

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. А. Леваков

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по математическим специальностям*

МИНСК
БГУ
2014

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

Л34

Р е ц е н з е н т ы :

кафедра высшей математики Белорусского государственного
технологического университета (заведующий кафедрой
кандидат физико-математических наук, доцент *О. Н. Пыжкова*);
доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Цегельник*

Леваков, А. А.

Л34 Математический анализ : учеб. пособие / А. А. Леваков. – Минск : БГУ,
2014. – 383 с.
ISBN 978-985-566-034-8.

Изложены разделы математического анализа, традиционно изучаемые на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. Все приведенные утверждения снабжены полными доказательствами.

Предназначено для студентов, обучающихся в учреждениях высшего образования по математическим специальностям.

**УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73**

ISBN 978-985-566-034-8

© Леваков А. А., 2014
© БГУ, 2014

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

\mathbb{N}	—	множество натуральных чисел
\mathbb{Q}	—	множество рациональных чисел
\mathbb{R}	—	множество вещественных (действительных) чисел
$ a, b $	—	промежуток с концами a и b
$[a, b]$	—	отрезок с концами a и b
(a, b)	—	интервал с концами a и b
\forall	—	для любого
\exists	—	существует
$:=$	—	равно по определению
\triangleleft	—	конец доказательства
$A \subset B$	—	множество A содержится в B
$x \in A$	—	элемент x принадлежит множеству A
$A \cup B$	—	объединение множеств A и B
$A \cap B$	—	пересечение множеств A и B
$A \setminus B$	—	разность множеств A и B
$A \times B$	—	произведение множеств A и B
2И	—	двойной интеграл
НИ-1	—	несобственный интеграл первого типа
НИ-2	—	несобственный интеграл второго типа
КРИ-1	—	криволинейный интеграл первого типа
КРИ-2	—	криволинейный интеграл второго типа
ПОВИ-1	—	поверхностный интеграл первого типа
ПОВИ-2	—	поверхностный интеграл второго типа
НИЗОП-1	—	несобственный интеграл первого типа, зависящий от параметра
НИЗОП-2	—	несобственный интеграл второго типа, зависящий от параметра
ФР	—	функциональный ряд
ФП	—	функциональная последовательность
дл.	—	длина
пл.	—	площадь
об.	—	объем
ф2п	—	функция двух переменных
\top	—	знак транспонирования

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическое образование играет ключевую роль в подготовке высококвалифицированных современных специалистов, а математический анализ составляет его базу. Математический анализ – раздел математики, изучающий функциональные зависимости с помощью методов дифференциального и интегрального исчисления.

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций автором по фундаментальной математике на факультете прикладной математики и информатики БГУ, а также лекций по математическому анализу профессора Ю. С. Богданова и предназначено в первую очередь для студентов факультета прикладной математики и информатики БГУ, но будет полезно и студентам других факультетов и университетов с углубленным изучением математики.

Курс математического анализа тесно связан с другими дисциплинами по фундаментальной математике – геометрией и алгеброй, дифференциальными уравнениями, которые читаются студентам факультета прикладной математики и информатики параллельно, и сопровождается практическими и лабораторными занятиями, что учтено при написании предлагаемого издания. От студентов, приступающих к изучению математического анализа с помощью настоящего учебного пособия, требуется знание математики лишь в объеме средней школы. Автор стремился соединить доступность, строгость и полноту изложения материала с краткостью, свойственной реальным лекциям.

ГЛАВА 1

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.1. Числа

Множество натуральных чисел

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

достаточно для обеспечения потребностей счета. Множество неотрицательных десятичных дробей дает возможность измерять длины и многие другие величины со сколь угодно малой погрешностью. Каждая конечная десятичная дробь имеет два представления в виде периодической десятичной дроби. Например,

$$0,27 = 0,2700\dots = 0,27(0),$$

$$0,27 = 0,2699\dots = 0,26(9).$$

За множество неотрицательных рациональных чисел \mathbb{Q}_0 принимают множество неотрицательных периодических десятичных дробей. В дальнейшем, когда мы будем говорить о конечной десятичной дроби как о рациональном числе, то будем иметь в виду одну из двух периодических десятичных дробей, равных этой десятичной дроби. Каждое неотрицательное рациональное число можно представить в виде m/n , $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Для точного измерения всех отрезков используют множество неотрицательных действительных (вещественных) чисел \mathbb{R}_0 , состоящее из всевозможных бесконечных десятичных дробей $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Приписывая числам множества \mathbb{R}_0 знаки « $-$ » и « $+$ », получим множество всех действительных чисел \mathbb{R} . Непериодические бесконечные дроби относят к иррациональным числам. Приближением порядка $n \in \mathbb{N}_0$ по недостатку неотрицательного вещественного числа $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ (обозначают α_n) называют десятичную дробь $\alpha_n = a_0, a_1 \dots a_n$, если же α — отрицательное вещественное число, то дробь $\alpha_n = a_0, a_1 \dots a_n - 10^{-n}$. Приближение нулевого порядка по недостатку числа $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ называют целой частью этого числа и обозначают $[\alpha]$.

Если α — иррациональное, то запись $\alpha = \beta$ означает, что $\alpha_n = \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ (\forall — для любого). Если α — рациональное, то $\alpha = \beta$ означает, что либо $\alpha_n = \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, либо α и β — два представления одной десятичной дроби, одно из них с нулем в периоде, другое — с девяткой. Если $\alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, то считаем, что $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha \neq \beta$, то $\alpha < \beta$.

Критерий (необходимое и достаточное условие) различия чисел

Число α меньше, чем β , $\alpha < \beta$, тогда и только тогда, когда существует число $k \in \mathbb{N}_0$ такое, что

$$\alpha_k + 2 \cdot 10^{-k} \leq \beta_k. \quad (1.1)$$

Доказательство. Необходимость. Из неравенства $\alpha < \beta$ следует существование числа $i \in \mathbb{N}_0$ такого, что $\alpha_n < \beta_n \quad \forall n \geq i$ и $\alpha_n = \beta_n \quad \forall n < i$ (если $i > 0$). Если окажется, что $\alpha_i + 2 \cdot 10^{-i} \leq \beta_i$, то искомое число k равно i . В случае, когда $\alpha_i + 10^{-i} = \beta_i$, переходим к рассмотрению приближений по недостатку α_{i+1} и β_{i+1} порядка $i+1$ чисел α и β . Если $\alpha_{i+1} + 2 \cdot 10^{-(i+1)} \leq \beta_{i+1}$, то $k = i+1$. В случае, когда $\alpha_{i+1} + 10^{-(i+1)} = \beta_{i+1}$, переходим к рассмотрению $\alpha_{i+2}, \beta_{i+2}$ и т. д. На некотором шаге должно выполняться нужное неравенство (1.1), т. к. в противном случае все приближения по недостатку порядка большего, чем i , одного числа заканчиваются девятками, а другого — нулями, и тогда α и β — два периодических представления одной десятичной дроби, что противоречит неравенству $\alpha < \beta$.

Достаточность. Из соотношения (1.1) следует, что $\alpha \neq \beta$ и $\alpha_k \leq \beta_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$, т. е. $\alpha < \beta$. \triangleleft

Пример 1.1. Проиллюстрируем схему доказательства критерия различия на примере чисел $\alpha = -2,17804\dots$ и $\beta = -2,17799\dots$. Выпишем приближения по недостатку чисел α и β до порядка 5

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -3, & \beta_0 &= -3, \\ \alpha_1 &= -2,2, & \beta_0 &= -2,2, \\ \alpha_2 &= -2,18, & \beta_2 &= -2,18, \\ \alpha_3 &= -2,179, & \beta_3 &= -2,178, \\ \alpha_4 &= -2,1781, & \beta_4 &= -2,1780, \\ \alpha_5 &= -2,17805, & \beta_5 &= -2,17800. \end{aligned}$$

Сравнивая эти приближения, видим, что число i из доказательства критерия в данном примере равно 3. Поскольку $\alpha_3 + 10^{-3} = \beta_3$, $\alpha_4 + 10^{-4} = \beta_4$, $\alpha_5 + 2 \cdot 10^{-5} < \beta_5$, то число k из критерия различия чисел равно 5.

Теорема о плотности множества действительных чисел

Для любых двух действительных чисел α, β , $\alpha < \beta$, существует рациональное число r , заключенное между ними, т. е. $\alpha < r < \beta$.

Доказательство. По критерию различия чисел существует $k \in \mathbb{N}_0$ такое, что $\alpha_k + 2 \cdot 10^{-k} \leq \beta_k$. Пусть $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ — приближения по недостатку порядка $k+1$ чисел α и β . В качестве r возьмем число $\alpha_k + 10^{-k} + 5 \cdot 10^{-(k+1)}$, которое удовлетворяет неравенствам $\alpha_{k+1} + 2 \cdot 10^{-(k+1)} \leq r \leq \beta_{k+1} - 2 \cdot 10^{-(k+1)}$, и, следовательно, по критерию различия чисел $\alpha < r < \beta$. \triangleleft

1.2. Границы числовых множеств

Интервалом и отрезком с концами α и β называют соответственно множества

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}, [\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}.$$

Интервал (α, β) , отрезок $[\alpha, \beta]$, а также полуинтервалы $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$ имеют общее название промежуток (с концами α и β), который обозначают $|\alpha, \beta|$.

Любое подмножество множества действительных чисел называют числовым множеством. В числовом множестве X , состоящем из конечного числа элементов, имеются наибольший элемент $\max X$ и наименьший $\min X$. В бесконечном множестве такие элементы могут существовать, но могут и не существовать: $\max(\alpha, \beta] = \beta$, а $\min(\alpha, \beta]$ не существует.

Числовое множество X называют ограниченным сверху, если для этого множества существует верхняя граница β , т. е. существует такое число β , что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq \beta$. Наименьшую из верхних границ называют точной верхней гранью X и обозначают $\sup X$. Таким образом, число β является точной верхней гранью множества X , если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\forall x \in X \Rightarrow x \leq \beta; \quad (1.2)$$

$$\forall \gamma < \beta, \exists \bar{x} \in X : \bar{x} > \gamma \quad (1.3)$$

(\exists — существует, \Rightarrow — следует, $:$ — такое, что).

Аналогично определяют точную нижнюю грань множества X . Число α называют нижней границей X , если $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \geq \alpha$. Наибольшую из нижних границ называют точной нижней гранью и обозначают $\inf X$. Ясно, что $\sup(\alpha, \beta) = \beta$, $\inf(\alpha, \beta) = \alpha$.

Теорема о гранях

Каждое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань, непустое ограниченное снизу — точную нижнюю грань.

Доказательство для ограниченного сверху множества X . Заменим все периодические дроби с девяткой в периоде, входящие в множество X , на равные периодические дроби с нулем в периоде. Множество целых частей чисел из X ограничено сверху, следовательно, в этом множестве существует максимальное число p . Пусть Y — множество чисел из X , целая часть которых равна p . Обозначим через Y_n множество приближений по недостатку порядка $n \in \mathbb{N}$ элементов множества Y . Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество Y_n состоит из конечного числа элементов, следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество Y_n имеет максимальный элемент. Пусть $\max Y_n = \beta_n = b_0, b_1 b_2 \dots b_n$. Десятичная дробь $\beta_{n+1} = \max Y_{n+1} = b_0, b_1 \dots b_{n-1} \theta_n b_{n+1}$ отличается от $\beta_n = b_0, b_1 \dots b_{n-1} b_n$ лишь наличием дополнительной цифры на $(n+1)$ месте после запятой и, если $p < 0$, то цифрой на n месте, цифры же $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ у них совпадают. Пусть $\eta_{n-1} = b_0, b_1 b_2 \dots b_{n-1}$ и пусть η — число, приближениями по недостатку которого являются числа η_{n-1} . По построению для любого $y \in Y$ выполняется неравенство $y_{n-1} \leq \eta_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $y \in Y$ выполняется неравенство $y \leq \eta$. Более того, если $\gamma < \eta$, то на основании критерия различия чисел найдется число $l \in \mathbb{N}_0$ такое, что

$$\gamma_l + 2 \cdot 10^{-l} \leq \eta_l. \quad (1.4)$$

Из определения η_l следует существование элемента $\bar{y} \in Y$, для которого $\bar{y}_l = \eta_l$. Из условия (1.4) вытекает $\gamma < \bar{y}$. Таким образом, число η удовлетворяет условиям (1.2), (1.3), следовательно, $\sup Y = \eta$. Так как $\sup X = \sup Y$, то η является точной верхней гранью и всего множества X . \triangleleft

Замечание 1.1. Если X неограниченное сверху множество, т. е. для любого $\beta \in \mathbb{R}$ найдется число $\bar{x} \in X$ такое, что $\bar{x} > \beta$, то по определению полагают $\sup X := +\infty$ ($:=$ — равно по определению). Для неограниченного снизу множества X по определению полагают $\inf X := -\infty$.

Таким образом, любое непустое множество имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Но для ограниченного сверху (снизу) множества точной верхней (нижней) гранью является действительное число или, как говорят, множество имеет конечную точную верхнюю (нижнюю) грань.

С помощью теоремы о гранях можно определить арифметические операции с действительными числами, а также установить переместительный, сочетательный, распределительный законы для вещественных чисел.

Под суммой $\alpha + \beta$ двух вещественных чисел α и β понимают

$$\alpha + \beta = \sup\{\alpha_n + \beta_n\},$$

где α_n и β_n — приближения по недостатку порядка n чисел α и β соответственно, а под разностью $\alpha - \beta$ — число $\alpha + (-\beta)$.

За произведение $\alpha\beta$ двух неотрицательных или неотрицательного и отрицательного вещественных чисел α и β принимают

$$\alpha\beta = \sup\{\alpha_n\beta_n\}.$$

Если α и β — два отрицательных числа, то $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$.

Для любых действительных чисел $\alpha, \beta \neq 0$ уравнение $\beta x = \alpha$ имеет единственное решение (доказать). Это решение называют частным чисел α и β и обозначают α/β .

1.3. Логические операции

Математические рассуждения проводятся по правилам логики. Оперирует логика с высказываниями, т. е. с предложениями, каждое из которых является либо истинным, либо ложным. Основные логические операции: \neg — отрицание, \Leftrightarrow — равносильно, \Rightarrow — влечет за собой. Запись $A \Rightarrow B$ означает, что высказывание A влечет высказывание B или, что то же самое, B следует из A , но мы записи $A \Rightarrow B$ будем придавать и другую словесную интерпретацию, говоря, что B есть необходимый признак или необходимое условие A . Соотношение $A \Leftrightarrow B$ означает, что высказывание A равносильно высказыванию B , но мы его будем читать также одним из следующих способов:

A необходимо и достаточно для B ,

A тогда и только тогда, когда B ,

A , если и только если B .

Мы будем оперировать и с переменными высказываниями $P(x)$, т. е. с высказываниями, которые могут быть истинными при одних значениях x и ложными при других. Особенно важное значение имеют случаи:

- 1) $P(x)$ истинно для всех x ;
- 2) существует x , для которого $P(x)$ истинно.

Используя символы \forall — для всех, \exists — существует, два указанных случая можно записать кратко:

- 1) $\forall x, P(x)$;
- 2) $\exists x, P(x)$.

Важное значение для анализа имеют следующие правила отрицания:

$$\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x); \quad \neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x),$$

которые означают следующее: для того чтобы образовать отрицание предложения $\exists x, P(x)$ ($\forall x, P(x)$), надо заменить в первом случае символ \exists на символ \forall (во втором случае — \forall на \exists), а высказывание $P(x)$ — на его отрицание $\neg P(x)$. Например, для предложения

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U : |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon$$

его отрицание формулируется следующим образом:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 \in U : |x_0 - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0) - A| > \varepsilon_0.$$

При доказательствах будем часто использовать следующий принцип математической индукции:

если утверждение $P(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, истинно при $n = m$, $m \in \mathbb{N}_0$, и из истинности $P(n)$ при $n = k > m$ следует его истинность при $n = k + 1$, то $P(n)$ истинно при всех $n \geq m$.

1.4. Предел последовательности

Если каждому натуральному числу (номеру) n поставлено в соответствие некоторое вещественное число a_n , то говорят, что задана числовая последовательность (или просто последовательность)

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1.5)$$

Для краткой записи последовательности (1.5) используют символ (a_n) .

Последовательность (1.5) называют ограниченной, если ограничено сверху и снизу множество $\{a_n\}$, состоящее из элементов последовательности, т. е.

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \leq M.$$

Последовательность

$$a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+n}, \dots \quad (1.6)$$

называют остатком последовательности (1.5). Множество членов последовательности (1.5), не входящих в остаток, конечно, поэтому, если ограничен один из остатков последовательности, то ограничена и вся последовательность.

Последовательность (1.5) называют сходящейся, если существует число a такое, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

В противном случае последовательность (1.5) называют расходящейся. Если последовательность (1.5) сходится, то число a , из определения сходящейся последовательности, называют ее **пределом** и обозначают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{или} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Геометрически выражение « a предел последовательности (a_n) » означает, что какую бы ε -окрестность $U_\varepsilon(a) = \{x : |x - a| < \varepsilon\}$ точки a ни взять, все члены некоторого остатка последовательности попадут в $U_\varepsilon(a)$ (рис. 1.1).

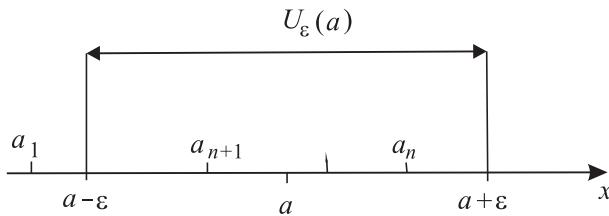


Рис. 1.1. Предел последовательности

Пример 1.2. Покажем, что $\frac{(-1)^n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим цепочку неравенств

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow n^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (1.7)$$

из которой видим, что в качестве $\nu(\varepsilon)$, из определения сходящейся последовательности, можно взять $\nu(\varepsilon) = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Действительно, для любого $n \geq \nu(\varepsilon)$ из цепочки неравенств (1.7) имеем $|(-1)^n/n^2| \leq \varepsilon$.

M-лемма

Если $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| \leq M\varepsilon$, где M не зависит ни от ε , ни от n , то $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Доказательство. Если $M = 0$, то $a_n = a \quad \forall n \geq \nu(1)$ и ясно, что $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Если же $M \neq 0$, то для произвольного ε возьмем $\varepsilon' = \varepsilon/M$. Существует $\nu(\varepsilon') > 0, \forall n \geq \nu(\varepsilon') \Rightarrow |a_n - a| \leq M\varepsilon' = M\varepsilon/M = \varepsilon$. \square

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то последовательность (a_n) называют бесконечно малой. Ясно, что последовательность (a_n) сходится к числу a тогда и только тогда, когда a_n можно представить в виде $a_n = a + \alpha_n$, где (α_n) – бесконечно малая последовательность.

Пример 1.3. Покажем, что

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad 0 < |q| < 1; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 1) \quad 0 < \varepsilon < 1, |q^n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \lg |q| \leq \lg \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}, \quad v(\varepsilon) := \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}; \\ 2) \quad \varepsilon > 0, \frac{n}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n}{(1+1)^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n}{1+n+n(n-1)/2+\dots+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{n}{n(n-1)/2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n-1} \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{2}{\varepsilon} + 1, \quad v(\varepsilon) := \frac{2}{\varepsilon} + 1; \\ 3) \quad \varepsilon > 0, |\sqrt[n]{n} - 1| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} - 1 \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \leq (1+\varepsilon)^n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n \leq 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n \Leftrightarrow n \leq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n \geq \frac{2}{\varepsilon^2} + 1, \quad v(\varepsilon) := \frac{2}{\varepsilon^2} + 1. \end{aligned}$$

1.5. Свойства сходящейся последовательности

1. Сходящаяся последовательность имеет лишь один предел.

Доказательство. Предположим противное: $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$, $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$, $a \neq b$.

Тогда $\alpha_n = a_n - a$, $\beta_n = a_n - b$ — две бесконечно малые последовательности и

$$|a - b| = |\alpha_n - \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|. \quad (1.8)$$

Возьмем $\varepsilon = |a - b|/4$. Из определения предела имеем

$$\exists v_1 > 0, \forall n \geq v_1 \Rightarrow |\alpha_n| \leq \frac{|a - b|}{4},$$

$$\exists v_2 > 0, \forall n \geq v_2 \Rightarrow |\beta_n| \leq \frac{|a - b|}{4}.$$

Отсюда

$$|\alpha_n| + |\beta_n| \leq \frac{|a - b|}{2} \quad \forall n \geq \max\{v_1, v_2\}. \quad (1.9)$$

Из неравенств (1.8), (1.9) следует противоречивое неравенство $\frac{|a - b|}{2} \geq |a - b|$. Поэтому сделанное предположение о существовании у последовательности двух не равных пределов неверно. Но тогда $a = b$. \triangleleft

2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$, $\exists \nu > 0, \forall n \geq \nu \Rightarrow |a_n - a| \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq a_n \leq a + 1$. Остаток $(a_n), n \geq \nu$, ограничен, поэтому ограничена и вся последовательность. \triangleleft

3. Если $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, то:

а) $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$ (предел суммы сходящихся последовательностей равен сумме их пределов);

б) $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$ (предел произведения сходящихся последовательностей равен произведению их пределов);

в) $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$, если $b \neq 0, b_n \neq 0 \quad \forall n$ (предел частного сходящихся последовательностей равен частному их пределов, если предел знаменателя не равен нулю и $b_n \neq 0 \quad \forall n$).

Доказательство. а), б). Для любого $\varepsilon > 0$,

$$\exists \nu'(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \nu'(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon,$$

$$\exists \nu''(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \nu''(\varepsilon) \Rightarrow |b_n - b| \leq \varepsilon.$$

Согласно свойству 2, существует постоянная M такая, что $|a_n| \leq M \quad \forall n$. Для любого $n \geq \max\{\nu'(\varepsilon), \nu''(\varepsilon)\}$ имеем

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq 2\varepsilon,$$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + b|a_n - a| \leq M\varepsilon + b\varepsilon.$$

По M -лемме $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$, $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$.

Осталось доказать утверждение в). По $\varepsilon_1 = |b|/2$ найдем $\nu(\varepsilon_1)$ такое, что $\forall n \geq \nu(\varepsilon_1) \Rightarrow |b_n - b| \leq |b|/2$. Отсюда

$$|b_n| - |b| \leq |b_n - b| \leq \frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{|b|}{2} \leq |b_n| \leq \frac{3}{2}|b|.$$

Теперь для $n \geq \max\{\nu'(\varepsilon), \nu''(\varepsilon), \nu(\varepsilon_1)\}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n}{b} + \frac{a_n}{b} - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{|a_n|}{|b b_n|} |b_n - b| + \frac{1}{|b|} |a_n - a| \leq \\ &\leq \frac{M}{|b||b|/2} \varepsilon + \frac{1}{|b|} \varepsilon = \left(\frac{2M}{|b|^2} + \frac{1}{|b|} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Согласно M -лемме, $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$. \triangleleft

4. Если $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ и $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $a \leq b$.

Доказательство. Предположим противное: $a > b$. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $a - \varepsilon > b + \varepsilon$. Для достаточно больших n $a_n \geq a - \varepsilon$ и $b_n \leq b + \varepsilon$, поэтому $a_n > b_n$, что противоречит условию. \triangleleft

5. Лемма о зажатой последовательности. Если $b_n \leq a_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$, $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$, то $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu'(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \nu'(\varepsilon) \Rightarrow |b_n - d| \leq \varepsilon, d - \varepsilon \leq b_n \leq d + \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu''(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \nu''(\varepsilon) \Rightarrow |c_n - d| \leq \varepsilon, d - \varepsilon \leq c_n \leq d + \varepsilon.$$

Отсюда $\forall n \geq \max\{\nu'(\varepsilon), \nu''(\varepsilon)\}$

$$d - \varepsilon \leq a_n \leq d + \varepsilon,$$

т. е. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$. \triangleleft

6. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство. Пусть $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, а $|b_n| \leq M - \text{const} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon \Rightarrow |a_n b_n| \leq M\varepsilon.$$

По M -лемме $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. \triangleleft

1.6. Бесконечно большая последовательность

Последовательность (a_n) называют бесконечно большой, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| \geq \varepsilon.$$

Другими словами, последовательность бесконечно большая, если, какое бы число $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, найдется число $\nu(\varepsilon) > 0$ такое, что все члены последовательности с номерами большими $\nu(\varepsilon)$, находятся вне ε -окрестности нуля (рис. 1.2).

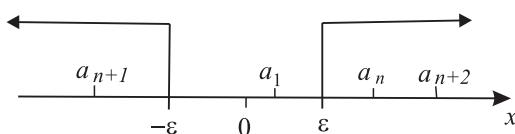


Рис. 1.2

Если последовательность (a_n) бесконечно большая, то говорят, что она имеет бесконечный предел, и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Свойства бесконечно больших последовательностей

1. Если (a_n) — бесконечно большая последовательность и $a_n \neq 0$, то $(1/a_n)$ — бесконечно малая.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon' = 1/\varepsilon$

$$\exists v(\varepsilon') > 0, \forall n \geq v(\varepsilon') \Rightarrow |a_n| \geq \varepsilon' \Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon'} = \varepsilon. \triangleleft$$

2. Если (a_n) — бесконечно малая последовательность и $a_n \neq 0$, то $(1/a_n)$ — бесконечно большая.

Свойство 2 устанавливается аналогично свойству 1.

Среди бесконечно больших последовательностей (a_n) выделяют два типа последовательностей

$$1) \forall \varepsilon > 0, \exists v(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq v(\varepsilon) \Rightarrow a_n \geq \varepsilon;$$

$$2) \forall \varepsilon > 0, \exists v(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq v(\varepsilon) \Rightarrow a_n \leq -\varepsilon.$$

В первом случае говорят, что (a_n) имеет предел $+\infty$ и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, во втором — $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

1.7. Монотонная последовательность

Последовательность (a_n) называют строго возрастающей, если $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$. Если $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$, то (a_n) называют возрастающей последовательностью. Аналогично определяют строго убывающие и убывающие последовательности. Все эти последовательности называют монотонными.

Теорема о монотонной ограниченной последовательности

|| Каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Доказательство для возрастающей последовательности. По теореме о гранях (п. 1.4) $\sup\{a_n\} = a \in \mathbb{R}$. Из определения точной верхней грани следует, что $a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$. Теперь, используя монотонность последовательности, имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v(\varepsilon) = n_\varepsilon, \forall n \geq v(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leq a - a_n \leq \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. \triangleleft

Замечание 1.2. Если последовательность (a_n) , возрастающая и неограниченная, то, используя доказательство теоремы о монотонной ограниченной последовательности, можно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, если же (a_n) — неограниченная убывающая последовательность, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Таким образом, любая монотонная последовательность имеет предел, конечный, если она ограничена, или бесконечный определенного знака, если она не ограничена. Напомним, что мы говорим «последовательность сходится» лишь в случае, когда ее предел принадлежит \mathbb{R} .

1.8. Принцип выбора

Рассмотрим последовательность

$$a_1, \dots, a_n, \dots \quad (1.10)$$

Если из (1.10) удалить часть элементов, но так, чтобы осталось бесконечно много членов последовательности, то получим подпоследовательность этой последовательности

$$a_{n_1}, \dots, a_{n_k}, \dots, \quad n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

Теорема о выборе монотонной подпоследовательности

Из любой последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.

Доказательство. Любая последовательность обладает одним из двух свойств:

- 1) каждый остаток последовательности имеет наибольший элемент,
- 2) существует остаток последовательности, не имеющий наибольшего элемента.

В первом случае можно выбрать монотонно убывающую подпоследовательность. Пусть a_{n_1} — наибольший элемент всей последовательности, a_{n_2} — один из наибольших элементов остатка, начинающегося с номера $n_1 + 1$, a_{n_3} — один из наибольших элементов остатка, начинающегося с номера $n_2 + 1$, и т. д. Тогда $a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$ и, следовательно, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots — монотонная подпоследовательность последовательности (1.10).

Во втором случае можно выбрать монотонно возрастающую подпоследовательность. Пусть a_m, a_{m+1}, \dots — остаток без наибольшего элемента. Тогда и все последующие остатки не имеют наибольших элементов. Положим $a_{n_1} = a_m$. В остатке, начинающемся с номера n_1 , нет наибольшего, поэтому находится элемент $a_{n_2} > a_{n_1}$. Затем рассмотрим остаток, начинающийся с номера

n_2 , и выберем элемент $a_{n_3} > a_{n_2}$ и т. д. Последовательность a_{n_1}, a_{n_2}, \dots — возрастающая подпоследовательность последовательности (1.10). \triangleleft

Принцип выбора

Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть (1.10) — ограниченная последовательность. На основании теоремы о выборе монотонной подпоследовательности из (1.10) можно выбрать монотонную подпоследовательность, которая вместе с последовательностью тоже ограничена. По теореме о монотонной ограниченной последовательности выделенная подпоследовательность сходится. \triangleleft

1.9. Число e

Рассмотрим последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Используя формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n b^0 + \frac{n}{1!} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1) \cdots (n-n+1)}{n!} a^0 b^n,$$

выражения $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ представим в виде

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \quad (1.11)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

При переходе от a_n к a_{n+1} все слагаемые в правой части равенства (1.11) не убывают и добавляется еще одно положительное слагаемое, поэтому $a_{n+1} > a_n$. Кроме того,

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Последовательность $(1 + 1/n)^n$ возрастающая и ограниченная, следовательно, по теореме о монотонной ограниченной последовательности она сходится. Ее предел обозначают через e .

Число e является иррациональным $e = 2,7182 \dots$

1.10. Критерий Коши

Говорят, что последовательность (1.10) удовлетворяет условию Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon. \quad (1.12)$$

Последовательность, удовлетворяющую условию Коши, называют фундаментальной.

Критерий Коши сходимости последовательности

Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство. Необходимость. Если $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0, \forall n \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall m \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда для любых $n, m \geq N(\varepsilon/2)$ имеем

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq \varepsilon.$$

Достаточность. Фиксируя в неравенстве (1.12) ε и m , получаем

$$a_m - \varepsilon \leq a_n \leq a_m + \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon),$$

т. е. остаток последовательности, начинающийся с номера большего, чем $N(\varepsilon)$, ограничен, но тогда ограничена и последовательность. На основании принципа выбора из последовательности (1.10) можно выделить сходящуюся подпоследовательность $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$. Поскольку последовательность (1.10) фундаментальная, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \forall n, n_k \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_{n_k}| \leq \varepsilon \Rightarrow a_{n_k} - \varepsilon \leq a_n \leq a_{n_k} + \varepsilon. \quad (1.13)$$

Переходя в неравенстве (1.13) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon),$$

что означает $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. \triangleleft

Очевидно, что определение фундаментальной последовательности можно также сформулировать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - a_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

Пример 1.4. Покажем, что последовательность

$$a_n = 1 + \frac{\cos 1}{2} + \dots + \frac{\cos n}{2^n}$$

является фундаментальной, следовательно, сходящейся. Действительно,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1, |a_n - a_{n+p}| &= \left| \frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \varepsilon \Leftarrow \\ &\Leftarrow \left| \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^p} \right) \leq \varepsilon \Leftarrow \\ &\Leftarrow \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \nu(\varepsilon) := \log_2 \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Пример 1.5. Покажем, что последовательность

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

является расходящейся. Используя правила отрицания (п. 1.3), сформулируем определение нефундаментальной последовательности

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \nu > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \geq \nu, \exists p_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n_0} - a_{n_0+p_0}| > \varepsilon_0.$$

Для доказательства расходимости рассматриваемой последовательности достаточно показать, что она не является фундаментальной. Пусть $\varepsilon_0 = 1/4$. Для произвольного $\nu > 0$ в качестве n_0, p_0 возьмем числа $n_0 = [\nu] + 1, p_0 = 2n_0$, тогда

$$|a_{n_0} - a_{2n_0}| = \left| \frac{1}{n_0 + 1} + \dots + \frac{1}{2n_0} \right| \geq \frac{1}{2n_0} n_0 = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

1.11. Верхний и нижний пределы

Рассмотрим последовательность

$$a_1, \dots, a_n, \dots \quad (1.14)$$

Предел a (конечный или бесконечный, определенного знака) некоторой подпоследовательности (a_{n_k}) последовательности (1.14) называют частичным пределом последовательности (1.14). Пусть L — множество ее частичных пределов. Точную верхнюю (нижнюю) грань множества L называют верхним (нижним) пределом последовательности (1.14)

и обозначают $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ($\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$). Например, последовательность $a_n = (-1)^n$ имеет два частичных предела $+1, -1$, следовательно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1.$$

Из теоремы о гранях и замечания к ней, из теоремы о выборе монотонной подпоследовательности и из теоремы о монотонной и ограниченной последовательности и замечания к ней следует, что любая последовательность имеет верхний и нижний пределы, причем верхний предел является числом, если последовательность ограничена сверху, и символом $+\infty$ в противном случае, нижний предел — число, если последовательность ограничена снизу, и символ $-\infty$ в противном случае.

Критерий совпадения верхнего и нижнего пределов

Нижний и верхний пределы последовательности совпадают в том и только том случае, когда последовательность имеет предел конечный или бесконечный определенного знака, причем в этом случае

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Предположим, что последовательность (a_n) не стремится к a . Используя правила отрицания (п. 1.3), утверждение, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq a$ с помощью « ε - δ », формулируется следующим образом:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \nu > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \geq \nu \Rightarrow |a_{n_0} - a| > \varepsilon_0.$$

Отсюда вытекает, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдем номер $n_k \geq k$ такой, что

$$|a_{n_k} - a| > \varepsilon_0. \quad (1.16)$$

Из неравенства (1.16) следует, что любой частичный предел подпоследовательности (a_{n_k}) отличен от a , что противоречит равенству (1.15). Аналогично рассматриваются случаи $a = -\infty, a = +\infty$.

Достаточность. Если предел последовательности (a_n) равен a , то любая ее подпоследовательность стремится к a . Значит, множество частичных пределов состоит из одного элемента a и, следовательно, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. \triangleleft

ГЛАВА 2

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

2.1. Функции

Функцией, определенной на множестве X со значениями в множестве Y , называют соответствие f , которое каждому элементу $x \in X$ относит единственный элемент y из Y , обозначаемый $f(x)$. Множество X называют множеством задания функции. Совокупность всех элементов $f(x)$, $x \in X$, называют множеством значений функции f . Тот факт, что f — функция, заданная на X со значениями в Y , обозначают одним из следующих способов:

$$f : X \rightarrow Y; \quad X \xrightarrow{f} Y; \quad y = f(x), \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Иногда вместо слова «функция» используют слово «отображение». В определении функции множества X и Y могут быть множествами любой природы. Если $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$, то функцию называют вещественной или скалярной. Пока будем рассматривать лишь скалярные функции. Графиком Γ_f скалярной функции f называют множество точек плоскости $0xy$ с координатами $(x, f(x))$, $x \in X$

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}$$

(здесь и в дальнейшем, когда говорится о плоскости $0xy$, то имеется в виду плоскость, на которой задана декартова прямоугольная система координат с осями x, y).

Линейная функция: $y = kx + b$, $k, b \in \mathbb{R}$.

Графиком линейной функции служит прямая (рис. 2.1), образующая угол φ с осью $0x$ такой, что $\operatorname{tg}\varphi = k$, и проходящая через точку $(0, b)$.

Квадратичная функция: $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

График квадратичной функции — парабола (рис. 2.2), вершина которой находится в точке $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, и пересекающаяся с осью $0y$ в точке $(0, c)$.

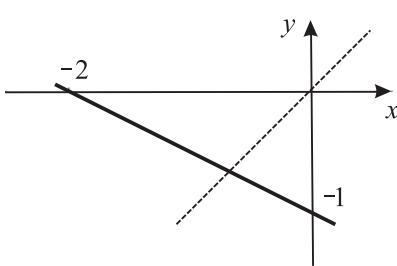


Рис. 2.1. Графики функций $y = x$ (пунктирная прямая) и $y = -x/2 - 1$

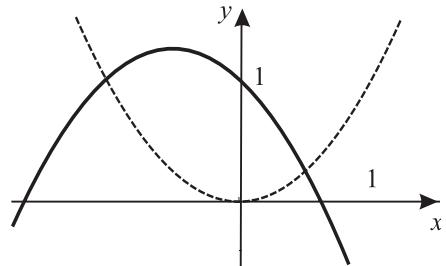


Рис. 2.2. Графики функций $y = x^2$ (сплошная кривая) и $y = -x^2 - x + 1$ (пунктирная кривая)

Многочлен степени n : $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$ (рис. 2.3).

Рациональная функция: $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $P_n(x), Q_m(x)$ — многочлены степени n и m , $m \neq 0$ (рис. 2.4).

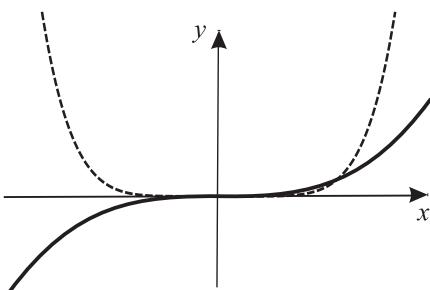


Рис. 2.3. Графики функций $y = x^3$ и $y = x^4$ (сплошная кривая)

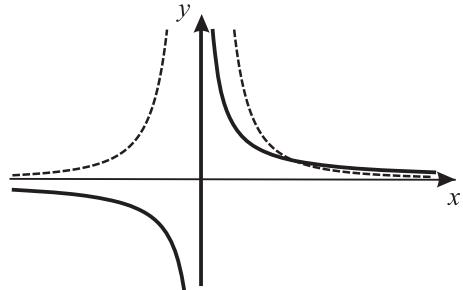


Рис. 2.4. Графики функций $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$ (сплошная кривая)

Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 2.5—2.8).

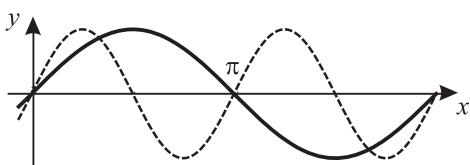


Рис. 2.5. Графики функций $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ (сплошная кривая)

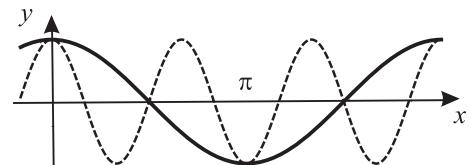


Рис. 2.6. Графики функций $y = \cos x$, $y = \cos 3x$ (сплошная кривая)

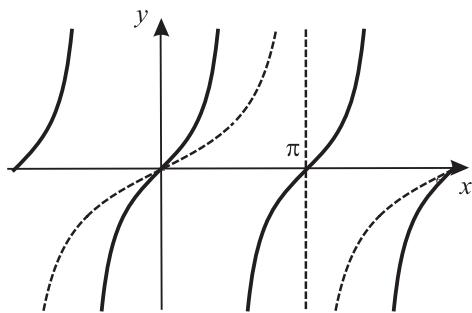


Рис. 2.7. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$,
 $y = \operatorname{tg}(x/2)$ (пунктирная кривая)

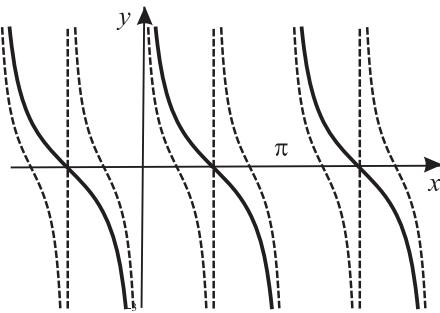


Рис. 2.8. Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$,
 $y = \operatorname{ctg} 2x$ (пунктирная кривая)

Для отображений $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow T$ с помощью формулы $h(x) = g(f(x))$ можно построить функцию $h : X \rightarrow T$, которую называют композицией функций f и g и обозначают $g \circ f$. Композицию функций часто называют сложной функцией.

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называют:

— сюръективным, если

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \Rightarrow y = f(x);$$

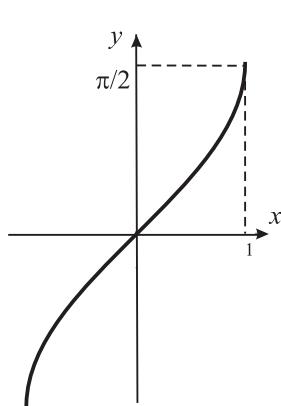
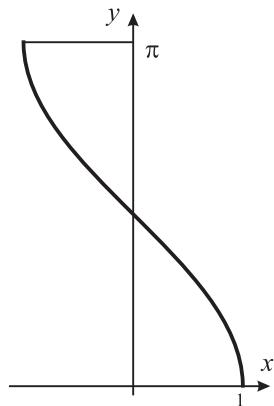
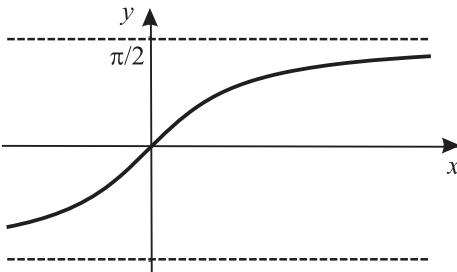
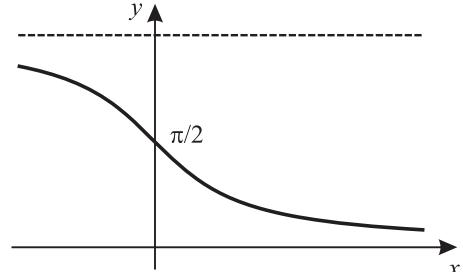
— инъективным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2);$$

— биективным, если оно сюръективно и инъективно одновременно.

Для биективного отображения $f : X \rightarrow Y$ можно построить отображение из Y в X , которое каждому $y \in Y$ ставит в соответствие элемент x из X такой, что $f(x) = y$. Это отображение $g : Y \rightarrow X$ называют обратным к f и обозначают f^{-1} . Из определения обратного отображения следует, что $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in X$ и $(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in Y$. Множеством определения обратной функции f^{-1} служит множество Y , а множеством значений — множество X . Так как точке (x, y) графика функции f соответствует симметричная относительно прямой $y = x$ точка (y, x) графика f^{-1} , то графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Функции $y = \arcsin x$ (рис. 2.9); $y = \arccos x$ (рис. 2.10); $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 2.11); $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 2.12) являются обратными соответственно для функций $y = \sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$; $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$; $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$; $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$.

Рис. 2.9. График функции $y = \arcsin x$ Рис. 2.10. График функции $y = \arccos x$ Рис. 2.11. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ Рис. 2.12. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

Поскольку $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$, $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, то функции $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ ограничены.

2.2. Предел функции

Пусть функция f определена в Δ -окрестности $U_\Delta(c)$ точки c , т. е. на интервале длины 2Δ с центром в точке c

$$U_\Delta(c) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < \Delta\}, \quad \Delta > 0,$$

за исключением, быть может, точки c . Множество $U_\Delta(c) \setminus \{c\}$ называют **проколотой Δ -окрестностью** точки c .

Говорят, что функция f имеет **предел** при $x \rightarrow c$, если существует число A такое, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon.$$

Если функция f имеет предел при $x \rightarrow c$, то число A из приведенного выше определения называют ее **пределом** и обозначают $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ или

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} A$. Если функция $f(x)$ определена в точке $x = c$ и $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, то не обязательно $A = f(c)$.

Геометрически $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ означает, что какую бы горизонтальную полосу вдоль прямой $y = A$ ни взять, всегда найдется вертикальная полоса с осью симметрии $x = c$ такая, что все точки графика функции f , расположенные в вертикальной полосе, кроме, может быть, точки, находящейся на прямой $x = c$, попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 2.13).

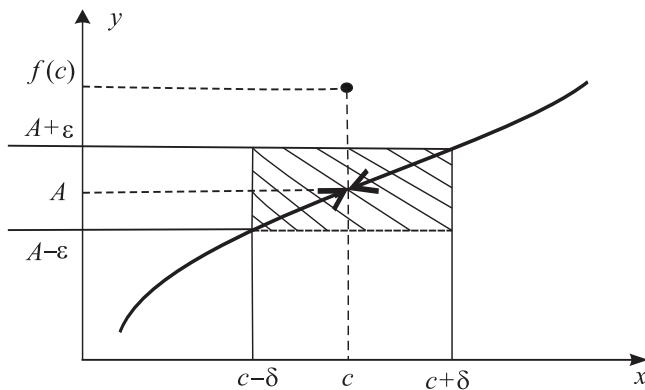


Рис. 2.13. Число A — предел функции

Аналогично M -лемме для последовательностей доказывается следующее утверждение.

M -лемма для предела функции

Если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leq M\varepsilon.$$

где M не зависит ни от x , ни от ε , то $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} A$.

Пример 2.1. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Пусть $U_1(2) = \{x : |x - 2| < 1\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для любого $x \in U_1(2)$ имеет место следующая цепочка неравенств

$$|x^2 - 4| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2||x + 2| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| \leq \frac{\varepsilon}{5},$$

из которой видим, что в качестве числа $\delta(\varepsilon)$, о котором идет речь в определении предела функции, можно взять $\delta(\varepsilon) = \min\{\varepsilon/5; 1\}$.

Критерий Гейне

Для того чтобы функция $f(x)$ имела предел A при $x \rightarrow c$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c, x_n \neq c$, последовательность $f(x_n)$ сходилась к A , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Доказательство. Необходимость. Возьмем $\varepsilon > 0$ и последовательность $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c, x_n \neq c$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, то

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

Из условия $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c, x_n \neq c$, имеем

$$\exists v(\varepsilon) > 0, \forall n \geq v(\varepsilon) \Rightarrow 0 < |x_n - c| \leq \delta(\varepsilon). \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.1), (2.2) следует

$$\exists v(\varepsilon) > 0, \forall n \geq v(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_n) - A| \leq \varepsilon,$$

что означает $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Достаточность. От противного. Предположим, что $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq A$. Используя правила отрицания (п. 1.3), последнее утверждение с помощью « $\varepsilon - \delta$ » формулируется следующим образом:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 \in U_\Delta(c) : 0 < |x_0 - c| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0) - A| > \varepsilon_0.$$

Отсюда следует, что для каждого $\delta_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, найдется точка x_n такая, что

$$0 < |x_n - c| \leq \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - A| > \varepsilon_0.$$

Из неравенства $0 < |x_n - c| \leq \frac{1}{n}$ вытекает, что последовательность (x_n) стремится к c и $x_n \neq c$, а из неравенства $|f(x_n) - A| > \varepsilon_0$, что последовательность $(f(x_n))$ не сходится к A , но это противоречит условию критерия Гейне. \triangleleft

2.3. Односторонние и бесконечные пределы

Пусть функция f определена в правосторонней Δ -окрестности $V_\Delta(c) = \{x : c \leq x < c + \Delta\}, \Delta > 0$, точки $x = c$, за исключением, быть может, точки c .

Говорят, что функция f имеет предел справа при $x \rightarrow c$, если существует число A такое, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in V_\Delta(c) : 0 < x - c \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon.$$

Если функция f имеет предел справа при $x \rightarrow c$, то число A называют ее правосторонним пределом и обозначают $A = \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c+0)$ или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c+0} A$.

Геометрически $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = A$ означает, что какую бы горизонтальную полосу вдоль прямой $y = A$ ни взять, всегда найдется вертикальная полоса, лежащая правее прямой $x = c$, такая, что все точки графика функции f , расположенные в вертикальной полосе, кроме, быть может, точки находящейся на прямой $x = c$, попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 2.14).

Говорят, что функция f , определенная в левосторонней Δ -окрестности $Z_\Delta(c) = \{x : c - \Delta < x \leq c\}$, $\Delta > 0$, точка c , за исключением, быть может, точки c , имеет предел слева при $x \rightarrow c$, если существует число A такое, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in Z_\Delta(c) : 0 < c - x \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon.$$

Левосторонний предел функции обозначают $A = \lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c-0)$ или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c-0} A$ (рис. 2.15).

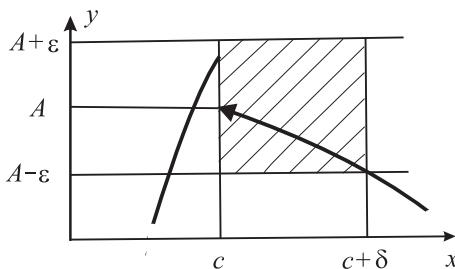


Рис. 2.14. Число A — предел справа

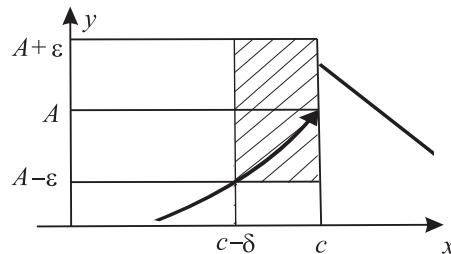


Рис. 2.15. Число A — предел слева

Из определений предела и односторонних пределов функции сразу вытекает следующий критерий.

Критерий равенства односторонних пределов

Для того чтобы функция f имела равные односторонние пределы $f(c+0)$, $f(c-0)$, необходимо и достаточно, чтобы она имела предел при $x \rightarrow c$, причем в этом случае

$$f(c+0) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c-0).$$

Говорят, что функция f , определенная на множестве $[a, +\infty)$, имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, если существует число A такое, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in [a, +\infty) : x \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon.$$

Обозначают $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} A$.

Аналогично, $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(-\infty)$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in (-\infty, a] : x \leq -\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon.$$

Бесконечные пределы

Говорят, что функция $f : U_\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow c$ (или предел функции равен бесконечности), если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| \geq \varepsilon,$$

обозначают $\lim_{x \nearrow c} f(x) = \infty$. Аналогично,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty :$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) \geq \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty :$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) \leq -\varepsilon.$$

Для односторонних и бесконечных пределов имеет место критерий Гейне с соответствующими изменениями. Сформулируем критерий Гейне, например, для случая $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = +\infty$: функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow c-0$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$, $x_n < c$, последовательность $f(x_n)$ стремится к $+\infty$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$.

