Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 4

Дисциплина Вычислительные алгоритмы

Тема Построение и программная реализация алгоритма наилучшего среднеквадратичного приближения

Студент Хетагуров П.К.

Группа ИУ7-45

Оценка (баллы) _______________

Преподаватель Градов В. Г

Москва.
2020 г.

Задание

Тема: Построение и программная реализация алгоритма наилучшего среднеквадратичного приближения.

Цель работы. Получение навыков построения алгоритма метода наименьших квадратов с использованием полинома заданной степени при аппроксимации табличных функций с весами.

Исходные данные.

1. Таблица функции с **весами** ρ_i с количеством узлов N.

x	y	ρ_i

2. Степень аппроксимирующего полинома - n.

Результат работы программы.

Графики, построенные по аналогии с рис.1 в тексте Лекции №4: *точки* - заданная табличная функция, *кривые*- найденные полиномы

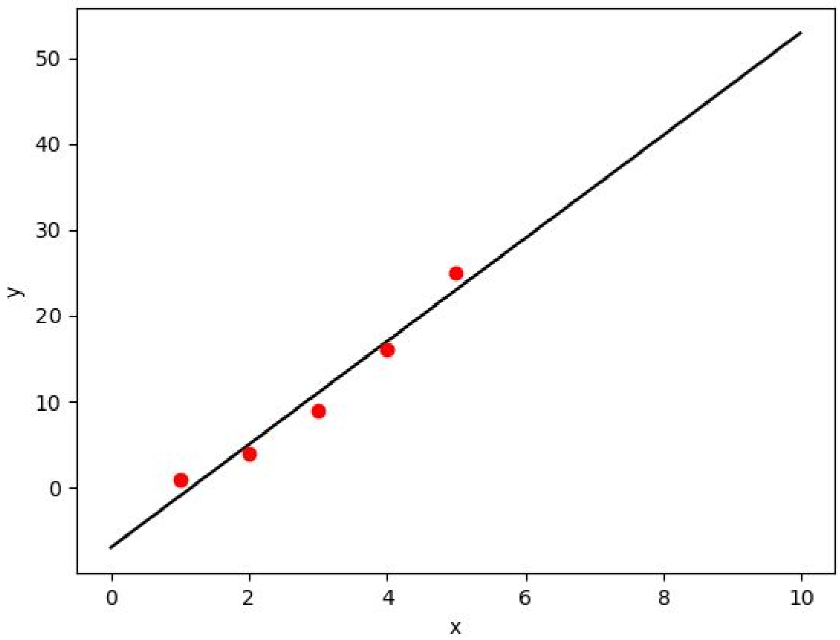
Работа программы

1. Веса всех точек одинаковы и равны, например, единице. Обязательно построить полиномы при значениях его степени n=1, 2.

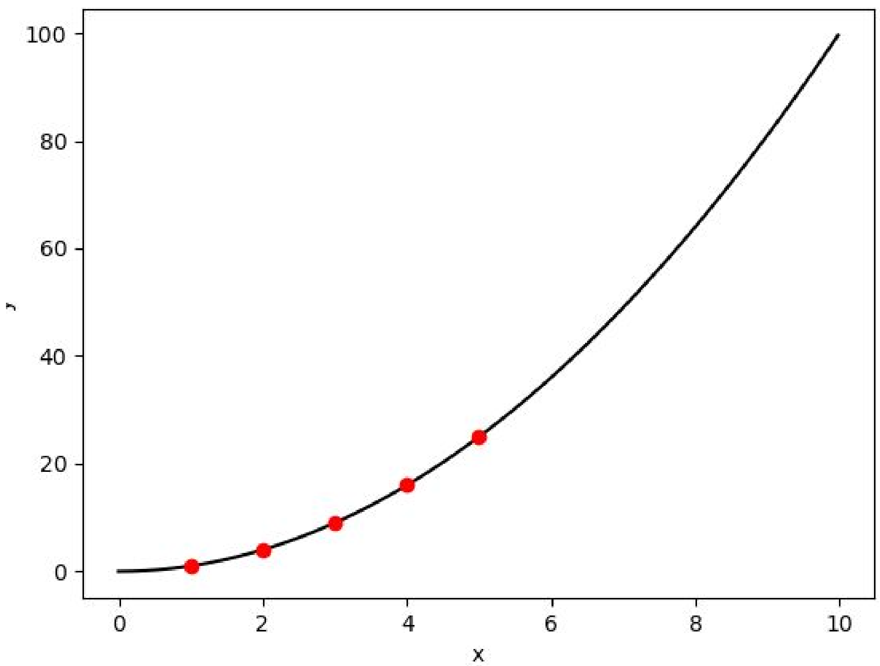
Таблица:

x	y	weight
1.0000	1.0000	1.0000
2.0000	4.0000	1.0000
3.0000	9.0000	1.0000
4.0000	16.0000	1.0000
5.0000	25.0000	1.0000

