	4,5	0,9	20
Profissionais de saúde	2,0	1,0	50
Gestantes	2,5	1,5	60
Indígenas	0,5	0,4	80
Idosos	20,5	8,2	40

Qual é a porcentagem do total de pessoas desses grupos de risco já vacinadas?

(a) 12
(b) 18
(c) 30
(d) 40
(e) 50

Exercício 1.9 (ENEM 2015) O fisiologista francês Jean Poiseuille estabeleceu, na primeira metade do século XIX, que o fluxo de sangue por meio de um vaso sanguíneo em uma pessoa é diretamente proporcional à quarta potência da medida do raio desse vaso. Suponha que um médico, efetuando uma angioplastia, aumentou em 10% o raio de um vaso sanguíneo de seu paciente.

O aumento percentual entre o fluxo por esse vaso está entre

(a) 7% e 8%
(b) 9% e 11%
(c) 20% e 22%
(d) 39% e 41%
(e) 46% e 47%

Exercício 1.10 (ENEM 2015) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de $R\$500,00$. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (Certificado de Depósito Bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre ganho)

(a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ $502,80$.
(b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ $500,56$.
(c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ $504,38$.
(d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ $504,21$.
(e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ $500,87$.

Exercício 1.11 (Unicamp) Uma passagem de ônibus de Campinas a São Paulo custa R$ $17,50$. O preço da passagem é composto por R$ $12,57$ de tarifa, R$ $0,94$ de pedágio, R$ $3,30$ de taxa de embarque e R$ $0,69$ de seguro. Uma empresa realiza viagens a cada 15 minutos, sendo que o primeiro ônibus sai às 5 horas da manhã e o último, à meia-noite. No período entre o meio-dia e as duas horas da tarde, o intervalo entre viagens sucessivas é de 30 minutos.

(a) Suponha que a empresa realiza todas as viagens previstas no enunciado e que os ônibus transportam, em média, 36 passageiros por viagem. Qual o valor arrecadado pela empresa, por dia, nas viagens entre Campinas e São Paulo, desconsiderando as viagens de volta?
(b) Se a taxa de embarque aumentar $33,33\%$ e esse aumento for integralmente repassado ao preço da passagem, qual será o aumento percentual total do preço da passagem?

Exercício 1.12 (PUC-PR) Durante determinado ano foram matriculados 100 novos alunos em um colégio. No mesmo ano, 15 alunos antigos trancaram matrícula. Sabendo-se que, no final do ano, o número de alunos matriculados, em relação ao ano anterior, havia aumentado em 10%, o número de alunos ao final do ano era de:

(a) 850
(b) 730
(c) 950
(d) 935
(e) 750

Exercício 1.13 (Fuvest) Numa barraca de feira, uma pessoa comprou maçãs, bananas, laranjas e peras. Pelo preço normal da barraca, o valor pago pelas maçãs, bananas, laranjas e peras corresponderia a 25%, 10%, 15% e 50% do preço total, respectivamente. Em virtude de uma promoção, essa pessoa ganhou um desconto de 10% no preço das maçãs e de 20% no preço das peras. O desconto, assim obtido, no valor total de sua compra foi de:

(a) $7,5\%$
(b) 10%
(c) $12,5\%$
(d) 15%
(e) $17,5\%$

Exercício 1.14 (FGV-SP) Carlos adquiriu um aparelho de TV em cores pagando uma entradade $R\$200,00$ mais uma parcela de $R\$450,00$ dois meses após a compra. Sabendo-se que o preço à vista do aparelho é $R\$600,00$:

(a) qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?
(b) após quantos meses da compra deveria vencer a parcela de $R\$450,00$ para que a taxa de juros simples do financiamento fosse de $2,5\%$ ao mês?

Exercício 1.15 (FGV-SP) Determinada loja vende todos os produtos com pagamento para 45 dias. Para pagamento à vista, a loja oferece 8% de desconto. A taxa mensal de juro simples paga pelo cliente que prefere pagar após 45 dias é, aproximadamente, de:

(a) 0%
(b) $5,3\%$
(c) 8%
(d) $5,8\%$
(e) $4,2\%$

Exercício 1.16 (UFF) A luz proveniente do Sol demora, aproximadamente, 8 minutos para chegar à Terra. A ordem de grandeza da distância entre esses dois astros celestes, em km, é:

DADO: Velocidade da luz $= 3 \cdot 10^5 km/s$.

(a) 10^3
(b) 10^6
(c) 10^8
(d) 10^{10}
(e) 10^5

Exercício 1.17 (UFTM 2013) $27\ 700$ quilômetros é a distância a que passará da Terra, no próximo dia 15, o asteroide batizado de 2012 DA14. É a distância mais curta já registrada pela Nasa para um objeto desse tamanho. Mesmo ficando catorze vezes mais perto da Terra do que a Lua, o risco de ele colidir com o planeta é zero.

Revista Veja, fev. 2013 *(adaptado).*

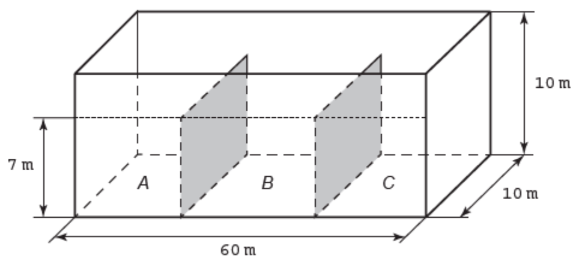
Considerando as informações contidas na notícia, a distância aproximada da Terra à Lua, em metros, pode ser corretamente representada, em notação científica, por

(a) $3,88 \cdot 10^3$
(b) $3,88 \cdot 10^8$
(c) $2.77 \cdot 10^8$
(d) $2.77 \cdot 10^8$
(e) $4,15 \cdot 10^5$

Exercício 1.18 (CEFET-MG 2008) Nos trabalhos científicos, números muito grandes ou próximos de zero, são escritos em notação científica, que consiste em um número x, tal que $1 < x < 10$ multiplicado por uma potência de base 10. Assim sendo, $0,00000045$ deve ser escrito da seguinte forma:

(a) $0,45 \cdot 10^{-7}$
(b) $4,5 \cdot 10^{-7}$
(c) $45 \cdot 10^{-6}$
(d) $4,5 \cdot 10^8$

Exercício 1.19 (ENEM 2016) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m $\cdot 10$ m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento o volume de petróleo derramado terá sido de

(a) $1,4 \cdot 10^3\ m^3$
(b) $1,8 \cdot 10^3\ m^3$
(c) $2,0 \cdot 10^3\ m^3$
(d) $3,2 \cdot 10^3\ m^3$
(e) $6,0 \cdot 10^3\ m^3$

Exercício 1.20 (UFRGS 2016) A distância que a luz percorre em um ano, chamada ano-luz, é de aproximadamente $38 \cdot 4^5 \cdot 5^{12}$ quilômetros. A notação científica desse número é:

(a) $9,5 \cdot 10^{10}$
(b) $0,95 \cdot 10^{12}$
(c) $9,5 \cdot 10^{12}$
(d) $95 \cdot 10^{12}$
(e) $9,5 \cdot 10^{14}$

Exercício 1.21 (Olimpíada Cearense) Qual é o menor inteiro positivo n tal que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0,01$.

Exercício 1.22 (FUVEST) O valor da expressão $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ é

(a) $\sqrt{2}$
(b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
(c) 2
(d) $\dfrac{1}{2}$
(e) $\sqrt{2}+1$

Exercício 1.23 (UESPI) A expressão $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1} + \dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}$, na forma racionalizada é igual a:

(a) $\dfrac{8}{3}$
(b) $\dfrac{8}{5}$
(c) 1
(d) $\dfrac{8}{7}$
(e) $\dfrac{8}{11}$

---

2 Conjuntos numéricos

Conjuntos numéricos

Os números naturais surgem no momento em que o ser humano precisou de uma maneira de representar quantidades. Com o passar do tempo, veio a necessidade de calcular partições de bens entre diferentes pessoas, para isso surgiram os números racionais. Do aumento da atividade comercial vieram os inteiros, que foram criados para suprir a necessidade de representar perdas.

Os irracionais podem ser observados através do Teorema de Pitágoras: analisando a diagonal de um quadrado de lado 1, que mede $\sqrt{2}$. A descoberta de tais números contrariou a crença de alguns matemáticos gregos que formavam a Escola Pitagórica, os quais afirmavam que qualquer número podia ser escrito como uma divisão de inteiros.

Já no século XVI, com os estudos de Girolamo Cardano e Rafael Bombelli, foi introduzido o conceito de número complexo, com o objetivo de obter soluções de polinômios de terceiro grau.

Além disso, também veremos neste capítulo outros conceitos da teoria dos números, como números primos, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. Essas ferramentas possuem muitas aplicações, principalmente na computação e na criptografia. Imagine, por exemplo, que as linhas de ônibus que passam por um certo ponto possuem diferentes frequências, cada uma passa a cada x minutos. Com os conteúdos deste capítulo é possível determinar quando todas as linhas passarão ao mesmo tempo.

1 Conjuntos

1.1 Noções primitivas

Um dos principais conceitos da Matemática são conjuntos. Um conjunto nada mais é do que uma coleção de objetos, matemáticos ou não. Os objetos que os compõem são chamados de elementos e os conjuntos são representados por chaves com seus elementos no interior separados por vírgulas. Em geral, denotaremos conjuntos através de letras maiúsculas.

Exemplo 1.1.1 A seguir, veremos alguns exemplos de conjuntos

1. Conjunto dos estados da região Sul:
$$S = \{\text{Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}\}.$$
2. Conjunto dos vértices do triângulo ABC:
$$V = \{A, B, C\}.$$
3. Conjunto dos números pares:
$$P = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}.$$

Obs. Conjuntos também podem conter infinitos elementos, é o caso do conjunto P e dos conjuntos numéricos que veremos na próxima seção.

Definição 1.1 Se a é um elemento do conjunto A dizemos que "a pertence a A" e denotamos por "$a \in A$".

Se a não é um elemento de A denotamos por "$a \notin A$".

Exemplo 1.1.2 No Exemplo 1.1.1 temos $B \in V$ e Sergipe $\notin S$.

Exemplo 1.1.3 Dado o conjunto $M = \{0, 2, 4, 5, 9\}$, vale que

$$\begin{array}{ll} 0 \in M & 1 \notin M \\ 2 \in M & 3 \notin M \\ 4 \in M & 6 \notin M \\ 5 \in M & 7 \notin M \\ 9 \in M & 8 \notin M. \end{array}$$

Além disso, um conjunto pode não conter nenhum elemento, nesse caso é representado por $\emptyset$ ou por $\{\}$ e é chamado de conjunto vazio.

1.2 Subconjuntos

Definição 1.2 Sejam A e B conjuntos de forma que todos os elementos de A também são elementos de B, nesse caso dizemos que A é um subconjunto de B e escrevemos $A \subset B$. Também podemos ler $A \subset B$ como "A está contido em B" ou "B contém A". A propriedade $\subset$ é chamada de inclusão.

Quando A não é subconjunto de B denotamos por $A \not\subset B$.

Exemplo 1.2.1 Sejam $F = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $G = \{0, 1, 2\}$ e $H = \{-2, 0, 2, 3\}$ conjuntos.

Temos que $G \subset F$, pois todos os elementos de G são também elementos de F. Porém $H \not\subset F$, dado que 3 é um elemento de H que não pertence a F.

Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então todo elemento de A é um elemento de B e vice-versa, ou seja, ambos têm os mesmos elementos, quando isso ocorre dizemos que A e B são iguais. Com isso obtemos que $A = B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

Além disso, vale para quaisquer conjuntos A, B e C que se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Obs. O vazio é sempre subconjunto de qualquer conjunto, ou seja, se A é um conjunto, vale que $\emptyset \subset A$. Isso ocorre porque não existe elemento em $\emptyset$ que não esteja em A.

Conjunto universo

Nos exercícios e aplicações é comum que exista um conjunto que engloba todos os elementos com os quais estamos trabalhando em determinada situação, este é chamado de conjunto universo.

Por exemplo, o conjunto S do Exemplo 1.1.1 pode ser observado como um subconjunto do conjunto universo que contém todos os estados do Brasil. Já o conjunto universo de V pode ser formado por todos os pontos do espaço em que está o triângulo ABC.

Condição

Uma forma comum de definir conjuntos é através de uma condição ou propriedade que os elementos devem satisfazer. Sendo U o conjunto universo e P uma propriedade, vamos denotar da seguinte forma:

$$A = \{x \in U \mid x \text{ satisfaz } P\}.$$

Nessa notação, a barra vertical significa "tal que", com isso, A é o conjunto dos elementos de U que satisfazem P.

Obs. Para representar "tal que" também são usados os dois pontos ou o ponto de vírgula, isto é, podemos escrever $A = \{x \in U : x \text{ satisfaz } P\}$ ou $A = \{x \in U ; x \text{ satisfaz } P\}$.

Exemplo 1.2.2 No Exemplo 1.1.1, se E denota o conjunto dos estados do Brasil, podemos escrever S como:

$$S = \{x \in E \mid x \text{ está na região Sul}\}.$$

Conjunto das partes

Dado um conjunto A, o conjunto formado por todos os subconjuntos de A é chamado de conjunto das partes de A e representado por $\mathscr{P}(A)$.

Teorema 1.1 Se A é finito e possui k elementos, então o número de elementos de $\mathscr{P}(A)$ é 2^k.

Exemplo 1.2.3 Considere $B = \{a, b, c\}$, vamos encontrar todos os subconjuntos de B:

- Como dito anteriormente, o vazio é subconjunto de qualquer conjunto, ou seja, $\emptyset \subset B$.
- Os conjuntos formados por um único elemento de B também estão contidos em B: $\{a\} \subset B$, $\{b\} \subset B$ e $\{c\} \subset B$.
- Os conjuntos formados por dois elementos de B são subconjuntos de B: $\{a, b\} \subset B$, $\{a, c\} \subset B$ e $\{b, c\} \subset B$.
- O próprio B é subconjunto de B, afinal qualquer conjunto está contido nele mesmo: $\{a, b, c\} \subset B$.

Com isso podemos identificar o conjunto das partes de B:

$$\mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Note que B possui 3 elementos e $\mathscr{P}(B)$ possui $2^3 = 8$ elementos.

Obs. No último exemplo podemos perceber que é sempre válido $A \in \mathscr{P}(A)$ e $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$.

1.3 Operações

Dados dois conjuntos A e B, podemos operá-los para obter um terceiro conjunto. As principais operações são união, interseção e diferença.

União

É representada pelo símbolo $\bigcup$, o resultado é o conjunto que contém os elementos de A e também os de B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

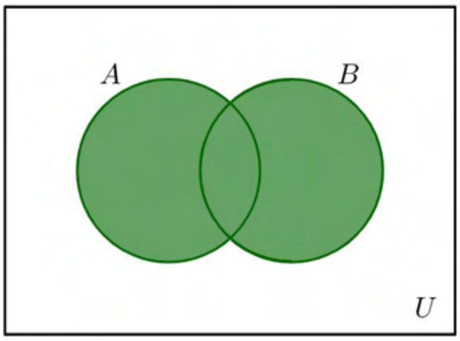


Figura 1.3.1: União de conjuntos

Interseção

Consiste no conjunto dos elementos que estão nos dois conjuntos ao mesmo tempo. É representada por $\bigcap$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \textbf{ e } x \in B\}.$$

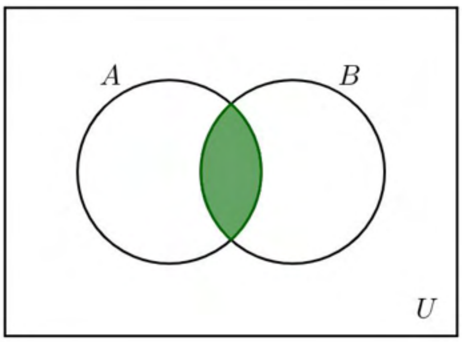


Figura 1.3.2: Interseção de conjuntos

Obs. Se dois conjuntos não possuem elementos em comum, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$, então eles são ditos conjuntos disjuntos.

Obs. A interseção de A e B sempre está contida em ambos, além disso A e B estão contidos na união, ou seja,

$$(A \cap B) \subset A \qquad A \subset (A \cup B).$$

$$(A \cap B) \subset B \qquad B \subset (A \cup B).$$

Diferença

Aqui, diferente das duas primeiras operações, a ordem da operação interfere no resultado. A diferença entre A e B é representada por "$-$" e é o conjunto dos elementos de A que não estão em B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

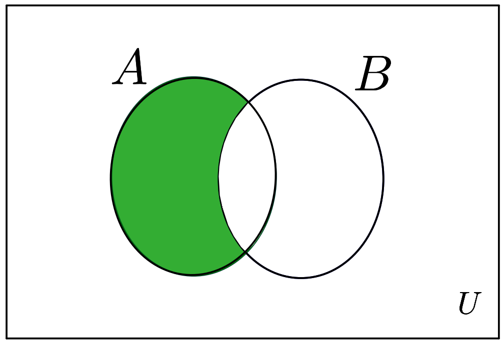


Figura 1.3.3: Diferença entre conjuntos

Obs. A diferença entre A e B também é representada por $A \backslash B$.

Além disso, também podemos definir o complementar de um conjunto A, que nada mais é do que a diferença do conjunto universo U com A. As notações mais comuns são $A^{\complement}$, $\complement_A^U$ e $\bar{A}$. Como se trata do conjunto universo também podemos definir o complementar como a coleção de todos os elementos que não estão em A (dentro dos elementos que estamos trabalhando).

$$A^{\complement} = \{x \in U \mid x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}.$$

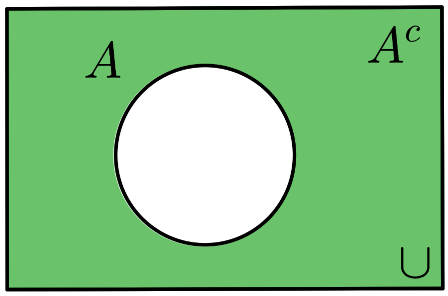


Figura 1.3.4: Complementar de um conjunto

Exemplo 1.3.1 Sejam $A = \{1,4,7,9,10\}$ e $B = \{2,7,8,9\}$, então:

- Juntando todos os elemento de A com os elementos de B obtemos a união:

$$A \cup B = \{1,2,4,7,8,9,10\}.$$

- A interseção de A e B é composta pelos elementos que estão nos dois conjuntos:

$$A \cap B = \{7,9\}.$$

- Os elementos de A que não estão em B compõem o conjunto diferença $A - B$:

$$A - B = \{1,4,10\}.$$

- Os elementos de B que não estão em A compõem o conjunto diferença $B - A$:

$$B - A = \{2,8\}.$$

Ainda, se o conjunto universo é $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, segue que:

$$A^{\complement} = U - A = \{2,3,5,6,8\}$$
$$B^{\complement} = U - B = \{1,3,4,5,6,10\}.$$

Propriedades

Dados A, B e C conjuntos são válidas as propriedades:

- Comutativa: $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$;
- Associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

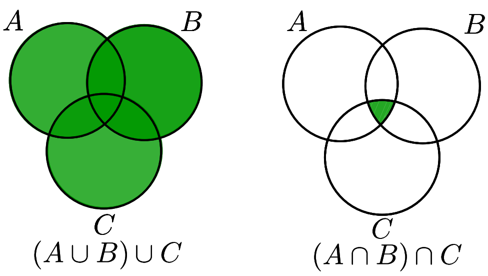


Figura 1.3.5: Propriedade associativa

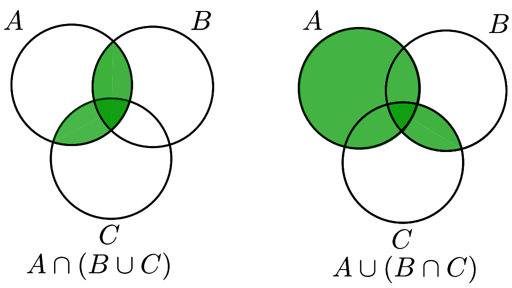


Figura 1.3.6: Propriedade distributiva

Suponha que $A \subset B$. Nesse caso, todos os elementos de A estão em B, então quando unimos os dois, não adicionamos nenhum elemento que não estava em B, logo $A \cup B = B$. Já quando calculamos a interseção, todos os elementos que estão em A e B são os elementos de A, logo $A \cap B = A$.

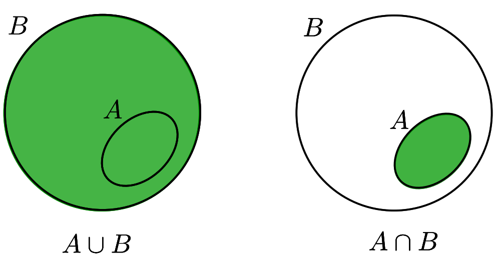


Figura 1.3.7: União e interseção com subconjunto

Além disso, unindo ou intersectando ambos com um outro conjunto C, a inclusão se preserva. Resumindo essas propriedades:

- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$;
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$;
- $A \subset B \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C)$;
- $A \subset B \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$.

As propriedades referentes ao complementar são:

- O complementar do complementar de um conjunto é o próprio conjunto, ou seja, $(A^{\complement})^{\complement} = A$.
  Dado que $x \notin A^{\complement}$ é equivalente a $x \in A$, ou seja, $(A^{\complement})^{\complement} = \left\{x \mid x \notin A^{\complement}\right\} = \{x \mid x \in A\}$.
- Se um conjunto está contido em outro, então a inclusão é contrária para os complementares, isto é, $A \subset B \Leftrightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}$.
  A inclusão é invertida dado que, se todos os elementos de A estão em B, então todos os elementos que não estão em B também não estão em A.
- Leis de De Morgan: são igualdades com as quais é possível associar o complementar de uma união e de uma interseção de dois conjuntos com os complementares de cada um dos conjuntos:

$$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$$
$$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}.$$

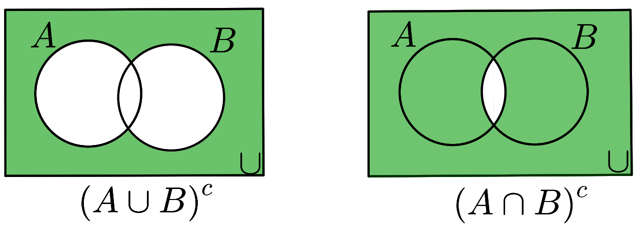


Figura 1.3.8: Leis de De Morgan

Além disso, se A e B possuem finitos elementos e n representa a quantidade de elementos de um conjunto, então vale que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \tag{2.1}$$

Disso segue que, se A e B são disjuntos e finitos, logo $n(A \cap B) = \emptyset$ e com isso:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \tag{2.2}$$

Obs. É comum ver o número de elementos de um conjunto A representado por $|A|$.

Exercício resolvido 1 (UFF 1999) Dado o conjunto $P = \{\{0\}, 0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$, considere as afirmativas:

I. $\{0\} \in P$;

II. $\{0\} \subset P$;
III. $\emptyset \in P$.

Com relação a estas afirmativas conclui-se que:

(a) Todas são verdadeiras.
(b) Apenas a I é verdadeira.
(c) Apenas a II é verdadeira.
(d) Apenas a III é verdadeira.
(e) Todas são falsas.

Resolução: Item I é verdadeiro: note que $\{0\}$ é um dos elementos de P, portanto $\{0\} \in P$.

Item II é verdadeiro: como 0 é um elemento de P, então o conjunto contendo 0 é subconjunto de P, ou seja, $\{0\} \subset P$.

Item III é verdadeiro: o conjunto vazio $\emptyset$ é um dos elementos de P, logo $\emptyset \in P$.

Com isso concluímos que a resposta é (a).

Exercício resolvido 2 (UFC 2003) Sejam M e N conjuntos que possuem um único elemento em comum. Se o número de subconjuntos de M é igual ao dobro do número de subconjuntos de N, o número de elementos do conjunto $M \cup N$ (união) é:

(a) o triplo do número de elementos de M.
(b) o triplo do número de elementos de N.
(c) o quádruplo do número de elementos de M.
(d) o dobro do número de elementos de M.
(e) o dobro do número de elementos de N.

Resolução: Sejam m e n a quantidade de elementos de M e N, respectivamente. Sabemos, pelo Teorema 1.1, que o número de subconjuntos de M é 2^m e o de N é 2^n.

O exercício nos diz que $2^m = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, portanto $m = n+1$. Além disso, como o número de elementos em comum de M e N é 1, temos que $n(M \cap N) = 1$. Substituindo na Fórmula 2.1:

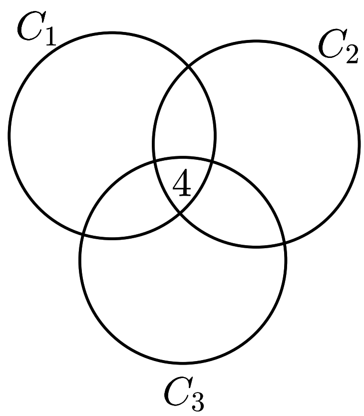
$$\begin{aligned} n(M \cup N) &= n(M) + n(N) - n(M \cap N) \\ &= m + n - 1 = (n+1) + n - 1 = 2n. \end{aligned}$$

Portanto, $M \cup N$ tem o dobro de elementos de N e a resposta é (e).

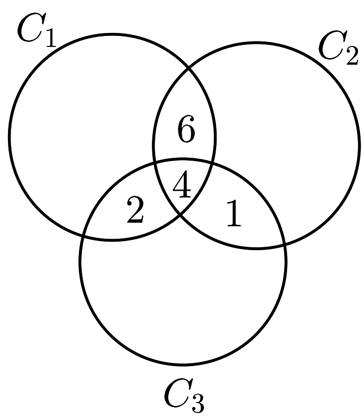
Exercício resolvido 3 (ENEM 2004) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

(a) 135.
(b) 126.
(c) 118.
(d) 114.
(e) 110.

Resolução: Vamos usar um diagrama para representar os catálogos. Sabemos, pelo enunciado, que das 5 páginas em comum de C_2 e C_3, 4 estão em C_1, ou seja, existem 4 páginas em $C_1 \cap C_2 \cap C_3$.

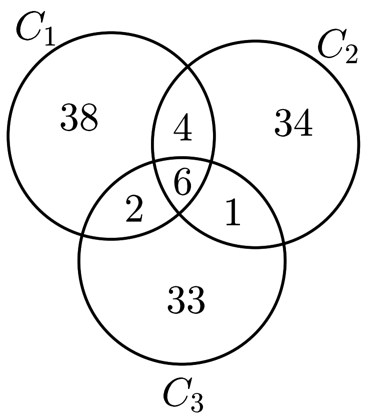


Com isso obtemos que existe $5-4=1$ página em $C_2 \cap C_3$ que não está em C_1. Além disso, existem $10-4=6$ páginas em $C_1 \cap C_2$ mas não em C_3 e $6-4=2$ páginas em $C_1 \cap C_3$ mas não em C_2.



Agora podemos calcular a quantidade de páginas que estão em apenas um catálogo:

$$\begin{aligned} n(C_1) &= 50-6-4-2 = 38 \\ n(C_2) &= 45-6-4-1 = 34 \\ n(C_3) &= 40-2-4-1 = 33. \end{aligned}$$



Portanto, a quantidade de páginas originais é $38+34+33+6+2+1+4=118$, alternativa (c).

Exercício resolvido 4 (ITA 2002) Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $\mathscr{P}(B/A) \cup \mathscr{P}(\emptyset)$ é igual a

(a) 8.
(b) 16.
(c) 20.
(d) 17.
(e) 9.

Resolução: Os conjuntos A e B/A são disjuntos e sua união é formada por todos os elementos de A juntamente com os elementos de B que não estão em A, ou seja, $A \cup (B/A) = A \cup B$, disso segue que:

$$\begin{aligned} &n(A \cup B) = n(A) + n(B/A) \\ \Rightarrow &n(B/A) = n(A \cup B) - n(A) = 12 - 8 = 4. \end{aligned}$$

Segue do Teorema 1.1 que o número de elementos de $\mathscr{P}(B/A)$ é $2^4 = 16$.

Agora note que $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dado que o único subconjunto de $\emptyset$ é $\emptyset$. Por outro lado, $\emptyset$ também está contido em B/A, logo $\emptyset \in \mathscr{P}(B/A)$, ou seja, quando unimos $\mathscr{P}(B/A)$ com $\mathscr{P}(\emptyset)$ não adicionamos nenhum elemento que já não estivesse em $\mathscr{P}(B/A)$, portanto a quantidade de elementos não se altera e a resposta é 16, alternativa (b).

---

2 Naturais, inteiros, racionais e reais

2.1 Naturais

O primeiro conjunto numérico que veremos, e também o mais simples, é o dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Obs. É comum ver o conjunto $\mathbb{N}$ definido sem a presença do zero. A questão de incluí-lo ou não nos naturais não é um consenso nos livros de matemática. Sempre que isso for relevante é importante destacar se 0 está sendo considerado como natural ou não.

Também podemos utilizar um asterisco para denotar os naturais sem o zero:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Uma propriedade importante de $\mathbb{N}$ é que quando somamos ou multiplicamos dois números naturais o resultado também é um número natural:

$$\text{Se } a, b \in \mathbb{N} \text{ então } a+b \in \mathbb{N} \text{ e } a \times b \in \mathbb{N}.$$

Quando isso ocorre dizemos que o conjunto é fechado para a adição e multiplicação.

Obs. Além do símbolo $\times$, também utilizaremos o ponto $\cdot$ para representar a multiplicação de dois números.

Porém, quando calculamos a diferença entre dois números naturais vemos que $\mathbb{N}$ já não é suficiente para essa operação, por exemplo, a diferença entre 2 e 1 é $2-1=1 \in \mathbb{N}$, mas a diferença entre 1 e 2 não pode ser representada por nenhum natural, afinal $1-2=-1 \notin \mathbb{N}$.

Isso ocorre porque em $\mathbb{N}$ não existe o elemento oposto de cada número, isto é, dado um natural x diferente de 0, não existe nenhum número y em $\mathbb{N}$ de forma que $x+y=0$. Para resolver isso, definimos o conjunto a seguir.

2.2 Inteiros

O conjunto dos números inteiros é representado por $\mathbb{Z}$ e é formado pelos elementos de $\mathbb{N}$ e seus opostos:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Como todos os naturais também são inteiros, temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$).

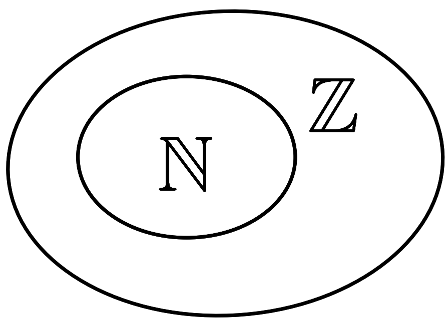


Figura 2.2.1: Inteiros e naturais

Podemos definir os seguintes subconjuntos de inteiros:

- Inteiros não nulos:
$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}.$$
- Inteiros não negativos:
$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$
- Inteiros não positivos:
$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}.$$

Obs. O número zero é considerado neutro, isto é, nem negativo, nem positivo. Por isso o conjunto dos inteiros não positivos contém o zero, assim como os inteiros não negativos.

Elemento oposto

Agora já resolvemos o problema dos opostos: dado um inteiro x seu oposto é $-x$, afinal $x + (-x) = 0$. A existência do elemento oposto de qualquer número inteiro faz com que o conjunto seja fechado também para a operação de subtração.

Além disso, podemos definir o módulo de um número inteiro:

Definição 2.1 Dado um número $x \in \mathbb{Z}$, o módulo de x é representado por $|x|$ e dado por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ou seja, se x é positivo (ou zero) ele é igual ao seu módulo, por outro lado, se x é negativo então seu módulo é o oposto de x.

É importante lembrar que, para qualquer número x, temos $-(-x) = x$. Considere, por exemplo, o número $-12 \in \mathbb{Z}$, como ele é negativo então o seu módulo será seu oposto:

$$|-12| = -(-12) = 12.$$

Exemplo 2.2.1 Determine:

- $|-3-(-4)|$.
Temos que $-3-(-4) = -3+4 = 1$, como $1 > 0$, seu módulo é igual a ele próprio. Logo $|-3-(-4)| = |1| = 1$.
- $|1+(-2)|$.
Como $1+(-2) = 1-2 = -1 < 0$, vale que $|1+(-2)| = |-1| = 1$.
- $|1|+|-2|$.
Segue que $|1| = 1$ e $|-2| = 2$. Portanto $|1|+|-2| = 1+2 = 3$.

Observe que o módulo da diferença entre dois números representa a distância entre eles. Por exemplo, a distância entre -3 e -4 é $|(-3)-(-4)| = 1$, enquanto a distância entre 1 e -2 é $|1-(-2)| = 3$.

Obs. A partir de agora todos os conjuntos que veremos nessa seção possuem a propriedade do elemento oposto, por isso podemos definir o módulo para qualquer elemento dos conjuntos que veremos a seguir.

Mesmo adicionando os elementos opostos ainda não conseguimos realizar todas as operações em $\mathbb{Z}$, afinal a divisão entre dois inteiros não necessariamente é um número inteiro, por exemplo, $1 \div 2 = 0,5 \notin \mathbb{Z}$.

Vamos definir o próximo conjunto a fim de resolver esse problema.

2.3 Racionais

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é formado por todos os número que podem ser escritos como uma divisão entre dois inteiros. São exemplos de racionais:

$$\frac{3}{7}, -\frac{14}{96}, 5, \frac{123}{8}.$$

Escrevendo de outra forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Lembrando que b não pode ser 0, pois não podemos dividir por 0. Note que, qualquer número inteiro z pode ser escrito como $\frac{z}{1}$, ou seja, todo inteiro também é um número racional.

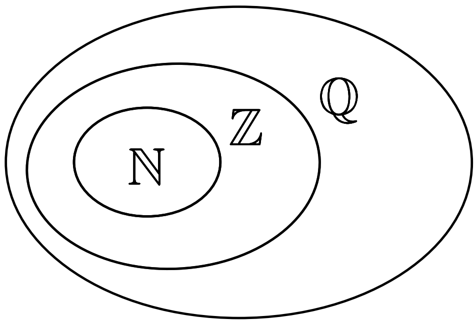


Figura 2.3.1: Racionais, inteiros e naturais

Obs. Para representar a divisão entre a e b podemos usar as notações $\frac{a}{b}$, a/b ou $a \div b$.

Os conjuntos $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{Q}_-$ são definidos da mesma forma que fizemos com $\mathbb{Z}$.

Agora, verificaremos que $\mathbb{Q}$ é fechado para as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), para isso devemos mostrar que, operando dois racionais, o resultado também é racional, ou seja, é igual a uma divisão entre dois inteiros.

Sejam $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$, vamos fazer as operações com os racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Note que, como b e d não são zero, então seu produto bd também não é, além disso, o produto e soma de inteiros é inteiro, logo:

- **Soma:** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \in \mathbb{Q}$.
- **Subtração:** $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd} \in \mathbb{Q}$.
- **Multiplicação:** $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$.

  Ainda, se $c \neq 0$, podemos efetuar a divisão:
- **Divisão:** $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \in \mathbb{Q}$.

Outra propriedade importante de $\mathbb{Q}$ é que qualquer número x diferente de zero possui um inverso multiplicativo, ou seja, um racional y tal que $x \cdot y = 1$. Para isso basta tomar $y = \frac{1}{x}$.

Exemplo 2.3.1 Encontre o inverso multiplicativo de:

- $-\frac{1}{9}$

  Como o número está escrito na forma de divisão de dois inteiros basta invertê-los. Logo o inverso é $-\frac{9}{1} = -9$.
- $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$

  Somando as frações obtemos: $\frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{19}{15}$. Portanto o inverso é $\frac{15}{19}$.

Representação dos racionais

Sabemos que, dado um número racional x, a fração de inteiros que representa x não é única, na verdade existem infinitas frações:

Se $x = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros, para qualquer $z \in \mathbb{Z}^*$ vale que $x = \frac{p}{q} = \frac{zp}{zq}$.

Por exemplo, a fração $\frac{2}{5}$ pode ser escrita como $\frac{6}{15}$ se multiplicarmos o numerador e o denominador por 3:

$$\frac{2}{5} = 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{15}.$$

Outra forma de escrever um racional x é através da representação decimal. Quando um algarismo, ou uma sequência de algarismos, se repete infinitamente na representação decimal de um número, usaremos uma barra acima destes algarismos.

Exemplo 2.3.2 $\frac{1}{8} = 0,125$ $-\frac{7}{9} = -0,7777\ldots = -0,\overline{7}$
$\frac{379}{333} = 1,138138\ldots = 1,\overline{138}$

Essa representação pode ser finita, como no primeiro exemplo, ou uma dízima periódica, como nos outros dois.

Uma fração de inteiros que é igual a uma representação decimal é chamada de fração geratriz dessa representação, veremos como encontrar essa fração com os exemplos a seguir.

Exemplo 2.3.3 Se a representação é finita basta multiplicar e dividir por uma potência de 10 de forma que não sobre algarismo após a vírgula:

$$2,84 = \frac{100}{100} \times 2,84 = \frac{284}{100}.$$

Podemos dividir por 4 para simplificar: $2,84 = \frac{284/4}{100/4} = \frac{71}{25}$.

Exemplo 2.3.4 Quando se trata de uma dízima periódica a estratégia é multiplicá-la por uma potência de 10 e encontrar a própria dízima no resultado. Vamos achar a fração correspondente à $0,\overline{7}$:

$$\begin{aligned} & N = 0,777\ldots \\ \Rightarrow\quad & 10N = 7,777\ldots = 7 + 0,777\ldots = 7 + N \\ \Rightarrow\quad & 9N = 7 \\ \Rightarrow\quad & N = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Agora, a fração geratriz de $2,\overline{31}$:

$$\begin{aligned} & M = 2,3131\ldots \\ \Rightarrow\quad & 100M = 231,3131\ldots = 229 + 2,3131\ldots = 229 + M \\ \Rightarrow\quad & 99M = 229 \\ \Rightarrow\quad & M = \frac{229}{99}. \end{aligned}$$

E, por último, de $12,4\overline{79}$:

$$\begin{aligned} & A = 12,47979\ldots \\ \Rightarrow\quad & 1000A = 12479,7979\ldots. \end{aligned}$$

Por outro lado: $10A = 124,7979\ldots$, logo:

$$\begin{aligned} & 1000A - 10A = 12479,\overline{79} - 124,\overline{79} = 12355 \\ \Rightarrow\quad & 990A = 12355 \\ \Rightarrow\quad & A = \frac{12355}{990}. \end{aligned}$$

Dividindo por 5 para simplificar obtemos:

$$A = \frac{2471}{198}.$$

Obs. Se tentarmos calcular a fração geratriz do número $X = 0,99\ldots$ vamos obter a equação $10X = 9,99\ldots = 9 + X$ e disso segue que $9X = 9$, portanto $X = \frac{9}{9} = 1$. Ou seja, temos $0,99\ldots = 1$. Esse resultado, apesar de contraintuitivo, pode ser interpretado da seguinte forma: a sequência de números $0,9$; $0,99$; $0,999$; etc, está cada vez mais próxima de 1 e ao mesmo tempo está cada vez mais próxima de $0,999\ldots$ (tão próxima de ambos quanto desejarmos, basta adicionar mais algarismos nove), logo eles devem ser iguais.

2.4 Irracionais

Dada a representação decimal dos números podemos levantar o seguinte questionamento: Um número cuja expansão decimal é infinita mas não apresenta nenhuma dízima se encaixa em algum dos conjuntos que vimos?

A resposta é não, tais números são chamados de irracionais e o conjunto que os contém é representado por $\mathbb{I}$, que também pode ser definido como o conjunto dos números que não podem ser escritos como uma divisão entre dois inteiros.

Alguns exemplos de irracionais são:

- $\sqrt{2} = 1,414213...$
- $\sqrt[5]{3} = 1,245730...$
- $\pi = 3,141592...$
- $e = 2,718281...$

O conjunto $\mathbb{I}$ não tem elementos em comum com $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

2.5 Reais

Com isso podemos definir o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

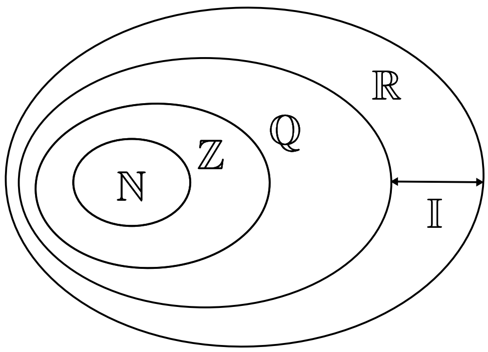


Figura 2.5.1: Os conjuntos numéricos

Note que os irracionais podem ser vistos como a diferença entre os reais e os racionais, por isso é comum vê-los denotados por $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Além disso também definimos o conjunto $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ não é zero}\}$.

O conjunto dos números reais juntamente com as operações de soma e multiplicação satisfaz as seguintes propriedades:

- Associatividade:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- Comutatividade:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- Elemento neutro:

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

- Elemento inverso (se $b \neq 0$):

$$a + (-a) = 0$$

$$b \cdot \frac{1}{b} = 1$$

- Distributividade

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ordem

O conjunto $\mathbb{R}$ é ordenado, ou seja, dados dois reais x e y, vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:

- x menor que y ($x < y$);
- x igual a y ($x = y$);
- x maior que y ($x > y$).

Os símbolos "<" e ">" significam "menor" e "maior", respectivamente. Enquanto $\leq$ e $\geq$ significam "menor ou igual" e "maior ou igual", respectivamente. Como consequência, os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ também são ordenados.

Assim, podemos definir os seguintes conjuntos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}. \qquad \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}.$$
$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}. \qquad \mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Os reais também são comumente representados por uma reta, na qual os números são colocados em ordem e vão crescendo para a direita:

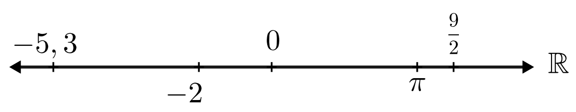


Figura 2.5.2: A reta real

Exercício resolvido 1 (UFF 2010) Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), "Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem". Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

(a) O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.
(b) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
(c) Entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.
(d) Entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.
(e) A diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um inteiro negativo.

Resolução: Item (a) é falso: considere os irracionais $\sqrt{2}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$, o seu produto é $1 \notin \mathbb{I}$.

Item (b) é falso: note que π e $-\pi$ são irracionais mas sua soma é 0, que não é irracional.

Item (c) é falso: sabemos que $\pi = 3,141\ldots$ está entre 3 e 4, trocando o primeiro 1 na expansão decimal de π por 2 obtemos $3,241\ldots$, que é outro número irracional nesse intervalo, afinal ele também não é uma dízima periódica, como podemos trocar qualquer algarismo dessa expansão decimal, então existem infinitos irracionais entre 3 e 4.

Item (d) é verdadeiro: dados dois racionais x e y, a média entre eles, que é $\frac{x+y}{2}$, está entre x e y e é racional.

Item (e) é falso: a diferença entre -1 e -2 é $-1-(-2) = 1$, um inteiro positivo.

Exercício resolvido 2 (UFG 2004) Sejam os conjuntos

$$A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{e} \qquad B = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Sobre esses conjuntos, pode-se afirmar:

I. $A \cap B = \emptyset$.
II. A é o conjunto dos números pares.
III. $A \cup B = \mathbb{Z}$

Está correto o que se afirma em:

(a) I e II, apenas.
(b) II, apenas.
(c) II e III, apenas.
(d) III, apenas.
(e) I, II e III.

Resolução: O item I é verdadeiro, dado que os elementos de B são os antecessores dos múltiplos de 2, são eles: $\ldots -5, -3, -1, 1, 3, 5\ldots$, os números ímpares. Como nenhum número é par e ímpar ao mesmo tempo, então $A \cap B = \emptyset$.

O item II também é verdadeiro: os elementos de A são os múltiplos de 2, ou seja, os números pares.

O item III também é verdadeiro, pois qualquer número inteiro ou é par ou é ímpar, portanto $A \cup B = \mathbb{Z}$.

Com isso, vemos que a alternativa correta é (e).

Exercício resolvido 3 (UFPI 2000) Se $x = 1,333\ldots$ e $y = 0,1666\ldots$, então $x + y$ é igual a:

(a) $\frac{7}{5}$.
(b) $\frac{68}{45}$.
(c) $\frac{13}{9}$.
(d) $\frac{4}{3}$.
(e) $\frac{3}{2}$.

Resolução: Vamos encontrar as frações geratrizes de x e y:

$$\begin{aligned} & x = 1,333\ldots \\ \Rightarrow\ & 10x = 13,333\ldots = 12 + 1,333 = 12 + x \\ \Rightarrow\ & 9x = 12 \\ \Rightarrow\ & x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Multiplicando y por 10 e por 100 encontramos dois números que possuem o algarismo 6 se repetindo depois da vírgula, logo podemos calcular a diferença para obter um inteiro:

$$\begin{aligned} & 100y - 10y = 16,666\ldots - 1,666\ldots = 15 \\ \Rightarrow\ & 90y = 15 \\ \Rightarrow\ & y = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Portanto $x + y = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{8+1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ e a alternativa certa é (e).

---

3 Intervalos

Dentro dos números reais encontramos um tipo de conjunto muito importante: os intervalos. Eles são definidos por desigualdades e veremos suas classificações a seguir.

Sejam a e b números reais com $a < b$, os tipos de intervalos são:

3.1 Intervalo aberto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Figura 3.1.1: Intervalo aberto

Obs. Quando representamos intervalos na reta real, uma bola fechada é usada para indicar que o número pertence ao intervalo, enquanto uma bola aberta indica que não pertence.

Exemplo 3.1.1 São exemplos de intervalos abertos:

$$(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$$
$$\left(3, \frac{9}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 3 < x < \frac{9}{2}\right\}.$$

3.2 Intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}.$$

Figura 3.2.1: Intervalo fechado

Exemplo 3.2.1 São exemplos de intervalos fechados:

$$[-11, -10] = \{x \in \mathbb{R} \mid -11 \le x \le -10\}$$
$$[0, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 2\}.$$

3.3 Intervalo semiaberto

Fechado à esquerda e aberto à direita:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}.$$

Figura 3.3.1: Intervalo semiaberto à direita

Ou também aberto à esquerda e fechado à direita:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}.$$

Figura 3.3.2: Intervalo semiaberto à esquerda

Exemplo 3.3.1 São exemplos de intervalos semiabertos:

$$[1, 1.5) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 1.5\}$$
$$(-2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \le 3\}.$$

3.4 Semirretas

O conjunto de pontos de uma reta tomados a partir de uma origem em um sentido é uma semirreta, usando essa definição na reta dos números reais obtemos as semirretas reais, que também são intervalos. Veremos a seguir suas classificações.

Semirreta direita, aberta, de origem a:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}.$$

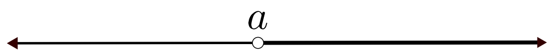


Figura 3.4.1: Semirreta direita e aberta

Obs. As semirretas sempre são abertas em $+\infty$ (mais infinito) e $-\infty$ (menos infinito), afinal estes símbolos não representam números reais e portanto não podem pertencer às semirretas.

Semirreta esquerda, aberta, de origem a:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

Semirreta direita, fechada, de origem a:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}.$$

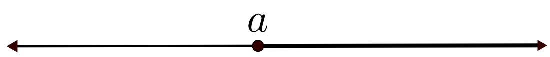


Figura 3.4.2: Semirreta direita e fechada

Semirreta esquerda, fechada, de origem a:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}.$$

Obs. Os reais podem ser escritos na forma de intervalo: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
O conjunto vazio também: para qualquer $a \in \mathbb{R}$, o intervalo (a, a) é vazio, afinal, nenhum número é maior e menor do que a ao mesmo tempo.

Obs. No lugar dos parênteses também é comum usar os símbolos "[" e "]" invertidos, por exemplo: $(a, b) =]a, b[$ e $[1, \infty) = [1, \infty[$.

Exemplo 3.4.1 São exemplos de semirretas:

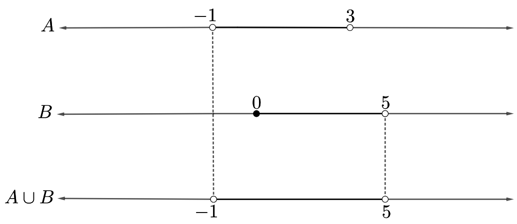
$$[0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x\} \qquad]-\infty, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 3\}$$
$$]-4, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x\} \qquad (-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

3.5 Operações com intervalos

Quando realizamos as operações de conjuntos (união e interseção) com os intervalos o resultado também pode ser escrito usando intervalos. Veremos no exemplo a seguir como realizar e visualizar essas operações.

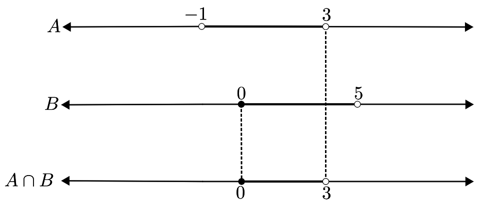
Exemplo 3.5.1 Considere os intervalos $A = (-1,3)$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$.

Representando os intervalos na reta real podemos encontrar a união:



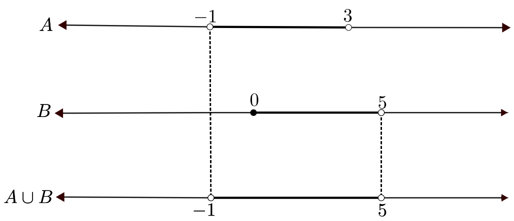
$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}.$$

E a interseção:



$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}.$$

Além disso, também conseguimos encontrar o conjunto $A - B$, que consiste nos números que estão em A, mas não estão em B:



$$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}.$$

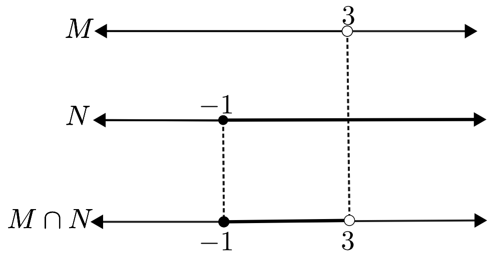
Note que o intervalo $A - B$ é aberto em 0, pois esse elemento faz parte de B.

De maneira similar temos $B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 5\}$.

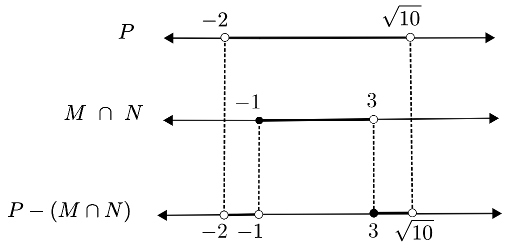
Exercício resolvido 1 (PUC RS) $M = (-\infty, 3)$, $N = [-1, \infty)$ e $P = [-2, \sqrt{10})$ são intervalos. Então $P - (M \cap N)$ é igual a:

(a) $[-2, 1)$
(b) $[-2, 3)$
(c) $[-2, \sqrt{10}]$
(d) $(-\infty, -1] \cup (3, \infty)$
(e) $[-2, -1) \cup [3, \sqrt{10})$

Resolução: As operações de conjuntos seguem a mesma regra das operações numéricas, por isso devemos fazer primeiro o que está entre parênteses:



Com isso vemos que $M \cap N = [-1, 3)$, fazendo a diferença de conjuntos:



Nesse caso, o conjunto resultante é a união de dois intervalos: à esquerda temos $[-2, -1)$ e à direita $[3, \sqrt{10})$, portanto a respota é o item (e).

Exercício resolvido 2 (UNIMONTES 2017) Considere os conjuntos numéricos:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 < x < 17\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\right\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 12 \leq x \leq 15\}$.

A soma dos elementos que formam o conjunto $(A \cap B) - C$ é igual a

(a) 37
(b) 35
(c) 20
(d) 12

Resolução: Primeiramente, note que A é constituído pelos inteiros entre 7 e 17, disso segue que o conjunto $A \cap B$ é formado pelos ímpares entre 7 e 17. Logo

$$A \cap B = \{9, 11, 13, 15\}.$$

Para encontrar $(A \cap B) - C$ devemos retirar todos os números de $A \cap B$ que estão em C, ou seja, entre 12 e 15, com isso obtemos

$$(A \cap B) - C = \{9, 11\}.$$

Portanto, a resposta é $9 + 11 = 20$, alternativa (c).

---

4 Divisibilidade

Nesta seção, veremos alguns critérios para avaliar quando um número é divisível por outro, além de uma formalização da ideia de divisibilidade, que será essencial para o estudo de números primos, $M.M.C.$ e $M.D.C.$ que virá adiante.

Para o estudo da divisibilidade será necessário retomar alguns conceitos relacionados com a operação de divisão entre números inteiros.

Algoritmo da divisão

Ao realizar a divisão entre números inteiros, normalmente, recorremos ao algoritmo da forma:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

no qual $D, d, q, r \in \mathbb{Z}$ e recebem as seguintes nomenclaturas:

- D é o dividendo;
- d é o divisor;
- q é o quociente;
- r é o resto.

Relação fundamental da divisão

A partir do algoritmo podemos obter a Relação Fundamental da Divisão, também conhecida como Algoritmo da Divisão Euclidiana:

$$D = d \cdot q + r,$$

tal que $0 \leq r < d$.

4.1 Divisível e divisor

Daremos destaque as divisões cujo resto é 0. Neste caso, a relação fundamental será dada por

$$D = d \cdot q.$$

Em casos em que a divisão é exata, isto é, tem resto igual a 0 , diremos que D é divisível por d e d é divisor de D. Assim, obtemos a seguinte definição:

Definição 4.1 Considere x e $y \in \mathbb{Z}$. Diremos que x é divisível por y e y é divisor de x se existir um inteiro z tal que $x = y \cdot z$. Para representar essa relação podemos utilizar a notação $y|x$. Também dizemos que y divide x.

Obs. Observe que, na Definição 4.1, a divisão $\dfrac{x}{y}$ resulta em um número inteiro e possui resto igual a zero.

Obs. Não confunda a notação $y|x$ com x/y. O símbolo / é usado para representar a divisão e pode ser lido como "dividido por" enquanto o símbolo | significa "divide". Também não confundir com o símbolo "tal que", que é a barra vertical representando a condição de um conjunto.

Exemplo 4.1.1 Verifique se 15 é divisível por 3.

Efetuando a divisão:

$$\begin{array}{rr|l} & 15 & 3 \\ \cline{3-3} - & 15 & 5 \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Ou seja, $\dfrac{15}{3} = 5$ e, consequentemente, $15 = 3 \cdot 5$. Portanto, 15 é divisível por 3.

Exemplo 4.1.2 Verifique se 23 é divisível por 2.

Efetuando a divisão:

$$\begin{array}{rr|l} & 23 & 2 \\ \cline{3-3} - & 22 & 11 \\ \cline{2-2} & 1 & \end{array}$$

Na relação fundamental teremos que $23 = 2 \cdot 11 + 1$. Perceba que a divisão não resulta em resto 0, assim, não existe um número inteiro z tal que $23 = 2 \cdot z$, ou seja, 23 não é divisível por 2.

Exemplo 4.1.3 Considere $a \in \mathbb{Z}^*$. Verifique se 0 é divisível por a.

Observe que a divisão $\dfrac{0}{a} = 0$. Disso segue que 0 é divisível por todo número inteiro diferente de 0. Pois para todo $a \in \mathbb{Z}^*$ teremos $0 = 0 \cdot a$.

Obs. Veja que nenhum número é divisível por 0. Considere $a \in \mathbb{Z}^*$. Sabendo que todo número multiplicado por 0 resulta em 0, teremos que não será possível obter um $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 0 \cdot c$.

4.2 Critérios de divisibilidade

Os critérios de divisibilidade são algumas regras usadas para verificar de forma mais prática se um número é divisível por outro. A seguir serão apresentados os critérios de divisibilidade para as divisões de 1 até 10.

Divisibilidade por 1

Todo número inteiro é divisível por 1, pois para todo $x \in \mathbb{Z}$, temos que $x = 1 \cdot x$.

Exemplo 4.2.1 Verifique se 248 é divisível por 1.

Pelo critério de divisibilidade, temos que $248 = 1 \cdot 248$. Portanto, teremos que 248 é divisível por 1.

Divisibilidade por 2

Todo número par é divisível por 2. Como os pares são os números terminados em 2, 4, 6, 8 ou 0, todos números com essa terminação serão divisíveis por 2.

Exemplo 4.2.2 Verifique se 284.312 é divisível por 2.

Pelo critério de divisibilidade, basta observar o último algarismo, que é 2, um número par. Portanto, 284.312 é divisível por 2.

Exemplo 4.2.3 Verifique se 375.193 é divisível por 2.

Pelo critério de divisibilidade, basta observar o último algarismo. Como o último algarismo é 3, que é ímpar, então 375.193 não é divisível por 2.

Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se a adição de seus algarismos resultar em um número divisível por 3.

Exemplo 4.2.4 Verifique se 39.243 é divisível por 3.

Pelo critério de divisibilidade, precisamos fazer a adição de seus algarismos, assim teremos $3+9+2+4+3=21$. Como 21 é divisível por 3, segue que 39.243 é divisível por 3.

Exemplo 4.2.5 Verifique se 42.875 é divisível por 3.

Pelo critério de divisibilidade, precisamos fazer a adição de seus algarismos, assim teremos $4+2+8+7+5=26$. Como 26 não é divisível por 3, segue que 42.875 não é divisível por 3.

Divisibilidade por 4

Existem dois critérios que podem ajudar a verificar se um número é divisível por 4:

- Todo número inteiro cujos dois últimos algarismos são 00 é divisível por 4.
- É divisível por 4 todo número inteiro no qual o número formado pelos dois últimos algarismos é divisível por 4.

Portanto, são divisíveis por 4 os números terminados em

$$00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40,$$

$$44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96.$$

Obs. Observe que os critérios de divisibilidade por 4 só terão utilidade se o número que se quer verificar tiver no mínimo 3 algarismos, isso é, se o número for maior ou igual a 100.

Exemplo 4.2.6 Verifique se 42.800 é divisível por 4.

Note que 42.800 tem 00 como seus dois últimos algarismos. Portanto, pelo critério de divisibilidade, é divisível por 4.

Exemplo 4.2.7 Verifique se 583.424 é divisível por 4.

Pelo critério de divisibilidade, como 583.424 tem 24 como seus dois últimos algarismos, então é divisível por 4. Isso se deve ao fato de que 24 é divisível por 4, dessa forma, esse exemplo cumpre o segundo critério de divisibilidade por 4.

Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 se possui último algarismo 5 ou 0.

Exemplo 4.2.8 Verifique se 32.475 é divisível por 5.

Pelo critério de divisibilidade, basta observar o último algarismo, que é 5. Portanto, 32.475 é divisível por 5.

Exemplo 4.2.9 Verifique se 25.183 é divisível por 5.

Pelo critério de divisibilidade, basta observar o último algarismo. Como o último algarismo de 25.183 é 3, então não é divisível por 5.

Divisibilidade por 6

Serão divisíveis por 6 os números que forem divisíveis, simultaneamente, por 2 e por 3. Logo, devem cumprir as duas condições:

- Possuir último algarismo $2, 4, 6, 8$ ou 0.
- A adição de seus algarismos deve resultar em um número divisível por 3.

Obs. Perceba que os critérios de divisibilidade por 6 exigem o cumprimento das duas condições, caso apenas uma condição seja satisfeita o número não será divisível por 6.

Exemplo 4.2.10 Verifique se 18.234 é divisível por 6.

Pelo critério de divisibilidade, o número deve satisfazer duas condições. Observe que 18.234 tem último algarismo igual a 4, logo é divisível por 2. A soma de seus algarismos é dada por $1+8+2+3+4=18$, portanto cumpre as duas condições. Disso segue que 18.234 é divisível por 6.

Exemplo 4.2.11 Verifique se 243 é divisível por 6.

Pelo critério de divisibilidade, o número deve satisfazer duas condições. Observe que 243 tem último algarismo igual a 3, logo não é divisível por 2. Disso segue que 243 não é divisível por 6.

Exemplo 4.2.12 Verifique se 3.422 é divisível por 6.

Pelo critério de divisibilidade, o número deve satisfazer duas condições. Observe que 3.422 tem último algarismo igual a 2, logo é divisível por 2. A soma de seus algarismos é dada por $3+4+2+2=11$, portanto não cumpre a segunda condição. Disso segue que 3.422 não é divisível por 6.

Divisibilidade por 7

Para verificar se um número é divisível por 7 precisamos obter alguns valores, para isso podemos seguir os seguintes passos:

- Calcular o dobro do último algarismo.
- Obter o número formado pelos algarismos exceto o último. Para isso, remova o último algarismo do número.
- Faça a subtração entre o número obtido no processo anterior e o dobro do último algarismo, que foi removido.

Para que o número seja divisível por 7 é necessário que o resultado do último procedimento seja divisível por 7.

Exemplo 4.2.13 Verifique se 427 é divisível por 7.

Pelo critério de divisibilidade, devemos seguir três passos, primeiro vamos calcular o dobro do último algarismo:

$$2 \cdot 7 = 14.$$

Em seguida, vamos obter o número formado pelos algarismos exceto o último:

$$\frac{427-7}{10} = \frac{420}{10} = 42.$$

Por fim, realize a subtração:

$$42 - 14 = 28.$$

Como 28 é divisível por 7, teremos que 427 é divisível por 7.

Exemplo 4.2.14 Verifique se 431 é divisível por 7.

Pelo critério de divisibilidade, devemos seguir três passos, primeiro vamos calcular o dobro do último algarismo:

$$2 \cdot 1 = 2.$$

Em seguida, vamos obter o número formado pelos algarismos exceto o último:

$$\frac{431-1}{10} = \frac{430}{10} = 43.$$

Por fim, realize a subtração:

$$43 - 2 = 41.$$

Como 41 não é divisível por 7, teremos que 431 não é divisível por 7.

Divisibilidade por 8

Existem dois critérios que podem ajudar a verificar se um número é divisível por 8:

- Todo número inteiro cujos três últimos algarismos são 000 é divisível por 8.
- É divisível por 8 todo número inteiro no qual o número formado pelos três últimos algarismos é divisível por 8.

Obs. Os critérios de divisibilidade por 8 só serão úteis para verificar a divisibilidade de números com mais de três algarismos.

Obs. Perceba que se o número cumprir um dos critérios já podemos concluir que é divisível por 8.

Exemplo 4.2.15 Verifique se 31.000 é divisível por 8.

Pelo critério de divisibilidade, devemos observar os três últimos algarismos, nesse caso, são 000. Portanto, 31.000 é divisível por 8.

Exemplo 4.2.16 Verifique se 42.320 é divisível por 8.

Pelo critério de divisibilidade, devemos observar os três últimos algarismos, nesse caso, são 320. O que é divisível por 8, já que $320 = 8 \cdot 40$. Portanto, 42.320 é divisível por 8.

Exemplo 4.2.17 Verifique se 939.561 é divisível por 8.

Pelo critério de divisibilidade, devemos observar os três últimos algarismos, nesse caso, são 561. Como 561 não é par, então não é divisível por 8, dado que todos os múltiplos de 8 são pares. Portanto, 939.561 não é divisível por 8.

Divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 se a adição de seus algarismos resultar em um número divisível por 9.

Exemplo 4.2.18 Verifique se 39.243 é divisível por 9.

Pelo critério de divisibilidade, precisamos fazer a adição de seus algarismos, assim teremos $3+9+2+4+3 = 21$. Como 21 não é divisível por 9, teremos que 39.243 não é divisível por 9.

Exemplo 4.2.19 Verifique se 428.751 é divisível por 9.

Pelo critério de divisibilidade, precisamos fazer a adição de seus algarismos, assim teremos $4+2+8+7+5+1 = 27$. Como 27 é divisível por 9, teremos que 428.751 é divisível por 9.

Divisibilidade por 10

Um número é divisível por 10 se possui o último algarismo igual a 0.

Exemplo 4.2.20 Verifique se 1.080 é divisível por 10.

Pelo critério de divisibilidade, basta verificar se o último algarismo é 0, ou seja, 1.080 é divisível por 10.

Exemplo 4.2.21 Verifique se 3.456 é divisível por 10.

Pelo critério de divisibilidade, basta verificar se o último algarismo é 0. Neste caso, o último algarismo é 6, portanto 3.456 não é divisível por 10.

Exercício resolvido 1 (UEFS 2010) O algarismo que se deve colocar entre os algarismos do número 68, para que o número obtido seja divisível por 4 e 6 simultaneamente, é um elemento do conjunto

(a) $\{0,1\}$.
(b) $\{2,3\}$.
(c) $\{4,5\}$.
(d) $\{6,7\}$.
(e) $\{8,9\}$.

Resolução: Queremos descobrir um algarismo que ao ser colocado entre 68 forme um número divisível por 4 e 6.

De acordo com critérios de divisibilidade por 4 e 6, esse número deve satisfazer as seguintes condições:

1. O número inteiro formado pelos dois últimos algarismos é divisível por 4.
2. Possuir último algarismo 2, 4, 6, 8 ou 0.
3. A adição de seus algarismos deve resultar em um número divisível por 3.

Devido a primeira condição, podemos restringir as opções em 648, 668 e 688.

Observe que todos estes valores satisfazem a segunda condição, pois o último algarismo é 8.

Resta verificar a terceira condição, as somas dos algarismos de 648, 668 e 688 são 18, 20 e 22, respectivamente. Como 18 é divisível por 3, então o número 648 satisfaz todas as condições e, consequentemente, é divisível por 4 e 6. A alternativa correta é (c).

Exercício resolvido 2 (UNIMONTES 2019) O maior número inteiro de 4 algarismos, que é divisível por 2 e por 3, vale

(a) 9994.
(b) 9992.
(c) 9996.
(d) 9998.

Resolução: Para ser divisível por 2 e 3 um número deve satisfazer as seguintes condições:

1. Possuir último algarismo 2, 4, 6, 8 ou 0.
2. A adição de seus algarismos deve resultar em um número divisível por 3.

Iremos analisar os números 9.994, 9.992, 9.996 e 9.998, pois são as opções dadas pelo problema, caso não tivéssemos essas alternativas poderíamos analisar os números 9.999, 9.998, 9.997 e assim sucessivamente até encontrar um que satisfaça as condições.

Observe que todos os quatro números são terminados em 2, 4, 6, 8 ou 0. Logo, cumprem a primeira condição, resta verificar a segunda. Realizando a adição dos algarismos de 9.994, 9.992, 9.996 e 9.998, obtemos 31, 29, 33 e 35, respectivamente. Portanto, apenas a soma dos algarismos do número 9.996 é divisível por 3. A alternativa correta é (c).

5 Decomposição em fatores primos

Nesta seção iremos abordar a decomposição em fatores primos, mas primeiro é necessário compreender quais são os números primos.

5.1 Números primos

Números primos são os números maiores do que 1 e que são divisíveis apenas por 1, -1, ele mesmo e seu oposto.

Os números primos menores que 100 são:

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,$$

$$43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89 \text{ e } 97.$$

Obs. Observe que o 2 é o único primo par, pois todos os outros pares são divisíveis por 2 e por isso não são primos. Disso segue que todos os números primos diferentes de 2 são ímpares. Além disso, dos números cujo o último algarismo é 5, apenas o 5 é primo, pois o restante é divisível por 5.

5.2 Números compostos

Os números naturais que não são primos, isto é, os que admitem mais que dois divisores positivos, serão denominados números compostos e podem ser escritos como o produto entre fatores primos. A este produto chamaremos de forma fatorada.

Exemplo 5.2.1 O número 125 pode ser escrito como $5 \cdot 5 \cdot 5$. Portanto, $5 \cdot 5 \cdot 5$ é a forma fatorada de 125.

Exemplo 5.2.2 O número 21 pode ser escrito como $3 \cdot 7$. Portanto, $3 \cdot 7$ é a forma fatorada de 21.

5.3 Decomposição em fatores primos

Decompor um número em números primos consiste em reescrevê-lo como um produto de fatores primos. Para fatorar um número temos que realizar a divisão pelo menor primo possível, o resultado obtido também é dividido pelo menor primo possível e assim sucessivamente até que se obtenha resultado 1. Esse processo é chamado de fatoração.

Obs. Caso tenha dificuldade em identificar qual é o menor primo que divide um número, tente utilizar os critérios de divisibilidade.

Exemplo 5.3.1 Decomponha 232 no produto de números primos.

Podemos realizar a seguinte fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 232 & 2 \\ 116 & 2 \\ 58 & 2 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

Observe que o menor primo que divide 232 é 2, o menor primo que divide 116 é 2, o menor primo que divide 58 é 2 e o menor primo que divide 29 é 29. Por meio dessa decomposição, obtemos que a forma fatorada de 232 é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 29$.

Exemplo 5.3.2 Decomponha 325 no produto de números primos.

Podemos realizar a seguinte fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 325 & 5 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Observe que o menor primo que divide 325 é 5, o menor primo que divide 65 é 5 e 13 é primo. Assim, a forma fatorada de 325 é $5 \cdot 5 \cdot 13$.

Obs. Considerando que um número primo só é divisível por 1 e por ele mesmo. Como 1 não é primo, temos que o menor e único número primo que divide um número primo é ele mesmo. Como ocorre com o 13 no exemplo anterior.

Exercício resolvido 1 (IBF 2017) Assinale a alternativa correta referente à quantidade de números primos distintos que encontramos ao decompor o número 360 em fatores primos.

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 9

Resolução: O primeiro passo para resolver este problema é fatorar o número 360.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Disso segue que $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ e os fatores distintos presentes nessa decomposição são 2, 3 e 5. A alternativa correta é (c).

6 Mínimo múltiplo comum

Nesta seção será apresentado o conceito de Mínimo Múltiplo Comum, normalmente representado pela sigla $M.M.C.$ (ou $m.m.c.$), mas antes precisamos entender o que é um múltiplo e quais são os múltiplos de um número inteiro.

6.1 Múltiplo

Definição 6.1 Considere a e $b \in \mathbb{Z}$. Diremos que b é múltiplo de a se for dado pela multiplicação de a por um número inteiro. Em termos matemáticos, diremos que b é múltiplo de a, se

$$b = a \cdot c$$

tal que $c \in \mathbb{Z}$.

Obs. Diremos que b é múltiplo de a se b for divisível por a.

Exemplo 6.1.1 Vamos verificar se 100 é um múltiplo de 2. Para isso, devemos descobrir um número inteiro c tal que

$$100 = 2 \cdot c$$
$$c = \frac{100}{2}$$
$$c = 50.$$

Portanto, podemos dizer que 100 é múltiplo de 2, uma vez que $100 = 2 \cdot 50$.

Outra maneira de mostrar que 100 é múltiplo de 2 seria verificando se 100 é divisível por 2. Segundo o critério de divisibilidade, como 100 é par, temos que 100 é divisível por 2 e, consequentemente, que 100 é múltiplo de 2.

Exemplo 6.1.2 Vamos verificar se 200 é um múltiplo de 3. Para isso, temos que obter $d \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$200 = 3 \cdot d$$

$$\frac{200}{3} = d.$$

Observe que o valor obtido para d não é inteiro, neste caso, 200 não é múltiplo de 3.

Outra maneira de investigar se 200 é múltiplo de 3 seria verificando se 200 é divisível por 3. A soma dos algarismos de 200 é 2, o que não é divisível por 3, logo, pelo critério de divisibilidade, 200 não é divisível por 3 e, consequentemente, não é múltiplo de 3.

Exemplo 6.1.3 Vamos verificar se -250 é um múltiplo de 5. Para isso, teremos que obter $a \in \mathbb{Z}$, de modo que

$$-\frac{250}{5} = a$$

$$-50 = a.$$

Como $-50 \in \mathbb{Z}$, temos que -250 é múltiplo de 5, uma vez que $-250 = 5 \cdot (-50)$.

6.2 Conjunto dos múltiplos

Considere $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto dos múltiplos de a tem como elementos os produtos desse número pelos números inteiros e é denotado por $M(a)$, ou por $a\mathbb{Z}$:

$$M(a) = \{\dots, -3\cdot a, -2\cdot a, -1\cdot a, 0, 1\cdot a, 2\cdot a, 3\cdot a, \dots\}.$$

Exemplo 6.2.1 Considere $M(2)$ o conjunto dos múltiplos de 2, temos que:

$$M(2) = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

Outro conjunto que merece destaque são os múltiplos positivos. Considere $c \in \mathbb{Z}_+^*$. O conjunto dos múltiplos positivos de c tem como elementos os produtos entre c e os números inteiros positivos. Assim, o conjunto de múltiplos positivos de c será dado por $M_+(c)$, tal que

$$M_+(c) = \{1\cdot c, 2\cdot c, 3\cdot c, 4\cdot c, 5\cdot c, \dots\}.$$

Exemplo 6.2.2 Considere $M_+(25)$ o conjunto dos múltiplos positivos de 25, teremos que:

$$M_+(25) = \{25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225, \dots\}.$$

Exemplo 6.2.3 Considere $M_+(15)$ o conjunto dos múltiplos positivos de 15, teremos que:

$$M_+(15) = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, \dots\}.$$

6.3 Mínimo múltiplo comum

Nos exemplos anteriores obtemos que os múltiplos positivos de 25 e 15 são:

$$M_+(25) = \{25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225, \dots\}.$$

$$M_+(15) = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, \dots\}.$$

Observe que 75 e 150 são múltiplos comuns a 25 e 15 e, destes múltiplos comuns, o menor deles é 75. Nesse sentido, podemos dizer que 75 é o mínimo múltiplo comum de 25 e 15. Veja a seguir a definição desse conceito:

Definição 6.2 Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$. O número inteiro x é Mínimo Múltiplo Comum de y e z se for o menor múltiplo positivo que estes números possuem em comum. Denotaremos como $M.M.C.(y,z) = x$.

Para obter o $M.M.C.$ de dois ou mais números não é necessário determinar todo o conjunto dos múltiplos positivos deste números, uma outra maneira de obter este valor é realizar a fatoração de ambos os números de forma simultânea, o $M.M.C.$ será dado pelo produto dos fatores obtidos.

Exemplo 6.3.1 Encontre o $M.M.C.$ de 25 e 15.

Podemos realizar a seguinte fatoração:

$$\begin{array}{rr|l} 25, & 15 & 3 \\ 25, & 5 & 5 \\ 5, & 1 & 5 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

O produto dos fatores obtidos é $3\cdot 5\cdot 5 = 75$. Portanto, $M.M.C.(25,15) = 75$.

Exemplo 6.3.2 Encontre o $M.M.C.$ de 25 e 42.

Podemos realizar a seguinte fatoração:

$$\begin{array}{rr|l} 25, & 42 & 2 \\ 25, & 21 & 3 \\ 25, & 7 & 5 \\ 5, & 7 & 5 \\ 1, & 7 & 7 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

O produto dos fatores obtidos é $2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7 = 1.050$. Portanto, $M.M.C.(25,42) = 1.050$.

Obs. Na fatoração de dois ou mais números simultaneamente, teremos que quando um número não for divisível pelo menor fator primo que divide o outro, basta repeti-lo, como foi feito com o 25 no exemplo anterior.

Exemplo 6.3.3 Encontre o $M.M.C.$ de 21 e 84.

Podemos realizar a seguinte fatoração:

$$\begin{array}{rr|l} 21, & 84 & 2 \\ 21, & 42 & 2 \\ 21, & 21 & 3 \\ 7, & 7 & 7 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

O produto dos fatores é $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$. Portanto, $M.M.C.(21, 84) = 84$.

Obs. Se um dos números para os quais pretende-se calcular o $M.M.C.$ for múltiplo do outro, o resultado será o próprio número, como ocorre no exemplo anterior.

Exemplo 6.3.4 Encontre o $M.M.C.$ de 23, 37 e 5.

Podemos realizar a seguinte fatoração:

$$\begin{array}{rrr|l} 23, & 37, & 5 & 5 \\ 23, & 37, & 1 & 23 \\ 1, & 37, & 1 & 37 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

O produto dos fatores é $5 \cdot 23 \cdot 37 = 4.255$. Portanto, $M.M.C.(23, 37, 5) = 4.255$.

Obs. Perceba que o $M.M.C.$ de números primos distintos será o produto entre eles. Como foi visto no exemplo anterior.

Exercício resolvido 1 (UEL 2017) Os povos indígenas têm uma forte relação com a natureza. Uma certa tribo indígena celebra o Ritual do Sol de 20 em 20 dias, o Ritual da Chuva de 66 em 66 dias e o Ritual da Terra de 30 em 30 dias.

A partir dessas informações, responda aos itens a seguir.

a) Considerando que, coincidentemente, os três rituais ocorram hoje, determine a quantidade mínima de dias para que os três rituais sejam celebrados juntos novamente.
   Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Hoje é segunda-feira. Sabendo que, daqui a 3.960 dias, os três rituais acontecerão no mesmo dia, determine em que dia da semana ocorrerá esta coincidência.
   Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

Resolução:

(a) Para descobrir a quantidade mínima de dias em que os rituais irão acontecer no mesmo dia, basta calcular o $M.M.C.$ de 20, 66 e 30.

$$\begin{array}{rrr|l} 20, & 66, & 30 & 2 \\ 10, & 33, & 15 & 2 \\ 5, & 33, & 15 & 3 \\ 5, & 11, & 5 & 5 \\ 1, & 11, & 1 & 11 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

Disso segue que $M.M.C.(20, 66, 30) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 660$. Portanto, a quantidade mínima de dias para que os três rituais sejam celebrados juntos novamente é de 660 dias.

(b) Sabendo que a semana tem 7 dias, temos que a cada 7 dias será segunda-feira novamente.

Efetuando a divisão:

$$\begin{array}{rr|l} & 3960 & 7 \\ \cline{3-3} - & 3955 & 565 \\ \cline{2-2} & 5 & \end{array}$$

Por isso, temos que daqui 3.955 dias será segunda-feira, no entanto queremos saber o dia da semana 5 dias depois. Portanto, os rituais daqui 3.960 dias irão ocorrer em um sábado.

Exercício resolvido 2 (UFMT 2008) Para uma paciente cardíaca foram receitados quatro medicamentos (M_1, M_2, M_3, M_4) para serem tomados em intervalos de tempo distintos. O medicamento M_1 deve ser ingerido a cada 8 horas; o M_2, a cada 6 horas; o M_3, a cada 12 horas; e o M_4, a cada 4 horas. Sabendo-se que às 07 : 30h do dia 12/07/2009 ela ingeriu os quatro medicamentos juntos, respeitando-se os horários de cada medicamento, quando ela os tomaria juntos novamente?

(a) 09 : 30h do dia 13/07/2009
(b) 07 : 30h do dia 13/07/2009
(c) 19 : 30h do dia 13/07/2009
(d) 05 : 30h do dia 14/07/2009
(e) 18 : 30h do dia 14/07/2009

Resolução: Primeiro vamos descobrir quantas horas levam para que a paciente tome os medicamentos juntos novamente. Para isso, basta calcular o $M.M.C.$ de 8, 6, 12 e 4.

$$\begin{array}{rrrr|l} 8, & 6, & 12 & 4 & 2 \\ 4, & 3, & 6 & 2 & 2 \\ 2, & 3, & 3 & 1 & 2 \\ 1, & 3, & 3 & 1 & 3 \\ 1, & 1, & 1 & 1 & \end{array}$$

Disso segue que $M.M.C.(8, 6, 12, 4) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$, ou seja, a paciente irá tomar os medicamentos juntos a cada 24h. Portanto, considerando que tomou os medicamentos às 07 : 30h do dia 12/07/2009, tomará novamente os quatro medicamentos às 07 : 30h do dia 13/07/2009. A alternativa correta é (b).

---

7 Máximo divisor comum

Nesta seção iremos abordar o conceito de Máximo Divisor Comum, que normalmente é representado pela sigla $M.D.C.$ (ou $m.d.c.$), mas primeiro iremos retomar a definição de divisor.

7.1 Divisor

Definição 7.1 Considere x e $y \in \mathbb{Z}$. Diremos que y é divisor de x se existir um inteiro z tal que $x = y \cdot z$. Para representar essa relação podemos utilizar a notação $y|x$.

Obs. Observe que y é divisor de x se x for divisível por y.

Obs. Observe que y é divisor de x se a divisão $\frac{x}{y}$ for exata, isto é, tiver resto igual a 0.

Exemplo 7.1.1 Verifique se 2 é divisor de 44.

Como o último algarismo de 44 é 4 teremos, pelo critério de divisibilidade, que 44 é divisível por 2. Logo, 2 é divisor de 44.

Outra maneira de verificar esse resultado é efetuando a divisão $\frac{44}{2} = 22$. Assim, percebemos que $44 = 2 \cdot 22$, e segundo a definição de divisor podemos concluir que 2 é divisor de 44.

Exemplo 7.1.2 Verifique se 9 é divisor de 843.

Observe que a soma dos algarismos de 843 é 15, o que não é divisível por 9, logo, pelo critério de divisibilidade, 843 não é divisível por 9 e, consequentemente, 9 não é divisor de 843.

Outra maneira de verificar se 9 é divisor de 843 é realizando a seguinte divisão:

$$\begin{array}{rr|l} & 843 & 9 \\ \cline{3-3} - & 837 & 93 \\ \cline{2-2} & 6 & \end{array}$$

Dessa forma, percebemos que a divisão não é exata, pois possui resto igual a 6. Disso segue que 9 não é divisor de 843.

7.2 Conjunto dos divisores

Para determinar o conjunto dos divisores positivos de um número natural iremos realizar as seguintes etapas:

1. Realizar a decomposição em fatores primos.
2. Acrescentar um espaço destinado ao registro dos divisores ao lado direito da fatoração.
3. Registrar o 1 como divisor, pois ele é divisor de todos os números.
4. Realizar as multiplicações entre cada um dos fatores primos e os divisores obtidos anteriormente e registrar os resultados no espaço destinado aos divisores ao lado do fator multiplicado. Caso o resultado da multiplicação já esteja registrado não é necessário repeti-lo.

Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 7.2.1 Determine o conjunto dos divisores de 60.

Primeiro devemos realizar a decomposição em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Depois realizamos os seguintes procedimentos:

Acrescentamos um espaço para o registro dos divisores e registramos o 1.

$$\begin{array}{r|l|l} & & \text{Divisores} \\ 60 & 2 & 1 \\ 30 & 2 & \\ 15 & 3 & \\ 5 & 5 & \\ 1 & & \end{array}$$

Considere o primeiro fator igual a 2, multiplicando pelo divisor 1, obtemos 2, que devemos registrar como divisor.

$$\begin{array}{r|l|l} & & \text{Divisores} \\ 60 & 2 & 1,2 \\ 30 & 2 & \\ 15 & 3 & \\ 5 & 5 & \\ 1 & & \end{array}$$

Considere o segundo fator igual a 2, multiplicando pelos divisores 1 e 2, obtemos 2 e 4, registramos somente o 4 como divisor, uma vez que o 2 já consta como divisor.

$$\begin{array}{r|l|l} & & \text{Divisores} \\ 60 & 2 & 1,2 \\ 30 & 2 & 4 \\ 15 & 3 & \\ 5 & 5 & \\ 1 & & \end{array}$$

Considere o fator 3, multiplicando pelos divisores 1, 2 e 4, obtemos 3, 6 e 12, e os registramos como divisores.

$$\begin{array}{r|l|l} & & \text{Divisores} \\ 60 & 2 & 1,2 \\ 30 & 2 & 4 \\ 15 & 3 & 3,6,12 \\ 5 & 5 & \\ 1 & & \end{array}$$

Considere o fator 5, multiplicando pelos divisores 1, 2, 4, 3, 6 e 12, obtemos 5, 10, 20, 15, 30 e 60, e os registramos como divisores.

		Divisores
60	2	1,2
30	2	4
15	3	3,6,12
5	5	5,10,20,15,30,60
1		

Portanto, o conjunto dos divisores de 60 pode ser representado como

$$D(60) = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}.$$

Exemplo 7.2.2 Determine o conjunto dos divisores de 45.

Primeiro devemos realizar a decomposição em fatores primos.

45	3
15	3
5	5
1	

Depois realizamos os seguintes procedimentos:

Acrescentamos um espaço para o registro dos divisores e colocamos o 1.

		Divisores
45	3	1
15	3	
5	5	
1		

Considere o primeiro fator igual a 3, multiplicando pelo divisor 1, obtemos 3 e registramos como divisor.

		Divisores
45	3	1,3
15	3	
5	5	
1		

Considere o segundo fator igual a 3, multiplicando pelos divisores 1 e 3, obtemos 3 e 9, registramos somente o 9 como divisor, uma vez que o 3 já consta como divisor.

		Divisores
45	3	1,3
15	3	9
5	5	
1		

Considere o fator 5, multiplicando pelos divisores 1, 3 e 9, obtemos 5, 15 e 45 e os registramos como divisores.

		Divisores
45	3	1,3
15	3	9
5	5	5,15,45
1		

Portanto, o conjunto dos divisores de 45 é dado por $D(45) = \{1,3,5,9,15,45\}$.

7.3 Máximo divisor comum

Nos exemplos anteriores obtemos que os divisores de 60 e 45 são dados por:

$$D(60) = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}.$$

$$D(45) = \{1,3,5,9,15,45\}.$$

Podemos observar que 1, 3, 5 e 15 são divisores comuns de 60 e 45, sendo o maior deles o 15, assim, diremos que 15 é o Máximo Divisor Comum de 60 e 45. A seguir, veja a definição desse conceito:

Definição 7.2 Considere x, y e $z \in \mathbb{Z}$. Teremos que x é Máximo Divisor Comum de y e z se for o maior divisor positivo que estes números possuem em comum. Denotaremos por $M.D.C.(y,z) = x$.

Para obter o $M.D.C.$ de dois ou mais números, não é preciso encontrar o conjunto de todos os divisores, uma maneira mais prática é realizar a fatoração de ambos separadamente, o $M.D.C.$ será dado pelo produto dos fatores comuns a estes números.

Exemplo 7.3.1 Encontre o $M.D.C.$ de 60 e 45.

Realizando as fatorações:

60	2	45	3
30	2	15	3
15	3	5	5
5	5	1	
1			

Perceba que 60 e 45 possuem os fatores 3 e 5 em comum, assim,

$$M.D.C.(60,45) = 15.$$

Exemplo 7.3.2 Encontre o $M.D.C.$ de 135, 40, 75.

Realizando as fatorações:

135	3	40	2	75	3
45	3	20	2	25	5
15	3	10	2	5	5
5	5	5	5	1	
1		1			

O único fator comum a todos os números é 5. Logo, $M.D.C.(135,45,75) = 5$.

Exemplo 7.3.3 Encontre o $M.D.C.$ de 128 e 64.

Realizando as fatorações:

$$
\begin{array}{r|l}
128 & 2 \\
64 & 2 \\
32 & 2 \\
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
64 & 2 \\
32 & 2 \\
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
$$

Perceba que 128 e 64 possuem em comum 6 fatores iguais a 2, dessa forma, $M.D.C.(128,64) = 64$.

Obs. Se um dos números para os quais se pretende obter o $M.D.C.$ for divisor dos demais, então este será o $M.D.C.$, como pode ser visto no exemplo anterior.

Exemplo 7.3.4 Encontre o $M.D.C.$ de 325 e 94.

Realizando as fatorações:

$$
\begin{array}{r|l}
325 & 5 \\
65 & 5 \\
13 & 13 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
94 & 2 \\
47 & 47 \\
1 &
\end{array}
$$

Observe que as fatorações de 325 e 94 não possuem fatores comuns, quando isso ocorre teremos que o $M.D.C.$ é 1.

Exercício resolvido 1 (ENEM 2015) Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540cm, 30 de 810cm e 10 de 1.080cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2m.

Atendendo ao pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

(a) 105 peças.
(b) 120 peças.
(c) 210 peças.
(d) 243 peças.
(e) 420 peças.

Resolução: Queremos descobrir quantas peças o carpinteiro irá produzir. Para isso, é necessário calcular o tamanho dos pedaços que serão cortados. Observe que este tamanho deve ser o Máximo Divisor Comum de 540, 810 e 1.080. Assim, podemos realizar as seguintes fatorações:

$$
\begin{array}{r|l}
1080 & 2 \\
540 & 2 \\
270 & 2 \\
135 & 3 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
540 & 2 \\
270 & 2 \\
135 & 3 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
810 & 2 \\
405 & 3 \\
135 & 3 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

Obtemos $M.D.C.(1080,540,810) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 270$. Isso significa que as tábuas serão cortadas em pedaços de 270cm, de modo que uma tábua de 1.080cm será dividida em 4 peças, uma tábua de 540cm será dividida em 2 peças e uma tábua de 810cm será dividida em 3 peças. Além disso, o enunciado nos diz que temos 40 tábuas de 540cm, 30 de 810cm e 10 de 1.080cm. Disso segue que o total de peças que o carpinteiro irá produzir é dado por:

$$40 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 210.$$

A alternativa correta é (c).

Exercício resolvido 2 (PUC 2015) Um estagiário recebeu a tarefa de organizar documentos em três arquivos. No primeiro arquivo, havia apenas 42 contratos de locação; no segundo arquivo, apenas 30 contratos de compra e venda; no terceiro arquivo, apenas 18 laudos de avaliação de imóveis. Ele foi orientado a colocar os documentos em pastas, de modo que todas as pastas devem conter a mesma quantidade de documentos. Além de não poder mudar algum documento do seu arquivo original, deveria colocar na menor quantidade possível de pastas. O número mínimo de pastas que ele pode usar é:

(a) 13.
(b) 15.
(c) 26.
(d) 28.
(e) 30.

Resolução: Dadas as condições do problema, os arquivos devem ser divididos em pastas, de modo que todas tenham a mesma quantidade de documentos. Temos que para ter o mínimo de pastas, estas devem conter o máximo de documentos. Para descobrir quantos documentos teremos em cada pasta temos que calcular o Máximo Divisor Comum de 42, 30 e 18. Podemos realizar as seguintes fatorações:

$$
\begin{array}{r|l}
42 & 2 \\
21 & 3 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
18 & 2 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
$$

Obtemos $M.D.C.(42,18,30) = 2 \cdot 3 = 6$. Isso significa que cada pasta terá 6 documentos. Dividindo o total de documentos por 6:

$$\frac{42+30+18}{6} = \frac{90}{6} = 15.$$

Podemos concluir que o estagiário utilizará 15 pastas. Portanto, a alternativa correta é (b).

8 Conjunto dos números complexos

O conjunto dos números reais é fechado para a subtração e a divisão, porém ainda existem operações para as quais eles não são suficientes. Por exemplo, se $x \in \mathbb{R}$ é negativo, não existe um número real que seja igual a $\sqrt{x}$. Para resolver esse problema surgem os complexos.

O conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, é um conjunto que engloba o conjunto dos números reais e o conjunto dos números imaginários, que foram criados da necessidade de resolver problemas que envolvessem raízes quadradas de números negativos.

8.1 Unidade imaginária

A unidade imaginária, representada pela letra i, trata-se de um número que pertence ao conjunto dos complexos, tal que $i = \sqrt{-1}$ e $i^2 = -1$.

Exemplo 8.1.1 Um exemplo de aplicação desta unidade imaginária é a resolução de equações como $x = \sqrt{-25}$ e $x = \sqrt{-81}$ que não tem solução no conjunto dos números reais, mas no conjunto dos complexos podem ser resolvidas utilizando algumas propriedades de radiciação e a unidade imaginária:

- $x = \sqrt{-25} = \sqrt{25\cdot(-1)} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{-1} = 5i$;
- $x = \sqrt{-81} = \sqrt{81\cdot(-1)} = \sqrt{81}\cdot\sqrt{-1} = 9i$.

Exemplo 8.1.2 A unidade imaginária pode ser usada para resolver equações de segundo grau, utilizando a fórmula de Bhaskara, em casos que o $\Delta < 0$. Por exemplo, a equação $4x^2 + 4x + 2 = 0$. Calculando Δ:

$$\Delta = 4^2 - 4\cdot 4\cdot 2 = -16.$$

Para calcular os possíveis valores de x, vamos utilizar a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{8}.$$

Devido a unidade imaginária, teremos que $\sqrt{-16} = 4i$. Portanto, as possíveis soluções serão $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i$ e $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i$.

8.2 Forma algébrica

Considere $z \in \mathbb{C}$. Teremos que z pode ser representado da seguinte forma algébrica:

$$z = a + bi,$$

na qual a e $b \in \mathbb{R}$ e i é uma unidade imaginária. De modo que a será chamado de parte real, denotada por $Re(z)$, e b será a parte imaginária denotada por $Im(z)$.

Exemplo 8.2.1 Observe a forma algébrica, a parte real $Re(z)$ e a parte imaginária $Im(z)$ dos seguintes valores atribuídos z:

- Considere $z = 8 + 15i$, teremos que $Re(z) = 8$ e $Im(z) = 15$.
- Considere $z = 5i$, podemos reescrever este número como $z = 0 + 5i$ de modo que $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 5$.
- Considere $z = 904$, podemos reescrever este número como $z = 904 + 0i$, de modo que $Re(z) = 904$ e $Im(z) = 0$.

Classificação

Para todo número complexo da forma $z = a + bi$, podemos atribuir algumas nomenclaturas de acordo com os valores atribuídos a a e b.

- **Número real**: Todo número complexo tal que $b = 0$ será um número real.

Exemplo 8.2.2 Alguns exemplos de números reais:

- $z = 45,3$;
- $z = 25 + 0i$.

- **Número imaginário**: Todo número complexo tal que $b \neq 0$ será um número imaginário.

Exemplo 8.2.3 Alguns exemplos de números imaginários:

- $z = 83 + 42i$;
- $z = 1 - 8i$.

- **Número imaginário puro**: Todo número complexo tal que $b \neq 0$ e $a = 0$ será um número imaginário puro.

Exemplo 8.2.4 Alguns exemplos de números imaginários puros:

- $z = 79i$;
- $z = 0 - 6i$.

Igualdade de números complexos

Considere dois números complexos dados por $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, diremos que são iguais, isto é, $a + bi = c + di$, se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Exemplo 8.2.5 Vamos encontrar os valores de x e y para que ocorra a igualdade $5 + 2yi = (2 - x) - 8i$.

Devemos ter a igualdade entre as partes reais e imaginárias, isto é, $5 = 2 - x$ e $2y = 8$. Disso segue que $x = -3$ e $y = 4$.

Conjugado

O conjugado de um número complexo da forma $z = a + bi$ será denotado por $\overline{z}$ e terá forma algébrica $\overline{z} = a - bi$.

Exemplo 8.2.6 Veja a seguir alguns exemplos:

- O conjugado de $z = 25$ é $\overline{z} = 25$.
- O conjugado de $z = 83 + 42i$ é $\overline{z} = 83 - 42i$.
- O conjugado de $z = 1 - 8i$ é $\overline{z} = 1 + 8i$.

Obs. Não confunda o conjugado com o oposto. O conjugado de $z = a + bi$ é $\overline{z} = a - bi$, já o oposto é dado por $-z$, ou seja, $-z = -a - bi$.

8.3 Potências de i

Seja $n \in \mathbb{N}$, nesta seção iremos analisar as potências da forma i^n . Observe que:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 & \qquad i^4 &= 1 \\ i^1 &= i & i^5 &= i \\ i^2 &= -1 & i^6 &= -1 \\ i^3 &= -i & i^7 &= -i. \end{aligned}$$

Se continuarmos calculando estas potências iremos perceber que existe uma regularidade na qual:

$$1 = i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = \cdots = i^{4m}$$

$$i = i^1 = i^5 = i^9 = i^{13} = \cdots = i^{4m+1}$$

$$-1 = i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = \cdots = i^{4m+2}$$

$$-i = i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = \cdots = i^{4m+3}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Exemplo 8.3.1 Vamos calcular as potências i^{57} e $(-i)^{88}$.

Dividindo 57 por 4 obtemos $57 = 4 \cdot 14 + 1$, pelo padrão das potências de i temos que $i^{57} = i^{4 \cdot 14 + 1} = i^1 = i$.

Para calcular $(-i)^{88}$ vamos utilizar as propriedades de potência:

$$(-i)^k = (-1 \cdot i)^k = (-1)^k \cdot i^k.$$

Como 88 é par, então $(-1)^{88} = 1$, e como $88 = 4 \cdot 22$, então $i^{88} = i^0 = 1$, logo $(-i)^{88} = (-1)^{88} \cdot i^{88} = 1 \cdot 1 = 1$.

8.4 Operações entre números complexos

Considere dois números complexos dados por $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

Adição

A adição será feita somando as partes reais entre si e as partes imaginárias entre si da seguinte forma:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Multiplicação

A multiplicação será realizada por meio da aplicação da propriedade distributiva, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + cbi + bdi^2 \\ &= ac - bd + adi + cbi \\ &= (ac - bd) + (ad + cb)i. \end{aligned}$$

Divisão

Suponhamos que $z_1 \neq 0$. Teremos que a divisão será dada pela multiplicação do numerador e denominador pelo conjugado do denominador, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{c + di}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} \\ &= \frac{ca - cbi + adi - dbi^2}{a^2 - abi + abi - bi^2} \\ &= \frac{(ca + bd) + (ad - bc)i}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \cdot i. \end{aligned}$$

Exemplo 8.4.1 Sejam $z_1 = 2 - i$ e $z_2 = 1 + 3i$. Vamos calcular $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ e $\frac{z_2}{z_1}$:

A soma das partes reais é $2 + 1 = 3$, já das partes imaginárias é $-1 + 3 = 2$, logo $z_1 + z_2 = 3 + 2i$.

Utilizando a fórmula da multiplicação obtemos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 - i)(1 + 3i) \\ &= (2 \cdot 1 - (-1)3) + (2 \cdot 3 + 1(-1))i \\ &= 5 + 5i. \end{aligned}$$

Por último, o quociente também pode ser calculado pela fórmula:

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{1 + 3i}{2 - i} \\ &= \frac{2 \cdot 1 + (-1)3}{2^2 + (-1)^2} + \frac{2 \cdot 3 - 1(-1)}{2^2 + (-1)^2} i \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{7}{5} i. \end{aligned}$$

Exercício resolvido 1 (UNICENTRO 2018) Pense em um número complexo no formato $a + bi$, onde "a" e "b" são números reais e $i = \sqrt{-1}$. Multiplique por ele mesmo, subtraia o quádruplo desse mesmo número, obtendo resultado -5. Indique qual é esse número dentre as alternativas abaixo.

(a) $2 - i$
(b) $3 - 2i$
(c) $5 - i$
(d) $\frac{2}{3} + i$
(e) $\frac{1}{3} - 2i$

Resolução: Primeiramente, iremos realizar as operações descritas no enunciado do problema:

$$(a+bi)^2-4\cdot(a+bi)=-5$$

$$a^2+2abi-b^2-4a-4bi=-5$$

$$(a^2-b^2-4a)+(2ab-4b)i=-5.$$

Observe que $-5=-5+0i$. Pela igualdade de números complexos teremos que

$$a^2-b^2-4a=-5 \text{ e } 2ab-4b=0.$$

Disso segue que:

$$2ab=4b$$

$$a=2.$$

Substituindo $a=2$ em $a^2-b^2-4a=-5$, teremos:

$$-b^2-4=-5$$

$$b^2=1$$

$$b=\pm1.$$

Logo, a alternativa correta é (a).

Exercício resolvido 2 (FAG 2013) Os números complexos z e w, escritos na forma $z=x+yi$ e $w=u+vi$ em que $x\neq0$ e $u\neq0$, são tais que $z\cdot w=1$. A soma dos quadrados u^2+v^2 é igual a:

(a) $\dfrac{1}{x}$
(b) $\dfrac{1}{u^2}$
(c) $\dfrac{1}{(x\cdot u)}$
(d) $\dfrac{u}{x}$
(e) $\dfrac{3}{u}$

Resolução: Realizando a multiplicação $z\cdot w$, teremos:

$$z\cdot w=(xu-yv)+(uy+xv)i.$$

Segundo o enunciado $z\cdot w=1$. Disso segue que $(xu-yv)=1$ e $(uy+xv)=0$, assim teremos:

$$(uy+xv)=0$$

$$uy=-xv$$

$$y=\frac{-xv}{u}.$$

Substituindo $y=\dfrac{-xv}{u}$ em $(xu-yv)=1$ teremos:

$$xu+\frac{xv^2}{u}=1$$

$$xu^2+xv^2=u$$

$$x\cdot(u^2+v^2)=u$$

$$u^2+v^2=\frac{u}{x}.$$

Portanto, a alternativa correta é (d).

Exercício resolvido 3 (UNICAMP 2013) Chamamos de unidade imaginária e denotamos por i o número complexo tal que $i^2=-1$. Então $i^0+i^1+i^2+i^3+\cdots+i^{2013}$ vale:

(a) 0.
(b) 1.
(c) i.
(d) $1+i$.

Resolução: Note que a soma dos quatro primeiros termos será:

$$i^0+i^1+i^2+i^3=1+i-1-i=0.$$

Além disso, devido à periodicidade das potências de i, a soma dos próximos quatro termos também será zero e assim por diante. Dado que existem 2014 termos e $2014=4\cdot503+2$, então podemos separar a soma em 503 grupos de quatro termos cuja soma dará zero, restando os termos i^{2012} e i^{2013}.

Como 2012 é um múltiplo de 4, então $i^{2012}=i^0=1$ e $i^{2013}=i^1=i$. Portanto, o resultado da soma é $1+i$, alternativa (d).

---

9 Exercícios propostos

Exercício 2.1 (UEL 2011) Num dado momento, três canais de TV tinham, em sua programação, novelas em seus horários nobres: a novela A no canal A, a novela B no canal B e a novela C no canal C. Numa pesquisa com 3000 pessoas, perguntou-se quais novelas agradavam. A tabela a seguir indica o número de telespectadores que designaram as novelas como agradáveis.

Novelas	Número de telespectadores
A	1450
B	1150
C	900
A e B	350
A e C	400
B e C	300
A, B e C	100

Quantos telespectadores entrevistados não acham agradável nenhuma das três novelas?

(a) 300 telespectadores.
(b) 370 telespectadores.
(c) 450 telespectadores.
(d) 470 telespectadores.
(e) 500 telespectadores

Exercício 2.2 (ITA 2004) Considere as seguintes afirmações sobre o seguinte conjunto $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$:

I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$.
II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$.
III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.
IV. $\{1,2,5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

(a) apenas I e III.
(b) apenas II e IV.
(c) apenas II e III.
(d) apenas IV.
(e) todas as afirmações.

Exercício 2.3 (FAI 2019) Determinar o conjunto X tal que:

I. $\{a,b,c,d\} \cup X = \{a,b,c,d,e\}$.
II. $\{c,d\} \cup X = \{a,c,d,e\}$.
III. $\{b,c,d\} \cap X = \{c\}$.

(a) $\{a,b\}$
(b) $\{a,c,e\}$
(c) $\{b,d,e\}$
(d) $\{c,d,e\}$
(e) $\{a,b,c,d\}$

Exercício 2.4 (ENEM 2013) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre conhecimento desses alunos em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nesta pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qual quer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{5}{8}$
(c) $\frac{1}{4}$
(d) $\frac{5}{6}$
(e) $\frac{5}{14}$

Exercício 2.5 (UFSJ 2013) Dados três conjuntos A, B e C, não vazios, com $A \subset B$ e $A \subset C$, então, é sempre correto afirmar que

(a) $B = C$
(b) $A \subset (B \cap C)$
(c) $B \subset C$
(d) $A = (B \cap C)$

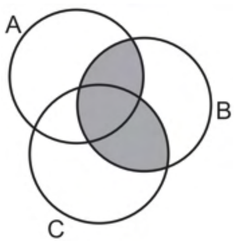
Exercício 2.6 (UERJ 2015) Em uma escola circulam dois jornais: Correio do Grêmio e O Estudante. Em relação à leitura desses jornais, por parte dos 840 alunos da escola, sabe-se que:

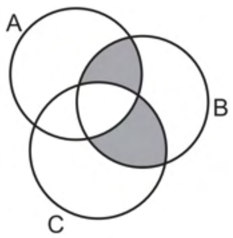
- 10% não leem esses jornais;
- 520 leem o jornal O Estudante;
- 440 leem o jornal Correio do Grêmio.

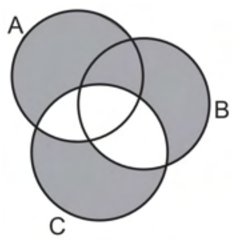
Calcule o número total de alunos do colégio que leem os dois jornais.

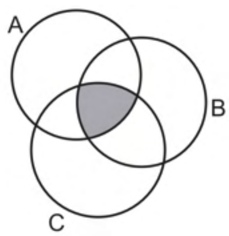
(a) 201
(b) 202
(c) 203
(d) 204
(e) 205

Exercício 2.7 (UFSJ 2012) O diagrama que representa o conjunto $[(A \cap B) - C] \cup [(C \cap B) - A]$ é

(a)


(b)


(c)


(d)


Exercício 2.8 (PUC Camp 2000) Considere os conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{R}$. O número que expressa:

(a) A quantidade de habitantes de uma cidade é um elemento de $\mathbb{Q}_+$ mas não de $\mathbb{N}$.
(b) A medida da altura de uma pessoa é um elemento de $\mathbb{N}$.
(c) A velocidade média de um veículo é um elemento de $\mathbb{Q}$ mas não de $\mathbb{Q}_+$.
(d) O valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento de $\mathbb{Q}_+$.
(e) A medida do lado de um triângulo é um elemento de $\mathbb{Q}$.

Exercício 2.9 (UFSM 2003) Assinale verdadeira (V) ou falsa (F) em cada uma das alternativas a seguir:

( ) A letra grega π representa o número racional que vale $3,14159265$.

( ) O conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais são subconjuntos dos números reais e possuem apenas um ponto em comum.

( ) Toda dízima periódica provém da divisão de dois números inteiros, portanto é um número racional.

A sequência correta é:

(a) F-V-V.
(b) V-V-F.
(c) V-F-V.
(d) F-F-V.
(e) F-V-F.

Exercício 2.10 (FUVEST 1995) Dividir um número por $0,0125$ equivale a multiplicá-lo por:

(a) $\frac{1}{125}$
(b) $\frac{1}{8}$
(c) 8
(d) $12,5$
(e) 80

Exercício 2.11 (UFG 2015) Represente por a e b as dízimas periódicas $0,333\ldots$ e $0,777\ldots$, respectivamente. O valor de $a+b$ é:

(a) $\frac{1}{9}$
(b) $\frac{3}{9}$
(c) 1
(d) $\frac{10}{9}$
(e) $\frac{13}{9}$

Exercício 2.12 (FGV SP) Sejam $A =]-\infty, 1]$, $B =]0,2[$ e $C = [-1,1]$. O intervalo $C \cup (A \cap B)$ é:

(a) $]-1,1]$
(b) $[-1,1]$
(c) $[0,1]$
(d) $]0,1]$

Exercício 2.13 (CEFET MG 2008) A operação $(\triangle)$ entre os conjuntos A e B é definida por $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x \leq 10\}$, então $A \triangle B$ é igual a

(a) $\emptyset$
(b) $[0,6[\bigcup[8,10]$
(c) $[0,2[\bigcup[6,8]$
(d) $[2,6]\bigcup]8,10]$

Exercício 2.14 (UECE 2012) Se n é o menor inteiro positivo com três dígitos e múltiplo de cinco, que deixa resto 2 quando dividido por 3 e por 4, então a soma dos dígitos de n é

(a) 2.
(b) 5.
(c) 7.
(d) 10.

Exercício 2.15 (UECE 2019) Assinale a opção que corresponde à quantidade de números inteiros positivos que são fatores do número 30.030.

(a) 32.
(b) 34.
(c) 64.
(d) 66.

Exercício 2.16 (UFGD 2016) De quatro em quatro dias Caio tem um dia de folga e de seis em seis dias Davi tem um dia de folga. Se hoje ambos folgaram, daqui quantos dias ambos folgarão novamente?

(a) Seis
(b) Dezoito
(c) Oito
(d) Vinte e quatro
(e) Doze

Exercício 2.17 (UEL 2010) Três ciclistas percorrem um circuito saindo todos ao mesmo tempo, do mesmo ponto, e com o mesmo sentido. O primeiro faz o percurso em 40s, o segundo em 36s e o terceiro em 30s. Com base nessas informações, depois de quanto tempo os três ciclistas se reencontrarão novamente no ponto de partida, pela primeira vez, e quantas voltas terá dado o primeiro, o segundo e o terceiro ciclistas, respectivamente?

(a) 5 minutos, 10 voltas, 11 voltas e 13 voltas.
(b) 6 minutos, 9 voltas, 10 voltas e 12 voltas.
(c) 7 minutos, 10 voltas, 11 voltas e 12 voltas.
(d) 8 minutos, 8 voltas, 9 voltas e 10 voltas.
(e) 9 minutos, 9 voltas, 11 voltas e 12 voltas.

Exercício 2.18 (PUCRJ 2018) Amália, Dandara e Leila são irmãs e têm o costume de visitar a avó no mesmo horário, obedecendo à mesma rotina. Amália visita a avó a cada 8 dias; Dandara, a cada 12 dias; e Leila, a cada 16 dias. As três irmãs visitam a avó juntas quarta-feira, dia

1º de junho. Amália volta quinta-feira, dia 9 de junho. Dandara volta segunda- feira, dia 13 de junho. Na sexta-feira, dia 17 de junho, Amália e Leila visitam a avó. Em que dia da semana ocorre a próxima visita das três irmãs juntas?

(a) domingo
(b) segunda-feira
(c) terça-feira
(d) quarta-feira
(e) quinta-feira

Exercício 2.19 (UNICAMP 2019) Dois ônibus de diferentes linhas chegaram a um ponto no mesmo horário. Os ônibus da primeira linha passam nesse ponto a cada 20 minutos, se não acontecerem atrasos durante o trajeto. Já os ônibus da segunda linha passam neste mesmo ponto a cada 45 minutos, também se não houver atrasos. Depois de se encontrarem nesse ponto, esses ônibus se encontrarão de novo nesse mesmo local após

(a) $\frac{1}{2}$ hora.
(b) 1 hora.
(c) 2 horas.
(d) 3 horas.

Exercício 2.20 (FUVEST 2016) Sejam a e b dois números inteiros positivos. Diz-se que a e b são equivalentes se a soma dos divisores positivos de a coincide com a soma dos divisores positivos de b. Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

(a) 8 e 9.
(b) 9 e 11.
(c) 10 e 12.
(d) 15 e 20.
(e) 16 e 25.

Exercício 2.21 (UNIMONTES 2019) Se x é o mínimo múltiplo comum de 60 e 80 e y é o máximo divisor comum de 48 e 56, então $x - y$ é igual a

(a) 230.
(b) 232.
(c) 234.
(d) 236.

Exercício 2.22 (ENEM 2015) O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

1. cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
2. todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
3. não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

(a) 2.
(b) 4.
(c) 9.
(d) 40.
(e) 80.

Exercício 2.23 (UEL) Leia o texto a seguir.

Na virada do século XVIII para o século XIX, um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os números complexos não têm nada de “irreal”. São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual). Mas essas iniciativas não tiveram repercussão enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultaneamente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era reconhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.
(Adaptado de: CARNEIRO, J. P. A Geometria e o Ensino dos Números Complexos. Revista do Professor de Matemática. 2004. v.55. p.18.)

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, uma composição de rotação dos pontos $P = (-3, 4)$ e $Q = (2, -3)$ representados pelos números complexos $z = -3 + 4i$ e $w = 2 - 3i$.

(a) $-18 + 17i$
(b) $-6 - 12i$
(c) $-1 + i$
(d) $5 + 7i$
(e) $6 + 17i$

Exercício 2.24 (UEL 2009) Qual é a parte real do número complexo $z = a + bi$, com a e b reais e $a > 0$ e $b > 0$ cujo quadrado é $-5 + 12i$?

(a) $\frac{1}{3}$
(b) $\frac{1}{2}$
(c) 1
(d) 2
(e) 3

Exercício 2.25 (UEL 2008) O número complexo z que verifica a equação $iz - 2w + (1 + i) = 0$ (w indica o conjugado de z) é:

(a) $z = 1 + i$

(b) $z = \frac{1}{3} - 1$

(c) $z = \frac{(1-i)}{3}$

(d) $z = 1 + \frac{i}{3}$

(e) $z = 1 - i$

Exercício 2.26 (FAG 2018) Considere i a unidade imaginária dos números complexos. O valor da expressão $(i+1)^8$ é:

(a) $32i$.
(b) 32.
(c) 16.
(d) $16i$.
(e) 48.

Exercício 2.27 (MACKENZIE 2017) O resultado da expressão $\frac{3+2i}{1-4i}$ na forma $x+yi$ é

(a) $\frac{11}{17} + \frac{14}{17}i$.

(b) $\frac{11}{15} + \frac{14}{15}i$.

(c) $\frac{11}{17} - \frac{14}{17}i$.

(d) $\frac{11}{15} - \frac{14}{15}i$.

(e) $\frac{-5}{17} + \frac{14}{17}i$.

Exercício 2.28 (UEL 2018) Um estudante fez uma pesquisa com um grupo de universitários para obter um panorama a respeito da utilização de três redes sociais. Ao computar as informações fornecidas pelas pessoas entrevistadas, constatou que:

- 55 utilizam Snapchat, Instagram e Facebook;
- 70 utilizam Snapchat e Facebook;
- 105 utilizam Snapchat e Instagram;
- 160 utilizam Instagram e Facebook;
- 180 utilizam Snapchat;
- 225 utilizam Instagram;
- 340 utilizam Facebook;
- 85 não utilizam qualquer uma das redes sociais da pesquisa.

A partir dessas informações, quantas pessoas foram entrevistadas?

3

Funções

Funções

Uma relação matemática é uma correspondência entre dois conjuntos. Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{3,6,9\}$, se associarmos os elementos $1,2$ e 3 do conjunto A com os elementos $3,6$ e 9 respectivamente do conjunto B, então criamos uma relação onde cada elemento do conjunto A está relacionado com o seu triplo, que se encontra no conjunto B.

Veremos neste capítulo, um tipo de relação matemática muito especial e importante, conhecida como **função**.

Em nosso cotidiano, frequentemente nos deparamos com relações matemáticas, por mais imperceptíveis que pareçam, ainda sim estão presentes. Alguns exemplos de relações encontradas no dia a dia são:

a. Ao fazer uma compra em um mercado, a quantidade de produto a ser adquirida está relacionada com o respectivo preço do mesmo;

b. Se desejamos colocar pisos no chão de uma cozinha, a quantidade de pisos necessários está relacionada com a área total do chão dessa cozinha;

c. O tempo de duração de uma viagem está relacionado com a velocidade média de um automóvel;

d. O número de pacientes que um hospital pode atender está relacionado com o número de médicos disponíveis que podem atendê-los;

e. Se um vendedor de peças automotivas recebe uma quantia fixa de $R\$700,00$ e mais um bônus de $R\$10,00$ por peça vendida, existe uma relação entre o salário desse vendedor com a quantidade de peças vendidas.

Vejamos com mais detalhes o item **e**. Considerando S o salário do vendedor e p a quantidade de peças vendidas, podemos representar a quantia que o vendedor ganha em seu trabalho através da seguinte relação:

$$S = 700,00 + 10,00 \cdot p.$$

Note que a quantidade S (Salário do vendedor) depende da quantidade p (Quantidade de peças vendidas), o que podemos visualizar claramente através da seguinte tabela:

Quant. de peças vendidas (p)	Salário do vendedor (S)
0	$R\$\ 700,00$
1	$R\$\ 710,00$
2	$R\$\ 720,00$
3	$R\$\ 730,00$
4	$R\$\ 740,00$
5	$R\$\ 750,00$
$\vdots$	$\vdots$

Na tabela acima, podemos observar que as quantidades p e S são grandezas variáveis. Além disso, para todos os valores de p, temos valores associados de S. Assim como para cada valor de p, temos associado a ele, um único valor de S.

Matematicamente, podemos dizer que o salário do vendedor S é dado em **função** da quantidade de peças vendidas p, e a relação $S = 700,00 + 10,00 \cdot p$ é chamada de **fórmula matemática da função** S, ou também, **lei da associação** da função S.

A seguir, veremos a definição formal de uma função.

Definição 0.1 — Função. Sejam A e B ambos conjuntos não vazios e f uma relação de A em B. Diremos que f é uma **função** de A em B quando a cada elemento x em A está associado um único elemento y em B.

Com base na definição acima, percebemos que para definirmos uma função, são necessários um conjunto A (que futuramente chamaremos de domínio da função), um conjunto B (que futuramente chamaremos de contradomínio da função) e uma lei de associação.

A seguir estão algumas das formas que podemos usar para denotarmos a função f de A em B tal que $f(x) = y$:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{tal que} \quad f(x) = y.$$

Noção de função através de conjuntos

Veremos agora como podemos estudar a noção de função utilizando a teoria de conjuntos.

Exemplo 0.0.1 Dados os conjuntos $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{2,4,6,8,10\}$. Considere a relação de A em B expressa por $y = x+1$, onde $x \in A$ e $y \in B$.

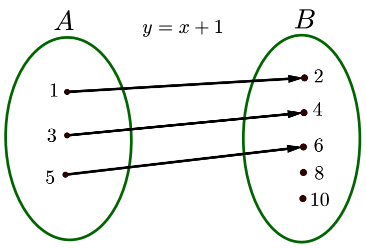


Figura 0.0.1: Relação $y = x+1$

Na figura acima, podemos observar que todo elemento de A está relacionado com algum elemento de B. Além disso, note que cada elemento de A está associado a um único elemento de B. Portanto, pela Definição 0.1, podemos dizer que a relação ilustrada na figura representa uma função de A em B.

Exemplo 0.0.2 Dados os conjuntos $A = \{-1,0,1,2\}$ e $B = \{-1,0,1,3,4\}$. Considere a relação de A em B expressa por $y = x$, onde $x \in A$ e $y \in B$.

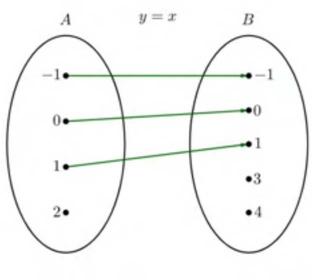


Figura 0.0.2: Relação $y = x$

Na figura acima, podemos observar que o elemento 2 do conjunto A não está associado a nenhum elemento do conjunto B. Portanto, pela Definição 0.1, podemos dizer que a relação ilustrada na figura não representa uma função de A em B.

Exemplo 0.0.3 Dados os conjuntos $A = \{9,25\}$ e $B = \{-3,3,5\}$. Considere a relação de A em B expressa por $y^2 = x$, onde $x \in A$ e $y \in B$.

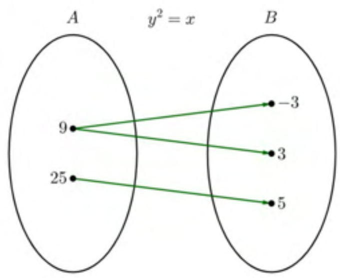


Figura 0.0.3: Relação $y^2 = x$

Na figura acima, podemos observar que o elemento 9 do conjunto A está associado a dois elementos do conjunto B, sendo eles o -3 e o 3. Portanto, pela Definição 0.1, podemos dizer que a relação ilustrada na figura não representa uma função de A em B.

1 Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Sejam os conjuntos $A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Considerando uma função $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(x) = 2x+1$, podemos representar f utilizando os conjuntos A e B da seguinte maneira:

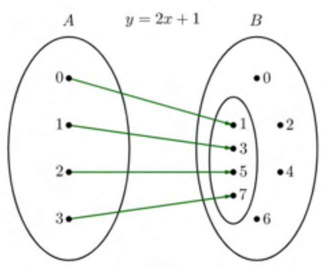


Figura 1.0.1: Representação da função $f(x) = 2x+1$ por meio dos conjuntos A e B

Na figura acima, cada um dos três conjuntos são extremamente importantes para o estudo de funções. Vamos falar um pouco sobre cada um deles a seguir.

- O conjunto A é chamado de **domínio** da função f e nesse livro será indicado por $Dom(f)$. No caso do exemplo acima, temos $Dom(f) = \{0,1,2,3\}$;

- O conjunto $\{1,3,5,7\}$, que está contido no conjunto B recebe o nome de **imagem** da função f e nesse livro será indicado por $Im(f)$;

- O conjunto B é chamado de **Contradomínio** da função f e nesse livro será indicado por $CDom(f)$. No caso do exemplo acima, temos $CDom(f) = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Mas vamos entender com calma o que realmente significa cada um dos conjuntos acima através das seguintes definições.

Definição 1.1 — Domínio. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função, o conjunto A é chamado de **domínio** da função f e podemos denotá-lo por $Dom(f)$.

O **domínio** de uma função é o conjunto que contém todos os elementos de partida para os quais a função está definida.

Definição 1.2 — Contradomínio. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função, o conjunto B é chamado de **contradomínio** da função f e podemos denotá-lo por $CDom(f)$. O **contradomínio** de uma função é o conjunto de todos os elementos que podem se relacionar com os elementos do domínio.

Definição 1.3 — Imagem. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função, a **imagem** da função f é um subconjunto do contradomínio B e podemos denotá-lo por $Im(f)$.

A **imagem** de uma função é o conjunto que contém todos os elementos que possuem um correspondente no domínio.

Obs. É importante ressaltar que as formas de se indicar os conjuntos domínio, contradomínio e imagem não se limitam apenas as exibidas acima que serão utilizadas neste livro. Em diversos vestibulares diferentes, é comum o uso de outras notações. A seguir, dada uma função f, estão algumas possíveis formas de representarmos esses conjuntos:

- O domínio de f pode ser representado como $D(f)$ ou D_f;

- O contradomínio de f pode ser representado como $CD(f)$ ou CD_f;

- A imagem de f pode ser representada como $Im(f)$ ou Im_f.

Exemplo 1.0.1 Do Exemplo (0.0.1), temos que $f : A \longrightarrow B$ dada por $y = x+1$ onde $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{2,4,6,8,10\}$ é uma função. Vamos determinar quem é o domínio, contradomínio e imagem desta função.

Resolução: O domínio desta função será o conjunto A, ou seja, $Dom(f) = \{1,3,5\}$, enquanto que o contradomínio é o conjunto B, ou seja, $CDom(f) = \{2,4,6,8,10\}$ e a imagem é o subconjunto do contradomínio que contém os elementos que possuem um correspondente no domínio da função, ou seja, $Im(f) = \{2,4,6\}$.

Exemplo 1.0.2 Determinar qual é o domínio da função $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$.

Resolução: Para encontrarmos o domínio desta função, basta verificarmos se a mesma possui alguma restrição, isto é, algum número que transforme a expressão em uma indeterminação e, em caso positivo, basta retirarmos este número do conjunto que será o domínio. Vejamos, neste caso a lei que determina esta função é uma fração, sendo assim, não podemos ter um denominador igual a zero, caso contrário teriamos uma indeterminação.

Logo, devemos ter $x^2 - 4 \neq 0$, isto é,

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2.$$

Portanto, o domínio da função pode ter qualquer número real com exceção dos números 2 e -2, ou seja, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2,2\}$.

Exemplo 1.0.3 Seja $f : \{1,2,3\} \longrightarrow \{k \in \mathbb{N} : 3 \leq k \leq 10\}$ tal que $f(x) = 2x+1$. Determine o contradomínio e a imagem de f.

Resolução: O contradomínio de f é por definição o conjunto de todos os elementos que podem se relacionar com os elementos do domínio, então nesse caso, $CDom(f) = \{k \in \mathbb{N} : 3 \leq k \leq 10\}$. Veja que o conjunto $\{k \in \mathbb{N} : 3 \leq k \leq 10\}$ nada mais é do que o conjunto formado por todos os números naturais k, compreendidos entre 3 e 10, ou seja, uma forma alternativa de representarmos o contradomínio seria através do conjunto $CDom(f) = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Agora, observando o domínio da função, que é o conjunto $Dom(f) = \{1,2,3\}$ e sabendo que a imagem é o conjunto que contém todos os elementos que possuem um correspondente no domínio, para encontrarmos o conjunto $Im(f)$, basta calcularmos f para cada elemento do domínio, isto é,

- Para $x = 1$, temos
$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

- Para $x = 2$, temos
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

- Para $x = 3$, temos
$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Logo, $Im(f) = \{3,5,7\}$.

2 Igualdade de funções

Definição 2.1 — Igualdade de Funções. Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : C \longrightarrow D$ duas funções. Diremos que f e g são iguais se, e somente se,

(a) O domínio de f é igual ao domínio de g, isto é, $A = C$;

(b) $f(x) = g(x)$ para todo x do domínio.

Exemplo 2.0.1 Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+1)^2$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Determine se f e g são iguais.
Resolução: Primeiramente, temos que o domínio de f e

g são iguais a $\mathbb{R}$. Além disso, veja que

$$f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = g(x),$$

sendo isso válido para todo x do domínio. Logo, como os itens (a) e (b) da Definição 2.1 foram satisfeitos, podemos dizer que as funções f e g são iguais.

3 Função injetora

Definição 3.1 — Função Injetora. Diremos que uma função f de A em B é **injetora** se, e somente se, elementos diferentes no domínio dessa função sempre possuírem imagens diferentes.

Em outras palavras, a função f será injetora se, ao considerarmos dois elementos do domínio, digamos x_1 e x_2 e tais elementos sendo diferentes, isso ocasionar que $f(x_1)$ é diferente de $f(x_2)$.

Em símbolos, podemos dizer que uma função $f : A \longrightarrow B$ é injetora se, e somente se,

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Exemplo 3.0.1 Mostre que a função $f : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \{1,3,5,7\}$ dada por $f(x) = 2x+1$ é injetora.

Resolução: O diagrama de flechas da função f é

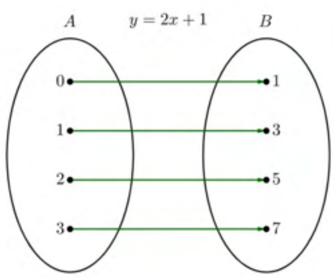


Figura 3.0.1: Função $y = 2x+1$

Note que não existem dois elementos distintos no conjunto A que possuem um mesmo correspondente em B, isso significa que dois elementos distintos em A sempre possuem imagens diferentes em B. Portanto, f é injetora.

Exemplo 3.0.2 Verifique se a função f representada pelo seguinte diagrama de flechas é injetora.

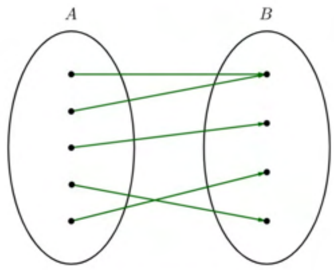


Figura 3.0.2: Representação da função f por meio do diagrama de flechas

Resolução: Note que existem dois elementos distintos no conjunto A que possuem o mesmo correspondente no conjunto B. Portanto, f não é injetora.

Exemplo 3.0.3 Verifique se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x+2$ é injetora.

Resolução: Primeiramente, note que o domínio dessa função é todo o conjunto $\mathbb{R}$, e diferentemente dos exemplos acima, a utilização do diagrama de flechas acaba não sendo um recurso favorável pela quantidade imensurável de elementos do conjunto $\mathbb{R}$. Sendo assim, vamos por uma abordagem diferente.

Sabemos que para uma função ser injetora, de acordo com a Definição 3.1, é necessário que dados dois elementos diferentes de seu domínio, as imagens desses elementos também sejam diferentes, ou seja, tomando x_1 e x_2 no domínio $\mathbb{R}$ da função e supondo que $x_1 \neq x_2$, vamos calcular suas imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$:

$$f(x_1) = x_1 + 2 \quad \text{e} \quad f(x_2) = x_2 + 2.$$

Veja que, como $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) = x_1 + 2 \neq x_2 + 2 = f(x_2)$, isto é, as imagens de x_1 e x_2 são diferentes. Portanto, f é injetora.

Exemplo 3.0.4 Verifique se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ é injetora.

Resolução: De forma análoga ao exemplo anterior, tomando x_1 e x_2 no domínio $\mathbb{R}$ da função e supondo que $x_1 \neq x_2$, vamos calcular as imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$:

$$f(x_1) = x_1^2 \quad \text{e} \quad f(x_2) = x_2^2.$$

Para que f seja injetora, independente de quem sejam x_1 e x_2, suas imagens precisam ser diferentes. No entanto, note que se tomarmos $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$, teremos $x_1 \neq x_2$ mas $f(x_1) = f(x_2)$, pois $(-2)^2 = 4 = 2^2$. Logo, f não é injetora.

4 Função sobrejetora

Definição 4.1 — Função Sobrejetora. Diremos que uma função f de A em B é **sobrejetora** se, e somente se, o contradomínio e o conjunto imagem são iguais.

Em outras palavras, se f é sobrejetora, então **todo elemento** de B possui um correspondente em A, ou seja, $Im(f) = B$.

Em símbolos, podemos dizer que uma função $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se,

$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A : f(x) = y.$$

Exemplo 4.0.1 Mostre que a função $f : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \{1,3,5,7\}$ dada por $f(x) = 2x+1$ é sobrejetora.

Resolução: O diagrama de flechas da função é

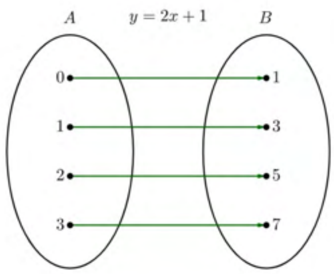


Figura 4.0.1: Função $y = 2x+1$

Note que todo elemento de B possui um correspondente em A, ou seja, o conjunto imagem é igual ao contradomínio da função. Portanto, f é sobrejetora.

Exemplo 4.0.2 Verifique se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x+2$ é sobrejetora.

Resolução: Primeiramente, note que o domínio dessa função é todo o conjunto $\mathbb{R}$, e diferentemente do exemplo acima, a utilização do diagrama de flechas acaba não sendo um recurso favorável pela quantidade imensurável de elementos do conjunto $\mathbb{R}$. Sendo assim, vamos por uma abordagem diferente.

Sabemos que para uma função ser sobrejetora, de acordo com a Definição 4.1, é necessário que para todo elemento y em seu contradomínio, exista um elemento x em seu domínio tal que a imagem de x seja igual a y. Deste modo, sabendo que $f(x) = x+2$, veja que se tomarmos qualquer elemento da forma $y = x+2$, com $x \in \mathbb{R}$, temos que $y \in \mathbb{R}$, isto é, y está no contradomínio da função f. Além disso, tomando $x = y-2$, com $y \in \mathbb{R}$, segue que $x \in \mathbb{R}$, ou seja, x está no domínio da função f e além disso, a imagem de x é dada por:

$$f(x) = f(y-2) = (y-2)+2 = y.$$

Logo, dado um elemento $y = x+2$ no contradomínio de f, existe $x = y-2$ no domínio de f tal que $f(x) = y$. Portanto, f é sobrejetora.

Exemplo 4.0.3 Verifique se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é sobrejetora.

Resolução: Para que a função f seja sobrejetora, de acordo com a Definição 4.1, devemos ter que $Im(f) = \mathbb{R}$. No entanto, veja que como todo elemento x do domínio possuí a imagem $f(x) = x^2$, que é um número positivo, não podemos dizer que a imagem da função é todo o conjunto dos números reais, uma vez que tal conjunto também possui números negativos. Logo, $Im(f) =\neq \mathbb{R}$ e consequentemente, f não é sobrejetora.

5 Função bijetora

Definição 5.1 — Função Bijetora. Diremos que uma função f de A em B é **bijetora** se, e somente se, f for injetora e sobrejetora.

Exemplo 5.0.1 Mostre que a função $f : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \{1,3,5,7\}$ dada por $f(x) = 2x+1$ é bijetora.

Resolução: Dos Exemplos 3.0.1 e 4.0.1, já vimos que f é injetora e sobrejetora. Portanto, f é bijetora.

Exemplo 5.0.2 Identifique nos diagramas de flechas a seguir, as funções que são bijetoras:

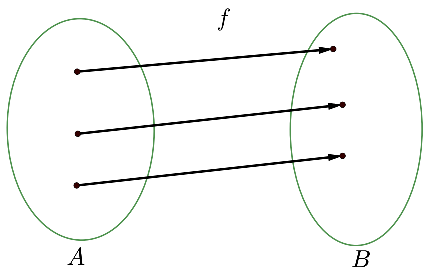


Figura 5.0.1: Função f

Na Figura 5.0.1, temos que cada elemento na imagem da função f possui somente um correspondente no domínio. Logo, f é injetora. Além disso, todo elemento do contradomínio de f possui um correspondente no domínio, ou seja, $Im(f) = B$. Sendo assim, f é sobrejetora, e consequentemente, bijetora.

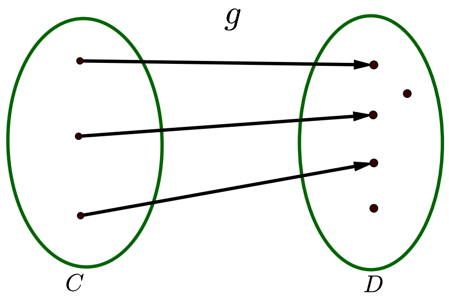


Figura 5.0.2: Função g

Na Figura 5.0.2, temos que cada elemento na imagem de g possui somente um correspondente no domínio. Logo, g é injetora. No entanto, note que existem elementos em D que não possuem correspondentes no domínio, isto é, $Im(g) \neq D$. Portanto, g não é sobrejetora, e consequentemente, não é bijetora.