Критерий Гейне позволяет распространить свойства предела последовательности на предел функции.

Свойства предела функции

1. Функция не может иметь более одного предела.

Доказательство. Предположим противное: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = B$, $A \neq B$. Возьмем последовательность $x_n \rightarrow c$, $x_n \neq c$. По критерию Гейне $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$, что невозможно, так как последовательность $(f(x_n))$ не может иметь более одного предела (п. 1.5). \triangleleft

2. Если $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} A \in \mathbb{R}$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} B \in \mathbb{R}$, то

a) $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} A + B$;

б) $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} AB$;

в) $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow c} \frac{A}{B}$, если $B \neq 0$ (доказать).

3. Если $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} A$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} B$ и $f(x) \leq g(x)$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки $x = c$, то $A \leq B$ (доказать).

4. Если $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки $x = c$ и $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} A$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} A$, то $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} A$ (доказать).

5. Произведение бесконечно малой при $x \rightarrow c$ функции $f(x)$, т.е. такой функции, что $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$, на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки $x = c$ функцию снова является бесконечно малой при $x \rightarrow c$ функцией (доказать).

Критерий Коши существования предела функции

Функция $f : U_\Delta(c) \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет предел при $x \rightarrow c$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in U_\Delta(c) : 0 < |x' - c| \leq \delta(\varepsilon), 0 < |x'' - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon. \quad (2.3)$$

Доказательство. Необходимость. Если $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} A$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon/2) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x - c| \leq \delta(\varepsilon/2) \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon/2.$$

Отсюда $\forall x', x'' \in U_\Delta(c) : 0 < |x' - c| \leq \delta(\varepsilon/2), 0 < |x'' - c| \leq \delta(\varepsilon/2)$ имеем

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \leq \varepsilon.$$

Достаточность. Возьмем последовательность $x_n \rightarrow c, x_n \neq c$ и $\varepsilon > 0$. Из условия (2.3) найдем $\delta(\varepsilon)$. Существует $\nu(\delta(\varepsilon)) > 0$ такое, что $\forall n \geq \nu(\delta(\varepsilon)), \forall m \geq \nu(\delta(\varepsilon))$ имеем $|x_n - c| \leq \delta(\varepsilon), |x_m - c| \leq \delta(\varepsilon)$. Отсюда и из условия (2.3) вытекает $|f(x_n) - f(x_m)| \leq \varepsilon$, т.е. последовательность $(f(x_n))$ является фундаментальной. По критерию Коши сходимости последовательности существует число A такое, что $f(x_n) \rightarrow A$.

Из условия (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \forall n \geq \nu(\delta(\varepsilon)), \forall x \in U_\Delta(c) : 0 < |x - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x) - f(x_n)| \leq \varepsilon \Rightarrow f(x_n) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_n) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Переходя в неравенстве (2.4) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$A - \varepsilon \leq f(x) \leq A + \varepsilon,$$

что означает $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} A$. \triangleleft

Пример 2.2. Покажем, что функция $y = \sin x$ не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$. Возьмем две последовательности $x'_n = 2\pi n$, $x''_n = \pi/2 + 2\pi n$, стремящиеся к $+\infty$. Соответствующие последовательности значений функции $\sin x'_n = 0$, $\sin x''_n = 1$ стремятся к разным пределам 0 и 1. Отсюда и из критерия Гейне следует, что $\sin x$ не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$.

2.4. Замечательный тригонометрический предел

Теорема о замене переменной при вычислении предела

Если

$$\lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = b, \quad \lim_{t \rightarrow b} f(t) = A,$$

причем $\varphi(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности точки c , то

$$\lim_{x \rightarrow c} f(\varphi(x)) = A.$$

Доказательство. По критерию Гейне

$$\forall x_n \rightarrow c, x_n \neq c \Rightarrow \varphi(x_n) \rightarrow b.$$

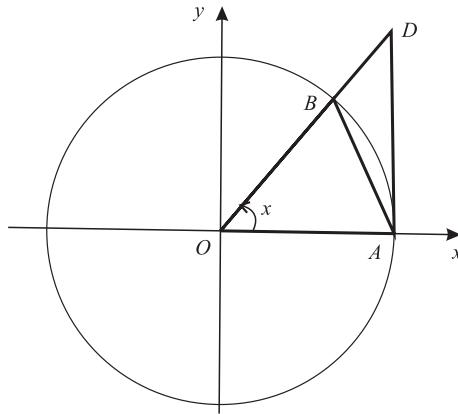
По условию теоремы $t_n = \varphi(x_n) \neq b$. Опять по критерию Гейне $f(t_n) \rightarrow A$ или $f(\varphi(x_n)) \rightarrow A$. Отсюда, согласно критерию Гейне, имеем $f(\varphi(x)) \xrightarrow{x \rightarrow c} A$. \triangleleft

Замечание 2.1. Справедливы также утверждения, аналогичные теореме о замене переменной при вычислении предела, и для односторонних пределов, например, если $\lim_{x \rightarrow c-0} \varphi(x) = b$, $\lim_{t \rightarrow b+0} f(t) = A$, причем $\varphi(x) > b$ в некоторой проколотой правосторонней окрестности точки c , то $\lim_{x \rightarrow c-0} f(\varphi(x)) = A$ (доказать).

Замечательный тригонометрический предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим на плоскости Oxy круг единичного радиуса с центром в начале координат. Проведем построения, указанные на рис. 2.16, где $0 < x < \pi/2$.



Puc. 2.16

Пусть S_1, S_2, S_3 — площади треугольника OAB , кругового сектора OAB и треугольника OAD соответственно. Поскольку $S_1 < S_2 < S_3$ и $2S_1 = (OA)^2 \sin x = \sin x$, $2S_2 = (OA)^2 x = x$, $2S_3 = OA \cdot AD = \operatorname{tg} x$, то имеют место следующие неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \pi/2.$$

Отсюда $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, следовательно,

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < 1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2) < 2 \sin(x/2) < x.$$

Из этой цепочки неравенств следует, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : 0 < x \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Отсюда и из определения предела имеем $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +0} 1$.

Далее вычислим предел $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x}$. Воспользуемся заменой $t = -x$

$$1 = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = [t = -x, x \rightarrow -0] = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x}.$$

Теперь равенство $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ следует из критерия равенства односторонних пределов. \triangleleft

2.5. Непрерывная функция

Пусть функция f определена в Δ -окрестности $U_\Delta(c)$ точки $x = c$.

Функцию f называют **непрерывной в точке** $x = c$, если предел функции при $x \rightarrow c$ совпадает со значением функции в точке c , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Если последнее равенство не выполняется, то говорят, что f разрывна в точке c .

Записав определение предела функции с помощью « $\varepsilon - \delta$ » (п. 2.2), приходим к следующему определению непрерывности функции: функция f непрерывна в точке $x = c$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in U_\Delta(c) : |x - c| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon.$$

Геометрически непрерывность f в точке $x = c$ означает, что какую бы горизонтальную полосу вдоль прямой $y = f(c)$ ни взять, всегда найдется вертикальная полоса с осью симметрии $x = c$ такая, что все точки графика функции f , расположенные в вертикальной полосе, попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 2.17).

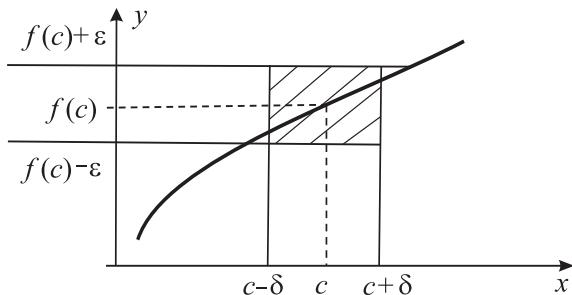


Рис. 2.17. Функция, непрерывная в точке c

Величину $\Delta x = x - c$ называют приращением аргумента, а $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ — приращением функции в точке c . Используя теорему о замене переменных при вычислении предела, имеем

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Отсюда следует, что функция f непрерывна в точке $x = c$ тогда и только тогда, когда приращение функции Δy стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$.

Пример 2.3. Поскольку для функции $y = x$ имеют место соотношения $\Delta y = \Delta x$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, то функция $y = x$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ непрерывны в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Действительно, для функции $y = \sin x$ имеем $|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = |2 \cos(x + \Delta x/2) \sin \Delta x/2| \leq |\Delta x|$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Критерий Гейне непрерывности функции

Функция f непрерывна в точке $x = c$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \rightarrow c$ последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(c)$.

Пример 2.4. Функция

$$y = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$. Действительно, возьмем две последовательности $x'_n = \frac{1}{2\pi n}$, $x''_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, стремящиеся к нулю. Соответствующие последовательности значений функции $\sin x'_n = 0$, $\sin x''_n = 1$ стремятся к разным пределам 0 и 1. Из критерия Гейне непрерывности функции следует разрывность функции в точке $x = 0$ (рис. 2.18).

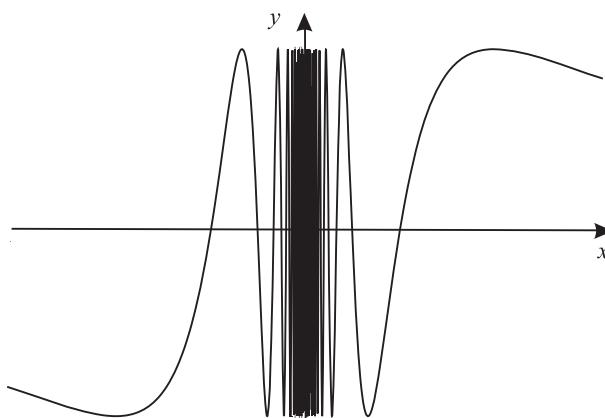


Рис. 2.18

Если функция f определена в правосторонней Δ -окрестности $V_\Delta(c) = \{x : c \leq x < c + \Delta\}, \Delta > 0$, точки c и

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c),$$

то f называют **непрерывной справа** в точке $x = c$. Аналогично определяется **непрерывность слева** в точке c . Функция $f : (c - \Delta, c] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна слева в точке $x = c$, если

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c).$$

Функцию $f : |a, b| \rightarrow R$ называют **непрерывной на промежутке $|a, b|$** , если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) , непрерывна справа в точке $x = a$, если $a \in |a, b|$, и непрерывна слева в точке $x = b$, если $b \in |a, b|$.

2.6. Классификация точек разрыва

Пусть функция f определена в некоторой Δ -окрестности $U_\Delta(c)$ точки $x = c$. Функция $f : U_\Delta(c) \rightarrow \mathbb{R}$ является **разрывной** в точке c , если имеет место одно из следующих условий.

1) Функция имеет равные односторонние пределы $f(c - 0) = f(c + 0)$, но эти пределы не равны значению функции в точке $x = c$. Точку $x = c$ в этом случае называют **точкой устранимого разрыва**.

Пример 2.5. Для функции

$$y = \begin{cases} 1, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

точка $x = 1$ является точкой устранимого разрыва (рис. 2.19).

2) Функция имеет неравные односторонние пределы $f(c - 0) \neq f(c + 0)$. Точку $x = c$ в этом случае называют **точкой конечного скачка**.

Пример 2.6. Для функции

$$y = \text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой конечного скачка (рис. 2.20).

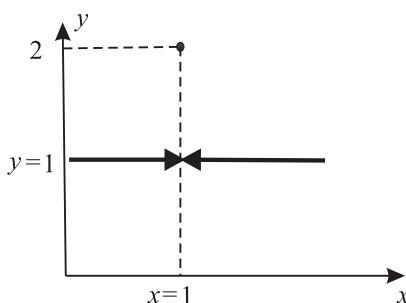


Рис. 2.19

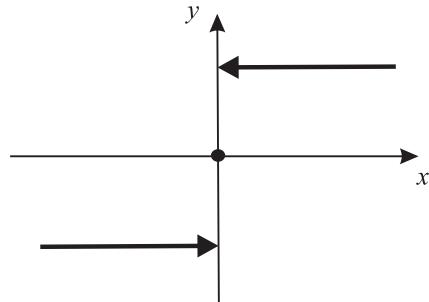


Рис. 2.20

3) Хотя бы один из односторонних пределов $f(c+0)$, $f(c-0)$ равен бесконечности, второй же либо принадлежит \mathbb{R} , либо тоже равен бесконечности. Точку $x = c$ в этом случае называют точкой бесконечного скачка (рис. 2.4).

4) Функция не имеет хотя бы одного одностороннего предела $f(c+0)$, $f(c-0)$ (конечного или бесконечного). В этом случае говорят, что $x = c$ — точка неопределенности (пример 2.4).

Точки разрыва 1), 2) относят к точкам разрыва первого типа, точки разрыва 3), 4) — к точкам разрыва второго типа.

Функцию $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ называют кусочно-непрерывной на промежутке $|a, b|$, если она имеет лишь конечное число точек разрыва, причем все они являются точками разрыва первого типа.

Примером разрывной в каждой точке функции служит функция Дирихле $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рациональное,} \\ 0, & x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

2.7. Непрерывность монотонной функции

Функцию $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ называют: строго возрастающей, если

$$\forall x_1, x_2 \in |a, b| : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

строго убывающей, если

$$\forall x_1, x_2 \in |a, b| : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Строго возрастающие и строго убывающие функции называют строго монотонными. Аналогично определяют возрастающие и убывающие функции. Все эти функции называют монотонными.

Лемма 2.1

Если функция $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна, то для любого $x_0 \in (a, b)$ она имеет односторонние пределы $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$, удовлетворяющие неравенствам

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0) \quad \text{для возрастающей функции},$$

$$f(x_0 - 0) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + 0) \quad \text{для убывающей функции}.$$

Доказательство для возрастающей функции. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Так как f — возрастающая, то

$$\forall x \in (a, b) : x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Следовательно, множество $L = \{f(x) : a < x < x_0\}$ является ограниченным сверху. По теореме о гранях существует конечная точная верхняя грань A множества L , которая удовлетворяет условиям $A \leq f(x_0)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon, x_\varepsilon < x_0 : f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon,$$

$$\forall x \in (a, b) : x > x_\varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(x_\varepsilon) \Rightarrow f(x) \geq A - \varepsilon.$$

Отсюда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = x_0 - x_\varepsilon, \forall x \in (a, b) : 0 < x_0 - x \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow A - \varepsilon \leq f(x) \leq A,$$

следовательно, $f(x_0 - 0) = A \leq f(x_0)$. Аналогично, $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$. \diamond

Критерий непрерывности монотонной функции

Пусть функция f монотонна на отрезке $[a, b]$. Тогда для непрерывности f на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы множеством ее значений был отрезок $[f(a), f(b)]$ для возрастающей функции или отрезок $[f(b), f(a)]$ для убывающей функции.

Доказательство для возрастающей функции, отличной от постоянной. Пусть $A = f(a), B = f(b), A \neq B$. По лемме 2.1

$$\forall x_0 \in (a, b) \Rightarrow f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0).$$

Необходимость. Возьмем произвольное $y_0 \in]A, B[$. Пусть $S = \{x : f(x) < y_0\}$ и пусть $x_0 = \sup S$. Если $x < x_0$, то из определений множества S и числа x_0 следует, что $f(x) < y_0$, поэтому

$$f(x_0 - 0) \leq y_0. \tag{2.5}$$

Если $x > x_0$, то $f(x) \geq y_0$ и

$$f(x_0 + 0) \geq y_0. \quad (2.6)$$

Из непрерывности f в точке x_0 и из неравенств (2.5), (2.6) следует

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = y_0,$$

т. е. функция принимает значение y_0 в точке x_0 .

Достаточность. От противного: пусть f разрывна в некоторой точке x_0 и пусть $a < x_0 < b$. Выполняется одно из неравенств

$$f(x_0 - 0) < f(x_0), \quad f(x_0 + 0) > f(x_0).$$

Допустим, что имеет место первое неравенство. Возьмем число γ такое, что $f(x_0 - 0) < \gamma < f(x_0)$. Число γ удовлетворяет условиям

$$\forall x \in [a, b] : x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0 - 0) < \gamma,$$

$$\forall x \in [a, b] : x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) > \gamma,$$

т. е. f не принимает значения $\gamma \in [f(a), f(b)]$, что противоречит условию критерия. \triangleleft

2.8. Непрерывность обратной и сложной функций

Теорема о непрерывности обратной функции

Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная строго возрастающая (строго убывающая) функция, то существует обратная к ней функция f^{-1} , определенная на отрезке $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$), которая является непрерывной и строго возрастающей (строго убывающей).

Доказательство для строго возрастающей функции. Существование обратной функции f^{-1} следует из биективности отображения $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$. Из определения обратной функции следует, что она определена на отрезке $[f(a), f(b)]$, строго возрастает и ее значения покрывают отрезок $[a, b]$. По критерию непрерывности монотонной функции обратная функция непрерывна на $[f(a), f(b)]$. \triangleleft

Теорема о непрерывности сложной функции

Если функция f непрерывна в точке x_0 , а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $x_n \rightarrow x_0$. По критерию Гейне непрерывности функции имеем

$$f(x_n) \rightarrow y_0, \forall y_n \rightarrow y_0, g(y_n) \rightarrow g(y_0) \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0)).$$

На основании критерия Гейне $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 . \triangleleft

2.9. Локальные свойства непрерывной функции

К локальным свойствам функции относят те свойства, которые определяются поведением функции в некоторой (сколь угодно малой) окрестности рассматриваемой точки. В теоремах, приведенных в п. 2.9, если значение аргумента попадает на конец промежутка задания, то в качестве окрестности выступает соответствующая односторонняя окрестность.

1. Теорема о стабилизации знака

Пусть f задана на промежутке $|a, b|$ и непрерывна в точке $x_0 \in |a, b|$. Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность точки x_0 , во всех точках которой f имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.

Доказательство для случая $f(x_0) > 0$ и x_0 — внутренняя точка $|a, b|$. Для $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ существует $\delta(\varepsilon) : 0 < \delta(\varepsilon) < \min\{x_0 - a, b - x_0\}$,

$$\forall x \in [x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)] \Rightarrow f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} \leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}.$$

Отсюда $f(x) \geq f(x_0)/2$ при $x \in [x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)]$. \triangleleft

2. Теорема о локальной ограниченности

Пусть f непрерывна в точке $x_0 \in |a, b|$. Тогда x_0 обладает окрестностью, на которой f ограничена.

Доказательство для случая x_0 — внутренняя точка $|a, b|$. Для $\varepsilon = 1$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall x \in [x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon)] \Rightarrow f(x_0) - 1 \leq f(x) \leq f(x_0) + 1$. \triangleleft

3. Теорема о непрерывности арифметических комбинаций непрерывных функций

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их: а) сумма $f(x) + g(x)$, б) произведение $f(x)g(x)$, в) частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при условии, что $g(x_0) \neq 0$) также непрерывные в точке x_0 функции.

Теорема вытекает непосредственно из определения непрерывности функций в точке и соответствующих свойств предела функции.

Примеры. 1. Многочлен $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ непрерывен для всех $x \in \mathbb{R}$ как произведение и сумма непрерывных функций.

2. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \pi n$, $y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq \pi/2 + \pi n$, непрерывны как частное двух непрерывных функций.

3. Рациональная функция $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены, непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме корней знаменателя $Q(x)$.

4. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывны на множестве определения по теореме о непрерывности обратной функции.

2.10. Показательная, логарифмическая и гиперболические функции

Степенная функция с рациональным показателем

Функция $y = x$ непрерывна на \mathbb{R} . Функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывна, как произведение непрерывных функций, и строго монотонна на \mathbb{R} для нечетных $n = 2k + 1$ и строго монотонна на промежутке $[0, +\infty)$ для четных $n = 2k$. Следовательно, по теореме о непрерывности обратной функции она имеет непрерывную обратную функцию $y = x^{1/n}$, определенную на \mathbb{R} для нечетных n и на промежутке $[0, +\infty)$ для четных n . Отображение $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ определим с помощью равенства $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Теперь можно определить степенную функцию с рациональным показателем $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ (\mathbb{Z} — множество целых чисел), положив $x^r = x^{m/n} = (x^{1/n})^m$, (рис. 2.21, 2.22).

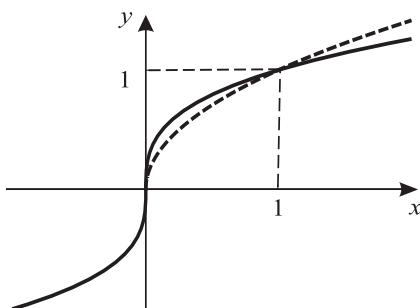


Рис. 2.21. Графики функций $y = x^{1/2}$ (пунктирная кривая) и $y = x^{1/3}$

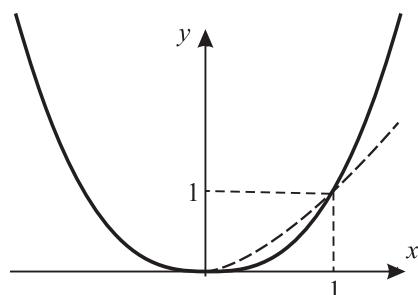


Рис. 2.22. Графики функций $y = x^{3/2}$ (пунктирная кривая) и $y = x^{8/3}$

Эта функция определена на \mathbb{R} , если $n = 2k + 1$, $m \geq 0$; на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, если $n = 2k + 1$, $-m > 0$; на $[0, +\infty)$, если $n = 2k$, $m \geq 0$; на $(0, +\infty)$, если

$n = 2k$, $m < 0$, $k \in \mathbb{N}$. Функция $x^{1/n}$ непрерывная и строго возрастающая при $x > 0$. Функция t^m непрерывная при $t > 0$, строго возрастающая при $m > 0$ и строго убывающая при $m < 0$. Поэтому $y = x^r$, $x > 0$, — непрерывная функция как сложная функция непрерывных отображений, строго возрастающая при $r > 0$ и строго убывающая при $r < 0$.

Степенная функция с рациональным показателем при $x > 0$ обладает следующими свойствами:

$$(x^{1/n})^m = (x^m)^{1/n}; \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} x^r &> 1, \text{ если } x > 1, r \in \mathbb{Q}, r > 0; \\ x^{r_1}x^{r_2} &= x^{r_1+r_2}, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}; \\ (x^{r_1})^{r_2} &= x^{r_1r_2}, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}; \\ x^{r_1} &> x^{r_2}, \text{ если } x > 1, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, r_1 > r_2. \end{aligned}$$

Перечисленные свойства вытекают из свойств целых степеней и из следующего утверждения: если $a^n = b^n$, $n \in \mathbb{N}$, то $a = b$. Проверим, например, равенство (2.7)

$$((x^{1/n})^m)^n = ((x^{1/n})^n)^m = x^m, \quad ((x^m)^{1/n})^n = x^m.$$

Показательная функция

Выше была определена степенная функция с рациональным показателем, что позволяет ввести для вещественных a таких, что $0 < a < 1$ или $a > 1$ показательную функцию $y = a^x$, $x \in \mathbb{Q}$, определенную пока лишь на \mathbb{Q} . Ограничимся рассмотрением случая $a > 1$. Случай $0 < a < 1$ изучается аналогичным образом.

Число A называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ вдоль множества \mathbb{Q} , если $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{Q} : 0 < |x - x_0| \leq \nu_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon$, и обозначают $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{Q}} f(x) = A$. Введенный предел функции вдоль множества \mathbb{Q} обладает теми же свойствами (п. 2.3), что и предел функции (доказать).

Свойства функции $y = a^x$, $x \in \mathbb{Q}$.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{Q}} a^x = 1.$$

Действительно, мы уже знаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-1/n} = 1$, поэтому $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon > 0, \forall n \geq \nu_\varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon \leq a^{1/n} \leq 1 + \varepsilon$, $1 - \varepsilon \leq a^{-1/n} \leq 1 + \varepsilon$. Для каждого $\varepsilon > 0$ зафиксируем номер $n_\varepsilon \geq \nu_\varepsilon$. Для любого рационального x такого, что $-1/n_\varepsilon \leq x \leq 1/n_\varepsilon$, имеем $a^{-1/n_\varepsilon} \leq a^x \leq a^{1/n_\varepsilon}$. Отсюда $1 - \varepsilon \leq a^x \leq 1 + \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon = 1/n_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{Q} : |x| \leq \nu_\varepsilon \Rightarrow |a^x - 1| \leq \varepsilon$.

2) Если $r \in \mathbb{Q}$, то $\lim_{x \rightarrow r, x \in \mathbb{Q}} a^x = a^r$.

Действительно, $\lim_{x \rightarrow r, x \in \mathbb{Q}} a^x = \lim_{x \rightarrow r, x \in \mathbb{Q}} a^r \frac{a^x}{a^r} = a^r \lim_{x \rightarrow r, x \in \mathbb{Q}} a^{x-r} = [x-r=t, t \rightarrow 0, t \in \mathbb{Q}] = a^r \lim_{t \rightarrow 0, t \in \mathbb{Q}} a^t = a^r$.

Используя функцию $y = a^x, x \in \mathbb{Q}$, определим показательную функцию на \mathbb{R} . Пусть $x \in \mathbb{R}$, $s = \sup_{r \in \mathbb{Q}, r < x} a^r$, $p = \inf_{r \in \mathbb{Q}, r > x} a^r$. Ясно, что $s, p \in \mathbb{R}$ и $s \leq p$. Покажем, что на самом деле $p = s$. Действительно, для любых рациональных $r_1, r_2 : r_1 < x < r_2$, имеем $0 \leq p - s \leq a^{r_1}(a^{r_2-r_1} - 1) < s(a^{r_2-r_1} - 1)$. Перейдем к пределу в последнем равенстве при $r_2 - r_1 \rightarrow 0$, получим $0 \leq p - s \leq 0$, т. е. $p = s$. Для $x \in \mathbb{R}$ положим $a^x = s = p$.

Свойства функции $y = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 1$.

1) $\lim_{r \rightarrow x, r \in \mathbb{Q}} a^r = a^x$.

Действительно, $\forall \varepsilon > 0, \exists r'_\varepsilon \in \mathbb{Q}, r'_\varepsilon < x \Rightarrow s - \varepsilon < a^{r'_\varepsilon} \leq s = a^x, \exists r''_\varepsilon \in \mathbb{Q}, r''_\varepsilon > x \Rightarrow a^x \leq a^{r''_\varepsilon} < p + \varepsilon, \forall r \in \mathbb{Q}, r'_\varepsilon \leq r \leq r''_\varepsilon \Rightarrow a^{r'_\varepsilon} \leq a^r \leq a^{r''_\varepsilon}, a^x - \varepsilon \leq a^r \leq a^x + \varepsilon$.

2) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$.

Доказательство. Пусть $r_n \rightarrow x_1, \rho_n \rightarrow x_2, r_n \in \mathbb{Q}, \rho_n \in \mathbb{Q}$. Тогда $a^{r_n} \rightarrow a^{x_1}, a^{\rho_n} \rightarrow a^{x_2}, a^{r_n+\rho_n} \rightarrow a^{x_1+x_2}$. Так как $a^{r_n} a^{\rho_n} = a^{r_n+\rho_n}$, то, переходя к пределу в последнем равенстве, получаем $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$.

3) Функция $y = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 1$, строго возрастает.

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$. Существуют рациональные числа r_1, r_2 такие, что $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Используя определение a^x и свойства a^r на \mathbb{Q} , имеем $a^{x_1} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{x_2}$.

4) Функция $y = a^x, a > 1$, непрерывна на \mathbb{R} .

Доказательство. Для произвольной точки x_0 из \mathbb{R}

$$\Delta y = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1). \quad (2.8)$$

Если мы покажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$, то из равенства (2.8) будет следовать, что $\Delta y \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{} 0$, т. е. непрерывность функции $y = a^x$ в точке x_0 .

Пусть (x_n) — произвольная бесконечно малая последовательность. Существуют бесконечно малые последовательности рациональных чисел, удовлетворяющие неравенствам $r'_n \leq x_n \leq r''_n$. Следовательно, $a^{r'_n} \leq a^{x_n} \leq a^{r''_n}$. А так как $a^{r'_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1, a^{r''_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 1$. По критерию Гейне $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

$$5) (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Первый этап: $x_2 = r \in Q$, $x_1 \in \mathbb{R}$. Пусть r_n — последовательность рациональных чисел такая, что $r_n \rightarrow x_1$. Тогда $(a^{r_n})^r = a^{r_n r}$, $r_n r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1 r$, $a^{r_n r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^{x_1 r}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n})^r = [a^{r_n} = t_n, t_n \rightarrow a^{x_1}] = \lim_{t_n \rightarrow a^{x_1}} (t_n)^r = (a^{x_1})^r \Rightarrow (a^{x_1})^r = a^{x_1 r}$.

Второй этап: x_1, x_2 — произвольные вещественные числа. Пусть ρ_n — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_2 . Тогда $(a^{x_1})^{\rho_n} = a^{x_1 \rho_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_1 \rho_n} = a^{x_1 x_2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_1})^{\rho_n} = [a^{x_1} = b] = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{\rho_n} = b^{x_2} = (a^{x_1})^{x_2} \Rightarrow (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$.

$$6) a^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad a^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$

Доказательство. Пусть $x > 0$, $[x] = m$. Тогда, используя формулу бином Ньютона, имеем $a^x \geq a^m = (1+q)^m = 1+qm+\dots+q^m \geq 1+qm \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$.

Если $x < 0$, то $a^x = (a^{-x})^{-1} = \frac{1}{a^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

7) График $y = a^x$ (рис. 2.23).

Функцию $y = a^x$ называют показательной функцией по основанию a . В качестве основания часто используется число e , и вместо e^x пишут $\exp x$.

Логарифмическая функция

На основании теоремы об обратной функции существует функция обратная к показательной $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Эту функцию называют логарифмической и обозначают $y = \log_a x$ (рис. 2.24).

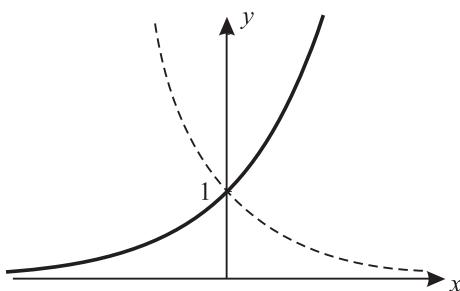


Рис. 2.23. Графики функций $y = (1/3)^x$ (пунктирная кривая) и $y = e^x$

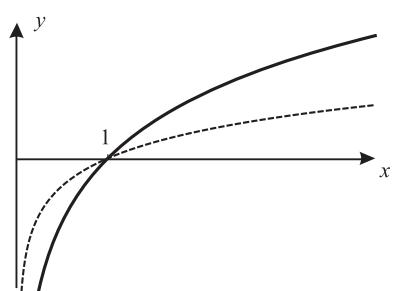


Рис. 2.24. Графики функций $y = \log_{10} x$ (пунктирная кривая) и $y = \log_2 x$

Она является непрерывной и строго возрастающей. Аналогично определяют функцию $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Поскольку логарифмическая функция является обратной к показательной функции, то

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0, \quad \log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Из свойств показательной функции вытекают следующие свойства логарифмической функции:

- 1) $\log_a a = 1$;
- 2) $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad x_1 > 0, x_2 > 0$;
- 3) $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad x_1 > 0, x_2 > 0$.

Докажем, например, свойство 2). Пусть $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$. Тогда $x_1 = a^{y_1}$, $x_2 = a^{y_2}$, $x_1 x_2 = a^{y_1+y_2}$, $\log_a(x_1 x_2) = \log_a a^{y_1+y_2} = \log_a x_1 + \log_a x_2$.

Логарифм числа x по основанию e называют натуральным и обозначают $\ln x$.

В начале п. 2.2 была введена степенная функция с рациональным показателем. Степенную функцию с любым вещественным показателем определяют лишь при $x > 0$ с помощью формулы

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Сумму $f+g$, разность $f-g$, произведение $f \cdot g$, частное f/g и композицию $f \circ g$ функций f и g относят к элементарным операциям над функциями. Степенную, тригонометрические, обратные тригонометрические, показательную и логарифмическую функции считают основными элементарными функциями. К элементарным функциям относят функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью элементарных операций, применяемых конечное число раз.

Из результатов п. 2.1 и 2.2 следует **вывод**: элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Гиперболические функции

Функции

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &:= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), & \operatorname{ch} x &:= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\ \operatorname{th} x &:= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, & \operatorname{cth} x &:= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \end{aligned}$$

называют соответственно гиперболическим синусом, гиперболическим косинусом, гиперболическим тангенсом и гиперболическим котангенсом.

Из определения гиперболических функций сразу следуют тождества:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

Графики функций $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$ представлены на рис. 2.25, 2.26.

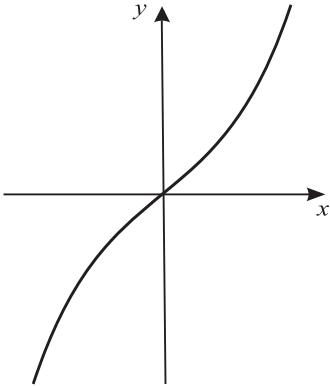


Рис. 2.25. График функции $y = \operatorname{sh} x$

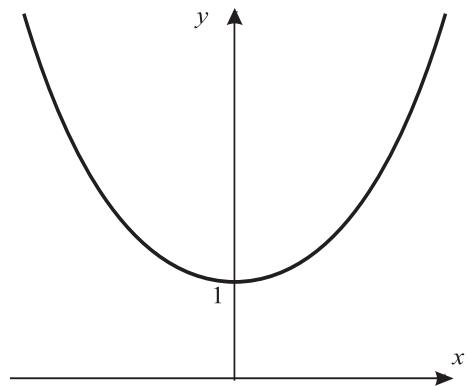


Рис. 2.26. График функции $y = \operatorname{ch} x$

Найдем функцию, обратную к отображению $y = \operatorname{sh} x$:

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}, \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Аналогично, $y = \operatorname{ch} x$, $x \geq 0$, $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$, $y \geq 1$. Функции

$$\operatorname{arcsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{arcch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1, \quad (2.10)$$

называют соответственно обратным гиперболическим синусом и обратным гиперболическим косинусом (рис. 2.27, 2.28).

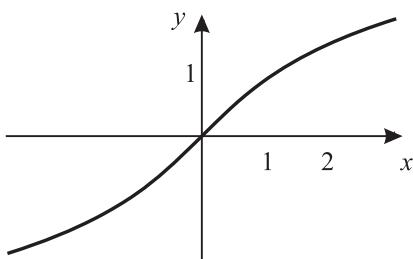


Рис. 2.27. График функции $y = \operatorname{arcsh} x$

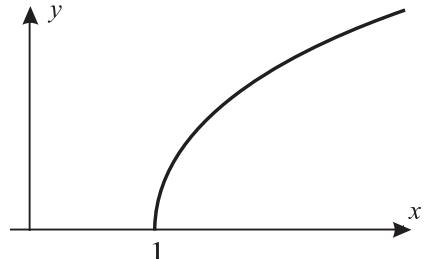


Рис. 2.28. График функции $y = \operatorname{arcch} x$

2.11. Замечательные показательно-степенной, логарифмический, показательный и степенной пределы

1. Показательно-степенной предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Доказательство. Воспользуемся критерием Гейне. Возьмем любую последовательность $x_n \rightarrow +0$. Рассмотрим возможные случаи:

$$1) \quad x_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (\text{п. 1.11});$$

$$2) \quad x_n = \frac{1}{k_n}, \quad k_n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e \quad (\text{п. 1.11});$$

$$3) \quad k_n \leq \frac{1}{x_n} < k_n + 1, \quad k_n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{k_n + 1} < x_n \leq \frac{1}{k_n},$$

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \leq (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{-1} \leq (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right),$$

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \leq e, \quad \lim_{x \rightarrow +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = [x = -t, t \rightarrow +0] = \lim_{t \rightarrow +0} (1 - t)^{\frac{1}{-t}} = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1 - t}\right)^{\frac{1}{t}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +0} \left(1 + \frac{t}{1 - t}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +0} \left(1 + \frac{t}{1 - t}\right)^{\frac{1-t}{t}} \left(1 + \frac{t}{1 - t}\right) = e. \quad \diamond$$

2. Логарифмический предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

$$1 = \lim_{t \rightarrow e} \ln t = [(1 + x)^{\frac{1}{x}} = t, x \rightarrow 0] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}.$$

3. Показательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = [e^x - 1 = t, x \rightarrow 0] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

4. Степенной предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\mu - 1}{x} = \mu$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\mu \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\mu \ln(1+x)} - 1}{\mu \ln(1 + x)} \frac{\mu \ln(1 + x)}{x} = \mu.$$

2.12. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Говорят, что f — бесконечно малая (бесконечно большая) функция при $x \rightarrow c$, если

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} 0 \quad (f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \infty).$$

Пусть $f(x), g(x), g(x) \neq 0$, — две бесконечно малые при $x \rightarrow c$ функции. Функции f и g называют эквивалентными при $x \rightarrow c$, если

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

записывают $f(x) \sim_{x \rightarrow c} g(x)$.

Говорят, что функция $f(x)$ — большего порядка малости, чем $g(x)$ при $x \rightarrow c$, если

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

записывают $f(x) = o(g(x))$. Запись $f(x) = o(1)$ означает, что $f(x)$ бесконечно малая функция при $x \rightarrow c$.

Запись $f(x) = O(g(x))$ означает, что в некоторой проколотой окрестности точки $x = c$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq M|g(x)|,$$

где M — постоянная.

Аналогично сравнивают и бесконечно большие функции.

Замечательные пределы позволяют составить следующую таблицу эквивалентных при $x \rightarrow 0$ функций:

$$\sin x \sim x, \quad \ln(1 + x) \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad (1 + x)^\mu \sim \mu x.$$

Заметим, что предел произведения или частного не меняется, если при его вычислении некоторые множители заменить на эквивалентные функции.

Пример 2.7

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin x^2} &= \left[\sin x^2 \sim x^2, \ln \cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) \sim \right. \\ &\sim \cos x - 1 \sim -2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim \left. \frac{-x^2}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В анализе широко используются следующие правила обращения с символами $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$ ($f(x) \underset{x \rightarrow c}{\rightarrow} 0$):

- | | |
|--------------------------|---|
| а) $o(f) + o(f) = o(f),$ | г) $o(f) = O(f),$ |
| б) $o(f)o(f) = o(f^2),$ | д) $o(o(f)) = o(f),$ |
| в) $o(f) + O(f) = O(f),$ | е) $f^n(x)o(f) = o(f^{n+1}), n \in \mathbb{N}.$ |

$$\text{Докажем, например, б) } \lim_{x \rightarrow c} \frac{o(f)o(f)}{f^2} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{o(f)}{f} \lim_{x \rightarrow c} \frac{o(f)}{f} = 0.$$

В правилах а) — е) равенства являются символическими, а не обычными равенствами. Их следует читать лишь слева направо.

2.13. Глобальные свойства непрерывной функции

К глобальным свойствам функции относят те свойства, которые связаны со всем множеством задания функции.

1. Теорема о промежуточных значениях

Если непрерывная на промежутке $|a, b|$ функция f принимает значения A и B , то она принимает любое промежуточное значение C .

Доказательство. Пусть $f(x_1) = A, f(x_2) = B, A < C < B, x_1 < x_2$.

1) $A < 0, C = 0, B > 0$. Отнесем к множеству L такие точки x , что на отрезке $[x_1, x]$ функция $f(x)$ принимает лишь отрицательные значения. Положим $x_0 = \sup L$. Из построения множества L вытекает $f(x_0 - 0) \leq 0$. В точке x_0 выполняется неравенство $f(x_0) \geq 0$ (иначе, используя теорему о стабилизации знака, легко показать, что множество L можно расширить). Поскольку f непрерывна, то $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Отсюда и из неравенства $f(x_0 - 0) \leq 0, f(x_0) \geq 0$, имеем $f(x_0) = 0$.

2) A, B и C — произвольные. Применяя доказанное на первом этапе утверждение к функции $g(x) = f(x) - C$, получаем, что в некоторой точке $x_0 \in |a, b|$ выполняется равенство $g(x_0) = 0$. Отсюда $f(x_0) = C$. \triangleleft

Геометрическая интерпретация: если график непрерывной функции проходит над и под некоторой горизонтальной прямой, то он пересекает эту прямую (рис. 2.29).

Экстремальными значениями функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называют точную верхнюю и точную нижнюю грани множества ее значений на множестве X . Значения аргументов, при которых функция принимает экстремальные значения, называют точками экстремума. Ясно, что функция может не иметь точек экстремума.

2. Теорема Вейерштрасса

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\exists \bar{x} \in [a, b] : f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in [a, b], \quad (2.11)$$

$$\exists \underline{x} \in [a, b] : f(x) \geq f(\underline{x}) \quad \forall x \in [a, b],$$

другими словами, непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция достигает своих точной верхней и точной нижней граней.

Доказательство для случая (2.11). Пусть $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = A$. Возьмем возрастающую последовательность чисел $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$. Для каждого n найдется точка $x_n \in [a, b]$ такая, что $f(x_n) \geq \alpha_n$. На основании принципа выбора у последовательности x_n существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x}$. Покажем, что $\bar{x} \in [a, b]$. Предположим противное: \bar{x} не принадлежит $[a, b]$, т. е. $\bar{x} < a$ или $\bar{x} > b$. Пусть для определенности $\bar{x} > b$. По теореме о плотности множества действительных чисел существует $\Delta > 0$, что $\bar{x} - \Delta > b$. На интервале $(\bar{x} - \Delta, +\infty)$ нет членов подпоследовательности x_{n_k} , что противоречит ее сходимости к \bar{x} . Таким образом, $\bar{x} \in [a, b]$. Переходя к пределу в неравенстве $f(x_{n_k}) \geq \alpha_{n_k}$ при $k \rightarrow \infty$ и используя критерий Гейне непрерывности функции, получаем $f(\bar{x}) \geq A$. Отсюда $A < +\infty$ и $f(\bar{x}) = A$ (рис. 2.30). \triangleleft

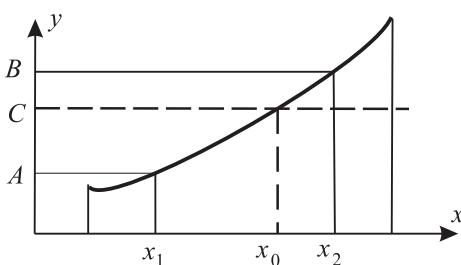


Рис. 2.29

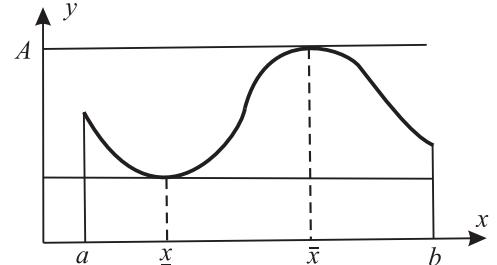


Рис. 2.30

Следствие

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса существуют точки $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ такие, что $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(\underline{x})$, $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(\bar{x})$. Отсюда $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in [a, b]$. \triangleleft

2.14. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Введенное в п. 2.5 определение непрерывной на промежутке $|a, b|$ функции $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ может быть сформулировано с помощью « $\varepsilon - \delta$ » следующим образом:

$$\begin{aligned} \forall x' \in |a, b|, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x') > 0, \forall x'' \in |a, b| : |x' - x''| \leq \delta(\varepsilon, x') \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Если функция $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующему более сильному, чем (2.12), условию:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in |a, b| : |x' - x''| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon,$$

то ее называют равномерно непрерывной на промежутке $|a, b|$.

При равномерной непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$, не зависящее от $x \in |a, b|$, которое обеспечивает выполнение неравенства

$$|f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon \quad \text{при всех } x', x'' \in |a, b| : |x' - x''| \leq \delta(\varepsilon).$$

Из равномерной непрерывности f на $|a, b|$ следует ее непрерывность на этом промежутке. Обратное утверждение не верно (пример 2.8).

Используя правила отрицания (п. 1.3), сформулируем определение неравномерно непрерывной на промежутке $|a, b|$ функции $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x'_0, x''_0 \in |a, b| : |x'_0 - x''_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x'_0) - f(x''_0)| > \varepsilon_0. \quad (2.13)$$

Пример 2.8. Функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, однако она не является равномерно непрерывной на $(0, 1)$. Действительно,

$$\exists \varepsilon_0 = 1, \forall \delta : 0 < \delta \leq 1, \exists x'_0 = \frac{\delta}{2}, x''_0 = \frac{\delta}{4} \in (0, 1) : |x'_0 - x''_0| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{4}{\delta} - \frac{2}{\delta} \right| = \frac{2}{\delta} > 1,$$

т. е. $f(x)$ удовлетворяет условию (2.13), поэтому $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1)$.

Теорема Кантора

|| Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство от противного. Допустим, что f не является равномерно непрерывной на $[a, b]$, т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x'_0, x''_0 \in [a, b] : |x'_0 - x''_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x'_0) - f(x''_0)| > \varepsilon_0. \quad (2.14)$$

Возьмем последовательность $\delta_n = 1/n$ и в соответствии с (2.14) найдем $x'_n, x''_n \in [a, b]$ такие, что $|x'_n - x''_n| \leq 1/n$, $|f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon_0$. На основании принципа выбора из последовательности x'_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x'_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_0 \in [a, b]$. Отсюда и из неравенства $|x'_n - x''_n| \leq 1/n$ следует $x''_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_0$. Функция f непрерывна в точке x_0 , поэтому по критерию Гейне непрерывности функции имеем $f(x'_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(x_0)$, $f(x''_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(x_0)$. Переходя в неравенство $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| > \varepsilon_0$ к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем противоречивое неравенство $|f(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon_0$. Полученное противоречие показывает, что функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$. \triangleleft

2.15. Колебание функции

Число

$$\omega(f, |\alpha, \beta|) := \sup_{x', x'' \in [\alpha, \beta]} |f(x') - f(x'')|$$

называют колебанием функции $f : |\alpha, \beta| \rightarrow R$ на промежутке $|\alpha, \beta|$.

Рассмотрим функцию f , заданную на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками x_0, x_1, \dots, x_n такими, что

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b.$$

Обозначим это разбиение символом $\{x_k\}$. Число

$$W(f, \{x_k\}) := \max_{1 \leq k \leq n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k])$$

называют колебанием функции f , соответствующим разбиению $\{x_k\}$, а число $\delta := \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ — диаметром разбиения.

Пример 2.9. Найдем колебание функции $f(x) = x^2$, соответствующее разбиению отрезка $[0, 1]$ на n равных частей точками $x_k = k/n, k = 0, 1, \dots, n$,

$$\omega(x^2, \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]) = \left(\frac{k}{n} \right)^2 - \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 = \frac{2k-1}{n^2},$$

$$W(x^2, \{x_k\}) = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{2k-1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2}, \quad \delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}.$$

Теорема о колебании функции

Пусть f — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция и пусть $(\{x_k\}_m)$, $m = 1, \dots, 0 \leq k \leq n_m$, — последовательность разбиений отрезка $[a, b]$ с диаметрами $\delta_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$. Тогда последовательность колебаний функции, соответствующая этой последовательности разбиений, стремится к нулю при $m \rightarrow +\infty$, т. е.

$$W(f, (\{x_k\}_m)) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Доказательство. По теореме Кантора

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon. \quad (2.15)$$

Поскольку $\delta_m \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \exists v(\delta(\varepsilon)) &> 0, \forall m \geq v(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow \delta_m \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x_k - x_{k-1}| \leq \delta(\varepsilon) \quad \forall k = 1, \dots, n_m. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из соотношений (2.15) и (2.16) имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \exists v(\delta(\varepsilon)) > 0, \forall m \geq v(\delta(\varepsilon)), \forall k = 1, \dots, n_m,$$

$$\forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon \Rightarrow W(f, (\{x_k\}_m)) \leq \varepsilon,$$

что означает $W(f, (\{x_k\}_m)) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$. \triangleleft

ГЛАВА 3
ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

3.1. Определение производной.
Производные основных элементарных функций

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки c . Придадим в точке $x = c$ приращение аргументу Δx и найдем соответствующее приращение функции $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$.

Производной функции f в точке $x = c$ называют предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

и обозначают $f'(c)$. Если отношение $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ имеет предел, то говорят, что функция в точке c имеет конечную производную. Если отношение $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ стремится к бесконечности, то говорят, что функция в точке c имеет бесконечную производную. В противном случае, если функция не имеет ни конечной ни бесконечной производной, говорят, что функция не имеет производной в точке $x = c$, или у функции не существует производной в точке $x = c$.

Геометрический смысл производной. Пусть $M_0(c, f(c))$, $M_1(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ — две точки, лежащие на графике Γ_f функции $y = f(x)$. Прямую, проходящую через точки M_0 и M_1 , называют секущей графика Γ_f (рис. 3.1). Уравнение секущей имеет вид

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - c) + f(c).$$

Если функция имеет конечную производную в точке c , то при $\Delta x \rightarrow 0$ секущая приближается к прямой

$$y = f'(c)(x - c) + f(c), \quad (3.1)$$

которую называют касательной к графику функции f в точке c . Коэффициент $f'(c)$ в уравнении (3.1) — угловой коэффициент касательной к графику Γ функции в точке $x = c$. Таким образом, если функция имеет конечную производную в точке c , то $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции (рис. 3.2).

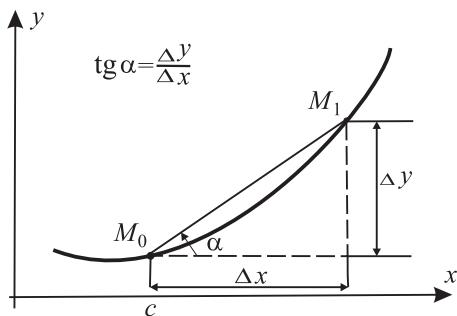


Рис. 3.1. Секущая

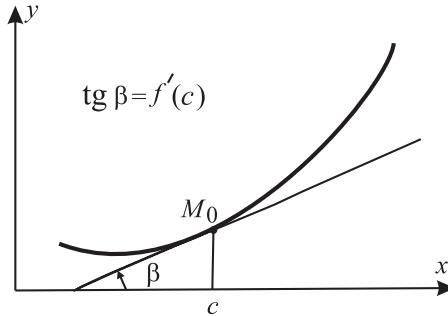


Рис. 3.2. Касательная

Механический смысл производной. Пусть $s = s(t)$ — путь, t — время, $v(t)$ — скорость, $a(t)$ — ускорение. Тогда $s'(t) = v(t), v'(t) = a(t)$.

