Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по дисциплине «Анализ Алгоритмов»

Тема Алгоритмы умножения матриц

Студент Нисуев Н.Ф.

Группа ИУ7-52Б

Преподаватель Волкова Л. Л., Строганов Д.В.

2024 г.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Матрицы представляют собой таблицы чисел, взаимосвязанных между собой.

Цель лабораторной работы — исследование алгоритмов умножения матриц следующими методами:

— классическим алгоритмом;

— алгоритмом Винограда;

— оптимизированного алгоритма Винограда.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

— реализовать указанные алгоритмы;

— выполнить оценку трудоемкости разрабатываемых алгоритмов;

— сравнение требуемого времени выполнения алгоритмов;

— описать и обосновать полученные результаты.

1 Аналитическая часть

В данном разделе будут рассмотрены алгоритмы умножения матриц.

1.1 Описание алгоритмов

Классический алгоритм умножения матриц реализует математическое определение этого процесса и обладает асимптотической сложностью $O(n^3)$.

Алгоритм Винограда, благодаря своей асимптотической сложности $O(n^{2.3755})$, считается одним из наиболее эффективных методов для умножения матриц с точки зрения времени.

Пусть даны матрицы A с размерами $N \times M$ и B с размерами $M \times K$. В результате умножения матрицы A на матрицу B получается матрица C с размером $N \times K$.

1.1.1 Классический алгоритм умножения матриц

Пусть даны матрицы A размерностью $N \times M$ и матрица B размерностью $M \times k$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Тогда умножением матрицы A на матрицу B называется, где матрица C:

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nk} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj} \;\; (i = \overline{1,n},\; j = \overline{1,k}). \tag{1.3}$$

1.1.2 Алгоритм Винограда умножения матриц

Пусть даны матрицы A и B, имеющие размерность 4×4.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Для получение очередного элемента c_{ij} матрицы C в классическом алгоритме умножения матрицы выполняется по формуле:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ b_{j3} \\ b_{j4} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $a_{ni},\ i = \overline{1,4}$ - элементы n-ой строки матрицы A; $b_{jk},\ k = \overline{1,4}$ - элементы j-ого столбца матрицы B.

В алгоритме Винограда для ускорения вычислений уменьшается количество затратных операций умножения, заменяя их сложениями. Для этого проводится предварительная обработка, при которой сохраняются некоторые значения, что позволяет в дальнейшем заменить часть умножений операциями сложения:

$$c_{ij} = (a_{n1}+b_{j2})(a_{n2}+b_{j1})+(a_{n3}+b_{j4})(a_{n4}+b_{j3})-a_{n1}a_{n2}-a_{n3}a_{n4}-b_{j1}b_{j2}-b_{j3}b_{j4}, \tag{1.6}$$

где элементы $a_{n1}a_{n2},\ a_{n3}a_{n4},\ b_{j1}b_{j2},\ b_{j3}b_{j4}$ - значения, которые получаются в предварительной обработке.

ВЫВОД

В этом разделе рассмотрены классический алгоритм и алгоритм Винограда для умножения матриц. Ключевые различия между ними заключаются в предварительной обработке данных и количестве выполняемых операций умножения.

2 Конструкторская часть

В данном разделе будут приведены схемы алгоритмов умножения матриц, а также оценены трудоемкости каждого из алгоритмов.

2.1 Представление алгоритмов

На вход алгоритмов подаются две матрицы: M_1 размера $M \times N$, M_2 размера $N \times K$, где M, N, K — неотрицательные целые числа; на выходе - матрица M_3 размера $M \times K$.

На рисунках 2.1 — 2.3 приведены схемы трех алгоритмов умножения матриц: классического, Винограда, оптимизированного Винограда.