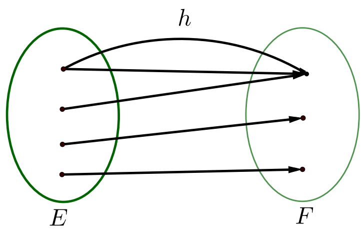


Figura 5.0.3: Relação h

Na Figura 5.0.3, veja que temos um elemento no conjunto E da relação que não possui nenhum correspondente no conjunto F. Desse modo, pela Definição 0.1, segue que h não é uma função. Portanto, h não pode ser classificada como injetora, sobrejetora e bijetora.

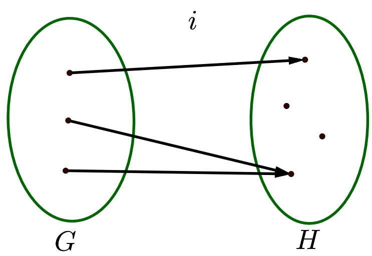


Figura 5.0.4: Função i

Na Figura 5.0.4, note que dois elementos do domínio da função possuem um mesmo correspondente na imagem. Logo, a função i não é injetora. Além disso, existem dois elementos no conjunto H que não possuem correspondentes em G, ou seja, a função i também não é sobrejetora e, consequentemente, não é bijetora. É importante ressaltar que o fato de uma função não ser injetora ou sobrejetora já é condição suficiente para que a mesma não seja bijetora. Deste modo, sabendo que a função i não é injetora, poderíamos concluir que a mesma não é bijetora. Mostramos que a função i também não é sobrejetora apenas como uma observação.

6 Par ordenado

Um **par** é um conjunto que contém dois elementos da seguinte maneira $\{a, b\}$.

Note que, da igualdade de conjuntos, sabemos que $\{a, b\} = \{b, a\}$, porém, em certas situações precisamos distinguir os pares pela ordem de seus elementos, por exemplo, no seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

temos que a solução é $x = 5$ e $y = 2$, caso fôssemos representá-la por um conjunto, teriamos $\{5, 2\}$, no entanto, como $\{5, 2\} = \{2, 5\}$, deveriamos ter como uma solução alternativa o conjunto $\{2, 5\}$, o que não é verdade, pois $x = 2$ e $y = 5$ não satisfazem o sistema de equações.

Devido a isto, dizemos que o **par ordenado** $(5, 2)$ é solução, pois dessa forma fica subentendido que o primeiro elemento corresponde a x e o segundo elemento corresponde a y.

Definição 6.1 — Pares Ordenados. Um par ordenado (a, b) é um análogo ao conjunto, mas cujo a ordem dos elementos importa, isto é, $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Em um par ordenado (a, b), o primeiro elemento, a, é chamado de **abcissa**, enquanto o segundo elemento, b, é chamado de **ordenada**.

7 Representação gráfica

O gráfico a seguir é chamado de **plano cartesiano**. Podemos representar qualquer par ordenado no gráfico, o que futuramente irá nos ajudar a compreender certos fenômenos como o comportamento de funções, por exemplo.

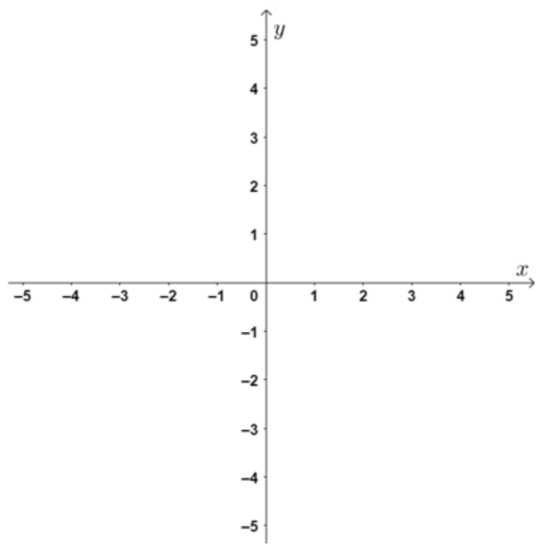


Figura 7.0.1: Plano cartesiano

No gráfico da figura 7.0.1, o eixo x é chamado de **eixo das abscissas** e o eixo y é chamado de **eixo das ordenadas**. Para representar qualquer par ordenado (a,b) no plano cartesiano, basta traçar duas retas, a primeira delas deve ser paralela ao eixo y passando pela abscissa a, enquanto a segunda reta deve ser paralela ao eixo x passando pela ordenada y. O encontro dessas duas retas será um ponto que tem coordenadas (a,b).

Exemplo 7.0.1 Representar no plano cartesiano os pontos $A=(2,1)$, $B=(0,4)$, $C=(-3,3)$, $D=(-3,-2)$ e $E=(4,-4)$.

Solução:

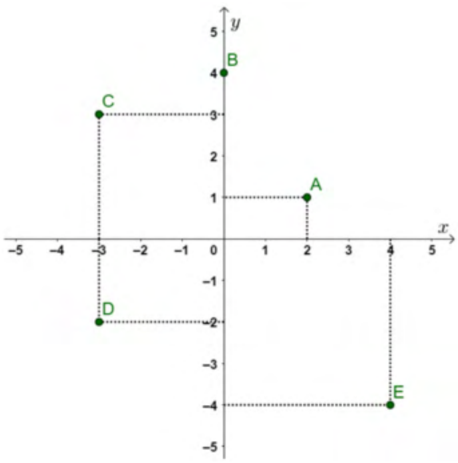


Figura 7.0.2: Representação dos pontos A,B,C,D e E no plano cartesiano

8 Identificando graficamente funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

Seja $f:A\longrightarrow B$ uma função, podemos através da representação gráfica no plano cartesiano da função f, dizer se a mesma é injetora, sobrejetora ou bijetora. O método para isso se baseia em desenhar retas paralelas ao eixo x, tais retas devem passar pelos pontos da forma $(0,y)$ onde $y\in B$ e, após desenhá-las, verificamos o número de pontos de intersecção das retas com a função. A seguir veremos como deve ser feita esta análise.

8.1 Identificando funções injetoras através de gráficos

Para que uma função seja **injetora**, cada uma das retas paralelas ao eixo x desenhadas devem interceptar o gráfico da função em **somente um ponto ou em nenhum**.

Exemplo 8.1.1 Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x$, cujo gráfico é:

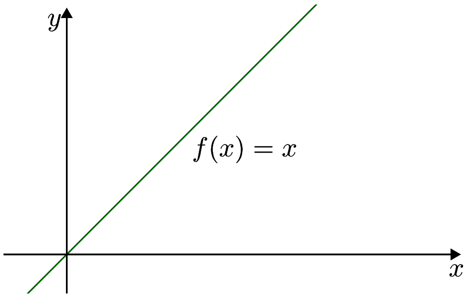


Figura 8.1.1: Gráfico da função $f(x)=x$

Para verificarmos se f é injetora, desenhamos as seguintes retas paralelas ao eixo x:

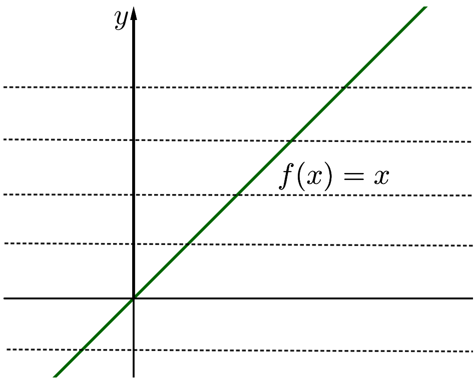


Figura 8.1.2: Análise gráfica da função $f(x)=x$

Note que, como todas as retas interceptaram a função em apenas um ponto, podemos afirmar que f é injetora.

Exemplo 8.1.2 Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2$, cujo gráfico é:

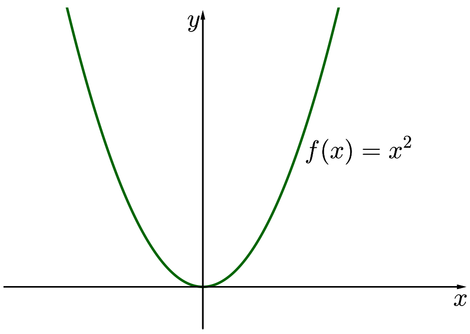


Figura 8.1.3: Gráfico da função $f(x)=x^2$

Para verificarmos se f é injetora, desenhamos as seguintes retas paralelas ao eixo x:

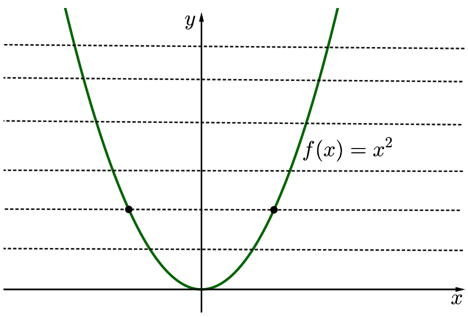


Figura 8.1.4: Análise gráfica da função $f(x)=x^2$

Note que, como existem retas paralelas ao eixo x que interceptam a função em dois pontos, podemos afirmar que f **não** é injetora.

8.2 Identificando funções sobrejetoras através de gráficos

Para que uma função seja **sobrejetora**, cada uma das retas paralelas ao eixo x desenhadas devem interceptar o gráfico da função em um ou mais pontos.

Exemplo 8.2.1 Seja $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$, cujo gráfico é:

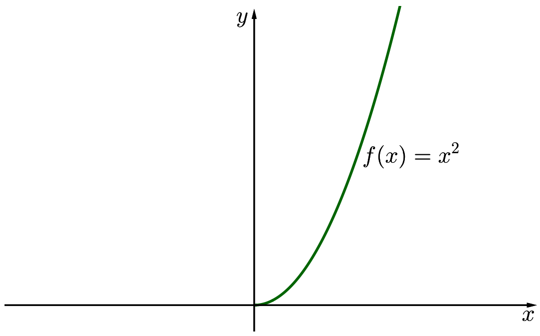


Figura 8.2.1: Gráfico da função $f(x) = x^2$ cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}_+$

Para verificarmos se f é sobrejetora, desenhamos as seguintes retas paralelas ao eixo x:

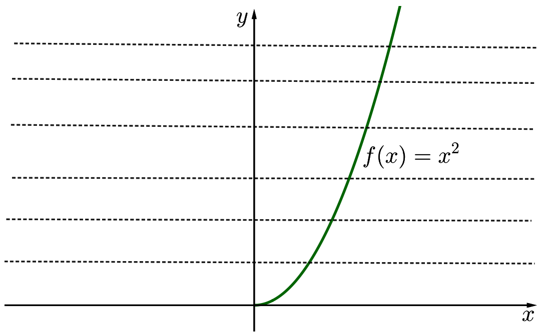


Figura 8.2.2: Análise gráfica da função $f(x) = x^2$ cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}_+$

Note que, como todas as retas interceptaram a função em pelo menos um ponto, podemos afirmar que f é sobrejetora.

Exemplo 8.2.2 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, cujo gráfico é:

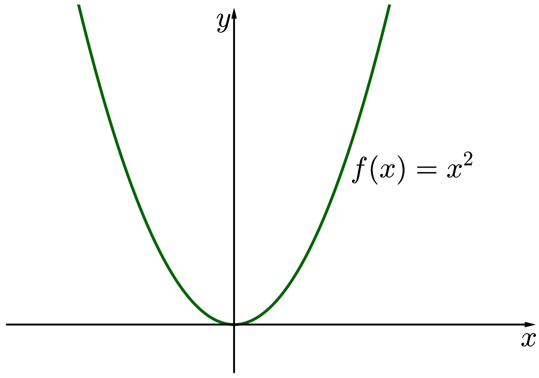


Figura 8.2.3: Gráfico da função $f(x) = x^2$ cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}$

Para verificarmos se f é sobrejetora, desenhamos as seguintes retas paralelas ao eixo x:

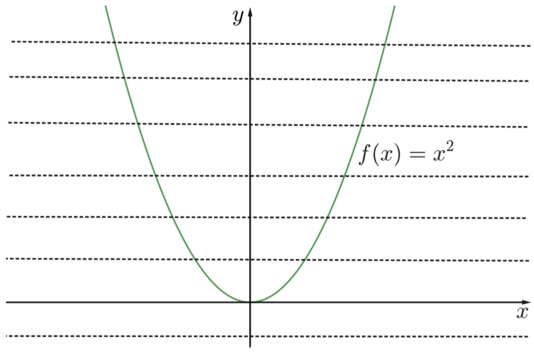


Figura 8.2.4: Análise gráfica da função $f(x) = x^2$ cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}$

Note que, no contradomínio de f temos todo o conjunto dos números reais, no entanto, pela lei de formação da função, sua imagem é apenas o conjunto dos números reais positivos, ou seja, se traçarmos mais retas paralelas ao eixo x e abaixo do mesmo, tais retas não irão interceptar o gráfico em nenhum ponto. Portanto, podemos afirmar que f **não** é sobrejetora. Vale ressaltar que caso o contradomínio de f fosse o conjunto $\mathbb{R}_+$, isto é, apenas os reais positivos como o do Exemplo (8.2.1), então a função seria sobrejetora, pois cada uma das retas paralelas ao eixo x que traçamos iriam interceptar o gráfico da função em um ou mais pontos.

8.3 Identificando funções bijetoras através de gráficos

Nos exemplos acima, vimos como podemos identificar através do gráfico de uma função, se a mesma é injetora ou sobrejetora. Agora, para analisarmos se uma função é bijetora, isso é, injetora e ao mesmo tempo sobrejetora, basta fazermos as duas análises já vistas. No entanto, podemos poupar trabalho se pensarmos um pouco a respeito. Note que em ambos os casos de funções injetoras e sobrejetoras, o gráfico das mesmas precisa que cada uma das retas paralelas ao eixo x o interceptem em um ponto. Desse modo, para que uma função que seja bijetora, cada uma das retas desenhadas no gráfico paralelas ao eixo x devem interceptar a função em exatamente **um ponto**.

Exemplo 8.3.1 Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$, cujo gráfico é:

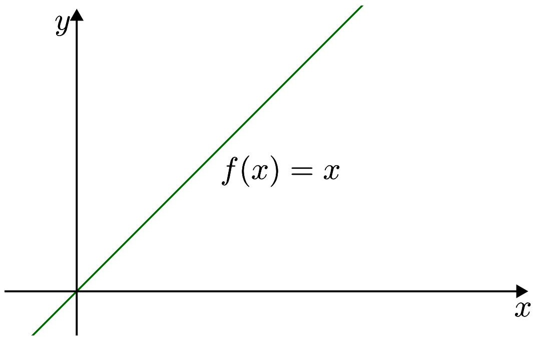


Figura 8.3.1: Gráfico da função $f(x) = x$

Para verificarmos se f é bijetora, desenhamos as seguintes retas paralelas ao eixo x:

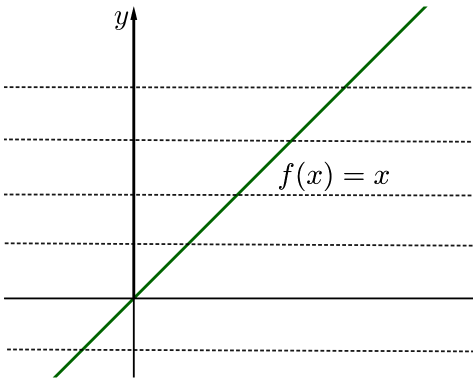


Figura 8.3.2: Análise gráfica da função $f(x) = x$

Note que, como todas as retas interceptaram a função em apenas um ponto, podemos afirmar que f é bijetora.

9 Função composta

Definição 9.1 — Função composta. Sejam as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$. Chamaremos de **função composta** de g e f, uma função $h: A \longrightarrow C$ tal que $h(x) = g(f(x))$, e nesse caso, utilizaremos a notação $h = (g \circ f)$.

Uma condição necessária para que possamos ter a função $h = (g \circ f)$ é que o contradomínio da função f necessita ser igual ao domínio da função g, caso contrário, não é possível fazer a composição das funções.

A figura a seguir esquematiza a ideia da função composta $g \circ f$.

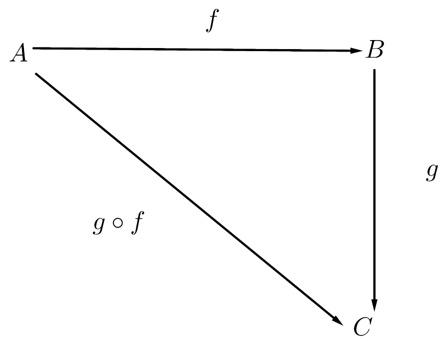


Figura 9.0.1: Esquematização da função composta

Exemplo 9.0.1 Dadas as funções $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = 3x + 10 \quad \text{e} \quad g(x) = 5x.$$

Vamos encontrar $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

Resolução: Primeiramente, veja que o contradomínio de f é igual ao domínio de g, assim como o contradomínio de g é igual ao domínio de f, sendo assim, podemos construir $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

Vamos encontrar $f(g(x))$. De fato, basta substituirmos a variável x na função f pela função $g(x) = 5x$ e teremos o seguinte:

$$f(g(x)) = f(5x) = 3(5x) + 10 = 15x + 10.$$

Logo, $f(g(x)) = 15x + 10$.

Agora, de forma análoga, vamos encontrar $g(f(x))$:

$$g(f(x)) = g(3x + 10) = 5(3x + 10) = 15x + 50.$$

Portanto, $g(f(x)) = 15x + 50$.

Exemplo 9.0.2 Dadas as funções reais $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e $g:\mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Verifique se podemos ter $g(f(x))$.

Resolução: Segundo a Definição 9.1, a condição para que a função $g(f(x))$ exista é a de que o contradomínio da função f seja igual ao domínio da função g. O que não ocorre neste caso, pois $\mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R} - \{2\}$.

Portanto, não podemos ter $g(f(x))$.

Exemplo 9.0.3 Dadas as funções reais $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $f(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$, vamos determinar $g(2)$.

Resolução: Como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, basta substituirmos a variável x por $g(x)$ na função f da seguinte maneira:

$$f(g(x)) = 2 \cdot g(x) - 3,$$

e do enunciado, temos que $f(g(x)) = x^2 - 1$. Logo,

$$2 \cdot g(x) - 3 = x^2 - 1$$
$$g(x) = \frac{x^2+2}{2}.$$

Obtemos assim a função $g(x)$, agora basta encontrarmos $g(2)$. Assim,

$$g(2) = \frac{2^2+2}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Exercício resolvido 1 (Mackenzie) As funções $f(x) = 3-4x$ e $g(x) = 3x+m$ são tais que $f(g(x)) = g(f(x))$, qualquer que seja x real. O valor de m é:

(a) $9/4$.
(b) $5/4$.
(c) $-6/5$.
(d) $9/5$.
(e) $-2/3$.

Resolução: Vejamos, do enunciado temos que $f(g(x)) = g(f(x))$, ou seja,

$$f(3x+m) = g(3-4x)$$
$$3-4(3x+m) = 3(3-4x)+m$$
$$3-12x-4m = 9-12x+m$$
$$-5m = 6$$
$$m = -\frac{6}{5}.$$

Portanto, alternativa (c).

10 Função inversa

Definição 10.1 — Função Inversa. Seja $f: A \longrightarrow B$ uma função bijetora, a relação inversa de f, isto é, $f: B \longrightarrow A$ é uma função que iremos denominar como **função inversa** de f, e indicaremos por f^{-1}.

Veja que, dessa definição, para obtermos os pares ordenados que formam f^{-1}, basta permutar os elementos de cada par ordenado de f, isto é, se a função f nos dá os pares ordenados da forma (x, y), então a função f^{-1} dá os pares ordenados da forma (y, x).

De forma análoga, podemos obter os pares ordenados que formam f a partir dos pares ordenados que formam f^{-1}.

Disso, segue que a inversa da função inversa f^{-1} é a própria função f.

A figura a seguir exemplifica o conceito de função inversa através do diagrama de flechas:

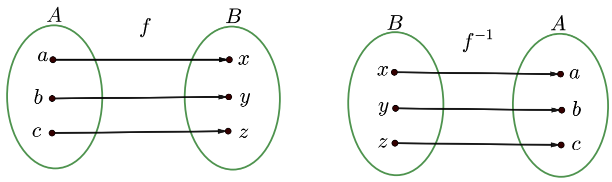


Figura 10.0.1: Conceito de função inversa

Obs. Na Definição 10.1, é importante compreender que a notação de função inversa é diferente de um expoente númerico, onde f^{-1} não indica que a nossa função deverá ser da forma $1/f$.

10.1 Determinando a função inversa

Veremos agora como podemos encontrar, dada uma função bijetora $f: A \longrightarrow B$ tal que $y = f(x)$, a sua inversa. O procedimento segue os seguintes passos:

(a) Sendo $y = f(x)$, vamos fazer uma mudança de variável, isto é, trocaremos y por x e x por y, obtendo $x = f(y)$;

(b) Agora, manipulando algebricamente a expressão $x = f(y)$, devemos obter y em função de x, para então obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 10.1.1 Dada a função bijetora $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x-1}{3}$. Encontre f^{-1}.

Resolução: Nossa função é dada por

$$y = \frac{2x-1}{3}.$$

Primeiramente, trocando y por x e x por y, obtemos

$$x = \frac{2y-1}{3}.$$

Agora, vamos manipular algebricamente a expressão obtida para encontrar y em função de x,

$$x = \frac{2y-1}{3} \Rightarrow 3x = 2y-1 \Rightarrow \frac{3x+1}{2} = y.$$

Logo, a função inversa será

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}.$$

Exemplo 10.1.2 Dada a função bijetora $g : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, definida por $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$. Encontre g^{-1}.

Resolução: Nossa função é

$$y = \frac{x+1}{x-2}.$$

Primeiramente, trocando y por x e x por y, obtemos

$$x = \frac{y+1}{y-2}.$$

Agora, vamos manipular algebricamente a expressão obtida para encontrar y em função de x,

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+1}{y-2} \\ x(y-2) &= y+1 \\ xy - 2x &= y+1 \\ xy - y &= 1+2x \\ \frac{1+2x}{x-1} &= y. \end{aligned}$$

Logo, $g^{-1}(x) = \dfrac{1+2x}{x-1}$.

Exemplo 10.1.3 Verifique se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ possui inversa.

Resolução: Do Exemplo (8.1.2), sabemos que a função f não é injetora e, consequentemente, não é bijetora. Logo, segue da Definição 10.1 que a função f não possui inversa.

Exercício resolvido 1 (FGV) Considere a função real f definida por

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+m}$$

e sua inversa f^{-1}. Se $f^{-1}(2) = 5$, o valor de m é:

(a) -3.
(b) -5.
(c) -7.
(d) -9.
(e) -11.

Resolução: Como $f^{-1}(2) = 5$, então pela definição de função inversa, podemos dizer que $f(5) = 2$. Com isso, segue que

$$\begin{aligned} f(5) = \frac{5+1}{2\cdot 5+m} = 2 \Leftrightarrow \frac{6}{10+m} &= 2 \\ &\Leftrightarrow 6 = 2\cdot(10+m) \\ &\Leftrightarrow -7 = m. \end{aligned}$$

Portanto, alternativa (c).

11 Funções crescentes e decrescentes

Definição 11.1 — Função Crescente. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \longrightarrow B$ tal que $y = f(x)$. Diremos que f é **crescente** em um subconjunto A_1 do conjunto A, quando dados $x_1, x_2 \in A_1$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

Em outras palavras, f será crescente no conjunto $A_1 \subset A$ se, ao aumentarmos o valor de x, o valor de $f(x)$ também aumenta.

Exemplo 11.0.1 Verifique que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x$ é crescente para todo $x \in Dom(f) \subset \mathbb{R}$.

Resolução: De fato, sejam os elementos x_1 e x_2 do domínio da função f e vamos supor que $x_1 < x_2$, precisamos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$. Veja que, se multiplicarmos ambos os lados da desigualdade por 5, que é um valor positivo, a desigualdade será mantida e iremos obter o seguinte:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 5x_1 < 5x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Portanto, f é crescente. Observando o gráfico de f a seguir, fica visível esse comportamento:

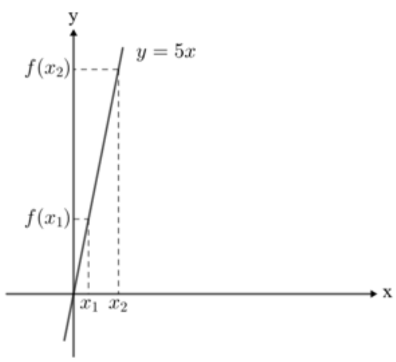


Figura 11.0.1: Gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x$

Definição 11.2 — Função Decrescente. Seja $f : A \longrightarrow B$ tal que $y = f(x)$. Diremos que f é **decrescente** em um subconjunto A_1 do conjunto A, quando dados $x_1, x_2 \in A_1$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.

Em outras palavras, f será decrescente no conjunto $A_1 \subset A$ se, ao aumentarmos o valor de x, o valor de $f(x)$ diminui.

Exemplo 11.0.2 Verifique que a função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é decrescente para todo $x \in Dom(f) \subset \mathbb{R}$.

Resolução: De fato, sejam os elementos x_1 e x_2 do domínio da função f e vamos supor que $x_1 < x_2$, precisamos mostrar que $f(x_1) > f(x_2)$. Veja que,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Portanto, f é decrescente. Observando o gráfico da função f a seguir, fica visível esse comportamento:

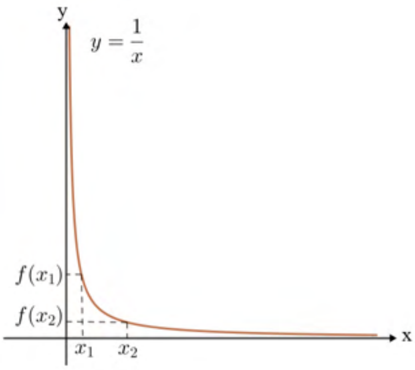


Figura 11.0.2: Gráfico da função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Obs. Uma função $y = f(x)$ pode não ser somente crescente ou somente decrescente em todo seu domínio. O seguinte exemplo mostra alguns casos onde o comportamento de f em relação ao seu crescimento varia, isto é, é crescente em certos subconjuntos do domínio e decrescente em outros.

Exemplo 11.0.3 Com base no seguinte gráfico, descreva os intervalos onde a função f é crescente ou decrescente.

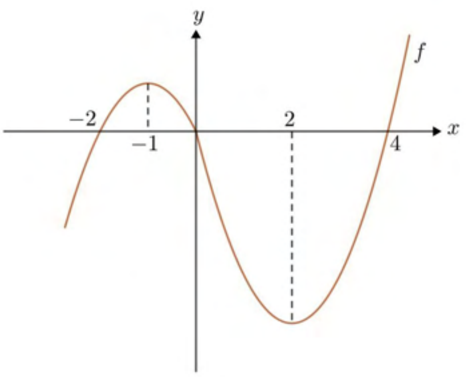


Figura 11.0.3: Gráfico da função f

No gráfico acima, perceba que nos intervalos $]-\infty, -1] \subset Dom(f)$ e $[2, \infty[\subset Dom(f)$, a função é visualmente crescente, enquanto que no intervalo $[-1, 2] \subset Dom(f)$, a mesma é visualmente decrescente.

12 Função constante

Definição 12.1 — Função Constante. Chamamos de **função constante**, uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, ela associa sempre o mesmo elemento $k \in \mathbb{R}$, isto é,

$$f(x) = k.$$

A imagem dessa função é o conjunto $Im(f) = \{k\}$ e seu gráfico é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, k)$, como na seguinte figura:

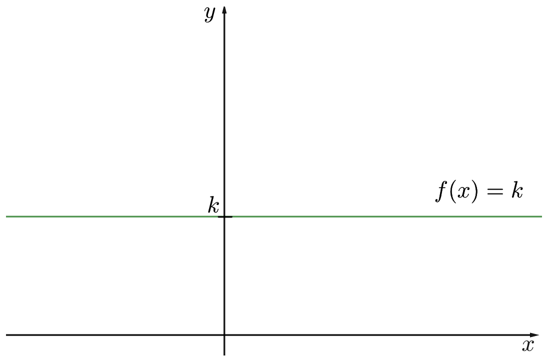


Figura 12.0.1: Gráfico da função $f(x) = k$

Exemplo 12.0.1 A seguir estão algumas funções constantes:

(a) $f(x) = 5$;

(b) $g(x) = 0$;

(c) $h(x) = \dfrac{7}{2}$.

13 Função afim

Definição 13.1 — Função afim. Chamamos de **função afim**, uma aplicação de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = ax + b$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, são chamados de coeficientes da função.

Exemplo 13.0.1 A seguir estão algumas funções afins:

(a) $f(x) = 5x + 3$, onde neste caso $a = 5$ e $b = 3$;

(b) $g(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$, onde neste caso $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = -1$;

(c) $h(x) = -0,7x + 0,4$, onde neste caso $a = -0,7$ e $b = 0,4$.

13.1 Zero da função afim

Definição 13.2 — Zero da Função Afim. O zero da função afim será todo x do domínio cuja imagem é nula, isto é, $f(x) = 0$.

Da Definição 13.1, temos que toda função afim possui a forma $f(x) = ax + b$. Para determinarmos o zero da função, basta igualar a zero e resolver a equação:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Portanto, o zero de uma função afim qualquer é da forma $x = -\frac{b}{a}$, com $a \neq 0$.

Exemplo 13.1.1 Sendo $f(x) = 2x - 5$, encontre o zero dessa função afim.

Resolução:

Primeiramente, igualamos a zero da seguinte forma:

$$2x - 5 = 0.$$

Agora, basta isolarmos x na equação. Vejamos,

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}.$$

Logo, o zero da função $f(x) = 2x - 5$ é $x = \frac{5}{2}$.

13.2 Gráfico da função afim

Teorema 13.1 — Gráfico de uma função afim. O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$, é uma reta.

Os coeficientes da função afim

Os coeficientes de uma função afim, $f(x) = ax + b$, possuem uma importância clara no estudo do comportamento da função através de seu gráfico, por este motivo, o coeficiente a é chamado de **coeficiente angular** (ou declividade da reta), enquanto que o coeficente b é chamado de **coeficiente linear**.

Ambos os nomes dos coeficientes da função afim são bem sugestivos quanto a sua importância para o comportamento da função, mas vamos de fato entender a relevância de cada um dos coeficientes a seguir.

Comportamento da função afim

Sabendo que $x = -\frac{b}{a}$ é o zero da função afim $f(x) = ax + b$, isto é, $f(-b/a) = 0$, vamos estudar para que valores de x a função assume valores positivos ($f(x) > 0$) ou negativos ($f(x) < 0$). Para isso, precisamos analisar os seguintes casos:

1° Caso: $a > 0$.

Nesse caso, para que se tenha $f(x) > 0$, é necessário que

$$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a},$$

e por outro lado, para que se tenha $f(x) < 0$, devemos ter

$$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a},$$

ou seja, para resumir essas ideias, vejamos a seguinte figura que mostra a relação entre o valor assumido de x e o respectivo sinal de $f(x)$ quando temos $a > 0$:

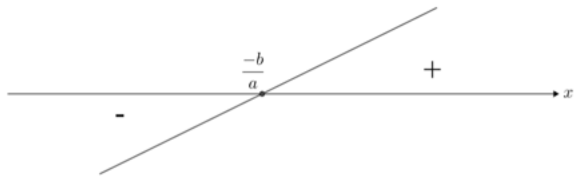


Figura 13.2.1: Intervalos de descrecimento e crescimento da função afim para o caso onde $a > 0$

2° Caso: $a < 0$

Já neste caso, para que se tenha $f(x) > 0$, é necessário que

$$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a},$$

e por outro lado, para que se tenha $f(x) < 0$, devemos ter

$$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a},$$

resumindo, quando $a < 0$, a seguinte figura mostra a relação entre o valor assumido de x e o respectivo sinal de $f(x)$:

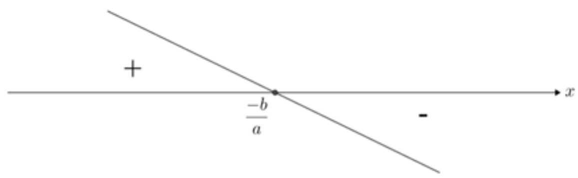


Figura 13.2.2: Intervalos de descrecimento e crescimento da função afim para o caso onde $a < 0$

O coeficiente b, chamado de coeficiente linear, define o ponto onde o gráfico da função passa pelo eixo y no momento em que $x = 0$, isto é, se $x = 0$, a função se torna $f(0) = b$, cujo o gráfico é uma reta paralela ao eixo x passando passando pelo ponto $(0, b)$.

Exemplo 13.2.1 Vamos determinar para quais valores de k, a função $f(x) = (5 - 2k)x + 2$ é crescente, decrescente e constante.

Resolução: Para que a função seja crescente, devemos ter que o coeficiente angular seja maior que zero, isto é,

$$(5-2k) > 0 \Leftrightarrow k < 5/2.$$

Portanto, f será crescente se $k < \frac{5}{2}$.

Agora, para que a função f seja decrescente, devemos ter que o coeficiente angular seja menor que zero, ou seja,

$$(5-2k) < 0 \Leftrightarrow k > \frac{5}{2}.$$

Logo, a função f será decrescente se $k > \frac{5}{2}$.

Por fim, para que f seja constante, basta que o coeficiente angular seja nulo, ou seja,

$$(5-2k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}.$$

Portanto, f será constante se $k = \frac{5}{2}$.

Exercício resolvido 1 (ENEM 2010) As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir, em que se considera a origem como o ano de 2007.

LUCENA, M. Guerra às sacolinhas. *Galileu*. nº 225, 2010.

De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

(a) $4,0$.
(b) $6,5$.
(c) $7,0$.
(d) $8,0$.
(e) $10,0$.

Resolução: Observando o gráfico, temos que o mesmo é uma reta, ou seja, é descrito por uma função afim que de acordo com a Definição 13.1, possui a forma $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Além disso, note que estão destacados no gráfico os pares ordenados $(0,18)$ e $(9,0)$. Utilizando esses pontos podemos encontrar qual é a função afim e, uma vez que temos a função, podemos calcular o número de sacolas plásticas que serão consumidas em 2011, pois sabendo que o eixo x corresponde ao número de anos após 2007, basta calcularmos $f(4)$.

Vejamos, utilizando o par ordenado $(0,18)$, temos

$$f(0) = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow 18 = b.$$

Agora, utilizando o par ordenado $(9,0)$, segue que

$$f(9) = a \cdot 9 + b \Leftrightarrow 0 = a \cdot 9 + 18 \Leftrightarrow a = -\frac{18}{9} = -2,$$

ou seja, $f(x) = -2x + 18$. Por fim, $f(4) = (-2) \cdot 4 + 18 = 10$. Alternativa (e).

14 Função quadrática

Definição 14.1 — Função quadrática. A chamada **função quadrática** ou **função do segundo grau**, é uma aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, são chamados de coeficientes da função.

Exemplo 14.0.1 Alguns exemplos de funções quadráticas:

(a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, onde neste caso temos $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$;

(b) $f(x) = 5x^2 - x$, onde neste caso temos $a = 5$, $b = -1$ e $c = 0$;

(c) $f(x) = -3x^2$, onde neste caso temos $a = -3$, $b = 0$ e $c = 0$.

14.1 Zeros da função quadrática

Definição 14.2 — Zeros da função quadrática. Dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, chamaremos de **zeros** ou **raízes** da função f, todos os valores de x que pertencem ao domínio da função tais que $f(x) = 0$. Em outras palavras, os zeros da função f são os valores de x, tais que

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Exemplo 14.1.1 Seja a função de segundo grau $f(x) = x^2 - 1$. Os zeros dessa função são $x = 1$ e $x = -1$, pois

$f(1) = 1^2 - 1 = 0$ e $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$.

No exemplo acima, podemos ver que de fato para encontrarmos os zeros de uma função quadrática, basta encontrarmos os valores que ao substituirmos x na equação, teremos como resultado zero. Mas como proceder para encontrarmos esses valores?

A seguir veremos um pouco sobre a forma canônica de uma função quadrática e como a mesma pode nos auxiliar nesse processo.

14.2 A forma canônica de uma função quadrática

Em certas ocasiões, quando estamos interessados em construir o gráfico de uma função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com o auxílio de uma tabela de valores de x e $f(x)$, podemos enfrentar certas dificuldades, pois usualmente atribuimos valores inteiros para x quando queremos encontrar $f(x)$. No entanto, existem determinadas funções onde os valores de x em que as mesmas interceptam o eixo x, não são números inteiros.

Uma possível forma de representarmos uma função quadrática é a chamada **forma canônica**, onde através de manipulações algébricas, encontramos uma expressão equivalente a da função f, porém, essa nova representação nos fornece informações a respeito dos vértices da parábola, facilitando o entendimento de como o gráfico da função se comporta. Tal forma canônica é a seguinte:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

A fins de curiosidade, iremos mostrar a seguir como, através de manipulações algébricas, podemos obter essa expressão. Na próxima subseção veremos como calcular as raízes de uma equação quadrática e como serão estas raízes.

Primeiramente, seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, vamos começar colocando o coeficiente a em evidência, isto é,

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Agora, podemos simplificar a expressão de $f(x)$ se transformarmos o termo

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

em um quadrado perfeito, e para isto, precisamos somar $\frac{b^2}{4a^2}$, ou seja, queremos obter

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

No entanto, ao simplesmente somarmos qualquer valor a função f, estaríamos alterando a nossa função, o que invalidaria o objetivo de obter uma expressão equivalente para f. Desse modo, para não alterarmos a nossa expressão de $f(x)$, podemos simplesmente somar zero, pois assim não iremos alterar seu valor, e somar zero é o mesmo que somar

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2},$$

ou seja, iremos obter que

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Por fim, veja que

$$-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^3} = \frac{a\left(-b^2 + 4ac\right)}{4a^3} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2},$$

e definindo $\Delta = b^2 - 4ac$, segue que

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

14.3 Número de raízes de uma função quadrática

Podemos, através de um estudo da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, dizer se a mesma possui duas raízes reais distintas, duas raízes reais iguais, ou ainda, nenhuma raíz real. Para fazermos este estudo, vamos analizar a seguinte **fórmula resolutiva de uma equação do 2° grau**, ou ainda, popularmente conhecida como **fórmula de Bhaskara**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{3.1}$$

Para começarmos a análise, vamos verificar se expressão acima possui alguma restrição em relação aos valores de a, b e Δ, pois assim, podemos dizer as condições necessárias para que exista nossa tão desejada raiz x.

Primeiramente, temos que ter cuidado com o denominador, pois o mesmo não pode ser zero, caso contrário, teríamos uma indeterminação matemática, porém, como definimos nosso a sendo real e diferente de zero, temos que $2a \neq 0$, desse modo, não precisamos nos preocupar com o valor de a. No entanto, veja que Δ, por estar sob uma raiz quadrada, merece certa atenção, isto é, sabemos que quando estamos lidando com raízes de números reais, para encontrarmos o valor de Δ, é necessário que o mesmo seja maior ou igual a zero, uma vez que se for menor que zero, iremos obter uma raiz complexa. Sendo assim, através do estudo do Δ, temos os seguintes casos:

(i) Se $\Delta > 0$, então x em (3.1) irá assumir dois valores reais distintos;

(ii) Se $\Delta = 0$, então x em (3.1) irá assumir dois valores reais iguais;

(iii) Se $\Delta < 0$, então x em (3.1) não irá assumir valores reais.

Obs. A letra Delta do alfabeto grego cujo símbolo é Δ, no estudo de funções quadráticas também é conhecida como **discriminante**.

Exemplo 14.3.1 Encontre os valores de p para os quais a equação

$$x^2 - (p+5)x + 36 = 0$$

possua duas raízes reais iguais.

Resolução: Primeiramente, para que a equação possua duas raízes reais iguais, devemos ter que $\Delta = 0$, ou seja, como neste caso $a = 1$, $b = -(p+5)$ e $c = 36$, temos que

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$(-(p+5))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0$$

$$(p+5)^2 - 144 = 0$$

$$p^2 + 10p - 119 = 0.$$

Utilizando (3.1), podemos encontrar os valores de p da seguinte maneira:

$$p = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-119)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{576}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 24}{2}.$$

Logo, $p_1 = 7$ e $p_2 = -17$ são os valores que p pode assumir para que se tenha $\Delta = 0$.

14.4 Gráfico da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é chamado de **parábola**. Para construirmos esse tipo de gráfico utilizaremos as seguintes informações:

Dada uma função $ax^2 + bx + c$, temos que

(a) Se $a > 0$, então a parábola terá a concavidade voltada para cima;

(b) Se $a < 0$, então a parábola terá a concavidade voltada para baixo;

(c) Os zeros da função são os pontos onde a parábola intercepta o eixo x, podendo acontecer três situações distintas:

- Se $\Delta > 0$, a parábola ira interceptar o eixo x nos pontos

$$x_1 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \quad \text{e} \quad x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right).$$

- Se $\Delta < 0$, a parábola não terá pontos que interceptam o eixo x.

- Se $\Delta = 0$, a parábola irá interceptar o eixo x apenas no ponto

$$x = \left(\frac{-b}{2a}, 0\right).$$

(d) O chamado **vértice** da parábola será o ponto

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right),$$

e tal ponto, caso $a > 0$, será também chamado de **mínimo** da função, e se $a < 0$, será chamado de **máximo** da função.

A seguinte esquematização mostra as possíveis parábolas que podem ser construídas de acordo com esse estudo dos coeficientes da função.

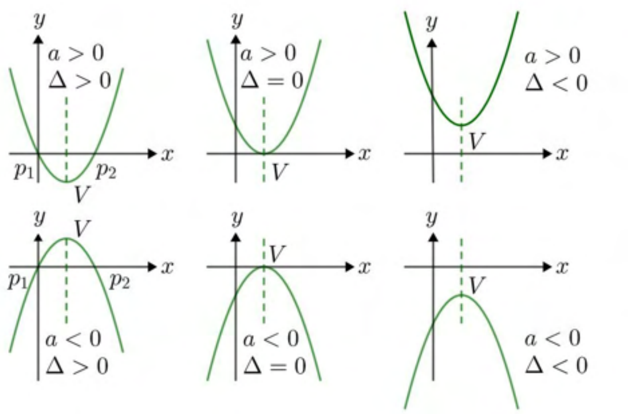


Figura 14.4.1: Esquematização das possíveis parábolas

Exemplo 14.4.1 Vamos construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

Resolução: Primeiramente, note que $a = -1$, $b = 4$ e $c = -4$. Como $a < 0$, a concavidade da parábola será voltada para baixo.

Os zeros da função serão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Logo, a parábola intercepta o eixo x apenas em $x = 2$.

Além disso, como $\Delta = 0$, o vértice da parábola será o ponto

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-4}{2\cdot(-1)}, \frac{-0}{4\cdot(-1)}\right) = (2,0).$$

Com essas informações, e sabendo que quando $x = 0$, temos $f(0) = -4$, o gráfico será:

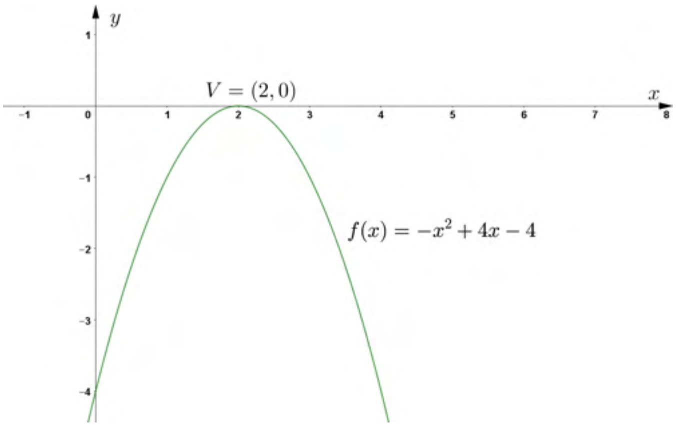


Figura 14.4.2: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x - 4$

Exercício resolvido 1 (ENEM 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.

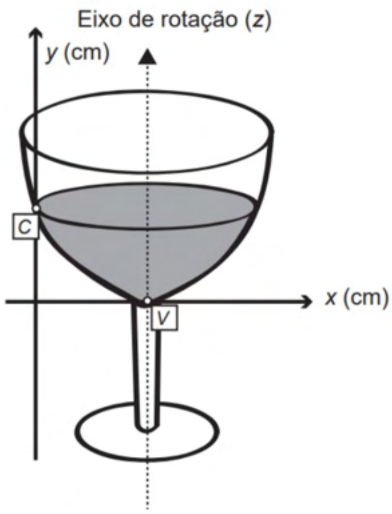


Figura 14.4.3

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = 3/2x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

(a) 1
(b) 2
(c) 4
(d) 5
(e) 6

Resolução: Observando a imagem, vemos que a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto, indicando assim que $\Delta = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4\cdot a\cdot C = 0\\ &= (-6)^2 - 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot C = 0.\end{aligned}$$

Isolando C na equação acima, iremos obter que

$$\begin{aligned}(-6)^2 - 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot C &= 0\\ -\frac{12}{2}\cdot C &= -36\\ -6\cdot C &= -36\\ C = \frac{-36}{-6} &= 6.\end{aligned}$$

Portanto, $C = 6$ e a alternativa correta é a letra (e).

15 Função exponencial

Antes de iniciarmos um estudo sobre funções exponenciais, vamos relembrar algumas propriedades sobre potenciação que serão essenciais nessa seção.

Sejam $a, b, m, n \in \mathbb{R}$, então

a) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$;

b) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$;

c) $(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

d) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, com $a \neq 0$;

e) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Além disso, podemos destacar a principal propriedade para a resolução de equações exponenciais, em que duas potências de mesma base são iguais se, e somente se, os expoentes são iguais. Em outras palavras,

$$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n, \qquad (3.2)$$

com $a > 0$, $a \neq 1$ e $m, n \in \mathbb{R}$.

Em posse destas propriedades, vamos agora definir e entender o que é uma função do tipo exponencial.

Definição 15.1 — Função exponencial. Uma aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ é chamada de **função exponencial** quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 0$, tal que $f(x) = a^x$, para todo x do domínio.

Exemplo 15.0.1 Algumas funções exponenciais:

(a) $f(x) = 2^x$;

(b) $g(x) = (0,7)^x$;

(c) $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

Exercício resolvido 1 (Mack SP) Dadas as funções $f(x) = 2^{x^2-4}$ e $g(x) = 4^{x^2-2x}$, se x satisfaz $f(x) = g(x)$, então 2^x é:

(a) $1/4$.
(b) 1.
(c) 8.
(d) 4.
(e) $1/2$.

Resolução: Como x satisfaz $f(x) = g(x)$, temos que

$$2^{x^2-4} = 4^{x^2-2x}.$$

Do lado direito da igualdade, podemos escrever $4 = 2^2$ para igualarmos as bases da seguinte maneira

$$2^{x^2-4} = (2^2)^{x^2-2x} \Leftrightarrow 2^{x^2-4} = 2^{2(x^2-2x)}.$$

Agora, como as bases são iguais, podemos estabelecer uma nova igualdade apenas para os expoentes, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &x^2 - 4 = 2(x^2 - 2x) \\ \Rightarrow &x^2 - 4 = 2x^2 - 4x \\ \Rightarrow &x^2 - 4x + 4 = 0. \end{aligned}$$

Obtemos então uma equação quadrática, cujas raízes serão

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Logo, $2^x = 2^2 = 4$. Portanto, alternativa (d).

Exercício resolvido 2 (ENEM 2014) Pesquisas indicam que o número de bactérias X é duplicado a cada quarto de hora. Um aluno resolveu fazer uma observação para verificar a veracidade dessa afirmação. Ele usou uma população inicial de 10^5 bactérias X e encerrou a observação ao final de uma hora.

Suponha que a observação do aluno tenha confirmado que o número de bactérias X se duplica a cada quarto de hora.

Após uma hora do início do período de observação desse aluno, o número de bactérias X foi de

(a) $2^{-2} \cdot 10^5$.
(b) $2^{-1} \cdot 10^5$.
(c) $2^2 \cdot 10^5$.
(d) $2^3 \cdot 10^5$.
(e) $2^4 \cdot 10^5$.

Resolução: O experimento começa com uma população de 10^5 bactérias. Como a cada quarto de hora o número de bactérias se duplica, em uma hora, o aluno terá feito quatro observações, ou seja,

1º observação: Após $1/4$ de hora teremos $10^5 \cdot 2$;

2° observação: Após $2/4$ de hora teremos $10^5 \cdot 2 \cdot 2$;

3° observação: Após $3/4$ de hora teremos $10^5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;

4° observação: Após $4/4$ de hora, que é o mesmo que uma hora, teremos $10^5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Que é o mesmo que $10^5 \cdot 2^4$.

Portanto, alternativa (e).

15.1 Gráfico da função exponencial

Definição 15.2 — Gráfico da função exponencial. Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, onde a é um número real, $a > 0$ e $a \neq 1$. O gráfico desta função será uma curva que pode se comportar de duas maneiras. A primeira delas é uma curva crescente, que ocorrerá quando $a > 1$. Enquanto que a segunda maneira é uma curva decrescente, que ocorrerá quando $0 < a < 1$. Como na seguinte figura:

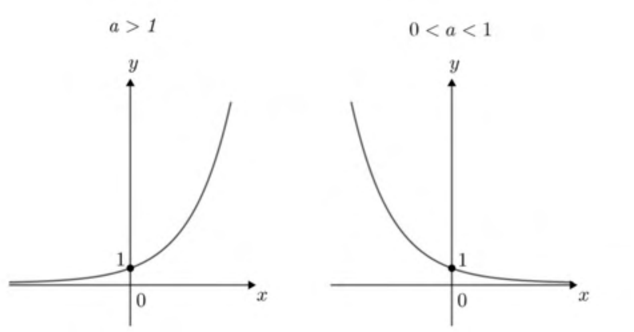


Figura 15.1.1: Gráfico de uma função exponencial

Exemplo 15.1.1 Vamos construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 2^x$.

Resolução: Primeiramente, note $a = 2 > 1$. Logo nossa função será crescente. Vamos tomar os seguintes valores e suas respectivas imagens para nos auxiliar na construção do gráfico:

- Escolhendo $x = 0$, temos que $f(0) = 2^0 = 1$. Logo, o gráfico passa pelo ponto $(0,1)$;
- Escolhendo $x = 2$, temos que $f(2) = 2^2 = 4$. Logo, o gráfico passa pelo ponto $(2,4)$;
- Escolhendo $x = 3$, temos que $f(3) = 2^3 = 8$. Logo, o gráfico passa pelo ponto $(3,8)$.

Com isso, o gráfico será

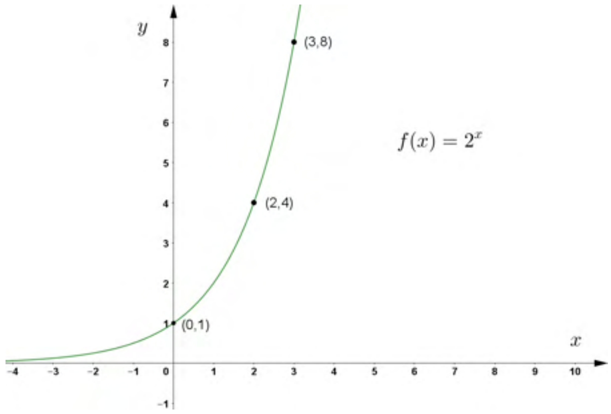


Figura 15.1.2: Gráfico da função $f(x) = 2^x$

16 Função logarítmica

Antes de iniciarmos um estudo sobre funções logarítmicas, vamos relembrar algumas propriedades sobre logarítmos que serão essenciais nessa seção. Além destas propriedades, a seção anterior de funções exponenciais é de grande importância nesse ponto, pois existe muita relação entre os dois tipos de funções.

Da definição de logaritmo, temos as seguintes consequências, com $a, b, c > 0$ e $b \neq 1$.

a) $\log_b 1 = 0$;

b) $\log_b b = 1$;

c) $\log_b(b^\alpha) = \alpha$;

d) $b^{\log_b a} = a$;

e) $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$.

Além disso, também é possível verificar que as seguintes propriedades são válidas:

f) $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$;

g) $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$;

h) $\log_b(a^\alpha) = \alpha \cdot \log_b a$;

i) $\log_{(b^\beta)} a = \frac{1}{\beta} \cdot \log_b a$;

j) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

Obs. Existem algumas convenções utilizadas no estudo de logaritmos quando estiverem em bases específicas:

- $\log_{10} a = \log a$;
- $\log_e a = \ln a$,

isto é, quando o logaritmo estiver na base 10 não é necessário exibi-lo. E no caso em que o logaritmo estiver na base e escrevemos apenas $\ln$, também sem exibir a base.

Obs. O número "e" é uma constante matemática que é a base dos chamados **logaritmos naturais** e é chamado de número de Euler em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler.

Para resolver uma equação logarítmica, há uma propriedade essencial que provém diretamente da definição de logaritmo, dada por:

$$\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c, \tag{3.3}$$

com $a, b, c > 0$ e $b \neq 1$.

Definição 16.1 — Função logarítmica. A chamada **função logarítmica** é uma função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \log_a x$, em que $0 < a \neq 1$.

Exemplo 16.0.1 Algumas funções logarítmicas:

(a) $f(x) = \log_2 x$;

(b) $g(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$;

(c) $h(x) = \log_{10}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Note que todas as expressões acima satisfazem as condições da Definição 16.1 e, por este mesmo motivo podem ser chamadas de funções logarítmicas. Caso contrário, não será uma função deste tipo, como a seguinte função:

$$f(x) = \log_1 x,$$

que **não** é uma função logarítmica pois a base é $a = 1$, visto que a deve ser diferente de 1.

Exemplo 16.0.2 Dada a função logarítmica

$$f(x) = \log_3 x,$$

vamos calcular $f(81)$.

Resolução: Queremos encontrar $f(81) = \log_3 81$. Vamos dizer que $f(81) = p$, desse modo, temos

$$\log_3 81 = p \Rightarrow 3^p = 81,$$

como $81 = 3^4$, segue que

$$3^p = 3^4$$

e assim, obtemos que $p = 4$. Portanto, $f(81) = 4$.

Exercício resolvido 1 (ENEM 2017) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de $R\$5000,00$. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, $R\$400,00$ mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5000 \times 1,013^n \times 0,013}{(1,013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize $0,005$ como aproximação para $\log 1,013$; $2,602$ como aproximação para $\log 400$; $2,525$ como aproximação para $\log 335$.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

(a) 12
(b) 14
(c) 15
(d) 16
(e) 17

Resolução: Do enunciado, temos que o valor máximo que a prestação pode assumir é $P = 400$, sendo assim, vamos encontrar o valor do número de prestações (n) para este valor de P:

$$\begin{aligned}
400 &= \frac{5000 \cdot 1,013^n \cdot 0,013}{(1,013^n - 1)} \\
400 \cdot (1,013^n - 1) &= 5000 \cdot 1,013^n \cdot 0,013 \\
400 \cdot 1,013^n - 400 &= 5000 \cdot 1,013^n \cdot 0,013 \\
400 \cdot 1,013^n - 400 &= 65 \cdot 1,013^n \\
400 \cdot 1,013^n - 65 \cdot 1,013^n &= 400 \\
1,013^n (400 - 65) &= 400 \\
1,013^n &= \frac{400}{335}.
\end{aligned}$$

Note que através de manipulações algébricas, quase conseguimos isolar o número n, no entanto, o mesmo está como expoente do número $1,013$. Para que consigamos de fato isolar n e descobrir seu valor precisaremos aplicar o logaritmo em ambos os lados da equação para então usarmos a propriedade h), vista no início dessa seção. Vejamos,

$$\begin{aligned}
1,013^n &= \frac{400}{335} \\
\Rightarrow \log 1,013^n &= \log\left(\frac{400}{335}\right) \\
\Leftrightarrow n \cdot \log 1,013 &= \log 400 - \log 335 \\
\Leftrightarrow n &= \frac{\log 400 - \log 335}{\log 1,013}.
\end{aligned}$$

Conseguimos então isolar n. Agora, vamos usar as aproximações dadas no enunciado para os valores dos logaritmos do lado direito da equação:

$$n = \frac{2,602 - 2,525}{0,005} = 15,4.$$

Veja que obtemos um valor de $15,4$ prestações, o que na vida real é algo não muito coerente, pois o número de prestações a serem pagas deve ser um número inteiro. Portanto, devemos arredondar o valor para um número acima, visto que 15 prestações não seriam suficientes, ou seja, iremos escolher 16 prestações. Logo, alternativa (d).

16.1 Gráfico da função logarítmica

As funções logarítmicas são muito úteis para descrever diversos fenômenos naturais e grandezas físicas, como a força de um terremoto, a intensidade do som, entre outras. Deste modo, entender e saber identificar o gráfico de uma função deste tipo é de grande importância. A seguir estão algumas características que sempre estarão presentes em um gráfico de uma função logarítmica.

Dada a função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \log_a x$, onde $0 < a \neq 1$. Vale que,

- Seu gráfico irá passar pelo ponto $(1,0)$, pois $\log_a 1 = 0$ para todo $0 < a \neq 1$;

- Seu gráfico sempre estará à direita do eixo y;

- Se $a > 1$, o gráfico é de uma função crescente. Agora se $0 < a < 1$, então o gráfico é de uma função decrescente. Como ilustra a seguinte figura:

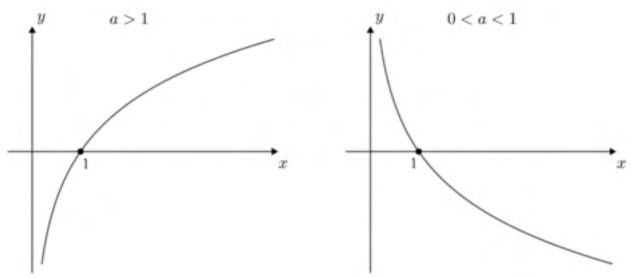


Figura 16.1.1: Gráfico de uma função logarítmica

- Dada uma função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 1$, sua inversa será a função logarítmica $g(x) = \log_a x$. E com isso, segue que o gráfico da função $g(x) = \log_a x$ é simétrico em relação à reta $y = x$ ao gráfico da função $f(x) = a^x$, como ilusta a figura a seguir:

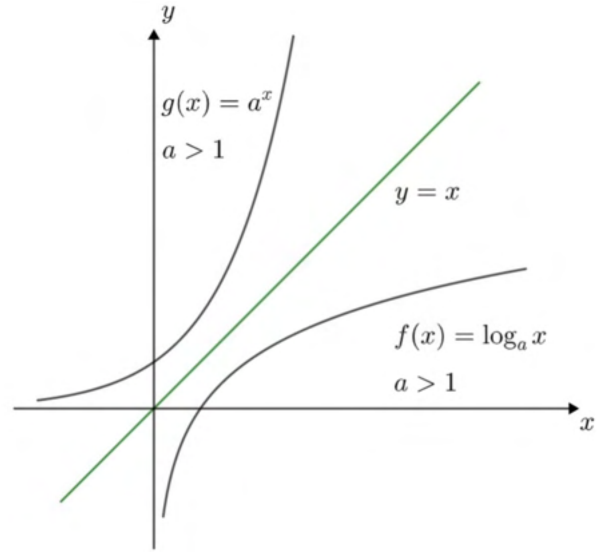


Figura 16.1.2: Simetria no gráfico entre as funções exponencial e logarítmica

Exemplo 16.1.1 Vamos construir o gráfico da função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_2 x$.

Resolução: Vamos primeiramente através de alguns valores do domínio, encontrar suas respectivas imagens.

- De acordo com o item (a) acima, temos que o gráfico deve passar pelo ponto $(1,0)$, e de fato, se escolhermos $x = 1$, temos $f(1) = \log_2 1 = 0$;
- Escolhendo $x = 2$, temos $f(2) = \log_2 2 = 1$. Logo, o gráfico deve passar pelo ponto $(2,1)$;
- Escolhendo $x = 3$, temos $f(4) = \log_2 4$, e como $4 = 2^2$, segue que $f(4) = \log_2 4 = 2$. Logo, o gráfico deve passar pelo ponto $(4,2)$.

Sendo assim, o gráfico da função será:

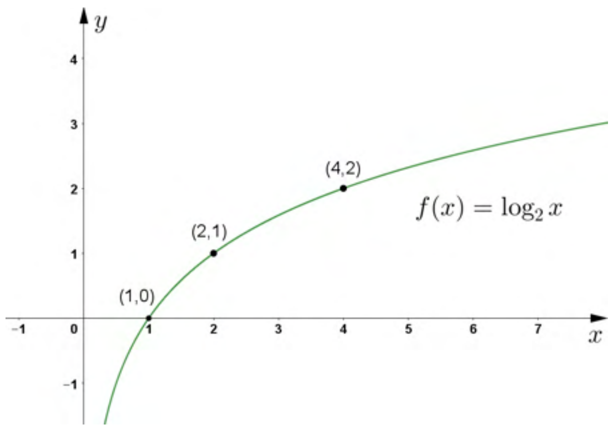


Figura 16.1.3: Gráfico da função $f(x) = \log_2 x$

17 Função modular

Uma possível forma de definirmos algumas funções é através de sentenças abertas, e para isto, utilizaremos a definição de módulo de um número real a seguir:

Definição 17.1 — Módulo de um número real. Seja x um número real, chamaremos de **módulo** de x ou **valor absoluto** de x, a seguinte relação

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Utilizando a definição acima, podemos agora estudar o conceito de função modular. Vejamos,

Definição 17.2 — Função modular. Uma aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma **função modular**, quando para cada $x \in \mathbb{R}$, é associado o elemento $|x| \in \mathbb{R}$, isto é,

$$f(x) = |x|.$$

Veja que, utilizando a definição de módulo de um número real, obtemos a seguinte forma equivalente de representarmos a função modular acima:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Obs. Diversas funções que são definidas por sentenças abertas não necessariamente utilizam a definição de módulo em sua construção, no entanto, possuem uma estrutura muito similar a da função representada em (3.4).
Um exemplo de função desse tipo é a seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se} \quad x \geq 1 \\ 0, & \text{se} \quad x < 1. \end{cases}$$

Exemplo 17.0.1 Algumas funções modulares:

(a) $f(x) = |x - 2|$;

(b) $g(x) = |x| + 1$;

(c) $h(x) = |x^2 - 2x + 3|$.

Exercício resolvido 1 (EEAR 2016) Seja $f(x) = |x - 3|$ uma função. A soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é

(a) 3
(b) 4
(c) 6
(d) 7

Resolução: Primeiramente, da Definição 17.2, segue que podemos reescrever a função f da seguinte maneira

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{se} \quad x - 3 \geq 0 \\ -x + 3, & \text{se} \quad x - 3 < 0, \end{cases}$$

ou seja, temos os dois seguintes casos:

$$f(x) = x - 3 \quad \text{se} \quad x \geq 3$$

e

$$f(x) = -x + 3 \quad \text{se} \quad x < 3.$$

Para o caso onde $x \geq 3$, vamos descobrir para que valores de x a função assume valor 2:

$$x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = 5.$$

Agora, analogamente para o caso onde $x < 3$,

$$-x + 3 = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Portanto, a soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é $5 + 1 = 6$. Alternativa (c).

17.1 Gráfico da função modular

O gráfico de uma função modular deve ser construído levando em conta os intervalos do domínio da função e os valores de suas respectivas imagens. O seguinte exemplo mostra alguns passos para facilitar a construção de um gráfico desse tipo.

Exemplo 17.1.1 Vamos construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

Resolução: Da Definição 17.2, segue que podemos escrever a nossa função da seguinte maneira

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Agora, para construirmos o seu gráfico vamos analisar separadamente cada uma das sentenças através dos seguintes passos:

1° Passo: Vamos analisar o caso onde $x \geq 0$.

Nesse caso, a função se torna $f(x) = x$, ou seja, para os valores do domínio da função que são maiores ou iguais a zero, o gráfico se comporta da seguinte maneira:

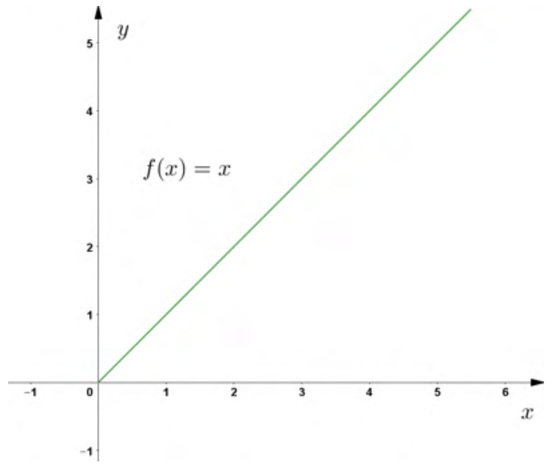


Figura 17.1.1: Gráfico da função $f(x) = |x|$ para o caso onde $x \geq 0$

2° passo: Vamos analisar o caso onde $x < 0$.

Agora para o caso onde temos valores negativos, nossa função se torna $f(x) = -x$, ou seja, para os valores do domínio da função que são menores que zero, o gráfico se comporta da seguinte maneira:

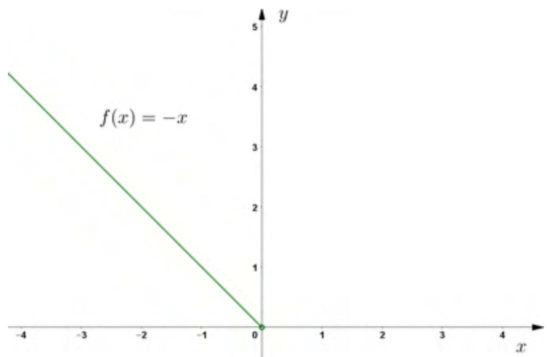


Figura 17.1.2: Gráfico da função $f(x) = |x|$ para o caso onde $x < 0$

3° Passo: Vamos juntar as partes.

Após analisarmos todos os casos possíveis e obtermos os gráficos de cada um deles, basta unificarmos o nosso gráfico, juntando todos os casos analisados para obtermos o gráfico da função $f(x) = |x|$. Ficando da seguinte maneira:

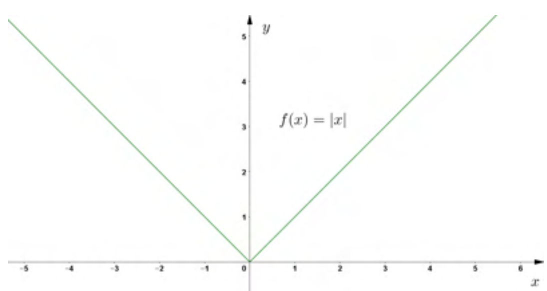


Figura 17.1.3: Gráfico da função $f(x) = |x|$

18 Exercícios propostos

Exercício 3.1 (PUC RS) Seja a função definida por $f(x) = \dfrac{2x-3}{5x}$. O elemento do domínio de f que tem $-\dfrac{2}{5}$

como imagem é:

(a) 0
(b) $2/5$
(c) -3
(d) $3/4$
(e) $4/3$

Exercício 3.2 (ENEM 2020) Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real.

(a) $T(x) = -x^2 + 16x + 57$
(b) $T(x) = -\frac{11}{16}x^2 + 11x + 72$
(c) $T(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{381}{5}$
(d) $T(x) = -x^2 - 16x + 87$
(e) $T(x) = \frac{11}{16}x^2 - \frac{11}{2}x + 72$

Exercício 3.3 (ENEM 2013) O proprietário de uma casa de espetáculos observou que, colocando o valor da entrada a $R\$10,00$, sempre contava com 1000 pessoas a cada apresentação, faturando $R\$10000,00$ com a venda dos ingressos. Entretanto, percebeu também que, a partir de $R\$10,00$, a cada $R\$2,00$ que ele aumentava no valor da entrada, recebia para os espetáculos 40 pessoas a menos.

Nessas condições, considerando P o número de pessoas presentes em um determinado dia e F o faturamento com a venda dos ingressos, a expressão que relaciona o faturamento em função do número de pessoas é dada por:

(a) $F = -\frac{P^2}{20} + 60P$
(b) $F = \frac{P^2}{20} - 60P$
(c) $F = -P^2 + 1200P$
(d) $F = -\frac{P^2}{20} + 60$
(e) $F = P^2 - 1200P$

Exercício 3.4 (UEL) Se uma função f, do primeiro grau, é tal que $f(1) = 190$ e $f(50) = 2052$, então $f(20)$ é igual a

(a) 901
(b) 909
(c) 912
(d) 937
(e) 981

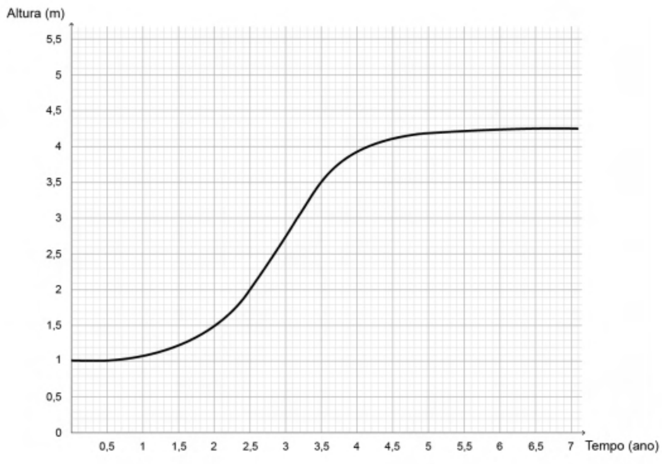
Exercício 3.5 (UFBA) Se $f(g(x)) = 5x - 2$ e $f(x) = 5x + 4$, então $g(x)$ é igual a:

(a) $x - 2$
(b) $x - 6$
(c) $x - 6/5$
(d) $5x - 2$
(e) $5x + 2$

Exercício 3.6 (UFBA) Se x_1 e x_2 são os zeros da função $y = 3x^2 + 4x - 2$, então o valor de $1/x_1 + 1/x_2$ é igual a:

(a) $1/8$
(b) $8/3$
(c) 1
(d) 2
(e) 3

Exercício 3.7 (ENEM 2021) O gráfico apresenta a evolução do crescimento de uma determinada árvore, plantada a partir de uma muda com 1 metro de altura. Nessa evolução, a altura da árvore, em metro, é descrita em função do tempo, medido em ano.



No período de 1 ano, contado a partir do instante em que a árvore tinha dois anos e meio de plantio, a variação da altura dessa árvore, em metro, teve valor compreendido entre

(a) $0,55$ e $0,65$.
(b) $0,65$ e $0,75$.
(c) $1,05$ e $1,15$.
(d) $1,25$ e $1,35$.
(e) $1,45$ e $1,55$.

Exercício 3.8 (UEG 2016) A temperatura em, graus Celsius, de um objeto armazenado em um determinado local é modelada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{12} + 2x + 10$, com x

dado em horas. A temperatura máxima atingida por esse objeto nesse local de armazenamento é de

(a) $0°C$
(b) $10°C$
(c) $12°C$
(d) $22°C$
(e) $24°C$

Exercício 3.9 (UEMG 2019) Classifique cada uma das funções exponenciais como crescente (C) ou decrescente (D):

I. $f(x) = (7/3)^x$.

II. $g(x) = 0,2x$.

III. $h(x) = (1/3)^x$.

IV. $p(x) = (5)x$.

A sequência correta dessa classificação é

(a) D, C, C, D.
(b) D, D, D, C.
(c) C, D, C, C.
(d) C, D, D, C.

Exercício 3.10 (ENEM 2010) Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.
Revista Exame. 21 abr. 2010.

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é

(a) $f(x) = 3x$
(b) $f(x) = 24$
(c) $f(x) = 27$
(d) $f(x) = 3x + 24$
(e) $f(x) = 24x + 3$

Exercício 3.11 (UNICAMP 2016) Considere a função afim $f(x) = ax + b$ definida para todo número real x , onde a e b são números reais. Sabendo que $f(4) = 2$, podemos afirmar que $f(f(3) + f(5))$ é igual a:

(a) 5.
(b) 4.
(c) 3.
(d) 2.

Exercício 3.12 (Enem - 2016) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de $3000°C$ e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.

Use $0,477$ como aproximação para $\log_{10}(3)$ e $1,041$ como aproximação para $\log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja $30°C$ é mais próximo de

(a) 22.
(b) 50.
(c) 100.
(d) 200.
(e) 400.

4 Equações e inequações

Equações e inequações

Do ponto de vista escolar, a álgebra é a área da Matemática em que números desconhecidos e operados são representados por letras, e símbolos denotam operações aritméticas. O objetivo é, em geral, encontrar os valores das quantidades desconhecidas através de equações e inequações, tão antigas quanto qualquer outro conteúdo da matemática. Existem evidências indiretas de que babilônios já resolviam problemas envolvendo equações em 2000 a.C. e evidências diretas para problemas mais simples que datam de cerca de 1700 a.C.

Ambos os conceitos possuem diversas aplicações nas mais variadas áreas, como física, química, biologia, ciências contábeis, entre outras. Este conteúdo é um dos grandes pilares da Matemática, dado o tempo de sua existência e o grande impacto que pode ter em nossas vidas.

Um exemplo real é que equações podem ser utilizadas para relacionar o custo e a demanda de uma mercadoria, ou seja, a partir disso, é possível determinar o melhor preço de uma mercadoria, visto o interesse das pessoas de a comprarem.

Neste capítulo, estudaremos vários conceitos acerca de equações e inequações vistos no Ensino Médio e com foco na resolução de problemas tanto de vestibulares, quanto do ENEM.

1 Equações

Equações são sentenças matemáticas que exprimem uma relação de igualdade entre determinados termos. Uma forma de visualizar esse conceito é através da seguinte analogia:

Imagine uma balança de pratos onde, em um deles, há um peso de 15 kg e você tem à disposição vários pesos de 3 kg. Qual a quantidade de pesos de 3 kg necessária para equilibrar essa balança?

Figura 1.0.1: Balança

A expressão, em termos matemáticos, que é possível obter a partir dessa pergunta é: $3x = 15$, em que x expressa a quantidade desconhecida de pesos de 3kg, ou seja, o valor a ser descoberto. Assim, conclui-se que $x = 5$, pois 3 multiplicado por 5 é igual a 15.
Logo, para que haja o equilíbrio da balança, é necessário que se coloquem 5 pesos de 3kg no outro prato.

Figura 1.0.2: Balança equilibrada

Vejamos então alguns exemplos:

Exemplo 1.0.1 São equações:

- $2x + 7 = 0$;

- $x^2 + \log 3x = 0$;
- $5^x - 9 = 0$.

1.1 Equações polinomiais do primeiro grau

Definição 1.1 Uma equação do primeiro grau é da forma:

$$ax + b = 0, \tag{4.1}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplo 1.1.1 Alguns exemplos de equações de primeiro grau:

- $2x + 7 = 0$;
- $\frac{5}{3}x = 8$;
- $\sqrt{7}x = -\frac{1}{2}$.

Note que, para solucionar (4.1), podemos voltar para a analogia da balança, em que o objetivo é equilibrar os dois membros da equação.

Primeiramente, subtraindo $b \in \mathbb{R}$ em ambos os membros de (4.1), temos

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax + b - b = -b,$$

Ou seja,

$$ax = -b. \tag{4.2}$$

Veja que, como a operação foi feita em ambos os membros da equação, então a igualdade se mantém. Agora, sabendo que $a \neq 0$, podemos dividir ambos os lados de (4.2) por $a \in \mathbb{R}$, e assim

$$ax = -b \Leftrightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Portanto, temos que a solução geral para a equação de primeiro grau (4.1) é dada por $x = -\frac{b}{a}$.

Exemplo 1.1.2 Considere a seguinte equação de primeiro grau:

$$6x - 9 = 0.$$

Comparando com a equação (4.1), temos que $a = 6$ e $b = -9$. Sendo assim, pela observação anterior, a solução do problema é dada por

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{(-9)}{6} = \frac{3}{2}.$$

Por outro lado, também podemos fazer o processo já descrito, de modo a isolar o x:

$$6x - 9 = 0 \Leftrightarrow 6x - 9 + 9 = 9 \Leftrightarrow 6x = 9 \Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{9}{6} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Em ambos os casos, temos que a solução é $x = \frac{3}{2}$. Para verificar que $x = \frac{3}{2}$ é realmente a solução, basta substituir este valor na equação e observar se a igualdade vale, isto é,

$$6x - 9 = 6 \cdot \frac{3}{2} - 9 = 9 - 9 = 0.$$

Como a igualdade se manteve, então verificamos que $x = \frac{3}{2}$ é de fato solução da equação.

Exercício resolvido 1 (UNICAMP) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada “bandeirada”, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeira custa R$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,86, calcule:

a) o preço de uma corrida de 11km;
b) a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21,50 pela corrida.

Resolução:

a) Perceba que, pelo enunciado, o preço total a ser pago por uma corrida de táxi é dado pela soma de um custo fixo com o custo por quilômetro rodado. Ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Preço da corrida} &= \text{Custo fixo} + \\ &(\text{Quilômetros rodados} \times \text{Custo do quilômetro}). \end{aligned}$$

Sabemos que o custo fixo é de R$$3,44$, a quilometragem total foi de 11 e o custo por quilômetro rodado é de R$$0,86$. Queremos descobrir qual foi o preço da corrida, então chamando este valor de x, obteremos que:

$$x = 3,44 + 11 \cdot 0,86 = 3,44 + 9,46 = 12,9.$$

Desta forma, o preço de uma corrida de 11km é de R$12,90.

b) Utilizando novamente a equação

$$\begin{aligned} \text{Preço da corrida} &= \text{Custo fixo} + \\ &(\text{Quilômetros rodados} \times \text{Custo do quilômetro}), \end{aligned}$$

porém, agora temos a informação do preço total e queremos saber qual foi a quilometragem rodada, então definindo este valor por y, segue que:

$$\begin{aligned}21,5 = 3,44 + y \cdot 0,86 &\Rightarrow 18,06 = 0,86y\\ &\Rightarrow y = \frac{18,06}{0,86}\\ &\Rightarrow y = 21.\end{aligned}$$

Portanto, a distância percorrida pelo passageiro foi de 21km.

Exercício resolvido 2 (UEL) O número 625 pode ser escrito como uma soma de cinco números inteiros ímpares e consecutivos. Nessas condições, uma das parcelas dessa soma é um número

a) menor que 120.
b) maior que 130.
c) quadrado perfeito.
d) divisível por 9.
e) múltiplo de 15.

Resolução: Primeiramente, temos que, se um número x é ímpar, então pode ser escrito como $x = 2n-1$, com $n \in \mathbb{N}$. Neste exercício, necessitamos de cinco números ímpares consecutivos, assim tomando $2n-1$ como sendo o primeiro deles, segue que os próximos serão $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$ e $2n+7$. Logo, o número 625 pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}625 &= (2n-1)+(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+(2n+7) =\\ &= 10n+15,\end{aligned}$$

ou seja, chegamos à seguinte equação do primeiro grau:

$$10n + 15 = 625.$$

Solucionando esta equação, temos

$$10n + 15 = 625 \Rightarrow 10n = 610 \Rightarrow n = 61.$$

Agora substituindo o valor de n nos números ímpares consecutivos, obtemos:

- $2n-1 = 2 \cdot 61 - 1 = 121$;
- $2n+1 = 2 \cdot 61 + 1 = 123$;
- $2n+3 = 2 \cdot 61 + 3 = 125$;
- $2n+5 = 2 \cdot 61 + 5 = 127$;
- $2n+7 = 2 \cdot 61 + 7 = 129$.

Por fim, basta notar que $121 = 11^2$, ou seja, é um quadrado perfeito. Portanto, a resposta é c).

1.2 Equações polinomiais do segundo grau

Definição 1.2 Uma equação do segundo grau é da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{4.3}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplo 1.2.1 São exemplos de equações do segundo grau:

- $\frac{2}{3}x = 2x^2$;
- $x^2 = -5x + 10$;
- $\sqrt{3}x^2 = 7$.

Sabemos que, graficamente, uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a \neq 0$, é dada por uma parábola:

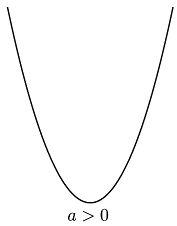


Figura 1.2.1: Gráfico de f com $a > 0$

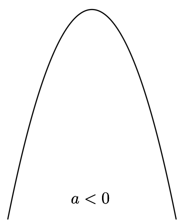


Figura 1.2.2: Gráfico de f com $a < 0$

Desta forma, encontrar as raízes para f é equivalente a encontrar as soluções de (4.3), em que a fórmula é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \tag{4.4}$$

com $\Delta = b^2 - 4ac$.

Na resolução de uma equação de segundo grau, existem algumas possibilidades acerca do valor de Δ que estão diretamente ligadas às soluções do problema. São elas:

a) $\Delta > 0$: A equação (4.4) possui duas soluções reais;

b) $\Delta = 0$: A equação (4.4) possui duas soluções reais idênticas;

c) $\Delta < 0$: A equação (4.4) não possui solução real.

Graficamente, temos:

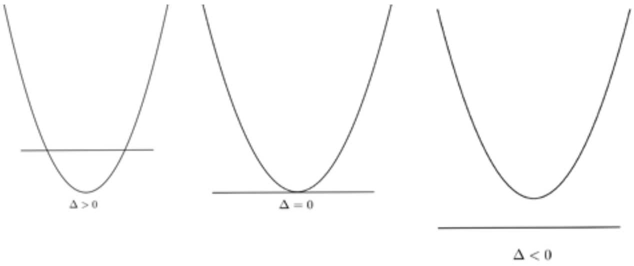


Figura 1.2.3: Gráficos de f com $\Delta > 0$

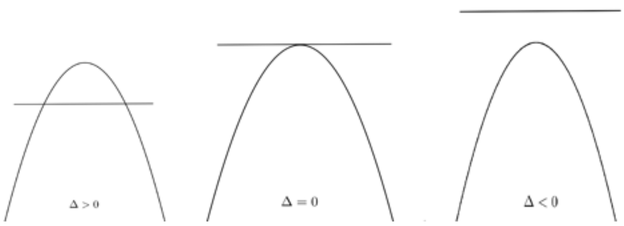


Figura 1.2.4: Gráficos de f com $\Delta < 0$

Exemplo 1.2.2 Considere a seguinte equação:

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Desta forma, temos que $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$. Neste caso, utilizaremos a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

para resolver esta equação do segundo grau.

Primeiramente, calculando o valor de Δ, temos que

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

Ou seja, o problema possui duas soluções reais e idênticas, que podem ser calculadas da seguinte maneira:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1.$$

Assim, segue que $x = 1$ é a única solução da equação.

Exemplo 1.2.3 Considere a equação:

$$3x^2 - 12x = 0. \tag{4.5}$$

Note que $a = 3$, $b = -12$ e $c = 0$. Assim, utilizando que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

e calculando o valor de Δ, temos

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 = 144.$$

Neste caso, o problema possui duas raízes reais, que podem ser calculadas da seguinte forma:

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 12}{6}.$$

Logo, $x = 0$ e $x = 4$ são ambas soluções para o problema. Por outro lado, observe que a equação dada pode ser reescrita como

$$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 12x}{3} = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0.$$

Assim,

$$x(x-4) = 0,$$

ou seja, temos o produto de dois números igual a zero, e para que isso ocorra, pelo menos um destes dois valores deve ser zero. Com isto,

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0,$$

e portanto $x = 0$ e $x = 4$ são soluções da equação.

Exemplo 1.2.4 Considere a seguinte equação:

$$x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Nesse caso, temos $a = 1$, $b = 2$ e $c = 5$. Assim, utilizando que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

e calculando o valor de Δ, temos

$$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0.$$

Desse modo, não teremos valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que sejam solução para a equação.

Um conceito muito útil para resolver determinados problemas no âmbito de equações de segundo grau é o de vértice de uma parábola, que corresponde ao ponto em que o gráfico de uma função do segundo grau muda de sentido.

Assim, dada uma função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, segue que as coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$ de f são dadas a partir das seguintes fórmulas:

- $x_v = -\dfrac{b}{2a}$;
- $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$,

em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Obs. Há outra maneira de observar que o x_v também pode ser visto como a média das raízes da equação polinomial do segundo grau se x_1 e x_2 são raízes de uma equação da forma ax^2+bx+c, então

$$x_v = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Exemplo 1.2.5 Considere a função quadrática $f(x) = x^2+6x+2$. Calculando os valores de x_v e y_v para encontrar o ponto de vértice de f, segue que

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 28,$$

e assim

- $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2\cdot 1} = -3;$
- $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{28}{4\cdot 1} = -7.$

Logo, o ponto de vértice de f é dado por $V = (-3,-7)$.

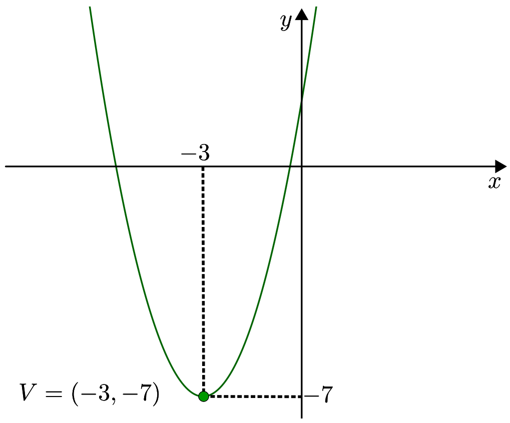


Figura 1.2.5: Gráfico de x^2+6x+2

Exemplo 1.2.6 Considere a função quadrática $g(x) = -2x^2+4x-1$. Calculando os valores de x_v e y_v para encontrar o ponto de vértice de g, segue que

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-1) = 8,$$

e assim

- $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2\cdot(-2)} = 1;$
- $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{8}{4\cdot(-2)} = 1.$

Logo, o ponto de vértice de g é dado por $V = (1,1)$.

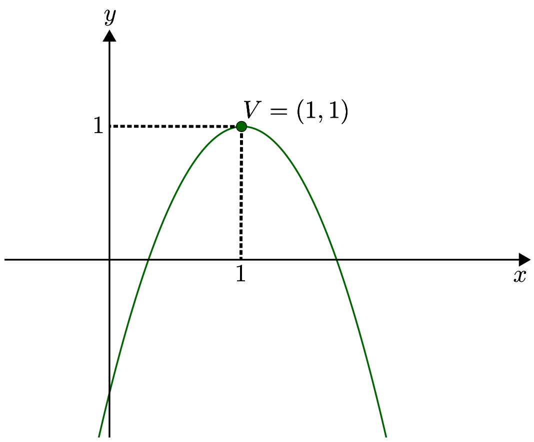


Figura 1.2.6: Gráfico de $-2x^2+4x-1$

Obs. Note que de acordo com o sinal do coeficiente $a \in \mathbb{R}$, como já visto nas Figuras 1.2.1 e 1.2.2, temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo ou para cima.
No caso em que $a > 0$, a parábola apresenta concavidade voltada para cima, e, assim, o ponto de vértice é dado pelo valor máximo que a função atinge. Por outro lado, se $a < 0$, então a parábola possui concavidade voltada para baixo, e, consequentemente, o vértice é dado pelo valor mínimo que a função atinge.
Podemos observar ambos os casos nos exemplos 1.2.5 e 1.2.6.

Exercício resolvido 3 (UEL 1994) Os valores de m, para os quais a equação $3x^2 - mx + 4 = 0$ tem duas raízes reais iguais, são:

Resolução: Como o exercício exige que a equação de segundo grau possua duas raízes iguais, notamos que o problema deve possuir apenas uma solução. Para isso ocorrer, precisamos que $\Delta = 0$, assim

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4\cdot 3\cdot 4 = m^2 - 48.$$

Desta forma, segue que

$$m^2 - 48 = 0 \Rightarrow m^2 = 48 \Rightarrow m = \pm\sqrt{48} \Rightarrow m = \pm 4\sqrt{3}.$$

Portanto, para que $3x^2 - mx + 4 = 0$ possua duas raízes reais iguais, os valores de m são: $m = 4\sqrt{3}$ ou $m = -4\sqrt{3}$.

Exercício resolvido 4 (UFPE 2000) Os alunos de uma turma resolveram comprar um presente custando R$ 48,00 para o professor de Matemática, dividindo igualmente o gasto entre eles. Depois que 6 alunos recusaram-se a participar da divisão, cada um dos alunos restantes teve que contribuir com mais R$ 0,40 para a compra do presente. Qual a percentagem de alunos da turma que contribuíram para a compra do presente?

a) 85%
b) 65%
c) 60%
d) 80%
e) 75%

Resolução: Note que é necessário descobrir primeiramente qual a quantidade total de alunos, então chamaremos este valor de n. Deste modo, temos que se todos os alunos participassem da divisão, a quantia a ser paga por cada um seria $\dfrac{48}{n}$, porém 6 deles se recusaram a participar. Então, o valor arrecadado foi de $(n-6)\cdot\dfrac{48}{n}$.

Com isso, cada um dos $(n-6)$ alunos teve que contribuir com mais R$ 0,40 para chegar ao total desejado. Assim, a equação que representa a contribuição dos alunos para a arrecadação dos R$ 48,00 reais é dada por:

$$(n-6)\cdot\frac{48}{n}+(n-6)\cdot 0,4=48.$$

Desenvolvendo essa equação, segue que

$$\begin{aligned}(n-6)\cdot\frac{48}{n}+(n-6)\cdot 0,4=48 &\Rightarrow \cancel{48}-\frac{288}{n}+0,4n-2,4=\cancel{48}\\ &\Rightarrow -\frac{288}{n}+0,4n-2,4=0\\ &\Rightarrow 0,4n^2-2,4n-288=0.\end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{10}{4}$ a última equação obtida, obteremos

$$n^2-6n-720=0.$$

Ou seja, descobrir a quantidade total de alunos é equivalente a resolver a equação de segundo grau

$$n^2-6n-720=0.$$

Assim, podemos utilizar a fórmula dada por

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

para encontrar as soluções do problema. Com efeito,

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-720)=2916>0,$$

o que implica que existem duas raízes reais e distintas que podem ser calculadas da seguinte forma:

$$n=\frac{6\pm\sqrt{2916}}{2}=\frac{6\pm 54}{2}.$$

Logo, chegamos em dois valores, $n=30$ e $n=-24$. Como não estamos interessados em valores negativos, pois estamos considerando n como sendo a quantidade total de alunos, segue que a solução desejada é $n=30$.

Sabendo disso, temos que a quantidade de alunos que contribuíram foi de

$$n-6=30-6=24.$$

Portanto, a porcentagem de alunos que pagaram pelo presente foi de

$$\frac{24}{30}=0,8=80\%,$$

ou seja, alternativa d).

1.3 Equações exponenciais

Equações exponenciais, diferentemente de equações do primeiro e segundo grau, que possuem um formato bem específico que as generaliza, não detêm uma caracterização geral. Porém, de maneira informal, podemos descrevê-las como: “equações em que a incógnita se encontra no expoente da expressão”. A seguir, apresentaremos alguns exemplos para que isso se torne mais claro.

Exemplo 1.3.1 Alguns exemplos de equações exponenciais:

- $3^x+1=0$;
- $5\cdot 2^{5x-1}-\frac{3}{2}=0$;
- $\left(\frac{4}{5}\right)^x-\sqrt{3}=0$.

Antes de resolvê-las, precisamos relembrar algumas propriedades sobre potenciação que foram vistas no Capítulo de Funções e serão essenciais para a resolução de equações exponenciais. Sejam $a,b,m,n\in\mathbb{R}$, então

a) $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$;

b) $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$;

c) $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$;

d) $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, com $a\neq 0$;

e) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Além disso, podemos destacar a principal propriedade para a resolução de equações exponenciais, em que duas potências de mesma base são iguais se, e somente se, os expoentes são iguais. Em outras palavras,

$$a^m=a^n \Leftrightarrow m=n, \tag{4.6}$$

com $a>0$, $a\neq 1$ e $m,n\in\mathbb{R}$.

Agora, vamos resolver alguns exemplos mais básicos de equações exponenciais para a fixação do conteúdo abordado até o momento:

Exemplo 1.3.2 Considere a seguinte equação:

$$2^x-32=0.$$

Assim, temos que

$$2^x=32.$$

Agora, note que $32=2^5$. Então,

$$2^x=32=2^5.$$

Lembre que

$$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n,$$

se $a > 0$, $a \neq 1$, que é o caso estudado. Assim, segue que $x = 5$ é a solução para o problema.

Exemplo 1.3.3 Considere a equação:

$$2^{3x+3} - 2^{3x+1} = 24. \tag{4.7}$$

Primeiramente, perceba que é possível reescrever a expressão do membro esquerdo de (4.7) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 2^{3x+3} - 2^{3x+1} &= 2^{3x} \cdot 2^3 - 2^{3x} \cdot 2^1 = 2^{3x} \cdot 8 - 2^{3x} \cdot 2 \\ &= 2^{3x}(8-2) = 2^{3x} \cdot 6. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$2^{3x+3} - 2^{3x+1} = 2^{3x} \cdot 6. \tag{4.8}$$

Substituindo (4.8) em (4.7), chegamos que

$$2^{3x} \cdot 6 = 24 \Rightarrow 2^{3x} = 4 \Rightarrow 2^{3x} = 2^2.$$

Como ambos os membros da equação possuem potências de mesma base, temos que $3x = 2$, portanto a solução é dada por $x = \dfrac{2}{3}$.

Exercício resolvido 5 (UFJF 2006) Dada a equação $2^{3x-2} \cdot 8^{x+1} = 4^{x-1}$, podemos afirmar que sua solução é um número:

a) natural
b) maior que 1
c) de módulo maior do que 1
d) par
e) de módulo menor do que 1

Resolução: Resolvendo a equação exponencial, segue que:

$$\begin{aligned} 2^{3x-2} \cdot 8^{x+1} = 4^{x-1} &\Rightarrow 2^{3x-2} \cdot 2^{3(x+1)} = 2^{2(x-1)} \\ &\Rightarrow 2^{3x-2} \cdot 2^{3x+3} = 2^{2x-2} \\ &\Rightarrow 2^{3x+3x-2+3} = 2^{2x-2} \\ &\Rightarrow 2^{6x+1} = 2^{2x-2}. \end{aligned}$$

Lembre que

$$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n,$$

e desta forma,

$$6x + 1 = 2x - 2 \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}.$$

Por fim, note que $|x| = \left|-\dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{3}{4} < 1$. Logo, a alternativa correta é e).

Obs. No exercício anterior, note que o valor de x encontrado não atende às afirmações das outras alternativas, pois $-\frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$ nem é par já que não é inteiro; além disso, não é um número maior que 1, dado que é negativo.

Exercício resolvido 6 (UEL 1995) Se um número real K satisfaz a equação $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, então K^2 é igual a:

a) 0 ou $\frac{1}{2}$
b) 0 ou 1
c) $\frac{1}{2}$ ou 1
d) 1 ou 2
e) 1 ou 3

Resolução: Note que podemos reescrever a equação dada da seguinte maneira:

$$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0.$$

Deste modo, chamando $3^x = y$, segue que

$$y^2 - 4y + 3 = 0,$$

ou seja, temos uma equação do segundo grau que pode ser resolvida utilizando a fórmula dada por

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Calculando o valor de Δ,

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0.$$

Assim, a equação possui duas soluções reais calculadas abaixo:

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = y = \frac{4 \pm 2}{2}.$$

Logo, $y = 3$ ou $y = 1$. Como $y = 3^x$, segue que $x = 1$ ou $x = 0$; sabendo que K satisfaz esta equação, então $K = 1$ ou $K = 0$; e, no caso de elevarmos ao quadrado, obteremos os mesmos valores. Portanto, a alternativa correta é b).

1.4 Equações logarítmicas

Assim como as equações exponenciais, as equações logarítmicas também não possuem uma caracterização geral, todavia, de modo informal, as definimos como: “equações em que a incógnita se encontra no logaritmando da expressão”.

Exemplo 1.4.1 Alguns exemplos de equações logarítmicas:

- $\log_2(x+1) = \log_2(2x-3)$;
- $\log_5(x^2-1) = 4$;
- $[\log(x)]^2 + 3\log(x) + 7 = 0$.

Agora, vamos relembrar alguns conceitos já estudados no Capítulo de Funções, que são algumas propriedades básicas sobre logaritmo.

Da definição de logaritmo, temos as seguintes consequências, com $a, b, c > 0$ e $b \neq 1$.

a) $\log_b 1 = 0$;

b) $\log_b b = 1$;

c) $\log_b(b^\alpha) = \alpha$;

d) $b^{\log_b a} = a$;

e) $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$.

Além disso, também é possível verificar que as seguintes propriedades são válidas:

a) $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$;

b) $\log_b(\frac{a}{c}) = \log_b a - \log_b c$;

c) $\log_b(a^\alpha) = \alpha \cdot \log_b a$;

d) $\log_{(b^\beta)} a = \dfrac{1}{\beta} \cdot \log_b a$;

e) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

Obs. Existem algumas convenções utilizadas no estudo de logaritmos quando estiverem em bases específicas:

- $\log_{10} a = \log a$;
- $\log_e a = \ln a$,

isto é, quando o logaritmo estiver na base 10 não será necessário exibi-lo. E, no caso em que o logaritmo estiver na base e, escreveremos apenas $\ln$, também sem exibir a base.

Para resolver uma equação logarítmica, há uma propriedade essencial que provém diretamente da definição de logaritmo, dada por:

$$\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c, \tag{4.9}$$

com $a, b, c > 0$ e $b \neq 1$.

Exemplo 1.4.2 Considere a equação:

$$\log(x+1) = \log(2x).$$

Lembre que

$$\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c,$$

para $a, b, c > 0$ e $b \neq 1$, que é o caso estudado. Assim, temos que

$$x + 1 = 2x \Rightarrow x = 1.$$

Portanto, a solução para a equação é $x = 1$.

Obs. No exemplo anterior, é interessante ressaltar que $x = 1$ está no domínio da função $\log$, ou seja, a função está bem definida para este valor de x. Isso pode ser verificado observando-se que

$$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \text{ e } 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Com isso, $x = 1$ está no domínio da função logaritmo definida no exemplo anterior.

O mesmo raciocínio pode ser utilizado para outros casos.

Exemplo 1.4.3 Considere a equação:

$$\log_2(4x+1) = 3.$$

Perceba que, por uma propriedade de logaritmo, $3 = \log_2(2^3)$. Reescrevemos o valor 3 dessa maneira, pois queremos uma igualdade entre logaritmos de mesma base para que possamos utilizar (4.9). Desta forma, a equação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\log_2(4x+1) = \log_2(2^3).$$

Assim, utilizando (4.9), segue que

$$4x + 1 = 2^3 \Rightarrow 4x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{4}.$$

Portanto, a solução para o problema é $x = \dfrac{7}{4}$.
Por outro lado, podemos chegar diretamente a essa mesma conclusão pela própria definição de logaritmo, pois sabemos que

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a.$$

Ou seja, para $\log_2(4x+1) = 3$, segue que

$$2^3 = 4x + 1,$$

e, consequentemente, chegamos à mesma solução.

Exercício resolvido 7 (ENEM 2020) A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (r). Ela é dada por

$$f = \frac{A}{r^B}$$

O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, $r = 1$ para a palavra mais frequente, $r = 2$ para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente. A e B são constantes positivas. Com base nos valores de $X = \log(r)$ e $Y = \log(f)$, é possível estimar valores para A e B. No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é

a) $Y = \log(A) - B \cdot X$

b) $Y = \dfrac{\log(A)}{X + \log(B)}$

c) $Y = \dfrac{\log(A)}{B} - X$

d) $Y = \dfrac{\log(A)}{B \cdot X}$

e) $Y = \dfrac{\log(A)}{X^B}$

Resolução: Como desejamos obter a relação entre Y e X, ou seja, a divisão de Y por X, e sabendo que a Lei de Zipf é verificada, segue que

$$\frac{Y}{X} = \frac{\log(f)}{X} = \frac{\log\left(\frac{A}{r^B}\right)}{X} = \frac{\log(A) - BX}{X}.$$

Logo, $Y = \log(A) - B \cdot X$. Ou seja, a alternativa correta é a).

Exercício resolvido 8 (ENEM 2017) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5.000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) seguindo a fórmula

$$P = \frac{5000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{1{,}013^n - 1}.$$

Se necessário, utilize $0{,}005$ como aproximação para $\log 1{,}013$; $2{,}602$ como aproximação para $\log 400$; $2{,}525$ como aproximação para $\log 335$.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

a) 12
b) 14
c) 15
d) 16
e) 17

Resolução: Como há um máximo de R$ 400,00 mensais para pagamento e se deseja descobrir o menor número de prestações com essa limitação, então:

$$\begin{aligned} P = \frac{5000 \cdot 1{,}013^n \cdot 0{,}013}{1{,}013^n - 1} &\Rightarrow 400 = \frac{65 \cdot 1{,}013^n}{1{,}013^n - 1} \\ &\Rightarrow 400 \cdot 1{,}013^n - 400 = 65 \cdot 1{,}013^n \\ &\Rightarrow 335 \cdot 1{,}013^n = 400. \end{aligned}$$

Agora, aplicando logaritmo na base 10 em ambos os membros da igualdade, teremos:

$$\log 400 = \log[335 \cdot (1{,}013)^n] = \log(335) + n \log(1{,}013),$$

pois

$$\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c \quad \text{e} \quad \log_b a^\alpha = \alpha \log_b a.$$

E, por fim, substituindo os valores mencionados no enunciado, obtemos

$$2{,}525 + 0{,}005n = 2{,}606 \Rightarrow 0{,}005n = 0{,}077.$$

Logo, $n = 15{,}4$, ou seja, a alternativa correta é d).

Exercício resolvido 9 (UNIFESP 2008) Uma das raízes da equação $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$ é $x = 1$ e a outra raiz é

a) $1 + \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$

b) $1 + \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

c) $\log_{10} 3$

d) $\dfrac{\log_{10} 6}{2}$

e) $\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$

Resolução:

Desejamos resolver a seguinte equação:

$$2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 12 = 0. \tag{4.10}$$

Perceba que 2^x é um termo em comum nesta equação, com exceção do termo independente 12. Desta forma, chame $2^x = y$ e assim

$$2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 12 = 0 \Rightarrow y^2 - 8y + 12 = 0,$$

que é uma equação do segundo grau. Então basta utilizar a fórmula dada por

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e teremos

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 16.$$

Como $\Delta > 0$, segue que a equação possui duas raízes reais, como verificado abaixo:

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}.$$

Assim, as soluções para y são $y = 2$ e $y = 6$. Voltando à variável x, segue que

$$y = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1,$$

que é uma das soluções que já conhecíamos. Agora, para $y = 6$, temos

$$y = 6 \Rightarrow 2^x = 6.$$

Aplicando logaritmo na base 2 em ambos os lados da igualdade, temos

$$\log_2 6 = x \Rightarrow \log_2 3 \cdot 2 = x,$$

e considerando que o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos e fazendo a mudança para base 10, chegamos a

$$\log_2 3 + 1 = x \Rightarrow x = 1 + \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}.$$

Logo, a resposta é b).

2 Inequações

Inequações são sentenças matemáticas que exprimem uma relação de desigualdade entre determinadas expressões. Nas seções que estão por vir, serão estudados dois dos principais tipos de inequações polinomiais abordados no Ensino Médio, que são os de primeiro e de segundo grau.

Entretanto, vamos analisar primeiramente algumas noções preliminares que serão importantes para dar seguimento ao conteúdo de inequações.

Sejam $x, a \in \mathbb{R}$, com a fixado. Nesta seção, estudaremos conceitos acerca das seguintes relações aos quais definem uma ordenação para os números reais. Segue-as abaixo:

- $x < a$: indica que x é menor que a;

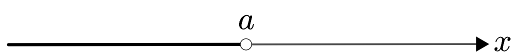


Figura 2.0.1: Eixo x real, com $x < a$

- $x > a$: indica que x é maior que a;

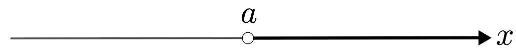


Figura 2.0.2: Eixo x real, com $x > a$

- $x \leq a$: indica que x é menor ou igual a a;

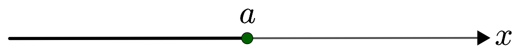


Figura 2.0.3: Eixo x real, com $x \leq a$

- $x \geq a$: indica que x é maior ou igual a a,

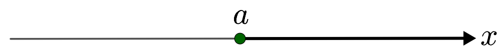


Figura 2.0.4: Eixo x real, com $x \geq a$

Se voltarmos à analogia do início do capítulo, da balança de pratos, para o caso de inequações, o interesse agora é analisar também quando a balança não estiver equilibrada, ou seja, estudar os seguintes casos:

a) $3x < 15$;

b) $3x > 15$;

c) $3x \leq 15$;

d) $3x \geq 15$.

Como estamos lidando com a quantidade de pesos, então $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Perceba que agora teremos conjuntos de soluções diferentes para estes problemas. No caso a), é necessário pensar na quantidade de pesos de 3 kg, de forma que o valor total seja estritamente menor do que 15 kg. Assim, concluímos que os valores para x serão $0, 1, 2, 3$ e 4, pois sabemos que com 5 pesos de 3 kg, o valor total seria exatamente de 15 kg.

Por outro lado, analisando b), teríamos justamente qualquer valor de x maior que 5, se pensarmos do mesmo modo.

Já para os casos c) e d), seria o mesmo pensamento que usamos em a) e b), respectivamente, porém envolvendo o valor 5 no conjunto da solução.

Exemplo 2.0.1 Vejamos alguns exemplos de inequações:

- $2x + 7 \leq 0$;
- $x^2 + \log 3x > 0$;
- $5^x - 9 \geq 0$.

2.1 Inequações polinomiais do primeiro grau

Inequações do primeiro grau possuem formato semelhante ao das equações do primeiro grau,

$$ax^2 + b = 0,$$

entretanto, ao invés de trabalharmos com uma igualdade $(=)$, será uma desigualdade $(>, <, \leq, \geq)$. Assim, é possível destacar os casos possíveis de serem estudados, sendo $x \in \mathbb{R}$:

- $ax + b < 0$;
- $ax + b > 0$;
- $ax + b \leq 0$;
- $ax + b \geq 0$.

Em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

A forma de solucionar uma inequação de primeiro grau segue o mesmo princípio que uma equação, utilizando propriedades algébricas, de forma a isolar a variável, porém com um sinal de desigualdade.

Obs. Quando se trata de desigualdade, é necessário estarmos atentos quanto ao sinal de menos na inequação.
Observe a seguinte afirmação:

$$5 < 6,$$

que é verdadeira. Entretanto, se multiplicarmos ambos os membros da desigualdade por -1, teríamos

$$-5 < -6,$$

o que seria uma afirmação falsa. Então, para estes casos que envolvem um produto por um valor negativo, a inversão do sinal da desigualdade se torna necessária para que a afirmação se mantenha válida, ou seja,

$$-5 > -6.$$

O mesmo ocorre quando há a inversão, com relação à multiplicação, dos valores avaliados. De fato, note que

$$5 < 6,$$

é verdade, porém

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{6}$$

é falso, pois é claro que $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$. Ou seja, para estes casos também é necessária a inversão do sinal da desigualdade.

Exemplo 2.1.1 Considere a seguinte inequação, com $x \in \mathbb{R}$:

$$6x - 9 \leq 0.$$

Isolando a variável x, teremos que

$$6x - 9 \leq 0 \Rightarrow 6x \leq 9 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Ou seja, o conjunto solução para este problema será $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 3/2\}$.

Exemplo 2.1.2 Considere a inequação $5x + 1 \geq \sqrt{3}x - 4$, com $x \in \mathbb{R}$. Desta forma, temos

$$5x + 1 \geq \sqrt{3}x - 4 \Rightarrow (5 - \sqrt{3})x \geq -5 \Rightarrow x \geq \frac{-5}{5 - \sqrt{3}}.$$

Logo, o conjunto solução desta inequação é dado pelo conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{-5}{5 - \sqrt{3}}\right\}.$$

Note que $5 - \sqrt{3} > 0$. Caso contrário, se o valor multiplicado na inequação anterior fosse negativo, a desigualdade seria contrária.

Exercício resolvido 1 (IFAL 2015) Para pintar sua casa, Marcos encontra dois pintores: Antônio, que cobra um valor contratual de R$ 100,00 e mais R$ 10,00 por m^2 de área pintada, e Benedito, que cobra R$ 200,00 no contrato e mais R$ 6,00 por m^2 de pintura. Acima de quantos m^2 de área pintada é mais econômico contratar Benedito?

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20
e) 25

Resolução: Defina x como sendo a quantidade em metros quadrados pintados e $A(x) = 100 + 10x$ e $B(x) = 200 + 6x$ as funções que representam o valor cobrado para a pintura de Antônio (A) e Benedito (B), respectivamente. O objetivo é descobrir a partir de quantos metros quadrados pintados, $B(x) \leq A(x)$. Desta forma,

$$B(x) \leq A(x) \Rightarrow 200 + 6x \leq 100 + 10x \Rightarrow 100 \leq 4x \Rightarrow x \geq 25.$$

Ou seja, a partir de 25m^2 o valor cobrado por Benedito é menor do que o de Antônio. Portanto, a alternativa correta é e).

Exercício resolvido 2 (IFNMG 2018 - adaptada) Uma empresa trabalha com a produção de taças especiais e tem gastos fixos de R$ 200,00 mais o custo de R$ 2,00 por taça produzida. Sabendo-se que cada unidade será vendida a R$ 10,00, quantas taças deverão ser produzidas para que o valor arrecadado supere os gastos?

a) Mais de 25 taças

b) Entre 19 e 24 taças
c) Entre 15 e 18 taças
d) Menos de 15 taças

Resolução: Defina $G(x) = 200 + 2x$ e $L(x) = 10x$ como sendo as funções que representam os gastos para a produção das taças (G) e o lucro (L) pela unidade vendida, respectivamente. Desejamos descobrir quando $L(x) > G(x)$, isto é:

$$10x > 200 + 2x \Rightarrow 8x > 200 \Rightarrow x > 25.$$

Assim, a quantidade necessária de taças produzidas para que o valor arrecadado supere os gastos deve ser maior que 25. Portanto, a alternativa correta é a).

2.2 Inequações polinomiais do segundo grau

Inequações do segundo grau possuem formato semelhante aos das equações do segundo grau,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

porém com a peculiaridade de serem definidas a partir de um sinal de desigualdade. Assim, é possível destacar os casos possíveis de serem estudados:

- $ax^2 + bx + c < 0$;
- $ax^2 + bx + c > 0$;
- $ax^2 + bx + c \leq 0$;
- $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para solucionar inequações do segundo grau, é necessário primeiramente analisar o caso em que há a igualdade, isto é, quando estiver na forma de equação. Assim, encontradas as soluções da equação do segundo grau, podemos partir para dois caminhos: escrever a expressão na sua forma fatorada e analisar as condições para cada fator ou analisar da análise do gráfico que a expressão representa. Vamos apresentar alguns exemplos genéricos para cada um desses casos:

Exemplo 2.2.1 Considere a inequação do segundo grau dada por

$$x^2 - x - 12 > 0$$

que na forma de equação é

$$x^2 - x - 12 = 0.$$

Sabemos que para resolver este tipo de problema, podemos utilizar a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Calculando o valor de Δ,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49.$$

Assim,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2}.$$

Logo, a equação possui duas raízes reais $x = 4$ ou $x = -3$. Assim, podemos escrever que

$$(x-4)(x+3) > 0,$$

em que $(x-4)(x+3)$ é forma fatorada de $x^2 - x - 12$.

Agora, é necessário analisar em quais condições este produto será maior que zero. Das regras que conhecemos sobre operações aritméticas, temos que o produto de dois termos será positivo quando ambos os termos forem positivos ou ambos forem negativos. Nesse sentido, segue que

$$(x - 4 > 0 \text{ e } x + 3 > 0) \text{ ou } (x - 4 < 0 \text{ e } x + 3 < 0).$$

No primeiro caso, obtemos que $x > 4$ e $x > -3$. Como ambos precisam acontecer simultaneamente, então é necessário estudar a sua interseção, é possível ser feita através de um método popularmente chamado de "varal". Isso será realizado através da análise gráfica de $x > 4$ e $x > -3$:

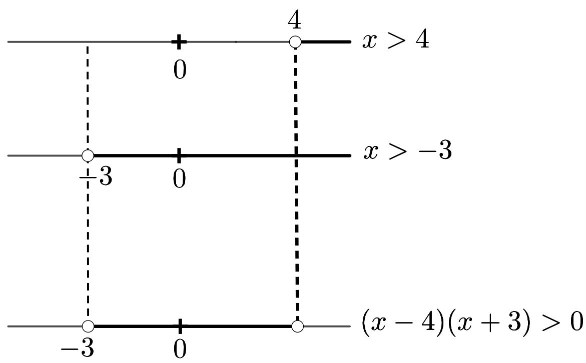


Figura 2.2.1: Varal para encontrar as soluções

Na Figura 2.2.1, observe que a primeira imagem representa os pontos da reta tais que $x > 4$; já o segundo representa os pontos em que $x > -3$; e o último representa a interseção de ambos. Note que, para isso, foram projetadas linhas verticais tracejadas, de modo que fosse possível perceber visualmente quais são seus pontos em comum. Neste caso, segue que $x > 4$.

Para o segundo caso, o pensamento é análogo, porém com $x < 4$ e $x < -3$. Então, observando a Figura 2.2.2

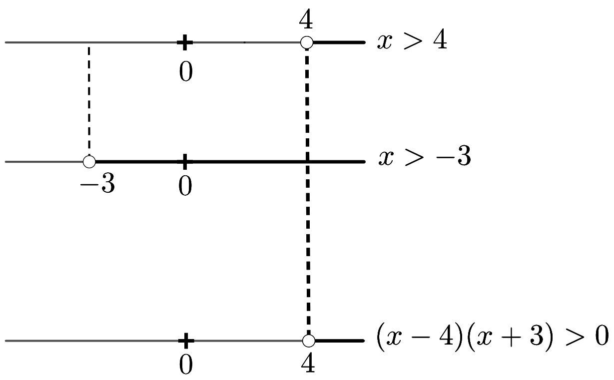


Figura 2.2.2: Varal para encontrar as soluções

obtemos que $x < -3$. Por fim, o conjunto solução deste problema, será dado pela união das soluções do primeiro com o segundo caso, isto é,

$$\{x \in \mathbb{R};\ x < -3 \text{ ou } x > 4\} = (-\infty, -3) \cup (4, \infty).$$

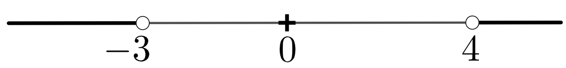


Figura 2.2.3: Conjunto solução

Obs. No exemplo anterior, foi mencionado o método de fatoração, que será abordado com mais detalhes no Capítulo de Polinômios, entretanto, para o entendimento deste conteúdo, podemos fazer um breve resumo sobre o procedimento utilizado.

Basicamente encontramos as raízes da equação do segundo grau e depois utilizamos para reescrever a expressão como um produto de dois fatores, ou seja, se x_1 e x_2 são raízes de uma equação de segundo grau da forma $ax^2+bx+c=0$, então podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$a(x-x_1)(x-x_2).$$

Exemplo 2.2.2 Vamos analisar o mesmo problema

$$x^2 - x - 12 > 0,$$

porém, agora, com uma outra abordagem. Primeiramente, resolvemos no caso em que há a igualdade, que do Exemplo 2.2.1 já sabemos que as soluções são dadas por $x = 4$ ou $x = -3$.

Pelo que já foi estudado na seção de equações do segundo grau, segue que a representação gráfica de $f(x) = x^2 - x - 12$ é dada por uma parábola, com concavidade direcionada para cima. Além disso, como $\Delta > 0$, segue que esta parábola terá interseção com o eixo x em dois pontos, que são justamente as raízes da equação.

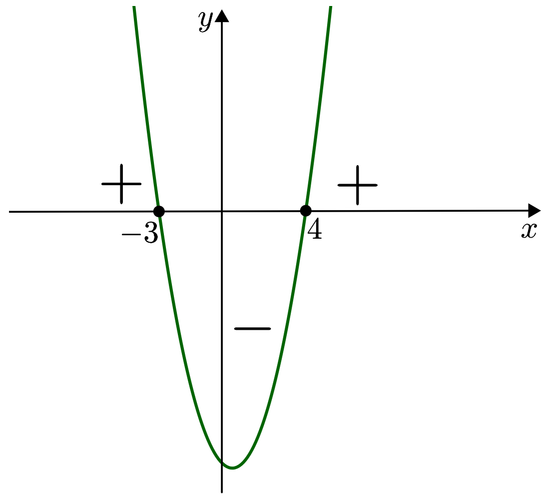


Figura 2.2.4: Gráfico de $x^2 - x - 12$

Observe que da Figura 2.2.4 podemos notar que para valores de x tais que $x > 4$ ou $x < -3$, a parábola está acima do eixo das abscissas, ou seja, esses valores em relação ao eixo y são positivos. Desta forma, os valores de x que tornam a expressão $x^2 - x - 12$ maior do que zero são os que pertencem ao conjunto $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$.

Obs. Os sinais de $(+)$ e $(-)$ nas figuras servem para exibir em quais intervalos de x a expressão é positiva e negativa, respectivamente.

Obs. Por uma questão de simplicidade, nos próximos exemplos e exercícios, não exibiremos o eixo y.

Exemplo 2.2.3 Considere a seguinte inequação do segundo grau

$$x^2 - 2x + 1 > 0.$$

Para ser avaliada a solução deste problema, primeiramente é necessário saber a solução para o caso em que há a igualdade.

Felizmente, como isso já foi feito no Exemplo 1.2.2, segue que para $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$ é a única solução.

Note que se desejam os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 - 2x + 1 > 0$ seja satisfeito. E se observado o gráfico em 2.2.5, conclui-se que isso ocorre tanto para $x < 1$ quanto para $x > 1$, já que a parábola está sempre acima do eixo x, com exceção do ponto $x = 1$. Portanto, o conjunto solução é dado por $\{x \in \mathbb{R}; x < 1 \text{ ou } x > 1\}$.

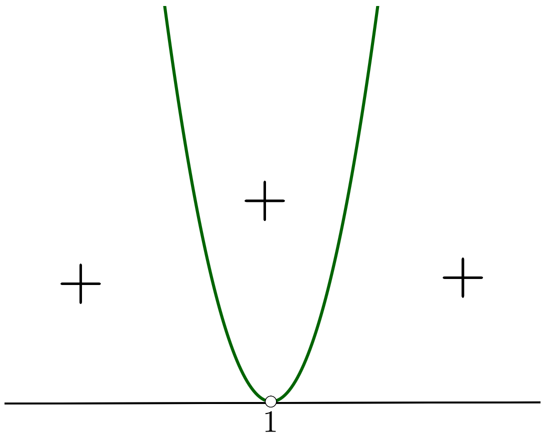


Figura 2.2.5: Gráfico de $x^2 - 2x + 1$

Obs. Perceba que, no Exemplo 2.2.3, estudou-se apenas o caso (>). Porém, para qualquer outro, o pensamento seria análogo, bastando apenas a análise do gráfico para obter o conjunto solução:

- Para $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, o conjunto solução seria todo o $\mathbb{R}$, já que, independentemente do valor de x, o gráfico de (2.2.3) está sempre acima do eixo x. Perceba que, agora, o ponto $x = 1$ está sendo incluído, pois se trata do caso ($\geq$), ou seja, $x^2 - 2x + 1 = 0$ é contemplada também.
- Para $x^2 - 2x + 1 < 0$, segue que não há solução, pois analisando pelo gráfico de (2.2.3), vê-se que a parábola está sempre acima do eixo x, ou seja, a expressão $x^2 - 2x + 1$ não assume valores negativos. Outra maneira de observar isso é utilizando uma das identidades de produtos notáveis, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Ou seja, a expressão do lado esquerdo da igualdade é um termo ao quadrado, isto é, nunca será um valor negativo.
- Para $x^2 - 2x + 1 \leq 0$, o conjunto solução é exatamente o mesmo que no Exemplo 1.2.2, pois está sendo avaliado o caso $x^2 - 2x + 1 = 0$; quando $x^2 - 2x + 1 < 0$, como já visto no item anterior, não há solução real.

Exemplo 2.2.4 Agora, considere a seguinte inequação, com $x \in \mathbb{R}$:

$$3x^2 - 5x - 2 \leq 0.$$

Como já explicado anteriormente, é necessário *a priori* encontrar a solução para o caso em que há a igualdade. Assim, utilizando a fórmula em (4.4), dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Calculando o valor de Δ,

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49.$$

Assim, como $\Delta > 0$, segue que o problema possui duas raízes reais obtidas abaixo:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}.$$

Logo, são soluções $x = 2$ ou $x = -\frac{1}{3}$, e o gráfico será dado por:

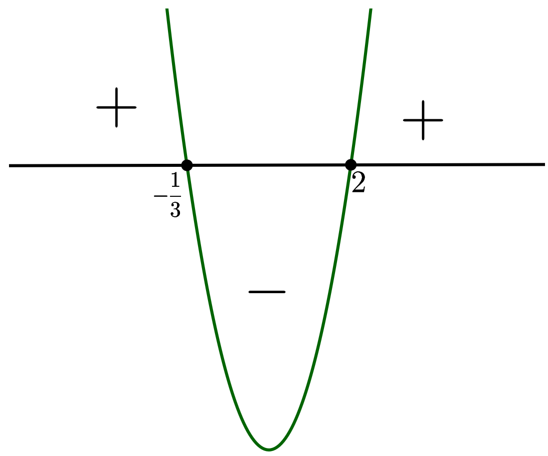


Figura 2.2.6: Gráfico de $3x^2 - 5x - 2$

Como são desejados os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $3x^2 - 5x - 2 \leq 0$, segue, pelo gráfico apresentado na Figura 2.2.6, que o conjunto solução é dado por

$$\left\{x \in \mathbb{R}; -\frac{1}{3} \leq x \leq 2\right\}.$$

Exercício resolvido 3 (PUC-PR) Determine a solução da inequação

$$(x-2)(-x^2 + 3x + 10) > 0,$$

em relação ao conjunto dos números reais.

Resolução: Note que, para resolver este problema, é necessário dividi-lo em dois casos, pois há um produto de duas expressões, dadas em termos de valores reais, de modo que o resultado será sempre positivo, e isso só é possível quando ambas as expressões são positivas ou ambas são negativas.

•Para $x - 2 > 0$ e $-x^2 + 3x + 10 > 0$:

Resolvendo ambas as inequações, segue que

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

e, para a segunda, será analisada primeiramente quando $-x^2 + 3x + 10 = 0$. Assim, utilizando (4.4), que é dado por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

segue que

$$\Delta = 9 - 4 \cdot (-1) \cdot 10 = 49 > 0,$$

ou seja, existem duas raízes reais e distintas que podem ser calculadas da seguinte forma:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 7}{-2}.$$

Desta forma, $x = -2$ ou $x = 5$ e com o seguinte gráfico

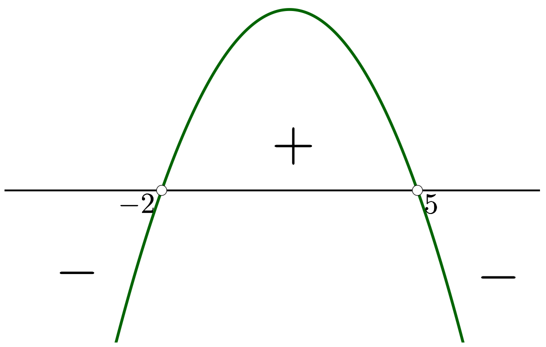


Figura 2.2.7: Gráfico de $-x^2 + 3x + 10$

é possível observar que $-x^2 + 3x + 10 > 0$ quando $-2 < x < 5$. Logo, utilizando o método do "varal",

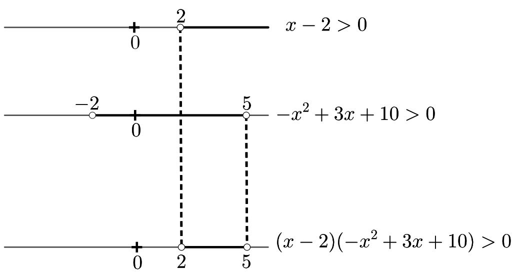


Figura 2.2.8: Varal para encontrar as soluções

obtemos que $2 < x < 5$.

•Para $x - 2 < 0$ e $-x^2 + 3x + 10 < 0$:

Da mesma maneira que no tópico anterior, solucionam-se ambas as inequações:

$$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$$

e com respeito à segunda, as soluções de $-x^2 + 3x + 10 = 0$ já foram encontradas $(x = -2$ ou $x = 5)$, porém a análise agora é para

$$-x^2 + 3x + 10 < 0,$$

em que as soluções são $x < -2$ ou $x > 5$, que pode ser verificado na Figura 2.2.7. Novamente, utilizando o método do "varal"

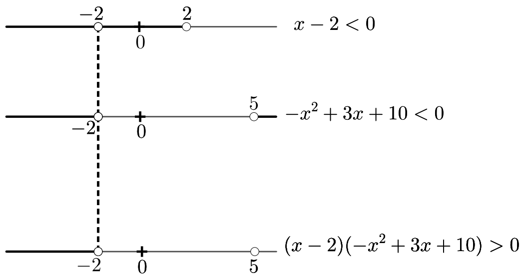


Figura 2.2.9: Varal para encontrar as soluções

chegamos que $x < -2$. Portanto, por ambos os tópicos estudados, segue que o conjunto solução para $(x-2)(-x^2+3x+10) > 0$ é dado por $\{x \in \mathbb{R};\ x < -2$ ou $2 < x < 5\}$, como pode ser observado também pela figura abaixo:

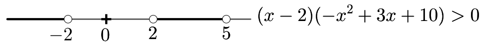


Figura 2.2.10: Conjunto solução do problema

Exercício resolvido 4 (PUC-Rio 2009) Quantas soluções inteiras a inequação

$$x^2 + x - 20 \leq 0$$

admite?

a) 2
b) 3
c) 7
d) 10
e) 13

Resolução: Vamos analisar primeiramente o caso em que

$$x^2 + x - 20 = 0$$

e encontrar as raízes desta equação. Com efeito, vamos utilizar a fórmula (4.4) dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Calculando o valor de Δ, temos

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 81,$$

ou seja, existem duas soluções reais e distintas para este problema. Assim, podemos obtê-las da seguinte forma

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 9}{2}.$$

Logo, concluímos que $x = -5$ ou $x = 4$ são soluções da equação anterior, que pode ser representada pelo gráfico:

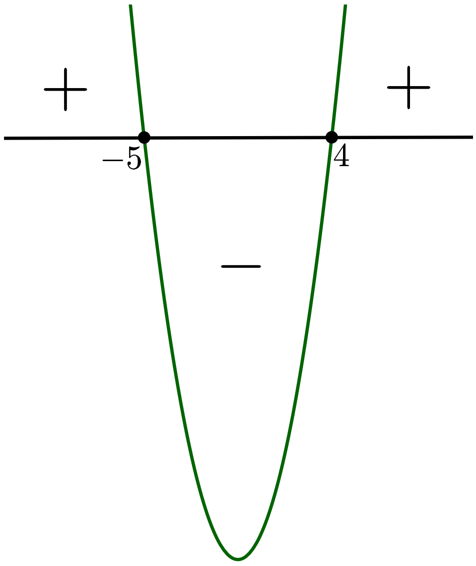


Figura 2.2.11: Gráfico de $x^2 + x - 20$

Pela Figura 2.2.11, observamos que o conjunto solução para $x^2 + x - 20 \leq 0$ é dado por

$$\{x \in \mathbb{R};\ -5 \leq x \leq 4\}.$$

Entretanto, desejamos apenas as soluções inteiras. Então, o conjunto se restringe a

$$\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$$

que possui 10 elementos no total. Portanto, a alternativa correta é d).

2.3 Inequação quociente

Inequação quociente basicamente se refere a resolver problemas envolvendo o quociente de duas expressões com uma desigualdade.

Exemplo 2.3.1 Alguns exemplos de inequação quociente:

- $\dfrac{x+1}{x+3} > 3;$
- $\dfrac{x^2 - 3x}{x-1} \geq 0;$
- $\dfrac{2}{x+9} <$

A fim de solucionarmos esses tipos de inequações, utilizaremos o método do "varal" já abordado na seção anterior, entretanto com uma particularidade a mais para ser levada em consideração.

Observe que, ao trabalharmos com uma divisão de duas expressões, é necessário atentar-se ao denominador, pois sabemos que nesse tipo de operação o zero pode ser um problema. Ou seja, antes de resolvermos uma inequação quociente, precisamos garantir que o denominador não seja zero.

Exemplo 2.3.2 Considere a inequação

$$\frac{x+1}{x-3} > 0,$$

em que $x \in \mathbb{R}$.

Vamos determinar os valores de x de modo que o denominador seja diferente de zero:

$$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3,$$

ou seja, para qualquer valor de x real e diferente de 3, o denominador será não nulo.

Exemplo 2.3.3 Considere a inequação

$$\frac{x+4}{x^2 - 3x - 7} \leq 0,$$

em que $x \in \mathbb{R}$.

Note que agora estamos com uma expressão de grau dois no denominador, então vamos utilizar a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e verificar quando a expressão se anula, isto é,

$$x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Assim, calculando o valor de Δ, temos que

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25,$$

e consequentemente,

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2}.$$

Logo, segue que $x = 1$ ou $x = 6$. Como desejamos que $x^2 - 7x + 6 \neq 0$, concluímos que $x \neq 1$ e $x \neq 6$.

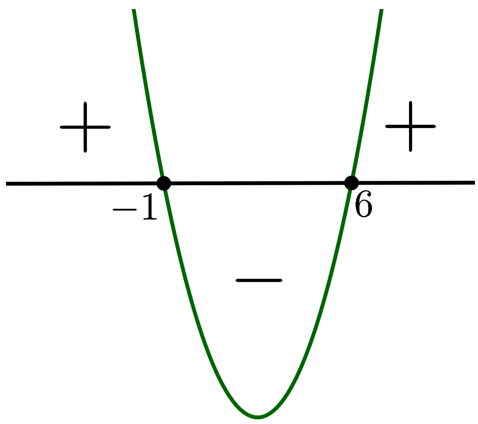


Figura 2.3.1: Gráfico de $x^2 - 7x + 6$

Agora que já analisamos alguns exemplos que abordam as condições para que o denominador não se anule, podemos partir para a resolução de uma inequação quociente, que é o foco desta seção.

Exemplo 2.3.4 Considere a inequação

$$\frac{x+1}{x-3} > 0,$$

em que $x \in \mathbb{R}$.

Como já dito anteriormente, utilizaremos o método do varal para resolver este tipo de problema. Deste modo, note que para uma divisão ser maior do que zero, então o numerador e o denominador devem ser maiores do que zero, ou ambos menores do que zero, ou seja,

$$(x+1>0 \text{ e } x-3>0) \text{ ou } (x+1<0 \text{ e } x-3<0).$$

No primeiro caso, temos que $x > -1$ e $x > 3$:

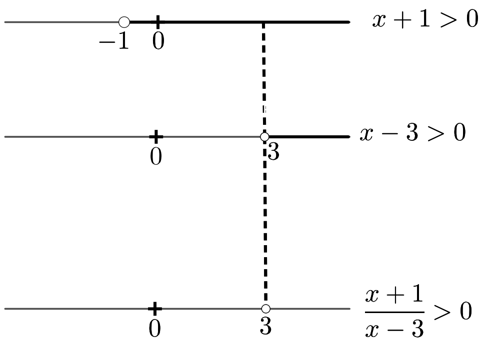


Figura 2.3.2: Varal para encontrar as soluções

Assim, para que ambos ocorram simultaneamente, devemos ter que $x > 3$.

Já no segundo caso, queremos a interseção de $x < -1$ com $x < 3$:

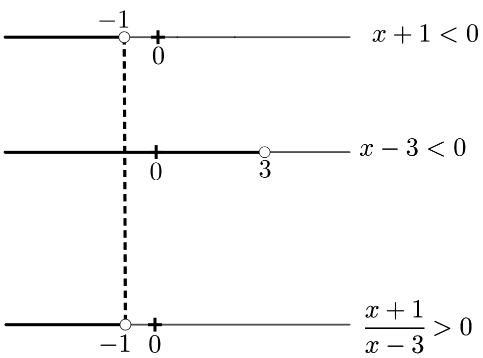


Figura 2.3.3: Varal para encontrar as soluções

Logo, obtemos que $x < -1$, e consequentemente, a solução da inequação é dada por

$$\{x \in \mathbb{R};\ x < -1 \text{ ou } x > 3\}.$$

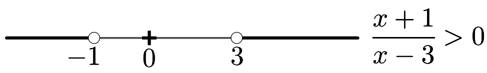


Figura 2.3.4: Conjunto solução

Obs. Observe que, na solução do Exemplo 2.3.2, $x \neq 3$. Então, esta condição deve ser contemplada, todavia como o conjunto solução da inequação condiciona que $x < -1$ ou $x > 3$, segue que o caso em que $x \neq 3$ já está incluído.

Exemplo 2.3.5 Considere a inequação

$$\frac{x+4}{x^2-3x-7} \leq 0,$$

em que $x \in \mathbb{R}$.

Neste caso, faremos a mesma análise, ou seja, como desejamos que a divisão seja menor ou igual a zero, então

$$(x+4 \geq 0 \text{ e } x^2-3x-7<0) \text{ ou } (x+4 \leq 0 \text{ e } x^2-3x-7>0).$$

Para o primeiro caso, temos que $x \geq -4$ e $1 < x < 6$ (basta observar a Figura 2.3.1):

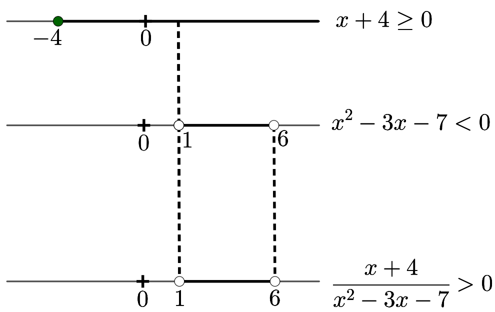


Figura 2.3.5: Varal para encontrar as soluções

Assim, obtemos que sua interseção é dada por $1 < x < 6$.

