Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №2
по курсу "Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Нисуев Н. Ф.

Группа ИУ7-62Б

Вариант 10

Преподаватель Власов П. А.

Москва — 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Содержание работы

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:

   а) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   б) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\hat{\mu}}(\vec{x}_n)$, $\overline{\hat{\mu}}(\vec{x}_n)$ для γ - доверительного интервала для математического ожидания MX;

   в) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\hat{\sigma}}(\vec{x}_n)$, $\overline{\hat{\sigma}}(\vec{x}_n)$ для γ - доверительного интервала для дисперсии DX.

2. Вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта.

3. Для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:

   а) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   б) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$, $z = \overline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Определения

Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть:

X — случайная величина, закон которой известен с точностью до неизвестного θ.

$\vec{X} = X_1, ..., X_n$ - случайная выборка из генеральной совокупности X.

Опр Интервальной оценкой параметра θ уровня $\gamma \in (0, 1)$ (γ - интервальной оценкой) называется пара статистик:

$$\underline{\theta}(\vec{X}) \text{ и } \overline{\theta}(\vec{X})$$

таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}),\ \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma.$$

$\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ называют нижней и верхней границами интервальной оценки соответственно.

Опр γ - доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня γ) для параметра θ называют реализацию интервальной оценки уровня γ для этого параметра, то есть интервал:

$$(\underline{\theta}(\vec{x}),\ \overline{\theta}(\vec{x})),$$

где $\vec{x}$ — выборка из генеральной совокупности X.

3 Формулы

Формулы для вычисления границ γ - доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Таблица 3.1 – Таблица границ доверительных интервалов

Параметры	Центральная статистика	Границы
μ – неизвестно, σ – известно. **Оценить** μ.	$\frac{\mu-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$	$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$ $\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$
μ – неизвестно, σ – неизвестно. **Оценить** μ.	$\frac{\mu-\overline{X}}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n} \sim St(n-1)$	$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{t_{1-\alpha}^{(n-1)}S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}$ $\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{t_{1-\alpha}^{(n-1)}S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}$
σ – неизвестно. **Оценить** σ^2.	$\frac{S(\vec{X}_n)}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$	$\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{S^2(\vec{X}_n)(n-1)}{h_{1-\alpha}^{(n-1)}}$ $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{S^2(\vec{X}_n)(n-1)}{h_{\alpha}^{(n-1)}}$

где:

n — объем выборки,

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ — выборочное среднее,

$S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ — исправленная выборочная дисперсия,

γ — уровень доверия,

$\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$,

u_α — квантиль уровня α распределения $N(0,1)$,

$t_\alpha^{(n-1)}$ — квантиль уровня α распределения $St(n-1)$,

$h_\alpha^{(n-1)}$ — квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$.

4 Текст программы

```
function lab2(X, gamma)
    n = length(X);

    [mu, s2] = calc_select_params(X);

    fprintf("Выборочное среднее = %.3f\n", mu);
    fprintf("Исправленная выборочная дисперсия = %.3f\n", s2);

    alpha = (1 - gamma) / 2;

    [lower_m, upper_m] = calc_m_whithout_sigma_confint(X, alpha);

    fprintf("\ngamma-доверительный интервал для mu: (%.4f, %.4f)\n",
        lower_m, upper_m);

    [lower_sigma, upper_sigma] = calc_sigma_confint(X, alpha);

    fprintf("\ngamma-доверительный интервал для sigma: (%.4f, %.4f)\n",
        lower_sigma, upper_sigma);

    mu_arr = zeros(n, 1);
    mu_line = zeros(n, 1);
    mu_lower = zeros(n, 1);
    mu_upper = zeros(n, 1);

    s2_arr = zeros(n, 1);
    s2_line = zeros(n, 1);
    sigma_lower = zeros(n, 1);
    sigma_upper = zeros(n, 1);

    mu_line(1 : n) = mu;
    s2_line(1 : n) = s2;
    for i = 1 : n
        X_ = X(1 : i);

        [mu_arr(i), s2_arr(i)] = calc_select_params(X_);
        [mu_lower(i), mu_upper(i)] = calc_m_whithout_sigma_confint(X_,
            alpha);
```

```
            [sigma_lower(i), sigma_upper(i)] = calc_sigma_confint(X_,
                alpha);
        end

        mu_plot(2, n, mu_line, mu_arr, mu_lower, mu_upper);
        figure();
        sigma_plot(2, n, s2_line, s2_arr, sigma_lower, sigma_upper);
end

function [mu, s2] = calc_select_params(X)
        n = length(X);

        mu = 0;
        s2 = 0;

        if (n > 1)
            mu = sum(X) / n;
            s2 = sum((X - mu) .^2) / (n - 1);
        end
end

% m - неизвестно,
% sigma - неизвестно,
% Оценить m
function [l,u] = calc_m_whithout_sigma_confint(X, alpha)
        n = length(X);
        [mu, s2] = calc_select_params(X);
        q_st = tinv((1 - alpha), (n - 1));

        l = mu - (q_st * sqrt(s2) / sqrt(n));
        u = mu + (q_st * sqrt(s2) / sqrt(n));
end

% sigma - неизвестно
% Оценить sigma^2
function [l,u] = calc_sigma_confint(X, alpha)
        n = length(X);
        [~, s2] = calc_select_params(X);

        q_xi2_r = chi2inv((1 - alpha), (n - 1));
        q_xi2_l = chi2inv(alpha, (n - 1));
```

```

    l = s2 * (n - 1) / q_xi2_r;
    u = s2 * (n - 1) / q_xi2_l;
end

function mu_plot(startn, endn, mu_line, mu_arr, mu_lower, mu_upper)
    plot((startn : endn), mu_line(startn : endn), 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((startn : endn), mu_arr(startn : endn), 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((startn : endn), mu_upper(startn : endn), 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((startn : endn), mu_lower(startn : endn), 'LineWidth', 1);
    hold on;

    grid on;
    xlabel("n");
    ylabel('\mu');

    legend('\mu\^(x_N)', '\mu\^(x_n)', '\mu^{-}(x_n)', '\mu_{-}(x_n)');
end

function sigma_plot(startn, endn, s2_line, s2_arr, sigma_lower, sigma_upper)
    plot((startn : endn), s2_line(startn : endn), 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((startn : endn), s2_arr(startn : endn), 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((startn : endn), sigma_upper(startn : endn), 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((startn : endn), sigma_lower(startn : endn), 'LineWidth', 1);
    hold on;

    grid on;
    xlabel("n");
    ylabel('\sigma');

    legend('S^2(x_N)', 'S^2(x_n)', '\sigma^{2 -}(x_n)', '\sigma^2_{-}(x_n)');
end
```