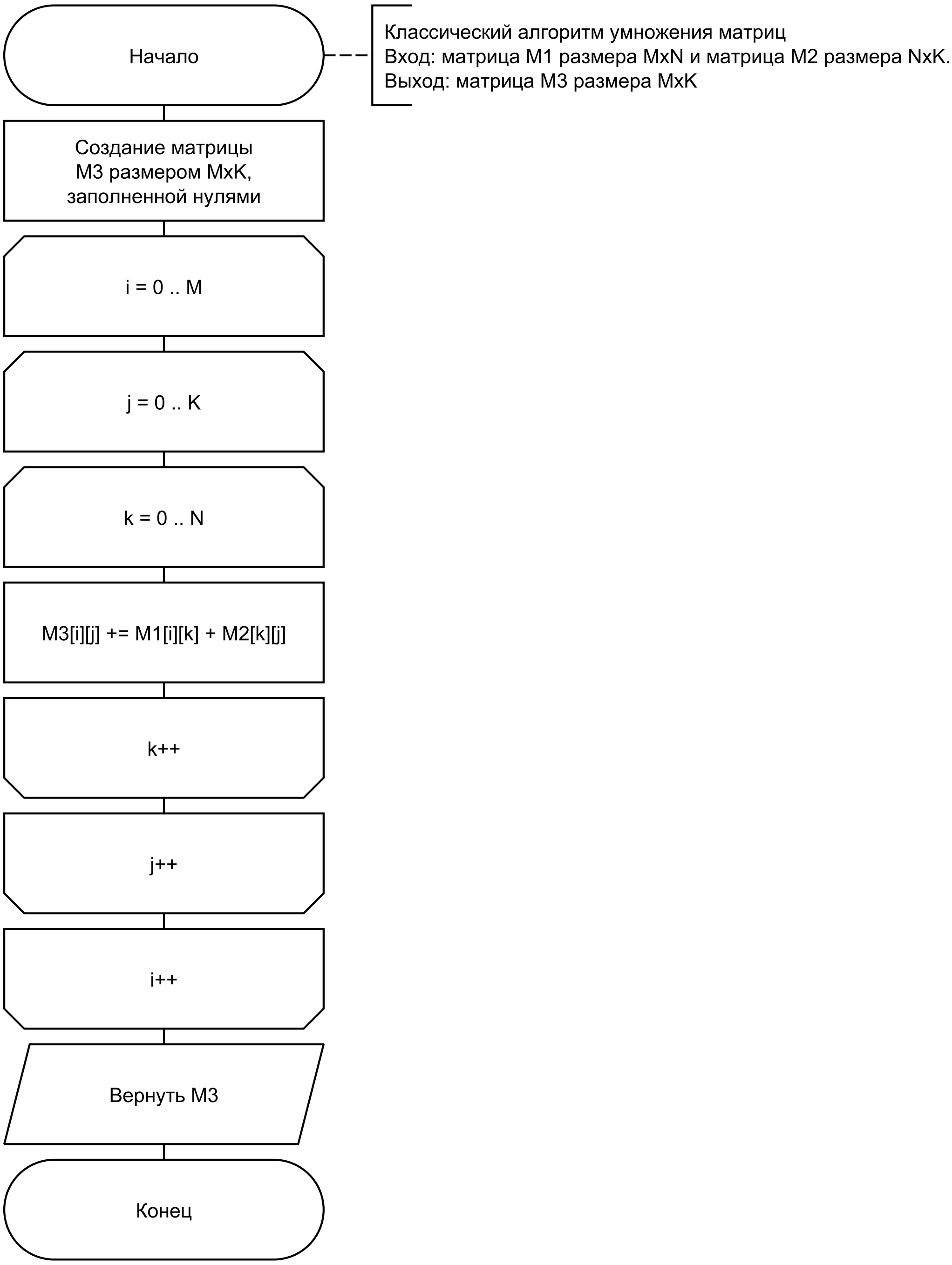
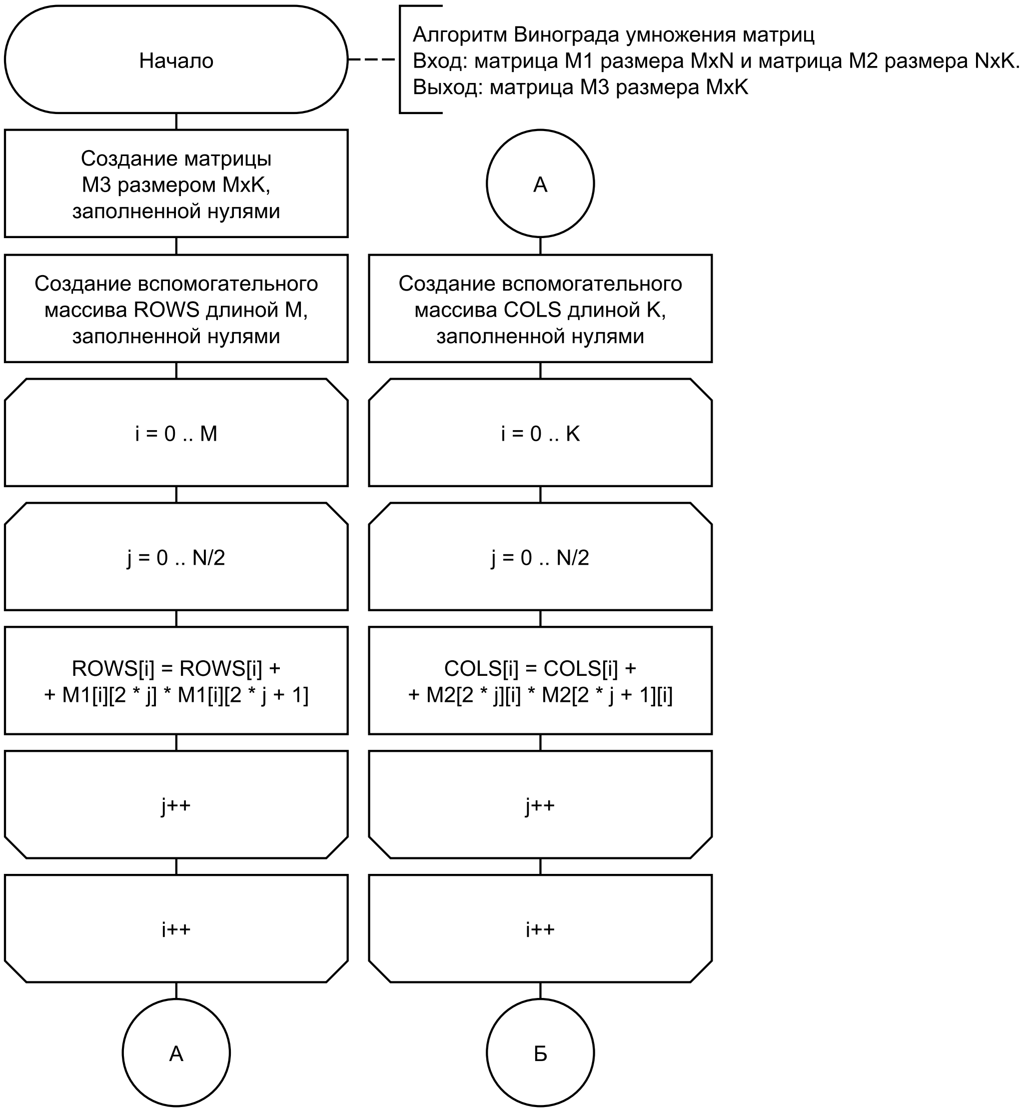