No segundo caso, necessitamos que $x \leq -4$ e $(x < 1 \text{ ou } x > 6)$ (basta observar a Figura 2.3.1):

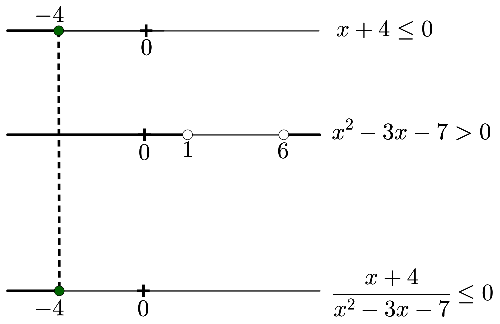


Figura 2.3.6: Varal para encontrar as soluções

Assim, para que ambos ocorram simultaneamente, devemos ter que $x \leq 4$.

Portanto, obtemos que o conjunto solução é dado por

$$\{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 6 \text{ ou } x \leq -4\}$$

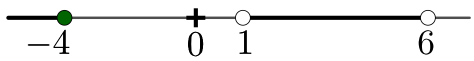


Figura 2.3.7: Conjunto solução

Exercício resolvido 5 (PUC-Rio 2016) Considere a inequação

$$\frac{x+1}{-x-5} \leq 0,$$

com $x \in \mathbb{R}$. Qual é o conjunto solução da inequação?

a) $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$
b) $(-\infty, -5) \cup [-1, \infty)$
c) $[0, \infty)$
d) $[-5, \infty)$
e) $(-1, \infty)$

Resolução: Neste caso, utilizaremos o método do varal para resolver o problema. Com efeito, para que a divisão

$$\frac{x+1}{-x-5}$$

seja menor ou igual que zero, então teremos que

$$(x+1 \leq 0 \text{ e } -x-5 > 0) \text{ ou } (x+1 \geq 0 \text{ e } -x-5 < 0).$$

Note que já estamos excluindo o caso em que $-x-5=0$, que sabemos que não pode ocorrer. Deste modo, temos no primeiro caso que $x \leq -1$ e $x < -5$, ou seja,

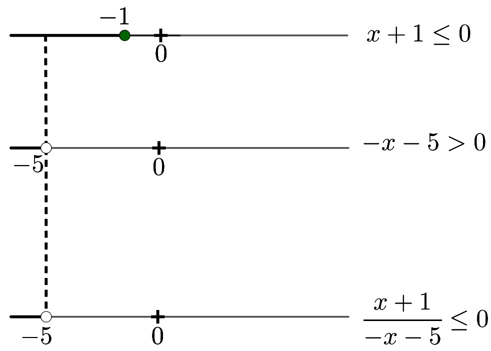


Figura 2.3.8: Varal para encontrar as soluções

Assim, obtemos que sua interseção é dada por $x < -5$. Por outro lado, se $x \geq -1$ e $x > -5$, segue que

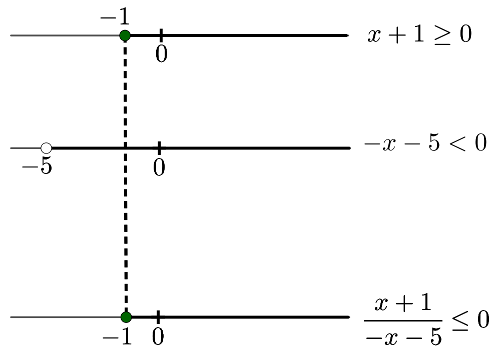


Figura 2.3.9: Varal para encontrar as soluções

Com isso, chegamos que $x \geq -1$. E, considerando os dois casos, podemos concluir que o conjunto solução é dado por

$$\{x \in \mathbb{R};\ x < -5 \text{ ou } x \geq -1\} = (-\infty, -5) \cup [-1, \infty).$$

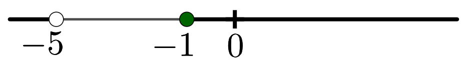


Figura 2.3.10: Conjunto solução

Portanto, a alternativa correta é b).

3 Exercícios propostos

Exercício 4.1 Dado $x \in \mathbb{R}$, encontre as soluções das seguintes equações do primeiro grau:

a) $5x + 10 = 3x - 8$.

b) $-\sqrt{3}x - 6 = 0$.

c) $\frac{5}{9}x - 5 = 0$.

Exercício 4.2 (PUC-SP) Um feirante compra maçãs ao preço de R$ 0,75 para cada duas unidades e as vende ao preço de R$ 3,00 para cada seis unidades. O número de maçãs que deverá vender para obter um lucro de R$ 50,00 é:

Exercício 4.3 (PUC-CAMP 1999) Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento, é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo?

Exercício 4.4 Encontre a solução da seguinte equação:

$$2^{x+1} = \sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{2^8},$$

com $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 4.5 (UFPR 2012) Um grupo de cientistas decidiu utilizar o seguinte modelo logístico, bastante conhecido por matemáticos e biólogos, para estimar o número de pássaros, P(t), de determinada espécie numa área de proteção ambiental:

$$P(t) = \frac{500}{1 + 2^{2-t}}.$$

sendo t o tempo em anos e $t = 0$ o momento em que o estudo foi iniciado.

a) Em quanto tempo a população chegará a 400 indivíduos?

b) À medida que o tempo t aumenta, o número de pássaros dessa espécie se aproxima de qual valor? Justifique sua resposta.

Exercício 4.6 (VUNESP) O valor de x na equação $\log_{3\sqrt{3}}(x) = \frac{1}{3}$ é:

Exercício 4.7 (ENEM 2018) Para criar um logotipo, um profissional da área de design gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.

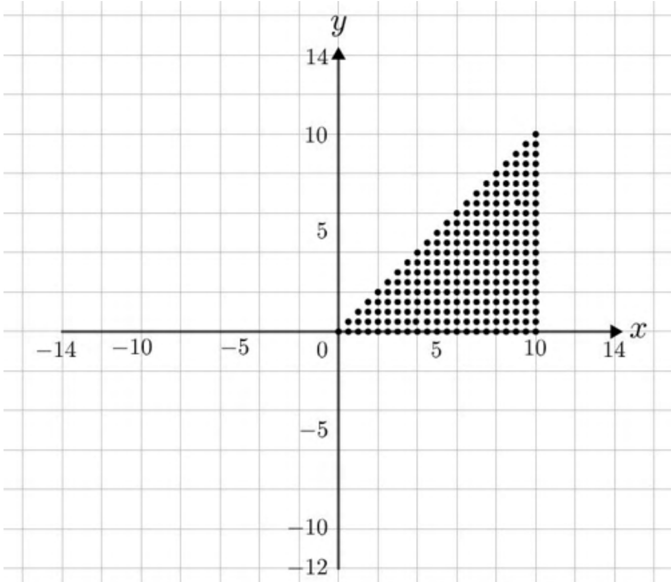


Figura 3.0.1: Gráfico de pontos (x, y)

Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico.

Esse conjunto é dado pelos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que

a) $0 \le x \le y \le 10$
b) $0 \le y \le x \le 10$
c) $0 \le x \le 10$, $0 \le y \le 10$
d) $0 \le x + y \le 10$
e) $0 \le x + y \le 20$

Exercício 4.8 (UECE 2010) A idade de Paulo, em anos, é um número inteiro par que satisfaz a desigualdade $x^2 - 32x + 252 < 0$. O número que representa a idade de Paulo pertence ao conjunto

a) $\{12, 13, 14\}$
b) $\{15, 16, 17\}$
c) $\{18, 19, 20\}$
d) $\{21, 22, 23\}$

Exercício 4.9 (UFRGS 2017) Sendo a e b números reais, considere as afirmações a seguir.

I) Se $a < b$ então $-a > -b$
II) Se $a > b$ então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
III) Se $a < b$ então $a^2 < b^2$

Quais estão **corretas**?

a) Apenas I
b) Apenas II
c) Apenas III
d) Apenas I e II
e) I, II e III

Exercício 4.10 (RFB-Esaf 2009) Considere as inequações dadas por:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \leq 0 \text{ e } g(x) = -2x^2 + 3x + 2 \geq 0.$$

Sabendo-se que A é o conjunto solução de $f(x)$ e B o conjunto solução de $g(x)$, então o conjunto $Y = A \cap B$ é igual a:

a) $Y = \left\{x \in \mathbb{R};\ -\frac{1}{2} < x \leq 2\right\}$
b) $Y = \left\{x \in \mathbb{R};\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$
c) $Y = \{x \in \mathbb{R};\ x = 1\}$
d) $Y = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$
e) $Y = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 0\}$

Exercício 4.11 (ENEM 2020) Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real.

A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é

a) $T(x) = -x^2 + 16x + 57$

b) $T(x) = -\left(\frac{11}{16}\right)x^2 + 11x + 72$

c) $T(x) = \left(\frac{3}{5}\right)x^2 - \left(\frac{24}{5}\right)x + \frac{381}{5}$

d) $T(x) = -x^2 - 16x + 87$

e) $T(x) = \left(\frac{11}{16}\right)x^2 - \left(\frac{11}{2}\right)x + 72$

Exercício 4.12 (ENEM 2020) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R$ 2,00;
- Barra II: R$ 3,50;
- Barra III: R$ 4,00;
- Barra IV: R$ 7,00;
- Barra V: R$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate.

A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro.

Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

Exercício 4.13 (ENEM 2009) Um fazendeiro doa, como incentivo, uma área retangular de sua fazenda para seu filho, que está indicada na figura como 100% cultivada. De acordo com as leis, deve-se ter uma reserva legal de 20% de sua área total. Assim, o pai resolve doar mais uma parte para compor a reserva para o filho, conforme a figura.

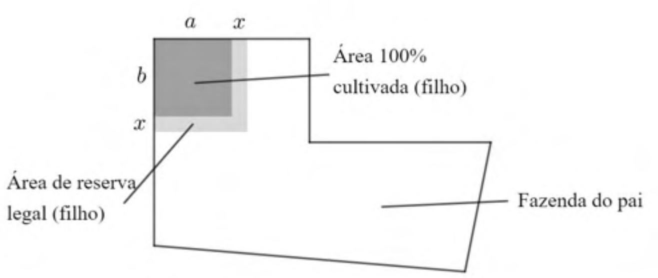


Figura 3.0.2: Figura da questão do ENEM

De acordo com a figura acima, o novo terreno do filho cumpre a lei, após acrescentar uma faixa de largura x metros contornando o terreno cultivado, que se destinará à reserva legal (filho). O dobro da largura x da faixa é

a) $10\%(a+b)^2$

b) $10\%(a \cdot b)^2$

c) $\sqrt{a+b} - (a+b)$

d) $\sqrt{(a+b)^2 + ab} - (a+b)$

e) $\sqrt{(a+b)^2 + ab} + (a+b)$

Exercício 4.14 (ENEM 2017) Uma escola organizou uma corrida de revezamento 4 x 400 metros, que consiste em uma prova esportiva na qual os atletas correm 400 metros cada um deles, segurando um bastão, repassando-o de um atleta para outro da mesma equipe, realizando três trocas ao longo do percurso, até o quarto atleta, que cruzará a linha de chegada com o bastão. A equipe ganhadora realizou a prova em um tempo total de 325 segundos.

O segundo corredor da equipe ganhadora correu seus 400 metros 15 segundos mais rápido do que o primeiro; já o terceiro realizou seus 400 metros 5 segundos mais rápido que o segundo corredor, e o último realizou seu percurso em $\frac{3}{4}$ do tempo realizado pelo primeiro.
Qual foi o tempo, em segundos, em que o último atleta da equipe ganhadora realizou seu percurso de 400 metros?

a) 58
b) 61
c) 69
d) 72
e) 96

Exercício 4.15 (PUCMG 2001) Os números m e n são as raízes da equação $x^2 - 2rx + r^2 - 1 = 0$. O valor de $m^2 + n^2$ é:

a) $2r + 1$
b) $2 + r$
c) $r^2 + 1$
d) $2(r^2 + 1)$

Exercício 4.16 (PUCCAMP 2001) Em agosto de 2000, Zuza gastou R$ 192,00 na compra de algumas peças de certo artigo. No mês seguinte, o preço unitário desse artigo aumentou R$ 8,00 e, com a mesma quantia que gastou em agosto, ele pode comprar duas peças a menos. Em setembro, o preço de cada peça de tal artigo era

a) R$ 24,00
b) R$ 25,00
c) R$ 28,00
d) R$ 30,00
e) R$ 32,00

Exercício 4.17 (PUC-PR 2005) Sejam “x_1" e “x_2" números reais, zeros da equação $(2-k)x^2 + 4kx + k + 1 = 0$. Se $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$, deve-se ter

a) $k > 0$
b) $0 < k < 3$
c) $k < -1$ ou $k > 2$
d) $-1 < k < 2$
e) $k > 2$

Exercício 4.18 (UFSM 2012) Suponha que um campo de futebol seja colocado em um sistema cartesiano ortogonal, conforme mostra a figura.

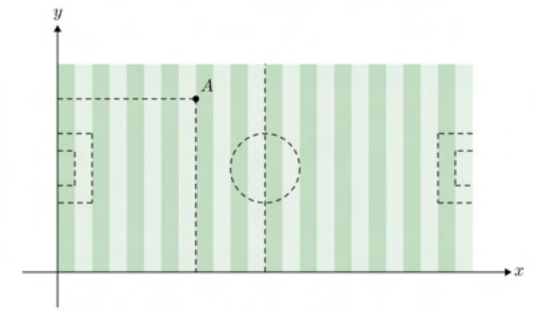


Figura 3.0.3: Campo de futebol no plano cartesiano

Para que o ponto $A = (\log_{10}(x+1) + 1, \log_{10}(x^2 + 35))$ tenha abscissa e ordenada iguais, é necessário e suficiente que

a) $x > -1$
b) $x = 5$
c) $x < -1$
d) $x = -5$
e) $x > 5$

5

Polinômios

Polinômios

Um dos dilemas mais antigos na história da Matemática é a resolução de equações polinomiais. Desde a Babilônia, os matemáticos já conheciam métodos para resolver equações polinomiais do primeiro e segundo grau e até para equações indeterminadas do tipo $x^2 + y^2 = z^2$. Entretanto, os métodos para resolução de equações de maior grau só foram criados cerca de mil anos depois. Os gregos, como Diofantino, aprimoraram os estudos egípcios e babilônicos, acrescentando maior rigor matemático, que possibilitou aos árabes, em particular para Al-Kwharizmi, considerado o pai da álgebra, mostrar exemplos e provas da teoria básica. Em meados do século IX, Abu Kamil expandiu os estudos de Al-Kwharizmi e provou leis básicas e identidades que posteriormente auxiliaram na fundamentação do que conhecemos por polinômios.

No século XIII, Leonardo Fibonacci encontrou uma aproximação para equações cúbicas $x^3 + 2x^2 + cx = d$, entretanto, apenas no século XVI, com os estudos de Scipone del Ferro, Niccoló Tartaglia e Gerolamo Cardano, encontrou-se a resolução das equações cúbicas. Já o matemático Ludovico Ferrari descobriu a resolução para as de quarto grau. Ainda no século XVI, René Descartes, por meio do desenvolvimento da geometria analítica, contribuiu para a teoria de equações com a "regra dos sinais" para encontrar as raízes positivas e negativas das equações, também foi ele que popularizou a notação de um polinômio, onde os "as" denotam constantes e os x denotam as variáveis.

Os polinômios têm aplicações em diversas áreas como na física, onde são usados para ajudar a descrever fenômenos como a velocidade de corpos, e na estatística onde são usados para verificar valores de crescimento populacional. E esses são só alguns exemplos de onde são utilizados. Com os conceitos apresentados neste capítulo, você será capaz de entender o que é um polinômio e suas propriedades.

1 Definição

Os polinômios são expressões algébricas formadas pela multiplicação ou adição de números e variáveis, de modo que as variáveis possuam expoentes inteiros não negativos. Abaixo temos alguns exemplos de polinômios de uma variável.

Exemplo 1.0.1

1. $x + 3$.
2. $x^2 + 5x + 1$.
3. $x^5 + 34x^3 + x + 8$.
4. $\cos(2)x^2 + 5x$

Definição 1.1 A forma geral de um polinômio de uma variável real é dada pela expressão,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

na qual x é a variável, $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais e os expoentes de x são todos números naturais, ou seja, $0, 1, 2, \ldots, n$.

Observe algumas nomenclaturas dos polinômios:

- $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os **coeficientes numéricos** do polinômio e a_0 é o coeficiente (ou termo) independente do polinômio;
- Chamamos cada parcela $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n$ de termo do polinômio.

Obs. Se a expressão apresentar expoentes de x que são negativos ou não inteiros, então a expressão não é um polinômio.

Exemplo 1.0.2 Vamos obter os coeficientes numéricos dos polinômios abaixo:

- $5+3x+4x^2$ é um polinômio com coeficientes numéricos $a_0=5$,
$a_1=3$ e $a_2=4$.

- $2x+3$ é um polinômio com coeficientes numéricos $a_0=3$ e $a_1=2$.

- $\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+5$ é um polinômio com coeficientes numéricos $a_0=5, a_1=\frac{1}{2}$ e $a_3=\frac{3}{4}$.

Exemplo 1.0.3 Vamos verificar se as expressões a seguir são polinômios:

- $2x+3x^{-2}$ não é um polinômio, pois $3x^{-2}$ tem um expoente que é um número inteiro negativo.

- $1+4x+3x^{\frac{1}{2}}$ não é um polinômio, pois o expoente não pode ser uma fração irredutível.

- $4x^{\frac{4}{2}}+x^{\frac{5}{5}}$ é um polinômio, pois $\frac{4}{2}=2$ e $\frac{5}{5}=1$, então podemos reescrevê-lo como $4x^2+x^1$.

2 Função polinomial

Definição 2.1 A função polinomial é uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, que associa cada $x\in\mathbb{R}$ ao polinômio $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$, ou seja,

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

em que n é um número inteiro não negativo e a_n é diferente de 0.

Exemplo 2.0.1

- $f(x)=ax+b$, a função afim é uma função polinomial.

- $p(x)=45x^2+\frac{1}{x}+2x$ não é uma função polinomial, pois $\frac{1}{x}=x^{-1}$ não é um termo de um polinômio.

3 Valor numérico de um polinômio

O valor numérico de um polinômio será encontrado ao substituir a variável deste polinômio $p(x)$ por um número real, podemos dizer que ele é a imagem da função polinomial no ponto dado.

Definição 3.1 Considere a função polinomial $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

que assume valores em qualquer ponto do seu domínio, nesse caso, o conjunto $\mathbb{R}$, de modo que se temos um $\beta\in\mathbb{R}$, podemos tomar $x=\beta$ e prosseguir da seguinte maneira:

$$p(\beta)=a_n\beta^n+a_{n-1}\beta^{n-1}+\cdots+a_2\beta^2+a_1\beta+a_0.$$

Exemplo 3.0.1

- O valor numérico do polinômio $p(x)=3+2x+4x^2$ para $x=3$ é

$$\begin{aligned}p(3)&=3+2\cdot3+4\cdot(3)^2\\&=3+6+4\cdot9\\&=3+6+36\\&=45.\end{aligned}$$

- O valor numérico do polinômio $f(x)=4x^3+x^4$ para $x=2$ é

$$\begin{aligned}f(2)&=4\cdot(2)^3+(2)^4\\&=4\cdot8+16\\&=32+16\\&=48.\end{aligned}$$

Exercício resolvido 1 (UBERL) Se $P(x)$ é um polinômio tal que
$2P(x)+x^2P(x-1)=x^3+2x+2$, então $P(1)$ é igual a:

(a) 1.
(b) -1.
(c) -2.
(d) 0.
(e) 2.

Resolução: Para resolver esse problema, considere $x=1$, isto é, vamos substituir todos os x do polinômio por 1, inclusive em $P(x)$ e $P(x-1)$ assim, temos

$$\begin{aligned}2P(x)+x^2P(x-1)&=x^3+2x+2\\2P(1)+1^2P(1-1)&=1^3+2\cdot1+2\\2P(1)+P(0)&=1+2+2,\end{aligned}$$

agora vamos isolar o $P(1)$ na expressão

$$\begin{aligned}2P(1)+P(0)&=1+2+2\\2P(1)+P(0)&=5\\2P(1)&=5-P(0)\\P(1)&=\frac{5-P(0)}{2}.\end{aligned}$$

Desse modo, precisamos descobrir quanto vale $P(0)$, para isso considere $x = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 2P(0) + 0^2 P(x-1) &= 0^3 + 2\cdot 0 + 2 \\ 2P(0) + 0^2 P(0-1) &= 0^3 + 2\cdot 0 + 2 \\ 2P(0) &= 0 + 2 \\ 2P(0) &= 2 \\ P(0) &= 1. \end{aligned}$$

Sabendo que $P(0) = 1$ vamos substituir na equação a seguir para achar o valor de $P(1)$

$$P(1) = \frac{5 - P(0)}{2} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Portanto, a resposta certa é a alternativa (e).

Exercício resolvido 2 (FGV - Modificado) Num polinômio do tipo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, o coeficiente de x^3 é 1. Sabendo que $P(1) = 0$, $P(2) = 0$ e $P(3) = 30$, calcule o valor de $P(-1)$.

(a) 56.
(b) 32.
(c) -3.
(d) 66.
(e) n.d.a.

Resolução: Temos que o coeficiente de x^3 é 1, então $a = 1$. Pelo enunciado, temos que $P(1) = 0$, $P(2) = 0$ e $P(3) = 30$, com isso

$$\begin{aligned} &P(1) = 1 + b + c + d = 0, \\ &P(2) = 2^3 + 2^2 b + 2c + d = 8 + 4b + 2c + d = 0, \\ &P(3) = 3^3 + 3^2 b + 3c + d = 27 + 9b + 3c + d = 30, \end{aligned}$$

então temos o sistema

$$\begin{cases} 1 + b + c + d = 0 \\ 8 + 4b + 2c + d = 0 \\ 27 + 9b + 3c + d = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c + d = -1 \\ 4b + 2c + d = -8 \\ 9b + 3c + d = 3, \end{cases}$$

separando esse sistema em dois, obtemos

$$(1)\begin{cases} b + c + d = -1 \\ 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2)\begin{cases} b + c + d = -1 \\ 9b + 3c + d = 3, \end{cases}$$

em (1) temos

$$\begin{cases} b + c + d = -1 \\ 4b + 2c + d = -8, \end{cases}$$

multiplicando a primeira linha por (-4) e somando com a segunda linha, segue que

$$\begin{cases} -4b - 4c - 4d = 4 \\ 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \Rightarrow -2c - 3d = -4 \Rightarrow 2c + 3d = 4.$$

Agora em (2), vamos multiplicar a primeira linha por (-9) e somar com a segunda linha

$$\begin{cases} -9b - 9c - 9d = 9 \\ 9b + 3c + d = 3 \end{cases} \Rightarrow -6 - 8d = 12,$$

com isso temos o sistema

$$\begin{cases} 2c + 3d = 4 \\ -6c + 8d = 12, \end{cases}$$

multiplicando a primeira linha por 3 e somando com a segunda linha

$$\begin{cases} 6c + 9d = 12 \\ -6c + 8d = 12 \end{cases} \Rightarrow d = 24,$$

desse modo,

$$\begin{aligned} 6c + 9d = 12 \Rightarrow 6c + 9\cdot 24 &= 12 \\ 6c + 216 &= 12 \\ 6c &= -204 \\ c &= -34, \end{aligned}$$

e na equação $b + c + d = -1$,

$$\begin{aligned} b + c + d = -1 \Rightarrow b - 34 + 24 &= -1 \\ b - 10 &= -1 \\ b &= 9. \end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes a, b e c no polinômio, segue que

$$P(x) = x^3 + 9x^2 - 34x + 24.$$

Portanto, $P(-1)$ será

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 + 9\cdot(-1)^2 - 34\cdot(-1) + 24 \\ &= -1 + 9 + 34 + 24 \\ &= 66. \end{aligned}$$

Logo, a resposta correta é a alternativa (d).

---

4 Grau de um polinômio

Nesta seção, iremos falar sobre o grau de um polinômio e descobriremos como encontrá-lo. Esse conceito é uma característica importante dos polinômios, pois com ele é possível saber quantas raízes reais podem existir no polinômio, além de determinar o método que deve ser usado para encontrar as raízes do polinômio.

Considere os três polinômios do Exemplo (1.0.1), $x + 3$, $x^2 + 5x + 1$ e $x^5 + 34x^3 + x + 8$, note que são três polinômios de variável real x, no entanto repare que eles possuem coeficientes e expoentes diferentes. Vejamos $x + 3$ possui dois termos, $1x^1$ e 3, desse modo, podemos observar como característica desse polinômio que o maior expoente da variável x é 1, nisto dizemos que o grau dele é 1. Agora, analisando x^2+5x+1, vemos que esse é um polinômio que possui 3 termos, sendo x^2, $5x^1$ e 1, note que o maior expoente da variável x nesse polinômio é 2. Por fim, estudando, x^5+34x^3+x+8, temos que ele possui 4 termos, sendo x^5, $34x^3$, x e 8, de modo análogo às últimas duas análises, temos que o grau dele é 5, pois 5 é o maior expoente da variável x.

Dessa forma, dizemos que o grau de um polinômio é o maior expoente da variável desse polinômio. Generalizando, encontramos a seguinte definição:

Definição 4.1 O grau de um polinômio é o maior expoente da variável com $a_n \neq 0$.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, e denotamos por $gr(P(x)) = n$ o grau do polinômio.

4.1 Como encontrar o grau de um polinômio

Como visto anteriormente, o grau de um polinômio é o maior expoente da variável, entretanto nem sempre os polinômios vêm de forma “organizada”, como visto na Definição 1.1 e nos polinômios do Exemplo (1.0.1).

Sendo assim, para encontrar o grau de um polinômio de uma variável, podemos seguir 2 passos:

1. Organizar de forma decrescente os expoentes da variável.
2. O maior expoente é o grau deste polinômio.

Exemplo 4.1.1 Qual é o grau do polinômio $a(x) = 7x^4 - 3x^2 + x^6 + x^6 + x - 7$?

Podemos encontrar o grau do polinômio $a(x)$ seguindo os passos:

1. Organizar os termos:

$$a(x) = x^6 + x^6 + 7x^4 - 3x^2 - 7 = 2x^6 + 7x^4 - 3x^2 - 7.$$

Assim,

$$a(x) = 2x^6 + 7x^4 - 3x^2 - 7.$$

2. O maior expoente é o grau deste polinômio:

$$gr(2x^6 + 7x^4 - 3x^2 - 7) = 6.$$

Logo, o grau do polinômio $a(x) = 7x^4 - 3x^2 + 2x^6 + x - 7$ é 6.

Exemplo 4.1.2 Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o polinômio $p(x) = (a-4)x^3 - 6x^2 + 8x + 1$ tenha grau 3.

Para que $p(x)$ tenha grau 3, o coeficiente $(a-4)$ tem que ser um número real diferente de zero, isto é,

$$a - 4 \neq 0 \Rightarrow a \neq 4.$$

Logo, quando $a \neq 4$, o polinômio $p(x)$ tem grau 3.

4.2 Tipos de polinômios

Podemos classificar os polinômios analisando o seu grau.

Grau	Número	Nome
Zero	0	Constante Polinomial
Um	1	Polinômio Afim
Dois	2	Polinômio Quadrático
Três	3	Polinômio Cúbico
Quatro	4	Polinômio do $4°$ grau
Cinco	5	Polinômio do $5°$ grau
Seis	6	Polinômio do $6°$ grau
Sete	7	Polinômio do $7°$ grau

Tabela 1: Classificação dos polinômios

Exemplo 4.2.1

- $6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$ é um polinômio do $5^{\underline{o}}$ grau.
- $-x^3+x^9+2$ é um polinômio do $4^{\underline{o}}$ grau.
- x^2+2x+3 é um polinômio quadrático.
- $x^{-2}+1$ não é um polinômio, pois $-2 < 0$.

Polinômio nulo

Nesta seção, iremos abordar um polinômio específico, que é o polinômio nulo.

Definição 4.2 Dizemos que um polinômio é nulo, quando todos os seus coeficientes são iguais a zero, ou seja,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

será nulo quando

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0.$$

Agora que definimos o polinômio nulo, podemos ter o seguinte questionamento: qual é o grau de um polinômio nulo?

Pela definição, temos que o grau de um polinômio é determinado pelo maior expoente da variável x com coeficientes não nulos, assim o seu grau não pode ser zero, pois o coeficiente de x^0 é o valor 0.

Note que o grau do polinômio nulo não pode ser um número n inteiro, pois todos os coeficientes de x são 0.

Deste modo, podemos concluir que o polinômio nulo não possui grau, isto é, o grau dele é indefinido.

Exercício resolvido 1 (MackenzieSP) Calcule os valores de $m, n, l \in \mathbb{R}$ para que o polinômio $p(x) = (2m-1)x^3 - (5n-2)x^2 + (3-2l)$ seja nulo.

Resolução: Para $p(x)$ possuir grau nulo, temos que

$$\begin{cases} (2m-1) = 0 \\ (5n-2) = 0 \\ (3-2l) = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, temos

$$\begin{cases} (2m-1) = 0 \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2} \\ (5n-2) = 0 \Rightarrow 5n = 2 \Rightarrow n = \dfrac{2}{5} \\ (3-2l) = 0 \Rightarrow 2l = 3 \Rightarrow l = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Logo, para que $p(x)$ seja nulo, $m = \frac{1}{2}, n = \frac{2}{5}$ e $l = \frac{3}{2}$.

5 Igualdade de polinômios

Definição 5.1 Dizemos que dois polinômios são iguais se, e somente se, os coeficientes de termos de mesmo grau são iguais.

Essa definição significa que se tivermos, por exemplo, os polinômios $p(x) = ax^2 + bx + c$ e $h(x) = mx^2 + nx + l$, eles só serão iguais se

$$a = m, \quad b = n, \quad c = l.$$

Obs. Polinômios de graus diferentes nunca são iguais.

Exemplo 5.0.1 Dados os polinômios $f(x) = zx^4 + ax^3 + bx + c$ e $g(x) = 3x^3 + 7x + 10$, eles serão iguais se, e somente se,

$$z = 0 \quad a = 3 \quad b = 7 \quad c = 10.$$

Exemplo 5.0.2 Determine a, b e c de modo que se tenha para todo x real a seguinte igualdade:

$$\frac{2ax^2 - 2bx - 10}{3x^2 + 7x + c} = 6.$$

Primeiro note que podemos simplificar essa igualdade, dividindo-a por 2,

$$\begin{aligned} \frac{2ax^2 - 2bx - 10}{3x^2 + 7x + c} = 6 &\Rightarrow \frac{2(ax^2 - bx - 5)}{3x^2 + 7x + c} = 2 \cdot 3 \\ &\Rightarrow \frac{ax^2 - bx - 5}{3x^2 + 7x + c} = 3, \end{aligned}$$

agora vamos determinar os valores de a, b e c. Multiplicando toda a igualdade pelo polinômio do denominador, temos

$$\begin{aligned} ax^2 - bx - 5 &= 3(3x^2 + 7x + c) \\ &= 9x^2 + 21x + 3c, \end{aligned}$$

e pela igualdade de polinômios, precisamos que os coeficientes de cada termo sejam iguais, sendo assim,

$$\begin{aligned} a &= 9 \\ -b &= 21 \Rightarrow b = -21 \\ -5 &= 3c \Rightarrow c = \frac{-5}{3}. \end{aligned}$$

Com esses valores para a, b e c, temos que a igualdade será válida independentemente do valor de x no polinômio.

6 Operações

A seguir, iremos apresentar algumas operações entre polinômios e como elas são definidas. Para isso, considere as funções polinomiais

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

e

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Obs. Utilizaremos as funções polinomiais para mostrar as operações, pois elas são constituídas de expressões polinomiais, assim ficam válidas as operações para as funções polinomiais e para as expressões polinomiais (polinômios). Chamaremos as expressões polinomiais apenas por polinômios.

6.1 Adição

Definição 6.1 Sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções polinomiais, a adição é dada por

$$\begin{aligned} (f+g)(x) = &(a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} \\ &+ \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0). \end{aligned}$$

Exemplo 6.1.1 Sejam $f(x) = 3x^3 + x^2 + 5x - 1$, $g(x) = 5x^4 + 6x^3 + 10x + 3$ e

$h(x) = 13x^2 + 7x + 2$, vamos calcular

a) $(f+g)(x)$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= 3x^3 + x^2 + 5x - 1 + 5x^4 + 6x^3 + 10x + 3 \\ &= 5x^4 + (3x^3 + 6x^3) + x^2 + (10x + 5x) + (3 - 1) \\ &= 5x^4 + 9x^3 + x^2 + 15x + 2. \end{aligned}$$

b) $\left(g+h\right)(x)$

$$\begin{aligned}(g+h)(x) &= 5x^4+6x^3+10x+3+13x^2+7x+2\\ &= 5x^4+6x^3+13x^2+(10x+7x)+(3+2)\\ &= 5x^4+6x^3+13x^2+17x+5.\end{aligned}$$

c) $\left(f+g+h\right)(x)$

$$\begin{aligned}(f+g+h)(x) &= 3x^3+x^2+5x-1+5x^4+6x^3\\ &\qquad +10x+3+13x^2+7x+2\\ &= 5x^4+(3x^3+6x^3)+(13x^2+x^2)\\ &\qquad +(10x+5x+7x)\\ &\qquad +(3+2-1)\\ &= 5x^4+9x^3+14x^2+22x+4.\end{aligned}$$

Obs. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções polinomiais, se existirem seus graus, sejam $gr(f)$ e $gr(g)$ seus respectivos graus, então $gr(f+g)$ é menor ou igual ao maior valor entre $gr(f)$ e $gr(g)$.

Exemplo 6.1.2 No Exemplo 6.1.1, temos que os graus dos polinômios são $gr(f)=3$, $gr(g)=4$ e $gr(h)=2$. Como o grau de g é o de maior valor entre os polinômios dados, então os graus das adições só podem ser menores ou iguais a 4 e como já calculamos as adições, podemos ver que

a) $gr(f+g)=4$.
b) $gr(g+h)=4$.
c) $gr(f+g+h)=4$.

6.2 Subtração

Definição 6.2 Sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções polinomiais, a subtração é dada por

$$\begin{aligned}\left(f-g\right)(x) &= (a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}\\ &\quad +\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0).\end{aligned}$$

Obs. Podemos nos referir às operações de soma e subtração com as notações

$$\left(f\pm g\right)(x) \text{ ou } f(x)\pm g(x).$$

Exemplo 6.2.1 Considere as funções polinomiais $f(x)=10x^4+45x^2+5$ e

$g(x)=5x^4+x^2+15$, temos

$$\begin{aligned}f(x)-g(x) &= 10x^4+45x^2+5-(5x^4+x^2+15)\\ &= 10x^4+45x^2+5-5x^4-x^2-15\\ &= (10x^4-5x^4)+(45x^2-x^2)+(5-15)\\ &= 5x^4+44x^2-10.\end{aligned}$$

Obs. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções polinomiais e, se existirem, sejam $gr(f)$ e $gr(g)$ seus respectivos graus, então $gr(f-g)$ é menor ou igual ao maior valor entre $gr(f)$ e $gr(g)$.

Exemplo 6.2.2 No Exemplo 6.2.1, podemos ver que eles são polinômios de mesmo grau, $gr(f)=4=gr(g)$ e o grau de $f(x)-g(x)$ precisa ser menor ou igual ao maior valor entre $gr(f)$ e $gr(g)$, o que, de fato, ocorre, como podemos ver $gr(f-g)=4$.

Propriedades da adição e da subtração

Sejam $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funções polinomiais, são válidas as seguintes propriedades:

1. Associativa: $f\pm\left(g\pm h\right)=\left(f\pm g\right)\pm h$.
2. Comutativa: $f\pm g=g\pm f$.

Essas propriedades significam que, na adição e na subtração de polinômios, não importa a ordem dos fatores em que a operação ocorre, pois o resultado é o mesmo.

Obs. Tanto na adição como na subtração, o grau do polinômio resultante pode ser 0, que é o caso quando o polinômio resultante é uma constante.

Exemplo 6.2.3 Sejam os polinômios $f(x)=x^2+5x+3, g(x)=x^2+2$ e $h(x)=x+5$, temos que

$$\begin{aligned}f(x)+\left(g(x)+h(x)\right) &= (x^2+5x+3)+(x^2+2+x+5)\\ &= x^2+5x+3+x^2+x+7\\ &= 2x^2+6x+10\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(f(x)+g(x)\right)+h(x) &= (x^2+5x+3+x^2+2)+(x+5)\\ &= 2x^2+5x+5+x+5\\ &= 2x^2+6x+10\end{aligned}$$

são iguais.

6.3 Multiplicação de polinômios

A multiplicação entre os polinômios f e g consiste em multiplicar cada termo de f por todos os termos de g e somá-los. No exemplo abaixo, ficará mais claro o processo.

Exemplo 6.3.1 Considere os polinômios $f(x)=2x^3+5x^2$ e

$g(x) = 3x^2 + 4x + 7$, temos que

$$(f \cdot g)(x) = (2x^3 + 5x^2) \cdot (3x^2 + 4x + 7)$$

$$\begin{aligned} &= 2x^3(3x^2 + 4x + 7) + 5x^2(3x^2 + 4x + 7) \\ &= (6x^5 + 8x^4 + 14x^3) + (15x^4 + 20x^3 + 35x^2) \\ &= 6x^5 + 23x^4 + 34x^3 + 35x^2. \end{aligned}$$

Obs. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios, tal que $gr(f)$ e $gr(g)$ seus respectivos graus, então $gr(f \cdot g) = gr(f) + gr(g)$.

Exemplo 6.3.2 No Exemplo 6.3.1, temos que $gr(f) = 3$ e $gr(g) = 2$ e, com isso, vamos ter que

$$gr(f \cdot g) = gr(f) + gr(g) = 3 + 2 = 5,$$

como podemos observar na multiplicação realizada no exemplo.

Propriedades da multiplicação

Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções polinomiais, são válidas as seguintes propriedades:

1. Associativa: $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$.
2. Comutativa: $f \cdot g = g \cdot f$.
3. Distributiva: $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$.

As propriedades 1 e 2 significam que não importa a ordem dos fatores em que os polinômios são multiplicados, pois o resultado é o mesmo. Agora, para a propriedade 3, o exemplo a seguir apresenta melhor o que ela significa.

Exemplo 6.3.3 Sejam os polinômios $f(x) = x + 2, g(x) = x^2 + 5x$ e $h(x) = x^2 + 1$. Como vimos na propriedade 3, podemos realizar a operação de $f \cdot (g + h)$ como

$$\begin{aligned} f(x) \cdot \big(g(x) + h(x)\big) &= (x+2)(x^2 + 5x + x^2 + 1) \\ &= (x+2)(2x^2 + 5x + 1) \\ &= 2x^3 + 5x^2 + x + 4x^2 + 10x + 2 \\ &= 2x^3 + 9x^2 + 11x + 2, \end{aligned}$$

que é o mesmo se operarmos $f \cdot g + f \cdot h$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) &= (x+2)(x^2 + 5x) + (x+2)(x^2 + 1) \\ &= x^3 + 5x^2 + 2x^2 + 10x + x^3 + x + 2x^2 + 2 \\ &= 2x^3 + 9x^2 + 11x + 2. \end{aligned}$$

6.4 Divisão de polinômios

A divisão de polinômios é uma ferramenta extremamente poderosa para a construção da Teoria de Polinômios. Nesta seção, iremos ver a definição, o método da chave e o Algoritmo de Briot-Ruffini.

Considere os polinômios $p(x) = x^2 + 2x + 3$ e $h(x) = x + 2$, qual seria o quociente e o resto da divisão de $p(x) = x^2 + 2x + 3$ por $h(x) = x + 2$?

Note que

$$x \cdot x = x^2 \quad \text{e} \quad x \cdot 2 = 2x.$$

Assim, temos que $(x \cdot x) + (x \cdot 2) = x^2 + 2$, assim, $x(x+2) = x^2 + 2x$, deste modo,

$$x \cdot h(x) = x^2 + 2x, \tag{5.1}$$

somando 3 em (5.1), obtemos

$$x \cdot h(x) + 3 = x^2 + 2x + 3 = p(x).$$

Portanto, $p(x)$ pode ser expresso por $p(x) = x \cdot h(x) + 3$. Observe que, quando dividimos $p(x)$ por $h(x)$, obtemos uma divisão com quociente x e resto 3.

Generalizando essa ideia para qualquer $p(x)$ e $h(x)$, temos:

Definição 6.3 Sejam dois polinômios $p(x)$ e $h(x)$, com $h(x) \neq 0$. Definimos a divisão de f por h de modo que

1. $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$;
2. $gr(r(x)) < gr(h(x))$ ou $r(x) = 0$;

são satisfeitas.

Em que $p(x)$ é o dividendo, $h(x)$ o divisor, $q(x)$ é o quociente da divisão e $r(x)$ é o resto.

Obs. Na condição 2, temos que o grau do resto da divisão do polinômio tem que ser menor que o grau do dividendo.

Exemplo 6.4.1 Calcule $p(x) = 2x^2 + 2$ dividido por $h(x) = x^2 + 1$.

Note que $2 \cdot x^2 = 2x^2$ e $2 \cdot 1 = 2$.

Assim, $2x^2 + 2 = 2 \cdot (x^2 + 1)$.

Deste modo, obtemos $q(x) = 2$ e $r(x) = 0$.

Logo, $p(x) = 2x^2 + 2 = 2(x^2 + 1)$.

Exemplo 6.4.2 Faça a divisão de $f(x) = x^2 + 2x + 1$ por $g(x) = x + 1$.

Observe que $(x+1) \cdot (x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Deste modo, encontramos $q(x) = (x+1)$ e resto $r(x) = 0$.

Logo, $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1)$.

Exercício resolvido 1 (FUVEST) Dividindo-se um polinômio $P(x)$ por $(x-1)^2$, obtém-se um resto que, dividido por $x-1$, dá resto 3. Ache $P(1)$.

Resolução: Note que

$$P(x) = (x-1)^2 \cdot q_1(x) + r(x) \Rightarrow P(1) = r(1).$$

Como ao dividir $r(x)$ por $(x-1)$ obtemos resto igual a 3, então

$$r(x) = (x-1) \cdot q_2(x) + 3 \Rightarrow r(1) = 3.$$

Logo, $P(1) = r(1)$. Portanto, $P(1)$ é igual 3.

Na divisão de polinômios, nem sempre é evidente o quociente e o resto da divisão. Por isso, veremos a seguir dois métodos para efetuarmos a divisão de polinômios de maneira prática e sucinta.

Método da chave

Esse método se comporta da mesma forma que calculamos a divisão numérica. Da Definição 6.3, segue que

$$\begin{array}{l|l} p(x) & h(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

Deste modo, podemos seguir alguns passos para encontrar $q(x)$ e $r(x)$.

Considere os polinômios $p(x) = -2 + 3x + x^2$ e $h(x) = x - 5$.

Primeiramente, precisamos ter os polinômios escritos na forma padrão, isto é, dispostos do coeficiente de maior para o menor grau (ordem decrescente):

$$p(x) = x^2 + 3x - 2 \quad \text{e} \quad h(x) = x - 5.$$

Com os polinômios escritos na forma padrão, o primeiro passo é dividir o primeiro termo do dividendo ($p(x)$) pelo primeiro termo do divisor ($h(x)$):

$$\frac{x^2}{x} = x^{2-1} = x.$$

Após isso, multiplicamos esse termo pelo divisor:

Temos que

$$(x-5) \cdot x = x^2 - 5x \Rightarrow p(x) - (x^2 - 5x) = p(x) - x^2 + 5x.$$

Desse modo,

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} & x^2 & + & 3x & -\ 2 & x & - & 5 \\ \cline{6-8} - & x^2 & - & (-5x) & & & x & \\ \cline{1-4} \end{array}$$

Observação: como estamos subtraindo por $-(x^2 - 5x)$, no método, teremos $-(-5x) = +5x$, com isso, podemos escrever como

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr} & x^2 & + & 3x & - & 2 & x & - & 5 \\ \cline{7-9} - & x^2 & + & 5x & & & & x & \\ \cline{1-4} & & & 8x & - & 2 & & & \end{array}$$

Assim, repetimos o processo até que o grau do resto seja menor que o grau do quociente:

$$\frac{8x}{x} = 8.$$

Sendo assim,

$$(x-5) \cdot 8 = 8x - 40 \Rightarrow p(x) - (8x - 40) = p(x) - 8x + 40.$$

Consequentemente,

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr} & x^2 & + & 3x & - & 2 & x & - & 5 \\ \cline{7-9} - & x^2 & + & 5x & & & x & - & 8 \\ \cline{1-4} & & & 8x & - & 2 & & & \\ & & - & 8x & + & 40 & & & \\ \cline{3-6} & & & & & 38 & & & \end{array}$$

Logo, a divisão de $p(x) = (x-5)(x-8) + 38$ por $h(x) = x - 5$, fornece-nos $q(x) = x - 8$ e $r(x) = 38$.

Com isso, podemos usar o seguinte padrão para realizar o método da chave:

1° passo: Dividir o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor.

2° passo: Multiplicar o quociente encontrado no primeiro passo pelo divisor e subtrair do dividendo.

3° passo: Repetir o processo até encontrar $gr(r(x)) < gr(h(x))$, isto é, um resto de menor grau que o divisor.

Obs. Para realizar o 1° passo, temos que ter o polinômio escrito na forma padrão, ou seja, dispostos do coeficiente de maior para o coeficiente de menor grau.

Exemplo 6.4.3 Divida $f(x) = x^2 + 2x + 1$ por $h(x) = x + 1$.

1° passo: Dividir o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor:

$$\frac{x^2}{x} = x^{2-1} = x^1 = x.$$

2° passo: Multiplicar o quociente encontrado no 1° passo pelo divisor e subtrair do dividendo:

Neste caso o produto é dado por $x\cdot(x+1)=x^2+x$, assim efetuamos a divisão:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & x^2 & + & 2x & + & 1 & x+1 \\ \cline{7-7}
- & x^2 & - & x & & & x \\ \cline{1-6}
 & & & x & + & 1 &
\end{array}$$

3° passo: Repetimos o processo de divisão, até encontrarmos o resto:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & x^2 & + & 2x & + & 1 & x+1 \\ \cline{7-7}
- & x^2 & - & x & & & x+1 \\ \cline{1-6}
 & & & x & + & 1 & \\
 & & - & x & - & 1 & \\ \cline{3-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Logo, obtemos que $x^2+2x+1=(x+1)(x+1)$.

Portanto, a divisão de $f(x)=x^2+2x+1$ por $h(x)=x+1$ fornece-nos $q(x)=x+1$ e $r(x)=0$.

No próximo exemplo, iremos prosseguir o método de maneira mais "direta", isto é, sem listar os passos, realizando somente o cálculo.

Exemplo 6.4.4 Divida $a(x)=x^3+4x-2$ por $p(x)=x^2+4$.

Utilizando o método da chave, temos:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & x^3 & + & 4x & - & 2 & & x^2+4 \\ \cline{8-8}
- & x^3 & - & 4x & & & & x \\ \cline{1-4}
 & & & & - & 2 & &
\end{array}$$

Logo, obtemos que $x^3+4x-2=(x^2+4)\cdot x-2$.

Portanto, a divisão de $a(x)=x^3+4x-1$ por $p(x)=x^2+4$ possui quociente $q(x)=x$ e resto $r(x)=-2$.

Exercício resolvido 2 (MackenzieSP) O resto da divisão de

$$P(x)=x^4+x^3+x^2+ax+b$$

por x^2+1 é 3. Calcule o valor de $a+b$.

Resolução: Utilizando o método da chave, temos que

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & + & ax+b & x^2+1 \\ \cline{9-9}
- & x^4 & - & 0x^3 & - & x^2 & & & x^2+x \\ \cline{1-6}
 & & & x^3 & + & 0x^2 & + & ax+b & \\
 & & - & x^3 & & & - & x & \\ \cline{3-8}
 & & & & & & & -x+ax+b &
\end{array}$$

Deste modo, o resto é $r(x)=-x+ax+b=x(a-1)+b$ e, como $r(x)=3$, temos que

$$x(a-1)+b=3\Rightarrow(a-1)=0\Rightarrow a=1.$$

Logo, $a=1$ e $b=3$ e, assim, $a+b=4$.

Algoritmo de Briot-Ruffini

Esse método é utilizado para calcular a divisão entre um polinômio $p(x)$ de grau n maior que 1 $(n>1)$ e um polinômio do tipo $(x-a)$, isto é,

$$\frac{p(x)}{(x-a)}.$$

Em resumo, o algoritmo Briot-Ruffini baseia-se em construir uma tabela, do tipo

	Coeficientes de $p(x)$	Termo independente de $p(x)$
a	Coeficientes de $q(x)$	$r(x)$

Com $p(x)=(x-a)(q(x))+r(x)$.

Por exemplo, considere o polinômio $p(x)=2x^2-x^2-5x+7$ e o polinômio

$h(x)=x-4$. Sendo assim, vamos dividir $p(x)=2x^3-x^2-5x+7$ por $h(x)=x-4$.

1. Organizar os termos na tabela.

	Coeficientes de $p(x)$	Termo independente de $h(x)$
a	Coeficientes de $q(x)$	$r(x)$

Temos que os coeficientes de $p(x)$ são

$$2 \quad -1 \quad -5 \quad 7$$

Note que 7 é o termo independente de x, ou seja, é o único termo que não é multiplicado por um termo de x.
Além disso, $a=4$, pois temos $(x-4)$ e, assim, obtemos que

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & -1 & -5 & 7 \\ \hline
4 & & & & \\
 & & & &
\end{array}$$

2. Abaixe o primeiro coeficiente do dividendo.

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & -1 & -5 & 7 \\ \hline
4 & 2 & & & \\
 & & & &
\end{array}$$

3. Multiplique o termo repetido pelo divisor e some o produto com o próximo termo do dividendo.

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & -1 & -5 & 7 \\ \hline
4 & 2 & (2\cdot4)+(-1)=7 & & \\
 & & & &
\end{array}$$

4. Repetimos o processo. Neste caso, como $7\cdot4+a_0\neq0$, repetimos o processo para encontrarmos o resto e, assim, terminar a divisão.

	2	-1	-5	7
4	2	7	$(7\cdot 4)+(-5)=23$	$(23\cdot 4)+7=99$

Desta forma, interpretando a tabela, obtemos que os coeficientes de $h(x)$ são $2,7$ e 23, isto é, $h(x)=2x^2+7x+23$, e resto 99.

Portanto, $p(x)$ pode ser escrito como

$$p(x)=(x-4)(2x^2+7x+23)+99.$$

Obs. Acerca do algoritmo de Briott Ruffini, temos:

1. Para polinômios do tipo $x+a$, reescrevemos como $x-(-a)$, para podermos realizar a divisão.
2. Para esse método, o resto é sempre uma constante, pois, $gr(x-a)=1$.
3. Quando $r(x)=0$, temos que a é raiz do polinômio e $(x-a)$ é um fator de $p(x)$; no decorrer do capítulo, iremos abordar mais essa questão.

Exemplo 6.4.5 Divida $2x^2+3x+1$ por $x-1$.

Resolução: Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos:

1° passo: Organize os termos na tabela.

	2	3	1
1			

2° passo: Abaixe o primeiro coeficiente do dividendo.

	2	3	1
1	2		

3° passo: Multiplique o termo repetido pelo divisor e some o produto com o próximo termo do dividendo.

	2	3	1
1	2	$(2\cdot 1)+3=5$	

4° passo: Repetimos o processo. Neste caso, como $(2\cdot 1)+a_0\neq 0$, repetimos o processo para encontrarmos o resto e, assim, terminar a divisão.

	2	3	1
1	2	$(2\cdot 1)+3=5$	$(5\cdot 1)+1=6$

Logo,

$$2x^2+3x+1=(x-1)(2x+5)+6.$$

A tabela do Briot-Ruffini fica somente com os valores obtidos de cada coeficiente:

	2	3	1
1	2	5	6

Exercício resolvido 3 (PUCPR 2015) Se $(x-2)$ é um fator do polinômio $x^3+kx^2+12x-8$, então o valor de k é igual a:

(a) -3.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 6.
(e) -6.

Resolução: Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos:

1° passo: Organize os termos na tabela.

	1	k	12	-8
2				

2° passo: Abaixe o primeiro coeficiente do dividendo.

	1	k	12	-8
1	1			

3° passo: Multiplique o termo repetido pelo divisor e some o produto com o próximo termo do dividendo.

	1	k	12	-8
2	1	$2+k$		

Operação realizada:

$$(1\cdot 2)+k=2+k,$$

4° passo: Repita o processo. Repetimos o processo para encontrar o resto.

	1	k	12	-8
2	1	$2+k$	$2k+16$	$4k+24$

Operações realizadas:

$$((2+k)\cdot 2)+12=2k+16.$$
$$((2k+16)\cdot 2)-8=4k+24.$$

Como $(x-2)$ é fator, o resto é igual a zero, ou seja, $4k+24=0$ e, assim, $4k=-24$, consequentemente, $k=-6$. Logo, $k=-6$, alternativa (e).

Exercício resolvido 4 (FUVEST) Determine o valor de p para que o polinômio $2x^3+5x^2-px+2$ seja divisível por $x-2$.

Resolução: Montando a tabela temos:

	2	5	$-p$	2
2				

Efetuando o algoritmo de Briot-Ruffini, obtemos:

	2	5	$-p$	2
2	2	9	$18-p$	$38-2p$

Operações realizadas:

$$(2\cdot 2)+5=9.$$
$$(2\cdot 9)+(-p)=18-p.$$
$$((18-p)\cdot 2)+2=38-2p.$$

Assim o resto é $38-2p$. Como queremos que o polinômio $2x^3+5x^2-px+2$ seja divisível por $x-2$, temos que o resto é igual a zero. Logo,

$$\begin{aligned} 38-p=0 &\Rightarrow 2p=38 \\ &\Rightarrow p=19. \end{aligned}$$

Portanto, $p=19$.

Teorema do Resto e d'ALambert

Teorema 6.1 (Resto) O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x-a$ é igual ao valor numérico de $p(a)$.

Exemplo 6.4.6 Qual o resto de $2x^2+3x+1$ por $x-1$?

Utilizando o Teorema do Resto, temos que

$$\begin{aligned} r(x)=p(1) &= 2\cdot 1^2+3\cdot 1+1 \\ &= 2+3+1 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Logo, o resto da divisão é 6.

Exercício resolvido 5 (UEL) Se o resto da divisão do polinômio $p(x)=x^4-4x^3-kx-75$ por $(x-5)$ é 10, o valor de k é:

(a) -5.
(b) -1.
(c) 1.
(d) 5.
(e) 8.

Resolução: Pelo Teorema do Resto, temos que $p(5)=10$, deste modo

$$\begin{aligned} 10 = p(5) &= 5^4-4\cdot(5)^3-kx-75 \\ &\Rightarrow 5^4-4\cdot(5)^3-5k-75=10 \\ &\Rightarrow 625-4\cdot 125-5k-75=10 \\ &\Rightarrow 50-5k=10 \\ &\Rightarrow 5k=40 \\ &\Rightarrow k=8. \end{aligned}$$

Logo, $k=8$, e a alternativa correta é a (e).

Exercício resolvido 6 (PUCPR 2015) Se $(x-2)$ é um fator do polinômio $x^3+kx^2+12x-8$, então o valor de k é igual a?

Resolução: Pelo Teorema do Resto, temos que $p(x)=x^3+kx^2+12x-8$ é igual a 0 quando $x=2$, desse modo

$$\begin{aligned} p(2)=2^3+k\cdot 2^2+12\cdot 2-8=0 &\Rightarrow 8+4k+24-8=0 \\ &\Rightarrow 4k=-24 \\ &\Rightarrow k=-6. \end{aligned}$$

Logo, $k=-6$. Note que resolvemos o mesmo exercício utilizando o Algoritmo de Briot-Ruffini.

7 Raiz de um polinômio

Usando o conceito que vimos na Seção 3 sobre valor numérico de um polinômio, vamos definir a raiz como sendo:

Definição 7.1 Seja $f(x)$ um polinômio, se $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$f(\alpha)=0,$$

então diremos que α é raiz de $f(x)$.

Obs. Podemos nos referir à raiz de um polinômio como sendo um zero do polinômio.

O número de raízes de um polinômio está relacionado ao seu grau; temos pelo Teorema Fundamental da Álgebra que um polinômio de grau n tem n raízes, entretanto nem sempre todas elas serão raízes reais e, nesse caso, elas são chamadas de raízes complexas. Neste capítulo, veremos apenas as raízes reais.

A seguir, mostraremos formas de encontrar essas raízes. Para polinômios de 1º e 2º grau, existem fórmulas para encontrá-las; já para polinômios de graus maiores, serão apresentados alguns métodos.

7.1 Polinômios de 1º grau

Seja $ax+b$ um polinômio de 1º grau. Ele tem apenas uma raiz e, para determiná-la, utilizaremos a seguinte fórmula, que é obtida quando isolamos o x na expressão

$$ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}.$$

Podemos fazer isso, pois $a \neq 0$, já que é um polinômio de primeiro grau. Assim, a raiz de um polinômio de 1º grau é a divisão entre o oposto do termo independente pelo coeficiente numérico de x.

Exemplo 7.1.1 Dado o polinômio $4x-8$, observe que -8 é o termo independente e 4 é o coeficiente de x. Assim colocando na fórmula, temos

$$x=\frac{-(-8)}{4}=2,$$

portanto, 2 é a raiz do polinômio $4x-8$.

7.2 Polinômios de 2º grau

As equações polinomiais de 2º grau já foram apresentadas e melhor detalhadas no Capítulo de Equações e Inequações. A seguir, usaremos apenas o que diz respeito às suas raízes. Para isso, seja ax^2+bx+c, com $a \neq 0$, um polinômio qualquer de 2º grau. Para encontrar suas raízes, temos a seguinte fórmula, popularmente conhecida como "Fórmula de Bhaskara"[1]:

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{onde} \quad \Delta=b^2-4ac,$$

Os valores de x que encontramos ao substituir os coeficientes numéricos na fórmula são as raízes. E o símbolo Δ é chamado de delta e o seu valor nos fornece algumas informações sobre as raízes:

1. Se $\Delta>0$, então teremos duas raízes reais.
2. Se $\Delta=0$, então teremos apenas uma raiz.
3. Se $\Delta<0$, então o polinômio tem raízes complexas.

Abaixo, temos uma representação gráfica dos três casos.

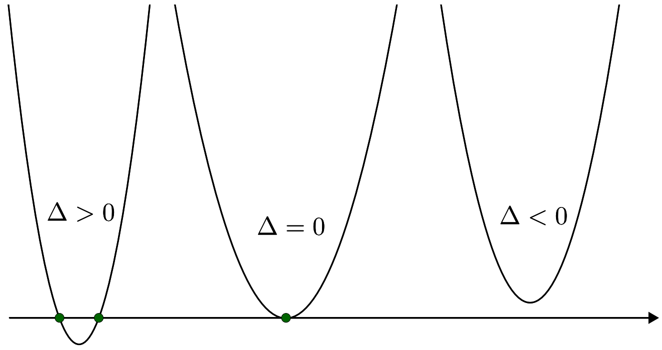


Figura 7.2.1: Raízes de um polinômio de 2º grau

7.3 Fatoração de polinômios

A fatoração de polinômios consiste em reescrever o polinômio como a multiplicação de polinômios de menor grau. Neste capítulo, iremos abordar os casos em que reescrevemos o polinômio em multiplicações do tipo

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n),$$

em que $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são raízes do polinômio. É importante ressaltar que nem sempre um polinômio poderá ser fatorado dessa forma, haja vista estarmos tratando apenas de raízes reais.

Para polinômios de 2º grau

Conforme visto anteriormente, é possível encontrar as raízes de um polinômio do 2º grau a partir da "Fórmula de Bhaskara". Utilizando as raízes, podemos fatorar a equação de modo que, se x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, então o polinômio pode ser reescrito na forma

$$a(x-x_1)(x-x_2),$$

observe que, se $x_1=x_2$, então a fórmula fica

$$a(x-x_1)^2.$$

Exemplo 7.3.1 Considere a equação $x^2-4x-5=0$, note que $a=1, b=-4$ e $c=-5$; substituindo na "Fórmula de Bhaskara", temos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 6}{2}, \end{aligned}$$

com isso

$$x_1=\frac{4+6}{2}=5 \quad \text{e} \quad \frac{4-6}{2}=-1.$$

Logo, as raízes são $x_1=5$ e $x_2=-1$, e a forma fatorada do polinômio é,

$$x^2-4x-5=(x-5)(x+1).$$

[1]Vamos nos referir à "Fórmula de Bhaskara" apenas como Bhaskara.

Exemplo 7.3.2 Considere a equação $2x^2 - 28x + 98 = 0$, note que $a = 2, b = -28$ e $c = 98$; colocando na "Fórmula de Bhaskara", temos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 98}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{28 \pm \sqrt{784 - 784}}{4} \\ &= \frac{28 \pm \sqrt{0}}{4} \\ &= \frac{28}{4}, \end{aligned}$$

com isso temos

$$x = \frac{28}{4} = 7,$$

nesse caso, a equação tem apenas uma raiz, pois $\Delta = 0$ e a forma fatorada do polinômio é

$$2x^2 - 28x + 98 = 2(x - 7)^2.$$

Para polinômios de maior grau

A seguir, veremos algumas formas de fatorar polinômios de grau maior ou igual a 2. Essas formas serão mostradas a partir de exemplos.

No exemplo a seguir, será apresentada a fatoração pela colocação do fator comum em evidência, para isso precisamos identificar o termo em comum entre os termos do polinômio e decompô-los na multiplicação do fator comum pelos outros fatores, reescrevendo assim o polinômio na forma fatorada.

Exemplo 7.3.3 Encontre as raízes de $x^3 + 3x^2 - 40x = 0$ e o escreva na forma fatorada.

Para isso, primeiro colocamos o termo comum em evidência, no caso o x,

$$x^3 + 3x^2 - 40x = x(x^2 + 3x - 40) = 0,$$

observe que esse é um produto de dois termos, então para que isso resulte em 0 precisamos ver quando cada um dos termos é zero. E assim $x = 0$ é uma raiz, pois, se substituirmos os x na expressão por 0, obtemos:

$$0(0^2 + 3 \cdot 0 - 40) = 0 \cdot (-40) = 0,$$

então já temos uma raiz. Agora vamos encontrar as raízes de $x^2 + 3x - 40 = 0$ utilizando Bhaskara:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-3 \pm 13}{2},$$

logo,

$$x_1 = \frac{-3 + 13}{2} = 5 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-3 - 13}{2} = -8,$$

com isso, $x = -5$ e $x = 2$ são raízes dessa equação, fatorando a expressão temos

$$(x - 5)(x - (-8)) \Rightarrow (x - 5)(x + 8).$$

Portanto, podemos reescrever o polinômio como

$$x^3 + 3x^2 - 40x = 0 \Rightarrow x(x - 5)(x + 8) = 0,$$

e suas raízes são $x = 0$, $x = 5$ e $x = -8$.

Obs. No Exemplo 7.3.3, temos um produto de dois termos que resulta em 0, é importante destacar que, quando temos $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Outra forma de fatorar polinômios e encontrar raízes é utilizando a divisão de polinômios por Briot-Ruffini, mas, para isso, precisamos de, pelo menos, uma raiz do polinômio.

Quando se trata de um polinômio com coeficientes numéricos inteiros, que tenha raízes, elas podem ser encontradas analisando os divisores inteiros do termo independente a_0 e do a_n, que denotaremos por p' e q' respectivamente; desse modo, as possíveis raízes racionais têm a forma $\frac{p}{q}$ e por fim testamos esses números; assim, achando uma raiz podemos dividir o polinômio por Briot-Ruffini e obter uma forma fatorada do polinômio. O exemplo a seguir ajudará a compreender melhor.

Obs. Nem todos os números formados por $\frac{p}{q}$ serão raízes, mas todas as raízes serão da forma $\frac{p}{q}$.

Exemplo 7.3.4 Considere o polinômio $f(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12$, seu termo independente é o 12 e $a_n = 1$, então os seus divisores inteiros serão

$$\begin{aligned} p &= \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\} \\ q &= \{-1, 1\}, \end{aligned}$$

desse modo as raízes estarão no conjunto

$$\frac{p}{q} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\},$$

note que, entre esses números 1, é raiz, pois

$$f(1) = 1 + 1 - 13 - 1 + 12 = 0.$$

Uma vez que 1 é raiz, podemos fazer a divisão de $p(x)$ por $x - 1$, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & -13 & -1 & 12 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -11 & -12 & 0 \end{array}$$

com isso, temos que

$$x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12 = (x - 1)(x^3 + 2x^2 - 11x - 12).$$

Vamos chamar de $g(x)$ o polinômio $x^3+2x^2-11x-12$ e vamos fatorá-lo utilizando o mesmo processo. Inicialmente, podemos notar que -12 tem os mesmos divisores inteiros de 12 e $a_n = 1$ novamente, então o conjunto com as possíveis raízes será o mesmo de $f(x)$,

$$\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\},$$

e vamos escolher um número diferente de 1 que seja raiz de $g(x)$. Note que, se escolhermos o -1, temos

$$g(-1) = -1+2+11-12 = 0,$$

logo, -1 é raiz, fazendo a divisão de $x^3+2x^2-11x-12$ por $x-(-1)$ igual foi feito acima por Briot-Ruffini, segue que

	1	2	−11	−12
−1	1	1	−12	0

reescrevendo o polinômio, temos

$$x^3+2x^2-11x-12 = (x+1)(x^2+x-12),$$

e substituindo em $f(x)$

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+x-12).$$

Resta fatorar x^2+x-12, que é um polinômio de 2º grau; então, podemos utilizar Bhaskara, assim

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-12)}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{-1\pm7}{2},$$

com isso,

$$x_1 = \frac{-1+7}{2} = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-1-7}{2} = -4,$$

logo suas raízes são $x_1 = 3$ e $x_2 = -4$; reescrevendo o polinômio, temos

$$x^2+x-12 = (x-3)(x+4),$$

substituindo-o no $p(x)$, temos

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+4).$$

Portanto, esse é o polinômio em sua forma fatorada e suas raízes são $S = \{1, -1, 3, -4\}$.

Exercício resolvido 1 (UFPR 2009) Sabendo-se que $x = 2$ é um zero do polinômio $p(x) = 9x^3-21x^2+4x+4$, é correto afirmar que a soma das outras duas raízes é igual a:

(a) $\frac{1}{3}$.

(b) $\frac{3}{7}$.

(c) 1.

(d) $\frac{4}{21}$.

(e) $\frac{4}{9}$.

Resolução: Já temos que $x = 2$ é um zero do polinômio, ou seja, é uma raiz de $p(x)$ e, sabendo disso, podemos usar o dispositivo de Briot-Ruffini para fatorar esse polinômio e assim obter suas outras raízes, desse modo temos

	9	−21	4	4
−1	9	−3	−2	0

logo,

$$9x^3-21x^2+4x+4 = (x-2)(9x^2-3x-2),$$

e, com o polinômio $9x^2-3x-2$, vamos usar Bhaskara para encontrar suas raízes, então

$$\Delta = (-3)^2-4\cdot9\cdot(-2) = 9+72 = 81,$$

vamos ter duas raízes reais, pois $\Delta > 0$, assim

$$\begin{aligned} x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{81}}{2\cdot9} &= \frac{3\pm9}{18} \\ &\Rightarrow x_1 = \frac{3+9}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow x_2 = \frac{3-9}{18} = \frac{-6}{18} = \frac{-1}{3}. \end{aligned}$$

Obtidas as raízes, basta realizar a adição entre elas, desse modo

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= \frac{2}{3}+\left(\frac{-1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

portanto, a alternativa correta é a (a).

Existe outra forma de resolver o exercício. Note que esse polinômio tem coeficientes inteiros, então podemos utilizar o conjunto das possíveis raízes racionais. Para isso, analise que os divisores inteiros de $a_0 = 4$ são

$$p = \{\pm1, \pm2, \pm4\},$$

e os divisores inteiros de $a_n = 9$

$$q = \{\pm1, \pm3, \pm9\},$$

assim o conjunto das possíveis raízes racionais é dado por

$$\frac{p}{q} = \left\{\pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{9}, \pm2, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{9}, \pm4, \pm\frac{4}{3}, \frac{4}{9}\right\},$$

Todas as raízes de $p(x)$ estão nesse conjunto; para encontrá-las basta, testar os números no polinômio, assim

$$p\left(-\frac{1}{3}\right)=9\left(-\frac{1}{3}\right)^3-21\left(-\frac{1}{3}\right)^2+4\left(-\frac{1}{3}\right)+4=0$$
$$p\left(\frac{2}{3}\right)=9\left(\frac{2}{3}\right)^3-21\left(\frac{2}{3}\right)^2+4\left(\frac{2}{3}\right)+4=0$$

são as suas outras raízes e, somando-as, temos

$$\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Portanto, a alternativa correta é a (a).

8 Multiplicidade de raízes

Seja $f(x)=(x-2)^2(x+1)$, note que o termo $(x-2)$ é elevado ao quadrado, então, utilizando a definição de potenciação, podemos escrever $f(x)$ como:

$$f(x)=(x-2)(x-2)(x+1).$$

Então, resolvendo $f(x)=0$, obtemos $x=2$ duas vezes:

$$0=(x-2)(x-2)(x+1).$$

Segue que

$$(x-1)=0,(x-2)^2=0.$$

Sendo assim, dizemos que 2 é raiz com multiplicidade 2 (ou 2 é uma raiz dupla), enquanto -1 é uma raiz simples (ou uma raiz com multiplicidade 1).

De modo geral, temos:

Definição 8.1 Dizemos que r é raiz de multiplicidade m, com $m \geq 1$; da equação polinomial $p(x)=0$, se e somente se,

$$p(x)=(x-r)^m \cdot q(x);\text{ com } q(r)\neq 0.$$

Quando $m=1$, dizemos que a raiz é simples; $m=2$, dizemos que a raiz é dupla; $m=3$, dizemos que a raiz é tripla e assim por diante.

Exemplo 8.0.1 Seja $p(x)=(x-1)^2(x-2)^3(x+4)$. Determine a multiplicidade de todas as raízes de $p(x)$.

Vejamos, temos que $p(x)=0$ quando

$$(x-1)^2(x-2)^3(x+4)=0,$$

isto é, para $x_1=1; x_2=2; x_3=-4$. Analisando, temos que $p(x)$ possui 6 raízes, sendo elas: duas iguais a 1, três iguais a 2 e uma igual a -4.

Assim, temos que 1 é raiz com multiplicidade 2 ou 1 é raiz dupla de $p(x)$; 2 é raiz com multiplicidade 3 ou 2 é uma raiz tripla de $p(x)$; e, por fim, -4 é uma raiz com multiplicidade 1 ou -4 é uma raiz simples de $p(x)$.

Exercício resolvido 1 (EEAR 2018) Seja a equação polinomial $x^3+bx^2+cx+18=0$. Se -2 e 3 são suas raízes, sendo que a raiz 3 tem multiplicidade 2, o valor de b é

a) 8.
b) 6.
c) -3.
d) -4.

Resolução: Como a equação polinomial é de grau 3 e -3 possui multiplicidade 2, podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$(x-3)^2(x+2)=0 \Rightarrow (x^2-6x+9)(x+2)=0$$
$$x^3-4x^2+3x+18=0.$$

Comparando com o enunciado, obtemos: $b=-4$ e $c=2$.

Logo, a alternativa correta é a (d).

8.1 Zeros e multiplicidade

A multiplicidade das raízes é importante, pois ela mostra como o gráfico do polinômio se comporta em torno dos seus zeros, ou seja, como se comporta em torno das suas raízes.

Por exemplo, observe o gráfico de $f(x)=(x-1)(x-4)^2$:

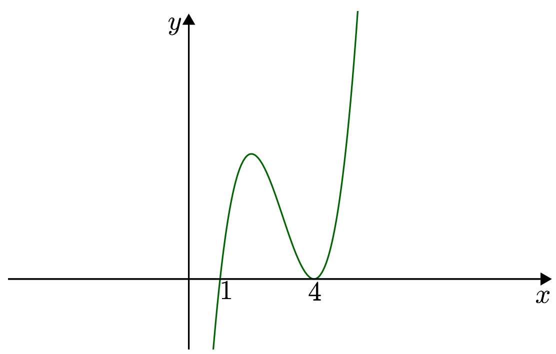


Figura 8.1.1

Note que o gráfico se comporta diferente em torno das raízes 1 e 4, a qual possui multiplicidade 2. Enquanto o gráfico cruza o eixo x em $x=1$, ele apenas toca o eixo x em $x=4$.

Agora observe o gráfico de $g(x)=(x-1)^2(x-4)$.

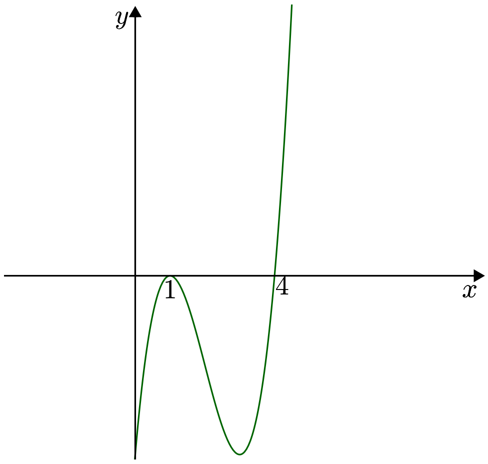


Figura 8.1.2

Note que g possui as mesmas raízes que f, porém elas possuem multiplicidades diferentes; 1 possui multiplicidade 2 e 4 possui multiplicidade 1. O gráfico de g toca o eixo x em $x = 1$ e cruza o eixo x em $x = 4$.

Assim, temos a seguinte definição:

Definição 8.2 Seja $f(x)$ uma função. Se f possui zeros com multiplicidade ímpar, então o gráfico de $y = f(x)$ cruza o eixo x nos pontos onde $f(x) = 0$. Agora, se f possui zeros com multiplicidade par, então o gráfico de $y = f(x)$ toca o eixo x nos pontos $f(x) = 0$.

Alguns exemplos de gráficos da definição acima, com multiplicidade 1, 2 e 3:

Para a multiplicidade 1, temos qualquer gráfico do tipo $f(x) = ax + b$.

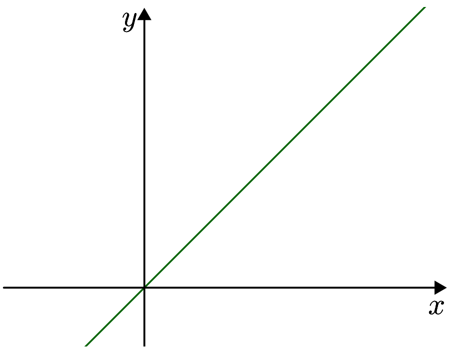


Figura 8.1.3: multiplicidade 1

Para multiplicidade 2, temos por exemplo, o gráfico de $f(x) = (x-2)^2$.

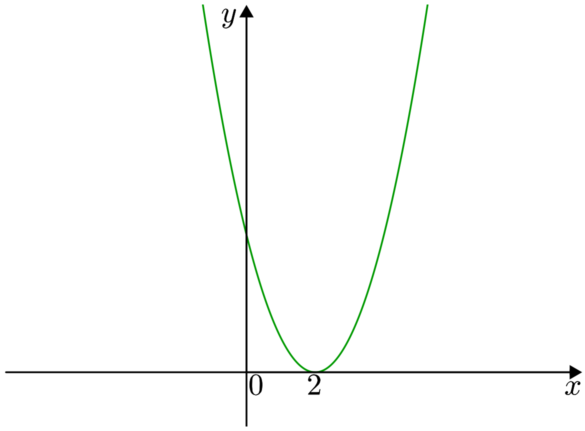


Figura 8.1.4: multiplicidade 2

Para multiplicidade 3, temos, por exemplo, o gráfico de $f(x) = x^3$.

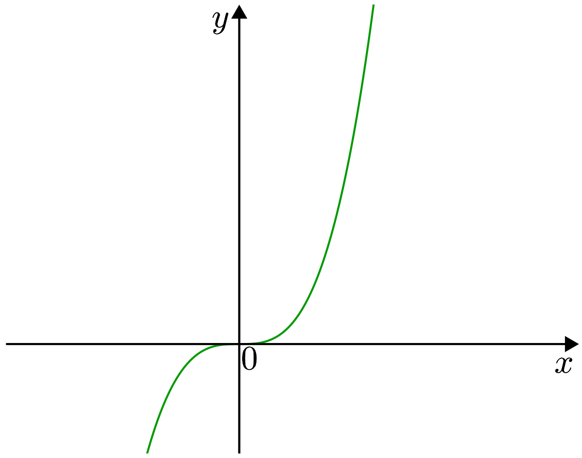


Figura 8.1.5: multiplicidade 3

Exemplo 8.1.1 Dado o gráfico de uma função, a multiplicidade da raiz 4 é ímpar ou par?

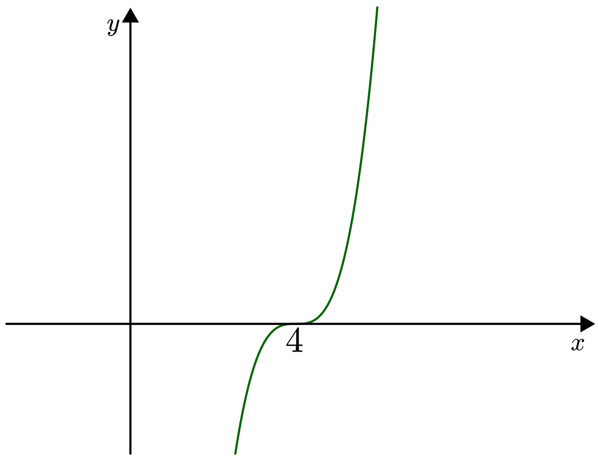


Figura 8.1.6

Observe que, no ponto $x = 4$, o gráfico da função cruza o eixo x.

Logo, 4 possui multiplicidade ímpar.

Exemplo 8.1.2 Como é o gráfico de $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$?

Temos que

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x = -x(x^2 - 4x + 4) = -x(x-2)^2.$$

Desse modo, encontramos que $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, sendo x_1 com multiplicidade 1 e x_2 com multiplicidade 2. Assim, o gráfico de $f(x)$ cruza o eixo x em $x = 0$ e toca o eixo x em $x = 2$.

Logo, o gráfico de $f(x)$ é

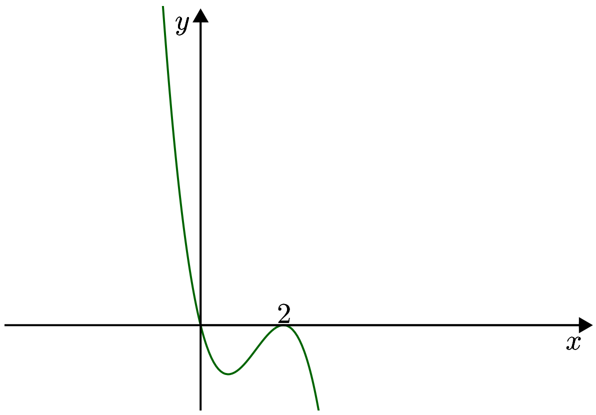


Figura 8.1.7

9 Relações entre os coeficientes e as raízes

Nesta seção, iremos trabalhar as relações entre os coeficientes e as raízes, chamadas de relações de *Girard*, popularmente conhecida como "soma e produto". As relações de *Girard* são uma propriedade muito importante dos polinômios, pois elas relacionam os coeficientes e as raízes destes polinômios, de modo que, por meio de manipulações algébricas dos coeficientes, encontramos as raízes.

Em síntese, essas relações são uma técnica matemática para encontrar as raízes de uma equação polinomial sem utilizar uma "fórmula". Por exemplo, no caso de uma equação do segundo grau, que usualmente se utiliza "Bhaskara".

9.1 Relações de *Girard* para equação do 2° grau

As equações polinomiais do 2º grau são as mais recorrentes em toda a jornada escolar e aparecem em grande escala nos vestibulares de todo o Brasil. Uma maneira prática para se calcular as equações polinomiais do 2º grau é usando a relação de *Girard*.

Como já visto, uma equação polinomial do segundo grau é dada por $ax^2 + bx + c = 0$, sendo assim, a relação de *Girard* para o segundo grau se baseia nas seguintes relações entre as raízes:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 & = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 & = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

onde r_1 e r_2 são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$.

Por exemplo, considere a equação polinomial $x^2 - 5x + 6 = 0$, vamos encontrar as raízes, utilizando soma e produto.

Temos que $a = 1$, $-b = -(-5) = 5$ e $c = 6$, assim decorre que

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} = \frac{5}{1} = 5 \quad \text{e} \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6.$$

Com isso, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 5 \\ r_1 \cdot r_2 = 6. \end{cases}$$

A soma das raízes é 5 e o produto é 6, assim precisamos encontrar dois números que tenham a soma igual a 5 e o produto igual a 6. As únicas duas possibilidades são 2 e 3:

$$\begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ 2 \cdot 3 = 6 \end{cases}$$

Logo, as raízes de $x^2 - 5x + 6 = 0$ são 2 e 3.

Exercício resolvido 1 (PUCCAMP) Se v e w são as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$, em que a e b são coeficientes reais, então $v^2 + w^2$ é igual a:

(a) $a^2 - 2b$.
(b) $a^2 + 2b$.
(c) $a^2 - 2b^2$.
(d) $a^2 + 2b^2$.
(e) $a^2 - b^2$.

Resolução: Com base na relação de *Girard* (soma e produto), temos que

$$\begin{cases} v + w = a \\ v \cdot w = b. \end{cases}$$

O exercício pede o valor de $v^2 + w^2$, note que

$$(v + w)^2 = v^2 + 2v \cdot w + w^2 = (v^2 + w^2) + 2v \cdot w.$$

Deste modo, $v^2 + w^2 = (v + w)^2 - 2v \cdot w$, e assim $v^2 + w^2 = a^2 - 2b$.

Logo, a resposta é alternativa (a).

Exercício resolvido 2 (UFPA) Um cidadão, ao falecer, deixou uma herança de $200.000,00$ reais para ser distribuída, de maneira equitativa, entre os seus x filhos. No entanto, três desses filhos renunciaram às suas respectivas partes nessa herança, fazendo com que os demais $x-3$ filhos, além do que receberiam normalmente, tivessem um adicional de $15.000,00$ reais em suas respectivas partes dessa herança. Portanto, o número x de filhos do referido cidadão é

(a) 8.
(b) 10.
(c) 5.
(d) 4.
(e) 7.

Resolução: Considere y a parte que cada filho deveria receber inicialmente, assim

$$\frac{200.000}{x} = y. \tag{5.2}$$

Como 3 filhos renunciaram, temos que

$$\frac{200.000}{x-3} = y + 15.000. \tag{5.3}$$

Substituindo (5.2) em (5.3), temos

$$\begin{aligned}
&\frac{200.000}{x-3} = \frac{200.000}{x} + 15.000\\
&\Rightarrow \frac{200.000}{x-3} = \frac{200.000 + 15.000x}{x}\\
&\Rightarrow 200.000x = (200.000 + 15.000x)(x-3)\\
&\Rightarrow 200.000x = 200.000x - 600.000 + 15.000x^2 - 45.000x\\
&\Rightarrow 15.000x^2 - 45.000x - 600.000 = 0\\
&\Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0.
\end{aligned}$$

Sendo assim, encontramos a equação $x^2 - 3x - 40 = 0$ e, usando as relações de soma e produto, temos

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-3)}{1} = 3\\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-40}{1} = -40. \end{cases}$$

A soma das raízes é 3 e o produto é -40, assim precisamos encontrar dois números que tenham a soma igual a 3 e o produto igual a -40. As únicas duas possibilidades são -5 e 8. Como não é possível ter -5 filhos, encontramos que $x = 8$, isto é, a quantidade de filhos é 8.

Logo, a resposta é alternativa (a).

9.2 Relações de *Girard* para equação do 3° grau

De modo análogo à relação para o segundo grau, na relação de *Girard* para o terceiro grau, a razão entre os coeficientes tem como base a soma e o produto na soma e no produto das raízes da equação polinomial.

Como a equação polinomial do terceiro grau é dada por $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, temos que a relação de *Girard* para o terceiro grau se baseia nas seguintes relações entre as raízes:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{b}{a}\\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \dfrac{c}{a}\\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{d}{a}, \end{cases}$$

onde r_1, r_2, r_3 são as raízes de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Exercício resolvido 3 (FGVSP 2013) A equação $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ tem o seguinte conjunto solução: $\{-1, a, b\}$.

Podemos afirmar que o valor de $a^2 + b^2$ é

(a) $\dfrac{13}{4}$.
(b) $\dfrac{7}{2}$.
(c) $\dfrac{15}{4}$.
(d) 4.
(e) $\dfrac{17}{4}$.

Resolução: Se $\{-1, a, b\}$ é o conjunto solução da equação $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$, então, utilizando as relações de *Girard*, temos que,

$$\begin{cases} -1 + a + b = \dfrac{3}{2}\\ -a + (-b) + a \cdot b = \dfrac{-3}{2}\\ -1 \cdot a \cdot b = -1. \end{cases}$$

Decorre do sistema acima que $a + b = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$ e que $a \cdot b = 1$.

Deste modo, como $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b$, obtemos

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{4} - 2 = \frac{17}{4}.$$

Logo, $a^2 + b^2 = \dfrac{17}{4}$ e portanto, a resposta é a alternativa (e).

Exercício resolvido 4 (ITA - Modificado) Os números α, β e γ são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$. Nessas condições, calcule o valor de $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$.

Resolução: Note que

$a = 1,\ b = -2,\ c = 3$ e $d = -4$.

Deste modo, usando as relações de *Girard*,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-2)}{1} = 2 \\ \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = \dfrac{3}{1} = 3 \\ \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \dfrac{-d}{a} = \dfrac{-(-4)}{1} = 4. \end{cases}$$

Observe que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta \cdot \gamma + \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{4}.$$

Logo, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{3}{4}$.

9.3 Relações de *Girard* para equação do 4° grau

Encontrar as raízes de uma equação polinomial do 4º grau não é usual, entretanto as vezes aparecem como questões em vestibulares, deste modo, iremos apresentar as relações de *Girard* para o 4º grau.

Como a equação polinomial do quarto grau é dada por

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, temos que a relação de *Girard* para o quarto grau se baseia nas seguintes relações entre as raízes:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4 + r_3 \cdot r_4 = \dfrac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = -\dfrac{d}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \dfrac{e}{a}. \end{cases}$$

Onde r_1, r_2, r_3 e r_4 são as raízes de $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

Exercício resolvido 5 (ESPCEX AMAN) A soma das raízes da equação $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = 0$ é igual a

(a) 0.
(b) 1.
(c) -4.
(d) 4.
(e) 5.

Resolução: Usando as relações de *Girard*, temos que

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1} = 1.$$

Logo, a soma das raízes da equação $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = 0$ é 1.

Portanto, a alternativa correta é a alternativa (b).

9.4 Relações de *Girard* para equações de grau n

Como já comentado, as relações de *Girard* são muito importantes e, a título de curiosidade, iremos mostrar as relações de *Girard* para um polinômio de grau n.

Seja $p(x)$ uma equação polinomial de grau n, sendo a o coeficiente de x^n, b de x^{n-1}, c de x^{n-2} e assim sucessivamente (até o expoente $n - n$, ou seja, expoente igual a 0), de modo que

$$p(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + ex^{n-4} + \dots$$

Se $r_1, \dots, r_n$ são raízes de $p(x)$, então

1º Relação de *Girard*: Soma de todas as raízes é dada por:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots = -\frac{b}{a}.$$

2º Relação de *Girard*: A soma entre todos os possíveis produtos entre duas raízes é:

$$r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \dots + r_1 \cdot r_n + r_2 \cdot r_3 + \dots + r_2 \cdot r_n + \dots = \frac{c}{a}.$$

3º Relação de *Girard*: A soma entre todos os possíveis produtos entre três raízes é:

$$\begin{aligned} & r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 \\ & + \dots + r_1 \cdot r_2 \cdot r_n + \dots + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \\ & + \dots + r_2 \cdot r_3 \cdot r_n + \dots = -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

O processo continua no mesmo padrão, de forma que a última relação de *Girard* é igual ao produto de todas as raízes da equação.

Obs. A primeira relação sempre começa com a segunda letra, isto é, b; e as próximas seguem a ordem alfabética.

Obs. As relações de *Girard* mudam o sinal a cada expressão, na qual a primeira sempre possui sinal negativo. Sendo assim, a segunda possui sinal positivo, a terceira, negativo, e assim sucessivamente.

10 Exercícios propostos

Exercício 5.1 (EEAR 2016) Dado o polinômio: $ax^3+(2a+b)x^2+cx+d-4=0$, os valores de a e b para que ele seja um polinômio de 2º grau são

(a) $a=0$ e $b=0$.
(b) $a=1$ e $b\neq 0$.
(c) $a=0$ e $b\neq 0$.
(d) $a=-1$ e $b=0$.

Exercício 5.2 (FEI 1996) A soma de dois polinômios $P(x)+Q(x)$ é um polinômio de grau 6, e a diferença $P(x)-Q(x)$ é um polinômio de grau 4. É válido afirmar-se que:

(a) A diferença $Q(x)-P(x)$ tem grau 6.
(b) $P(x)$ e $Q(x)$ têm o mesmo grau.
(c) $P(x)$ tem grau 5.
(d) $Q(x)$ tem grau 4.
(e) $P(x)$ tem grau 4.

Exercício 5.3 (MackenzieSP) Determine $m\in\mathbb{R}$ para que o polinômio $p(x)=(m-4)x^3+(m^2-16)x^2+(m+4)x+4$ seja de grau 2.

Exercício 5.4 Divida $f(x)=x^4+3x^3-x+5$ por $h(x)=x^2-2x$.

Exercício 5.5 (FGV) Determine as soluções da equação $Q(x)=0$, onde $Q(x)$ é o quociente do polinômio

$$x^4-10x^3+24x^2+10x-24 \quad \text{por} \quad x^2-6x+5.$$

Exercício 5.6 Dados os polinômios:

$$f(x)=x^2+4x-1$$
$$g(x)=5x^3-3x^2+2$$
$$h(x)=-3x^4+2x^3-4$$

Calcule $(f+g)(x),(g+h)(x)$ e $(f+h)(x)$.

Exercício 5.7 Divida $A(x)=3x^4+2x^2+5$ por $B(x)=x^3+5$.

Exercício 5.8 (UEL) Dividindo-se o polinômio $x^4+2x^3-2x^2-4x-21$ por $x+3$, obtém-se

(a) x^3-2x^2+x-12 com resto nulo.
(b) x^3-2x^2+3 com resto 16.
(c) $x^3-x^2-13x+35$ e resto 84.
(d) x^3-x^2-3x+1 com resto 2.
(e) x^3-x^2+x-7 e resto nulo.

Exercício 5.9 (FEI - SP) Sendo $p(x)=ax^4+bx^3+c$ e $q(x)=ax^3-bx-c$, determine os coeficientes a, b e c, sabendo que $p(0)=0$, $p(1)=0$ e $q(1)=2$.

Exercício 5.10 Qual zero de $f(x)=(x-2)^2(x+4)^3$ possui multiplicidade 3?

Exercício 5.11 Qual zero de $g(x)=(2x-1)^2(x+\pi)$ possui multiplicidade 2?

Exercício 5.12 (EEAR 2010) Seja r a maior raiz da equação $x(x+2)(x-1)^3=0$. Se m é a multiplicidade de r, então $r\cdot m$ é igual a

(a) 6.
(b) 5.
(c) 4.
(d) 3.

Exercício 5.13 Encontre as raízes do polinômio $p(x)=x^3+15x^2+47x-63$.

Exercício 5.14 (FUVEST) O número 2 é raiz dupla da equação $ax^3+bx+16=0$. Determine a e b.

Exercício 5.15 (UNESP) Considere a equação $x^2+ax+b=0$. Sabendo-se que 4 e -5 são as raízes dessa equação, então

(a) $a=1,b=7$.
(b) $a=1,b=-20$.
(c) $a=3,b=-20$.
(d) $a=-20,b=-20$.
(e) $a=b=1$.

Exercício 5.16 (UECE) Se p e q são as raízes da equação $2x^2-6x+7=0$, então $(p+3)(q+3)$ é igual a

(a) $\frac{41}{2}$.
(b) $\frac{43}{2}$.
(c) $\frac{45}{2}$.
(d) $\frac{47}{2}$.

Exercício 5.17 (EEAR) Seja a equação $x^3–5x^2+7x–3=0$. Usando as relações de *Girard*, pode-se encontrar como soma das raízes o valor

(a) 12.
(b) 7.
(c) 5.
(d) 2.

Exercício 5.18 (UEL) Uma das raízes do polinômio x^3+2x^2-7x-2 é 2. O produto das outras duas raízes é:

(a) 2.
(b) 1.
(c) 0.
(d) -1.
(e) 2.

6 Matrizes e sistemas lineares

Matrizes e sistemas lineares

A busca por soluções de sistemas de equações lineares já existe há muito tempo: registros de 4.000 anos indicam que os babilônios possuíam métodos para resolver sistemas de duas equações, enquanto na China, por volta de 200 A.C., eram resolvidos sistemas com até cinco equações. Procedimentos sistemáticos para solucionar sistemas lineares utilizando determinantes foram desenvolvidos por Leibniz no final do século XVII. Apesar disso, ainda não existia o conceito de matriz, surgindo apenas no século XIX para auxiliar na resolução deste tipo de sistema.

As aplicações desses tópicos vão desde física e computação gráfica até economia e inteligência artificial. Já matrizes são utilizadas, por exemplo, por *sites* de busca na internet para classificar páginas de acordo com sua relevância.

Imagine que uma fábrica venda dois produtos: cada um deles requer uma certa quantidade (já conhecida) de duas peças para ser fabricado. Você sabe a quantidade total de cada peça disponível na fábrica e quer saber quantas unidades de cada produto podem ser feitas. Com os conteúdos deste capítulo você verá como modelar matematicamente esse tipo de problema e resolvê-lo.

1 Definição e classificação de matrizes

Definição 1.1 Uma matriz $m \times n$ é uma tabela formada por números reais dispostos em m linhas e n colunas, que são colocados entre parênteses ou colchetes.

Exemplo 1.0.1

$$A = \begin{bmatrix} 53 & 71 & 32 \\ 22 & 25 & 87 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2,3 & \sqrt{5} \\ 7 & x \end{pmatrix}$$

A matriz A possui 2 linhas e 3 colunas e por isso é representada por $A_{2\times3}$. Já a matriz B é escrita como $B_{2\times2}$. Os elementos das matrizes também recebem índices para identificação; por exemplo, se representarmos os elementos da matriz A com a letra a minúscula, o elemento na primeira linha e segunda coluna é representado por $a_{12} = 71$.

De maneira geral, vamos escrever um elemento de A como a_{ij}, onde $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$, e a matriz A como

$$A = (a_{ij})_{m\times n},$$

Obs. Os elementos a_{ij} de uma matriz podem estar relacionados com os índices i e j. Por exemplo, a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ é construída fazendo $a_{ij} = i \cdot j$.

Duas matrizes são iguais quando são de mesma ordem (mesmo número de linhas e colunas) e seus elementos de mesmo índice são iguais, ou seja, se $C = (c_{ij})_{m\times n}$ é uma matriz onde c_{ij} representa o elemento na linha i e coluna j, e $D = (d_{ij})_{p\times q}$ é uma matriz onde d_{ij} representa o elemento na linha i e coluna j, então para que C seja igual a D, devemos ter $m = p$, $n = q$ e $c_{ij} = d_{ij}$ para todo i entre 1 e m e todo j entre 1 e n.

Exemplo 1.0.2 Observe as matrizes $C = (c_{ij})_{2\times2}$ e $D = (d_{ij})_{2\times2}$:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ambas têm a mesma ordem, porém o elemento de índice 21 de C é $c_{21} = 6$, enquanto em D temos $d_{21} = 3$, portanto elas são diferentes.

1.1 Matrizes especiais

Vamos tratar de algumas matrizes com características importantes:

Matriz quadrada: é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas.

Exemplo 1.1.1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 22 \\ 65 & 2 & 0 \\ 7 & 509 & 42 \end{pmatrix}$$

Numa matriz quadrada, o conjunto dos elementos da forma a_{ij} com $i = j$ é chamado de **diagonal principal**. Na matriz A, a diagonal principal é formada por $a_{11} = 3$, $a_{22} = 2$ e $a_{33} = 42$.

O conjunto dos elementos da forma a_{ij} com $i + j = n+1$ é chamado **diagonal secundária**. Na matriz A, a diagonal secundária é formada por $a_{13} = 22$, $a_{22} = 2$ e $a_{31} = 7$.

A seguir, estão destacadas as diagonais principal e secundária, respectivamente, de uma matriz quadrada $A_{n\times n}$:

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \color{blue}{a_{22}} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & \color{blue}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & \color{red}{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \color{red}{a_{2(n-1)}} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \color{red}{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal: é uma matriz quadrada na qual os elementos fora da diagonal principal são todos iguais a 0.

Exemplo 1.1.2

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade: é uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Exemplo 1.1.3

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular: é uma matriz quadrada com $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$ (triangular superior) ou sempre que $i < j$ (triangular inferior), ou seja, possui apenas zeros acima da diagonal principal (triangular superior) ou abaixo da diagonal principal (triangular inferior).

Exemplo 1.1.4 Matriz triangular inferior:

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 47 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior:

$$P = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica: é uma matriz quadrada em que $a_{ij} = a_{ji}$, ou seja, está espelhada em relação à diagonal principal. Perceba, no exemplo a seguir, que $g_{21} = 10 = g_{12}$ e $g_{24} = 9 = g_{42}$, o mesmo ocorre com qualquer g_{ij} e g_{ji}.

Exemplo 1.1.5

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 5 & 0 \\ 10 & 2 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz nula: todos os seus elementos são 0.

Exemplo 1.1.6

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz coluna: Dada $A_{m\times n}$, quando $n = 1$, a matriz é chamada matriz coluna.

Exemplo 1.1.7

$$C = \begin{pmatrix} 9 \\ 74 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matriz linha: Dada $A_{m\times n}$, quando $m=1$, a matriz é chamada de matriz linha.

Exemplo 1.1.8

$$D=\begin{pmatrix} 5 & 40 & 45 & 70 \end{pmatrix}$$

Exercício resolvido 1 Construa a matriz $A_{3\times 2}=(a_{ij})$ dada por $a_{ij}=i-j$.

Resolução: Vamos encontrar cada elemento de $A_{3\times 2}$. Note que a matriz possui 3 linhas e 2 colunas, ou seja, $3\cdot 2=6$ elementos, são eles:

$$a_{11}=1-1=0 \qquad a_{12}=1-2=-1 \qquad a_{21}=2-1=1$$

$$a_{22}=2-2=0 \qquad a_{31}=3-1=2 \qquad a_{32}=3-2=1$$

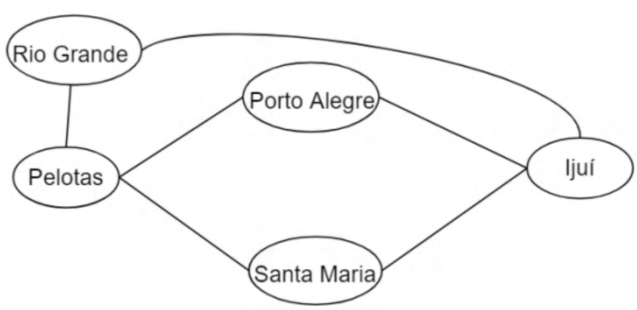
Portanto, a matriz é: $A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício resolvido 2 Qual deve ser o valor de t para que a matriz a seguir seja simétrica?

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3,7 & 1/2 \\ 3,7 & 8 & 3t \\ 1/2 & 1,5 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolução: Em uma matriz simétrica os elementos devem estar espelhados em relação à diagonal principal. Para A ser simétrica, o elemento $3t$, que está na segunda linha e terceira coluna de A, ou seja, na posição 23, deve ser igual ao elemento na posição 32 (terceira linha e segunda coluna), disso segue que $3t=1,5$ e, consequentemente, $t=0,5$.

Exercício resolvido 3 (UFPEL 2019) Uma empresa de transporte rodoviário do Rio Grande do Sul, tem um diagrama que representa um sistema de relações entre os trajetos de sua frota de veículos.



Admite-se que i, j referem-se às cidades e variam, de forma que: Pelotas = 1; Rio Grande = 2; Porto Alegre = 3; Santa Maria = 4 e Ijuí = 5. Nesse sentido, podemos construir uma matriz $A=[a_{ij}]_{5\times 5}$ que represente esses trajetos de acordo com:

$$a_{ij}=1, \text{ se } i \text{ está ligado diretamente a } j;$$

$$a_{ij}=0, \text{ se } i=j \text{ ou } i \text{ não está ligado diretamente a } j.$$

Assim, é correto afirmar que

(a) a matriz A é uma matriz identidade.
(b) a matriz A é simétrica.
(c) a soma dos elementos da primeira linha é 4.

Resolução: Note que os elementos da diagonal principal da matriz são da forma a_{ij} com $i=j$, ou seja, são todos 0, o que mostra que o item a é falso.

Agora, vamos calcular os elementos da primeira linha. São eles: $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, pois Pelotas está ligado a Rio Grande; $a_{13}=1$, pois Pelotas está ligado a Porto Alegre; $a_{14}=1$, pois Pelotas está ligado a Santa Maria; e $a_{15}=0$, pois Pelotas não está ligado a Ijuí. A soma desses elementos é 3, logo o item c também é falso.

Para analisar o item b, perceba que sempre ocorre $a_{ij}=a_{ji}$, afinal, se a cidade i está ligada a j, então j está ligada a i, portanto a matriz é simétrica e a resposta é (b).

---

2 Operações com matrizes

2.1 Matriz transposta

Definição 2.1 Considere $A=(a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m\times n$. A matriz transposta de A, representada por A^t, é a matriz de ordem $n\times m$ obtida trocando as linhas pelas colunas de A, ou seja, o elemento de A^t na posição ij será a_{ji}.

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \qquad A^t_{2\times 3}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Dessa definição obtemos que uma matriz é simétrica quando é igual a sua transposta. Por exemplo, observe a matriz simétrica B e, na sequência, sua transposta:

$$B=\begin{pmatrix} 0,5 & 3/4 \\ 3/4 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad B^t=\begin{pmatrix} 0,5 & 3/4 \\ 3/4 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Além disso, para qualquer matriz C, vale que $(C^t)^t=C$.

2.2 Adição

Definição 2.2 Dadas duas matrizes de mesma ordem $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{m\times n}$, a soma $A+B$ é a matriz de ordem $m\times n$ onde o elemento de índice ij é igual a $a_{ij}+b_{ij}$.

Se as matrizes não forem de mesma ordem, não será possível somá-las.

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Definição 2.3 É chamada de **matriz oposta** de A e denotada por $-A$ uma matriz que, ao ser somada com A, resulta na matriz nula.

Por exemplo, a matriz oposta de $\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{5} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ é $\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$, pois

$$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{5} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ -7 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2 & -\sqrt{5}+\sqrt{5} \\ 7-7 & 0+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.1 — Propriedades da adição. Sendo A, B e C matrizes de mesma ordem e 0 a matriz nula de mesma ordem, são válidas as propriedades:

- Comutativa: $A+B=B+A$
- Associativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$
- Elemento neutro: $A+0=A$
- Cancelamento: $A=B \Leftrightarrow A+C=B+C$
- Distributividade da transposta: $(A+B)^t=A^t+B^t$

Exemplo 2.2.1 Sejam $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Temos que

$$A+B=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}=B+A$$

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}=A+(B+C)$$

$$A+0=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}=A$$

$$(A+B)^t=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}=A^t+B^t$$

2.3 Subtração

Definição 2.4 De forma semelhante, a subtração só é definida entre duas matrizes de mesma ordem, e o elemento de índice ij é a diferença dos elementos correspondentes das duas matrizes.

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.3.1 Sejam $A=\begin{pmatrix} 3 & 2,5 & 6 \\ 7 & 12 & 9 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 16 \\ 8 & 1,7 & 5 \\ 7 & -2,5 & 4 \end{pmatrix}$, então

$$A-B=\begin{pmatrix} 3-0 & 2,5-2 & 6-16 \\ 7-8 & 12-1,7 & 9-5 \\ -2-7 & -5-(-2,5) & 0-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0,5 & -10 \\ -1 & 10,3 & 4 \\ -9 & -2,5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Obs. A subtração $A-B$ também pode ser vista como a soma da matriz A com a oposta de B: $A+(-B)$.

2.4 Multiplicação por constante

Definição 2.5 Dada uma matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e um número real k, a multiplicação de k por A é a matriz $kA_{m\times n}$ obtida multiplicando todos os elementos de A por k.

$$kA_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Obs. É sempre verdade que $0A_{m\times n}$ é a matriz nula de ordem $m\times n$ e $(-1)A$ é a matriz oposta de A.

Exemplo 2.4.1 Sejam $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1,5 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ e $k=3$. Temos que

$$kA=\begin{pmatrix} 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-1,5) \\ 3\cdot 1 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 15 & -4,5 \\ 3 & -9 & 18 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.2 — Propriedades da multiplicação por número real. Sendo A e B matrizes de mesma ordem e α e β números reais, são válidas as propriedades:

- Distributividade da matriz: $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
- Distributividade: $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
- Associatividade: $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
- Elemento neutro: $1A=A$
- Associatividade da transposta: $(\alpha A)^t=\alpha A^t$

Exemplo 2.4.2 Sejam $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha=2$ e $\beta=5$. Temos que

$$(\alpha+\beta)A=\begin{pmatrix} 21 & 49 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}=\alpha A+\beta A$$

$$\alpha(A+B)=\begin{pmatrix} 16 & 14 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(\beta A)=\begin{pmatrix} 30 & 70 \\ 40 & 80 \end{pmatrix}=(\alpha\beta)A$$

$$1A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = A$$

$$(\alpha A)^t = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} = \alpha A^t$$

2.5 Multiplicação de matrizes

A multiplicação entre matrizes **não** ocorre como as operações de adição e subtração, que eram feitas operando os elementos na mesma posição (mesma linha e coluna). Vamos apresentar um problema para ilustrar essa operação:

Exemplo 2.5.1 (UFMT - Modificado) Um projeto de pesquisa sobre dietas envolve adultos e crianças de ambos os sexos. A composição dos participantes no projeto é dada pela matriz 2×2:

	Adultos	**Crianças**
Masculino	80	120
Feminino	100	200

O número diário de gramas de proteínas, de gorduras e de carboidratos consumidos por criança e por adultos é dado pela matriz 2×3:

	Proteínas	**Gorduras**	**Carboidratos**
Adultos	20	20	20
Crianças	10	20	30

Monte uma terceira matriz que represente o consumo diário total de proteínas, gorduras e carboidratos de acordo com o sexo.

O objetivo é obter, a partir das duas matrizes que temos uma terceira, que deve ter duas linhas (Masculino e Feminino) e três colunas (Proteínas, Gorduras e Carboidratos). O primeiro elemento dessa matriz corresponde a quantidade de proteínas consumidas por todos os homens da pesquisa; para calculá-lo, basta somar a quantidade de proteínas consumidas pelos adultos do sexo masculino com a quantidade consumida pelas crianças do sexo masculino:

$$80 \cdot 20 + 120 \cdot 10 = 2.800.$$

Note que esse é o "produto" entre a primeira linha da primeira matriz e a primeira coluna da segunda matriz, é isso que queremos obter quando definirmos a multiplicação entre duas matrizes. Fazendo o mesmo procedimento com os outros elementos, obtemos:

A quantidade total de gorduras consumidas por todas as pessoas do sexo masculino:

$$80 \cdot 20 + 120 \cdot 20 = 4.000.$$

A quantidade total de carboidratos consumidos por todas as pessoas do sexo masculino:

$$80 \cdot 20 + 120 \cdot 30 = 5.200.$$

A quantidade total de proteínas consumidas por todas as pessoas do sexo feminino:

$$100 \cdot 20 + 200 \cdot 10 = 4.000.$$

A quantidade total de gorduras consumidas por todas as pessoas do sexo feminino:

$$100 \cdot 20 + 200 \cdot 20 = 6.000.$$

A quantidade total de carboidratos consumidos por todas as pessoas do sexo feminino:

$$100 \cdot 20 + 200 \cdot 30 = 8.000.$$

E a resposta do problema é, como veremos a seguir, justamente a multiplicação das duas matrizes:

	Proteínas	**Gorduras**	**Carboidratos**
Masculino	2.800	4.000	5.200
Feminino	4.000	6.000	8.000

Veja que a multiplicação entre duas matrizes AB só é definida quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. O resultado é uma matriz C com o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B, e o elemento c_{ij} é definido multiplicando ordenadamente os elementos da linha i de A com os elementos da coluna j de B e somando os resultados. A seguir, o elemento c_{m1} é a combinação da linha m de A com a coluna 1 de B:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad \cdots \quad a_{mn}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{c_{m1}} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{c_{m1} = a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1}}$$

Exemplo 2.5.2 Vamos multiplicar as matrizes $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 4} \\ \boxed{1 \quad 5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 8 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2 \cdot 3 + 4 \cdot 2} & \\ & \boxed{1 \cdot 0 + 5 \cdot 8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 4} \\ \boxed{1 \quad 5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\8\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \boxed{2\cdot 0+4\cdot 8} \\ \boxed{1\cdot 3+5\cdot 2} & \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 13 & 40 \end{pmatrix}.$$

Obs. Na multiplicação de matrizes, nem sempre a comutatividade é válida, diferentemente da multiplicação de números reais.

Exemplo 2.5.3 No exemplo anterior, o resultado se altera ao trocar a ordem das matrizes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 48 \end{pmatrix}$$

Também não é válido o cancelamento, ou seja, se $AB = AC$ não podemos garantir que $B = C$.

Exemplo 2.5.4 Considere $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, temos que:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Porém $B \neq C$.

Teorema 2.3 — Propriedades da multiplicação de matrizes. Considere A, B e C matrizes, as propriedades abaixo são válidas:

- Associatividade: $A(BC) = (AB)C$
- Distributividade à direita: $(A+B)C = AC + BC$
- Distributividade à esquerda: $A(B+C) = AB + AC$
- Distributividade da transposta: $(AB)^t = B^t A^t$

Lembrando que as ordens das matrizes devem satisfazer as condições para que os produtos e as somas existam; além disso, é importante ressaltar que, na segunda e terceira propriedades, a distribuição respeita a ordem da multiplicação.

Exemplo 2.5.5 Sejam $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Temos que

$$A(BC) = \begin{pmatrix} -30 & -10 \\ -40 & -20 \end{pmatrix} = (AB)C$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = AC + BC$$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 23 & 33 \\ 28 & 36 \end{pmatrix} = AB + AC$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} = B^t A^t$$

Exercício resolvido 1 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 5/3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2,3 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, determine $(4A+B)^t$.

Resolução: Primeiramente, vamos calcular $4A$:

$$4A = 4\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 4 & 20/3 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim,

$$4A + B = \begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 4 & 20/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,3 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38,3 & 19 \\ 8 & 20/3 \end{pmatrix}.$$

Calculando a transposta:

$$(4A+B)^t = \begin{pmatrix} 38,3 & 8 \\ 19 & 20/3 \end{pmatrix}.$$

Também é possível utilizar as propriedades das operações e chegar ao mesmo resultado calculando $4A^t + B^t$.

Exercício resolvido 2 Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Calcule o produto AB.

Resolução: Como A é uma matriz 2×3 e B é do tipo 3×2, então o produto AB será uma matriz 2×2, vamos denotar $AB = (c_{ij})$ e calcular cada elemento da matriz:

$$c_{11} = 0 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) = 6$$

$$c_{12} = 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 = -3$$

$$c_{21} = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) = 1$$

$$c_{22} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 6 = 35.$$

Portanto, $AB = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 35 \end{pmatrix}$.

Exercício resolvido 3 (IFBA 2014) Sejam as matrizes: $A = (a_{ij})_{4\times 3}$, $a_{ij} = j \cdot i$ e $B = (b_{ij})_{3\times 4}$, $b_{ij} = j \cdot i$. Seja C

a matriz resultante do produto entre A e B. Dessa maneira, a quarta parte do valor do elemento c_{23} da matriz C, corresponde ao

(a) triplo de 3.
(b) triplo de 7.
(c) quádruplo de 7.
(d) quádruplo de 3.
(e) sêxtuplo de 3.

Resolução: Como $AB = C$, o elemento c_{23} será o produto da segunda linha de A com a terceira coluna de B, ou seja:

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}.$$

Usando $a_{ij} = j \cdot i$ e $b_{ij} = j \cdot i$, obtemos:

$$c_{23} = 2\cdot1\cdot1\cdot3 + 2\cdot2\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot3\cdot3 = 6 + 24 + 54 = 84.$$

A quarta parte de 84 é 21, que é o triplo de 7, logo a resposta é b.

3 Matriz inversa

Definição 3.1 Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ é chamada de inversível quando existe uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Nesse caso, a matriz B é chamada matriz inversa de A e é representada por A^{-1}.

Exemplo 3.0.1 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix}$, vale que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/12 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/12 & 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/12 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Note que, para ambas as multiplicações estarem definidas, A^{-1} também deve ter n linhas e n colunas.

Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e B sua inversa, é válido que:

- Só existe uma inversa, ou seja, se C também é inversa de A, então $B = C$.
  Para ver isso, primeiro perceba que, para uma matriz $D_{n\times n}$ qualquer, vale que $D = DI_n = I_nD$; com isso, podemos deduzir que $B = C$ da seguinte forma:
  $$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$
- $B^{-1} = A$.
  Para provar essa igualdade, devemos ter $BA = AB = I_n$, mas isso segue diretamente do fato de B ser inversa de A. Além disso, concluímos que $(A^{-1})^{-1} = B^{-1} = A$.

Obs. Até agora, nesta seção, não vimos exemplos de matrizes que não possuem inversa. O próximo conteúdo trará um critério que indica quando uma matriz possui ou não inversa. Também veremos, mais adiante, formas de encontrar a inversa de uma matriz.

Exercício resolvido 1 (UFV 2005) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$, onde x e y são números reais e M é a matriz inversa de A. Calcule o produto xy.

Resolução: Devemos ter $AM = MA = I_2$, dessa forma:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando a primeira linha de A com a primeira coluna de M, obtemos a equação $x - 2 = 1$ e, portanto, $x = 3$. Agora, operando a primeira linha de A com a segunda coluna de M, chegamos em $-1 + 2y = 0$, disso segue que $y = \frac{1}{2}$. Portanto:

$$xy = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

4 Determinantes

Toda matriz quadrada pode ser associada a um número real chamado **determinante** da matriz. Esse número traz importantes propriedades sobre a matriz. A principal propriedade que veremos é a de informar se a matriz possui inversa: uma matriz quadrada é inversível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero. Esse resultado será importante para entender o cálculo do determinante de matrizes de ordem 1 e 2.

4.1 Ordem 1

Considere a matriz $A = (a)$, para que A seja inversível, deve existir uma matriz $B = (b)$ tal que

$$AB = BA = I_1 = (1),$$

desta igualdade segue que $(ab) = (1)$ e, portanto, $ab = 1$. Note que, quando a é diferente de 0, podemos tomar $b = \frac{1}{a}$ e dessa forma a matriz A é inversível. Quando $a = 0$, não existe nenhum b que satisfaça a equação e, portanto, a matriz não é inversível.

Lembremos o resultado sobre determinantes enunciado no início desta seção: uma matriz quadrada é inversível se, e somente se, seu determinante é diferente de zero. Isso nos leva a deduzir que uma boa escolha para o determinante de A é o número real a. De fato, esse é o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 1.

Exemplo 4.1.1 A matriz $A=(5)$ é inversível e sua inversa é $A^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$, pois $AA^{-1}=A^{-1}A=\left(5\cdot\frac{1}{5}\right)=(1)$.

Já a matriz $B=(0)$ não é inversível, pois não existe matriz que, quando multiplicada por B, tenha por resultado (1).

4.2 Ordem 2

Considere a matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A matriz inversa de A é dada por

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Podemos verificar fazendo os cálculos:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_2. \end{aligned}$$

De forma análoga, $A^{-1}A=I_2$. Porém, a matriz A^{-1} só existe quando $ad-bc\neq 0$; se ocorrer $ad-bc=0$, então a matriz A não é inversível. Novamente encontramos um possível valor para o determinante de A. A seguir, iremos formalizar o cálculo de determinantes para matrizes de diferentes ordens.

4.3 Cálculo de determinantes

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, seu determinante é representado por $\det(A)$ e é calculado da seguinte forma:

Se $n=1$, então o determinante de A é o valor do único elemento de A, ou seja, $\det(A)=a_{11}$.

Se $n=2$, então $\det(A)$ é a diferença entre a diagonal principal e a diagonal secundária de A, ou seja, $\det(A)=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$. O determinante também pode ser representado por barras laterais no lugar dos parênteses ou colchetes da matriz:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Se $n=3$, o determinante pode ser calculado utilizando a **Regra de Sarrus**, que consiste em repetir as duas primeiras colunas à direita da matriz e somar os produtos entre as diagonais, com sinal positivo para as diagonais na mesma direção da diagonal principal e sinal negativo para as diagonais na direção da diagonal secundária:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det(A)=(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33})+(a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31})+(a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32})-$$

$$(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31})-(a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32})-(a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33})$$

Obs. Também é possível calcular este determinante repetindo as duas últimas linhas abaixo da matriz e realizando as multiplicações com os elementos das diagonais, atribuindo sinais positivos e negativos usando a mesma regra.

Exemplo 4.3.1 Considere a matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 1{,}5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, seu determinante é:

$$\det(A)=4\cdot 1-1{,}5\cdot 2=1.$$

Portanto, ela possui inversa, que é dada por:

$$B=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1{,}5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

De fato, quando calculamos AB e BA, obtemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por outro lado, calculando o determinante de $C=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, obtemos $\det(C)=6\cdot 2-4\cdot 3=12-12=0$, portanto C não possui inversa.

Exemplo 4.3.2 Vamos calcular o determinante de $M=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, utilizando a fórmula que vimos anteriormente:

$$\det(M)=4\cdot 1\cdot 0+2\cdot 1\cdot 6+(-2)\cdot 5\cdot 1$$

$$-(-2)\cdot 1\cdot 6-2\cdot 5\cdot 0-4\cdot 1\cdot 1=0+12-10+12-0-4=10.$$

Para o cálculo de determinantes em matrizes de ordem maior que 3, vamos introduzir o conceito de cofator:

Definição 4.1 Dada uma matriz quadrada A de ordem n, é denotado por D_{ij} o determinante da matriz obtida retirando a linha i e coluna j de A. Note que essa nova matriz é quadrada de ordem $n-1$. O **cofator** de um elemento a_{ij} é denotado por A_{ij} e calculado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}.$$

Exemplo 4.3.3 Vamos calcular o cofator de a_{12} na matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Retirando a primeira linha e segunda coluna de A, obtemos $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e, portanto, $D_{12} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2$. Sendo assim, o cofator de a_{12} é

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2.$$

4.4 Teorema de Laplace

Teorema 4.1 O determinante de uma matriz A de ordem $n \geq 2$ pode ser calculado somando os produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

Esse resultado transforma a tarefa de calcular o determinante de uma matriz de ordem n em calcular cofatores de seus elementos, ou seja, calcular determinantes de matrizes de ordem $n-1$. Dessa forma, podemos reduzir a ordem até chegar em 3 e usar a Regra de Sarrus.

Essa forma pode se tornar bastante trabalhosa conforme a ordem da matriz aumenta, por isso veremos propriedades que podem nos ajudar a calcular determinantes de maneira mais fácil.

Exemplo 4.4.1 Vamos calcular o determinante da matriz a seguir utilizando o Teorema de Laplace:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primeiro temos que escolher uma linha ou uma coluna. Nesse caso, usaremos a terceira coluna. Dessa forma, o determinante de A é dado por $\det(A) = 0 \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43}$. Vamos calcular os cofatores usando a Regra de Sarrus:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\,[6+2+9-9+1+12] = -21$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\,[0-6+6-0-3+8] = 5$$

Com isso, obtemos $\det(A) = 0 + 2 \cdot (-21) + 1 \cdot 5 + 0 = -37$.

Obs. Perceba que, escolhendo a coluna que contém dois zeros, nos poupamos de calcular dois cofatores. Em geral, para aplicar o Teorema de Laplace, é sempre recomendado escolher a linha ou a coluna com mais zeros.

4.5 Propriedades dos determinantes

Algumas propriedades são úteis para auxiliar e simplificar o cálculo dos determinantes.

Linha ou coluna nula: Como vimos pelo Teorema de Laplace, se uma matriz possui um linha ou uma coluna com todos os elementos iguais a zero, seu determinante será zero.

Linhas ou colunas proporcionais: Se uma matriz possui uma linha cujos elementos são iguais aos elementos de uma outra linha multiplicados por um mesmo número, dizemos que essas duas linhas são proporcionais e o determinante da matriz será zero. O mesmo ocorre com as colunas.

Exemplo 4.5.1 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$, observe que a linha 2 é igual à linha 1 multiplicada por 2, e o determinante de A é $(5 \cdot 6) - (3 \cdot 10) = 0$.

$B = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -15 & 5 \end{pmatrix}$, observe que a coluna 1 é igual à coluna 2 multiplicada por -3, e o determinante de B é $(9 \cdot 5) - (-3)(-15) = 0$.

Multiplicação de uma linha (ou coluna) por uma constante: Se uma linha ou uma coluna de uma matriz A é multiplicada por uma constante k, então o determinante da nova matriz é igual a $k\det(A)$.

Exemplo 4.5.2 A matriz $A = \begin{pmatrix} 64 & 96 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ é obtida multiplicando a primeira linha de $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ por 32, logo $\det(A) = 32\det(B) = 32(2 \cdot 2 - 3 \cdot 10) = -832$.

Multiplicação de uma matriz por uma constante: Multiplicar uma matriz $A_{n\times n}$ por uma constante k nos dá o mesmo resultado de multiplicar cada linha de A por k; utilizando a propriedade anterior e considerando que A tem n linhas, obtemos que $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Exemplo 4.5.3 A matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ possui determinante igual a -5. Se multiplicarmos M por 3, obtemos $3M = \begin{pmatrix} 3 & 24 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$; como M tem ordem 2, então $\det(3M) = 3^2 \det(M) = 9 \cdot (-5) = -45$.

Troca de linhas e colunas: Se a matriz B é obtida trocando de posição duas linhas da matriz A, então $\det(B) = -\det(A)$. O mesmo vale para a troca de duas colunas.

Exemplo 4.5.4 Seja $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 22 \\ 10 & 2 & 25 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, trocando a coluna 2 com a 3, temos $B = \begin{pmatrix} 7 & 22 & 6 \\ 10 & 25 & 2 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Dessa forma,

$$\det(A) = 126 + 150 + 0 - 44 - 0 - 540 = -308$$

$$\det(B) = 0 + 44 + 540 - 150 - 126 - 0 = 308.$$

Determinante da transposta: Para qualquer matriz quadrada A, vale que $\det(A^t) = \det(A)$. Como consequência disso, temos que uma matriz é inversível se, e somente se, sua transposta é inversível.

Determinante de uma matriz triangular: O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos de sua diagonal principal. Uma consequência é que o determinante de uma matriz diagonal também é o produto dos elementos da diagonal principal, em particular $\det(I_n) = 1$ para qualquer ordem n.

Exemplo 4.5.5

$$\begin{vmatrix} 72 & 0 & 0 \\ 10 & -24 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 72 \cdot (-24) \cdot 3 = -5.184$$

Teorema de Binet:

Teorema 4.2 Dadas duas matrizes quadradas de mesma ordem A e B, vale que

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Determinante da matriz inversa: Seja A uma matriz quadrada de ordem n inversível, então $AA^{-1} = I_n$, usando o Teorema de Binet:

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1 \Rightarrow$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Exercício resolvido 1 Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 e seu determinante é igual a 5, calcule $\det(4A^t)$.

Resolução: Para calcular o determinante de $4A^t$, primeiramente vamos usar a propriedade da multiplicação da matriz por uma constante: como A^t tem a mesma ordem de A, que é 3, então $\det(4A^t) = 4^3 \det(A^t)$.

Além disso, sabemos que o determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta, logo $\det(A^t) = \det(A) = 5$, portanto:

$$\det(4A^t) = 4^3 \det(A^t) = 64 \det(A^t) = 64 \det(A) = 64 \cdot 5 = 320$$

Exercício resolvido 2 (ITA 1998 - Modificado) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 2 que satisfazem a seguinte propriedade: existe uma matriz inversível M tal que

$$A = M^{-1}BM.$$

Mostre que $\det(-A^t) = \det(B)$.

Resolução: Usando o Teorema de Binet em $A = M^{-1}BM$, temos que:

$$\det(A) = \det(M^{-1}BM) = \det(M^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(M).$$

Porém $\det(M^{-1}) \cdot \det(M) = 1$, com isso chegamos em $\det(A) = \det(B)$. Por outro lado, como A tem ordem 2, vale que:

$$\det(-A^t) = \det((-1)A^t) = (-1)^2 \det(A^t) = \det(A^t) = \det(A).$$

Portanto $\det(-A^t) = \det(B)$.

5 Métodos para inversão de matrizes

Agora que já sabemos determinar quando uma matriz é inversível, podemos introduzir um método prático para encontrar sua inversa.

Como vimos anteriormente, se a matriz é quadrada de ordem 1 e inversível, então é da forma $A = (a_{11})$ com $a_{11} \neq 0$ e sua inversa será $A^{-1} = \left(\frac{1}{a_{11}}\right)$.

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversível, também vimos na seção sobre determinantes que sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Para matrizes de ordem maior que 2, vamos resolver um exemplo:

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, temos que $\det(A) = 3$, portanto é inversível. Agora, iremos fazer operações elementares entre as linhas da matriz com o objetivo de transformá-la na matriz identidade I_3. As operações permitidas são:

- Trocar duas linhas;
- Multiplicar uma linha por um número diferente de zero;
- Somar (ou subtrair) duas linhas e substituir o resultado em uma delas.

Ao lado da matriz A, iremos colocar a matriz I_3 e todas as operações que fizermos com as linhas de A vamos repetir em I_3. Ao final do processo, A terá se transformado em I_3 e I_3 terá se transformado em A^{-1}. Vamos indicar as linhas e as operações que estão sendo realizadas nas setas, por exemplo: $L_3' = L_3 - L_1$ significa que vamos calcular a diferença da linha 3 com a linha 1 e substituir o resultado na linha 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3' = L_3 - L_1}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3' = L_2 - L_3}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3' = L_3/3}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2' = L_2 - L_3}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1' = L_1 - L_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Portanto, a inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Outro método para inverter matrizes de ordem maior que 2 é através da matriz dos cofatores:

Dada uma matriz inversível A, sua inversa é

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A_{ij})^t,$$

onde (A_{ij}) é a matriz formada pelos cofatores dos elementos de A. Esse método é útil quando precisamos encontrar apenas alguns elementos da inversa, pois o elemento de índice ij de A^{-1} é dado por $\frac{1}{\det(A)} A_{ji}$.

Exercício resolvido 1 Calcule o elemento na segunda linha e terceira coluna da inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ utilizando a matriz dos cofatores.

Resolução: Temos que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^t$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Portanto, o elemento na segunda linha e terceira coluna é:

$$\frac{1}{3} A_{32} = \frac{1}{3} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}$$

Exercício resolvido 2 Calcule a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$.

Resolução: Vamos utilizar o método da matriz identidade e depois verificar que o resultado coincide com a fórmula da matriz inversa 2×2. Primeiro temos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -4 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Para obter 1 na posição a_{11}, basta dividir a primeira linha por -4:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/4 & -1/4 & 0 \\ 9 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Agora, para transformar o elemento -7 em 0, podemos fazer $L_2' = L_2 - 9L_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 9/4 & 1 \end{array}\right).$$

Para obter 1 na posição a_{22}, multiplicamos a segunda linha por -4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/4 & | & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & | & -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Por último, fazemos $L_1' = L_1 + \frac{3}{4}L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -7 & -3 \\ 0 & 1 & | & -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Com isso, obtemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$.

Utilizando a fórmula, temos $\det A = (-4)(-7) - 3 \cdot 9 = 1$, logo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

6 Sistemas de equações lineares

Nas seções seguintes, vamos explorar o conceito de sistema de equações lineares, suas classificações e como resolvê-las; além disso, vamos ver qual a relação desse conceito com o conteúdo de matrizes visto anteriormente.

Definição 6.1 Uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são números reais e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são incógnitas, é chamada de equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Exemplo 6.0.1 São equações lineares:

$$2x + 6y = 3 \qquad 4z - 12w = 0 \qquad x + y - 4z = 9$$

Definição 6.2 Um conjunto de m equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é chamado de sistema linear de m equações e n variáveis.

Genericamente um sistema linear tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplo 6.0.2 A seguir, veremos um sistema linear de 3 equações nas variáveis x, y e z.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 10 \\ -x + y = 6 \\ x - 3y + 2z = 13 \end{cases}$$

Note que não é necessário que todas as variáveis apareçam em todas as equações: o coeficiente de z na segunda equação é zero, por isso a incógnita não aparece, porém podemos representá-la por $0z$.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 10 \\ -x + y + 0z = 6 \\ x - 3y + 2z = 13 \end{cases}$$

6.1 Matriz associada a um sistema linear

Um sistema linear pode ser representado por uma equação matricial envolvendo uma matriz formada pelas constantes a_{ij}, uma matriz coluna das variáveis e uma matriz coluna das constantes b_i.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Perceba que, fazendo a multiplicação matricial, obtemos uma matriz coluna onde suas entradas correspondem ao lado esquerdo das equações do sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Denominando a matriz (a_{ij}) por A, a matriz das incógnitas por x e a matriz (b_i) por b, podemos representar o sistema linear por

$$Ax = b.$$

Exemplo 6.1.1 Represente na forma matricial o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 7 = -x \\ -x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

O primeiro passo é colocar as incógnitas no lado esquerdo e as constantes no lado direito das equações. Na primeira equação, a incógnita z pode ser escrita como $0z$:

$$\begin{cases} 3x + y + 0z = -7 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Agora podemos identificar as matrizes. Como o sistema possui 2 equações e 3 incógnitas, a matriz dos coeficientes será de ordem 2×3 e a matriz das constantes será de ordem 2×1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6.2 Soluções de um sistema linear

Dizemos que um conjunto ordenado de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear de n variáveis quando o conjunto é solução de todas as equações do sistema.

Exemplo 6.2.1 Vamos verificar que o conjunto ordenado $(6, 4, -1)$ é solução do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 17 \\ -x_1 - x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Para isso, basta substituir os valores no sistema e checar se as equações são satisfeitas:

$$\begin{cases} 6 + 3\cdot 4 + (-1) = 17 & \checkmark \\ -6 - (-1) = -5 & \checkmark \\ 6 - 4 + 2\cdot(-1) = 0 & \checkmark \end{cases}$$

Outra forma de verificar seria substituindo os valores de $(6, 4, -1)$ na representação matricial do sistema e checar se a equação matricial está correta.

6.3 Classificação de sistemas lineares

Vamos ver como sistemas lineares podem ser classificados com base nas suas soluções. Para exemplificar, considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Note que a segunda equação pode ser escrita como $2(x_1 + x_2) = 1$ e portanto $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2}$, porém, pela primeira equação, sabemos que $x_1 + x_2$ é igual a zero, dessa forma não existem valores para x_1 e x_2 que satisfaçam as duas equações ao mesmo tempo, portanto o sistema não tem solução.

Agora considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Pela segunda equação, temos $x_1 = x_2$, substituindo x_2 por x_1 na primeira obtemos $2x_1 - 2x_3 = 2$ e, portanto, $x_1 = x_3 + 1$. Trocando x_3 por qualquer número real k e trocando x_1 e x_2 por $k+1$, obtemos uma solução do sistema:

$$(k+1) + (k+1) - 2k = 2 \qquad\qquad (k+1) - (k+1) = 0$$

Disso segue que $x_1 = k+1$, $x_2 = k+1$ e $x_3 = k$, ou seja, $(k+1, k+1, k)$ é solução para qualquer número real k. Portanto, existem infinitas soluções para o sistema.

Definição 6.3 Dado um sistema linear de m equações e n variáveis, podemos classificá-lo da seguinte forma:

- Se o sistema possui solução, é chamado de sistema possível e pode ser classificado como:
  - **Sistema Possível e Determinado (SPD)** caso tenha uma única solução.
  - **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)** caso tenha infinitas soluções.
- Se o sistema não possui solução, é denominado **Sistema Impossível (SI)**.

