Уравнения с разделяющимися переменными

(15.02.2021)

1. Начнём занятие с разбора задачи повышенной сложности.

Задача. *Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется однородной порядка $\alpha \in \mathbb{R}$, если для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$ верно равенство $f(tx) = t^\alpha f(x)$.*

a) Пусть $F(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая однородная функция порядка α. Докажите тождество $xF'_x(x,y) + yF'_y(x,y) = \alpha F(x,y)$.

b) Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — непрерывно дифференцируемые однородные функции одного и того же порядка. Докажите, что $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$ — интегрирующий множитель уравнения $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$.

Решение. a) Продифференцировав равенство $F(tx,ty) = t^\alpha F(x,y)$ по t, имеем

$$xF'_x(tx,ty) + yF'_y(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} F(x,y).$$

Подставляя $t = 1$, получаем $xF'_x(x,y) + yF'_y(x,y) = \alpha F(x,y)$.

b) Докажем равенство $\big(\mu(x,y)P(x,y)\big)'_y = \big(\mu(x,y)Q(x,y)\big)'_x$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P(x,y)}{xP(x,y)+yQ(x,y)}\right) = \frac{P'_y(xP+yQ) - P(xP'_y + yQ'_y + Q)}{(xP+yQ)^2} = \\ = \frac{y(P'_yQ - PQ'_y) - PQ}{(xP+yQ)^2}.$$

Аналогичным образом находим, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q(x,y)}{xP(x,y)+yQ(x,y)}\right) = \frac{x(PQ'_x - P'_xQ) - PQ}{(xP+yQ)^2}.$$

Поэтому, достаточно доказать, что $y(P'_yQ - PQ'_y) = x(PQ'_x - P'_xQ)$. Пусть α — порядок однородности функций P и Q. Имеем

$$y(P'_yQ - PQ'_y) - x(PQ'_x - P'_xQ) = Q(yP'_y + xP'_x) - P(xQ'_x + yQ'_y) = \\ = \alpha PQ - \alpha PQ = 0.$$

□

2. Пусть $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ — область. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y' = f(x,y), \quad f \in C(D). \tag{1}$$

Определение 1. *Пусть $F\colon D \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на области D, и $(x_0,y_0) \in D$. Будем говорить, что уравнение $F(x,y) = F(x_0,y_0)$ локально однозначно разрешимо, если существуют окрестности U и V точек x_0 и y_0, соответственно, и функция $y : U \to V$, такие, что $U \times V \subset D$ и*

$$\big(F(x,y) = 0 \text{ в } U\times V\big) \Leftrightarrow \big(y = y(x), x \in U\big).$$

Определение 2. *Функцию $u(x,y) \in C^1(D)$ называют общим интегралом уравнения (1) в области D, если*

1. *для каждой точки $(x_0,y_0) \in D$ уравнение $u(x,y) = u(x_0,y_0)$ локально однозначно разрешимо;*
2. *произвольная функция $y\colon U \to V$, удовлетворяющая равенству $u\big(x,y(x)\big) \equiv C$, является решением уравнения (1) (U и V — интервалы, такие, что $U \times V \subset D$).*

Найдём общий интеграл уравнения вида

$$y' = f(x)g(y), \quad f \in C(a,b), \quad g \in C(\alpha,\beta), \tag{2}$$

которое называется уравнением с разделяющимися переменными. Из теоремы Пикара – Линделёфа следует, что для произвольной точки $(x_0, y_0) \in (a,b) \times (\alpha,\beta)$ задача Коши для уравнения (2) однозначно разрешима. Пусть $y_1 < y_2 < \ldots < y_n \in (\alpha,\beta)$ — все корни уравнения $g(y) = 0$. Очевидно, что постоянная функция $y(x) \equiv y_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, является решением уравнения (2). Выберем два подряд идущих корня y_i, y_{i+1} и определим прямоугольник $H \overset{\text{def}}{=} (a,b) \times (y_i, y_{i+1})$. Для произвольной точки $(x_0, y_0) \in H$ рассмотрим такое решение $y = y(x)$ уравнения (2), что $y(x_0) = y_0$. Так как $g\big(y(x)\big) \neq 0$, то

$$\frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} = f(x), \quad \text{а значит,} \quad \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{g\big(y(s)\big)}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Вводя новую переменную $z = y(s)$, получим

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}z}{g(z)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пусть $G(y) = \int g(y)^{-1}\mathrm{d}y$ и $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Тогда $G(y) - F(x) = G(y_0) - F(x_0)$. Из теоремы о неявно заданной функции следует, что функция $u(x,y) \overset{\text{def}}{=} G(y) - F(x)$ — общий интеграл уравнения (2) в прямоугольнике H.

Перейдём к уравнениям в нормальной дифференциальной форме.

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad (x,y) \in D. \tag{3}$$

Напомним определение общего интеграла для уравнения (3).