Рисунок 2.1 – Схема классического алгоритма умножения матриц


Начало
Алгоритм Винограда умножения матриц
Вход: матрица M1 размера MxN и матрица M2 размера NxK.
Выход: матрица M3 размера MxK
Создание матрицы M3 размером MxK, заполненной нулями
Создание вспомогательного массива ROWS длиной M, заполненной нулями
i = 0 .. M
j = 0 .. N/2
ROWS[i] = ROWS[i] + + M1[i][2 * j] * M1[i][2 * j + 1]
j++
i++
А
А
Создание вспомогательного массива COLS длиной K, заполненной нулями
i = 0 .. K
j = 0 .. N/2
COLS[i] = COLS[i] + + M2[2 * j][i] * M2[2 * j + 1][i]
j++
i++
Б

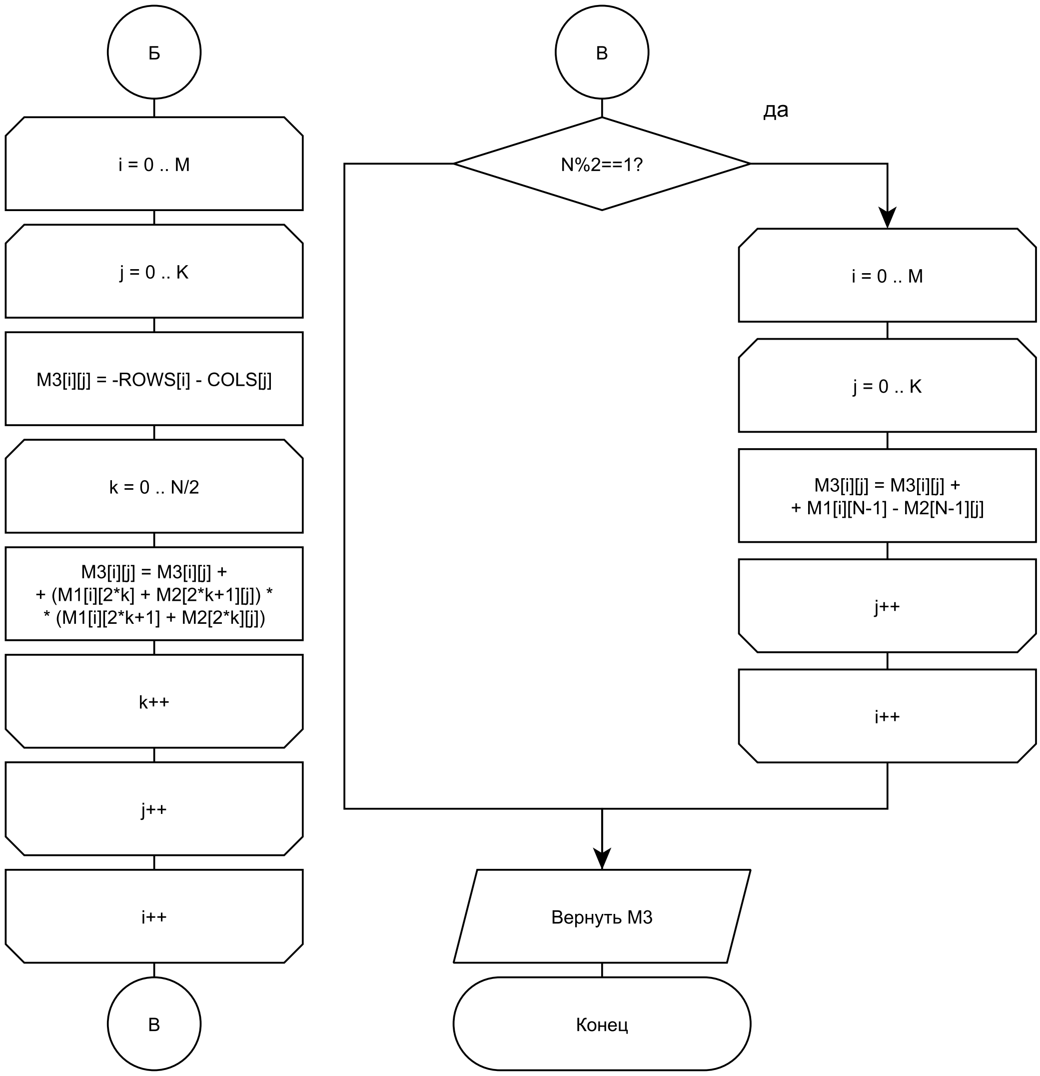
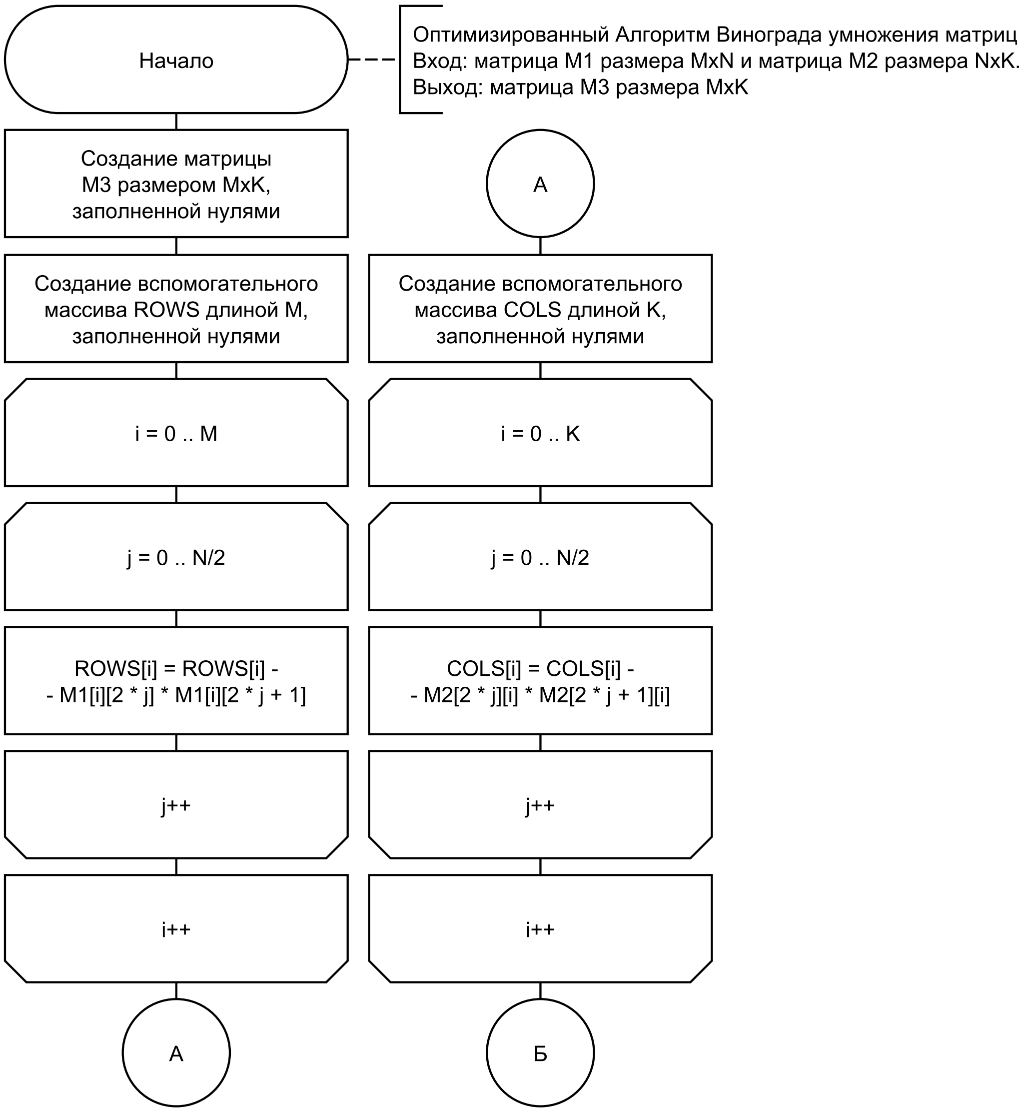