Considere um sistema linear $Ax = b$ em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, ou seja, a matriz A é uma matriz quadrada. Se $\det(A) \neq 0$, então A possui inversa A^{-1}; multiplicando a equação pela inversa à esquerda, obtemos

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow I_n x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b.$$

Portanto, temos uma solução na forma matricial. Essa solução é única e o sistema é possível e determinado (SPD). Por outro lado, se $\det(A) = 0$, então o sistema será impossível (SI) ou possível e indeterminado (SPI). Nas próximas seções, veremos outras formas de encontrar a classificação e solução de sistemas lineares.

Exemplo 6.3.1 Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calculando seu determinante, obtemos $\det(A) = -38$ e, portanto, o sistema é possível e determinado.

Exercício resolvido 1 (PUC RS 2020 - Modificado) Um padeiro acabou de receber de um fornecedor três sacos de farinha de diferentes tamanhos. O terceiro e o segundo sacos, juntos, têm 50 quilogramas, o primeiro e o segundo, juntos, têm 45 quilogramas e o primeiro e o terceiro, juntos, têm 55 quilogramas. Monte o sistema linear e a equação matricial que representam a situação.

Resolução: Vamos representar o peso do primeiro saco, em quilogramas, por x_1 e do segundo e terceiro por x_2 e x_3, respectivamente. Com isso, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 50 \\ x_1 + x_2 = 45 \\ x_1 + x_3 = 55 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 45 \\ 55 \end{pmatrix}.$$

Exercício resolvido 2 (UEL 2020 - Modificado) Um agricultor tinha uma quantidade M de mudas de hortaliças para replantar em uma quantidade C de canteiros. Pensou em plantar 8 mudas de hortaliças em cada um dos canteiros, mas, dessa forma, sobrariam 32 mudas de hortaliças sem plantar. Tentou reorganizar o pensamento simulando o plantio de 12 mudas de hortaliças em cada um dos canteiros. Desse modo, todas as hortaliças seriam plantadas, porém sobrariam 8 canteiros sem muda alguma plantada. Determine a quantidade de mudas de hortaliças e de canteiros utilizando a matriz inversa.

Resolução: Da primeira parte do enunciado, sabemos que 8 mudas em cada canteiro mais 32 mudas totalizam a quantidade de mudas, logo: $8C + 32 = M$; da segunda parte, obtemos que, subtraindo 8 canteiros do total e plantando 12 mudas nos restantes, iremos plantar todas, logo $12(C-8) = M$, o que nos dá o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 8C + 32 = M \\ 12(C-8) = M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8C - M = -32 \\ 12C - M = 96 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 96 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo esse sistema na forma $Ax = b$, queremos obter $x = A^{-1}b$. Como $\det(A) = 4$, o sistema é SPD. A matriz inversa de A é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente:

$$\begin{pmatrix} C \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -32 \\ 96 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} C \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 288 \end{pmatrix}.$$

Disso segue que o número de mudas é 288 e o de canteiros é 32.

7 Sistemas escalonados

Considere um sistema linear de m equações e n variáveis, diremos que esse sistema está na sua forma escalonada quando:

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente a_{ij} diferente de zero.
- O número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo aumenta de equação para equação.

Obs. Se o sistema escalonado tiver o mesmo número de equações e variáveis, então a matriz dos coeficientes A será uma matriz triangular superior.

Exemplo 7.0.1 Os seguintes sistemas e suas matrizes dos coeficientes estão na forma escalonada:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ 2y + 3z = -2 \\ z = -1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 6 \\ 2y + 4z = -10 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y - z + w = 9 \\ -2z + w = -1 \\ 4w = 4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7.1 Resolução de sistemas escalonados

Vamos considerar sistemas escalonados aqueles nos quais todas as equações possuem pelo menos uma incógnita, ou seja, não possuem nenhuma linha do tipo $\alpha = \beta$ ou do tipo $0x_n = \beta$, com α e β números reais. Para classificar e achar as soluções desses sistemas, vamos olhar para o número de equações e incógnitas.

- Caso 1: O número de equações é igual ao número de incógnitas.

Nesse caso, o sistema é da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1(n-1)}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2(n-1)}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

O determinante da matriz A será o produto dos elementos da diagonal principal, pois A é uma matriz triangular, e, como esses elementos são não nulos, então $\det(A) \neq 0$ e, portanto, o sistema é SPD.

Para encontrar a solução do sistema, vamos resolver as equações de baixo para cima, primeiro isolando x_n na equação

$$a_{nn}x_n = b_n$$

e depois substituindo o resultado em

$$a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1}$$

para encontrar x_{n-1} e assim por diante. Perceba que esse método é mais simples do que encontrar a inversa de A e multiplicá-la na equação matricial.

- Caso 2: O número de equações é menor do que o número de incógnitas.

Nesse caso, a última linha do sistema tem mais do que uma incógnita, da seguinte forma:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + a_{kn}x_k + a_{(k+1)n}x_{k+1} + \cdots + a_{(n-1)n}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n.$$

Onde $a_{kn}, \cdots, a_{nn}$ são diferentes de zero. As variáveis $x_{k+1}, \cdots, x_{n-1}, x_n$ são chamadas **variáveis livres** e para resolver esse sistema vamos proceder de maneira semelhante ao caso 1, porém vamos isolar a variável x_k (primeira variável da última equação) em função das variáveis livres:

$$x_k = \frac{b_n - a_{(k+1)n}x_{k+1} - \cdots - a_{(n-1)n}x_{n-1} - a_{nn}x_n}{a_{kn}}.$$

Após isso, substituímos o resultado na penúltima equação e assim por diante, sempre em função das variáveis livres. Dessa forma, o sistema é SPI, pois dependerá de $x_{k+1}, \cdots, x_{n-1}, x_n$, ou seja, para cada escolha de $x_{k+1}, \cdots, x_{n-1}, x_n$ teremos uma solução. A quantidade de variáveis livres do sistema é chamada de **grau de indeterminação do sistema.**

Exemplo 7.1.1 Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ \quad 2y + 3z = -2 \\ \qquad 2z = -1 \end{cases}$$

O sistema tem 3 equações e 3 variáveis, além disso está na forma escalonada, portanto é SPD e pode ser resolvido com o método proposto no caso 1.

Primeiramente, isolamos z na terceira linha e substituímos na segunda:

$$2z = -1 \Rightarrow z = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$

$$2y + 3 \cdot \frac{-1}{2} = -2 \Rightarrow 2y = -2 + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{-1}{4}$$

Substituindo y e z na primeira:

$$2x - \left(\frac{-1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 7 \Rightarrow 2x = 7 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{29}{4} \Rightarrow$$

$$x = \frac{29}{8}.$$

Disso segue que a solução do sistema é $\left(\frac{29}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}\right)$.

Exemplo 7.1.2 Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + y - z - 4w = 1 \\ \quad y - 2z - 3w = 0 \end{cases}$$

O sistema tem 4 variáveis e 2 equações, portanto se encaixa no caso 2 e é SPI. Vamos começar isolando a primeira variável da última equação, que no caso é y:

$$y - 2z - 3w = 0 \Rightarrow y = 2z + 3w$$

As variáveis livres do sistema são z e w, e o grau de indeterminação é 2. Agora substituímos y na primeira equação para encontrar x em função de z e w:

$$x + (2z + 3w) - z - 4w = 1 \Rightarrow x + z - w = 1 \Rightarrow$$

$$x = 1 - z + w$$

Escrevendo $z = \alpha$ e $w = \beta$ chegamos às soluções: $(1 - \alpha + \beta, 2\alpha + 3\beta, \alpha, \beta)$. Note que, para cada escolha de α e β, temos uma solução diferente do sistema, por exemplo, se $\alpha = 5$ e $\beta = 0$ temos $(-4, 10, 5, 0)$, que é uma solução. Dessa forma, existem infinitas soluções para o sistema.

7.2 Escalonamento

Agora que já vimos métodos para resolver um sistema escalonado, veremos um processo para transformar um sistema linear qualquer em um escalonado.

Definição 7.1 Dois sistemas lineares são chamados de **equivalentes** quando possuem as mesmas soluções.

O processo de escalonamento consiste em fazer operações com as equações do sistema de forma a obter sistemas equivalentes, dessa forma podemos resolver a forma escalonada e garantir que suas soluções serão as mesmas do sistema original.

Dado um sistema S e um número real k diferente de zero, vale que:

- Se multiplicarmos uma equação de S por k, obtemos um novo sistema equivalente a S.
- Se substituirmos uma equação de S pela soma dela com outra equação de S, o sistema obtido é equivalente a S.

Obs. Essas operações lembram o processo de inversão de matrizes. Isso se deve ao fato de que os sistemas lineares e as matrizes estão profundamente relacionados.

Exemplo 7.2.1 Vamos escalonar e resolver o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} -x+4y-\ \ z=11 \\ \ \ x+\ \ y-3z=3 \\ 3x+\ \ y+2z=-6 \end{cases}$$

Para transformar esse sistema em um escalonado, o primeiro passo é eliminar a variável x da segunda equação. Note que podemos fazer isso somando a primeira linha na segunda, pois $x+(-x)=0$, dessa forma a nova segunda linha fica:

$$[-x+4y-z]+[x+y-3z]=5y-4z \quad \text{e} \quad 11+3=14.$$

Para eliminar a variável x da terceira equação, podemos realizar a seguinte operação: multiplicar a primeira por 3 e somar com a terceira. Substituindo o resultado na terceira:

$$3[-x+4y-z]+[3x+y+2z]=13y-z \quad \text{e} \quad 3\cdot 11-6=27.$$

Com isso, o novo sistema, equivalente ao original, é:

$$\begin{cases} -x+\ \ 4y-\ \ z=11 \\ \qquad\ 5y-4z=14 \\ \qquad 13y-\ \ z=27 \end{cases}$$

Para que o sistema fique na forma escalonada, falta apenas remover a variável y da última equação. Perceba que, se fizermos alguma operação envolvendo a primeira e a terceira equação, a variável x vai reaparecer na última, portanto a única opção que temos é operar a segunda com a terceira.

Isso pode ser feito multiplicando a segunda linha por $\frac{-13}{5}$ e somando o resultado na terceira, dessa forma o termo que multiplica y será: $\left(\frac{-13}{5}\right)5y+13y=-13y+13y=0$. E o sistema escalonado é:

$$\begin{cases} -x+4y-\quad z=11 \\ \qquad 5y-\ \ 4z=14 \\ \qquad\qquad \frac{47}{5}z=\frac{-47}{5} \end{cases}$$

Agora já podemos resolvê-lo:

Da terceira equação obtemos que $z=-1$, substituindo na segunda:

$$5y-4(-1)=14 \Rightarrow 5y=10 \Rightarrow y=2.$$

Substituindo y e z na primeira:

$$-x+4\cdot 2-(-1)=11 \Rightarrow -x=2 \Rightarrow x=-2.$$

Portanto, a solução é $x=-2,\ y=2$ e $z=-1$.

Obs. Se, durante o processo de escalonamento, chegarmos a uma equação que não tem solução, então o sistema é SI. Por exemplo, se tentarmos escalonar $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x+6y=5 \end{cases}$ obtemos $0=-3$ na segunda equação, isso indica que o sistema original não tem solução.

Exercício resolvido 1 (UEL 2014) Uma padaria possui 3 tipos de padeiros, classificados como A, B e C. Essa padaria é bem conhecida na cidade pela qualidade do pão francês, da baguete e do pão de batata.

Cada padeiro do tipo A produz, diariamente, 30 pães franceses, 100 baguetes e 20 pães de batata.

Cada padeiro do tipo B produz, diariamente, 30 pães franceses, 70 baguetes e 20 pães de batata.

Cada padeiro do tipo C produz, diariamente, 90 pães franceses, 30 baguetes e 100 pães de batata.

Quantos padeiros do tipo A, do tipo B e do tipo C são necessários para que em um dia a padaria produza, exatamente, 420 pães franceses, 770 baguetes e 360 pães de batata?

Resolução: Sejam x, y e z a quantidade de padeiros do tipo A, B e C, respectivamente. A seguir, temos o sistema que representa o problema, podemos simplificá-lo dividindo a primeira equação por 30, a segunda por 10 e a terceira por 20:

$$\begin{cases} 30x+30y+\ \ 90z=420 \\ 100x+70y+\ \ 30z=770 \\ 20x+20y+100z=360 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+\ \ y+3z=14 \\ 10x+7y+3z=77 \\ x+\ \ y+5z=18 \end{cases}$$

O primeiro passo para escalonar o sistema é eliminar a variável x da segunda e da terceira equações; para a segunda, basta multiplicar a primeira por -10 e somar com a segunda.

Já na terceira, apenas subtrair a primeira na terceira é o suficiente para eliminar x:

$$\begin{cases} x+y+3z=14 \\ 10x+7y+3z-(10x+10y+30z)=77-140 \\ x+y+5z-(x+y+3z)=18-14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\ \ y+\ \ 3z=14 \\ \quad -3y-27z=-63 \\ \qquad\qquad 2z=4 \end{cases}$$

Note que, ao remover x da terceira equação também removemos y e com isso o sistema já está escalonado, agora resta resolvê-lo de baixo para cima:

$$2z=4 \Rightarrow z=2$$

$$-3y-27\times 2=-63 \Rightarrow y=3$$

$$x+3+3\times 2=14 \Rightarrow x=5.$$

Portanto, a padaria precisa de 5 padeiros do tipo A, 3 padeiros do tipo B e 2 padeiros do tipo C para obter a produção diária desejada.

8 Regra de Cramer

Veremos no exemplo a seguir um método para resolver sistemas lineares possíveis e determinados que possuem mesmo número de equações e incógnitas.

Exemplo 8.0.1 Considere o sistema abaixo e sua matriz dos coeficientes:

$$\begin{cases} 2x+5y=35 \\ 3x+4y=21 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Note que, para eliminar a variável x da segunda equação, devemos multiplicar a primeira equação por $-\dfrac{3}{2}$ e somar com a segunda. A equação resultante é:

$$\frac{3}{2}(2x+5y)+3x+4y=-\frac{3}{2}\cdot 35+21$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\cdot 5+4\right)y=-\frac{3}{2}\cdot 35+21.$$

Multiplicando a equação por 2:

$$(-3\cdot 5+4\cdot 2)y=-3\cdot 35+21\cdot 2.$$

Podemos observar dois termos importantes nessa equação: o termo $-3\cdot 5+4\cdot 2$ é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, que vamos denotar por D. E o termo $-3\cdot 35+21\cdot 2$ é o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 35 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$, que é obtida trocando a segunda coluna da matriz dos coeficientes pelas constantes do sistema. Esse determinante vamos denotar por D_y (pois trocamos a coluna correspondente à variável y).

Dessa forma, podemos escrever o sistema escalonado como:

$$\begin{cases} 2x+\ \ \ 5y=35 \\ \qquad D\cdot y=D_y \end{cases}$$

Como $D\neq 0$ então $y=\dfrac{D_y}{D}$, numericamente temos $y=\dfrac{-3\cdot 35+21\cdot 2}{-3\cdot 5+4\cdot 2}$. Substituindo esse valor na primeira equação e isolando x, chegamos em:

$$x=\frac{35\cdot 4-5\cdot 21}{-3\cdot 5+4\cdot 2}.$$

O denominador é D e o numerador é o determinante da matriz obtida trocando a primeira coluna da matriz dos coeficientes do sistema pelas constantes: $\begin{pmatrix} 35 & 5 \\ 21 & 4 \end{pmatrix}$ que denotaremos por D_x. Portanto, a solução do sistema é $x=\dfrac{D_x}{D}=-5$ e $y=\dfrac{D_y}{D}=9$.

Generalizando o procedimento do exemplo anterior, obtemos a Regra de Cramer, que será apresentada a seguir.

Sejam S um sistema linear possível e determinado de n variáveis e n equações e A sua matriz dos coeficientes, vamos denotar:

- O determinante de A a por D. Note que, como o sistema é classificado como SPD, então $D\neq 0$.
- Substituindo a coluna referente à incógnita x_i de A pelas constantes do sistema, obtemos uma nova matriz $n\times n$, o determinante dessa nova matriz será denotado por D_{x_i}.

A **Regra de Cramer** nos diz que a solução do sistema é

$$\left(\frac{D_{x_1}}{D},\frac{D_{x_2}}{D},\cdots,\frac{D_{x_n}}{D}\right).$$

Exercício resolvido 1 (UEL 2019) Uma mãe, com o intuito de organizar os brinquedos dos seus filhos, teve a ideia de colocá-los em caixas coloridas. Ela classificou os brinquedos em três categorias, de acordo com seus tamanhos, sendo elas: brinquedos pequenos, médios e grandes. Para a organização, a mãe utilizou caixas de acrílico amarelas, verdes e azuis, as quais comportam as seguintes quantidades de brinquedos:

- Caixas Amarelas: 2 grandes, 8 médios e 10 pequenos.
- Caixas Verdes: 2 grandes, 20 médios e 16 pequenos.
- Caixas Azuis: 1 grande, 10 médios e 14 pequenos.

Considere que as crianças possuem 12 brinquedos grandes, 72 brinquedos de tamanho médio e 84 pequenos e que foi colocada, em cada caixa, exatamente a quantidade de brinquedos de cada categoria que ela comporta. Quantas caixas de cada cor esta mãe utilizou para acomodar todos os brinquedos de seus filhos?

Resolução: Sejam x, y e z a quantidade de caixas amarelas, verdes e azuis, respectivamente. O problema pode ser representado pelo seguinte sistema, que foi simplificado dividindo as duas últimas equações por 2:

$$\begin{cases} 2x+2y+z=12 \\ 8x+20y+10z=72 \\ 10x+16y+14z=84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+z=12 \\ 4x+10y+5z=36 \\ 5x+8y+7z=42 \end{cases}$$

Para utilizar a Regra de Cramer, precisamos encontrar D, D_x, D_y e D_z:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 5 \\ 5 & 8 & 7 \end{vmatrix}=36 \qquad D_x=\begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 \\ 36 & 10 & 5 \\ 42 & 8 & 7 \end{vmatrix}=144$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ 4 & 36 & 5 \\ 5 & 42 & 7 \end{vmatrix}=36 \qquad D_z=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 \\ 4 & 10 & 36 \\ 5 & 8 & 42 \end{vmatrix}=72$$

Com isso obtemos $(x,y,z)=\left(\frac{144}{36},\frac{36}{36},\frac{72}{36}\right)=(4,1,2)$. Portanto, a mãe comprou 4 caixas amarelas, 1 verde e 2 azuis.

9 Exercícios propostos

Exercício 6.1 (UEL 2014) Conforme dados da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), no Brasil, existem 720 aeródromos públicos e 1814 aeródromos privados certificados. Os programas computacionais utilizados para gerenciar o tráfego aéreo representam a malha aérea por meio de matrizes. Considere a malha aérea entre quatro cidades com aeroportos por meio de uma matriz. Sejam as cidades A, B, C e D indexadas nas linhas e colunas da matriz 4×4 dada a seguir. Coloca-se 1 na posição X e Y da matriz 4×4 se as cidades X e Y possuem conexão aérea direta, caso contrário coloca-se 0. A diagonal principal, que corresponde à posição $X=Y$, foi preenchida com 1.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Considerando que, no trajeto, o avião não pode pousar duas ou mais vezes em uma mesma cidade nem voltar para a cidade de origem, assinale a alternativa correta.

(a) Pode-se ir da cidade A até B passando por outras cidades.
(b) Pode-se ir da cidade D até B passando por outras cidades.
(c) Pode-se ir diretamente da cidade D até C.
(d) Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e B.
(e) Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e C.

Exercício 6.2 (ENEM 2019) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz. Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi aplicado na:

(a) Segunda-feira.
(b) Terça-feira.
(c) Quarta-feira.
(d) Quinta-feira.
(e) Sexta-feira.

Exercício 6.3 (ENEM 2012) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre	4º Bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Tabela 2: Notas por bimestre

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

(a) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

Exercício 6.4 (UNICAMP 2018) Sejam a e b número reais tais que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

(a) -2
(b) -1
(c) 1
(d) 2

Exercício 6.5 (FUVEST 2012) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 2a+1 \\ a-1 & a+1 \end{bmatrix}$ em que a é um número real. Sabendo que A admite inversa A^{-1} cuja primeira coluna é $\begin{bmatrix} 2a-1 \\ -1 \end{bmatrix}$, a soma dos elementos da diagonal principal de A^{-1} é igual a

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8
(e) 9

Exercício 6.6 (UNICAMP 2014) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$, onde a e b são números reais e distintos. Podemos afirmar que

(a) A matriz M não é inversível
(b) O determinante de M é positivo
(c) O determinante de M é igual a $a^2 - b^2$
(d) A matriz M é igual a sua transposta

Exercício 6.7 (UNICAMP 2020) Sabendo que p é um número real, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ e sua transposta A^t. Se $A + A^t$ é singular (não é inversível), então

(a) $p = 0$
(b) $|p| = 1$
(c) $|p| = 2$
(d) $|p| = 3$

Exercício 6.8 (ENEM 2018) Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente um bilhete?

(a) 34
(b) 42
(c) 47
(d) 48
(e) 79

Exercício 6.9 (Unisinos Verão 2018) Numa lanchonete, o preço de um sanduíche corresponde ao dobro do preço de um suco. Dois sanduíches e três sucos custam, ao todo, $R\$\ 45,50$. Assim, quanto custariam três sanduíches e quatro sucos?

(a) $R\$100,10$
(b) $R\$91,00$
(c) $R\$71,50$
(d) $R\$65,00$
(e) $R\$50,80$

Exercício 6.10 (UFSCar 2007) Uma loja vende três tipos de lâmpada (x, y e z). Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando $R\$\ 42,10$ pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou $R\$\ 47,30$. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja:

(a) $R\$30,50$
(b) $R\$31,40$
(c) $R\$31,70$
(d) $R\$32,30$
(e) $R\$33,20$

Exercício 6.11 (FUVEST 2004) Um estacionamento cobra $R\$\ 6,00$ pela primeira hora de uso, $R\$\ 3,00$ por hora adicional e tem uma despesa diária de $R\$\ 320,00$. Considere-se um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é:

(a) 25
(b) 26
(c) 27
(d) 28
(e) 29

Exercício 6.12 (Mackenzie 2002) De uma excursão participam 280 pessoas, sendo que 40% do número de homens é igual a 30% do número de mulheres. O número de homens é:

(a) 208
(b) 120
(c) 180
(d) 140
(e) 210

Exercício 6.13 (VUNESP - Modificado) Dados os sistemas lineares,

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1x+C_2y=1 \\ C_1x-C_2y=2 \end{cases}$$

e admitindo que os sistemas são equivalentes, os valores de C_1 e C_2, respectivamente, são:

(a) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$
(b) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$
(c) $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$
(d) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$
(e) $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$

Exercício 6.14 (IBMEC 2018) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-3 \\ kx+ky=20 \end{cases}$$

Para que o sistema seja possível, devemos ter:

(a) $k=4$
(b) $k=3$
(c) $k=2$
(d) $k=1$
(e) $k=0$

Exercício 6.15 (Mackenzie 2007) A fração $\frac{x}{y}$ será igual a $\frac{1}{2}$, se o numerador for aumentado de 2 unidades e o denominador aumentado de 1 unidade; entretanto, se o numerador for aumentado de 1 unidade e o denominador diminuído de 2 unidades, a fração ficará igual a $\frac{3}{5}$. Dessa forma, x^y é igual a

(a) 32
(b) 64
(c) 128
(d) 81
(e) 121

Exercício 6.16 (IME 1992) Determine os valores de x para que:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 4 & 6 \\ x & x+2 & 0 & 10 \\ x^2 & 0 & 4x & 4 \\ x & 4 & 10 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

Exercício 6.17 (UNESP 2005) Foi realizada uma pesquisa, num bairro de determinada cidade, com um grupo de 500 crianças de 3 a 12 anos de idade. Para esse grupo, em função da idade x da criança, conclui-se que o peso médio $p(x)$, em quilogramas, era dado pelo determinante da matriz A, onde:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & 2/3 \end{vmatrix} = 0$$

Com base na fórmula $p(x)=\det(A)$, determine:

a) o peso médio de uma criança de 5 anos;

b) a idade mais provável de uma criança cujo peso é 30 kg.

Exercício 6.18 (UDESC 2019) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 5y+2 \\ 3x-2 & 4y+3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2y-12 \\ 6x+2 \end{bmatrix}$ e sabendo que $AB=C$, então o valor de $x+y$ é igual a:

(a) $\frac{1}{10}$
(b) 33
(c) 47
(d) $\frac{1}{20}$
(e) 11

Exercício 6.19 (FGV 2016) Débora pagou por 3 balas e 10 chicletes o triplo do que Paulo pagou, no mesmo lugar, por 4 balas e 3 chicletes. A razão entre o preço de uma bala e o preço de um chiclete neste lugar é

(a) 3
(b) $\frac{7}{13}$
(c) $\frac{3}{10}$
(d) $\frac{3}{7}$
(e) $\frac{1}{9}$

Exercício 6.20 (UNICAMP 2016) Considere o sistema linear nas variáveis x, y, z e w:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \\ w - z = 3 \end{cases}$$

Logo, a soma $x + y + z + w$ é igual a

(a) 2
(b) 0
(c) 6
(d) 6

Exercício 6.21 (UNICENTRO 2012) Sobre o sistema linear

$$\begin{cases} 7x + y - 3z = 10 \\ x + y + z = 6 \\ 4x + y + az = b \end{cases}$$

com a e b reais, pode-se afirmar que é

(a) possível e indeterminado quando $a = 2$.
(b) possível e determinado quando $a \neq 1$.
(c) possível e determinado quando $a \neq -1$.
(d) impossível quando $a = -1$ e $b = 8$.
(e) impossível.

Exercício 6.22 (UNIOESTE 2017) Sobre o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 3x + \beta y = 7 \end{cases}$$

é CORRETO afirmar que

(a) possui uma única solução, qualquer que seja β.
(b) possui infinitas soluções, qualquer que seja β.
(c) possui ao menos uma solução, qualquer que seja β.
(d) só tem solução se $\beta = 5$.
(e) é impossível se $\beta \neq 5$.

---

7 Sequências

Sequências

As sequências surgiram da necessidade de perceber os padrões presentes na natureza e em seus fenômenos. Não se sabe ao certo quando, mas alguns achados históricos mostram que as sequências surgiram há muito tempo. Existem papiros[2] de 1950 a.C. que continham alguns problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas. Já na Mesopotâmia, registros históricos datados de 1900 a.C. a 1600 a.C. apresentavam problemas com sequências numéricas.

Mas, afinal, o que é uma sequência? No contexto da Matemática, as sequências numéricas são funções cujo domínio é um subconjunto ou o próprio conjunto dos números naturais. Uma das mais famosas é a Sequência de Fibonacci, a qual surgiu do padrão da reprodução de coelhos. Outro momento significativo para a construção da teoria de sequências numéricas foi a descoberta, de Gauss, da fórmula da soma de n termos de uma Progressão Aritmética. Na tentativa de realizar a soma dos números de 1 a 100, esse matemático, ainda criança, encontrou uma fórmula para resolver tal problema de forma mais efetiva e que é usada até hoje.

1 Sequência numérica

Definição 1.1 Uma sequência numérica é uma função cujo domínio é um subconjunto ou o próprio conjunto dos números naturais, de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, está associado um número real a_n no contradomínio da função. Diremos que a_n é o termo da sequência que se encontra na posição n.

Exemplo 1.0.1 Alguns exemplos de sequência numérica:

A sequência dos números naturais:

$$(1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Neste caso, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ e assim sucessivamente.

A sequência dos números naturais pares:

$$(2, 4, 6, 8, \ldots).$$

Neste caso, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$ e assim sucessivamente.

A sequência dos números inteiros maiores que -5 e menores que 3 :

$$(-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2).$$

Neste caso, $a_1 = -4$, $a_2 = -3$, $a_3 = -2$ e assim sucessivamente.

1.1 Sequência finita e infinita

Definição 1.2 — Sequência Finita. Uma sequência é dita finita se o domínio da função não é o conjunto dos naturais e, consequentemente, possui uma restrição que delimita a quantidade de termos, de modo que possua um último termo.

Exemplo 1.1.1 A sequência dos múltiplos de 5 maiores que 9 e menores que 36.

$$(10, 15, 20, 25, 30, 35).$$

[2] Papiro era o material usado para escrever na época do Antigo Egito.

Neste exemplo, o domínio da função é $\{1,2,3,4,5,6\}$ e o último termo é 3500. Perceba que é possível determinar todos os termos da sequência.

Definição 1.3 — Sequência Infinita. Uma sequência é dita infinita quando o domínio da função é o conjunto dos números naturais, ou seja, é toda sequência que possui infinitos termos.

Exemplo 1.1.2

A sequência dos números naturais ímpares:

$$(1,3,5,7,\ldots).$$

Note que nessa sequência não é possível determinar o último termo, pois a sequência possui infinitos termos.

1.2 Notação

Uma sequência finita pode ser representada pela seguinte notação:

$$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n).$$

Na qual a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo, a_3 é o terceiro termo e assim sucessivamente até o último termo representado por a_n.

Enquanto uma sequência infinita pode ser representada como:

$$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots).$$

Na qual a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo, a_3 é o terceiro termo e assim sucessivamente. O termo a_n é dito n-ésimo termo ou termo geral.

Outra notação que pode ser usada para representar uma sequência é:

$$(a_n).$$

Observe que o termo geral pode representar qualquer elemento da sequência, de modo que n indica a posição na qual o termo se encontra. Por exemplo, para representar o primeiro termo, basta substituir $n=1$ e, teremos que a_1 é o primeiro termo da sequência.

1.3 Fórmula do termo geral

A fórmula do termo geral é uma expressão pela qual se pode obter qualquer termo da sequência. Quando os termos são obtidos a partir dos anteriores, a sequência é recursiva, caso contrário, é denominada não recursiva.

Exemplo 1.3.1 No início deste capítulo, citamos a sequência de Fibonacci. Essa sequência pode ser vista na reprodução de coelhos apresentada no seguinte problema: no início de um ano nasce um casal de coelhos e sua reprodução, bem como a dos outros casais, segue três princípios:

- Após 2 meses de vida, o casal produz um novo casal.
- A partir do segundo mês, o casal dá origem a outro casal todos os meses.
- Não ocorrem mortes durante o ano.

Considere uma sequência em que a_n é a quantidade de casais de coelhos no início do mês n. Dadas as condições do problema, no primeiro e no segundo mês, teríamos apenas um casal de coelhos. Disso segue que $a_1=1$ e $a_2=1$.

Nos meses seguintes, a quantidade total de casais será dada pelos casais de coelhos que existiam no mês anterior somados aos casais produzidos pelos que existiam dois meses antes, uma vez que esses serão os aptos à reprodução. Assim, obtemos a sequência de Fibonacci na qual $a_1=1$ e $a_2=1$ e os demais termos são obtidos de forma recursiva e cujo termo geral é:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

para todo $n \geq 3$.

Observe que, para encontrar o terceiro termo, substituímos $n=3$ na fórmula do termo geral:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 \\ a_3 &= 1+1 \\ a_3 &= 2. \end{aligned}$$

Para encontrar o quarto termo, substituímos $n=4$ na fórmula do termo geral:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + a_2 \\ a_4 &= 2+1 \\ a_4 &= 3. \end{aligned}$$

Perceba que os termos dessa sequência são dados pela soma dos dois termos anteriores; dessa forma, a sequência é recursiva.

Exemplo 1.3.2 Considere a sequência infinita cuja fórmula do termo geral é dada por

$$a_n = 2n+1.$$

Para encontrar o primeiro termo, basta substituir $n=1$ e teremos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\cdot 1+1 \\ a_1 &= 3. \end{aligned}$$

Para encontrar o segundo termo, basta substituir $n=2$ na fórmula:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2\cdot 2+1 \\ a_2 &= 5. \end{aligned}$$

Para encontrar o centésimo termo, basta substituir $n = 100$ na fórmula:

$$a_{100} = 2 \cdot 100 + 1$$
$$a_{100} = 201.$$

Perceba que os termos dessa sequência podem ser obtidos a partir de sua posição e não dependem dos termos anteriores, portanto esta sequência é não recursiva.

Exercício resolvido 1 (UEL 2018) Considere a fórmula do termo geral de uma sequência finita de números primos, apresentada a seguir, em que a_n representa o n-ésimo termo e n corresponde a um número natural, tal que $1 \leq n \leq 40$.

$$a_n = n^2 - n + 41$$

A partir dessas informações, responda aos itens a seguir.

(a) Determine o primeiro e o último número primo dessa sequência. Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.
(b) Qual a posição do número primo 251 nessa sequência? Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

Resolução:

(a) Perceba que a sequência é finita e possui 40 termos, assim, para descobrir o primeiro termo, basta substituir $n = 1$ na fórmula do termo geral da sequência:

$$a_n = n^2 - n + 41$$
$$a_1 = 1^2 - 1 + 41$$
$$a_1 = 41$$

Logo, o primeiro termo da sequência é 41.

Agora, para obter o último termo da sequência basta substituir $n = 40$ na fórmula do termo geral:

$$a_n = n^2 - n + 41$$
$$a_{40} = 40^2 - 40 + 41$$
$$a_{40} = 1601$$

Portanto, o último termo da sequência é 1601.

(b) Para descobrir a posição de 251 na sequência, podemos considerar $a_n = 251$, de modo que n representa a posição do número primo 251. Substituindo na sequência:

$$a_n = n^2 - n + 41$$
$$251 = n^2 - n + 41$$
$$0 = n^2 - n - 210$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{841}}{2}$$
$$n = \frac{1 \pm 29}{2}$$

Assim, $n = 15$ ou $n = -14$. No enunciado, temos que $0 \leq n \leq 40$, disso segue que $n = 15$, ou seja, o termo 251 se encontra na 15^{a} posição da sequência.

Exercício resolvido 2 (PUC RIO 2008) Na sequência $(1, 3, 7, \ldots)$, cada termo é duas vezes o anterior mais um. Assim, por exemplo, o quarto termo é igual a 15. Então o décimo termo é:

(a) 1000
(b) 1002
(c) 1015
(d) 1023
(e) 1024

Resolução: O enunciado do problema nos fornece que os termos da sequência são dados de forma recursiva. Temos que a fórmula do termo a_{n+1} é:

$$a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

Como $a_4 = 15$, então $a_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$.

Como $a_5 = 31$, então $a_6 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$.

Como $a_6 = 63$, então $a_7 = 2 \cdot 63 + 1 = 127$.

Como $a_7 = 127$, então $a_7 = 2 \cdot 127 + 1 = 255$.

Como $a_8 = 255$, então $a_9 = 2 \cdot 255 + 1 = 511$.

Como $a_9 = 511$, então $a_{10} = 2 \cdot 511 + 1 = 1023$.

Assim, $a_{10} = 1023$.

Portanto a resposta correta é (d).

---

2 Progressão aritmética

É uma sequência na qual os termos, a partir do segundo, são formados pela soma entre o termo anterior e um valor fixo chamado de razão, que denotaremos por r.

Exemplo 2.0.1 Considere a sequência dos números pares entre 0 e 15:

$$(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14).$$

Veja que:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_3 = 4+2 = 6$$

$$a_4 = 6+2 = 8$$

$$a_5 = 8+2 = 10$$

$$a_6 = 10+2 = 12$$

$$a_7 = 12+2 = 14.$$

Perceba que, exceto no primeiro termo, os demais são formados pelo anterior somado a 2. Assim, podemos dizer que a razão dessa P.A. é dada por $r = 2$.

Dessa forma, os termos de uma progressão aritmética, popularmente conhecida como P.A., podem ser obtidos recursivamente pela fórmula:

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

na qual a_n é o termo anterior a a_{n+1} e r é a razão da P.A.

Em alguns casos, a fórmula $a_{n+1} = a_n + r$ não é viável para encontrar determinado termo de uma progressão aritmética. Suponha que queira encontrar o vigésimo termo de uma P.A.,na qual $a_1 = 10$ e $r = 15$. Para isso, seria necessário determinar os 19 termos que antecedem o $20°$. Em situações como essa, deve-se usar a fórmula do termo geral.

2.1 Fórmula do termo geral

Suponha uma P.A. em que a_1 é o primeiro termo e r é a razão.

Observe que os termos são formados pela soma do termo anterior com a razão r da seguinte forma:

- $a_1 = a_1 + 0 \cdot r$
- $a_2 = a_1 + 1 \cdot r$
- $a_3 = a_2 + 1 \cdot r = a_1 + 2 \cdot r$
- $a_4 = a_3 + 1 \cdot r = a_1 + 3 \cdot r$
- $a_5 = a_4 + 1 \cdot r = a_1 + 4 \cdot r$
- $a_6 = a_5 + 1 \cdot r = a_1 + 5 \cdot r$

Disso segue que um termo a_n que se encontra na posição n pode ser determinado ao somar $(n-1) \cdot r$ ao primeiro termo da sequência. Assim, iremos obter a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética dada por :

$$a_n = \ a_1 + \ (n-1) \ \cdot r,$$

na qual a_n é o n-ésimo termo, a_1 é o primeiro termo, n é a posição do n-ésimo termo e r é a razão da P.A.

Exemplo 2.1.1 Vamos encontrar o vigésimo termo de uma P.A., na qual $a_1 = 10$ e $r = 15$. Queremos encontrar a_{20}, Basta substituir na fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_{20} = 10 + (20-1) \cdot 15$$

$$a_{20} = 10 + 19 \cdot 15$$

$$a_{20} = 295.$$

Além disso, essa fórmula pode ser usada para:

- Encontrar a razão de uma P.A. quando possui um termo qualquer e o primeiro termo da sequência;
- Encontrar a posição de um termo qualquer sabendo a razão e o primeiro termo;
- Encontrar o primeiro termo quando temos um termo qualquer e a razão.

Exemplo 2.1.2 Considere uma P.A que tem $a_1 = 5$ como primeiro termo e $a_5 = 21$. Para encontrar a razão da P.A., basta substituir os termos na fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$21 = 5 + (5-1) \cdot r$$

$$21 - 5 = 4 \cdot r$$

$$\frac{16}{4} = r$$

$$r = 4,$$

sendo assim, obtemos que a razão da P.A. é 4.

Exemplo 2.1.3 Considere uma P.A. com razão $r = 6$ e $a_1 = 2$. Queremos determinar em que posição n se encontra o termo $a_n = 44$. Substituindo os valores na fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$44 = 2 + (n-1) \cdot 6$$

$$44 - 2 = 6 \cdot n - 6$$

$$42 + 6 = 6 \cdot n$$

$$48 = 6 \cdot n$$

$$n = 8.$$

Portanto, 44 é o oitavo termo da P.A.

2.2 Classificação

Uma progressão aritmética pode ser classificada em crescente, decrescente ou constante, de acordo com sua razão r.

- Se $r > 0$, então a progressão aritmética é dita **crescente**.

  Exemplo 2.2.1 Considere a seguinte P.A.:

  $$(1, 2, 3, 4, \ldots).$$

  Perceba que a razão $r = 1$,ou seja, $r > 0$ e, portanto, a P.A. é crescente.

- Se $r < 0$, então a progressão aritmética é dita **decrescente**.

Exemplo 2.2.2 Considere a seguinte P.A.:

$$(10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, \ldots).$$

Perceba que a razão $r = -2$, ou seja, $r < 0$ e, portanto, a P.A. é decrescente.

- Se $r = 0$, então a progressão aritmética é dita **constante**.

Exemplo 2.2.3 Considere a seguinte P.A.:

$$(9, 9, 9, \ldots, 9).$$

Perceba que a razão $r = 0$, portanto a P.A. é constante.

2.3 Fórmula da soma de n termos de uma P.A. finita

Como visto na introdução deste capítulo, o matemático Gauss descobriu a fórmula da soma de n termos de uma P.A. ao receber a tarefa de somar os números inteiros de 1 a 100. Observe que ele precisava somar os termos de uma P.A. finita na qual o primeiro termo é $a_1 = 1$, o último termo é $a_{100} = 100$ e a razão é $r = 1$.

Gauss percebeu que a soma do primeiro com o último termo era 101, a soma do segundo com o penúltimo termo era 101, a soma do terceiro com o antepenúltimo termo era 101 e assim sucessivamente. Em termos matemáticos:

$$1 + 100 = 101;$$
$$2 + 99 = 101;$$
$$3 + 98 = 101;$$
$$4 + 97 = 101;$$
$$\ldots$$
$$50 + 51 = 101.$$

Como a sequência possui 100 termos, foram realizadas 50 adições entre dois termos, assim,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Generalizando esse procedimento para uma P.A. finita com n termos, tal que a_1 é primeiro termo, a_n é o último termo e r é a razão, se n é par, podemos obter as adições a seguir:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r;$$
$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n-2) \cdot r = a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r = a_1 + a_n;$$
$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2 \cdot r + a_1 + (n-3) \cdot r = a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r = a_1 + a_n;$$
$$\ldots$$
$$a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n+2}{2}} = a_1 + \frac{n-2}{2} \cdot r + a_1 + \frac{n}{2} \cdot r = a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r = a_1 + a_n;$$

E assim, vamos obter $\frac{n}{2}$ vezes essa soma, pois teremos n termos somados 2 a 2. Portanto,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

Utilizando S_n para representar a soma de n termos, teremos a fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2},$$

na qual a_1 é o primeiro termo, a_n é o n-ésimo termo, n é o número de termos e S_n é a soma dos n termos.

Observe o que ocorre quando a quantidade n de termos da progressão aritmética é ímpar.

Considere uma P.A. finita com n termos, tal que a_1 é primeiro termo, a_n é o último termo e r é a razão. Observe que se retirarmos a_n da sequência vamos obter uma P.A. dada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}).$$

De modo que a quantidade $n-1$ de termos é par, logo podemos aplicar a fórmula anterior, disso segue que a soma desses termos será

$$S_{n-1} = \frac{(a_1 + a_{n-1}) \cdot (n-1)}{2}.$$

Observe que ao acrescentarmos o a_n que havíamos retirado da P.A. iremos obter que a soma dos n termos será dada por:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_{n-1}) \cdot (n-1)}{2} + a_n$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_{n-1}) \cdot (n-1) + 2 \cdot a_n}{2}.$$

Utilizando a fórmula do termo geral, temos que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, disso segue que:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_{n-1}) \cdot (n-1) + 2 \cdot a_1 + 2 \cdot (n-1) \cdot r}{2}$$
$$S_n = \frac{a_1 \cdot (n-1) + a_1 + a_{n-1} \cdot (n-1) + a_1 + (2n-2) \cdot r}{2}$$
$$S_n = \frac{a_1 \cdot n + a_{n-1} \cdot (n-1) + a_1 + (n-2) \cdot r + n \cdot r}{2}.$$

Devido à fórmula do termo geral, podemos substituir $a_1 + (n-2) \cdot r$ por a_{n-1}, de modo a obter:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot n + a_{n-1} \cdot (n-1) + a_{n-1} + n \cdot r}{2}$$
$$S_n = \frac{a_1 \cdot n + a_{n-1} \cdot n + n \cdot r}{2}.$$

Colocando n em evidência no numerador teremos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_{n-1} + r) \cdot n}{2}.$$

Substituindo $a_{n-1} + r = a_n$, chegamos novamente a fórmula da soma de n termos de uma P.A. finita dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Assim, podemos concluir que a fórmula é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Fórmula da soma de n termos de uma P.A. finita

Considere uma progressão aritmética finita com n termos dada por

$$(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n).$$

Podemos calcular a soma dos termos utilizando a seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2},$$

na qual a_1 é o primeiro termo, a_n é o enésimo termo, n é o número de termos e S_n é a soma dos n termos.

Exemplo 2.3.1 Para calcular a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 10 e a razão $r = 5$, devemos obter o $10°$ termo da sequência e, posteriormente, substituir os valores obtidos na fórmula da soma de termos de uma progressão aritmética.

Para obter o $10°$ termo, utilizaremos a fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$a_{10} = 10 + (10-1) \cdot 5$$
$$a_{10} = 55,$$

sendo assim, teremos que $a_1 = 10$, $a_{10} = 55$ e $n = 10$. Substituindo na fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$
$$S_{10} = \frac{(10+55) \cdot 10}{2}$$
$$S_{10} = \frac{650}{2}$$
$$S_{10} = 325.$$

Exercício resolvido 1 (UERJ 2017) Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia – corrida de 6 km;
- dias subsequentes – acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior. O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

(a) 414
(b) 438
(c) 456
(d) 484

Resolução: No primeiro dia, o maratonista percorreu 6 km, isto é, $a_1 = 6$.

Nos dias seguintes, o maratonista percorria 2 km a mais que no dia anterior, sendo assim, percebe-se que a distância percorrida nos dias é dada por uma P.A. de razão 2.

Temos que, no último dia, o maratonista percorreu 42 km.

Seja n o último dia e $a_n = 42$. Utilizaremos a fórmula do termo geral para descobrir quantos dias o maratonista correu.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$42 = 6 + (n-1) \cdot 2$$
$$42 = 6 + 2n - 2$$
$$42 = 4 + 2n$$
$$42 - 4 = 2n$$
$$\frac{38}{2} = n$$
$$19 = n.$$

Disso segue que o maratonista correu por 19 dias. Agora, para descobrir o total percorrido do primeiro ao último dia, basta utilizar a fórmula da soma de termos de uma P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$
$$S_{19} = \frac{(6+42) \cdot 19}{2}$$
$$S_{19} = \frac{48 \cdot 19}{2}$$
$$S_{19} = 456.$$

Portanto, o total percorrido pelo maratonista foi de 456 km. A alternativa correta é (c).

Exercício resolvido 2 (UEL 2016) Um estandarte é um tipo de bandeira que pode representar um país, uma instituição civil ou religiosa, um clube de futebol, uma escola de samba. Uma artesã fez um estandarte e o enfeitou, em sua parte inferior, com pedaços de fita de tamanhos diferentes. Sabendo que o menor pedaço de fita mede 8cm e que o comprimento dos pedaços de fita aumenta de $2,5$ em $2,5$ centímetros, responda aos itens a seguir, desconsiderando possíveis perdas.

(a) Considerando que o maior pedaço de fita mede $125,5$ cm, quantos pedaços de fita foram utilizados para confeccionar o estandarte? Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

(b) Supondo que a artesã tenha utilizado 60 pedaços de fita, qual será o comprimento total dos pedaços de fita utilizados? Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

Resolução:

(a) O enunciado do problema nos fornece que o menor pedaço de fita mede 8 cm e que os pedaços vão aumentando de $2,5$ em $2,5$ centímetros. Disto, segue que a situação pode ser representada por uma progressão aritmética na qual o primeiro termo é 8 e a razão é $2,5$. Sabendo que o maior pedaço de fita mede $125,5$ cm, basta descobrir sua posição na sequência e acharemos a quantidade de pedaços de fita utilizados. Observe que $a_n = 125,5$, $a_1 = 8$ e $r = 2,5$. Substituindo na fórmula do termo geral de uma P.A. :

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$
$$125,5 = 8 + (n-1)\cdot 2,5$$
$$125,5 - 8 = 2,5\cdot n - 2,5$$
$$120 = 2,5\cdot n$$
$$48 = n.$$

Logo, o estandarte contém 48 pedaços de fita.

(b) Nesse item, devemos calcular o comprimento total de 60 pedaços de fita utilizados para confeccionar um estandarte. Sabemos que o comprimento das fitas do estandarte é dado por uma P.A. com primeiro termo $a_1 = 8$ e razão $r = 2,5$. Para encontrar a soma do comprimento de 60 pedaços de fita, basta utilizar a fórmula da soma de n termos de uma P.A., e para isso, precisamos encontrar o último termo da sequência, isto é, a_{60}.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$
$$a_{60} = 8 + 59\cdot 2,5$$
$$a_{60} = 155,5.$$

Substituindo na fórmula da soma de n termos de uma P.A., teremos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$
$$S_{60} = \frac{(8 + 155,5)\cdot 60}{2}$$
$$S_{60} = 163,5\cdot 30$$
$$S_{60} = 4905$$

sendo assim, o comprimento total dos pedaços de fita é de 4905 cm.

Exercício resolvido 3 (UNICAMP 2015) Se $(a_1, a_2, \ldots, a_{13})$ é uma progressão aritmética (PA) cuja soma dos termos é 78, então a_7 é igual a

(a) 6
(b) 7
(c) 8
(d) 9

Resolução: Sabe-se que a soma dos termos da P.A. é 78. Utilizando a fórmula da soma de termos de uma P.A. finita, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$
$$S_{13} = \frac{(a_1 + a_{13})\cdot 13}{2}$$
$$78 = \frac{(a_1 + a_{13})\cdot 13}{2}$$
$$\frac{78\cdot 2}{13} = a_1 + a_{13}$$
$$12 = a_1 + a_{13}.$$

Além disso, pela fórmula do termo geral da P.A., sabemos que

$$a_{13} = a_1 + 12\cdot r.$$

Substituindo em $12 = a_1 + a_{13}$:

$$12 = a_1 + a_1 + 12\cdot r$$
$$12 = 2a_1 + 12\cdot r$$
$$6 = a_1 + 6\cdot r.$$

Pela fórmula do termo geral, obtemos:

$$a_7 = a_1 + 6\cdot r.$$

Portanto, $a_7 = 6$ e a alternativa correta é (a).

---

3 Progressão geométrica

Uma progressão geométrica, também chamada de P.G., é uma sequência na qual os termos, a partir do segundo, são formados pela multiplicação entre o termo anterior e um valor fixo chamado de razão, que denotaremos por q.

Exemplo 3.0.1 Considere a sequência:

$$(2, 4, 8, 16, 32, 64).$$

Veja que:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_3 = 4 \cdot 2 = 8$$

$$a_4 = 8 \cdot 2 = 16$$

$$a_5 = 16 \cdot 2 = 32$$

$$a_6 = 32 \cdot 2 = 64.$$

Perceba que, exceto no primeiro termo, os demais são formados pelo anterior multiplicado por 2, sendo assim, podemos dizer que a razão dessa P.G. é dada por $q = 2$.

Dessa forma, os termos de uma progressão geométrica podem ser obtidos recursivamente pela fórmula:

$$a_{n+1} = \ a_n \cdot q,$$

na qual a_n é o termo anterior a a_{n+1} e q é a razão da P.G..

Em alguns casos, a fórmula $a_{n+1} = a_n \cdot q$ não é viável para encontrar determinado termo de uma progressão geométrica. Suponha que queremos encontrar o décimo termo de uma P.G. cujo $a_1 = 3$ e $r = 4$. Para isso, seria necessário determinar os 9 termos que sucedem o primeiro termo. Em situações como essa, deve-se usar a fórmula do termo geral.

3.1 Fórmula do termo geral

Antes de apresentar a fórmula do termo geral de uma P.G. vamos observar como são formados os termos de uma progressão geométrica.

Considere uma P.G. de razão q e termos a_n tal que n é a posição do termo. Podemos observar que:

$$a_1 = a_1 \cdot 1 = a_1 \cdot q^0;$$

O segundo termo será formado pelo produto entre o primeiro termo e a razão q.

$$a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^1;$$

O terceiro termo será formado pelo produto entre o primeiro termo e q^2.

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2;$$

O quarto termo será formado pelo produto entre o primeiro termo e q^3.

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3;$$

$$\ldots$$

Ou seja, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, teremos que o termo a_n é formado pelo produto entre o primeiro termo e q^{n-1}. Portanto, a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

na qual a_n é o n-ésimo termo, a_1 é o primeiro termo, n é a posição do n-ésimo termo e q é a razão da P.G.

Exemplo 3.1.1 Vamos encontrar o décimo termo de uma P.G. cujo $a_1 = 3$ e $q = 4$.

Queremos encontrar a_{10}, substituindo na fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{10} = 3 \cdot 4^9$$

$$a_{10} = 3 \cdot 262144$$

$$a_{10} = 786432.$$

Logo, o décimo termo da P.G. é 786432.

3.2 Fórmula da soma de n termos de uma P.G. finita

Suponha que queremos somar os n termos de uma P.G. finita de razão q e primeiro termo a_1. Esta progressão será dada por:

$$(a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, \ldots, a_1 \cdot q^{n-1})$$

Observe que se $q = 1$, a P.G. será:

$$(a_1, a_1, a_1, \ldots, a_1).$$

E a soma dos n termos, representada por S_n, pode ser descrita por:

$$S_n = n \cdot a_1,$$

na qual n é a quantidade de termos e a_1 é o primeiro termo.

Porém, nos casos em que $q \neq 1$ teremos:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (7.1)$$

Observe que, se multiplicarmos q em ambos os membros da igualdade anterior, teremos:

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n. \qquad (7.2)$$

Subtraindo (7.1) de (7.2) iremos obter:

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1.$$

Colocando S_n e a_1 em evidência:

$$(q-1) \cdot S_n = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}.$$

Dessa forma, obtemos a fórmula da soma de n termos de uma P.G. finita.

Fórmula da soma de n termos de uma P.G. finita

Considere uma progressão geométrica finita com n termos dada por

$$(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{n-1}, a_n).$$

Podemos calcular a soma dos termos utilizando a seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1},$$

na qual a_1 é o primeiro termo, n é o número de termos, q é a razão da P.G., tal que $q \neq 1$, e S_n é a soma dos n termos.

Exemplo 3.2.1 Considere uma P.G. finita com 10 termos, na qual o primeiro termo é 1 e a razão, 3. Calcule a soma dos 10 termos dessa P.G.

Temos que $a_1 = 1$, $n = 10$ e $q = 3$. Substituindo na fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$$

$$S_{10} = \frac{1 \cdot (3^{10} - 1)}{3-1}$$

$$S_{10} = \frac{59048}{2}$$

$$S_{10} = 29524.$$

Portanto, a soma dos 10 termos da P.G. é 29524.

Fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita

Considere uma progressão geométrica de razão q que satisfaça as seguintes condições: infinita, decrescente e com razão $0 < q < 1$. Nesse caso, será possível somar os infinitos termos dessa sequência utilizando a fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

na qual a_1 é o primeiro termo, q é a razão da P.G. e S é a soma dos infinitos termos.

Exemplo 3.2.2 Considere uma P.G. infinita, na qual o primeiro termo é $a_1 = -10$ e a razão $q = 3$. Neste exemplo, não é possível calcular a soma dos infinitos termos, pois a razão $q = 3$ da progressão geométrica não satisfaz a condição $0 < q < 1$.

Exemplo 3.2.3 Considere uma P.G. infinita, na qual o primeiro termo é $a_1 = 8$ e a razão $q = \frac{1}{2}$. Essa progressão satisfaz as condições para que possamos calcular a soma dos infinitos termos. Para isso, basta substituir os valores de a_1 e q na fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16.$$

Portanto, a soma dos infinitos termos é 16.

Exercício resolvido 1 (FUVEST) Numa progressão geométrica de quatro termos positivos, a soma dos dois primeiros vale 1 e a soma dos dois últimos vale 9. Calcule a razão da progressão.

(a) 3
(b) 5
(c) 7
(d) 9

Resolução: De acordo com o enunciado, temos uma P.G. de quatro termos da forma (a_1, a_2, a_3, a_4), na qual $a_1 + a_2 = 1$ e $a_3 + a_4 = 9$.

Pela fórmula do termo geral de uma P.G.:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^3.$$

Substituindo a_2 em $a_1 + a_2 = 1$ obtemos:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_1 + a_1 \cdot\ q = 1$$

$$a_1 \cdot (1+q) = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{1+q}.$$

Substituindo a_3 e a_4 em $a_3 + a_4 = 9$, obtemos:

$$a_3 + a_4 = 9$$

$$a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = 9$$

$$a_1 \cdot (q^2 + q^3) = 9$$

$$a_1 \cdot q^2 \cdot (1+q) = 9.$$

Substituindo $a_1 = \frac{1}{1+q}$ em $a_1 \cdot q^2 \cdot (1+q) = 9$, obtemos:

$$\frac{1}{1+q} \cdot q^2 \cdot (1+q) = 9$$

$$q^2 = 9.$$

Como a P.G. tem apenas termos positivos, então a razão q é positiva. Logo, $q = 3$. A resposta correta é (a).

Exercício resolvido 2 (FIA) Numa progressão geométrica, tem-se $a_3 = 40$ e $a_6 = -320$. A soma dos oito primeiros termos é:

(a) -1700
(b) -850
(c) 850
(d) 1700
(e) 750

Resolução: Pela fórmula do termo geral, temos que:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$40 = a_1 \cdot q^2.$$

Além disso,

$$a_6 = a_1 \cdot q^5$$
$$-320 = a_1 \cdot q^2 \cdot q^3.$$

Substituindo $40 = a_1 \cdot q^2$, obtemos:

$$-320 = 40 \cdot q^3$$
$$-8 = q^3$$
$$-2 = q.$$

Voltando em $40 = a_1 \cdot q^2$ e substituindo $q = -2$, obtemos:

$$40 = a_1 \cdot (-2)^2$$
$$40 = 4 \cdot a_1$$
$$a_1 = 10.$$

Para calcular a soma dos oito primeiros termos iremos substituir $a_1 = 10$ e $q = -2$, na fórmula da soma de n termos de uma P.G.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$
$$S_8 = \frac{10 \cdot \left((-2)^8 - 1\right)}{-2 - 1}$$
$$S_8 = \frac{10 \cdot (255)}{-3}$$
$$S_8 = -850.$$

Portanto, a soma dos oito primeiros termos da P.G. é -850. Assim, a resposta correta é (b).

Exercício resolvido 3 (OBMEP 2006) No início de janeiro de 2006, Tina formou com colegas um grupo para resolver problemas de Matemática. Eles estudaram muito e por isso, a cada mês, conseguiam resolver o dobro do número de problemas resolvidos no mês anterior. No fim de junho de 2006 o grupo havia resolvido um total de 1.134 problemas. Quantos problemas o grupo resolveu em janeiro?

(a) 12
(b) 18
(c) 20
(d) 24
(e) 36

Resolução: A situação relatada no problema pode ser descrita como uma progressão geométrica. Considerando que a quantidade de exercícios dobra a cada mês, temos que a P.G. possui razão $q = 2$. No final de junho de 2006, haviam resolvido 1134 problemas, ou seja, a soma dos problemas resolvidos durante 6 meses foi 1134. Substituindo na fórmula da soma de n termos de uma P.G. finita, teremos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$
$$1134 = \frac{a_1 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1}$$
$$1134 = 63 \cdot a_1$$
$$a_1 = 18.$$

Portanto, em janeiro o grupo resolveu 18 problemas e a alternativa correta é (b).

Exercício resolvido 4 (UEL 2014) João publicou na Internet um vídeo muito engraçado que fez com sua filha caçula. Ele observou e registrou a quantidade de visualizações do vídeo em cada dia, de acordo com o seguinte quadro.

Dias	Quantidade de visualizações do vídeo em cada dia
1	$7x$
2	$21x$
3	$63x$
...	...

Na tentativa de testar os conhecimentos matemáticos de seu filho mais velho, João o desafiou a descobrir qual era a quantidade x, expressa no quadro, para que a quantidade total de visualizações ao final dos 5 primeiros dias fosse 12705.

(a) Sabendo que o filho de João resolveu corretamente o desafio, qual resposta ele deve fornecer ao pai para informar a quantidade exata de visualizações representada pela incógnita x? Apresente os cálculos realizados na resolução deste item.

(b) Nos demais dias, a quantidade de visualizações continuou aumentando, seguindo o mesmo padrão dos primeiros dias. Em um único dia houve exatamente 2066715 visualizações registradas desse vídeo. Que dia foi este? Apresente os cálculos realizados na resolução deste item.

Resolução:

(a) Observe que a situação descrita apresenta uma P.G. de razão $q = 3$, pois a quantidade de visualizações triplica de um dia para outro. Temos que as visualizações em 5 dias foram 12705, desse modo a soma dos primeiros 5 termos dessa P.G. é 12705. Ainda, o primeiro termo da sequência é $7x$. Queremos descobrir o valor de x. Substituindo na fórmula da soma de n termos de uma P.G. teremos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$12705 = \frac{7x \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$25410 = 7x \cdot 242$$

$$25410 = 1694x$$

$$x = 15.$$

Logo, o filho de João respondeu que a incógnita é $x = 15$.

(b) Considerando que as visualizações aumentaram seguindo o mesmo padrão, então, nos outros dias, a quantidade de visualizações também foi dada por uma P.G. de razão $q = 3$ e primeiro termo $a_1 = 105$. Queremos descobrir a posição do termo 2066715. Para isso, utilizaremos a fórmula do termo geral de uma P.G.:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$2066715 = 105 \cdot 3^{n-1}$$

$$19683 = 3^{n-1}$$

$$3^9 = 3^{n-1}$$

$$n = 10.$$

Disso segue que no $10^{\underline{o}}$ dia ocorreram 2066715 visualizações no vídeo.

4 Exercícios propostos

Exercício 7.1 (UEG 2017) Dada a sequência numérica $-2, 10, 12, -60, -58, \ldots$, verifica-se que o $12^{\underline{o}}$ termo é um número

(a) par entre -40.000 e -30.000.
(b) ímpar entre -40.000 e -30.000.
(c) ímpar entre 30.000 e 40.000.
(d) par entre 30.000 e 40.000.
(e) par acima de 40.000.

Exercício 7.2 (MACKENZIE 2017) Se $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ é uma sequência de números inteiros tal que $a_1 = 1$, para $n > 1$, $a_{n+1} - a_n = 3^n$ o valor de a_{10} é igual a

(a) 29524.
(b) 88572.
(c) 265719.
(d) 9840.
(e) 3279.

Exercício 7.3 (UERJ 2017) Considere a sequência $(a_n) = (2, 3, 1, -2, ...)$,
$n \in \mathbb{N}^*$, com 70 termos, cuja fórmula de recorrência é:

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$$

O último termo dessa sequência é:

(a) 1.
(b) 2.
(c) -1.
(d) -2.

Exercício 7.4 (UFAC 2011) Considere uma sequência de números reais positivos (a_n), com $1 \le n$. Supondo $a_i + a_{i+1} = a_{i+2}$, para $i = 1, 2, 3, \ldots$, $a_6 = 21$ e $a_7 \cdot a_8 = 1870$, é correto afirmar que:

(a) $a_1 = 4$.
(b) $a_1 = 3$.
(c) $a_1 = 2$.
(d) $a_1 = 1$.
(e) $a_1 = 0$.

Exercício 7.5 (FATEC 2013) Em uma sequência numérica, sabe-se que:
• o $1^{\underline{o}}$ termo é igual a 10;
• o $5^{\underline{o}}$ termo é igual a 31;
• a soma do $1^{\underline{o}}$, do $2^{\underline{o}}$ e do $3^{\underline{o}}$ termos é igual a 45;
• a soma do $2^{\underline{o}}$, do $3^{\underline{o}}$ e do $4^{\underline{o}}$ termos é igual a 60;
• a soma do $3^{\underline{o}}$, do $4^{\underline{o}}$ e do $5^{\underline{o}}$ termos é igual a 75.

Nessas condições, o produto do $2^{\underline{o}}$ pelo $4^{\underline{o}}$ termo dessa sequência é:

(a) 300.
(b) 304.
(c) 325.
(d) 400.
(e) 475.

Exercício 7.6 (UECE 2015) A sequência de números inteiros $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ é conhecida como sequência de Fibonacci. Esta sequência possui uma lógica construtiva que relaciona cada termo, a partir do terceiro, com os dois termos que lhe são precedentes. Se p e q são os menores números primos que são termos dessa sequência localizados após o décimo termo, então, o valor de $p + q$ é

(a) 322.
(b) 312.
(c) 342.
(d) 332.

Exercício 7.7 (UEG 2018) O termo geral da sequência $(-3,-2,1,6,13,22,\ldots)$ e o décimo termo dessa sequência são, respectivamente:

(a) $a_n = -2+n^2$ e 98.
(b) $a_n = n^2-4n$ e 60.
(c) $a_n = n^2-3$ e 97.
(d) $a_n = 3n^2-1$ e 299.
(e) $a_n = 2n^2-1$ e 199.

Obs. Para o exercício 7.7 considere $n = 0,1,2,\ldots$

Exercício 7.8 (FATEC 2017) Os termos da sequência

$$\left(\frac{11}{2};\frac{17}{3};\frac{35}{6};6;\frac{37}{6};\frac{19}{3};\frac{13}{2};\ldots\right)$$

obedecem a um critério de formação.

O oitavo termo dessa sequência é

(a) $\frac{23}{2}$.
(b) $\frac{21}{2}$.
(c) $\frac{23}{3}$.
(d) $\frac{22}{3}$.
(e) $\frac{20}{3}$.

Exercício 7.9 (UEL) Considere que em uma determinada cidade, foram vendidos ao todo 1000 livros nos 5 primeiros domingos da mencionada campanha publicitária. A cada domingo foram vendidos 70 livros a mais que o anterior. Quantos livros foram vendidos no quarto domingo?

(a) 270.
(b) 280.
(c) 410.
(d) 720.
(e) 930.

Exercício 7.10 (UEL 2001) Qual é o menor número de termos que deve ter a progressão aritmética de razão $r = 8$ e primeiro termo $a_1 = -375$, para que a soma dos n primeiros termos seja positiva?

(a) 94.
(b) 95.
(c) 48.
(d) 758.
(e) 750.

Exercício 7.11 (UEL) Considere a sequência $(1,2,4,5,7,8,10,11,...)$, cujos termos são os números inteiros positivos que não são múltiplos de 3. A soma dos quarenta primeiros termos dessa sequência é:

(a) 600.
(b) 900.
(c) 1200.
(d) 1400.
(e) 1800.

Exercício 7.12 (ENEM 2012) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é

(a) 21.
(b) 24.
(c) 26.
(d) 28.
(e) 31.

Exercício 7.13 (ENEM 2011) O número mensal de passageiros de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33000 passagens; em fevereiro, 34500; em março, 36000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

(a) 38000.
(b) 40500.
(c) 41000.
(d) 42000.
(e) 48000.

Exercício 7.14 (ENEM 2016) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar.

Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

(a) 40.
(b) 60.

(c) 100.
(d) 115.
(e) 120.

Exercício 7.15 (ENEM 2018) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, $R\$\ 8000,00$ por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é

(a) $R\$\ 512000,00$.
(b) $R\$\ 520000,00$.
(c) $R\$\ 528000,00$.
(d) $R\$\ 552000,00$.
(e) $R\$\ 584000,00$.

Exercício 7.16 (ENEM 2013) Para um principiante em corrida, foi estipulado o seguinte plano de treinamento diário: correr 300 metros no primeiro dia e aumentar 200 metros por dia, a partir do segundo. Para contabilizar seu rendimento, ele utilizará um chip, preso ao seu tênis, para medir a distância percorrida nos treinos. Considere que esse chip armazene, em sua memória, no máximo $9,5$ km de corrida/caminhada, devendo ser colocado no momento do início do treino e descartado após esgotar o espaço para reserva de dados.

Se esse atleta utilizar o chip desde o primeiro dia de treinamento, por quantos dias consecutivos esse chip poderá armazenar a quilometragem desse plano de treino diário?

(a) 7.
(b) 8.
(c) 9.
(d) 12.
(e) 13.

Exercício 7.17 (ENEM 2011) Atualmente existem muitos aplicativos de fazendas virtuais que, apesar de críticas, possuem uma enorme quantidade de usuários. Embora apresentem algumas diferenças de funcionamento, as fazendas virtuais possuem a mesma concepção: cada vez que o usuário cuida de sua fazenda ou da de seus amigos, ganha pontos, e, quanto mais pontos acumula, maior é seu nível de experiência.

Em um aplicativo de fazenda virtual, o usuário precisa de 1000 pontos para atingir o nível 1. Acumulando mais 1200 pontos, atinge o nível 2; acumulando mais 1400 pontos, atinge o nível 3 e assim por diante, sempre com esse padrão.

Um usuário que está no nível 15 de experiência acumulou

(a) 3800 pontos.
(b) 15200 pontos.
(c) 32200 pontos.
(d) 35000 pontos.
(e) 36000 pontos.

Exercício 7.18 (ENEM 2013) O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.
Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

(a) 32.
(b) 34.
(c) 33.
(d) 35.
(e) 31.

Exercício 7.19 (ENEM 2010) Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.
Disponível em: http://www.webrun.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino. Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

(a) 12 dias.
(b) 13 dias.
(c) 14 dias.
(d) 15 dias.
(e) 16 dias.

Exercício 7.20 (ENEM 2013) As projeções para a produção de arroz no período de 2012 - 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção(t)
2012	$50,25$
2013	$51,50$
2014	$52,75$
2015	$54,00$

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

(a) $497,25$.
(b) $500,85$.
(c) $502,87$.
(d) $558,75$.
(e) $563,25$.

Exercício 7.21 (UEL 1996) Numa aplicação financeira, chama-se MONTANTE em certa data à soma da quantia aplicada com os juros acumulados até aquela data. Suponha uma aplicação de $R\$\ 50.000,00$ a juros compostos, à taxa de 3% ao mês. Nesse caso, os montantes em reais, no início de cada período de um mês, formam uma progressão geométrica em que o primeiro termo é 50000 e a razão é $1,03$. Os juros acumulados ao completar 10 meses de aplicação são
Dado: $1,03^{10} = 1,3439$

(a) $R\$\ 10.300,00$.
(b) $R\$\ 15.000,00$.
(c) $R\$\ 17.195,00$.
(d) $R\$\ 21.847,00$.
(e) $R\$\ 134.390,00$.

Exercício 7.22 (ENEM 2020) Leia o texto a seguir.

Van Gogh (1853-1890) vendeu um único quadro em vida a seu irmão, por 400 francos. Nas palavras do artista: "Não posso evitar os fatos de que meus quadros não sejam vendáveis. Mas virá o tempo em que as pessoas verão que eles valem mais que o preço das tintas".
Disponível em: http://www.naturale.med.br/artes/4_van_gogh.pdf. Acesso em: 2 out 2013.

A mercantilização da cultura impulsionou o mercado de artes nos grandes centros urbanos. Hoje o quadro Jardim das Flores, de Van Gogh, é avaliado em aproximadamente 84 milhões de dólares. Supondo que há 61 anos essa obra custasse 84 dólares e que sua valorização até 2013 ocorra segundo uma PG, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor dessa obra em 2033, considerando que sua valorização continue conforme a mesma PG.

(a) $1,68 \cdot 10^9$ dólares.
(b) $8,40 \cdot 10^9$ dólares.
(c) $84,00 \cdot 10^7$ dólares.
(d) $168,00 \cdot 10^6$ dólares.
(e) $420,00 \cdot 10^7$ dólares.

Exercício 7.23 (UEL 2016) Leia o texto a seguir.

Segundo teorias demográficas, a população mundial cresceria em ritmo rápido, comparado a uma PG = $(2,4,8,16,32,64,\ldots,a,\ldots)$, e a produção mundial de alimentos cresceria em um ritmo lento, comparado a uma PA = $(1,2,3,4,\ldots,b,\ldots)$.
Adaptado de: <http://educação.uol.com.br/disciplinas/geografia/teorias-demograficas-malthusianos-neomalthusianos-e-reformistas.htm>. Acesso em: 15 jun. 2015.

Suponha que PA seja a sequência que representa a quantidade de alimentos, em toneladas, produzidos no tempo $t > 0$, e que PG seja a sequência que representa o número de habitantes de uma determinada região, nesse mesmo tempo t.

A partir dessas informações, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a razão entre a quantidade de alimentos, em kg, e o número de habitantes, para $t = 10$ anos.

(a) $\frac{5^3}{2^6}$.
(b) $\frac{5^4}{2^6}$.
(c) $\frac{5^5}{2^6}$.
(d) $\frac{5^3}{2^5}$.
(e) $\frac{5^4}{2^5}$.

Exercício 7.24 (UEL 2018) Em uma população totalmente suscetível a uma doença infecciosa, o número de novas infecções $C(n)$, no instante de tempo n, cresce em progressão geométrica de razão $q > 0$. Isto é, $C(n) = C_0 \cdot q^n$, onde n é expresso em uma certa unidade de medida e C_0 é a quantidade de infectados no instante inicial $n = 0$. A seguir, é apresentada uma tabela com exemplos.

Doença	q	Unidade de medida
Sarampo	15	4 dias
Difteria	6	4 dias
SARS	5	10 dias
Influenza (cepa pandêmica de 1918)	3	7 dias
Ebola (surto de 2014)	2	2 semanas

Adaptado de: <https://en.wikipedia.org/wiki/Basic_reproduction_number>. Acesso em: 25 maio 2017.

Suponha que uma cidade totalmente suscetível, na Europa medieval, tenha sido tomada pela Peste Negra, que se iniciou com $C_0 = 15$ infectados. Considerando que, em 8 dias, a soma de infectados desde o início da infestação totalizou 195 pessoas e que a unidade de medida seja de 4 dias, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a razão q.

(a) 2.
(b) 3.
(c) 5.
(d) 6.
(e) 10.

Exercício 7.25 (UEL 2009) Thomas Malthus (1766-1834) assegurava que, se a população não fosse de algum modo contida, dobraria de 25 em 25 anos, crescendo em progressão geométrica, ao passo que, dadas as condições médias da terra disponíveis em seu tempo, os meios de subsistência só poderiam aumentar, no máximo, em progressão aritmética.

A lei de Malthus cita progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG). Se os dois primeiros termos de uma sequência são $x_1 = 6$ e $x_2 = 12$, o quinto termo será

(a) $x_5 = 16$ se for uma PA e $x_5 = 24$ se for uma PG.
(b) $x_5 = 24$ se for uma PA e $x_5 = 96$ se for uma PG.
(c) $x_5 = 30$ se for uma PA e $x_5 = 30$ se for uma PG.
(d) $x_5 = 30$ se for uma PA e $x_5 = 96$ se for uma PG.
(e) $x_5 = 48$ se for uma PA e $x_5 = 72$ se for uma PG.

Exercício 7.26 (Vunesp 2019) As massas, em quilogramas, de três blocos constituem uma progressão geométrica de razão positiva, cujo primeiro termo é 3. Sabendo-se que a média aritmética dos três termos é 21, a massa do bloco que corresponde ao terceiro termo dessa progressão é

(a) 32 kg.
(b) 36 kg.
(c) 48 kg.
(d) 63 kg.
(e) 27 kg.

Exercício 7.27 (PUC RJ 2016) Os termos da soma $S = 4 + 8 + 16 + \cdots + 2048$ estão em progressão geométrica. Assinale o valor de S.

(a) 4092.
(b) 4100.
(c) 8192.
(d) 65536.
(e) 196883.

Exercício 7.28 (PUC SP 2017) As notas das provas de matemática de André, Bia e Carol formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão $1,5$. Sabendo que a média aritmética dessas três notas foi $4,75$, então, a maior nota foi

(a) $8,25$.
(b) $7,50$.
(c) $6,75$.
(d) $6,50$.

8

Análise combinatória e Estatística

Análise combinatória e Estatística

Os conteúdos abordados neste capítulo estão relacionados a Estatística e Análise combinatória, que é uma das áreas da matemática que trata da coleta, análise e da interpretação dos dados. O termo estatística foi introduzido pela primeira vez por Gottfried Achenwall em 1749, para atribuir a análise de dados sobre o Estado, e através de Sir John Sinclair foi considerada uma ação de coleta de dados. A estatística surgiu através das teorias da probabilidade entre correspondências de Pierre de Fermat e Blaise Pascal em 1654.

A partir do século XX, surgiram aplicações para serem utilizadas em outras áreas como agronomia, a saúde, controle de qualidade, nas indústrias químicas e na economia social. A utilização da estatística se expandiu de tal forma que hoje ela move o mundo.

"A ciência da estatística é o principal instrumento por meio do qual o progresso da civilização é agora medido, e pelo qual seu desenvolvimento a partir de agora será amplamente controlado."

Simon Newton Dexter North.

1 Elementos básicos

1.1 Experimentos aleatórios

Os experimentos aleatórios são aqueles que, quando repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos. Entretanto, mesmo que não saibamos qual o resultado que irá ocorrer, é possível descrever um conjunto de todos os resultados que podem ocorrer.

Exemplo 1.1.1 Estes são alguns exemplos do que são experimentos aleatórios.

a) Lançar uma moeda e observar a face de cima.
b) Lançar um dado e observar o número da face de cima.
c) Lançar duas moedas e observar o número de coroas obtidas.
d) De uma urna contendo cinco bolas pretas e quatro bolas azuis, selecionar uma bola e observar sua cor.
e) Injetar uma dose de insulina em uma pessoa e observar a quantidade de açúcar que diminui.
f) Numa cidade onde 20% dos habitantes possuem determinada doença, selecionar trinta pessoas e observar o número de portadores dessa doença.

1.2 Espaço amostral (Ω)

Chamamos um conjunto (Ω) de espaço amostral quando este é formado por todos os **resultados possíveis** de um experimento aleatório. Trabalharemos com espaços amostrais Ω finitos.

Exemplo 1.2.1 Estes são alguns exemplos do que são espaços amostrais:

a) Lançar uma moeda e observar a face de cima.
   Ω = {K,C}, em que K representa cara e C coroa.
b) Lançar uma moeda duas vezes e observar a sequência de caras e coroas.
   Podemos ter no primeiro lançamento K ou C e no segundo lançamento K ou C. Então
   Ω = {(K,K), (K,C), (C,K), (C,C)}.
c) Um lote tem 25 peças. Uma a uma, elas são escolhidas e observa-se o número de defeituosas.
   Ω = {0, 1, 2, 3, ..., 25}.
d) De uma urna contendo 4 bolas vermelhas (V), 3 bolas pretas (P) e 1 bola azul (A), extrair uma bola e observar sua cor.
   Ω = {V, P, A}.

Exercício resolvido 1 Dê um espaço amostral para cada experimento abaixo.

a) Uma letra é escolhida entre as letras da palavra DADO.
b) Entre quatro pessoas A, B, C, D duas são escolhidas para formarem uma comissão. Observam-se os elementos dessa comissão.
c) Uma urna contém três bolas vermelhas (V) e duas pretas (P). Duas bolas são extraídas, sem reposição, e observadas suas cores, na sequência em que foram extraídas.

Resolução: Vejamos,

a) Como temos quatro opções de letras: D, A, D e O, então se escolhermos uma dessas quatro, o espaço amostral será:
Ω = {D, A, O}.
b) Note que temos quatro pessoas, assim devemos escolher duas para formarem uma comissão. Então, vamos escolher e anotar da seguinte forma: (a,b), onde a é a primeira escolha e b a segunda escolha. Com isso, temos as seguintes opções:

- Escolher a pessoa A primeiro: (A,B) (A,C) (A,D)
- Escolher a pessoa B primeiro: (B,A) (B,C) (B,D)
- Escolher a pessoa C primeiro: (C,A) (C,B) (C,D)
- Escolher a pessoa D primeiro: (D,A) (D,B) (D,C)

Como queremos uma comissão de duas pessoas, perceba que escolher (A,B) é a mesma coisa que escolher (B,A), pois é a mesma comissão. Então, retirando os que se repetem, temos que o espaço amostral é
Ω = {(A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D)}.
c) Na urna, temos três bolas vermelhas (V) e duas pretas (P), queremos analisar as sequência de cores de duas bolas que foram extraídas sem reposição. Então, vamos anotar da seguinte forma:(a,b), onde a é a primeira retirada e b a segunda retirada, assim:
- Retirar bolas pretas na primeira: (P,V) (P,P)
- Retirar bolas vermelhas na primeira: (V,P) (V,V)

Note que nesse caso, repetimos as bolas pretas e vermelhas (P,P) e (V,V), pois temos mais que uma bola de cada cor. Então, o espaço amostral é
Ω = {(P,V), (P,P), (V,P), (V,V)}.

1.3 Evento

Seja um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω, chamaremos de evento todo subconjunto de Ω. Em geral, indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto: $A, B, C, ..., X, Y, Z$.

Exemplo 1.3.1 Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Eis alguns eventos:

- A: ocorrência de número par.
A = {2, 4, 6}.
- B: ocorrência de número maior ou igual a três.
B = {3, 4, 5, 6}.
- C: ocorrência de número menor que sete.
C = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = Ω.
- D: ocorrência de número maior que sete.
$D = \varnothing$.

Exemplo 1.3.2 Uma moeda é lançada duas vezes, e observa-se a sequência de caras e coroas.

Ω = {(K,K), (K,C), (C,K), (C,C)}.

Eis alguns eventos:

- A: ocorrência de cara (K) no 1º lançamento.
A = {(K,K), (K,C)}.
- B: ocorrência de coroa (C) em pelo menos um lançamento.
B = {(C,C), (C,K), (K,C)}.
- C: ocorrência de nenhuma cara (K) nos dois lançamentos.
C = {(C,C)}.

Exemplo 1.3.3 Entre 4 pessoas simbolizadas pelas letras A, B, C, D duas são escolhidas para formarem uma comissão. Então, nosso espaço amostral será:

Ω ={(A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D)}.

Eis alguns eventos:

- K: comissões formadas com a pessoa C.
K = {(A,C), (C,D), (B,C)}.
- L: comissões em que as pessoas A e B não estejam juntas.
L = {(A,C), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D)}.
- M: comissões em que as pessoas B e D estejam juntas.
M = {(B,D)}.

1.4 Tipos de eventos

Como os eventos são subconjuntos do espaço amostral (Ω), então podemos trabalhar com as operações entre conjuntos, combinando-os para formarem novos eventos.

Sejam A e B dois eventos, vale lembrar que podemos ter elementos em comum ou não, nos dois eventos. Assim, enunciaremos alguns tipos de eventos e quando necessário, utilizaremos o diagrama de Venn-Euler para auxiliar a visualização:

Evento certo

Um evento certo é quando temos o próprio espaço amostral. Como exemplo temos:

Exemplo 1.4.1 Em um lançamento de um dado que possui faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6, devemos determinar o seguinte evento:

A = {“obter um número menor que 7”}.

Resolução: Perceba que $A = \Omega$, pois os números menores que 7 em um dado são: 1, 2, 3, 4, 5 e 6, que coincidentemente são os elementos das faces do dado “1, 2, 3, 4, 5 e 6”.

Evento impossível

Um evento impossível é quando temos o subconjunto vazio do espaço amostral. Como exemplo temos:

Exemplo 1.4.2 Em um lançamento de um dado que possui faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6, devemos determinar o seguinte evento:

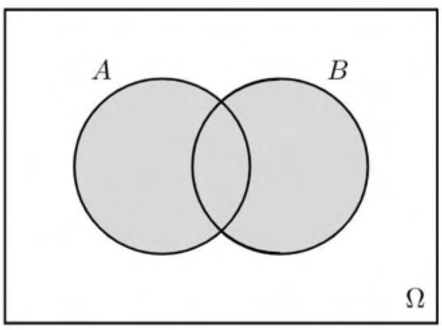
A = {“obter um número maior que 7”}.

Resolução: Perceba que $A = \varnothing$, pois é impossível cair face maior que 7, já que as faces de um dado são os elementos “1, 2, 3, 4, 5 e 6”.

Evento união

A união de dois eventos, como o próprio nome já diz, consiste em unir os dois eventos em estudo, então são todos os elementos de A e B, ou seja, os elementos devem estar em A ou em B.

Dizemos que $A \cup B$ é a união entre o evento A e o evento B.



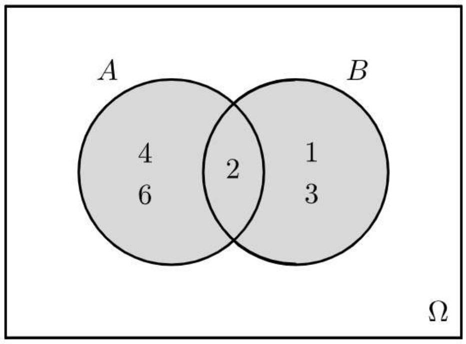
$$A \cup B = \{x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Figura 1.4.1: Diagrama de Venn para união entre eventos

Exemplo 1.4.3 Em um lançamento de um dado que possui faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6, devemos obter um número par ou menor que 4.

Resolução: Podemos dividir em dois eventos:

A = {2, 4, 6} e B = {1, 2, 3}.

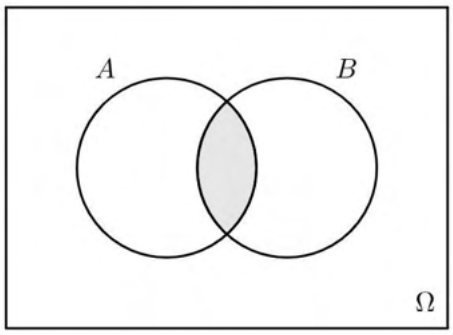


Assim, temos a união dos eventos $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 6}.

Evento intersecção

A intersecção entre dois eventos são os elementos em comum entre A e B, ou ainda, os elementos que estão simultaneamente em A e B.

Dizemos que $A \cap B$ é a interseção entre o evento A e o evento B.



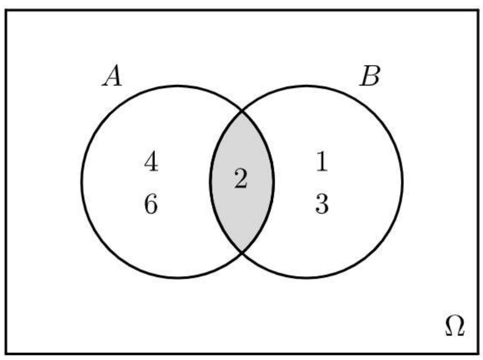
$$A \cap B = \{x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Figura 1.4.2: Diagrama de Venn para intersecção entre eventos

Exemplo 1.4.4 Em um lançamento de um dado que possui faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6, devemos obter um número par e menor que 4.

Resolução: Podemos dividir em dois eventos:

A = {2, 4, 6} e B = {1, 2, 3}.



Assim, temos a intersecção dos eventos $A \cap B = \{2\}$.

Eventos mutuamente exclusivos

Em particular, quando a intersecção é vazia, $A \cap B = \varnothing$, A e B são chamados mutuamente exclusivos, ou ainda, os dois eventos não ocorrem ao mesmo tempo.

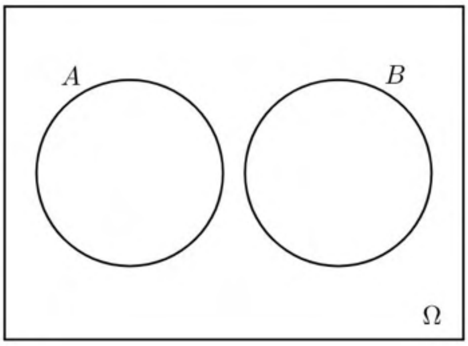


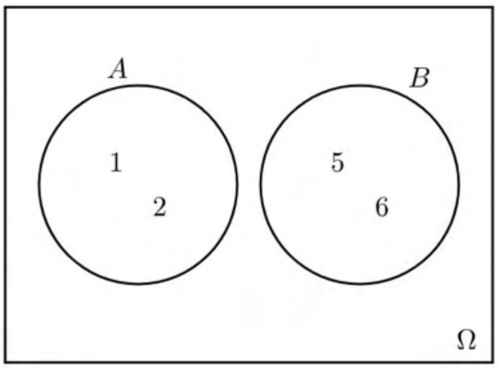
Figura 1.4.3: Diagrama de Venn para eventos mutuamente exclusivos

Obs. Uma outra nomenclatura para esse tipo de evento é Eventos Disjuntos, que tem origem do estudo dos conjuntos disjuntos.

Exemplo 1.4.5 Em um lançamento de um dado que possui faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6, devemos obter um número menor que 3 e maior que 4.

Resolução: Podemos dividir em dois eventos:

$A = \{1, 2\}$ e $B = \{5, 6\}$.

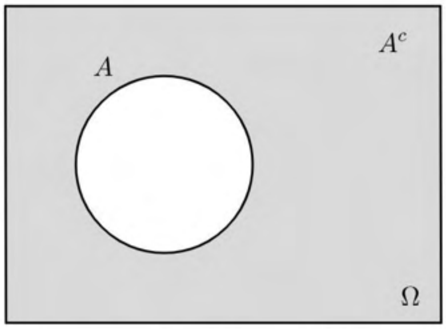


Assim, perceba que a intersecção é vazia entre esses dois eventos logo eles são eventos disjuntos.

Complementar de um evento

O complementar de um evento são todos os elementos que estão no espaço amostral (Ω) e não pertencem ao evento.

Dizemos que A^c é o complementar do evento A.



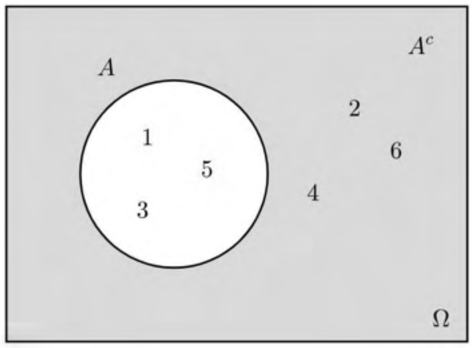
$$A^c = \{x \in \Omega,\ x \notin A\}$$

Figura 1.4.4: Diagrama de Venn para complementar de um evento

Exemplo 1.4.6 Em um lançamento de um dado que possui faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6, devemos obter o complementar do seguinte evento:

A = {"obter os números ímpares"}.

Resolução: Como o evento é $A = \{1, 3, 5\}$, temos que o complementar dele são todos os elementos do $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que não estão em A, então $A^c = \{2, 4, 6\}$, que são os números pares.

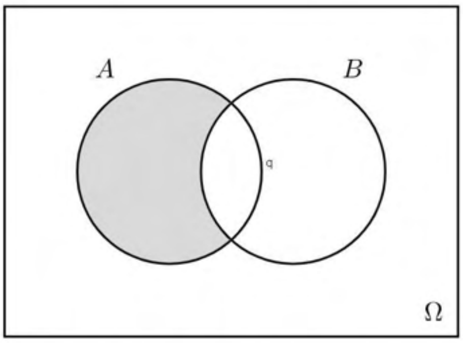


Obs. Como visto no Exemplo 1.4.6, o complementar dos números ímpares são os números pares. Mas observe que, quando realizamos a união do conjunto com o próprio complementar, sempre teremos o espaço amostral:
$A \cup A^c = \Omega$.
E ainda, que o evento e o seu complemento, terão a intersecção vazia:
$A \cap A^c = \varnothing$.

Diferença de eventos

A diferença entre dois eventos são todos os elementos que pertencem somente ao primeiro evento em estudo.

Dizemos que $A - B$ é a diferença entre os eventos A e B.



$$A \backslash B = \{x \in \Omega,\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Figura 1.4.5: Diagrama de Venn para diferença entre eventos

Exemplo 1.4.7 Entre quatro pessoas A, B, C, D duas são escolhidas para formarem uma comissão. Tome como eventos as comissões formadas com a pessoa A e comissões formadas com a pessoa C. Quais serão as comissões formadas com a pessoa A sem a pessoa C?

Resolução: O espaço amostral será:

Ω ={(A,B), (A,C), (A,D), (C,B), (B,D), (C,D)}.

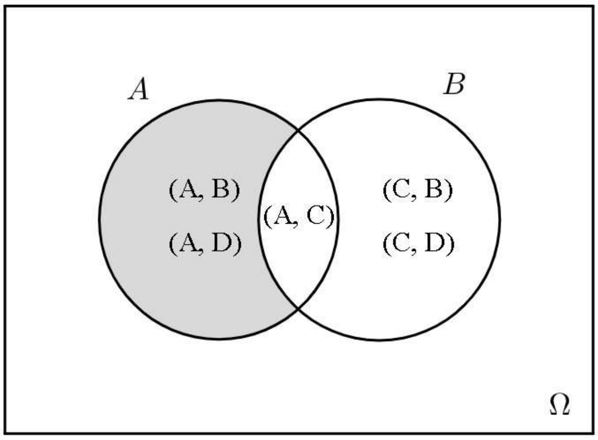
Note que teremos dois eventos:

A = {“comissão com a pessoa A”} e B = {“comissão com a pessoa C”}

ou ainda,

A = {(A,B), (A,C), (A,D)} e B = {(A,C), (C,B), (C,D)}.

Com isso, como queremos as comissões formadas com a pessoa A sem a pessoa C, temos que realizar $A \backslash B$.



Portanto, $A \backslash B$ = {(A,B), (A,D)}.

Obs. A notação $A \backslash B$ também pode ser utilizada para diferença de conjuntos, mas segue a mesma ideia da citada acima.

1.5 Teoria da contagem

Como visto anteriormente, uma maneira simples de obter o total de possibilidades de um experimento aleatório é descrever todas as opções e realizar a contagem direta.

Exemplo 1.5.1 De quantas maneiras diferentes um candidato pode “chutar” todas as questões de um teste com 3 questões do tipo V ou F?

Resolução: Como o candidato pode escolher V ou F na primeira questão, temos:

(V, _ , _) (F, _ , _)

Na segunda questão, o candidato pode escolher novamente V ou F:

(V, V, _) (V, F, _) (F, V, _) (F, F, _)

E na terceira questão, o candidato pode escolher novamente V ou F:

(V,V,V) (V,V,F) (V,F,V) (V,F,F)
(F,V,V) (F,V,F) (F,F,V) (F,F,F)

Então, temos 8 possibilidades.

Outra resolução seria através do diagrama de árvore[3]:

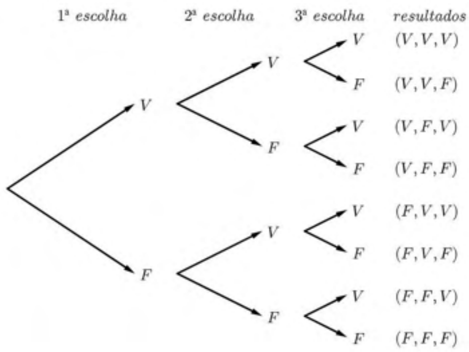


Figura 1.5.1: Diagrama de árvore

Entretanto, existem experimentos que não são tão simples de serem visualizados, pois possuem uma quantidade muito grande de possibilidades, e consequentemente, tornam o método pouco efetivo, por exemplo: “De quantas maneiras diferentes um candidato pode ‘chutar’ todas as questões de um teste com 9 questões do tipo V ou F?”

Neste caso, para calcular o número de possibilidades temos uma ferramenta cuja a ideia básica é reduzir um grande problema a pequenos similares mais fáceis de analisar e denotaremos por Teoria da Contagem.

Existem dois príncípios da contagem que são mais importantes:

- **Princípio da adição:** Se uma tarefa pode ser realizada de a maneiras e uma outra tarefa pode ser re-

[3] É um diagrama que mostra todos os possíveis resultados de um acontecimento.

alizada de b maneiras, independentes uma da outra, então, uma tarefa **ou** outra, podem ser realizadas de: $a+b$ maneiras.

- **Princípio da multiplicação:** Se uma tarefa pode ser feita de a maneiras e outra tarefa pode ser feita de b maneiras, então uma tarefa **e** outra podem ser feitas de: $a\cdot b$ maneiras.

Princípio da contagem

Conhecido também como Princípio Multiplicativo, é um dos métodos mais eficientes na resolução dos problemas combinatórios. Consiste na multiplicação das opções dadas para determinar o total de possibilidades de um evento composto por n etapas sucessivas e independentes.

Definição 1.1 — Princípio da contagem. Se os eventos $A, B, \ldots, N$ forem independentes entre si e puderem ocorrer respectivamente de $a, b, \ldots, n$ maneiras, então a quantidade de maneiras distintas em que os N eventos ocorrem ao mesmo tempo, é dada pelo produto $a\cdot b\cdot\ldots\cdot n$.

Exemplo 1.5.2 Voltando ao Exemplo 1.5.1:

De quantas maneiras diferentes um candidato pode "chutar" todas as questões de um teste com 3 questões do tipo V ou F?

Utilizando a definição do Princípio da Contagem 1.1, na 1ª questão podemos escolher duas opções $(a=2)$, na 2ª questão podemos escolher duas opções $(b=2)$ e na 3ª questão podemos escolher duas opções $(c=2)$.

Então, o total de possibilidades é:

$$a\cdot b\cdot c = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3 = 8.$$

Obs. Note que não são todos os casos que devemos utilizar o diagrama de árvore, devido ao grande número de objetos que serão analisados, tornando-se trabalhoso. Veremos nos exemplos seguintes a aplicação direta do Princípio da Contagem.

Agora, retornando ao exemplo citado na observação, temos:

Exemplo 1.5.3 De quantas maneiras diferentes um candidato pode "chutar" todas as questões de um teste com 9 questões do tipo V ou F?

Resolução: Como na 1ª escolha temos 2 opções (V ou F) então $a=2$, na 2ª escolha temos 2 opções novamente (V ou F) então $b=2$. Note que teremos as mesmas opções nas 9 etapas sucessivas, então utilizando o Princípio da contagem 1.1 o número de possibilidades que teremos será de

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{9 vezes}} = 2^9 = 512.$$

Exemplo 1.5.4 Com 9 camisetas e 4 calças, de quantos modos podemos combinar uma camiseta e uma calça?

Resolução: Formar um conjunto de roupas consiste em escolher uma camiseta e uma calça:

$$\underline{\text{Camiseta}}\quad \underline{\text{Calça}}$$

Como temos 9 camisetas e 4 calças, então utilizando o Princípio da contagem temos:

$$\underline{9}\cdot\underline{4} = 36 \text{ conjuntos.}$$

O Princípio da contagem fornece o instrumento básico para a Análise Combinatória, entretanto, a aplicação direta na resolução de problemas se torna trabalhosa quando são apresentados muitos objetos.

A seguir serão definidos os vários modos de formar agrupamentos, que são as diferentes maneiras de organizar os elementos de um conjunto. Além disso, serão apresentadas as fórmulas que permitem a contagem dos mesmos em cada caso particular.

2 Análise combinatória

A análise combinatória pode ser definida como a utilização de métodos para quantificar[4] os elementos de um dado conjunto sem a necessidade de listar ou enumerar todos esses elementos. Quando o número de elementos que queremos contar for pequeno, a utilização desses métodos não parece ser necessária, mas quando o número de elementos a serem quantificados for grande, esse trabalho torna-se quase impossível sem o uso desses métodos.

Antes de trabalhar com os métodos da Análise Combinatória, vamos retomar o conceito de fatorial, que será essencial para realizar as operações necessárias.

2.1 Fatorial

Definimos o fatorial de um número como as sucessivas multiplicações dos números naturais positivos menores ou iguais a n, como mostrado abaixo:

$$1! = 1$$

$$2! = 2\cdot 1$$

$$3! = 3\cdot 2\cdot 1$$

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

[4] Determinar a quantidade ou valor.

$\vdots$

Então, o fatorial de um número natural n será representado por $n!$ e pela seguinte regra:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Exemplo 2.1.1 Qual é o fatorial de 9?

Resolução: $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362.880.$

Obs. Ainda, podemos escrever os fatoriais como

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{n+1}$$

. Vamos verificar com os fatoriais de $1, 2, 3$ e 4:

$$4! = \frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 4!$$

$$3! = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 3!$$

$$2! = \frac{3!}{3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2!$$

$$1! = \frac{2!}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{1}{1} = 1!.$$

Uma convenção adotada ao fatorial de 0 é:

$$0! = \frac{1!}{1} = 1.$$

2.2 Permutação

Permutar elementos significa trocá-los de posição ou ordem. Se temos os algarismos “1, 2 e 7” é possível escrever 6 números diferentes utilizando esses 3 algarimos sem repetir: 127, 172, 217, 271, 721 e 712.

Escrevendo em ordem as posições possíveis, temos 1ª p como a primeira posição, 2ª p como a segunda posição e 3ª p como a terceira posição:

<u>1ª p</u> <u>2ª p</u> <u>3ª p</u>

Note que na primeira posição é possível colocar três algarismos distintos, após isso, sobraram dois algarismos para ocupar a segunda posição, em seguida sobrou somente um algarismo para a última posição. Assim, pela definição do Princípio da Contagem 1.1, temos

$$\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 3! = 6.$$

Definição 2.1 Sejam n objetos distintos, a permutação desses objetos é qualquer agrupamento ordenado, de tal forma:

$$P_n = n!, \tag{8.1}$$

onde P_n é o número das permutações dos n objetos.

Exemplo 2.2.1 De quantas maneiras pode-se colocar 4 pessoas em fila?

Resolução: Note que, temos 4 pessoas que podem ocupar o 1º lugar da fila. Colocada a primeira pessoa na fila, restam 3 pessoas que podem ocupar o 2º lugar da fila. Em seguida, restam 2 pessoas que podem ocupar o 3º lugar da fila e 1 pessoa para ocupar o 4º lugar da fila, sendo assim

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Logo, podemos colocar 4 pessoas em fila de 24 maneiras diferentes.

2.3 Arranjo

Na Definição de Permutação 2.1, trabalhamos os casos em que trocamos de posição todos os objetos. Mas quando queremos calcular os diferentes modos de agrupar apenas uma parte dos objetos dados, onde a **ordem** dos mesmos também influencia na disposição dos elementos, chamaremos de Arranjo.

Quando estamos interessados na troca de posição de todos os elementos, esse arranjo pode ser encarado como uma permutação.

Exemplo 2.3.1 Considere os algarismos “5, 6, 7, 8 e 9”. De quantas formas podemos escrever os números com algarismos distintos, superiores a 500 e inferiores a 1.000 usando apenas esses algarismos?

Resolução: Como os números com algarismos distintos superiores a 500 e inferiores a 1000 possuem 3 algarismos, devemos fazer agrupamentos de 3 algarismos com “5, 6, 7, 8 e 9”.

___ ___ ___

Então, na 1ª posição podemos escolher 5 algarismos. Como devem ser distintos, na 2ª posição nos restam 4 algarismos, e da mesma forma, na 3ª posição nos restam 3 algarismos. Pelo Princípio da Contagem, temos:

$$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60.$$

Logo, podemos ter 60 números diferentes com os algarismos “5, 6, 7, 8 e 9” de forma que estejam entre 500 e 1000.

Agora, considere um caso com n objetos. Chamaremos de n o número de objetos que temos, r os agrupamentos que devemos fazer e $A_{n,r}$ de Arranjo dos n objetos escolhidos em grupos de r.

Como no Exemplo 2.3.1, tínhamos $n = 5$ algarismos (objetos) e $r = 3$ os agrupamentos dos objetos, então:

$$A_{n,r} = A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3.$$

Ainda, podemos multiplicar $A_{5,3}$ por 1:

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1.$$

Vale lembrar que $1 = \dfrac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$, logo voltando na equação acima:

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}.$$

Retomando o conteúdo da Definição de Fatorial 2.1, podemos escrever que $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ e que $2 \cdot 1 = 2!$, então temos:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{2!}.$$

Fazendo uma generalização, podemos dizer que

$$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Portanto, a Definição de Arranjo é:

Definição 2.2 — Arranjo. Dados $n, r \in \mathbb{N}$, onde n é o número de objetos distintos e r são os agrupamentos que serão feitos sem repetição em que a ordem dos objetos importa. O arranjo será definido da seguinte forma, dados n objetos escolhidos em grupos de r, em que $n \geq r$, teremos:

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{8.2}$$

Exemplo 2.3.2 De quantas formas 6 pessoas podem se sentar numa fileira de 4 cadeiras, se duas delas (Lucas e Rafael) se recusam a sentar um ao lado do outro?

Resolução: Vamos calcular todas as possibilidades dessas 6 pessoas sentarem nas 4 cadeiras, note que a ordem importa, pois a pessoa pode se sentar na 1ª, 2ª, 3ª ou 4ª cadeira.

$$A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1} = 360.$$

Agora, vamos analisar cada caso. Chame de 1 a 1ª cadeira da fileira, de 2 a 2ª cadeira da fileira e assim até a 4ª cadeira. Com isso, temos:

$$\underline{1}\ \ \underline{2}\ \ \underline{3}\ \ \underline{4}.$$

Como Lucas e Rafael não podem sentar juntos, teremos que retirar as opções em que eles sentam-se juntos, que no caso serão na seguinte ordem respectivamente: $(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3)$, onde $(1,2)$ significa que Lucas sentou na 1ª cadeira e Rafael na 2ª cadeira, $(2,1)$ significa que Lucas sentou na 2ª cadeira e Rafael na 1ª cadeira, e assim por diante.

Logo, são 6 casos em que Lucas e Rafael sentam juntos. Contudo, não podemos somente analisar Lucas e Rafael, temos ainda duas cadeiras que ficarão disponíveis independente de onde os dois sentem juntos, nesse caso:

$$\underline{1}\ \ \underline{2}\ \ \underline{L}\ \ \underline{R}.$$

Então, calculando as possibilidades em que as outras 4 pessoas podem sentar nas duas cadeiras restantes:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Pelo Princípio da Contagem 1.1, o total de possibilidades de Lucas e Rafael podem sentar juntos:

$$A_{4,2} \cdot 6 = 12 \cdot 6 = 72.$$

Agora, como temos todas as possibilidades de como as 6 pessoas podem sentar em 4 cadeiras ($A_{6,4}$), retirando todas as excessões que são Lucas e Rafael podem sentar juntos ($A_{4,2} \cdot 6$), vamos ter

$$A_{6,4} - (A_{4,2} \cdot 6) = 360 - 72 = 288.$$

Portanto, o número de possibilidades neste exemplo é de 288.

2.4 Combinação

A combinação consiste em formar grupos **não ordenados**. Chamaremos de n o número de objetos que temos, r os agrupamentos que devemos fazer e $C_{n,r}$ de Combinação dos n objetos escolhidos em grupos de r (em que a ordem dos agrupamentos dos objetos não influencia).

A definição que utilizaremos será a seguinte:

Definição 2.3 Seja $n, r \in \mathbb{N}$ com $n \geq r$, onde n é o número de objetos e r é o número de objetos nos agrupamentos que serão feitos de forma não ordenada, chamamos de combinações dos n elementos escolhidos em grupos de r:

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}. \tag{8.3}$$

Vamos verificar no exemplo a seguir:

Exemplo 2.4.1 Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de 8 funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Resolução: Note que cada comissão terá que ter 3 funcionários, independente da ordem deles, então o número de comissões possíveis será

$$\binom{8}{3} = C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7 = 56.$$

Exercício resolvido 1 (VUNESP 2009) Uma rede de supermercados fornece a seus clientes um cartão de crédito cuja identificação é formada por 3 letras distintas (dentre 26), seguidas de 4 algarismos distintos. Uma determinada cidade receberá os cartões, que têm L como terceira letra, o último algarismo é zero e o penúltimo é 1. A quantidade total de cartões distintos oferecidos por tal rede de supermercados para essa cidade é:

a) 33.600.
b) 37.800.
c) 43.200.
d) 58.500.
e) 67.600.

Resolução: A identificação é formada por 3 letras distintas e a última letra é L e 4 algarismos distintos, sabendo que o último algarismo é 0 e o penúltimo é 1 temos:

$$\_\_\ \_\_\ \underline{L}\ \_\_\ \_\_\ \underline{1}\ \underline{0}.$$

Como a ordem importa, utilizaremos a fórmula de Arranjo (8.2). Note que as letras e os algarismos devem ser distintos, então como ao todo teremos 25 letras (por retirar o L que não pode se repetir) e temos que agrupá-las em 2, segue que

$$A_{25,2} = \frac{25!}{(25-2)!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23!}{23!} = 25\cdot 24 = 600.$$

Agora, os algarismos da mesma forma devem ser distintos, então como ao todo teremos 8 algarismos (por retirar o 0 e o 1 que não podem repetir) formando grupos de 2

$$A_{8,2} = \frac{8!}{(8-2!)} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!} = 8\cdot 7 = 56.$$

Pelo Princípio da Contagem, temos que

$$A_{25,2}\cdot A_{8,2} = 600\cdot 56 = 33.600.$$

Logo, será oferecido pela rede de supermercados para esta cidade 33.600 cartões, alternativa (a).

Exercício resolvido 2 (ENEM 2018) O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete.

Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

a) A_{10}^{4}.

b) C_{10}^{4}.

c) $C_4^2\cdot C_6^2\cdot 2\cdot 2$.

d) $A_4^2\cdot A_6^2\cdot 2\cdot 2$.

e) $C_4^2\cdot C_6^2$.

Resolução: A montadora pretende colocar um carro compacto e uma caminhonete em cada estande. Como foram disponibilizados 4 carros compactos distintos e devemos escolher dois, da mesma forma foram disponibilizados 6 caminhonetes distintas e devemos escolher duas, com isso, devemos utilizar a combinação para calcular as possibilidades pois independe da ordem os carros ou as caminhonetes que serão escolhidas.

$C_{4,2}$ para os carros compactos
$C_{6,2}$ para as caminhonetes

Mas devemos multiplicar cada combinação que encontramos por 2, pois existem duas formas de colocar os carros na entrada e no centro, como também duas formas de colocar as caminhonetes na entrada e no centro. Assim, pelo Príncipio da Contagem 1.1 segue que

$$C_{4,2}\cdot 2\cdot C_{6,2}\cdot 2 = C_{4,2}\cdot C_{6,2}\cdot 2\cdot 2.$$

Portanto, é a alternativa (c).

Obs. Neste exercício, perceba que a ordem pode importar, pois um automóvel colocado na entrada é diferente do carro colocado no centro do evento, mas em nenhum momento o exercício disse que a ordem não importava.

Vamos agora calcular essas possibilidades em que a ordem importa através da Fórmula de Arranjo 8.2:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 4\cdot 3 = 12.$$

$$A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 6\cdot 5 = 30.$$

Logo, as possibilidades nessa interpretação será $A_{4,2} \cdot A_{6,2} = 12 \cdot 30$. Note que se calcularmos o que demos como resposta na solução do exercício, temos:

$$\begin{aligned}
C_{4,2} \cdot 2 \cdot C_{6,2} \cdot 2 &= \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} \cdot 2 \cdot \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} \cdot 2 \\
&= \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} \\
&= 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 \\
&= 12 \cdot 30.
\end{aligned}$$

Eles deram o mesmo valor neste caso, vamos verificar o motivo. Pela nossa teoria, o Arranjo é utilizado para descobrir o número de possibilidades em que a ordem dos elementos importa, que no nosso caso são 4 carros para o estande de entrada e o estande do centro, e a caminhonete que são 6 para o estande de entrada e o estande do centro.

Agora, a Combinação é utilizada para descobrir o número de possibilidades em que a ordem dos elementos não importa, que no nosso caso foram 4 carros para 2 estandes e 6 caminhonetes para 2 estandes.

Mas como o exercício não menciona que a ordem não importa, então pelo Princípio da contagem, devemos multiplicar $C_{4,2}$ por 2, pois tomada a decisão das possibilidades temos ainda a possibilidade de colocar os carros escolhidos na entrada ou no centro. Da mesma forma com as caminhonetes, tomada a decisão das possibilidades temos ainda a possibilidade de colocá-los na entrada ou no centro do evento.

No caso, tivemos que resolver pela combinação pois no exercício de múltipla escolha não tem a opção que encontramos através do Arranjo. Mas as duas respostas $A_{4,2} \cdot A_{6,2}$ e $C_{4,2} \cdot C_{6,2} \cdot 2 \cdot 2$ estão corretas.

Esse exercício nos mostra que a Análise Combinatória exige muito mais a interpretação do enunciado do que as fórmulas em si, tomando as devidas precauções do número de elementos que temos em estudo, a ordem delas, a repetição e se são distintas.

3 Números binomiais

Sejam n e r números naturais, tal que $n \geq r$, chamaremos de número binomial ou coeficiente binomial o par de valores $\binom{n}{r}$ que representa a combinação $C_{n,r}$. Em termos matemáticos:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = C_{n,r} \ ,$$

Sendo n o numerador e r o denominador do número binomial.

Alguns casos especiais:

1. $\binom{n}{0} = 1$ para que $n \in \mathbb{N}^*$.

   Pela definição:

   $$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

   Obs. Como foi visto nos capítulos anteriores é convencionado que $0! = 1$.

2. $\binom{n}{1} = n$ para que $n \in \mathbb{N}^*$.

   Pela definição:

   $$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

3. $\binom{n}{n} = 1$ para que $n \in \mathbb{N}^*$.

   Pela definição:

   $$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

3.1 Números binomiais complementares

Dois números binomiais são ditos complementares quando satisfazem duas condições:

- **Condição 1:** Ambos possuem o mesmo numerador.
- **Condição 2:** A soma dos denominadores dos dois números binomiais é igual ao numerador.

Exemplo 3.1.1 Considere os números binomiais $\binom{n}{r}$ e $\binom{n}{n-r}$, tal que n e r são números naturais e $n \geq r$. Vamos verificar se esses números binomiais são complementares.

Resolução: Observe que satisfazem a primeira condição, pois possuem o mesmo numerador, além disso, temos que $r + n - r = n$. Logo, satisfazem a segunda condição. Portanto, $\binom{n}{r}$ e $\binom{n}{n-r}$ são números binomiais complementares.

Exemplo 3.1.2 Considere os números binomiais $\binom{5}{4}$ e $\binom{3}{1}$. Vamos verificar se esses números binomiais são complementares.

Resolução: Observe que os numeradores são diferentes. Portanto, $\binom{5}{4}$ e $\binom{3}{1}$ não satisfazem a primeira condição, ou seja, não são números binomiais complementares.

Exemplo 3.1.3 Considere os números binomiais $\binom{9}{3}$ e $\binom{9}{4}$. Vamos verificar se esses números binomiais são complementares.

Resolução: Observe que satisfazem a primeira condição, pois possuem o mesmo numerador. Somando os denominadores teremos $3+4=7$. Então, não satisfazem a segunda condição. Portanto, não são números binomiais complementares.

Exemplo 3.1.4 Considere os números binomiais $\binom{14}{5}$ e $\binom{14}{9}$. Vamos verificar se esses números binomiais são complementares.

Resolução: Observe que satisfazem a primeira condição, pois possuem o mesmo numerador. Somando os denominadores teremos $5+9=14$. Assim, satisfazem a segunda condição. Portanto, $\binom{14}{5}$ e $\binom{14}{9}$ são números binomiais complementares.

3.2 Triângulo de Pascal

Os números binomiais podem ser ordenados em um quadro de modo que o número da linha determina o numerador do número binomial e a coluna determina o denominador do número binomial. Dessa forma, é possível obter o quadro abaixo, conhecido como Triângulo de Pascal.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4
Linha 0	$\binom{0}{0}$				
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$			
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$		
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

Substituindo os números binomiais pelos seus respectivos valores obtemos:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Ainda, podemos escrever desta maneira o Triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Propriedades do Triângulo de Pascal

Temos algumas propriedades do Triângulo de Pascal:

1. Todos os elementos da coluna 0 são iguais a 1. Isso ocorre, pois, a coluna é formada de números binomiais da forma $\binom{n}{0}$. Como foi visto no início do capítulo, $\binom{n}{0}=1$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$.
2. O último elemento de cada coluna é igual a 1, pois são os elementos da forma $\binom{n}{n}$. Lembrando que temos $\binom{n}{n}=1$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$.
3. O binômio de uma linha n e coluna r pode ser obtido pela soma de dois binômios da linha $n-1$, sendo estes os binômios das colunas $r-1$ e r. Em termos matemáticos, temos que:
$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}.$$
Essa igualdade é denominada Relação de Stiffel.

4 Binômio de Newton

Os binômios da forma $(x+a)^n$, sendo x e a números reais e $n\in\mathbb{N}$, são denominados Binômios de Newton. O desenvolvimento desse binômio gera um polinômio e apresenta algumas regularidades. Observe os exemplos:

$$\begin{aligned}
n=0 &\Rightarrow (x+a)^0=1\\
n=1 &\Rightarrow (x+a)^1=x+a\\
n=2 &\Rightarrow (x+a)^2=x^2+2xa+a^2\\
n=3 &\Rightarrow (x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3.
\end{aligned}$$

Perceba que ao organizarmos os termos do polinômio, de modo que os expoentes da variável x são decrescentes, é possível observar que os coeficientes numéricos dos polinômios obtidos com o desenvolvimento do binômio seguem o mesmo padrão que o triângulo de Pascal. E ainda, a soma dos expoentes de x e a de um mesmo termo é igual a n. Generalizando para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos que o desenvolvimento do polinômio é dado por:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot a^1 \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n \cdot x^0.$$

Essa igualdade é denominada Fórmula do Binômio de Newton.

4.1 Fórmula do termo geral

A fórmula do termo geral do desenvolvimento de um Binômio de Newton da forma $(x+a)^n$ é dada por:

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} \cdot a^r \cdot x^{n-r}.$$

Na qual, $r+1$ é a posição do termo que deseja encontrar.

Exercício resolvido 1 (PUC SP) Se $\binom{m-1}{p-1} = 10$ e $\binom{m}{m-p} = 55$, então $\binom{m-1}{p}$ é igual a:

(a) 40.
(b) 45.
(c) 50.
(d) 55.
(e) 60.

Resolução: Considerando temos os valores em sua forma binomial, como na Definição de Números Binomiais:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = C_{n,r}\ .$$

Primeiro aplicaremos a definição em $\binom{m}{m-p} = 55$. Assim, obtemos:

$$\frac{m!}{(m-p)! \cdot (m-(m-p))!} = 55$$

$$\frac{m!}{(m-p)! \cdot p!} = 55$$

$$\binom{m}{p} = 55.$$

Para conseguir relacionar o valor que encontramos $\binom{m}{p} = 55$, utilizaremos a Relação de Stiffel, para assim, encontrar $\binom{m-1}{p}$:

$$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-1}{p-1}.$$

Substituindo $\binom{m}{p} = 55$ e $\binom{m-1}{p-1} = 10$ obtemos:

$$55 = \binom{m-1}{p} + 10$$

$$\binom{m-1}{p} = 45.$$

Portanto, a alternativa correta é (b).

Exercício resolvido 2 (CESGRANRIO) O coeficiente de x^4 no polinômio $P(x) = (x + 2)^6$ é

(a) 64.
(b) 60.
(c) 12.
(d) 4.
(e) 24.

Resolução: Esse exercício pode ser resolvido pela fórmula do desenvolvimento do Binômio de Newton ou pela fórmula do termo geral. Utilizaremos a segunda opção:

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} \cdot a^r \cdot x^{n-r}.$$

Temos que $n = 6$ e queremos encontrar o coeficiente[5] de x^4, portanto $r = 2$ e o termo obtido será o terceiro termo. Além disso, $a = 2$. Substituindo esses valores na fórmula teremos:

$$T_3 = \binom{6}{2} \cdot 2^2 \cdot x^4$$
$$T_3 = 15 \cdot 4 \cdot x^4$$
$$T_3 = 60 \cdot x^4.$$

Portanto, o coeficiente numérico de x^4 é 60 e a alternativa correta é (b).

Exercício resolvido 3 (MACK SP) No desenvolvimento de $(2x + b)^5$, $b \neq 0$, o coeficiente numérico do termo em x^4 é oito vezes aquele do termo em x^3. Então b vale

(a) $\frac{1}{8}$.

[5] Número ou constante que acompanha os termos x^n.

(b) $\frac{1}{4}$.

(c) $\frac{1}{2}$.

(d) 32.

(e) 16.

Resolução:

Primeiro vamos encontrar o coeficiente numérico do termo em x^4. Para isso, utilizaremos a fórmula do termo geral:

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} \cdot a^r \cdot x^{n-r}.$$

Temos que $n = 5$, como queremos o coeficiente do termo em que x^4, então $r = 1$. Além disso, $a = b$. Substituindo na fórmula teremos:

$$T_2 = \binom{5}{1} \cdot b^1 \cdot (2x)^4$$
$$T_2 = 5 \cdot b \cdot 16 \cdot x^4$$
$$T_2 = 80 \cdot b \cdot x^4.$$

Analogamente, para encontrar o coeficiente numérico de x^3, basta substituir $n = 5$, $r = 2$ e $a = b$, na fórmula do termo geral, obtendo:

$$T_3 = \binom{5}{2} \cdot b^2 \cdot (2x)^3$$
$$T_3 = 10 \cdot b^2 \cdot 8 \cdot x^3$$
$$T_3 = 80 \cdot b^2 \cdot x^3.$$

Segundo o enunciado do problema, o coeficiente numérico de x^4 é oito vezes o de x^3. Disso segue que:

$$80 \cdot b = 8 \cdot 80 \cdot b^2$$

$$1 = 8 \cdot b$$
$$\frac{1}{8} = b.$$

Assim, a alternativa correta é (a).

5 Medidas de tendência central

As medidas de tendência central são utilizadas para a representação de um grupo a partir de um único valor a ser escolhido, por exemplo, quando temos a idade das pessoas de um grupo, podemos escolher uma única idade que represente o grupo todo.

A escolha do valor que represente o grupo não é de forma aleatória, mas com algum critério. Neste capítulo serão apresentadas as medidas da Média aritmética, Média ponderada, Mediana e Moda, assim como suas devidas aplicações.

5.1 Média aritmética (MA)

A média aritmética, mais conhecida simplesmente como média, pode ser utilizada por exemplo em notas da escola, quando o aluno quer saber a sua nota final ou até mesmo para calcular a nota que falta para passar de ano. Ela consiste em somar todos os termos e dividi-los pela quantidade de termos que temos. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 5.1.1 Sejam as notas do aluno A em matemática: 8, 6, 3 e 9, qual a média dele em matemática?

Resolução: Devemos somar as notas e dividir pela quantidade de notas que temos:

$$\frac{(8+6+3+9)}{4} = \frac{26}{4} = 6,5.$$

Logo, a média deste aluno A é $6,5$.

Temos outros exemplos clássicos como a média de idade de um grupo de pessoas ou a média da temperatura de determinado local em vários períodos do dia.

Assim, podemos generalizar o cálculo da média como:

Definição 5.1 Dados os n valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ de uma variável, a média aritmética é o número obtido da seguinte forma:

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}.$$

Obs. A média aritmética é utilizada como medida de tendência central, então por meio de um único número, é possível representar as características de determinado grupo. No entanto, é importante lembrar que em algumas situações a presença de um valor bem maior ou bem menor do que os demais faz com que a média aritmética não consiga representar corretamente os dados.

Por exemplo, um grupo de pessoas com idades de 4, 6, 1, 3, 5 e 53 anos. A média de idade é de 12 anos e não representa as características desse grupo em termos de idade.

5.2 Média ponderada (MP)

A média ponderada é utilizada quando devemos atribuir um peso a algumas ou todas as características do grupo e realizar o mesmo cálculo que na média aritmética. Considere o exemplo a seguir:

Exemplo 5.2.1 O professor de matemática atribui pesos para as notas do ano letivo:

- 1º bimestre tem peso 2;
- 2º bimestre tem peso 1;
- 3º bimestre tem peso 3;
- 4º bimestre tem peso 4.

Sabendo que cada nota vale de 0 a 10 e que a média para passar sem recuperação na matéria da escola é de 7, um aluno que tirou respectivamente em cada bimestre: 5, 2, 7 e 9, foi capaz de passar?

Resolução: O peso representa quantas vezes devemos contar aquela nota, assim atribuindo o peso as notas do aluno, note que temos os seguintes valores: 5, 5, 2, 7, 7, 7, 9, 9, 9 e 9. Calculando utilizando a fórmula da média, teremos:

$$\frac{5+5+2+7+7+7+9+9+9+9}{10} = \frac{5\cdot 2+2\cdot 1+7\cdot 3+9\cdot 4}{2+1+3+4} = 6,9.$$

Logo, o aluno terá que fazer a recuperação porque a média dele em matemática foi $6,9$.

Assim, podemos generalizar o cálculo da média ponderada como:

Definição 5.2 Dados os n valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ de uma variável, com o peso de cada variável sendo $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ respectivamente, então a média ponderada é o número obtido da seguinte forma:

$$MP = \frac{\overbrace{x_1+x_1+x_1}^{p_1}+\overbrace{x_2+x_2}^{p_2}+\overbrace{x_3+x_3+x_3+x_3}^{p_3}+...+\overbrace{x_n}^{p_n}}{(p_1+p_2+p_3+...+p_n)}$$

ou ainda,

$$MP = \frac{(x_1\cdot p_1)+(x_2\cdot p_2)+(x_3\cdot p_3)+...+(x_n\cdot p_n)}{(p_1+p_2+p_3+...+p_n)}.$$

5.3 Mediana (Me)

Como vimos em média, quando temos dados que possuem valores diferentes dos demais, por serem muito grandes ou muito pequenos, fazem com que o conjunto de dados não seja totalmente representado. Por esse motivo é conveniente definirmos outra medida de tendência central, a mediana.

Definição 5.3 Considere n valores, onde esses valores devem ser organizados em ordem crescente ou decrescente, a mediana será:

- se n for ímpar, o valor que ocupar a posição central;
- se n for par, a média aritmética dos dois valores que estiverem no centro.

Veremos os dois casos nos exemplos a seguir:

Exemplo 5.3.1 Em uma empresa, foi realizada uma pesquisa de quantos filhos cada funcionário tinha, e deram os seguintes resultados: 6, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 6, 2, 0, 3, 2, 3 e 2. Qual é a mediana dos dados?

Resolução: Organizando nossos dados em ordem crescente, temos:

$$\underbrace{0,0,0,1,1,1,2,2}_{\text{8 valores}},2,\underbrace{2,2,2,3,3,3,6,6}_{\text{8 valores}}.$$

Assim, como temos um número ímpar de valores (17), então nossa mediana é o termo central (9º) que é $Me = 2$.

Exemplo 5.3.2 Seja um grupo de pessoas com idades de 4, 6, 1, 3, 5 e 53 anos. Qual a mediana e a média?

Resolução: Organizando nossos dados, temos:

$$\underbrace{1,3}_{\text{2 valores}},4,5,\underbrace{6,53}_{\text{2 valores}}.$$

Assim, como temos um número par de valores (6), então nossa mediana será calculada como a média dos dados centrais (3º e 4º termos):

$$Me = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Calculando a média aritmética, temos:

$$MA = \frac{1+3+4+5+6+53}{6} = 12.$$

5.4 Moda (Mo)

A Moda representa o valor mais frequente de um conjunto de dados, basta observar a frequência com que os valores aparecem.

Exemplo 5.4.1 Em uma empresa, foi realizada uma pesquisa de quantos filhos cada funcionário tinha, e deram os seguintes resultados: 4, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 5, 2, 0, 3, 2, 3 e 2. Qual é a moda dos dados?

Resolução: Analisando o conjunto de dados, temos que o "2" se repete mais vezes, então $M_o = 2$.

Podemos classificar ainda em quantidades de modas:

- **Bimodal:** quando dois valores são mais frequentes (duas modas);
- **Trimodal:** quando três valores são mais frequentes (três modas);
- **Multimodal:** possui mais que três valores frequentes;
- **Amodal:** não tem nenhum valor se repetindo.

Exemplo 5.4.2 Se a temperatura medida de hora em hora das 7h às 13h, apresentou os resultados 13℃, 15℃, 18℃, 18℃, 20℃, 23℃ e 23℃. Determine a Moda das temperaturas registradas.

Resolução: Analisando o conjunto de dados, temos que o "18 ℃" e "23 ℃" repetem mais vezes, então dizemos que nesse período a moda foi 18 ℃ e 23 ℃, ou seja, temos bimodal.

Exercício resolvido 1 (BB 2013 – Fundação Carlos Chagas) Nos quatro primeiros dias úteis de uma semana o gerente de uma agência bancária atendeu 19, 15, 17 e 21 clientes. No quinto dia útil dessa semana esse gerente atendeu n clientes.

Se a média do número diário de clientes atendidos por esse gerente nos cinco dias úteis dessa semana foi 19, a mediana foi

(a) 21.
(b) 19.
(c) 18.
(d) 20.
(e) 23.

Resolução: Apesar de sabermos a média, precisamos saber qual é a quantidade de clientes no quinto dia útil, então substituindo na fórmula da média aritmética e considerando n a quantidade de clientes no quinto dia:

$$\begin{aligned} MA &= \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_5}{5} \\ 19 &= \frac{19+15+17+21+x_5}{5} \\ 19\cdot 5 &= 72+x_5 \\ 95-72 &= x_5 \\ 23 &= x_5. \end{aligned}$$

Agora, colocando os valores (19, 15, 17, 21 e 23) em ordem crescente para encontrar a mediana, temos:

$$15, 17, 19, 21, 23.$$

Como temos um número ímpar de valores (5), então a mediana é o termo central (3º) que é 19, alternativa (b).

Exercício resolvido 2 (ENEM 2010) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato.

A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols Marcados	Quantidades de Partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

(a) X = Y < Z.
(b) Z < X = Y.
(c) Y < Z < X.
(d) Z < X < Y.
(e) Z < Y < X.

Resolução: Precisamos calcular as medidas de tendência central (média, mediana e moda). Começando com a média, temos que multiplicar o número de gols por cada quantidade de partidas, dividido pelo total de partidas jogadas.

$$\begin{aligned} MP &= \frac{5\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5+7\cdot 1}{5+3+4+3+2+2+1} \\ &= \frac{45}{20} = 2{,}25 \text{ gols por partida.} \end{aligned}$$

Para encontrar o valor da mediana, devemos colocar nosso conjunto de dados em ordem crescente:

$$\underbrace{0,0,0,0,0,1,1,1,2}_{\text{9 valores}},2,2,\underbrace{2,3,3,3,4,4,5,5,7}_{\text{9 valores}}.$$

Como temos um número par de valores (20), então a mediana é a média dos termos dos dados centrais (10º e 11º termos), que será

$$Me = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Ainda resta calcular a moda, para isso devemos somente analisar a frequência de gols feitos. Analisando a tabela, podemos verificar que a maior frequência foi em 5 partidas que tivemos 0 gols, logo $Mo = 0$.

Com isso, segue que $X = 2{,}25$, $Y = 2$ e $Z = 0$. Portanto, $0 < 2 < 2{,}25$ que é $Z < Y < X$, alternativa (e).

Exercício resolvido 3 (ENEM 2019) Um país decide investir recursos na educação em suas cidades que tenham um alto nível de analfabetismo. Os recursos serão divididos de acordo com a idade média da população que é analfabeta, conforme apresentado no quadro.

Recurso	Idade média da população analfabeta (M)
I	M ≤ 22
II	22 < M ≤ 27
III	27 < M ≤ 32
IV	32 < M ≤ 37
V	M > 37

Uma cidade desse país possui $\frac{60}{100}$ do total de analfabetos de sua população composto por mulheres. A média de idade das mulheres analfabetas é de 30 anos, e a média de idade dos homens analfabetos é de 35 anos.

Considerando a média de idade da população analfabeta dessa cidade, ela receberá o recurso

(a) I.
(b) II.
(c) III.
(d) IV.
(e) V.

Resolução: Nesta cidade, as mulheres representam $\frac{60}{100}$ dos analfabetos, então $\frac{40}{100}$ representam os homens analfabetos, já que $\frac{100}{100}$ representa o total de analfabetos sendo homens e mulheres.

Para calcular a média de idade da população dessa cidade, devemos calcular a média ponderada das mulheres e dos homens.

Como a média de idade das mulheres analfabetas é de 30 anos onde representam $\frac{60}{100}$ do total de analfabetos e a média de idade dos homens analfabetos é de 35 anos representam $\frac{40}{100}$ do total de analfabetos, temos:

$$\begin{aligned}\frac{60}{100}\cdot 30+\frac{40}{100}\cdot 35 &= \frac{60\cdot 30}{100}+\frac{40\cdot 35}{100}=\frac{1.800+1.400}{100}\\ &= \frac{3.200}{100}=32\end{aligned}$$

Logo, a média de idade da população analfabeta é de 32 anos. Analisando a tabela, temos que é o recurso **III** que a cidade receberá e a alternativa correta é a (c).

6 Probabilidade

A Probabilidade é o estudo das chances de ocorrência de um evento. É por meio dela, por exemplo, que podemos saber a chance de obter um certo número no lançamento de um dado até a chance de acertar todos os números da mega sena.

Para compreender melhor sobre esse assunto, estudaremos a seguir sobre as probabilidades de eventos, propriedades, probabilidade da união e probabilidade condicional.

6.1 Probabilidades de eventos

As probabilidades são calculadas dividindo-se o número de resultados favoráveis pelo número de resultados possíveis, ou seja, a quantidade de objetos do evento de interesse pela quantidade de objetos do nosso espaço amostral.

Muitas vezes, utilizaremos métodos para quantificar os elementos de um conjunto que são estudados na Seção 2 de Análise combinatória.

Definição 6.1 Seja o espaço amostral Ω finito e não vazio, e A um evento desse espaço. Definimos a probabilidade de um evento A ocorrer como sendo a razão do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, então:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}},$$

onde $n(A)$ é o número de elementos de A, $n(\Omega)$ é o número de elementos de Ω e $P(A)$ de "Probabilidade de A".

Vale ressaltar que esta definição para probabilidade é válida quando o espaço amostral baseia-se de resultados equiprovavéis (que possuem a mesma chance de acontecer).

Exemplo 6.1.1 No lançamento de dois dados não viciados de seis faces, qual a probabilidade de se obter a soma de seus pontos iguais a 5?

Resolução: Temos que o nº de casos favoráveis são:

A = {(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)}, ou ainda, $n(A)=4$.

E o nº de casos possíveis, vamos calcular através da definição do Princípio da contagem 1.1, que será 6 números no primeiro dado e 6 números no segundo dado, então $6\cdot 6=36$ possibilidades.

Com isso, utilizando a definição de Probabilidade 6.1, temos:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$
$$P(\text{“soma 5"})=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

Portanto, a probabilidade de se obter a soma dos pontos iguais a 5 é igual a $\frac{1}{9}$.

6.2 Propriedades

Podemos estudar a Probabilidade como uma função que associa a cada evento A sua probabilidade $P(A)$, e ainda, que satisfaça os seguintes itens:

Definição 6.2 — Probabilidade do evento impossível. $P(\varnothing)=\frac{0}{n(\Omega)}=0=0\%$, onde o vazio é o evento impossível.

Definição 6.3 — Probabilidade do evento certo. $P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1 = 100\%$, quando temos o evento certo.