Определение 4. *Пусть $F\colon D \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на области D, и $(x_0, y_0) \in D$. Будем говорить, что уравнение $F(x,y) = F(x_0,y_0)$ локально однозначно разрешимо, если существуют окрестность $U \subset D$ точки (x_0,y_0) и кривая $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)\colon I \to U$ такие, что*

1. *$F\big(x(t), y(t)\big) = F(x_0, y_0)$, при всех $t \in I$;*
2. *если $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U$ и $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(x_0, y_0)$, то найдётся такое $\tilde{t} \in I$, что $\tilde{x} = x(\tilde{t})$ и $\tilde{y} = y(\tilde{t})$.*

Определение 5. *Функцию $u(x,y) \in C^1(D)$ называют общим интегралом уравнения (3) в области D, если*

1. *для каждой точки $(x_0,y_0) \in D$ уравнение $u(x,y) = u(x_0,y_0)$ локально однозначно разрешимо;*
2. *если $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)\colon I \to D$ решение уравнения $u\big(x(t), y(t)\big) \equiv C$, то γ — параметризация решения уравнения (3).*

Из теоремы о неявно заданной функции следует, что если функция $u(x,y)\colon D \to \mathbb{R}$ такова, что $P = u'_x$, $Q = u'_y$ и $|u'_x(x,y)| + |u'_y(x,y)| \neq 0$ в каждой точке $(x,y) \in D$, то $u(x,y)$ — общий интеграл уравнения (3).

Уравнение в нормальной дифференциальной форме вида

$$P_1(x)Q_1(x)\,\mathrm{d}x + P_2(x)Q_2(y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{4}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения (4) на $Q_1(y)P_2(x)$, перейдём к уравнению с разделёнными переменными

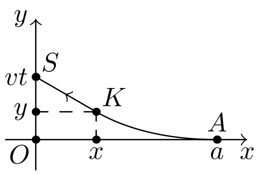
$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,\mathrm{d}y = 0, \tag{5}$$

которое является уравнением в полных дифференциалах. Общий интеграл уравнения (5) найдём по формуле

$$u(x,y) = \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,\mathrm{d}y.$$

Переход от уравнения (4) к уравнению (5) корректен, если $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$. С другой стороны, не сложно видеть, что если $P_2(x^*) = 0$ (или $Q_1(y^*) = 0$), то кривая $x \equiv x^*$ (или $y \equiv y^*$) является решением уравнения (4).

Пример. *Судно выходит из точки O с постоянной скоростью v плывёт по направлению оси Oy. Одновременно (в момент времени $t = 0$) из точки $A(a,0)$ выходит вдогонку на пересечение катер, плывущий со скоростью $2v$. Найдите уравнене кривой погони, описанной катером, и минимальное время, необходимое для достижения суда катером.*



Решение. Пусть $K\big(x(t), y(t)\big)$ — координаты катера в момент времени t, а $\ell(t)$ — длина дуги кривой погони от A до $K(t)$ (см. рис.). Тогда $\ell(t) = 2vt$. Так как в момент времени t судно находится в точке $S(0, vt)$, то тангенс угла наклона прямой $K(t)S(t)$ равен

$$-\frac{\big(vt - y(t)\big)}{x(t)} = \frac{y(t) - vt}{x(t)} = \frac{y(t) - \ell(t)/2}{x(t)}.$$

Так как $x(t)$ — строго убывает, то существует обратная функция $t = t(x)$. Поэтому, не меняя обозначения, будем считать, что y и ℓ зависят от x. Так как прямая $K(t)S(t)$ является касательной к кривой погони, а тангенс угла наклона касательной равен y', то верно равенство

$$y' = \frac{y(x) - \ell(x)/2}{x}, \quad \text{а значит,} \quad xy' - y = -\ell(x)/2. \tag{$*$}$$

Так как $\ell' = -\sqrt{1 + (y')^2}$, то продифференцировав обе части второго равенства из ($*$), получим

$$y' + xy'' - y' = xy'' = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{2}.$$

Пусть $u = y'$, тогда $xu' = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + u^2}$. Следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \text{а значит,} \quad \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \frac{1}{2}\ln x + C.$$

Так как $u|_{t=0} = 0$ и $x|_{t=0} = a$, то $C = -\dfrac{1}{2}\ln a$. Поэтому,

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{a}, \quad \text{т.е.} \quad y' + \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{x}{a}}. \tag{$**$}$$

Так как $y' + \sqrt{1 + (y')^2} = \dfrac{-1}{y' - \sqrt{1 + (y')^2}}$, то из ($**$) следует, что

$$y' - \sqrt{1 + (y')^2} = -\sqrt{\frac{a}{x}}, \quad \text{а значит,} \quad y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right).$$

Поэтому, $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} - \sqrt{ax} + C$. Так как $x|_{t=0} = a$ и $y|_{t=0} = 0$, то $= \dfrac{2a}{3}$. Таким образом, кривая погони совпадает с графиком функции

$$y(x) = \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} - \sqrt{ax} + \frac{2a}{3}.$$

При $x = 0$ имеем $y = \dfrac{2a}{3}$, поэтому катер догонит корабль в момент времени $t = \dfrac{y}{v} = \dfrac{2a}{3v}$.

2. Решите следующие номера 675, 679, 683, 688, 691, 698 при этом решение задачи 688 сфотографируйте и вышлите для проверки до конца занятия.

3. Домашнее задание: 676, 680, 684, 689, 692.

4. Задача повышенной сложности (срок сдачи — следующее занятие):
Пусть $y(x)$ — определённое на отрезке $[a, b]$ решение уравнения

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены второй степени, причём $Q\big(x, y(x)\big) \neq 0$ при $x \in [a, b]$.

Докажите, что прямая, не касающаяся ни в одной точке графика функции $y(x)$, не может пересекать эту кривую более чем в трёх точках.