Степень = 1



Степень = 2



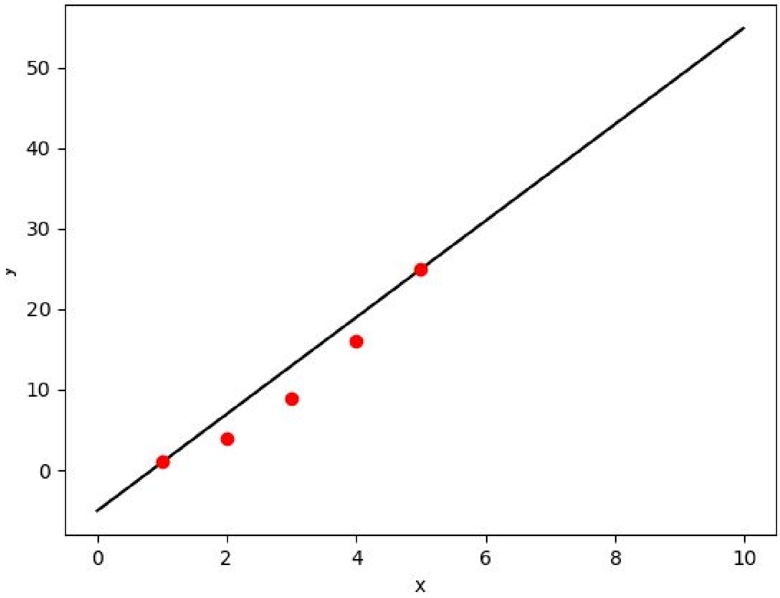
2. Веса точек разные. Продемонстрировать, как за счет назначения весов точкам можно изменить положение на плоскости прямой линии

Чем больше вес точки - тем ближе пройдет прямая к точке

Таблица:

x	y	weight
1.0000	1.0000	100.0000
2.0000	4.0000	1.0000
3.0000	9.0000	1.0000
4.0000	16.0000	1.0000
5.0000	25.0000	100.0000

Степень = 1

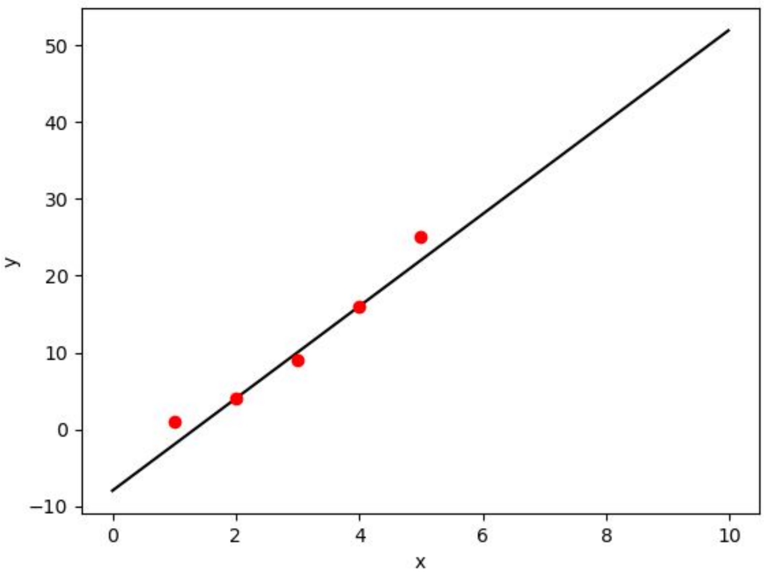


Так как вес точек (1, 1) и (5, 25) много больше чем веса остальных, то прямая почти проходит через них, так как влияние трех оставшихся точек - крайне мало

Таблица:

x	y	weight
1.0000	1.0000	1.0000
2.0000	4.0000	10.0000
3.0000	9.0000	5.0000
4.0000	16.0000	10.0000
5.0000	25.0000	1.0000

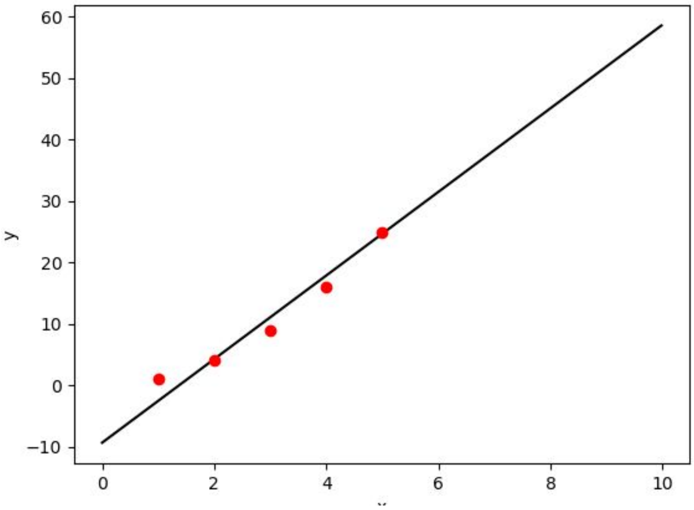
Степень = 1



В этом случае прямая проходит ближе к точкам (2, 4), (3, 9) , (4, 16) так как их веса, а следовательно и влияние больше чем у точек (1, 1) и (5, 25)

Таблица:

x	y	weight
1.0000	1.0000	1.0000
2.0000	4.0000	10.0000
3.0000	9.0000	1.0000
4.0000	16.0000	1.0000
5.0000	25.0000	10.0000



В этом случае прямая также проходит рядом с точкой (2, 4), но под другим углом (ближе к точке (5, 25))

Теоретическая часть

Контрольные вопросы:

1) Что произойдет при задании степени полинома n=N-1 (числу узлов таблицы минус 1)?