Теорема о непрерывности функции, имеющей конечную производную

|| *Если функция имеет в точке конечную производную, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из определения производной следует $\Delta y/\Delta x = f'(c) + o(1)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда $\Delta y = f'(c)\Delta x + o(1)\Delta x$ и, следовательно, $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. ◁

Теорема о производных арифметических комбинаций функций

|| *Если функции f и g имеют конечные производные в точке x , то*

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ при $g(x) \neq 0$.

Доказательство. Проверим, например, равенство в). Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)} \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x + \Delta x)g(x)}.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\Delta x \rightarrow 0$ и учитывая, что согласно теореме о непрерывности функции, имеющей конечную производную, выполняется соотношение $g(x + \Delta x) \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{} g(x)$, приходим к требуемой формуле. \triangleleft

Производные синуса, косинуса, тангенса и котангенса

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}; \\ (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta x/2) \sin(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}; \\ (\operatorname{tg} x)' &= \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \\ (\operatorname{ctg} x)' &= \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n. \end{aligned}$$

Производная степенной функции

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \frac{(1 + \Delta x/x)^\alpha - 1}{\Delta x/x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \\ (x^n)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Производная показательной функции

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Производная логарифмической функции

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \Delta x/x)}{x} \frac{(\Delta x/x)}{(\Delta x/x)} = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

3.2. Производные обратной и сложной функций

Теорема о производной обратной функции

Пусть $f(x)$ строго монотонная и непрерывная в некоторой окрестности точки $x = c$ функция, имеющая в точке $x = c$ конечную ненулевую производную $f'(c) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $d = f(c)$ определена обратная функция $x = g(y)$, которая строго монотонна, непрерывна, имеет в точке d конечную производную и $g'(d) = \frac{1}{f'(c)}$.

Доказательство. По теореме об обратной функции в некоторой окрестности точки $d = f(c)$ определена обратная функция $x = g(y)$, которая строго монотонна и непрерывна. Для каждого малого приращения $\Delta y \neq 0$ найдется единственное $\Delta x \neq 0$ такое, что $g(d + \Delta y) = c + \Delta x$. Поскольку g непрерывна в точке d , то $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$. Следовательно,

$$g'(d) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(d + \Delta y) - g(d)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(c)}. \quad \diamond$$

Пример 3.1. Используя теорему о производной обратной функции, найдем производные обратных тригонометрических функций:

$$1) \quad y(x) = \arcsin x, \quad x(y) = \sin y, \quad x'(y) = \cos y,$$

$$y'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$2) \quad y(x) = \arccos x, \quad x(y) = \cos y, \quad x'(y) = -\sin y,$$

$$y'(x) = (\arccos x)' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$3) \quad y(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x(y) = \operatorname{tg} y, \quad x'(y) = \frac{1}{\cos^2 y},$$

$$y'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$4) \quad y(x) = \operatorname{arcctg} x, \quad x(y) = \operatorname{ctg} y, \quad x'(y) = \frac{-1}{\sin^2 y},$$

$$y'(x) = (\operatorname{arcctg} x)' = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема о производной сложной функции

Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = f(x)$ имеют в точках t_0 и $x_0 = \varphi(t_0)$ конечные производные $\varphi'(t_0)$ и $f'(x_0)$, то сложная функция $z = f(\varphi(t))$ имеет в точке t_0 конечную производную, которая может быть вычислена по следующему правилу:

$$(f(\varphi(t_0)))' = f'(x_0)\varphi'(t_0),$$

называемому правилом «цепочки».

Доказательство. Поскольку функции φ и f имеют соответственно в точках t_0, x_0 конечные производные, то

$$\Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)\Delta t + \Delta t\alpha,$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \Delta x\beta,$$

где $\alpha = o(1)$, $\beta = o(1)$, $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда

$$f(\varphi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0)) = f'(x_0)\Delta x + \Delta x\beta =$$

$$= f'(x_0)\varphi'(t_0)\Delta t + f'(x_0)\Delta t\alpha + (\varphi'(t_0)\Delta t + \Delta t\alpha)\beta,$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0))}{\Delta t} = f'(x_0)\varphi'(t_0). \triangleleft$$

Пример 3.2

$$1. \quad (a^x)' = (e^{x \ln a})' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1;$$

$$2. \quad y = \log_a x, x = a^y, \quad (a^y)' = a^y \ln a,$$

$$y'(x) = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1;$$

$$3. \quad (\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$4. \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

Из формул (2.9), (2.10) сразу следует, что

$$(\operatorname{arcsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad (\operatorname{arcch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

Таблица производных

$$\begin{aligned}
 (x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, & (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, & (\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x, \\
 (e^x)' &= e^x, & (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, & (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x, \\
 (\ln x)' &= \frac{1}{x}, \quad x > 0, & (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{x^2 + 1}, & (\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\
 (\sin x)' &= \cos x, & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1, & (\operatorname{arcsh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
 (\cos x)' &= -\sin x, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1, & (\operatorname{arcch} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
 \end{aligned}$$

3.3. Дифференцируемая функция. Дифференциал

Пусть f — функция, определенная в некоторой окрестности точки c . Функцию f называют дифференцируемой в точке $x = c$, если существует постоянная A такая, что приращение функции $\Delta f = f(c + \Delta x) - f(c)$ представимо в виде

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Произведение $A\Delta x$ называют дифференциалом функции f в точке $x = c$ и обозначают

$$df = A\Delta x. \quad (3.2)$$

Приращение аргумента Δx в формуле (3.2) обычно обозначают через dx , при таком обозначении $df = Adx$.

Критерий дифференцируемости функции

Для дифференцируемости функции f в точке $x = c$ необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную $f'(c)$. В этом случае

$$df|_{x=c} = f'(c)dx.$$

Доказательство. Необходимость.

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \quad f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$$

Достаточность. $f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(c) = o(1)$,

$$\Delta f = f'(c)\Delta x + o(1)\Delta x = f'(c)\Delta x + o(\Delta x). \quad \triangleleft$$

С геометрической точки зрения дифференциал функции f в точке $x = c$ представляет собой приращение ординаты касательной к графику Γ_f функции в точке $(c, f(c))$ при переходе от точки $x = c$ к точке $x = c + \Delta x$ (рис. 3.3).

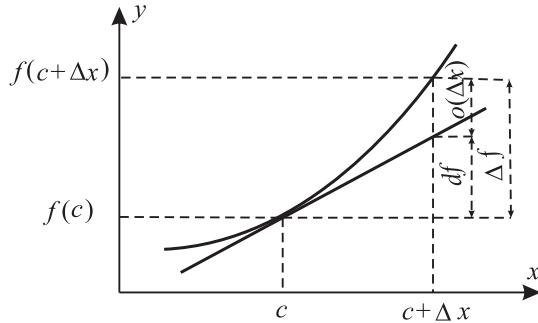


Рис. 3.3

Для дифференцируемой в точке $x = c$ функции f приращение Δf мало отличается от дифференциала dy при малых Δx

$$f(c + \Delta x) - f(c) \approx dy|_{x=c} = f'(c)\Delta x.$$

Пределы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_+(c),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_-(c)$$

называют соответственно правосторонней и левосторонней производной функции f в точке $x = c$.

Непосредственно из определений производной и односторонних производных функции вытекает следующее утверждение: *функция f имеет конечную производную в точке $x = c$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечные равные односторонние производные, причем в этом случае*

$$f'_-(c) = f'(c) = f'_+(c).$$

Если функция имеет в точке $x = c$ конечную правостороннюю (левостороннюю) производную, то она непрерывна справа (слева) в этой точке.

Пример 3.3. Найдем односторонние производные для функции $y = |x|$ в точке $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

Производные $f'_-(0)$, $f'_+(0)$ конечны, но не равны, следовательно, функция $|x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$ (рис. 3.4).

Функцию $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ называют дифференцируемой на промежутке $|a, b|$, если она дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) , имеет конечную правостороннюю производную в точке $x = a$, если $a \in |a, b|$ и конечную левостороннюю производную в точке $x = b$, если $b \in |a, b|$.

Функцию f называют непрерывно дифференцируемой на промежутке $|a, b|$, если она дифференцируема на промежутке $|a, b|$ и ее производная $f'(x)$ непрерывна на $|a, b|$.

Пример 3.4. Отображение

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывно на \mathbb{R} , но не имеет односторонних производных в точке $x = 0$, поскольку пределы

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta x \sin(1/\Delta x)}{\Delta x}, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x \sin(1/\Delta x)}{\Delta x}$$

не существуют (пример 2.2, рис. 3.5).

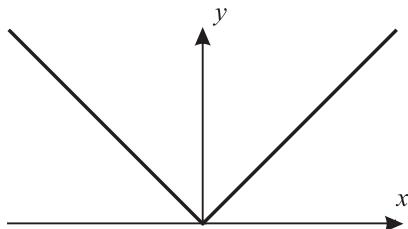


Рис. 3.4. График непрерывной, но не дифференцируемой в точке $x = 0$ функции

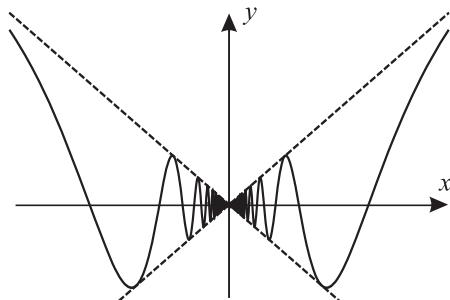


Рис. 3.5. График непрерывной функции, которая не имеет в точке $x = 0$ односторонних производных

Пример 3.5. Отображение

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

имеет в точке $x = 0$ равную нулю производную

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin(1/\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

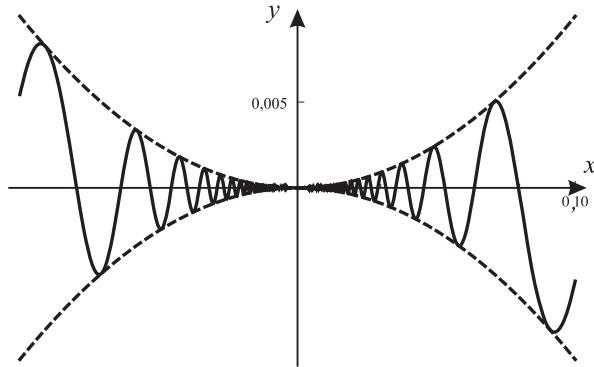


Рис. 3.6. График дифференцируемой функции, которая не является непрерывно дифференцируемой

Функция (3.3) дифференцируема на \mathbb{R} , но не является непрерывно дифференцируемой. Ее производная разрывна в точке $x = 0$ (доказать) (рис. 3.6).

3.4. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница

Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ сама является дифференцируемой функцией, то производную от $f'(x)$ называют второй производной от $f(x)$ и обозначают $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

По индукции определяют

$$f^{(1)}(x) = f'(x), \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' \quad \text{для } n > 1.$$

Кроме того, считают $f^{(0)}(x) = f(x)$. Очевидно, что

$$f^{(n+m)}(x) = (f^{(n)}(x))^{(m)}.$$

Следующие формулы устанавливаются по индукции:

1. $y = x^\mu$, $y^{(n)} = \mu(\mu - 1) \dots (\mu - n + 1)x^{\mu-n}$, в частности, для $\mu = n \in \mathbb{N}$ $(x^m)^{(n)} = 0$, для $n > m$;

2. $y = \sin x$, $y^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2}n)$;

3. $y = \cos x$, $y^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi}{2}n)$;

4. $y = e^x$, $y^{(n)} = e^x$;
 5. $y = \ln x$, $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Функцию $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ называют n раз дифференцируемой на промежутке $|a, b|$, если она имеет конечные производные до порядка n включительно в каждой точке интервала (a, b) , конечные правосторонние производные до порядка n в точке $x = a$, если $a \in |a, b|$ и конечные левосторонние производные до порядка n в точке $x = b$, если $b \in |a, b|$. Если функция f n раз дифференцируема на промежутке $|a, b|$, то все ее производные до порядка $n - 1$ включительно непрерывны на $|a, b|$. Функцию f называют n раз непрерывно дифференцируемой на промежутке $|a, b|$, если ее производная порядка n $f^{(n)}(x)$ непрерывна на $|a, b|$.

Пример 3.6. Найдем односторонние производные для функции $f(x) = x|x|$ в точке $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta x |\Delta x|}{\Delta x} = 0, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x |\Delta x|}{\Delta x} = 0.$$

Односторонние производные конечны и равны (рис. 3.7), следовательно, функция $f(x) = x|x|$ дифференцируема в точке $x = 0$ и $f'(0) = 0$. Производная функции $f(x) = x|x|$ равна

$$(x|x|)' = \begin{cases} -2x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 2x, & x > 0. \end{cases}$$

Она непрерывна на \mathbb{R} (рис. 3.8), следовательно, функция является непрерывно дифференцируемой на \mathbb{R} .

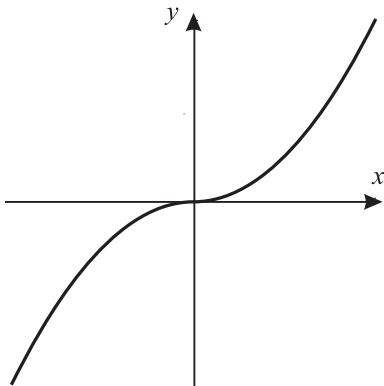


Рис. 3.7. График непрерывно дифференцируемой функции ($f(x) = x|x|$), не являющейся дважды дифференцируемой

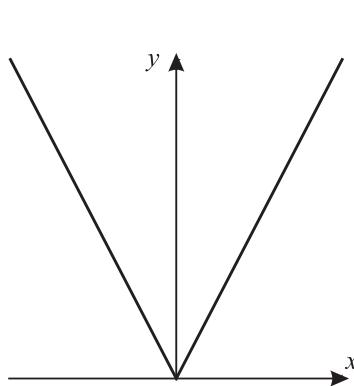


Рис. 3.8. График производной функции $y = x|x|$

Найдем вторые односторонние производные функции $f(x) = x|x|$ в точке $x = 0$

$$f''_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2, \quad f''_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$$

Производные $f''_-(0)$, $f''_+(0)$ конечны, но не равны, следовательно, функция $f(x) = x|x|$ не является дважды дифференцируемой в точке $x = 0$.

Отображение

$$y = \begin{cases} x^3 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

дважды дифференцируемо на \mathbb{R} , но не является дважды непрерывно дифференцируемым (доказать).

Замечание 3.1. Обозначим через $C^0((a, b))$, $D^n((a, b))$, $C^n((a, b))$ соответственно множества непрерывных, n раз дифференцируемых и n раз непрерывно дифференцируемых функций на интервале (a, b) . Из теоремы о непрерывности функции, имеющей конечную производную, критерия дифференцируемости функции и из примеров 3.3—3.6 вытекают включения

$$C^0((a, b)) \supset D^1((a, b)) \supset C^1((a, b)) \supset \dots \supset D^n((a, b)) \supset C^n((a, b)),$$

причем все включения являются строгими.

Для вычисления производных высших порядков произведения двух функций полезным является следующее правило Лейбница.

Правило Лейбница

$$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \quad \text{где} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.} \quad (3.4)$$

Доказательство по индукции. $n = 0$, $(uv)^{(0)} = uv$, $\sum_{k=0}^0 C_0^k u^{(n-k)} v^{(k)} = u^{(0)}v^{(0)} = uv$. Допустим, что равенство (3.4) имеет место при $n = m$. Рассмотрим производную $(m+1)$ -го порядка для произведения uv

$$(uv)^{(m+1)} = ((uv)^{(m)})' = \left(\sum_{k=0}^m C_m^k u^{(m-k)} v^{(k)} \right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^m C_m^k (u^{(m+1-k)} v^{(k)} + u^{(m-k)} v^{(m+1)}).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 (uv)^{(m+1)} &= C_m^0 u^{(m+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^m C_m^k u^{(m+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k u^{(m-k)} v^{(k+1)} + \\
 &+ C_m^m u^{(0)} v^{(m+1)} = [C_m^m = C_m^0 = C_{m+1}^{m+1} = C_{m+1}^0 = 1] = \\
 &= C_{(m+1)}^0 u^{(m+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^m (C_m^k + C_m^{k-1}) u^{(m+1-k)} v^{(k)} + \\
 &+ C_{m+1}^{m+1} u^{(0)} v^{(m+1)} = [C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k] = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k u^{(m+1-k)} v^{(k)}.
 \end{aligned}$$

По индукции равенство (3.4) верно для любого n . \triangleleft

Дифференциалы высших порядков

Дифференциал функции $y = f(x)$

$$dy = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$$

зависит от двух переменных x и Δx . Если приращение аргумента Δx зафиксировать, то dy является функцией лишь от x . Дифференциал от первого дифференциала $d(dy) = d(f'(x)\Delta x)$ при предположении, что Δx зафиксировано, называют вторым дифференциалом функции f и обозначают d^2y или d^2f , при этом предполагается, что при вычислении второго дифференциала приращение Δx выбирается таким же, как и при вычислении первого дифференциала. Таким образом,

$$d^2y = d(f'(x)\Delta x) = f''(x)(\Delta x)^2 = f''(x)dx^2,$$

где $dx^2 = (dx)^2$. Аналогично по индукции определяют $d^n y$:

$$d^n y = d(d^{n-1} y), \quad n > 1,$$

и доказывают формулу

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

т. е. производная порядка n функции $y = f(x)$ равна отношению дифференциала порядка n функции к n -й степени дифференциала независимой переменной.

При дифференцировании во избежание путаницы с переменными иногда указывают те переменные, по которым производится дифференцирование. Такие обозначения мы используем ниже. Пусть $y = f(\varphi(t))$ — сложная функция. Тогда $y'_t = f'_x \varphi'_t$. Отсюда

$$dy = f'_x \varphi'_t dt = [\varphi'_t dt = dx] = f'_x dx,$$

т. е. формула $dy = f'_x dx$ справедлива в двух случаях: если x — независимая переменная и если x — лишь промежуточная переменная. Это свойство первого дифференциала называют инвариантностью формы первого дифференциала. Дифференциалы высших порядков уже не обладают инвариантностью формы

$$\begin{aligned} d^2y &= d^2(f(\varphi(t))) = (f(\varphi(t)))'' dt^2 = (f'_x \varphi'_t)' dt^2 = \\ &= (f''_{x^2} \varphi'_t \varphi'_t + f'_x \varphi''_{t^2}) dt^2 = [(\varphi'_t)^2 dt^2 = dx^2, \varphi''_{t^2} dt^2 = d^2x] = \\ &= f''_{x^2} dx^2 + f'_x d^2x, \end{aligned}$$

что не совпадает со вторым дифференциалом $d^2y = f'' dx^2$ в случае, когда x — независимая переменная.

Производные параметрически заданной функции

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, — две функции, определенные на множестве T . Предположим, что отображение $x = x(t)$, $t \in T$, обладает обратным отображением $t = t(x)$, $x \in X = \{x : x = x(t), t \in T\}$. Построим функцию $y = y(t(x))$, $x \in X$, которую называют функцией, заданной параметрически соотношениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$.

Используя теоремы о производных сложной и обратной функций (предполагаем, что условия, обеспечивающие возможность применения этих теорем, выполнены), получаем следующую формулу для вычисления производной параметрически заданной функции:

$$y'_x = y'_t t'_x = \left[t'_x = \frac{1}{x'_t} \right] = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (3.6)$$

Первая производная параметрически заданной функции также является функцией, заданной параметрически соотношениями

$$y = g(t) = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad x = x(t), \quad t \in T.$$

Используя формулу (3.6), вычислим ее производную, которая является второй производной исходной функции, заданной параметрически,

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \frac{(g(t))'_t}{x'_t} = \frac{\left(y'_t/x'_t\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{t^2} x'_t - y'_t x''_{t^2}}{(x'_t)^3}.$$

Аналогично вычисляются и последующие производные.

3.5. Свойства дифференцируемой функции

Точку, в которой производная функции равна нулю, называют стационарной точкой этой функции. В стационарной точке касательная к графику горизонтальна.

1. Теорема Ферма

Если x_0 — точка экстремума функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и функция f дифференцируема в точке x_0 , то x_0 — стационарная точка.

Доказательство для случая $f(x_0) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$. Для Δx таких, что $x_0 + \Delta x \in (a, b)$, имеем

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \quad \forall \Delta x > 0,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \quad \forall \Delta x < 0.$$

Отсюда $0 \geq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$. \triangleleft

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма: касательная к графику дифференцируемой в точке экстремума функции параллельна оси Ox (рис. 3.9).

2. Теорема Ролля

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует стационарная точка функции.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса существуют точки $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ такие, что $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(\underline{x})$, $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(\bar{x})$.

Если $f(\underline{x}) = f(\bar{x})$, то f постоянна на $[a, b]$ и каждая точка интервала (a, b) — стационарная. Если же $f(\underline{x}) < f(\bar{x})$, то из условия $f(a) = f(b)$ следует, что хотя бы одна из точек \bar{x}, \underline{x} лежит на интервале (a, b) , но тогда по теореме Ферма эта точка стационарная. \triangleleft

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля: если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$, то касательная к графику функции в некоторой точке интервала (a, b) параллельна оси Ox (рис. 3.10).

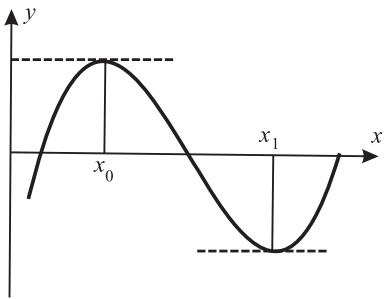


Рис. 3.9

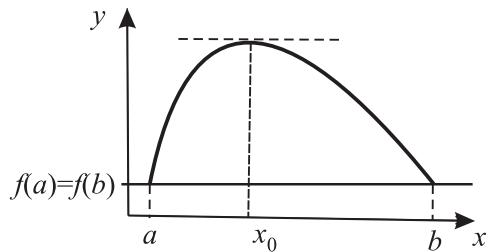


Рис. 3.10

3. Теорема Лагранжа

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то на (a, b) существует такая точка $x = c$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (3.7)$$

Доказательство. Построим функцию

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))(x - a) - (f(x) - f(a))(b - a).$$

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0, \quad \varphi'(x) = (f(b) - f(a)) - (b - a)f'(x).$$

По теореме Ролля существует такая точка $c \in (a, b)$ такая, что $\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. \triangleleft

Поскольку отношение

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

равно угловому коэффициенту секущей, проходящей через концы $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ графика функции $y = f(x), x \in [a, b]$, а производная $f'(c)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $x = c$, то теорема Лагранжа имеет следующую геометрическую интерпретацию: если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то существует точка на графике функции, в которой касательная к графику параллельна секущей, проходящей через концы графика (рис. 3.11).

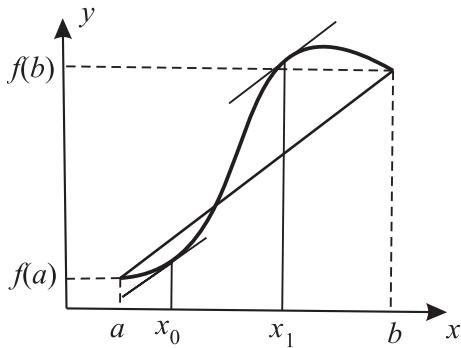


Рис. 3.11

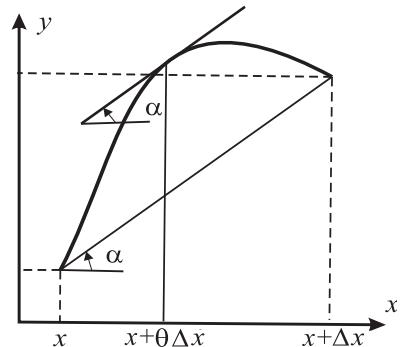


Рис. 3.12

Следствие

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то для любых $x, x + \Delta x \in [a, b]$, существует число $\theta = \theta(x, \Delta x)$, $0 < \theta < 1$, такое, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x. \quad (3.8)$$

Доказательство для случая $\Delta x > 0$. По теореме Лагранжа существует точка c такая, что $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c) \Delta x$. Положим $\theta = \frac{c - x}{\Delta x}$, тогда $x + \theta \Delta x = c$ и $0 < \theta < 1$. Теперь формула (3.8) следует из формулы (3.7) (рис. 3.12). \triangleleft

Формулы (3.7), (3.8) называют формулами конечных приращений, или формулами Лагранжа.

4. Критерий постоянства дифференцируемой функции

Для постоянства дифференцируемой на промежутке $|a, b|$ функции f необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ тождественно на $|a, b|$ равнялась нулю.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in |a, b|$. Зафиксируем $x_0 \in |a, b|$. По следствию из теоремы Лагранжа

$$\forall \Delta x, x_0 + \Delta x \in |a, b| \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in |a, b|. \triangleleft$$

5. Теорема о функциях с совпадающими производными

Если две дифференцируемые функции имеют на интервале совпадающие производные, то они отличаются на этом интервале на постоянную.

Доказательство. $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b), h(x) = f(x) - g(x), h'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow h(x) \equiv C, f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in (a, b)$. \triangleleft

6. Теорема Коши

Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) , причем $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Тогда на интервале (a, b) существует такая точка c , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (3.9)$$

Доказательство. По теореме Лагранжа существует точка $d \in (a, b)$ такая, что

$$g(b) - g(a) = g'(d)(b - a) \neq 0.$$

Построим функцию

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)).$$

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0, \quad \varphi'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(x).$$

По теореме Ролля существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0.$$

Отсюда после деления на $g(b) - g(a) \neq 0$ и $g'(c) \neq 0$ приходим к формуле (3.9). \triangleleft

3.6. Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ по правилу Лопитала

Обозначим через X множество одного из трех видов:

$$1) X = (a, b), \quad a \geq -\infty, \quad 2) X = (b, a), \quad a \leq +\infty, \quad 3) X = (b, a) \cup (a, d), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Ниже запись $\lim_{x \rightarrow a}$ означает правосторонний предел, если X — первого вида, левосторонний предел, если X — второго вида и обычный предел, если X — третьего вида.

Правило Лопитала

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые на X функции такие, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, причем $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$. Если предел отношения производных $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \rightarrow a$ равен l , т. е. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, $-\infty \leq l \leq +\infty$, то предел отношения функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$ тоже равен l , т. е. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Доказательство проведем в следующих четырех случаях (в остальных случаях доказательство аналогично одному из них).

1°. $X = (a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Построим функции

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b), \\ 0, & x = a, \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (a, b), \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Используя теорему Коши, имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \xrightarrow{x \rightarrow a} l.$$

2°. $X = (b, +\infty)$, $b > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Положим $t = 1/x$, $t \in (0, 1/b)$, и рассмотрим функции $f^*(t) = f(1/t)$, $g^*(t) = g(1/t)$, $f^*(t) \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0$, $g^*(t) \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0$. Применяя теорему о замене переменной при вычислении предела и уже доказанное в пункте 1° утверждение, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f^*(t)}{g^*(t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(f^*(t))'}{(g^*(t))'} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(f(1/t))'}{(g(1/t))'} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l. \end{aligned}$$

3°. $X = (a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Для любых $x, \bar{x} \in (a, b) : a < x < \bar{x} < b$, разность $l - \frac{f(x)}{g(x)}$ представим в виде

$$l - \frac{f(x)}{g(x)} = [g'(x) \neq 0 \Rightarrow g(x) - g(\bar{x}) \neq 0] = \left(l - \frac{f(x) - f(\bar{x})}{g(x) - g(\bar{x})} \right) \frac{g(x) - g(\bar{x})}{g(x)} - \frac{f(\bar{x})}{g(x)} +$$

$$+ l \frac{g(\bar{x})}{g(x)} = \left(l - \frac{f'(c)}{g'(c)} \right) \left(1 - \frac{g(\bar{x})}{g(x)} \right) - \frac{f(\bar{x})}{g(x)} + l \frac{g(\bar{x})}{g(x)}, \quad x < c < \bar{x}.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то

$$\exists \bar{x} \in (a, b), \forall x \in (a, b) : a < x < \bar{x} \Rightarrow \left| l - \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left| l - \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \leq \varepsilon,$$

если $x < c < \bar{x}$. Далее

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in (a, \bar{x}) : 0 < x - a \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon, \left| \frac{g(\bar{x})}{g(x)} \right| \leq \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\left| l - \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon(1 + \varepsilon) + \varepsilon + l\varepsilon \quad \forall x \in (a, \bar{x}) : 0 < x - a \leq \delta(\varepsilon),$$

что означает $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

$$4^\circ. X = (a, b), a \in \mathbb{R}, l = \infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Рассматриваем $g(x)/f(x)$ и применяем то же доказательство, что и в случае 3° . \triangleleft

Пример 3.7. С помощью правила Лопиталя можно вычислить следующие важные пределы, в которых устанавливаются соотношения между функциями e^x , $\ln x$ и степенной функцией:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0, \alpha > 0, \quad \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = [x^\alpha = \ln t, t \rightarrow +\infty] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^{\frac{1}{\alpha}}} = 0, \alpha > 0, \quad x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \frac{1}{-\alpha} \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha = 0, \alpha > 0, \quad \ln x \underset{x \rightarrow +0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = 1.$$

Правило Лопиталя может быть использовано лишь для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Другие типы неопределенностей

$$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

раскрываются сведением к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 3.8

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}.$$

3.7. Формула Тейлора. Теорема об остаточном члене формулы Тейлора

Рассмотрим функцию f , у которой существуют производные $f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$. Можно построить многочлен, имеющий в точке x_0 те же производные до порядка n , что и функция $f(x)$. Таким многочленом является многочлен Тейлора

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Если положить $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, то функцию f можно представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \quad (3.10)$$

Представление (3.10) называют формулой Тейлора для функции f в точке x_0 , а $R_n(x)$ — остаточным членом формулы Тейлора.

Поскольку во многих случаях

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

при $x \rightarrow x_0$, то формула Тейлора позволяет выделять главную часть функции f около точки x_0 в виде многочлена.

Теорема об остаточном члене формулы Тейлора

Пусть функция f является $(n+1)$ раз дифференцируемой на интервале $I = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$; x — точка из интервала I ; $\varphi(t)$ — дифференцируемая на I функция и $\varphi'(t) \neq 0$ на $I \setminus \{x\}$. Тогда между x_0 и x найдется такое число c , что остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора можно представить в виде

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n. \quad (3.11)$$

Доказательство для случая $x > x_0$. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n,$$

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n, \quad \psi(x_0) = R_n(x), \quad \psi(x) = 0.$$

Функции $\psi(t), \varphi(t)$ на отрезке $[x_0, x]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши. Согласно этой теореме на интервале (x_0, x) найдется точка c такая, что

$$\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Отсюда

$$-\frac{R_n(x)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n \frac{1}{\varphi'(c)}. \quad \square$$

3.8. Представление остаточного члена формулы Тейлора в формах Лагранжа, Коши и Пеано

Пусть функция f является $(n+1)$ раз дифференцируемой на интервале $I = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2), \delta_1 > 0, \delta_2 > 0; x \in I$. Положив в формуле (3.11) $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$, получаем

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{-(x - x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x - c)^n} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n, \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \\ \theta &:= \frac{c - x_0}{x - x_0}, \quad c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1, \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Формулу (3.12) называют формой Лагранжа для $R_n(x)$.

Положив в формуле (3.11) $\varphi(t) = x - t$, имеем

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{-(x - x_0)}{-1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n, \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - x_0)^{n+1} \left(\frac{x - c}{x - x_0}\right)^n, \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Формулу (3.13) называют формой Коши для $R_n(x)$.

Ослабим требования на функцию f , считая, что функция f является лишь n раз непрерывно дифференцируемой на интервале I . Возьмем

остаточный член $R_{n-1}(x)$ формулы Тейлора в форме Лагранжа $R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$ и запишем его в виде

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha \cdot (x - x_0)^n,$$

$$\alpha = \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \alpha \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(1), \quad \alpha \cdot (x - x_0)^n \underset{x \rightarrow x_0}{=} o((x - x_0)^n).$$

Теперь функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_{n-1}(x) = \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что остаточный член $R_n(x)$ можно записать в виде $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$, который называют формой Пеано для остаточного члена.

Формула Тейлора в дифференциалах

Пусть f — $(n+1)$ раз дифференцируемая на интервале I функция. Положим в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, получим

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{f'(x_0)}{1!}(\Delta x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(\Delta x))}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1} = \\ &= [\Delta x = dx] = \frac{f'(x_0)}{1!}dx + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}dx^n + \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(\Delta x))}{(n+1)!}dx^{n+1} = [f^{(k)}(x_0)dx^k = d^k f(x_0)] = \\ &= \frac{df(x_0)}{1!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta(\Delta x))}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Формулу

$$\Delta f = \frac{df}{1!} \Big|_{x_0} + \cdots + \frac{d^n f}{n!} \Big|_{x_0} + \frac{d^{n+1} f}{(n+1)!} \Big|_{x_0 + \theta \Delta x}$$

называют формулой Тейлора в дифференциалах с остаточным членом в форме Лагранжа.

3.9. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора

1. Разложение экспоненты

$$f(x) = e^x, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Остаточный член имеет вид:

- в форме Лагранжа $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$;
- в форме Пеано $R_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$.

2. Разложение синуса (рис. 3.13)

$$f(x) = \sin x, \quad f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}n), \quad f^{(2l)}(0) = 0, \quad f^{(2l+1)}(0) = (-1)^l,$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

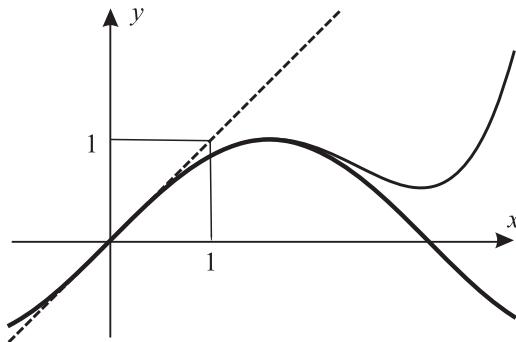


Рис. 3.13. Графики функций $y = x$ — пунктирная прямая;
 $y = x - x^3/6 + x^5/120$ — средняя кривая;
 $y = \sin x$ — нижняя кривая

Остаточный член имеет вид:

- в форме Лагранжа $R_{2n+2}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2n+3)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$, $0 < \theta < 1$;
- в форме Пеано $R_{2n+2}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{2n+2})$.

3. Разложение косинуса

$$f(x) = \cos x, \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \quad f^{(2l)}(0) = (-1)^l, \quad f^{2l+1}(0) = 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Остаточный член имеет вид:

- в форме Лагранжа $R_{2n+1}(x) = \frac{\cos\left(\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$, $0 < \theta < 1$;
- в форме Пеано $R_{2n+1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{2n+1})$.

4. Разложение логарифма

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + R_n(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + R_n(x) \quad \forall x \in (-1, +\infty).$$

Остаточный член имеет вид:

- в форме Лагранжа $R_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$;
- в форме Коши $R_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$;
- в форме Пеано $R_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$.

5. Разложение степенной функции

$$f(x) = (1+x)^\mu, f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n},$$

$$f^{(n)}(0) = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1),$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\mu &= 1 + \frac{\mu x}{1!} + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} x^n + R_n(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{k!} x^k + R_n(x) \quad \forall x \in (-1, +\infty). \end{aligned}$$

Остаточный член имеет вид:

- в форме Лагранжа $R_n(x) = \frac{\mu \cdots (\mu-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\mu-n+1} x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$;
- в форме Коши $R_n(x) = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{n!} (1+\theta x)^{\mu-n+1} (1-\theta)^n x^{n+1}$;
- в форме Пеано $R_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$.

В частности,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).$$

Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений

Построим приближенную формулу для вычисления e^x на промежутке $0 \leq x \leq 0,1$ с погрешностью не более 0,00001. Используем разложение экспоненты по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{2|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{2(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 \leq x \leq 0,1.$$

Из неравенства $\frac{2(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 0,00001$ методом подбора найдем наименьшее n , при котором выполняется последнее неравенство: $n = 3$. Следовательно, на отрезке $0 \leq x \leq 0,1$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

с погрешностью, не большей, чем 0,00001.

Применение формулы Тейлора для раскрытия неопределенностей

Для раскрытия неопределенностей используют формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пример 3.9. Вычислим предел

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}.$$

Используя разложения функций e^x и $\sin x$ по формуле Тейлора, найдем разложение функции $e^{\sin x}$ до члена, содержащего x^2 ,

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)} = 1 + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^2 + o \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Теперь можем вычислить искомый предел

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

ГЛАВА 4
**ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ
С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ**

4.1. Критерий монотонности

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к ее графику, а знак углового коэффициента показывает, острый или тупой угол образует касательная к графику с положительным направлением оси Ox , поэтому ясно, что знак производной указывает, возрастает или убывает функция.

Критерий монотонности

Для возрастания дифференцируемой функции $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы на интервале (a, b) производная функции была неотрицательна:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b);$$

для убывания, чтобы производная функции была неположительна:

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Доказательство для возрастающей функции. Необходимость. Пусть x_0 — произвольная точка интервала (a, b)

$$\forall x \in (a, b) : x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0),$$

$$\forall x \in (a, b) : x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Значит,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad x \neq x_0, x \in (a, b).$$

Отсюда и из дифференцируемости функции в точке x_0 следует, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

Достаточность. Для любых $x_1, x_2 \in |a, b| : x_1 < x_2$ применим теорему Лагранжа к функции $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2, \quad f'(c) \geq 0.$$

Отсюда $\forall x_1, x_2 \in |a, b| : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. \triangleleft

Условия критерия монотонности не обеспечивают строгой монотонности функции.

Пример 4.1. Производная функции (рис. 4.1)

$$f(x) = \begin{cases} (x + 1/2)^3, & x \leq -1/2, \\ 0, & -1/2 < x < 1/2, \\ (x - 1/2)^3, & x \geq 1/2, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 3(x + 1/2)^2, & x \leq -1/2, \\ 0, & -1/2 < x < 1/2, \\ 3(x - 1/2)^2, & x \geq 1/2, \end{cases}$$

неотрицательна (рис. 4.2), но функция не является строго возрастающей.

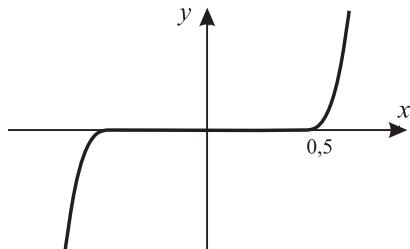


Рис. 4.1. График нестрого возрастающей функции

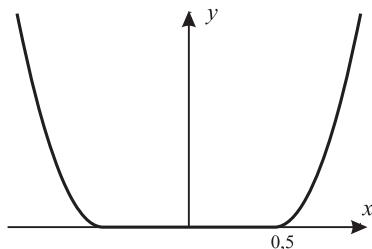


Рис. 4.2. График производной нестрого возрастающей функции

Критерий строгой монотонности

Для строгого возрастания (строгого убывания) дифференцируемой функции $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad (f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)),$$

причем $f'(x)$ не обращается в нуль ни на одном интервале (α, β) из $|a, b|$.

Доказательство следует из критерия монотонности и из критерия постоянства дифференцируемой функции. \triangleleft

Пример 4.2. Функция $f(x) = x^3$ строго монотонна на $(-\infty, +\infty)$, так как $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, причем $f'(x) = 0$ лишь в одной точке $x = 0$.

4.2. Локальный экстремум

Внутреннюю точку x_0 промежутка $|a, b|$ называют точкой:
— локального максимума функции $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$, если

$$f(x_0) \geq f(x)$$

для всех x из некоторой δ -окрестности $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, точки x_0 ;
— строгого локального максимума, если

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], x \neq x_0;$$

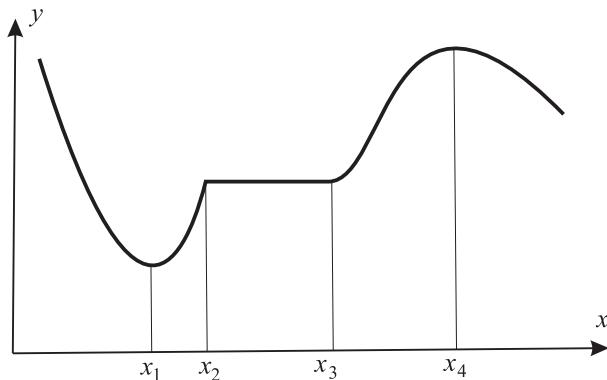
— локального минимума, если

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta];$$

— строгого локального минимума, если

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], x \neq x_0.$$

Точки локального минимума и локального максимума называют точками локального экстремума (рис. 4.3).



Rис. 4.3. Точки локального экстремума:
 x_1 — точка строгого локального минимума;
 x_2 — точка локального максимума; x_3 — точка локального минимума;
 x_4 — точка строгого локального максимума

Необходимое условие локального экстремума

|| Если x_0 — точка локального экстремума дифференцируемой в точке x_0 функции, то x_0 — стационарная точка функции.

Доказательство следует из теоремы Ферма.

Таким образом, для дифференцируемой функции точками, подозрительными на точки локального экстремума, являются лишь корни уравнения $f'(x) = 0$.

Рассмотрим непрерывную на интервале (a, b) функцию f . Допустим, что f дифференцируема во всех точках интервала (a, b) , кроме точки $x = c$. Точка c может оказаться точкой локального экстремума. Например, функция $y = |x|$ недифференцируема в точке $x = 0$ и имеет в ней локальный минимум.

Таким образом, точками, подозрительными на локальный экстремум непрерывной функции, являются стационарные точки и точки, в которых функция недифференцируема.

Для исследования точек, подозрительных на локальный экстремум, используют следующее правило.

Первое правило

Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ и непрерывна в точке x_0 и пусть x_0 является либо стационарной точкой функции, либо точкой, в которой функция недифференцируема. Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка локального максимума, если с плюса на минус, то x_0 — точка локального минимума. Если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Доказательство для локального максимума. На интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ функция возрастает, а на $(x_0, x_0 + \delta)$ убывает, следовательно, x_0 — точка локального максимума. \triangleleft

Следующие два правила применимы лишь для исследования стационарных точек функции.

Второе правило

Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 . Тогда, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство для локального максимума. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2,$$

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0, \quad 0 < \theta < 1.$$

На основании теоремы о стабилизации знака существует $\delta > 0$, что $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, следовательно, $f''(x_0 + \theta(x - x_0)) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2 \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Третье правило

Пусть функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если n — четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума; если n — четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума; если n — нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n.$$

Если n — четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то по теореме о стабилизации знака существует $\delta > 0$ такое, что $f^{(n)}(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Отсюда $f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0)) > 0$, следовательно, $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, x_0 — точка локального минимума.

Если n — четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то исследование точки x_0 аналогично предыдущему случаю.

Если n — нечетное и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ (пусть для определенности $f^{(n)}(x_0) > 0$), то существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, следовательно, x_0 не является точкой локального экстремума. \triangleleft

4.3. Выпуклая функция

Функцию $f : |a, b| \rightarrow R$ называют:

— выпуклой на промежутке $|a, b|$, если $\forall x_0, x_1 \in |a, b|$, $\forall \tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) \leq f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0)); \quad (4.1)$$

— строго выпуклой, если $\forall x_0, x_1 \in |a, b|$, $x_0 \neq x_1$, $\forall \tau \in (0, 1)$

$$f(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) < f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0)). \quad (4.2)$$

Аналогично определяют вогнутые и строго вогнутые функции. Функцию f называют:

— вогнутой, если

$$f(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) \geq f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0))$$

$$\forall x_0, x_1 \in |a, b|, \quad \forall \tau \in (0, 1);$$

— строго вогнутой, если

$$f(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) > f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0))$$

$$\forall x_0, x_1 \in |a, b|, \quad x_0 \neq x_1, \quad \forall \tau \in (0, 1).$$

Приведем геометрическую интерпретацию данного определения. Когда τ пробегает интервал $(0, 1)$, то точка $x_\tau = x_0 + \tau(x_1 - x_0)$ пробегает интервал с концами x_0 и x_1 . Пусть (x_τ, y_τ) — точка, лежащая на секущей к графику функции, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$. Функция выпукла, если $f(x_\tau) \leq y_\tau$ для любых $x_0, x_1 \in (a, b)$ и $\tau \in (0, 1)$. Это означает, что часть графика выпуклой функции, находящаяся между точками пересечения графика и любой секущей, лежит ниже этой секущей (рис. 4.4).

Из соотношения (4.1) в предположении, что $x_0 < x_1$, следует

$$f(x_\tau) - f(x_0) \leq \tau(f(x_1) - f(x_0)),$$

$$f(x_1) - f(x_\tau) \geq (1 - \tau)(f(x_1) - f(x_0)),$$

где

$$\tau = \frac{x_\tau - x_0}{x_1 - x_0}, \quad 1 - \tau = \frac{x_1 - x_\tau}{x_1 - x_0}.$$

Отсюда

$$\frac{f(x_\tau) - f(x_0)}{x_\tau - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \tag{4.3}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_\tau)}{x_1 - x_\tau} \geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{4.4}$$

Обозначим через $k(M'M'')$ угловой коэффициент прямой, проходящей через точки M' и M'' . Возьмем три точки $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$, $M_3(x_3, f(x_3))$, лежащие на графике функции f . Из неравенств (4.3), (4.4) следует, что для выпуклой функции (рис. 4.5)

$$k(M_1 M_2) \leq k(M_1 M_3) \leq k(M_2 M_3). \tag{4.5}$$

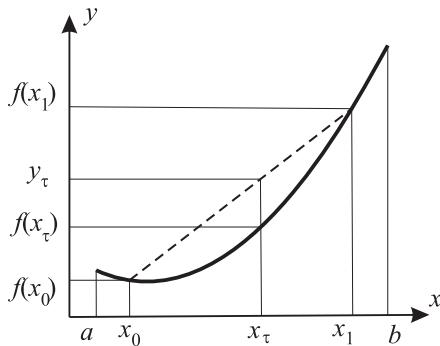


Рис. 4.4. График выпуклой функции

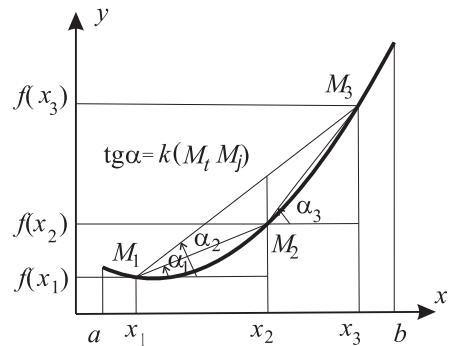


Рис. 4.5. Геометрический смысл неравенства (4.5)

Критерий выпуклости дифференцируемой функции

Пусть f дифференцируема на $[a, b]$. Для выпуклости f на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была возрастающей функцией на интервале (a, b) .

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_1, x_2, x_3 \in (a, b) : x_1 < x_2 < x_3$. В неравенствах (4.5) устремим сначала x_2 к x_1 , а затем x_2 к x_3 , получим

$$f'(x_1) \leq k(M_1 M_3) \leq f'(x_3).$$

Достаточность. Используя формулу Лагранжа, для любых $x_0, x_1 : x_0 < x_1$, для любого $\tau \in (0, 1)$ имеем

$$f(x_\tau) - f(x_0) = f'(c_1)(x_\tau - x_0) = f'(c_1)\tau(x_1 - x_0),$$

$$f(x_1) - f(x_\tau) = f'(c_2)(x_1 - x_\tau) = f'(c_2)(1 - \tau)(x_1 - x_0),$$

$$a < c_1 < c_2 < b, \quad f'(c_1) \leq f'(c_2),$$

$$\tau(f(x_1) - f(x_\tau)) \geq (1 - \tau)(f(x_\tau) - f(x_0)),$$

$$f(x_\tau) \leq f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0)). \quad \diamond$$

Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции

Пусть f дважды дифференцируема на $[a, b]$. Для выпуклости f на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Доказательство вытекает из критерия выпуклости дифференцируемой функции и из критерия монотонности. \triangleleft

Критерий строгой выпуклости дважды дифференцируемой функции

Пусть f дважды дифференцируема на $[a, b]$. Для строгой выпуклости f на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b),$$

причем вторая производная $f''(x)$ не обращается в нуль ни на одном интервале (α, β) из $[a, b]$ (доказать).

Если $y = f(x)$ — вогнутая функция, то $y = -f(x)$ — выпуклая. Отсюда и из критерия выпуклости дважды дифференцируемой функции вытекает следующий критерий.

Критерий вогнутости дважды дифференцируемой функции

Пусть f дважды дифференцируема на $[a, b]$. Для вогнутости f на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

4.4. Точка перегиба

Точку x_0 называют точкой перегиба функции $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, если f имеет производную в точке x_0 (конечную или бесконечную определенного знака) и f выпукла на одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ и вогнута на другом.

Необходимое условие перегиба

Если функция $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и x_0 — точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Допустим противное $f''(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. По теореме о стабилизации знака $\exists \delta_1, 0 < \delta_1 \leq \delta, \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \Rightarrow f''(x) > 0$. Согласно критерию строгой выпуклости, $f(x)$ строго выпукла на интервале $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, что противоречит определению точки перегиба. \triangleleft

Таким образом, подозрительными на точки перегиба для дважды непрерывно дифференцируемой функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ являются лишь точки, удовлетворяющие уравнению $f''(x) = 0$. Корни этого уравнения называют точками с прямления функции f .