Рисунок 2.2 – Схема алгоритма Винограда умножения матриц


Начало
Оптимизированный Алгоритм Винограда умножения матриц
Вход: матрица M1 размера MxN и матрица M2 размера NxK.
Выход: матрица M3 размера MxK
Создание матрицы
M3 размером MxK,
заполненной нулями
Создание вспомогательного
массива ROWS длиной M,
заполненной нулями
i = 0 .. M
j = 0 .. N/2
ROWS[i] = ROWS[i] -
- M1[i][2 * j] * M1[i][2 * j + 1]
j++
i++
A
A
Создание вспомогательного
массива COLS длиной K,
заполненной нулями
i = 0 .. K
j = 0 .. N/2
COLS[i] = COLS[i] -
- M2[2 * j][i] * M2[2 * j + 1][i]
j++
i++
Б

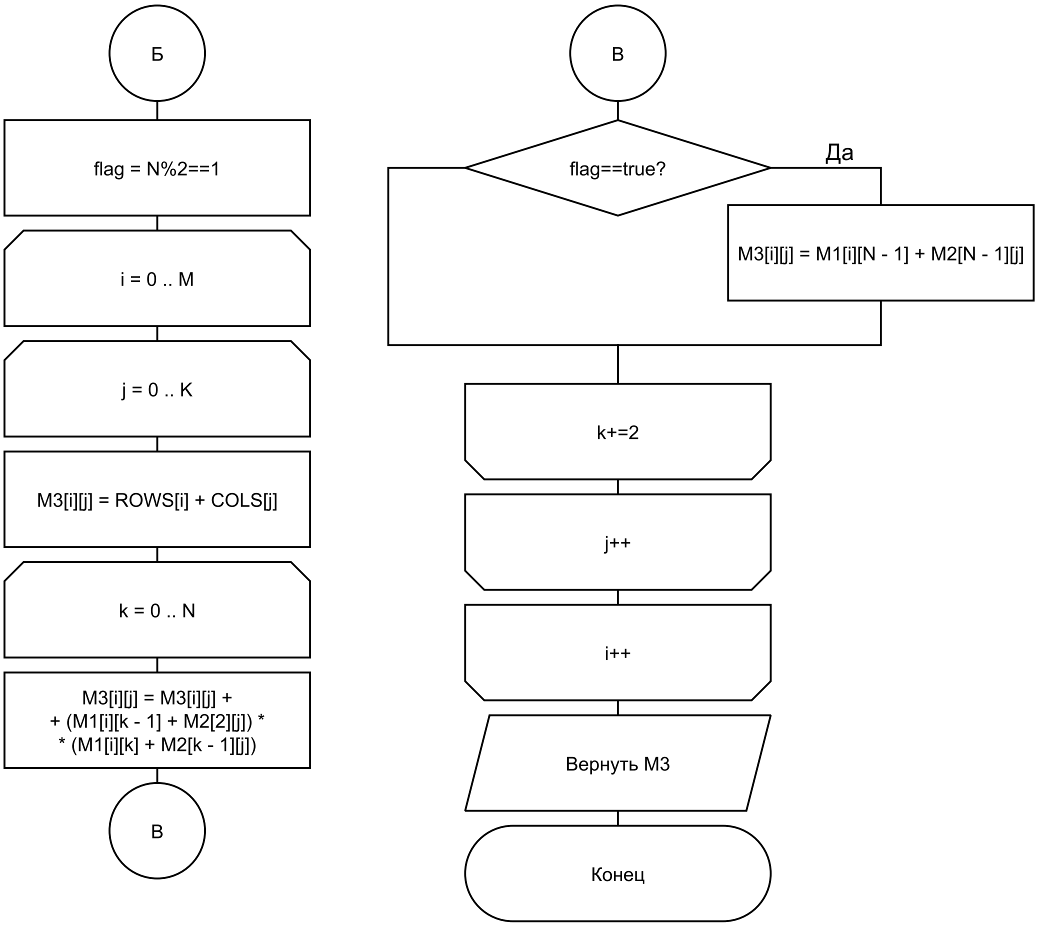


Рисунок 2.3 – Схема оптимизированного алгоритма Винограда

Оптимизация алгоритма Винограда заключается:

— в инкременте наиболее вложенного счетчика цикла на 2;

— в объединении III и IV части алгоритма;

— в введении декремента при вычислении вспомогательных массивов.

2.2 Модель вычислений

Для последующего вычисления трудоемкости необходимо ввести модель вычислений:

1. операции из списка (2.1) имеют трудоемкость 1;

$$+, -, *, /, \%, ==, != , <, >, <=, >=, [], ++, -- \tag{2.1}$$

2. трудоемкость условного оператора `if условие then A else B` рассчитывается как (2.2);

$$f_{if} = f_{\text{условия}} + \begin{cases} f_A, & \text{если условие выполняется,} \\ f_B, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.2}$$

3. трудоемкость цикла рассчитывается как (2.3);

$$f_{for} = f_{\text{инициализации}} + f_{\text{сравнения}} + N(f_{\text{тела}} + f_{\text{инкремента}} + f_{\text{сравнения}}) \tag{2.3}$$

4. трудоемкость вызова функции/возврата результата равна 0.

2.3 Трудоемкость алгоритмов

В следующих частях будут рассчитаны трудоемкости представленных ранее классического алгоритма, алгоритма Винограда, оптимизированного алгоритма Винограда. Трудоемкость инициализации результирующей матрицы учитываться не будет, поскольку данное действие есть во всех алгоритмах и не является самым трудоемким.

Введем обозначения:

— M — кол-во строк первой матрицы;

— N — кол-во столбцов первой матрицы и кол-во строк второй матрицы;

— K — кол-во столбцов второй матрицы.

2.3.1 Классический алгоритм перемножения матриц

Трудоемкость стандартного алгоритма умножения матриц состоит из:

— внешнего цикла по $i \in [1..M]$, трудоемкость которого: $f = 2 + M \cdot (2 + f_{body})$;

— цикла по $j \in [1..K]$, трудоемкость которого: $f = 2 + K \cdot (2 + f_{body})$;

— цикла по $q \in [1..N]$, трудоемкость которого: $f = 2 + 10 \cdot N$.

Трудоемкость классического алгоритма равна трудоемкости внешнего цикла. Ее можно вычислить, подставив циклы тела (2.4):

$$f_{classic} = 2+M\cdot(4+K\cdot(4+10N)) = 2+4M+4MK+10MNK \approx 10MNK \quad (2.4)$$

2.3.2 Алгоритм Винограда

Трудоемкость алгоритма Винограда состоит из:

— создания и инициализации массивов $ROWS$ и $COLS$, трудоемкость которого (2.11):

$$f_{init} = M + K; \quad (2.5)$$

— заполнения массива $ROWS$, трудоемкость которого (2.6):

$$f_{ROWS} = 2 + M \cdot (4 + \frac{N}{2} \cdot 15); \quad (2.6)$$

— заполнения массива $COLS$, трудоемкость которого (2.7):

$$f_{COLS} = 2 + K \cdot (4 + \frac{N}{2} \cdot 15); \tag{2.7}$$

— цикла заполнения для четных размеров, трудоемкость которого (2.8):

$$f_{cycle} = 2 + M \cdot (2 + K \cdot (2 + 7 + 4 + \frac{N}{2} \cdot 25)); \tag{2.8}$$

— цикла, для дополнения результирующего массива суммой последних нечетных строки и столбца, если общий размер нечетный, трудоемкость которого (2.9):

$$f_{last} = \begin{cases} 2, & \text{размер четный,} \\ 2 + M \cdot (2 + 9K), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Итого, результирующая трудоемкость алгоритма Винограда равна (2.10)

$$f_{final} = f_{init} + f_{ROWS} + f_{COLS} + f_{cycle} + f_{last} \approx 12MNK \tag{2.10}$$

Алгоритм Винограда (неоптимизированный) имеет большую трудоемкость, чем классический алгоритм.