5 Результаты работы программы

Для Варианта №10

Точечные оценки:

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = 1.836$$

$$S^2(\vec{x}) = 1.153$$

γ-доверительные интервалы при γ=0.9:

$$(\underline{\mu}(\vec{x}_n), \overline{\mu}(\vec{x}_n)) = (1.6739,\ 1.9989)$$

$$(\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)) = (0.9430,\ 1.4467)$$

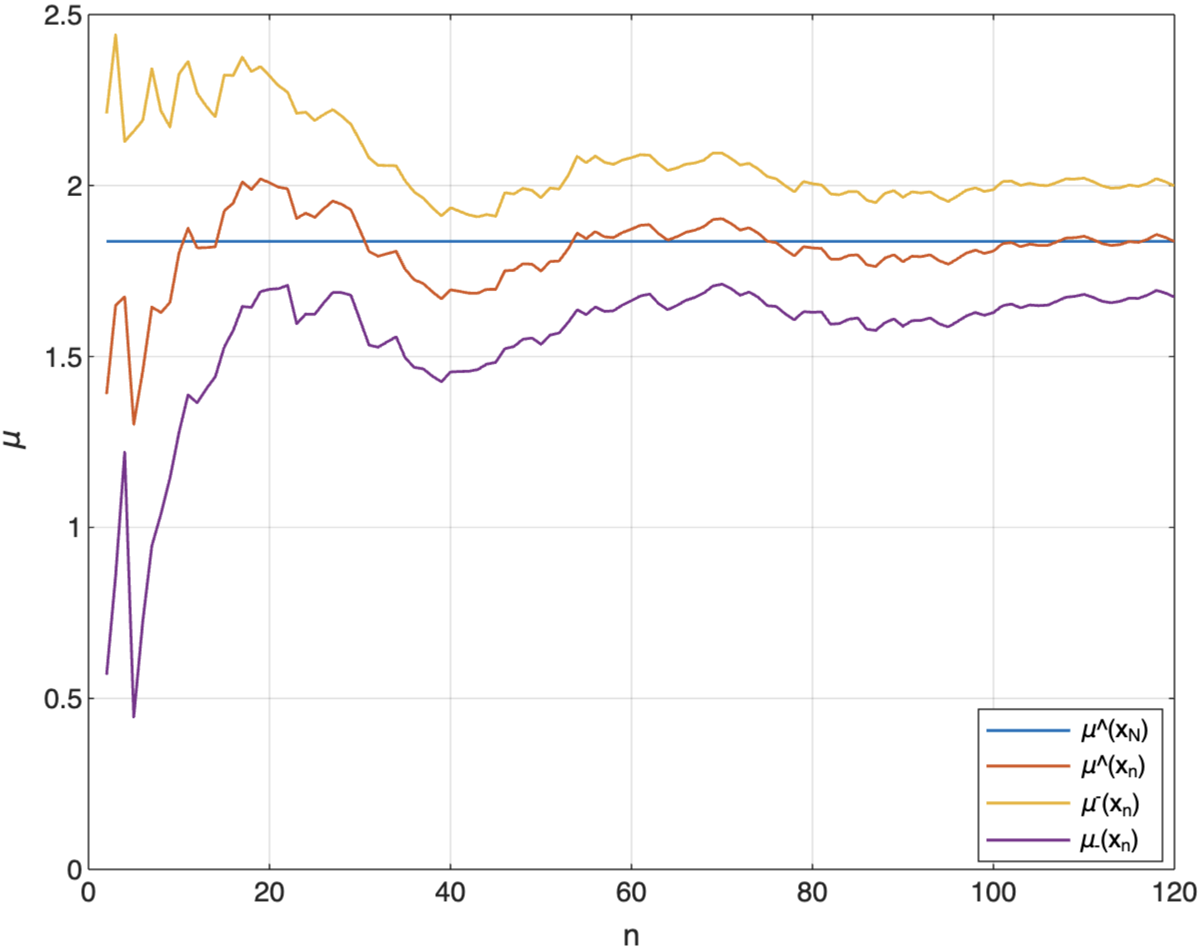

Рисунок 5.1 – График зависимости оценки математического ожидания и границ γ-доверительного интервала от объема выборки n

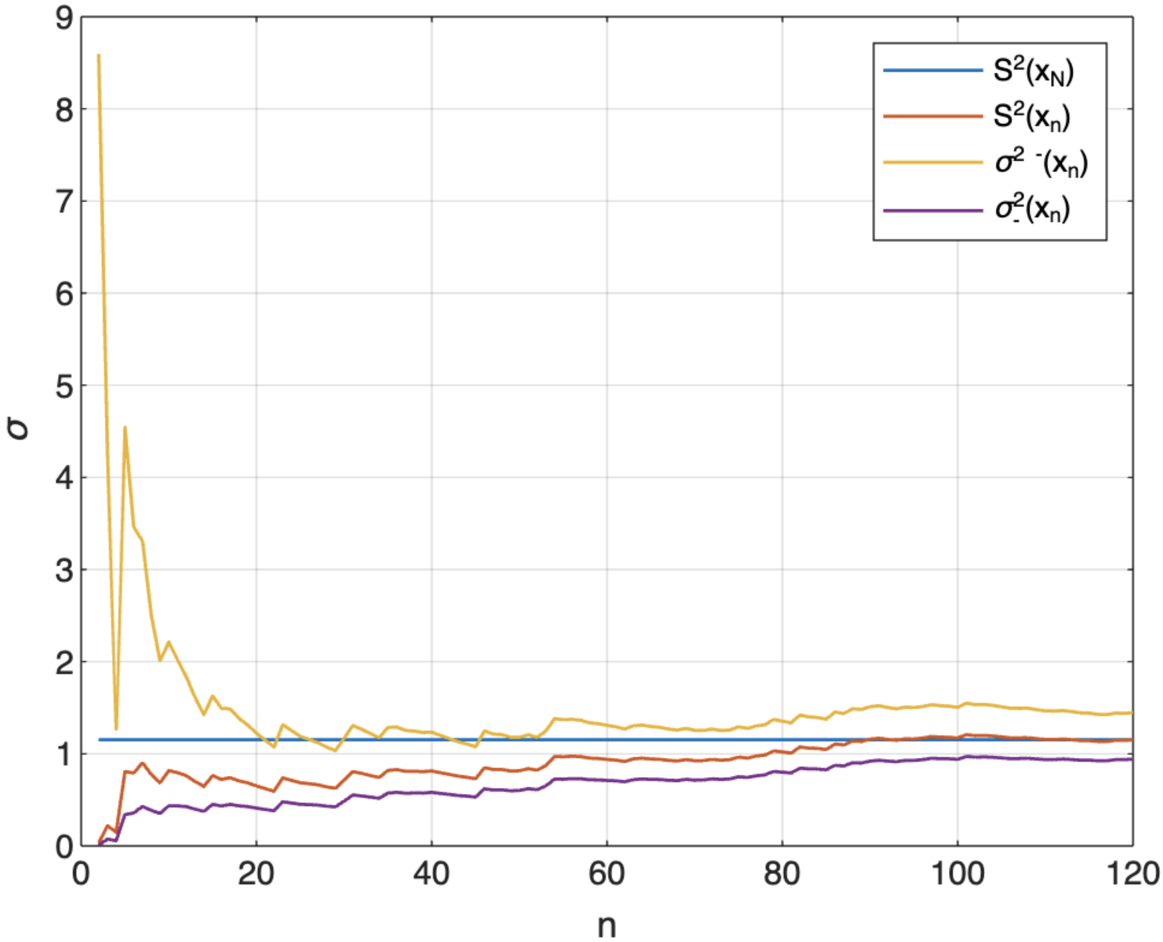

Рисунок 5.2 – График зависимости оценки дисперсии и границ γ-доверительного интервала от объема выборки n