Рассмотрим функцию f , непрерывную на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и дифференцируемую во всех точках этого интервала, кроме точки x_0 . Если $f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$, то точка x_0 может оказаться точкой перегиба.

Пример 4.3. Для функции $y = 1 + \sqrt[3]{x - 1}$ точка $x = 1$ является точкой перегиба, в которой $y'(0) = +\infty$ (рис. 4.6)

Рассмотрим теперь функцию f , дифференцируемую на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, но которая не имеет второй производной в точке x_0 . Точка x_0 может оказаться точкой перегиба.

Пример 4.4. Для функции

$$y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^5, & x < 0, \end{cases} \quad y'' = \begin{cases} 2, & x > 0, \\ 20x^3, & x < 0, \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой перегиба, в которой функция не имеет второй производной (рис. 4.7).

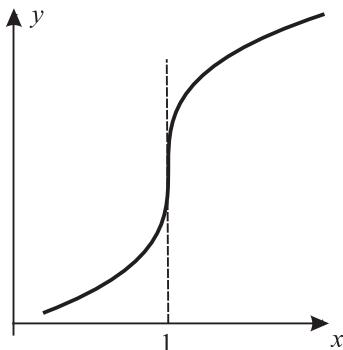


Рис. 4.6. $x = 1$ — точка перегиба, в которой $f'(x) = +\infty$

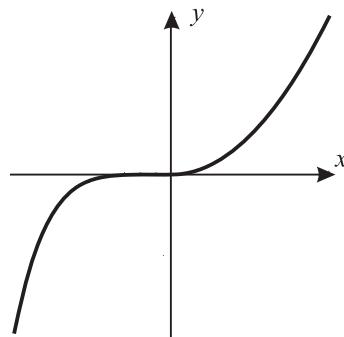


Рис. 4.7. $x = 0$ — точка перегиба, в которой функция не является дважды дифференцируемой

Таким образом, точками, подозрительными на точки перегиба, являются корни уравнения $f''(x) = 0$; точки, в которых функция непрерывна и $f'(x) = +\infty$ или $f'(x) = -\infty$; точки, в которых функция f дифференцируема, но не является дважды дифференцируемой.

Для исследования точек, подозрительных на точки перегиба, используют следующее правило.

Первое правило

Пусть x_0 — точка, подозрительная на точку перегиба для дважды непрерывно дифференцируемой на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, функции f . Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 — точка перегиба. Если при переходе через точку x_0 вторая производная не меняет знак, то x_0 не является точкой перегиба.

Доказательство вытекает из критериев выпуклости и вогнутости дважды дифференцируемой функции. \triangleleft

Следующие два правила применимы лишь для исследования точек спрямления функции.

Второе правило

Если функция f трижды непрерывно дифференцируема на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, и $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то точка спрямления x_0 является точкой перегиба.

Доказательство для случая $f'''(x_0) > 0$. По теореме о стабилизации знака $\exists \delta_1 : 0 < \delta_1 \leq \delta, \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \Rightarrow f'''(x) > 0$. На основании критерия строгой монотонности вторая производная строго возрастает и обращается в нуль в точке x_0 , значит $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 . По первому правилу x_0 — точка перегиба. \triangleleft

Третье правило

Пусть функция f — n раз непрерывно дифференцируема на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, и

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда при нечетном n точка спрямления x_0 — точка перегиба, а при четном n x_0 не является точкой перегиба.

Доказательство. Представим $f''(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!} (x - x_0)^{n-2}. \quad (4.6)$$

Если n — четное, то из формулы (4.6) следует, что $f''(x)$ не меняет знак в некоторой окрестности точки x_0 и по первому правилу в точке x_0 перегиба нет. Если n — нечетное, то $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 , так как меняет знак функция $(x - x_0)^{n-2}$, что обеспечивает перегиб по первому правилу. \triangleleft

4.5. Глобальный экстремум

Рассмотрим функцию $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $\sup_{x \in X} f(x) = M$, $\inf_{x \in X} f(x) = m$, $-\infty < M \leq +\infty$, $-\infty \leq m < +\infty$, — экстремальные значения для f на множестве X . Если существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что $f(\bar{x}) = M$, то \bar{x} называют

точкой глобального максимума и пишут $M = \max_{x \in X} f(x)$. Если существует $\underline{x} \in X$ такая, что $f(\underline{x}) = m$, то \underline{x} называют точкой глобального минимума и пишут $m = \min_{x \in X} f(x)$.

Укажем способ нахождения глобальных экстремумов непрерывной функции f в двух случаях: 1) X — отрезок $[a, b]$, 2) X — интервал (a, b) .

В первом случае, по теореме Вейерштрасса, точки глобального экстремума (максимума и минимума) заведомо существуют. Если точка глобального экстремума — внутренняя точка отрезка $[a, b]$, то она является и точкой локального экстремума. Допустим, что f имеет конечное число точек ξ_1, \dots, ξ_l , подозрительных на точки локального экстремума, принадлежащих интервалу (a, b) . Для выявления точек глобального экстремума (рис. 4.8) достаточно найти значения функции $f(\xi_1), \dots, f(\xi_l)$ и сравнить их со значениями $f(a)$ и $f(b)$

$$M = \max\{f(\xi_1), \dots, f(\xi_l), f(a), f(b)\},$$

$$m = \min\{f(\xi_1), \dots, f(\xi_l), f(a), f(b)\}.$$

Во втором случае допустим, что f имеет конечное число точек ξ_1, \dots, ξ_l , подозрительных на точки локального экстремума, принадлежащих интервалу (a, b) и существуют (конечные или бесконечные) пределы $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b-0)$. Вычислим значения функции $f(\xi_1), \dots, f(\xi_l)$. Если

$$\max\{f(\xi_1), \dots, f(\xi_l)\} = f(\xi_i) \geq \max\{f(a+0), f(b-0)\},$$

то ξ_i — точка глобального максимума, если $\max\{f(\xi_1), \dots, f(\xi_l)\} < \max\{f(a+0), f(b-0)\}$, то f не достигает глобального максимума на (a, b) и $\sup_{x \in X} f(x) = \max\{f(a+0), f(b-0)\}$. Аналогично находятся точки глобального минимума (рис. 4.9).

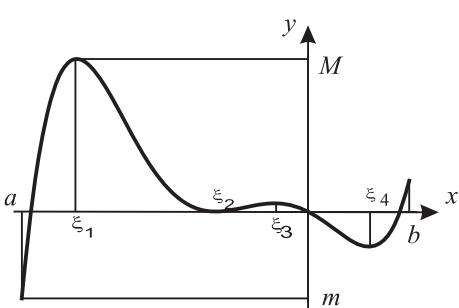


Рис. 4.8. $M = f(\xi_1)$ — глобальный максимум, $m = f(a)$ — глобальный минимум

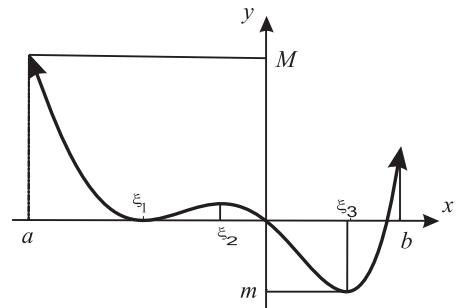


Рис. 4.9. $M = f(a+0)$ — глобальный максимум, $m = f(\xi_3)$ — глобальный минимум

Теорема о глобальном минимуме выпуклой функции

Если f — дифференцируемая выпуклая (вогнутая) на интервале (a, b) функция и $x_0 \in (a, b)$ — ее стационарная точка, то x_0 — точка глобального минимума (максимума), т. е. $f(x_0) = \min_{x \in (a, b)} f(x)$ ($f(x_0) = \max_{x \in (a, b)} f(x)$).

Доказательство для выпуклой функции. По критерию выпуклости дифференцируемой функции (п. 4.3) $f'(x)$ — возрастающая функция, кроме того, по условию $f'(x_0) = 0$, следовательно, $f'(x) \leq 0$ на интервале (a, x_0) и $f'(x) \geq 0$ на (x_0, b) . Согласно критерию монотонности (п. 4.1), функция $f(x)$ убывает на интервале (a, x_0) и возрастает на (x_0, b) . Следовательно, x_0 — точка глобального минимума. \triangleleft

Задача. Из прямоугольного листа жестки размером 6×5 , изготовить ящик наибольшего объема в форме параллелепипеда.

Решение. Если x — высота ящика, то его объем

$$V(x) = (6 - 2x)(5 - 2x)x, \quad 0 \leq x \leq 5/2, \quad V'(x) = 12x^2 - 44x + 30,$$

$$V'(x) = 0, \quad x_1 = \frac{11 - \sqrt{31}}{6}, \quad x_2 = \frac{11 + \sqrt{31}}{6} \notin [0, 5/2],$$

$$V\left(\frac{11 - \sqrt{31}}{6}\right) > 0, \quad V(0) = 0, \quad V(5/2) = 0.$$

Ответ: $x = \frac{11 - \sqrt{31}}{6}$.

4.6. Асимптоты

Рассмотрим функцию f , определенную на интервале (a, d) и $c \in (a, d)$.

Если $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$, то прямую $x = c$ называют левосторонней вертикальной асимптотой графика функции f . Если $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ — правосторонней вертикальной асимптотой (рис. 4.10). Если $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ — двухсторонней вертикальной асимптотой.

Если $d = +\infty$ и существуют числа k и b такие, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0, \tag{4.7}$$

то прямую $y = kx + b$ называют наклонной асимптотой графика при $x \rightarrow +\infty$ (рис. 4.11). Аналогично определяют наклонную асимптоту при $x \rightarrow -\infty$. Наклонные асимптоты — прямые, к которым приближается график функции при $x \rightarrow +\infty$ или при $x \rightarrow -\infty$.

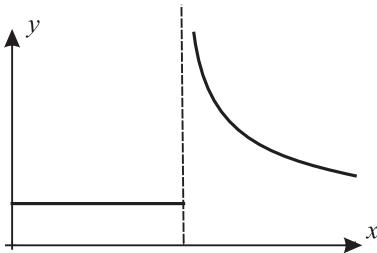


Рис. 4.10. Правосторонняя вертикальная асимптота

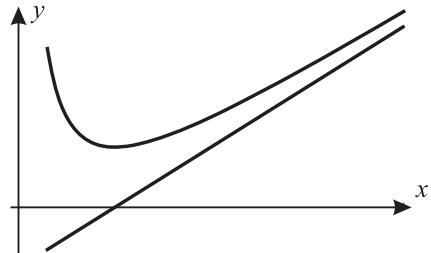


Рис. 4.11. Наклонная асимптота

Теорема о наклонной асимптоте

График функции f имеет наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) тогда и только тогда, когда найдется число k такое, что существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty(x \rightarrow -\infty)} (f(x) - kx)$. В этом случае

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty(x \rightarrow -\infty)} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty(x \rightarrow -\infty)} (f(x) - kx).$$

Доказательство. Необходимость. Условие (4.7) эквивалентно равенству $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$.

Достаточность. Пусть существует число k такое, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b \in R$. Тогда $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ и, следовательно, $y = kx + b -$ наклонная асимптота. Так как $f(x) - kx - b \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$, то $k = \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{o(1)}{x}$, $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. \triangleleft

Для нахождения коэффициентов k и b асимптоты $y = kx + b$ удобно использовать правило Лопитала.

Пример 4.5. Найдем наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ графика функции

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} - x \right) = -1,$$

то по теореме о наклонной асимптоте прямая $y = x - 1$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$ графика рассматриваемой функции.

4.7. Построение графиков функций

Для построения графика функции предварительно исследуют свойства функции по следующему плану.

- 1) Определяют множество задания функции. Выделяют участки непрерывности. Определяют характер разрывов. Находят вертикальные асимптоты.
- 2) Если функция f периодическая, то определяют ее период T и дальнейшие построения проводят на отрезке $[0, T]$. Полный график получают периодическим продолжением.
- 3) Если функция f четная или нечетная, то строят график лишь на промежутке $[0, \infty)$. Для построения всего графика четной функции достаточно построенный график отразить симметрично оси $0y$, в случае нечетной функции — относительно начала координат.
- 4) Находят наклонные асимптоты, определяя их параметры по формулам

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} (f(x) - kx).$$

5) Вычисляют производную $f'(x)$. Находят участки монотонности, решая неравенства $f'(x) \leq 0$ и $f'(x) \geq 0$. Находят точки, подозрительные на точки локального экстремума, и исследуют их на экстремум по одному из трех правил, рассмотренных в п. 4.2.

6) Вычисляют вторую производную $f''(x)$. Находят участки выпуклости и вогнутости, решая неравенства $f''(x) \geq 0$ и $f''(x) \leq 0$. Находят точки, подозрительные на точки перегиба, и исследуют их по одному из трех правил, рассмотренных в п. 4.4.

7) Выделяют другие свойства функции: точки пересечения с осями координат и т. д.

Пример 4.6. Построим график функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на \mathbb{R} . Находим наклонные асимптоты: $\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2}}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x) = 1/3$.

Прямая $y = x + 1/3$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$.

Вычисляем первую производную

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(3x+2), \quad x \neq 0, x \neq -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = +\infty, \quad f'_-(0) = -\infty,$$

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(-1 + \Delta x)^3 + (-1 + \Delta x)^2}}{\Delta x} = +\infty.$$

Стационарная точка функции $x = -2/3$. При переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «-», следовательно, $x = -\frac{2}{3}$ — точка локального максимума, причем $f(-2/3) = \sqrt[3]{4}/3$. В точках $x = 0, x = -1$ функция недифференцируема. Они также могут быть точками локального экстремума. При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с «-» на «+», следовательно, $x = 0$ — точка локального минимума, $f(0) = 0$. При переходе через точку $x = -1$ производная не меняет знак, $x = -1$ не является точкой локального экстремума.

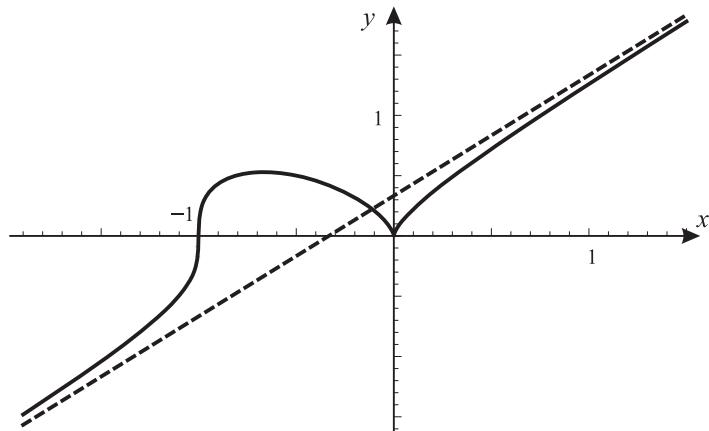


Рис. 4.12

Вычисляем вторую производную $f''(x) = -2/9(x+1)^{-\frac{5}{3}}x^{-\frac{4}{3}}, x \neq 0, x \neq -1$. На интервале $(-\infty, -1)$ $f''(x) > 0$, поэтому функция выпукла. На интервалах $(-1, 0)$ $(0, +\infty)$ $f''(x) < 0$, функция вогнута. Точка перегиба $x = -1$. Точки пересечения с осью $0x$: $x = -1, x = 0$. График функции изображен на рис. 4.12.

ГЛАВА 5

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1. Первообразная. Неопределенный интеграл

Первообразной для функции $f(x)$ на промежутке $|a, b|$ называют такую функцию $F(x)$, что

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in |a, b|.$$

Теорема об общем виде первообразной

Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$ на $|a, b|$, то функция $\Phi(x)$ также будет первообразной тогда и только тогда, когда $\Phi(x) = F(x) + C \quad \forall x \in |a, b|$, где C – постоянная. Другими словами, выражение $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, является общим видом первообразной для $f(x)$ на $|a, b|$.

Доказательство сразу следует из теоремы о функциях с совпадающими производными (п. 3.5). ◁

Совокупность всех первообразных для $f(x)$ на промежутке $|a, b|$ называют **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на $|a, b|$ и обозначают $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то, согласно теореме об общем виде первообразной, неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ равен $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Операция дифференцирования обратна операции неопределенного интегрирования

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

Операция неопределенного интегрирования обратна операции дифференцирования в том смысле, что

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют первообразные на промежутке $[a, b]$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$,

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \quad \forall x \in [a, b]. \quad (5.1)$$

В последней формуле в правой и левой части имеются произвольные постоянные. Здесь и далее считаем, что два выражения, содержащие произвольные постоянные, равны, если для каждого фиксированного значения произвольных постоянных в первом выражении найдутся значения произвольных постоянных во втором такие, что эти выражения принимают равные значения при всех x из рассматриваемого промежутка и, наоборот, для каждого фиксированного значения произвольных постоянных во втором выражении найдутся значения произвольных постоянных в первом такие, что выражения принимают равные значения при всех рассматриваемых x .

Таблица неопределенных интегралов

Непосредственной проверкой с помощью формул, приведенных в таблице производных, устанавливаются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1, & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \int e^x dx &= e^x + C, & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= \operatorname{ctg} x + C, x \neq \pi n, \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C, x \neq 0, & \int \frac{dx}{x^2+1} &= \operatorname{arctg} x + C, \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x + C, \\ && \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} &= \operatorname{th} x + C, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, |x| < 1, & & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \operatorname{arcsh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C, & & \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \operatorname{arcch} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C, x > 1. & & \end{aligned}$$

5.2. Методы вычисления неопределенных интегралов

1. Введение множителя под знак дифференциала

Предположим, что подынтегральную функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = g(u(x))u'(x)$ и возможно найти первообразную $G(u)$ для функции $g(u)$. Тогда $G(u(x))' = g(u(x))u'(x) = f(x)$, следовательно,

$$\int f(x)dx = G(u(x)) + C.$$

На практике

$$\int f(x)dx = \int g(u(x))u'(x)dx = \int g(u)du = G(u) + C = G(u(x)) + C.$$

Пример 5.1

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$$

2. Замена переменной

Пусть $x = \varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi'(t) \neq 0$, и $f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$. Если $t = \psi(x)$ — функция обратная к $x = \varphi(t)$ и $\int g(t)dt = G(t) + C$, то $(G(\psi(x)))' = g(\psi(x))\psi'(x) = f(x)$, следовательно,

$$\int f(x)dx = G(\psi(x)) + C.$$

На практике

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= [x = \varphi(t), t = \psi(x)] = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \\ &= \int g(t)dt = G(t) + C = G(\psi(x)) + C. \end{aligned}$$

Пример 5.2

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}dx &= [x = \sin t, t = \arcsin x] = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t)dt = \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

3. Интегрирование по частям

Рассмотрим две дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Поскольку $(uv)' = u'v + uv'$, то

$$\int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

и, следовательно,

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \quad (5.2)$$

Формулу (5.2) называют формулой интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

На практике

$$\begin{aligned} \int g(x)h(x)dx &= [u = g(x), du = g'(x)dx, h(x)dx = dv, v = H(x)] = \\ &= g(x)H(x) - \int H(x)g'(x)dx. \end{aligned}$$

Пример 5.3

1. $\int x \ln x dx = \left[\begin{array}{l} \ln x = u, du = dx/x, \\ xdx = dv, v = x^2/2 \end{array} \right] = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C;$
2. $\int x \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = u, du = dx/(1+x^2), \\ dx = dv, v = x \end{array} \right] =$
 $= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C;$
3. $\int x e^x dx = \left[\begin{array}{l} x = u, du = dx, \\ e^x dx = dv, v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C;$
4. $I = \int e^{ax} \sin bx dx = \left[\begin{array}{l} e^{ax} = u, du = ae^{ax} dx, \\ \sin bx dx = dv, v = -\cos bx/b \end{array} \right] =$
 $= -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx =$
 $= \left[\begin{array}{l} e^{ax} = u, du = ae^{ax} dx, \\ \cos bx dx = dv, v = \sin bx/b \end{array} \right] = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} +$
 $+ \frac{a}{b} \left(\frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx \right) = e^{ax} \left(\frac{a \sin bx}{b^2} - \frac{1}{b} \cos bx \right) - \frac{a^2}{b^2} I,$
 $I = e^{ax} \left(\frac{a}{a^2+b^2} \sin bx - \frac{b}{a^2+b^2} \cos bx \right) + C;$
5. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} =$
 $= \left[\begin{array}{l} x = u, du = dx, \\ xdx = dv, v = -\frac{1}{2(x^2+1)} \end{array} \right] =$
 $= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$

5.3. Разложение рациональной функции на простейшие дроби

Многочлены. Функцию вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

называют многочленом степени n . Приведем свойства многочленов, используемые нами в дальнейшем. Их доказательства приводятся в курсе алгебры.

- 1) Для совпадения двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые степени и равные соответствующие коэффициенты.
- 2) Всякий многочлен ненулевой степени имеет, по крайней мере, один корень, вообще говоря, комплексный.
- 3) Для любых двух многочленов

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0, \quad m < n,$$

существуют единственный многочлен $S_{n-m}(x)$ степени $n - m$ и единственный многочлен $R_r(x)$ степени $r < m$ такие, что

$$P_n(x) = Q_m(x) S_{n-m}(x) + R_r(x).$$

- 4) Многочлен $P(x)$ представим в виде $P(x) = (x - \alpha)S(x)$ в том и только том случае, если α — корень многочлена $P(x)$.
- 5) Если комплексное число $\alpha + i\beta$ является корнем многочлена, то и сопряженное число $\alpha - i\beta$ также является его корнем.
- 6) Всякий многочлен $P_n(x)$ ненулевой степени может быть, и притом единственным способом с точностью до перестановки сомножителей, представлен в виде

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_s)^{k_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t},$$

где $\alpha_j, j = 1, \dots, s$, — вещественные корни, k_j — их кратности; $x^2 + p_j x + q_j = (x - \alpha_j - i\beta_j)(x - \alpha_j + i\beta_j)$, $\beta_j \neq 0$, $x = \alpha_j + i\beta_j$, $x = \alpha_j - i\beta_j$, $j = 1, \dots, t$, — комплексные корни, l_j — их кратности; $k_1 + \dots + k_s + 2l_1 + \dots + 2l_t = n$.

Функцию вида $\frac{Q(x)}{P(x)}$, где $Q(x)$ и $P(x)$ — многочлены, называют рациональной функцией. Можем считать, что старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен 1. Рациональные функции видов

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k}, \quad \frac{M + Nx}{(x^2 + px + q)^l}, \quad p^2 - 4q < 0, \quad A, N, M \in \mathbb{R}, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

называют простейшими дробями. Говорят, что рациональная функция правильная, если степень многочлена $Q(x)$ меньше степени $P(x)$.

Теорема о разложении рациональной функции

Каждую правильную рациональную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей.

Доказательство. Разложим знаменатель рациональной функции $\frac{Q(x)}{P(x)}$ на множители

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_s)^{k_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t} = (x - \alpha_1)^{k_1} \bar{P}(x).$$

Представим рациональную функцию в виде

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{Q(x)}{(x - \alpha_1)^{k_1} \bar{P}(x)} - \frac{A_1}{(x - \alpha_1)^{k_1}} = \frac{A_1}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{Q(x) - A_1 \bar{P}(x)}{(x - \alpha_1)^{k_1} \bar{P}(x)}$$

Если в последнем выражении в качестве A_1 взять $A_1 = Q(\alpha_1)/\bar{P}(\alpha_1)$, то $x = \alpha_1$ — корень многочлена $Q(x) - A_1 \bar{P}(x)$. Поэтому

$$Q(x) - A_1 \bar{P}(x) = (x - \alpha_1) \bar{Q}(x), \quad \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{\bar{Q}(x)}{(x - \alpha_1)^{k_1-1} \bar{P}(x)}.$$

Далее, применяя те же рассуждения к рациональной функции $\frac{\bar{Q}(x)}{(x - \alpha_1)^{k_1-1} \bar{P}(x)}$, выделим дробь $\frac{A_2}{(x - \alpha_1)^{k_1-1}}$. Повторяем такие действия до тех пор, пока знаменатель рациональной функции имеет линейные множители. В результате получаем

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{A_i}{(x - \alpha_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{k_s} \frac{B_i}{(x - \alpha_s)^i} + \frac{\tilde{Q}(x)}{\tilde{P}(x)},$$

где $\tilde{P}(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}$.

Представим рациональную функцию $\frac{\tilde{Q}(x)}{\tilde{P}(x)}$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Q}(x)}{\tilde{P}(x)} &= \frac{M_1 + N_1 x}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \frac{\tilde{Q}(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \hat{P}(x)} - \frac{M_1 + N_1 x}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} = \\ &= \frac{M_1 + N_1 x}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \frac{\tilde{Q}(x) - (M_1 + N_1 x) \hat{P}(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \hat{P}(x)}, \end{aligned}$$

где $\hat{P}(\alpha_1 + i\beta_1) \neq 0, \beta_1 \neq 0$.

Выберем M_1 и N_1 таким образом, чтобы многочлен $T(x) = \tilde{Q}(x) - (M_1 + N_1x)\hat{P}(x)$ имел корень $\alpha_1 + i\beta_1$, т. е. так, чтобы выполнялось равенство $M_1 + N_1(\alpha_1 + i\beta_1) = \frac{\tilde{Q}(\alpha_1 + i\beta_1)}{\hat{P}(\alpha_1 + i\beta_1)}$. Пусть $\frac{\tilde{Q}(\alpha_1 + i\beta_1)}{\hat{P}(\alpha_1 + i\beta_1)} = c + id$. Если $N_1 = \frac{d}{\beta_1}$, $M_1 = c - \frac{d\alpha_1}{\beta_1}$, то $M_1 + N_1(\alpha_1 + i\beta_1) = c + id$. При указанных значениях постоянных M_1, N_1 многочлен $T(x)$ делится на $x - \alpha_1 - i\beta_1$, но тогда он делится и на $x^2 + p_1x + q_1$, поэтому $T(x) = (x^2 + p_1x + q_1)\hat{Q}(x)$,

$$\frac{\tilde{Q}(x)}{\hat{P}(x)} = \frac{M_1 + N_1x}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \frac{\hat{Q}(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1-1}\hat{P}(x)}.$$

Описанный процесс применим к рациональной функции $\frac{\hat{Q}(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1-1}\hat{P}(x)}$ и выделим дробь $\frac{M_2 + N_2x}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1-1}}$ и т. д. В результате получаем разложение рациональной функции на простейшие дроби

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} &= \sum_{i=1}^{k_1} \frac{A_i}{(x - \alpha_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{k_s} \frac{B_i}{(x - \alpha_s)^i} + \\ &+ \sum_{j=1}^{l_1} \frac{M_j + N_jx}{(x^2 + p_1x + q_1)^j} + \dots + \sum_{j=1}^{l_t} \frac{K_j + L_jx}{(x^2 + p_tx + q_t)^j}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.4. Вычисление коэффициентов разложения рациональной функции на простейшие дроби

Доказанная в п. 5.3 теорема о разложении рациональной функции на простейшие дроби позволяет применить для фактического разложения метод неопределенных коэффициентов. Представим функцию $\frac{Q(x)}{P(x)}$ в виде (5.3) с неопределенными коэффициентами $A_1, \dots, B_{k_s}, M_1, N_1, \dots, K_{l_t}, L_{l_t}$. После умножения равенства (5.3) на $P(x)$ получаем два совпадающих многочлена

$$Q(x) = Q^*(x). \quad (5.4)$$

Слева стоит многочлен $Q(x)$ с известными коэффициентами, а справа — многочлен $Q^*(x)$, коэффициенты которого являются линейными комбинациями от $A_1, \dots, B_{k_s}, M_1, N_1, \dots, K_{l_t}, L_{l_t}$. Из (5.4), используя один из описанных ниже методов, можно найти неизвестные коэффициенты $A_1, \dots, B_{k_s}, M_1, N_1, \dots, K_{l_t}, L_{l_t}$.

Способ соответствующих коэффициентов

Многочлены $Q(x)$ и $Q^*(x)$ записывают по убывающим степеням x . Приравнивая коэффициенты $Q(x)$ и $Q^*(x)$ при соответствующих степенях x , получают систему линейных уравнений относительно $A_1, \dots, B_{k_s}, M_1, N_1, \dots, K_{l_t}, L_{l_t}$. Решая эту систему, находят искомые коэффициенты.

Пример 5.4

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}, \quad 1 = A(x+2) + B(x+1),$$

$$(A+B)x + 2A + B = 1, \quad \begin{cases} A+B=0, \\ 2A+B=1, \end{cases} \quad A=1, B=-1 :$$

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x+2}.$$

Способ частных значений

Многочлены $Q(x)$ и $Q^*(x)$ не переписываются по убывающим степеням x , а сразу переменной x придаются подходящие конкретные значения, как правило, корни многочлена $P(x)$, и в результате получают систему линейных уравнений для коэффициентов $A_1, \dots, B_{k_s}, M_1, N_1, \dots, K_{l_t}, L_{l_t}$.

Пример 5.5

$$\frac{x+2}{x^2(x^2-1)} = \frac{x+2}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1},$$

$$x+2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x-1)(x+1) + Dx^2(x+1) + Ex^2(x-1),$$

$$x=0 \Rightarrow 2 = -A, A = -2, x=1 \Rightarrow 3 = 2B, B = 3/2,$$

$$x=-1 \Rightarrow 1 = -2E, E = -1/2, x=2 \Rightarrow 3 = 3A + 6B + 12D + 4E, D = 1/6 :$$

$$\frac{x+2}{x^2(x^2-1)} = \frac{-2}{x^2} + \frac{3/2}{x} + \frac{1/6}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}.$$

Способ домножения

При этом способе не переходят от тождества (5.3) к тождеству (5.4), а умножают (5.3) последовательно на $(x-\alpha_1)^{k_1}, \dots, (x^2+p_{l_t}x+q_{l_t})^{l_t}$ и полагают каждый раз в получившихся равенствах $x = \alpha_1, \dots, x = \alpha_{l_t} + i\beta_{l_t}$, где $\alpha_{l_t} + i\beta_{l_t}$ — корень многочлена $x^2 + p_{l_t}x + q_{l_t}$.

Пример 5.6

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{D}{x+3}.$$

Умножая последнее равенство поочередно на $(x+1), (x+2), (x+3)$ и полагая соответственно $x = -1, x = -2, x = -3$, получаем $A = -1/2, B = 2, D = -3/2$:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-3/2}{x+3}.$$

Пример 5.7

$$\frac{x}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{A}{x+2}.$$

Умножая поочередно на $(x-i), (x+2)$ и полагая соответственно $x = i, x = -2$, получаем $i/2 + i = Mi + N, N = 1/5, M = 2/5, A = 2/5$:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{2/5x + 1/5}{x^2+1} + \frac{2/5}{x+2}.$$

5.5. Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим сначала интегралы от простейших дробей.

$$1) \int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \quad k > 1.$$

$$2) \int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln|x-\alpha| + C.$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{N+Mx}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{N+Mx}{(x+p/2)^2+q-p^2/4} dx = \left[\begin{array}{l} x-p/2=t, \\ q-p^2/4=a^2, \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{Nt+M+Np/2}{t^2+a^2} dt = \frac{M+Np/2}{a} \int \frac{dt}{(t/a)^2+1} + \frac{N}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \\ &= \frac{M+Np/2}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{N}{2} \ln(t^2+a^2) + C = \\ &= \frac{M+Np/2}{a} \operatorname{arctg} \frac{x+p/2}{a} + \frac{N}{2} \ln(x^2+px+q) + C. \end{aligned}$$

$$4) \int \frac{N+Mx}{(x^2+px+q)^l} dx = \int \frac{Nt+M+Np/2}{(t^2+a^2)^l} dt = [M_1 = M+Np/2] =$$

$$\begin{aligned}
&= N \int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^l} + \frac{M_1}{a^2} \int \frac{a^2 + t^2 - t^2}{(t^2 + a^2)^l} dt = \\
&= \left[u = t, du = dt, \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^l} = dv, v = \frac{1}{2(1-l)} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{l-1}} \right] = \\
&= \frac{N}{(t^2 + a^2)^{l-1}} - \frac{M_1}{2a^2(1-l)} t + \frac{M_1}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2(1-l)} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{l-1}}, \quad l > 1.
\end{aligned}$$

С помощью таких же преобразований интеграл $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{l-1}}$ приводится в случае $l > 2$ к виду $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{l-2}}$. Повторяя этот прием до тех пор, пока не получим интеграл, рассмотренный в 3).

Перейдем теперь к вычислению неопределенного интеграла от произвольной рациональной функции $\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx$.

Если $Q(x)/P(x)$ является неправильной рациональной функцией, то многочлен $Q(x)$ представим в виде $Q(x) = P(x)S(x) + R(x)$, где $R(x)$ — многочлен, степень которого меньше степени $P(x)$. Отсюда $Q(x)/P(x) = S(x) + R(x)/P(x)$, где $R(x)/P(x)$ — правильная рациональная функция. Таким образом, интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных рациональных функций и многочленов. Представляя правильную рациональную функцию в виде суммы простейших дробей, а затем интегрируя каждую правильную дробь, мы найдем неопределенный интеграл от любой рациональной функции, причем, как показано выше, он является элементарной функцией.

5.6. Интегрирование иррациональных функций

В п. 5.5 был выделен широкий класс рациональных функций, которые обладают элементарной первообразной. В дальнейшем рассматриваются интегралы, вычисление которых сводится к интегрированию рациональных функций с помощью специальных подстановок.

Одночленом от двух переменных u и v называют выражение $Au^k v^m$, $k, m \in \mathbb{N}_0$, $A \in \mathbb{R}$. Многочлен от двух переменных — конечная сумма одночленов от двух переменных. Рациональная функция от двух переменных — частное двух многочленов. Легко видеть, что арифметическая комбинация рациональных функций — снова рациональная функция, так же как и композиция рациональных функций. В интегралах, рассматриваемых ниже, $R(u, v)$ — рациональная функция от двух переменных.

1. Интеграл вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n}{m}}\right) dx, \quad n, m \in \mathbb{N}, |a|+|c| \neq 0, |c| + |d| \neq 0.$

Положим $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m, \quad x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}, \quad dx = \frac{m(ad - cb)t^{m-1}}{(a - ct^m)^2} dt$, получим

$$\int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^n\right) \frac{m(ad - cb)t^{m-1}}{(a - ct^m)^2} dt.$$

Подынтегральная функция последнего интеграла — рациональная функция.

2. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad b^2 - 4ac \neq 0.$

Указанный интеграл рационализируется с помощью подстановок Эйлера:

$$\text{I. } a > 0, \sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t \quad (\text{или} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = -x\sqrt{a} + t),$$

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, \quad dx = \frac{2t(b - 2t\sqrt{a}) - (t^2 - c)2\sqrt{a}}{(b - 2t\sqrt{a})^2} dt,$$

$$\int R\left(\frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}\sqrt{a} + t\right) \frac{2t(b - 2t\sqrt{a}) - (t^2 - c)2\sqrt{a}}{(b - 2t\sqrt{a})^2} dt,$$

подынтегральная функция последнего интеграла — рациональная функция;

$$\text{II. } c > 0, \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + xt \quad (\text{или} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - xt),$$

$$x = \frac{b - 2t\sqrt{c}}{t^2 - a};$$

$$\text{III. } b^2 - 4ac > 0, x^2 + bx + c = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2),$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \lambda_1)t, \quad x = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 t}{1 - t}.$$

3. Интеграл от биномиального дифференциала $x^m(a + bx^n)^p dx.$

Интеграл $\int x^m(a + bx^n)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad |a| \neq 0, |b| \neq 0$, сводится к интегралу от рациональной функции лишь в трех случаях:

а) p — целое, б) $\frac{m+1}{n}$ — целое, в) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое.

В случае

а) замена $x = t^r$, где r — наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел m и n ;

б) замена $a + bx^n = t^s$, где s — знаменатель числа p ;

в) замена $ax^{-n} + b = t^s$, где s — знаменатель числа p .

Пример 5.8

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \left[m=0, n=4, p=-\frac{1}{4}, \frac{m+1}{n} + p = 0, t = (1+x^{-4})^{1/4}, \right.$$

$$x = (t^4 - 1)^{-1/4}, dx = -t^3(t^4 - 1)^{-5/4}dt \left. \right] = \int \frac{t^2 dt}{1-t^4} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C, \text{ где } t = (1+x^{-4})^{1/4}.$$

5.7. Интегрирование рационально-тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\cos x, \sin x) dx,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных. Синус и косинус рационально выражаются через тангенс половинного угла

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{где } t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right),$$

кроме того, $x = 2\operatorname{arctg} t, dx = 2dt/(1+t^2)$. Таким образом,

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция. Таким образом, замена $t = \operatorname{tg}(x/2)$ рационализирует рационально-тригонометрическую функцию $R(\cos x, \sin x)$.

Во многих случаях при вычислении первообразной для рационально-тригонометрической функции удобно применять специальные замены:

- a) если функция R удовлетворяет условию $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, то замена $\cos x = t$;
- б) $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, $\sin x = t$;
- в) $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 5.9

$$1. \int \frac{dx}{\sin x} = \left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, x = 2\operatorname{arctg} t, dx = 2 \frac{dt}{1+t^2} \right] =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$\begin{aligned}
 2. \int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} &= \left[\tg x = t, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, x = \right. \\
 &\quad \left. = \arctg t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \right] = \int \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \int \frac{d\left(t - \frac{1}{t}\right)}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\tg 2x}{\sqrt{2}} + C.
 \end{aligned}$$

Неберущиеся интегралы

Позже будет показано, что любая непрерывная на интервале I функция, имеет первообразную, а значит, и неопределенный интеграл. Однако интеграл от элементарной функции не обязательно является элементарной функцией. Например,

- 1) $\int e^{-x^2} dx$ — интеграл вероятности;
- 2) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ — интегральный синус;
- 3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм;
- 4) $\int \sin x^2 dx$ и $\int \cos x^2 dx$ — интегралы Френеля;
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $0 < k < 1$, — эллиптический интеграл первого рода в форме Лежандра.

Неэлементарные интегралы от элементарных функций условно называют неберущимися интегралами.

ГЛАВА 6
ИНТЕГРАЛ РИМАНА

6.1. Интегральные суммы и интеграл Римана

Рассмотрим функцию f , заданную на отрезке $[a, b]$. Возьмем разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$ на n частей точками x_k

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b.$$

Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\delta(\{x_k\}) = \max_k \Delta x_k$. Число $\delta(\{x_k\})$ называют диаметром разбиения. На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем точку ξ_k и построим интегральную сумму (рис. 6.1)

$$\sigma(\{x_k\}, \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

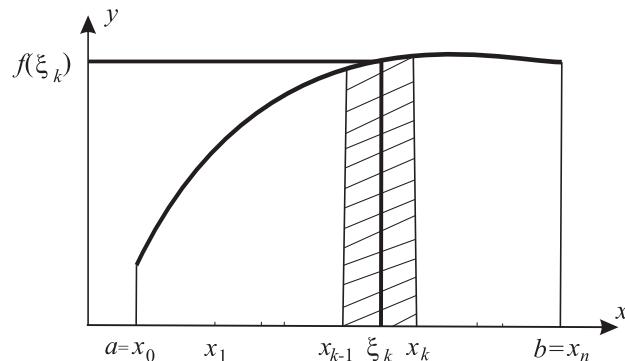


Рис. 6.1

Если существует число I такое, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{x_k\} : \delta(\{x_k\}) \leq \delta(\varepsilon), \forall \xi_k \Rightarrow |\sigma(\{x_k\}, \xi_k) - I| \leq \varepsilon, \quad (6.1)$$

то I называют **интегралом Римана** от f на $[a, b]$ и обозначают

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

При этом функцию f называют интегрируемой по Риману на $[a, b]$.

Пример 6.1. Рассмотрим функцию $y = L - \text{const}$, $x \in [a, b]$. При любом разбиении отрезка $[a, b]$ на n частей и при любом выборе точек ξ_k интегральная сумма σ равна $L(b - a)$. Поэтому функция $y = L$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ и $\int_a^b Ldx = L(b - a)$.

Первое необходимое условие интегрируемости по Риману

Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то для любой последовательности разбиений $(\{x_k\}_m)$, $a = x_0 < \dots < (x_{k-1})_m < (x_k)_m < \dots < x_{n_m} = b$, $m = 1, 2, \dots$, с диаметрами $\delta_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$, при любом выборе точек $(\xi_k)_m \in [(x_{k-1})_m, (x_k)_m]$ последовательность интегральных сумм $\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f((\xi_k)_m)(\Delta x_k)_m$ сходится при $m \rightarrow +\infty$ к $\int_a^b f(x)dx$, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n_m} f((\xi_k)_m)(\Delta x_k)_m = \int_a^b f(x)dx. \quad (6.2)$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta(\varepsilon)$ из условия (6.1). Затем возьмем произвольную последовательность разбиений с диаметрами $\delta_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$, выберем произвольным образом точки $(\xi_k)_m \in [(x_{k-1})_m, (x_k)_m]$ и построим последовательность интегральных сумм $\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f((\xi_k)_m)(\Delta x_k)_m$. Существует $v_\varepsilon > 0$, $\forall m \geq v_\varepsilon \Rightarrow \delta_m \leq \delta_\varepsilon$. Из условия (6.1) имеем

$$\forall m \geq v_\varepsilon \Rightarrow \left| \sigma_m - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \varepsilon,$$

что равносильно (6.2). \square

Второе необходимое условие интегрируемости по Риману

|| Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то f ограничена.

Доказательство. Допустим, что f не ограничена на $[a, b]$. Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$. Хотя бы на одном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$

функция f не ограничена. Зафиксируем все точки $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n$, кроме одной ξ_i . За счет выбора ξ_i соответствующая интегральная сумма может быть сделана сколь угодно большой. Поэтому (6.1) невозможно ни с каким конечным числом I . \triangleleft

M -лемма для интеграла Римана

Если существует число I такое, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{x_k\} : \delta(\{x_k\}) \leq \delta(\varepsilon), \forall \xi_k \Rightarrow |\sigma(\{x_k\}, \xi_k) - I| \leq M\varepsilon,$$

то f интегрируема по Риману на $[a, b]$ и $I = \int_a^b f(x)dx$.

Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рациональное,} \\ 0, & x \text{ — иррациональное,} \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

ограничена, но неинтегрируема на $[0, 1]$. Поскольку для любого разбиения при рациональных ξ_k имеем $\sigma = 1$, а при иррациональных — $\sigma = 0$.

6.2. Критерий Коши интегрируемости по Риману

Наряду с $\sigma(\{x_k\}, \xi_k)$ рассмотрим другую интегральную сумму $\tau(\{z_r\}, \gamma_r)$, построенную для разбиения $a = z_0 < z_1 < \dots < z_{r-1} < z_r < \dots < z_s = b$ с промежуточными точками γ_r :

$$\tau(\{z_r\}, \gamma_r) = \sum_{r=1}^s f(\gamma_r) \Delta z_r, \quad d(\{z_r\}) = \max_r \{\Delta z_r\}.$$

Критерий Коши интегрируемости по Риману

Для интегрируемости по Риману функции f на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{x_k\} : \delta(\{x_k\}) \leq \delta(\varepsilon), \forall \xi_k,$$

$$\forall \{z_r\} : d(\{z_r\}) \leq \delta(\varepsilon), \forall \gamma_r \Rightarrow |\sigma(\{x_k\}, \xi_k) - \tau(\{z_r\}, \gamma_r)| \leq \varepsilon. \quad (6.3)$$

Доказательство. Необходимость следует из неравенства

$$|\sigma - \tau| \leq |\tau - I| + |\sigma - I|.$$

Достаточность. Покажем сначала, что f ограничена. Допустим противное. Возьмем два произвольных разбиения $\{x_k\}, \{z_r\}$. Хотя бы на одном

отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция не ограничена. Зафиксируем все точки $\gamma_r, r = 1, \dots, s; \xi_k, k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, кроме одной ξ_i . За счет выбора ξ_i соответствующая интегральная сумма и, следовательно, разность $|\sigma - \tau|$ могут быть сделаны сколь угодно большими, что противоречит условию (6.3). Таким образом, $|f(x)| \leq M - \text{const} \quad \forall x \in [a, b]$. Ограничены и все интегральные суммы $|\sigma| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k \leq M(b-a)$.

Возьмем последовательность интегральных сумм (τ_m) с диаметрами разбиения $d(\{z_r\}_m) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$. На основании принципа выбора из последовательности (τ_m) можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\tau_{m_l} \xrightarrow[l \rightarrow +\infty]{} I$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из условия (6.3) найдем $\delta(\varepsilon) > 0$. Зафиксируем интегральную сумму τ_{m_l} , удовлетворяющую неравенству $|\tau_{m_l} - I| \leq \varepsilon$ и имеющую диаметр разбиения меньший, чем $\delta(\varepsilon)$. Из условия (6.3) имеем

$$\begin{aligned} \forall \{x_k\} : \delta(\{x_k\}) &\leq \delta(\varepsilon), \forall \xi_k \Rightarrow \\ \Rightarrow |\sigma(\{x_k\}, \xi_k) - I| &\leq |\sigma(\{x_k\}, \xi_k) - \tau_{m_l}| + |\tau_{m_l} - I| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда в силу M -леммы для интеграла Римана вытекает интегрируемость по Риману функции f на $[a, b]$. \triangleleft

6.3. Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции

Для двух разбиений $\{x_k\}, \{z_r\}$ отрезка $[a, b]$ через Δ_{kr} обозначим длину общей части отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ и $[z_{r-1}, z_r]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \Delta_{kr} = \Delta z_r, \quad \sum_{r=1}^s \Delta_{kr} = \Delta x_k,$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^s \Delta_{kr} = \sum_{r=1}^s \sum_{k=1}^n \Delta_{kr} = b - a.$$

Для двух интегральных сумм $\sigma(\{x_k\}, \xi_k)$ и $\tau(\{z_r\}, \gamma_r)$ разность $\sigma(\{x_k\}, \xi_k) - \tau(\{z_r\}, \gamma_r)$ можно представить в виде

$$\sigma(\{x_k\}, \xi_k) - \tau(\{z_r\}, \gamma_r) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^s (f(\xi_k) - f(\gamma_r)) \Delta_{kr}. \quad (6.4)$$

Лемма 6.1

Пусть δ и d — диаметры двух разбиений $\{x_k\}$ и $\{z_r\}$ отрезка $[a, b]$, а $\sigma(\{x_k\}, \xi_k), \tau(\{z_r\}, \gamma_r)$ — соответствующие интегральные суммы для функции $f(x)$. Тогда

$$\sigma(\{x_k\}, \xi_k) - \tau(\{z_r\}, \gamma_r) = \sum_{k,r, |\xi_k - \gamma_r| \leq \delta+d} (f(\xi_k) - f(\gamma_r)) \Delta_{kr}. \quad (6.5)$$

Доказательство. Если $|\xi_k - \gamma_r| > \delta + d$, то отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ и $[z_{r-1}, z_r]$ не имеют общих точек и, следовательно, $\Delta_{kr} = 0$. Поэтому в двойной сумме из равенства (6.4) остаются лишь слагаемые, указанные в сумме из соотношения (6.5). \triangleleft

Теорема об интегрируемости непрерывной на отрезке функции

Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема по Риману на этом отрезке.

Доказательство. По теореме Кантора f равномерно непрерывна, т. е. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon$. Для любых двух интегральных сумм $\sigma(\{x_k\}, \xi_k), \tau(\{z_r\}, \gamma_r)$, отвечающих разбиениям с диаметрами меньшими, чем $\delta(\varepsilon)/2$, на основании леммы 6.1 имеем

$$|\sigma(\{x_k\}, \xi_k) - \tau(\{z_r\}, \gamma_r)| \leq \sum_{k,r, |\xi_k - \gamma_r| \leq \delta(\varepsilon)} |f(\xi_k) - f(\gamma_r)| \Delta_{kr} \leq \varepsilon(b - a).$$

По критерию Коши интегрируемости по Риману функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$. \triangleleft

6.4. Свойства интеграла Римана

Интеграл Римана произошел от суммы и унаследовал многие свойства сумм. Определим

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx := 0.$$

1. Линейность. Если f_1 и f_2 — две интегрируемые по Риману на $[a, b]$ функции, то линейная комбинация $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, также интегрируема по Риману и

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x) dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x) dx. \quad (6.6)$$

Доказательство. Произвольную интегральную сумму τ функции g можно представить в виде

$$\tau = \sum_{k=1}^n (\alpha_1 f_1(\xi_k) + \alpha_2 f_2(\xi_k)) \Delta x_k = \alpha_1 \sum_{k=1}^n f_1(\xi_k) \Delta x_k + \alpha_2 \sum_{k=1}^n f_2(\xi_k) \Delta x_k. \quad (6.7)$$

Поскольку f_1, f_2 интегрируемы на $[a, b]$, то

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{x_k\} : \delta(\{x_k\}) \leq \delta(\varepsilon), \forall \xi_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f_i(\xi_k) \Delta x_k - \int_a^b f_i(x) dx \right| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (6.7) получаем

$$\left| \tau - \left(\alpha_1 \int_a^b f_1(x) dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x) dx \right) \right| \leq |\alpha_1| \varepsilon + |\alpha_2| \varepsilon.$$

На основании M -леммы для интеграла Римана функция g интегрируема по Риману и имеет место равенство (6.6). \triangleleft

Из свойства 1 интеграла Римана следует, что операции суммирования и интегрирования перестановочны

$$\int_a^b \sum_{r=1}^m f_r(x) dx = \sum_{r=1}^m \int_a^b f_r(x) dx.$$

2. Монотонность. Пусть функции f и g интегрируемы по Риману на $[a, b]$ и

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (6.8)$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (6.9)$$

Доказательство. Возьмем последовательности интегральных сумм σ_m, τ_m для функций f, g , построенные для одной и той же последовательности разбиений $(\{x_k\}_m)$ отрезка $[a, b]$ с диаметрами разбиения $\delta_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$ и при выборе одних и тех же промежуточных точек $(\xi_k)_m$. На основании первого необходимого условия интегрируемости

$$\sigma_m \rightarrow \int_a^b f(x) dx, \quad \tau_m \rightarrow \int_a^b g(x) dx \quad \text{при } m \rightarrow +\infty.$$

Из неравенства (6.8) вытекает $\sigma_m \leq \tau_m$. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $m \rightarrow +\infty$, получаем требуемое неравенство (6.9). \triangleleft

3. Аддитивность. Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда для любых $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx. \quad (6.10)$$

Доказательство. Пусть $\alpha < \gamma < \beta$. По теореме об интегрируемости непрерывной на отрезке функции отображение f интегрируемо на каждом из отрезков $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$, $[\alpha, \beta]$. Возьмем последовательность разбиений отрезка $[\alpha, \beta]$ такую, что точка γ каждый раз будет одной из точек деления, с диаметрами разбиения $\delta_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. В этом случае для любого разбиения интегральная сумма по отрезку $[\alpha, \beta]$ равна сумме интегральных сумм по отрезкам $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$

$$\sigma_{m, [\alpha, \beta]} = \sigma_{m, [\alpha, \gamma]} + \sigma_{m, [\gamma, \beta]}.$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $m \rightarrow +\infty$, приходим к формуле (6.10). \triangleleft

4. Теорема о среднем. Если f непрерывна на $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Доказательство. а) $a < b$, $d = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $D = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Возьмем последовательность интегральных сумм $\tau_m = \sum_{k=1}^{n_m} f((\xi_k)_m)(\Delta x_k)_m$ с диаметрами разбиения $\delta_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. Поскольку

$$d \sum_{k=1}^{n_m} (\Delta x_k)_m \leq \sum_{k=1}^{n_m} f((\xi_k)_m)(\Delta x_k)_m \leq D \sum_{k=1}^{n_m} (\Delta x_k)_m,$$

то переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в среднем члене последнего неравенства (крайние члены имеют постоянные значения), имеем

$$d(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq D(b - a). \quad (6.11)$$

Положим $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. Из (6.11) следует $d \leq \mu \leq D$. На основании теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = \mu$. Отсюда $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$.