   Кривая точно пройдет через каждую из заданных точек

2) Будет ли работать Ваша программа при $n \geq N$? Что именно в алгоритме требует отдельного анализа данного случая и может привести к аварийной остановке?

   Так как строится полином n-ой степени, то кол-во точек должно быть N>n

   Требует анализа - равенство определителя СЛАУ нулю

3) Получить формулу для коэффициента полинома a_0 при степени полинома n=0. Какой смысл имеет величина, которую представляет данный коэффициент?

   $\mathbf{(x^0 , x^0) * a_0 = (y, x^0)}$

$(x^0, x^0) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i$, $(y, x^0) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i y_i$

$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i}$ **. Математический смысл - мат. ожидание. Определяет прямую y = a_0**

4) Записать и вычислить определитель матрицы СЛАУ для нахождения коэффициентов полинома для случая, когда n=N=2. Принять все ρ_i =1.

$$
\begin{aligned}
(x^0, x^0)a_0 + (x^0, x^1)a_1 + (x^0, x^2)a_2 &= (y, x^0) \\
(x^1, x^0)a_0 + (x^1, x^1)a_1 + (x^1, x^2)a_2 &= (y, x^1) \\
(x^2, x^0)a_0 + (x^2, x^1)a_1 + (x^2, x^2)a_2 &= (y, x^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} 1 * a0 + \sum_{i=1}^{2} x_i * a1 + \sum_{i=1}^{2} x_i^2 * a2 &= \sum_{i=1}^{2} y_i \\
\sum_{i=1}^{2} x_i * a0 + \sum_{i=1}^{2} x_i^2 * a1 + \sum_{i=1}^{2} x_i^3 * a2 &= \sum_{i=1}^{2} y_i * x_i \\
\sum_{i=1}^{2} x_i^2 * a0 + \sum_{i=1}^{2} x_i^3 * a1 + \sum_{i=1}^{2} x_i^4 * a2 &= \sum_{i=1}^{2} y_i * x_i^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & x_1 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ x_1 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1^3 x_2^3 \\ x_1^2 x_2^2 & x_1^3 x_2^3 & x_1^4 x_2^4 \end{vmatrix} = 2x_1^6 x_2^6 + x_1^6 x_2^6 + x_1^6 x_2^6 - x_1^6 x_2^6 - x_1^6 x_2^6 - 2x_1^6 x_2^6 = 0
$$

5) Построить СЛАУ при выборочном задании степеней аргумента полинома $\varphi(x) = a_0 + a_1 x^m + a_2 x^n$, причем степени n и m в этой формуле известны.

Например при n = 2

$$
\begin{aligned}
(\varphi^0, \varphi^0)a_0 + (\varphi^0, \varphi^1)a_1 + (\varphi^0, \varphi^2)a_2 &= (y, \varphi^0) \\
(\varphi^1, \varphi^0)a_0 + (\varphi^1, \varphi^1)a_1 + (\varphi^1, \varphi^2)a_2 &= (y, \varphi^1) \\
(\varphi^2, \varphi^0)a_0 + (\varphi^2, \varphi^1)a_1 + (\varphi^2, \varphi^2)a_2 &= (y, \varphi^2)
\end{aligned}
$$

$\varphi^1 = x^m$, $\varphi^2 = x^n$

$$(x^0, x^0)a_0 + (x^0, x^m)a_1 + (x^0, x^n)a_2 = (y, x^0)$$
$$(x^m, x^0)a_0 + (x^m, x^m)a_1 + (x^m, x^n)a_2 = (y, x^m)$$
$$(x^n, x^0)a_0 + (x^n, x^m)a_1 + (x^n, x^n)a_2 = (y, x^n)$$

6) Решить задачу из вопроса 5, если степени n и m подлежат определению наравне с коэффициентами a_k, т.е. количество неизвестных равно 5.

Надо добавить ещё два уравнения для определения коэффицентов m и n, но не могу с уверенностью сказать каких

Код основной функции:

```
def least_square(table_weight, n):
    lenght = len(table_weight)

    matrix = []
    for i in range (n):
        current_row = []
        for m in range(n):
            current_sum = 0
            for j in range (lenght):
                                current_sum += table_weight[j][2] * (table_weight[j][0] ** (i + m))
            current_row.append(current_sum)

        current_right = 0
        for j in range(lenght):
                             current_right += table_weight[j][2] * table_weight[j][1] * (table_weight[j][0] ** i)
        current_row.append(current_right)
        matrix.append(current_row)

    return gauss(matrix)
```