Definição 6.4 — O intervalo da probabilidade de evento. A probabilidade de um evento qualquer, sempre está entre 0 e 1, pois a probabilidade do evento impossível é 0 e do evento certo é 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$0\% \leq P(A) \leq 100\%.$$

Definição 6.5 — Probabilidade do evento complementar. Como visto na seção Tipos de Eventos 1.4, o complementar do evento A são todos os elementos que não pertencem a A, ou ainda, $A^c = \Omega - A$. Assim, podemos escrever a probabilidade do evento complementar como:

$$P(A^c) = P(\Omega) - P(A)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

6.3 Probabilidade da união de eventos

Definição 6.6 — Probabilidade da união. Considere dois eventos A e B de um espaço amostral. Então a probabilidade da união será a soma entre as probabilidades do evento A e B, com a diferença da intersecção deles:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

A fórmula tem uma justificativa interessante, pois quando estamos contando o $n(A)$ e o $n(B)$, estamos incluindo duas vezes o $n(A \cap B)$, por isso a subtração de uma vez a $P(A \cap B)$.

Obs. Se os eventos forem mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \varnothing$ e consequentemente pela Definição 6.2 temos $P(A \cap B) = 0$. Então a Probabilidade da união de eventos ficará:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exemplo 6.3.1 Considere uma urna com 16 bolas idênticas e numeradas de 1 a 10. Determine a probabilidade de se retirar uma bola par ou uma bola maior que 8.

Resolução: Note que temos dois eventos: A = {"uma bola par"} e B = {"uma bola maior que 8"}. Assim,

A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16}, onde $n(A) = 8$.

B = {9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, onde $n(B) = 8$.

Como queremos "uma bola par ou uma bola maior que 8", então teremos uma união de eventos. Para isso, vamos identificar a intersecção delas:

$A \cap B$ = {10, 12, 14, 16}, ou ainda, $n(A \cap B) = 4$.

Utilizando a definição de Probabilidade da união 6.6, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{16} + \frac{8}{16} - \frac{4}{16}$$

$$P(A \cup B) = \frac{8+8-4}{16}$$

$$P(A \cup B) = \frac{12}{16}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cup B) = 75\%.$$

6.4 Probabilidade condicional

Introduziremos o conceito de Probabilidade condicional através do seguinte exemplo:

Exemplo 6.4.1 Considere o lançamento de um dado, ou seja, Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Seja o evento A = {"sair face 3"}, assim

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \cong 0,167.$$

Para compreender o problema de Probabilidade condicional, suponha que não possamos ver o dado, mas alguém diga que o resultado é um número ímpar.

Neste caso, qual a probabilidade de A ocorrer? Sabendo que já saiu um número ímpar.

Teremos agora um novo espaço amostral com os números ímpares Ω_1 = {1, 3, 5}.

Continuando com o evento A = {"sair face 3"}, então:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega_1)} = \frac{1}{3} \cong 0,333.$$

Logo, a informação de que o valor ocorrido é um número ímpar afeta a probabilidade de ocorrer o evento A e o valor $0,333$ é chamado de probabilidade condicional.

Assim, podemos definir a probabilidade condicional como:

Definição 6.7 — Probabilidade condicional. Considere um espaço amostral com os eventos A e B. Definimos a probabilidade condicional como sendo a probabilidade do evento A ocorrer sabendo que o evento B tenha ocorrido:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) \neq 0.$$

Da mesma forma, podemos ter a probabilidade do evento B ocorrer sabendo que o evento A tenha ocorrido.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ se } P(A) \neq 0.$$

Obs. Substituindo a Definição de Probabilidade 6.1 na Fórmula da Probabilidade Condicional (6.7), temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} \cdot \frac{n(\Omega)}{n(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}.$$

Então, podemos realizar essa simplificação desde que $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$. Da mesma forma, ocorre para $P(B|A)$.

Exemplo 6.4.2 Em uma urna, temos 15 bolas de mesmo tamanho e numeradas de 1 a 20. As bolas numeradas de 1 a 10 são brancas, já as numeradas de 11 a 15 são azuis e de 16 a 20 são vermelhas, sabendo disso calcule a probabilidade de se retirar uma bola par dado que a bola retirada é branca.

Resolução: Como queremos a probabilidade de uma bola par sabendo que a bola retirada é branca, então temos uma probabilidade condicional dos seguintes eventos:

A = {"número par"} e B = {"bolas brancas"}.

Assim, A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} e B = {1, 2, ..., 10}. Vale notar que $A\cap B$ = {2, 4, 6, 8, 10}.

Então, utilizando a Fórmula 6.4, temos:

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Logo, a probabilidade de retirar uma bola par dado que a bola retirada é branca, é de 50%.

Obs. Caso você não se lembre da fórmula, basta analisar caso a caso.

Como foi dito no Exemplo 6.4.2 que foi retirado uma bola branca, então as bolas brancas tornam-se seu espaço amostral: Ω_1 = {1, 2, ..., 10}.

Assim, analisando nosso espaço amostral, o evento será A = {"número par"} = {2, 4, 6, 8, 10}. Calculando através da Fórmula de Probabilidade 6.1, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega_1)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Portanto, intuitivamente é possível calcular a probabilidade condicional.

Exercício resolvido 1 (ENEM 2018) O gerente de uma empresa sabe que 70% de seus funcionários são do sexo masculino e foi informado de que a porcentagem de empregados fumantes nessa empresa é de 5% dos homens e de 5% das mulheres. Selecionando, ao acaso, a ficha de cadastro de um dos funcionários, verificou tratar-se de um fumante.

Qual a probabilidade de esse funcionário ser do sexo feminino?

(a) $50,0\%$.
(b) $30,0\%$.
(c) $16,7\%$.
(d) $5,0\%$.
(e) $1,5\%$.

Resolução: Note que temos a primeira informação, que diz respeito a quantidade de homens e mulheres em uma empresa.

Sabe-se que 70% dos funcionários são homens, então nos resulta que 30% dos funcionários são mulheres.

A segunda informação diz que 5% dos homens são fumantes e 5% das mulheres são fumantes. Para trabalharmos com a segunda informação devemos calcular a quantidade de fumantes de acordo com o sexo.

Como 70% dos funcionários são homens e desses homens temos 5% fumantes, calculando o número de homens fumantes em relação a todos os funcionários da empresa:

$$70\% \cdot 5\% = \frac{70}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{350}{10000} = \frac{3,5}{100} = 3,5\%.$$

Da mesma forma, como 30% dos funcionários são mulheres e dessas mulheres temos 5% fumantes, calculando o número de mulheres fumantes em relação a todos os funcionários da empresa:

$$30\% \cdot 5\% = \frac{30}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{150}{10000} = \frac{1,5}{100} = 1,5\%.$$

Assim, temos:

- $3,5\%$ são homens e fumantes da empresa;
- $1,5\%$ são mulheres e fumantes da empresa.

Como querem saber a probabilidade de esse funcionário ser do sexo feminino sabendo que estão analisando os fumantes, temos uma probabilidade condicional, onde A é ser do sexo feminino, B são todos os fumantes da empresa e a $A\cap B$ ser do sexo feminino e fumante da empresa. Então é possível escrever como:

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{1,5\%}{3,5\% + 1,5\%} = \frac{1,5\%}{5\%} = 0,3 = 30\%.$$

Portanto, a probabilidade de selecionar um funcionário fumante e desse funcionário ser do sexo feminino é de 30%, alternativa (b).

Exercício resolvido 2 (ENEM 2018) Um rapaz estuda em uma escola que fica longe de sua casa, e por isso precisa utilizar o transporte público. Como é muito observador, todos os dias ele anota a hora exata (sem considerar os segundos) em que o ônibus passa pelo ponto de espera. Também notou que nunca consegue chegar ao ponto de ônibus antes de 6h 15min da manhã. Analisando os dados coletados durante o mês de fevereiro, o qual teve 21 dias letivos, ele concluiu que 6h 21min foi o que mais se repetiu, e que a mediana do conjunto de dados é 6h 22min.

A probabilidade de que, em algum dos dias letivos de fevereiro, esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6h 21min da manhã é, no máximo,

(a) $\frac{4}{21}$.
(b) $\frac{5}{21}$.
(c) $\frac{6}{21}$.
(d) $\frac{7}{21}$.
(e) $\frac{8}{21}$.

Resolução: Iremos analisar os dados primeiro e após isso, calcularemos a probabilidade. Utilizaremos o conteúdo da Seção 5 de Medidas de Tendência Central.

O rapaz analisou os dados coletados e identificou que o horário que mais se repetiu é 6h 21min, então essa é a nossa moda. Ainda, identificou que a mediana foi 6h e 22min, assim, como tinham 21 observações, então 6h e 22min está no centro dos dados.

1ª obs ___ ___ ___ ___ ___ ___

___ ___ ___ 6h 22min ___ ... 21ª obs.

Com isso, como ele nunca chegou antes das 6h 15min, então a primeira observação é 6h 15min. A segunda pode ser 6h 16min, a terceira pode ser 6h 17min e assim por diante, até chegarmos no 6h 20min.

6h 15 6h 16 6h 17 6h 18 6h 19

___ ___ ___ ___ 6h 22 ___ ... ___

Ainda falta o horário das 6h e 20min e das 6h e 21min. Como há 4 horários vagos, nos resta ter somente um horário de 6h e 20min e três horários de 6h e 21min, pois 6h e 21min é a moda.

6h 15 6h 16 6h 17 6h 18 6h 19

6h 20 6h 21 6h 21 6h 21 6h 22 ___ ... ___

O jeito que identificamos os horários, satisfaz o máximo que está escrito no enunciado, pois o rapaz poderia ter observado somente o horário 6h 21min 10 vezes, entretanto, suponhamos valores e identificamos que ele pode ter no máximo observado esse horário 3 vezes, senão 6h 21min deixaria de ser a moda.

Agora, para calcular a probabilidade que esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6h 21min, é necessário contar quantos horários foram verificados antes deste, que no caso foram 7 horários dos 21 horários observados do total. Assim,

$$P(\text{“antes de 6h 21 min"}) = \frac{7}{21}.$$

Portanto, a probabilidade de que o rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6h 21min é de no máximo $\frac{7}{21}$, alternativa (d).

7 Exercícios propostos

Exercício 8.1 (ENEM 2020) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @.

O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu” apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.

Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

(a) 59.
(b) 60.
(c) 118.
(d) 119.
(e) 120.

Exercício 8.2 (ENEM 2020) Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE” gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”.

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

(a) $9!$.
(b) $4! \cdot 5!$.
(c) $2 \cdot 4! \cdot 5!$.

(d) $9!/2$.
(e) $4! \cdot 5!/2$.

Exercício 8.3 (ENEM 2019) Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão.

A quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir é determinada por

(a) 6.
(b) 8.
(c) 12.
(d) 16.
(e) 24.

Exercício 8.4 (ITA SP) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham duas das letras a, b e c?

(a) 1692.
(b) 1572.
(c) 1520.
(d) 1512.
(e) 1392.

Exercício 8.5 (UFMS 2015) Sendo $A_{n,3} = 3(n-1)$, então, n é:

(a) 3 ou -1.
(b) 1 ou -3.
(c) 3.
(d) -1.
(e) -3 ou -1.

Exercício 8.6 (UCS RS) Um estudante precisa selecionar, entre as disciplinas A, B, C, D, E e F, quatro disciplinas para cursar no próximo semestre letivo, sendo que uma necessariamente precisa ser a disciplina E. O número que indica de quantas maneiras o estudante pode escolher as quatro disciplinas é:

(a) 6.
(b) 10.
(c) 15.
(d) 20.
(e) 24.

Exercício 8.7 (FATEC - SP) Em uma Olimpíada, a delegação de um país **A** se apresentou com 10 atletas e a de um país **B**, com 6 atletas. Os alojamentos da Vila Olímpica eram para quatro pessoas, e um deles foi ocupado por 2 atletas de **A** e 2 atletas de **B**. O número de maneiras distintas de formar esse grupo de 4 atletas era:

(a) 675.
(b) 450.
(c) 270.
(d) 60.
(e) 16.

Exercício 8.8 (ENEM 2017) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	**Formato**
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é

(a) I.
(b) II.
(c) III.
(d) IV.
(e) V.

Exercício 8.9 (ENEM 2021) A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.

Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro.

De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por

(a) 5.
(b) $5 \cdot 3$.
(c) $5!/(5-3)!$.
(d) $5!/(5-3)! \cdot 2!$.

(e) $5!/(5-3)!\cdot 3!$.

Exercício 8.10 (UEL 1996) A solução da equação $\dfrac{\dbinom{n+1}{4}}{\dbinom{n-1}{2}} = \dfrac{7}{2}$ é um número inteiro múltiplo de

(a) 11.
(b) 9.
(c) 7.
(d) 5.
(e) 3.

Exercício 8.11 (UFRN) A expressão $\dbinom{7}{3}+\dbinom{7}{4}-35$ é igual a

(a) 30.
(b) 35.
(c) 40.
(d) 45.
(e) 50.

Exercício 8.12 (UEL 1998) O desenvolvimento do binômio $(2x+\frac{1}{2})^{10}$ segundo as potências decrescentes de x. A razão entre os coeficientes do terceiro e do quinto termos, nessa ordem, é igual a:

(a) $\dfrac{20}{11}$.
(b) $\dfrac{21}{10}$.
(c) $\dfrac{22}{9}$.
(d) $\dfrac{23}{8}$.
(e) $\dfrac{24}{7}$.

Exercício 8.13 (UNICENTRO 2018) O coeficiente do terceiro termo do Binômio de Newton $(x-3)^5$ é

(a) 5.
(b) 15.
(c) 81.
(d) 90.
(e) 405.

Exercício 8.14 (PUC PR) O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(x^2\ -4x+4)^4$ é:

(a) -12.
(b) -448.
(c) -8945664.
(d) -56.
(e) -2688.

Exercício 8.15 (UFC) Sejam α e β números reais. Suponha que ao desenvolvermos $(\alpha x+\beta y)^5$, os coeficientes dos monômios x^4y e x^3y^2 sejam iguais a 240 e 720, respectivamente. Nestas condições, assinale a opção que contém o valor de $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

(a) $\dfrac{1}{2}$.
(b) $\dfrac{3}{2}$.
(c) $\dfrac{1}{3}$.
(d) 3.
(e) $\dfrac{2}{3}$.

Exercício 8.16 (MACK SP) Um dos termos no desenvolvimento de $(x+3a)^5$ é $360x^3$. Sabendo-se que a não depende de x, o valor de a é:

(a) ± 1.
(b) ± 2.
(c) ± 3.
(d) ± 4.
(e) ± 5.

Exercício 8.17 (ENEM 2019) Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol.

A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65m, 1,66m, 1,67m e 1,68m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega da sala.

Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente,

(a) basquete, basquete, basquete, basquete.
(b) futebol, basquete, basquete, basquete.
(c) futebol, futebol, basquete, basquete.
(d) futebol, futebol, futebol, basquete.
(e) futebol, futebol, futebol, futebol.

Exercício 8.18 (ENEM 2020) Com o objetivo de contratar uma empresa responsável pelo serviço de atendimento ao público, os executivos de uma agência bancária realizaram uma pesquisa de satisfação envolvendo cinco empresas especializadas nesse segmento. Os procedimentos analisados (com pesos que medem sua importância para a agência) e as respectivas notas que cada empresa recebeu estão organizados no quadro.

Procedimento	**Peso**	Notas da empresa				
		X	Y	Z	W	T
Rapidez no atendimento	3	5	1	4	3	4
Clareza nas informações passadas aos clientes	5	1	4	3	3	2
Cortesia no atendimento	2	2	2	2	3	4

A agência bancária contratará a empresa com a maior média ponderada das notas obtidas nos procedimentos analisados. Após a análise dos resultados da pesquisa de satisfação, os executivos da agência bancária contrataram a empresa

(a) X.
(b) Y.
(c) Z.
(d) W.
(e) T.

Exercício 8.19 (ESPM SP) Considere todos os pares ordenados (x, y) do produto cartesiano $A \times B$ onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Tomando-se todos os 12 produtos $x \cdot y$, podemos afirmar que a média, a moda e a mediana desse conjunto são respectivamente:

(a) $9,5; 7,5$ e $5,5$.
(b) $7,5; 5,5$ e $3,0$.
(c) $7,5; 3,0$ e $5,5$.
(d) $5,5; 5,5$ e $5,5$.
(e) $7,5; 3,0$ e $6,0$.

Exercício 8.20 (FGV 2020) Uma urna I contém duas bolas idênticas, sendo uma branca e uma preta. Uma outra urna II contém quatro bolas idênticas, sendo três brancas e uma preta. Uma urna é sorteada e, dela, uma bola é sorteada. Sabendo que essa bola é branca, a probabilidade de que a urna sorteada tenha sido a I é

(a) 30%.
(b) 20%.
(c) 35%.
(d) 25%.
(e) 40%.

Exercício 8.21 (ENEM 2018) Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos.

Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

(a) $\frac{1}{16}$.
(b) $\frac{3}{16}$.
(c) $\frac{1}{4}$.
(d) $\frac{3}{8}$.
(e) $\frac{1}{2}$.

Exercício 8.22 (UPENET/IAUPE 2021) Herbert, matemático fanático pelo esporte Arco e Flecha, fez um levantamento estatístico do número de acertos no alvo da equipe formada pelos atletas Bruno e César, ao longo de várias competições e chegou à seguinte conclusão:

"Durante uma competição, as probabilidades de Bruno e César acertarem no alvo são de, respectivamente, 70% e 50%".

Se esses atletas vão participar de uma competição no dia 6 de fevereiro de 2021, qual é a probabilidade de nenhum deles acertar no alvo?

(a) 8%.
(b) 10%.
(c) 15%.
(d) 25%.
(e) 30%.

Exercício 8.23 (UNESP 2021) Para a identificação do câncer de próstata utiliza-se, além do exame digital, o exame de sangue PSA (antígeno prostático específico), que é um procedimento básico para início do rastreamento. No entanto, o PSA é um biomarcador imperfeito, pois pode levar a falsos diagnósticos e excesso de tratamento cirúrgico.

Um grupo de pesquisadores obteve, para uma determinada população, que a probabilidade de um resultado do exame PSA ser verdadeiro, ou seja, indicar positivo para quem tem a doença ou negativo para quem não tem a doença, é de 60%. Ao analisar o resultado de dois testes desse grupo, a probabilidade de que pelo menos um seja falso é de

(a) 64%.
(b) 16%.
(c) 40%.
(d) 48%.
(e) 24%.

Exercício 8.24 (UNICAMP 2021) Um número natural é escolhido ao acaso entre os números de 1 a 100, e depois dividido por 3. A probabilidade de que o resto da divisão seja igual a 1 é de

(a) $31/100$.
(b) $33/100$.
(c) $17/50$.
(d) $19/50$.

Exercício 8.25 (UEMG 2019) Do conjunto de todas as permutações das letras da palavra PONTA, retira-se uma, ao acaso. Qual é a probabilidade de se retirar uma palavra que começa e termina com vogal?

(a) $1/20$.
(b) $1/10$.
(c) $1/6$.
(d) $1/5$.

Exercício 8.26 (UEMG 2019) Uma emissora de TV apresentará durante o mês de abril 30 filmes (um por dia) dos quais 6 serão infantis, 2 de drama, 12 de comédia e 10 de terror. Qual a probabilidade de você ligar a TV nessa emissora, no horário reservado para os filmes, num determinado dia do mês de abril, e estar passando um filme de terror?

(a) $1/30$.
(b) $1/4$.
(c) $1/3$.
(d) $1/2$.

Exercício 8.27 (FUVEST 2017) Em uma urna, há bolas amarelas, brancas e vermelhas. Sabe-se que:

I. A probabilidade de retirar uma bola vermelha dessa urna é o dobro da probabilidade de retirar uma bola amarela.
II. Se forem retiradas 4 bolas amarelas dessa urna, a probabilidade de retirar uma bola vermelha passa a ser $1/2$.
III. Se forem retiradas 12 bolas vermelhas dessa urna, a probabilidade de retirar uma bola branca passa a ser $1/2$.

A quantidade de bolas brancas na urna é

(a) 8.
(b) 10.
(c) 12.
(d) 14.
(e) 16.

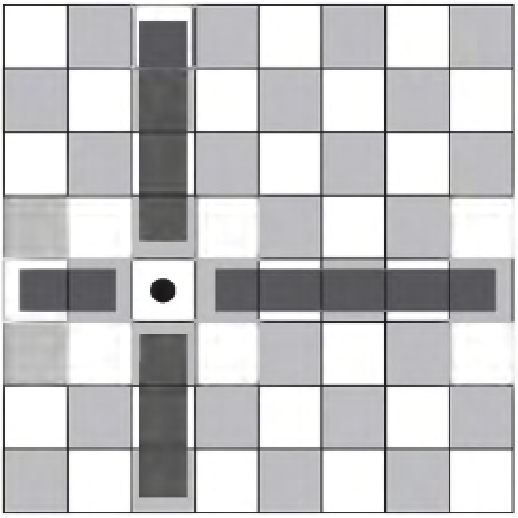
Exercício 8.28 (UNIVESP 2018) Um grupo de estudantes foi selecionado como amostra para uma pesquisa acadêmica. Os integrantes desse grupo foram classificados em função do sexo e do curso que frequentam. A tabela, incompleta, em que alguns números estão omitidos, mostra essa distribuição.

Sexo	Curso A	Curso B	Total
Masculino	25	- - - - - - - - -	35
Feminino	- - - - - - - - -	- - - - - - - - -	- - - - - - - - -
Total	60	- - - - - - - - -	110

Nessas condições, se tomarmos ao acaso um dos alunos do curso B, a probabilidade de que ele seja do sexo feminino é de

(a) 20%.
(b) 35%.
(c) 50%.
(d) 65%.
(e) 80%.

Exercício 8.29 (ENEM 2018) Um designer de jogos planeja um jogo que faz uso de um tabuleiro de dimensão $n \times n$, com $n \geq 2$, no qual cada jogador, na sua vez, coloca uma peça sobre uma das casas vazias do tabuleiro. Quando uma peça é posicionada, a região formada pelas casas que estão na mesma linha ou coluna dessa peça é chamada de zona de combate dessa peça. Na figura está ilustrada a zona de combate de uma peça colocada em uma das casas de um tabuleiro de dimensão 8×8 .



O tabuleiro deve ser dimensionado de forma que a probabilidade de se posicionar a segunda peça aleatoriamente, seguindo a regra do jogo, e esta ficar sobre a zona de combate da primeira, seja inferior a $\frac{1}{5}$.

A dimensão mínima que o *designer* deve adotar para esse tabuleiro é

(a) 4×4.
(b) 6×6.
(c) 9×9.
(d) 10×10.
(e) 11×11.

Exercício 8.30 (ENEM 2018) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna. Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

- Urna A - Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
- Urna B - Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
- Urna C - Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;

- Urna D - Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

- Opção 1 - Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 2 - Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
- Opção 3 - Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 4 - Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
- Opção 5 - Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.
(e) 5.

9 Trigonometria

Trigonometria

Na antiguidade, os primeiros indícios da trigonometria datam de 1800 a.C. em registros feitos por babilônios, mas acredita-se que os egípcios também tinham algum conhecimento sobre esta área, porém foram os gregos que contribuíram com diversas relações métricas entre ângulos e lados. Vale ressaltar também a contribuição dos hindus e árabes, responsáveis por iniciar os estudos das funções trigonométricas. A partir do século XVI, através da trigonometria árabe, os europeus começaram a desenvolver a trigonometria com uma abordagem mais analítica, tornando-a o objeto de estudo de si mesma, ou seja, embora atrelada a astronomia e geometria, a trigonometria passa a ser desenvolvida de maneira independente destas áreas. Essa mudança ocorreu principalmente pela necessidade de desenvolver ferramentas matemáticas que descrevessem o nosso mundo.

Embora extremamente útil para solucionar problemas geométricos, a trigonometria é mais utilizada para descrever fenômenos da natureza e solucionar problemas matemáticos que envolvam periodicidade. Em geral, a trigonometria está presente em equações que descrevam o movimento de ondas (como no mar ou em ondas eletromagnéticas), frequências (como nos batimentos cardíacos) e diversas outras aplicações ligadas ao movimento.

Inicialmente, neste capítulo abordaremos a trigonometria de maneira geométrica, dando sua ideia intuitiva e apresentando seus principais resultados e aplicações. Após feito este estudo, serão apresentados os conceitos de funções trigonométricas e algumas de suas aplicações, com foco nas equações trigonométricas e estudo de fenômenos periódicos.

1 Trigonometria no triângulo retângulo

Inicialmente, veremos a trigonometria para o caso específico do triângulo retângulo devido à facilidade de trabalharmos os conceitos neste tipo de triângulo, posteriormente, iremos expandir estes resultados para um triângulo qualquer.

Mas antes, vale ressaltar que um triângulo retângulo é aquele cujo maior ângulo mede $90°$.

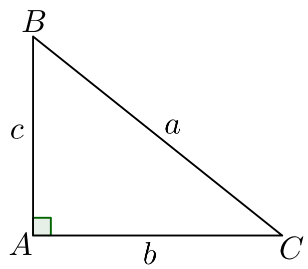


Figura 1.0.1: Triângulo retângulo

O lado oposto ao ângulo de $90°$ é denominado hipotenusa, enquanto os demais lados são chamados catetos. Na Figura 1.0.1, o lado a representa a hipotenusa e os catetos são representados pelos lados b e c. Além disso, devido a soma dos ângulos internos do triângulo ser igual a $180°$, para o triângulo retângulo, temos que a soma dos seus ângulos agudos[6] é igual a $90°$.

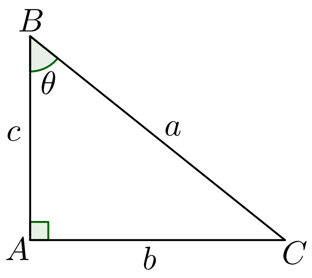
Antes de começarmos a definir as relações trigonométricas, precisamos de mais um resultado da geometria conhecido como Teorema de Pitágoras. Esse resultado é muito versátil e utilizado sempre que precisamos de uma relação que associe os lados do triângulo retângulo.

[6] Ângulos agudos são aqueles cujas medidas estão entre $0°$ e $90°$.

Teorema 1.1 — Teorema de Pitágoras. Em um triângulo retângulo ABC qualquer, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Isto é

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Deste modo, utilizando o seguinte triângulo ABC, queremos definir três equações (conhecidas como relações trigonométricas) que associem os lados do triângulo com o ângulo θ.



Os catetos de um triângulo retângulo ainda são divididos em cateto oposto e adjacente:

• O **cateto adjacente** a um ângulo θ é o lado do triângulo que forma esse ângulo junto da hipotenusa, que nesse caso é o lado representado pela letra c;

• O **cateto oposto** é o lado do triângulo que não faz parte dos segmentos que formam o ângulo θ, ou seja, está oposto ao ângulo, neste caso representado por b.

Como a definição do cateto adjacente e oposto dependem do ângulo que estamos trabalhando, então é correto afirmar que para cada ângulo teremos um cateto adjacente e um cateto oposto.

Tendo em vista estes conceitos, temos a seguinte definição:

Definição 1.1 Para um ângulo agudo θ de um triângulo retângulo qualquer, definimos:

- O **seno** do ângulo θ como sendo a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa, ou seja
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}.$$
- O **cosseno** do ângulo θ será dado pela razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa, isto é
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}.$$
- A **tangente** do ângulo θ será definida pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente, desse modo
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$

Obs. Embora as relações trigonométricas sejam definidas como o quociente dos lados de um triângulo que são sempre diferentes de zero, vale ressaltar que a tangente não está definida quando o cosseno de um ângulo é zero. Isso devido ao fato de não existir divisão de um número por zero.

Obs. Note que os valores de seno, cosseno e tangente não se alteram quando multiplicarmos os lados por uma mesma constante, ou seja, os valores das relações trigonométricas dependem somente da medida do ângulo e não do tamanho desses lados.

Ângulos Notáveis

Os ângulos notáveis são uma ferramenta importante, pois a partir de alguns valores específicos de seno, cosseno e tangente, podemos construir uma tabela que irá auxiliar na resolução de exercícios. Para isso, calcularemos os valores do seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30°, 45° e 60°. Inicialmente, faremos os cálculos para 30° e 60°, o caso para 45° é análogo e será deixado como exercício.

Assim, considere o triângulo equilátero ABC de lado a.

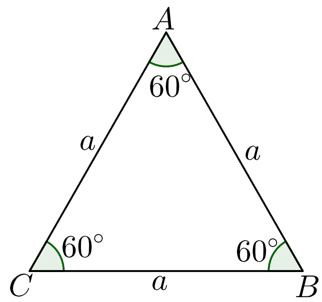
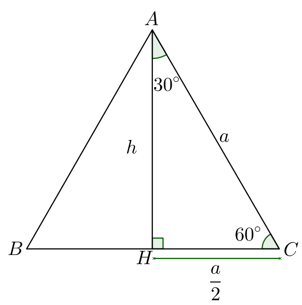


Figura 1.0.2: Triângulo Equilátero

Como ABC é equilátero[7], seus ângulos internos possuem a mesma medida. Uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, podemos concluir que os ângulos do triângulo equilátero medem 60°, ou seja

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ.$$

Considere AH como sendo a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, ou seja, AH também é mediatriz e altura relativa ao segmento $\overline{BC}$. Logo, $H\hat{A}C = 30^\circ$, $HC = \dfrac{a}{2}$ e $A\hat{H}C = 90^\circ$.



[7]Verifique o capítulo de Geometria Plana para maiores detalhes sobre estas e outras propriedades dos triângulos que serão utilizadas nesta seção.

Atente-se somente para o triângulo AHC, note que esse possui um ângulo de $90°$ em H, e portanto é retângulo em H. Como visto na definição das relações trigonométricas, precisamos da hipotenusa, que sabemos que mede a, e dos catetos, que neste caso o menor deles mede $\frac{a}{2}$ e o maior mede h, note que isso ocorre devido a $\frac{a}{2}$ ser lado oposto ao menor ângulo. Sendo assim, vamos determinar h em função de a. Utilizando Teorema de Pitágoras, temos

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Logo, como h é um número real positivo, segue que

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Agora, podemos finalmente calcular o seno, cosseno e tangente para os ângulos de $60°$ e $30°$. Vejamos:

$$\operatorname{sen}(30°) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30°) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(30°) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen}(60°) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

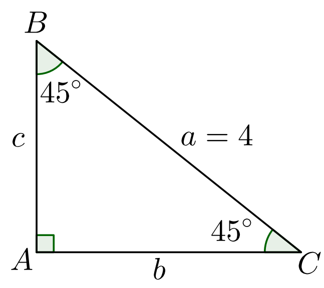
$$\cos(60°) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}(60°) = \frac{\operatorname{sen}(60°)}{\cos(60°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Dessa forma, podemos construir a seguinte tabela.

Obs. Embora até aqui tenhamos escrito o ângulo aplicada na relação entre parênteses, como $\operatorname{sen}(45°)$, vale ressaltar que também é comum simplesmente denotarmos por $\operatorname{sen}45°$.

Exemplo 1.0.1 Vamos determinar todos os lados do triângulo retângulo a seguir



Nesse caso, usando o ângulo $\hat{B}$ como referência, temos

$$\operatorname{sen}(45°) = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b}{4} \Rightarrow b = 2\sqrt{2},$$

do mesmo modo, tomando o ângulo em $\hat{C}$, segue que

$$\cos(45°) = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}.$$

Existem também outras três relações trigonométricas em um triângulo, conhecidas como secante ($\sec$), cossecante (cossec) e cotangente (cotg). Elas são definidas da seguinte forma:

Definição 1.2 Considere um ângulo θ, então podemos definir:

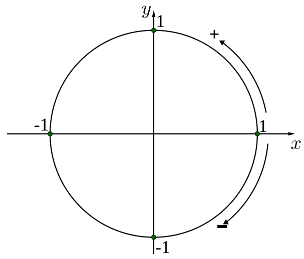
- **Secante**: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$;
- **Cossecante**: $\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$;
- **Cotangente**: $\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

Obs. Vale ressaltar que assim como no caso da tangente, os valores para a secante, cossecante e cotangente só existem quando o denominador é diferente de 0.

2 Circunferência trigonométrica

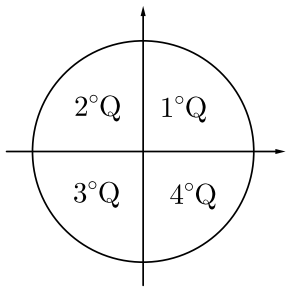
Nesta seção, vamos utilizar a circunferência para obter alguns resultados importantes. Para tanto, iremos trabalhar com a **circunferência trigonométrica**, que nada mais é que uma circunferência nas seguintes condições:

- O raio da circunferência será unitário, ou seja, $r = 1$;
- Começaremos a contar um ângulo a partir do ponto que representa o seu raio no eixo x, neste caso, a partir do ponto $(1,0)$;
- Os ângulos em sentido anti-horário assumirão valores positivos e no sentido horário serão representados por valores negativos, isto é, $90°$ no sentido horário será considerado como $-90°$.



Neste caso, consideraremos a circunferência dividida em quatro partes iguais denominadas quadrantes. Além de podermos visualizar qual quadrante o ângulo pertence geometricamente, podemos determiná-lo da seguinte forma:

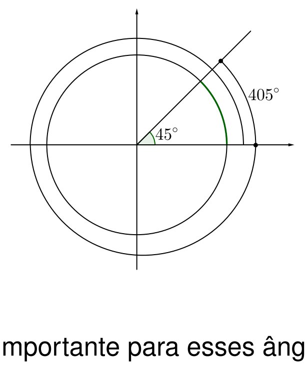
- α está no 1° quadrante se $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
- α está no 2° quadrante se $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
- α está no 3° quadrante se $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;
- α está no 4° quadrante se $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.



Se um ângulo for maior ou igual a 360°, podemos representá-lo por um ângulo equivalente entre 0° e 360° simplesmente considerando o resto da divisão do ângulo analisado por 360°. Ou seja, considerando um ângulo de 405° na circunferência, temos que

$$\begin{array}{rr|l} & 405^\circ & 360^\circ \\ \cline{3-3} - & 360^\circ & \quad 1 \\ \hline & 45^\circ & \end{array}$$

Geometricamente, é como se desconsiderássemos as voltar que este ângulo da na circunferência e pegássemos apenas o resto da divisão como representante deste ângulo.



Outro fato importante para esses ângulos de mais de uma volta é analisar o quadrante desses ângulos, como veremos no seguinte exemplo.

Exemplo 2.0.1 Vamos determinar os quadrantes de 380° e 850°. Para isso, note que:

$$\begin{array}{rr|l} & 380^\circ & 360^\circ \\ \cline{3-3} - & 360^\circ & \quad 1 \\ \hline & 20^\circ & \end{array} \qquad \begin{array}{rr|l} & 850^\circ & 360^\circ \\ \cline{3-3} - & 720^\circ & \quad 2 \\ \hline & 130^\circ & \end{array}$$

Ou seja, 380° coincide com 20°, e portanto está no primeiro quadrante, e 850° coincide com 130°, isto é, está no segundo quadrante.

Outra unidade utilizada para medir ângulos é a de radianos, representada por π rad, ou simplesmente π [8]. Para realizar a conversão de graus para radianos, lembre que

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ.$$

Um dos métodos mais utilizados para esta conversão é a regra de três[9], como por exemplo para 45°, temos

$$\begin{aligned} 180^\circ &\longrightarrow \pi \\ 45^\circ &\longrightarrow x \end{aligned}$$

assim,

$$x = \frac{45\pi}{180} = \frac{45\pi}{45 \cdot 4} = \frac{\pi}{4}.$$

Utilizando esse mesmo raciocínio, podemos converter os demais ângulos notáveis e construir a seguinte tabela:

A partir disso, podemos dizer qual quadrante um ângulo α pertence a partir de seu valor em radianos da seguinte forma:

- α está no 1° quadrante se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
- α está no 2° quadrante se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
- α está no 3° quadrante se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
- α está no 4° quadrante se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Obs. Esta conversão é feita para facilitar o estudo com funções, uma vez que este valor de π rad irá coincidir com o número π. Porém, no momento, estamos tratando π rad como uma notação de uma unidade de medida e não um número real.

Nessas condições, iremos considerar o eixo y como sendo o eixo que representa os valores do seno, enquanto o eixo x representará os valores para o cosseno.

[8] Em ambos os casos, lê-se como π radianos ou simplesmente radianos.

[9] Caso necessário, verifique o Apêndice para ver este conteúdo com mais detalhes.

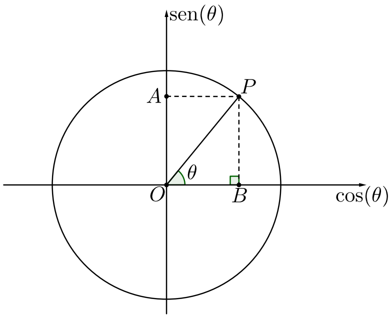
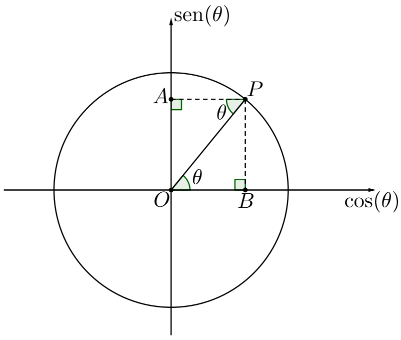


Figura 2.0.1: Circunferência trigonométrica

Em outras palavras, podemos calcular o valor de seno de θ se conseguirmos determinar a medida do segmento $\overline{OA}$ que por semelhança de triângulos[10] é igual ao segmento $\overline{PB}$. Da mesma forma, é possível determinar o valor do cosseno de θ se calcularmos o valor de $\overline{OB}$.



Note que como, uma vez que $\overline{OP}$ é o raio da circunferência, temos $\overline{OP} = 1$, então

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{PB}}{\overline{OP}} = \overline{PB} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \overline{OB}.$$

De maneira análoga, podemos fazer a mesma interpretação geométrica para a tangente. Para isso, considere que a circunferência intercepta o eixo do cosseno em um ponto C. Denominamos a reta paralela[11] ao eixo dos senos e que intercepta o eixo dos cossenos no ponto C como eixo das tangentes.

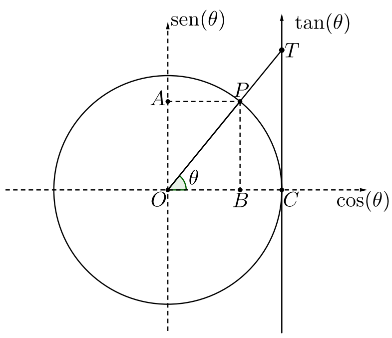


Figura 2.0.2: Representação geométrica da tangente

A fim de encontrar o valor da tangente em um ângulo θ, basta prolongarmos o segmento $\overline{OP}$ até que ele intercepte o eixo das tangentes em um ponto T. Assim, considerando que $\overline{OC}$ é o raio da circunferência, temos

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\overline{CT}}{\overline{OC}} = \overline{CT}.$$

Após calcular o valor destes segmentos, devemos levar em conta qual quadrante está o ângulo em questão para determinar se os valores de seno, cosseno e tangente são positivos ou negativos.

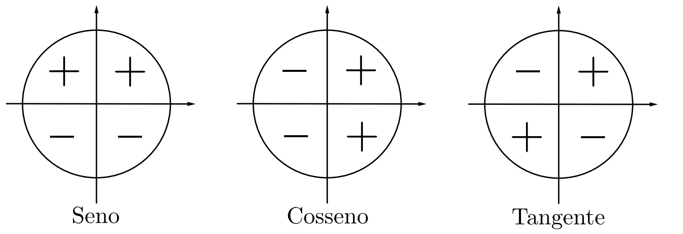


Figura 2.0.3: Sinal das relações trigonométricas por quadrante

Diferente de quando trabalhamos com triângulos[12], onde os ângulos internos devem ser, necessariamente, maiores que $0°$ e menores que $180°$, quando estamos na circunferência trigonométrica faz sentido calcularmos senos, cossenos e tangentes de $0°$ ou ângulos maiores ou iguais a $180°$.

Note que quando a circunferência corta o eixo dos cossenos em 0 ou $180°$, o seno vale $0°$ e o cosseno vale 1 e -1, respectivamente. Do mesmo modo, quando a circunferência corta o eixo dos senos em $90°$ e $270°$, o seno vale, respectivamente, 1 e -1 e o cosseno vale $0°$.

Exemplo 2.0.2 Iremos determinar o sinal das expressões a seguir

a) $y = \operatorname{sen}(110°) \cdot \cos(225°)$.

Note que $110°$ está no segundo quadrante e nesse caso o seno é positivo. Do mesmo modo, $225°$ está no terceiro quadrante e nesse caso o cosseno é negativo. Logo, $y < 0$.

b) $y = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Uma forma de resolver esse problema é convertendo as unidades de radianos para graus, então considerando que π rad$= 180°$, temos

$$\frac{3\pi}{5} = \frac{3 \cdot 180°}{5} = 108° \quad \text{e} \quad \frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180°}{3} = 120°.$$

Como $108°$ e $120°$ estão no segundo quadrante, o valor de seno será positivo e o do cosseno será negativo. Logo, $y < 0$.

c) $y = \operatorname{sen} 380° \cdot \cos 850°$.

[10] Caso necessário, verifique o capítulo de Geometria Plana.

[11] O estudo de retas paralelas será aprofundado no capítulo de Geometria Analítica, mas, neste caso, dizer que estas retas são paralelas significa dizer que elas não se interceptam.

[12] Note que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a $180°$.

Neste caso, vimos no Exemplos 2.0.1 que $380°$ coincide com $20°$ e $850°$ coincide com $130°$. Assim,

$$y = \operatorname{sen} 380° \cdot \cos 850° = \operatorname{sen} 20° \cdot \cos 130°.$$

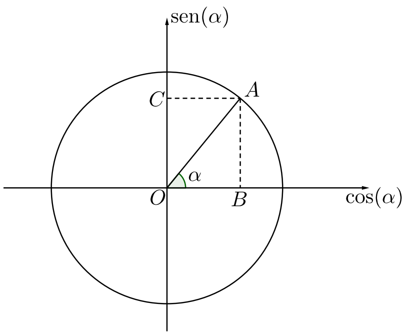
Como o $20°$ está no primeiro quadrante e $130°$ está no segundo, segue que $y < 0$.

A partir deste conceitos, podemos definir o seguinte teorema:

Teorema 2.1 — Relação Fundamental da Trigonometria. O cosseno e o seno de um ângulo α estão relacionados pela seguinte igualdade

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Este teorema é facilmente verificado, para isso basta considerar o triângulo na circunferência a seguir:



Segue do Teorema de Pitágoras que

$$\overline{OB}^2 + \overline{BA}^2 = \overline{OA}^2 = 1,$$

porém, $\overline{OB} = \cos \alpha$ e $\overline{AB} = \overline{OC} = \operatorname{sen} \alpha$. Logo,

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Obs. Note que, utilizando o Teorema 2.1, temos que o seno e o cosseno de um ângulo são limitados, visto que considerando uma circunferência de raio 1, ambos variam de -1 até 1. Ou seja, quando considerarmos os ângulos como sendo números reais, os valores de seno e cosseno estarão sempre no intervalo $[-1, 1]$.

Esse teorema é uma ferramenta importante que irá nos auxiliar em muitos problemas futuros, graças a ele, desde que conheçamos um dos valores do seno ou cosseno de um ângulo, poderemos determinar rapidamente o outro valor de maneira exata.

Exemplo 2.0.3 Sabemos que o seno de um ângulo α é de $\frac{\sqrt{6}}{3}$, determinaremos o cosseno de α se:

a) α está no primeiro quadrante.

Neste caso, sabemos que

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

assim,

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{6}{9} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Logo, como α está no primeiro quadrante, o cosseno será positivo, segue que

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) α está no segundo quadrante.

De maneira análoga ao item **a)**, temos que o cosseno é negativo, uma vez que α está no segundo quadrante. Então

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Exercício resolvido 1 (EAM 2019 - Modificado) Sendo x um número real tal que $\operatorname{sen} x = \frac{m-1}{2}$ e $\cos x = \frac{m+1}{2}$, vamos determinar o conjunto dos valores de "m".

Resolução: Segue da relação fundamental da trigonometria que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

ou seja,

$$\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{m^2 - 2m + 1}{4} + \frac{m^2 + 2m + 1}{4} = 1.$$

Desse modo,

$$2m^2 + 2 = 4 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1.$$

Portanto, $m \in \{-1, 1\}$.

3 Fórmulas trigonométricas para soma e subtração de arcos

As fórmulas a seguir são úteis para obter os valores das relações trigonométricas a partir da decomposição do ângulo em ângulos notáveis, assim podemos transformar um ângulo de modo que possamos calcular suas relações trigonométricas mais facilmente.

Por exemplo, não sabemos ainda qual é o valor do seno de $105°$, mas sabemos que $105° = 45° + 60°$ e para $45°$ e $60°$, temos os valores de seno tabelados. Assim, as fórmulas a seguir irão relacionar o seno de $105°$ com o seno dos ângulos $45°$ e $60°$. Vejamos então quais são estas fórmulas, para isso, considere dois ângulos a e b quaisquer.

Fórmulas de soma

- $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$;
- $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$;
- $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$.

Fórmulas de subtração

- $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$;
- $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$;
- $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$.

Exemplo 3.0.1 Vamos calcular o valor do seno para o ângulo de $105°$. Neste caso, vimos anteriormente que $105° = 45° + 60°$, logo

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(105°) &= \operatorname{sen}(45° + 60°) \\
&= \operatorname{sen} 45° \cdot \cos 60° + \operatorname{sen} 60° \cdot \cos 45° \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.0.2 Agora, vejamos como se calcula o valor da tangente de $15°$. Note que $15° = 60° - 45°$, assim

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(60° - 45°) = \frac{\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 45°}{1 + \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 45°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}},$$

ou ainda, racionalizando

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \\
&= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\
&= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} \\
&= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \\
&= 2 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.

3.1 Redução ao primeiro quadrante

Vimos que através das fórmulas de soma e subtração, podemos separar um ângulo em uma soma de dois ângulos cujos valores de seno e cosseno já são conhecidos. A redução ao primeiro quadrante é um caso particular deste procedimento, neste caso, reescrevemos um ângulo que está no segundo, terceiro ou quarto quadrante como sendo a soma ou subtração entre $\pi = 180°$ ou $2\pi = 360°$ com um ângulo que está no primeiro quadrante.

Antes de enunciarmos estas fórmulas, feitas as devidas conversões de graus para radianos, temos a seguinte tabela:

Redução do segundo para o primeiro quadrante

Para isso, considere um ângulo α no segundo quadrante. Note que α não pode ser π, então existe um ângulo x tal que $\alpha + x = \pi$, ou seja

$$\alpha = \pi - x \quad \text{e} \quad x = \pi - \alpha.$$

Deste modo, calculando o seno de α, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\pi - x) &= \operatorname{sen} \pi \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos \pi \\
&= 0 \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-1) \\
&= \operatorname{sen} x \\
&= \operatorname{sen}(\pi - \alpha).
\end{aligned}$$

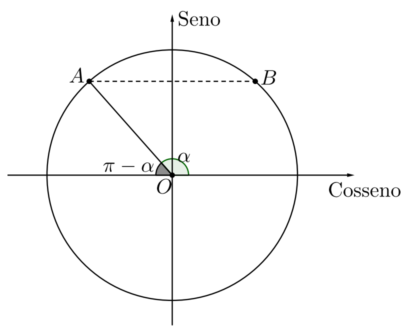
Para calcular o cosseno de α, procedemos de maneira análoga

$$\begin{aligned}
\cos \alpha = \cos(\pi - x) &= \cos \pi \cdot \cos x + \operatorname{sen} \pi \cdot \operatorname{sen} x \\
&= (-1) \cos x + 0 \cdot \operatorname{sen} x \\
&= -\cos x \\
&= -\cos(\pi - \alpha).
\end{aligned}$$

Esse fato também pode ser observado de maneira geométrica. Para isso, considere novamente o ângulo α no círculo trigonométrico formado pelo ponto A no segundo quadrante, ou seja, $0 < \alpha < \pi$. Como α não pode ser π, existe um ângulo x tal que

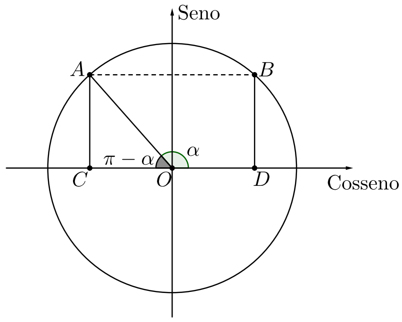
$$\alpha + x = \pi \Rightarrow x = \pi - \alpha.$$

Além disso, tome B como sendo o simétrico[13] do ponto A em relação ao eixo y.

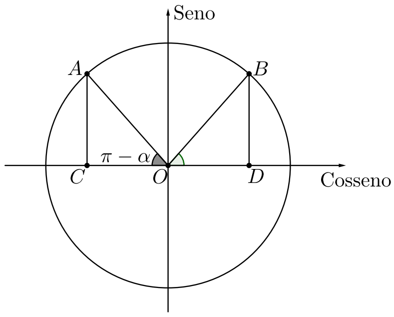


Considere também C como sendo o pé da perpendicular que liga A ao eixo x e D o pé da perpendicular que liga B ao eixo x.

[13] Isto significa que estes pontos estão a uma mesma distância do eixo y.



A maneira como definimos o círculo trigonométrico nos garante que $\overline{AC}$ representa o seno do ângulo α e $\overline{OC}$ o valor do cosseno para o ângulo α. Porém, ambos os segmentos estão no segundo quadrante, então queremos uma maneira de relacioná-los com um ângulo do primeiro quadrante.



Devido as hipóteses que assumimos até aqui, podemos mostrar que os triângulos AOC e BOD são semelhantes. Disso vem que $\overline{AC} = \overline{BD}$, isto é, devido a semelhança, o valor do seno do ângulo α é igual ao seno de $B\hat{O}D = \pi - \alpha$. Ou seja,

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(B\hat{O}D) = \operatorname{sen}(\pi - \alpha).$$

Também devido a semelhança, temos que $\overline{OC}$, que representa o valor do cosseno de α, é igual a $\overline{OD}$. Porém, como estamos no segundo quadrante, devemos levar em consideração que o sinal do cosseno é negativo, então

$$\cos\alpha = -\cos(B\hat{O}D) = -\cos(\pi - \alpha).$$

Exemplo 3.1.1 Vamos calcular o valor do seno e cosseno para o ângulo de $120°$.

- $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(180° - 120°) = \operatorname{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos 120° = -\cos(180° - 120°) = -\cos(60°) = -\dfrac{1}{2}.$

Do mesmo modo, como $120° = \dfrac{2\pi}{3}$, temos:

- $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos\dfrac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \dfrac{2\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}.$

Redução do terceiro para o primeiro quadrante

De maneira análoga, para um ângulo α no terceiro quadrante, temos $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, então existe um ângulo x no primeiro quadrante tal que $\alpha - x = \pi$, assim

$$\alpha = \pi + x \quad \text{e} \quad x = \alpha - \pi.$$

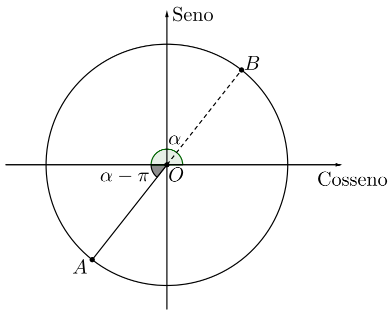
Desse modo,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi + x) &= \operatorname{sen}\pi \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos\pi \\ &= 0 \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot (-1) \\ &= -\operatorname{sen} x \\ &= -\operatorname{sen}(\alpha - \pi)\end{aligned}$$

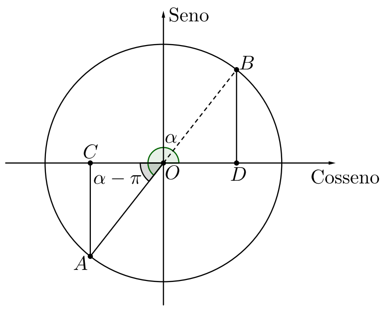
e para o cosseno

$$\begin{aligned}\cos\alpha = \cos(\pi + x) &= \cos\pi \cdot \cos x - \operatorname{sen}\pi \cdot \operatorname{sen} x \\ &= (-1)\cos x - 0 \cdot \operatorname{sen} x \\ &= -\cos x. \\ &= -\cos(\alpha - \pi).\end{aligned}$$

A fim de verificar estes resultados geometricamente, considere um ângulo α no primeiro quadrante e B a intersecção da reta que passa pelos ponto A e O e que intercepta a circunferência.

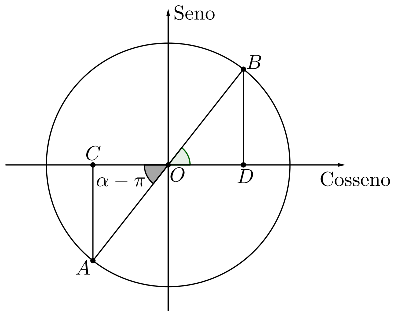


Além disso, tome C o pé da perpendicular que liga A ao eixo dos cossenos e D o pé da perpendicular que liga B ao eixo cossenos.



Dessa forma, em valores absolutos[14], o seno de α é dado pelo tamanho do segmento $\overline{AC}$, da mesma forma que o cosseno de α é dado por $\overline{CO}$.

[14] Significa que tomamos o módulo deste número, ou seja, consideraremos ele sendo positivo independente do sinal.



Devido a construção do problema, podemos mostrar que os triângulos AOC e BOD são semelhantes. Então $\overline{AC} = \overline{BD}$, ou seja, o seno de α é igual ao seno do ângulo $B\hat{O}D$ e devido a semelhança temos $B\hat{O}D = \alpha - \pi$. Assim, considerando que o ângulo α está no terceiro quadrante, e portanto seu valor deverá ser negativo, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - \pi).$$

Do mesmo modo, temos $\overline{CO} = \overline{OD}$, como o cosseno no terceiro quadrante também deve ser negativo, segue que

$$\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi).$$

Exemplo 3.1.2 Calcularemos o valor do seno e cosseno para o ângulo de $\dfrac{5\pi}{4} = 225°$.

- $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4} = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{4} - \pi\right) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos 225° = -\cos(225° - 180°) = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Redução do quarto para o primeiro quadrante

Do mesmo modo, para um ângulo α no quarto quadrante, podemos tomar um ângulo x tal que $\alpha + x = 2\pi$, ou seja,

$$\alpha = 2\pi - x \quad \text{e} \quad x = 2\pi - \alpha.$$

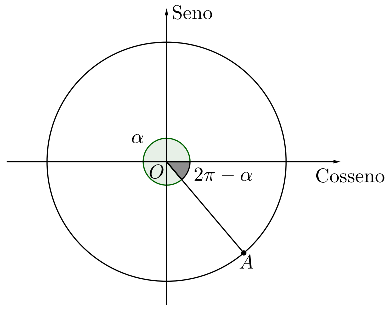
Assim, o seno de α é dado por

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(2\pi - x) &= \operatorname{sen}(2\pi)\cdot\cos x - \operatorname{sen}x\cdot\cos(2\pi)\\
&= 0\cdot\cos x - \operatorname{sen}x\cdot 1\\
&= -\operatorname{sen}x\\
&= -\operatorname{sen}(\alpha - 2\pi),
\end{aligned}$$

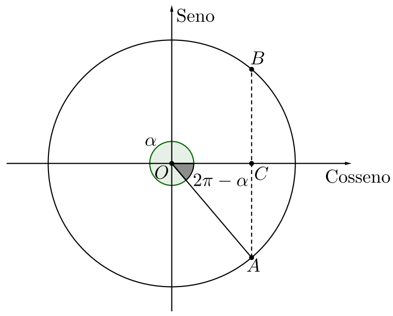
para o cosseno, temos

$$\begin{aligned}
\cos\alpha = \cos(2\pi - x) &= \cos(2\pi)\cdot\cos x + \operatorname{sen}(2\pi)\cdot\operatorname{sen}x\\
&= 1\cdot\cos x + 0\cdot\operatorname{sen}x\\
&= \cos x\\
&= \cos(2\pi - \alpha).
\end{aligned}$$

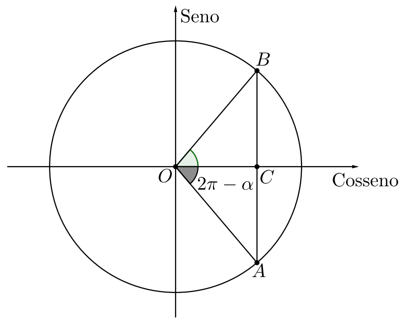
Também podemos observar este resultado geometricamente, para isso, considere um ângulo α no quarto quadrante.



No círculo trigonométrico, tome B o ponto onde a perpendicular que passa pelo ponto A e o eixo dos cossenos intercepta a circunferência, e considere C o ponto onde ocorre está interseção.



Novamente, o valor absoluto do seno do ângulo α é dado por $\overline{AC}$, enquanto o cosseno é dado por $\overline{OC}$.



Porém, note que os triângulos OBC e OAC são semelhantes, então $\overline{BC} = \overline{AC}$ e $B\hat{O}C = A\hat{O}C = 2\pi - \alpha$. Desse modo, considerando que α está no quarto quadrante, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(2\pi - \alpha),$$

do mesmo modo, segue que

$$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha).$$

Exemplo 3.1.3 Calcularemos o valor do seno e cosseno para o ângulo de $\dfrac{5\pi}{3} = 300°$.

- $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen}\left(2\pi - \dfrac{5\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\cos 300° = \cos(360° - 300°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

3.2 Identidades trigonométricas

Através das fórmulas de soma e subtração, redução ao primeiro quadrante e da relação fundamental da trigonometria, podemos deduzir um conjunto de relações que chamamos de identidades trigonométricas. Além dos resultados já vistos anteriormente, as demais fórmulas são uma consequência imediata destes três itens e podem ser demonstradas facilmente. Vejamos algumas dessas fórmulas, para isso, considere um ângulo x qualquer:

- $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$
- $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$

Vejamos como obter algumas dessas fórmulas.

Exemplo 3.2.1 Considere um ângulo x qualquer, então mostraremos que:

a) $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$. De fato, note que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2x) &= \operatorname{sen}(x + x)\\ &= \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x\\ &= 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x.\end{aligned}$$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} x\\ &= 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \operatorname{sen} x\\ &= -\operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

c) Se x é um ângulo tal que exista $\sec x$, então $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Uma vez que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, temos

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \sec^2 x - 1,$$

ou ainda, $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

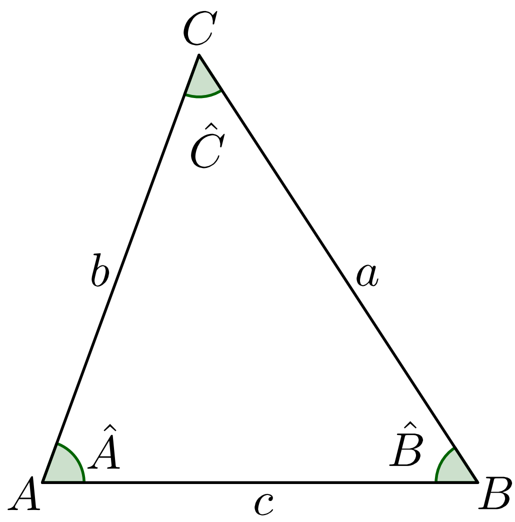
4 Trigonometria em um triângulo qualquer

Embora os resultados obtidos até aqui sejam válidos para qualquer ângulo, a maneira de calcular o seno e cosseno de um ângulo muda dependendo do tipo de triângulo que estamos trabalhando, como visto nas fórmulas de redução ao primeiro quadrante que foi necessário dividir em outros triângulos e trabalhar com semelhança.

A partir disso, iremos utilizar todos os resultados enunciados anteriormente para obter novas ferramentas que são válidas para triângulos retângulos, acutângulos e obtusângulos [15].

4.1 Lei dos cossenos

Considere um triângulo ABC qualquer.



As seguintes relações são conhecidas como **Lei dos Cossenos** e são válidas para qualquer triângulo:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A};\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B};\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}.\end{aligned}$$

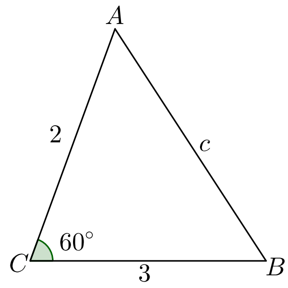
Obs. Neste caso, o ângulo que aparece com o cosseno é o ângulo oposto ao lado que queremos calcular.

Obs. Na primeira equação, note que caso consideremos um triângulo retângulo de hipotenusa a, a Lei dos Cossenos se resume ao Teorema de Pitágoras, pois uma vez que $\cos 90° = 0°$, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90° = b^2 + c^2.$$

Exemplo 4.1.1 No triângulo ABC a seguir, vamos determinar o valor do segmento c.

[15] Novamente, caso seja necessário, consulte capítulo de Geometria Plana para mais detalhes sobre estes triângulos e suas propriedades.



Como temos o valor de dois lados e do ângulo oposto ao lado que queremos encontrar, podemos aplicar a Lei dos Cossenos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \\ &= 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ \\ &= 9 + 4 - 12\cdot\frac{1}{2} \\ &= 7. \end{aligned}$$

Logo, $c = \sqrt{7}$.

Mostraremos aqui como obter o resultado da primeira equação para um triângulo acutângulo, os demais resultados tanto para este triângulo quanto para os outros tipos são análogos. Para isso, considere o triângulo ABC, cujo maior lado é denotado por a.

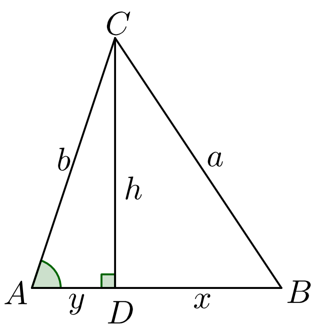


Figura 4.1.1: Triângulo acutângulo

Tomando o segmento $\overline{CD} = h$ como sendo a altura relativa ao vértice C e considerando que $x + y = c$, temos pelo Teorema de Pitágoras

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + x^2 \\ b^2 = h^2 + y^2. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação na primeira, obtemos

$$a^2 - b^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow a^2 = (x-y)(x+y) + b^2,$$

além disso, note que

$$\cos\hat{A} = \frac{y}{b} \Rightarrow y = b\cos\hat{A}$$

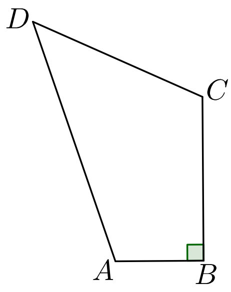
e como $x = c - y$, subtraindo y em ambos os lados, temos

$$x = c - y \Rightarrow x - y = c - 2y.$$

Logo,

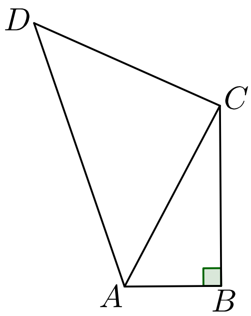
$$\begin{aligned} a^2 &= (x-y)(x+y) + b^2 \\ &= (c-2y)c + b^2 \\ &= (c - 2b\cos\hat{A})c + b^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}. \end{aligned}$$

Exercício resolvido 1 (FUVEST - Modificado) No quadrilátero a seguir, $BC = CD = 3$ cm, $AB = 2$ cm $A\hat{D}C = 60^\circ$ e $A\hat{B}C = 90^\circ$.



Vamos determinar a medida da soma dos lados deste quadrilátero.

Resolução: A fim de calcular o perímetro do quadrilátero, precisamos determinar o valor de todos os seus lados. Por hipótese, sabemos a medida de BC, CD e AB, então, precisamos determinar a medida de DA.



Para isso, note que o triângulo ABC é retângulo em B, aplicando o Teorema de Pitágoras temos que

$$\begin{aligned} (AC)^2 &= (BC)^2 + (AB)^2 \\ &= 3^2 + 2^2 \\ &= 13, \end{aligned}$$

então, $AC = \sqrt{13}$. Deste modo, podemos aplicar a Lei dos Cossenos para o lado AC do triângulo ADC, assim

$$\begin{aligned} (AC)^2 &= (DC)^2 + (DA)^2 - 2(DC)(DA)\cos(A\hat{D}C) \\ 13 &= 9 + (DA)^2 - 2\cdot 3(DA)\cos 60^\circ \\ &= 9 + (DA)^2 - 2\cdot 3(DA)\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Então, temos

$$(DA)^2 - 3(DA) - 4 = 0,$$

considerando $x = DA$, segue que

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

então

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}.$$

Como x é uma medida de comprimento, $x > 0$, então a única solução da equação é

$$AD = x = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ cm}.$$

Logo, o perímetro do quadrilátero é dado por

$$AD + AB + BC + DC = 4 + 2 + 3 + 3 = 12 \text{ cm}.$$

4.2 Lei dos senos

Assim como na Lei dos Cossenos, a **Lei dos Senos** é válida para quaisquer triângulos e suas relações são as seguintes:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R,$$

onde R é o raio da circunferência cujo triângulo em questão está inscrito.

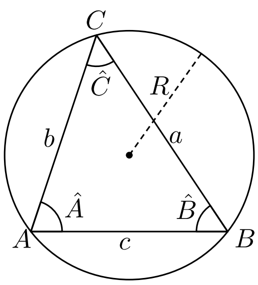


Figura 4.2.1: Triângulo inscrito na circunferência

Considerando que todas estas igualdades são sempre não nulas, elevando todos os lados a -1, podemos reescrever a Lei dos Senos como sendo

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{b} = \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{c} = \frac{1}{2R}.$$

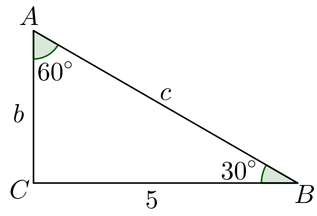
Esta reescrita será útil na resolução de alguns exercícios, porém, independente da forma o resultado final será sempre o mesmo.

Obs. Lembrando que um triângulo está inscrito em uma circunferência se todos os seus vértices estão sobre a ela.

Obs. Esse círculo possui centro no circuncentro[16] do triângulo e o raio será a distância deste ponto até qualquer um dos vértices do triângulo.

[16] Ponto de interseção das três mediatrizes.

Exemplo 4.2.1 Considerando o triângulo a seguir, vamos calcular os valores de seus lados.



Pela Lei dos senos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}},$$

deste modo,

$$b = \frac{5\operatorname{sen}30°}{\operatorname{sen}60°} = \frac{5 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Como a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a $180°$, segue que

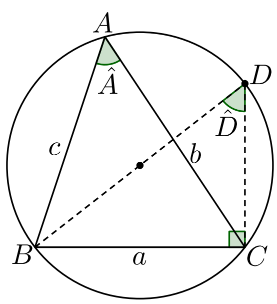
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{C} = 180° - 30° - 60° = 90°,$$

assim, utilizando o mesmo raciocínio feito para o segmento b, temos

$$c = \frac{5\operatorname{sen}90°}{\operatorname{sen}60°} = \frac{5 \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Obs. É sempre importante analisar a geometria do problema, pois ela pode nos mostrar diferentes maneiras de chegar ao resultado. Como feito no Exemplo 4.2.1, ao verificarmos que $\hat{C} = 90°$, poderíamos simplesmente afirmar que este triângulo é retângulo e utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor de c.

A fim de verificar essa lei, considere o seguinte triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio R. Trace o segmento BD passando pelo centro da circunferência.



Como os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ "enxergam"o mesmo segmento BC, temos que $\hat{A} = \hat{D}$, além disso, como $B\hat{C}D$ "enxerga"o segmento BD, que é um diâmetro, $B\hat{C}D = 90°$.

A partir disso, calcular o seno de $\hat{A}$ é o mesmo que calcular o seno do ângulo $\hat{D}$. Como o triângulo BDC é retângulo, segue que

$$\operatorname{sen}\hat{D} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{D}} = 2R,$$

isto é,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R.$$

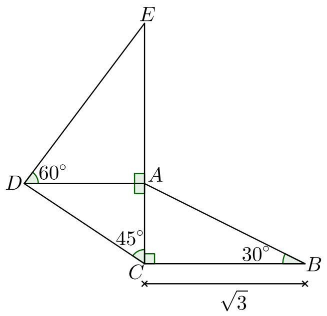
Construindo de maneira análoga outros dois triângulos e utilizando o mesmo raciocínio, provamos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R.$$

Obs. Assim como na Lei dos Cossenos, se considerarmos que $\hat{A} = 90°$, então

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b\operatorname{sen}90°}{a} = \frac{b}{a}.$$

Exercício resolvido 2 (UFJF 2020 - Modificado) Na figura abaixo, o ponto A é vértice comum dos triângulos retângulos ABC, ACD e ADE.



Vamos encontrar o comprimento do segmento $\overline{EC}$, em centímetros.

Resolução: De fato, pela soma dos ângulos internos do triângulo ABC, temos que

$$C\hat{A}B + 30° + 90° = 180° \Rightarrow C\hat{A}B = 60°,$$

desse modo fazendo $CA = x$ e aplicando a Lei dos Senos, obtemos

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(A\hat{B}C)} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}(C\hat{A}B)} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}30°}{\operatorname{sen}60°} = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \text{ cm}.$$

Novamente, pela soma dos ângulos internos do triângulo, para o triângulo ADC, temos

$$A\hat{D}C + D\hat{A}C + A\hat{C}D = A\hat{D}C + 90° + 45° = 180° \Rightarrow A\hat{D}C = 45°,$$

ou seja, o triângulo ADC é isósceles de base DC, então $DA = AC = 1$ cm. Para o triângulo ADE, segue que

$$A\hat{E}D + A\hat{D}E + D\hat{A}E = A\hat{E}D + 60° + 90° = 180° \Rightarrow A\hat{E}D = 30°,$$

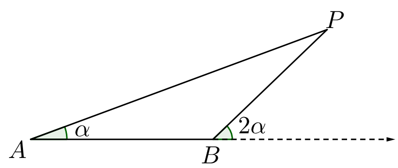
novamente, aplicando a Lei dos Senos e considerando $AE = y$, temos que

$$\frac{y}{\operatorname{sen}(A\hat{D}E)} = \frac{DA}{\operatorname{sen}(A\hat{E}D)} \Rightarrow y = \frac{1\cdot\operatorname{sen}60°}{\operatorname{sen}30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Portanto, o comprimento do segmento $\overline{EC}$ é dado por

$$EC = AC + EA = 1 + \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Exercício resolvido 3 (ENEM 2011 - Modificado) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual de 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo de $\alpha = 30°$ e, ao chegar no ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância de $AB = 2000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, vamos determinar a menor distância do barco até o ponto fixo P.

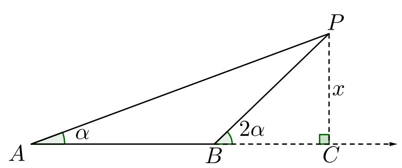
Resolução: Como 2α é ângulo externo[17] do triângulo APB, segue que

$$\alpha + A\hat{P}B = 2\alpha \Rightarrow A\hat{P}B = \alpha,$$

ou seja, o triângulo APB é isósceles de base AP, então

$$AB = PB = 2000 \text{ m}.$$

A menor distância entre o barco e o ponto P será em um ponto C tal que o segmento PC fará um ângulo de $90°$ com a trajetória do barco, considere x sendo esta medida.



[17] Caso necessário, verifique o capítulo de Geometria Plana.

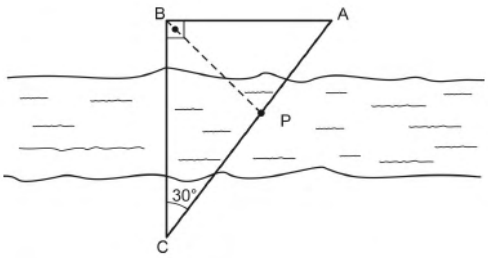
Então, aplicando a Lei dos Senos no triângulo BPC, temos

$$\frac{2000}{\operatorname{sen}(B\hat{C}P)} = \frac{x}{\operatorname{sen}(P\hat{B}C)} \Rightarrow x = \frac{2000\operatorname{sen}(2\alpha)}{\operatorname{sen}90^\circ},$$

como $\alpha = 30^\circ$, segue que a menor distância entre a trajetória do barco e o ponto P é de

$$x = \frac{2000\operatorname{sen}60^\circ}{1} = 1000\sqrt{3} \text{ m.}$$

Exercício resolvido 4 (EPCAR 2015 - Modificado) As cidades A, B e C situam-se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme a figura abaixo.



Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo em B e a bissetriz do ângulo reto corta AC no ponto P. Se $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ km, então determine $\overline{CP}$, em km.

Resolução: Observe o triângulo BPC, como BP é a bissetriz do ângulo reto B,

$$P\hat{B}C = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

pela soma dos ângulos internos do triângulo, segue que

$$P\hat{C}B + B\hat{P}C + P\hat{B}C = 180^\circ \Rightarrow B\hat{P}C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$

Deste modo, temos que o seno do ângulo $B\hat{P}C$ é dado por

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}105^\circ &= \operatorname{sen}(60^\circ + 45^\circ)\\ &= \operatorname{sen}60^\circ\cos45^\circ + \operatorname{sen}45^\circ\cos60^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Segue da Lei dos Senos que

$$\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}(B\hat{P}C)} = \frac{\overline{CP}}{\operatorname{sen}(C\hat{B}P)} \Rightarrow \overline{CP} = \frac{\operatorname{sen}(C\hat{B}P)\cdot\overline{BC}}{\operatorname{sen}(B\hat{P}C)},$$

onde

$$\overline{CP} = \frac{6\sqrt{3}\operatorname{sen}45^\circ}{\operatorname{sen}105^\circ} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}},$$

racionalizando, temos

$$\begin{aligned}\overline{CP} &= \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\\ &= \frac{12(6-\sqrt{12})}{6-2}\\ &= 3(6-2\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Logo, a medida do segmento $\overline{CP}$ em km é de

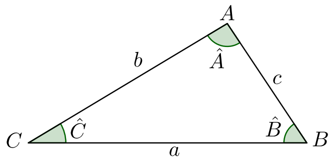
$$\overline{CP} = 6(3-\sqrt{3}) \text{ km.}$$

4.3 Área do triângulo

Nesta seção, iremos apresentar algumas fórmulas para o cálculo da área do triângulo. Sabemos que a fórmula de área usual[18] é dada por

$$S = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$$

e através das relações trigonométricas, podemos obter fórmulas que não necessitam do conhecimento da altura do triângulo. Para isso, considere ABC como sendo um triângulo qualquer.



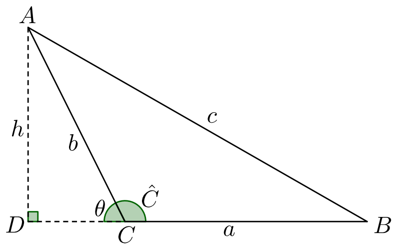
Além da fórmula de área usual já enunciada anteriormente, podemos utilizar também as seguintes fórmulas para calcular a área do triângulo:

$$S = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C};$$
$$S = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\hat{B};$$
$$S = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\hat{A}.$$

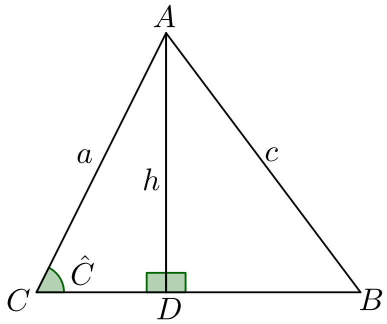
Vejamos como chegar nesta fórmula para o primeiro caso, os demais seguem de maneira análoga. Para isso, devemos considerar se o triângulo é retângulo, acutângulo ou obtusângulo:

a) Para o caso do triângulo retângulo, a altura h é igual ao lado b, então $h = b\operatorname{sen}\hat{C}$.

[18] Normalmente, utilizamos a letra A como sendo a área, porém, como A é comumente utilizado para vértice do triângulo, iremos nos referir a área com a letra S.

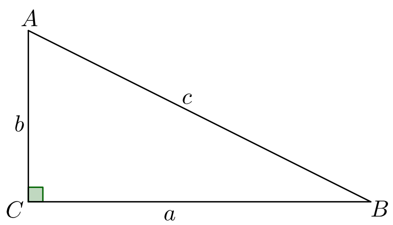


b) Para o triângulo acutângulo, podemos escrever a altura h referente a base CB como sendo $h = b \operatorname{sen} \hat{C}$.



c) Para o triângulo obtusângulo, note que $\theta + \hat{C} = 180°$, então $\theta = 180° - \hat{C}$. Utilizando as identidades trigonométricas, temos

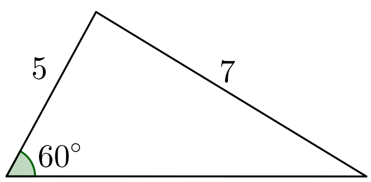
$$h = b \operatorname{sen} \theta = b \operatorname{sen}(180° - \hat{C}) = b \operatorname{sen} \hat{C}.$$



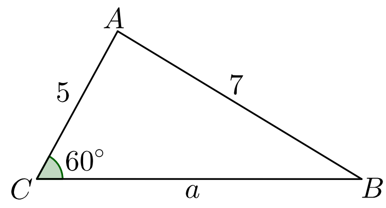
Deste modo, como a área de um triângulo qualquer é dada pela metade do produto entre a base e a altura, segue que

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \operatorname{sen} \hat{C}}{2}.$$

Exercício resolvido 5 (Mackenzie - Modificado) Vamos determinar a área do triângulo a seguir:



Resolução: Façamos as seguintes notações:



Deste modo, pela Lei dos Cossenos, temos que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$\begin{aligned} 7^2 &= a^2 + 5^2 - 10a \cos 60° \\ a^2 - 10a \cdot \frac{1}{2} + 25 - 49 &= 0 \\ a^2 - 5a - 24 &= 0, \end{aligned}$$

que é uma equação do segundo grau em a, cujas soluções são dadas por

$$\begin{aligned} a &= \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 24}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 11}{2}, \end{aligned}$$

assim, $a = 8$ ou $a = -3$. Note que $a = -3$ não pode ocorrer, pois a é medida de um segmento, então $a > 0$. Ou seja, devemos ter $a = 8$.

Logo, a área do triângulo ABC é dada por

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \hat{C} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 10\sqrt{3}. \end{aligned}$$

5 Resolução de triângulos

Resolver um triângulo se resume a encontrar o valor de todos os seus ângulos, lados e o valor de sua área. Para isso, utilizaremos como ferramentas os aspectos geométricos do triângulo e as fórmulas vistas anteriormente que já provamos serem válidas para um triângulo qualquer, a saber:

- Lei dos Senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R.$$

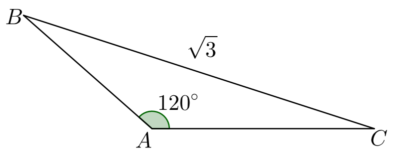
- Lei dos Cossenos:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}; \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}. \end{aligned}$$

- Área:

$$S = \frac{1}{2}bh;$$
$$S = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C};$$
$$S = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\hat{B};$$
$$S = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\hat{A}.$$

Exemplo 5.0.1 Considere o triângulo obtusângulo a seguir, onde $\hat{B} = \hat{C}$.



Como $\hat{B} = \hat{C}$, da soma dos ângulos internos do triângulo, temos que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - 120^\circ,$$

ou seja,

$$\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ.$$

Assim, pela Lei dos Senos, podemos escrever

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}}.$$

Como $\hat{A} = 120^\circ$, segue que

$$\operatorname{sen}(120^\circ) = \operatorname{sen}(2 \cdot 60^\circ) = 2\operatorname{sen}(60^\circ) \cdot \cos(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

logo,

$$b = \frac{a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

Uma vez que $\hat{B} = \hat{C}$, o triângulo ABC é isósceles de base BC, assim $b = c = 1$. Por fim, temos que a área do triângulo é dada por:

$$S = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Note que até aqui utilizamos do desenho do triângulo para basear nossos estudos. Porém, quando nos falta algumas informações, são necessárias análises adicionais do problema, como veremos no exemplo a seguir:

Exemplo 5.0.2 Vamos resolver o triângulo ABC, sabendo que $\hat{A} = 15^\circ$, $a = 2$ e $b = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. Primeiro, precisamos determinar $\operatorname{sen}15^\circ$, então

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) &= \operatorname{sen}45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen}30^\circ \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Desse modo, segue da Lei dos Senos que

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{b} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a},$$

ou ainda

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{2} = \frac{6-2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como sabemos, para que $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{1}{2}$, temos duas possibilidades para o ângulo $\hat{B}$, sendo elas $\hat{B} = 150^\circ$ ou $\hat{B} = 30^\circ$. Note que ambos os valores são plausíveis, uma vez que $\hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$. Como não sabemos se o triângulo é obtusângulo ou acutângulo, devemos analisar os dois casos:

• Considere $\hat{B} = 150^\circ$. Uma vez que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, temos que $\hat{C} = 15^\circ$, então o triângulo ABC será isósceles e $a = c = 2$. Logo,

$$S = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{1}{2}2 \cdot 2\operatorname{sen}150^\circ = 1.$$

• Suponha que $\hat{B} = 30^\circ$. Deste modo, $\hat{C} = 135^\circ$ e pela Lei dos Senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}.$$

Pelas fórmulas de redução ao primeiro quadrante,

$$\operatorname{sen}135^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 135^\circ) = \operatorname{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

então

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{8\sqrt{3}+8}{6-2} \\ &= 2\sqrt{3}+2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\hat{C} \\ &= \frac{1}{2}2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\,\text{sen}\,135^\circ \\ &= (\sqrt{6}+\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+2}{2} \\ &= \sqrt{3}+1. \end{aligned}$$

6 Funções trigonométricas

As funções trigonométricas são de extrema importância para várias áreas da Matemática e estão presentes em fenômenos que envolvem periodicidade. A ideia intuitiva dessa periodicidade surge quando trabalhamos com ângulos maiores que 2π (ou $360°$), pois podemos reduzi-los a um valor entre 0 e 2π cujo valor da relação trigonométrica será sempre o mesmo.

A partir de agora, iremos tratar as relações trigonométricas como funções. Além disso, consideraremos somente ângulos em radianos, pois como dito anteriormente, podemos associá-los ao número real π.

Obs. Vale ressaltar que todos os resultados vistos anteriormente, principalmente as identidades trigonométricas, continuam válidos para o caso das funções.

Antes de definirmos estas funções, vale ressaltar que uma função f é dita periódica quando existe $p > 0$ tal que

$$f(x+p) = f(x),$$

ou seja, após um certo "tempo", a função volta a repetir os valores da imagem, assim como os ponteiros de um relógio.

6.1 Função seno

Definição 6.1 Definimos a função seno como sendo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \text{sen}(x). \end{aligned}$$

Pelos resultados das seções anteriores, em especial na Seção 2, temos os seguintes resultados:

- Para a função $f(x) = \text{sen}\,x$, temos que $f(x) = 0$ sempre que x é um múltiplo inteiro de π, isto é

$$f(x) = \text{sen}\,x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

- Do mesmo modo, os valores máximos dessa função serão atingidos quando $f(x) = 1$, ou seja,

$$f(x) = \text{sen}\,x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

- Para os valores mínimos, quando $f(x) = -1$, temos

$$f(x) = \text{sen}\,x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

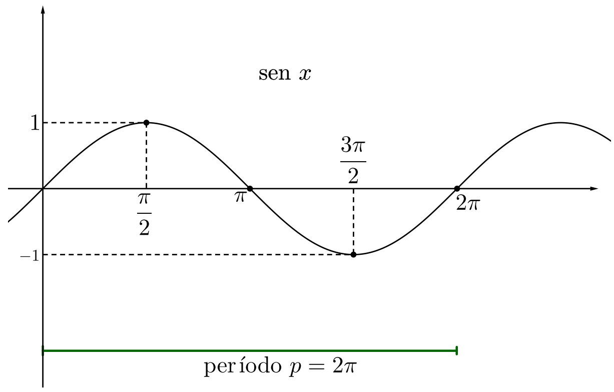


Figura 6.1.1: Gráfico da função seno

Outro fato importante da função seno é a sua imagem. Como os valores de seno e cosseno são reais, através da relação

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

obtemos que a imagem da função $f(x) = \text{sen}\,x$ está contida no intervalo $[-1, 1]$, ou ainda

$$-1 \le \text{sen}\,x \le 1.$$

Obs. A partir disso, vale ressaltar que para funções do tipo $b\,\text{sen}\,x$, sua imagem será dada multiplicando esta constante nos limites do intervalo $[-1,1]$[19]. Ou seja, a imagem para $f(x) = b\,\text{sen}\,x$ é o intervalo $[-b, b]$.

Note que a função seno definida acima possui periodicidade igual a 2π, ou seja, os valores para $f(x)$ se repetem para $f(x+2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. De fato, sabemos que

$$\text{sen}(x+2k\pi) = \text{sen}\,x \cdot \cos(2k\pi) + \text{sen}(2k\pi) \cdot \cos x.$$

Temos que $\cos(2k\pi) = 1$ e $\text{sen}(2k\pi) = 0$, pois $2k\pi$ é equivalente a 2π na circunferência trigonométrica. Assim,

$$\text{sen}(x+2k\pi) = \text{sen}\,x.$$

Exemplo 6.1.1 Mostraremos que $f(x) = \text{sen}\,x$ e $g(x) = 2\,\text{sen}\,x$ possuem o mesmo período. Com efeito, vimos que $f(x)$ possui período 2π, do mesmo modo, temos

$$\begin{aligned} 2\,\text{sen}(x+2\pi) &= 2(\text{sen}\,x \cdot \cos(2\pi) + \text{sen}(2\pi) \cdot \cos x) \\ &= 2\,\text{sen}\,x. \end{aligned}$$

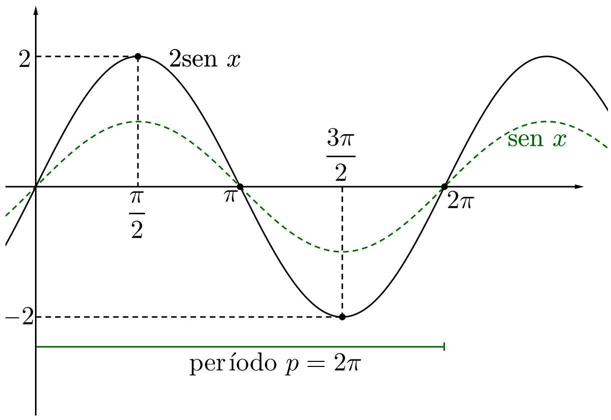
[19] Caso necessário, verifique o capítulo de Conjuntos Numéricos para relembrar definições e propriedades de intervalos.

Logo, o período da função $g(x) = 2\,\text{sen}\,x$ também é 2π. Sabemos também que $g(x) = 2f(x)$, então

$$-1 \le f(x) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le g(x) \le 2,$$

ou seja, o valor máximo assumido por g é 2 e o valor mínimo é -2. Além disso, f e g são iguais a 0 para os mesmos valores de x.

Com estas informações, podemos construir o gráfico da função g:



Obs. Quando trabalhamos com funções como seno e cosseno (que definiremos mais adiante), é comum aparecer o confeito de amplitude da função. Neste caso, lembre-se que este valor é referente a distância entre o ponto máximo ou mínimo da função e o eixo x.

Exemplo 6.1.2 Iremos determinar o período, imagem e gráfico da função $f(x) = \text{sen}(2x)$. Note que para $g(t) = \text{sen}\,t$, temos período igual a 2π, então

$$\text{sen}(t) = \text{sen}(t + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Fazendo $t = 2x$, temos que

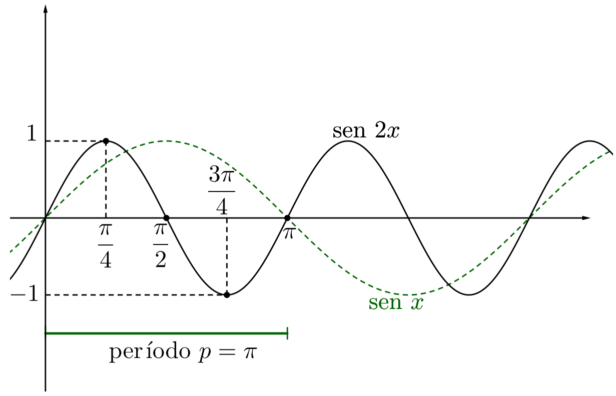
$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen}(2x) \\ &= \text{sen}(2x + 2k\pi) \\ &= \text{sen}(2[x + k\pi]) \\ &= f(x + k\pi), \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x) = f(x + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

então a função f possui período igual a π.

Como neste caso não temos nenhuma constante multiplicando o seno, então a amplitude de $\text{sen}(2x)$ será a mesma que a de $\text{sen}\,x$, ou seja, $\text{sen}(2x) \in [-1, 1]$. Então, a única diferença do gráfico de $f(x) = \text{sen}(2x)$ para o gráfico da função $\text{sen}\,x$ é o período, como veremos no seguinte gráfico:



Obs. Como visto no Exemplo 6.1.1, ao multiplicarmos uma constante na função seno, alteramos a sua imagem, porém, nada ocorre com o seu período.

Obs. Pelo Exemplo 6.1.2, vemos que ao multiplicar uma constante no argumento[20] da função, o período se altera, isto é, a frequência com a qual os valores da função se repetem é alterada.

De maneira geral, o período de uma função $\text{sen}(ax)$, onde a é um número real positivo, é dado por

$$p = \frac{2\pi}{a}$$

ou seja, pela definição de periodicidade

$$\text{sen}\left(ax + \frac{2\pi}{a}\right) = \text{sen}(ax).$$

Exemplo 6.1.3 Vamos determinar o período, imagem e gráfico para a função $f(x) = -2\,\text{sen}(3x)$. Para o período, temos que

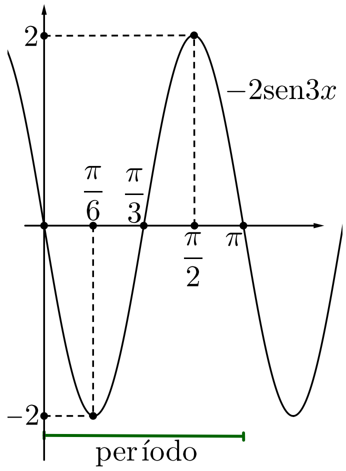
$$p = \frac{2\pi}{a},\ \text{com } a = 3 \Rightarrow p = \frac{2\pi}{3}.$$

Já para a imagem, sabemos que

$$\begin{aligned} -1 \le \text{sen}(3x) \le 1 &\Rightarrow 2 \ge -2\,\text{sen}(3x) \ge -2 \\ &\Rightarrow -2 \le -2\,\text{sen}(3x) \le 2, \end{aligned}$$

ou seja, a imagem da função f é o intervalo $[-2, 2]$. Vejamos a seguir o gráfico dessa função:

[20]Argumento se refere ao valor que estamos aplicando o seno, por exemplo x, π, $(x + 2k\pi)$, etc.



6.2 Função cosseno

Definição 6.2 Definimos a função cosseno como sendo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \cos(x). \end{aligned}$$

Do mesmo modo que a função seno, para a função cosseno podemos concluir que:

- Para $f(x) = \cos x$, temos

$$f(x + 2k\pi) = f(x);$$

- O período da função $f(x) = \cos(ax)$, com $a \neq 0$, é dado por

$$p = \frac{2\pi}{a};$$

- A imagem da função $f(x) = \cos x$ está contida no intervalo $[-1, 1]$;

- A função cosseno atinge seus valores máximos nos pontos do tipo

$$x = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

e atinge seus valores mínimos em

$$x = \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z};$$

- A função cosseno é igual a zero nos pontos do tipo

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Vejamos então como é o gráfico da função cosseno.

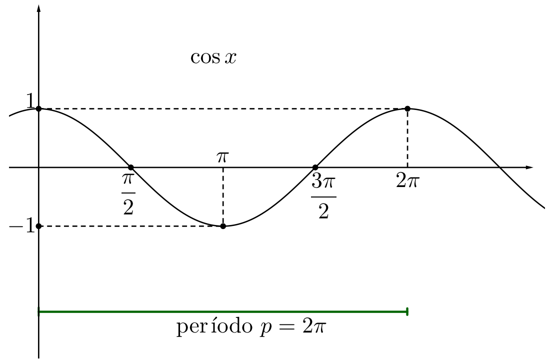


Figura 6.2.1: Gráfico da função cosseno

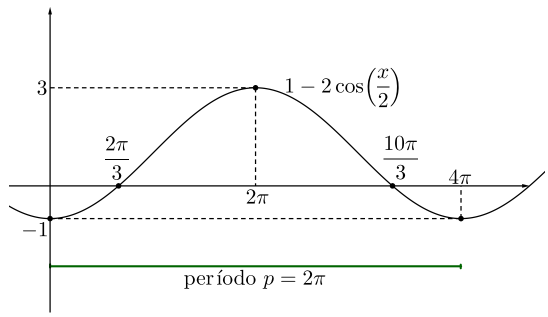
Exemplo 6.2.1 Considere a função $f(x) = 1 - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Podemos interpretar a função $f(x)$ como sendo a soma de duas funções, $h(x) = 1$ e $g(x) = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Como $h(x)$ é constante, a periodicidade de $f(x)$ será a mesma da função $g(x)$, ou seja,

$$p = \frac{2\pi}{a}, \text{ com } a = \frac{1}{2} \Rightarrow p = 4\pi.$$

Para a imagem, temos que

$$\begin{aligned} -1 \le \cos\left(\frac{x}{2}\right) \le 1 \Rightarrow 2 \ge -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \ge -2 \\ \Rightarrow -2 \le -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \le 2 \\ \Rightarrow -1 \le 1 - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \le 3, \end{aligned}$$

ou seja, a imagem da função f é o intervalo $[-1, 3]$. Vejamos a seguir o gráfico desta função.



6.3 Função tangente

Diferente das funções seno e cosseno que possuem valores para qualquer $x \in \mathbb{R}$, sabemos que a tangente é dada por

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

desse modo não podemos considerar no domínio da função tangente os pontos onde o cosseno é igual a zero, ou seja, nos pontos do tipo

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Partindo deste princípio, definimos a função tangente da seguinte forma:

Definição 6.3 A função tangente é dada por

$$f : \text{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \text{tg}(x)$$

onde $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Diferentemente do caso do seno e cosseno, os valores para a tangente de um ângulo são ilimitados superiormente e inferiormente, ou seja, os valores da tangente são arbitrariamente grandes ou pequenos.

Uma forma de se observar este fato é pela definição da função tangente, uma vez que o cosseno do ângulo está no denominador da fração a medida que o cosseno se aproxima de zero o valor da tangente aumenta.

Vejamos como é o gráfico da função tangente.

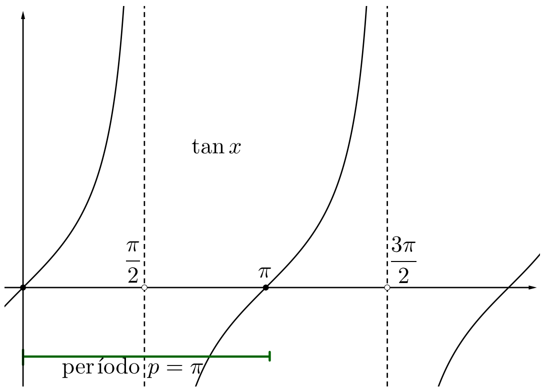


Figura 6.3.1: Gráfico da função tangente

Obs. As linhas tracejadas no gráfico da Figura 6.3.1 são as assíntotas da função tangente, isto é, são retas que ficam tão próximas quanto necessário do gráfico da função, porém esse gráfico nunca intercepta essa reta.

Obs. Note que as assíntotas da função tangente passam pelos pontos onde o cosseno é igual a zero, ressaltando o fato de que a função tangente não está definida nesses pontos.

Outro fato importante é a periodicidade da função tangente, que neste caso, é igual a π, isto é

$$\text{tg}(x+\pi) = \text{tg}(x),$$

assim, para determinar o período da função $f(x) = \text{tg}(ax)$, basta utilizar a fórmula

$$p = \frac{\pi}{a}.$$

Exemplo 6.3.1 Vamos determinar o período, domínio e o gráfico da função trigonométrica $f(x) = -\frac{2}{3}\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Sabemos que o período da função $f(x)$ depende somente do argumento da função, isto é, depende somente de $\frac{x}{2}$. Deste modo, o período é dado por

$$p = \frac{\pi}{a},\ \text{com } a = \frac{1}{2} \Rightarrow p = 2\pi.$$

A fim de determinar o domínio da função, precisamos saber os pontos onde $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ não está definida, ou seja, os pontos onde $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$. Sendo assim, sabemos que $\cos t = 0$ quando

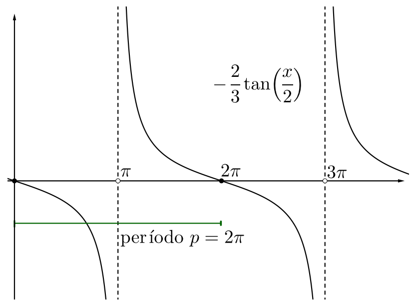
$$t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Fazendo $t = \frac{x}{2}$, temos que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ quando

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, o domínio será $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Vejamos agora o gráfico desta função.



Com as devidas adaptações, também podemos definir as funções secante, cossecante e cotangente. Essas adaptações se devem ao fato de que, assim como a tangente, estas funções são escritas como frações, então, seu domínio será toda a reta, menos os pontos onde o denominador é igual a zero.

- Para a função secante

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

o domínio deve ser $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

- Para a função cossecante

$$g(x) = \text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x},$$

o domínio será $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

- Para a função cotangente, temos

$$h(x) = \text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x},$$

cujo domínio será $\text{Dom}(h) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

6.4 Paridade das funções trigonométricas

A noção de função par e ímpar é uma importante propriedade das funções trigonométricas. Imagine que para

$n \in \mathbb{N}$ queremos determinar o sinal de $(-1)^n$, sabemos que:

• Se n for um número par, ele será um múltiplo de 2 então $n = 2p$, com $p \in \mathbb{N}$ e para este número, temos $(-1)^{2p} = 1$;

• Se n é ímpar, então $n = 2q + 1$, onde $q \in \mathbb{N}$, desse modo $(-1)^{2q+1} = (-1)^{2q}(-1) = -1$.

Partindo desse princípio, temos a seguinte definição:

Definição 6.4 Considere a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}$.

- Diremos que f é uma função par se, para todo $x \in X$ tivermos,
$$f(-x) = f(x).$$
- Diremos que f é uma função ímpar se, para todo $x \in X$, tivermos
$$f(-x) = -f(x).$$

Embora a demonstração formal da paridade das funções trigonométricas seja mais complexa, podemos observar este resultado geometricamente[21]. Considerando o círculo trigonométrico, sabemos que o seno e cosseno guardam a seguinte relação nos quadrantes:

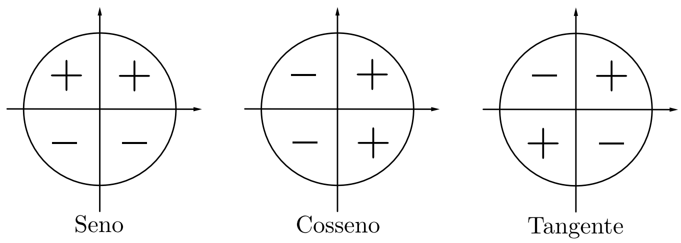
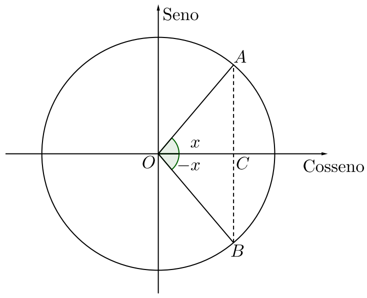


Figura 6.4.1: Sinal das relações trigonométricas por quadrante

Ou seja, considerando um ângulo $0 < x < 90°$, em sentido anti-horário os valores de seno, cosseno e tangente serão positivos. Porém, considerando o mesmo ângulo em sentido horário, ou seja $-x$, temos que o seno e a tangente serão negativos, enquanto o cosseno será positivo. A mesma análise pode ser aplicada para quaisquer ângulos.

Em outras palavras, considere o ângulo x na circunferência trigonométrica a seguir:



Por semelhança de triângulos, teremos que

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

e

$$\cos(-x) = \cos x$$

Consequentemente, como a função tangente é o quociente entre seno e cosseno, ela também será uma função ímpar, pois

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

Obs. Com as devidas adaptações, obtemos que:
- $f(x) = \sec x$ é uma função par;
- $g(x) = \operatorname{cossec} x$ é uma função ímpar;
- $h(x) = \operatorname{cotg} x$ é uma função ímpar.

7 Equações trigonométricas

Um dos principais focos do estudo das funções trigonométricas é descobrir os pontos nos quais uma equação trigonométrica assume um determinado valor, em especial quando uma função atinge seus valores máximos ou mínimos. Para isso, utilizaremos os seguintes conceitos:

• As funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ estão limitadas no intervalo fechado $[-1, 1]$;

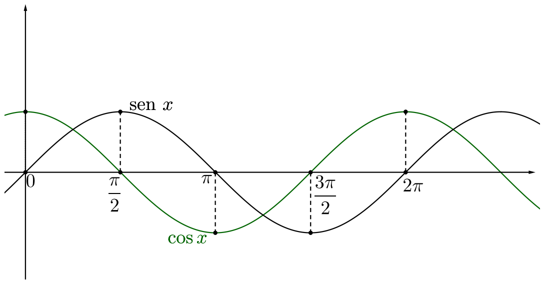
• As funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ possuem periodicidade $p = 2\pi$.

• Para os valores do tipo $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a função $\operatorname{sen} x$ assume seu valor máximo quando k é par e mínimo quando k é ímpar;

• De maneira análoga, nos pontos $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a função $\cos x$ assumirá seu valor máximo quando k for um número par seu valor mínimo quando k for ímpar;

• Quando $\operatorname{sen} x$ assume seu valor máximo ou mínimo, $\cos x$ é igual a zero. Da mesma forma, quando cosseno assume seus valores máximos ou mínimos, o seno será igual a zero;

[21]Na matemática, um resultado ser provado de maneira geométrica (isto é, analisado graficamente) não garante que ele funcione sempre, para isso, é necessária uma prova utilizando argumentos teóricos e muita vezes abstratos.



Exemplo 7.0.1 Vamos determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como o seno assume os mesmos valores no primeiro e no segundo quadrante, devemos avaliar duas possibilidades. Se x estiver no primeiro quadrante, então sabemos que para $x = \frac{\pi}{3}$ temos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

como a função seno possui periodicidade de 2π, esses valores sempre irão se repetir para

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, se x está no segundo quadrante, então pelas identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ou seja, basta tomarmos $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, as possíveis soluções da equação formam o conjunto

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exemplo 7.0.2 Iremos encontrar a solução da equação $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$. Para isso, faça $y = \operatorname{sen} x$. Deste modo, temos a equação do segundo grau

$$2y^2 + y - 1 = 0,$$

cujas soluções são dadas por

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

ou seja, as soluções são $y_1 = \frac{1}{2}$ ou $y_2 = -1$. Logo, a fim de resolver esta equação, devemos encontrar os valores de x para os quais $\operatorname{sen} x = -1$ ou $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

- Para que $\operatorname{sen} x = -1$, devemos ter $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.
- Para $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, assim como no exemplo anterior temos duas possibilidades, caso x esteja no primeiro quadrante, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, caso x esteja no segundo quadrante, então

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6},$$

assim, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Portanto, o conjunto formado pelas soluções desta equação é dado por

$$S = \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Uma vez que as funções seno e cosseno são limitadas, equações do tipo $\operatorname{sen} x = 2$ não fazem sentido com x real, ou seja, caso não tenhamos restrição no contradomínio, estas funções não são sobrejetoras[22].

Como consequência, as funções seno e cosseno definidas com domínio e contradomínio $\mathbb{R}$, não possuem inversa. Vale ressaltar que caso façamos as devidas restrições, podemos sim definir as funções trigonométricas inversas, denotadas por $\operatorname{arcsen} x$ (lê-se arco seno de x) e $\arccos x$ (lê-se arco cosseno de x), essas funções inversas levam um valor y real em um "ângulo"x correspondente.

Exercício resolvido 1 (UNICAMP 2014 - Modificado) Seja x real tal que $\cos x = \operatorname{tg} x$. Qual é o valor de $\operatorname{sen} x$?

Resolução: Note que

$$\cos x = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x = \operatorname{sen} x.$$

Segue da Relação Fundamental de Trigonometria que

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 - \operatorname{sen}^2 x,$$

sendo assim, temos

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0.$$

Faça $y = \operatorname{sen} x$, assim, queremos determinar y tal que $y^2 + y - 1 = 0$, então

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4}}{2} \Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, temos duas possibilidades, $\operatorname{sen} x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\operatorname{sen} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Porém, $\operatorname{sen} x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ não faz sen-

[22]Caso necessário, verifique o capítulo de Funções.

tido, pois

$$\begin{aligned}1<5<9 &\Rightarrow \sqrt{1}<\sqrt{5}<\sqrt{9}\\ &\Rightarrow -3<-\sqrt{5}<-1\\ &\Rightarrow -4<-1-\sqrt{5}<-2\\ &\Rightarrow -2<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<-1,\end{aligned}$$

isto é, essa razão não está no intervalo $[-1,1]$ e, portanto, não existe x real tal que $\operatorname{sen} x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Note que para $\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, temos

$$\begin{aligned}1<\sqrt{5}<3 &\Rightarrow \frac{1-1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{3-1}{2}\\ &\Rightarrow 0<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1.\end{aligned}$$

Portanto, devemos ter $\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Exercício resolvido 2 (FUVEST - Modificado) Vamos determinar o menor valor de $\frac{1}{3-\cos x}$ com x real.

Resolução: Lembre que dados $a,b\in\mathbb{R}^*$, temos

$$a\le b\Rightarrow a^{-1}\ge b^{-1}\Rightarrow \frac{1}{b}\le\frac{1}{a}.$$

Desse modo, podemos escrever

$$\begin{aligned}-1\le-\cos x\le 1 &\Rightarrow 3-1\le 3-\cos x\le 3+1\\ &\Rightarrow 2\le 3-\cos x\le 4\\ &\Rightarrow \frac{1}{4}\le\frac{1}{3-\cos x}\le\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ou seja, o menor valor de $\frac{1}{3-\cos x}$ é $\frac{1}{4}$.

Exercício resolvido 3 (ENEM 2015 - Modificado) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função

$$P(x)=8+5\cos\left(\frac{\pi x-\pi}{6}\right),$$

onde x representa o mês do ano, sendo $x=1$ associado ao mês de janeiro, $x=2$ ao mês de fevereiro e assim sucessivamente, até $x=12$ associado ao mês de dezembro.

disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Vamos encontrar o mês de produção máxima deste produto.

Resolução: Como dito no texto, se a produção de um produto for máxima, então seu preço será mínimo. Sabemos que a função cosseno está limitada no intervalo $[-1,1]$, assim, queremos encontrar o valor de x para o qual $\cos\left(\frac{\pi(x-1)}{6}\right)=-1$.

Temos que $\cos a=-1$ quando $a=(2k+1)\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$. Desse modo, queremos que

$$\begin{aligned}\frac{\pi(x-1)}{6}=(2k+1)\pi &\Rightarrow x-1=6(2k+1)\\ &\Rightarrow x=12k+7.\end{aligned}$$

Como x representa os meses do ano, temos que x é um número natural entre 1 e 12. Assim, para que a equação acima faça sentido, devemos ter $k=0$ e, consequentemente, $x=7$. Portanto, a produção será máxima no mês de julho.

Exercício resolvido 4 (FUVEST 2000 - Modificado) O dobro do seno de um ângulo θ, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Vamos determinar o valor do seu cosseno.

Resolução: Como $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, então $\theta\ne\frac{\pi}{2}$, ou seja, faz sentido calcular a tangente deste ângulo que é dada por $\operatorname{tg}\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$. Assim, temos

$$2\operatorname{sen}\theta=3\operatorname{tg}^2\theta=3\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$2\cos^2\theta=3\operatorname{sen}\theta.$$

Utilizando que $\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$, temos $\cos^2\theta=1-\operatorname{sen}^2\theta$, então

$$2[1-\operatorname{sen}^2\theta]=3\operatorname{sen}\theta\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2\theta+3\operatorname{sen}\theta-2=0.$$

Fazendo $x=\operatorname{sen}\theta$, temos a equação do segundo grau dada por $2x^2+3x-2=0$, cuja solução é

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4},$$

onde as soluções possíveis são

$$x_1=-\frac{8}{4}=-2\quad\text{e}\quad x_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Porém, a solução $x_1=\operatorname{sen}\theta=-2$ não faz sentido, pois por definição $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$, condição que é satisfeita pela solução $x_2 = \frac{1}{2}$. Então, $\operatorname{sen}\theta = x_2 = \frac{1}{2}$ e assim, $\cos\theta$ é dado por

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= 1 - \operatorname{sen}^2\theta \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Assim, temos $\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$. Novamente existem duas possibilidades,

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, sabemos que θ está no primeiro quadrante, então $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercício resolvido 5 (Mack - Modificado) $f(x) = \operatorname{sen}x + \cos x$ e $g(x) = 3\operatorname{sen}x\cos x$. Relativamente às funções anteriores, de domínio $\mathbb{R}$, fazem-se as afirmações:

I) O período de $f(x)$ é 2π;
II) O maior valor que $g(x)$ pode assumir é $1,5$;
III) O conjunto imagem de $f(x)$ está contido no conjunto imagem de $g(x)$

Vamos determinar quais destas afirmações são verdadeiras.

Resolução: Para a primeira afirmação, basta confirmar se $f(x) = f(x+2\pi)$, neste caso, note que

$$\begin{aligned}f(x+2\pi) &= \operatorname{sen}(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) \\ &= [\operatorname{sen}x\cos 2\pi + \operatorname{sen}2\pi\cos x] \\ &\quad + [\cos x\cos 2\pi - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}2\pi] \\ &= [\operatorname{sen}x + 0] + [\cos x - 0] \\ &= \operatorname{sen}x + \cos x \\ &= f(x),\end{aligned}$$

ou seja, a primeira afirmação é verdadeira.

Note que

$$g(x) = \frac{3}{2}(2\operatorname{sen}x\cos x)$$

e pelas identidades trigonométricas vem que $g(x) = \frac{3}{2}\operatorname{sen}2x$. Deste modo, temos que

$$-1 \leq \operatorname{sen}2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}\operatorname{sen}2x \leq \frac{3}{2},$$

como $\frac{3}{2} = 1,5$, temos que o maior valor que $g(x)$ pode assumir é de fato $1,5$.

Por fim, note que

$$\begin{aligned}(f(x))^2 &= \cos^2 x + 2\cos x\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2 x \\ &= (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen}(2x) \\ &= 1 + \operatorname{sen}2x\end{aligned}$$

e como $-1 \leq \operatorname{sen}2x \leq 1$, temos que

$$0 \leq 1 + 2\operatorname{sen}2x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (f(x))^2 \leq 2,$$

então $-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$. Como já vimos que $g(x) \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e

$$\frac{9}{4} = \frac{1}{4} + 2 > 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} > \sqrt{2},$$

segue que a imagem de $f(x)$ está contida na imagem de $g(x)$.

Portanto, todas as afirmações estão corretas.

8 Exercícios propostos

Exercício 9.1 (UFAM) Se um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem $2a$ e $4a$, respectivamente, então a tangente do ângulo oposto ao menor lado é:

(a) $2\sqrt{3}$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(d) $\frac{\sqrt{20}}{20}$

(e) $3\sqrt{3}$

Exercício 9.2 (URCA 2016 - Modificado) Se $\operatorname{tg}x = 2$, então é correto afirmar que:

(a) $\cos x = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}x = 1$.

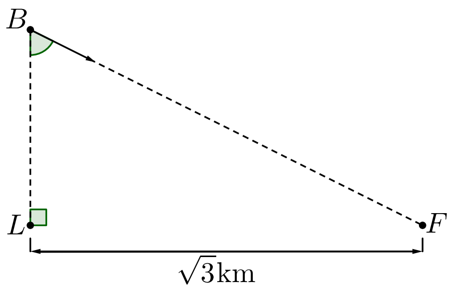
(b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}x = \sqrt{2}$.

(c) $\operatorname{sen}x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $\operatorname{sen}x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(d) $\cos x = \frac{1}{5}$ ou $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(e) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}x = \sqrt{3}$.

Exercício 9.3 (ENCCEJA 2019 - Modificado) Uma embarcação se encontra no ponto B, situado a 1 km da costa, de frente para o ponto L. O destino dessa embarcação é o farol, localizado no ponto F, distante $\sqrt{3}$ km do ponto L. Para efeito de orientação, o comandante dessa embarcação precisa calcular a medida do ângulo $L\hat{B}F$.



O ângulo $L\hat{B}F$ mede, em grau,

(a) 30
(b) 45
(c) 60
(d) 90

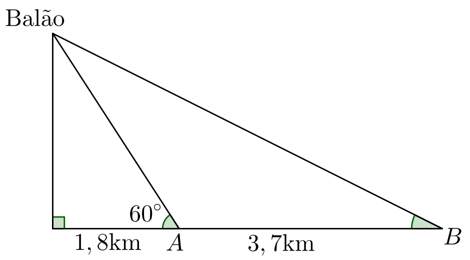
Exercício 9.4 Determine os valores do seno, cosseno e tangente para o ângulo de $45°$. (Dica: basta considerar o triângulo isósceles de cateto l e prosseguir da mesma forma como feito para $30°$, traçando a mediatriz e calculando a altura h.)

Exercício 9.5 (UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de $30°$ (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

(a) 200
(b) 300
(c) 350
(d) 450
(e) 500

Exercício 9.6 (ENEM 2010 - Modificado) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a mediação do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de mediação.

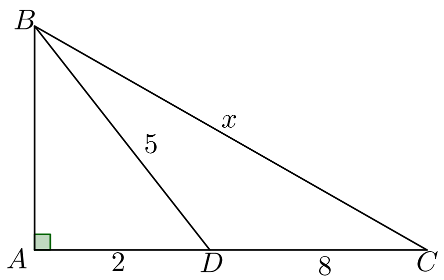
Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecimento, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a $1,8$ km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de $60°$; a outra estava a $5,5$ km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de $30°$.
Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão? Considere $\sqrt{3} = 1,7$.

(a) $1,8$ km
(b) $1,9$ km
(c) $3,1$ km
(d) $3,7$ km
(e) $5,5$ km

Exercício 9.7 (PUC RS) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em $\hat{A}$. Sabendo-se que $AD = 2$, $CD = 8$ e $BD = 5$, a medida do lado BC é



(a) 11
(b) 12
(c) 13
(d) 14

Exercício 9.8 (FUVEST) Se $x - y = 60°$, então o valor de $(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)^2 + (\cos x + \cos y)^2$ é igual a:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4

Exercício 9.9 Encontre o valor para as seguintes relações trigonométricas:

(a) $\operatorname{sen} 15°$.
(b) $\cos 15°$.
(c) $\operatorname{tg} 15°$.
(d) $\operatorname{sen} 75°$.

Exercício 9.10 (FUVEST) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(a) $\operatorname{sen}(210°) < \cos(210°) < \operatorname{tg}(210°)$
(b) $\cos(210°) < \operatorname{sen}(210°) < \operatorname{tg}(210°)$
(c) $\operatorname{tg}(210°) < \operatorname{sen}(210°) < \cos(210°)$
(d) $\operatorname{tg}(210°) < \cos(210°) < \operatorname{sen}(210°)$

(e) $\operatorname{sen}(210°) < \operatorname{tg}(210°) < \cos(210°)$

Exercício 9.11 (UNFENAS 2019) Sendo dados: $\operatorname{sen}(x) = 0,8$ e $\cos x = 0,6$, qual é o valor do $\operatorname{sen}(2x)$?

(a) $0,96$.
(b) $0,90$.
(c) $0,80$.
(d) $0,70$.
(e) $0,60$.

Exercício 9.12 (FUVEST 2016) No quadrilátero plano $ABCD$, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são retos, $AB = AD = 1$, $BC = CD = 2$ e BD é uma diagonal. O cosseno do ângulo $B\hat{C}D$ vale:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$
(b) $\dfrac{2}{5}$
(c) $\dfrac{3}{5}$
(d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$
(e) $\dfrac{4}{5}$

Exercício 9.13 (UNIMAR - Modificado) O lado c de um triângulo ABC no qual $a = 20$, $B = 45°$ e $C = 30°$ é:

(a) $c = \dfrac{40\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$
(b) $c = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{40\sqrt{2}}$
(c) $c = \dfrac{40}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$
(d) $c = \dfrac{20\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$
(e) $c = \dfrac{20\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

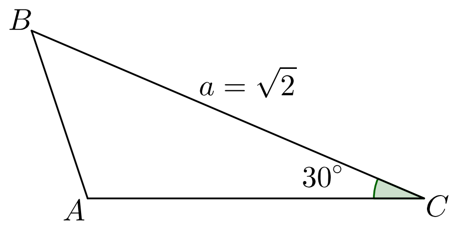
Exercício 9.14 (UNICENTRO 2016) Na figura, o valor de x, em u.c., é

(a) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$
(b) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$
(c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
(d) $\sqrt[3]{3}$.

Exercício 9.15 (EEAR 2014) Ao simplificar a expressão $(1+\cos x)(1-\cos x)$, tem-se

(a) 2
(b) $\operatorname{sen}^2 x$
(c) $\cos^2 x$
(d) $2+\cos^2 x$
(e) 1

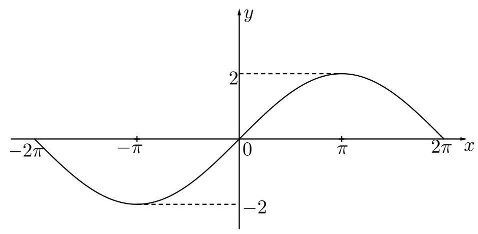
Exercício 9.16 Considerando o triângulo a seguir e sabendo que $\hat{C} = \dfrac{3}{2}\cdot\hat{B}$, resolva o triângulo ABC.



Exercício 9.17 Determine o período das funções abaixo.

(a) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$
(b) $f(x) = \cos^2(2x) - sen^2(2x)$

Exercício 9.18 (PUC SP)



A figura acima é parte do gráfico da função:

(a) $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$
(b) $f(x) = 2\operatorname{sen}(2x)$
(c) $f(x) = 1+\operatorname{sen}(2x)$
(d) $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$
(e) $f(x) = 2\cos(2x)$

Exercício 9.19 (UNESPAR 2016) A respeito das funções trigonométricas, analise as seguintes afirmações:

I. $f(x) = \cos(x+\pi)$ é equivalente à função $g(x) = -\cos x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
II. $\cos x$ é uma função par.
III. $\operatorname{sen} x$ é uma função ímpar.
IV. $f(x) = \operatorname{sen}(x+\pi)$ é equivalente à função $g(x) = -\operatorname{sen} x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Todas as afirmações são verdadeiras;
(b) Somente II é verdadeira;

(c) Apenas II e IV são verdadeiras;
(d) Somente II é falsa;
(e) Somente III é falsa.

Exercício 9.20 (PUC) Determine os valores de x, de modo que a expressão $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2x-1}{3}$ exista.

(a) $]-1,1[$

(b) $]-1,0]$

(c) $[-1,2]$

(d) $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

(e) $\left[-1,\frac{1}{3}\right[$

Exercício 9.21 (FUVEST) Se $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ e $\cos x = 2k-1$, então k varia no intervalo

(a) $]-1,0[$

(b) $[-1,0[$

(c) $]0,1[$

(d) $\left[\frac{1}{2},1\right]$

(e) $\left]0,\frac{1}{2}\right[$

Exercício 9.22 (FEI SP) A expressão

$$f(t) = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), 0 \leq t \leq 12$$

representa a variação da profundidade do trabalho de uma ferramenta de corte em relação ao tempo de operação. Em que instante essa profundidade é máxima?

(a) $t = 9$
(b) $t = 12$
(c) $t = 6$
(d) $t = 3$
(e) $t = 2$

Exercício 9.23 (UNESP 2001) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que o mesmo era periódico e podia ser aproximado pela seguinte função:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right),$$

onde t é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação ($t = 0$) e $P(t)$ é a profundidade da água (em metros) no instante t.

(a) Resolva a equação $\cos\left[\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right] = 1$, para $t > 0$.

(b) Determine em quantas horas após o início da sua observação ocorreu a primeira maré alta.

Exercício 9.24 (ENEM 2015) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função

$$T(h) = A + B\operatorname{sen}\left[\frac{\pi(h-12)}{12}\right],$$

sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritórios pediram que a temperatura máxima fosse $26°C$, a mínima $18°C$, e que durante a tarde temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

(a) $A = 18$ e $B = 8$
(b) $A = 22$ e $B = -4$
(c) $A = 22$ e $B = 4$
(d) $A = 26$ e $B = -8$
(e) $A = 26$ e $B = 8$

10 Geometria Plana

Geometria Plana

A palavra "geometria" originou-se dos termos gregos "geo" (terra) e "métron" (medir), a qual representa o estudo das propriedades relacionadas à posição, tamanho e forma de figuras no espaço. A geometria plana é a área da matemática que estuda as figuras planas, ou seja, bidimensionais. Também é conhecida como geometria euclidiana, em homenagem ao matemático grego Euclides de Alexandria, autor do livro *"Os Elementos"* escrito em torno de 300 a.C. Esse é um dos primeiros registros da geometria e foi essencial para a construção geométrica que conhecemos atualmente.

Existem inúmeras aplicações deste tópico no cotidiano, por exemplo, na construção civil o cálculo de áreas e perímetros são muito utilizados desde a elaboração da planta bidimensional de um projeto até o cálculo do orçamento da obra baseado na área que se deseja construir.

Imagine que um arquiteto foi contratado para fazer o projeto da área externa de uma residência, uma das exigências do proprietário é que a piscina no fundo de seu quintal, não fique sombreada pelo muro externo no período da tarde. Com os conteúdos desenvolvidos nesse capítulo você conseguirá entender matematicamente problemas como este e resolvê-los.

1 Noções primitivas

Por serem conceitos elementares, as noções primitivas são assumidas sem definição formal. Vamos introduzir os conceitos primitivos da Geometria Plana, os quais são: ponto, reta e plano.

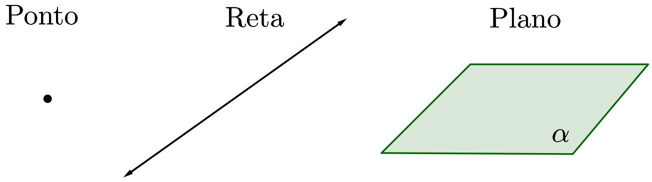


Figura 1.0.1: Noções Primitivas

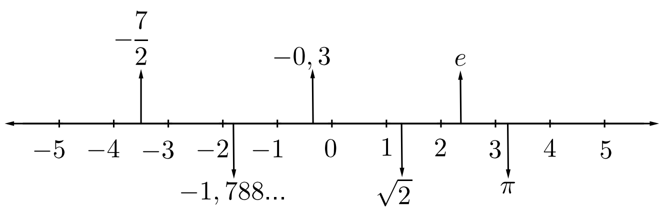
1.1 Ponto

O ponto é a base da geometria, pois as figuras geométricas são formadas a partir de um conjunto de pontos. Eles são utilizados para representar localizações no espaço. Entretanto, o ponto não possui definição, forma e dimensão.

Ponto

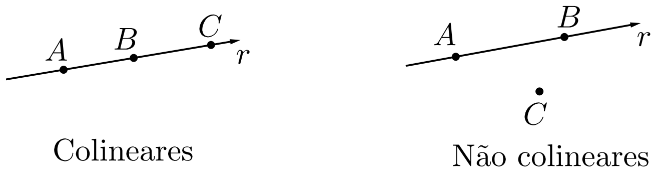
1.2 Reta

Primeiramente, observe o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Veja que existem inúmeros números que não pertencem ao conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), como na figura a seguir:



Desta forma, notamos que em uma reta existem infinitos pontos.

Obs. Pontos **colineares** são pontos que pertencem a uma mesma reta.



A seguir serão definidos mais conceitos primitivos para que possamos entender melhor o que é uma reta, uma semirreta e um segmento de reta e, assim, possamos diferenciar cada um desses elementos. Vejamos,

Por dois pontos distintos A e B passa uma única **reta** ($r = \overleftrightarrow{AB}$).

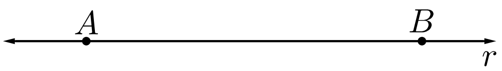


Figura 1.2.1: Reta: $r = \overleftrightarrow{AB}$

O conjunto de pontos tomados a partir da origem O na reta r é uma **semirreta** ($\overrightarrow{OA}$).

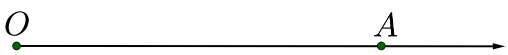


Figura 1.2.2: Semirreta: $\overrightarrow{OA}$

O conjunto de todos os pontos tomados de A até B é um **segmento de reta** ($\overline{AB}$).

Figura 1.2.3: Segmento de reta: $\overline{AB}$

Obs. A medida do segmento representa o seu tamanho e é denotada por AB.

Os segmentos de reta são classificados em:

- **Colineares:**
  Segmentos contidos em uma mesma reta.

Figura 1.2.4: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares

- **Consecutivos:**
  Segmentos que possuem extremidade comum.

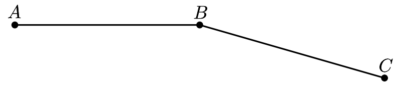


Figura 1.2.5: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos

- **Adjacentes:**
  Segmentos colineares e consecutivos, mas possuem, unicamente, uma extremidade em comum.

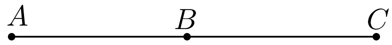


Figura 1.2.6: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são adjacentes

- **Congruentes:**
  Segmentos que possuem a mesma medida.

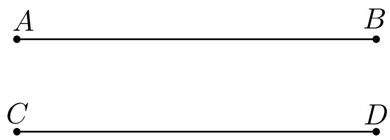


Figura 1.2.7: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes

Exemplo 1.2.1 Sejam A, B e C pontos colineares, tais que $AB = 25$ cm e $BC = 9$ cm. Calcule AC.

Resolução: Por hipótese A, B e C são pontos colineares, então eles pertencem a mesma reta. Além disso, note que o ponto A não pode estar entre B e C por conta das medidas fornecidas pelo enunciado. Desse modo, temos duas possibilidades

- B está entre A e C:

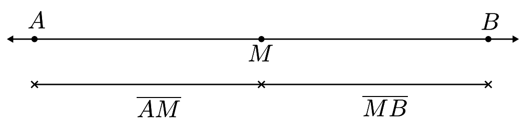
Logo, $AB + BC = AC$, ou seja, $AC = 25 + 9 = 34$ cm.

- C está entre A e B:

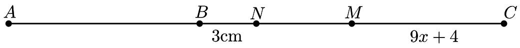
Logo, $AC + CB = AB$. Lembre que $BC = CB$, então $AC = 25 - 9 = 16$ cm.

Portanto, $AC = 34$ cm quando B está entre A e C ou $AC = 16$ cm quando C está entre A e B.

Agora, considere um segmento $\overline{AB}$ e um ponto M, diremos que M é ponto médio de $\overline{AB}$ quando o divide em dois segmentos congruentes, ou seja, $\overline{AM} = \overline{MB}$.



Exemplo 1.2.2 Sejam A, B, C, M e N pontos distintos de uma reta, sendo $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ segmentos adjacentes, conforme a figura. Sabendo que M e N são pontos médios de $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, e que $AC = 46$ cm. Determine a medida do segmento AM.



Resolução: Sabemos que N é ponto médio de $\overline{AC}$ e $AC = 46$ cm, então

$$AN = NC = \frac{AC}{2} = \frac{46}{2} = 23 \text{ cm}.$$

Considere $NM = y$ e, note que $BM = MC$ pois M é ponto médio de $\overline{BC}$. Desse modo,

$$BM = MC$$

$$BN + NM = MC$$

$$3 + y = 9x + 4 \ (*).$$

Além disso, $NC = NM + MC$ e como $NC = 23$ cm, segue que

$$23 = y + 9x + 4 \ (**).$$

Vamos isolar y em $(*)$ e substituí-lo em $(**)$:

$$3 + y = 9x + 4$$

$$y = 9x + 1.$$

Logo,

$$23 = y + 9x + 4$$

$$23 = (9x + 1) + 9x + 4$$

$$23 = 18x + 5$$

$$18x = 18$$

$$x = 1.$$

Assim, $x = 1$ e, então $y = NM = 9 + 1 = 10$ cm. Por fim, vamos determinar a medida de AB:

$$AN = AB + BN$$

$$23 = AB + 3$$

$$AB = 20 \text{ cm}.$$

Portanto, a medida do segmento é $AM = AB + BN + NM = 20 + 3 + 10 = 33$ cm.

1.3 Plano

Um plano é um conjunto de retas alinhadas e, desse modo, também é um conjunto de infinitos pontos. Sabemos que três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

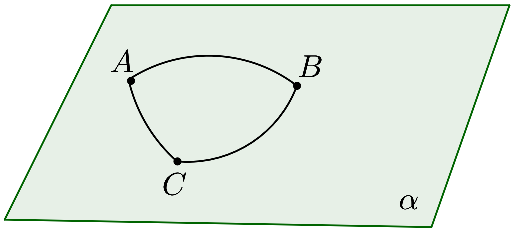
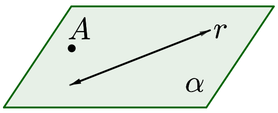
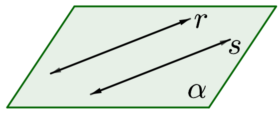


Figura 1.3.1: Plano

Entretanto, existem outras formas de determinar um plano, por exemplo, uma reta e um ponto fora dela ou ainda duas retas paralelas não coincidentes[23]:





Exemplo 1.3.1 Quantas retas no plano são determinadas por 7 pontos não colineares 3 a 3 (quaisquer 3 deles não estão sobre uma mesma reta)?

Resolução: Cada par de pontos determina uma reta, como quaisquer 3 deles não são colineares então a reta formada por um par não contém nenhum outro ponto, logo as retas não se repetem.

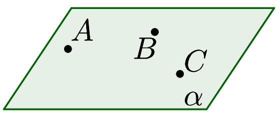
Como queremos saber quantos pares diferentes podemos formar com os sete pontos, temos 7 opções para o primeiro ponto e 6 para o segundo, isto é, $7 \cdot 6 = 42$.

A ordem de escolha não importa, assim, estamos contando cada par duas vezes, então temos que dividir por 2:

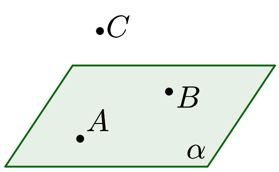
$$\frac{42}{2} = 21.$$

Desse modo, existem 21 retas no plano formadas pelos 7 pontos.

Obs. Pontos **coplanares** são os que pertencem a um mesmo plano.



Coplanares



Não coplanares

[23]São retas que não se encontram, mas que, necessariamente, tem a mesma direção. Esse tópico será abordado com mais detalhe no capítulo Geometria Espacial.

Exercício resolvido 1 (CESCEM SP) Quatro pontos distintos e não coplanares determinam exatamente:

a) 1 plano.
b) 2 planos.
c) 3 planos.
d) 4 planos.
e) 5 planos.

Resolução: Se 3 desses 4 pontos fossem colineares, então definem uma reta e, juntamente com o quarto ponto, os 4 definiriam um plano (pois uma reta e um ponto fora dela definem um plano), então seriam coplanares, o que não pode ocorrer. Logo, quaisquer 3 desses 4 pontos não são colineares. Dessa forma, cada 3 deles definem um plano, denotando os pontos por A, B, C e D temos os planos definidos por ABC, ABD, ACD e BCD, portanto, são 4 planos.

Alternativa (d).

Exercício resolvido 2 Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) as sentenças:

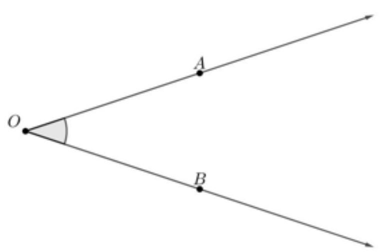
I) Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.
II) Três pontos distintos são coplanares.
III) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares.
IV) Um ponto e uma reta determinam um único plano sempre.

Resolução:

I) Verdadeiro, pois por dois pontos distintos passa uma única reta.
II) Verdadeiro, visto que é sempre possível traçar um plano que os contém.
III) Falso, afirmar que são segmentos consecutivos não implica que sejam também colineares, para que isto ocorra os segmentos devem ser adjacentes.
IV) Falso, porque o ponto pode pertencer a reta.

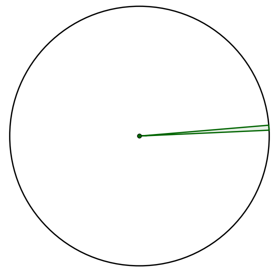
2 Ângulos

Um ângulo é formado por duas semirretas com a mesma origem, as semirretas são chamadas lados do ângulo e a origem é o vértice do ângulo.



Para nos referirmos a este ângulo, usaremos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}A$ ou simplesmente $\hat{O}$ quando ele for o único ângulo neste vértice, também é comum utilizarmos letras gregas como α, β, δ e θ para nos referimos à ângulos.