б) $a > b$,

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx = -f(c)(a-b) = f(c)(b-a).$$

в) $b = a, 0 = 0$. \triangleleft

6.5. Теорема Барроу

Пусть f непрерывная на $[a, b]$ функция. Для любого $x \in [a, b]$ определен интеграл

$$\int_a^x f(t)dt = F(x), \quad (6.12)$$

который называют интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема Барроу

Производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции равна подынтегральной функции, вычисленной на верхнем пределе

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Доказательство. Используя теорему о среднем для интеграла Римана (п. 6.5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} (F(x + \Delta x) - F(x)) = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \frac{f(c)}{\Delta x} \Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x). \triangleleft \end{aligned}$$

Следствие 6.1

Любая непрерывная на $[a, b]$ функция имеет на $[a, b]$ первообразную

$$\int_a^x f(t)dt = F(x), \quad x \in [a, b].$$
6.6. Методы вычисления интегралов Римана**1. Формула Ньютона — Лейбница.** Выражение

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

называют *двойной подстановкой*. Полагая в равенстве (6.12) $x = b$, получаем

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b, \quad F(x) \Big|_a^b = \int_a^b f(x)dx \Big|_a^b.$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx \Big|_a^b \tag{6.13}$$

(при вычислении двойной подстановки неопределенные интегралы берутся при одном и том же значении произвольной постоянной). Формула (6.13) устанавливает связь между неопределенным интегралом и интегралом Римана, и ее называют *формулой Ньютона — Лейбница*.

Пример 6.2

$$1. \int_0^{\pi/2} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = 1; \quad 2. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \pi/4.$$

2. Формула замены переменной. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, а $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ — непрерывно дифференцируемое отображение такое, что $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Тогда имеет место следующая формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{6.14}$$

которую называют формулой замены переменной в интеграле Римана.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. По формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (6.15)$$

Так как $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, то по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad (6.16)$$

Из равенств (6.15), (6.16) следует формула (6.14). \triangleleft

На практике

$$\int_a^b f(x)dx = [x = \varphi(t), \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b] = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 6.3

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= [x = \sin t, dx = \cos t dt, \sin 0 = 0, \sin \pi/2 = 1] = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi/4. \end{aligned}$$

3. Формула интегрирования по частям. Пусть $u(x), v(x)$ — непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции. Тогда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \quad (6.17)$$

Доказательство. На основании формулы Ньютона — Лейбница и формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int u(x)v'(x)dx \Big|_a^b = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \triangleleft$$

Краткая запись формулы (6.17)

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 6.4

$$\int_1^2 \ln x dx = [u = \ln x, dx = dv, du = \frac{dx}{x}, v = x] = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1.$$

Замечание 6.1. Рассмотрим непрерывную функцию $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Для каждого $A > a$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, A]$, следовательно, определена функция $F(A) = \int_0^A f(x) dx$. Предел $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ называют несобственным интегралом от $f(x)$ по $[a, +\infty)$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Если этот предел конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся. Пусть $\Phi(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[a, +\infty)$ и пусть существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \Phi(+\infty)$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \Phi(A) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^{+\infty}.$$

Если $\varphi : [\alpha, +\infty) \rightarrow |D, B|$ — непрерывно дифференцируемая функция, $|D, B| \supset [a, b]$, $f : |D, B| \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (6.18)$$

Действительно, для каждого фиксированного $A > \alpha$ по формуле замены переменной в интеграле Римана имеем

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(A)} f(x) dx = \int_\alpha^A f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (6.19)$$

Перейдем к пределу в равенстве (6.19) при $A \rightarrow +\infty$, учитывая, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = b$, получаем формулу (6.18).

Пример 6.5

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} &= \left[\operatorname{tg} x = t, x = \arctg t, dx = \frac{dt}{1+t^2}, 1 + \cos^2 x = \frac{2+t^2}{1+t^2} \right] = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

6.7. Геометрический смысл интеграла Римана

Всякую совокупность точек на плоскости Oxy называют *фигурой*. Точку M_0 называют внутренней точкой фигуры Φ , если существует круг $B(M_0, \delta)$ с радиусом $\delta > 0$ и с центром в точке M_0 , принадлежащий Φ . Точку M_1 называют граничной, если в любом круге $B(M_1, \delta)$ имеются точки из Φ и точки, не принадлежащие Φ . Множество граничных точек называют границей фигуры. Фигура ограничена, если она содержится в некотором круге конечного радиуса, именно такие фигуры рассматриваем в этом п. 6.7. Под *прямоугольником* будем понимать как множество $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, так и множества, которые получаются из P удалением всей границы или ее части. Площадью прямоугольника P называют число $\operatorname{пл.} P = (b - a)(d - c)$. Фигуру называют *простой*, если ее можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся прямоугольников (рис. 6.2). За площадь простой фигуры принимают сумму площадей прямоугольников, из которых она составлена.

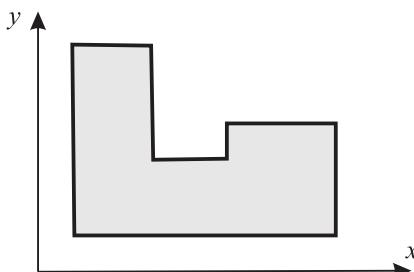


Рис. 6.2. Простая фигура

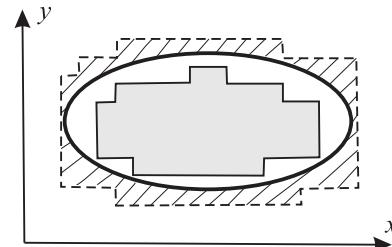


Рис. 6.3. Вписанная в эллипс и описанная около эллипса простые фигуры

Пусть P_*, P^* — соответственно вписанная и описанная простые фигуры для фигуры Φ , т. е. $P_* \subset \Phi \subset P^*$ и пусть $s_* = \sup_{P_* \subset \Phi} \{\operatorname{пл.} P_*\}$ — точная верхняя грань площадей всевозможных вписанных в фигуру Φ простых фигур,

а $s^* = \inf_{P^* \supset \Phi} \{\text{пл. } P^*\}$ — точная нижняя грань площадей всевозможных описанных около фигуры Φ простых фигур (рис. 6.3). Если $s_* = s^*$, то фигуру Φ называют квадрируемой, а величину $s = s_* = s^*$ — ее площадью.

Критерий квадрируемости

Фигура Φ квадрируема тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$, существуют квадрируемые фигуры Φ_, Φ^* такие, что $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$ и $|\text{пл. } \Phi_* - \text{пл. } \Phi^*| \leq \varepsilon$. При этом $\text{пл. } \Phi = \sup\{\text{пл. } \Phi_*\} = \inf\{\text{пл. } \Phi^*\}$.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Существуют простые вписанная и описанная фигуры P_*, P^* такие, что $\text{пл. } P^* - \text{пл. } P \leq \varepsilon/2$, $\text{пл. } P - \text{пл. } P_* \leq \varepsilon/2$. Отсюда $\text{пл. } P^* - \text{пл. } P_* \leq \varepsilon$.

Достаточность. Предположим противное, что фигура Φ неквадрируема, т. е.

$$s^* - s_* = q > 0. \quad (6.20)$$

Существуют вписанная Φ_* и описанная Φ^* квадрируемые фигуры и существуют простые фигуры P_*, P^* такие, что $P^* \supset \Phi^*$, $P_* \subset \Phi_*$, $\text{пл. } \Phi^* - \text{пл. } \Phi_* \leq q/4$, $\text{пл. } P^* - \text{пл. } \Phi^* \leq q/4$, $\text{пл. } \Phi_* - \text{пл. } P_* \leq q/4$. Отсюда $|\text{пл. } P^* - \text{пл. } P_*| < q$, что противоречит неравенству (6.20). \triangleleft

Пусть $f : [a, b] \rightarrow R$ — непрерывная и неотрицательная функция. Фигуру T на плоскости Oxy , ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox , сбоку прямыми $x = a$, $x = b$, называют криволинейной трапецией (рис. 6.4).

Возьмем разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$. На основании теоремы Вейерштрасса найдутся точка максимума $\bar{\xi}_k$ и точка минимума $\underline{\xi}_k$ функции f на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Интегральные суммы

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^n f(\bar{\xi}_k) \Delta x_k, \quad \sigma_* = \sum_{k=1}^n f(\underline{\xi}_k) \Delta x_k$$

равны площадям многоугольников, состоящих из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Первый — это многоугольник, описанный около трапеции, второй — вписанный в трапецию. Пусть σ_m^* , σ_{*m} — последовательности указанных интегральных сумм с диаметрами $\delta_m \rightarrow 0$. На основании теоремы об интегрируемости непрерывной на отрезке функции (п. 6.3) и первого необходимого условия интегрируемости (п. 6.1) последовательности σ_m^* , σ_{*m} при $\delta_m \rightarrow 0$ имеют общий предел $\int_a^b f(x) dx$. Таким образом, T — квадрируемая фигура и

$$\text{пл. } T = \int_a^b f(x) dx.$$

Пример 6.6. Найдем площадь фигуры T , ограниченной эллипсом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{пл. } T = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = [x = a \sin t] = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \pi ab.$$

Отсюда следует, что площадь кругового сектора радиусом R , соответствующего углу φ , равна $R^2\varphi/2$.

Геометрический смысл теоремы о среднем (п. 6.4): если f непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то на $[a, b]$ существует точка c такая, что криволинейная трапеция, соответствующая функции f , равновелика прямоугольнику с тем же основанием и высотой $f(c)$.

Площадь криволинейного сектора

Рассмотрим на плоскости $0xy$ криволинейный сектор P , т. е. фигуру, ограниченную множеством γ точек, полярные координаты которых удовлетворяют соотношению $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где $r(\varphi)$ — непрерывная функция, и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ (в случаях, когда на плоскости заданы две системы координат — полярная и декартова прямоугольная, всегда предполагается, что полюс полярной системы совпадает с началом координат декартовой, а полярная ось — с положительной частью оси $0x$) (рис. 6.5).

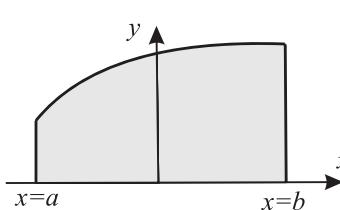


Рис. 6.4. Криволинейная трапеция

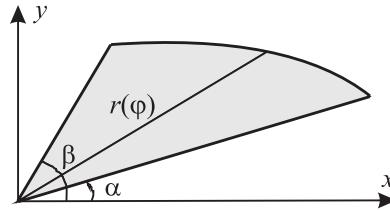


Рис. 6.5. Криволинейный сектор

Возьмем разбиение $\{\varphi_k\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ на n частей и пусть $r(\bar{\varphi}_k) = \max_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} r(\varphi)$, $r(\underline{\varphi}_k) = \min_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} r(\varphi)$. Суммы $\underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}r^2(\underline{\varphi}_k)\Delta\varphi_k$ и $\bar{\sigma} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}r^2(\bar{\varphi}_k)\Delta\varphi_k$ равны площадям вписанной и описанной фигур, каждая из которых состоит из n круговых секторов, следовательно, является квадрируемой. Суммы $\underline{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ также являются интегральными суммами для непрерывной, а следовательно, интегрируемой на $[\alpha, \beta]$ функции $1/2r^2(\varphi)$. Возьмем

мем две последовательности $\underline{\sigma}_m, \bar{\sigma}_m$ с диаметрами разбиения $\delta_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$.

Они имеют общий предел $1/2 \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$. По критерию квадрируемости фигура P квадрируема и

$$\text{пл. } P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

6.8. Длина кривой

Пусть $x(t), y(t)$ — две непрерывные функции, заданные на отрезке $[a, b]$.

Множество точек $M(t)$ с координатами $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, на плоскости Oxy называют **кривой** с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [a, b],$$

(если различны параметрические уравнения двух кривых, то кривые считаем различными, даже в том случае, когда совпадают множества точек на плоскости, соответствующие этим кривым).

Точку M_0 называют точкой самопересечения кривой, если существуют числа $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$, такие, что хотя бы одно из них принадлежит интервалу (a, b) и $M(t_1) = M(t_2) = M_0$. Кривую называют **простой**, если она не имеет точек самопересечения. Если $x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$, то кривую называют **замкнутой**.

Кривые, параметрические уравнения которых

$$\begin{cases} x = \sin 3t \cos t, \\ y = \sin 3t \sin t, \end{cases} t \in [0, \pi], \quad \begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi], \quad (6.21)$$

называют соответственно трехлепестковой розой и спиралью Архимеда, и они изображены на рис. 6.6, 6.7.

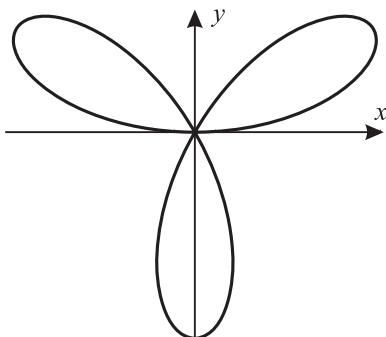


Рис. 6.6. Трехлепестковая роза,
(0,0) — точка самопересечения

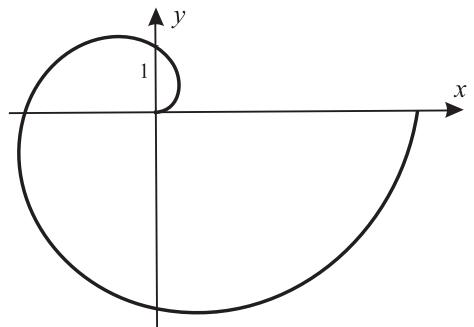


Рис. 6.7. Спираль Архимеда

Рассмотрим простую кривую

$$l : \begin{cases} x = x(t), & t \in [a, b], \\ y = y(t), & \end{cases} \quad (6.22)$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками t_k . Ломаная $L = M_0M_1 \dots M_n$, состоящая из отрезков, соединяющих точки $M_{k-1} = M(t_{k-1})$ и $M_k = M(t_k)$, $k = 1, \dots, n$, имеет общие с кривой l точки M_0, M_1, \dots, M_n , и ее называют ломаной, вписанной в кривую l . Длина ломаной L равна

$$\text{дл. } L = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Кривую l называют спрямляемой, если множество K длин всевозможных ломанных, вписанных в кривую, ограничено сверху, а величину $\sup K$ называют длиной спрямляемой кривой l .

Если функции $x(t), y(t)$ имеют на $[a, b]$ непрерывные производные $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ (точку вместо штриха часто используют для обозначения производной, если аргументом является t) и

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b),$$

т. е. производные \dot{x}, \dot{y} не обращаются в нуль одновременно на (a, b) , то кривую называют гладкой.

Лемма 6.2

|| Простая гладкая кривая (6.22) является спрямляемой.

Доказательство. Возьмем произвольную ломаную L , вписанную в кривую l . Пусть она состоит из n отрезков, тогда ее длина равна

$$\begin{aligned} \text{дл. } L &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\eta_k)} \Delta t_k, \quad \xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

На основании следствия из теоремы Вейерштрасса (п. 2.13)

$$\exists M > 0, \max_{t \in [a, b]} |\dot{x}(t)| \leq M, \max_{t \in [a, b]} |\dot{y}(t)| \leq M.$$

Отсюда и из равенства (6.23) имеем

$$\text{дл.}L \leq \sqrt{2}M(b-a),$$

следовательно, множество длин всевозможных ломаных, вписанных в кривую, ограничено сверху числом $\sqrt{2}M(b-a)$. Поэтому по теореме о гранях кривая l спрямляема и ее длина не превосходит $\sqrt{2}M(b-a)$. \triangleleft

Теорема о длине кривой

Длина простой гладкой кривой (6.22) равна

$$\text{дл.}l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt. \quad (6.24)$$

Доказательство. По лемме 6.2 кривая является спрямляемой. Возьмем последовательность (L_m) ломаных, вписанных в кривую l , соответствующих последовательности разбиений $\{t_k\}_m$, $0 \leq k \leq n_m$, отрезка $[a, b]$ с диаметрами δ_m , такую, что

$$\text{дл.}L_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} \text{дл.}l. \quad (6.25)$$

Поскольку при добавлении точек разбиения длина вписанной ломаной не уменьшается, то можно считать, что $\delta_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$ (в противном случае, добавляя точки разбиения в последовательность $\{t_k\}_m$, можно построить, исходя из последовательности (L_m) , последовательность ломаных, удовлетворяющих соотношению (6.25), для которой $\delta_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$). Из формулы (6.23) имеем

$$\begin{aligned} \text{дл.}L_m &= \sum_{k=1}^{n_m} \sqrt{\dot{x}^2((\xi_k)_m) + \dot{y}^2((\eta_k)_m)} (\Delta t_k)_m = \\ &= \sum_{k=1}^{n_m} \sqrt{\dot{x}^2((\xi_k)_m) + \dot{y}^2((\xi_k)_m)} (\Delta t_k)_m + A_m, \end{aligned} \quad (6.26)$$

где

$$\begin{aligned} A_m &= \sum_{k=1}^{n_m} (\sqrt{\dot{x}^2((\xi_k)_m) + \dot{y}^2((\eta_k)_m)} - \sqrt{\dot{x}^2((\xi_k)_m) + \dot{y}^2((\xi_k)_m)}) (\Delta t_k)_m = \\ &= \sum_{k=1}^{n_m} (\dot{y}((\eta_k)_m) - \dot{y}((\xi_k)_m)) (B_k)_m, \\ (B_k)_m &= \frac{\dot{y}((\xi_k)_m) + \dot{y}((\eta_k)_m)}{\sqrt{\dot{x}^2((\xi_k)_m) + \dot{y}^2((\eta_k)_m)} + \sqrt{\dot{x}^2((\xi_k)_m) + \dot{y}^2((\xi_k)_m)}} (\Delta t_k)_m. \end{aligned}$$

Так как $\sum_{k=1}^{n_m} |(B_k)_m| \leq b - a$, $|\dot{y}((\eta_k)_m) - \dot{y}((\xi_k))_m| \leq W(\dot{y}, \{t_k\}_m)$, то

$$|A_m| \leq (b - a)W(y, \{t_k\}_m),$$

где $W(\dot{y}, \{t_k\}_m)$ — колебание функции $\dot{y}(t)$, соответствующее разбиению $\{t_k\}_m$. Из теоремы о колебании функции (п. 2.15) следует

$$|A_m| \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (6.27)$$

Функция $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, следовательно, интегрируема на $[a, b]$. Из первого необходимого условия интегрируемости имеем

$$\sum_{k=1}^{n_m} \sqrt{\dot{x}^2((\xi_k)_m) + \dot{y}^2((\xi_k)_m)} (\Delta t_k)_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt. \quad (6.28)$$

Переходя к пределу в (6.26) при $m \rightarrow +\infty$ и используя соотношения (6.25), (6.27), (6.28), получаем требуемую формулу (6.24). \triangleleft

График Γ_f непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ считаем кривой с параметрическим уравнением $\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases} t \in [a, b]$. Если функция $f(x)$ не только непрерывна, но и непрерывно дифференцируема, то ее график Γ_f — простая гладкая кривая и

$$\text{дл. } \Gamma_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Рассмотрим на плоскости Oxy множество точек γ , полярные координаты которых удовлетворяют соотношению $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где $r(\varphi)$ — непрерывная функция. Это множество γ считаем кривой с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi, \\ y = r(\varphi) \sin \varphi, \end{cases} \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Если такая кривая γ является простой гладкой, то

$$\text{дл. } \gamma = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{((r(\varphi) \cos \varphi)')^2 + ((r(\varphi) \sin \varphi)')^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Пример 6.7. Найдем длину спирали Архимеда (6.21). По формуле (6.24)

$$\text{дл. } l = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt = [t = \operatorname{sh} x] = 2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}).$$

6.9. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на $[a, b]$. Определим интегральное колебание $\Omega(f, \{x_k\})$ функции f , соответствующее разбиению $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$, положив

$$\Omega(f, \{x_k\}) := \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k,$$

где $\omega_k = \sup_{\xi, \eta \in [x_{k-1}, x_k]} |f(\xi) - f(\eta)|$ — колебание функции на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$.

Пример 6.8. Найдем интегральное колебание функции $f(x) = x^2$, соответствующее разбиению отрезка $[0, 1]$ на n равных частей точками $x_k = k/n, k = 0, 1, \dots, n$. Действительно,

$$\omega_k = \sup_{\xi, \eta \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} |\xi^2 - \eta^2| = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{2k-1}{n^2},$$

$$\Omega(x^2, \{x_k\}) = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (2k-1) = \frac{1}{n^2}.$$

Необходимое условие Дарбу интегрируемости

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{x_k\} : \delta(\{x_k\}) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Omega(f, \{x_k\}) \leq \varepsilon.$$

Другими словами, если f интегрируема на $[a, b]$, то интегральное колебание меньше любого $\varepsilon > 0$ на всех разбиениях с достаточно малыми диаметрами.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши интегрируемости по Риману

$$\begin{aligned} \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{x_k\} : \delta(\{x_k\}) \leq \delta(\varepsilon), \forall \xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$ с диаметром разбиения $\delta(\{x_k\}) \leq \delta(\varepsilon)$. На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ существуют точки ξ_k, η_k такие, что

$$\omega_k = \sup_{\xi, \eta \in [x_{k-1}, x_k]} |f(\xi) - f(\eta)| \leq f(\xi_k) - f(\eta_k) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (6.30)$$

Используя неравенства (6.29), (6.30), имеем

$$\begin{aligned} \Omega(f, \{x_k\}) &= \sum_{k=1}^n \sup_{\xi, \eta \in [x_{k-1}, x_k]} |f(\xi) - f(\eta)| \Delta x_k \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n \left(f(\xi_k) - f(\eta_k) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) - f(\eta_k)) \Delta x_k \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Рассмотрим ограниченную функцию $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant A \quad \forall x \in [a, b]$. Возьмем разбиение $\{z_r\}$, $r = 0, 1, \dots, s$, отрезка $[a, b]$ на s частей. Обозначим через ρ_r , $\Omega(f, \{z_r\})$ и $\tau = \sum_{r=1}^s f(\eta_r) \Delta z_r$ колебание функции f на $[z_{r-1}, z_r]$, интегральное колебание и интегральную сумму, соответствующие этому разбиению.

Лемма 6.3

Для любой интегральной суммы $\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ **с диаметром разбиения** δ **выполняется неравенство** $|\sigma - \tau| \leqslant \Omega(f, \{z_r\}) + 2As\delta$.

Доказательство. Обозначим через Δ_{kr} длину общей части отрезков $[x_{k-1}, x_k], [z_{r-1}, z_r]$. Разность $\sigma - \tau$ можно представить в виде (п. 6.3)

$$\sigma - \tau = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^s (f(\xi_k) - f(\eta_r)) \Delta_{kr}.$$

Разобьем последнюю двойную сумму на два слагаемых Σ_1 и Σ_2 . В Σ_1 включим слагаемые с индексами k, r такими, что $[x_{k-1}, x_k] \subset [z_{r-1}, z_r]$, в Σ_2 — все остальные слагаемые. Для каждого слагаемого из первой суммы Σ_1 выполняется $\xi_k, \eta_r \in [z_{r-1}, z_r]$ и поэтому $|f(\xi_k) - f(\eta_r)| \leqslant \rho_r$, следовательно,

$$|\Sigma_1| \leqslant \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^s \rho_r \Delta_{kr} = \sum_{r=1}^s \rho_r \Delta z_r = \Omega(f, \{z_r\}). \quad (6.31)$$

В Σ_2 входят такие слагаемые, что либо $[x_{k-1}, x_k]$ и $[z_{r-1}, z_r]$ не имеют общих точек, и тогда $\Delta_{kr} = 0$, а значит, и это слагаемое равно нулю, либо интервал (x_{k-1}, x_k) содержит одну из точек z_r . Число таких интервалов не более чем s . Поскольку $|f(\xi_k) - f(\eta_r)| \leqslant |f(\xi_k)| + |f(\eta_r)| \leqslant 2A$, $\sum_{r=1}^s \Delta_{kr} = \Delta x_k \leqslant \delta$, то

$$|\Sigma_2| \leqslant s2A\delta. \quad (6.32)$$

На основании формул (6.31), (6.32) окончательно получаем

$$|\sigma - \tau| \leq |\Sigma_1| + |\Sigma_2| \leq \Omega(f, \{z_r\}) + 2As\delta. \triangleleft$$

Достаточное условие Дарбу интегрируемости

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{z_r\}$ отрезка $[a, b]$, по которому интегральное колебание $\Omega(f, \{z_r\})$ не превосходит $M\varepsilon$, где M не зависит ни от ε , ни от разбиения, то f интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство. Покажем сначала, что функция f ограничена на $[a, b]$. Если предположить противное, то для разбиения $\{z_r\}$ отрезка $[a, b]$ хотя бы одно из колебаний ω_r , а следовательно, и интегральное колебание $\Omega(f, \{z_r\})$ равно бесконечности, что противоречит условию теоремы.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\tau = \sum_{r=1}^s f(\eta_r)\Delta z_r$ — интегральная сумма, соответствующая разбиению $\{z_r\}$. Положим $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/s$. На основании леммы 6.3 для любых интегральных сумм σ' , σ'' , отвечающих разбиениям с диаметрами, не превосходящими $\delta(\varepsilon)$, имеем

$$|\sigma' - \sigma''| \leq |\sigma' - \tau| + |\sigma'' - \tau| \leq 2(\Omega(f, \{z_r\}) + 2As\delta(\varepsilon)) \leq (2M + 4A)\varepsilon.$$

В силу критерия Коши интегрируемости, функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. \triangleleft

Замечание 6.2. Доказанные необходимое и достаточное условия Дарбу дают критерий Дарбу интегрируемости функций: для интегрируемости необходимо, чтобы интегральное колебание по всякому достаточно мелкому разбиению было сколь угодно мало, и достаточно, чтобы интегральное колебание можно было сделать по подходящему разбиению сколь угодно малым. Кажущееся противоречие возникает из-за того, что существование хотя бы одного разбиения со сколь угодно малым интегральным колебанием обеспечивает малость интегральных колебаний для всех разбиений с достаточно малыми диаметрами.

Замечание 6.3. Достаточное условие Дарбу обеспечивает интегрируемость f на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$, если f интегрируема на всем отрезке $[a, b]$. Наоборот, если функция f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на $[a, b]$. Используя это свойство интегрируемой функции и доказательство аддитивности интеграла от непрерывной функции, легко видеть, что интеграл обладает свойством аддитивности для произвольной интегрируемой функции

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b.$$

6.10. Классы функций, интегрируемых по Риману

Функция f , заданная на $[a, b]$, будет заведомо интегрируемой по Риману на $[a, b]$ в следующих случаях:

1) Функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ (см. теорему об интегрируемости непрерывной функции).

2) Функция f монотонна на $[a, b]$. Действительно, в случае, например, возрастающей функции f для любого разбиения $\{x_k\}$ с диаметром δ имеем

$$\omega_k = f(x_k) - f(x_{k-1}), \quad \Omega(f, \{x_k\}) \leq (f(b) - f(a))\delta.$$

Следовательно, интегральное колебание $\Omega(f, \{x_k\})$ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора δ .

3) Функция f ограничена на $[a, b]$, т. е. $|f(x)| \leq A \quad \forall x \in [a, b]$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[\alpha, \beta]$, $a < \alpha < \beta < b$.

Действительно, согласно необходимому условию Дарбу интегрируемости для любого $\varepsilon > 0$, существует разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ такое, что интегральное колебание $\Omega(f, \{x_k\})$ меньше ε . Тогда интегральное колебание Ω , которое соответствует разбиению отрезка $[a, b]$, состоящему из точек разбиения отрезка $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ и точек a, b , удовлетворяет неравенству

$$\Omega \leq \Omega(f, \{x_k\}) + 2A\varepsilon \leq (1 + 2A)\varepsilon,$$

из которого, согласно достаточному условию Дарбу интегрируемости, следует интегрируемость f на $[a, b]$.

Замечание 6.4. Пусть g — функция, интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$. Из приведенного выше доказательства и определения интеграла Римана следует, что любая функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, совпадающая с g на интервале (a, b) , также интегрируема по Риману на $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$. Это замечание позволяет считать интегрируемыми по Риману на отрезке $[a, b]$ и те функции f , которые не определены в точках a и b , но становятся интегрируемыми по Риману после их доопределения на концах отрезка.

4) Функция f кусочно-монотонна на $[a, b]$. Это следует из аддитивности интеграла Римана и случая 2).

5) Функция f ограничена и имеет конечное число точек разрыва. Это следует из аддитивности интеграла и случая 3).

6) Функция f является произведением интегрируемых функций. Действительно, пусть

$$f(x) = g(x)h(x), \quad |g(x)| \leq A, \quad |h(x)| \leq B, \quad a \leq x \leq b.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |g(x'')||h(x'') - h(x')| + |h(x')||g(x'') - g(x')| \leq \\ &\leq A|h(x'') - h(x')| + B|g(x'') - g(x')|. \end{aligned}$$

Если интегральные колебания g и h для некоторого разбиения отрезка $[a, b]$ равны Ω_1 и Ω_2 , то для интегрального колебания Ω функции f справедлива оценка $\Omega \leq A\Omega_2 + B\Omega_1$, из которой с помощью достаточного условия Дарбу вытекает интегрируемость f на отрезке $[a, b]$.

Пример 6.9. Функция

$$y = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$ (см. рис. 2.18), но она интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$, поскольку ограничена на $[0, 1]$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < 1$, как непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция.

ГЛАВА 7

ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1. Последовательность в \mathbb{R}^2

Рассмотрим множество \mathbb{R}^2 пар (x, y) вещественных чисел. \mathbb{R}^2 является векторным пространством с обычными операциями сложения и умножения на вещественные числа. Между множеством элементов из \mathbb{R}^2 и множеством точек плоскости Oxy существует естественное взаимно однозначное соответствие. Поэтому элементы из \mathbb{R}^2 часто называют точками плоскости. Определим расстояние между двумя точками $A_1 = (x_1, y_1)$ и $A_2 = (x_2, y_2)$ из \mathbb{R}^2 по формуле

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

При таком определении расстояние между элементами A_1 и A_2 пространства \mathbb{R}^2 совпадает с расстоянием между точками плоскости, соответствующим A_1, A_2 .

Множество $B(A_0, \delta) = \{A \in \mathbb{R}^2 : \rho(A, A_0) < \delta\}$, $\delta > 0$, называют кругом с центром в точке A_0 с радиусом δ или δ -окрестностью точки A_0 (или просто окрестностью). Множество $D \subset \mathbb{R}^2$ называют открытым, если все его точки являются внутренними, т. е. для любой точки $A \in D$ найдется δ -окрестность этой точки, принадлежащая D . Дополнением D^C множества D называют совокупность всех точек из \mathbb{R}^2 , не входящих в D . Множество D замкнуто, если его дополнение открыто. Точку L называют границей для множества D , если любая δ -окрестность этой точки содержит точки из D и точки из D^C . Совокупность всех граничных точек образуют границу ∂D множества D . Объединение D с ∂D называют замыканием D и обозначают \overline{D} , например, $\overline{B(A_0, \delta)}$ — круг $B(A_0, \delta)$ с окружностью $C(A_0, \delta) = \{A \in \mathbb{R}^2 : \rho(A, A_0) = \delta\}$. D замкнуто тогда и только тогда, когда $D = \overline{D}$ (доказать). Точку A называют предельной для множества D , если в любой δ -окрестности этой точки содержатся точки из D , отличные от A . Точку A называют изолированной для D , если

существует δ -окрестность этой точки, в которой нет точек из D , отличных от A . Множество D связно, если любые две точки A_1, A_2 из D можно соединить кривой, лежащей в D , т. е. существуют две непрерывные функции $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [a, b]$, такие, что $(x(a), y(a)) = A_1$, $(x(b), y(b)) = A_2$ и множество точек $(x(t), y(t)), t \in [a, b]$, содержится в D .

Множество называют областью, если оно открыто и связно.

Множество D ограничено, если оно содержится в некотором круге, т. е. $\exists r > 0, \forall A \in D \Rightarrow \rho(A, O) \leq r, O = (0, 0)$. Множество H вида $H = D \cup \partial D$, где D — ограниченная область, называют ограниченной замкнутой областью.

Ограниченнное замкнутое множество называют компактом.

Если каждому натуральному числу (номеру) n поставлен в соответствие некоторый элемент $A_n \in \mathbb{R}^2, A_n = (x_n, y_n)$, то говорят, что в \mathbb{R}^2 задана последовательность

$$A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), \dots, A_n = (x_n, y_n), \dots.$$

Последовательность (A_n) называют сходящейся, если существует точка $B = (a, b)$ такая, что

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \rho(A_n, B) \leq \varepsilon \\ (\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leq \varepsilon). \end{aligned}$$

B называют пределом последовательности и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$ или $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$. Геометрически запись $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$ означает, что какую бы ε -окрестность точки B ни взять, все члены последовательности, за исключением конечного числа, попадут в эту ε -окрестность.

Точка A — предельная для множества D тогда и только тогда, когда существует последовательность (A_n) различных точек из D , сходящаяся к A (доказать).

Теорема о компакте

Если множество D является компактом, то из любой последовательности точек, содержащихся в D , можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке этого множества.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $A_n = (x_n, y_n) \in D$. Множество $\{A_n\}$ ограничено, следовательно, ограничены числовые последовательности $(x_n), (y_n)$, что позволяет, используя принцип выбора, выделить последовательно сходящиеся подпоследовательности $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a, y_{n_{k_m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} b$. Ясно, что

$$A_{n_{k_m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A = (a, b). \quad (7.1)$$

Допустим, что точка A не принадлежит D . Тогда $A \in D^C$. D^C — открытое множество. Существует ε -окрестность точки A , принадлежащая D^C , в которой нет точек последовательности (A_n) , что противоречит соотношению (7.1). Полученное противоречие показывает, что $A \in D$. \triangleleft

7.2. Предел функции двух переменных

Пусть D — подмножество из \mathbb{R}^2 . Функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ называют функцией двух переменных (ф2п) и обозначают $z = f(x, y)$ или $z = f(X)$. В дальнейшем через $0xyz$ обозначаем пространство, в котором задана декартовая прямоугольная система координат с осями x, y, z , а через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы, параллельные осям координат этой системы. Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называют множество точек пространства $0xyz$ с координатами $(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$, т. е.

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Линейная функция $z = ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ее графиком служит плоскость (рис. 7.1), перпендикулярная вектору $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - \mathbf{k}$ и проходящая через точку $(0, 0, c)$.

Графиком функции $z = a^2x^2 + b^2y^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, b \neq 0$, является эллиптический параболоид (рис. 7.2).

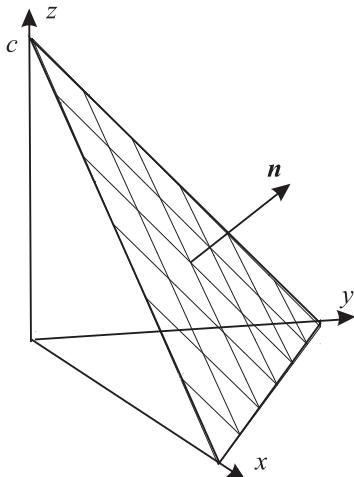


Рис. 7.1. График линейной функции

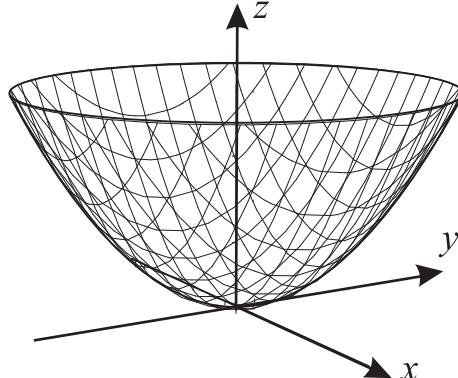


Рис. 7.2. Эллиптический параболоид

График функции $z = a^2x^2$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, — параболический цилиндр (рис. 7.3). Графиком функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является полусфера (рис. 7.4).

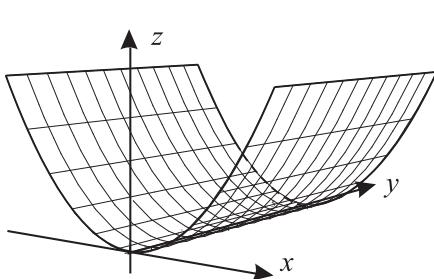


Рис. 7.3. Параболический цилиндр

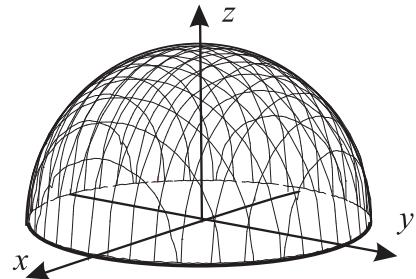


Рис. 7.4. Полусфера

Рассмотрим функцию $z = f(X)$, определенную в некоторой проколотой δ -окрестности E точки X_0 , т. е. в δ -окрестности точки X_0 за исключением точки X_0 .

Число p называют пределом f при $X \rightarrow X_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X \in E : 0 < \rho(X, X_0) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(X) - p| \leq \varepsilon,$$

пишут $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = p$ или $f(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} p$.

Критерий Гейне для ф2п

$\parallel f(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} p$ равносильно $\forall X_n \in E, X_n \neq X_0, X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X_0 \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$.

Доказательство проводится по схеме доказательства критерия Гейне для скалярных функций. \triangleleft

Критерий Гейне позволяет перенести на предел функций двух переменных все основные свойства скалярных функций.

- 1) Функция не может иметь более одного предела.
- 2) Если $f(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} p$, $g(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} q$, то
 - a) $f(X) + g(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} p + q$;
 - б) $\frac{f(X)}{g(X)} \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} \frac{p}{q}$, если $q \neq 0$.
- 3) Если $f(X) \leq g(X)$ в некоторой проколотой окрестности точки X_0 , $f(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} p$, $g(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} q$, то $p \leq q$.
- 4) Если $h(X) \leq f(X) \leq g(X)$ в некоторой проколотой окрестности точки X_0 , $h(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} q$, $g(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} q$, то $f(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} q$.
- 5) Произведение бесконечно малой функции $f(X)$, т. е. такой, что $f(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} 0$, на ограниченную в некоторой проколотой окрестности

точки X_0 функцию $g(X)$ — снова бесконечно малая функция, т. е. $f(X)g(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} 0$.

Пусть X_0 — предельная, но не внутренняя точка множества D . Если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X \in D : 0 < \rho(X, X_0) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(X) - p| \leq \varepsilon,$$

то число p называют пределом функции $f(X)$ при $X \rightarrow X_0$ вдоль множества D и обозначают $\lim_{X \rightarrow X_0, X \in D} f(X) = p$. В частности, пределы $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0)$ называют пределами функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) соответственно вдоль прямых $x = x_0$ и $y = y_0$.

Бесконечные пределы определяют обычным образом, например, говорят, что функция $f(X)$ стремится к $+\infty$ и пишут $f(X) \xrightarrow[X \rightarrow X_0]{} +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X \in E : 0 < \rho(X, X_0) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(X) \geq \varepsilon.$$

Аналогично обстоит дело с пределами на бесконечности: $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} f(x, y) = p$ означает

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall (x, y) \in E : |x| \geq \delta(\varepsilon), |y| \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x, y) - p| \leq \varepsilon;$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, b)} f(x, y) = \infty$ означает

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0, \exists \delta_2(\varepsilon) > 0, \forall (x, y) \in E : x \geq \delta_1(\varepsilon), |y - b| \leq \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow |f(x, y)| \geq \varepsilon.$$

Пример 7.1. Покажем, что

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим цепочку неравенств

$$\left| \frac{x+y}{x^2+y^2} \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{|x|+|y|} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{|x|} \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x| \geq \frac{2}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что если $|x| \geq \delta(\varepsilon) := 2/\varepsilon$, $|y| \geq \delta(\varepsilon)$, то $\left| \frac{x+y}{x^2+y^2} \right| \leq \varepsilon$.

Пример 7.2. Найдем предел

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)^{x^2}.$$

Из неравенства $x^2 + y^2 \geq 2xy$ следует, что $0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}$. Отсюда

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)^{x^2} = 0.$$

7.3. Непрерывная функция двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y) = f(X)$, определенную в некоторой δ -окрестности E точки $X_0 = (x_0, y_0)$. Функцию f называют непрерывной в точке X_0 , если ее предел при $X \rightarrow X_0$ совпадает со значением функции в точке X_0 , т. е.

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0).$$

С помощью « $\varepsilon - \delta$ » определение непрерывной в точке функции формулируется следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X \in E : \rho(X, X_0) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(X) - f(X_0)| \leq \varepsilon.$$

Функция f непрерывна в точке X_0 тогда и только тогда, когда приращение функции $\Delta z = f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)$ стремится к нулю при ΔX , стремящемся к $(0, 0)$.

Пусть X_0 — предельная, хотя и не обязательно внутренняя точка множества D . Если

$$\lim_{X \rightarrow X_0, X \in D} f(X) = f(X_0),$$

то f называют непрерывной в точке X_0 вдоль множества D .

Введенное понятие непрерывности функции в точке (x_0, y_0) иногда называют непрерывностью по совокупности переменных, в отличие от непрерывности по x и по y , т. е. непрерывности функций $f(x, y_0)$, $f(x_0, y)$ соответственно. Если f непрерывна в точке (x_0, y_0) по совокупности переменных, то она непрерывна и по x , и по y . Обратное утверждение, вообще говоря, неверно (пример 7.3).

Если X_0 — изолированная точка множества D , то функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ считаем непрерывной в точке X_0 вдоль множества D по определению.

Функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ называют непрерывной на множестве D , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Рассмотрим функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, определенные на множестве E . Пусть $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in D \quad \forall (u, v) \in E$, где D — множество, на котором определена функция $z = f(x, y)$. Можно построить сложную функцию $g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$, $(u, v) \in E$.

Теорема о непрерывности сложной функции

Если функции φ и ψ непрерывны в точке (u_0, v_0) вдоль множества E , а f непрерывна в точке (x_0, y_0) , $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, вдоль множества D , то сложная функция $g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ непрерывна в точке (u_0, v_0) вдоль множества E .

Доказательство. Поскольку функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0) вдоль множества D , то

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall (x, y) \in D : \rho((x, y), (x_0, y_0)) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Из непрерывности функций $x(u, v), y(u, v)$ в точке (u_0, v_0) вдоль множества E имеем

$$\begin{aligned} \exists \nu\left(\frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right) > 0, \forall (u, v) \in E : \rho((u, v), (u_0, v_0)) \leq \nu\left(\frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow |x(u, v) - x(u_0, v_0)| \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{2}, |y(u, v) - y(u_0, v_0)| \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{2}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Теперь из соотношений (7.2)–(7.3) вытекает

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\delta(\varepsilon)) > 0, \forall (u, v) \in E : \rho((u, v), (u_0, v_0)) \leq \nu(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x(u, v), y(u, v)) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

что означает непрерывность функции $g(u, v)$ в точке (u_0, v_0) вдоль множества E . \triangleleft

Свойства непрерывных функций двух переменных

1. Если $f(X)$ непрерывна в точке X_0 и $f(X_0) \neq 0$, то существует окрестность точки X_0 , во всех точках которой функция $f(X)$ имеет тот же знак, что и $f(X_0)$ (теорема о стабилизации знака)(доказать).

2. Если $f(X)$ непрерывна в точке X_0 , то X_0 обладает окрестностью, на которой $f(X)$ ограничена (теорема о локальной ограниченности)(доказать).

3. Если непрерывная на связном множестве D функция $f(X)$ принимает значения p и q , то она принимает любое промежуточное значение c (теорема о промежуточных значениях).

Доказательство. Пусть $f(X_1) = p$, $f(X_2) = q$, $p < c < q$, и пусть

$$x = x(t), y = y(t), t \in [a, b], -$$

кривая, принадлежащая D и соединяющая точки X_1 и X_2 . Сложная функция $f(x(t), y(t))$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(x(a), y(a)) = p$, $f(x(b), y(b)) = q$. По теореме о промежуточных значениях скалярной функции отображение $f(x(t), y(t))$ принимает значение c в некоторой точке t_0 . Тогда $f(X)$ принимает значение c в точке $X_0 = (x(t_0), y(t_0))$. \triangleleft

4. Если $f(X)$ непрерывна на компакте D , то среди ее значений есть наибольшее и наименьшее (теорема Вейерштрасса).

Доказательство. Пусть $\sup_{X \in D} f(X) = M \leq \infty$. Возьмем возрастающую последовательность $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M$. Для каждого n найдется $X_n \in D$, $f(X_n) \geq \alpha_n$. По теореме о компакте из последовательности (X_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $X_{n_k} \xrightarrow[n_k \rightarrow \infty]{} X_0 \in D$. Переходя к пределу в неравенстве $f(X_{n_k}) \geq \alpha_{n_k}$, на основании непрерывности $f(X)$, получаем $f(X_0) \geq M$. Отсюда следует, что $M \in \mathbb{R}$ и $f(X_0) = M$. \triangleleft

Следствие. Непрерывная на компакте функция ограничена (доказать).

5. Функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ называют равномерно непрерывной на D , если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X_1, X_2 \in D : \rho(X_1, X_2) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(X_1) - f(X_2)| \leq \varepsilon.$$

Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна (теорема Кантора)(доказать).

6. Если $f(X)$ и $g(X)$ непрерывны в точке X_0 , то

а) линейная комбинация $\alpha f(X) + \beta g(X)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

б) произведение $f(X)g(X)$,

в) частное $\frac{f(X)}{g(X)}$ (при условии $g(X_0) \neq 0$), также непрерывны в точке

X_0 (доказать).

Пример 7.3. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Многочлены $xy, x^2 + y^2$ непрерывны при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, функция $f(x, y)$ непрерывна при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, кроме точки $(0, 0)$, как частное непрерывных функций со знаменателем, не равным нулю. Поскольку $f(x, 0) = 0, f(0, y) = 0$, то функция $f(x, y)$ непрерывна по x и по y в точке $(0, 0)$, но разрывна в точке $(0, 0)$ по совокупности переменных. Действительно, $f(1/n, 1/n) = 1/2 \rightarrow 1/2; f(1/n, -1/n) = -1/2 \rightarrow -1/2$. Из критерия Гейне следует, что $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ не существует.

7.4. Дифференцируемая функция двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y) = f(X)$, определенную в некоторой δ -окрестности точки $X_0 = (x_0, y_0)$. Построим приращение

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Функцию f называют дифференцируемой в точке X_0 , если существуют постоянные A и B такие, что приращение Δf можно представить в виде

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}), \quad (7.4)$$

здесь применен символ $o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$, который используют вместо функций $\beta(\Delta x, \Delta y)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\beta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Выражение $A\Delta x + B\Delta y$ называют дифференциалом функции и обозначают $df = A\Delta x + B\Delta y$. Если обозначить $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то

$$df = Adx + Bdy.$$

Поскольку из (7.4) следует, что $\Delta f \rightarrow 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$, то из дифференцируемости функции в точке (x_0, y_0) вытекает ее непрерывность в этой точке.

Если у функции $f(x, y)$ фиксировать второй аргумент y , то производную скалярной функции $\varphi(x) = f(x, y)$ называют частной производной от f по x . Эту частную производную обозначают $\frac{\partial f}{\partial x}$ или f'_x . Аналогично определяют f'_y . Например, если $f(x, y) = x^3y^2 + \sin xy$, то $f'_x = 3x^2y^2 + y \cos xy$, $f'_y = 2x^3y + x \cos xy$.