2.3.3 Оптимизированный алгоритм Винограда

Трудоемкость оптимизированного алгоритма Винограда состоит из:

— создания и инициализации массивов A1 и B1 а также доп. переменной, хранящей N/2 == 1, трудоемкость которого (2.11):

$$f_{init} = M + K + 4; \tag{2.11}$$

— заполнения массива $ROWS$, трудоемкость которого (2.12):

$$f_{A1} = 2 + M \cdot (4 + \frac{N}{2} \cdot 15); \tag{2.12}$$

— заполнения массива $COLS$, трудоемкость которого (2.13):

$$f_{B1} = 2 + K \cdot (4 + \frac{N}{2} \cdot 15); \tag{2.13}$$

— цикла заполнения для четных размеров, трудоемкость которого (2.14):

$$f_{cycle} = 2 + M \cdot (2 + K \cdot (2 + 7 + 2 + \frac{N}{2} \cdot 17) + f_{last}); \tag{2.14}$$

где f_{last} — IV часть алгоритма, трудоемкость которой равна (2.15):

$$f_{last} = \begin{cases} 1, & \text{размер четный,} \\ 1 + 11, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.15}$$

Итого, результирующая трудоемкость оптимизированного алгоритма Винограда равна (2.16)

$$f_{final} = f_{init} + f_{A1} + f_{B1} + f_{cycle} + f_{last} \approx 8.5MNK \tag{2.16}$$

Оптимизированный алгоритм Винограда имеет меньшую трудоемкость, по сравнению с классическим алгоритмом.

ВЫВОД

В данном разделе были представлены схемы алгоритмов умножения матриц, а также приведены трудоемкости каждого из трех алгоритмов.

3 Технологическая часть

В данном разделе будут приведены требования к программному обеспечению, средства реализации, листинги кода.

3.1 Требования к программному обеспечению

Входные данные: две матрицы, где количество столбцов первой матрицы равна количетсву строк второй матрицы;

Выходные данные: матрица, где количество строк равно количеству строк первой матрицы, а количество столбцов равно количеству столбцов второй матрицы.

3.2 Средства реализации

В данной работе для реализации был выбран язык программирования C [1]. Выбор обсуловлен наличием функции вычисления процессорного с помощью функции *clock* [2].

3.3 Реализация алгоритмов

В листингах 3.1 - 3.3 представлены реализации алгоритмов нахождения расстояния Левенштейна и Дамерау–Левенштейна.

Листинг 3.1 – Классический алгоритм

```
matrix_t *std_matrix_mult(const matrix_t * const mtr1, const
    matrix_t * const mtr2) {
    if (mtr1 == NULL || mtr2 == NULL) return NULL;
    if (mtr1->cols != mtr2->rows) return NULL;

    matrix_t *res = init_matrix_by_size(mtr1->rows, mtr2->cols);
    if (!res) return NULL;

    for (size_type i = 0; i < mtr1->rows; ++i) {
        for (size_type j = 0; j < mtr2->cols; ++j) {
            value_type sum = 0;
            for (size_type k = 0; k < mtr1->cols; ++k) {
                sum += mtr1->data[i][k] * mtr2->data[k][j];
            }
            res->data[i][j] = sum;
        }
    }
    return res;
}
```

Листинг 3.2 – Алгоритм Винограда

```
matrix_t *winograd_matrix_mult(const matrix_t * const mtr1, const
    matrix_t * const mtr2) {
    if (mtr1 == NULL || mtr2 == NULL) return NULL;
    if (mtr1->cols != mtr2->rows) return NULL;

    size_type rows1 = mtr1->rows;
    size_type cols1 = mtr1->cols;
    size_type cols2 = mtr2->cols;

    matrix_t *res = init_matrix_by_size(rows1, cols2);
    if (!res) return NULL;

    value_type *row_factor = (value_type *)malloc(rows1 *
        sizeof(value_type));
    if (!row_factor) goto end;
    for (size_type i = 0; i < rows1; ++i) {
        row_factor[i] = 0;
        for (size_type j = 0; j < cols1 / 2; ++j) {
```

```
            row_factor[i] += mtr1->data[i][2 * j] * mtr1->data[i][2 * j + 1];
        }
    }

    value_type *col_factor = (value_type *)malloc(cols2 * sizeof(value_type));
    if (!col_factor) goto free_row_factor;
    for (size_type j = 0; j < cols2; ++j) {
        col_factor[j] = 0;
        for (size_type i = 0; i < cols1 / 2; ++i) {
            col_factor[j] += mtr2->data[2 * i][j] * mtr2->data[2 * i + 1][j];
        }
    }

    for (size_type i = 0; i < rows1; ++i) {
        for (size_type j = 0; j < cols2; ++j) {
            res->data[i][j] = -row_factor[i] - col_factor[j];
            for (size_type k = 0; k < cols1 / 2; ++k) {
                res->data[i][j] += (mtr1->data[i][2 * k    ] + mtr2->data[2 * k + 1][j]) *
                                   (mtr1->data[i][2 * k + 1] + mtr2->data[2 * k    ][j]);
            }
        }
    }

    if (cols1 % 2 == 1) {
        for (size_type i = 0; i < rows1; ++i) {
            for (size_type j = 0; j < cols2; ++j) {
                res->data[i][j] += mtr1->data[i][cols1 - 1] * mtr2->data[cols1 - 1][j];
            }
        }
    }

    free(col_factor);
    free(row_factor);

    return res;
```

```

    free_row_factor:
    free(row_factor);
    end:
    free_matrix(res);
    return res;
}
```

