4. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности

1. Найдите D_R, E_R, R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ для следующих бинарных отношений:
   (а) $R = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{N}$ и $x|y\}$;
   (б) $R = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{N}$ и $y|x\}$;
   (в) $R = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{R}$ и $x + y \leqslant 0\}$;
   (г) $R = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{R}$ и $2x \geqslant 3y\}$.

2. Пусть R, R_1, R_2 – бинарные отношения, определенные на паре множеств A и B; S, T – бинарные отношения, определенные на паре множеств B и C. Докажите, что:
   (а) $(R^{-1})^{-1} = R$;
   (б) $\overline{R^{-1}} = (\overline{R})^{-1}$;
   (в) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;
   (г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;
   (д) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$;
   (е) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

3. Выясните, для каких бинарных отношений R, определенных на паре множеств A и B, выполняется соотношение $R^{-1} = \overline{R}$.

4. Пусть $R \subseteq A^2$ и $E = \{(a, a)\colon a \in A\}$ – диагональ множества A. Докажите, что:
   (а) R рефлексивно тогда и только тогда, когда $E \subseteq R$;
   (б) R симметрично тогда и только тогда, когда $R^{-1} = R$;
   (в) R транзитивно тогда и только тогда, когда $R \circ R \subseteq R$;
   (г) R антисимметрично тогда и только тогда, когда $R \cap R^{-1} \subseteq E$.

5. Докажите, что симметричное и антисимметричное бинарное отношение R на множестве A является транзитивным на этом множестве.

6. Установите, является ли каждое из перечисленных ниже отношений на множестве A отношением эквивалентности. Для каждого отношения эквивалентности найдите классы эквивалентности.
   (а) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon a + b = 0\}$;
   (б) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon a + b$ четно$\}$;
   (в) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon a^2 = b^2\}$;
   (г) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon a^3 = b^3\}$;
   (д) $A = 2^{\{a,b,c,d\}}$ и $R = \{(X, Y)\colon |X| = |Y|\}$;
   (е) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon \exists k \in \mathbb{Z}\ (a - b = 5k)\}$.

7. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x, y, z\}$ и $f\colon A \to B$ – сюръективная функция вида $f = \{(1, x), (2, z), (3, x), (4, y), (5, z), (6, y), (7, x)\}$. Определим бинарное отношение R на множестве A следующим образом: aRb тогда и только тогда, когда $f(a) = f(b)$. Докажите, что R – отношение эквивалентности и найдите классы эквивалентности.

4. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности

1. Найдите D_R, E_R, R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ для следующих бинарных отношений:
   (а) $R = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{N}$ и $x|y\}$;
   (б) $R = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{N}$ и $y|x\}$;
   (в) $R = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{R}$ и $x + y \leqslant 0\}$;
   (г) $R = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{R}$ и $2x \geqslant 3y\}$.

2. Пусть R, R_1, R_2 – бинарные отношения, определенные на паре множеств A и B; S, T – бинарные отношения, определенные на паре множеств B и C. Докажите, что:
   (а) $(R^{-1})^{-1} = R$;
   (б) $\overline{R^{-1}} = (\overline{R})^{-1}$;
   (в) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;
   (г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;
   (д) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$;
   (е) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

3. Выясните, для каких бинарных отношений R, определенных на паре множеств A и B, выполняется соотношение $R^{-1} = \overline{R}$.

4. Пусть $R \subseteq A^2$ и $E = \{(a, a)\colon a \in A\}$ – диагональ множества A. Докажите, что:
   (а) R рефлексивно тогда и только тогда, когда $E \subseteq R$;
   (б) R симметрично тогда и только тогда, когда $R^{-1} = R$;
   (в) R транзитивно тогда и только тогда, когда $R \circ R \subseteq R$;
   (г) R антисимметрично тогда и только тогда, когда $R \cap R^{-1} \subseteq E$.

5. Докажите, что симметричное и антисимметричное бинарное отношение R на множестве A является транзитивным на этом множестве.

6. Установите, является ли каждое из перечисленных ниже отношений на множестве A отношением эквивалентности. Для каждого отношения эквивалентности найдите классы эквивалентности.
   (а) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon a + b = 0\}$;
   (б) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon a + b$ четно$\}$;
   (в) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon a^2 = b^2\}$;
   (г) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon a^3 = b^3\}$;
   (д) $A = 2^{\{a,b,c,d\}}$ и $R = \{(X, Y)\colon |X| = |Y|\}$;
   (е) $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(a, b)\colon \exists k \in \mathbb{Z}\ (a - b = 5k)\}$.

7. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x, y, z\}$ и $f\colon A \to B$ – сюръективная функция вида $f = \{(1, x), (2, z), (3, x), (4, y), (5, z), (6, y), (7, x)\}$. Определим бинарное отношение R на множестве A следующим образом: aRb тогда и только тогда, когда $f(a) = f(b)$. Докажите, что R – отношение эквивалентности и найдите классы эквивалентности.