Geralmente, utilizarmos o grau como unidade de medida, representado por $(^\circ)$. A ideia de grau pode ser compreendida facilmente utilizando um círculo qualquer dividido em 360 partes iguais, deste modo, um grau (1°) corresponde a uma destas partes, enquanto uma volta completa neste círculo representa um ângulo de 360°.



Da mesma forma que o metro possui subunidades como o centímetro e o milímetro, o grau também possui duas subunidades principais, sendo elas os minutos $(')$ e os segundos $('')$. Um grau corresponde a sessenta minutos, enquanto um minuto corresponde a sessenta segundos.

Obs. No entanto, existem outras unidades de medida como o radiano e o grado. Para efetuar a conversão das unidades de medida, a tabela a seguir mostra algumas relações entre elas:

Exemplo 2.0.1 Efetue a soma e a subtração entre os ângulos 90° e $78^\circ16'34''$.

Resolução: Primeiramente, note que podemos reescrever 90°, emprestando 1° dos 90°, o transformando em $60'$. E, então emprestando $1'$ dos $60'$, transformando-o em $60''$. Sendo assim, $90^\circ = 89^\circ59'60''$. Logo, a soma e a subtração desses ângulos são dadas por

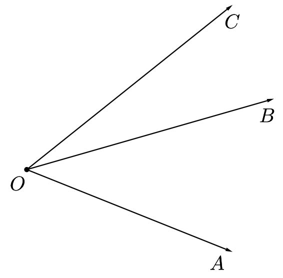
$$\begin{array}{r} 89^\circ59'60'' \\ +\ 78^\circ16'34'' \\ \hline 168^\circ16'34'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 89^\circ59'60'' \\ -\ 78^\circ16'34'' \\ \hline 11^\circ43'26'' \end{array}$$

Portanto, a soma entre 90° e $78^\circ16'34''$ é $168^\circ16'34''$ e a subtração é $11^\circ43'26''$.

Ângulos Consecutivos

Dois ângulos são consecutivos quando possuem um lado em comum.

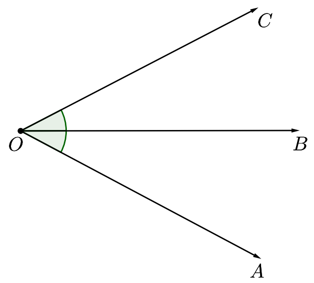


Note que, nesse caso, os ângulos consecutivos são:

- $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$: $\overrightarrow{OA}$ lado comum.
- $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$: $\overrightarrow{OB}$ lado comum.
- $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$: $\overrightarrow{OC}$ lado comum.

Ângulos Adjacentes

Dois ângulos são adjacentes se, e só se, são consecutivos e não têm pontos internos comuns, ou seja, compartilham um lado.

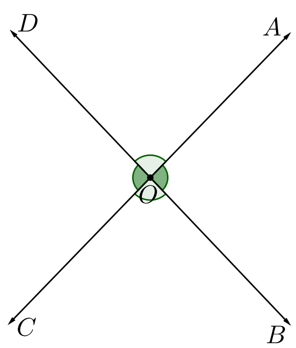


Nesse caso, os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes.

Obs. Note que os ângulos consecutivos podem possuir pontos internos em comum ou não. Por exemplo, os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ com $\overrightarrow{OA}$ lado comum, possuem pontos em comum. Já os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ com $\overrightarrow{OB}$ lado comum, não possuem pontos em comum, então são adjacentes.

Ângulos Opostos pelo Vértice

Dois ângulos são opostos pelo vértice (o.p.v.) se, e só se, seus lados são semirretas opostas, isto é, não compartilham lados mas tem o vértice em comum.

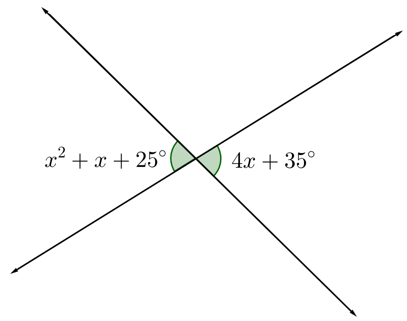


Os ângulos opostos pelo vértice são:

- $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$.
- $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$.

Obs. Ângulos opostos pelo vértice são congruentes, então eles possuem a mesma medida, ou seja, a mesma abertura.

Exemplo 2.0.2 Na figura a seguir, vamos encontrar o valor de x.



Resolução: Primeiramente, note que os ângulos são opostos pelo vértice, e lembre que estes são congruentes. Sendo assim,

$$x^2 + x + 25° = 4x + 35°$$
$$x^2 + x - 4x + 25° - 35° = 0$$
$$x^2 - 3x - 10° = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática, temos que

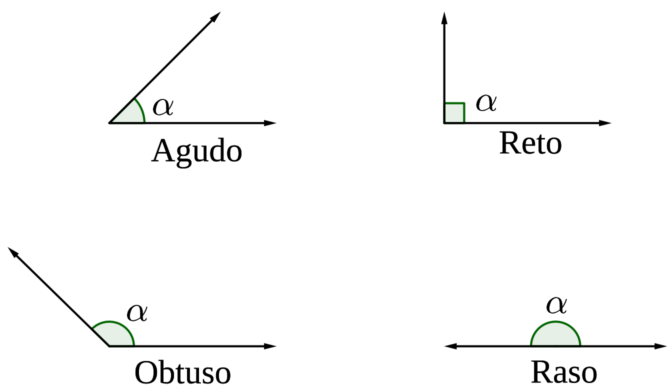
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2}.$$

Logo, $x = 5$ ou $x = -2$. O valor de um ângulo é sempre positivo, portanto, $x = 5°$.

2.1 Classificação dos ângulos

Alguns valores de ângulos apresentam classificações especiais relacionadas a sua medida. Diremos que um ângulo α é

- Agudo: $0 < \alpha < 90°$;
- Reto: $\alpha = 90°$;
- Obtuso: $90° < \alpha < 180°$;
- Raso: $\alpha = 180°$.



Exemplo 2.1.1 Um ângulo raso é cortado por duas semirretas e dividido em 3 partes, a primeira mede $30°$ e a segunda mede $\frac{3\pi}{8}$ radianos. O terceiro ângulo é agudo, reto ou obtuso?

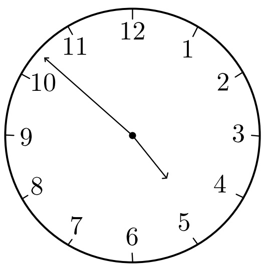
Resolução: Sabemos que π radianos equivalem a $180°$. Logo, $\frac{3\pi}{8}$ radianos é igual a

$$\frac{3 \times 180°}{8} = 67,5°.$$

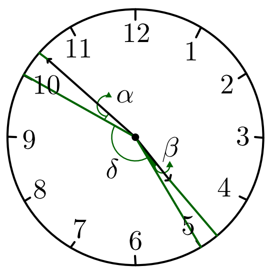
Sabemos que um ângulo raso mede $180°$, então a terceira parte corresponde à $180° - 30° - 67,5° = 82,5°$ e, consequentemente, é um ângulo agudo.

Exemplo 2.1.2 Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 16 h e 52 min.

Resolução: Nesse horário, os ponteiros do relógio estão na seguinte posição:



Observe que o relógio é separado em 12 partes iguais e, como um círculo possui 360 graus, temos que $\frac{360°}{12} = 30°$. Então a cada 60 minutos o ponteiro das horas se desloca $30°$, enquanto o ponteiro dos minutos percorre uma volta completa, ou seja, $360°$, ambos em sentido horário. Vejamos,



O menor ângulo formados entre os ponteiros é composto por $\alpha + \delta + \beta$.

Primeiramente, note que o ponteiro dos minutos percorre $30°$ em 5 minutos, então vamos calcular o quanto ele percorre em 2 minutos, ou seja, α. Desse modo,

$$30° \text{ —— } 5 \text{ minutos}$$

$$\alpha \text{ —— } 2 \text{ minutos}$$

$$\alpha = \frac{30° \cdot 2}{5} = 12°.$$

Veja que δ corresponde exatamente à 5 partes do relógio, então $\delta = 5 \cdot 30° = 150°$. Agora, considere x o ângulo que o ponteiro das horas já percorreu em 52 minutos e β o que ainda falta a ser percorrido, ou seja, $x + \beta = 30°$. Sabemos que em 60 minutos o ponteiro se desloca $30°$, então vamos determinar o quanto ele já percorreu em 52 minutos. Desse modo,

$$x = \frac{30° \cdot 52}{60} = 26°.$$

Logo,

$$26° + \beta = 30°$$

$$\beta = 4°.$$

Por fim, o menor ângulo é dado por

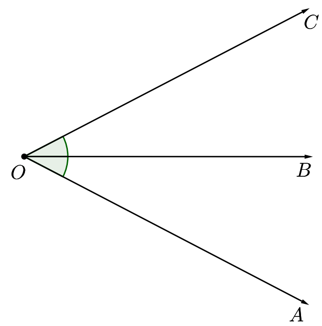
$$\alpha + \delta + \beta$$

$$12° + 150° + 4°$$

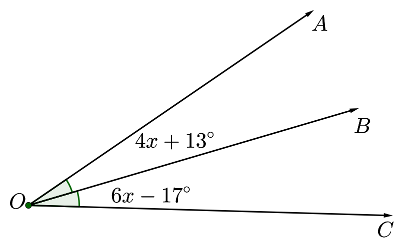
$$166°.$$

Portanto, $166°$ é o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 16 h e 52 min.

Definição 2.1 A bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ é uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos congruentes, ou seja, $A\hat{O}C = B\hat{O}C$.



Exemplo 2.1.3 Na figura a seguir, considere que a semirreta $\overrightarrow{OB}$ seja a bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$, determine a medida de x em graus.



Resolução: Como $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$, temos que

$$6x - 17° = 4x + 13°$$

$$6x - 4x = 13° + 17°$$
$$2x = 30°$$
$$x = 15°.$$

Definição 2.2 Considere dois ângulos α e β, eles serão ditos:

- *Complementares* quando a soma deles é igual à $90°$, ou seja, $\alpha + \beta = 90°$.
- *Suplementares* quando a soma deles é igual à $180°$, ou seja, $\alpha + \beta = 180°$.
- *Replementares* quando a soma deles é igual à $360°$, ou seja, $\alpha + \beta = 360°$.

Exemplo 2.1.4 Um ângulo mede o triplo do seu complemento. Qual o valor do seu suplemento?

Resolução: Denotando o ângulo por x, seu complemento é $90° - x$. Assim,

$$x = 3(90° - x)$$
$$x = 270° - 3x$$
$$4x = 270°$$
$$x = \frac{270°}{4}$$
$$x = 67,5°.$$

Lembre que o suplemento é dado por $180° - x$. Logo, $180° - 67,5° = 112,5°$. Portanto, o valor do suplemento de x é $112,5°$.

Exemplo 2.1.5 Determine o suplemento e o replemento do ângulo $53°39'48''$.

Resolução: Lembre que o suplemento e o replemento representam o que falta para $180°$ e $360°$, respectivamente. Então, podemos reescrever esses ângulos da seguinte maneira:

$$180° = 179°59'60''$$
$$360° = 359°59'60''.$$

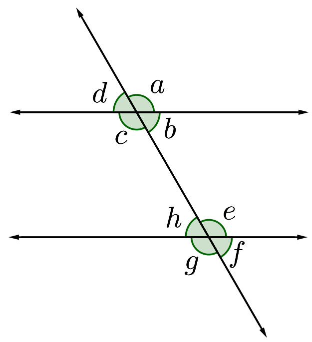
- O suplemento deste ângulo é:

$$\begin{array}{r} 179°59'60'' \\ -\ 53°39'48'' \\ \hline 126°20'12'' \end{array}$$

- O replemento deste ângulo é:

$$\begin{array}{r} 359°59'60'' \\ -\ 53°39'48'' \\ \hline 306°20'12'' \end{array}$$

Na figura a seguir as duas retas horizontais são paralelas e podemos observar algumas relações. Vejamos,

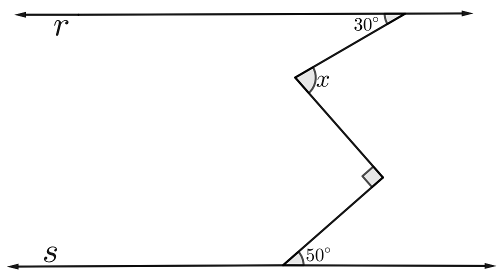


Como temos duas retas paralelas cortadas por uma transversal[24] os ângulos correspondentes são congruentes, como é o caso de a e e.

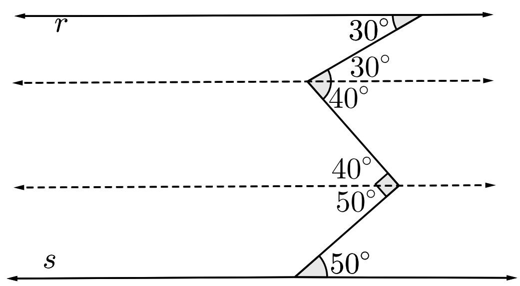
Além disso, a medida dos ângulos a e c é igual, pois são ângulos opostos pelo vértice. Ademais, os ângulos alternos internos e externos possuem mesma medida, por exemplo, b, h e a, g, respectivamente.

Considerando todas essa relações concluímos que a medida dos ângulos a, c, e e g são iguais, assim como b, d, f e h. Por fim, os pares a e b, a e d, b e c, c e d, e e f, e e h, f e g, h e g são adjacentes e suplementares.

Exemplo 2.1.6 Sendo r e s retas paralelas, determine a medida do ângulo x.



Resolução: Sabendo que o ângulo indicado com um quadrado é um ângulo reto, vamos traçar duas retas paralelas a r e s passando pelo ângulo reto e pelo ângulo x.

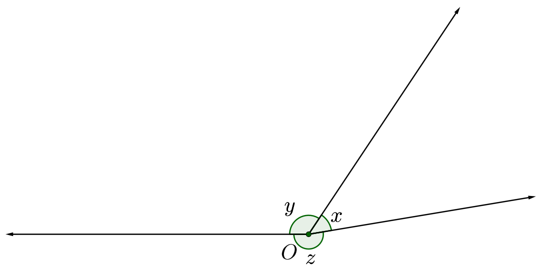


[24]Uma reta é transversal a uma outra se a intersecta em apenas um ponto.

Utilizando o que vimos sobre ângulos correspondentes em retas paralelas cortadas por uma transversal, podemos observar que a parte superior de x mede $30°$ e a parte inferior do ângulo reto mede $50°$, portanto a parte superior desse ângulo mede $40°$ (são complementares).

Pela correspondência de ângulos vemos que a parte inferior de x mede $40°$ também. Portanto, x mede $70°$.

Exercício resolvido 1 (UEL) Na figura a seguir, as medidas x, y e z são diretamente proporcionais aos números 5, 20 e 25, respectivamente.



O suplemento do ângulo de medida x tem medida igual a:

a) $144°$.
b) $128°$.
c) $116°$.
d) $82°$.
e) $54°$.

Resolução:

Observando a figura, podemos notar que os ângulos x, y e z são replementares, ou seja, a soma dos três ângulos é igual a $360°$. Dessa forma, $x+y+z=360°$. Como os ângulos x, y e z são diretamente proporcionais aos números 5, 20 e 25, respectivamente, temos que $\frac{x}{5}=\frac{y}{20}=\frac{z}{25}$.

Então isolando y em função de x em $\frac{x}{5}=\frac{y}{20}$, obtemos que $y=4x$. Analogamente, isolando z em função de x em $\frac{x}{5}=\frac{z}{25}$, segue que $z=5x$. Agora, substituindo os valores de y e z na equação $x+y+z=360°$, teremos

$$x+4x+5x=360°$$

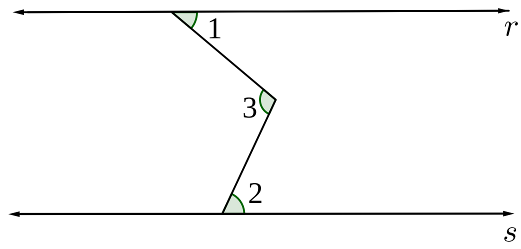
$$10x=360°$$

$$x=36°.$$

Logo, o suplemento de x é dado por $180°-36°=144°$. Portanto, o suplemento do ângulo de medida x é igual a $144°$.

Alternativa (a).

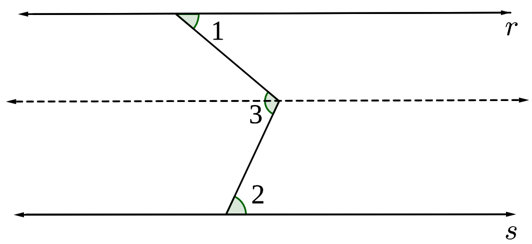
Exercício resolvido 2 (FUVEST) Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede $45°$ e o ângulo 2 mede $55°$.



A medida, em graus, do ângulo 3 é:

a) $50°$.
b) $55°$.
c) $60°$.
d) $80°$.
e) $100°$.

Resolução: Traçando uma reta paralela às retas r e s que passa pelo ângulo 3:



Note que, o ângulo 1 e a parte superior do ângulo 3 são congruentes. Sendo assim, a parte superior do ângulo 3 é igual a $45°$. O mesmo acontece com o ângulo 2 e a parte inferior do ângulo 3. Logo, a parte inferior do ângulo 3 é $55°$. Portanto, o ângulo 3 mede $45°+55°=100°$.

Alternativa (e).

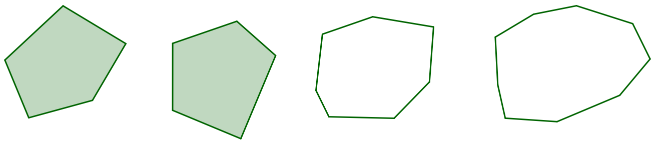
---

3 Polígonos

Nesta seção iremos abordar os polígonos que são elementos muito importantes da geometria plana.

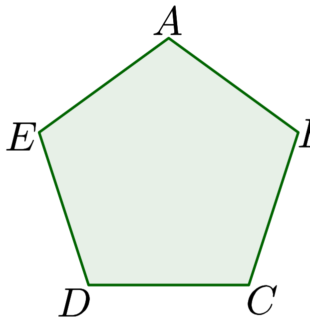
Definição 3.1 Os polígonos são figuras planas constituídas por segmentos de reta, os quais formam uma figura fechada.

Obs. Em um polígono, o número de pontos é $n \geq 3$, no qual esses 3 devem ser consecutivos e não colineares.



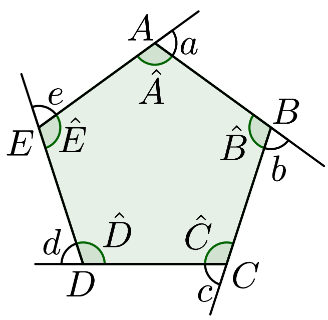
3.1 Elementos do polígono

Seja um polígono $ABCDE$:



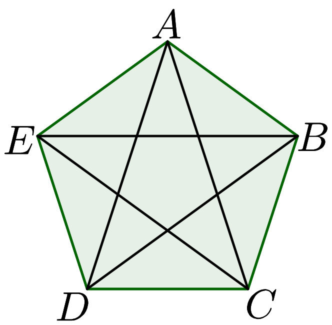
Denominamos por,

- **Vértices:** São os pontos de encontro dos segmentos, isto é, as extremidades do polígono: A, B, C, D e E.
- **Lados:** São os segmentos de retas que unem dois vértices consecutivos do polígono: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$.
- **Ângulos:** Os polígonos são formados por ângulos internos e externos, os quais são gerados pelo encontro de dois lados consecutivos.



Ângulos internos: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ e $\hat{E}$.
Ângulos externos: $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ e δ.

- **Diagonais:** São os segmentos de retas cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.



Diagonais: $\overline{AD} = \overline{DA}$, $\overline{AC} = \overline{CA}$, $\overline{BE} = \overline{EB}$, $\overline{BD} = \overline{DB}$ e $\overline{CE} = \overline{EC}$.

Obs. Para calcular o número de diagonais (d) em um polígono de n lados, utilizamos:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Exemplo 3.1.1 Determine o número de diagonais em um hexágono (6 lados).

Resolução: Substituindo $n = 6$ na fórmula, temos que:

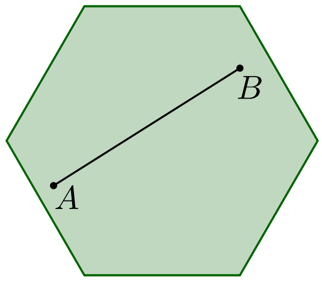
$$d = \frac{6(6-3)}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Logo, o hexágono possui 9 diagonais.

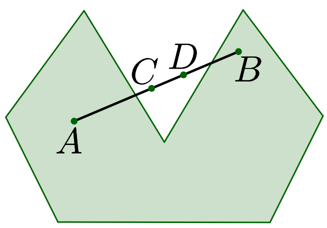
3.2 Tipos de polígonos

Os polígonos podem ser classificados como convexos ou côncavos (não convexos).

- **Convexo:** É considerado polígono convexo quando qualquer segmento de reta ligando dois pontos do polígono pertence somente a região delimitada pelo polígono.



- **Côncavo (não convexo):** É considerado polígono côncavo quando ao menos um segmento de reta ligando dois pontos do polígono não pertence somente a região delimitada pelo polígono, como o segmento $\overline{AB}$ que possui os pontos C e D fora do polígono.



Nomenclatura dos Polígonos

De acordo com o número n de lados os polígonos recebem nomes específicos.

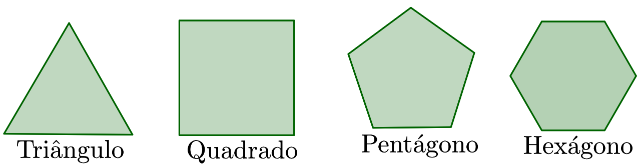
Número de lados	Nome do polígono
$n = 3$	Triângulo
$n = 4$	Quadrilátero
$n = 5$	Pentágono
$n = 6$	Hexágono
$n = 7$	Heptágono
$n = 8$	Octógono
$n = 9$	Eneágono
$n = 10$	Decágono
$n = 12$	Dodecágono
$n = 20$	Icoságono

Tabela 3: Nomenclatura dos polígonos

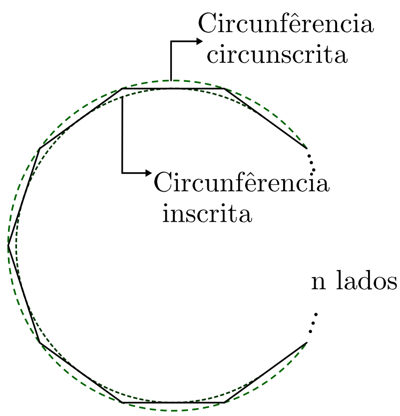
Obs. Para um número n de lados dizemos que o polígono é um n-látero, em que $n \geq 3$.

3.3 Polígono regular

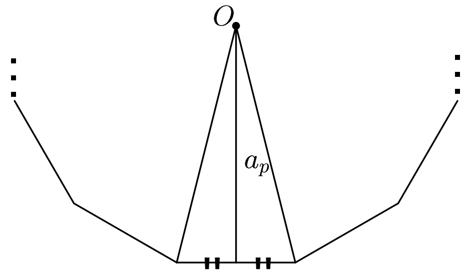
Um polígono convexo é regular se possui todos os seus lados e ângulos congruentes, ou seja, é equilátero[25] e equiângulo[26].



Obs. Todo polígono regular é inscritível e circunscritível em uma circunferência.



Os polígonos regulares possuem alguns elementos notáveis, são eles: centro e apótema. O **centro** (O) de um polígono regular é comum às circunferências inscrita e circunscrita, já o **apótema** (a_P) é o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um lado e, também, é o raio da circunferência inscrita.



Ângulos internos

A soma dos ângulos internos (S_i) de um polígono regular de n lados é dada por

$$S_i = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

A medida de cada ângulo interno (a_i) é determinada a partir da expressão:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

Exemplo 3.3.1 Determine a soma dos ângulos internos de um triângulo (3 lados).

Resolução: O triângulo é um polígono regular que possui três lados, ou seja, $n = 3$. Então utilizando a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono regular, temos que

$$S_i = (n-2) \cdot 180^\circ$$
$$S_i = (3-2) \cdot 180^\circ$$
$$S_i = 180^\circ.$$

Logo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Obs. O resultado do Exemplo (3.3.1) é muito importante, pois ele é utilizado para resolver inúmeros exercícios que envolvam triângulos.

Exemplo 3.3.2 Determine o número de lados de um polígono regular, sabendo que o valor de um ângulo interno é 150° e que a soma dos seus ângulos internos é 1800°.

Resolução: Sabendo os valores de a_i e de S_i, substituímos na fórmula:

$$a_i = \frac{S_i}{n}$$
$$150^\circ = \frac{1800^\circ}{n}$$
$$n = 12.$$

Logo, o polígono possui 12 lados. Portanto, é um dodecágono regular.

[25] Equilátero: Lados com mesma medida.
[26] Equiângulo: Ângulos com mesma medida.

Ângulos externos

A soma dos ângulos externos (S_e) de um polígono regular de n lados é sempre igual a $360°$, ou seja, $S_e = 360°$. Além disso, o valor de cada ângulo externo (a_e) é determinado a partir da expressão:

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}.$$

Obs. O ângulo externo é suplementar ao ângulo interno de um polígono convexo, isto é, $a_i + a_e = 180°$.

Exemplo 3.3.3 Determine o polígono regular cujo ângulo interno é igual a cinco vezes o ângulo externo.

Resolução: Considere x o valor do ângulo externo e, consequentemente, a medida do ângulo interno é dada por $a_i = 5 \cdot a_e = 5 \cdot x$. Além disso, lembre que o ângulo externo e interno são adjacentes e suplementares. Desse modo,

$$x + 5x = 180°$$
$$6x = 180°$$
$$x = 30°.$$

Como x corresponde ao valor do ângulo externo, segue que $a_e = 30°$. Assim,

$$30° = \frac{360°}{n}$$
$$30° \cdot n = 360°$$
$$n = 12.$$

Logo, $n = 12$ e, portanto, o polígono é o dodecágono regular.

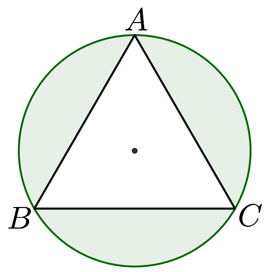
Obs. Em um polígono regular de n lados, se n for par, o polígono possui diagonais d_c que passam pelo centro, dado por: $d_c = \frac{n}{2}$. No entanto, se n for ímpar o polígono não possui diagonais que passam pelo centro.

3.4 Relações métricas nos polígonos regulares

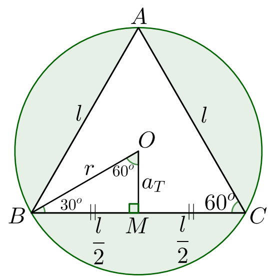
A seguir veremos algumas relações métricas nos polígonos regulares, importantes para a Geometria Plana.

Triângulo equilátero

Considere o seguinte triângulo equilátero ABC inscrito:



Dado o raio do círculo circunscrito ao triângulo, podemos encontrar a medida do lado do triângulo e do apótema utilizando o Teorema de Pitágoras[27]. Vejamos,



Primeiramente, por trigonometria determinaremos o lado do triângulo. Sendo assim,

$$\cos(30°) = \frac{\frac{l}{2}}{r}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2r}$$
$$l = r\sqrt{3}.$$

Agora, para calcular o apótema do triângulo vamos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OMB, lembrando que $l = r\sqrt{3}$. Desse modo, temos que

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a_T^2$$
$$r^2 = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a_T^2$$
$$a_T^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4}$$
$$a_T = \frac{r}{2}.$$

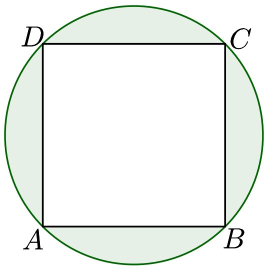
Exemplo 3.4.1 Considere um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 8 cm e determine o lado e o apótema desse triângulo.

Resolução: O lado do triângulo equilátero é dado por $l = r\sqrt{3}$ e o apótema é $a_T = \frac{r}{2}$. Sendo assim, como o raio é 8 cm segue que $l = 8\sqrt{3}$ cm e $a_T = \frac{8}{2} = 4$ cm.

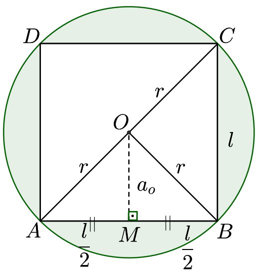
[27]Em um triângulo retângulo, a hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos catetos. Esse teorema será abordado com mais detalhe na seção de Triângulos (4).

Quadrado

Considere o seguinte quadrado $ABCD$ inscrito:



Dado o raio do círculo circunscrito ao quadrado, podemos encontrar a medida do lado do quadrado e do apótema utilizando o Teorema de Pitágoras. Vejamos,



Primeiramente, para determinar o lado do quadrado aplicaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo BOC. Sendo assim,

$$l^2 = r^2 + r^2$$
$$l^2 = 2r^2$$
$$l = r\sqrt{2}.$$

Agora, para calcular o apótema do quadrado vamos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AMO, lembrando que $l = r\sqrt{2}$. Desse modo, temos que

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a_Q^2$$
$$r^2 = \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a_Q^2$$
$$a_Q^2 = r^2 - \frac{r^2}{2}$$
$$a_Q = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo 3.4.2 Determine o lado de um quadrado inscrito em uma circunferência cujo apótema mede 12 cm.

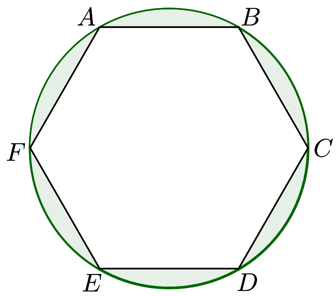
Resolução: Sabemos que o apótema do quadrado é dado por $a_Q = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. Assim,

$$12 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$
$$24 = r\sqrt{2}.$$

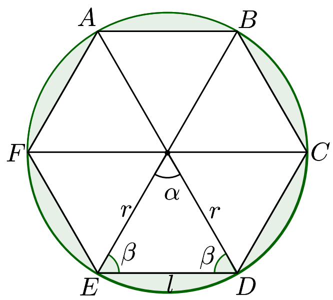
Como o lado do quadrado é $l = r\sqrt{2}$, temos que $l = 24$ cm.

Hexágono

Considere o seguinte hexágono regular $ABCDEF$ inscrito:

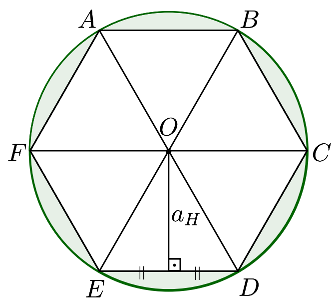


O hexágono pode ser dividido em seis triângulos equiláteros. Vejamos,



Note que $\alpha = \dfrac{360°}{6} = 60°$ e como $\overline{OE} = \overline{OD} = r$, segue que $\alpha + 2\beta = 180°$, ou seja, $\beta = 60°$. Logo, como os triângulos que compõe o hexágono são equiláteros, temos que o lado do hexágono é igual ao raio da circunferência circunscrita a ele, isto é, $l = r$.

Podemos ainda encontrar o apótema do hexágono através do Teorema de Pitágoras:



$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a_H^2$$
$$r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + a_H^2$$
$$r^2 = \frac{r^2}{4} + a_H^2$$

$$a_H^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$$

$$a_H = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo 3.4.3 O perímetro de um hexágono regular inscrito em uma circunferência é 36 cm. Determine o apótema do hexágono.

Resolução: Como o hexágono possui 6 lados, temos que cada um deles equivale a $l = \frac{36}{6} = 6$ cm e sabemos que $l = r$. Logo, o apótema é:

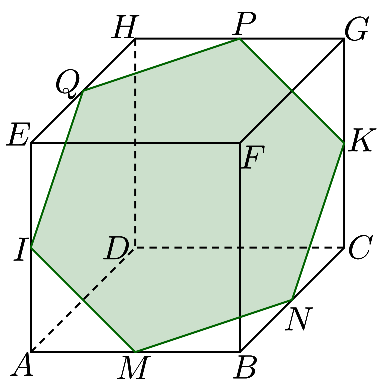
$$a_H = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$a_H = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$a_H = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Portanto, o apótema do hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo perímetro vale 36 cm é $a_H = 3\sqrt{3}$ cm.

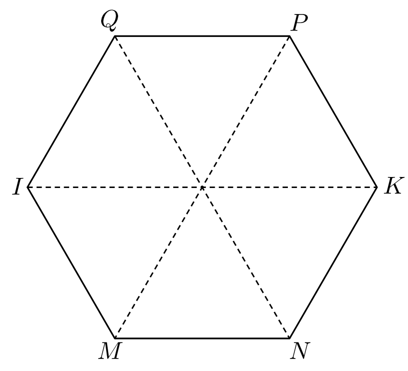
Exercício resolvido 1 (ENEM) Um artista utilizou uma caixa cúbica transparente para a confecção de sua obra, que constitui em construir um polígono $IMNKPQ$, no formato de um hexágono regular, disposto no interior da caixa. Os vértices desse polígono estão situados em pontos médios de arestas da caixa . Um esboço da sua obra pode ser visto na figura.



Considerando as diagonais do hexágono, distintas de IK, quantas tem o mesmo comprimento de IK?

a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 8.
e) 9.

Resolução: Vejamos, como o hexágono é regular, temos que

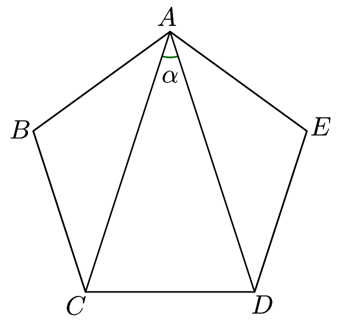


$$QN = PM = IK$$

Portanto, duas diagonais terão o mesmo tamanho que IK.

Alternativa (b).

Exercício resolvido 2 (FUVEST) Na figura adiante, $ABCDE$ é um pentágono regular.



A medida, em graus, do ângulo α é:

a) $32°$.
b) $34°$.
c) $36°$.
d) $38°$.
e) $40°$.

Resolução: Primeiramente, vamos determinar quanto mede cada ângulo desse polígono regular. Lembre que a fórmula do ângulo interno de um polígono regular é $a_i = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Nesse caso, temos um pentágono, ou seja, $n = 5$. Desse modo,

$$a_i = \frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = \frac{3\cdot 180°}{5} = \frac{540°}{5} = 108°.$$

No triângulo ABC, temos que o ângulo $A\hat{B}C = 108°$ e como é um pentágono regular, as arestas AB e BC possuem mesma medida e, assim os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ são congruentes, ou seja, $B\hat{A}C = B\hat{C}A$. Tendo em vista que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, segue que

$$108° + B\hat{A}C + B\hat{C}A = 180°$$

$$108^\circ + 2B\hat{A}C = 180^\circ$$
$$B\hat{A}C = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Logo, $B\hat{A}C = B\hat{C}A = 36^\circ$ e o mesmo ocorre no triângulo ADE. Sendo assim, observe o vértice A:

$$B\hat{A}C + \alpha + E\hat{A}D = 108^\circ$$
$$36^\circ + \alpha + 36^\circ = 108^\circ$$
$$72^\circ + \alpha = 108^\circ$$
$$\alpha = 36^\circ.$$

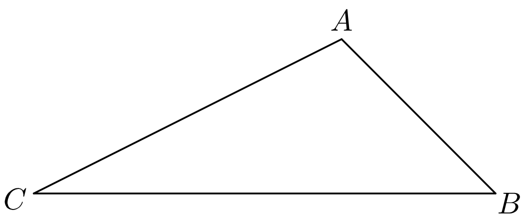
Portanto, a medida do ângulo α é 36°.

Alternativa (c).

4 Triângulos

Na geometria plana, os triângulos se destacam pois é possível estabelecer várias relações através deles e, por isso, sua frequência nos vestibulares é enorme. Anteriormente, vimos que o triângulo é um polígono de três lados. A seguir, veremos sua definição formal.

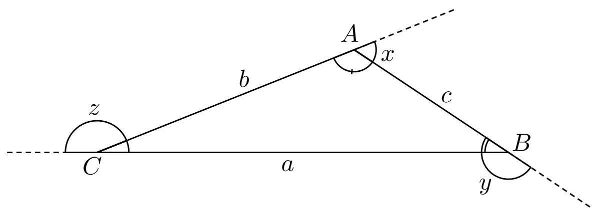
Definição 4.1 Considere três pontos distintos não colineares A, B e C. A união dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ denomina-se triângulo.



Notação: Triângulo $ABC = \Delta ABC$.

4.1 Elementos do triângulo

Considere um triângulo ABC qualquer:



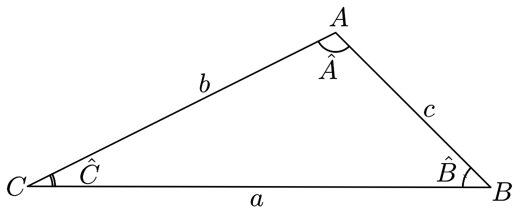
Denominamos por:

Vértices: Os pontos de encontro dos segmentos, isto é, as extremidades do triângulo: A, B e C.
Lados: Os segmentos que formam o triângulo: $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, ou ainda, a, b e c.
Ângulos: Os triângulos são formados por ângulos:

- Internos: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, ou ainda, $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.
- Externos: x, y e z.

Obs. O perímetro de um triângulo é a soma dos comprimentos de seus lados.

Obs. Em um triângulo, o maior lado é oposto ao maior ângulo e, consequentemente, o menor lado é oposto ao menor ângulo.



Note que a é o maior lado do triângulo ABC e está oposto ao maior ângulo $\hat{A}$. Além disso, c é o menor lado e esse é oposto ao menor ângulo $\hat{C}$.

Obs. A *desigualdade triangular* é a condição de existência de um triângulo. Para que um triângulo ABC exista, cada um de seus lados deve ser maior que a diferença dos outros dois, ou ainda, cada lado deve ser menor que a soma dos demais. Assim,

$$|b-c| < a < b+c$$
$$|a-c| < b < a+c$$
$$|a-b| < c < a+b$$

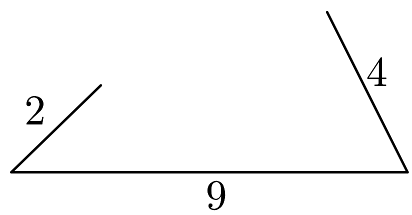
No capítulo (REF FUNÇÕES) conceitos como o de módulo já foram abordados, caso sinta necessidade consulte-o.

Exemplo 4.1.1 Podemos construir um triângulo com os segmentos 5 m, 7 m e 8 m?

Resolução: Estes segmentos satisfazem a condição de existência, pois $7+8>5$, $5+8>7$ e $5+7>8$, então podemos construir um triângulo com tais medidas.

Exemplo 4.1.2 É possível formar um triângulo com os segmentos 9 m, 4 m e 2 m?

Resolução: Não podemos construir um triângulo com tais medidas, pois



$$9 > 2+4 = 6,$$

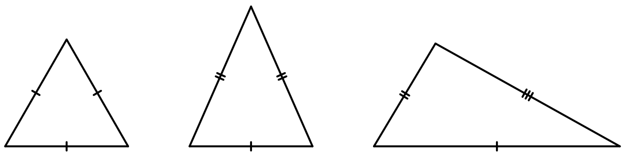
isto é, 9 não é menor que 6. Portanto, o maior lado não é menor que a soma dos outros dois lados, ou seja, não satisfaz a condição de existência.

4.2 Classificação dos triângulos

Os triângulos podem ser classificados com base em seus lados ou ângulos. Vejamos,

Lados:

- *Triângulos equiláteros* possuem três lados congruentes.
- *Triângulos isósceles* possuem dois lados congruentes.
- *Triângulos escalenos* não possuem lados congruentes.



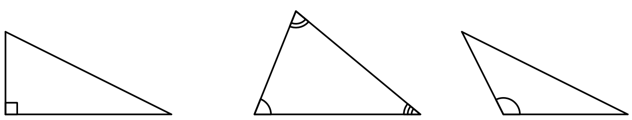
Equilátero Isósceles Escaleno

Obs. No triângulo isósceles, o lado que possui medida diferente é dito base do triângulo.

Obs. Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes. Reciprocamente, se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles. Além disso, se um triângulo é equilátero, então todos os seus ângulos são congruentes e, da mesma forma, se um triângulo possui todos os ângulos congruentes, então esse triângulo é equilátero.

Ângulos:

- *Triângulos retângulos* têm um ângulo interno reto;
- *Triângulos acutângulos* têm três ângulos internos agudos;
- *Triângulos obtusângulos* têm um ângulo interno obtuso.

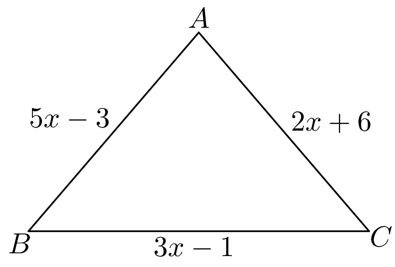


Retângulo Acutângulo Obtusângulo

Obs. No triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa e os demais lados são os catetos.

Exemplo 4.2.1 Determine o perímetro do triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$, em que $AB = 5x-3$, $BC = 3x-1$ e $CA = 2x+6$.

Resolução: Construindo o triângulo, temos que



Como se trata de um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$, segue que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CA}$ são congruentes, isto é, $\overline{AB} = \overline{CA}$. Sendo assim,

$$5x-3 = 2x+6$$

$$5x-2x = 6+3$$

$$3x = 9$$

$$x = 3.$$

Desse modo,

$$AB = 5\cdot 3-3 = 12$$

$$BC = 3\cdot 3-1 = 8$$

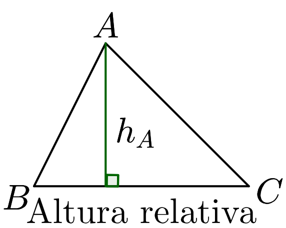
$$CA = 2\cdot 3+6 = 12.$$

Por fim, o perímetro do triângulo é $AB+BC+CA = 12+8+12 = 32$.

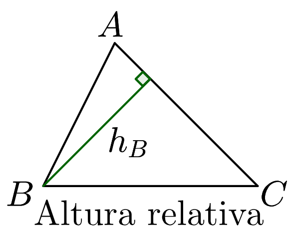
Veremos agora, algumas cevianas[28] notáveis, são elas: altura, mediana e bissetriz.

Altura

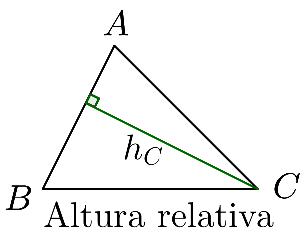
As alturas de um triângulo são dadas por um segmento de reta que liga o vértice ao lado oposto (ou ao prolongamento do lado oposto) formando um ângulo reto.



Altura relativa ao vértice A



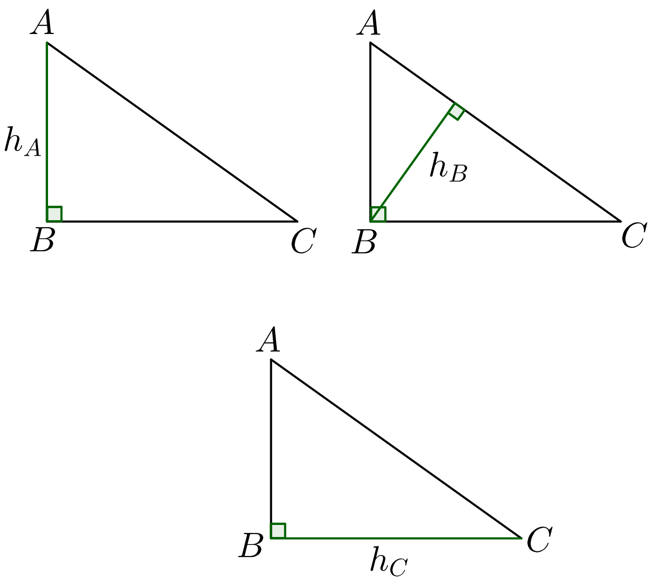
Altura relativa ao vértice B



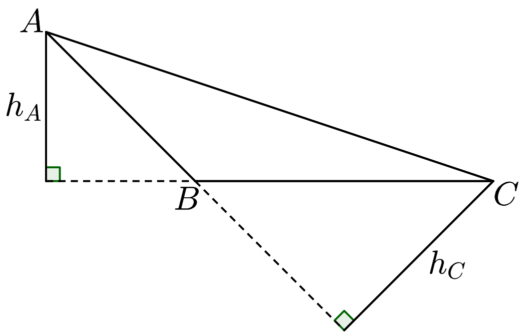
Altura relativa ao vértice C

[28] São segmentos de retas que ligam um vértice do triângulo a um ponto importante do lado oposto.

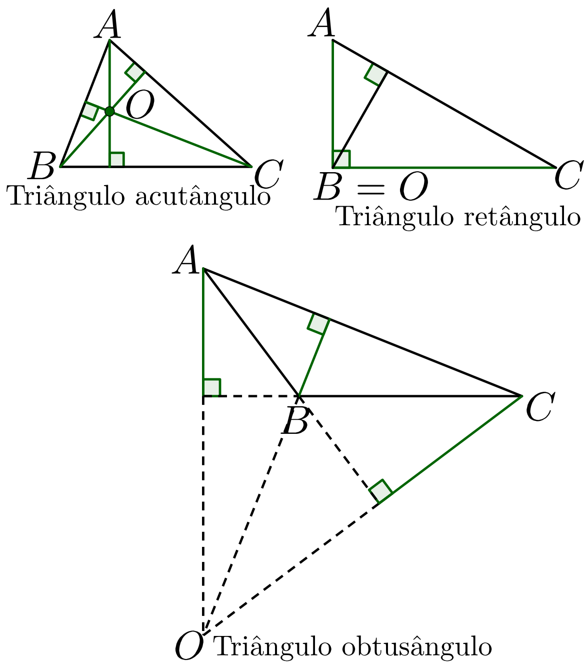
Obs. No triângulo retângulo, duas das alturas coincidem com um dos catetos.



Obs. No triângulo obtusângulo, duas das alturas são obtidas a partir do prolongamento de um dos lados do triângulo.

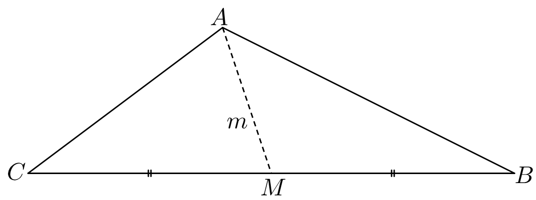


Obs. O ponto de encontro das alturas de um triângulo é denominado **ortocentro** (O).



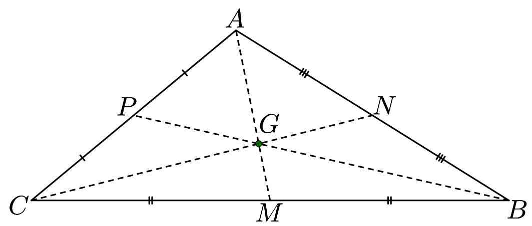
Mediana

As medianas de um triângulo são dadas por um segmento de reta que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto.



Obs. A mediana divide o triângulo em dois triângulos equivalentes, isto é, que possuem mesma área.

Obs. O ponto de encontro das medianas de um triângulo é denominado **baricentro** (G).

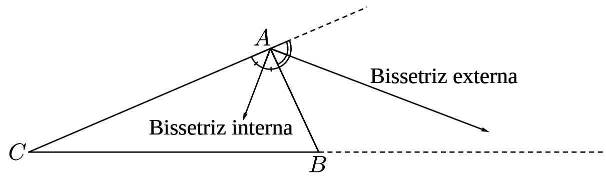


O baricentro também é o centro geométrico de massa[29] do triângulo e divide a mediana em segmentos na razão $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{MG}{GA} = \frac{1}{2}$, $\frac{PG}{GB} = \frac{1}{2}$ e $\frac{NG}{GC} = \frac{1}{2}$.

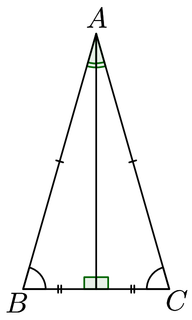
Bissetriz

As bissetrizes de um triângulo são dadas por uma semirreta, com origem no vértice do ângulo, que divide-o ao meio.

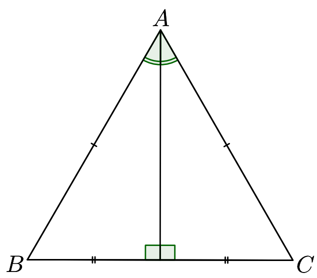
[29] É um ponto que se comporta como se toda a massa do objeto estivesse concentrada sobre ele.



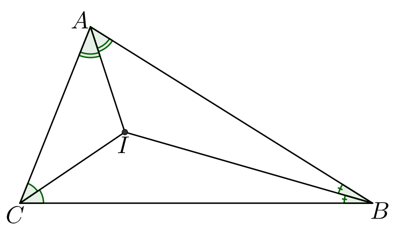
Obs. No triângulo isósceles, em relação à sua base, a altura, mediana e bissetriz coincidem.



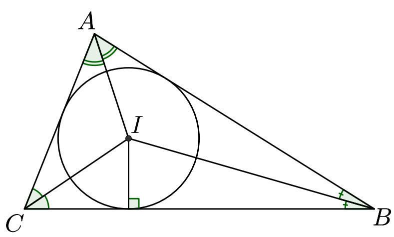
Ademais, no triângulo equilátero, a altura, mediana e bissetriz coincidem.



Obs. O ponto de encontro das bissetrizes internas de um triângulo é denominado **incentro** (I).

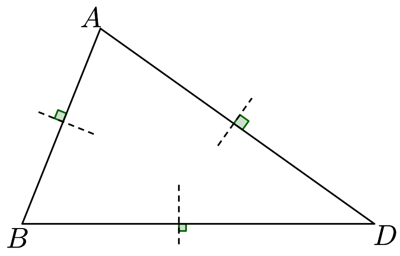


Esse ponto é o centro da circunferência inscrita no triângulo e é equidistante dos lados, onde essa distância representa o raio da circunferência inscrita. Vejamos,

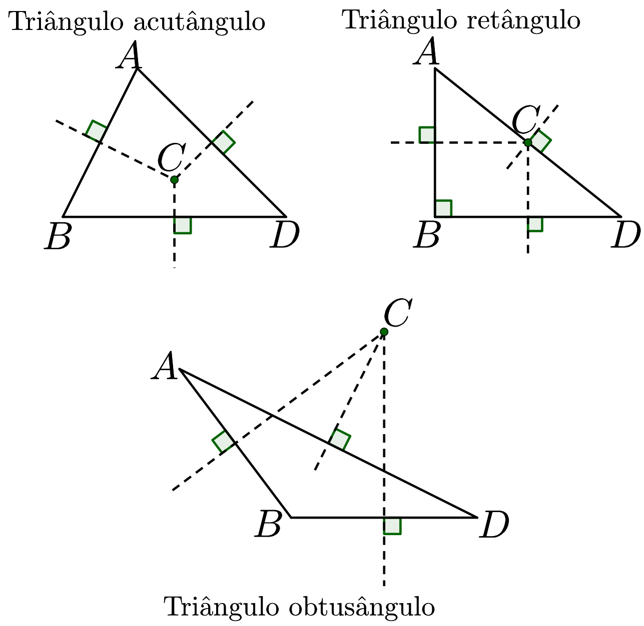


Mediatriz

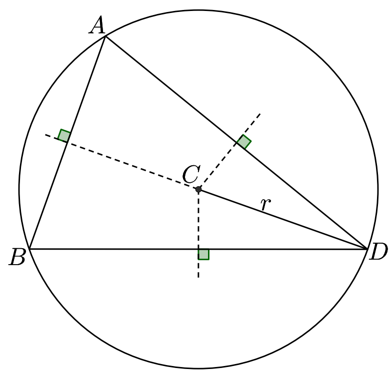
As mediatrizes de um triângulo são retas perpendiculares aos lados que passam pelo ponto médio desses segmentos de reta.



Obs. O ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo é denominado **circuncentro** (C).



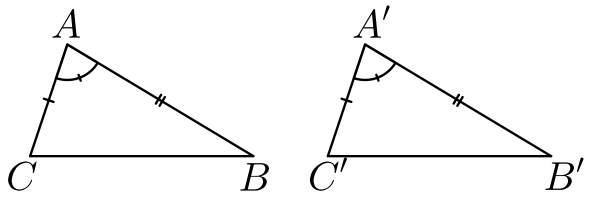
Esse ponto é o centro da circunferência circunscrita no triângulo e é equidistante dos vértices, onde essa distância representa o raio da circunferência circunscrita. Vejamos,



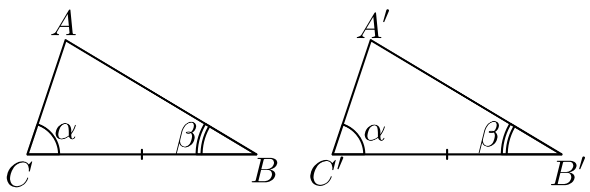
4.3 Congruência de triângulos

Os critérios de congruência de triângulos são os requisitos que devem ser satisfeitos para que dois triângulos sejam congruentes, isto é, nos fornece as condições mínimas que garantem a igualdade desses triângulos. Existem quatro critérios de congruência de triângulos. Vejamos,

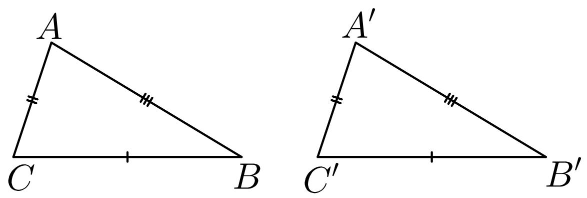
- **LAL (lado, ângulo, lado):**
  Dois triângulos são ditos congruentes se possuem dois lados e o ângulo formado por eles, congruentes.



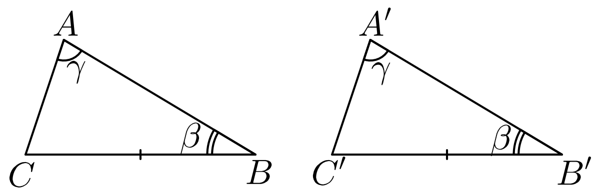
- **ALA (ângulo, lado, ângulo):**
  Dois triângulos são congruentes se possuem dois ângulos adjacentes e o lado entre eles, congruentes.



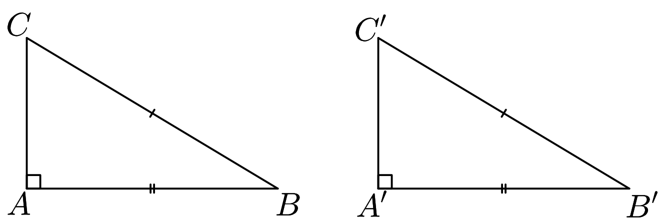
- **LLL (lado, lado, lado):**
  Dois triângulos são congruentes se possuem os três lados congruentes.



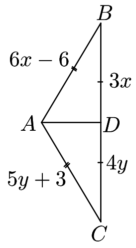
- **LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto):**
  Dois triângulos são congruentes se possuem um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse mesmo lado congruentes.



Obs. Ademais, existe um caso especial de congruência de triângulos retângulos. Nesse caso, dois triângulos retângulos são congruentes se possuem ordenadamente um cateto e a hipotenusa iguais. Vejamos,



Exemplo 4.3.1 Na figura, o triângulo ABD é congruente ao triângulo ACD. Determine x, y e calcule os lados do triângulo ABC.



Resolução: É evidente que os triângulos ABD e ACD são congruentes pelo caso LLL. Sendo assim, igualando os lados correspondentes temos que

$$\begin{cases} BD = DC \\ AB = CA \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} 3x = 4y & (I) \\ 6x - 6 = 5y + 3 & (II) \end{cases}$$

Isolando x em (I) segue que $x = \dfrac{4y}{3}$. Agora, substituindo-o em (II):

$$6 \cdot \frac{4y}{3} - 6 = 5y + 3$$
$$8y - 5y = 3 + 6$$
$$y = 3.$$

Retornando em (I), temos que $3x = 4 \cdot 3$, isto é, $3x = 12$, então $x = 4$. Por fim, vamos encontrar as medidas dos lados do triângulo ABC:

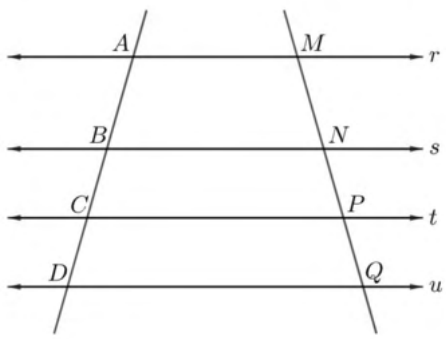
- $AB = 6x - 6 = 6 \cdot 4 - 6 = 18$.
- $BC = BD + DC = 3x + 4y = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$.
- $CA = 5y + 3 = 5 \cdot 3 + 3 = 18$.

Portanto, os lados do triângulo ABC são $AB = 18$, $BC = 24$ e $CA = 18$.

4.4 Segmentos proporcionais

A seguir veremos alguns resultados que relacionam os segmentos proporcionais[30]:

Teorema 4.1 — Teorema de Tales. Considere um feixe de retas paralelas e duas retas transversais. Nesse caso, o feixe de paralelas determina nas transversais segmentos ordenadamente proporcionais. Vejamos,

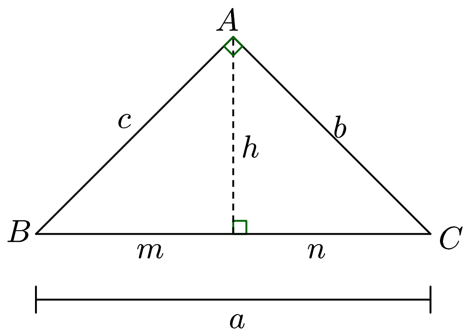


[30] Segmentos são ditos proporcionais quando a razão ordenada entre eles possui o mesmo resultado.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} \qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{MQ}} \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NQ}} \qquad \ldots$$

A seguir veremos mais dois teoremas importantes e suas aplicações na geometria plana, são eles: o teorema da bissetriz interna e o teorema da bissetriz externa.

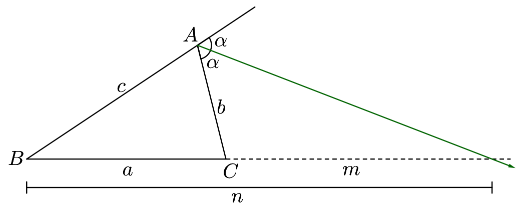
Teorema 4.2 — Bissetriz interna. A bissetriz interna divide o lado oposto de um triângulo em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Vejamos,



$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b}.$$

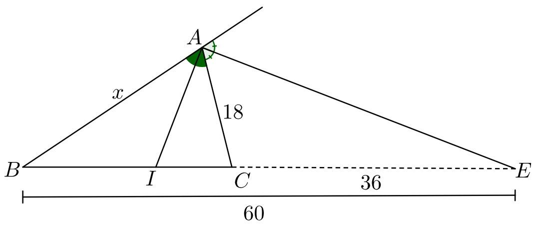
Obs. Note que $a = m + n$.

Teorema 4.3 — Bissetriz externa. A bissetriz externa de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Vejamos,



$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

Exemplo 4.4.1 Com base na figura a seguir, determine a medida do segmento $\overline{CI}$.



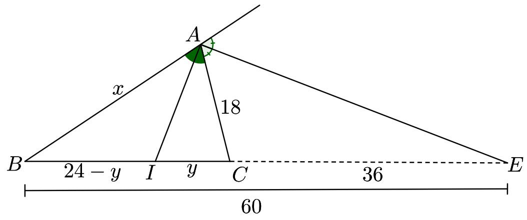
Resolução: Primeiramente, vamos determinar o valor de x através do Teorema da bissetriz externa. Desse modo,

$$\frac{36}{18} = \frac{60}{x}$$

$$36x = 60 \cdot 18$$

$$x = 30.$$

Considerando $CI = y$, temos que $BI = 24 - y$, pois $BE = 60$ e $CE = 36$. Assim,



Aplicando o Teorema da bissetriz interna, segue que

$$\frac{24 - y}{30} = \frac{y}{18}$$

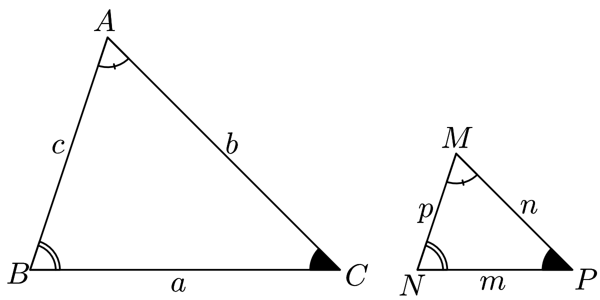
$$30y = 18(24 - y)$$

$$y = 9.$$

Logo, $CI = 9$.

4.5 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são ditos semelhantes quando apresentam a mesma forma e tamanhos proporcionais, ou seja, possuírem as mesmas medidas para seus ângulos internos e lados correspondentes proporcionais.



$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = k,$$

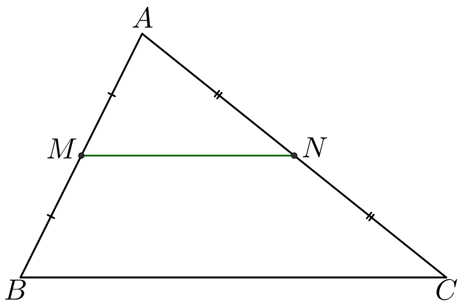
em que k é a razão de semelhança.

Notação: $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

Obs. A razão entre os perímetros dos triângulos é igual a k. Ademais, a razão entre os comprimentos de duas cevianas referentes a lados correspondentes também é igual a k. Além disso, a razão entre as áreas dos triângulos semelhantes é equivalente a k^2.

Base média

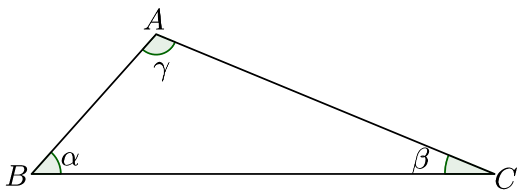
Considere um triângulo ABC, em que M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e N é o ponto médio de $\overline{AC}$. A base média desse triângulo é o segmento que une os pontos médios de dois lados. Observe a figura a seguir:



Nesse caso, $\overline{MN}$ é a base média. Ademais, os triângulos ABC e AMN são semelhantes e os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{BC}$ são paralelos. Além disso, $\overline{MN} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

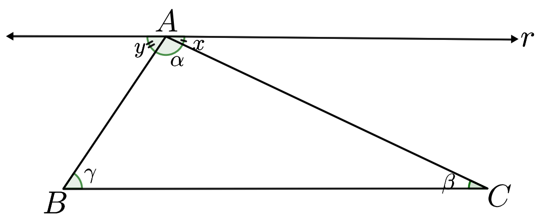
4.6 Ângulos no triângulo

A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a $180°$.



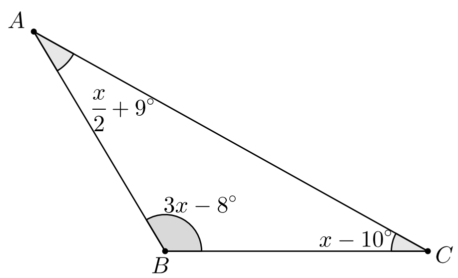
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Agora, vamos entender o porquê essa relação é válida. Vejamos,



Ao traçarmos uma reta paralela à $\overline{BC}$ no vértice A, note que os ângulos γ e y são alternos internos, assim como β e x. Desse modo, possuem mesmas medidas, isto é, $\gamma = y$ e $\beta = x$. Em A temos um ângulo raso, então $y + \alpha + x = 180°$. Assim, concluímos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Exemplo 4.6.1 Determine a medida dos ângulos do triângulo ABC a seguir:



Resolução: Primeiramente, note que $\hat{A} = \dfrac{x}{2} + 9°$, $\hat{B} = 3x - 8°$ e $\hat{C} = x - 10°$. Além disso, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. Assim,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$
$$\left(\frac{x}{2} + 9°\right) + (3x - 8°) + (x - 10°) = 180°$$
$$\frac{x}{2} + 4x = 180° + 9°$$
$$\frac{9x}{2} = 189°$$
$$x = \frac{189° \cdot 2}{9} = 42°.$$

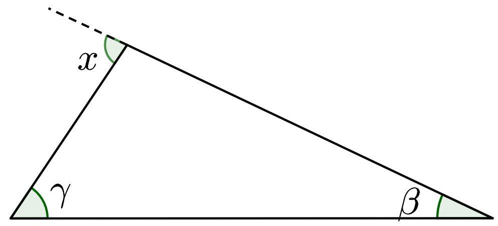
Logo, $x = 42°$. Substituindo, temos que

- $\hat{A} = \dfrac{x}{2} + 9° = \dfrac{42°}{2} + 9° = 21° + 9° = 30°$.
- $\hat{B} = 3x - 8° = 3 \cdot (42°) - 8° = 126° - 8° = 118°$.
- $\hat{C} = x - 10° = 42° - 10° = 32°$.

Portanto, os ângulos do triângulo ABC são $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 118°$ e $\hat{C} = 32°$.

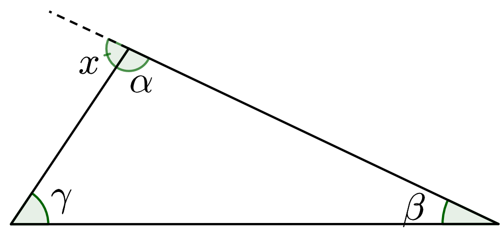
A seguir veremos um teorema que relaciona a medida do ângulo externo com os ângulos internos em um triângulo.

Teorema 4.4 — Ângulo externo. Em um triângulo qualquer, o ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



$$x = \beta + \gamma.$$

Agora, vamos entender o porquê essa relação é válida. Vejamos,



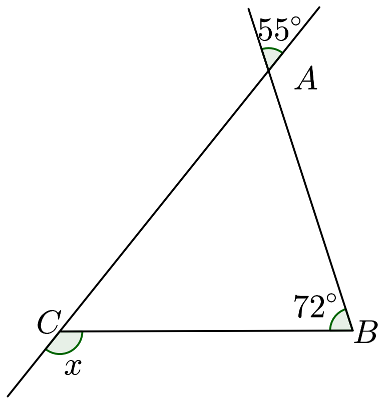
Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$ e, note que α somado com o ângulo externo x formam um ângulo raso, o qual corresponde a

$180°$. Sendo assim,

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=180° \\ x+\alpha=180° \end{cases}$$

Igualando as equações, temos que $x+\alpha=\alpha+\beta+\gamma$. Agora, subtraindo α de ambos os lados da equação, segue que $x=\beta+\gamma$. Portanto, podemos concluir que o ângulo externo x é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, isto é, β e γ.

Exemplo 4.6.2 No triângulo ABC determine a medida x.



Resolução: Neste exemplo, podemos encontrar o valor de x por dois métodos.

Na primeira resolução, determinaremos a medida de x usando apenas o Teorema do Ângulo Externo, já na segunda, utilizaremos o conceito de ângulos suplementares e soma dos ângulos internos de um triângulo. Vejamos,

Resolução I

Note que, no vértice A, por ângulos opostos pelo vértice, podemos concluir que $C\hat{A}B=55°$. Desse modo, aplicando o Teorema do Ângulo Externo, temos que

$$x=C\hat{A}B+C\hat{B}A$$

$$x=55°+72°=127°.$$

Logo, $x=127°$.

Resolução II

Observe que $A\hat{C}B=180°-x$ (ângulos suplementares). Lembre-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual $180°$. Sendo assim,

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$$

$$55°+72°+(180°-x)=180°$$

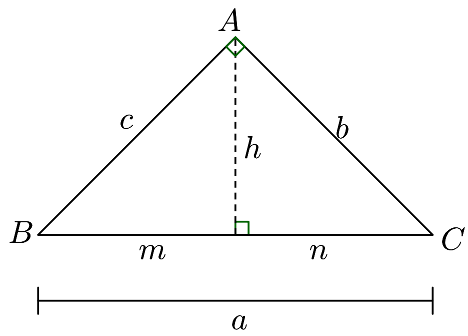
$$127°+180°-x=180°$$

$$x=180°+127°-180°=127°.$$

Portanto, x mede $127°$.

4.7 Relações métricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo retângulo a seguir.



Cujos elementos são

a: hipotenusa;
b e c: catetos;
h: altura relativa a hipotenusa;
m: projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa;
n: projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa.

Da semelhança de triângulos, temos que

$$h^2=m\cdot n \qquad b\cdot c=h\cdot a$$
$$b^2=n\cdot a \qquad b\cdot h=c\cdot n$$
$$c^2=m\cdot a \qquad c\cdot h=b\cdot m$$

Exemplo 4.7.1 Sabendo que a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é 24 cm e uma de suas projeções ortogonais mede 18 cm, determine a medida dos catetos desse triângulo.

Resolução: Primeiramente, vamos determinar o valor da outra projeção ortogonal utilizando a relação: $h^2=m\cdot n$, ou seja, $24^2=m\cdot 18$, então, $m=32$ cm. Além disso, lembre que a hipotenusa (a) é composta pela soma das projeções ortogonais, isto é, $a=m+n$, assim, $a=m+n=32+18=50$ cm.

Agora, podemos encontrar as medidas dos catetos através das relações métricas a seguir. Vejamos,

$$b^2=n\cdot a \qquad c^2=m\cdot a$$
$$b^2=18\cdot 50 \qquad c^2=32\cdot 50$$
$$b=30 \text{ cm} \qquad c=40 \text{ cm}$$

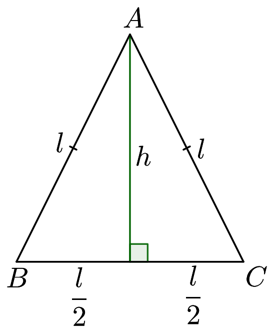
Portanto, a medida dos catetos desse triângulo é 30 cm e 40 cm.

Através das relações métricas, podemos obter o **Teorema de Pitágoras**. Assim, lembrando que $m+n=a$, podemos somar as equações $b^2=n\cdot a$ e $c^2=m\cdot a$:

$$b^2+c^2=n\cdot a+m\cdot a=a(n+m)=a^2.$$

Logo, $a^2=b^2+c^2$, isto é, a hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos em um triângulo retângulo. Ademais, temos os famosos *triângulos pitagóricos* cujos lados são determinados por números inteiros, por exemplo: $3,\ 4,\ 5$ e $5,\ 12,\ 13$.

Além disso, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para obter algumas medidas importantes, como a altura do triângulo equilátero e a diagonal do quadrado. Considere o seguinte triângulo equilátero:



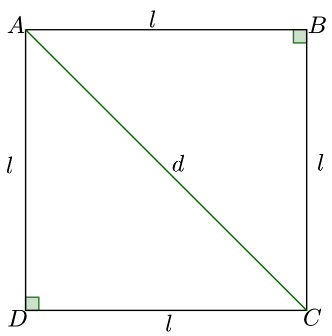
Lembre que no triângulo equilátero, a altura, mediana e bissetriz coincidem. Desse modo, aplicando o Teorema de Pitágoras temos que a altura do triângulo equilátero é dada por

$$h^2=l^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h^2=l^2+\frac{l^2}{4}$$

$$h=\frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Agora, considere um quadrado $ABCD$:



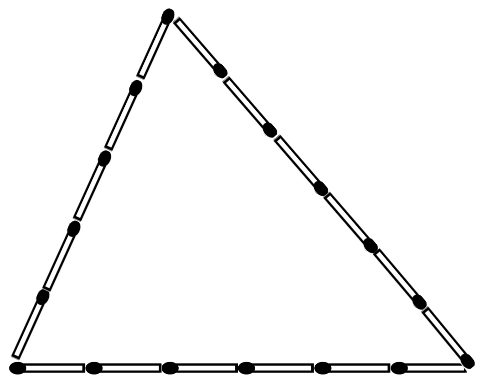
Através do Teorema de Pitágoras encontramos que a diagonal do quadrado é

$$d^2=l^2+l^2$$

$$d^2=2l^2$$

$$d=l\sqrt{2}.$$

Exercício resolvido 1 (ENEM 2014) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

a) 3.
b) 5.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

Resolução: Por hipótese um dos lados do triângulo mede 6 palitos e o perímetro de cada triângulo é composto por 17 palitos. Desse modo, a soma dos outros dois lados tem que valer 11 palitos. Sendo assim, temos as seguintes possibilidades para as medidas dos lados:

i. $6,\ 1,\ 10;$
ii. $6,\ 2,\ 9;$
iii. $6,\ 3,\ 8;$
iv. $6,\ 4,\ 7;$
v. $6,\ 5,\ 6.$

Os demais casos não serão avaliados, pois são congruentes aos anteriores pelo caso LLL. Lembre que a condição de existência de um triângulo é dada por

$$a+b>c$$

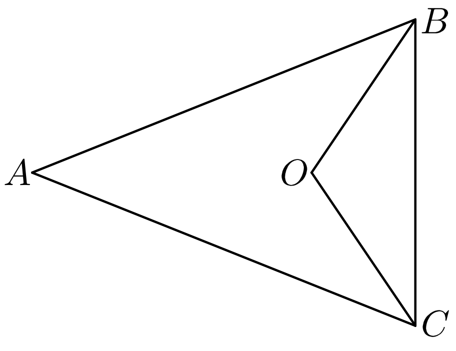
$$b+c>a$$

$$a+c>b$$

Observe que em (i) $10>6+1=7$ e em (ii) $9>6+2=8$, ou seja, em ambos os casos, o maior lado não é menor que a soma dos outros dois lados. Logo, não satisfazem a condição de existência. Desse modo, pela desigualdade triangular, é possível construir os triângulos (iii), (iv) e (v), isso porque são os únicos que satisfazem a condição de existência.

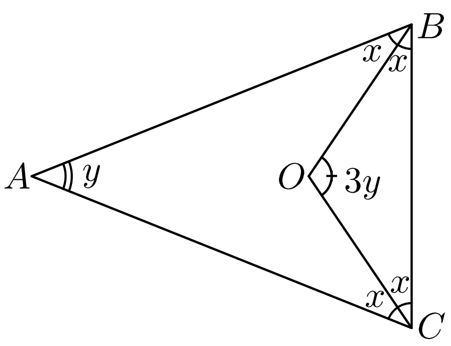
Alternativa (a).

Exercício resolvido 2 (FUVEST) Na figura abaixo, $AB = AC$, O é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo ABC, e o ângulo $B\hat{O}C$ é o triplo do ângulo $\hat{A}$. Então a medida do ângulo $\hat{A}$ é:



a) $18°$.
b) $12°$.
c) $24°$.
d) $36°$.
e) $15°$.

Resolução: Por hipótese, $AB = AC$, então o triângulo ABC é isósceles de base BC e O é o ponto de encontro das bissetrizes. Desse modo, considere $A\hat{B}O = O\hat{B}C = x$ e $A\hat{C}O = O\hat{C}B = x$ e, assim, $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 2x$. Ademais, seja $\hat{A} = y$, como $B\hat{O}C$ é o triplo do ângulo $\hat{A}$ temos que $B\hat{O}C = 3y$. Observe o triângulo ABC:



Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, segue que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

$$y + 2x + 2x = 180°.$$

Agora, observe o triângulo OBC:

$$B\hat{O}C + O\hat{B}C + O\hat{C}B = 180°$$

$$3y + x + x = 180°.$$

Sendo assim,

$$\begin{cases} y + 2x + 2x = 180° & (I) \\ 3y + x + x = 180° & (II) \end{cases}$$

Isolando y em (I):

$$y = 180° - 4x.$$

Agora, substituindo em (II), temos que

$$3 \cdot (180° - 4x) + 2x = 180°$$

$$540° - 12x + 2x = 180°$$

$$10x = 360°$$

$$x = \frac{360°}{10}$$

$$x = 36°.$$

Logo, voltando em (I):

$$\hat{A} = y = 180° - 4x = 180° - 4 \cdot (36°) = 36°.$$

Portanto, a medida do ângulo $\hat{A}$ é $36°$.

Alternativa (d).

5 Circunferência e Círculo

Nesta seção iremos abordar o conceito de circunferência e círculo. Tratam-se de figuras geométricas bem parecidas, o que pode gerar algumas dúvidas, então é importante atentar-se as suas definições. Vejamos,

Definição 5.1 *Circunferência* é uma figura geométrica constituída pelo conjunto de todos os pontos equidistantes de um ponto fixo, nesse caso, o ponto C, denominado centro da circunferência.

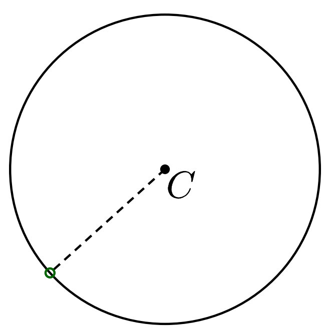


Figura 5.0.1: Circunferência

Definição 5.2 *Círculo* é o conjunto de pontos da união entre uma circunferência e os pontos internos a ela.

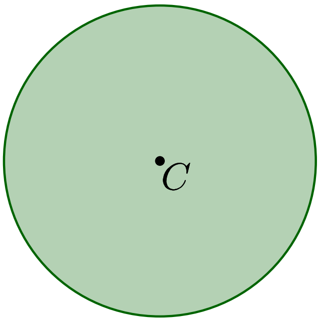
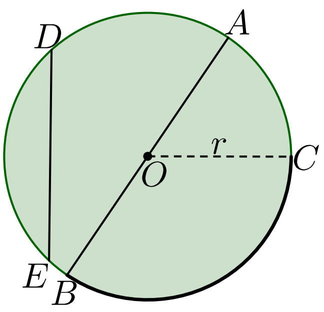


Figura 5.0.2: Círculo

Obs. Note que o círculo é limitado pela circunferência.

5.1 Elementos da Circunferência e Círculo



Raio: É distância entre o centro do círculo e qualquer ponto da circunferência, por exemplo $\overline{OC} = r$.
Diâmetro: É o segmento de reta que liga duas extremidades da circunferência e passa pelo centro do círculo, nesse caso $\overline{AB} = d$.
Corda: É o segmento de reta que liga dois pontos pertencentes à circunferência, como $\overline{DE}$.
Arco: É uma parte do comprimento de uma circunferência que é delimitado por dois pontos quaisquer pertencentes a ela, um dos arcos desse círculo é $\overset{\frown}{BC}$.

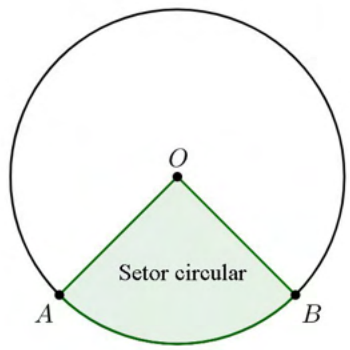
Obs. Note que o diâmetro é uma corda que contém o centro da circunferência e, além disso, é a maior corda encontrada em um círculo. Então o diâmetro é dado por

$$d = r + r = 2r.$$

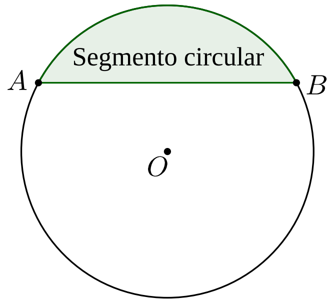
Obs. O comprimento de uma circunferência é dado por $C = 2\pi r$.

Além desses elementos básicos, o círculo possui outros elementos notáveis. Dentre eles, podemos citar o *setor circular*, o *segmento circular* e a *coroa circular*.

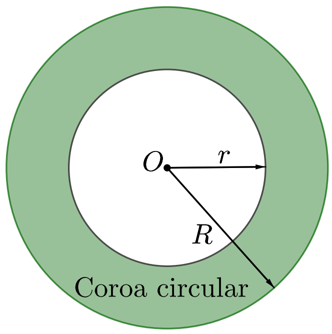
Setor circular: É a região delimitada por dois raios e um arco.



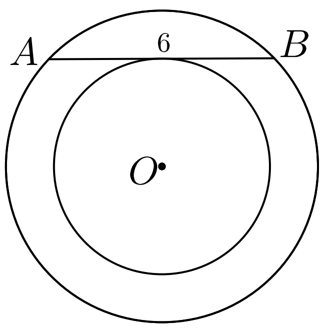
Segmento circular: É a região delimitada por uma corda e um arco.



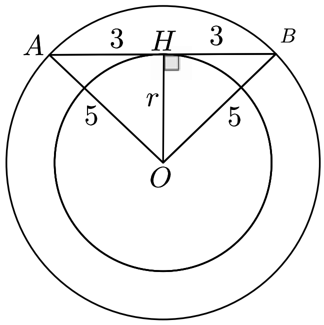
Coroa circular: É a região delimitada entre uma circunferência de raio r inscrita em outra de raio R, em que $R > r$.



Exemplo 5.1.1 Com base na figura, determine o comprimento da circunferência inscrita, sabendo que a maior circunferência tem diâmetro igual a 10 cm.



Resolução: Primeiramente, sabemos que o diâmetro é o dobro do raio e, por hipótese, como ele é igual a 10 cm, segue que $10 = 2R$, ou seja, $R = 5$ cm. A seguir traçaremos o triângulo isósceles AOB:



Desse modo, podemos encontrar o raio da circunferência inscrita utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo OHA. Vejamos,

$$5^2 = 3^2 + r^2$$

$$r^2 = 16$$

$$r = \pm 4.$$

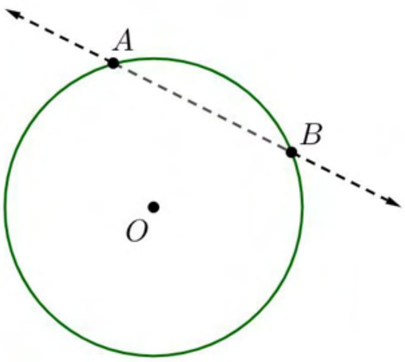
Como se trata de um lado do triângulo, o raio assume valor positivo, isto é, $r = 4$. Lembre que o comprimento de uma circunferência é dado por $C = 2\pi r$. Logo, o comprimento da circunferência inscrita é $C = 2 \cdot 4\pi = 8\pi$.

5.2 Posições relativas entre reta e circunferência

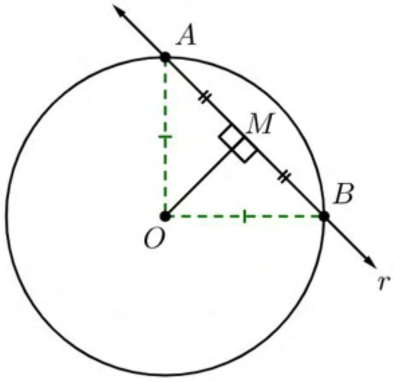
Existem algumas posições relativas entre reta e circunferência. São elas:

Secantes

Uma reta secante à circunferência é a que intersecta a circunferência em dois pontos distintos.

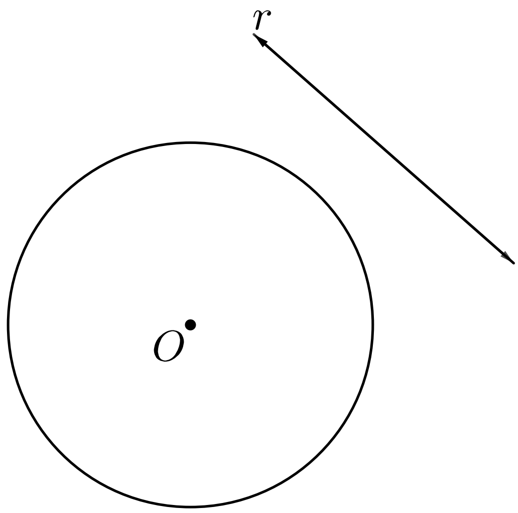


Obs. Note que, ao traçarmos a perpendicular do centro O em relação a reta r, encontramos o ponto médio M da corda $\overline{AB}$. Isso porque, se fecharmos o triângulo com os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, obtemos um triângulo isósceles e, sabemos que nele a mediana e a altura coincidem, como mostra a figura a seguir:



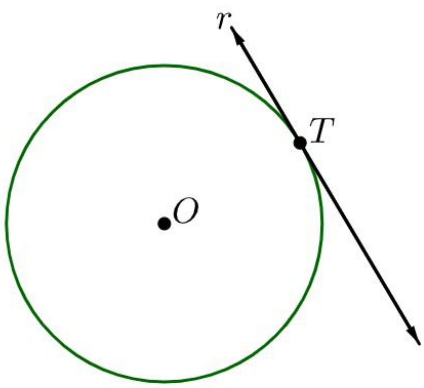
Externas

Uma reta externa à circunferência é a que não intersecta a circunferência em nenhum ponto.

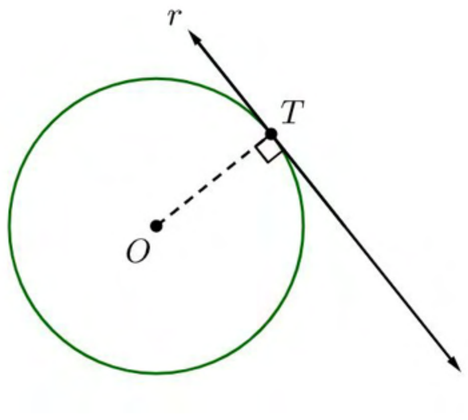


Tangentes

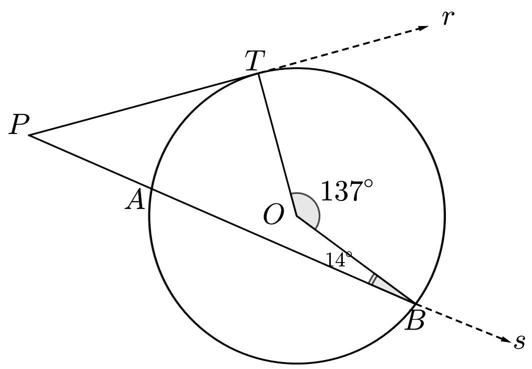
Uma reta tangente à circunferência é a reta que intersecta a circunferência em um único ponto, denominado ponto de tangência T.



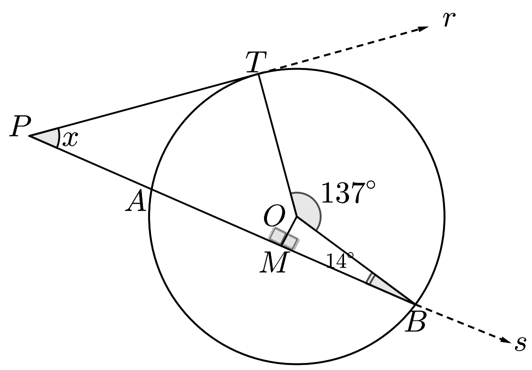
Obs. O raio $\overline{OT}$ é perpendicular à reta tangente r. Isso pode ser facilmente demonstrado através do conceito de distância entre ponto e reta, que será visto no capítulo Geometria Analítica (colocar referência).



Exemplo 5.2.1 Na figura a seguir, determine o ângulo formado entre a reta tangente r e a secante s.



Resolução: Primeiramente, como a reta r é tangente à circunferência no ponto T, o raio é perpendicular a essa reta. Além disso, podemos traçar a perpendicular do centro O em relação a reta s. Vejamos,



Agora, no triângulo retângulo OMB, podemos utilizar a soma dos ângulos internos de um triângulo para determinar $M\hat{O}B$:

$$14^\circ + M\hat{O}B + 90^\circ = 180^\circ$$

$$M\hat{O}B = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ.$$

Logo, o ângulo $M\hat{O}B = 76^\circ$. No centro O, temos que $137^\circ + M\hat{O}T + 76^\circ = 360^\circ$, ou seja, $M\hat{O}T = 147^\circ$. Por fim, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero $(n = 4)$ é 360°, pois como vimos $S_i = (n-2)\cdot 180^\circ = (4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ$, então em $PTOM$:

$$x + 90^\circ + 147^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$x = 360^\circ - 327^\circ = 33^\circ.$$

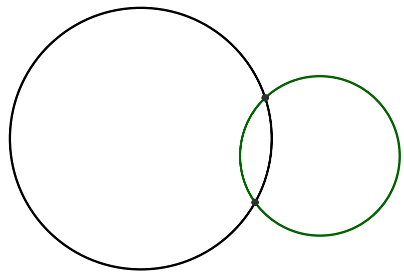
Portanto, o ângulo formado entre a reta tangente r e a secante s é $x = 33^\circ$.

5.3 Posições relativas entre duas circunferências

Existem algumas posições relativas entre duas circunferências. São elas:

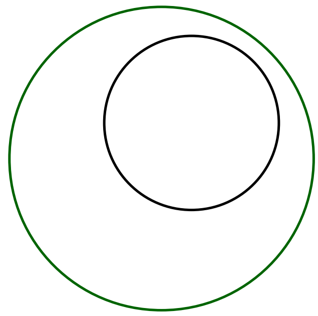
Secantes

Duas circunferências são secantes se possuem somente dois pontos em comum.

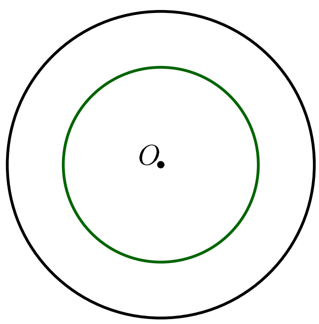


Internas

Duas circunferências são internas quando não possuem pontos em comum e uma está localizada na região interna da outra.

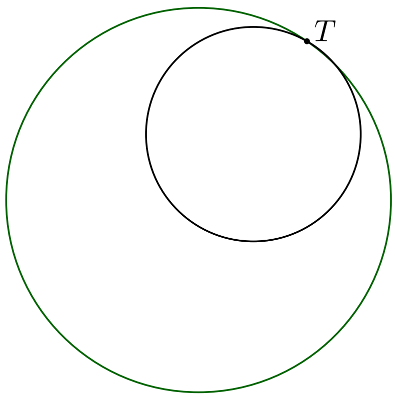


Obs. Um caso específico de circunferências internas são as concêntricas, as quais possuem o mesmo centro O.



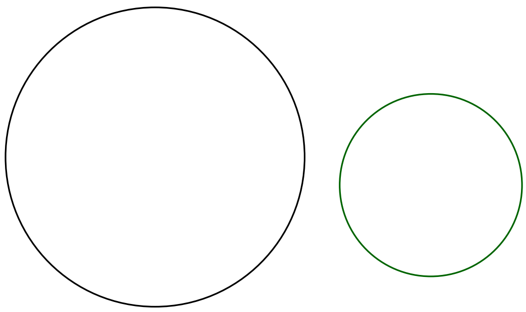
Tangentes internas

Duas circunferências são tangentes internas quando são internas, porém possuem um ponto de tangência T em comum.



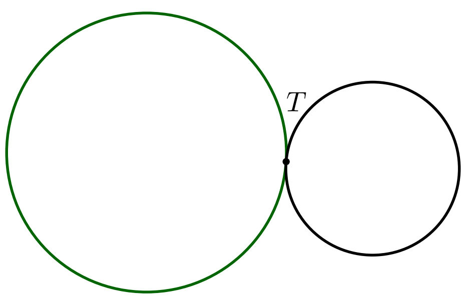
Externas

Duas circunferências são externas quando não possuem pontos em comum e uma está localizada na região externa da outra.



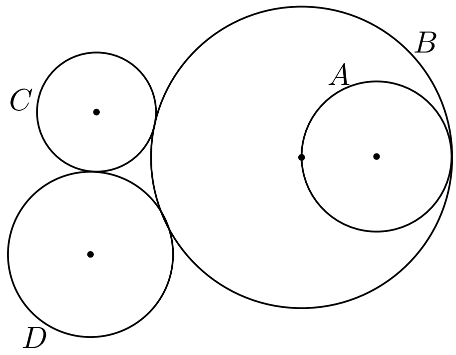
Tangentes externas

Duas circunferências são tangentes externas quando são externas, porém possuem um ponto de tangência T em comum.



Obs. Duas circunferências são congruentes quando possuem raios iguais.

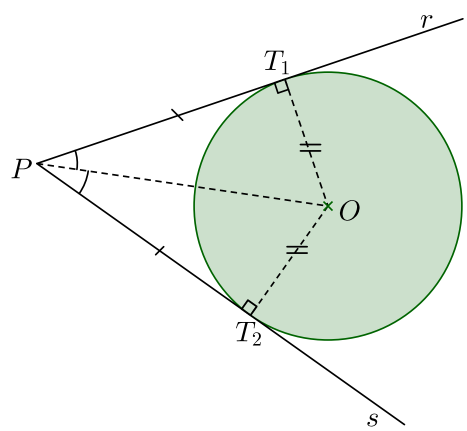
Exemplo 5.3.1 Na figura, o diâmetro da circunferência A, a qual passa pelo centro de B, é igual a 12 cm, a soma entre os raios de A e C é 10 cm e a distância entre os centros das circunferências C e D é 14 cm. Determine os raios de todas as circunferências.



Resolução: Por hipótese, como o diâmetro da circunferência A é 12 cm, segue que seu raio é 6 cm. Além disso, note que as circunferências A e B se tangenciam internamente e, nesse caso, o diâmetro de A é equivalente ao raio de B, ou seja, o raio da circunferência B é 12 cm. Ademais, como a soma entre os raios de A e C é 10 cm, temos que o raio da circunferência C é 4 cm, uma vez que o raio de A é 6 cm. Por fim, sabemos que a distância entre os centros das circunferências C e D é 14 cm, logo, o raio da circunferência D é 10 cm.

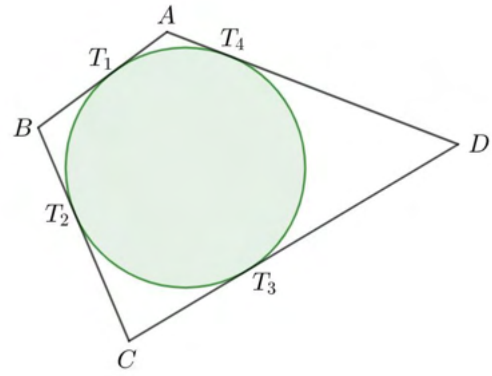
5.4 Segmentos tangentes a um círculo

Considere um ponto P exterior a um círculo, ao traçarmos as tangentes externas r e s passando pelos pontos T_1 e T_2 pertencentes à circunferências, temos que $PT_1 = PT_2$ e $O\hat{P}T_1 = O\hat{P}T_2$. Podemos verificar facilmente a veracidade dessa propriedade pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos.



5.5 Quadrilátero circunscrito a um círculo

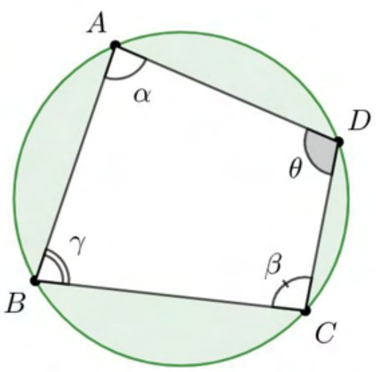
Um quadrilátero $ABCD$ é circunscrito a um círculo quando seus quatro lados são tangentes à circunferência. Vejamos,



Para que um quadrilátero seja circunscritível a um círculo, a soma de dois lados opostos deve ser igual à soma dos demais, ou seja, $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$.

5.6 Quadrilátero inscrito a um círculo

Um quadrilátero $ABCD$ é inscrito a um círculo quando seus quatro vértices pertencem à circunferência. Vejamos,



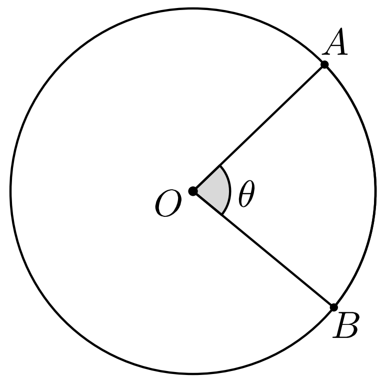
Para que um quadrilátero seja inscritível a um círculo, os ângulos opostos devem ser suplementares, ou seja, $\alpha+\beta=180°$ e $\gamma+\theta=180°$.

5.7 Ângulos na circunferência

A circunferência possui ângulos importantes. A seguir veremos alguns deles:

Ângulo central

O ângulo central possui o vértice no centro da circunferência.

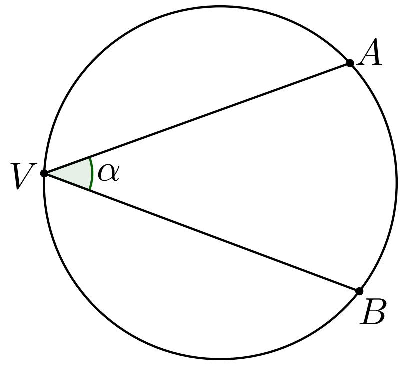


Ângulo central: θ

Note que $\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central. Sendo assim, $\theta=\overset{\frown}{AB}$.

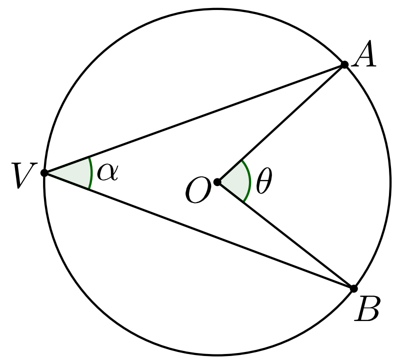
Ângulo inscrito

O ângulo inscrito possui o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.



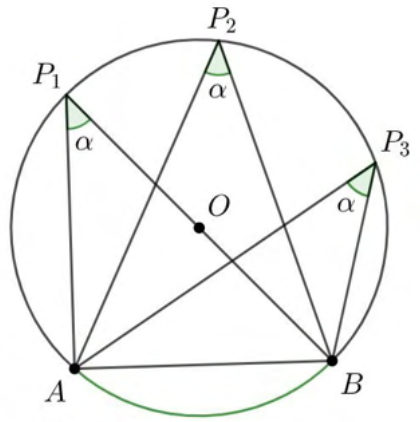
Ângulo inscrito: α

O arco correspondente ao ângulo inscrito é $\overset{\frown}{AB}$. Podemos relacionar o ângulo inscrito com o central pois eles "enxergam" o mesmo arco. Observe,



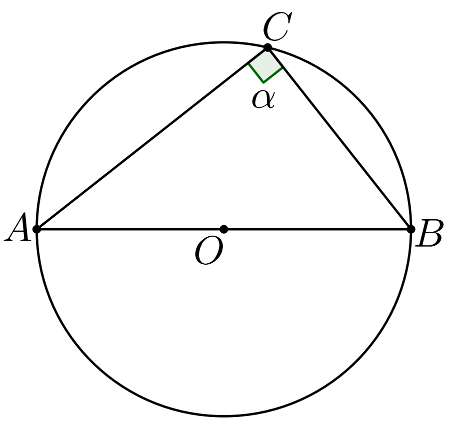
$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{\theta}{2}.$$

Obs. Os vértices dos ângulos inscritos que possuem os lados passando por A e B e tem medidas iguais a α determinam um arco capaz, como ilustrado na figura a seguir:



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}.$$

Exemplo 5.7.1 Considere um triângulo inscrito em uma circunferência, como na figura a seguir.



Calcule a medida do ângulo α e determine a natureza do triângulo (em relação aos ângulos).

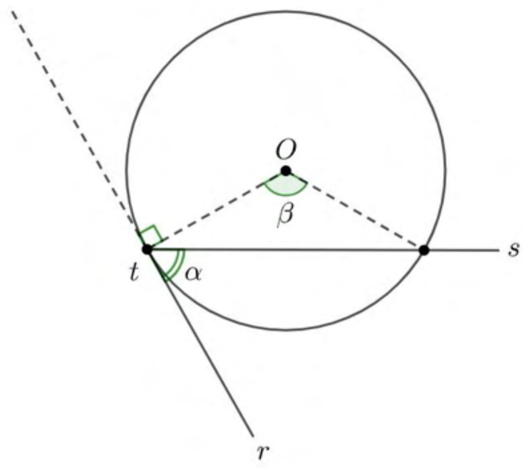
Resolução: Primeiramente, vamos determinar a medida do ângulo α. Note que $\overset{\frown}{AB} = 180°$, pois equivale a metade da circunferência. Sendo assim,

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Logo, $\alpha = 90°$ (ângulo reto). Portanto, o triângulo é retângulo.

Ângulo de segmento

O ângulo de segmento é constituído por uma reta tangente r no ponto de tangência T e por uma reta secante s à circunferência que também passa por esse ponto.

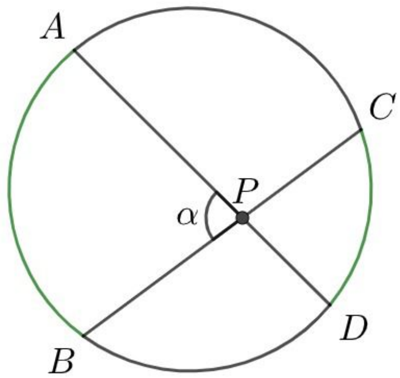


A medida do ângulo de segmento é dada por $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

Ângulo excêntrico

Existem dois tipos de ângulos excêntricos. Vejamos,

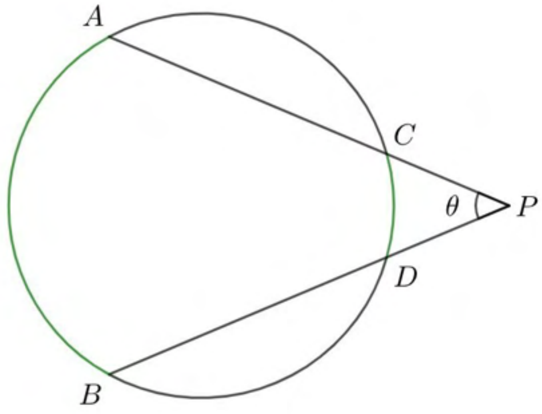
- Interior:



O ângulo excêntrico interior é aquele cujo vértice P não coincide com o centro da circunferência e está interior a ela. Nesse caso, a medida do ângulo α é dada por

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}.$$

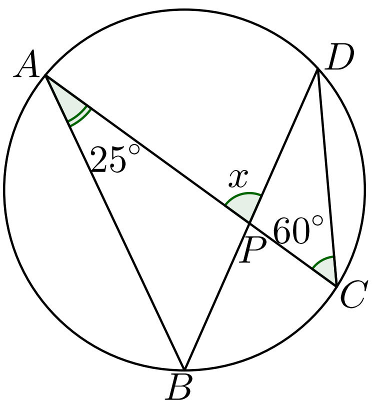
- Exterior:



O ângulo excêntrico exterior é aquele cujo vértice P não coincide com o centro da circunferência e está exterior a ela. Nesse caso, a medida do ângulo θ é dada por

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}.$$

Exemplo 5.7.2 Determine o valor de x, na figura a seguir.



Resolução: Neste exemplo, podemos encontrar o valor de x por dois métodos.

Na primeira resolução, determinaremos a medida de x usando o noção de arco capaz e o Teorema do ângulo externo, já na segunda, utilizaremos o conceito de ângulos excêntricos interiores. Vejamos,

Resolução I

Primeiramente, note que os ângulos inscritos $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$ determinam o arco capaz $\overset{\frown}{BC}$, uma vez que eles possuem lados passando por B e C. Sendo assim, $B\hat{A}C = B\hat{D}C = 25°$. Logo, aplicando o Teorema do ângulo externo no triângulo CDP, temos que o valor de x é

$$x = 25° + 60° = 85°.$$

Resolução II

Note que os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}D$ são inscritos na circunferência e, lembre que um ângulo inscrito representa a metade do arco correspondente. Sendo assim,

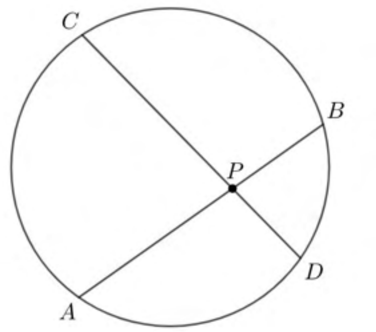
$$25° = B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

$$\overset{\frown}{BC} = 50°.$$

E, analogamente, encontramos que $\overset{\frown}{AD} = 120°$. Por fim, a medida do ângulo do ângulo x é dada por $x = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{50° + 120°}{2} = 85°$.

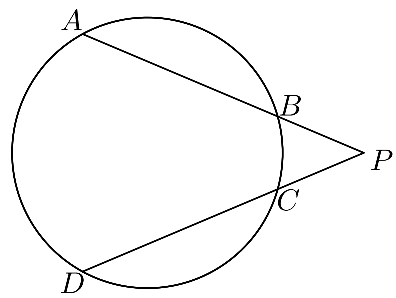
5.8 Relações métricas no círculo

Existem algumas relações métricas no círculo, as quais podem ser facilmente justificadas com o auxílio da semelhança de triângulos. Primeiramente, seja P um ponto interior a um círculo e duas cordas concorrentes passando por esse ponto. Assim,



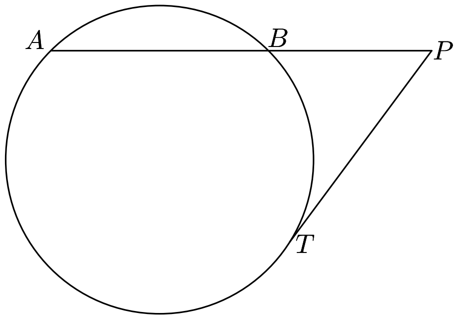
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Além disso, considere P um ponto exterior a um círculo e prolongamento de duas cordas passando por esse ponto. Desse modo,



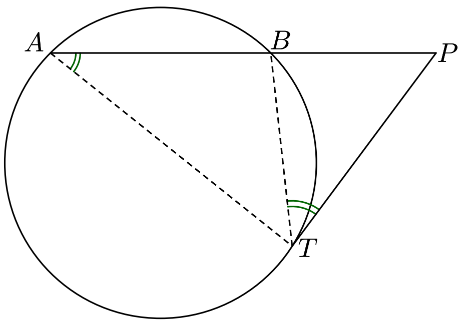
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Por fim, considere novamente um ponto exterior P a um círculo, uma tangente e uma secante com a origem passando por esse ponto.



$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

Agora, vamos entender porque essa relação é válida. Vejamos,

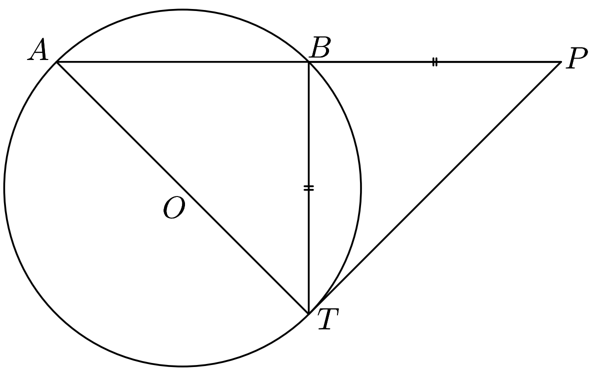


Observe que $P\hat{T}B$ é um ângulo de segmento e $P\hat{T}B = B\hat{A}T$. Através da semelhança de triângulos, temos que $\Delta PBT \sim \Delta PTA$. Sendo assim,

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}$$

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

Exemplo 5.8.1 Determine o perímetro do triângulo ATB inscrito na circunferência de raio 7 cm, sabendo que $PA = 16$ cm e $PT = 8$ cm.



Resolução: Primeiramente, como o raio da circunferência é 7 cm, segue que $TA = 2 \cdot 7 = 14$ cm. Além disso, note que P é um ponto exterior a circunferência, construído a partir de uma tangente e uma secante com a origem passando por esse ponto. Sendo assim,

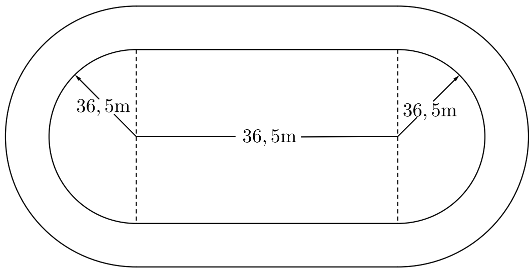
$$PT^2 = PA \cdot PB$$

$$8^2 = 16 \cdot PB$$

$$PB = 4 \text{ cm.}$$

Ademais, observe que $PA = AB + PB$, então $AB = 12$ cm e, por hipótese, $PB = BT$. Logo, o perímetro do triângulo ATB é dado por $AB + BT + TA = 12 + 4 + 14 = 30$ cm.

Exercício resolvido 1 (ENEM 2011) O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de $9,76$ m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



BIEMBENGUT, M. S. Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de $1°$ e $2°$ graus. 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro, 1990 (adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

a) 1.
b) 4.
c) 5.
d) 7.
e) 8.

Resolução: Primeiramente, lembre que o comprimento de uma circunferência é dado por $C = 2\pi r$. Além disso, podemos notar através da imagem que a pista é composta por segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência com raio r. Sendo assim, o comprimento total de uma volta completa é dado por

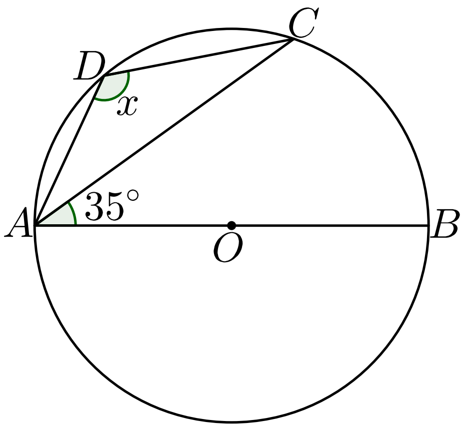
$$2 \cdot 84,39 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi r$$

$$168,78 + 2\pi r.$$

Note que quanto menor o raio r, menor é a distância que o atleta deve percorrer. Logo, o corredor que optar pela raia 1 estaria sendo beneficiado, já que elas são numeradas do centro da pista para a extremidade.

Alternativa (a).

Exercício resolvido 2 (FUVEST) A medida do ângulo $A\hat{D}C$ inscrito na circunferência de centro O é:



a) $125°$.
b) $110°$.
c) $120°$.
d) $100°$.
e) $135°$.

Resolução: Por hipótese, o ângulo $A\hat{D}C$ é inscrito na circunferência. Assim,

$$A\hat{D}C = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2}.$$

Note que $\widehat{AB} = 180°$, pois equivale a metade da circunferência. Além disso, como o ângulo inscrito mede $B\hat{A}C = 35°$ então o arco $\widehat{BC}$ vale o seu dobro, ou seja, $\widehat{BC} = 70°$. Logo, a medida do ângulo $A\hat{D}C$ inscrito na circunferência de centro O é

$$A\hat{D}C = \frac{180° + 70°}{2} = 125°.$$

Alternativa (a).

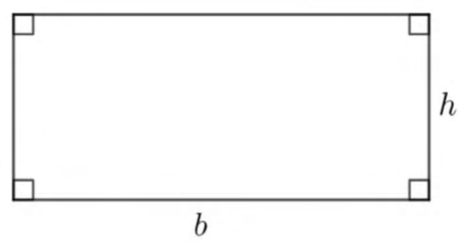
---

6 Áreas

Nessa seção abordaremos as áreas de algumas figuras planas, as quais medem o tamanho total da superfície dessas figuras, ou seja, todo o espaço que elas ocupam dentro de um plano. Vejamos,

Retângulo

O retângulo é um quadrilátero convexo formado por dois pares de lados opostos paralelos e ele possui quatro ângulos retos. Considere o retângulo a seguir:

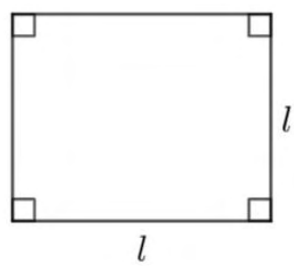


em que b é a base e h é a altura. Logo, a área do retângulo é dada por

$$A_R = b \cdot h.$$

Quadrado

O quadrado é um retângulo particular, o qual possui mesmas dimensões, isto é, quatro lados congruentes. Considere o quadrado a seguir:

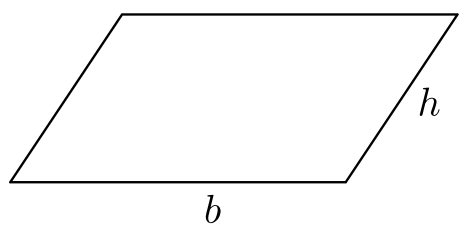


em que l representa o lado do quadrado. Logo, a área do quadrado é

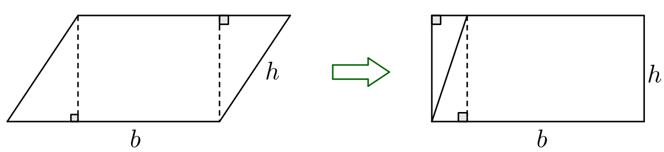
$$A_Q = l \cdot l = l^2.$$

Paralelogramo

O paralelogramo é um quadrilátero convexo formado por dois pares de lados opostos paralelos. Considere o paralelogramo a seguir:



em que b é a base e h é a altura. Note que podemos decompô-lo em um retângulo e dois triângulos. Vejamos,

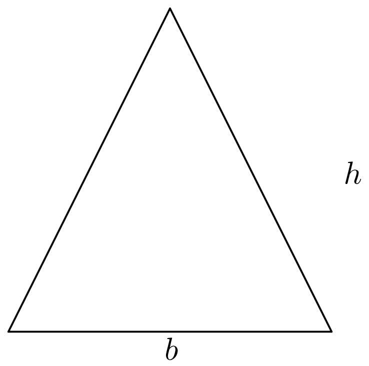


Assim, o paralelogramo é equivalente a um retângulo. Logo, sua área é dada por

$$A_P = b \cdot h.$$

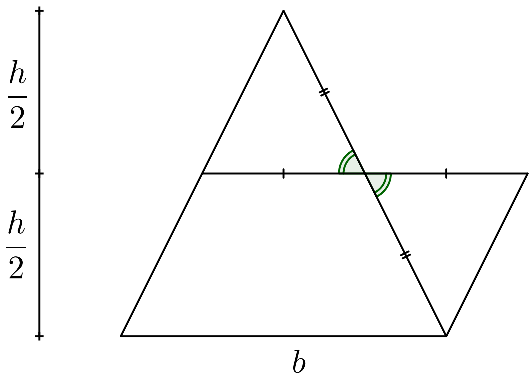
Triângulo

Lembre que o triângulo é um polígono de três lados. Desse modo, considere o triângulo a seguir:



em que b é a base e h é a altura do triângulo.

Vejamos,



Assim, o triângulo é equivalente a um paralelogramo de base b e altura $\frac{h}{2}$. Logo, sua área é dada por

$$A_\triangle = b \cdot \frac{h}{2} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Obs. No triângulo retângulo, um cateto é a altura em relação ao outro cateto. Nesse caso, temos que sua área é

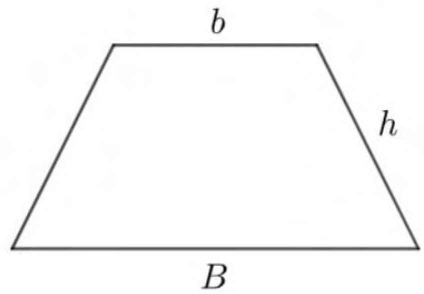
$$A = \frac{\text{cateto} \cdot \text{cateto}}{2}.$$

Além disso, lembre que a altura do triângulo equilátero de lado l é $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Desse modo, a área do triângulo equilátero é:

$$A = l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

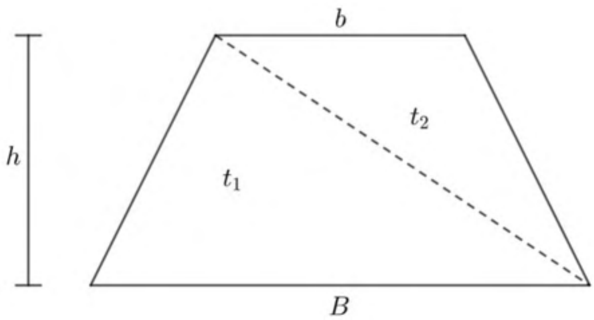
Trapézio

O trapézio é um quadrilátero convexo formado por um par de lados paralelos. Considere o trapézio a seguir:



em que B é a base maior, b é a base menor e h é a altura.

Note que podemos decompô-lo em dois triângulos. Vejamos,

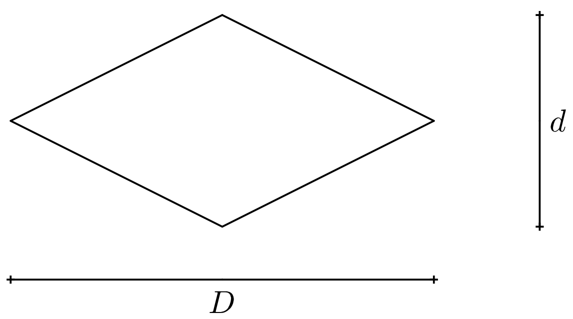


Assim, a área do trapézio é dada pela soma das áreas dos dois triângulos que o compõe, ou seja,

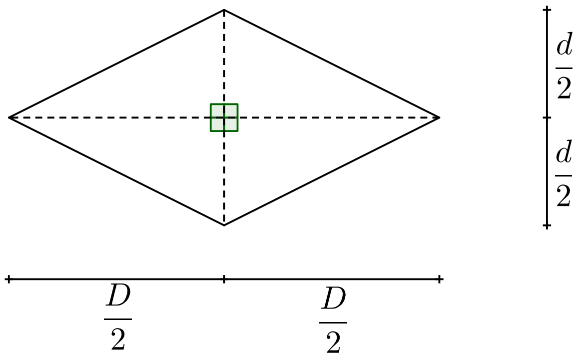
$$A_T = t_1 + t_2 = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}.$$

Losango

O losango é um paralelogramo que possui quatro lados congruentes. Considere o losango a seguir:



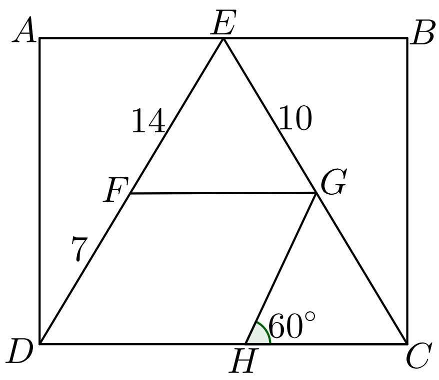
em que D é a diagonal maior e d é a diagonal menor. Note que podemos decompô-lo em quatro triângulos retângulos. Vejamos,



Assim, a área do losango é dada por

$$A_L = 4\left(\frac{D}{2}\cdot\frac{d}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{D\cdot d}{2}.$$

Exemplo 6.0.1 Determine a área do paralelogramo $DFGH$, sabendo que a área do quadrado $ABCD$ é 324 cm^2 e $CE = 15$ cm.



Resolução: Para determinar a área do paralelogramo $DFGH$, precisamos encontrar sua base e altura. Primeiramente, sabemos que $CE = 15$ cm e $EG = 10$ cm, então $GC = 5$ cm, além disso, a área do quadrado $ABCD$ é 324 cm^2 e como $A_Q = l^2$, temos que $l = CD = 18$ cm. Note que os triângulos DEC e FEG são semelhantes, assim:

$$\frac{CD}{FG} = \frac{CE}{EG}$$

$$\frac{18}{FG} = \frac{15}{10}$$

$$15\cdot FG = 18\cdot 10$$

$$FG = 12 \text{ cm}.$$

Ademais, os triângulos HGC e FEG também são semelhantes, então segue que

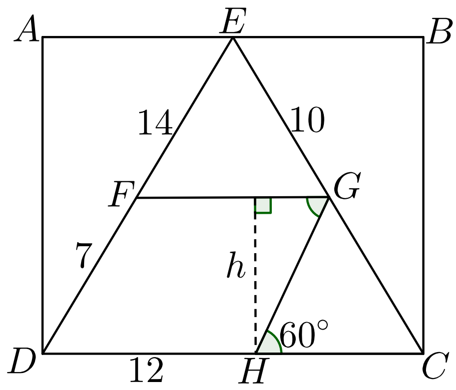
$$\frac{EF}{GH} = \frac{EG}{GC}$$

$$\frac{14}{GH} = \frac{10}{5}$$

$$10\cdot GH = 14\cdot 5$$

$$GH = 7 \text{ cm}.$$

Vejamos,



Por trigonometria, podemos encontrar a altura do paralelogramo:

$$\operatorname{sen}(60°) = \frac{h}{7}$$

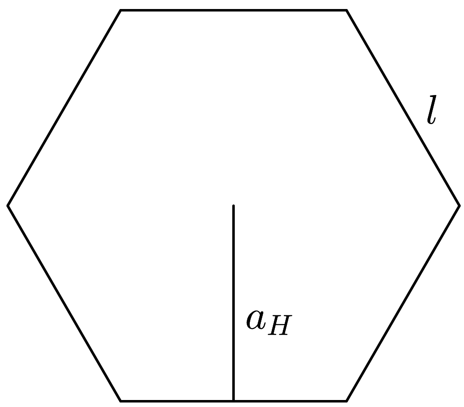
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{7}$$

$$h = \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ cm}.$$

Por fim, a área do paralelogramo $DFGH$ é $A_P = b\cdot h = 12\cdot\frac{7\sqrt{3}}{2} = 42\sqrt{3}$ cm^2.

Polígono regular

A área de um polígono regular é o produto do semiperímetro (p) pelo apótema (a), ou seja, $A = p\cdot a$. Por exemplo: considere o seguinte hexágono regular de lado l.

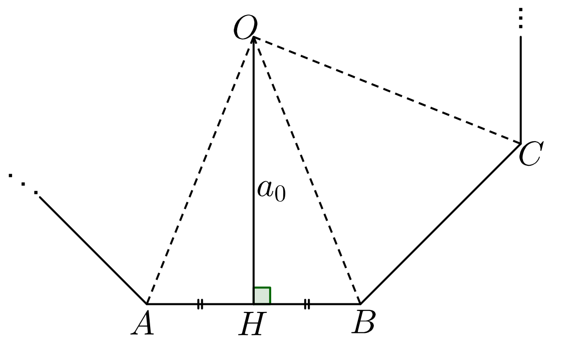


Note que o semiperímetro é dado por $p = 3l$ e lembre que o apótema é $a_H = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Sendo assim, a área do hexágono é:

$$A_H = p\cdot a = 3l\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}l^2}{2}.$$

Exemplo 6.0.2 Determine a área de um octógono regular cujo lado mede 4 cm. Adote: $\operatorname{tg}(22,5°) = 0,415$.

Resolução: Primeiramente, lembre que o octógono regular possui oito lados iguais, então o semiperímetro desse polígono é igual a $p = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$ cm. Vejamos,



Note que o ângulo $A\hat{O}B$ é igual a $\frac{360°}{8} = 45°$, pois o octógono é regular. Além disso, o apótema divide o lado em duas partes iguais e que também é altura e bissetriz, assim, $AH = HB = 2$ cm e $A\hat{O}H = B\hat{O}H = 22,5°$. Logo, para descobrir o apótema, basta calcularmos a tangente de $A\hat{O}H$ no triângulo AHO:

$$\text{tg}(22,5°) = \frac{2}{a_O}$$

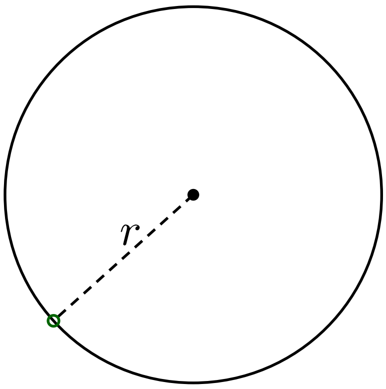
$$a_O = \frac{2}{0,415}$$

$$a_O \approx 4,818 \text{ cm.}$$

Por fim, a área do octógono regular é dada por $A_o = p \cdot a_O = 16 \cdot 4,818 \approx 77$ cm^2.

Círculo

Considere o círculo a seguir:

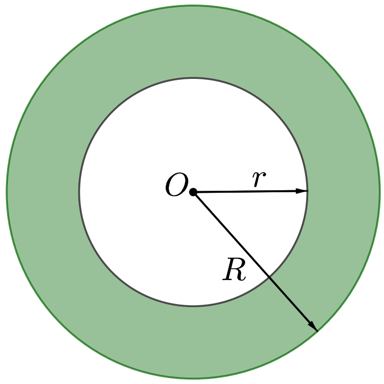


A área de um círculo é dada por

$$A_\circ = \pi r^2.$$

Coroa circular

Considere a coroa circular a seguir:

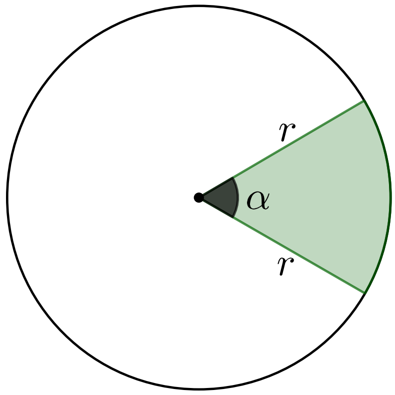


A área de uma coroa circular é dada por

$$A_{\text{coroa}} = \pi(R^2 - r^2).$$

Setor circular

Considere o setor circular a seguir:



Vejamos,

$$\begin{aligned} 360° &\text{ —— } \pi r^2 \\ \alpha &\text{ —— } A_{\text{setor}} \end{aligned}$$

Logo, a área de um setor circular é dada por

$$A_{\text{setor}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}.$$

Exemplo 6.0.3 Considere uma coroa circular cujo raio maior é o triplo do menor, calcule a medida dos raios dessa coroa circular sabendo que sua área é 512π m^2.

Resolução: Por hipótese, sabemos que $R = 3r$ e $A_{\text{coroa}} = 512\pi$ m^2. Além disso, lembre que a área de uma coroa circular é

$$A_{\text{coroa}} = \pi(R^2 - r^2).$$

Assim, substituindo os valores:

$$512\pi = \pi((3r)^2 - r^2)$$

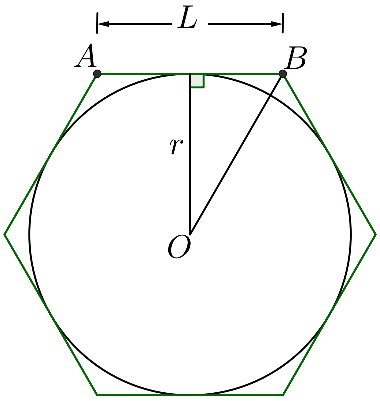
$$512\pi = \pi(9r^2 - r^2)$$

$$512\pi = \pi \cdot 8r^2$$

$$r^2 = \frac{512\pi}{8\pi} = 64$$
$$r = 8 \text{ m}.$$

Logo, a medida dos raios dessa coroa circular são $r = 8$ m e $R = 3r = 3 \cdot 8 = 24$ m.

Exercício resolvido 1 (ENEM 2018) Um brinquedo chamado pula-pula, quando visto de cima, consiste de uma cama elástica com contorno em formato de um hexágono regular.



Se a área do círculo inscrito no hexágono é 3π metros quadrados, então a área do hexágono, em metro quadrado, é

a) 9.
b) $6\sqrt{3}$.
c) $9\sqrt{2}$.
d) 12.
e) $12\sqrt{3}$.

Resolução: Por hipótese, a área do círculo inscrito no hexágono é 3π e sabemos que a área do círculo é $A_\circ = \pi r^2$. Sendo assim,

$$\pi r^2 = 3\pi$$
$$r^2 = 3$$
$$r = \sqrt{3}.$$

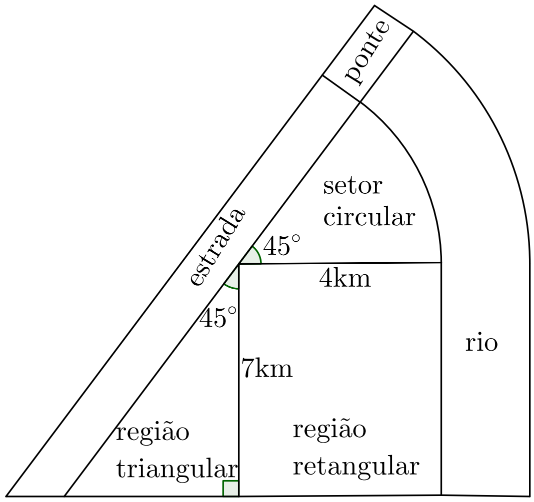
Note que r é a altura do triângulo equilátero AOB, uma vez que o hexágono é composto por seis triângulos equiláteros. Ademais, lembre que a altura do triângulo equilátero é dada por $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$. Desse modo,

$$r = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$
$$\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$
$$2\sqrt{3} = l\sqrt{3}$$
$$l = 2 \text{ m}.$$

Por fim, a área do hexágono é $A_H = \dfrac{3\sqrt{3}l^2}{2} = \dfrac{3 \cdot 2^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ m^2.

Alternativa (b).

Exercício resolvido 2 (UEL 2010) Sabendo-se que o terreno de um sítio é composto de um setor circular, de uma região retangular e de outra triangular, com as medidas indicadas na figura a seguir, qual a área aproximada do terreno?



a) $38,28$ km^2.
b) $45,33$ km^2.
c) $56,37$ km^2.
d) $58,78$ km^2.
e) $60,35$ km^2.

Resolução: Primeiramente, vamos calcular a área da região retangular cujos lados medem 7 km e 4 km. Desse modo, $A_R = b \cdot h = 7 \cdot 4 = 28$ km^2. Agora, calcularemos a área da região triangular, veja que é um triângulo retângulo e nele um cateto é a altura em relação ao outro cateto. Nesse caso, sua área é $A_\triangle = \dfrac{\text{cateto} \cdot \text{cateto}}{2}$. Para isso precisamos determinar a medida do cateto desconhecido:

$$tg(45°) = \frac{x}{7}$$
$$1 = \frac{x}{7}$$
$$x = 7 \text{ km}.$$

Assim, a área da região triangular é $A_\triangle = \dfrac{7 \cdot 7}{2} = \dfrac{49}{2} = 24,5$ km^2. Por fim, vamos determinar a área do setor circular, a qual é dada por $A_{\text{setor}} = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360°}$, em que $r = 4$ km. Então, segue que

$$A_{\text{setor}} = \frac{4^2 \cdot 45° \cdot \pi}{360°} \approx 6,28 \text{ km}^2.$$

Portanto, a medida aproximada do terreno é

$$A_T = A_R + A_\triangle + A_{\text{setor}} = 28 + 24,5 + 6,28 = 58,78 \text{ km}^2.$$

Alternativa (d).

7 Exercícios propostos

Exercício 10.1 Considerando as noções primitivas que compõem a Geometria Plana, é correto afirmar que:

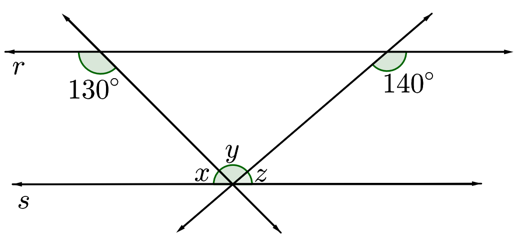
a) Seis pontos distintos determinam exatamente três planos.
b) Dados três pontos, existe só uma reta que os contém.
c) Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse plano.
d) Três pontos pertencentes a um plano sempre são colineares.
e) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são adjacentes.

Exercício 10.2 (UNICENTRO) Analise cada sentença e assinale a alternativa correta.

I) Um ponto é concebido como algo sem dimensão, sem massa e sem volume.
II) A definição de uma reta é concebida com determinada espessura, com início e fim, e sobre uma reta não podemos definir segmentos de semi retas.
III) Dois pontos A e B de uma reta s definem um segmento, que é o conjunto dos pontos de s que estão entre A e B, incluindo A e B. Os pontos A e B são chamados de extremidades do segmento. Indicamos como $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$.
IV) Os elementos da geometria são definidos em um espaço. Qualquer conjunto de pontos, como reta, plano, trapézio, retângulo, cubo, prisma, esfera; é subconjunto do espaço.

a) V, V, V, F.
b) V, F, V, V.
c) F, V, F, V.
d) V, F, V, F.

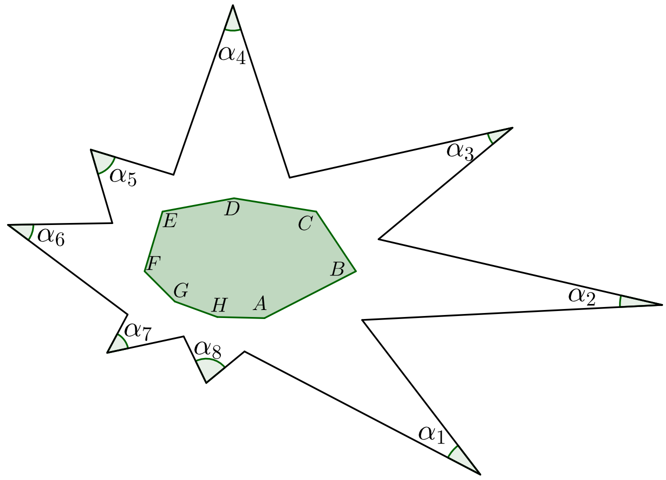
Exercício 10.3 Sabendo que as retas r e s são paralelas, determine os valores dos ângulos x, y e z.