Введем частные приращения $\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, $\Delta_y f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. Предположим, что f дифференцируема в точке (x_0, y_0) . Положив в равенстве (7.4) $\Delta y = 0$, получим $\Delta_x f = A\Delta x + o(\Delta x)$, $\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$, $\Delta x \rightarrow 0$, $f'_x(x_0, y_0) = A$. Аналогично, если $\Delta x = 0$, то $\Delta_y f = B\Delta y + o(\Delta y)$, $f'_y(x_0, y_0) = B$. Таким образом, для дифференцируемой функции ее дифференциал df равен

$$df = f'_x dx + f'_y dy. \quad (7.5)$$

Существование частных производных в точке обеспечивает непрерывность f по каждой переменной в этой точке, но не обеспечивает ее непрерывность по совокупности переменных и тем более ее дифференцируемость в этой точке (пример 7.3).

Плоскость $z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)$ называют касательной к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , если она удовлетворяет условию

$$f(x, y) - z_0 - A(x - x_0) - B(y - y_0) = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}), \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

Из определения дифференцируемости функции следует, что касательная плоскость к графику дифференцируемой функции f существует, и уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

С геометрической точки зрения дифференциал функции f в точке (x_0, y_0) — это приращение, возникающее при замене графика функции касательной плоскостью при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (рис. 7.5). Частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ равна тангенсу угла, который образует касательная к кривой $z = f(x, y)$, $y = y_0$, с осью $0x$.

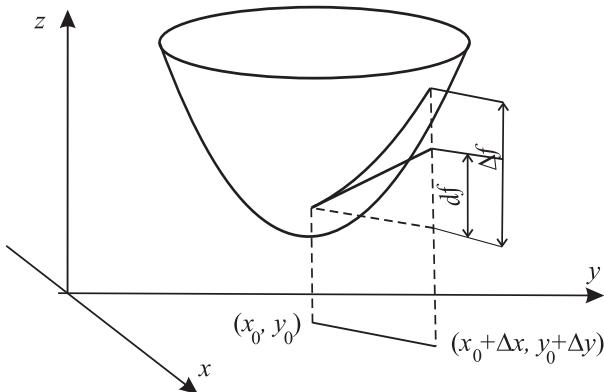


Рис. 7.5. Геометрический смысл дифференциала

Теорема о частных производных сложной функции

Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , а функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ дифференцируемы в точке (u_0, v_0) и $x(u_0, v_0) = x_0$, $y(u_0, v_0) = y_0$, то сложная функция $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ имеет в точке (u_0, v_0) конечные частные производные, которые могут быть вычислены по следующему правилу «цепочки»:

$$\begin{aligned} g'_u(u_0, v_0) &= f'_x(x_0, y_0)x'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_u(u_0, v_0), \\ g'_v(u_0, v_0) &= f'_x(x_0, y_0)x'_v(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_v(u_0, v_0). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Доказательство. Из условий теоремы следует

$$\Delta_u x = x(u_0 + \Delta u, v_0) - x(u_0, v_0) = x'_u \Delta u + o(\Delta u),$$

$$\Delta_u y = y(u_0 + \Delta u, v_0) - y(u_0, v_0) = y'_u \Delta u + o(\Delta u),$$

$$\Delta f = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$

Теперь $\Delta_u g$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta_u g &= g(u_0 + \Delta u, v_0) - g(u_0, v_0) = \\ &= f(x(u_0 + \Delta u, v_0), y(u_0 + \Delta u, v_0)) - f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) = \\ &= f'_x(x_0, y_0)(x(u_0 + \Delta u, v_0) - x(u_0, v_0)) + f'_y(x_0, y_0)(y(u_0 + \Delta u, v_0) - y(u_0, v_0)) + \\ &\quad + o(\sqrt{(\Delta u x)^2 + (\Delta u y)^2}) = \\ &= f'_x(x'_u \Delta u + o(\Delta u)) + f'_y(y'_u \Delta u + o(\Delta u)) + o(\sqrt{(\Delta u x)^2 + (\Delta u y)^2}) = \\ &= (f'_x x'_u + f'_y y'_u) \Delta u + \gamma, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $\gamma = o(\sqrt{(\Delta u x)^2 + (\Delta u y)^2}) + o(\Delta u)$. Покажем, что $o(\sqrt{(\Delta u x)^2 + (\Delta u y)^2}) = o(\Delta u)$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{o(\sqrt{(\Delta u x)^2 + (\Delta u y)^2})}{\Delta u} = \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{o(\sqrt{(\Delta u x)^2 + (\Delta u y)^2})}{(\sqrt{(\Delta u x)^2 + (\Delta u y)^2})} \sqrt{\left(\frac{\Delta u x}{\Delta u}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u y}{\Delta u}\right)^2} = 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Из (7.7), (7.8) вытекает первая из формул (7.6). Вторая формула устанавливается аналогичным образом. \triangleleft

Кратко формулы (7.6) можно записать в виде

$$g'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u, \quad g'_v = f'_x x'_v + f'_y y'_v.$$

Формула конечных приращений для ф2п

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, определенную на прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ и имеющую конечные частные производные f'_x, f'_y в каждой точке (x, y) этого прямоугольника. Пусть $(x_0, y_0), (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ — две точки, принадлежащие Π . На основании формулы конечных приращений для скалярной функции имеем

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0) - f((x_0, y_0)) + \\ &\quad + f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = \\ &= f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0) \Delta x + f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Формулу (7.9) называют формулой конечных приращений для ф2п.

Достаточное условие дифференцируемости

Если частные производные f'_x , f'_y непрерывны на открытом множестве D , то f дифференцируема в каждой точке этого множества.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in D$ и некоторую δ -окрестность этой точки, принадлежащую D . Пусть $\Pi_1 = \{(x, y) : x_0 - a < x < x_0 + a, y_0 - a < y < y_0 + a\}$ — квадрат, вписанный в указанную δ -окрестность. Используя формулу (7.9), приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ для всех $\Delta x, \Delta y$ таких, что $|\Delta x| < a$, $|\Delta y| < a$, можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Delta f &= f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0) \Delta x + f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y = \\ &= f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha &= \left((f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0) - f'_x(x_0, y_0)) \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + (f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0)) \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.\end{aligned}$$

В силу непрерывности частных производных f'_x , f'_y предел

$$\lim_{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

равен 0, т. е. $\alpha = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$. Таким образом, $\Delta f = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$. \square

Рассмотрим функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, определенную на открытом множестве $D \in \mathbb{R}^2$. Функцию f называют непрерывно дифференцируемой на D , если ее частные производные непрерывны на D . Из достаточного условия дифференцируемости следует, что непрерывно дифференцируемая функция на открытом множестве D является дифференцируемой в каждой точке этого множества или кратко дифференцируемой на D .

Рассмотрим теперь функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, определенную на произвольном множестве D . Отображение \bar{f} , заданное на множестве $D_1 \supset D$, называют продолжением f с D на D_1 , если $f(X) = \bar{f}(X) \quad \forall X \in D$. Функцию f называют непрерывно дифференцируемой на D , если существует непрерывно дифференцируемое продолжение \bar{f} функции f с D на некоторое открытое множество $D_1 \supset D$.

Пусть $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, — непрерывно дифференцируемая на D функция. Найдем dz в двух случаях:

- 1) x, y — независимые переменные,

2) $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, где $x(u, v)$, $y(u, v)$ — непрерывно дифференцируемые функции на некотором множестве E таком, что для любых $(u, v) \in E$ точка $(x(u, v), y(u, v))$ принадлежит D .

В первом случае

$$dz = f'_x dx + f'_y dy, \quad (7.10)$$

во втором случае из теоремы о частных производных сложной функции и из достаточного условия дифференцируемости следует, что функция $f(x(u, v), y(u, v))$ дифференцируема на E и

$$\begin{aligned} dz &= (f'_x x'_u + f'_y y'_u) du + (f'_v v'_v + f'_y y'_v) dv = \\ &= f'_x (x'_u du + x'_v dv) + f'_y (y'_u du + y'_v dv) = f'_x dx + f'_y dy. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Сравнивая формулы (7.10), (7.11), видим, что первый дифференциал функции двух переменных обладает следующим свойством: формула для его вычисления одна и та же как в случае, когда x, y — независимые переменные, так и в случае, когда x, y являются функциями. Это свойство первого дифференциала называют инвариантностью формы первого дифференциала.

Правила дифференцирования функций двух переменных такие же, как и для скалярных функций. Если $f(x, y)$, $g(x, y)$ — две непрерывно дифференцируемые на множестве D функции, то $f + g$; fg ; f/g , если $g(x, y) \neq 0$, непрерывно дифференцируемы на D и

- а) $d(f + g) = df + dg$;
- б) $d(fg) = gdf + fdg$;
- в) $d(f/g) = \frac{gdf - f dg}{g^2}$, если $g(x, y) \neq 0$.

Докажем, например, б). Из теоремы о частных производных сложной функции следует, что произведение $f(x, y)g(x, y)$ является функцией, непрерывно дифференцируемой на D и $d(fg) = (fg)'_x dx + (fg)'_y dy = (f'_x g + fg'_x)dx + (f'_y g + fg'_y)dy = gdf + fdg$.

Производная по направлению. Градиент

Рассмотрим функцию f , заданную в окрестности точки $X_0 = (x_0, y_0)$. Пусть

$$l : x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha, 0 \leq t < +\infty, -$$

луч, выходящий из точки $(0, 0)$ и образующий угол α с осью $0x$, а $\mathbf{d} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha$ — единичный вектор, параллельный лучу l . Приращением функции f вдоль луча l (или вдоль направления, заданного этим лучом) в точке X_0 называют величину

$$\Delta_l f = f(x_0 + \Delta t \cos \alpha, y_0 + \Delta t \sin \alpha) - f(x_0, y_0).$$

Предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_l f}{\Delta t}$$

называют производной функции f по направлению l в точке X_0 и обозначают $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{X_0}$. Поскольку $\Delta_l f$ совпадает с приращением сложной функции $t \rightarrow f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$ в точке $t = 0$, то производная по направлению совпадает с производной сложной функции $f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$ в точке $t = 0$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{X_0} &= (f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha))'_t \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{X_0} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{X_0} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Вектор

$$\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

называют градиентом функции f и обозначают $\text{grad } f$. Из формулы (7.12) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\text{grad } f, \mathbf{d}) = |\text{grad } f| \cos \varphi,$$

где φ — угол, который образуют векторы $\text{grad } f$ и \mathbf{d} , а $(\text{grad } f, \mathbf{d})$ — скалярное произведение векторов. Отсюда в частности следует, что производная $\partial f / \partial l$ принимает наибольшее значение, когда векторы $\text{grad } f$ и \mathbf{d} параллельны, а наименьшее, когда указанные векторы имеют противоположное направление, и равна 0, если ортогональны. Так как производная $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{X_0}$ характеризует скорость изменения функции в направлении l в точке (x_0, y_0) , то $\text{grad } f$ указывает направление, в котором скорость изменения функции наибольшая.

Пример 7.4. Исследуем дифференцируемость функции

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Вычислим частные производные функции f :

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = 1,$$

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Поскольку частные производные непрерывны в области $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, то согласно достаточному условию дифференцируемости, функция дифференцируема в области $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

Чтобы исследовать дифференцируемость функции в точке $(0, 0)$, запишем приращение $\Delta f(0, 0)$ в виде $\Delta f(0, 0) = \sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} = \Delta x + \Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y)$, где $\beta(\Delta x, \Delta y) = \sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} - \Delta x - \Delta y$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(1/n, 1/n)}{\sqrt{(1/n)^2 + (1/n)^2}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}},$$

то $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\beta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \neq 0$, следовательно, приращение $\Delta f(0, 0)$ нельзя представить в виде (7.4), и поэтому функция f не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

7.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных

Допустим, что функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет на открытом множестве D частные производные $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$. Эти производные также являются функциями двух переменных и, если они в свою очередь имеют частные производные, то их называют частными производными второго порядка для функции f :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}.$$

По аналогии с частными производными второго порядка вводятся частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f'''_{x^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f'''_{x^2 y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx}, \dots$$

и всех последующих порядков. Производные f''_{xy} , f''_{yx} , f'''_{xy^2} , f'''_{x^2y} , ... называют смешанными.

Пример 7.5

$$\begin{aligned} z &= \sin(x^2 + y^3); z'_x = 2x \cos(x^2 + y^3), z'_y = 3y^2 \cos(x^2 + y^3), \\ z''_{xy} &= 6xy^2 \sin(x^2 + y^3), z''_{yx} = 6xy^2 \sin(x^2 + y^3), z''_{xy} = z''_{yx}. \end{aligned}$$

Как показывает следующая теорема, совпадение смешанных производных в последнем примере не является случайным фактом.

Теорема о смешанных производных

Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны в некоторой точке, то они совпадают в этой точке.

Доказательство. Из непрерывности смешанных производных f''_{xy} , f''_{yx} в точке (x_0, y_0) следует, что частные производные f'_x , f'_y , f''_{xy} , f''_{yx} определены в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Рассмотрим функции

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0), \Delta y \neq 0,$$

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y), \Delta x \neq 0,$$

и выражение

$$\omega = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0),$$

которое можно представить двумя способами

$$\omega = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0), \quad \omega = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0).$$

Применяя дважды формулу конечных приращений (п. 3.5), получаем

$$\omega = \varphi'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x) \Delta x = (f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)) \Delta x,$$

$$\omega = \psi'_y(y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y = (f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)) \Delta y.$$

Используя эту формулу еще дважды, имеем

$$\omega = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta x \Delta y,$$

$$\omega = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y.$$

Отсюда после сокращения на $\Delta x \Delta y$ получаем равенство

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y).$$

Перейдя в последнем соотношении к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, придем, в силу непрерывности f''_{xy}, f''_{yx} , к равенству смешанных частных производных f''_{xy}, f''_{yx} в точке (x_0, y_0) . \triangleleft

Функцию $z = f(x, y)$ называют m раз непрерывно дифференцируемой на открытом множестве D , если все ее частные производные порядка m непрерывны на D . Из теоремы о смешанных производных следует, что для m раз непрерывно дифференцируемой функции величины смешанных производных, содержащих одинаковое число дифференцирований по x и по y , совпадают. Например, убедимся, что $f'''_{xy} = f'''_{x^2y}$. Возьмем функцию $g = f'_x$. По теореме о смешанных производных $g''_{xy} = g''_{yx}$. Подставим сюда вместо g функцию f'_x , получим требуемое равенство $(f'_x)''_{yx} = (f'_x)''_{xy}$. Частные производные m раз непрерывно дифференцируемой функции, содержащие k дифференцирований по x и $(m - k)$ дифференцирований по y , обозначают

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{(m-k)}}.$$

Дифференциал функции $z = f(x, y)$ равен $df = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$ и зависит от $x, y, \Delta x, \Delta y$. Если считать, что приращения $\Delta x, \Delta y$ фиксированы, то df является функцией лишь от x и y . Дифференциал от df при условии, что $\Delta x, \Delta y$ фиксированы, называют вторым дифференциалом функции и обозначают $d^2 f$, при этом предполагается, что при вычислении второго дифференциала приращения $\Delta x, \Delta y$ выбираются такими же, как и при вычислении первого дифференциала. Предположим, что f дважды непрерывно дифференцируема на открытом множестве D , тогда

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(f'_x \Delta x + f'_y \Delta y) = f''_{x^2}(\Delta x)^2 + f''_{xy} \Delta x \Delta y + f''_{yx} \Delta x \Delta y + f''_{y^2}(\Delta y)^2 = \\ &= [\Delta x = dx, \Delta y = dy] = f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{y^2} dy^2. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Если функция f m раз непрерывно дифференцируема на открытом множестве D , то

$$d^m f := d(d^{m-1} f), \quad d^m f = \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k}. \quad (7.14)$$

Формулу (7.14) можно доказать с помощью принципа математической индукции по схеме доказательства правила Лейбница (п. 3.4).

Введем оператор дифференцирования $d := \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ и его степени

$$d^m := \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy \right)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\partial^m}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k}.$$

Теперь формулу (7.14) можно записать в виде $d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy \right)^m f$. Дифференциалы высших порядков, в отличие от дифференциала первого порядка, уже не обладают инвариантностью формы. Действительно,

$$\begin{aligned} z &= f(x(u, v), y(u, v)), \quad dz = f'_x dx + f'_y dy, \\ d^2z &= dx d(f'_x) + f'_x d^2x + dy d(f'_y) + f'_y d^2y = \\ &= dx(f''_{x^2} dx + f''_{xy} dy) + dy(f''_{yx} dx + f''_{y^2} dy) + f'_x d^2x + f'_y d^2y = \\ &= f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{y^2} dy^2 + f'_x d^2x + f'_y d^2y, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где $dx = x'_u du + x'_v dv$, $dy = y'_u du + y'_v dv$. Формула (7.13) отличается от (7.15) наличием дополнительных слагаемых $f'_x d^2x + f'_y d^2y$.

В одном важном случае, а именно, если x, y линейно выражаются через u, v , формула для $d^m f$ остается такой же, как и в случае независимых x, y

$$\begin{aligned} x &= au + bv + p, \quad dx = adu + bdv, \quad d^2x = 0, \\ y &= cu + lv + q, \quad dy = cdu + ldv, \quad d^2y = 0, \\ d^2z &= f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{y^2} dy^2, \dots, \quad d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy \right)^m f. \end{aligned}$$

7.6. Формула Тейлора для функции двух переменных

Допустим, что фунд. f $m+1$ раз непрерывно дифференцируема на открытом множестве E , содержащем точку $X_0 = (x_0, y_0)$. Возьмем приращение $\Delta X = (\Delta x, \Delta y)$ такое, что отрезок, соединяющий точки $X_0, X_0 + \Delta X$, принадлежит E . Построим сложную функцию

$$g(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),$$

которая определена и $m+1$ раз непрерывно дифференцируема на некотором интервале $(-\alpha, 1+\alpha)$, $\alpha > 0$. Функцию $g(t)$ можно представить по формуле Тейлора в дифференциалах с остаточным членом в форме Лагранжа в следующем виде (п. 3.8)

$$g(\Delta t) - g(0) = \frac{dg(0)}{1!} + \dots + \frac{d^m g(0)}{m!} + \frac{d^{m+1} g(\theta \Delta t)}{(m+1)!}, \quad (7.16)$$

где $\Delta t \in (-\alpha, 1 + \alpha)$, $0 < \theta < 1$. Поскольку функции $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$ линейно выражаются через t и t — независимая переменная, то $dt = \Delta t$, $dx = \Delta x dt$, $dy = \Delta y dt$ и

$$d^k g = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f = (\Delta t)^k \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f. \quad (7.17)$$

Если положить в формуле (7.16) $\Delta t = 1$ и воспользоваться (7.17), то получим

$$\begin{aligned} f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) &= \frac{df(X_0)}{1!} + \dots + \frac{d^m f(X_0)}{m!} + \\ &+ \frac{d^{m+1} f(X_0 + \theta \Delta X)}{(m+1)!}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Формулу (7.18) называют формулой Тейлора для ф2п с остаточным членом в форме Лагранжа. Если в формуле (7.18) заменить Δx на $x - x_0$, Δy на $y - y_0$, то она примет вид

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y - y_0) \right) f(x_0, y_0) + \dots + \\ &+ \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y - y_0) \right)^m f(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y - y_0) \right)^{(m+1)} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y). \end{aligned}$$

Если учесть, что $k!l!C_{k+l}^k = (k+l)!$, то последнюю формулу можно записать в виде

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq k+l \leq m} \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{k+l} f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^l} (x - x_0)^k (y - y_0)^l + R_m(x, y).$$

Пример 7.6

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^3, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1,$$

$$\begin{aligned} df &= (2x + y)dx + (x + 3y^2)dy, \quad d^2 f = 2dx^2 + 2dxdy + 6ydy^2, \\ d^3 f &= 6dy^3, \quad d^4 f = 0, \quad f(x, y) = 3 + 3(x - 1) + 4(y - 1) + (x - 1)^2 + \\ &+ (x - 1)(y - 1) + 3(y - 1)^2 + (y - 1)^3. \end{aligned}$$

7.7. Теорема о неявной функции

Рассмотрим соотношение

$$F(x, y) = 0. \quad (7.19)$$

Пусть Γ — множество пар (x, y) , удовлетворяющих соотношению (7.19), т. е. $\Gamma = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$. Может оказаться, что Γ пусто, например, $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$. Может быть, что разные точки из Γ имеют одинаковые проекции на ось $0x$, например, $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $(1, 1)$, $(1, -1)$. Но основным случаем (именно его мы будем изучать) является следующий: существует прямоугольник $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ такой, что проекция на ось $0x$ множества Γ содержит отрезок $[a, b]$ и не существует различных точек в пересечении $\Gamma \cap \Pi$, имеющих одинаковые проекции на ось $0x$. Тогда на отрезке $[a, b]$ определена функция $y = \varphi(x)$, которая каждому $x \in [a, b]$ ставит в соответствие единственное число $y \in [c, d]$ такое, что $F(x, y) = 0$. Очевидно, что $F(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Эту функцию называют неявной функцией, заданной соотношением (7.19) в прямоугольнике Π . Например,

$$x^2 + y^2 - 2 = 0, \quad \Pi = \left\{ (x, y) : \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}, \frac{3}{4} \leq y \leq \frac{5}{4} \right\}. \quad (7.20)$$

Неявной функцией, заданной соотношением (7.20) в прямоугольнике Π , является функция $y = \sqrt{2 - x^2}$, $3/4 \leq x \leq 5/4$ (рис. 7.6).

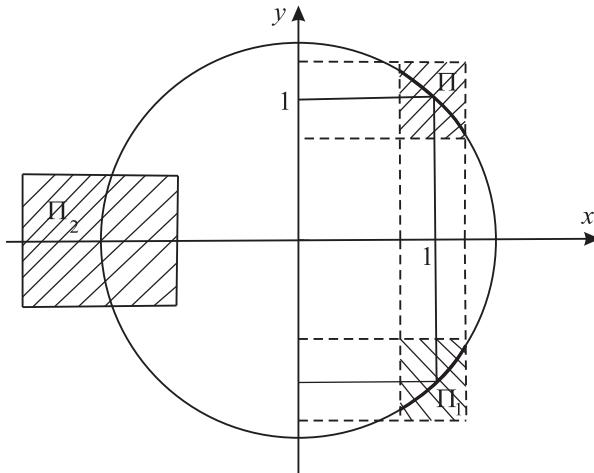


Рис. 7.6

Если взять другой прямоугольник, например, $\Pi_1 = \{(x, y) : 3/4 \leq x \leq 5/4, -5/4 \leq y \leq -3/4\}$, то такой функцией будет $y = -\sqrt{2 - x^2}$, $3/4 \leq x \leq 5/4$.

В прямоугольнике

$$\Pi_2 = \{(x, y) : -2 \leq x \leq -1, -1/2 \leq y \leq 1/2\}$$

неявной функции вида $y = \varphi(x)$ нет, но есть неявная функция вида

$$x = \psi(y), \quad x = -\sqrt{1 - y^2}, \quad -1/2 \leq y \leq 1/2.$$

Теорема о неявной функции

Пусть функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $F(x_0, y_0) = 0$;
- 2) непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) ;
- 3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существует прямоугольник

$$\Pi = \{(x, y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

в котором соотношение $F(x, y) = 0$ задает непрерывно дифференцируемую неявную функцию $y = \varphi(x)$, производная которой равна

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

Доказательство проведем для случая $F'_y(x_0, y_0) > 0$ и разобьем на два этапа.

П е р в ы й э т а п. Доказательство существования неявной функции.

Пусть $B(X_0, \delta)$ — окрестность точки X_0 , в которой функция F непрерывно дифференцируема. По теореме о стабилизации знака неравенство $F'_y(x, y) > 0$ имеет место для всех $X = (x, y)$ из некоторой окрестности $B(X_0, \delta_1)$, $0 < \delta_1 \leq \delta$, точки (x_0, y_0) . Выберем числа a и b таким образом, чтобы прямоугольник $\Pi = \{(x, y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ содержался в круге $B(X_0, \delta_1)$. Согласно критерию строгой монотонности, функция $y \rightarrow F(x_0, y)$ строго возрастает на отрезке $[y_0 - b, y_0 + b]$ (рис. 7.7). Поэтому в точках $(x_0, y_0 - b)$ и $(x_0, y_0 + b)$ имеют место неравенства

$$F(x_0, y_0 - b) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + b).$$

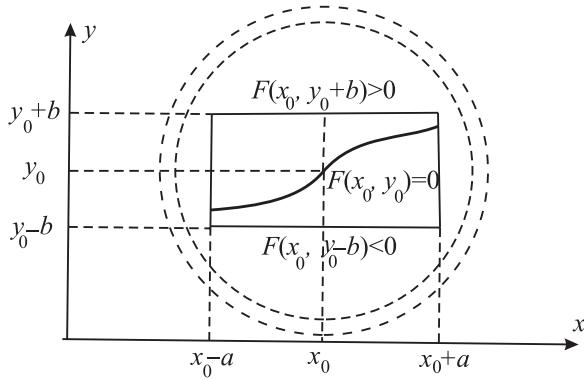


Рис. 7.7

Функции $x \rightarrow F(x, y_0 - b)$, $x \rightarrow F(x, y_0 + b)$ непрерывны по x , поэтому за счет уменьшения a (в случае необходимости) можно добиться того, что

$$F(x, y_0 - b) < 0 < F(x, y_0 + b) \quad \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, для каждого $\bar{x} \in [x_0 - a, x_0 + a]$ существует число $\bar{y} \in [y_0 - b, y_0 + b]$ такое, что $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Из строгой монотонности функции $y \rightarrow F(\bar{x}, y)$ следует, что такая точка \bar{y} единственная на отрезке $[y_0 - b, y_0 + b]$. Таким образом, определена функция $y = \varphi(x)$ ($\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$), удовлетворяющая условиям

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \quad y_0 - b \leq \varphi(x) \leq y_0 + b \quad \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

Построенная функция является неявной функцией, заданной соотношением (7.19) в прямоугольнике Π .

В т о р о й э т а п. Доказательство непрерывной дифференцируемости неявной функции.

Прямоугольник Π является компактом. По теореме Вейерштрасса (п. 7.3) существует точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Pi$ такая, что

$$\min_{(x,y) \in \Pi} F'_y(x, y) = F'_y(\bar{x}, \bar{y}) > 0. \quad (7.21)$$

Согласно следствию из теоремы Вейерштрасса (п. 7.3)

$$|F'_x(x, y)| \leq M - \text{const} \quad \forall (x, y) \in \Pi. \quad (7.22)$$

Возьмем произвольную точку $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Пусть $x + \Delta x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, $\Delta x \neq 0$. Поскольку $y = \varphi(x)$ неявная функция, определяемая

соотношением $F(x, y) = 0$, то $F(x, \varphi(x)) = 0$, $F(x + \Delta x, \varphi(x + \Delta x)) = 0$. Применяя формулу конечных приращений (п. 7.4), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + \Delta x, \varphi(x + \Delta x)) - F(x, \varphi(x)) = \\ &= F'_x(x + \theta_1 \Delta x, \varphi(x)) \Delta x + F'_y(x + \Delta x, \varphi(x) + \theta_2 \Delta \varphi) \Delta \varphi, \end{aligned} \quad (7.23)$$

где $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, \Delta \varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$. Отсюда

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \theta_1 \Delta x, \varphi(x))}{F'_y(x + \Delta x, \varphi(x) + \theta_2 \Delta \varphi)}. \quad (7.24)$$

Из соотношений (7.21)–(7.23) вытекает, что

$$|\Delta \varphi| \leq \frac{M}{F'_y(\bar{x}, \bar{y})} |\Delta x|,$$

следовательно, $\Delta \varphi \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т. е. неявная функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ в равенстве (7.24) и используя при этом непрерывность частных производных F'_x, F'_y , получаем

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]. \quad (7.25)$$

Непрерывность $\varphi'(x)$ следует из формулы (7.25) и теоремы о непрерывности сложной функции. \triangleleft

Производные высших порядков неявной функции.

Пусть выполнены условия теоремы о неявной функции. Тогда существует неявная непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$ такая, что

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

Дифференцируя это тождество по x , получаем

$$F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y(x, \varphi(x)) \varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]. \quad (7.26)$$

Предположим дополнительно, что F дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Тогда рассуждая аналогично доказательству непрерывной дифференцируемости неявной функции, можно показать, что функция $y = \varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 . Дифференцируя тождество (7.26) по x , получаем

$$F''_{x^2} + 2F''_{xy} \varphi' + F''_{y^2} (\varphi')^2 + F'_y \varphi'' \equiv 0. \quad (7.27)$$

Отсюда, учитывая, что $\varphi' = -\frac{F'_x}{F'_y}$, имеем

$$\varphi'' = -\frac{1}{(F'_y)^3} (F''_{x^2}(F'_y)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{y^2}(F'_x)^2).$$

Следующие производные вычисляются последовательным дифференцированием тождества (7.27).

Пример 7.7. Соотношение $y + e^{y-1} - x - 2 = 0$ удовлетворяет всем условиям теоремы о неявной функции в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) = (0, 1)$. По теореме о неявной функции оно задает неявную непрерывно дифференцируемую функцию $y = \varphi(x)$, определенную в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$. Чтобы найти первые две производные этой функции можно воспользоваться установленными выше формулами, но проще продифференцировать тождество $\varphi(x) + e^{\varphi(x)-1} - x - 2 \equiv 0$ два раза

$$(1 + e^{\varphi(x)-1})\varphi'(x) - 1 \equiv 0, \quad (1 + e^{\varphi(x)-1})\varphi''(x) + e^{\varphi(x)-1}(\varphi'(x))^2 \equiv 0$$

и найти искомые производные из этих соотношений

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1 + e^{\varphi(x)-1}}, \quad \varphi''(x) = -\frac{e^{\varphi(x)-1}}{(1 + e^{\varphi(x)-1})^3}.$$

ГЛАВА 8

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. Определение двойного интеграла

Рассмотрим фигуру D . Диаметром фигуры называют величину

$$\text{diam}D = \sup_{X_1 \in D, X_2 \in D} \rho(X_1, X_2).$$

Фигура ограничена, т.е. содержитя в некотором круге, в том и только том случае, когда $\text{diam}D < \infty$ (доказать). Говорят, что фигура D имеет нулевую площадь, если для любого $\varepsilon > 0$ существует простая фигура P , содержащая фигуру D , такая, что пл. $P \leq \varepsilon$.

Лемма 8.1

|| Простая гладкая кривая l имеет нулевую площадь.

Доказательство. Пусть дл. $l = A$. Разобьем кривую l точками M_1, \dots, M_n на $n - 1$ часть, длина каждой $\leq A/n$. Построим n квадратов с центрами в точках $M_i, i = 1, \dots, n$, со сторонами, параллельными осям координат длины $2A/n$. Объединение квадратов является простой фигурой P , содержащей кривую l , и пл. $P \leq n \frac{4A^2}{n^2} \leq \varepsilon$, если $n \geq \frac{4A^2}{\varepsilon}$. \square

Кривую

$$l : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [a, b],$$

называют кусочно-гладкой, если существует разбиение $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = b$ отрезка $[a, b]$ на части $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ такое, что функции $x(t), y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезках $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ (на концах отрезков рассматриваются односторонние производные) и

$$(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 \neq 0, t \in (\alpha_{k-1}, \alpha_k), k = 1, \dots, m.$$

Следствие 8.1

|| Простая кусочно-гладкая кривая имеет нулевую площадь.

Ограниченнная фигура квадрируема тогда и только тогда, когда ее граница имеет нулевую площадь (доказать).

Пересечение и объединение конечного числа квадрируемых фигур являются квадрируемыми фигурами (доказать). Фигура, ограниченная простой кусочно-гладкой кривой, квадрируема. В дальнейшем рассматриваем лишь квадрируемые фигуры.

Совокупность множеств $\{D_k\} = \{D_1, \dots, D_n\}$ называют разбиением фигуры D , если объединение всех D_k составляет D и никакие две части из $\{D_k\}$ не имеют общих внутренних точек. Если $\{D_k\}$ — разбиение D , то пл. $D = \sum_{k=1}^n$ пл. D_k . Величину $\delta(\{D_k\}) = \max_{1 \leq k \leq n} \{\text{diam } D_k\}$ называют диаметром разбиения.

Допустим, что задана функция $f : D \rightarrow R$. Возьмем разбиение $\{D_k\}$ фигуры D на n частей и выберем по точке $X_k = (x_k, y_k)$ в каждой части D_k . Построим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(X_k) \text{пл. } D_k.$$

Если существует число I такое, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{D_k\} : \delta(\{D_k\}) \leq \delta(\varepsilon), \forall X_k \in D_k \Rightarrow |\sigma - I| \leq \varepsilon,$$

то функцию f называют интегрируемой по Риману на D , а число I — **двойным интегралом** от f по D (2И) и обозначают

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Первое необходимое условие интегрируемости

|| Если f интегрируема по Риману на D , то для любой последовательности разбиений $(\{D_k\}_m)$, $k = 1, \dots, n_m$, $m = 1, 2, \dots$, с диаметрами $\delta_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$, для любых точек $(X_k)_m \in (D_k)_m$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n_m} f((X_k)_m) n.l.(D_k)_m = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Второе необходимое условие интегрируемости

|| Если f интегрируема по Риману на D , то f ограничена на D .

Доказательство этих теорем, а также следующих двух утверждений мы опускаем, так как они проводятся строго по схемам, использованным при доказательствах аналогичных теорем для однократного интеграла Римана.

Критерий интегрируемости Коши

|| Для интегрируемости f на D необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{D_k\} : \delta(\{D_k\}) \leq \delta(\varepsilon), \forall X_k \in D_k,$$

$$\forall \{E_r\}_{r=1}^{r=s} : \delta(\{E_r\}) \leq \delta(\varepsilon), \forall Y_r \in E_r \Rightarrow |\sigma - \tau| \leq \varepsilon,$$

$$\text{где } \tau = \sum_{r=1}^s f(Y_r) n_r E_r.$$

Теорема об интегрируемости непрерывной на компакте функции

|| Непрерывная на компакте функция интегрируема по Риману на этом компакте.

8.2. Геометрический смысл и свойства двойного интеграла

Всякую совокупность точек в пространстве $Oxyz$ называют телом. Под прямоугольным параллелепипедом понимают как множество

$$\Psi = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq k\},$$

так и любое множество, которое получается из Ψ удалением всей или части границы. За объем прямоугольного параллелепипеда принимают число $(b - a)(d - c)(k - e)$.

Тело называют простым, если его можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся прямоугольных параллелепипедов. За объем простого тела принимают сумму объемов прямоугольных параллелепипедов, из которых оно составлено. Пусть T — ограниченное тело. Простые тела Ψ_*, Ψ^* такие, что $\Psi_* \subset T \subset \Psi^*$, называют соответственно вписанным и описанным для тела T . Если

$$V_* = \sup_{\Psi_* \subset T} \{\text{об.}\Psi_*\} = \inf_{\Psi^* \supset T} \{\text{об.}\Psi^*\} = V^*,$$

то тело T называют кубируемым, а величину $V = V_* = V^*$ — его объемом.

Критерий кубирируемости тела

|| Тело T кубирируемо, если и только если $\forall \varepsilon > 0$ существуют вписанное и описанное кубирируемые тела T_*, T^* такие, что $\text{об.}T^* - \text{об.}T_* \leq \varepsilon$ (доказать).

Цилиндр, в основании которого лежит квадрируемая фигура D с высотой, равной H , является кубирируемым телом с об. $T = \text{пл.}D \times H$ (доказать).

Возьмем непрерывную неотрицательную определенную на компакте D функцию f и рассмотрим цилиндр T , т. е. тело, ограниченное сверху графиком функции $z = f(x, y)$, снизу — координатной плоскостью $0xy$, сбоку — цилиндрической поверхностью, направляющая которой — граница фигуры D , а образующие — прямые, параллельные оси $0z$ (рис. 8.1).

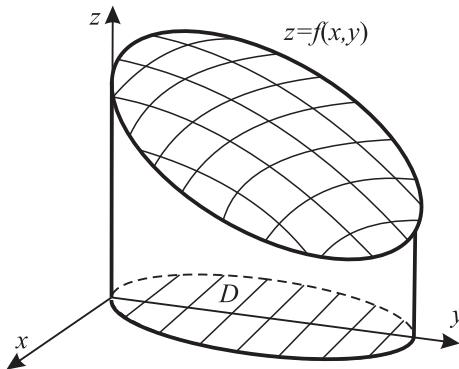


Рис. 8.1. Цилиндроид

Разобьем фигуру D на компактные части D_k , $k = 1, \dots, n$. Пусть \bar{X}_k и X_k — точки, в которых f принимает максимальное и минимальное значения на D_k . Тело \underline{Z} , составленное из цилиндров с основаниями D_k и высотами $f(X_k)$, вписано в T , кубириуемо и

$$\text{об.} \underline{Z} = \sum_{k=1}^n f(X_k) \text{пл.} D_k = \underline{\sigma}.$$

Аналогично тело \bar{Z} , составленное из цилиндров с основаниями D_k и высотами $f(\bar{X}_k)$, содержит T и

$$\text{об.} \bar{Z} = \sum_{k=1}^n f(\bar{X}_k) \text{пл.} D_k = \bar{\sigma}.$$

Пусть $\underline{\sigma}_m, \bar{\sigma}_m$ — две последовательности интегральных сумм с диаметрами $\delta_m \rightarrow 0$ и построенные таким же образом, как и суммы $\underline{\sigma}, \bar{\sigma}$. На основании

теоремы об интегрируемости непрерывной на компакте функции и первого необходимого условия интегрируемости, последовательности $\underline{\sigma}_m$, $\bar{\sigma}_m$ имеют общий предел $\iint_D f(x, y) dx dy$. По критерию кубирируемости, тело T кубирируемо и

$$\text{об.}T = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Свойства двойного интеграла

1. Линейность. Если f_1, f_2 — две интегрируемые на D функции, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} & \iint_D (\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)) dx dy = \\ & = \alpha \iint_D f_1(x, y) dx dy + \beta \iint_D f_2(x, y) dx dy \end{aligned}$$

(доказать).

2. Монотонность. Если f и g — две интегрируемые на D функции и $f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

(доказать).

3. Теорема о среднем. Если $f(x, y)$ непрерывна на связном компакте D , то существует точка $(\xi, \eta) \in D$ такая, что

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot \text{пл.}D. \quad (8.1)$$

Доказательство. Пусть $m = \min_{(x,y) \in D} f(x, y)$, $M = \max_{(x,y) \in D} f(x, y)$. Тогда

$$m \cdot \text{пл.}D = \iint_D m dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D M dx dy = M \cdot \text{пл.}D.$$

Если пл. $D = 0$, то и $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$, если пл. $D > 0$ и

$$\mu = \frac{1}{\text{пл.}D} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (8.2)$$

то $m \leq \mu \leq M$. В силу непрерывности f на связном множестве D существует точка $(\xi, \eta) \in D$, что $f(\xi, \eta) = \mu$. Отсюда и из равенства (8.2) вытекает формула (8.1). \triangleleft

8.3. Критерий Дарбу для двойного интеграла

Множество $\{X : \rho(X, \Pi) \leq q\} = \{X : \exists Y \in \Pi, \rho(X, Y) \leq q\}$ называют q -окрестностью фигуры Π .

Лемма 8.2

Пусть площадь простой фигуры Π равна $p \neq 0$. Тогда $\exists q > 0$ такое, что площадь q -окрестности фигуры Π не превосходит $2p$.

Доказательство. Пусть l — периметр фигуры Π , а m — число ее вершин. Площадь q -окрестности не превосходит

$$p + lq + \pi q^2 m. \quad (8.3)$$

При достаточно малом q выражение (8.3) меньше $2p$. \triangleleft

Критерий Дарбу для двойного интеграла

I) Если функция f интегрируема на D , то для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения $\{D_k\}$ фигуры D с диаметром разбиения $\delta(\{D_k\}) \leq \delta(\varepsilon)$, интегральное колебание

$$\Omega(f, \{D_k\}) = \sum_{k=1}^n \omega_k \text{пл.} D_k$$

не превосходит ε , где $\omega_k = \sup_{X_1, X_2 \in D_k} |f(X_1) - f(X_2)|$ — колебание f на D_k .

II) Если для любого $\varepsilon > 0$, существует разбиение $\{D_k\}$ фигуры D , что

$$\Omega(f, \{D_k\}) \leq \varepsilon, \quad (8.4)$$

то функция f интегрируема на D .

Первая часть критерия Дарбу, так же как и в случае однократного интеграла Римана, следует из критерия Коши интегрируемости f .

Докажем вторую часть критерия. Из условия (8.4) следует ограниченность f , т. е. $|f(x)| \leq A = \text{const } \forall X \in D$, поэтому колебание f на любом подмножестве из D не превосходит $2A$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и разбиение $\{D_k\}$, для которого выполняется условие (8.4). Погрузим границы всех D_k в простую фигуру Π с площадью

$$p = \text{пл.} \Pi \leq \varepsilon. \quad (8.5)$$

Найдем в соответствии с леммой 8.2 число q такое, что площадь q -окрестности фигуры Π не превосходит $2p$.

Возьмем две произвольные интегральные суммы σ' , σ'' , построенные по разбиениям $\{D'_r\}$, $r = 1, \dots, s$, $\{D''_\rho\}$, $\rho = 1, \dots, t$, фигуры D с диаметрами меньшими, чем $q/2$. Рассмотрим разность

$$\sigma' - \sigma'' = \sum_{r=1}^s f(X_r) \text{пл.} D'_r - \sum_{\rho=1}^t f(X_\rho) \text{пл.} D''_\rho = \sum_{r,\rho} (f(X_r) - f(X_\rho)) \Delta_{r,\rho},$$

где $\Delta_{r,\rho} = \text{пл.}(D'_r \cap D''_\rho)$. Представим последнюю сумму в виде $\sum_1 + \sum_2$, где в \sum_1 входят слагаемые с такими r и ρ , что $D'_r \cup D''_\rho \subset D_k$ для некоторого k , а в \sum_2 остальные слагаемые. Из соотношения

$$|f(X_r) - f(X_\rho)| \leq \omega_k \quad \forall X_r, X_\rho \in D_k$$

следует, что

$$\left| \sum_1 \right| \leq \sum_{k=1}^n \omega_k \text{пл.} D_k \leq \varepsilon. \quad (8.6)$$

Если одно из множеств D'_r или D''_ρ имеет общие точки с разными частями из разбиения $\{D_k\}$, то множество $D'_r \cap D''_\rho$ либо пустое, либо лежит в q -окрестности фигуры Π . Следовательно,

$$\left| \sum_2 \right| \leq 4Ap. \quad (8.7)$$

Из (8.5)–(8.7) следует $|\sigma' - \sigma''| \leq \varepsilon + 4A\varepsilon$. На основании критерия Коши интегрируемости функция f интегрируема на D . \triangleleft

Аддитивность 2И

Пусть $\{D_1, D_2\}$ – разбиение фигуры D на две части. Согласно критерию Дарбу, из интегрируемости f на D следует интегрируемость f на D_1 и D_2 . Возьмем последовательность разбиений $(\{E_k\}_m)$ фигуры D с диаметрами разбиения $\delta_m \rightarrow 0$ такую, что общие точки границ ∂D_1 и ∂D_2 для каждого разбиения оказываются среди граничных точек частей $\{E_k\}_m$. Тогда каждая интегральная сумма σ_m от f по D равна сумме интегральных сумм σ_{1m} и σ_{2m} от f по D_1 и D_2 . Переходя к пределу в равенстве $\sigma_m = \sigma_{1m} + \sigma_{2m}$ при $m \rightarrow +\infty$ и используя при этом первое необходимое условие интегрируемости, получаем формулу

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy. \quad (8.8)$$

Свойство 2И, выраженное формулой (8.8), называют **аддитивностью** двойного интеграла.

Из критерия Дарбу также следует, что интегрируемость f на D_1 и D_2 обеспечивает интегрируемость f на D .

Теорема об интегрируемости функций с нулевым по площади множеством точек разрыва

Пусть функция f ограничена на компакте D , $|f(X)| \leq A - \text{const} \quad \forall X \in D$, и непрерывна во всех точках из D , за исключением множества точек нулевой площади. Тогда f интегрируема на D .

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Погрузим множество точек разрыва в открытую простую фигуру Π площадью меньшей, чем ε . Тогда $\omega_{\text{пл.}\Pi} \leq 2A\varepsilon$. Функция f непрерывна на компакте $D \setminus \Pi$ и, следовательно, интегрируема на $D \setminus \Pi$. Согласно критерию Дарбу, существует разбиение $\{E_k\}$ компакта $D \setminus \Pi$ такое, что $\sum_k \omega_{k\text{пл.}} E_k \leq \varepsilon$. Добавим к $\{E_k\}$ множество $\Pi \cap D$, получим разбиение множества D , для которого интегральное колебание не превосходит $\varepsilon + 2A\varepsilon$. По критерию Дарбу f интегрируема на D . \triangleleft

8.4. Сведение двойного интеграла к повторному

Лемма о 2И по прямоугольнику

Пусть а) функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на прямоугольнике $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, б) при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ отображение $y \rightarrow f(x, y)$ интегрируемо по Риману на отрезке $[c, d]$. Тогда функция $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b F(x) dx = \iint_P f(x, y) dx dy.$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. Из определения двойного интеграла следует существование такого $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения прямоугольника P с диаметром меньшим $\delta(\varepsilon)$ любая интегральная сумма σ для $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$|\sigma - \iint_P f(x, y) dx dy| \leq \varepsilon. \quad (8.9)$$

Возьмем разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$ на n частей точками x_k с диаметром разбиения $\delta(\{x_k\}) \leq \delta(\varepsilon)/2$ и построим интегральную сумму s для

функции $F(x)$ на $[a, b]$

$$s = \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \Delta x_k.$$

Из интегрируемости функций $f(\xi_k, y)$ на отрезке $[c, d]$ при каждом k вытекает, что при каждом k существует разбиение отрезка $[c, d]$ точками y_{ki} , на m_k частей так, чтобы диаметр разбиения был бы меньше, чем $\delta(\varepsilon)/2$, и чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{1 \leq i \leq m_k} f(\xi_k, \eta_{ki}) \Delta y_{ki} - \varepsilon \leq F(\xi_k) \leq \sum_{1 \leq i \leq m_k} f(\xi_k, \eta_{ki}) \Delta y_{ki} + \varepsilon, \quad (8.10)$$

где $y_{ki-1} \leq \eta_{ki} \leq y_{ki}$ (рис. 8.2).

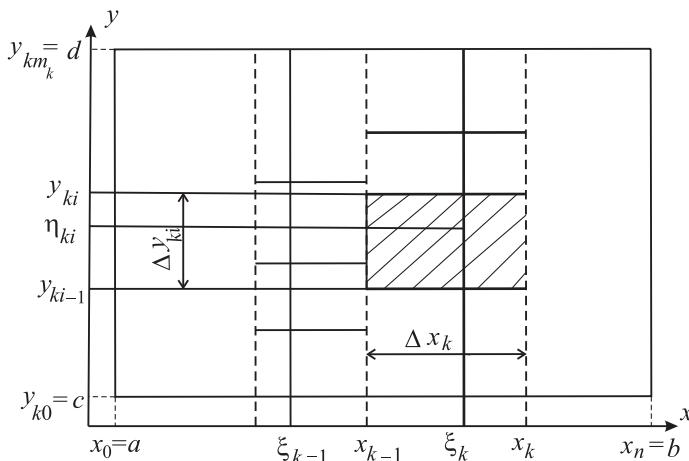


Рис. 8.2

Умножая неравенства (8.10) на Δx_k и суммируя по k , получаем

$$\tau - \varepsilon(b - a) \leq s \leq \tau - \varepsilon(b - a), \quad (8.11)$$

где

$$\tau = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i \leq m_k} f(\xi_k, \eta_{ki}) \Delta y_{ki} \Delta x_k.$$

Сумма τ является интегральной суммой для $f(x, y)$ по P , соответствующей разбиению прямоугольника P на части с диаметром разбиения $\leq \delta(\varepsilon)$.

На основании формул (8.9) и (8.11) имеем

$$\left| s - \iint_P f(x, y) dx dy \right| \leq |s - \tau| + \left| \tau - \iint_P f(x, y) dx dy \right| \leq (b - a)\varepsilon + \varepsilon.$$

Следовательно, функция $F(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b F(x) dx = \iint_P f(x, y) dx dy. \quad \diamond$$

Пусть D — криволинейная трапеция, элементарная относительно оси $0y$, т. е. D — фигура, ограниченная вертикальными прямыми $x = a, x = b$ и графиками непрерывных функций $y = \psi_1(x), y = \psi_2(x)$, $\psi_1(x) \leq \psi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$ (рис. 8.3). Если при каждом фиксированном x функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$, то определена функция $F(x) = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy$. Интеграл

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

обозначают

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dx$$

и называют повторным интегралом от f по D .