Листинг 3.3 – Оптимизированный алгоритм Винограда

```
matrix_t *optimized_winograd_matrix_mult(const matrix_t * const
   mtr1, const matrix_t * const mtr2) {
    if (mtr1 == NULL || mtr2 == NULL) return NULL;
    if (mtr1->cols != mtr2->rows) return NULL;

    size_type rows1 = mtr1->rows;
    size_type cols1 = mtr1->cols;
    size_type cols2 = mtr2->cols;

    matrix_t *res = init_matrix_by_size(rows1, cols2);
    if (!res) return NULL;

    value_type *row_factor = (value_type *)malloc(rows1 *
       sizeof(value_type));
    if (!row_factor) goto end;
    for (size_type i = 0; i < rows1; ++i) {
        row_factor[i] = 0;
        for (size_type j = 0; j < cols1 / 2; ++j) {
            row_factor[i] -= mtr1->data[i][2 * j] * mtr1->data[i][2
               * j + 1];
        }
    }

    value_type *col_factor = (value_type *)malloc(cols2 *
       sizeof(value_type));
    if (!col_factor) goto free_row_factor;
    for (size_type j = 0; j < cols2; ++j) {
        col_factor[j] = 0;
        for (size_type i = 0; i < cols1 / 2; ++i) {
            col_factor[j] -= mtr2->data[2 * i][j] * mtr2->data[2 * i
               + 1][j];
        }
```

```
    }

    bool flag = cols1 % 2 == 1;
    for (size_type i = 0; i < rows1; ++i) {
        for (size_type j = 0; j < cols2; ++j) {
            res->data[i][j] = row_factor[i] + col_factor[j];
            for (size_type k = 1; k < cols1; k += 2) {
                res->data[i][j] += (mtr1->data[i][k - 1] +
                   mtr2->data[k    ][j]) *
                                   (mtr1->data[i][k    ] +
                                     mtr2->data[k - 1][j]);
            }
            if (flag) {
                res->data[i][j] += mtr1->data[i][cols1 - 1] *
                   mtr2->data[cols1 - 1][j];
            }
        }
    }

    free(col_factor);
    free(row_factor);

    return res;

    free_row_factor:
    free(row_factor);
    end:
    free_matrix(res);
    return res;
}
```

ВЫВОД

В этом разделе рассмотрены требования к программному обеспечению, описаны используемые инструменты реализации, а также приведены фрагменты кода для умножения матриц с использованием классического алгоритма, алгоритма Винограда и его оптимизированной версии.

4 Исследовательская часть

4.1 Технические характеристики

Характеристики используемого оборудования:

- Операционная система — Windows 11 Home [3]
- Память — 16 Гб.
- Процессор — 12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-12700H @ 2.30 ГГц [4]
- Микроконтроллер — STM32F303 [5]

4.2 Описание используемых типов данных

Используемые типы данных:
размер матрицы — целое число типа $size\_t$;
матрица — $double**$.

4.3 Время выполнения алгоритмов

Результаты замеров времени работы трех алгоритмов умножения матриц приведены в таблице 4.1. Время работы замерялось на микроконтроллере $STM32F303$ с тактовой частотой до 72 Мгц. Замеры времени проводились на матрицах одинаковой длины и усреднялись для каждого набора одинаковых экспериментов. Каждое значение получено путем взятия среднего из 100 измерений. Зависимости времени умножения от размера матрицы для трех алгоритмов представлены на рисунке 4.1.

Таблица 4.1 – Время работы алгоритмов (в мс)

Размер матрицы	Классический	Виноград	Виноград (оптимизированный)
0	0.00	0.23	0.00
2	0.24	0.52	0.18
4	1.03	0.74	1.48
6	2.07	3.14	2.51
8	4.56	5.67	4.72
10	7.82	9.13	8.24
12	14.07	14.62	13.57
14	22.49	23.21	21.08
16	30.13	34.95	28.37
18	50.48	48.33	39.58
20	60.72	65.83	54.97
22	85.34	82.19	74.23
24	110.27	107.89	98.64
26	140.12	135.48	125.32
28	174.68	170.57	154.98
30	215.32	205.86	195.47
32	260.59	245.32	230.14
34	320.13	290.68	275.79
36	375.72	350.21	330.48
38	440.65	405.34	380.73
40	510.48	475.27	450.32
42	590.23	540.19	510.87
44	680.79	620.35	600.24
46	790.41	710.74	690.68
48	910.52	810.59	780.13
50	1040.19	930.48	870.77