Exercício 10.4 (FUVEST 1977) O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 h e 12 minutos é

a) $27°$.
b) $30°$.
c) $36°$.
d) $42°$.
e) $72°$.

Exercício 10.5 (FUVEST 2018) Prolongando-se os lados de um octógono convexo $ABCDEFGH$, obtém se um polígono estrelado, conforme a figura.



A soma $\alpha_1 + ... + \alpha_8$ vale

a) $180°$.
b) $360°$.
c) $540°$.
d) $720°$.
e) $900°$.

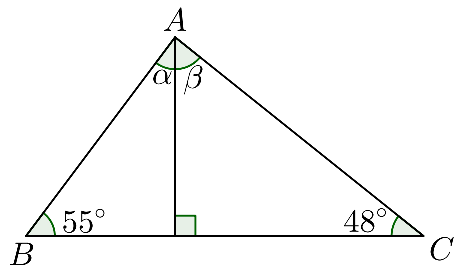
Exercício 10.6 (FUVEST 1998) Dois ângulos internos de um polígono convexo medem $130°$ cada um, e os demais ângulos internos medem $128°$ cada um. O número de lados do polígono é:

a) 6.
b) 7.
c) 13.
d) 16.
e) 17.

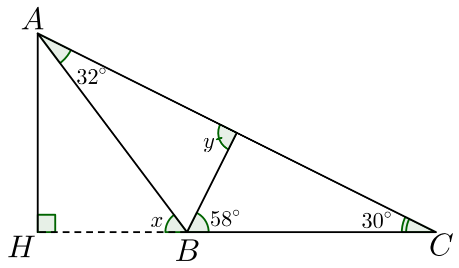
Exercício 10.7 Com os segmentos 22 cm, 13 cm e 9 cm é possível construir um triângulo? Justifique sua resposta.

Exercício 10.8 Os segmentos 36 cm, 48 cm e 60 cm constituem um triângulo?

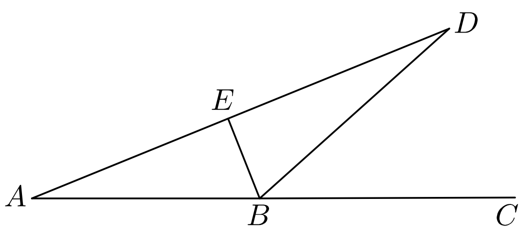
Exercício 10.9 Observe o triângulo ABC e determine α e β:



Exercício 10.10 Determine x e y em graus.

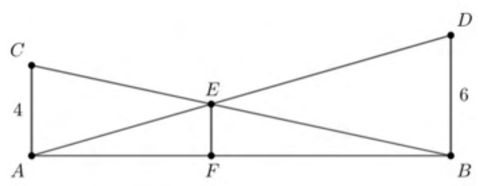


Exercício 10.11 (UFMG) Nessa figura, $AB = BD = DE$ e o segmento $\overline{BD}$ é bissetriz de $E\hat{B}C$. A medida de $A\hat{E}B$, em graus, é:



a) $96°$.
b) $100°$.
c) $104°$.
d) $108°$.
e) $110°$.

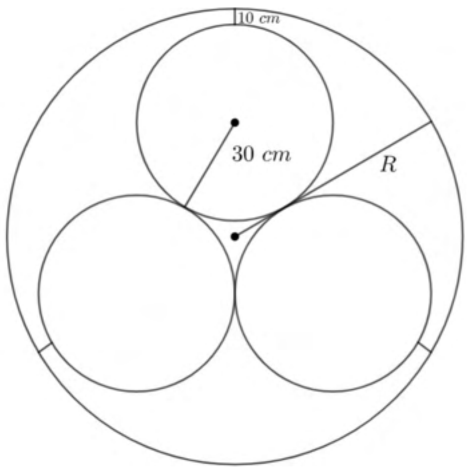
Exercício 10.12 (ENEM 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) 1 m.
b) 2 m.
c) $2,4$ m.
d) 3 m.
e) $2\sqrt{6}$ m.

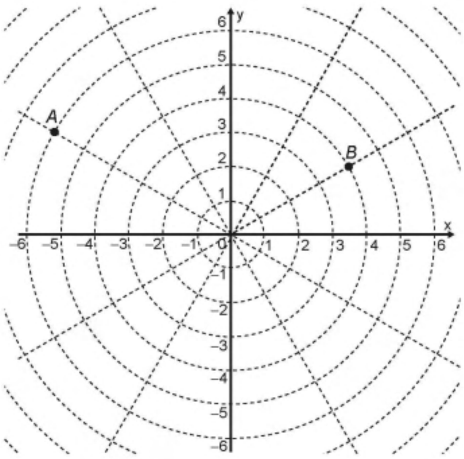
Exercício 10.13 (ENEM 2013) Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



Utilize $1,7$ como aproximação para $\sqrt{3}$. O valor de R, em centímetros, é igual a

a) $64,0$.
b) $65,5$.
c) $74,0$.
d) $81,0$.
e) $91,0$.

Exercício 10.14 (ENEM 2018) Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem $(0;0)$. Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.

Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto B até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a:

a) $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+8.$
b) $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 2}{3}+6.$
c) $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 3}{3}+4.$
d) $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 4}{3}+2.$
e) $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 5}{3}+2.$

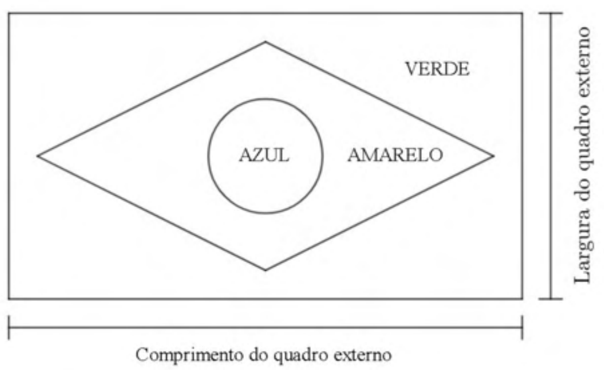
Exercício 10.15 (ENEM 2020) A fabricação da Bandeira Nacional deve obedecer ao descrito na Lei n. 5.700, de $1°$ de setembro de 1971, que trata dos Símbolos Nacionais. No artigo que se refere às dimensões da Bandeira, observa-se:

"Para cálculos das dimensões, será tomada por base a largura, dividindo-a em 14 (quatorze) partes iguais, sendo que cada uma das partes será considerada uma medida ou um módulo (M). Os demais requisitos dimensionais seguem o critério abaixo:

I. Comprimento será de vinte módulos (20 M);
II. A distância dos vértices do losango amarelo ao quadro externo será de um módulo e sete décimos ($1,7$ M);
III. O raio do círculo azul no meio do losango amarelo será de três módulos e meio ($3,5$ M)."

BRASIL, Lei n. 5.700, de $1°$ de setembro de 1971. Disponível em: www.planalto.gov.br.
Acesso em: 15 set. 2015.

A figura indica as cores da bandeira do Brasil e localiza o quadro externo a que se refere a Lei n. 5.700.

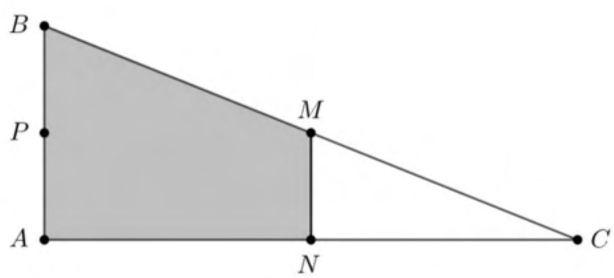


Um torcedor, preparando-se para a Copa do Mundo e dispondo de cortes de tecidos verde (180 cm x 150 cm) e amarelo (o quanto baste), deseja confeccionar a maior Bandeira Nacional possível a partir das medidas do tecido verde.

Qual a medida, em centímetro, do lado do menor quadrado de tecido azul que deverá ser comprado para confecção do círculo da bandeira desejada?

a) $27.$
b) $32.$
c) $53.$
d) $63.$
e) $90.$

Exercício 10.16 (ENEM 2010) Em canteiros de obras de construção civil, é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

a) à mesma área do triângulo AMC.
b) à mesma área do triângulo BNC.
c) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
d) ao dobro da área do triângulo MNC.
e) ao triplo da área do triângulo MNC.

Exercício 10.17 (ENEM 2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno de forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

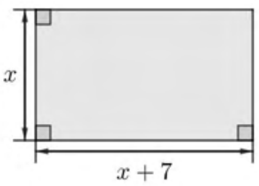


Figura A

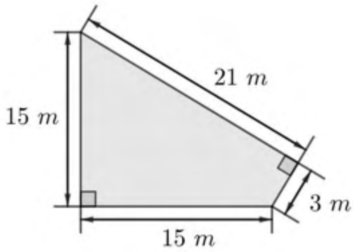
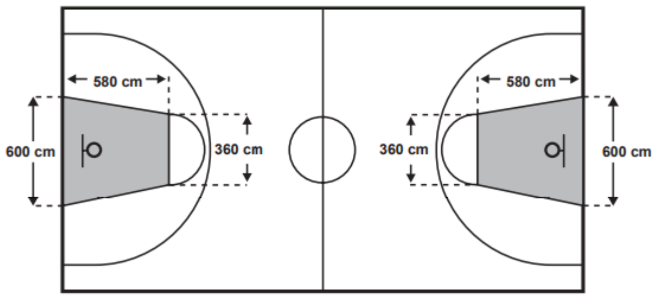


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

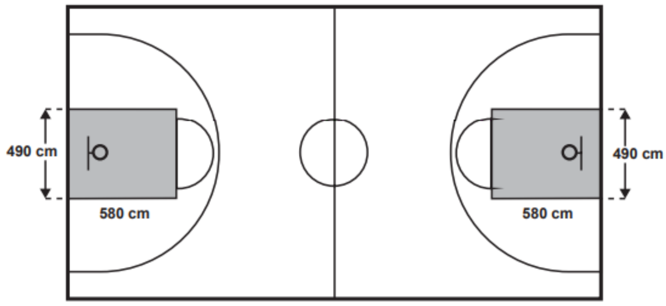
a) $7{,}5$ e $14{,}5$.
b) $9{,}0$ e $16{,}0$.
c) $9{,}3$ e $16{,}3$.
d) $10{,}0$ e $17{,}0$.
e) $13{,}5$ e $20{,}5$.

Exercício 10.18 (ENEM 2015) O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.

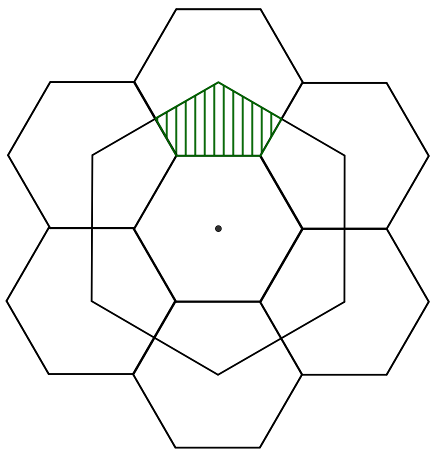


Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

a) aumento de 5.800 cm^2.
b) aumento de 75.400 cm^2.
c) aumento de 214.600 cm^2.
d) diminuição de 63.800 cm^2.
e) diminuição de 272.600 cm^2.

Exercício 10.19 (FUVEST 2009) A figura representa sete hexágonos regulares de lado 1 e um hexágono maior, cujos vértices coincidem com os centros de seis dos hexágonos menores. Então, a área do pentágono hachurado é igual a:



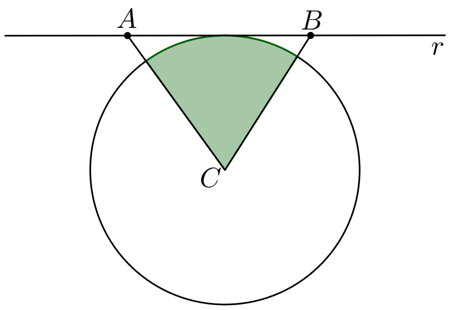
a) $3\sqrt{3}$.
b) $2\sqrt{3}$.
c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
d) $\sqrt{3}$.
e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercício 10.20 (ENEM 2019) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6 m, é cercado por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em 8 m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais 100 m^2 de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada. Utilize 3 como aproximação para π.

A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque:

a) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 21 m^2.
b) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 24 m^2.
c) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 48 m^2.
d) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 108 m^2.
e) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 120 m^2.

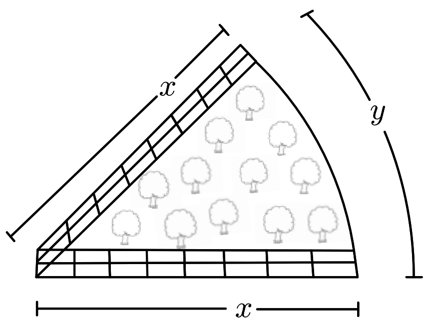
Exercício 10.21 (UEL) Na figura abaixo tem-se que a reta r tangente à circunferência de centro C e o triângulo equilátero ABC, cujo lado mede $8\sqrt{3}$ cm.



A área sombreada é, em cm^2:

a) 52π.
b) 48π.
c) 36π.
d) 30π.
e) 24π.

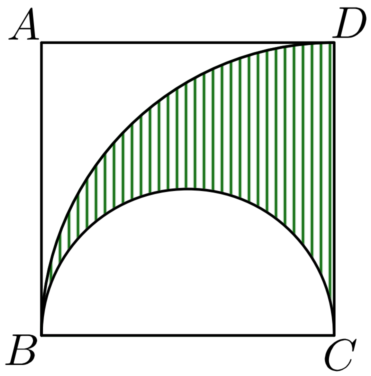
Exercício 10.22 (UEL) Um rolo de tela com 28 m de comprimento será totalmente aproveitado para cercar um jardim com formato de setor circular como mostra a figura a seguir.



Se a área do setor é 40 m^2 e x é maior que y, então o raio do setor é um número:

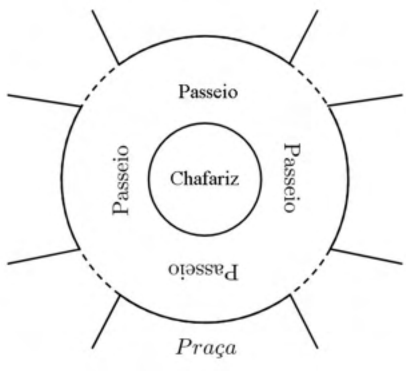
a) divisor de 35.
b) menor que 8.
c) múltiplo de 5.
d) quadrado perfeito.
e) ímpar.

Exercício 10.23 (UEL) Na figura, $ABCD$ é um quadrado cujo lado mede a. Um dos arcos está contido na circunferência de centro C e raio a, e outro é uma semicircunferência de centro no ponto médio de BC e de diâmetro a. A área da região hachurada é:

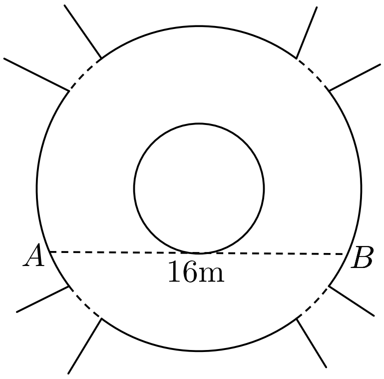


a) um quarto da área do círculo de raio a.
b) um oitavo da área do círculo de raio a.
c) o dobro da área do círculo de raio $\frac{a}{2}$.
d) igual à área do círculo de raio $\frac{a}{2}$.
e) a metade da área do quadrado.

Exercício 10.24 (ENEM 2018) A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



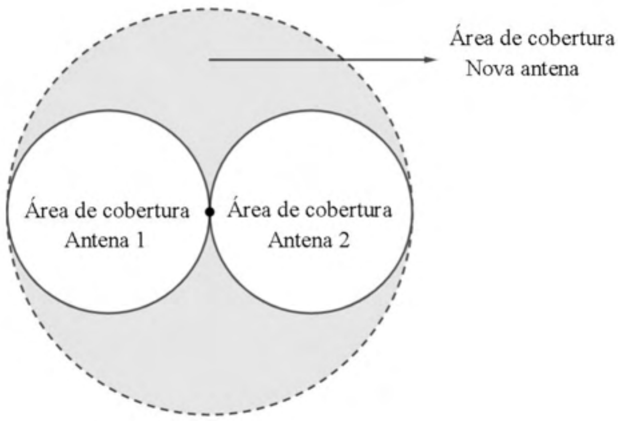
O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos A e B, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta AB: 16 m.



Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado. A medida encontrada pelo engenheiro foi

a) 4π.
b) 8π.
c) 48π.
d) 64π.
e) 192π.

Exercício 10.25 (ENEM 2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

a) 8π.
b) 12π.
c) 16π.
d) 32π.
e) 64π.

11

Geometria Espacial

Geometria Espacial

A Geometria Espacial é uma das áreas da matemática que estuda o formato dos objetos que possuem altura, largura e comprimento, ou seja, possuem três dimensões, como uma caixa, bola de bilhar, paralelepípedo, bola de futebol, entre outros. Esta área surgiu com a necessidade de planejar e construir ambientes de convivência, por exemplo parques, templos e pirâmides em que todos eram feitos de blocos de pedras enormes que deviam se encaixar da melhor maneira possível. Também é importantíssima para calcular volumes de compartimentos como na indústria de petróleo que possui canos de alta pressão que desembocam em grandes tanques. A força desta pressão está ligada diretamente ao volume de um objeto.

A noção espacial proporcionada pelo estudo de objetos tridimensionais é de extrema importância para qualquer área das ciências exatas, como as Engenharias, Física, Matemática e Geografia.

1 Relações entre planos ou retas

Nessa seção iremos abordar as relações entre retas ou planos, para isso, considere duas retas que serão sempre representadas por letras minúsculas, como r e s, e dois planos que serão representados por letras gregas, como α e β, eles podem possuir várias relações que serão discutidas nas próximas seções.

Obs. Como visto no capítulo de Geometria Plana, temos três formas de definir um plano:

- a partir de três pontos não colineares;
- a partir de uma reta e um ponto fora dela;
- a partir de duas retas paralelas não coincidentes.

1.1 Relações entre retas de um mesmo plano

Considere as retas r e s e o plano α, então é possível obter as seguintes relações:

- **Coplanares**: retas que pertencem ao mesmo plano.

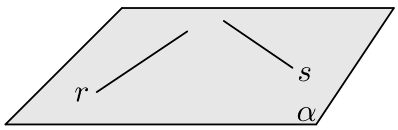


Figura 1.1.1: Retas coplanares.

- **Concorrentes**: são coplanares e, além disso, se cruzam em pelo menos um ponto.

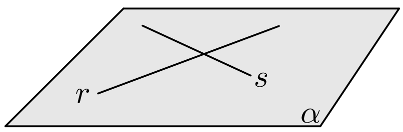


Figura 1.1.2: Retas concorrentes.

- **Paralelas**: são coplanares e não possuem pontos em comum (nunca se encostam).

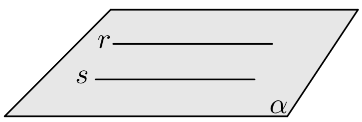


Figura 1.1.3: Retas paralelas

- **Coincidentes**: possuem todos os pontos em comum. Na qual a notação é $r \equiv s$.

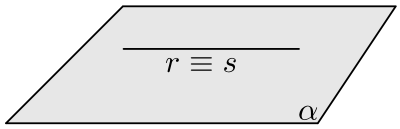


Figura 1.1.4: Retas coincidentes.

1.2 Relações entre uma reta e um plano

Dada uma reta r e o plano α eles podem ter as seguintes relações:

- **Plano e reta paralelos entre si**: a reta nunca corta o plano, ou seja, não tem ponto em comum com o plano.

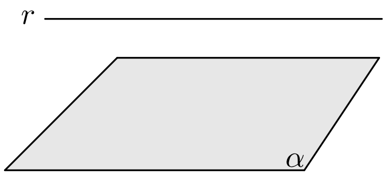


Figura 1.2.1: Reta paralela ao plano.

- **Reta oblíqua ao plano**: a reta forma pelo menos um ângulo agudo, isto é, $\theta < 90°$.

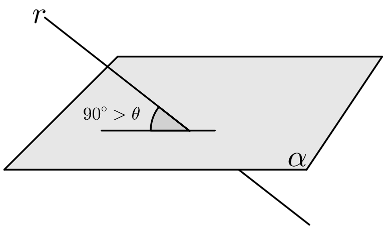


Figura 1.2.2: Reta oblíqua ao plano.

- **Reta perpendicular ao plano**: a reta forma dois ângulos de $90°$ com duas retas concorrentes entre si que pertencem ao plano (retas s e t).

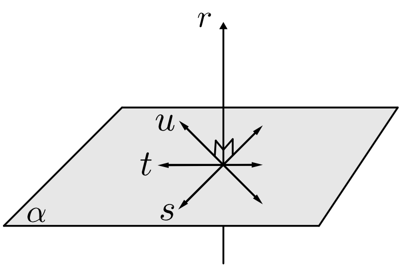


Figura 1.2.3: Reta perpendicular ao plano.

1.3 Relações entre dois planos

Sejam α e β planos, eles podem ter as seguintes relações:

- **Coincidentes**: possuem todos os pontos em comum (Notação: $\beta \equiv \alpha$).

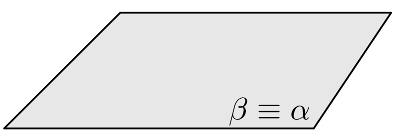


Figura 1.3.1: Planos coincidentes.

- **Secantes**: eles se cruzam (se cortam) e por isto possuem uma reta em comum. Caso o ângulo formado entre os planos seja de $90°$ eles serão chamados de “planos retos entre si”, caso contrário “planos oblíquos entre si”.

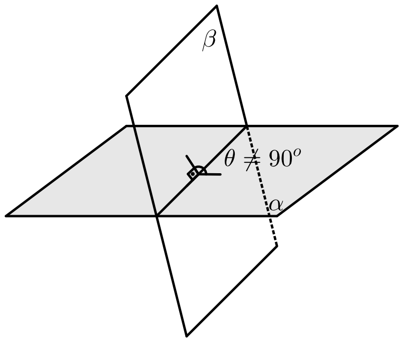


Figura 1.3.2: Planos oblíquos.

- **Paralelos**: não possuem ponto em comum.

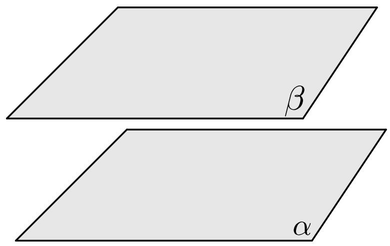


Figura 1.3.3: Planos paralelos.

1.4 Retas reversas

Retas reversas são definidas por não serem paralelas nem se intersectarem em um ponto. Também podemos definir, a partir dessas retas, dois planos α e β paralelos entre si.

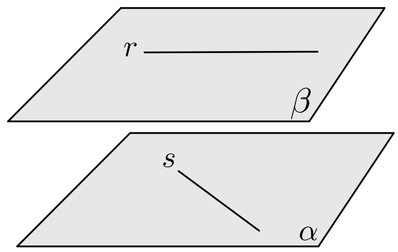


Figura 1.4.1: Retas reversas.

1.5 Determinando planos

Com o conhecimento sobre as posições relativas entre pontos, retas e planos, conseguimos definir um único plano de quatro maneiras, sendo elas:

- Por três pontos não colineares;
- Por uma reta e um ponto que não pertence a ela;
- Por duas retas concorrentes;
- Por duas retas paralelas não coincidentes.

Obs. Curiosamente perceba que quando definimos planos por 3 pontos estamos também definindo, na vida real, a forma mais simples de se estabilizar superfícies planas, como cadeiras, mesas e afins, que é colocando um mínimo de 3 pontos de apoio (pernas da cadeira).

Exercício resolvido 1 (FAAP) A figura abaixo mostra uma porta entreaberta e o canto de uma sala.

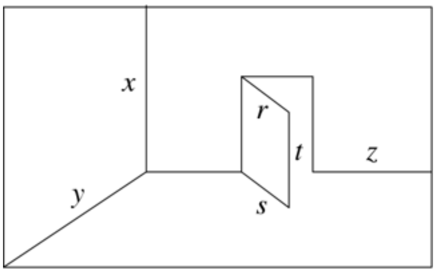


Figura 1.5.1

As retas r e s, s e t, x e r têm, respectivamente, as posições relativas:

Resolução:

1. As retas r e s estão no plano formado pela porta e não se interceptam. Logo são paralelas.
2. As retas s e t estão se cruzando no canto da porta, que normalmente possui um ângulo de $90°$. Logo são perpendiculares.
3. As retas x e r estão em planos diferentes e não se cruzam em ponto algum. Logo são reversas.

Exercício resolvido 2 (UFAL - Modificado) Na cadeira representada na figura a seguir, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.

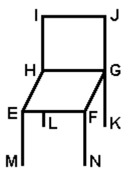


Figura 1.5.2

Verifique cada alternativa e explique.

(a) Os planos EFN e FGJ são paralelos.
(b) HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH.
(c) Os planos HIJ e EGN são paralelos.
(d) EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.

Resolução:

(a) Não são paralelos, pois possuem o ponto F e a reta FN em comum.
(b) HG não está no plano EFN e, portanto, não é comum a ambos.
(c) Veja que o plano HIJ é coincidente ao plano HGJ, ou seja, possuem J como ponto em comum com o plano HIJ, portanto não são paralelos.
(d) Veja que o plano EFN já contém a reta EF, também consegue-se notar que o plano EHG é coincidente ao plano HEF que contém a reta EF. Portanto, essa alternativa é a única correta.

---

2 Sólidos geométricos

São todos os objetos tridimensionais que vemos no dia a dia que possuem comprimento, largura e altura.

Nos sólidos geométricos, estudaremos os seguintes elementos:

V = volume ou tamanho interno desse sólido;
A_B = Área da base ou tampa do sólido;
A_F = Área de uma face lateral;
A_L = Área lateral do sólido ou soma de todas as faces laterais;
$A_T = 2A_B + A_L$, ou ainda, a soma da área da base e tampa com a área lateral que é chamada de área total.

3 Poliedros

Poliedros são alguns dos objetos tridimensionais que existem no nosso dia a dia como, dados, pirâmides, octaedros e diversos outros. São formados por quatro ou mais faces poligonais e podem ser separados em poliedros regulares e irregulares, convexos e não convexos.

Nesse capítulo iremos estudar somente os poliedros convexos e regulares, e os não convexos ou irregulares mais simples.

Todos os poliedros possuem:

1. **Vértices** (V): são os pontos onde duas ou mais semi retas se unem, por exemplo o canto de um cubo é um vértice.
2. **Arestas** (A): são todas as semi retas que um poliedro possui.
3. **Faces** (F): são os lados de um poliedro, por exemplo, o cubo tem 6 faces.

Por exemplo na próxima imagem, temos um cubo com **vértices** A, B, C, D, E, F, G, H, **arestas** $AB, BC, CD, DA, AE, ...$ e **faces** $ABCD, ABFE, BCGF, AEHD, EFGH, D$

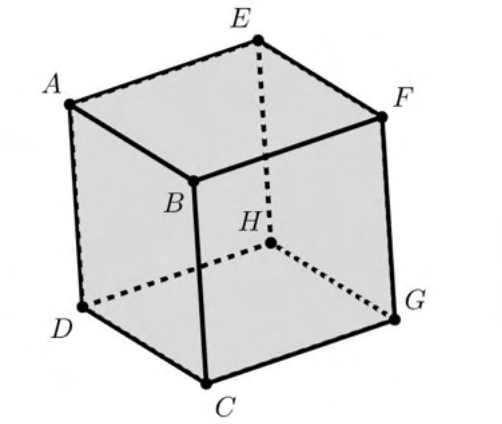


Figura 3.0.1

Uma relação bastante importante quando se trata de poliedros é a Relação de Euler, que nos diz que, a quantidade de vértices (V) com a quantidade de faces (F) é igual a quantidade de arestas (A) somado 2, ou seja:

$$V + F = A + 2.$$

Definição 3.1 — Poliedro Regular. Para um poliedro ser regular, basta todas as faces serem congruentes.

Obs. Na próxima seção, veremos os Poliedros de Platão, que são poliedros regulares.

Definição 3.2 — Poliedro Convexo. Para quaisquer dois pontos dentro de um poliedro, trace uma reta entre eles, se nenhum segmento da reta estiver fora do poliedro ele é convexo.

A figura (3.0.2) representa um poliedro convexo, e a figura (3.0.3) um poliedro não convexo.

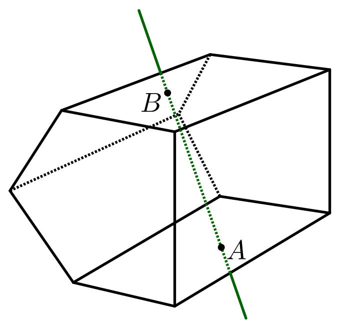


Figura 3.0.2

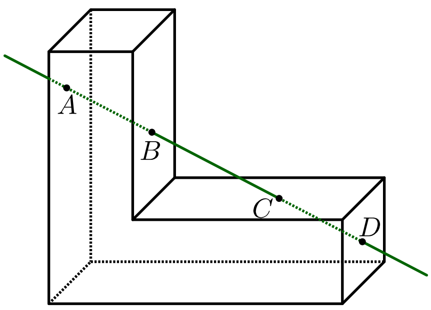


Figura 3.0.3

Poliedros de Platão

Os poliedros de Platão são definidos por possuírem todas as faces congruentes, ou seja, são regulares e também convexos, sabe-se que existem somente cinco poliedros deste tipo, sendo eles:

Tetraedro

Figura 3.0.4: Tetraedro: 4 faces triangulares iguais.

O tetraedro é um poliedro que possui quatro faces congruente de modo que todas são triângulos equiláteros. Além disso, é uma pirâmide de base triangular. No capítulo de Geometria Plana, vimos que a área de um triângulo equilátero é dada por

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

Somando todas as áreas das quatro faces, temos que a área total é

$$A_T = 4 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \ell^2\sqrt{3}.$$

Além disso, essa área pode ser separada em área lateral A_L que é a soma das três faces laterais e área da base A_B sendo estas iguais a

$$A_L = 3 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}\ell^2\sqrt{3},$$

$$A_B = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

O volume dele será apresentado na seção de pirâmides.

Hexaedro

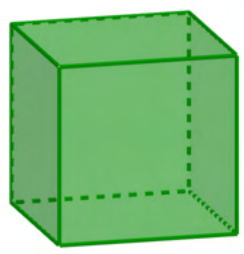


Figura 3.0.5: Hexaedro (cubo): seis faces quadradas iguais.

O hexaedro, também chamado de cubo, é formado por seis faces quadradas iguais. Se o valor da aresta lateral dele é a e são quadrados, temos que a área de cada face é

$$A_F = a^2,$$

e a área total é seis vezes a de cada face, ou seja,

$$A_T = 6a^2.$$

Seu volume é igual a área da base vezes a sua altura, ou seja, área de um quadrado de lado a, vezes a altura que é a, então

$$V = a^3.$$

Para encontrar a diagonal do cubo vamos utilizar o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos internos expostos a seguir, lembre-se que a diagonal de um quadrado, como visto no capítulo de Geometria Plana, é

$$a\sqrt{2}.$$

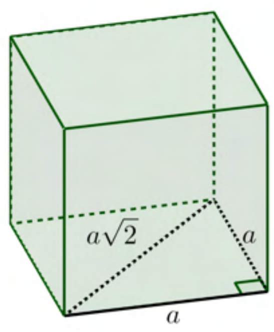


Figura 3.0.6

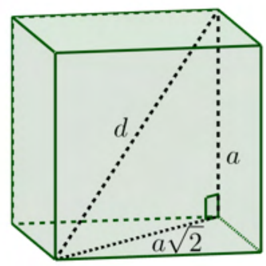


Figura 3.0.7

Assim, temos que a diagonal do cubo é:

$$d^2 = a^2 + \left(a \cdot \sqrt{2}\right)^2 = a^2 + a^2 \cdot 2 = a^2 \cdot 3$$
$$d = a\sqrt{3}.$$

Octaedro

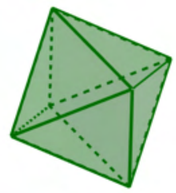


Figura 3.0.8: Octaedro: 8 faces triangulares iguais.

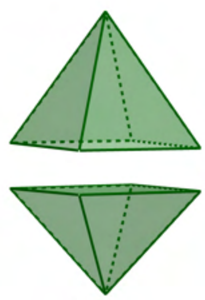


Figura 3.0.9

O octaedro é formado por oito triângulos equiláteros. Além disso, pode ser separado em duas pirâmides de base quadrada (Figura 3.0.9), o que facilita os cálculos que o envolvem.

Para determinar sua área total, basta calcular a área de uma das faces e depois multiplicá-la por oito, se a sua aresta for igual a ℓ então:

$$A_T = 8 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 2\ell^2\sqrt{3}.$$

Dodecaedro

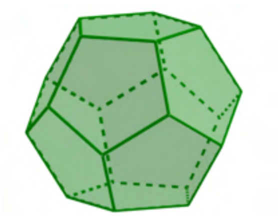


Figura 3.0.10: Dodecaedro: 12 faces pentagonais iguais

O dodecaedro é formado por 12 faces pentagonais regulares. A sua área é determinada por multiplicar a área de um pentágono regular por 12.

Icosaedro

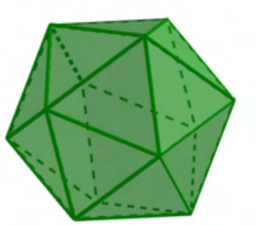


Figura 3.0.11: Icosaedro: 20 faces triangulares iguais.

O icosaedro é formado por 20 triângulos equiláteros.

Para determinar sua área total, basta calcular a área de uma das faces e depois multiplicá-la por 20, se a sua aresta for igual a ℓ então:

$$A_T = 20 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 5\ell^2\sqrt{3}.$$

Exercício resolvido 1 (FUVEST 2013). Os vértices de um tetraedro regular são também vértices de um cubo de aresta 2. A área de uma face desse tetraedro é:

Resolução: A ideia desse exercício é primeiramente entender como um tetraedro tem seus vértices na mesma posição que os vértices do cubo, veja na imagem a seguir.

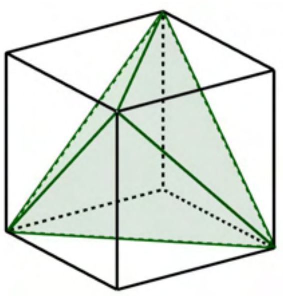


Figura 3.0.12

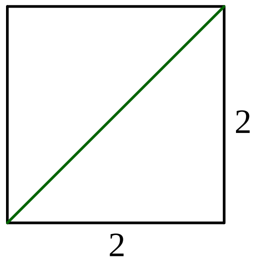


Figura 3.0.13

Agora, veja que a aresta que representa a diagonal de uma das faces é a aresta do tetraedro dentro de um quadrado de lado igual a 2. Perceba que podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida a da aresta do tetraedro e depois calcular a área de um triângulo equilátero de lado a:

$$a^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$
$$a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

E a área de um triângulo equilátero de lado a é dada por $A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Então, temos que a área de uma face desse tetraedro é:

$$A_F = \frac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}.$$

Exercício resolvido 2 (UFOP - Modificado) Calcule a área total de um cubo cuja diagonal mede $5\sqrt{3}$ cm.

Resolução: Basta ver que a diagonal d do cubo é dada por $d = a\sqrt{3}$ onde a é a aresta do cubo, então como $d = 5\sqrt{3}$, a só pode ser igual a 5. Pela fórmula da área total de um cubo, conseguimos encontrar que A_T é dada por:

$$A_T = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150cm^3.$$

4 Prismas

São poliedros convexos e normalmente irregulares (somente o cubo é um prisma regular) definidos por possuírem um conjunto de retas paralelas entre si $\{r, s, t, u, v, ...\}$ partindo de uma base poligonal convexa e formando outra base poligonal convexa. Quando esta base for regular este prisma será chamado de **prisma regular**, caso a base seja irregular será chamado de **prisma irregular**.

Vale ressaltar que todo prisma possui bases congruentes entre si e as faces são paralelogramos[31]. Como representado na figura a seguir:

[31] Paralelogramo é um polígono que possui quatro lados com os opostos paralelos.

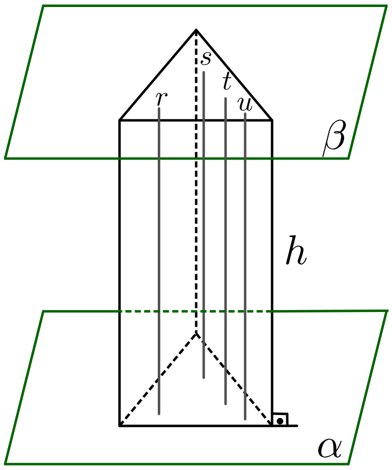


Figura 4.0.1: Definição prisma reto.

Um prisma cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos que contêm suas bases é chamado de prisma reto, como na figura anterior. Caso contrário, o prisma é chamado de oblíquo como vemos na figura a seguir.

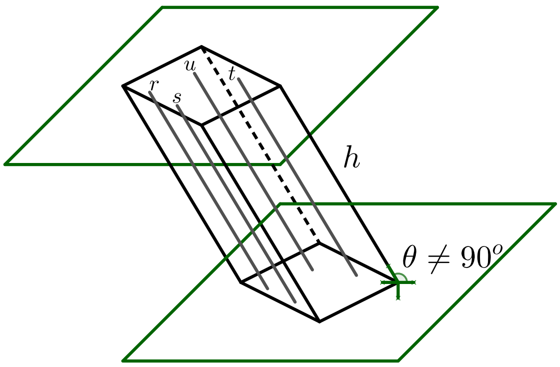


Figura 4.0.2: Definição prisma oblíquo.

Obs. A nomenclatura de um prisma é definida pela base deles e por ser oblíquo ou reto, por exemplo "prisma triangular regular oblíquo".

4.1 Área total de um prisma

Para melhor visualização da área de um prisma, pense em um prisma reto de papel desmontado, como demonstrado na figura a seguir:

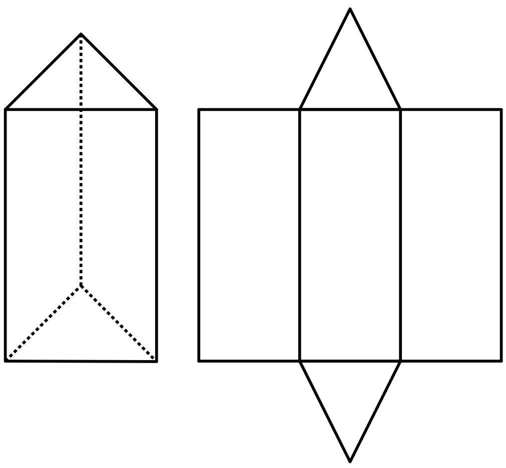


Figura 4.1.1

Conseguimos calcular a área total A_T de um prisma somando o valor da área de cada uma das faces laterais, A_F, e de cada uma de suas bases, A_B, do seguinte modo:

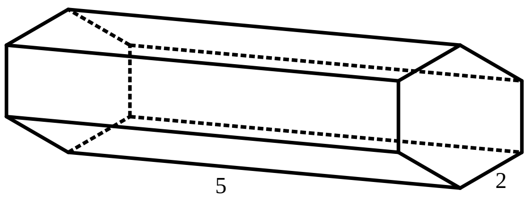
$$A_T = nA_F + 2A_B.$$

Sendo que n é o número de lados da base, A_F é a área de cada face lateral e A_B é a área da base, como no prisma temos duas bases multiplicamos por dois. Como $n(A_F)$ é também chamada de área lateral, podemos escrever da seguinte forma também:

$$A_T = A_L + 2A_B.$$

Na qual A_L denota a área lateral.

Exemplo 4.1.1 Calcule a área total do prisma representado na imagem abaixo:



A área de um prisma é dada por:

$$A_T = nA_F + 2A_B = A_L + 2A_B.$$

Para calcular a área deste prisma, precisamos definir quais são nossas bases e, em sequência, calcular a sua área.

Para facilitar escolheremos como base o hexágono regular, e por ele ser regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros. Então, como visto no capítulo de Geometria Plana, temos que sua área é dada por:

$$A_B = 6\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pela Figura **??** temos que o lado ℓ do triângulo equilátero é igual a 2, então:

$$A_B = 6\frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$$

Também devemos calcular a área lateral que nada mais é do que 6 retângulos de lados iguais a 2 e 5. Sendo assim,

$$A_L = nA_F = 6(2\cdot 5) = 60.$$

Então, sua área total é dada por

$$A_T = A_L + 2A_B$$
$$A_T = A_L + 2\cdot A_B = 60 + 2\cdot 6\sqrt{3} = 60 + 12\sqrt{3}.$$

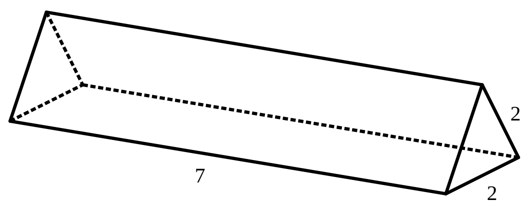
4.2 Volume de um prisma

Conseguimos calcular o volume, denotado por V, multiplicando a área da base pela altura:

$$V = A_B \cdot h.$$

Obs. Tente não se prender no significado da palavra base, use como base a face do prisma que você achar melhor para resolver os exercícios. Além disso, a base de um prisma sempre será um polígono, este tem duas dimensões.

Exemplo 4.2.1 Calcule o volume do prisma representado na imagem abaixo:



Para calcular o volume desse prisma precisamos definir qual é a face que iremos considerar como base e em seguida calcular a sua área, para facilitar escolheremos como base o triângulo equilátero, cuja área é dada por:

$$A_B = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

Como o lado ℓ é igual a 2 então

$$A_B = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

Note que a altura h é igual a 7, disso segue que

$$V = A_B \cdot h = 7\sqrt{3}.$$

Exercício resolvido 1 (ENEM 2016 - Modificado) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60m x 10m de base e 10m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7m de altura e 10m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.

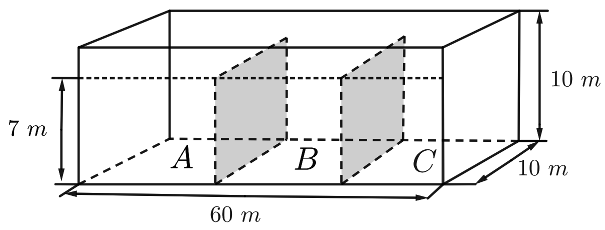


Figura 4.2.1

Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de:

Resolução: Veja que o volume total do reservatório, por ser um paralelepípedo, é dado pela área da base vezes a altura. A base que escolhemos foi o retângulo de 60m de comprimento e 10m de largura, sendo assim:

$$V_T = A_B \cdot h = 60 \cdot 10 \cdot 10 = 6000\text{m}^3.$$

Perceba que a altura das divisórias é de 7m então, quando houver o furo no compartimento C o petróleo que está entre 7m e 10m irá sair.

Logo o volume do líquido que será lançado é dado pela diferença entre o volume total e o volume dos compartimentos A e B, que possuem 20m de comprimento 7m de altura e 10m de largura, ou seja:

$$V_{\text{Perdido}} = V_A + V_B = 20.7.10 + 20.7.10 = 2800\text{m}^3.$$

Então,

$$V = V_T - V_{\text{Perdido}} = 6000\text{m}^3 - 2800\text{m}^3 = 3200\text{m}^3 = 3{,}2 \cdot 10^3.$$

Portanto, o volume de petróleo derramado é de $3{,}2 \cdot 10^3\text{m}^3$.

Exercício resolvido 2 (UEPA) Uma calha em forma de prisma reto, conforme a figura abaixo, possui 5m de comprimento e uma seção transversal ABC, na forma V, tal que $AB = AC = 40$ cm e $B\hat{A}C = \theta$.

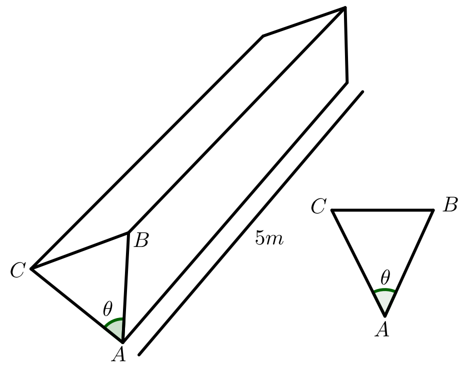


Figura 4.2.2

Pede-se:

(a) A expressão que determina o volume da calha em função do ângulo θ.
(b) O volume máximo que essa calha comporta.

Resolução: a) O volume de um prisma é igual ao produto entre a área da base e a altura, $V = A_B \cdot h$, para calcular a área da base precisamos encontrar a medida da altura e da base do triângulo isósceles, para isso lembre que a altura do triângulo isósceles também é bissetriz do ângulo θ, temos que:

A altura é encontrada a partir de:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{h}{40}$$
$$h = 40\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

A base do triângulo é encontrada a partir de:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{x}{2}40$$
$$x = 20\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Portanto, a área do triângulo é:

$$\begin{aligned} A_B &= \frac{h \cdot x}{2} \\ &= \frac{40\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)20\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{20\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2} \\ &= \frac{20\operatorname{sen}(\theta)}{2} \\ A_B &= 10\operatorname{sen}(\theta)\text{cm}^2. \end{aligned}$$

Agora, basta multiplicar pelo comprimento do prisma, mas lembre-se que os lados do triângulo estão em centímetros e a altura em metros, realizando a conversão, obtemos $5\text{m} = 500\text{cm}$ e calculando o volume do prisma

$$V_{\text{prisma}} = A_B.H = 10\operatorname{sen}(\theta)500 = 5000\operatorname{sen}(\theta)\text{cm}^3.$$

b) Lembre-se que o valor da função seno está sempre entre -1 e 1, logo o valor máximo do volume é quando $\operatorname{sen}(\theta) = 1$, ou seja, quando $\theta = 90°$. Portanto, o volume máximo que essa calha comporta será 5000cm^3.

Exercício resolvido 3 (PMSP 2014 - Modificado) Um recipiente, na forma de um prisma reto de base quadrada, com 8cm de lado, estava totalmente cheio de água. Desse recipiente foram retirados 160mL, conforme mostra a figura.

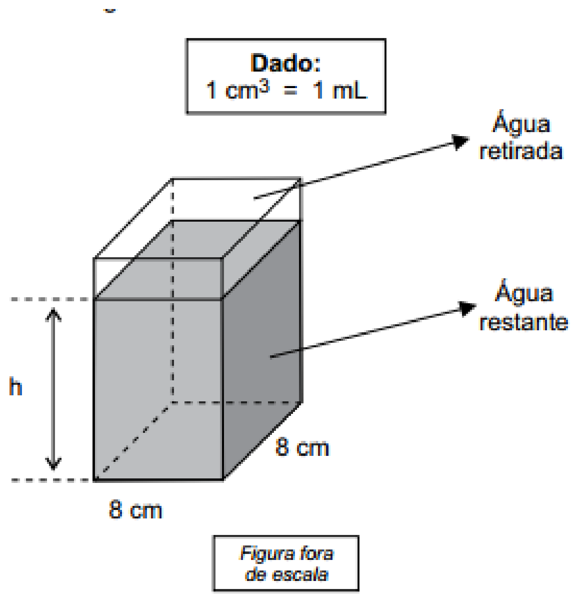


Figura 4.2.3

Sabendo que a capacidade máxima desse recipiente é 960mL, então, após a retirada dos 160mL, a altura h da água restante dentro dele, em cm, será de:

Resolução: Perceba que o volume do líquido que sobrou é igual ao volume total menos o que foi retirado, ou seja,

$$V_h = V_T - V_{\text{retirado}} = 960 - 160 = 800,$$

disso segue que:

$$V_h = A_B \cdot h = 8^2 \cdot h = 64h.$$

Como $V_h = 800$, temos

$$800 = 64h$$
$$h = 12{,}5\text{cm}.$$

---

5 Pirâmides

Pode-se definir uma pirâmide como sendo um poliedro convexo de base poligonal regular em que as suas arestas laterais (ℓ) se encontram em um único ponto V chamado de vértice da pirâmide.

As pirâmides são nomeadas como regulares ou irregulares, e retas ou oblíquas. Quando uma pirâmide for regular ela terá na sua base um polígono regular[32] e também será reta. A figura a seguir exemplifica uma pirâmide regular de base hexagonal.

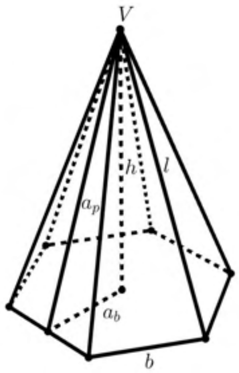


Figura 5.0.1: Pirâmide reta.

Quando uma pirâmide for irregular, ela pode ser reta ou oblíqua, isso depende da posição onde a altura encontra o plano da base. Se a altura encontrar o plano da base em seu centro, ela será reta, caso contrário será oblíqua. A figura a seguir exemplifica uma pirâmide oblíqua de base triangular.

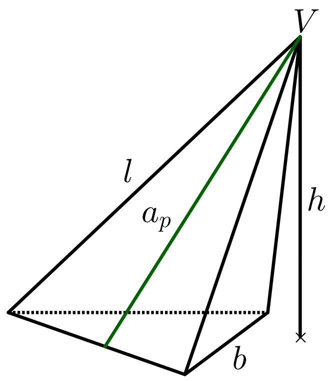


Figura 5.0.2: Pirâmide oblíqua.

Obs. Veja que cada lado da pirâmide oblíqua pode possuir um apótema diferente em relação ao apótema de outro lado.

Sabemos que todos os polígonos possuem um apótema[33], chamado nesse capítulo de apótema da base, denotado por: a_b, e conseguimos definir um apótema da pirâmide, a_p, como a altura do triângulo que determina a face lateral da pirâmide.

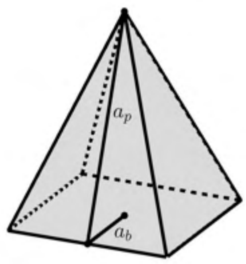


Figura 5.0.3

Obs. Como a pirâmide oblíqua não tem todas suas faces iguais, os respectivas apótemas de cada face também serão diferentes.

5.1 Área total de pirâmides

Pense em uma pirâmide reta de papel desabrochada, como na figura a seguir:

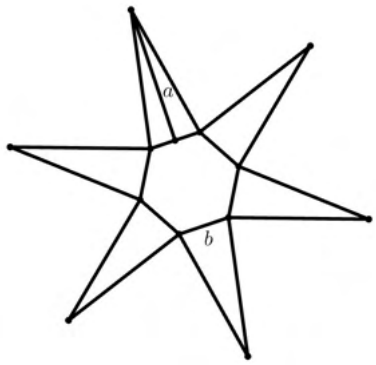


Figura 5.1.1: Pirâmide hexagonal desmontada.

Conseguimos calcular a área total A_T de uma pirâmide somando o valor da área de cada uma das faces laterais A_F e da base A_B do seguinte modo:

$$A_T = n(A_F) + A_B = A_L + A_B, \tag{11.1}$$

em que n é o número de lados da base, A_F é a área de cada face lateral e A_B é a área da base.

Obs. Em uma pirâmide oblíqua, é preciso somar face por face, pois elas são diferentes.

Exemplo 5.1.1 Observe a Figura 5.1.1, pode-se perceber que cada face lateral é um triângulo, de base b e altura a, assim, a área A_F da pirâmide é dada por:

$$A_F = \frac{1}{2}\text{Base x Altura} = \frac{1}{2}b \cdot a.$$

Também sabemos que o poliedro que define a base é um hexágono, este possui $n = 6$ lados e a área dele pode ser expressa como:

$$A_B = 6\frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

[32]Todas as arestas desse polígono tem o mesmo tamanho

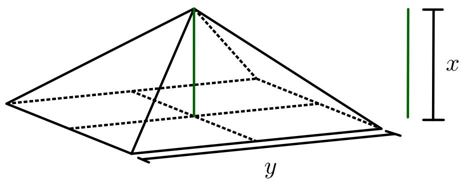
[33]Para polígonos o apótema é o segmento de reta que parte do centro geométrico da figura (encontro das mediatrizes) até um dos lados formando $90°$.

Então basta substituir na fórmula (11.1), que obtemos

$$A_T = n(A_F) + A_B = 6\left(\frac{1}{2}b \cdot a\right) + 6\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$
$$A_T = 3b \cdot a + \frac{3}{2}b^2\sqrt{3}.$$

Logo, para encontrar a área total de uma pirâmide de base hexagonal, basta saber o valor da apótema de um triângulo e o valor da aresta da base.

Exercício resolvido 1 (ENEM 2016 - Modificado) A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base y. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida x. Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície da cobertura da tenda.



A área da superfície da cobertura da tenda, em função de y e x, é dada pela expressão.

Resolução: Basta usar a fórmula da área total de uma pirâmide com $n = 4$ faces laterais e subtrair a área da base, ou seja:

$$A_T - A_B = n(A_F) + A_B - A_B = 4(A_F).$$

Agora, para calcular a área de cada face, veja que esta é uma pirâmide reta e de base quadrada cuja todas as faces são iguais. Sendo assim devemos encontrar o valor do apótema da pirâmide, a_p, perceba que na figura a seguir o apótema intersecta o ponto médio da aresta da base, segue que conseguimos encontrar um triângulo retângulo como mostrado.

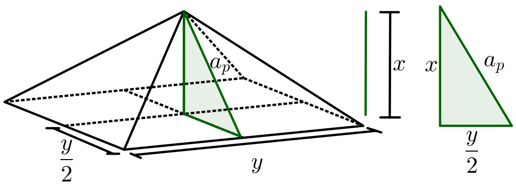


Figura 5.1.2

Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$a_p^2 = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$$
$$a_p = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}.$$

A área de cada face é um triângulo de base igual a y e altura igual a a_p, assim calculando a área do triângulo temos que

$$A_F = \frac{1}{2}y \cdot a_p = \frac{1}{2}y \cdot \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}.$$

Então área da lona é:

$$A_T = 4 \cdot \frac{1}{2}y \cdot \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$$
$$= 2y \cdot \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}.$$

5.2 Volume de pirâmides

Observe na figura a seguir que podemos juntar três pirâmides de modo a formar um cubo.

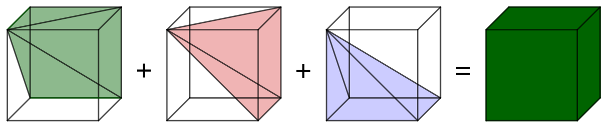


Figura 5.2.1

Assim podemos ver que a fórmula do volume de uma pirâmide é dada por:

$$V = \frac{1}{3}A_B \cdot h, \tag{11.2}$$

na qual A_B é a área da base e h é a altura.

Existem pirâmides de base triangular, quadrada, pentagonal e de outros polígonos regulares. Para calcular a área da base vamos utilizar as fórmulas vistas anteriormente no capítulo de Geometria Plana.

A seguir, será apresentado um caso específico que é a pirâmide feita somente com triângulos equiláteros conhecida como tetraedro.

Cálculo do volume de um tetraedro

Como visto no começo do capítulo, temos que a área de um dos triângulos que formam o tetraedro é de $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$. Para calcular o volume desse sólido, teríamos que encontrar o valor da altura H do tetraedro e aplicar na fórmula (11.2).

Na imagem a seguir, a altura do tetraedro intersecta a altura do triângulo da base no ponto de encontro de todas as alturas.

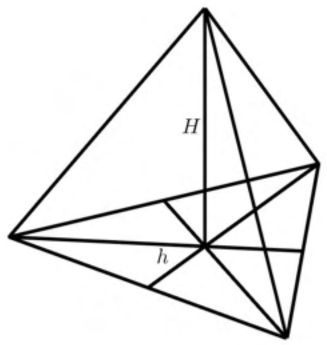


Figura 5.2.2: Tetraedro e sua altura.

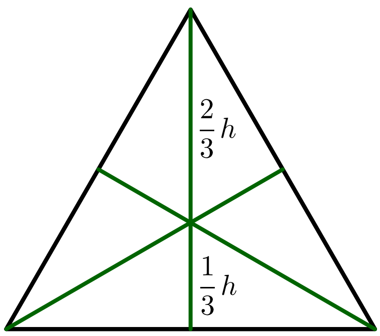


Figura 5.2.3: As alturas das faces do tetraedro.

Como visto no capítulo de Geometria Plana e na figura anterior, as alturas de um triângulo equilátero se cortam em $\frac{1}{3}h$ e $\frac{2}{3}h$ além disso $h = \ell\frac{\sqrt{3}}{2}$ e escolhendo o triângulo de base $a = \frac{2}{3}h$, altura H e hipotenusa ℓ temos:

$$a = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\ell\frac{\sqrt{3}}{2} = \ell\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Logo, para achar o valor da altura H vamos utilizar o Teorema de Pitágoras:

$$\ell^2 = H^2 + a^2 \Rightarrow \ell^2 = H^2 + \ell^2\frac{3}{9}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} H^2 &= \ell^2 - \frac{\ell^2}{3} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}\ell^2} \\ &= \ell\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &= \ell\frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Aplicando na Fórmula 11.2 temos que o volume de um tetraedro é dado por:

$$V = \frac{1}{3}A_B h = \frac{1}{3}\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\ell\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}.$$

Exemplo 5.2.1 Calcule o volume da pirâmide de base quadrada representada na imagem a seguir:

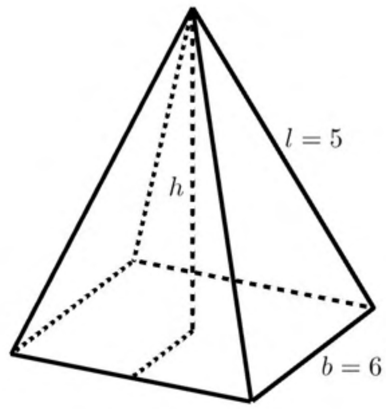


Figura 5.2.4

Para calcular o volume dessa pirâmide precisamos encontrar a altura dela. Para isso vamos antes encontrar o tamanho do apótema da pirâmide e o apótema da base.

Note que, conseguimos facilmente encontrar o valor do apótema da base, veja na figura anterior que a base é um quadrado cujo lado é 6 e, a altura está no centro desse quadrado, logo o apótema da base chamada de r, é igual a 3.

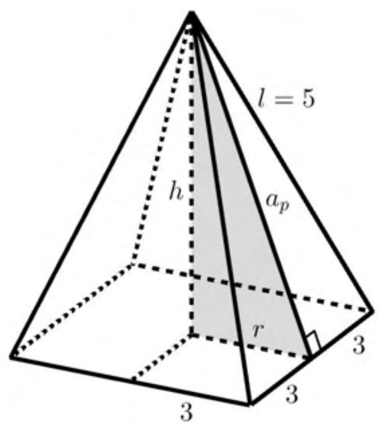


Figura 5.2.5

Veja que o apótema da pirâmide é encontrado aplicando o Teorema de Pitágoras na metade do triângulo que represente a face lateral.

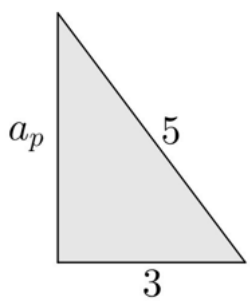


Figura 5.2.6

$$
\begin{aligned}
{a_p}^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow {a_p}^2 &= 5^2 - 3^2 \\
&= \sqrt{25 - 9} \\
&= \sqrt{16} \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Observe que agora podemos achar a altura da pirâmide a partir do triângulo retângulo hachurado internamente:

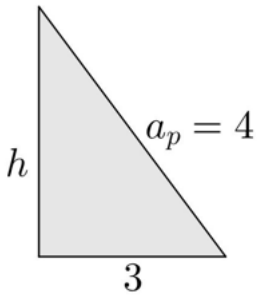


Figura 5.2.7

$$
\begin{aligned}
h^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow h^2 &= 4^2 - 3^2 \\
&= \sqrt{16 - 9} \\
&= \sqrt{7}.
\end{aligned}
$$

Após obter o valor da altura da pirâmide, podemos calcular o volume dela com a seguinte fórmula:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h.$$

Veja que a base da pirâmide é um quadrado, assim sua área é $A_B = 6^2 = 36$, e $h = \sqrt{7}$ então

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3} 36.7 = 84.$$

5.3 Tronco de uma pirâmide

Podemos cortar a pirâmide com um plano α paralelo ao plano da base, após isto, teremos uma pirâmide menor e um tronco de pirâmide, este tronco possui diversas características únicas, mas relacionadas à pirâmide original, veja:

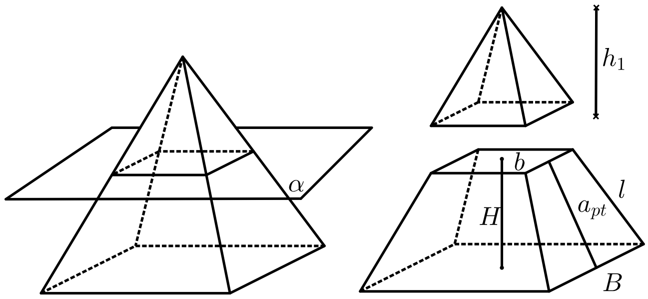


Figura 5.3.1

Com a secção da pirâmide obtemos uma pirâmide menor, que possui uma base de mesmo polígono da pirâmide original, denotada por A_{B_1}. Como toda pirâmide, ela também possui uma altura que denotaremos de h_1.

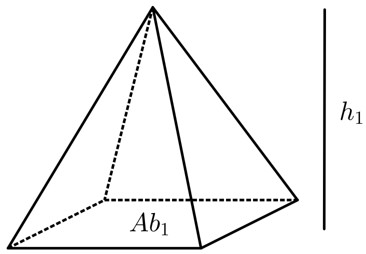


Figura 5.3.2

O tronco de uma pirâmide possui duas bases, uma base maior A_B que é a mesma da pirâmide original e uma base menor A_{B_1}. Também possui o mesmo número de faces laterais da pirâmide original.

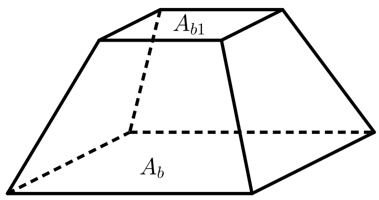


Figura 5.3.3

Além disso, possui uma altura $H = h - h_1$ onde h é a altura da pirâmide original e h_1 é a altura da pirâmide menor.

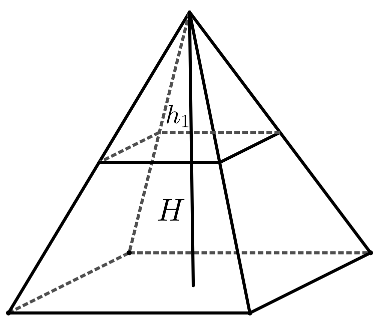


Figura 5.3.4

Perceba que a face lateral do tronco sempre será um trapézio e a altura deste é chamada de apótema do tronco denotada por a_{pt}.

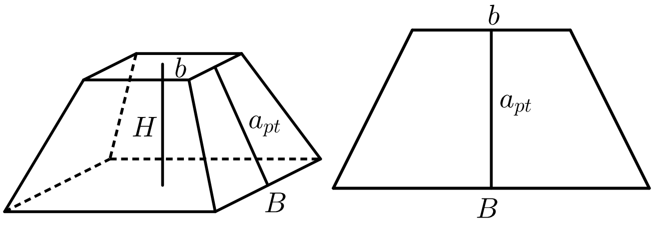


Figura 5.3.5

Desse modo, sua área total é dada por:

$$A_T = A_B + A_{B_1} + A_\ell.$$

Caso a pirâmide seja reta então todos os trapézios serão congruentes, sendo B a aresta da base maior do trapézio e b a aresta da base menor temos:

$$A_T = A_B + A_{B_1} + n\frac{(B+b)a_{p_t}}{2}.$$

Para encontrar o volume do tronco podemos calcular o volume da pirâmide original e o volume da pirâmide menor e subtraí-los da seguinte forma:

$$V = V_{\text{Pirâmide maior}} - V_{\text{Pirâmide Menor}} = \frac{1}{3}A_B \cdot h - \frac{1}{3}A_{B_1} \cdot h_1. \tag{11.3}$$

E a partir de relações entre os três objetos conseguimos uma fórmula para o volume do tronco, sendo esta:

$$V = \frac{H}{3}\left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_{B_1}} + A_{B_1}\right).$$

Exercício resolvido 2 (ENEM 2009 - Modificado)Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19cm de altura e 6cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura - 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior -, espaçados de 1cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.

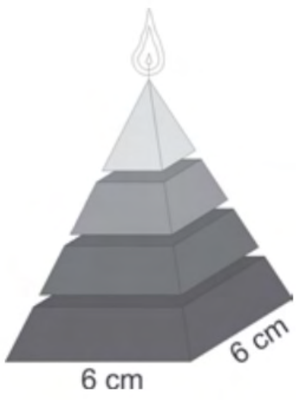


Figura 5.3.6

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem $1{,}5$cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

Resolução: O exercício pede para remover uma pirâmide menor de uma maior, e depois calcular o volume do que sobrou, isto é, precisa-se calcular o volume do tronco da pirâmide.

A altura total é de 19cm, mas todas as 4 alturas das divisões são iguais e possuem 3 espaçamentos de 1cm entre elas então a altura de cada um dos blocos é de:

$$h = \frac{19-3}{4} = \frac{16}{4} = 4\text{cm}.$$

Sendo H a altura da pirâmide original percebe-se que os espaçamentos podem ser subtraídos de 19 resultando em $H = 16$. Agora basta calcular a área das pirâmides, como ambas são quadradas temos que a de cima possui aresta da base $b_1 = 1{,}5cm$ e altura $h = 4cm$, e a original possui aresta da base $b = 6cm$ e altura $H = 16\text{cm}$, disso segue que o volume é dado por:

$$\begin{aligned} V_{\text{Tronco}} &= V_{\text{Piramide original}} - V_{\text{Piramide de cima}} \\ &= \frac{1}{3}H \cdot A_B - \frac{1}{3}h \cdot A_{B_1}. \end{aligned}$$

As áreas da base são dadas por quadrados, então basta elevar a medida da aresta ao quadrado.

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{\text{Tronco}} &= \frac{1}{3}16 \cdot 6^2 + \frac{1}{3}4 \cdot (1{,}5)^2 \\ &= 16 \cdot 12 - 3 \\ \Rightarrow V_{\text{Tronco}} &= 189\text{cm}^3. \end{aligned}$$

6 Corpos redondos

Os corpos redondos são sólidos geométricos que não possuem faces laterais, mas no lugar possuem superfícies curvas. Eles se assemelham com as formas redondas que encontramos no nosso dia a dia, como: rolo, cone de trânsito e bola de bilhar. Esses objetos possuem, respectivamente, os nomes de cilindro, cone e esfera e serão estudados nesta seção.

Todos esses possuem geratrizes, que ao serem movidas ou rotacionadas por um determinado caminho, geram o respectivo corpo. Por exemplo o raio de um círculo é a geratriz dele, pois ao rotacionar ele geramos o próprio círculo.

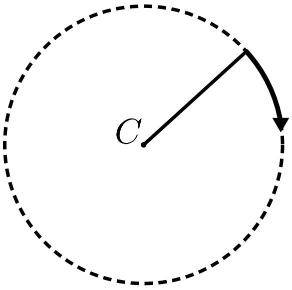


Figura 6.0.1

7 Cilindros

Um cilindro é definido por possuir duas bases circulares paralelas entre si e ser formado pelas retas secantes a essas duas bases. Ele possui uma geratriz denotada por "g", uma altura "h" e um raio da base "r" .

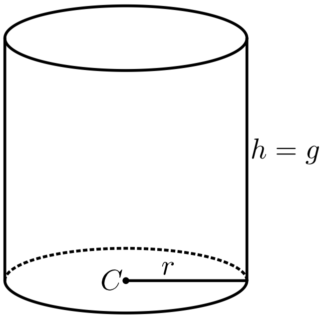


Figura 7.0.1: Cilindro reto.

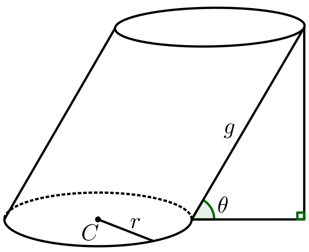


Figura 7.0.2: Cilindro oblíquo.

7.1 Área de um cilindro

Conseguimos planificar um cilindro reto da mesma forma feita anteriormente em outros sólidos, veja na figura a seguir.

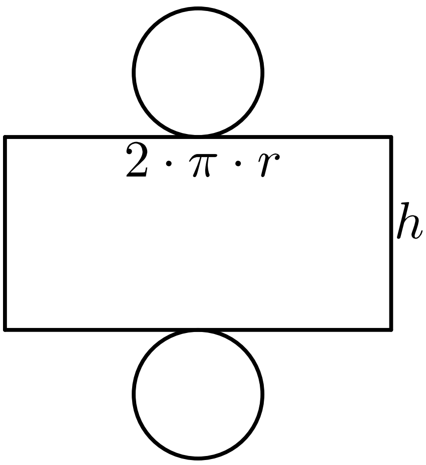


Figura 7.1.1

Entretanto, sua base é um círculo e este possui perímetro igual a $2\pi r$ que é também a lateral do retângulo que é formado na planificação, então a área desse retângulo é dada por:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h.$$

A área da base é simplesmente a área do círculo, logo:

$$A_B = \pi \cdot r^2.$$

Mas em um cilindro existem duas bases, então a área total é dada por:

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2.$$

Exemplo 7.1.1 Calcule a área do seguinte cilindro reto de diâmetro igual a 5 e altura igual a 5:

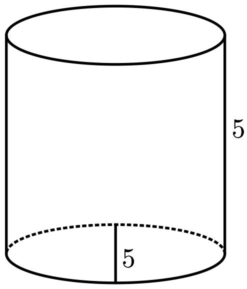


Figura 7.1.2

Resolução: Pelo enunciado temos que $d = 5$ então como o raio é a metade do diâmetro, obtemos $r = \frac{5}{2}$ e $h = 5$, assim pela fórmula da área total de um cilindro, temos

$$A_T = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Como $r = \frac{5}{2}$ e $h = 5$, então a área total será dada por

$$\begin{aligned} A_T =& 2 \cdot \pi \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ A_T =& 25\pi + 2\pi \frac{25}{4} \\ A_T =& 25\pi + \pi \frac{25}{2} \\ A_T =& 37{,}5\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 7.1.2 Calcule a área do seguinte cilindro oblíquo:

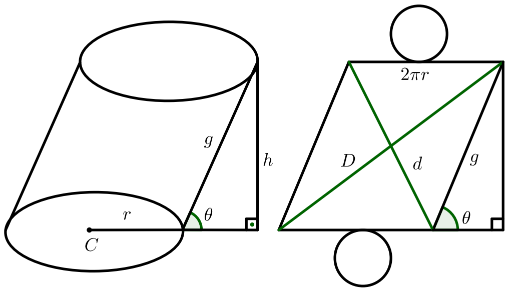


Figura 7.1.3

Resolução: Para calcular a área total do cilindro é necessário calcular a área do losango que é formado ao planificá-lo e depois somar com as duas áreas circulares das bases.

Sendo assim, a área do losango é calculada pela fórmula $A_L = \dfrac{D \cdot d}{2}$, na qual D é o tamanho da diagonal maior e d é o tamanho da diagonal menor. Assim, a área total do cilindro é dada por

$$A_T = A_F + 2 \cdot A_B = A_L + 2 \cdot \pi r^2 = \frac{D \cdot d}{2} + 2 \cdot \pi r^2. \qquad (11.4)$$

Obs. As diagonais do losango são encontradas a partir das relações entre os triângulos que surgiram.

7.2 Volume de um cilindro

O volume de um cilindro, assim como o do prisma, é dado pela multiplicação entre a área da base e a da altura, ou seja:

$$V = A_B \cdot h.$$

Exemplo 7.2.1 Calcule o volume de um cilindro reto de altura 5 e raio 5.

Resolução: Como a altura e o raio são iguais a 5, basta substituir na fórmula e então teremos o volume.

$$V = A_B \cdot h = \pi r^2 h = \pi 5^2 5 = 125\pi.$$

Exemplo 7.2.2 Calcule o volume do seguinte cilindro oblíquo em $60°$ de geratriz $g = 5$ e raio $r = 4$:

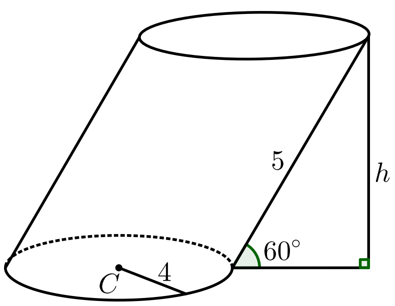


Figura 7.2.1

Basta acharmos a altura h do cilindro que conseguimos calcular seu volume com a mesma fórmula de um cilindro reto.

Para isso iremos utilizar o triângulo de hipotenusa $g = 5$ e cateto oposto ao ângulo de $60°$. Assim conseguimos aplicar seno e temos:

$$\text{sen}(60°) = \frac{h}{g} = \frac{h}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{5}.$$

Assimm segue que a altura é:

$$h = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Desse modo, lembrando que $r = 4$, desse modo o volume do cilindro oblíquo é:

$$V = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 40 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}.$$

7.3 Seções transversais de um cilindro

As seções transversais podem ser caracterizadas como um corte qualquer de um sólido, uma dessas seções é chamada de seção meridiana que é o corte exatamente no meio do sólido, a partir destas seções podemos definir um corpo redondo rotacionando-as de alguma forma.

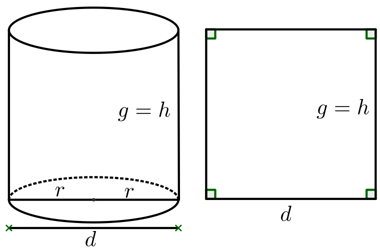


Figura 7.3.1

Imagine, se você pegar estas seções meridionais e rotacioná-las o que vai acontecer? Voltaremos em um cilindro!

Também podemos observar que em um cilindro reto, quando a geratriz e o diâmetro forem de tamanhos iguais, teremos sempre um quadrado.

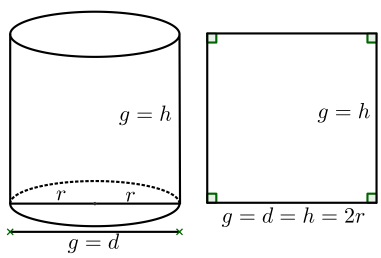
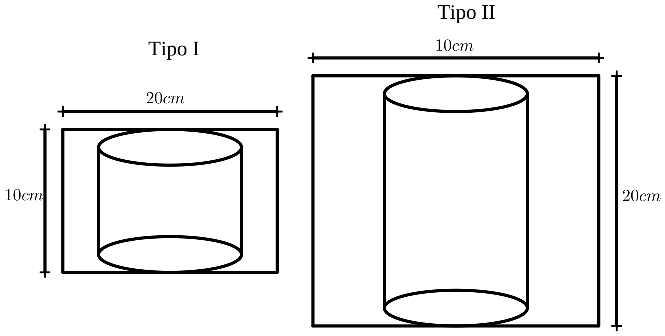


Figura 7.3.2

Exercício resolvido 1 (ENEM 2006 - Modificado) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20cm x 10cm. Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será:

Resolução: Perceba que o exercício pede a razão entre o volume da vela do tipo I que chamaremos de V_I e o volume da vela do tipo II que chamaremos de V_{II}, com isso a razão fica:

$$\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{A_{B_I} \cdot h_I}{A_{B_{II}} \cdot h_{II}} = \frac{\pi r_I^2 \cdot h_I}{\pi r_{II}^2 \cdot h_{II}} = \frac{r_I^2 \cdot h_I}{r_{II}^2 \cdot h_{II}}.$$

Veja que a altura da vela do tipo I é igual a metade da altura do tipo II, ou seja:

$$h_I = \frac{1}{2} h_{II} \Rightarrow \frac{h_I}{h_{II}} = \frac{1}{2}.$$

Desse modo, para calcular a razão entre os volumes precisamos encontrar a área da base, que é dada por πr^2 mas veja na figura que o perímetro do círculo da base da vela I é 20cm e da vela II é 10cm ou seja:

$$2\pi r_I = 20 \quad \text{e} \quad 2\pi r_{II} = 10.$$

Dividindo uma equação pela outra:

$$\frac{2\pi r_I}{2\pi r_{II}} = \frac{20}{10} \Rightarrow \frac{r_I}{r_{II}} = 2.$$

Mas queremos $\frac{r_I^2}{r_{II}^2}$ e isto é obtido elevando a equação acima ao quadrado onde:

$$\frac{r_{II}^2}{r_I^2} = 4.$$

Agora, é só substituir tudo em $\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{r_I^2 \cdot h_I}{r_{II}^2 \cdot h_{II}}$ que obtemos:

$$\frac{V_I}{V_{II}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Portanto, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será o dobro.

8 Cones

Um cone, assim como a pirâmide, possui um vértice V e uma base, que neste caso é um círculo. No caso das pirâmides tínhamos uma medida chamada apótema que, neste caso, é chamada de geratriz "g", além disso, ele possui uma altura "h" e um raio "r" da base. Entretanto, nem todos os cones possuem geratriz, como é o caso dos cones oblíquos.

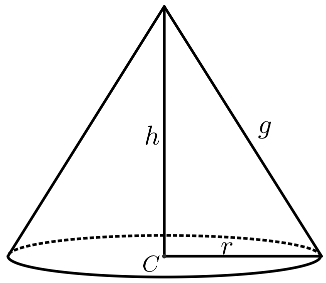


Figura 8.0.1

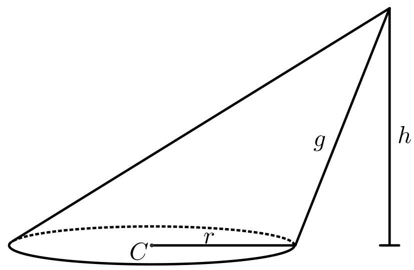


Figura 8.0.2

8.1 Área de um cone

Assim como foi feito em todos os outros, basta planificar o objeto tridimensional e encontrar relações, veja que temos um setor circular de raio g e arco $2\pi r$.

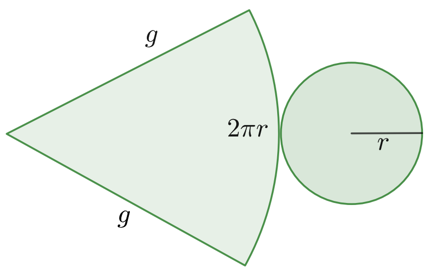


Figura 8.1.1

Note que a área lateral do cone é dada pela área de um setor circular em função do arco, que é:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g.$$

Assim, basta somar com a área da base que obteremos a área total:

$$\begin{aligned} A_T &= A_B + A_L = \pi r^2 + \pi r g \\ A_T &= \pi r(r+g). \end{aligned}$$

8.2 Volume de um cone

Empiricamente podemos dizer que para encher de água um cilindro de altura h seria necessário três cones de água com mesma base e altura. Dessa maneira a fórmula do volume de um cone é:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h. \tag{11.5}$$

8.3 Seção transversal de um cone

No cone representado, perceba que se rotacionarmos o triângulo VAB obteremos o cone, isso é chamado sólido de revolução.

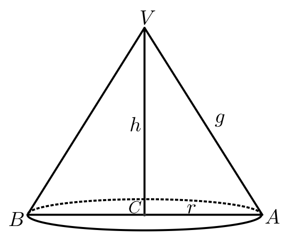


Figura 8.3.1

Veja que utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo da direita obtemos uma relação entre as três medidas de um cone sua altura, raio e geratriz:

$$g^2 = h^2 + r^2.$$

8.4 Tronco de um cone

Sejam um cone de altura H, raio R e um plano α paralelo à base deste cone, quando esse plano corta o cone em duas partes, temos um novo cone menor e um tronco de cone.

O tronco tem uma base maior de área A_B que possui um raio R e uma base menor de área A_{B_1} de raio r, e também tem uma geratriz g e uma altura h.

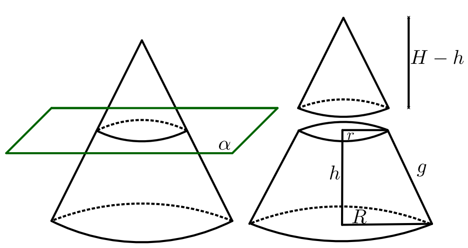


Figura 8.4.1

A sua área é dada por:

$$A_T = \pi \cdot g(r+R). \tag{11.6}$$

E o seu volume é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2). \tag{11.7}$$

Exercício resolvido 1 (UNESP 2014 - Modificado) Prato da culinária japonesa, o temaki é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma especie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.

Um temaki típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8cm e a altura 10cm. Sabendo-se que, em um temaki típico de salmão, o peixe corresponde a 90% da massa do seu recheio, que a densidade do salmão é de $0{,}35$g/cm^3, e tomando $\pi = 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse temaki, é de:

Resolução: A partir do volume do cone podemos calcular a quantidade aproximada de salmão, em gramas, veja que o diâmetro do cone é igual a 8cm então o raio mede 4cm, sendo assim , podemos aplicar a altura e o raio na Fórmula (11.5) do volume do cone da seguinte maneira:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\text{cm}^3.$$

Como o peixe corresponde a 90% basta multiplicar $160cm^3$ por $0{,}9$ que resulta em $144cm^3$, sendo assim temos que multiplicar a densidade pelo espaço ocupado, para saber quanto em gramas temos, ou seja:

$$\text{Quantidade} = 144 \cdot 0{,}35 = 50{,}4\text{g}. \tag{11.8}$$

Portanto, a quantidade aproximada de salmão em gramas é de $50{,}4$g.

Exercício resolvido 2 (PMES - modificado) O volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo isósceles de lados congruentes medindo 5cm e base medindo 6cm, em torno da altura é igual a:

Resolução: O triângulo isósceles nada mais é do que a seção transversal de um cone com geratriz $g = 5$cm e diâmetro $d = 6$cm ou seja o raio é $r = 3$cm, agora, basta encontrar a altura do cone e calcular o seu volume, para isso perceba que o raio, com a geratriz e com a altura formam um triângulo cuja hipotenusa é a geratriz, dai temos:

$$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4\text{cm}. \tag{11.9}$$

Portanto, o volume é igual á

$$V = \frac{1}{3}A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 4 = \frac{1}{3}\pi 9 \cdot 4 = 12\pi.$$

9 Esfera

Uma esfera é o conjunto de semirretas de tamanho r, que partem de um ponto C. O segmento r é chamada de raio da esfera e C é chamado de centro da esfera.

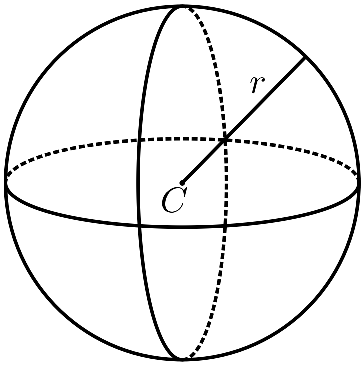


Figura 9.0.1: Esfera de raio r.

9.1 Área de uma esfera

Tomamos a área da esfera como sendo:

$$A_T = 4\pi r^2.$$

9.2 Volume de uma esfera

O volume de uma esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Exemplo 9.2.1 Foi jogada uma esfera dentro de um cubo de volume 27m^3 que estava cheio de água e, em seguida ela foi tirada. Então, foi medido quantos litros de água restaram no cubo, obtendo $23m^3$. Determine qual o raio da esfera. Considerando $(\pi = 3)$.

Resolução: Veja que o volume de água perdido é o volume da esfera, então

$$\begin{aligned} V_{cubo} - V_{restou} = V_{esfera} \Rightarrow 27 - 23 &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 4 &= \frac{4}{3}3r^3 \\ r^3 &= 1 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

9.3 Seções transversais de uma esfera

Qualquer corte feito em uma esfera irá resultar em um círculo e a distância dele até o centro é chamada de d e o raio dele de s, como demonstrado na figura a seguir:

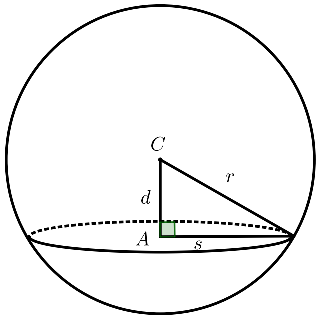


Figura 9.3.1

Exemplo 9.3.1 Usando a Figura 9.3.1 vamos calcular o raio da esfera em função de d e s e posteriormente acharemos a área e o volume desta. Veja que ali dentro temos um triângulo retângulo, vamos então aplicar o Teorema de Pitágoras, assim temos:

$$r^2 = s^2 + d^2 \Rightarrow r = \sqrt{s^2 + d^2}.$$

Mas o volume da esfera inteira é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

então:

$$V = \frac{4}{3}\pi \sqrt{s^2 + d^2}^3.$$

E a área da esfera inteira é dada por:

$$A_T = 4\pi r^2 \Rightarrow A_T = 4\pi \sqrt{s^2 + d^2}^2 = 4\pi(s^2 + d^2).$$

Exercício resolvido 1 (UNITAU - Modificado) Aumentando em 10% o raio de uma esfera em quantos porcentos a sua superfície aumentará?

Resolução: Temos duas esferas, uma de raio r e outra de raio r_{novo} como queremos aumentar em 10% o r, então teremos,

$$r_{\text{novo}} = (\frac{100}{100} \cdot r) + (10/100 \cdot r) = \frac{110}{100} \cdot r = \frac{11}{10} \cdot r,$$

para saber quanto a superfície vai aumentar basta fazer a razão entre a área total da nova esfera de raio maior e a de raio menor, assim temos:

$$A_{T_1} = 4\cdot\pi . r^2$$
$$A_{T\text{nova}} = 4\cdot\pi\cdot\left(\frac{11}{10}\cdot r\right)^2.$$

Agora fazendo a razão entre as duas,

$$\frac{A_{T\text{nova}}}{A_{T_1}} = \frac{4\cdot\pi\cdot\left(\left(\frac{11}{10}\right)\cdot r\right)^2}{4\cdot\pi\cdot r^2} = \frac{\left(\frac{11}{10}\right)^2\cdot r^2}{r^2} = \left(\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{121}{100}.$$

Ou seja,

$$A_{T\text{nova}}\cdot 100 = A_{T_1}\cdot 121.$$

Portanto, a área da esfera nova cresceu em 21%.

Exercício resolvido 2 (ENEM 2017 - Modificado) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.

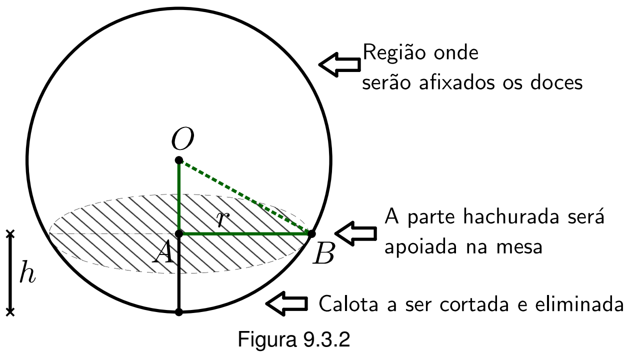


Figura 9.3.2

Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

Resolução: Primeiramente, perceba que o raio da esfera é 5cm, pois o diâmetro é igual a 10. Veja que o triângulo OAB é um triângulo pitagórico, de medidas igual a 5 na hipotenusa, e 3 no cateto AB, ou seja, a medida do cateto OA deve ser igual a 4.

Agora temos que $OA + h = 5$, pois é o raio da esfera, então como $OA = 4\text{cm}$ por consequência $h = 1\text{cm}$.

10 Relações de semelhança entre sólidos geométricos

Podemos criar relações entre dois sólidos de mesmo formato por meio de razões entre suas arestas, áreas e volumes, por exemplo entre as seguintes pirâmides semelhantes:

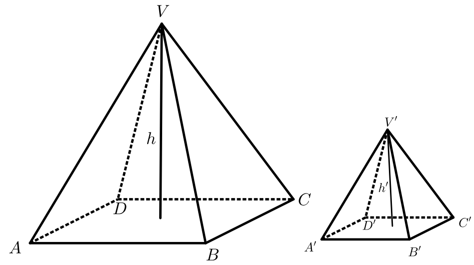


Figura 10.0.1

A pirâmide da esquerda é maior do que a da direita, e podemos dizer o quão maior elas são, e isto pode ser visto quando encontramos as seguintes razões entre elas:

Para uma aresta a da pirâmide maior e uma aresta a_1 da pirâmide menor conseguimos a seguinte razão:

$$\frac{a_1}{a} = k. \tag{11.10}$$

Para uma área A da pirâmide maior e uma área A_1 da pirâmide menor conseguimos a seguinte razão:

$$\frac{A_1}{A} = k^2. \tag{11.11}$$

Para um volume V da pirâmide maior e um volume V_1 da pirâmide menor conseguimos a seguinte razão:

$$\frac{V_1}{V} = k^3. \tag{11.12}$$

Exemplo 10.0.1 Seja a seguinte pirâmide:

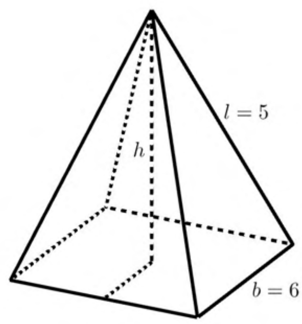


Figura 10.0.2

Queremos determinar uma segunda pirâmide com o mesmo padrão, reta e de base quadrada, tal que ela tenha o volume duas vezes menor que a da imagem.

Sabemos que a respeito da pirâmide maior a aresta da base é $b = 6$, o apótema é $a_p = 4$ e altura é $h = \sqrt{7}$.

Sendo b_1 a aresta da base, a_{p_1} a apótema e h_1 a altura da pirâmide menor, obtemos:

$$\frac{b_1}{6} = \frac{a_{p_1}}{4} = \frac{h_1}{\sqrt{7}} = k.$$

Mas queremos que,

$$V_1 = \frac{1}{2}V.$$

Pela relação :

$$\frac{\frac{1}{2}V}{V} = k^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = k \Rightarrow k = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Agora que achamos k podemos usá-lo para achar as medidas da pirâmide menor. Assim encontramos:

$$\frac{b_1}{6} = \frac{a_{p_1}}{4} = \frac{h_1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Deste modo temos:

$$b_1 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}6 \qquad a_{p_1} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}4 \qquad h_1 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\sqrt{7}.$$

Exemplo 10.0.2 Uma pirâmide reta foi seccionada paralelamente à sua base de forma que a altura da pirâmide gerada pela secção é dois terços da altura original. Determine o volume do tronco em função da área da base e da altura da pirâmide original.

Resolução: Sejam:

$$\begin{aligned} h &= \text{ altura da pirâmide original;} \\ h_1 &= \text{ altura da pirâmide gerada;} \\ A_B &= \text{ área da base da pirâmide original;} \\ A_{B_1} &= \text{ área da base da pirâmide gerada.} \end{aligned}$$

Como a pirâmide é reta e o corte foi paralelo à base, podemos usar a razão de semelhança entre pirâmides, sendo assim, sabemos do enunciado que $h_1 = \frac{2}{3}h$, logo conseguimos achar k:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{2}{3} = k.$$

Lembrando que $\frac{A_{B_1}}{A_B} = k^2$ temos:

$$A_{B_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 A_B = \frac{4}{9}A_B.$$

Então,

$$A_{B_1} = \frac{9}{4}A_B.$$

Agora, basta substituir na fórmula do volume (11.3) do tronco:

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{3}A_B \cdot h - \frac{1}{3}A_{B_1} \cdot h_1 &= \frac{1}{3}A_B \cdot h - \frac{1}{3}\frac{9}{4}A_B \cdot \frac{2}{3}h \\ &= \frac{1}{3}A_B \cdot h - \frac{6}{12}A_B \cdot h. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira fração por $1 = \frac{4}{4}$ temos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{12}A_B \cdot h - \frac{6}{12}A_B \cdot h \\ V &= \frac{10}{12}A_B h. \end{aligned}$$

Exemplo 10.0.3 Ao esquentar um cubo de ferro de volume igual a $8\mathrm{m}^3$, este teve seu volume aumentado para $27\mathrm{m}^3$, qual a razão entre a área total do cubo antes e depois?

Resolução: Primeiramente, vamos calcular a razão de proporção, veja que:

$$\frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3} = k^3 \Rightarrow k = \frac{2}{3}.$$

Agora, basta utilizar o valor de k para saber a razão entre antes e depois, pois:

$$\frac{A_{T_1}}{A_T} = k^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

11 Sólidos inscritos e circunscritos entre si

Podemos encaixar um sólido geométrico dentro do outro, e trabalharemos isso nesta seção.

Ao inserir um sólido “dentro” de outro estamos inscrevendo ele, logo este é chamado de sólido inscrito. Consequentemente, este sólido de “fora” estará circunscrito em relação ao de “dentro”. A seguir da esquerda para direita temos, respectivamente, uma esfera **inscrita** e **circunscrita** em um cubo.

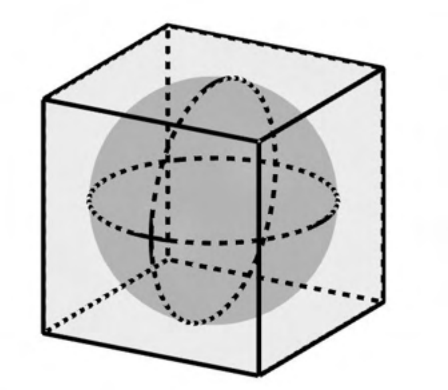


Figura 11.0.1: Esfera inscrita em cubo.

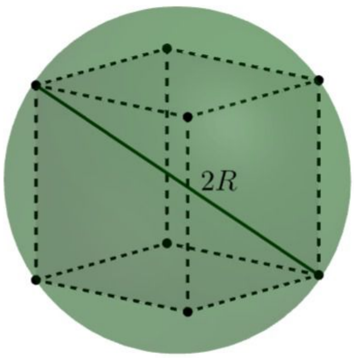


Figura 11.0.2: Esfera circunscrita a um cubo.

Obs. O sólido circunscrito sempre tangencia o sólido inscrito em todos seus vértices.

A imagem a seguir demonstra um sólido dentro de outro e suas bases.

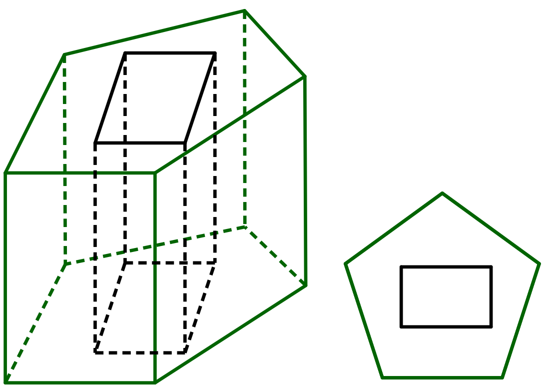


Figura 11.0.3

Já a próxima imagem deixa claro o que é estar **inscrito** em outro sólido.

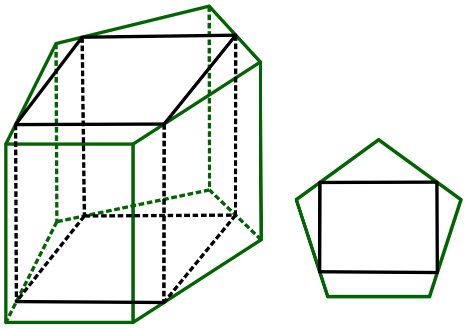


Figura 11.0.4

11.1 Cilindros inscritos

Em um Prisma

Quando um cilindro está inscrito em um prisma, o cilindro e o prisma terão a mesma altura, o raio do cilindro é igual ao apótema da base do prisma.

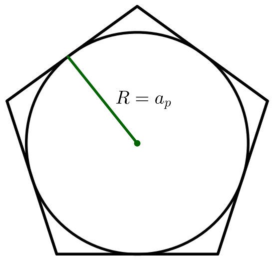


Figura 11.1.1: Mostrando a relação entre o círculo e o polígono da base

Exemplo 11.1.1 Um cilindro de raio 2cm e altura igual a 3cm está inscrito em um prisma reto que possui como base um triangulo equilátero, qual o volume do prisma?

Resolução: Primeiramente, desenhando a situação temos:

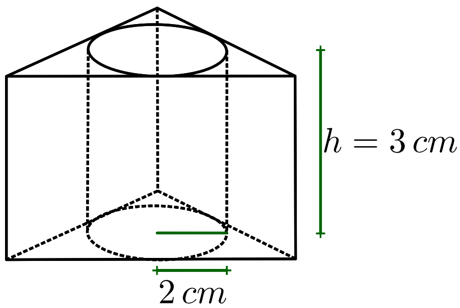


Figura 11.1.2

Veja que precisamos focar no estudo da base desses dois, pois a altura deles vai ser a mesma, então só precisamos descobrir a área da base do prisma.

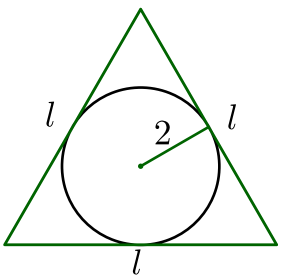


Figura 11.1.3: Mostrando a relação entre o círculo e o polígono da base.

Veja que podemos encontrar o lado ℓ do triângulo a partir do raio do círculo, que é igual 2 e forma $90°$ com o lado ℓ.

Como o triângulo é equilátero, então a mediatriz, bissetriz e alturas dele estão na mesma reta. Logo se criarmos o seguinte triângulo, a hipotenusa dele vai ser a bissetriz do ângulo.

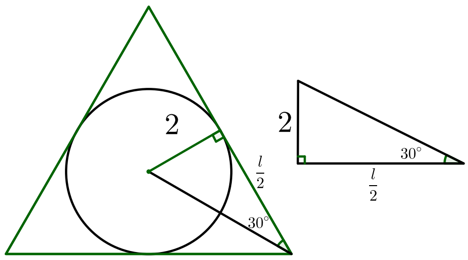


Figura 11.1.4

Agora basta calcular $\frac{\ell}{2}$ a partir da tangente e depois encontrar a área do triangulo e multiplicar pela altura. Sendo assim,

$$\text{tg}(30°) = \frac{2}{\frac{\ell}{2}} = \frac{4}{\ell}.$$

Mas $\text{tg}(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, logo

$$\frac{4}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \ell = 4\sqrt{3}.$$

Agora encontrando a área da base,

$$A_B = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\cdot 4\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

Como o volume de um prisma é dado por $V = A_B \cdot h$ temos que

$$V = 12\sqrt{3}\cdot 3 = 36\sqrt{3}\text{cm}.$$

Em uma Esfera

Quando um cilindro está inscrito em uma esfera, utilizando as seções meridionais da esfera e do cilindro, temos que:

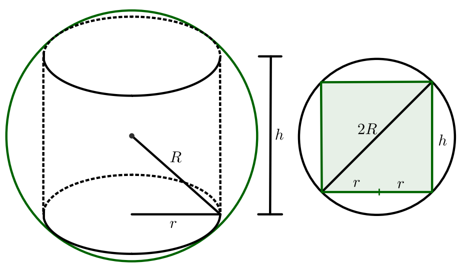


Figura 11.1.5

Sendo R o raio da esfera, r o raio do cilindro e h a altura do cilindro, surge a relação:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2.$$

Exercício resolvido 1 (PUCRIO 2009) Um cilindro reto de base circular de raio r e altura h é inscrito numa esfera de raio 5.

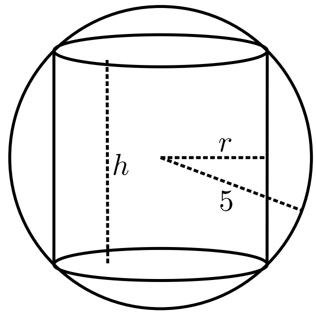


Figura 11.1.6: pedir para com de artes fazer

a) Encontre a altura do cilindro quando $r = 3$.
b) Calcule a área total do cilindro quando $r = 3$.
c) Escreva a área total do cilindro como função de r.

Resolução: **a)** Podemos encontrar a altura do cilindro a partir da seguinte equação:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2.$$

O raio da esfera R é igual a 5 e o do cilindro r é igual a 3, basta colocar esses valores na fórmula que obtemos:

$$\begin{aligned}(2\cdot 5)^2 &= (2\cdot 3)^2 + h^2\\ \Rightarrow h^2 &= (10)^2 - (6)^2\\ \Rightarrow h &= \sqrt{100-36}\\ &= \sqrt{64}\\ &= 8.\end{aligned}$$

b) A área total de um cilindro é dada por $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, substituindo os valores, temos:

$$\begin{aligned}A_T &= 2\pi r^2 + 2\pi r h\\ &= 2\pi 3^2 + 2\pi 3\cdot 8\\ &= 66\pi.\end{aligned}$$

c) Utilizando a fórmula:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2,$$

e sabendo que $R = 5$ encontramos

$$h^2 = 100 - (2r)^2 \Rightarrow h = \sqrt{100-(2r)^2}.$$

Agora, substituindo na área total de um cilindro $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, temos:

$$A_T(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\sqrt{100-(2r)^2}.$$

Simplificando, $A_T(r) = 2\pi r\left(r + 2\sqrt{25-r^2}\right)$.

11.2 Cilindros circunscritos

Em um Prisma

Quando um cilindro está circunscrito em um prisma, as alturas são iguais e conseguimos encontrar um triângulo isósceles de lados iguais ao raio r do cilindro.

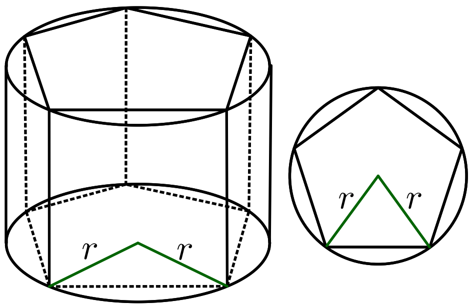


Figura 11.2.1: Mostrando a relação entre o círculo e um polígono da base.

Exemplo 11.2.1 Um cubo está inscrito em um cilindro de raio $r = 2$, qual o seu volume?

Resolução: Primeiramente para resolver este exemplo, precisamos desenhar a situação.

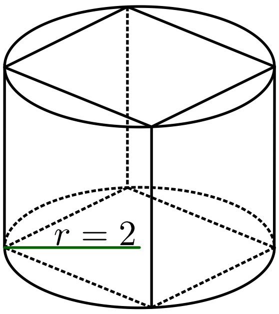


Figura 11.2.2

Como estamos falando de um cubo, podemos apenas encontrar a aresta a do cubo que encontraremos seu volume com a fórmula $V = a^3$.

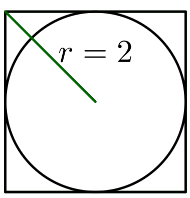


Figura 11.2.3

Veja que, de acordo com a figura acima, conseguimos perceber que a diagonal da face do cubo é igual a,

$$d = 2r = 4.$$

Portanto, podemos encontrar o valor de a a partir da equação $d = a\sqrt{2}$ da diagonal de um quadrado, pois a face de um cubo é sempre um quadrado.

$$\begin{cases} d = 4 \\ d = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 4 = a\sqrt{2},$$

ou seja,

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Assim, o volume do cubo é $V = (2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}$.

Em um Cone

Quando um cilindro está circunscrito em um cone as alturas e os raios são iguais, além disso o volume do cone é igual a terça parte do volume do cilindro.

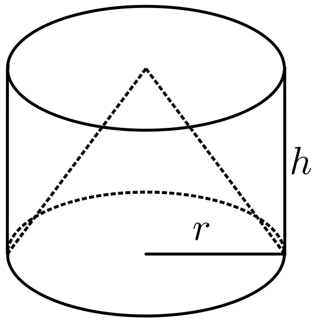


Figura 11.2.4

Em uma Esfera

A figura a seguir mostra as seções meridionais de um cilindro circunscrito em uma esfera.

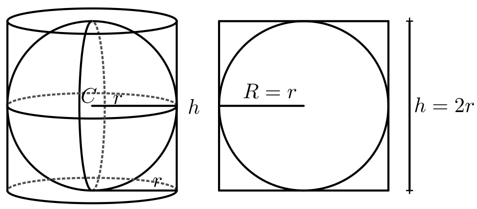


Figura 11.2.5: Esfera inscrita em um cilindro.

O raio do cilindro e da esfera são iguais, e a altura do cilindro é igual a $h = 2R$.

Exemplo 11.2.2 Quando compramos bolas de tênis, normalmente elas vem encapsuladas dentro de um cilindro como mostrado na imagem a seguir.

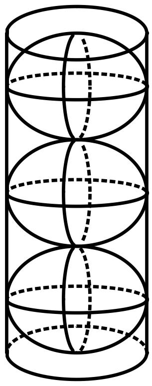


Figura 11.2.6

A Federação Internacional de Tênis (ITF) estipula que o diâmetro de uma de uma bola de Tênis deve estar entre $6,54$cm e $6,86$cm. Sabendo que as três esferas estão imóveis, ou seja, não conseguem se deslocar dentro do cilindro, qual o volume mínimo e máximo do cilindro? (Use $\pi = 3,14$)

Resolução: O enunciado diz que as esferas estão imóveis, isso é o mesmo que dizer que estão inscritas. Sendo assim podemos utilizar do fato de que o raio do cilindro e das esferas são iguais.

O enunciado nos traz que o diâmetro de uma bola de tênis deve estar entre $6,54$cm e $6,86$cm então o raio dela deve estar entre $3,27$cm e $3,43$cm assim podemos calcular a área do círculo da base desse cilindro da seguinte forma:

$$A_B = \pi r^2 \Rightarrow \begin{cases} A_B = \pi(3,27)^2 = 3,14 \times 10,69 = 33,57\text{cm}^2 \\ A_B = \pi(3,43)^2 = 3,14 \times 11,76 = 36,94\text{cm}^2 \end{cases}$$

Agora para calcular o volume precisamos encontrar a altura do cilindro. Mas perceba que temos três esferas empilhadas que é o mesmo que empilhar três diâmetros ou seis raios.

Veja que seis raios são $h = 6 \times 3,27 = 19,62$ para o mínimo ou $h = 6 \times 3,43cm = 20,58$ para o máximo.

$$V = A_B h \Rightarrow \begin{cases} V_{\text{mínimo}} = 33,57h = 33,57 \times 19,62 = 658,64 \\ V_{\text{máximo}} = 36,94h = 36,94 \times 20,58 = 760,26 \end{cases}$$

Portanto, o volume mínimo é $658,64\text{cm}^3$ e o máximo é $760,26\text{cm}^3$.

11.3 Cones inscritos

Em um Prisma

Quando um cone está inscrito em um prisma, o cone e o prisma terão a mesma altura e o raio do cone é igual ao apótema da base do prisma.

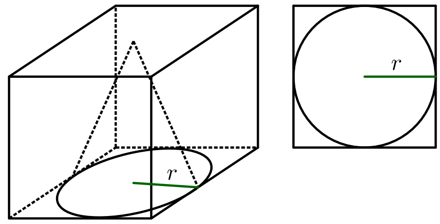


Figura 11.3.1

Em uma Pirâmide

Quando um cone está inscrito em uma pirâmide, o cone e a pirâmide terão a mesma altura e o raio do cone é igual o apótema da base da pirâmide.

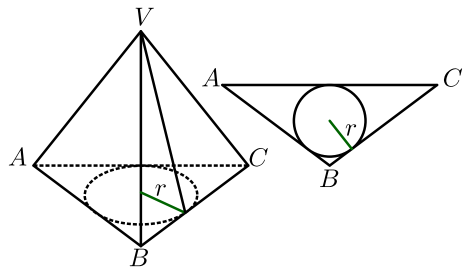


Figura 11.3.2

Exercício resolvido 2 (FUVEST 2006 - Modificado) Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto-retângulo, de base quadrada, como mostra a figura.

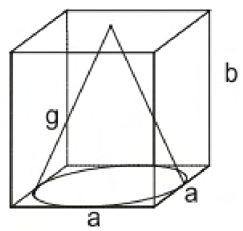


Figura 11.3.3

A razão $\dfrac{b}{a}$ entre as dimensões do paralelepípedo é $\dfrac{3}{2}$ e o volume do cone é π. então, o comprimento g da geratriz do cone é:

Resolução: Queremos achar a geratriz do cone, precisamos então aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo que a contém, e esse triângulo tem catetos $\dfrac{a}{2}$ e b e hipotenusa g, assim conseguimos encontrar que:

$$g = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

Agora acharemos o valor de a e b, pelo enunciado temos que o volume do cone é igual a π, assim pela equação do volume do cone:

$$\pi = \frac{A_B h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Porém, o raio do cone é $\frac{a}{2}$ e a altura é igual a b logo:

$$\pi = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 b}{3} \Rightarrow 1 = \frac{a^2 b}{4\cdot 3} \Rightarrow 12 = a^2 b.$$

Pelo enunciado também temos que: $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$, ou seja, $b = \frac{3a}{2}$ substituindo na equação anterior encontramos:

$$12 = a^2 \frac{3a}{2}$$
$$24 = 3a^3$$
$$8 = a^3$$
$$a = 2.$$

E substituindo em $b = \frac{3a}{2}$:

$$b = 3.$$

Voltando ao Teorema de Pitágoras:

$$g = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = \sqrt{\frac{2^2}{4} + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

11.4 Cones circunscritos

Em uma Pirâmide

Quando um cone está circunscrito em uma pirâmide, as alturas deles são iguais, além disto o raio do cone é igual a metade do tamanho da diagonal da base da pirâmide, veja na figura (11.2.1).

11.5 Esferas inscritas

Em um cubo

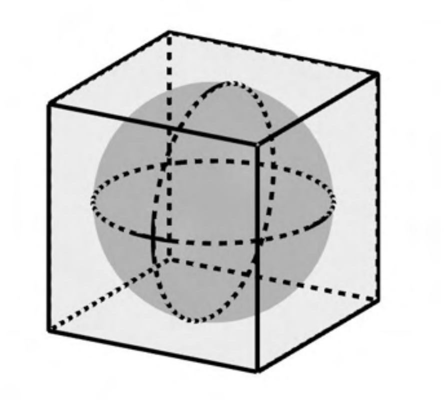


Figura 11.5.1

A figura anterior mostra a esfera inscrita em um cubo, e a figura seguinte a sua seção meridional em comparação com a do cubo.

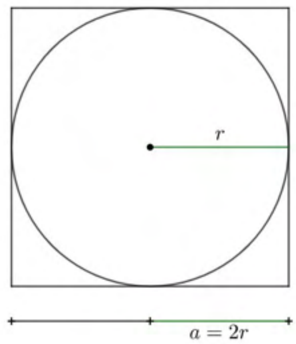


Figura 11.5.2

Veja nesta que raio da esfera R é igual a metade da aresta a do cubo.

$$R = \frac{a}{2}.$$

Exemplo 11.5.1 Uma esfera foi inscrita em um cubo de 64cm^3 de volume e outra esfera foi circunscrita no mesmo cubo, calcule o volume das esferas.

Resolução: Primeiramente para a esfera inscrita temos que, como visto em (11.5), o raio da esfera é igual a metade da aresta do cubo, então basta calcular o valor da aresta deste cubo. Como o volume de um cubo é $V = \ell^3$, temos que $64 = \ell^3$, então $\ell = 4$cm. Logo, o raio da esfera é igual a 2 centímetros, portanto seu volume é:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi. \tag{11.13}$$

Agora para a esfera circunscrita, como visto na Figura 11.6, temos que o volume da esfera é igual a metade da diagonal do cubo, mas a diagonal do cubo é dada por $d = \ell\sqrt{3}$, ou seja, $d = 4\sqrt{3}$ então o raio da esfera é igual a $2\sqrt{3}$ e portanto o seu volume é:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{3})^3 = 32\sqrt{3}\pi. \tag{11.14}$$

Exercício resolvido 3 (UERJ 2009) A figura abaixo representa uma caixa, com a forma de um prisma triangular regular, contendo uma bola perfeitamente esférica que tangencia internamente as cinco faces do prisma.

Figura 11.5.3

Admitindo $\pi = 3$, determine o valor aproximado da porcentagem ocupada pelo volume da bola em relação ao volume da caixa.

Resolução: Como o prisma é regular triangular, então sua base é um triângulo equilátero. Além disso, veja que a altura do prisma é duas vezes o raio r da esfera.

Para calcular o volume do prisma precisamos encontrar a área da base do prisma, para isso vamos fazer a seção meridional da figura que nos dará o seguinte triângulo:

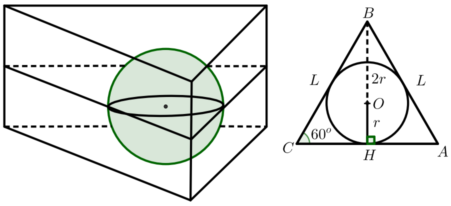


Figura 11.5.4

Veja que o centro O do triângulo nos dá a altura dividida em três partes, como HO é igual á r então OB é igual a $2r$.

A área da base do triangulo equilátero de lado L é dada por:

$$A_B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}.$$

Mas veja que, pela relação seno, conseguimos:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{3r}{L} \Rightarrow \frac{r}{L} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Agora podemos calcular a razão entre o volume da esfera e do prisma, lembre que o volume de um prisma é dado por $A_B \cdot h$. Sendo assim

$$\begin{aligned}\frac{V_{\text{Esfera}}}{V_{\text{Prisma}}} &= \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{A_B \cdot h}\\ &= \frac{4r^3}{\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2r}\\ &= \frac{8r^2}{L^2\sqrt{3}}\\ &= \frac{8\sqrt{3}^2}{6^2\sqrt{3}}\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 38\%.\end{aligned}$$

Exercício resolvido 4 (PUCSP 2006) De um cristal de rocha, com o formato de uma esfera, foi lapidada uma joia na forma de um octaedro regular, como mostra a figura seguinte.

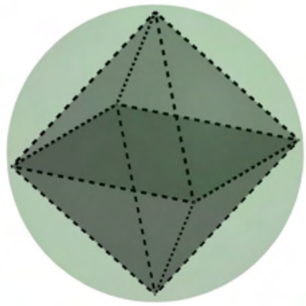


Figura 11.5.5

Se tal joia tem $9\sqrt{2}\text{cm}^3$ de volume, quantos centímetros cúbicos de rocha foram retirados do cristal original para lapidá-la? (Use: $\pi = 3$)

Resolução: Perceba que o exercício pede para subtrair da esfera o volume do octaedro.

O volume da esfera é dado por $V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$ e o volume de um octaedro regular é dado pela soma do volume das duas pirâmides que o formam, elas são pirâmides regulares de base quadrada e veja que a **altura delas é igual ao raio** da esfera.

O volume da joia, ou octaedro é igual a

$$V_O = 9\sqrt{2} = 2V_{\text{Pirâmide}} = 2\frac{1}{3}A_B \cdot r. \tag{11.15}$$

A área da base da cada pirâmide é a área de um quadrado, que possui diagonal igual a duas vezes o raio da esfera, ou seja

$$d = a\sqrt{2} = 2r \Rightarrow a = r\sqrt{2},$$

assim a área da base da pirâmide é $A_B = a^2 = r^2\sqrt{2}$.

Logo encontramos o valor do raio, pela Equação (11.15).

$$9\sqrt{2} = \frac{1}{3}2r^2\sqrt{2}r \Rightarrow r^3 = \frac{27}{2}.$$

Então, o volume da esfera menos o volume do octaedro regular é igual á:

$$V = V_E - V_O = \frac{4}{3}\pi r^3 - 9\sqrt{2} = 27\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\text{cm}^3.$$

11.6 Esferas circunscritas

Em um cubo

A figura a seguir mostra uma esfera circunscrita em um cubo.

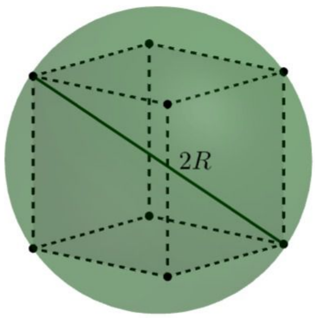


Figura 11.6.1: Esfera circunscrita a um cubo.

Perceba que a diagonal do cubo D é igual a duas vezes o raio R da esfera, ou seja:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Exercício resolvido 5 (UFF 2010) Em 1596, em sua obra *Mysterium Cosmographicum*, Johannes Kepler estabeleceu um modelo do cosmos onde os cinco poliedros regulares são colocados um dentro do outro, separados por esferas. A ideia de Kepler era relacionar as órbitas dos planetas com as ***razões harmônicas*** dos poliedros regulares.

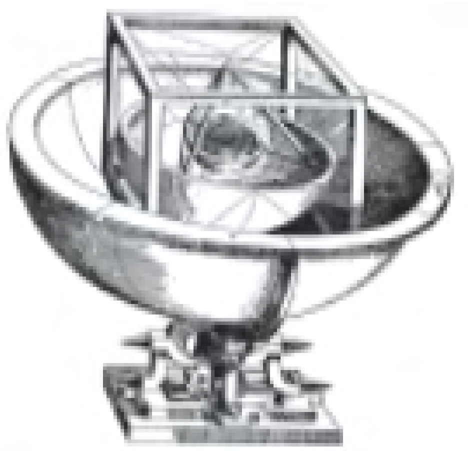


Figura 11.6.2

A razão harmônica de um poliedro regular é a razão entre o raio da esfera circunscrita e o raio da esfera inscrita no poliedro. A esfera circunscrita a um poliedro regular é aquela que contém todos os vértices do poliedro. A esfera inscrita, por sua vez, é aquela que é tangente a cada uma das faces do poliedro.

A razão harmônica de qualquer cubo é igual a:

Resolução: Veja na seção de esferas inscritas, temos que seu raio é igual a metade da aresta de um cubo, ou seja,

$$R_{\text{inscrita}} = \frac{a}{2}.$$

E na de esferas circunscritas temos que o seu raio é igual a metade da diagonal do cubo, ou seja,

$$R_{\text{circunscrita}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Agora, basta dividir o raio da circunscrita pelo raio da inscrita que chegamos em:

$$\frac{R_{\text{circunscrita}}}{R_{\text{inscrita}}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

12 Exercícios propostos

Exercício 11.1 (ENEM 2017) Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala $1:400$, e que seu volume é de 25cm^3. O volume do monumento original, em metro cúbico, é de:

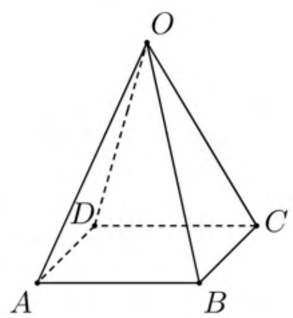
(a) 100
(b) 400
(c) 1600
(d) 6250
(e) 10000

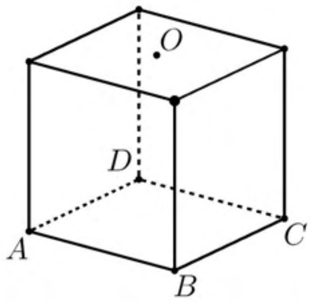
Exercício 11.2 (ENEM 2017) Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4cm e 5cm, respectivamente.

A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a

(a) 192
(b) 300
(c) 304
(d) 320
(e) 400

Exercício 11.3 (ENEM 2011) Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.





Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

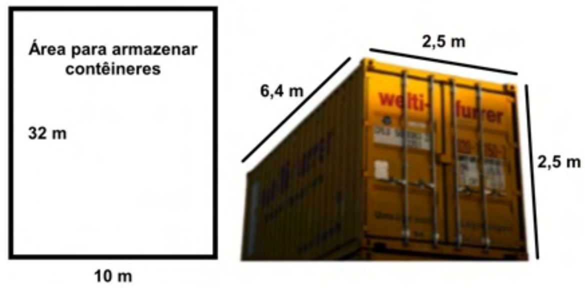
Os formatos dos sólidos descartados são

(a) todos iguais.
(b) todos diferentes.
(c) três iguais e um diferente.
(d) apenas dois iguais.
(e) iguais dois a dois.

Exercício 11.4 (ENEM 2014) Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura. A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é:

(a) $\frac{1}{8}$
(b) $\frac{7}{8}$
(c) $\frac{8}{7}$
(d) $\frac{8}{9}$
(e) $\frac{9}{8}$

Exercício 11.5 (ENEM 2015 - Modificado) Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na (Figura à direita), deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10m por 32m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura à esquerda).

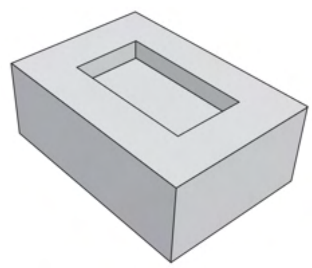


De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

(a) 12,5 m.
(b) 17,5 m.
(c) 25,0 m.
(d) 22,5 m.
(e) 32,5 m.

Exercício 11.6 (ENEM 2019) No ano de 1751, o matemático Euler conseguiu demonstrar a famosa relação para poliedros convexos que relaciona o número de suas faces (F), arestas (A) e vértices (V): V + F = A + 2. No entanto, na busca dessa demonstração, essa relação foi sendo testada em poliedros convexos e não convexos. Observou-se que alguns poliedros não convexos satisfaziam a relação e outros não. Um exemplo de poliedro não convexo é dado na figura. Todas as faces que não podem ser vistas diretamente são retangulares.

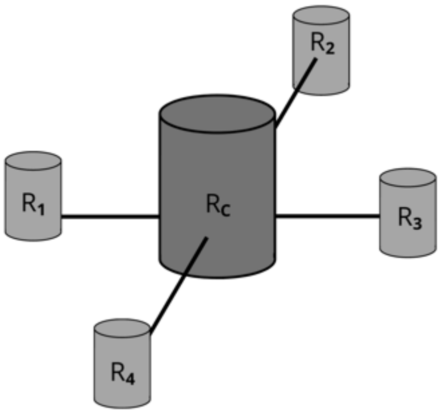


Qual a relação entre os vértices, as faces e as arestas do poliedro apresentado na figura?

(a) V + F = A
(b) V + F = A - 1
(c) V + F = A + 1
(d) V + F = A + 2

(e) V + F = A + 3

Exercício 11.7 (ENEM 2019) Uma construtora pretende conectar um reservatório central (R_c) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2m e altura interna igual a 3,30m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R_1, R_2, R_3 e R_4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5m.



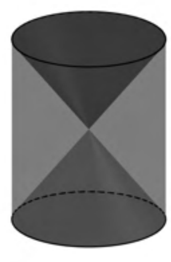
As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com $0,10$m de diâmetro interno e 20m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água.

No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes.

A medida, em metro, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é

(a) 1,44.
(b) 1,16.
(c) 1,10.
(d) 1,00.
(e) 0,95.

Exercício 11.8 (ENEM 2019) A figura mostra uma anticlepsidra, que é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidam com as bases desse cilindro. A anticlepsidra pode ser considerada, também, como o sólido resultante da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

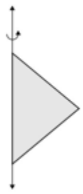


A figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado gera uma anticlepsidra como a da figura acima é

(a) 

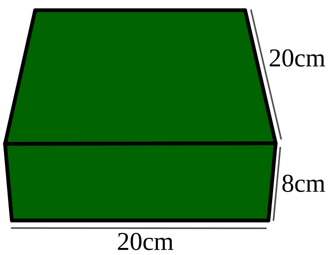
(d) 

(b) 

(e) 

(c) 

Exercício 11.9 (ENEM 2018) Uma fábrica comercializa chocolates em uma caixa de madeira, como na figura.



A caixa de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões externas, em centímetro, estão indicadas na figura. Sabe-se também que a espessura da madeira, em todas as suas faces, é de $0,5$cm.

Qual é o volume de madeira utilizado, em centímetro cúbico, na construção de uma caixa de madeira como a descrita para embalar os chocolates?

(a) 654
(b) 666
(c) 673
(d) 681
(e) 693

Exercício 11.10 (ENEM 2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.

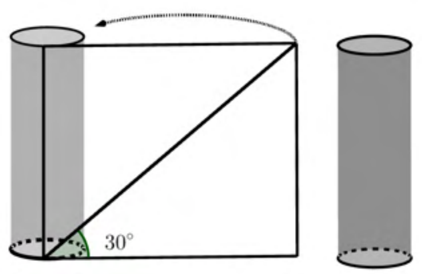


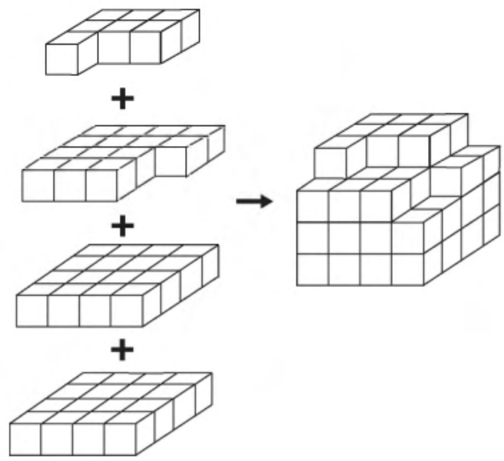
Figura 12.0.1

O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

(a) $36\sqrt{3}$
(b) $24\sqrt{3}$
(c) $4\sqrt{3}$
(d) 36
(e) 72

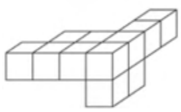
Exercício 11.11 (ENEM 2018) *Minecraft* é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.

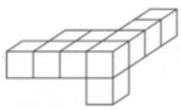
Um jogador deseja construir um cubo com dimensões 4 x 4 x 4. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários, conforme a figura.

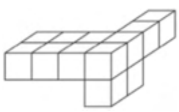


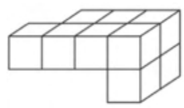
Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos, formam uma peça única, capaz de completar a tarefa.

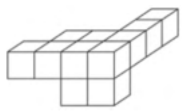
O formato da peça capaz de completar o cubo 4 x 4 x 4 é

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

Exercício 11.12 (ENEM 2018) Um artesão possui potes cilíndricos de tinta cujas medidas externas são 4cm de diâmetro e 6cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas voltadas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas.

No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas:

Modelo	**Comprimento (cm)**	**Largura (cm)**	**Altura (cm)**
I	8	8	40
II	8	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

Qual desses modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

(a) I
(b) II
(c) III
(d) IV
(e) V

Exercício 11.13 (ENEM 2010) Certa marca de suco é vendida no mercado em embalagens tradicionais de forma cilíndrica. Relançando a marca, o fabricante pôs à venda embalagens menores, reduzindo a embalagem tradicional à terça parte de sua capacidade. Por questões operacionais, a fábrica que fornece as embalagens manteve a mesma forma, porém reduziu à metade o valor do raio da base da embalagem tradicional na construção da nova embalagem. Para atender à solicitação de redução da capacidade, após a redução no raio, foi necessário determinar a altura da nova embalagem. Que expressão relaciona a medida da altura da nova embalagem de suco (a) com a altura da embalagem tradicional (h)?

(a) $a = \frac{h}{12}$
(b) $a = \frac{h}{6}$
(c) $a = \frac{2h}{3}$
(d) $a = \frac{4h}{3}$
(e) $a = \frac{4h}{9}$

Exercício 11.14 (ENEM 2010) Um fabricante de creme de leite comercializa seu produto em embalagens cilíndricas de diâmetro da base medindo 4cm e altura $13,5$cm. O rótulo de cada uma custa R$ 0,60. Esse fabricante comercializará o referido produto em embalagens ainda cilíndricas de mesma capacidade, mas com a medida do diâmetro da base igual à da altura. Levando-se em consideração exclusivamente o gasto com o rótulo, o valor que o fabricante deverá pagar por esse rótulo é de

(a) R$ 0,20, pois haverá uma redução de $\frac{2}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
(b) R$ 0,40, pois haverá uma redução de $\frac{1}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
(c) R$ 0,60, pois não haverá alteração na capacidade da embalagem.
(d) R$ 0,80, pois haverá um aumento de $\frac{1}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
(e) R$ 1,00, pois haverá um aumento de $\frac{2}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

Exercício 11.15 (ENEM 2010) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.

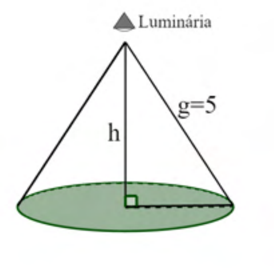
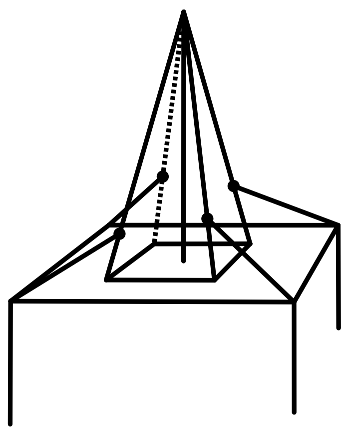


Figura 12.0.2

Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28,26m^2$, considerando $\pi \approx 3,14$, a altura h será igual a

(a) 3 m.
(b) 4 m.
(c) 5 m.
(d) 9 m.
(e) 16 m.

Exercício 11.16 (ENEM 2010) Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central. Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração.



Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, $24m$ e $6\sqrt{2}m$ e o lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}m$, então a medida, em metros, de cada cabo será igual a

(a) $\sqrt{288}$m
(b) $\sqrt{313}$m

(c) $\sqrt{328}$m
(d) $\sqrt{400}$m
(e) $\sqrt{505}$m

Exercício 11.17 Uma empresa responsável por produzir arranjos de parafina recebeu uma encomenda de arranjos em formato de cone reto. Porém, teve dificuldades em receber de seu fornecedor o molde a ser utilizado e negociou com a pessoa que fez a encomenda o uso de arranjos na forma de um prisma reto, com base quadrada de dimensões 5cm x 5cm.

Considerando que o arranjo na forma de cone utilizava um volume de 500mL, qual deverá ser a altura, em cm, desse prisma para que a empresa gaste a mesma quantidade de parafina utilizada no cone?

(a) 8
(b) 14
(c) 20
(d) 60
(e) 200

Exercício 11.18 (ENEM 2014) Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

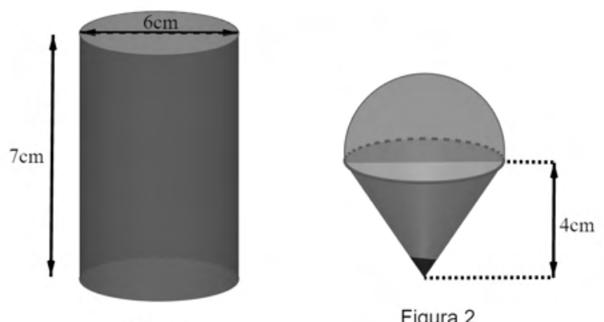


Figura 1
Figura 2

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada. Dados: O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4\pi r^3}{3}$; O volume do cilindro de altura h e área da base S é S.h; O volume do cone de altura h e área da base S é $\frac{1 \cdot S \cdot h}{3}$; Por simplicidade, aproxime π para 3. A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é

(a) 45
(b) 48
(c) 72
(d) 90
(e) 99

Exercício 11.19 (ENEM 2014) A caixa-d'água de uma casa tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e possui dimensões externas (comprimento, largura e altura) de, respectivamente, $4{,}0$m, $3{,}0$m e $2{,}5$m. É necessária a impermeabilização de todas as faces externas dessa caixa, incluindo a tampa. O fornecedor do impermeabilizante informou ao dono da casa que seu produto é fornecido em galões, de capacidade igual a 4,0 litros. Informou, ainda, que cada litro impermeabiliza uma área de 17700cm^2 e são necessárias 3 demãos de produto para garantir um bom resultado.

Com essas informações, para obter um bom resultado no trabalho de impermeabilização, o dono da casa precisará comprar um número mínimo de galões para a execução desse serviço igual a

(a) 9
(b) 13
(c) 19
(d) 25
(e) 45

Exercício 11.20 (ENEM 2015) Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

(a) 1,44
(b) 6,00
(c) 7,20
(d) 8,64
(e) 36,00

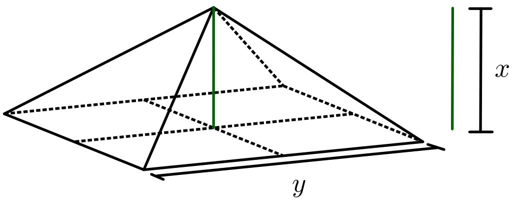
Exercício 11.21 (ENEM 2016) A figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m.

Disponível em: www.mauroweigel.blogspot.com. Acesso em: 23 nov. 2011.

O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é

(a) 97,0
(b) 136,8
(c) 173,7
(d) 173,7
(e) 240,0

Exercício 11.22 (ENEM 2016) A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base y. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida x. Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície da cobertura da tenda.