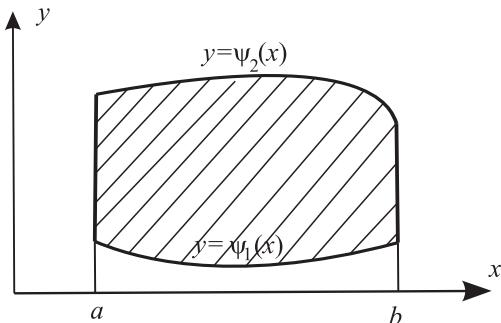


Рис. 8.3. Криволинейная трапеция, элементарная относительно оси $0y$

Теорема о сведении 2И к повторному интегралу

Пусть D — криволинейная трапеция, элементарная относительно оси $0y$, и пусть $f(x, y)$ — функция интегрируема по Риману на D и такая, что при каждом фиксированном x функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$. Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (8.12)$$

Доказательство. Множество D содержится в прямоугольнике $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, где $c = \min_{x \in [a, b]} \psi_1(x)$, $d = \max_{x \in [a, b]} \psi_2(x)$. Определим функцию

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in P \setminus D. \end{cases}$$

Функция g интегрируема на P , так как она интегрируема на D и на $P \setminus D$, причем в силу аддитивности 2И

$$\iint_P g(x, y) dx dy = \iint_{P \setminus D} f(x, y) dx dy + \iint_P 0 dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (8.13)$$

На основании леммы о 2И по прямоугольнику

$$\begin{aligned} \iint_P g dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d g dy = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{\psi_1(x)} g dy + \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g dy + \int_{\psi_2(x)}^d g dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f dy. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Из равенств (8.13) — (8.14) вытекает требуемая формула (8.12). \square

Аналогично, если D — криволинейная трапеция, элементарная относительно оси $0x$, т.е. фигура, ограниченная горизонтальными прямыми $y = c$, $y = d$ и графиками непрерывных функций $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$, $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y) \quad \forall y \in [c, d]$ (рис. 8.4), а $f(x, y)$ — функция интегрируема по Риману на D и такая, что при каждом фиксированном y функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[\varphi_1(y), \varphi_2(y)]$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (8.15)$$

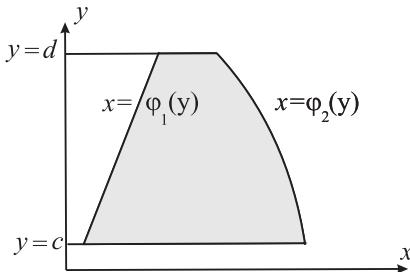


Рис. 8.4. Криволинейная трапеция, элементарная относительно оси $0x$

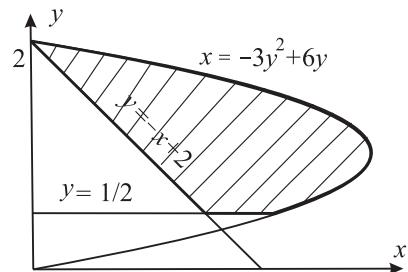


Рис. 8.5

Пример 8.1. Найдем площадь фигуры D , ограниченной кривыми: $x = 2y - y^2$, $x = 1 - y$, $y = 1/2$ (рис. 8.5). Фигура D является криволинейной трапецией, элементарной относительно оси $0x$. По формуле (8.15) имеем

$$n\lambda.D = \iint_D dx dy = \int_{1/2}^2 dy \int_{2-y}^{-3y^2+6y} dx = 9/4.$$

8.5. Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим две фигуры D и E , первая из них расположена в плоскости $0xy$, вторая — в плоскости $0uv$. Говорят, что функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ осуществляют взаимно однозначное преобразование фигуры E в фигуру D , если $D = \{(x, y) : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), (u, v) \in E\}$ и различным точкам из E соответствуют различные точки из D . Для взаимно однозначного преобразования фигуры E в фигуру D существует обратное преобразование фигуры D в фигуру E , т. е. существуют две функции $u = \xi(x, y)$, $v = \eta(x, y)$ такие, что $E = \{(u, v) : u = \xi(x, y), v = \eta(x, y), (x, y) \in D\}$ и

$$\varphi(\xi(x, y), \eta(x, y)) = x, \quad \psi(\xi(x, y), \eta(x, y)) = y \quad \forall (x, y) \in D. \quad (8.16)$$

Говорят, что фигуры D и E диффеоморфны, если существует взаимно однозначное преобразование $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ фигуры E в D такое, что функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемы на E , а функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, осуществляющие обратное преобразование, непрерывно дифференцируемы на D . В этом случае преобразование $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ называют диффеоморфным преобразованием фигуры E в D .

Определитель

$$I(u, v) = \det \begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix}$$

называют якобианом диффеоморфного преобразования $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$, а определитель

$$J(x, y) = \det \begin{pmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{pmatrix} -$$

якобианом обратного преобразования. Из тождеств (8.16) следует $\varphi'_u \xi'_x + \varphi'_y \eta'_x = 1, \varphi'_u \xi'_y + \varphi'_y \eta'_y = 0, \psi'_u \xi'_x + \psi'_y \eta'_x = 0, \psi'_u \xi'_y + \psi'_y \eta'_y = 1, \forall (x, y) \in D$, поэтому $I(\xi(x, y), \eta(x, y))J(x, y) = 1$, следовательно, якобианы I и J для диффеоморфного преобразования не равны нулю, $I(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in E, J(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in D$.

Если $l : u = u(t), v = v(t), t \in [a, b], (u'(t))^2 + (v'(t))^2 \neq 0, t \in (a, b)$, — гладкая кривая, принадлежащая фигуре E , а $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ — диффеоморфное преобразование фигуры E в D , то образ этой кривой $x = \varphi(u(t), v(t)) = g(t), y = \psi(u(t), v(t)) = h(t), t \in [a, b]$, является гладкой кривой в D . Действительно, непрерывная дифференцируемость функций $g(t), h(t)$ следует из теоремы о частных производных сложной функции, кроме того, $(g'(t))^2 + (h'(t))^2 = (\varphi'_u u' + \varphi'_v v')^2 + (\psi'_u u' + \psi'_v v')^2 \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$ (доказать).

Лемма 8.3

Если

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad (8.17)$$

диффеоморфное преобразование замкнутого прямоугольника P в фигуру D , то существует точка $(\bar{u}, \bar{v}) \in P$ такая, что $\text{пл. } D = I(\bar{u}, \bar{v}) \text{ пл. } \Pi$.

Доказательство более общего, чем лемма 8.3, утверждения будет приведено в п. 9.4.

Лемма 8.4

Пусть (8.17) — диффеоморфное преобразование простой компактной фигуры E в фигуру D и пусть функции $f(x, y)$ и $f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|I(u, v)|$ интегрируемы соответственно на D и E . Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |I(u, v)| du dv, \quad (8.18)$$

где $|I(u, v)|$ — модуль якобиана преобразования (8.17).

Доказательство. Для фигуры E возьмем последовательность разбиений $(\{E_k\}_m)$, $m = 1, 2, \dots$, с диаметрами $\delta'_m \rightarrow 0$ на замкнутые прямоугольники. Этой последовательности разбиений соответствует некоторая последовательность разбиений $(\{D_k\}_m)$ фигуры D . Пусть δ_m — диаметр разбиения $(\{D_k\}_m)$. Покажем, что $\delta_m \rightarrow +0$. Для любых двух точек $M_1(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1))$ и $M_2(\varphi(u_2, v_2), \psi(u_2, v_2))$, принадлежащих некоторому множеству $(E_k)_m$, с помощью формулы конечных приращений (п. 3.5) имеем

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_2) &= \sqrt{(\varphi(u_2, v_2) - \varphi(u_1, v_1))^2 + (\psi(u_2, v_2) - \psi(u_1, v_1))^2} = \\ &= \left((\varphi'_u(u_1 + \theta_1(u_2 - u_1), v_1)(u_2 - u_1) + \varphi'_v(u_2, v_1 + \theta_2(v_2 - v_1)(v_2 - v_1))^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\psi'_u(u_1 + \theta_3(u_2 - u_1), v_1)(u_2 - u_1) + \psi'_v(u_2, v_1 + \theta_4(v_2 - v_1)))^2 \right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant 2 \max_{(u, v) \in E} \{|\varphi'_u|, |\varphi'_v|, |\psi'_u|, |\psi'_v|\} \rho((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \leqslant \\ &\leqslant A \rho((u_1, v_1), (u_2, v_2)), \quad A = \text{const}, \quad 0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 < 1. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\delta_m \leqslant A \delta'_m$ и, следовательно, $\delta_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

По лемме 8.3 существуют точки $((u_k)_m, (v_k)_m) \in (E_k)_m$ такие, что

$$\text{пл.}(D_k)_m = I((u_k)_m, (v_k)_m) \text{пл.}(E_k)_m.$$

Точкам $((u_k)_m, (v_k)_m)$ соответствуют точки $((x_k)_m, (y_k)_m) \in (D_k)_m$, $(x_k)_m = \varphi((u_k)_m, (v_k)_m)$, $(y_k)_m = \psi((u_k)_m, (v_k)_m)$. Последовательности

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f((x_k)_m, (y_k)_m) \text{пл.}(D_k)_m,$$

$$\tau_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\varphi((u_k)_m, (v_k)_m), \psi((u_k)_m, (v_k)_m)) |I((u_k)_m, (v_k)_m)| \text{пл.}(E_k)_m$$

являются последовательностями интегральных сумм для интегрируемых функций $f(x, y)$ и $f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|I(u, v)|$ соответственно на D и E . При $m \rightarrow +\infty$ из равенства $\sigma_m = \tau_m$, используя первое необходимое условие интегрируемости (п. 8.1), получаем требуемое соотношение (8.18). \triangleleft

Отображение

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), & (u, v) \in E, \\ y = \psi(u, v), & \end{cases} \quad (8.19)$$

из множества E в D называют ε -диффеоморфным преобразованием фигуры E в D , если для любого $\varepsilon > 0$, существуют множества $E_\varepsilon, D_\varepsilon$ такие, что $\text{пл.}E_\varepsilon \leqslant \varepsilon$, $\text{пл.}D_\varepsilon \leqslant \varepsilon$, $E \setminus E_\varepsilon$ — простая компактная фигура и сужение

отображения (8.19) на $E \setminus E_\varepsilon$ является диффеоморфным преобразованием фигуры $E \setminus E_\varepsilon$ в $D \setminus D_\varepsilon$.

Теорема о замене переменных в 2И

Пусть (8.19) — ε -диффеоморфное преобразование фигуры E в D и пусть функции $f(x, y)$ и $f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|I(u, v)|$ интегрируемы соответственно на D и E . Тогда имеет место формула (8.18), которую называют формулой замены переменных в 2И.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $E_\varepsilon, D_\varepsilon$ — множества из определения ε -диффеоморфного преобразования фигуры E в D . Поскольку функции $f(x, y), f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|I(u, v)|$ интегрируемы соответственно на множествах D и E , то они ограничены и, следовательно,

$$\left| \iint_{D_\varepsilon} f(x, y) dx dy \right| \leq M\varepsilon, \quad \left| \iint_{E_\varepsilon} f(x(u, v), y(u, v)) |I| du dv \right| \leq M\varepsilon, \quad (8.20)$$

$M = \text{const}$. По лемме 8.4

$$\iint_{D \setminus D_\varepsilon} f(x, y) dx dy = \iint_{E \setminus E_\varepsilon} f(x(u, v), y(u, v)) |I(u, v)| du dv. \quad (8.21)$$

Из аддитивности 2И и из соотношений (8.20)–(8.21) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \left| \iint_D f(x, y) dx dy - \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |I(u, v)| du dv \right| \leq \\ & \leq \left| \iint_{D_\varepsilon} f(x, y) dx dy \right| + \left| \iint_{E_\varepsilon} f(x(u, v), y(u, v)) |I| du dv \right| \leq 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку ε произвольно, то из последнего неравенства вытекает требуемая формула (8.18). \triangleleft

Отображение криволинейной трапеции: $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq r(\varphi)$, в плоскости $O\varphi r$ на криволинейный сектор в плоскости Oxy с помощью полярного преобразования $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, обладающего якобианом

$$I = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r,$$

является ε -диффеоморфным (но не диффеоморфным) преобразованием криволинейной трапеции. В качестве E_ε можно взять простое открытое множество, содержащее границу криволинейной трапеции, а в качестве D_ε — соответствующее множество в плоскости Oxy .

Пример 8.2. Найдем площадь фигуры D , ограниченной кривыми (рис. 8.6)

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \text{ (лемниската Бернулли),} \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ (окружность).}$$

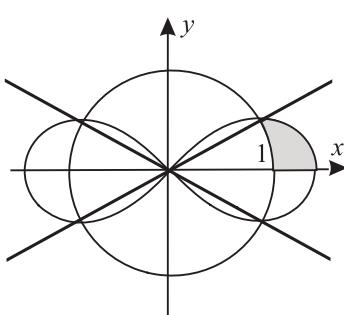


Рис. 8.6

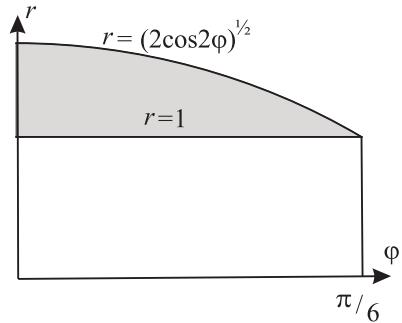


Рис. 8.7

Фигура D симметрична относительно координатных осей системы Oxy , поэтому достаточно найти площадь части фигуры, которая находится в первой четверти. Используя формулы

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, & r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ y = r \sin \varphi, & \end{cases}$$

связывающие декартовые и полярные координаты, запишем уравнения кривых, ограничивающих фигуру D , в полярных координатах:

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = 2r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \quad r = \sqrt{2 \cos 2\varphi};$$

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 1, \quad r = 1.$$

Точка $(1, \pi/6)$ является одной из четырех точек пересечения лемнискаты с окружностью, находящаяся в секторе $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

В системе координат $0\varphi r$ фигура E , ограниченная кривыми $r = 1$, $r = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/6$, является криволинейной трапецией, элементарной относительно оси $0r$. Она ограничена сверху кривой $r = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$, снизу – прямой $r = 1$ и ее проекция на ось 0φ – отрезок $0 \leq \varphi \leq \pi/6$ (рис. 8.7).

Используя полярное преобразование в двойном интеграле, имеем

$$\text{пл. } D = 4 \iint_D dx dy = 4 \iint_E r d\varphi dr = 4 \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_1^{\sqrt{2 \cos 2\varphi}} r dr = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}.$$

ГЛАВА 9

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

9.1. Криволинейный интеграл первого типа

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$. Напомним, что кривой с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = x(t), & t \in [a, b], \\ y = y(t), & \end{cases}$$

называют множество точек $M(t)$ на плоскости Oxy с координатами $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Возьмем две точки $M(t_0)$, $M(t_0 + \Delta t)$, лежащие на кривой. Проведем через эти точки секущую. Вектор $\vec{a}_1 = (x(t_0 + \Delta t) - x(t_0))\mathbf{i} + (y(t_0 + \Delta t) - y(t_0))\mathbf{j}$ параллелен секущей так же, как и вектор $\mathbf{a} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}\mathbf{j}$. Параметрическое уравнение секущей

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}\tau, & \tau \in \mathbb{R}. \\ y = y(t_0) + \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}\tau, & \end{cases}$$

Если существуют конечные пределы $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \dot{x}(t_0)$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} = \dot{y}(t_0)$ и $(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2 \neq 0$, то секущая имеет предельное положение при $\Delta t \rightarrow 0$. Прямую

$$\begin{cases} x = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\tau, & \tau \in \mathbb{R}, \\ y = y(t_0) + \dot{y}(t_0)\tau, & \end{cases}$$

являющуюся предельным положением секущей, называют касательной к кривой в точке $M(t_0)$. Вектор $\mathbf{b} = \dot{x}(t_0)\mathbf{i} + \dot{y}(t_0)\mathbf{j}$ — направляющий вектор касательной (рис. 9.1).

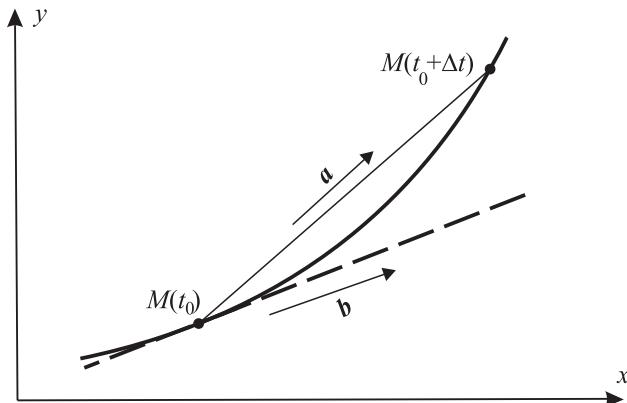


Рис. 9.1. Касательная к кривой

Рассмотрим кривую

$$l : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [a, b].$$

Каждому значению $t \in [a, b]$ отвечает определенная точка на кривой, но не наоборот, так как самопересечения не исключаются, в частности, не исключается случай совпадения начальной точки $A = (x(t_0), y(t_0))$ и конечной $B = (x(b), y(b))$. Будем считать, что точка $M(t_2)$ следует за точкой $M(t_1)$, если $t_2 > t_1$.

Путем $AM(t)$, лежащим на кривой l , называют множество, которое пробегает точка $M(\tau)$ при изменении τ от a до t с указанием направления движения точки по кривой, соответствующим возрастанию τ . За параметрическое уравнение пути принимают параметрическое уравнение кривой, на которой лежит путь.

Путь называют **кусочно-гладким** (простым), если соответствующая кривая кусочно-гладкая (простая) (п. 8.1).

Пример 9.1. Рассмотрим кривую l с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 0, \end{cases} t \in [-\pi, \pi/4].$$

Путь AB , лежащий на этой кривой, — это отрезок оси $0x$, пробегаемый точкой $M(t)$, $t \in [-\pi, 0]$, от точки $A = (-1, 0)$ до точки $C = (1, 0)$, и отрезок оси $0x$, пробегаемый точкой $M(t)$, $t \in [0, \pi/4]$, от точки C до точки $B = (1/\sqrt{2}, 0)$.

Определения спрямляемого пути и его длины такие же, как определения спрямляемой кривой и ее длины. Длина простого кусочно-гладкого пути AB : $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [a, b]$, равна $\text{дл. } AB = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$.

Путь

$$BA : \begin{cases} x = x(a+b-t), \\ y = y(a+b-t), \end{cases} t \in [a, b],$$

лежит на той же кривой, что и $AB : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, но движение по пути BA противоположное направлению движения по AB . Путь BA называют противоположно ориентированным по отношению к AB и его обозначают AB^- , в то время как исходный путь обозначают AB^+ .

Предположим, что заданы функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, и кусочно-гладкий путь $AB^+ : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, лежащий в D , такие, что отображение $f(x(t), y(t))$ интегрируемо по Риману на $[a, b]$. Тогда функция $f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ также интегрируема на $[a, b]$, как произведение интегрируемых функций.

Интеграл Римана вида

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

принимают за **криволинейный интеграл первого типа** от $f(x, y)$ по пути AB^+ (кратко КРИ-1) и обозначают $\int_{AB^+} f(x, y) ds$. Таким образом, по определению

$$\int_{AB^+} f(x, y) ds := \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt. \quad (9.1)$$

Свойства КРИ-1

1. Аддитивность. Рассмотрим путь $AB^+ : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$. Пусть $a = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n = b$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Если $C_{i-1}C_i^+, i = 1, \dots, n$, — пути, имеющие параметрические уравнения $x = x(t), y = y(t), t \in [\beta_{i-1}, \beta_i]$, то говорим, что AB^+ составлен из путей $C_{i-1}C_i^+$.

Если кусочно-гладкий путь $AB^+ : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, составлен из путей $C_0C_1^+, C_1C_2^+, \dots, C_{n-1}C_n^+$, и определен интеграл $\int_{AB^+} f(x, y) ds$, то

из определения КРИ-1 и из аддитивности интеграла Римана вытекает, что

$$\int_{AB^+} f(x, y) ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_{i-1} C_i^+} f(x, y) ds.$$

2. Рассмотрим кусочно-гладкий путь $AB^+ : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$. Непрерывную функцию $t = \varphi(\tau), \tau \in [\alpha, \beta]$, называют допустимой заменой параметра, если $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ и найдется такое разбиение $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_k = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$, что функция $t = \varphi(\tau)$ непрерывно дифференцируема и $\varphi'(\tau) > 0$ на каждом отрезке $[\gamma_{j-1}, \gamma_j]$. Пусть $t = \varphi(\tau)$ — допустимая замена параметра. Рассмотрим путь $CD^+ : x = \xi(\tau) = x(\varphi(\tau)), y = \eta(\tau) = y(\varphi(\tau)), \tau \in [\alpha, \beta]$. Он является кусочно-гладким и множества на плоскости, которые пробегают точки $M(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ и $N(\vartheta) = (\xi(\vartheta), \eta(\vartheta))$, когда θ и ϑ пробегают соответственно отрезки $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$, совпадают. В дальнейшем говорим, что путь CD^+ получен из пути AB^+ с помощью допустимой замены параметра.

Если путь CD^+ получен из кусочно-гладкого пути AB^+ с помощью допустимой замены параметра и определен интеграл $\int_{AB^+} f(x, y) ds$, то

$$\int_{AB^+} f(x, y) ds = \int_{CD^+} f(x, y) ds.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{AB^+} f(x, y) ds &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{\varphi(\gamma_{i-1})}^{\varphi(\gamma_i)} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \left[t = \varphi(\tau) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} f(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau))) \sqrt{(x'_t(\varphi(\tau)))^2 + (y'_t(\varphi(\tau)))^2} \varphi'(\tau) d\tau = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau))) \sqrt{((x(\varphi(\tau)))'_\tau)^2 + ((y(\varphi(\tau)))'_\tau)^2} d\tau = \int_{CD^+} f(x, y) ds. \end{aligned}$$

3. КРИ-1 не зависит от ориентации пути

$$\int_{AB^+} f(x, y) ds = \int_{AB^-} f(x, y) ds$$

(доказать).

4. Механический смысл КРИ-1. Пусть $f(x, y)$ — линейная плотность простого кусочно-гладкого пути

$$AB^+ : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b].$$

Разобьем $[a, b]$ на n частей точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, таким образом, чтобы точки α_j (точки α_j из определения кусочно-гладкой кривой (п. 8.1)) были среди точек разбиения t_k . Точкам t_k соответствуют точки M_k , принадлежащие пути AB^+ . Длину пути $M_{k-1}M_k^+$ обозначим Δs_k . Она равна

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

По теореме о среднем (п. 6.5)

$$\Delta s_k = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \Big|_{t=\xi_k} \Delta t_k, \quad \xi_k \in [t_{k-1}, t_k].$$

Произведение $f(x(\xi_k), y(\xi_k))\Delta s_k$ равно массе пути $M_{k-1}M_k^+$, если считать, что путь $M_{k-1}M_k^+$ имеет постоянную плотность $f(x(\xi_k), y(\xi_k))$. Сумма

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x(\xi_k), y(\xi_k)) \Delta s_k = \sum_{k=1}^n f(x(\xi_k), y(\xi_k)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \Big|_{t=\xi_k} \Delta t_k$$

является интегральной суммой для интеграла (9.1) и совпадает с массой пути, состоящего из n частей, каждая из которых имеет соответствующую постоянную плотность. Отсюда следует, что интеграл $\int_{AB^+} f(x, y) ds$ равен массе пути AB^+ .

5. Экономический смысл КРИ-1. Если $f(x, y)$ — удельная стоимость провоза груза в точке (x, y) по пути AB^+ , то $\int_{AB^+} f(x, y) ds$ — цена провоза груза по всему пути AB^+ .

Пример 9.2. Определим цену T провоза груза по пути AB^+ , проходящему по окружности $x^2 + y^2 = 4x$, если удельная стоимость провоза груза равна $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Уравнение окружности в полярных координатах имеет вид: $r = 4 \cos \varphi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Теперь можем записать параметрическое уравнение окружности

$$\begin{cases} x = 4 \cos^2 \varphi, \\ y = 4 \cos \varphi \sin \varphi, \end{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Используя свойство 5 криволинейного интеграла первого типа и формулу (9.1), имеем

$$T = \int_{AB^+} \sqrt{x^2 + y^2} ds = 16 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 32.$$

9.2. Криволинейный интеграл второго типа

Пусть заданы две функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, определенные на некотором множестве D , и пусть $AB^+ : x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, — кусочно-гладкий путь, лежащий в D . Предположим, что функции $P(x(t), y(t))$, $Q(x(t), y(t))$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Тогда функции $P(x(t), y(t))\dot{x}(t)$, $Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)$ так же интегрируемы на $[a, b]$, как произведения интегрируемых функций. Интегралы Римана вида

$$\int_a^b P(x(t), y(t))\dot{x}(t) dt, \quad \int_a^b Q(x(t), y(t))\dot{y}(t) dt \quad (9.2)$$

принимают за **криволинейные интегралы второго типа** (КРИ-2) соответственно от функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ по пути AB^+ и обозначают

$$\int_{AB^+} P(x, y) dx, \quad \int_{AB^+} Q(x, y) dy.$$

Таким образом, по определению

$$\begin{aligned} \int_{AB^+} P(x, y) dx &:= \int_a^b P(x(t), y(t))\dot{x}(t) dt, \\ \int_{AB^+} Q(x, y) dy &:= \int_a^b Q(x(t), y(t))\dot{y}(t) dt. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Чаще всего рассматривают сумму этих интегралов, которую обозначают

$$\int_{AB^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Свойства КРИ-2

1. Аддитивность. Если путь $AB^+ : x = x(t), y = y(t)$, $t \in [a, b]$, составлен из путей $C_0C_1^+, C_1C_2^+, \dots, C_{n-1}C_n^+$ и определен интеграл $\int_{AB^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, то из аддитивности интеграла Римана вытекает, что

$$\int_{AB^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \sum_{i=1}^n \int_{C_{i-1}C_i^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

2. КРИ-2 при изменении ориентации пути на противоположную (п. 9.1) меняет знак

$$\int_{AB^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{AB^-} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{AB^-} Pdx + Qdy &= \int_a^b (P(x(b+a-t), y(b+a-t))(x(b+a-t))'_t + \\ &\quad + Q(x(b+a-t), y(b+a-t))(y(b+a-t))'_t) dt = [\tau = b+a-t] = \\ &= - \int_a^b (P(x(\tau), y(\tau))x'_\tau(\tau) + Q(x(\tau), y(\tau))y'_\tau(\tau)) d\tau = - \int_{AB^+} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

3. Если путь CD^+ получен из кусочно-гладкого пути AB^+ с помощью допустимой замены параметра $t = \varphi(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, и определен интеграл $\int_{AB^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, то

$$\int_{AB^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{CD^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Действительно, по определению КРИ-2

$$I = \int_{AB^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)) dt.$$

Далее, используя свойства интеграла Римана, имеем

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{i=1}^k \int_{\varphi(\gamma_{i-1})}^{\varphi(\gamma_i)} (P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t))dt = \left[t = \varphi(\tau) \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} (P(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau)))x'_t(\varphi(\tau)) + Q(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau)))y'_t(\varphi(\tau)))\varphi'(\tau)d\tau = \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} (P(\xi(\tau), \eta(\tau))\xi'(\tau) + Q(\xi(\tau), \eta(\tau))\eta'(\tau))d\tau = \int_{CD^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.
 \end{aligned}$$

Замечание 9.1. Согласно третьему свойству криволинейных интегралов, значения интегралов для всех путей, связанных допустимыми заменами параметра, совпадают. Поэтому часто при задании криволинейного интеграла задают лишь множество, на котором лежит путь, и указывают направление движения, не указывая параметрическое уравнение пути. В этом случае предполагается, что существует простой кусочно-гладкий путь, лежащий на этом множестве, и интеграл вычисляется по одному из путей, связанных допустимой заменой параметра с этим путем.

4. Физический смысл КРИ-2. Допустим, что на множестве D задано силовое поле $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$. Пусть $AB^+ : x = x(t), y = y(t)$, $t \in [a, b]$, — кусочно-гладкий путь, лежащий в D . Разобьем $[a, b]$ на n частей точками t_k , $k = 0, \dots, n$, таким образом, чтобы точки α_j из определения кусочно-гладкого пути были среди точек разбиения t_k . Точкам t_k соответствуют точки $M(t_k)$, лежащие на пути. На каждом интервале (t_{k-1}, t_k) выберем по точке ξ_k . Рассмотрим участок пути $M_{k-1}M_k^+$. Заменим его направленным отрезком $N_{k-1}N_k^+$:

$$\begin{cases} x = x(\xi_k) + \dot{x}(\xi_k)\tau, \\ y = y(\xi_k) + \dot{y}(\xi_k)\tau, \end{cases} \quad t_{k-1} - \xi_k \leq \tau \leq t_k - \xi_k. \quad (9.4)$$

Отрезок $N_{k-1}N_k^+$ находится на касательной к пути в точке $M(\xi_k)$, N_{k-1} — начало отрезка (9.4), N_k — его конец. Заменим силу \mathbf{F} на дуге $M_{k-1}M_k^+$ постоянной силой $\mathbf{F}(x(\xi_k), y(\xi_k)) = P(x(\xi_k), y(\xi_k))\mathbf{i} + Q(x(\xi_k), y(\xi_k))\mathbf{j}$, а сам путь $M_{k-1}M_k^+$ на путь $N_{k-1}N_k^+$. Работа силы $\mathbf{F}(x(\xi_k), y(\xi_k))$ по перемещению точки единичной массы по пути $N_{k-1}N_k^+$ равна

$$\Delta A_k = P(x(\xi_k), y(\xi_k))\dot{x}(\xi_k)\Delta t_k + Q(x(\xi_k), y(\xi_k))\dot{y}(\xi_k)\Delta t_k.$$

Выражение

$$\sigma = \sum_{k=1}^n (P(x(\xi_k), y(\xi_k))\dot{x}(\xi_k) + Q(x(\xi_k), y(\xi_k))\dot{y}(\xi_k))\Delta t_k$$

является интегральной суммой для суммы интегралов (9.3) и совпадает с $\sum_{k=1}^n \Delta A_k$. Отсюда следует, что интеграл $\int_{AB^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ равен работе силы \mathbf{F} по перемещению точки единичной массы по пути AB^+ .

5. Пусть $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, — непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим кривую, параметрическое уравнение которой

$$\Gamma : \begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

Она является простой гладкой кривой и множество точек плоскости Oxy , соответствующих этой кривой, совпадает с графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Именно эта кривая имеется в виду, когда говорится о графике функции $y = f(x)$, как о кривой.

Если путь AB^+ лежит на графике непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int_{AB^+} P(x, y)dx = \int_a^b P(x, f(x))dx, \quad \int_{AB^+} Q(x, y)dy = \int_a^b Q(x, f(x))f'(x)dx.$$

6. Если гладкий путь $AB^+ : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, лежит на прямой, параллельной оси $0y$, то $\dot{x}(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$, следовательно,

$$\int_{AB^+} P(x, y)dx = 0.$$

Пример 9.3. Найдем работу D силы $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$ по перемещению точки единичной массы по пути

$$AB^+ : \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Используя свойство 4 криволинейных интегралов второго типа и формулу (9.3), имеем

$$D = \int_0^{2\pi} \left(ab \cos 2t - \frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2t \right) dt = 0.$$

9.3. Формула Грина

Фигуру D называют составной, если ее можно разбить прямыми, параллельными оси $0y$, на конечное число криволинейных трапеций таким образом, что каждая трапеция элементарна относительно оси $0y$ и ограничена простой кусочно-гладкой кривой, а также если фигура обладает таким же свойством относительно оси $0x$.

Лемма 9.1

Пусть G — криволинейная трапеция, элементарная относительно оси $0y$ и ограниченная простым кусочно-гладким путем $ADCBA^+$ (рис. 9.2), и пусть $P(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая на G функция. Тогда

$$\int_{ADCBA^+} P(x, y) dx = - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

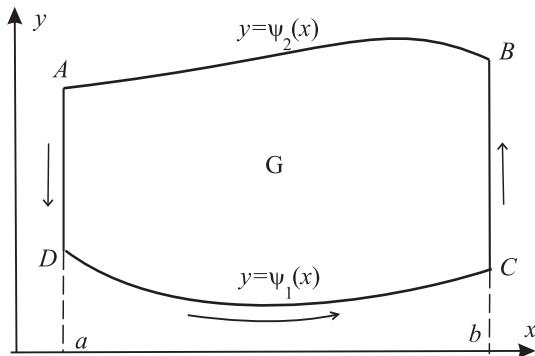


Рис. 9.2

Доказательство. Воспользовавшись теоремой о сведении 2И к повторному интегралу и свойством 5 криволинейных интегралов второго типа, имеем

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b (P(x, \psi_2(x)) - P(x, \psi_1(x))) dx = - \int_{BA^+} P(x, y) dx - \int_{DC^+} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Дополним последнюю сумму двумя равными нулю интегралами

$$-\int_{AD^+} P(x, y) dx, \quad -\int_{CB^+} P(x, y) dx$$

(пути AD^+, CB^+ параллельны оси $0y$), в результате получаем

$$\int_{ADCB^+} P(x, y) dx = -\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \triangleleft$$

Теорема о сведении КРИ-2 к 2И

Пусть D — ограниченная замкнутая область, граница которой является простой кусочно-гладкой кривой ∂D , а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые на D функции. Тогда справедлива формула Грина

$$\int_{\partial D^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \quad (9.5)$$

где ∂D^+ — путь, находящийся на границе фигуры D и ориентированный таким образом, что при движении по пути в этом направлении, фигура остается слева (рис. 9.3).

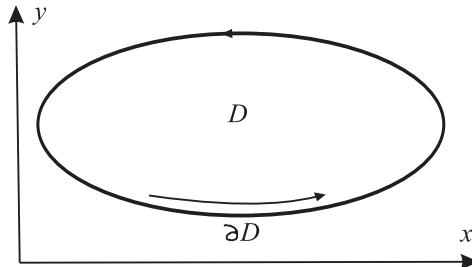


Рис. 9.3

Доказательство проведем лишь для случая, когда D — составная фигура (в общем случае доказательство проводится с помощью приближения фигуры D составной фигуруй).

Пусть $\{D_j\}$, $j = 1, \dots, k$, — разбиение фигуры D на криволинейные трапеции D_j , каждая из которых является элементарной относительно оси

$0y$ и ограничена простой кусочно-гладкой кривой. На основании леммы 9.1 и аддитивности 2И

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{j=1}^k \iint_{D_j} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \sum_{j=1}^k \int_{\partial D_j^+} P(x, y) dx. \quad (9.6)$$

Пути ∂D_j^+ состоят из путей, лежащих на границе ∂D , и из тех, которые находятся на прямых, появившихся в результате разбиения фигуры D . Согласно свойству 6 КРИ-2 интегралы по путям, лежащим на прямых, появившихся в результате разбиения, равны нулю, поэтому

$$\sum_{j=1}^k \int_{\partial D_j^+} P(x, y) dx = \int_{\partial D^+} P(x, y) dx.$$

Итак,

$$\int_{\partial D^+} P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (9.7)$$

Аналогично

$$\int_{\partial D^+} Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (9.8)$$

Объединяя формулы (9.7) и (9.8), приходим к формуле Грина (9.5). \triangleleft

Пример 9.4. Используя формулу Грина, вычислим криволинейный интеграл

$$I = \int_{C^+} x^2 y dx - x y^2 dy,$$

где C^+ — путь, находящийся на границе круга $K : x^2 + y^2 \leq a^2$ и ориентированный таким образом, что при движении по пути в этом направлении фигура остается слева.

По формуле Грина

$$I = \iint_K ((-xy^2)'_x - (x^2y)'_y) dx dy = - \iint_K (x^2 + y^2) dx dy.$$

Используя для вычисления двойного интеграла полярное преобразование, имеем

$$I = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = - \frac{\pi a^4}{2}.$$

9.4. Выражение площади через криволинейный интеграл второго типа

Пусть D — ограниченная замкнутая область, граница которой является простой кусочно-гладкой кривой ∂D . Если функции P и Q таковы, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad \forall (x, y) \in D$, то, используя формулу Грина, имеем $\text{пл.}D = \int_{\partial D^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. В частности,

$$\text{пл.}D = \int_{\partial D^+} xdy. \quad (9.9)$$

Лемма 9.2

Пусть E — ограниченная замкнутая область с простой кусочно-гладкой границей ∂E , а

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) - \quad (9.10)$$

диффеоморфное преобразование E в D . Тогда существует точка $(\bar{u}, \bar{v}) \in E$ такая, что

$$\text{пл.}D = I(\bar{u}, \bar{v})\text{пл.}E, \quad (9.11)$$

где $I(u, v)$ — якобиан преобразования (9.10) (н. 8.5).

Доказательство для случая $\psi''_{uv}(u, v) = \psi''_{vu}(u, v)$ (с помощью несколько более сложных рассуждений, чем приведенное ниже доказательство, лемма 9.2 может быть установлена и без предположения $\psi''_{uv}(u, v) = \psi''_{vu}(u, v)$).

Пусть $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [a, b]$, — параметрическое уравнение пути ∂E^+ . Кривая

$$L : \begin{cases} x = \varphi(u(t), v(t)), & t \in [a, b], \\ y = \psi(u(t), v(t)), \end{cases}$$

является границей D . Пусть L^+ — путь, находящийся на кривой L . Если при движении точки по кривой L при возрастании t фигура D остается слева, то $\partial D^+ = L^+$, в противном случае $\partial D^+ = L^-$. На основании формул (9.3), (9.9)

$$\begin{aligned} \text{пл.}D &= \int_{\partial D^+} xdy = \left| \int_{L^+} xdy \right| = \left| \int_a^b \varphi(u(t), v(t))(\psi'_u u'(t) + \psi'_v v'(t))dt \right| = \\ &= \left| \int_{\partial E^+} \varphi(u, v)\psi'_u(u, v)du + \varphi(u, v)\psi'_v(u, v)dv \right|. \end{aligned}$$

Теперь используя формулу Грина, имеем

$$\begin{aligned} \text{пл.} D &= \left| \iint_E \left(\frac{\partial}{\partial u}(\varphi\psi'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\varphi\psi'_u) \right) dudv \right| = \\ &= \left| \iint_E (\varphi'_u\psi'_v + \varphi\psi''_{vu} - \varphi'_v\psi'_u - \varphi\psi''_{uv}) dudv \right| = \iint_E |I(u, v)| dudv \end{aligned} \quad (9.12)$$

(при переходе к последнему выражению использован тот факт, что якобиан диффеоморфного преобразования не меняет знак). По теореме о среднем (п. 8.3) существует точка $(\bar{u}, \bar{v}) \in E$ такая, что

$$\iint_E |I(u, v)| dudv = I(\bar{u}, \bar{v}) \text{пл.} E. \quad (9.13)$$

Из равенств (9.12), (9.13) получаем требуемую формулу (9.11). \triangleleft

9.5. Условия независимости криволинейного интеграла второго типа от пути интегрирования

Лемма о ломаной

Любые две точки области D можно соединить ломаной, содержащейся в D .

Доказательство. Пусть точки A и B принадлежат D и пусть $l : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, — кривая, содержащаяся в D и соединяющая точки A и B , т. е. такая кривая, что для любого $t \in [a, b]$ точка $(x(t), y(t))$ принадлежит D и $(x(a), y(a)) = A, (x(b), y(b)) = B$. Точку $t \in [a, b]$ отнесем к множеству T , если дугу кривой $AM(t)$, $M(t) = (x(t), y(t))$, можно покрыть конечным числом кругов положительного радиуса, содержащихся в D . Пусть $t^* = \sup T$. Поскольку $(x(t^*), y(t^*))$ — внутренняя точка множества D , то точка t^* может быть лишь точкой b . Через круги, покрывающие кривую, проводим искомую ломаную, лежащую в D . \triangleleft

Пусть $P(x, y), Q(x, y)$ — две непрерывные функции, определенные в D . Возьмем две произвольные точки $A = (x_0, y_0)$ и $B = (x, y)$, принадлежащие D . Соединим эти точки кусочно-гладким путем AB^+ , содержащимся в D , и рассмотрим интеграл

$$\int_{AB^+} Pdx + Qdy. \quad (9.14)$$

Его значение зависит как от точек A и B , так и от пути AB^+ , по которому мы из точки A приходим в точку B . Если для произвольных фиксированных точек $A, B \in D$ интеграл (9.14) принимает одно и тоже значение для любого кусочно-гладкого пути AB^+ , принадлежащего D , то говорят, что КРИ-2 не зависит от пути интегрирования. В этом случае криволинейный интеграл обозначают следующим образом:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy.$$

Область D называют **односвязной**, если любая простая замкнутая кривая, содержащаяся в D , ограничивает множество, состоящее лишь из точек, принадлежащих D (рис. 9.4).

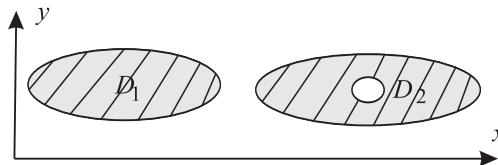


Рис. 9.4. D_1 — односвязная область, D_2 не является односвязной

Теорема о независимости КРИ-2 от пути интегрирования

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в односвязной области D . Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

а) для любого замкнутого ломанного пути $L^+ \in D$ интеграл

$$\int_{L^+} P dx + Q dy$$

равен нулю;

б) для любых двух точек A, B из D интеграл $\int_{AB^+} P dx + Q dy$ не зависит от ломаного пути, лежащего в D и соединяющего точки A и B ;

в) существует непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$ такая, что

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \forall (x, y) \in D;$$

г) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяют условию Эйлера

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in D.$$

Доказательство проведем по схеме а) \Rightarrow б) \Rightarrow в) \Rightarrow г) \Rightarrow а).

а) \Rightarrow б). Пусть $(AB^+)_1 : x = x_1(t), y = y_1(t), t \in [a_1, b_1]$, $(AB^+)_2 : x = x_2(t), y = y_2(t), t \in [a_2, b_2]$, — два ломаных пути, соединяющих точки A и B . Построим замкнутый ломанный путь $L^+ : x = x_3(t), y = y_3(t), t \in [a_1, b_1 + b_2 - a_2]$, где

$$x_3(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ x_2(-t + b_1 + b_2), & t \in (b_1, b_1 + b_2 - a_2], \end{cases}$$

$$y_3(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ y_2(-t + b_1 + b_2), & t \in (b_1, b_1 + b_2 - a_2], \end{cases}$$

составленный из путей $L_1^+ = (AB^+)_1$, $L_2^+ : x = x_2(-t + b_1 + b_2), y = y_2(-t + b_1 + b_2)$, $t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]$. Путь L_2^+ получен из AB^- с помощью допустимой замены параметра, следовательно, $-\int_{(AB^+)_2} = \int_{L_2^+}$. Отсюда, используя аддитивность КРИ-2, имеем

$$0 = \int_L = \int_{(AB^+)_1} - \int_{(AB^+)_2} \Rightarrow \int_{(AB^+)_1} = \int_{(AB^+)_2} .$$

б) \Rightarrow в). Пусть $A = (x_0, y_0)$ — фиксированная точка, а $B = (x, y)$ — произвольная точка из D . Интеграл $\int_{AB^+} Pdx + Qdy$ не зависит от ломаного пути интегрирования AB^+ , следовательно, определена функция

$$u(x, y) = \int_{AB^+} Pdx + Qdy,$$

где AB^+ — произвольный ломанный путь, соединяющий точки A и B и принадлежащий области D . Рассмотрим частное приращение $\Delta_x u$ функции $u(x, y)$

$$\Delta_x u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{AB_1^+} Pdx + Qdy - \int_{AB^+} Pdx + Qdy,$$

где AB_1^+ — ломанный путь, соединяющий точки A и $B_1 = ((x + \Delta x, y))$. Соединим точки $(x_0, y_0), (x, y)$ некоторым ломанным путем, а точки $(x_0, y_0), (x + \Delta x, y)$ — путем, составленным из уже выбранного пути, соединяющего точки $(x_0, y_0), (x, y)$ и пути, параллельного оси $0x$ и соединяющего точки $B = (x, y)$ и $B_1 = (x + \Delta x, y)$ (рис. 9.5). Тогда, используя аддитивность КРИ-2 и формулы (9.3), имеем

$$\Delta_x u = \int_{BB_1^+} Pdx + Qdy = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(\tau, y)d\tau.$$

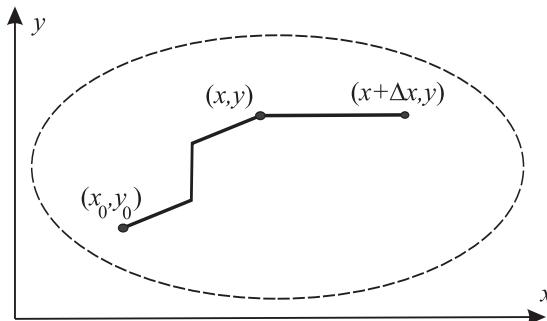


Рис. 9.5

По теореме о среднем для интеграла Римана (п. 7.3), получаем

$$\frac{1}{\Delta x} \Delta_x u = P(x + \theta \Delta x, y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ в последнем равенстве, имеем $u'_x(x, y) = P(x, y)$. Аналогично доказывается, что $u'_y(x, y) = Q(x, y)$. Таким образом, $du = Pdx + Qdy$.

в) \Rightarrow г). $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u'_x dx + u'_y dy$, $P(x, y) = u'_x(x, y)$, $Q(x, y) = u'_y(x, y)$. Поскольку функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, то функция $u(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в D . По теореме о смешанных производных (п. 7.5)

$$P'_y = u''_{xy} = u''_{yx} = Q'_x \quad \forall (x, y) \in D.$$

г) \Rightarrow а). Рассмотрим сначала случай, когда L^+ — простой ломаный замкнутый путь. Множество, на котором лежит путь L^+ , является границей некоторой составной фигуры E . Так как D односвязная область, то E принадлежит D . По формуле Грина

$$\int_{L^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Если L^+ — произвольный замкнутый ломаный путь, то L^+ составлен из конечного числа простых замкнутых путей, ограничивающих некоторые составные фигуры, и конечного числа путей, соединяющих эти фигуры и проходящих дважды в противоположных направлениях. Как показано выше, криволинейный интеграл по пути, ограничивающему составную фигуру, равен нулю. Равна нулю и сумма интегралов по двум путям, лежащим на одном отрезке, но проходящим в противоположных направлениях. Таким образом, $\int_{L^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. \triangleleft

Следствие 9.1

Если выполнено хотя бы одно из условий теоремы, то КРИ-2 не зависит от пути интегрирования.

Доказательство. Пусть $L^+ : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, — кусочно-гладкий путь, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{L^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_a^b (P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t)) dt = \\ &= \int_a^b (u'_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + u'_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t)) dt = \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t)))'_t dt = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 9.2. Функцию $u(x, y)$ такую, что $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \forall (x, y) \in D$, называют первообразной для выражения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Из доказательства теоремы следует, что при выполнении одного, а следовательно, и трех оставшихся условий теоремы о независимости КРИ-2 от пути интегрирования, первообразной для выражения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является функция

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy,$$

где (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка из D .

Замечание 9.3. Если область D и точка (x_0, y_0) таковы, что для любой точки $(x, y) \in D$ ломаная, соединяющая точки (x_0, y_0) , (x, y) и состоящая из двух отрезков, один из которых параллелен оси $0x$, а второй — оси $0y$, принадлежит D , то

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(\tau, y_0) d\tau + \int_{y_0}^y Q(x, \eta) d\eta. \quad (9.15)$$

Замечание 9.4. Если область D не является односвязной, то теорема о независимости КРИ-2 от пути интегрирования в общем случае неверна.

Пример 9.5. Вычислим интеграл

$$I = \int_{L^+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}; \quad L^+ : \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi].$$

Используя формулы (9.3), имеем

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2\pi \neq 0.$$

Интеграл не равен нулю, хотя в области $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ функции $P(x, y), Q(x, y)$ удовлетворяют условию Эйлера

$$Q'_x = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = P'_y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0).$$

Теорема не применима, так как область $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ не является односвязной.

Пример 9.6. Функции $P(x, y) = x^4 + 4xy^3, Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4$ удовлетворяют условию Эйлера в \mathbb{R}^2

$$P'_y = Q'_x = 12xy^2,$$

следовательно, существует первообразная $u(x, y)$ для выражения $du = Pdx + Qdy$. По формуле (9.15)

$$u(x, y) = \int_0^x \tau^4 d\tau + \int_0^y (6x^2\eta^2 - 5\eta^4) d\eta = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5.$$

ГЛАВА 10

ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ

10.1. Топология \mathbb{R}^n

Множество столбцов $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$, с обычными операциями сложения и умножения на вещественные числа является векторным пространством над полем \mathbb{R} . Это векторное пространство обозначают \mathbb{R}^n , а его элементы называют векторами или точками. Задав в \mathbb{R}^n скалярное произведение векторов

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

по формуле $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, мы превращаем \mathbb{R}^n в евклидово пространство. Нормой вектора \mathbf{x} называют число $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, а расстоянием между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ — число $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$. Расстояние и норма в \mathbb{R}^n обладают следующими свойствами:

- а) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, причем $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- б) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;
- в) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$
(неравенство треугольника);
- г) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;
- д) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
- е) $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Шаром и сферой в \mathbb{R}^n с центром в точке \mathbf{x}_0 и радиусом r называют соответственно множества

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\}, \quad S(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r\}.$$

\mathbb{R}^n является n -мерным векторным пространством с каноническим базисом

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k.$$

Шар $B(\mathbf{x}_0, \delta)$, $\delta > 0$, называют δ -окрестностью точки \mathbf{x}_0 (или просто окрестностью). Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называют открытым, если для любой точки $\mathbf{x} \in D$ найдется δ -окрестность этой точки, содержащаяся в D . Все определения и обозначения, относящиеся к \mathbb{R}^2 , переносятся на \mathbb{R}^n . Без дальнейших пояснений ниже используются следующие понятия: внутренняя точка, дополнение множества, замкнутое множество, граничная точка, граница, замыкание множества, предельная точка, область, ограниченная замкнутая область, компакт, последовательность в \mathbb{R}^n , сходящаяся последовательность. Между множеством элементов из \mathbb{R}^3 и множеством точек пространства $Oxyz$ существует естественное взаимно однозначное соответствие. Поэтому элементы из \mathbb{R}^3 часто называют точками пространства $Oxyz$.

Скалярная функция векторного аргумента

Функцию вида $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, называют скалярной функцией векторного аргумента или скалярной функцией от n переменных и обозначают $y = f(x_1, \dots, x_n)$ или $y = f(\mathbf{x})$. Пусть \mathbf{x}_0 — внутренняя точка множества $D \subset \mathbb{R}^n$, а $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярная функция векторного аргумента. Говорят, что предел $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ равен $A \in \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \mathbf{x} \in D : 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - A| \leq \varepsilon.$$

Для точек \mathbf{x}_0 , предельных для множества D , определяют предел функции вдоль множества D (п. 7.2): $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) = A$.