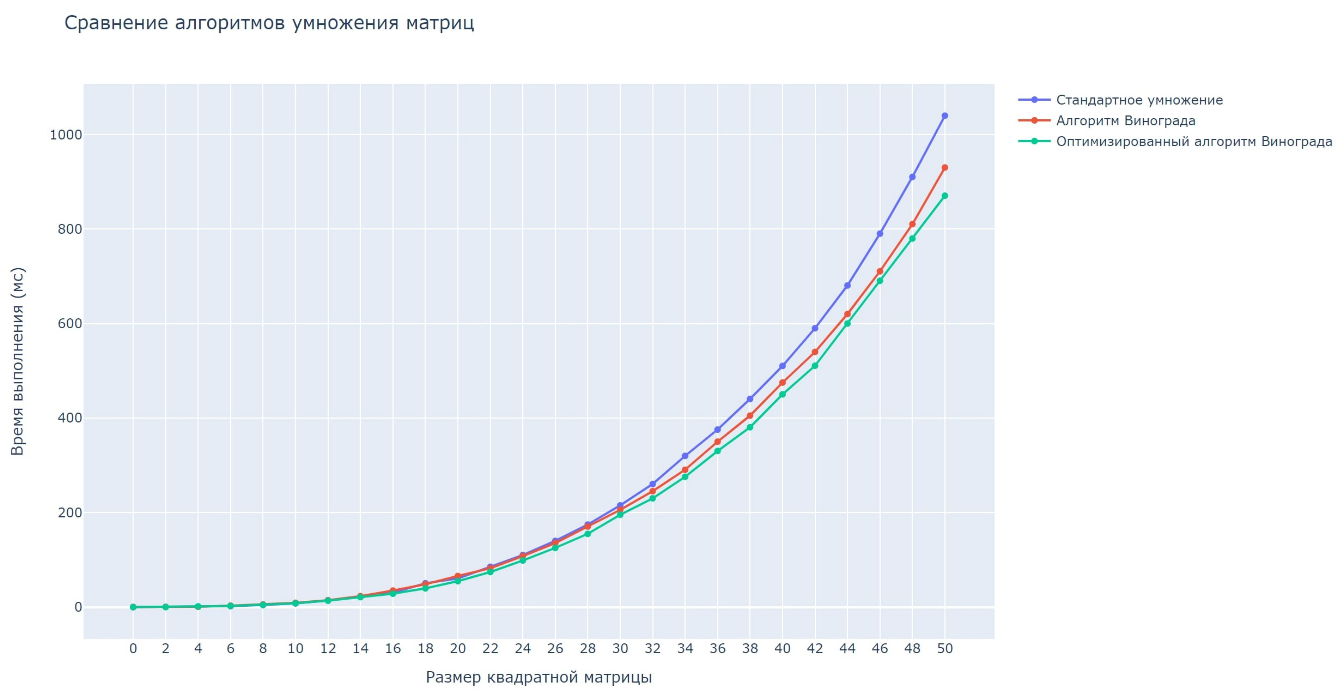


Рисунок 4.1 – Сравнение алгоритмов по времени

4.4 Вывод

В ходе исследования установлено, что для больших размеров матриц (более 10) алгоритм Винограда оказывается более чем в 1.2 раза быстрее классического алгоритма, а оптимизированная версия алгоритма Винограда превосходит стандартный алгоритм почти в 1.3 раза. Это позволяет заключить, что для таких данных наиболее целесообразно применять оптимизированный алгоритм Винограда.

Также было выявлено, что алгоритм Винограда работает эффективнее на матрицах с четными размерами, поскольку для нечетных матриц требуются дополнительные вычисления для обработки крайних строк и столбцов. Таким образом, алгоритм Винограда рекомендуется использовать при работе с матрицами четных размеров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование показало, что классический алгоритм умножения матриц уступает по времени алгоритму Винограда примерно в 1.2 раза. Это связано с тем, что в алгоритме Винограда часть вычислений производится заранее, а количество сложных операций, таких как умножение, сокращается, что делает его более предпочтительным. Однако наилучшие результаты по скорости демонстрирует оптимизированный алгоритм Винограда, который на матрицах размером более 10 работает примерно в 1.3 раза быстрее, чем классический алгоритм. Это достигается за счет использования операций плюс-равно вместо равно и плюс, замены умножений сдвигами, а также предварительного вычисления некоторых элементов. Таким образом, для достижения максимальной производительности предпочтительнее использовать оптимизированный алгоритм Винограда.

В ходе выполнения данной лабораторной работы были решены следующие задачи:

— реализованны указанные алгоритмы;

— выполна оценка трудоемкости разрабатываемых алгоритмов;

— проведено сравнение требуемого времени выполнения алгоритмов;

— описаны и обоснованы полученные результаты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Документация по языку C [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://learn.microsoft.com/ru-ru/cpp/c-language/ (дата обращения: 01.09.2024).
2. clock(3) - Linux manual page [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://man7.org/linux/man-pages/man3/clock.3.html (дата обращения: 01.09.2024).
3. Windows technical documentation for developers and IT pros [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://learn.microsoft.com/en-us/windows/ (дата обращения: 06.10.2024).
4. Intel® Core™ i7-12700H Processor [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://ark.intel.com/content/www/us/en/ark/products/132228/intel-core-i7-12700h-processor-24m-cache-up-to-4-70-ghz.html (дата обращения: 07.10.2024).
5. Микроконтроллер STM32F303 Discovery [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://www.st.com/en/microcontrollers-microprocessors/stm32f303.html (дата обращения: 04.10.2024).