A área da superfície da cobertura da tenda, em função de y e x,é dada pela expressão

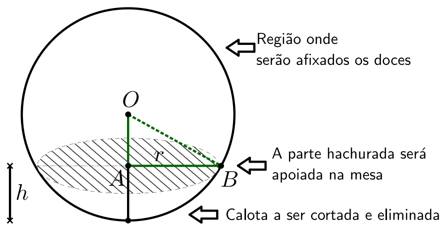
(a) $2y\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}$
(b) $2y\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}$
(c) $4y\sqrt{x^2+y^2}$
(d) $4\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}$
(e) $4\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}$

Exercício 11.23 (ENEM 2017) O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces.

Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a

(a) 10
(b) 12
(c) 25
(d) 42
(e) 50

Exercício 11.24 (ENEM 2017) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio rda seção circular de corte seja de pelo menos 3cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a

(a) $5-\frac{\sqrt{91}}{2}$
(b) $10-\sqrt{91}$
(c) 1
(d) 4
(e) 5

Exercício 11.25 Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado $1{,}5$mL desse produto para cada 1000L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a $1{,}7$m, com largura e comprimento iguais a 3m e 5m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

(a) 11,25
(b) 27,00

(c) 28,00
(d) 32,25
(e) 49,50

Exercício 11.26 (ENEM 2016) A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2cm, conforme ilustra a Figura 2.

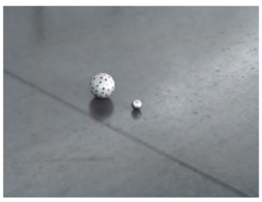


Figura 1

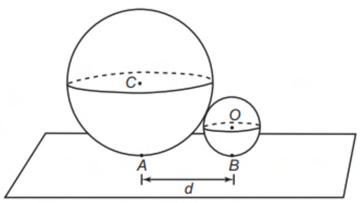


Figura 2

Considere o ponto C como o centro da bocha, e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d. Nessas condições, qual a razão entre d e o raio do bolim?

(a) 1
(b) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$
(c) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
(d) 2
(e) $\sqrt{10}$

Exercício 11.27 (ENEM 2016) Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

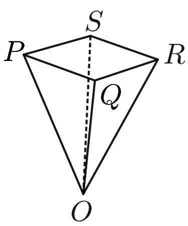


Figura 1

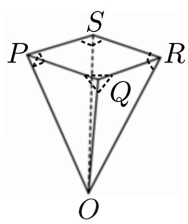


Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

(a) 9, 20 e 13.
(b) 9, 24 e 13.
(c) 7, 15 e 12.
(d) 10, 16 e 5.
(e) 11, 16 e 5.

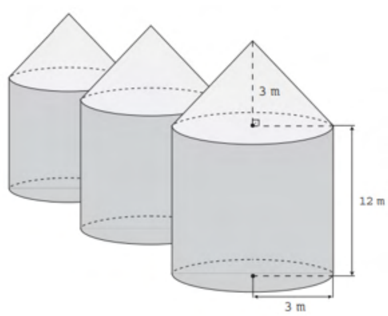
Exercício 11.28 (ENEM 2015) O índice pluviométrico é utilizado para mensurara precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1m^2, ou seja, se o índice for de 10mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto,em formato de um cubo com 1m^2 de área de base, é de 10mm. Em uma região, após um forte temporal,verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300mm e altura 1200mm, era de um terço da sua capacidade.

Utilize $3,0$ como aproximação para π.

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de

(a) 10,8
(b) 12,0
(c) 32,4
(d) 108,0
(e) 324,0

Exercício 11.29 (ENEM 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20m^3. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

(a) 6

(b) 16
(c) 17
(d) 18
(e) 21

Exercício 11.30 (ENEM 2014) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado. Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas. Use 3 como valor aproximado para π.

(a) 168
(b) 304
(c) 306
(d) 378
(e) 514

12 Geometria Analítica

Geometria Analítica

Introdução

A Álgebra e a Geometria eram dadas como áreas separadas. Em 1637, o matemático francês René Descartes publicou um livro chamado *O discurso do método*, unindo essas duas áreas na Geometria Analítica.

O que torna a Geometria Analítica importante é o fato de podermos definir formas geométricas de maneira numérica e, com isso obter informações sobre as formas.

Muitos conceitos descritos por esta área permitem aplicações práticas e úteis no cotidiano, e isto se dá de noções simples, como ponto médio ou distância entre pontos - o que é muito utilizado em obras e construções - até assuntos mais avançados, como condições de perpendicularidades.

A beleza desse assunto está no fato de podermos determinar coordenadas. Imagine-se pintando a parede do seu quarto de uma forma estilosa com retas pretas numa parede branca. Se você quer que as retas se encontrem em um ponto específico, visualize sua parede como um plano, escolha um ponto qualquer pra ser a origem e determine as coordenadas (utilizando unidades básicas de medidas, como metro, centímetro…) e, com isso, poderá utilizar as ideias que serão apresentadas para garantir um ótimo resultado final, sem ter que ficar retocando erros.

Notações

Muitos conceitos, ideias, notações e resultados do capítulo Geometria Plana serão utilizados para compreender as noções de Geometria Analítica. Com o intuito de relembrar as convenções feitas em Geometria Plana, representaremos os pontos do espaço por letras maiúsculas

$$(A, B, P, Q, \ldots),$$

as retas, por letras minúsculas

$$(r, s, t, \ldots)$$

e os planos, por letras gregas minúsculas

$$(\alpha, \beta, \pi, \ldots).$$

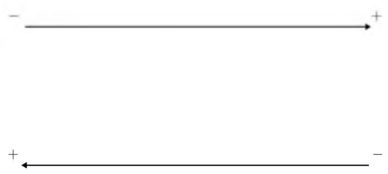
Ainda, assumiremos que dois pontos distintos determinam uma reta e três pontos distintos não colineares determinam um plano. Ou seja, se A e B são dois pontos distintos, então existe uma única reta r que contém esses dois pontos. Analogamente, se A, B e C são três pontos não colineares, então existe um único plano π que contém esses três pontos.

Por fim, retas são linhas infinitas sem pontos delimitando extremos; já segmentos de retas são uma parte da reta limitados por dois pontos nas extremidades; por fim, semirretas são retas com início em um ponto, mas ilimitadas na outra extremidade.

1 Coordenadas cartesianas na reta e no plano

Nesta seção, iremos definir o que são eixos, planos e as coordenadas de um ponto em relação a eixos e planos. Traremos, ainda, os conceitos de distância e ponto médio entre dois pontos.

Definição 1.1 Diremos que uma reta é orientada quando é determinado um sentido sobre ela. Esse sentido é indicado por uma seta, e a direção para onde aponta indica o sentido positivo, enquanto o sentido oposto é chamado negativo.



Para se ter um eixo E, precisamos de uma reta r orientada com um ponto 0 fixado, denominado origem.

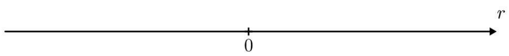
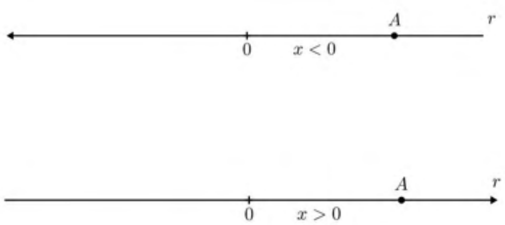


Figura 1.0.1: Eixo

Determinada uma origem 0 em uma reta r orientada, esta origem divide r em duas partes, uma para o sentido positivo e uma para o sentido negativo. Se um ponto A está na parte positiva de r, então um número real x positivo se associa a este ponto. Este número x é chamado coordenada do ponto A no eixo E. Analogamente, se um ponto A está na parte negativa de r, então um número real x negativo se associa a este ponto. Este número x é chamado coordenada do ponto A no eixo E.



Definição 1.2 Um plano α é determinado por dois eixos E e F (provenientes de retas r e s, respectivamente) perpendiculares que se intersectam na origem de ambos os eixos. Se um ponto P está neste plano α, então dois números reais x e y se associam a este ponto, e escrevemos $P = (x, y)$, onde x é a coordenada de P no eixo E e y é a coordenada de P no eixo F. Para identificar estas coordenadas de P, basta traçarmos duas retas paralelas aos eixos E e F que passam por P e, assim, obtermos x em E e y em F.

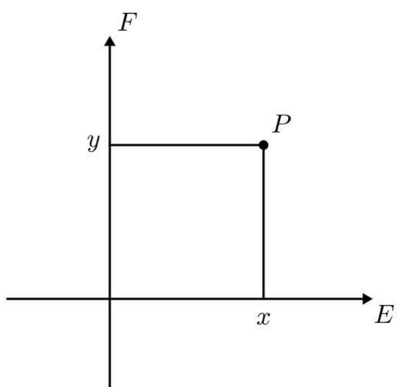


Figura 1.0.2: ponto no plano

Obs. Se considerarmos cada um dos eixos como o conjunto dos números reais e tendo 0 como origem, temos o plano cartesiano denotado por $\mathbb{R}^2$. Dado um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $x, y \in \mathbb{R}$, temos que x é a primeira coordenada de P no eixo horizontal (abscissa) e y é a segunda coordenada de P no eixo vertical (ordenada).

Obs. No plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, os pontos que estão sobre o eixo horizontal tem coordenadas $(x, 0)$, enquanto os pontos que estão sobre o eixo vertical tem coordenadas $(0, y)$.

Obs. No plano, temos duas diagonais importantes: a principal e a secundária. A principal é determinada pelos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$. Já a secundária é determinada pelos pontos $(0,0)$ e $(1,-1)$.

Quando tomamos um ponto A no plano, podemos verificar se A está sobre alguma diagonal do plano ou não. Ainda, se tivermos dois pontos B e C, conseguiremos analisar se eles se relacionam de alguma forma (se são coincidentes, se estão sobre a mesma reta paralela ao eixo, ...). Para isto, temos o seguinte Teorema:

Teorema 1.1 Dados dois pontos $A = (x, y)$ e $B = (p, q)$ no plano cartesiano, valem as seguintes afirmativas:

(1) Os pontos são coincidentes (iguais) se, e somente se, $x = p$ e $y = q$;

(2) Os pontos estão sobre a mesma reta r paralela ao eixo das abscissas se, e somente se, $y = q$;

(3) Os pontos estão sobre a mesma reta s paralela ao eixo das ordenadas se, e somente se, $x = p$;

(4) O ponto A está na diagonal principal se, e somente se, $x = y$;

(5) O ponto B está na diagonal secundária se, e somente se, $p = -q$.

Mais adiante, serão apresentados exemplos que ilustram a ideia deste Teorema.

Definição 1.3 Dado um plano cartesiano, os eixos dividem o plano em quatro partes (quadrantes) da seguinte forma:

$$\text{Primeiro quadrante } = \{(x, y) : \ x > 0 \text{ e } y > 0\};$$

$$\text{Segundo quadrante } = \{(x, y) : \ x < 0 \text{ e } y > 0\};$$

$$\text{Terceiro quadrante } = \{(x, y) : \ x < 0 \text{ e } y < 0\};$$

$$\text{Quarto quadrante } = \{(x, y) : \ x > 0 \text{ e } y < 0\}.$$

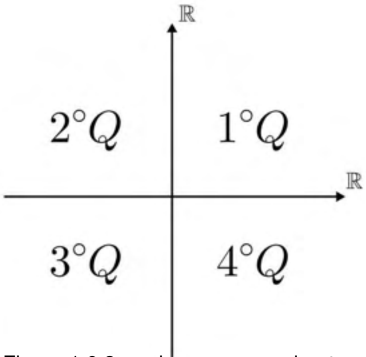
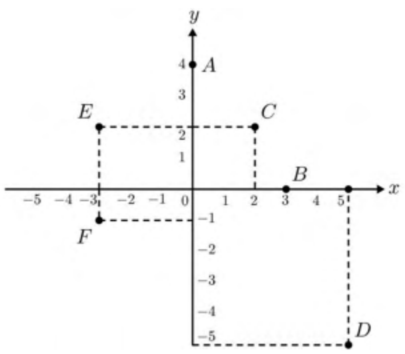


Figura 1.0.3: o plano e os quadrantes

Exemplo 1.0.1 Vamos marcar os seguintes pontos no plano cartesiano e analisar sua posição nele:

- $A = (0,4)$: está sobre o eixo das ordenadas;
- $B = (3,0)$: está sobre o eixo das abscissas;
- $C = (2,2)$: está sobre a diagonal principal no primeiro quadrante;
- $D = (5,-5)$: está sobre a diagonal secundária no quarto quadrante;
- $E = (-3,2)$: está no segundo quadrante;
- $F = (-3,-1)$: está no terceiro quadrante.



Exemplo 1.0.2 Determine para quais valores de x e y, os pontos $A = (x+2, y-x)$ e $B = (4,2)$ são coincidentes.

Resolução: Para que dois pontos sejam coincidentes, precisamos aplicar o item (1) do Teorema 1.1, ou seja, igualarmos os valores das abscissas e das ordenadas. Em outras palavras, basta resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} x+2=4 \\ y-x=2 \end{cases}$$

Segue da primeira linha que

$$x = 4-2 \Rightarrow x = 2$$

e, substituindo este valor na segunda linha, vem que

$$y - x = 2 \Rightarrow y - 2 = 2$$

$$y = 2+2 \Rightarrow y = 4.$$

Sendo assim, se $x = 2$ e $y = 4$, então $A = B = (4,2)$.

1.1 Distância entre dois pontos

Definição 1.4 Dados dois pontos X e Y sobre um eixo orientado, de modo que as coordenadas destes pontos sobre este eixo são x e y, respectivamente, então definimos a distância entre estes dois pontos como

$$d(X,Y) = \sqrt{(x-y)^2}.$$

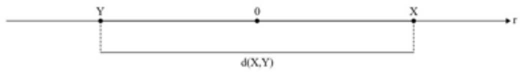


Figura 1.1.1: distância entre pontos na reta

Obs. É importante lembrarmos que $\sqrt{(x-y)^2}$ é equivalente ao valor absoluto (módulo) entre x e y, isto é, $|x-y|$. E note que $|x-y| \geq 0$ sempre, ou seja, a distância entre dois pontos é sempre maior ou igual a zero. De maneira simples, podemos escrever

$$\sqrt{(x-y)^2} = |x-y| \geq 0.$$

Exemplo 1.1.1 Dados os pontos $X = 7$ e $Y = -2$ sobre o eixo dos números reais, temos que a distância entre estes dois pontos é

$$d(X,Y) = \sqrt{(7-(-2))^2} = \sqrt{(7+2)^2} = \sqrt{9^2} = \sqrt{81} = 9.$$

Definição 1.5 Dados dois pontos $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$ no plano cartesiano, a distância entre estes dois pontos é dada por

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}.$$

Obs. Note que a distância entre dois pontos no plano é fornecida pelo Teorema de Pitágoras. Para perceber este fato, olhe com atenção para a próxima figura.

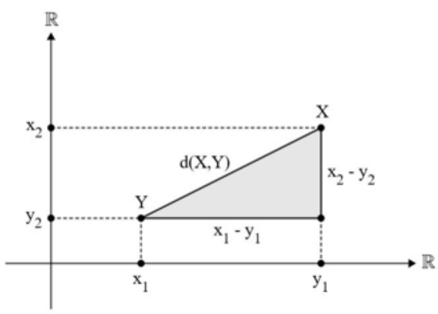


Figura 1.1.2: distância entre pontos no plano

Exemplo 1.1.2 Dados os pontos $X = (-2,1)$ e $Y = (4,-1)$ no plano cartesiano, temos que a distância entre estes dois pontos é

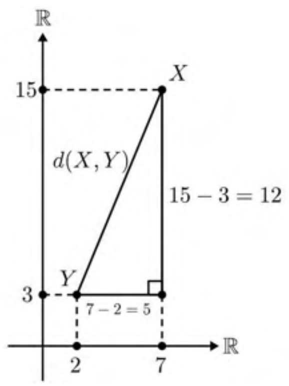
$$d(X,Y) = \sqrt{(-2-4)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{(-6)^2 + (1+1)^2}$$
$$= \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2 \cdot \sqrt{10}.$$

Exemplo 1.1.3 Sabemos que a origem O tem coordenadas $(0,0)$; sendo assim, a distância do ponto $X = (3,4)$ até a origem O é dada por

$$d(X,O) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Exemplo 1.1.4 Dados os pontos $X = (7,15)$ e $Y = (2,3)$ no plano cartesiano, temos que a distância entre estes dois pontos é

$$d(X,Y) = \sqrt{(7-2)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2}$$
$$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$$



1.2 Ponto médio

Antes de vermos o que é um ponto médio entre dois pontos no plano, entenderemos esta noção no caso da reta, isto é, dados dois números x e y, a média entre eles é o valor

$$\frac{x+y}{2}.$$

Agora, note que, se tivermos dois pontos $X = (x_1, y_1)$ e $Y = (x_2, y_2)$, determinar o ponto médio é determinar a média entre cada coordenada, ou seja, calcular

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Vejamos essa definição de maneira mais sucinta e alguns exemplos para entender este conceito.

Definição 1.6 Dados dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, o ponto C, que é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, tem suas coordenadas dadas por

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \tag{12.1}$$

É importante perceber que o ponto médio X é equidistante em relação a A e a B, ou seja,

$$d(A,C) = d(B,C). \tag{12.2}$$

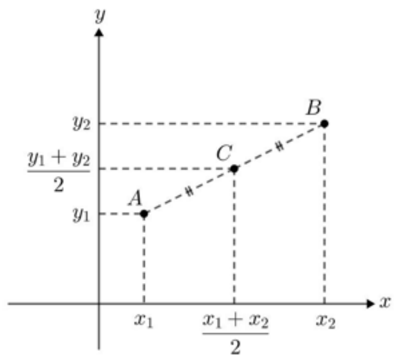
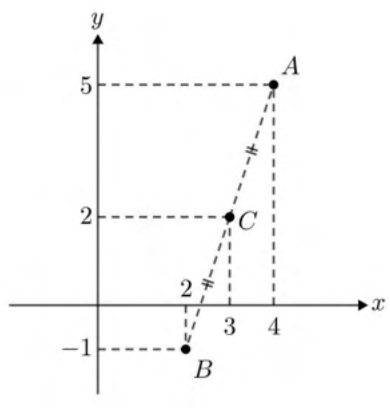


Figura 1.2.1: ponto médio

Exemplo 1.2.1 Dados os pontos $A = (4,5)$ e $B = (2,-1)$ no plano cartesiano, temos que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é o ponto C, dado por

$$C = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (3,2).$$



Exercício resolvido 1 (UFRGS - Adaptado) A distância entre os pontos $A = (-2, y)$ e $B = (6,7)$ é 10. O valor de y é:

Resolução: Para resolver este problema, utilizaremos a fórmula da distância para pontos no plano; sendo assim,

$$10 = d(A,B) = \sqrt{(-2-6)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (y-7)^2}$$
$$= \sqrt{64 + y^2 - 14 \cdot y + 49}.$$

Deste modo,

$$10 = \sqrt{113 + y^2 - 14 \cdot y}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, segue que

$$100 = 113 + y^2 - 14 \cdot y.$$

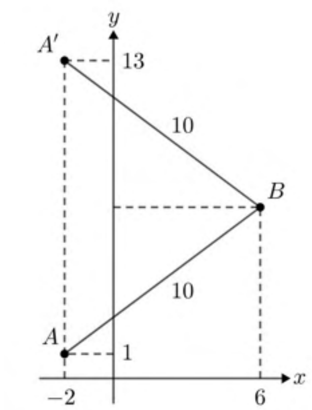
Assim, temos a seguinte equação do segundo grau:

$$y^2 - 14 \cdot y + 13 = 0.$$

Calculando suas raízes, temos

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{14 \pm \sqrt{196 - 52}}{2} \\ &= \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2} \\ &= \frac{14 \pm 12}{2}. \end{aligned}$$

Desta forma, as soluções são dadas por $y_1 = \dfrac{14+12}{2}$ e $y_2 = \dfrac{14-12}{2}$, portanto as soluções são $y_1 = 13$ ou $y_2 = 1$.



Exercício resolvido 2 (UECE - Adaptado) Se $(2,5)$ for o ponto médio do segmento de extremos $(5, y)$ e $(x, 7)$, então o valor de $x + y$ é igual a:

Resolução: Para resolver este exercício, utilizaremos a fórmula (12.1) para calcular o ponto médio; sendo assim,

$$(2,5) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{y+7}{2}\right),$$

ou seja,

$$\frac{5+x}{2} = 2 \Rightarrow 5 + x = 4 \Rightarrow x = -1$$

$$\frac{y+7}{2} = 5 \Rightarrow y + 7 = 10 \Rightarrow y = 3.$$

Sendo assim, $x + y = -1 + 3 = 2$.

2 Equação da reta

Nesta seção, iremos abordar três tipos de equação de reta: a geral, a reduzida e a segmentária.

Antes de falar sobre a equação geral da reta, vamos entender sobre a condição para que três pontos do plano sejam colineares, isto é, estejam sobre uma mesma reta r. Após compreender esta condição, encontrar a equação geral da reta se tornará simples. A equação reduzida da reta é obtida a partir da equação geral. E, por fim, abordaremos a equação segmentária.

2.1 Condição para que três pontos sejam colineares

Definição 2.1 Dados três pontos $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ e $Z = (z_1, z_2)$. Para que estes pontos sejam colineares, basta que o determinante da matriz A seja nulo, onde a matriz A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, para que X, Y e Z estejam sobre uma mesma reta, precisamos que

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vejamos alguns exemplos para entender melhor esta definição.

Exemplo 2.1.1 Os pontos $A = (1,1)$, $B = (1,2)$ e $C = (2,3)$ não são colineares, pois

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2 \cdot 1 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 1) + (1 \cdot 3 \cdot 1) - (1 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 2 \cdot 2) - (1 \cdot 3 \cdot 1)$$

$$= 2 + 2 + 3 - 1 - 4 - 3$$

$$= -1 \neq 0.$$

Exemplo 2.1.2 Os pontos $A = (-5,5)$, $B = (3,1)$ e $C = (1,2)$ são colineares, pois

$$\det A = \begin{vmatrix} -5 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (1\cdot 5\cdot 1) + ((-5)\cdot 1\cdot 1) + (3\cdot 2\cdot 1) \\ &\quad - (1\cdot 5\cdot 3) - (1\cdot 1\cdot 1) - (1\cdot 2\cdot (-5)) \\ &= 5 - 5 + 6 - 15 - 1 + 10 = 0. \end{aligned}$$

Exercício resolvido 1 (UFMG - Adaptado) Determine o valor de m para que os pontos $A = (2\cdot m+1, 2)$, $B = (-6,-5)$ e $C = (0,1)$ sejam colineares.

Para que os pontos sejam colineares, precisamos que

$$\det A = \begin{vmatrix} 2\cdot m+1 & 2 & 1 \\ -6 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= (0\cdot 2\cdot 1) + ((2\cdot m+1)\cdot(-5)\cdot 1) + +((-6)\cdot 1\cdot 1) \\ &\quad - (1\cdot 2\cdot(-6)) - (1\cdot(-5)\cdot 0) - (1\cdot 1\cdot(2\cdot m+1)) \\ &= 0 - 10\cdot m - 5 - 6 + 12 + 0 - 2\cdot m - 1 \\ &= -10\cdot m - 11 - 2\cdot m + 11 \\ &= -12\cdot m. \end{aligned}$$

Sendo assim, $0 = -12\cdot m$ e, portanto, $m = 0$ para que os pontos sejam colineares.

2.2 Equação geral da reta

Dados dois pontos distintos $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$, existe uma única reta r que os contém e existem outros pontos que pertencem a esta reta. Seja $P = (x, y)$ um ponto da reta r diferente de X e de Y.

A equação geral da reta r é dada segundo a condição de alinhamento de três pontos como visto anteriormente, ou seja, basta calcular o determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

onde x e y são variáveis e x_1, x_2, y_1 e y_2 são conhecidos. Calculando o determinante desta matriz, temos

$$y_1\cdot y + x_2\cdot x + x_1\cdot y_2 - x_1\cdot y - x_2\cdot y_1 - y_2\cdot x = 0$$

$$(x_2 - y_2)\cdot x + (y_1 - x_1)\cdot y + (x_1\cdot y_2 - x_2\cdot y_1) = 0.$$

E podemos ver a equação da reta como

$$r : a\cdot x + b\cdot y + c = 0,$$

onde a, b e c são constantes conhecidas, isto é, $a = x_2 - y_2$, $b = y_1 - x_1$ e $c = x_1\cdot y_2 - x_2\cdot y_1$.

Tudo isso está resumido na seguinte definição:

Definição 2.2 Dados dois pontos distintos $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$, existe uma única reta r que os contém, e a equação de r é

$$r : a\cdot x + b\cdot y + c = 0,$$

onde a, b e c são constantes conhecidas.

Exemplo 2.2.1 Para determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos $X = (1,2)$ e $Y = (2,3)$, calculemos o seguinte

$$0 = \det A = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2\cdot y\cdot 1) + (x\cdot 2\cdot 1) + (1\cdot 3\cdot 1) - (1\cdot y\cdot 1) - (1\cdot 2\cdot 2) - (1\cdot 3\cdot x)$$

$$= 2\cdot y + 2\cdot x + 3 - y - 4 - 3\cdot x$$

$$= y - x - 1.$$

Assim, a equação geral da reta que passa por X e Y é

$$y - x - 1 = 0.$$

Ainda, para verificar se o ponto $C = (4,2)$ pertence a esta reta, basta substituir suas coordenadas na equação, isto é, tomar $x = 4$ e $y = 2$, daí

$$2 - 4 - 1 = -3 \neq 0,$$

logo o ponto C não é colinear com os pontos X e Y.

Já o ponto $D = (6,7)$ é colinear com X e Y, pois tomando $x = 6$ e $y = 7$, temos

$$7 - 6 - 1 = 0$$

logo D satisfaz a equação geral.

Obs. Note que, dada uma reta r, a equação geral desta reta não é única. Basta notar que a equação se iguala a 0, logo podemos multiplicá-la por constantes, por exemplo, se r tem equação

$$2\cdot x - 3\cdot y + 1 = 0,$$

multiplicando ambos os lados da igualdade por 4, temos que

$$4\cdot(2\cdot x - 3\cdot y + 1) = 4\cdot 0$$

$$8\cdot x - 12\cdot y + 4 = 0$$

e $8\cdot x - 12\cdot y + 4 = 0$ também é equação geral da reta r.

Exercício resolvido 2 (MGS 2015) O valor de k para que a equação $k\cdot x - y - 3\cdot k + 6 = 0$ represente a reta que passa pelo ponto $(5,0)$ é:

Resolução: Para determinar k de modo que a reta de equação geral $k\cdot x-y-3\cdot k+6=0$ passe pelo ponto $(5,0)$, basta realizar a substituição $x=5$ e $y=0$ na equação; sendo assim,

$$\begin{aligned} & k\cdot 5-0-3\cdot k+6 &=& 0\\ \Rightarrow\ & 5\cdot k-3\cdot k+6 &=& 0\\ \Rightarrow\ & 2\cdot k &=& -6\\ \Rightarrow\ & k &=& -3.\end{aligned}$$

2.3 Equação reduzida da reta

Definição 2.3 Dada a equação geral da reta r como visto na seção anterior, a equação reduzida é obtida (de maneira simples e direta) isolando a variável y. Ou seja, se a equação geral da reta r é dada por $a\cdot x+b\cdot y+c=0$, temos que

$$\begin{aligned} a\cdot x+b\cdot y+c &= 0\\ a\cdot x+b\cdot y &= -c\\ b\cdot y &= -a\cdot x-c\\ y &= \frac{-a\cdot x-c}{b}\\ y &= -\frac{a\cdot x+c}{b}.\end{aligned}$$

Sendo assim, a equação reduzida, com $b\neq 0$, é dada por

$$y=-\frac{a\cdot x+c}{b}.$$

Exemplo 2.3.1 Vimos no Exemplo 2.2.1 que a equação geral da reta r que passa pelos pontos $X=(1,2)$ e $Y=(2,3)$ é dada por $y-x-1=0$, logo a equação reduzida de r é

$$y=x+1.$$

Exemplo 2.3.2 Se uma reta r tem equação geral $2\cdot y-3\cdot x+4=0$, então a equação reduzida de r é

$$y=\frac{3\cdot x}{2}-2.$$

Exemplo 2.3.3 Se uma reta r tem equação reduzida $y=\frac{x-4}{3}$, então a equação geral é obtida igualando a equação a 0 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-4}{3}\\ 3\cdot y &= x-4\\ 3\cdot y-x+4 &= 0.\end{aligned}$$

2.4 Equação segmentária da reta

Definição 2.4 Dados dois pontos $A=(a,0)$ e $B=(0,b)$, que estão sobre os eixos do plano cartesiano, com $a\neq 0$ e $b\neq 0$, a equação segmentária da reta que passa por estes dois pontos é dada por

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{12.3}$$

Obs. Vamos verificar como a fórmula (12.3) é obtida: Primeiramente, determinaremos a equação geral da reta que passa pelos pontos $A=(a,0)$ e $B=(0,b)$ e, para isso, calcularemos

$$0=\det A=\begin{vmatrix} x & y & 1\\ a & 0 & 1\\ 0 & b & 1\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a\cdot b-a\cdot y-b\cdot x\\ 0 &= b-y-\frac{b\cdot x}{a}\\ 0 &= 1-\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\\ -1 &= -\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\\ 1 &= \frac{x}{a}+\frac{y}{b}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.4.1 Dados $A=(2,0)$ e $B=(0,5)$, a equação segmentária da reta que passa por estes dois pontos é

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1.$$

Para determinar as equações reduzida e geral desta reta, basta isolar y para obter a equação reduzida e, por fim, igualar a 0 para obter a equação geral. Vejamos,

$$\begin{aligned} \frac{x}{2}+\frac{y}{5} &= 1\\ 5\cdot x+2\cdot y &= 10\\ 2\cdot y &= 10-5\cdot x\\ y &= -\frac{5\cdot x}{2}+5\end{aligned}$$

e esta é a equação reduzida da reta. Segue-se daí que a equação geral da reta é

$$5\cdot x+2\cdot y-10=0.$$

3 Posição relativa entre retas

Imagine-se com um lápis na mão e uma folha em branco infinita, e uma pessoa lhe pede para desenhar duas retas. Nesta situação, qualquer um dos 3 seguintes casos pode acontecer:

- você pode desenhar uma reta e, logo em seguida, passar o lápis sobre essa mesma reta e, então, teria duas retas coincidentes [34] (iguais);
- você pode também desenhá-las de modo que se encontrem apenas uma vez, neste caso, elas seriam concorrentes;
- e, por fim, se optar por desenhar as duas retas de modo que nunca se encontrem, então teria duas retas paralelas distintas (sem nenhum ponto em comum).

Nas próximas definições, veremos relações entre os coeficientes das equações da reta e denotaremos estas relações por A, B e C. Cuidado para não confundi-los com pontos, pois usaremos a mesma notação.

Obs. Para as próximas definições, iremos considerar as matrizes

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad C' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

Definidas estas matrizes, vamos denotar seus determinantes da seguinte forma:

- $A = \det A'$;
- $B = \det B'$;
- $C = \det C'$.

Desta forma, as relações A, B e C que aparecerão nas próximas definições são advindas destes determinantes.

3.1 Retas concorrentes

Definição 3.1 Dadas duas retas

$$r: \ a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$$

$$s: \ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2,$$

diremos que elas são concorrentes (possuem apenas um ponto em comum) quando valer que:

- $A = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0.$

Neste caso, denotaremos por $r \times s$.

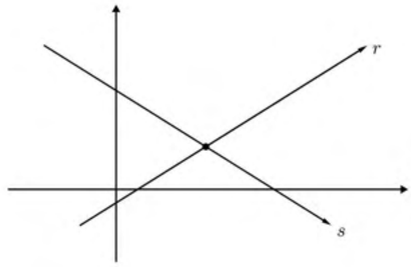


Figura 3.1.1: retas concorrentes

Exemplo 3.1.1 Dadas duas retas $r: \ 3 \cdot x + 4 \cdot y = 5$ e $s: \ x + y = 1$, temos que $a_1 = 3$, $b_1 = 4$, $a_2 = 1$ e $b_2 = 1$, logos elas são concorrentes, pois

$$A = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 = 3 - 4 = -1 \neq 0.$$

Exemplo 3.1.2 As retas $r: \ 2 \cdot x + y = 4$ e $s: \ 6 \cdot x + 3 \cdot y = 7$ não são concorrentes, pois

$$A = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 6 - 6 = 0.$$

3.2 Retas paralelas distintas

Definição 3.2 Dadas duas retas

$$r: \ a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$$

$$s: \ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2,$$

diremos que elas são paralelas distintas quando o primeiro item a seguir é válido e um dos outros dois também:

- $A = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0;$
- $B = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1 \neq 0;$
- $C = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \neq 0.$

Neste caso, denotaremos por $r \cap s = \emptyset$.

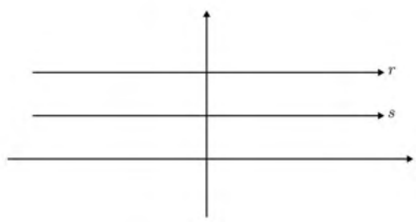


Figura 3.2.1: retas paralelas distintas

Exemplo 3.2.1 Dadas as retas $r: \ 2 \cdot x + y = 4$ e $s: \ 6 \cdot x + 3 \cdot y = 7$, temos que $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $a_2 = 6$ e $b_2 = 3$, logo elas

[34] Retas coincidentes são paralelas com todos os pontos em comum.

são paralelas distintas, pois $A=0$ como visto no Exemplo 3.1.2 e $B=4\cdot3-7\cdot1=5\neq0$ e $C=2\cdot7-6\cdot4=14-24=-10\neq0$.

Obs. Note, no exemplo anterior, que tanto B quanto C são não nulos, mas isto não é necessário, basta apenas que um dos dois seja diferente de 0 para garantir o resultado obtido.

3.3 Retas coincidentes

Definição 3.3 Dadas duas retas

$$r:\ a_1\cdot x+b_1\cdot y=c_1$$

$$s:\ a_2\cdot x+b_2\cdot y=c_2,$$

diremos que elas são coincidentes quando valer que:

- $A=a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1=0$;
- $B=c_1\cdot b_2-c_2\cdot b_1=0$;
- $C=a_1\cdot c_2-a_2\cdot c_1=0$.

Neste caso, denotaremos por $r=s$.

Exemplo 3.3.1 As retas $r:\ 2\cdot x+y=4$ e $s:\ 6\cdot x+3\cdot y=12$ são coincidentes, pois

$$A=2\cdot3-6\cdot1=0$$

$$B=4\cdot3-12\cdot1=0$$

$$C=2\cdot12-6\cdot4=0.$$

Obs. Quando duas retas r e s forem paralelas (distintas ou não), denotaremos por $r//s$.

3.4 Uma possível simplificação

Teorema 3.1 Quando tivermos duas retas

$$r:\ a_1\cdot x+b_1\cdot y=c_1$$

$$s:\ a_2\cdot x+b_2\cdot y=c_2$$

com $a_2\neq0$, $b_2\neq0$ e $c_2\neq0$, podemos nos atentar ao seguinte:

$$r\times s \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2};$$

$$r\cap s=\emptyset \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2};$$

$$r=s \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

Exemplo 3.4.1 As retas $r:\ 5\cdot x+3\cdot y=4$ e $s:\ 10\cdot x+6\cdot y=8$ são coincidentes, pois, pelo Teorema 3.1,

$$\frac{5}{10}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

4 Coeficiente angular

Noção geométrica

Para entender o próximo texto, leia-o juntamente com as imagens 4.0.1 e 4.0.2, que ilustrarão e facilitarão a compreensão do conceito.

Primeiramente, denotaremos o coeficiente angular pela letra m. Dada uma reta r no plano, tome dois pontos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ sobre esta reta. Para determinar o sentido desta reta (orientação), basta analisar se $y_1<y_2$ ou se $y_2<y_1$.

Tendo umas das desigualdades, determine a orientação da reta do ponto que possua a segunda coordenada menor para o ponto com a segunda coordenada maior, ou seja, se $y_1<y_2$, então considere a orientação de modo que r passe primeiro por A e depois em B.

Após isso, marque o ponto I onde a reta r intercepta o eixo das abscissas, um ponto P no eixo das abscissas à direita de I e um ponto Q que está na reta e acima do eixo das abscissas. Por fim, o coeficiente angular de r é a tangente do ângulo $\alpha=P\hat{I}Q$, ou seja, $m=\tan(\alpha)$.

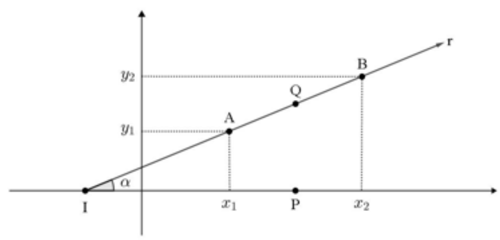


Figura 4.0.1

Caso $y_1=y_2$, a reta r será paralela ao eixo das abscissas (horizontal) e terá coeficiente angular $m=0$.

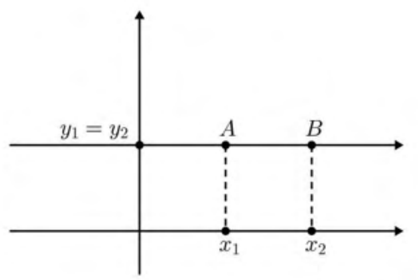


Figura 4.0.2

4.1 Como calcular m

Definição 4.1 Dada a equação geral de uma reta r por $r:\ a\cdot x+b\cdot y+c=0$, então o coeficiente angular da reta r é dado por

$$m=\frac{-a}{b}$$

com $b\neq0$.

Definição 4.2 Se uma reta r passa por dois pontos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$, então o coeficiente angular desta reta é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

com $x_2 \neq x_1$.

Obs. O coeficiente angular m é uma característica relacionada à reta r, ou seja, não importa quais pontos A e B sobre esta reta você tomar, o valor de m será sempre o mesmo (em relação a esta mesma reta r).

Definição 4.3 Dada a equação reduzida de uma reta r por $r: \ y = a \cdot x + b$, então o coeficiente angular é dado por

$$m = a.$$

Obs. Dados um ponto $A = (x_0, y_0)$ e um coeficiente angular m, podemos obter a equação da reta que passa por este ponto e tem este coeficiente através da fórmula

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0). \tag{12.4}$$

Esta fórmula é obtida através da Definição 4.2 isolando $y_2 - y_1$.

Exemplo 4.1.1 Uma reta r que passa pelos pontos $A = (1,0)$ e $B = (2,3)$ tem coeficiente angular $m = 3$, uma vez que

$$0 = \det A = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2 \cdot y \cdot 1) + (x \cdot 0 \cdot 1) + (1 \cdot 3 \cdot 1) - (1 \cdot y \cdot 1) - (1 \cdot 0 \cdot 2) - (1 \cdot 3 \cdot x)$$

$$= 2 \cdot y + 3 - y - 3 \cdot x$$

$$= -3 \cdot x + y + 3.$$

Assim, a equação geral da reta r é

$$r: -3 \cdot x + y + 3 = 0,$$

sendo assim, temos que $a = -3$ e $b = 1$, logo

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{-3}{1} = 3.$$

Exemplo 4.1.2 Toda reta r que passa por dois pontos da forma $A = (c,d)$ e $B = (d,c)$ tem coeficiente angular $m = -1$, pois

$$0 = \det A = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c & d & 1 \\ d & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (d \cdot y \cdot 1) + (x \cdot d \cdot 1) + (c \cdot c \cdot 1) - (1 \cdot y \cdot c) - (1 \cdot d \cdot d) - (1 \cdot c \cdot x)$$

$$= (d - c) \cdot x + (d - c) \cdot y + c^2 - d^2.$$

Assim, a equação geral da reta r é

$$r: (d - c) \cdot x + (d - c) \cdot y + c^2 - d^2 = 0,$$

sendo assim, o coeficiente angular de r é dado por

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{d - c}{d - c} = -1.$$

Exemplo 4.1.3 Dados o ponto $A = (1,2)$ e o coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$, a reta r que passa por este ponto e tem este coeficiente angular é dada pela equação $r: -x + 2 \cdot y - 3 = 0$, pois

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= m \cdot (x - x_0) \\
y - 2 &= \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \\
y - 2 &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\
y - \frac{x}{2} &= 2 - \frac{1}{2} \\
y - \frac{x}{2} &= \frac{3}{2} \\
y - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} &= 0 \\
-x + 2 \cdot y - 3 &= 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.1.4 Se uma reta tem $45°$ de inclinação (com o eixo x), então o coeficiente angular desta reta é $m = \tan(45°) = 1$.

Exercício resolvido 1 (UFSC 2011 - Adaptado) A reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento AB com $A = (0,3)$ e $B = (5,0)$ tem qual coeficiente angular?

Resolução: Primeiramente, relembremos que o ponto médio C de um segmento é dado por

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Neste caso, temos que

$$C = \left(\frac{5 + 0}{2}, \frac{3 + 0}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

Ou seja, temos que a reta passa pelo ponto C dado acima e pela origem $O = (0,0)$, e o coeficiente angular de uma reta que passa por dois pontos é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

sendo assim, o coeficiente angular que queremos encontrar é dado por

$$m = \frac{\frac{3}{2} - 0}{\frac{5}{2} - 0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

5 Retas paralelas, perpendiculares e interseção de retas

5.1 Retas paralelas

Definição 5.1 Dizer que duas retas são paralelas é equivalente a dizer que os coeficientes angulares dessas retas coincidem. Em outras palavras, se o coeficiente angular de r é m_r e o coeficiente angular de s é m_s, então dizer que r e s são paralelas é equivalente a dizer que $m_r = m_s$.

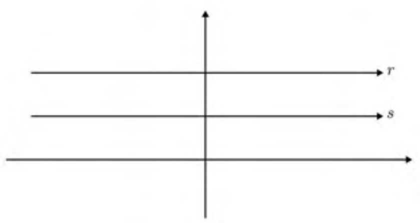


Figura 5.1.1

Exemplo 5.1.1 As retas $r : 4 \cdot x - 2 \cdot y + 3 = 0$ e $s : y = 2 \cdot x + 7$ são paralelas, pois $m_r = -\frac{4}{-2} = 2$ e $m_s = 2$.

Exemplo 5.1.2 Dada a reta $r : -3 \cdot x + 4 \cdot y - 7 = 0$, determine a reta s que é paralela à r e passa pelo ponto $A = (2, 5)$.

Resolução: Como r e s são paralelas, segue que $m_r = m_s$, e $m_r = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$. Sendo assim, temos que $m_s = \frac{3}{4}$ e s passa por A, segue da fórmula (12.4) que

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m \cdot (x - x_0) \\ y - 5 &= \frac{3}{4} \cdot (x - 2) \\ 4 \cdot y - 20 &= 3 \cdot x - 6 \\ -3 \cdot x + 4 \cdot y - 14 &= 0. \end{aligned}$$

Deste modo, a reta s é dada por $-3 \cdot x + 4 \cdot y - 14 = 0$.

Exercício resolvido 1 (USP - Adaptado) A equação da reta passando pela origem e paralela à reta determinada pelos pontos $A = (2; 3)$ e $B = (1; -4)$ é:

Resolução: Primeiramente, vamos determinar a equação da reta s que passa pelos pontos A e B; para isso, precisamos obter o determinante na igualdade:

$$0 = \det A = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (1 \cdot y \cdot 1) + (x \cdot 3 \cdot 1) + (2 \cdot (-4) \cdot 1) \\ &\quad - (1 \cdot y \cdot 2) - (1 \cdot 3 \cdot 1) - (1 \cdot (-4) \cdot x) \\ &= y + 3 \cdot x - 8 - 2 \cdot y - 3 + 4 \cdot x \\ &= 7 \cdot x - y - 11. \end{aligned}$$

Sendo assim, a equação da reta s é

$$7 \cdot x - y - 11 = 0$$

e o coeficiente angular de s é

$$m_s = -\frac{7}{-1} = 7.$$

Como a reta que queremos encontrar (chamemos de r) é paralela à s, segue que

$$m_r = m_s = 7,$$

e sabemos que r passa pela origem $O = (0, 0)$, sendo assim,

$$y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$y = 7 \cdot x.$$

Portanto, a equação geral da reta r é

$$-7 \cdot x + y = 0.$$

5.2 Retas perpendiculares

Definição 5.2 Dizer que duas retas são perpendiculares é equivalente a dizer que os coeficientes angulares dessas retas multiplicados resultam em -1. Em outras palavras, se o coeficiente angular de r é m_r e o coeficiente angular de s é m_s, então dizer que r e s são perpendiculares é equivalente a dizer que $m_r \cdot m_s = -1$.

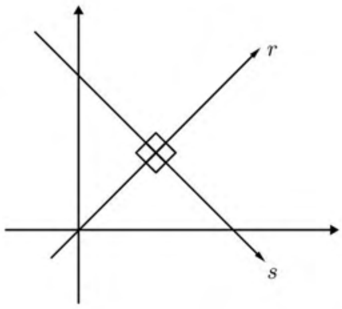


Figura 5.2.1: retas perpendiculares

Exemplo 5.2.1 As retas $r : 4\cdot x+2\cdot y+7=0$ e $s : -x+2\cdot y-3=0$ são perpendiculares, pois $m_r=-\frac{4}{2}=-2$ e $m_s=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$. Sendo assim,

$$m_r\cdot m_s=-2\cdot\frac{1}{2}=-1.$$

Exemplo 5.2.2 Dada a reta $r : 2\cdot x-3\cdot y-4=0$, determine a reta s, que é perpendicular à r e passa pelo ponto $A=(2,3)$.

Resolução: Sabemos que o coeficiente angular de r é $m_r=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$ e, como r e s são perpendiculares, segue que

$$m_r\cdot m_s=-1$$
$$\frac{2}{3}\cdot m_s=-1$$
$$m_s=-\frac{3}{2}.$$

Sendo assim, temos que a equação da reta s é dada por

$$y-y_0=m_s\cdot(x-x_0)$$
$$y-3=-\frac{3}{2}\cdot(x-2)$$
$$2\cdot y-6=-3\cdot x+6$$
$$3\cdot x+2\cdot y-12=0.$$

Deste modo, a reta s é dada por $3\cdot x+2\cdot y-12=0$.

Exercício resolvido 2 (MACKENZIE SP 2013 - Adaptado) As raízes reais da equação $x^4-1=0$, dispostas em ordem crescente, formam, respectivamente, os coeficientes a e b da reta $r : a\cdot x+b\cdot y+1=0$. A equação da reta s perpendicular à r e que passa pelo ponto $P=(1,2)$ será:

Resolução: Primeiramente, note que as raízes de $x^4-1=0$ são $x_1=1$ e $x_2=-1$, pois $1^4-1=1-1=0$ e $(-1)^4-1=1-1=0$. Tomando em ordem crescente, temos que $a=-1$ e $b=1$, logo a equação da reta r é

$$-x+y+1=0.$$

Sendo assim, temos que o coeficiente angular de r é

$$m_r=-\frac{a}{b}=-\frac{-1}{1}=1.$$

Como s é perpendicular a r, segue que o coeficiente angular m_s de s satisfaz $m_r\cdot m_s=-1$, daí $m_s=-1$.

Ou seja, temos que o coeficiente angular de s é $m_s=-1$ e s passa pelo ponto $P=(1,2)$. Segue da fórmula $y-y_0=m\cdot(x-x_0)$ que

$$y-2=-1\cdot(x-1)$$
$$y-2=-x+1$$
$$x+y-3=0.$$

Portanto, a equação da reta s é $x+y-3=0$.

5.3 Interseção de retas

Para o caso em que duas retas estão sobre um mesmo plano e não são paralelas distintas (se forem coincidentes, então todo ponto de uma intercepta a outra), podemos determinar qual o ponto em que estas retas se interceptam. Para determinar este ponto, temos duas opções como veremos:

Método 1) Resolver sistema:

Exemplo 5.3.1 Dadas duas retas $r : 4\cdot x+3\cdot y-2=0$ e $s : 2\cdot x-y+4=0$, para determinar o ponto A de interseção, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 4\cdot x+3\cdot y-2 &= 0\\ 2\cdot x-y+4 &= 0\end{cases}$$

Multiplicando a segunda linha por -2, temos

$$\begin{cases} 4\cdot x+3\cdot y-2 &= 0\\ -4\cdot x+2\cdot y-8 &= 0\end{cases}$$

Somando as duas linhas, obtemos

$$\begin{aligned} 5\cdot y-10 &= 0\\ y &= 2.\end{aligned}$$

Ou seja, o ponto de interseção das retas r e s tem sua segunda coordenada de valor 2. Substituindo este valor de y em qualquer uma das equações, encontramos o valor da primeira coordenada. Vejamos, utilizando a segunda equação para $y=2$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\cdot x-y+4 &= 0\\ 2\cdot x-2+4 &= 0\\ 2\cdot x+2 &= 0\\ x &= -1.\end{aligned}$$

Portanto, o ponto de interseção das retas é o ponto $A = (-1, 2)$.

Método 2) Isolar variável:

Exemplo 5.3.2 Dadas duas retas $r: 4\cdot x + 3\cdot y - 2 = 0$ e $s: 2\cdot x - y + 4 = 0$, para determinar o ponto A de interseção, basta isolar y (se substituirmos x, obteremos o mesmo resultado) em ambas as equações e teremos

$$\begin{cases} y = \dfrac{2-4\cdot x}{3} \\ y = 2\cdot x + 4 \end{cases}$$

Igualando as duas equações temos

$$\begin{aligned} 2\cdot x + 4 &= \frac{2-4\cdot x}{3} \\ \Rightarrow \quad 6\cdot x + 12 &= 2 - 4\cdot x \\ \Rightarrow \quad 10\cdot x &= -10 \\ \Rightarrow \quad x &= -1. \end{aligned}$$

Ou seja, o ponto de interseção das retas r e s tem sua primeira coordenada de valor -1. Substituindo este valor de x em qualquer uma das equações, encontramos o valor da segunda coordenada. Vejamos, utilizando a primeira equação para $x = -1$, obtemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{2-4\cdot x}{3} \\ \Rightarrow \quad y &= \frac{2-4\cdot(-1)}{3} \\ \Rightarrow \quad y &= \frac{2+4}{3} \\ \Rightarrow \quad y &= \frac{6}{3} \\ \Rightarrow \quad y &= 2. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto de interseção das retas é o ponto $A = (-1, 2)$.

6 Distância entre ponto e reta

Neste capítulo, iremos denotar a distância entre uma reta r e a origem O do plano por $d(O, r)$ e a distância entre uma reta r e um ponto P do plano por $d(P, r)$.

6.1 Distância entre uma reta e a origem

Definição 6.1 Dada uma reta $r: a\cdot x + b\cdot y + c = 0$, temos que a menor distância entre a reta r e a origem $O = (0,0)$, é dada pela fórmula

$$d(O, r) = \left| \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|.$$

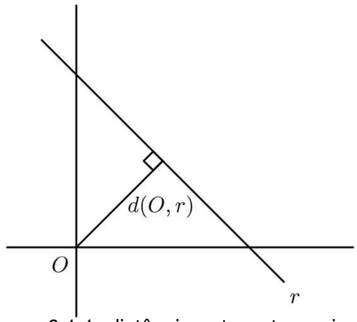


Figura 6.1.1: distância entre reta e origem

Exemplo 6.1.1 Dada a reta $r:\ 3\cdot x - 5\cdot y + 4 = 0$, temos que $a = 3$, $b = -5$ e $c = 4$, logo a distância entre r e a origem é

$$\begin{aligned} d(O, r) &= \left| \frac{4}{\sqrt{3^2+(-5)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{4}{\sqrt{9+25}} \right| \\ &= \left| \frac{4}{\sqrt{34}} \right| \\ &= \frac{4}{\sqrt{34}}. \end{aligned}$$

Ou seja, $d(O, r) = \dfrac{4}{\sqrt{34}}$.

6.2 Distância entre uma reta e um ponto

Definição 6.2 Dada uma reta $r: a\cdot x + b\cdot y + c = 0$ e um ponto $P = (\alpha, \beta)$, temos que a distância entre a reta r e o ponto P é dada pela fórmula

$$d(P, r) = \left| \frac{a\cdot\alpha + b\cdot\beta + c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|.$$

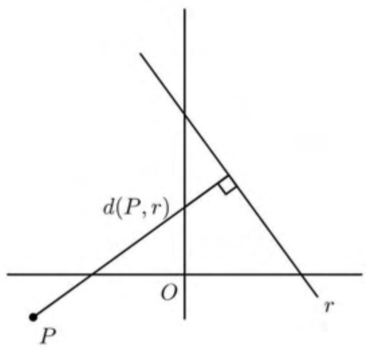


Figura 6.2.1: distância entre reta e ponto

Obs. A menor distância entre um ponto P e uma reta r é dada ao traçar uma reta perpendicular à r e que passa por P.

Obs. Se tomarmos um ponto P fora da reta r e um ponto Q em r arbitrário, a distância $d(P, r) \leq$

$d(P,Q)$, ou seja, a distância como dada na Definição 6.2 é a menor distância entre o ponto P e a reta r.

Exemplo 6.2.1 Dada uma reta $r: \ -5 \cdot x + 2 \cdot y - 4 = 0$ e um ponto $P = (1,3)$, temos que $a = -5$, $b = 2$, $c = -4$, $\alpha = 1$ e $\beta = 3$, logo a distância entre r e P é

$$\begin{aligned} d(P,r) &= \left| \frac{-5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-4)}{\sqrt{(-5)^2 + 2^2}} \right| \\ &= \left| \frac{-3}{\sqrt{25+4}} \right| \\ &= \left| \frac{-3}{\sqrt{29}} \right| \\ &= \frac{3}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{3 \cdot \sqrt{29}}{29}. \end{aligned}$$

Ou seja, $d(P,r) = \dfrac{3 \cdot \sqrt{29}}{29}$.

Exercício resolvido 1 (USP - Adaptado) Calcule a distância entre a reta r_1, de equação $3 \cdot y = 4 \cdot x - 2$, e a reta r_2, de equação $3 \cdot y = 4 \cdot x + 8$, sabendo que estas retas são paralelas.

Resolução: Para calcular a distância entre duas retas, é necessário saber um ponto de uma delas. Sendo assim, tomemos um ponto qualquer de r_1; para isso, fixe $x = 2$ (este valor é arbitrário, qualquer número escolhido aqui forneceria o mesmo resultado, uma vez que as retas são paralelas). Substituindo este x na equação da reta r_1, obtemos que

$$\begin{aligned} 3 \cdot y &= 4 \cdot 2 - 2 \\ y &= \frac{6}{3} = 2, \end{aligned}$$

logo temos um ponto $P = (2,2)$ da reta r_1. Agora basta calcular a distância entre este ponto e a reta r_2, a qual tem equação geral $-4 \cdot x + 3 \cdot y - 8 = 0$.

Para isto, temos que

$$\begin{aligned} d(P,r_2) &= \left| \frac{(-4) \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 8}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} \right| \\ &= \left| \frac{-10}{\sqrt{25}} \right| \\ &= \frac{10}{5} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ou seja, a distância entre as retas r_1 e r_2 é de 2 unidades.

7 Equação da circunferência

Antes de estudar a circunferência, é importante entender a diferença entre “circunferência"e “círculo", que está explicada no capítulo de Geometria Plana.

Definição 7.1 A circunferência λ é o lugar geométrico dos pontos que distam a mesma medida de um ponto P dado. Em outras palavras, a distância de qualquer ponto da circunferência até este ponto P é a mesma (esta distância é denominada raio).

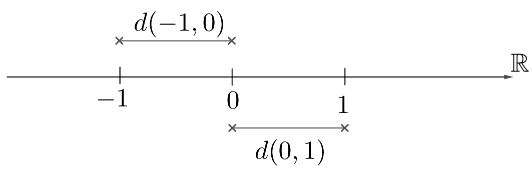
Com o intuito de ilustrar essa ideia de mesma distância, vejamos o seguinte exemplo na reta:

Exemplo 7.0.1 Na reta, os pontos -1 e 1 distam a mesma medida de 0, pois

$$d(1,0) = \sqrt{(1-0)^2} = \sqrt{1^2} = \sqrt{1} = 1;$$

$$d(-1,0) = \sqrt{(-1-0)^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Ou seja, $d(1,0) = d(-1,0) = 1$.



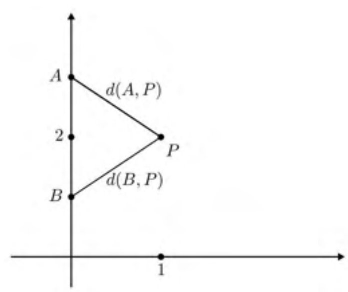
No caso do plano, a ideia de ter a mesma distância é a mesma, como segue no próximo exemplo:

Exemplo 7.0.2 No plano, os pontos $A = (0,3)$ e $B = (0,1)$ possuem a mesma distância do ponto $P = (1,2)$, pois

$$d(A,P) = \sqrt{(0-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$d(B,P) = \sqrt{(0-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Ou seja, $d(A,P) = d(B,P) = \sqrt{2}$.



Obs. No Exemplo 7.0.1, os pontos -1 e 1 são os únicos na reta que satisfazem esta condição de distar $1u$ (unidade de medida) da origem 0. Já no Exemplo 7.0.2, os pontos A e B não são únicos, existem infinitos pontos que distam $\sqrt{2}u$ de P, e todos estes infinitos pontos estão na mesma circunferência. Como não podemos listar todos esses infinitos pontos, precisamos de algo mais para identificá-los. Para isso, utilizaremos a equação da circunferência, como veremos a seguir.

Definição 7.2 Dado um ponto P no plano e um número real positivo r (denominado raio), a circunferência λ é o conjunto de pontos do plano tais que a distância entre este ponto e P é r.

A equação da circunferência é obtida diretamente da fórmula para distância entre dois pontos. Observe o seguinte resultado:

Teorema 7.1 Dada uma circunferência λ de centro $P=(a,b)$ e um raio $r>0$, temos que

$$\begin{aligned} A=(x,y)\in\lambda &\Leftrightarrow d(A,P)=r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \end{aligned}$$

Assim, dizemos que a equação geral da circunferência λ de centro $P=(a,b)$ e raio r é dada por

$$\lambda : (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

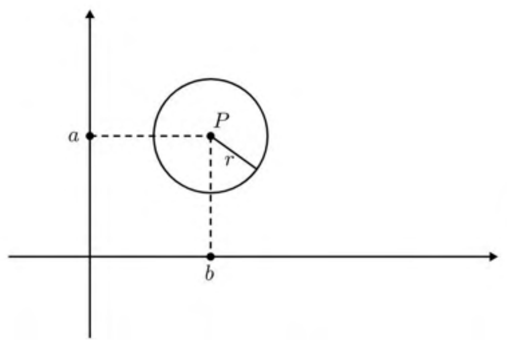


Figura 7.0.1: Circunferência de centro P e raio r

Para ficar mais claro, as igualdades e equivalências acima se leem da seguinte maneira: *Um ponto A de coordenadas (x,y) pertence à circunferência de centro $P=(a,b)$ e raio r se, e somente se, a distância entre os pontos A e P for igual a r.*

Exemplo 7.0.3 Dados um ponto $P=(1,2)$ e um raio $r=3$, temos que a equação da circunferência λ de centro P e raio r é

$$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2.$$

Exemplo 7.0.4 Dados um ponto $P=(0,0)$ e um raio $r=6$, temos que a equação da circunferência λ de centro P e raio r tem equação

$$(x-0)^2+(y-0)^2=6^2$$

$$x^2+y^2=36.$$

Exemplo 7.0.5 Qual a equação da circunferência de centro $P=(2,4)$ e que passa pelo ponto $A=(-1,3)$?

Resolução: Para determinar a equação de uma circunferência, precisamos de duas informações, o seu centro e o raio. Neste exemplo, já conhecemos o centro; resta obtermos o raio; para isso, basta calcular a distância entre os pontos P e A. Vejamos:

$$r=d(P,A)=\sqrt{(2-(-1))^2+(4-3)^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}.$$

Ou seja, temos que a circunferência tem centro $P=(2,4)$ e raio $r=\sqrt{10}$, logo a equação da circunferência é dada por

$$(x-2)^2+(y-4)^2=(\sqrt{10})^2$$

$$(x-2)^2+(y-4)^2=10.$$

7.1 Equação normal da circunferência

A equação normal da circunferência é dada apenas pelo desenvolvimento do produto notável, isto é, uma circunferência de centro $P=(a,b)$ e raio $r>0$ tem equação

$$\begin{aligned} (x-a)^2+(y-b)^2 &= r^2 \\ x^2-2\cdot a\cdot x+a^2+y^2-2\cdot b\cdot y+b^2 &= r^2 \\ x^2+y^2-2\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot y+(a^2+b^2-r^2) &= 0. \end{aligned}$$

Definição 7.3 Dada uma circunferência de centro $P=(a,b)$ e raio r, a equação normal desta circunferência é da forma

$$x^2+y^2-2\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot y+(a^2+b^2-r^2)=0. \qquad (12.5)$$

Exemplo 7.1.1 Dados o ponto $P=(2,3)$ e um raio $r=4$, a circunferência com centro P e raio r tem equação normal dada por

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2\cdot 2\cdot x-2\cdot 3\cdot y+(2^2+3^2-4^2) &= 0 \\ x^2+y^2-4\cdot x-6\cdot y-3 &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, a equação normal é $x^2+y^2-4\cdot x-6\cdot y-3=0$.

Obs. A equação normal é fácil de ser obtida, mas não é tão simples ver uma equação nesta forma e identificar se ela representa uma circunferência ou não. Observe a seguinte equação:

$$x^2+y^2-2\cdot x-1\cdot y+6=0. \quad (12.6)$$

Essa equação aparenta representar uma circunferência, mas isto não é verdade e veremos o motivo a seguir:

Teorema 7.2 Dados os números reais A, B, C, D, E e F, a seguinte equação

$$A\cdot x^2+B\cdot y^2+C\cdot x\cdot y+D\cdot x+E\cdot y+F=0 \quad (12.7)$$

representa uma circunferência se valerem as seguintes condições:

(1) $A=B\neq 0$;
(2) $C=0$;
(3) $D^2+E^2-4\cdot A\cdot F>0$.

Se as condições (1), (2) e (3) forem satisfeitas, então a equação em (12.7) representa uma circunferência e, ainda, podemos determinar seu centro P e seu raio r através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{-D}{2\cdot A},\frac{-E}{2\cdot A}\right);\\ r &= \frac{\sqrt{D^2+E^2-4\cdot A\cdot F}}{2\cdot |A|}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Obs. Vejamos uma explicação para as condições (1), (2) e (3). Das fórmulas dadas em (12.5) e (12.7) (dividindo todos os termos por A com $A\neq 0$), temos que

$$x^2+y^2-2\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot y+(a^2+b^2-r^2)=0; \quad (12.9)$$

$$x^2+\frac{B}{A}\cdot y^2+\frac{C}{A}\cdot x\cdot y+\frac{D}{A}\cdot x+\frac{E}{A}\cdot y+\frac{F}{A}=0. \quad (12.10)$$

A equação dada em (12.9) representa uma circunferência, e queremos determinar as condições para que (12.10) represente a mesma circunferência. Para isso, os coeficientes respectivos devem ser iguais, ou seja,

Em relação ao termo y^2, temos $1=\frac{B}{A}$, logo $A=B\neq 0$;
Em relação ao termo $x\cdot y$, temos $0=\frac{C}{A}$, logo $C=0$;
Em relação ao termo x, temos $-2\cdot a=\frac{D}{A}$, logo $a=-\frac{D}{2\cdot A}$;
Em relação ao termo y, temos $-2\cdot b=\frac{E}{A}$, logo $b=-\frac{E}{2\cdot A}$;
Em relação ao termo independente, temos $a^2+b^2-r^2=\frac{F}{A}$, logo $r^2=\frac{D^2+E^2-4\cdot A\cdot F}{4\cdot A^2}$.

Em relação aos termos x e y, isolamos a e b para substituir no termo independente, ou seja, temos que $a=-\frac{D}{2\cdot A}$, $b=-\frac{E}{2\cdot A}$ e $a^2+b^2-r^2=\frac{F}{A}$. Substituindo esses valores de a e b, temos que:

$$\begin{aligned} a^2+b^2-r^2=\frac{F}{A} \quad &\Rightarrow \quad \left(-\frac{D}{2\cdot A}\right)^2+\left(-\frac{E}{2\cdot A}\right)^2-r^2=\frac{F}{A}\\ &\Rightarrow \quad \frac{D^2}{4\cdot A^2}+\frac{E^2}{4\cdot A^2}-r^2=\frac{F}{A}\\ &\Rightarrow \quad -r^2=\frac{F}{A}-\frac{D^2}{4\cdot A^2}-\frac{E^2}{4\cdot A^2}\\ &\Rightarrow \quad r^2=\frac{D^2}{4\cdot A^2}+\frac{E^2}{4\cdot A^2}-\frac{4\cdot A\cdot F}{4\cdot A^2}\\ &\Rightarrow \quad r^2=\frac{D^2+E^2-4\cdot A\cdot F}{4\cdot A^2}. \end{aligned}$$

Desta forma, já é possível perceber que $A=B\neq 0$ e $C=0$. E como $r^2>0$ e $4\cdot A^2>0$, segue que $D^2+E^2-4\cdot A\cdot F>0$.

Obs. A condição (2) afirma que $C=0$, isto é, a equação normal da circunferência não possui termo misto do tipo $x\cdot y$.

Vamos verificar agora que a equação em (12.6) não representa uma circunferência. De fato, neste caso $A=B=1$ e $C=0$, mas como $D=-2$, $E=-1$ e $F=6$, segue que

$$\begin{aligned} D^2+E^2-4\cdot A\cdot F &= (-2)^2+(-1)^2-4\cdot 1\cdot 6\\ &= 4+1-24\\ &= -19<0. \end{aligned}$$

Logo, a equação em (12.6) não representa uma circunferência.

Exemplo 7.1.2 A equação

$$3\cdot x^2+3\cdot y^2+4\cdot x-3\cdot y-2=0$$

representa uma circunferência, pois $A=B=3\neq 0$, $C=0$; além disso, $D=4$, $E=-3$ e $F=-2$, daí

$$\begin{aligned} D^2+E^2-4\cdot A\cdot F &= 4^2+(-3)^2-4\cdot 3\cdot(-2)\\ &= 16+9+24\\ &= 49>0. \end{aligned}$$

Ainda, o centro P desta circunferência é

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{-D}{2\cdot A},\frac{-E}{2\cdot A}\right)\\ &= \left(\frac{-4}{2\cdot 3},\frac{-(-3)}{2\cdot 3}\right)\\ &= \left(\frac{-4}{6},\frac{3}{6}\right)\\ &= \left(\frac{-2}{3},\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Por fim, o raio r desta circunferência é

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{D^2+E^2-4\cdot A\cdot F}}{2\cdot|A|} \\ &= \frac{\sqrt{4^2+(-3)^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot|3|} \\ &= \frac{\sqrt{49}}{6} \\ &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Portanto, a equação $3\cdot x^2+3\cdot y^2+4\cdot x-3\cdot y-2=0$ é uma circunferência de centro $P=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{2}\right)$ e raio $r=\frac{7}{6}$.

Exercício resolvido 1 (PUC-SP) O ponto $P=(3,b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $C=(0,3)$ e raio 5. Calcule o valor da coordenada b.

Resolução: Como o ponto P pertence à circunferência, segue que $d(P,C)=5$, ou seja, $5=\sqrt{(3-0)^2+(b-3)^2}$. Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} & 5^2 &=& \left(\sqrt{(3-0)^2+(b-3)^2}\right)^2 \\ \Rightarrow & 25 &=& 3^2+(b-3)^2 \\ \Rightarrow & 25 &=& 9+b^2-6\cdot b+9=18+b^2-6\cdot b \\ \Rightarrow & 25 &=& 18+b^2-6\cdot b \\ \Rightarrow & 7 &=& b^2-6\cdot b \\ \Rightarrow & b^2-6\cdot b-7 &=& 0. \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, temos que

$$\begin{aligned} b &= \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-7)}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{6\pm\sqrt{64}}{2} \\ &= \frac{6\pm 8}{2}. \end{aligned}$$

Sendo assim, b pode assumir dois valores:

$$b_1=\frac{6+8}{2}=\frac{14}{2}=7$$
$$b_2=\frac{6-8}{2}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Portanto, a coordenada b pode assumir os valores 7 ou -1.

8 Posições relativas entre retas e circunferências

8.1 O ponto e a circunferência

Para trabalhar a posição relativa entre retas e circunferência, é interessante iniciarmos estudando a posição entre pontos e circunferência. Para isto, vejamos algumas definições e exemplos que irão ilustrar de maneira simples esse conteúdo

Definição 8.1 Dado um ponto $P=(a,b)$ e uma circunferência λ de equação $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$, temos que o centro dessa circunferência é $C=(\alpha,\beta)$. Sendo assim, temos três casos:

(1) Se $d(P,C)>r$, então o ponto P é externo a λ (ver Figura 8.1.1);

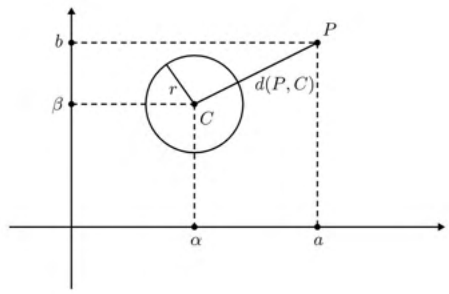


Figura 8.1.1: quando $d(P,C)>r$

(2) Se $d(P,C)<r$, então o ponto P é interno a λ (ver Figura 8.1.2);

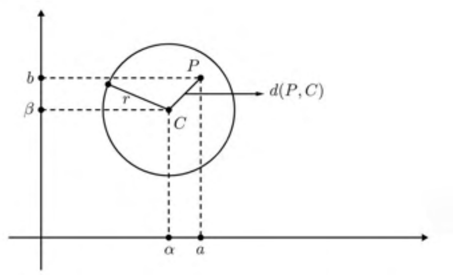


Figura 8.1.2: quando $d(P,C)<r$

(3) Se $d(P,C)=r$, então o ponto P pertence a λ (ver Figura 8.1.3).

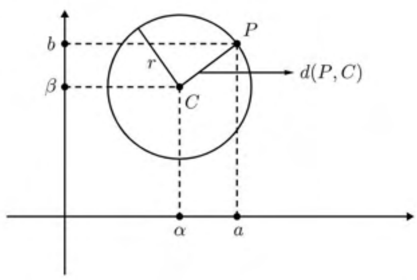


Figura 8.1.3: quando $d(P,C)=r$

Exemplo 8.1.1 Qual a posição do ponto $P=(1,2)$ em relação à circunferência $\lambda:(x-4)^2+(y-1)^2=4$?

Resolução: Como a equação geral da circunferência é dada por $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, obtemos da equação de λ que seu centro é $C=(4,1)$ e seu raio é $r=2$. Agora, calculemos a distância entre P e C:

$$\begin{aligned} d(P,C) &= \sqrt{(1-4)^2+(2-1)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2+1^2} \\ &= \sqrt{9+1} \\ &= \sqrt{10}. \end{aligned}$$

E note que $2<3=\sqrt{9}<\sqrt{10}=d(P,C)$, ou seja, $d(P,C)=\sqrt{10}>2$. Segue do item (1) da Definição 8.1 que o ponto P é externo a λ.

Exemplo 8.1.2 Qual deve ser o valor da coordenada k para que o ponto $P=(k,4)$ pertença à circunferência $\lambda:(x+1)^2+(y-3)^2=9$?

Resolução: Como a equação geral da circunferência é dada por $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, obtemos da equação de λ que seu centro é $C=(-1,3)$ e seu raio é $r=3$. Agora, calculemos a distância entre P e C:

$$\begin{aligned} d(P,C) &= \sqrt{(k-1)^2+(4-3)^2} \\ &= \sqrt{k^2-2\cdot k+1+1} \\ &= \sqrt{k^2-2\cdot k+2}. \end{aligned}$$

Pelo item (3) da Definição 8.1, temos que $d(P,C)=r$, logo

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2-2\cdot k+2} &= 3 \\ \Rightarrow\quad k^2-2\cdot k+2 &= 9 \\ \Rightarrow\quad k^2-2\cdot k-7 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que

$$\begin{aligned} k &= \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-7)}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{2\pm\sqrt{4+28}}{2} \\ &= \frac{2\pm\sqrt{32}}{2} \\ &= \frac{2\pm\sqrt{16\cdot 2}}{2} \\ &= \frac{2\pm 4\cdot\sqrt{2}}{2} \\ &= 1\pm 2\cdot\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Portanto, a coordenada k pode assumir os valores $1+2\cdot\sqrt{2}$ ou $1-2\cdot\sqrt{2}$.

8.2 A reta e a circunferência

Agora, iremos estudar as posições relativas entre retas e circunferências que, assim como no caso dos pontos, são divididas em 3 casos: secantes, tangentes e exteriores.

A seguinte definição pode parecer complexa, mas as imagens a seguir e os exemplos irão garantir a compreensão e você notará que este assunto não é tão complicado quanto parece. Vejamos:

Definição 8.2 Dada uma reta $s:a\cdot x+b\cdot y+c=0$ e uma circunferência $\lambda:(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a\cdot x+b\cdot y+c &= 0 \\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 &= r^2 \end{cases} \tag{12.11}$$

Isolando a variável y na primeira equação (se isolar a variável x, o resultado será o mesmo, escolhemos y por convenção) e substituindo na segunda, iremos obter uma equação do segundo grau em x (se isolássemos x, a equação seria em y, veremos exemplos disso logo mais). Desenvolvendo essas operações, temos que $y=\frac{-c-a\cdot x}{b}$ e, substituindo na segunda equação,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\alpha+\alpha^2+y^2-2\cdot y\cdot\beta+\beta^2=r^2$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\alpha+\alpha^2+\frac{c^2+2\cdot c\cdot a\cdot x+a^2\cdot x^2}{b^2} \\ -\frac{2\cdot\beta}{b}\cdot(-c-a\cdot x)+\beta^2=r^2$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\alpha+\alpha^2+\frac{c^2}{b^2}+\frac{2\cdot c\cdot a\cdot x}{b^2} \\ +\frac{a^2\cdot x^2}{b^2}+\frac{2\cdot\beta\cdot c}{b}+\frac{2\cdot a\cdot x}{b}+\beta^2=r^2$$

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot x^2+\left(-2\cdot\alpha+\frac{2\cdot a\cdot c}{b^2}+\frac{2\cdot a}{b}\right)\cdot x \\ +\left(\alpha^2+\frac{c^2}{b^2}+\frac{2\cdot\beta\cdot c}{b}+\beta^2-r^2\right)=0.$$

Tendo esta equação, basta analisar o valor de Δ. Teremos 3 casos:

(1) Se $\Delta>0$, então s e λ são secantes, isto é, o sistema possui duas soluções $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$, e a circunferência e a reta se interceptam nestes dois pontos (ver Figura 8.2.1);

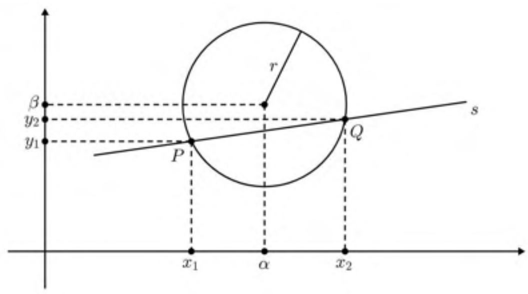


Figura 8.2.1: secantes

(2) Se $\Delta = 0$, então s e λ são tangentes, isto é, o sistema possui uma única solução $P = (x_1, y_1)$ e a circunferência e a reta se interceptam apenas neste ponto (ver Figura 8.2.2);

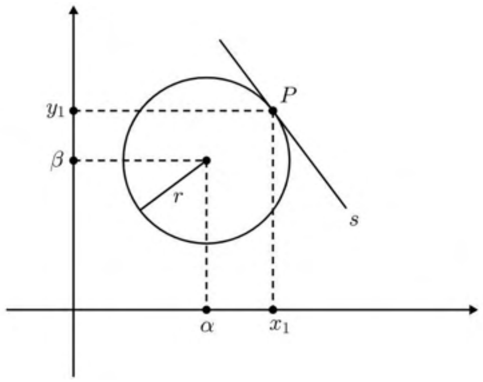


Figura 8.2.2: tangentes

(3) Se $\Delta < 0$, então s e λ são exteriores, isto é, o sistema não possui solução real, e a circunferência e a reta não se interceptam em nenhum ponto (ver Figura 8.2.3).

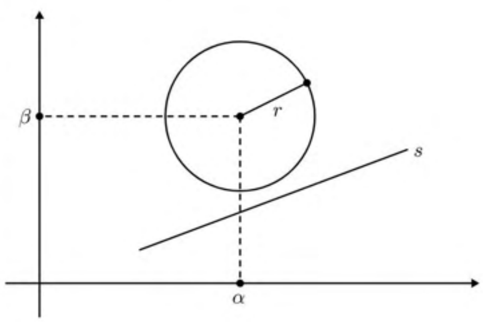


Figura 8.2.3: exteriores

Exemplo 8.2.1 Determine a posição relativa entre a reta $s: 2\cdot x - 3\cdot y = 4$ e a circunferência $\lambda: (x-1)^2 + (y)^2 = 9$.

Resolução: Isolando a variável y na equação da reta, temos
$$y = \frac{2\cdot x - 4}{3},$$
substituindo na equação da circunferência, vem que

$$\begin{aligned} 9 &= (x-1)^2 + \left(\frac{2\cdot x - 4}{3}\right)^2 \\ &= x^2 - 2\cdot x + 1 + \left(\frac{4\cdot x^2 - 16\cdot x + 16}{9}\right). \end{aligned}$$

Multiplicando tudo por 9, obtemos

$$\begin{aligned} 81 &= 9\cdot x^2 - 18\cdot x + 9 + 4\cdot x^2 - 16\cdot x + 16 \\ 81 &= 13\cdot x^2 - 34\cdot x + 25 \\ \Rightarrow \quad 0 &= 13\cdot x^2 - 34\cdot x + 25 - 81. \end{aligned}$$

Ou seja, nossa equação do segundo grau é

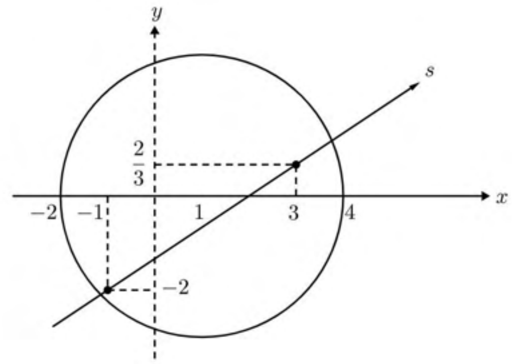
$$13\cdot x^2 - 34\cdot x - 56 = 0.$$

Calculando Δ, temos que

$$\Delta = (-34)^2 - 4\cdot 13\cdot(-56) = 1156 + 2912 = 4068 > 0$$

$$\Delta > 0.$$

Portanto, pelo item (1) da Definição 8.2, a reta s e a circunferência λ são secantes.



Exemplo 8.2.2 Determine a posição relativa entre a reta $s: 3\cdot x + 4\cdot y = 0$ e a circunferência $\lambda: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Resolução: Isolando a variável x na equação da reta, temos
$$x = \frac{-4\cdot y}{3},$$
substituindo na equação da circunferência, vem que

$$\begin{aligned} 25 &= \left(\frac{-4\cdot y}{3} - 3\right)^2 + (y-4)^2 \\ &= \frac{16\cdot y^2}{9} + 8\cdot y + 9 + y^2 - 8\cdot y + 16. \end{aligned}$$

Multiplicando tudo por 9, obtemos

$$225 = 16 \cdot y^2 + 72 \cdot y + 81 + 9 \cdot y^2 - 72 \cdot y + 144$$

$$\Rightarrow 16 \cdot y^2 + 72 \cdot y + 81 + 9 \cdot y^2 - 72 \cdot y + 144 - 225 = 0.$$

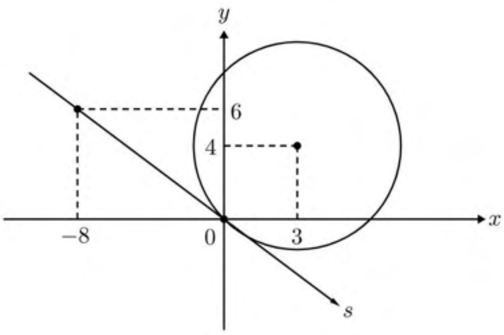
Ou seja, nossa equação do segundo grau é

$$\begin{aligned} 16 \cdot y^2 + 72 \cdot y + 81 + 9 \cdot y^2 - 72 \cdot y + 144 - 225 &= 0 \\ 25 \cdot y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Não é necessário calcular Δ neste caso, pois a única solução desta equação é $y = 0$, mas verificando as contas para usar a Definição 8.2, temos que

$$\begin{aligned} \Delta &= (0)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 0 = 0 \\ \Delta &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo item (2) da Definição 8.2, a reta s e a circunferência λ são tangentes.



Exemplo 8.2.3 Determine a posição relativa entre a reta $s: 2 \cdot x - y + 1 = 0$ e a circunferência $\lambda: (x-1)^2 + (y)^2 = 1$.

Resolução: Isolando a variável y na equação da reta, temos

$$y = 2 \cdot x + 1,$$

substituindo na equação da circunferência, vem que

$$\begin{aligned} 1 &= (x-1)^2 + (2 \cdot x + 1)^2 \\ &= x^2 - 2 \cdot x + 1 + 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1. \end{aligned}$$

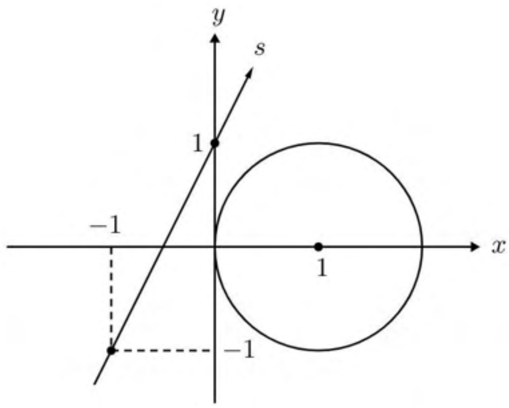
Ou seja, nossa equação do segundo grau é

$$\begin{aligned} x^2 - 2 \cdot x + 1 + 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \quad 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Calculando Δ, temos que

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 4 - 20 = -16 < 0 \\ \Delta &< 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo item (3) da Definição 8.2, a reta s e a circunferência λ são exteriores.



É nítido que esse método para determinar a posição relativa entre reta e circunferência é trabalhoso quanto aos seus cálculos. Com o intuito de facilitar as contas para realizar esta análise, temos o seguinte teorema, que compara a distância entre a reta e o centro da circunferência com o raio:

Teorema 8.1 Dada uma reta $s: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ e uma circunferência $\lambda: (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ de centro $C = (\alpha, \beta)$, temos os seguintes 3 casos:

(1) Se

$$d(C,s) = \left| \frac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| < r,$$

então s e λ são secantes (ver Figura 8.2.4);

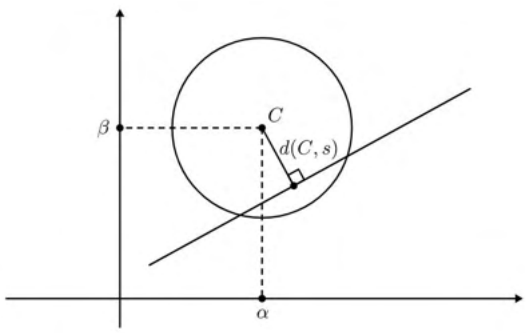


Figura 8.2.4: secantes

(2) Se

$$d(C,s) = \left| \frac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = r,$$

então s e λ são tangentes (ver Figura 8.2.5);

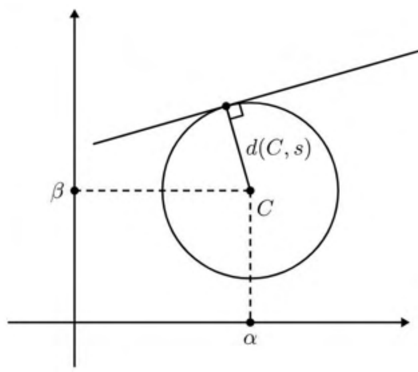


Figura 8.2.5: tangentes

(3) Se
$$d(C,s) = \left| \frac{a\cdot\alpha + b\cdot\beta + c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| > r,$$
então s e λ são exteriores (ver Figura 8.2.6).

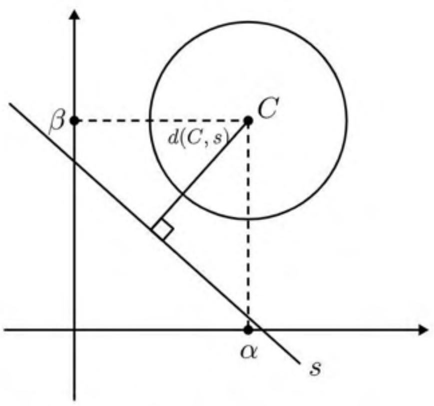


Figura 8.2.6: exteriores

Vamos refazer os Exemplos 8.2.1, 8.2.2 e 8.2.3 utilizando o Teorema 8.1.

Exemplo 8.2.4 Determine a posição relativa entre a reta $s: 2\cdot x - 3\cdot y = 4$ e a circunferência $\lambda: (x-1)^2 + (y)^2 = 9$.

Resolução: Neste caso, o centro da circunferência é $C = (1,0)$ e seu raio é $r = 3$. Desta forma,

$$\begin{aligned} d(C,s) &= \left| \frac{2\cdot 1 - 3\cdot 0 - 4}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{2-4}{\sqrt{4+9}} \right| \\ &= \left| \frac{-2}{\sqrt{13}} \right| \\ &= \frac{2\cdot\sqrt{13}}{13}. \end{aligned}$$

Ou seja, $d(C,s) = \dfrac{2\cdot\sqrt{13}}{13} < \dfrac{2\cdot 4}{13} = \dfrac{8}{13} < 1 < 3$, sendo assim,
$$d(C,s) < 3 = r$$
e segue do item (1) do Teorema 8.1 que s e λ são secantes.

Exemplo 8.2.5 Determine a posição relativa entre a reta $s: 3\cdot x + 4\cdot y = 0$ e a circunferência $\lambda: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Resolução: Neste caso, o centro da circunferência é $C = (3,4)$ e seu raio é $r = 5$. Desta forma,

$$d(C,s) = \left| \frac{3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 0}{\sqrt{3^2+4^2}} \right|$$
$$= \frac{9+16}{\sqrt{9+16}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Ou seja,
$$d(C,s) = 5 = r$$
e segue do item (2) do Teorema 8.1 que s e λ são tangentes.

Exemplo 8.2.6 Determine a posição relativa entre a reta $s: 2\cdot x - y + 1 = 0$ e a circunferência $\lambda: (x-1)^2 + (y)^2 = 1$.

Resolução: Neste caso, o centro da circunferência é $C = (1,0)$ e seu raio é $r = 1$. Desta forma,

$$\begin{aligned} d(C,s) &= \left| \frac{2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{3}{\sqrt{5}} \right| \\ &= \frac{3\cdot\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Ou seja, $d(C,s) = \dfrac{3\cdot\sqrt{5}}{5} > \dfrac{3\cdot 2}{5} = \dfrac{6}{5} > 1$, sendo assim,
$$d(C,s) > 1 = r$$
e segue do item (3) do Teorema 8.1 que s e λ são exteriores.

9 Cônicas

Um sólido de revolução é obtido ao rotacionar uma figura plana em torno de um eixo. Desta forma, ao realizar a intersecção entre um plano e um cone duplo de revolução, obtemos figuras geométricas planas denominadas cônicas. As cônicas obtidas podem ser circunferências, elipses, hipérboles ou parábolas. As circunferências já foram estudadas, agora nos aprofundaremos nas demais.

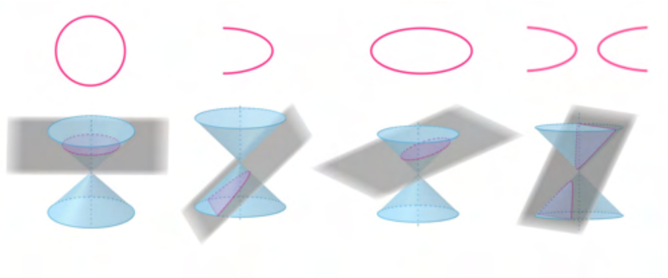


Figura 9.0.1: ilustração de como as cônicas são obtidas

9.1 Elipses

Definição 9.1 Fixados dois pontos F_1 e F_2 (chamados de focos), uma elipse é o conjunto de pontos P do plano de tal modo que a soma das distâncias $d(P,F_1)$ e $d(P,F_2)$ é constante.

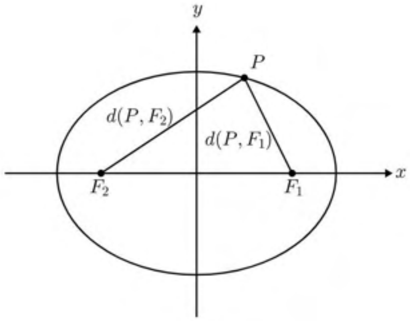


Figura 9.1.1: ponto da elipse

Nas elipses, temos as seguintes características:

Focos: são 2 pontos fixados;

Distância focal: é a distância entre os dois focos, indicada por $2c$ (ver Figura 9.1.2);

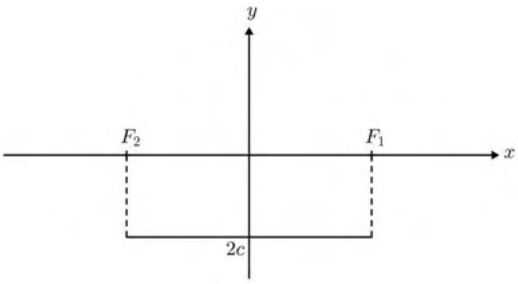


Figura 9.1.2: distância focal

Eixo maior: é a maior distância entre dois pontos da elipse e é indicada por $2a$ (é importante que $2a > 2c$) (ver Figura 9.1.3);

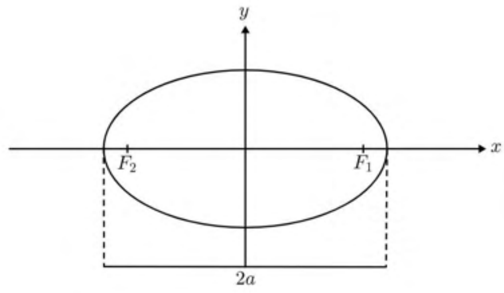


Figura 9.1.3: eixo maior

Eixo menor: é a menor distância entre dois pontos da elipse que formam um segmento perpendicular ao eixo maior que passa pelo ponto médio dos focos e é indicado por $2b$ (ver Figura 9.1.4);

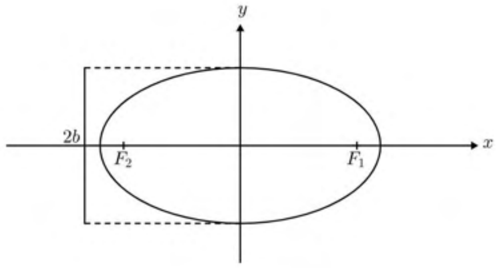


Figura 9.1.4: eixo menor

Identidade: $a^2 = b^2 + c^2$ (Esta igualdade é válida devido ao Teorema de Pitágoras visto no capítulo Geometria Plana) (ver Figura 9.1.5).

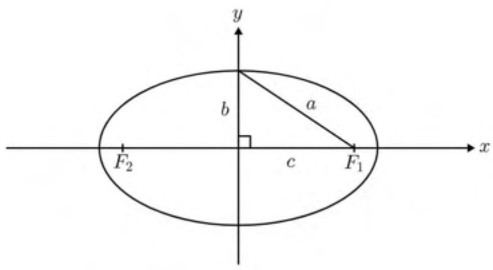
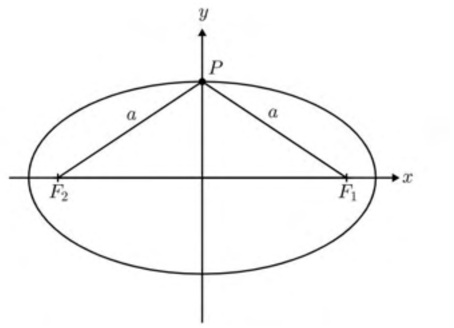


Figura 9.1.5: identidade na elipse

Obs. Se um ponto P pertence à elipse que tem F_1 e F_2 como focos, então

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a. \tag{12.12}$$



Obs. Assim como na circunferência não podíamos listar todos os seus pontos e precisávamos de uma equação que os identificasse, o mesmo irá ocorrer com as cônicas em geral. Para a elipse, temos a seguinte equação:

Definição 9.2 Dada uma elipse de eixo maior $2a$ e eixo menor $2b$, se um ponto $P = (x, y)$ está nesta elipse, então vale a igualdade

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12.13}$$

Obs. A equação da elipse estudada desta maneira é válida quando seu centro é a origem. Se o centro da elipse for um ponto $Q = (o_x, o_y)$, a equação se altera para a seguinte:

$$\frac{(x - o_x)^2}{a^2} + \frac{(y - o_y)^2}{b^2} = 1. \tag{12.14}$$

Exemplo 9.1.1 Dada uma elipse de eixo maior 10 e eixo menor 4, determine a equação desta elipse. Verifique se o ponto $P = \left(3, \frac{8}{5}\right)$ pertence à elipse.

Resolução: O eixo maior é dado por $2a$, enquanto que o eixo menor é dado por $2b$, ou seja,

$$\begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 4 \Rightarrow b = 2. \end{cases}$$

Sendo assim, a equação da elipse é

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \\ \Rightarrow\ &\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Agora, vejamos se o ponto P pertence à elipse; para isso, temos que as coordenadas de P são $x = 3$ e $y = \frac{8}{5}$, sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{3^2}{25} + \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2}{4} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{9}{25} + \frac{\left(\frac{64}{25}\right)}{4} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{9}{25} + \frac{64}{100} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{36}{100} + \frac{64}{100} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{100}{100} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto P pertence à elipse.

Exemplo 9.1.2 Dada uma elipse de eixo maior 18 e distância focal 10, determine sua equação e verifique se o ponto $Q = (1, 1)$ pertence a esta elipse.

Resolução: O eixo maior é dado por $2a$, enquanto a distância focal é dada por $2c$, ou seja,

$$\begin{cases} 2a = 18 \Rightarrow a = 9 \\ 2c = 10 \Rightarrow c = 5. \end{cases}$$

Sendo assim, da identidade $a^2 = b^2 + c^2$, segue que

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 \quad &\Rightarrow \quad 9^2 = b^2 + 5^2 \\ &\Rightarrow \quad 81 = b^2 + 25 \\ &\Rightarrow \quad b^2 = 56 \\ &\Rightarrow \quad b = 2 \cdot \sqrt{14}. \end{aligned}$$

Dessa forma, o eixo menor tem medida $2 \cdot \sqrt{14}$. Sendo assim, temos que a equação da elipse é

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{(2 \cdot \sqrt{14})^2} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{4 \cdot 14} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{56} = 1. \end{aligned}$$

Neste caso, podemos perceber que o ponto Q não pertence à circunferência, pois tem coordenadas $x = 1$ e $y = 1$, daí

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{56} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1^2}{81} + \frac{1^2}{56} = \frac{81 + 56}{81 \cdot 56} \neq 1.$$

Obs. Em todos os exemplos apresentados, a elipse possuía $a > b$. Se esse fato não ocorrer, isto é, se o eixo vertical for maior que o eixo horizontal, a equação da elipse muda para

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1.$$

Ainda, é importante ressaltar que os focos estão sempre sobre o eixo maior, daí a identidade torna-se $b^2=a^2+c^2$, que decorre novamente do Teorema de Pitágoras, tendo em vista que b é a hipotenusa, enquanto que a e c são os catetos.

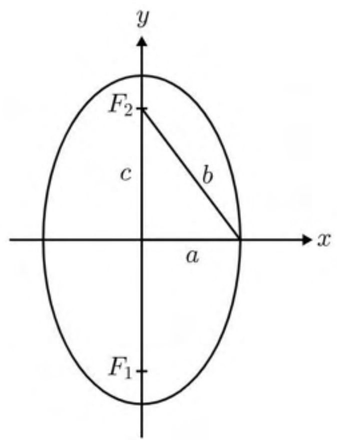


Figura 9.1.6: elipse com $a<b$

Área da Elipse

Definição 9.3 Dada uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, temos que a área da elipse é dada por

$$A=a\cdot b\cdot\pi. \tag{12.15}$$

Exemplo 9.1.3 Se uma elipse passa pelos pontos $P=(2,0)$ e $Q=(0,1)$, determine a área desta elipse.

Resolução: Note que, como a elipse passa por $(2,0)$, segue que $a=2$. Analogamente, como passa pelo ponto $(0,1)$, segue que $b=1$, logo sua equação é

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$$

Dessa forma, a área da elipse é

$$\begin{aligned} A &= a\cdot b\cdot\pi = 2\cdot 1\cdot\pi = 2\cdot\pi \\ A &= 2\cdot\pi. \end{aligned}$$

Portanto, a área dessa elipse é $A=2\cdot\pi$.

9.2 Hipérboles

Definição 9.4 Fixados dois pontos F_1 e F_2 (chamados focos) de tal modo que $d(F_1,F_2)=2c$, com c constante, uma hipérbole é o conjunto de pontos P do plano de tal modo que o módulo da diferença entre a distância entre este ponto e os focos é $2a$ $(0<2a<2c)$.

Para entender a Definição 9.4 de uma maneira mais simples, podemos escrever o seguinte: se um ponto P pertence à hipérbole que tem focos F_1 e F_2, então

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a. \tag{12.16}$$

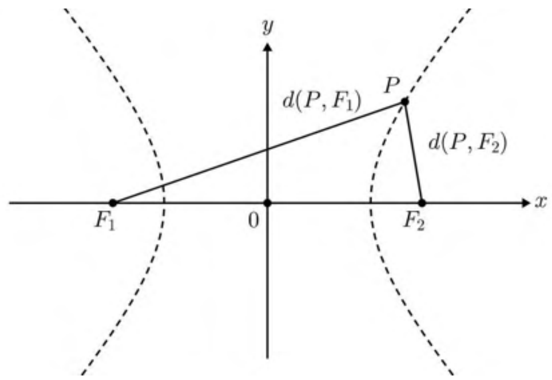


Figura 9.2.1: ponto da hipérbole

Nas hipérboles, temos as seguintes características:

Focos: são 2 pontos fixados;

Distância focal: é a distância entre os dois focos, indicada por $2c$ (ver Figura 9.2.2);

Eixo real: é a menor distância entre as duas curvas da hipérbole e tem medida $2a$ (é importante que $2a<2c$) (ver Figura 9.2.2);

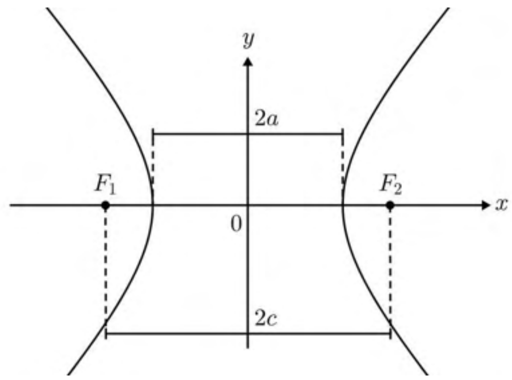


Figura 9.2.2: distância focal e eixo real

Centro: é o ponto médio do eixo real;

Eixo imaginário: o eixo imaginário é perpendicular ao eixo real e tem medida $2b$. A noção geométrica deste eixo é abstrata (ver Figura 9.2.3);

Identidade: $c^2=a^2+b^2$ (novamente decorre do Teorema de Pitágoras) (ver Figura 9.2.3).

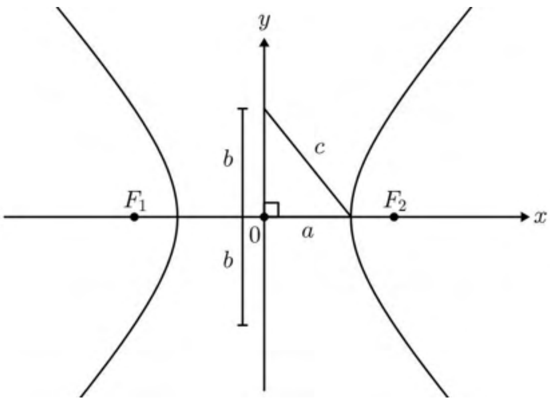


Figura 9.2.3: eixo imaginário e identidade

Obs. Assim como na circunferência e na elipse não podíamos listar todos os seus pontos e precisávamos de uma equação que identificasse estes pontos, o mesmo irá ocorrer com a hipérbole. Para identificar os pontos da hipérbole, temos a seguinte definição:

Definição 9.5 Dada uma hipérbole de eixo real $2a$ e eixo imaginário $2b$, se um ponto $P = (x, y)$ está nesta hipérbole, então vale a igualdade

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (12.17)$$

Obs. A equação da hipérbole estudada dessa maneira é válida quando seu centro é a origem. Se o centro da hipérbole for um ponto $Q = (o_x, o_y)$, a equação se altera para a seguinte:

$$\frac{(x - o_x)^2}{a^2} - \frac{(y - o_y)^2}{b^2} = 1. \qquad (12.18)$$

Exemplo 9.2.1 Se uma hipérbole tem eixo real 10 e eixo imaginário 24, determine sua equação e a distância focal.

Resolução: Para determinar a equação da hipérbole, precisamos conhecer os valores de a e b. Ora pois, se o eixo real tem medida 10, então $2a = 10$, logo $a = 5$. Ainda, como o eixo imaginário tem medida 24, então $2b = 24$, e assim $b = 12$. Com isto, segue da Definição 9.5 que a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1.$$

Sendo assim, a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

Por fim, para determinar a distância focal, temos a identidade $c^2 = a^2 + b^2$, com $a = 5$ e $b = 12$, logo

$$\begin{aligned} c^2 &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 \\ &= 169. \end{aligned}$$

Desta forma, $c = \sqrt{169} = 13$. Portanto, a distância focal é $2c = 2 \cdot 13 = 26$.

Exemplo 9.2.2 Dada uma hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16},$$

determine as medidas dos eixos real e imaginário e a distância focal.

Resolução: Da fórmula dada na Definição 9.5, segue que

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4,$$

logo o eixo real tem medida $2a = 6$ e o eixo imaginário tem medida $2b = 8$. Ainda, como $c^2 = a^2 + b^2$, segue que $c^2 = 9 + 16 = 25$ e, desta forma, $c = 5$. Portanto, a distância focal é $2c = 10$.

Obs. Em todos os exemplos apresentados, a hipérbole possuía o eixo real sobre o eixo x. Se esse fato não ocorrer, isto é, se o eixo real estiver sobre o eixo y, a equação da elipse muda para

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

9.3 Parábolas

Definição 9.6 Fixados um ponto F (chamado foco) e uma reta d (chamada diretriz), uma parábola é o conjunto de pontos P do plano de tal modo que a distância do ponto P ao foco F é a mesma do ponto P à reta d.

Obs. Para entender a Definição acima de uma maneira mais simples, podemos escrever o seguinte: se um ponto P pertence à parábola que tem foco F e reta d, então

$$d(P, F) = d(P, d).$$

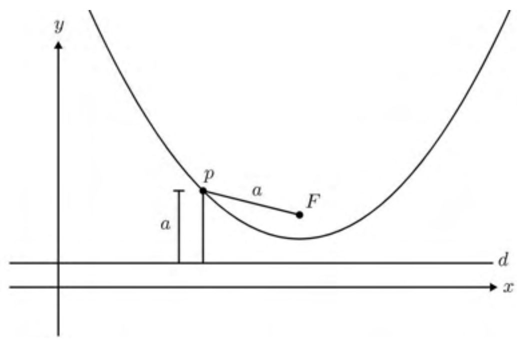


Figura 9.3.1: ponto da parábola

Nas parábolas, temos as seguintes características:

Foco: é um ponto fixado (F) (ver Figura 9.3.2);

Diretriz: é a reta fixada (d) (ver Figura 9.3.2);

Parâmetro: é a distância entre o foco e a diretriz, denotada por p, isto é, $d(F,d) = p$ (ver Figura 9.3.2);

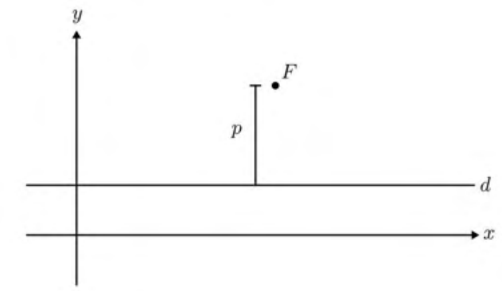


Figura 9.3.2: foco, diretriz e parâmetro

Vértice: é o ponto V da parábola que está mais próximo da diretriz. É importante perceber que $d(V,F) = d(V,d) = \dfrac{d(F,d)}{2} = \dfrac{p}{2}$ (ver Figura 9.3.3);

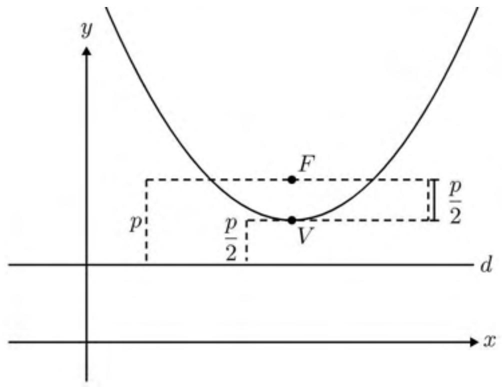


Figura 9.3.3: vértice e foco da parábola

Eixo de simetria: é a reta perpendicular a d e que passa pelo vértice V e pelo foco F (ver Figura 9.3.4).

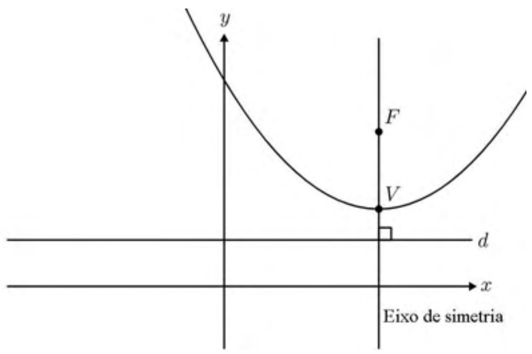


Figura 9.3.4: eixo de simetria

Obs. É importante tomar o foco F fora da reta diretriz d para se obter uma parábola.

Obs. Assim como na circunferência, na elipse e na hipérbole não podíamos listar todos os seus pontos e precisávamos de uma equação que identificasse esses pontos, o mesmo irá ocorrer com a parábola. E, para identificar os pontos da parábola, temos a seguinte definição:

Definição 9.7 Dada uma parábola com foco F e reta diretriz d, temos que o parâmetro dessa parábola é $p = d(F,d)$. Se um ponto $P = (x,y)$ está nessa parábola, então valem as igualdades

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x; \tag{12.19}$$

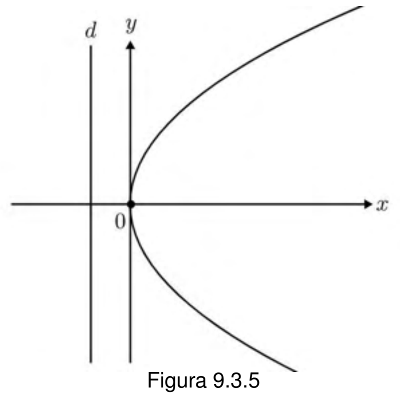


Figura 9.3.5

$$x^2 = 2 \cdot p \cdot y; \tag{12.20}$$

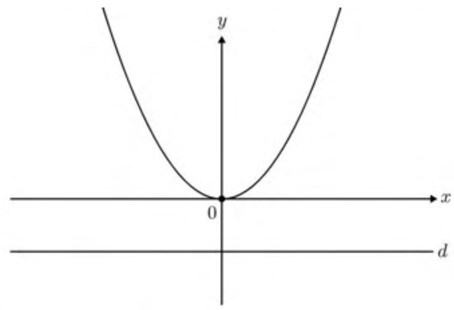


Figura 9.3.6

$$y^2 = -2 \cdot p \cdot x; \tag{12.21}$$

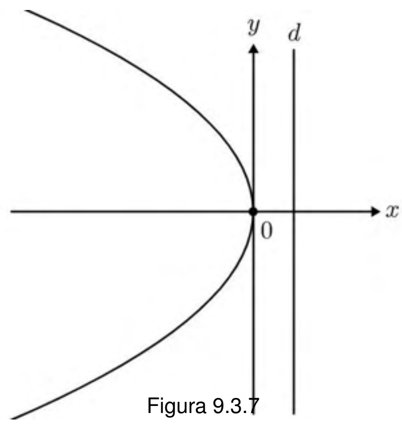


Figura 9.3.7

$$x^2 = -2 \cdot p \cdot y. \tag{12.22}$$

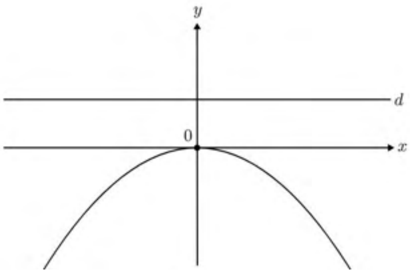


Figura 9.3.8

Obs. Uma dica para entender a Definição 9.7 é analisar a reta diretriz d em relação aos eixos do plano. Note que, se d é paralela ao eixo x, temos x^2 isolado na igualdade, como acontece em (12.20) e em (12.22). Por outro lado, se d é paralela ao eixo y, temos y^2 isolado na igualdade, como acontece em (12.19) e em (12.21).

Obs. Já o sinal da equação está relacionado com a posição do vértice e do foco em relação à reta diretriz. Se o vértice e o foco estão acima ou à direita da reta diretriz, temos igualdade com sinal positivo, como ocorre em (12.19) e em (12.20). Por outro lado, se o vértice e o foco estão abaixo ou à esquerda da reta diretriz, temos igualdade com sinal negativo, como ocorre em (12.21) e em (12.22).

Obs. Note ainda que toda função do segundo grau da forma $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ com $a \neq 0$ gera uma parábola. Porém, não é verdade dizer que toda parábola é gráfico de função. Basta analisarmos as imagens 9.3.5 e 9.3.7 para verificar que estas não são gráficos de função do segundo grau.

Exemplo 9.3.1 Qual a equação da parábola de diretriz $d: \ y = 2$ e vértice na origem $(V = (0,0))$?

Resolução: Sendo $d: \ y = 2$ a reta diretriz, temos que d é paralela ao eixo x, logo nossa equação da parábola terá ou o formato $x^2 = 2 \cdot p \cdot y$ ou $x^2 = -2 \cdot p \cdot y$. E como o ponto $V = (0,0)$ está abaixo da reta d, temos que o sinal é negativo, consequentemente, a equação tem o formato $x^2 = -2 \cdot p \cdot y$. Para determinarmos a equação, resta apenas encontrarmos o valor de p.

Sabemos que a distância entre o vértice e a reta diretriz é $d(V,d) = \frac{p}{2}$, vamos calcular a distância entre V e d. Para isso lembremos que a distância entre a origem e a reta $r: \ a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ é dada por

$$d(O,r) = \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

No caso, $d: \ y - 2 = 0$, sendo assim,

$$\begin{aligned} d(V,d) &= \left| \frac{-2}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \right| \\ &= |-2| \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} & d(V,d) &= 2 \\ \Rightarrow & \frac{p}{2} &= 2 \\ \Rightarrow & p &= 4. \end{aligned}$$

Desta forma, a equação é $x^2 = -2 \cdot p \cdot y$ (ver Figura 9.3.8) com $p = 4$ e, portanto, a equação da parábola é

$$x^2 = -8 \cdot y.$$

Obs. A equação da parábola estudada desta maneira é válida quando seu vértice é a origem. Se o vértice da parábola for um ponto $V_0 = (o_x, o_y)$, a equação se altera para as seguintes:

- $(y - o_y)^2 = \pm 2p(x - o_x)$ se a reta diretriz for paralela ao eixo y;
- $(x - o_x)^2 = \pm 2p(y - o_y)$ se a reta diretriz for paralela ao eixo x.

Exemplo 9.3.2 Qual a equação da parábola de diretriz $y = 3$ e vértice $V = (5,5)$?

Resolução: Sendo $d: \ y = 3$ a reta diretriz, temos que d é paralela ao eixo x, logo nossa equação da parábola terá ou o formato $(x - o_x)^2 = 2 \cdot p \cdot (y - o_y)$ ou $(x - o_x)^2 = -2 \cdot p \cdot (y - o_y)$. E como o ponto $V = (5,5)$ está acima da reta d, temos que o sinal é positivo, consequentemente, a equação tem o formato $(x-5)^2 = 2 \cdot p \cdot (y-5)$. Para determinarmos a equação, resta apenas encontrarmos o valor de p.

Sabemos que a distância entre o vértice e a reta diretriz é $d(V,d) = \frac{p}{2}$, vamos calcular a distância entre V e d. Para isso, lembremos que a distância entre o ponto $P = (\alpha, \beta)$ e a reta $r: \ a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ é dada por

$$d(P,r) = \left| \frac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

No caso, $V = (5,5)$ e $d: \ y - 3 = 0$, sendo assim,

$$\begin{aligned} d(V,d) &= \left| \frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 5 - 3}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \right| \\ &= \left| \frac{5-3}{1} \right| \\ &= |5-3| \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{array}{rcl} d(V,d) & = & 2 \\ \Rightarrow \quad \dfrac{p}{2} & = & 2 \\ \Rightarrow \quad p & = & 4. \end{array}$$

Dessa forma, a equação é $(x-5)^2 = 2\cdot p\cdot(y-5)$ com $p=4$, e disto, nossa parábola tem equação

$$\begin{array}{rcl} (x-5)^2 & = & 8\cdot(y-5) \\ x^2-10\cdot x+25 & = & 8\cdot y-40 \\ x^2-10\cdot x & = & 8\cdot y-65. \end{array}$$

Portanto, a equação da parábola é

$$x^2-10\cdot x = 8\cdot y-65.$$

Exemplo 9.3.3 Qual a equação da parábola que tem diretriz $d:\ x=2$ e foco $F=(-1,4)$?

Resolução: Sendo $d:\ x=2$ a reta diretriz, temos que d é paralela ao eixo y, logo nossa equação da parábola terá ou o formato $(y-o_y)^2 = 2\cdot p\cdot(x-o_x)$ ou $(y-o_y)^2=-2\cdot p\cdot(x-o_x)$. E como o ponto $F=(-1,4)$ está à esquerda da reta d, temos que o sinal é negativo, consequentemente, a equação tem o formato $(y-o_y)^2=-2\cdot p\cdot(x-o_x)$. Para determinarmos a equação, resta encontrarmos o valor de p e as coordenadas do vértice da parábola. Sabemos que a distância entre o foco e a diretriz é $d(F,d)=p$; vamos calcular a distância entre F e d e, no caso $F=(-1,4)$ e $d:\ x-2=0$, sendo assim,

$$\begin{array}{rcl} d(F,d) & = & \left|\dfrac{1\cdot(-1)+0\cdot 4-2}{\sqrt{1^2+0^2}}\right| \\ & = & \left|\dfrac{-1-2}{1}\right| \\ & = & |-1-2| \\ & = & 3. \end{array}$$

Ou seja,

$$\begin{array}{rcl} d(F,d) & = & 3 \\ \Rightarrow \quad p & = & 3. \end{array}$$

E assim, temos que $p=3$, vamos agora determinar as coordenadas de $V=(o_x,o_y)$. Primeiro, como a reta diretriz é paralela ao eixo y, temos que o eixo de simetria da parábola é paralelo ao eixo x e contém o vértice e o foco, logo o vértice e o foco possuem sua segunda coordenada iguais, isto é $o_y=4$.

Vamos determinar a coordenada o_x do vértice. Sabemos que a distância entre o vértice $V=(o_x,4)$ e a reta diretriz $d:\ x-2=0$ é

$$\begin{array}{rcl} d(V,d) & = & \left|\dfrac{1\cdot o_x+0\cdot 4-2}{\sqrt{1^2+0^2}}\right| \\ \Rightarrow \quad \dfrac{p}{2} & = & |o_x-2| \\ \Rightarrow \quad \dfrac{3}{2} & = & |o_x-2| \\ \Rightarrow \quad \pm\dfrac{3}{2} & = & o_x-2 \\ \Rightarrow \quad 2\pm\dfrac{3}{2} & = & o_x \\ \Rightarrow \quad \dfrac{4\pm 3}{2} & = & o_x. \end{array} \tag{12.23}$$

Com isso, temos que $o_x=\dfrac{4+3}{2}=\dfrac{7}{2}$ ou $o_x=\dfrac{4-3}{2}=\dfrac{1}{2}$. E o foco está à esquerda da reta diretriz, logo o vértice também está à esquerda; sendo assim, o_x não pode ser $\dfrac{7}{2}$.

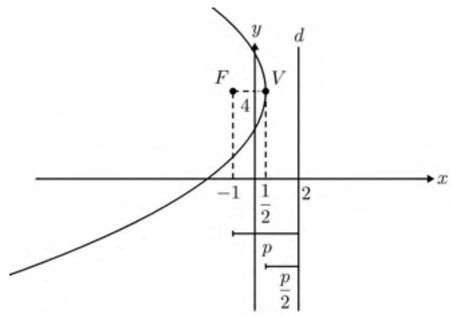
Finalmente, temos que o vértice V da parábola tem coordenadas $V=\left(\dfrac{1}{2},4\right)$.

Dessa forma, a equação é $(y-4)^2=-2\cdot p\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ com $p=3$, e disto, nossa parábola tem equação

$$\begin{array}{rcl} (y-4)^2 & = & -2\cdot 3\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \\ y^2-8\cdot y+16 & = & -6\cdot x+3 \\ y^2-8\cdot y & = & -6\cdot x-13. \end{array}$$

Portanto, a equação da parábola é

$$y^2-8\cdot y=-6\cdot x-13.$$



Obs. No Exemplo 9.3.3, toda a conta realizada em (12.23) pode ser encurtada da seguinte forma: Para determinar $V=(o_x,o_y)$, basta encontrar o ponto médio entre o foco e o ponto $Q=(a,b)$ onde o eixo de simetria e a diretriz se intersectam.

E este ponto Q está sobre a diretriz $d:\ x=2$, logo tem coordenada $a=2$ e está no eixo de simetria, então tem a mesma segunda coordenada do foco, isto é $b=4$. Sendo assim, $Q=(2,4)$. Agora, achar o vértice V é o mesmo que achar o ponto médio entre F e Q, ou seja,

$$\begin{aligned} V = (o_x, o_y) &= \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{4+4}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, 4\right). \end{aligned}$$

Portanto, $V = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

10 Exercícios propostos

Exercício 12.1 Marque os seguintes pontos no plano cartesiano e analise suas posições no plano:

- $A=(7,2)$;
- $B=(7,-7)$;
- $C=(-2,-7)$;
- $D=(7,0)$;
- $E=(-2,7)$;
- $F=(2,2)$;
- $G=(0,2)$.

Exercício 12.2 Determine para quais valores de $x>0$ e $y>0$ teremos que os pontos $A=(x,y^2)$ e $B=(y+4,x-2)$ são coincidentes.

Exercício 12.3 Calcule a distância entre os pontos $X=(2)$ e $Y=(-2)$.

Exercício 12.4 Calcule a distância entre os pontos $X=(2,5)$ e $Y=(-2,-4)$.

Exercício 12.5 Dados os pontos $X=(7,5)$ e $Y=(3,-1)$, determine o ponto médio C do segmento $\overline{XY}$.

Exercício 12.6 Sendo $C=(1,2)$ ponto médio do segmento de extremos $X=(-1,x)$ e $Y=(y,4)$, determine x e y.

Exercício 12.7 Dados os pontos $A=(-4,-1)$, $B=(2,3)$ e $C=(-1,1)$, verifique se esses pontos são colineares. Caso sejam colineares, determine a equação geral da reta que os contém.

Exercício 12.8 Dados os pontos $X=(m,2)$, $Y=(1,1)$ e $Z=(0,5)$, determine o valor de m para que os pontos X, Y e Z sejam colineares e a equação geral da reta que os contém.

Exercício 12.9 Dada a reta r de equação geral $3\cdot x-5\cdot y-7=0$, determine as equações reduzida e segmentária de r.

Exercício 12.10 A reta r determinada pelos pontos $A=(a,0)$ e $B=(0,b)$ passa pelo ponto $C=(1,7)$, com $a\neq 1$. Determine a relação entre a e b.

Exercício 12.11 Dê a posição relativa entre as retas abaixo:

a) $r:\ 3\cdot x-6\cdot y=5$ e $s:\ 6\cdot x+12\cdot y=10$;
b) $r:\ 4\cdot x+12\cdot y=20$ e $s:\ x+3\cdot y=5$;
c) $r:\ x+7\cdot y=2$ e $s:\ 4\cdot x+28\cdot y=5$;
d) $r:\ x+y=5$ e $s:\ y=7$;
e) $r:\ 2\cdot x=3$ e $s:\ 3\cdot x=5$;
f) $r:\ 2\cdot y=4$ e $s:\ 6\cdot y=12$.

Exercício 12.12 Determine o que se pede:

a) Coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A=(1,1)$ e $B=(3,5)$;
b) Equação geral da reta r que passa pelo ponto $A=(2,1)$ e tem coeficiente angular $m=3$.

Exercício 12.13 Determine a equação da reta r que é paralela à reta $s:2\cdot x-3\cdot y+4=0$ e que passa pela origem.

Exercício 12.14 Determine a equação da reta r que é perpendicular à reta $s:2\cdot x-3\cdot y+4=0$ e que passa pela origem.

Exercício 12.15 Determine as coordenadas do ponto P em que as retas $r:2\cdot x-3\cdot y+4=0$ e $s:x+3\cdot y+8=0$ se interceptam.

Exercício 12.16 Determine a distância entre a reta r, que passa pelos pontos $A=(1,2)$ e $B=(-2,4)$, e os pontos $P_1=(-2,4)$ e $P_2=(1,0)$.

Exercício 12.17 A distância do ponto $P=(1,q)$ e a reta $r:x+y=0$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Determine o valor de q.

Exercício 12.18 Qual é a distância entre o centro da circunferência de equação $(x-2)^2+(y+5)^2=9$ e a reta de equação $5\cdot x+2\cdot y=0$?

Exercício 12.19 Determine o centro e o raio da circunferência $\lambda:3\cdot x^2+3\cdot y^2-4\cdot x-2\cdot y-1=0$.

Exercício 12.20 Determine a posição relativa entre a circunferência $\lambda:3\cdot x^2+3\cdot y^2-4\cdot x-2\cdot y-1=0$ e a reta $s:2\cdot x+y-1=0$.

Exercício 12.21 Determine a posição relativa entre a circunferência $\lambda:(x-1)^2+(y-1)^2=16$ e a reta $s:x-y=6$.

Exercício 12.22 Uma elipse tem eixo maior medindo 26 e eixo menor medindo 10. Determine a distância focal dessa elipse.

Exercício 12.23 Determine a equação da elipse que possui eixo menor igual a 6 e distância focal igual a 8.

Exercício 12.24 Calcule a área da elipse de equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$.

Exercício 12.25 Uma hipérbole tem distância focal igual a 18 e eixo real igual a 10. Determine a medida do eixo imaginário.

Exercício 12.26 Determine a equação da hipérbole que possui eixo real igual a 16 e distância focal igual a 20.

Exercício 12.27 Determine a equação da parábola que possui diretriz $d:\ x = 4$ e vértice na origem.

Exercício 12.28 A equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ representa qual cônica?

Exercício 12.29 A equação $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$ representa qual cônica?

Gabarito

Capítulo 1

(1.1) (e)
(1.2) (d)
(1.3) (a)
(1.4) (c)
(1.5) (a)
(1.6) (d)
(1.7) (c)
(1.8) (d)
(1.9) (e)
(1.10) (d)
(1.11) (a) $R\$45.990,00$
(1.11) (b) $6,28\%$
(1.12) (d)
(1.13) (c)
(1.14) a)$6,25\% a.m.$
(1.14) b) 5 meses
(1.15) (d)
(1.16) (c)
(1.17) (a)
(1.18) (b)
(1.19) (d)
(1.20) (c)
(1.21) $n = 50^2 + 1$.
(1.22) (a)
(1.23) (a)

Capítulo 2

(2.1) c
(2.2) c
(2.3) b
(2.4) a
(2.5) b
(2.6) d
(2.7) b
(2.8) d
(2.9) d
(2.10) e
(2.11) d
(2.12) b
(2.13) d
(2.14) a
(2.15) c
(2.16) e
(2.17) b
(2.18) c
(2.19) d
(2.20) e
(2.21) b
(2.22) c
(2.23) e
(2.24) d
(2.25) e
(2.26) c
(2.27) e
(2.28) 550 pessoas

Capítulo 3

(3.1) (d);
(3.2) (a);
(3.3) (a);
(3.4) (a);
(3.5) (c);
(3.6) (d);
(3.7) (e);
(3.8) (d);
(3.9) (d);
(3.10) (d);
(3.11) (d);
(3.12) (d);

Capítulo 4

(4.1) a) -9;
b) $-\frac{6}{\sqrt{3}}$;
c) 9
(4.2) 400
(4.3) 5
(4.4) $\frac{5}{2}$
(4.5) a) 4; b) 500
(4.6) $\sqrt{3}$
(4.7) b
(4.8) b
(4.9) a
(4.10) c
(4.11) a
(4.12) d
(4.13) d
(4.14) d
(4.15) d
(4.16) e
(4.17) c
(4.18) b

Capítulo 5

(5.1) (c).
(5.2) (b).
(5.3) Não existe $m \in \mathbb{R}$ para que $gr(p(x)) = 2$.
(5.4) $x^4 + 3x^3 - x + 5 = (x^2 - 2x)(x^2 + 5x + 10) + 19x + 5$.
(5.5) $S = \{-1; 5\}$.
(5.6) $6x^3 - 3x^2 + 4x + 1$; $-3x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 2$; $-3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 5$.
(5.7) $q(x) = 3x$ e $r(x) = 2x^2 - 15x + 5$.
(5.8) e.
(5.9) $a = 1, b = -1$ e $c = 0$.
(5.10) -4.
(5.11) $\frac{1}{2}$.
(5.12) (d).
(5.13) As raízes são $1, -7, -9$.
(5.14) $a = 1$ e $b = -12$.
(5.15) (b).
(5.16) (b).
(5.17) (c).
(5.18) (b).

Capítulo 6

(6.1) a
(6.2) a
(6.3) e
(6.4) a
(6.5) a
(6.6) b
(6.7) b
(6.8) d
(6.9) d
(6.10) c
(6.11) c
(6.12) b
(6.13) e
(6.14) a
(6.15) c
(6.16) 0, -2 e $\frac{4}{7}$
(6.17) a) 18 kg
b) 11 anos
(6.18) c
(6.19) e
(6.20) d
(6.21) c
(6.22) c

Capítulo 7

(7.1) (a)
(7.2) (a)
(7.3) (d)
(7.4) (c)
(7.5) (d)
(7.6) (a)
(7.7) (c)
(7.8) (e)
(7.9) (a)
(7.10) (b)
(7.11) (c)
(7.12) (b)
(7.13) (d)
(7.14) (d)
(7.15) (c)
(7.16) (b)
(7.17) (e)
(7.18) (a)
(7.19) (d)
(7.20) (d)
(7.21) (c)
(7.22) (b)
(7.23) (b)
(7.24) (b)
(7.25) (d)
(7.26) (c)
(7.27) (a)
(7.28) (c)

Capítulo 8

(8.1) (d)
(8.2) (e)
(8.3) (d)
(8.4) (d)
(8.5) (c)
(8.6) (b)
(8.7) (a)
(8.8) (e)
(8.9) (e)
(8.10) (e)
(8.11) (b)
(8.12) (e)
(8.13) (d)
(8.14) (b)
(8.15) (e)
(8.16) (d)
(8.17) (c)
(8.18) (c)
(8.19) (c)
(8.20) (e)
(8.21) (d)
(8.22) (c)
(8.23) (a)
(8.24) (c)
(8.25) (b)
(8.26) (c)
(8.27) (c)
(8.28) (e)
(8.29) (d)
(8.30) (e)

Capítulo 9

(9.1) (b)
(9.2) (a)
(9.3) (c)
(9.4) $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} 45° = 1$
(9.5) (e)
(9.6) (c)
(9.7) (a)
(9.8) (d)

(9.9) $\operatorname{sen}15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\operatorname{tg}15° = 2-\sqrt{3}$
$\operatorname{sen}75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
(9.10) (b)
(9.11) (a)
(9.12) (c)
(9.13) (c)
(9.14) (b)
(9.15) (b)
(9.16) $\hat{A} = 105°$
$\hat{B} = 45°$
$b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
$c = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
$S = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$
(9.17) a) $p = 6\pi$
b) $p = \frac{\pi}{2}$
(9.18) (a)
(9.19) (a)
(9.20) (c)
(9.21) (e)
(9.22) (c)
(9.23) a) $12k - \frac{15}{2}$, $k \in \mathbb{Z}_+^*$
b) 4h e 30m
(9.24) (b)

Capítulo 10

(10.1) (c).
(10.2) (b).
(10.3) $x = 50°$, $y = 90°$ e $z = 40°$.
(10.4) (c).
(10.5) (b).
(10.6) (b).
(10.7) Não é possível, pois $22 = 13 + 9$, ou seja, o maior lado não é menor que a soma dos outros dois lados.
(10.8) Sim, pois essas medidas satisfazem a condição de existência de um triângulo.
(10.9) $\alpha = 35°$ e $\beta = 42°$.
(10.10) $x = 62°$ e $y = 88°$.

(10.11) (d).	(10.16) (e).	(10.21) (e).
(10.12) (c).	(10.17) (b).	(10.22) (c).
(10.13) (c).	(10.18) (a).	(10.23) (b).
(10.14) (a).	(10.19) (e).	(10.24) (d).
(10.15) (d).	(10.20) (e).	(10.25) (a).

Capítulo 11

(11.1) (c)	(11.11) (a)	(11.21) (b)
(11.2) (c)	(11.12) (d)	(11.22) (a)
(11.3) (e)	(11.13) (d)	(11.23) (b)
(11.4) (d)	(11.14) (b)	(11.24) (c)
(11.5) (a)	(11.15) (b)	(11.25) (b)
(11.6) (e)	(11.16) (d)	(11.26) (e)
(11.7) (d)	(11.17) (c)	(11.27) (a)
(11.8) (b)	(11.18) (e)	(11.28) (d)
(11.9) (c)	(11.19) (d)	(11.29) (d)
(11.10) (b)	(11.20) (b)	(11.30) (e)

Capítulo 12

(12.1) A está no primeiro quadrante;
B está sobre a diagonal secundária no quarto quadrante;
C está no terceiro quadrante;
D está sobre o eixo das abscissas;
E está no segundo quadrante;
F está sobre a diagonal principal no primeiro quadrante;
G está sobre o eixo das ordenadas.
(12.2) $(x, y) = (6, 2)$.
(12.3) $d(X, Y) = 4$.
(12.4) $d(X, Y) = \sqrt{97}$.
(12.5) $C = (5, 2)$.
(12.6) $x = 0$ e $y = 3$.
(12.7) São colineares e a equação geral da reta que os contém é $2 \cdot x - 3 \cdot y + 5 = 0$.
(12.8) $m = \dfrac{3}{4}$ e a equação geral é $-4 \cdot x - y = 0$.
(12.9) A equação segmentária é $\dfrac{x}{\left(\frac{7}{3}\right)} - \dfrac{y}{\left(\frac{7}{5}\right)} = 1$ e a equação reduzida é $y = \dfrac{3 \cdot x - 7}{5}$.
(12.10) $b = \dfrac{7 \cdot a}{a-1}$.
(12.11) **a)** As retas r e s são concorrentes;
b) As retas r e s são coincidentes;
c) As retas r e s são paralelas distintas;
d) As retas r e s são concorrentes;
e) As retas r e s são paralelas distintas;
f) As retas r e s são coincidentes.
(12.12) **a)** $m = 2$;
b) $r: -3 \cdot x + y + 5 = 0$.
(12.13) $r: -\dfrac{2}{3} \cdot x + y = 0$.
(12.14) $r: \dfrac{3}{2} \cdot x + y = 0$.
(12.15) $P = \left(-4, -\dfrac{4}{3}\right)$.
(12.16) $d(P_1, r) = 0$ (o ponto P_1 pertence à reta) e $d(P_2, r) = \dfrac{6 \cdot \sqrt{13}}{13}$.
(12.17) A coordenada q pode assumir os valores 0 ou -2.
(12.18) A distância é 0.
(12.19) O centro é $P = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ e o raio é $r = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$.
(12.20) Secantes.
(12.21) Exteriores.
(12.22) A distância focal é 24.
(12.23) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
(12.24) $A = 90 \cdot \pi$.
(12.25) $2 \cdot \sqrt{14}$.
(12.26) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.
(12.27) $y^2 = -16 \cdot x$.
(12.28) Elipse.
(12.29) Hipérbole.

PET MATEMÁTICA - UEL

ISBN 978-65-00-50901-4