Функцию f называют непрерывной во внутренней точке $\mathbf{x}_0 \in D$, если $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ и непрерывной в предельной точке $\mathbf{x}_0 \in D$ вдоль множества D , если $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Непрерывные скалярные функции n переменных обладают теми же свойствами, что и функции двух переменных: локальная ограниченность; стабилизация знака; множество значений непрерывной функции на связном множестве является промежутком; функция, непрерывная на компакте, достигает экстремальных значений и равномерно непрерывна; арифметические комбинации непрерывных функций сами непрерывны (в случае частного при условии, что знаменатель отличен от нуля) (доказать).

Рассмотрим скалярную функцию векторного аргумента f , заданную на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ с внутренней точкой \mathbf{x}_0 . Построим приращение $\Delta f = f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(x_{01} + \Delta x_1, \dots, x_{0n} + \Delta x_n) - f(x_{01}, \dots, x_{0n})$.

Функцию f называют дифференцируемой в точке \mathbf{x}_0 , если существуют числа q_1, \dots, q_n такие, что

$$\Delta f = q_1 \Delta x_1 + \dots + q_n \Delta x_n + o(\|\Delta\mathbf{x}\|). \quad (10.1)$$

Выражение $q_1 \Delta x_1 + \dots + q_n \Delta x_n$ называют дифференциалом функции f в точке \mathbf{x}_0 и обозначают $df = q_1 \Delta x_1 + \dots + q_n \Delta x_n$. Если обозначить $\Delta x_1 = dx_1, \dots, \Delta x_n = dx_n$, то $df = q_1 dx_1 + \dots + q_n dx_n$.

Если у функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$ зафиксировать переменные $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, то производную скалярной функции одной переменной $x_i \rightarrow f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ называют частной производной функции f по x_i и обозначают $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ или f'_{x_i} . Аналогично определяют частные производные $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_{i-1}}, f'_{x_{i+1}}, \dots, f'_{x_n}$.

Введем частное приращение $\Delta_{x_i} f$ функции f по переменной x_i :

$$\Delta_{x_i} f := f(x_{01}, \dots, x_{0i} + \Delta x_{0i}, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0n}),$$

$i = 1, \dots, n$. Предположим, что f дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 . Положим в (10.1) $\Delta x_1 = 0, \dots, \Delta x_{i-1} = 0, \Delta x_{i+1} = 0, \dots, \Delta x_n = 0$, получим

$$\Delta_{x_i} f = q_i \Delta x_i + o(|\Delta x_i|), \quad \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = q_i + \frac{o(|\Delta x_i|)}{\Delta x_i},$$

$$\Delta x_i \rightarrow 0, \quad f'_{x_i}(\mathbf{x}_0) = q_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, для дифференцируемой в точке \mathbf{x}_0 функции

$$df|_{\mathbf{x}_0} = f'_{x_1}(\mathbf{x}_0)dx_1 + \dots + f'_{x_n}(\mathbf{x}_0)dx_n.$$

Функцию f называют непрерывно дифференцируемой на открытом множестве D , если все частные производные этой функции непрерывны в D .

Если функция f непрерывно дифференцируема на открытом множестве D , то, применяя формулу конечных приращений для функции одной переменной n раз, так же, как и для функций двух переменных, для достаточно малых $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$, получаем формулу конечных приращений для скалярных функций векторного аргумента

$$\begin{aligned} \Delta f &= f'_{x_1}(x_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \theta_2 \Delta x_2, \dots, x_n) \Delta x_2 + \\ &\quad + \dots + f'_{x_n}(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \theta_n \Delta x_n) \Delta x_n, \quad 0 < \theta_i < 1, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Достаточное условие дифференцируемости скалярной функции векторного аргумента

|| Если функция f непрерывно дифференцируема на открытом множестве D , то она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $\mathbf{x}_0 \in D$. Используя формулу (10.2), Δf представим в виде

$$\Delta f = f'_{x_1}(\mathbf{x}_0)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(\mathbf{x}_0)\Delta x_n + \alpha,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\|\Delta \mathbf{x}\|} &= (f'_{x_1}(x_{01} + \theta_1 \Delta x_1, \dots, x_{0n}) - f'_{x_1}(x_{01}, \dots, x_{0n})) \frac{\Delta x_1}{\|\Delta \mathbf{x}\|} + \cdots + \\ &+ (f'_{x_1}(x_{01} + \Delta x_1, \dots, x_{0n} + \theta_n \Delta x_n) - f'_{x_n}(x_{01}, \dots, x_{0n})) \frac{\Delta x_n}{\|\Delta \mathbf{x}\|}. \end{aligned}$$

Из непрерывности частных производных следует, что $\frac{\alpha}{\|\Delta \mathbf{x}\|} \xrightarrow{\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0} 0$, т. е.
 $\alpha = o(\|\Delta \mathbf{x}\|)$. ◁

Рассмотрим теперь функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, определенную на произвольном множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. Отображение \bar{f} , заданное на множестве $D_1 \subset D$, называют продолжением f с D на D_1 , если $f(X) = \bar{f}(X) \quad \forall X \in D$. Функцию f называют непрерывно дифференцируемой на D , если существует непрерывно дифференцируемое продолжение \bar{f} функции f с D на некоторое открытое множество $D_1 \supset D$.

10.2. Дифференцируемая векторная функция

Функцию вида $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, называют векторной функцией и обозначают $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Задание векторной функции F равносильно заданию m скалярных функций от n переменных $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$.

Допустим, что \mathbf{x}_0 — предельная точка множества D . Вектор \mathbf{A} называют пределом $F(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ вдоль множества D , если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \mathbf{x} \in D : 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho(F(\mathbf{x}), \mathbf{A}) \leq \varepsilon.$$

Функцию F называют непрерывной в точке \mathbf{x}_0 вдоль множества D , если

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in D} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0).$$

Теорема о непрерывности векторной функции

Векторная функция F непрерывна в точке \mathbf{x}_0 вдоль множества D тогда и только тогда, когда все ее компоненты $f_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$, непрерывны в точке \mathbf{x}_0 вдоль множества D .

Доказательство. Достаточность. Если все компоненты $f_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$, векторной функции непрерывны в точке \mathbf{x}_0 , то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i(\varepsilon) > 0, \forall \mathbf{x} \in D : 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq \delta_i(\varepsilon) \Rightarrow \rho(f_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{x}_0)) \leq \varepsilon.$$

Отсюда

$$\rho(F(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}_0)) = \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}_0))^2 + \dots + (f_m(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x}_0))^2} \leq \sqrt{m}\varepsilon,$$

если $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq \min\{\delta_1(\varepsilon), \dots, \delta_m(\varepsilon)\}$, $\mathbf{x} \in D$, т. е. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in D} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0)$.

Обратное утверждение очевидно. \triangleleft

Рассмотрим векторную функцию F , заданную на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ с внутренней точкой \mathbf{x}_0 . Построим приращение

$$\Delta F = F(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \dots \\ \Delta f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}_0) \\ \dots \\ f_m(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Функцию F называют дифференцируемой в точке \mathbf{x}_0 , если существует матрица

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & \dots & q_{mn} \end{pmatrix}$$

с вещественными элементами такая, что

$$\Delta F = Q \Delta \mathbf{x} + \mathbf{o}(\|\Delta \mathbf{x}\|), \quad (10.3)$$

или в координатной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta f_1 = q_{11} \Delta x_1 + \dots + q_{1n} \Delta x_n + o_1(\|\Delta \mathbf{x}\|), \\ \dots \\ \Delta f_i = q_{i1} \Delta x_1 + \dots + q_{in} \Delta x_n + o_i(\|\Delta \mathbf{x}\|), \\ \dots \\ \Delta f_m = q_{m1} \Delta x_1 + \dots + q_{mn} \Delta x_n + o_m(\|\Delta \mathbf{x}\|). \end{array} \right. \quad (10.4)$$

Выражение $Q\Delta\mathbf{x}$ называют дифференциалом функции F в точке \mathbf{x}_0 и обозначают $dF|_{\mathbf{x}_0} = Q\Delta\mathbf{x}$.

Если обозначить $\Delta\mathbf{x} = d\mathbf{x}$, то

$$dF|_{\mathbf{x}_0} = Qd\mathbf{x}.$$

Предположим, что F дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 . Положим в i -й строке равенств (10.4) $\Delta x_1 = 0, \dots, \Delta x_{j-1} = 0, \Delta x_{j+1} = 0, \dots, \Delta x_n = 0$, получим

$$\Delta_{x_j} f_i = q_{ij} \Delta x_j + o_i(|\Delta x_j|), \quad \frac{\Delta_{x_j} f_i}{\Delta x_j} = q_{ij} + \frac{o_i(|\Delta x_j|)}{\Delta x_j},$$

$$\Delta x_j \rightarrow 0, \quad \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_0} = q_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

называют **матрицей Якоби** отображения F и обозначают $\frac{dF}{d\mathbf{x}}$.

Таким образом, для дифференцируемой в точке \mathbf{x}_0 функции

$$dF|_{\mathbf{x}_0} = \left. \frac{dF}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} d\mathbf{x}$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} dF|_{\mathbf{x}_0} &= \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_0} & \cdots & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}_0} dx_k \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}_0} dx_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df_1|_{\mathbf{x}_0} \\ \cdots \\ df_m|_{\mathbf{x}_0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из равенств (10.4) сразу вытекает следующая теорема.

Теорема о дифференцируемости векторной функции

Векторная функция $F(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 тогда и только тогда, когда все ее компоненты $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$, дифференцируемы в точке \mathbf{x}_0 , при этом $dF|_{\mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} df_1|_{\mathbf{x}_0} \\ \dots \\ df_m|_{\mathbf{x}_0} \end{pmatrix}$.

Векторную функцию F называют непрерывно дифференцируемой на открытом множестве D , если все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, непрерывны на D .

Достаточное условие дифференцируемости векторной функции

Непрерывно дифференцируемая на открытом множестве D векторная функция F дифференцируема в каждой точке этого множества (доказать).

10.3. Матрица Якоби сложной векторной функции

Пусть заданы две векторные функции

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad F(D) = E \subset \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{z} &= G(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in E, \quad G(E) \subset \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Можно построить сложную векторную функцию $H(\mathbf{x}) = G(F(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in D$, которую рассматриваем в следующей теореме.

Теорема о матрице Якоби сложной функции

Если функция $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 , а функция $\mathbf{z} = G(\mathbf{y})$ дифференцируема в точке $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0)$, то сложная функция $G(F(\mathbf{x}))$ дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 и ее матрица Якоби равна произведению матриц Якоби отображений G и F

$$\frac{dG(F(\mathbf{x}))}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{dG(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}_0} \frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0}. \quad (10.5)$$

Доказательство. Пусть $(g_i)'_{y_j}$ и $(f_i)'_{x_j}$ — элементы соответственно матриц Якоби $\frac{dG(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}_0}$ и $\frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0}$, Δy_i — элементы вектора $\Delta \mathbf{y}$. При выполнении условий теоремы имеем

$$\Delta \mathbf{y} = F(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0) = \frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{o}(\|\Delta \mathbf{x}\|),$$

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{z} &= G(\mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}) - G(\mathbf{y}_0) = \frac{dG(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}_0} \Delta \mathbf{y} + \mathbf{o}(\|\Delta \mathbf{y}\|), \\
G(F(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x})) - G(F(\mathbf{x}_0)) &= \frac{dG(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}_0} \Delta \mathbf{y} + \mathbf{o}(\|\Delta \mathbf{y}\|) = \\
&= \frac{dG(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}_0} \left(\frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{o}(\|\Delta \mathbf{x}\|) \right) + \mathbf{o}(\|\Delta \mathbf{y}\|) = \\
&= \frac{dG(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}_0} \frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{p}, \\
\mathbf{p} &= \frac{dG(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}_0} \mathbf{o}(\|\Delta \mathbf{x}\|) + \mathbf{o}(\|\Delta \mathbf{y}\|).
\end{aligned} \tag{10.6}$$

Покажем, что

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} o_1(\|\Delta \mathbf{x}\|) \\ \dots \\ o_k(\|\Delta \mathbf{x}\|) \end{pmatrix}. \tag{10.7}$$

Действительно,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g_1)'_{y_1} & \dots & (g_1)'_{y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ (g_k)'_{y_1} & \dots & (g_k)'_{y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o_1(\|\Delta \mathbf{x}\|) \\ \dots \\ o_m(\|\Delta \mathbf{x}\|) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(\|\Delta \mathbf{y}\|) \\ \dots \\ o_k(\|\Delta \mathbf{y}\|) \end{pmatrix}.$$

Используя свойства нормы и скалярного произведения векторов (п. 10.1), имеем

$$\begin{aligned}
|p_i| &\leq |(g_i)'_{y_1} o_1(\|\Delta \mathbf{x}\|) + \dots + (g_i)'_{y_m} o_m(\|\Delta \mathbf{x}\|)| + |o_i(\|\Delta \mathbf{y}\|)| \leq \\
&\leq M_i \cdot \|\mathbf{o}(\|\Delta \mathbf{x}\|)\| + |o_i(\|\Delta \mathbf{y}\|)|, \quad \text{где } M_i = \left(\sqrt{((g_i)'_{y_1})^2 + \dots + ((g_i)'_{y_m})^2} \right) \Big|_{\mathbf{y}_0}.
\end{aligned}$$

Ясно, что

$$M_i \cdot \|\mathbf{o}(\|\Delta \mathbf{x}\|)\| = o_i(\|\Delta \mathbf{x}\|).$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
|\Delta y_i| &\leq |(f_i)'_{x_1} \Delta x_1 + \dots + (f_i)'_{x_n} \Delta x_n| + |o_i(\|\Delta \mathbf{x}\|)| \leq \\
&\leq \overline{M}_i \cdot \|\Delta \mathbf{x}\| + |o_i(\|\Delta \mathbf{x}\|)|, \quad \text{где } \overline{M}_i = \left(\sqrt{((f_i)'_{x_1})^2 + \dots + ((f_i)'_{x_n})^2} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0},
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
\|\Delta \mathbf{y}\| &\xrightarrow{\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0} 0, \quad \frac{o_i(\|\Delta \mathbf{y}\|)}{\|\Delta \mathbf{x}\|} = \frac{o_i(\|\Delta \mathbf{y}\|)}{\|\Delta \mathbf{y}\|} \frac{\|\Delta \mathbf{y}\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} \xrightarrow{\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0} 0, \\
o_i(\|\Delta \mathbf{y}\|) &= o_i(\|\Delta \mathbf{x}\|).
\end{aligned}$$

Таким образом, $p_i = o_i(\|\Delta \mathbf{x}\|)$, $i = 1, \dots, k$, что равносильно равенству (10.7).

Из соотношений (10.6), (10.7) следует дифференцируемость сложной функции и требуемое представление (10.5) матрицы Якоби сложной функции. \triangleleft

Найдем $d\mathbf{z}$ в двух случаях:

- 1) $\mathbf{z} = G(\mathbf{y})$, \mathbf{y} — вектор с независимыми компонентами,
- 2) $\mathbf{z} = G(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$.

В первом случае

$$d\mathbf{z} = \frac{dG}{d\mathbf{y}} d\mathbf{y}, \quad (10.8)$$

во втором —

$$d\mathbf{z} = \frac{dG}{d\mathbf{y}} \frac{dF}{d\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{dG}{d\mathbf{y}} d\mathbf{y}. \quad (10.9)$$

Сравнивая формулы (10.8), (10.9) видим, что векторная функция обладает инвариантностью формы первого дифференциала.

Пример 10.1. Найдем матрицу Якоби сложной функции, образованной отображениями $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$, $\mathbf{z} = G(\mathbf{y})$, где

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} g(y_1, y_2) \\ h(y_1, y_2) \\ k(y_1, y_2) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{dF}{d\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad \frac{dG}{d\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} g'_{y_1} & g'_{y_2} \\ h'_{y_1} & h'_{y_2} \\ k'_{y_1} & k'_{y_2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{dG(F(\mathbf{x}))}{d\mathbf{x}} = \frac{dG}{d\mathbf{y}} \frac{dF}{d\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2x_1 g'_{y_1} + x_2 g'_{y_2} & 2x_2 g'_{y_1} + x_1 g'_{y_2} \\ 2x_1 h'_{y_1} + x_2 h'_{y_2} & 2x_2 h'_{y_1} + x_1 h'_{y_2} \\ 2x_1 k'_{y_1} + x_2 k'_{y_2} & 2x_2 k'_{y_1} + x_1 k'_{y_2} \end{pmatrix}.$$

10.4. Дифференциалы высших порядков векторной функции

Допустим, что компоненты $f_i(\mathbf{x})$ векторной функции $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

имеют частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $j = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$. Производные $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)$, $j = 1, \dots, m; k, i = 1, \dots, n$, называют частными производными второго порядка для функции $F(\mathbf{x})$ и обозначают $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}$ или $(f_j)''_{x_i x_k}$. Аналогично вводятся частные производные любого порядка.

Векторную функцию F называют l раз непрерывно дифференцируемой на открытом множестве D , если все частные производные до порядка l включительно всех компонент f_i , $i = 1, \dots, m$, векторной функции F непрерывны на D . Векторную функцию F , заданную на произвольном множестве D , называют l раз непрерывно дифференцируемой на D , если существует l раз непрерывно дифференцируемое продолжение \bar{F} функции F с D на некоторое открытое множество $D_1 \supset D$.

Если функция $F(\mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируема на открытом множестве D , то по теореме о смешанных производных

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}, \quad j = 1, \dots, m; \quad k, i = 1, \dots, n.$$

Аналогичное утверждение справедливо для частных производных высших порядков.

Дифференциал векторной функции $d\mathbf{y} = \frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} d\mathbf{x}$ зависит от \mathbf{x} и $d\mathbf{x}$. Если считать $d\mathbf{x}$ фиксированным, то $d\mathbf{y}$ является лишь функцией от \mathbf{x} . Дифференциал этой функции называют вторым дифференциалом функции $F(\mathbf{x})$ и обозначают $d^2 F(\mathbf{x})$, при этом предполагается, что при вычислении второго дифференциала приращения $\Delta \mathbf{x}$ выбираются такими же, как и при вычислении первого дифференциала,

$$d^2 F = \begin{pmatrix} d(df_1) \\ \dots \\ d(df_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2 f_1 \\ \dots \\ d^2 f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((\partial/\partial x_1)dx_1 + \dots + (\partial/\partial x_n)dx_n)^2 f_1 \\ \dots \\ ((\partial/\partial x_1)dx_1 + \dots + (\partial/\partial x_n)dx_n)^2 f_m \end{pmatrix}$$

где $(\partial/\partial x_1) dx_1 + \dots + (\partial/\partial x_n) dx_n = d$ — оператор дифференцирования, вторая степень которого определяется по формуле $d^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k$.

Для скалярной функции векторного аргумента $f_i(x_1, \dots, x_n)$ построим матрицу

$$\begin{pmatrix} (f_i)''_{x_1^2} & (f_i)''_{x_1 x_2} & \dots & (f_i)''_{x_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_i)''_{x_n x_1} & (f_i)''_{x_n x_2} & \dots & (f_i)''_{x_n^2} \end{pmatrix},$$

которую обозначают $\frac{\partial^2 f_i}{\partial \mathbf{x}^2}$. С помощью этой матрицы второй дифференциал скалярной функции векторного аргумента $d^2 f_i(\mathbf{x})$ можно записать в виде

$$d^2 f_i = (d\mathbf{x})^\top \frac{\partial^2 f_i}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} df_i &= \frac{df_i}{d\mathbf{x}} d\mathbf{x} = (d\mathbf{x})^\top \left(\frac{df_i}{d\mathbf{x}} \right)^\top, \\ d^2 f_i &= d(df_i) = (d\mathbf{x})^\top \frac{d\left(\left(\frac{df_i}{d\mathbf{x}} \right)^\top \right)}{d\mathbf{x}} d\mathbf{x} = (d\mathbf{x})^\top \frac{\partial^2 f_i}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$d^2 F = \begin{pmatrix} (d\mathbf{x})^\top \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x} \\ \dots \\ (d\mathbf{x})^\top \frac{\partial^2 f_m}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k \end{pmatrix}.$$

По индукции, отправляясь от дифференциала первого порядка, определяют дифференциалы любого порядка

$$d^s F = d(d^{s-1} F), s > 1.$$

Воспользовавшись схемой рассуждений из п. 7.6, при выводе формулы Тейлора для функций двух переменных, можно получить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $(p+1)$ раз непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки \mathbf{x}_0 скалярной функции векторного аргумента $y = f(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{df}{1!} \Big|_{\mathbf{x}_0} + \dots + \frac{d^p f}{p!} \Big|_{\mathbf{x}_0} + \frac{d^{p+1} f}{(p+1)!} \Big|_{(\mathbf{x}_0 + \theta \Delta\mathbf{x})}, \quad 0 < \theta < 1.$$

10.5. Кратные интегралы

Всякую совокупность точек T в \mathbb{R}^n называют телом. Клеткой в \mathbb{R}^n называют как множество вида

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R},$$

так и любое множество, которое получается из K удалением всей или части его границы. За объем клетки принимают число $(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$. Тело называют простым, если его можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся клеток. За объем простого тела берут сумму объемов клеток, из которых оно составлено. Пусть T — ограниченное тело. Простые тела Π_*, Π^* такие, что $\Pi_* \subset T \subset \Pi^*$ называют соответственно вписанным и описанным для тела T . Если

$$V_* = \sup_{\Pi_* \subset T} \{\text{об.}\Pi_*\} = \inf_{\Pi^* \supset T} \{\text{об.}\Pi^*\} = V^*,$$

то тело T называют кубируемым, а величину $V = V_* = V^*$ — его объемом.

Тело T кубируемо, если и только если $\forall \varepsilon > 0$ существуют вписанное и описанное кубируемые тела T_*, T^* такие, что $\text{об.}T^* - \text{об.}T_* \leq \varepsilon$ (доказать). В дальнейшем рассматриваем лишь кубируемые тела.

Совокупность тел $\{T_k\} = \{T_1, \dots, T_n\}$ называют разбиением тела T , если объединение всех T_k составляет T и никакие две части из $\{T_k\}$ не имеют общих внутренних точек. Если $\{T_k\}$ — разбиение T , то $\text{об.}T = \sum_{k=1}^n \text{об.}T_k$. Величину $\delta(\{T_k\}) = \max_{1 \leq k \leq n} \{\text{diam}T_k\}$, где $\text{diam}T_k = \sup_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in T_k} \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, называют диаметром разбиения.

Допустим, что задана функция $f : T \rightarrow \mathbb{R}$. Возьмем разбиение $\{T_k\}$ тела T на n частей и выберем по точке $\mathbf{x}_k \in T_k$. Построим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\mathbf{x}_k) \text{об.}T_k.$$

Если существует число I такое, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{T_k\} : \delta(\{T_k\}) \leq \delta(\varepsilon), \quad \forall \mathbf{x}_k \in T_k \Rightarrow |\sigma - I| \leq \varepsilon,$$

то функцию f называют интегрируемой по Риману на T , а число I — n -кратным интегралом от f по T и обозначают

$$\int_T f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{или} \quad \int_T \cdots \int_T f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Если $n = 3$, то соответствующий кратный интеграл называют тройным. Доказательства утверждений этого параграфа во многом аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для 2И, и мы их опускаем.

Тело $T = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D, \psi_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \psi_2(x_1, \dots, x_{n-1})\}$, где D — замкнутая ограниченная область в \mathbb{R}^{n-1} , а $\psi_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \psi_2(x_1, \dots, x_{n-1})$ — непрерывные на D функции, называют цилиндроидом, элементарным относительно оси $0x_n$.

Теорема о сведении кратного интеграла к повторному интегралу

Пусть T — цилиндроид, элементарный относительно оси $0x_n$, и пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывная на T функция. Тогда

$$\int \cdots \int_T f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ = \int_D \cdots \int dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{\psi_1(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi_2(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n.$$

Пример 10.2. Вычислим тройной интеграл

$$J = \iiint_T z dx dy dz,$$

где T — тело, ограниченное плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Тело T — цилиндроид, элементарный относительно оси $0z$,

$$0 \leq z \leq 1 - x - y, (x, y) \in D,$$

где D — фигура на плоскости $0xy$, ограниченная прямыми $x = 0, y = 0, x + y = 1$. Используя теорему о сведении кратного интеграла к повторному, имеем

$$J = \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} z dz = 1/2 \iint_D (1 - x - y)^2 dx dy = \\ = 1/2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dy = \frac{1}{24}.$$

Говорят, что тела D и E диффеоморфны, если существует взаимно однозначное преобразование

$$\mathbf{x} = G(\mathbf{t}) \quad (10.10)$$

тела E в D такое, что функция $\mathbf{x} = G(\mathbf{t})$ непрерывно дифференцируема на E , а функция $\mathbf{t} = H(\mathbf{x})$, осуществляющая обратное преобразование, непрерывно дифференцируема на T .

Отображение (10.10) тела E в D называют ε -диффеоморфным преобразованием тела E в D , если для любого $\varepsilon > 0$, существуют множества $E_\varepsilon, D_\varepsilon$ такие, что об. $E_\varepsilon \leq \varepsilon$, об. $D_\varepsilon \leq \varepsilon$, $E \setminus E_\varepsilon$ — простое компактное тело и сужение отображения (10.10) на $E \setminus E_\varepsilon$ является диффеоморфным преобразованием тела $E \setminus E_\varepsilon$ в $D \setminus D_\varepsilon$.

Теорема о замене переменных в кратном интеграле

Пусть (10.10) — ε -диффеоморфное преобразование тела E в D , и пусть функции $f(\mathbf{x})$ и $f(G(\mathbf{t}))|I|$ интегрируемы соответственно на D и E . Тогда имеет место формула замены переменных в кратном интеграле

$$\int_T f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E f(G(\mathbf{t}))|I| d\mathbf{t},$$

где $|I| = \left| \det \frac{dG}{d\mathbf{t}} \right|$ — модуль определителя матрицы Якоби отображения $G(\mathbf{t})$.

Отображение цилиндроида E в пространстве $0\varphi\varphi r$ на тело T в пространстве $0xyz$ с помощью сферического преобразования

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi, \\ y = r \sin \varphi \cos \psi, \\ z = r \sin \psi, \end{cases}$$

обладающего якобианом

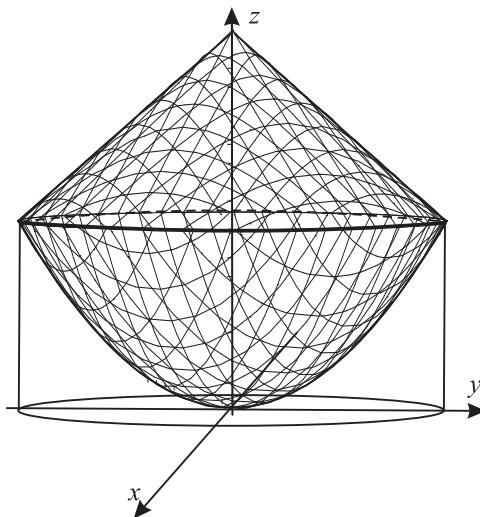
$$I = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix} = r^2 \cos \psi,$$

где E — цилиндроид следующего вида: $E = \{(\psi, \varphi, r) : -\pi/2 \leq \alpha_1 \leq \psi \leq \alpha_2 \leq \pi/2, 0 \leq a_1(\psi) \leq \varphi \leq a_2(\psi) \leq 2\pi, 0 \leq b_1(\varphi, \psi) \leq r \leq b_2(\varphi, \psi)\}$, $a_1(\psi), a_2(\psi)$ — непрерывные на $B = \{\psi : \alpha_1 \leq \psi \leq \alpha_2\}$ функции, $b_1(\varphi, \psi), b_2(\varphi, \psi)$ — непрерывные на $D = \{(\varphi, \psi) : \alpha_1 \leq \psi \leq \alpha_2, a_1(\psi) \leq \varphi \leq a_2(\psi)\}$ функции, является ε -диффеоморфным преобразованием E в T .

Пример 10.3. Найдем объем тела T , ограниченного поверхностями

$$S_1 : z = x^2 + y^2, \quad S_2 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поверхности S_1, S_2 пересекаются по кривой, проекция которой на плоскость Oxy — окружность $x^2 + y^2 = 1$. Тело T — цилиндроид, элементарный относительно оси Oz , ограниченный снизу эллиптическим параболоидом S_1 , сверху — конусом S_2 (см. рисунок).



Проекция тела T на плоскость Oxy — круг $K : x^2 + y^2 \leq 1$. По теореме о сведении кратного интеграла к повторному

$$\begin{aligned} \text{об.}T &= \iiint_T dxdydz = \iint_K dxdy \int_{x^2+y^2}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz = \\ &= \iint_K (2 - \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2) dxdy. \end{aligned}$$

Вычислим двойной интеграл, используя полярное преобразование

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, & |I| = r, \\ y = r \sin \varphi, & \end{cases}$$

$$\text{об.}T = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 - r^2 - r^3) dr = \frac{17\pi}{6}.$$

Пример 10.4. Найдем объем тела T , ограниченного конусами второго порядка $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостями $z = 1$, $z = \frac{1}{2}$.

Используя формулы

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi, \\ y = r \sin \varphi \cos \psi, & r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2, \\ z = r \sin \psi, \end{cases}$$

устанавливающие связь между декартовыми и сферическими координатами, запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело T , в сферических координатах:

$$r \sin \psi = r \sqrt{3} \cos \psi, \quad \psi = \pi/3; \quad r \sin \psi = r \cos \psi, \quad \psi = \pi/4;$$

$$r \sin \psi = 1, \quad r = \frac{1}{\sin \psi}; \quad r \sin \psi = 1/2, \quad r = \frac{1/2}{\sin \psi}.$$

В системе координат $0\varphi\psi r$ тело E , ограниченное поверхностями

$$r = \frac{1/2}{\sin \psi}, \quad r = \frac{1}{\sin \psi}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = 2\pi, \quad \psi = \pi/3, \quad \psi = \pi/4, \quad -$$

цилиндроид, элементарный относительно оси $0r$, ограниченный сверху поверхностью $r = \frac{1}{\sin \psi}$, снизу — $r = \frac{1/2}{\sin \psi}$, и проекция которого на плоскость $0\varphi\psi$ — прямоугольник $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \pi/4 \leq \psi \leq \pi/3$.

Используя сферическое преобразование в тройном интеграле, имеем

$$\begin{aligned} \text{об.} T &= \iiint_T dx dy dz = \iiint_E r^2 \cos \psi d\varphi d\psi dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\psi \int_{\frac{1/2}{\sin \psi}}^{\frac{1}{\sin \psi}} r^2 \cos \psi d\varphi d\psi dr = \frac{7}{36}\pi. \end{aligned}$$

10.6. Неявная векторная функция

Рассмотрим соотношение

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0. \quad (10.11)$$

Пусть $T = \{(x_1, \dots, x_n, y) : a \leq x_i \leq b, i = 1, \dots, n, c \leq y \leq d\}$ — клетка в \mathbb{R}^{n+1} , а $P = \{(x_1, \dots, x_n) : a \leq x_i \leq b, i = 1, \dots, n\}$ — соответствующая клетка в \mathbb{R}^n . Если для каждой точки $(x_1, \dots, x_n) \in P$ существует единственная

точка $y \in [c, d]$, удовлетворяющая соотношению $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$, то определена функция $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, $(x_1, \dots, x_n) \in P$, $c \leq y \leq d$, такая, что $F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in P$. Эту функцию называют неявной скалярной функцией векторного аргумента, заданной соотношением (10.11) в клетке T .

Теорема о неявной скалярной функции векторного аргумента

Пусть функция $F(x_1, \dots, x_n, y)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $F(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_0) = 0$;
- 2) непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_0)$;
- 3) $F'_y(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_0) \neq 0$.

Тогда существует клетка $T = \{(x_1, \dots, x_n, y) : x_{0i} - a \leq x_i \leq x_{0i} + a, i = 1, \dots, n, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, $a > 0, b > 0$, в которой соотношение $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ задает неявную непрерывно дифференцируемую функцию $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, $(x_1, \dots, x_n) \in P = \{(x_1, \dots, x_n) : x_{0i} - a \leq x_i \leq x_{0i} + a, i = 1, \dots, n\}$, частные производные которой удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))}{F'_y(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство проводится строго по схеме доказательства теоремы о неявной функции из п. 7.7. \triangleleft

Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \quad (10.12)$$

Если ввести векторы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$$

и векторную функцию F с компонентами f_i , то систему (10.12) можно записать в векторном виде

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (10.13)$$

Построим матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix},$$

которые обозначим соответственно через $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}$.

Пусть $T = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) : a \leq x_i \leq b, i = 1, \dots, n, c \leq y_j \leq d, j = 1, \dots, m\}$ — клетка в \mathbb{R}^{n+m} , $P = \{(x_1, \dots, x_n) : a \leq x_i \leq b, i = 1, \dots, n\}$ — соответствующая клетка в \mathbb{R}^n . Если для каждого вектора $\mathbf{x} \in P$ существует единственный вектор $\mathbf{y} \in \{\mathbf{y} : c \leq y_j \leq d, j = 1, \dots, m\}$, удовлетворяющий соотношению $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, то определена векторная функция $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in P$, такая, что $F(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in P$. Эту функцию называют **неявной векторной функцией**, заданной соотношением (10.13) в клетке T .

Теорема о неявной векторной функции

Пусть функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет условиям:

- 1) $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$;
- 2) непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$;
- 3) $\det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)} \neq 0$.

Тогда существует клетка $T = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : x_{0i} - a \leq x_i \leq x_{0i} + a, i = 1, \dots, n, y_{0j} - b \leq y_j \leq y_{0j} + b, j = 1, \dots, m\}$, $a > 0, b > 0$, в которой соотношение $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ задает неявную непрерывно дифференцируемую векторную функцию $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in P = \{\mathbf{x} : x_{0i} - a \leq x_i \leq x_{0i} + a, i = 1, \dots, n\}$.

Доказательство проведем по индукции по числу уравнений в системе (10.12). Если $m = 1$, то существование искомой неявной функции следует из теоремы о неявной скалярной функции векторного аргумента. Допустим, что теорема уже доказана для систем, состоящих из $(m - 1)$ уравнения, и рассмотрим систему, состоящую из m уравнений. Среди алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}$ есть ненулевые. Изменив при необходимости нумерацию переменных y_j , всегда можно добиться того, чтобы

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)} \neq 0.$$

Для системы

$$\begin{cases} f_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \end{cases} \quad (10.14)$$

состоящей из $(m - 1)$ уравнения, выполнены все условия теоремы о неявной векторной функции. По индуктивному предположению существует клетка $T_1 = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) : x_{0i} - a \leq x_i \leq x_{0i} + a, i = 1, \dots, n, y_{01} - a \leq y_1 \leq y_{01} + a, y_{0j} - b \leq y_j \leq y_{0j} + b, j = 2, \dots, m\}$, и существует непрерывно дифференцируемая неявная функция

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_n, y_1), \\ \dots \\ y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n, y_1), \end{cases}$$

заданная системой (10.14) в клетке T_1 . Для любых $(x_1, \dots, x_n, y_1) \in P_1 := \{(x_1, \dots, x_n, y_1) : x_{0i} - a \leq x_i \leq x_{0i} + a, i = 1, \dots, n, y_{01} - a \leq y_1 \leq y_{01} + a\}$ имеют место равенства

$$\begin{cases} f_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \varphi_2(x_1, \dots, x_n, y_1), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n, y_1)) = 0, \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \varphi_2(x_1, \dots, x_n, y_1), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n, y_1)) = 0. \end{cases} \quad (10.15)$$

Положим

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \varphi_2(x_1, \dots, x_n, y_1), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n, y_1)) &:= \\ &:= g(x_1, \dots, x_n, y_1). \end{aligned} \quad (10.16)$$

Дифференцируя функцию (10.16) и тождества (10.15) по y_1 и полагая $(x_1, \dots, x_n, y_1) = (x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01})$, получаем систему равенств

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} = \frac{\partial g}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} + \frac{\partial f_m}{\partial y_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} = 0. \end{cases} \quad (10.17)$$

Из системы равенств (10.17) следует, что система линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m} z_m = \frac{\partial g}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial y_m} z_m = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial f_m}{\partial y_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial y_m} z_m = 0 \end{array} \right. \quad (10.18)$$

имеет ненулевое решение

$$z_1 = 1, z_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \Big|_{(\mathbf{x}_0, y_{01})}, \dots, z_m = \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} \Big|_{(\mathbf{x}_0, y_{01})}. \quad (10.19)$$

Определителем матрицы системы (10.18) является $\det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}$, и он по условию теоремы отличен от нуля. Если предположить, что $\frac{\partial g}{\partial y_1}(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}) = 0$, то система (10.18) является однородной системой линейных уравнений и имеет единственное нулевое решение, что противоречит существованию ненулевого решения (10.19) у системы (10.18). Поэтому

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}) \neq 0.$$

Кроме того,

$$g(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}) = f_1(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0m}) = 0.$$

Соотношение

$$g(x_1, \dots, x_n, y_1) = 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы о неявной скалярной функции векторного аргумента в окрестности точки $(x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01})$. По этой теореме существует клетка $T_2 = \{(x_1, \dots, x_n, y_1) : x_{0i} - a_1 \leq x_i \leq x_{0i} + a_1, i = 1, \dots, n, y_{01} - b_1 \leq y_1 \leq y_{01} + b_1\}$, $0 < a_1 \leq a$, $0 < b_1 \leq \min\{a, b\}$, в которой соотношение $g(x_1, \dots, x_n, y_1) = 0$ задает неявную непрерывно дифференцируемую на $P_2 = \{(x_1, \dots, x_n) : x_{0i} - a_1 \leq x_i \leq x_{0i} + a_1, i = 1, \dots, n\}$ функцию $y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n)$.

Векторная функция

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ y_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n)), \\ \dots \\ y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n)), \end{array} \right.$$

$(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, является непрерывно дифференцируемой функцией, заданной системой (10.12) в клетке $T_3 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : x_{0i} - a_1 \leq x_i \leq x_{0i} + a_1, i = 1, \dots, n, y_{0j} - b_1 \leq y_j \leq y_{0j} + b_1, j = 1, \dots, m\}$. Доказательство завершается ссылкой на метод математической индукции. \triangleleft

10.7. Матрица Якоби неявной векторной функции

Допустим, что соотношение $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной векторной функции. Тогда существует неявная непрерывно дифференцируемая функция $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in P$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

заданная соотношением $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Найдем матрицу Якоби $\frac{d\varphi}{d\mathbf{x}}$ неявной векторной функции. Функция $\mathbf{w} = F(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$ является сложной функцией, образованной отображениями $\mathbf{w} = F(\mathbf{z})$ и

$$\mathbf{z} = (x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m)^\top = (x_1 \dots x_n \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \dots \varphi_m(x_1, \dots, x_n))^\top.$$

По теореме о матрице Якоби сложной функции (п. 10.3)

$$\begin{aligned} \frac{dF(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))}{d\mathbf{x}} &= \left(\begin{array}{ccccc} (f_1)'_{x_1} & \dots & (f_1)'_{x_n} & (f_1)'_{y_1} & \dots & (f_1)'_{y_m} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ (f_m)'_{x_1} & \dots & (f_m)'_{x_n} & (f_m)'_{y_1} & \dots & (f_m)'_{y_m} \end{array} \right) \Big|_{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))} \times \\ &\times \left(\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 1 \\ (\varphi_1)'_{x_1} & \dots & (\varphi_1)'_{x_n} \\ \dots & & \dots \\ (\varphi_m)'_{x_1} & \dots & (\varphi_m)'_{x_n} \end{array} \right) \Big|_{\mathbf{x}} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))} \frac{d\varphi}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Поскольку $F(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in P$, то $\frac{dF(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))}{d\mathbf{x}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in P$, и, следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))} \frac{d\varphi}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

Отсюда находим матрицу Якоби неявной векторной функции

$$\frac{d\varphi}{dx}\Big|_x = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in P. \quad (10.20)$$

Существование обратной матрицы $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}$ гарантируется условием 3) теоремы о неявной векторной функции.

Замечание 10.1. Пусть $w = F(x, y)$, где $y = \varphi(x)$. При выводе формулы (10.20) было показано, что матрица Якоби векторной функции $w = F(x, \varphi(x))$ имеет вид

$$\frac{dF(x, \varphi(x))}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x, \varphi(x))} + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x, \varphi(x))} \frac{d\varphi}{dx}\Big|_x. \quad (10.21)$$

Пример 10.5. Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0, \\ x + y_1 + y_2 - 2 = 0. \end{cases} \quad (10.22)$$

Введем вектор $y = (y_1 \ y_2)^\top$ и векторную функцию

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x^2 + y_1^2 + y_2^2 \\ x + y_1 + y_2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Систему (10.22) можно записать в векторной форме $F(x, y) = \mathbf{0}$. Пусть $x_0 = 2$, $y_0 = (1 \ -1)^\top$. Проверим, что система (10.22) удовлетворяет условиям теоремы о неявной векторной функции: $F(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, компоненты векторной функции $F(x, y)$ — многочлены и, очевидно, непрерывно дифференцируемы;

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0, y_0)} = \det\begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Big|_{(x_0, y_0)} = 4 \neq 0.$$

По теореме о неявной векторной функции система (10.22) задает неявную непрерывно дифференцируемую функцию $y = \varphi(x) = (\varphi_1(x) \ \varphi_2(x))^\top$, определенную в некоторой окрестности точки $x_0 = 2$, со значениями в некоторой окрестности точки y_0 . Матрицу Якоби этой функции можно найти по формуле (10.20)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx}\Big|_x &= -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x, \varphi(x))} = \\ &= \frac{1}{-2y_1 + 2y_2} \begin{pmatrix} -x - 2y_2 \\ x + 2y_1 \end{pmatrix}\Big|_{(x, \varphi(x))}. \end{aligned}$$

В частности, $\frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10.8. Теорема об обратной функции

Рассмотрим векторную функцию $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$, определенную в некоторой окрестности точки $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ и со значениями в \mathbb{R}^n .

Теорема об обратной функции

Пусть функция $g(\mathbf{y})$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\mathbf{x}_0 = g(\mathbf{y}_0)$;
- 2) непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки \mathbf{y}_0 ;
- 3) $\det \frac{dg}{d\mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}_0} \neq 0$.

Тогда существуют клетки $Q = \{\mathbf{y} : y_{0i} - b \leq y_i \leq y_{0i} + b, i = 1, \dots, n\}$, $b > 0$, и $P = \{\mathbf{x} : x_{0i} - a \leq x_i \leq x_{0i} + a, i = 1, \dots, n\}$, $a > 0$, такие, что для функции $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$, $g : Q \rightarrow P$, существует непрерывно дифференцируемая обратная функция $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, $f : P \rightarrow Q$, матрица Якоби которой равна

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}} = \left(\frac{dg}{d\mathbf{y}} \right)^{-1} \Big|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \quad \forall \mathbf{x} \in P. \quad (10.23)$$

Доказательство. Существование клеток Q и P и обратной непрерывно дифференцируемой функции $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, $f : P \rightarrow Q$, вытекает из теоремы о неявной векторной функции, примененной к соотношению $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) - \mathbf{x} = 0$. Так как $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}$, $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = -E$, где E — единичная матрица, то формула (10.23) следует из равенства (10.20). \triangleleft

10.9. Зависимые и независимые функциональные совокупности

Рассмотрим совокупность скалярных непрерывно дифференцируемых функций векторного аргумента:

$$f_i : D \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, y_i = f_i(\mathbf{x}), D \subset \mathbb{R}^n.$$

Функциональную совокупность называют **зависимой** на множестве D , если одна функция выражается через конечное число других функций. Другими словами, система $\{f_i(\mathbf{x})\}$, $i = 1, 2, \dots$, зависима, если для некоторой функции $f_m(\mathbf{x})$ можно указать систему функций, например, f_1, \dots, f_{m-1} и непрерывно дифференцируемую функцию

$$\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}, G = \{(y_1, \dots, y_{m-1}) : y_1 = f_1(\mathbf{x}), \dots, y_{m-1} = f_{m-1}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\},$$

такие, что

$$f_m(\mathbf{x}) = \Phi(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{m-1}(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

В противном случае совокупность $\{f_i(\mathbf{x})\}, i = 1, 2, \dots$, называют независимой на D .

Рассмотрим сначала совокупность, состоящую из m линейных функций:

Построим матрицу, составленную из коэффициентов совокупности функций (10.24):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Теорема о зависимости линейных функций

Для зависимости совокупности линейных функций (10.24) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был меньше, чем m , $\text{rang}(A) < m$.

Доказательство. Достаточность. Если ранг матрицы A меньше, чем n , то одна из строк матрицы является линейной комбинацией остальных, поэтому одна из функций совокупности (10.24) представляет собой линейную комбинацию остальных функций.

Необходимость. Допустим, что некоторая функция, например последняя, представима в виде

$$= \Phi(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{(m-1)1}x_1 + \dots + a_{(m-1)n}x_n) \quad (10.25)$$

и $\text{ранг}(A) = m$. Поскольку $\text{ранг}(A) = m$, то при любом $a \in \mathbb{R}$ система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{(m-1)1}x_1 + \dots + a_{(m-1)n}x_n = 0, \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = a \end{cases}$$

имеет решение $(x_1(a), \dots, x_n(a))$. Подставляя его в тождество (10.25), получим противоречивое равенство

$$a = \Phi(0, \dots, 0). \quad \triangleleft$$

10.10. Признак независимости функциональной совокупности

Рассмотрим совокупность, состоящую из m непрерывно дифференцируемых скалярных функций $y_i = f_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset R^n$, $i = 1, \dots, m$. Построим векторную функцию $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$, компонентами которой являются функции $f_i(\mathbf{x})$, и найдем матрицу Якоби этой векторной функции

$$\frac{dF}{d\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в случае совокупности линейных функций матрица $\frac{dF}{d\mathbf{x}}$ совпадает с матрицей A , рассмотренной в п. 10.9.

Признак независимости функций

Если

$$\text{ранг}\left(\frac{dF}{d\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}_0}\right) = m \quad (10.26)$$

в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in D$, то совокупность функций $\{f_i(\mathbf{x})\}$, $i = 1, \dots, m$, независима на D .

Доказательство. Из условия (10.26) без нарушения общности рассуждений (дело сводится к перенумерации переменных x_k) следует, что

$$\det \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right) \neq 0. \quad (10.27)$$

Допустим вместе с тем, что система зависима, т. е. существует непрерывно дифференцируемая функция Φ такая, что

$$\Phi(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{m-1}(\mathbf{x})) - f_m(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

Продифференцировав последнее тождество по x_1, \dots, x_m и положив $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, получим в точке \mathbf{x}_0

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_m}{\partial x_1} = 0, \\ \cdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m} - \frac{\partial f_m}{\partial x_m} = 0. \end{array} \right. \quad (10.28)$$

Из системы соотношений (10.28) следует, что однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} z_1 + \dots + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_1} z_{m-1} + \frac{\partial f_m}{\partial x_1} z_m = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_m} z_1 + \dots + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m} z_{m-1} + \frac{\partial f_m}{\partial x_m} z_m = 0 \end{cases} \quad (10.29)$$

с определителем, не равным нулю (10.27), имеет ненулевое решение

$$z_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \dots, z_{m-1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}}, z_m = -1,$$

что невозможно. Полученное противоречие показывает независимость функциональной совокупности $\{f_i(\mathbf{x})\}$ на D . \triangleleft

10.11. Признак зависимости функциональной совокупности

Рассмотрим совокупность функций, состоящую из m непрерывно дифференцируемых скалярных функций $y_i = f_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$. Как и в п. 10.10, построим векторную функцию $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$, компонентами которой являются функции $f_i(\mathbf{x})$, и построим матрицу Якоби этой векторной функции

$$\frac{dF}{d\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\text{ранг} \frac{dF}{d\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}_0} = r < m$. Точку \mathbf{x}_0 называют точкой стабильного ранга для матрицы $\frac{dF}{d\mathbf{x}}$, если существует клетка $P = \{\mathbf{x} : x_{0i} - a \leq x_i \leq x_{0i} + a, i = 1, \dots, n\}$, $a > 0$, такая, что $\text{ранг} \frac{dF}{d\mathbf{x}} = r$ для всех $\mathbf{x} \in P$.

Признак локальной зависимости функций

Если $\text{ранг} \frac{dF}{d\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}_0} = r < m$ и \mathbf{x}_0 является точкой стабильного ранга для матрицы $\frac{dF}{d\mathbf{x}}$, то система функций $\{f_i(\mathbf{x})\}$ зависита в некоторой окрестности точки \mathbf{x}_0 .

Доказательство. Существует минор порядка r матрицы $\frac{dF}{d\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}_0}$, не равный нулю. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$\det J(\mathbf{x}_0) \neq 0, \quad \text{где} \quad J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (f_1)'_{x_1} & \dots & (f_1)'_{x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ (f_r)'_{x_1} & \dots & (f_r)'_{x_r} \end{pmatrix}.$$

На основании теоремы о неявной векторной функции, система соотношений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) - y_1 = 0, \\ \dots \\ f_r(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) - y_r = 0 \end{cases}$$

в некоторой клетке $T = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : x_{0i} - a_1 \leq x_i \leq x_{0i} + a_1, i = 1, \dots, r, x_{0i} - b \leq x_i \leq x_{0i} + b, i = r+1, \dots, n, y_{0j} - b \leq y_j \leq y_{0j} + b, j = 1, \dots, r\}, 0 < a_1 \leq a, 0 < b \leq a$, где $y_{0j} = f_j(\mathbf{x}_0)$, задает неявную непрерывно дифференцируемую функцию

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r), \\ \dots \\ x_r = \varphi_r(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r), \end{cases}$$

$(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1 := \{(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) : x_{0i} - b \leq x_i \leq x_{0i} + b, i = r+1, \dots, n, y_{0j} - b \leq y_j \leq y_{0j} + b, j = 1, \dots, r\}$. Поскольку $\det J(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то из теоремы о стабилизации знака следует, что $\det J(\mathbf{x}) \neq 0$ для всех \mathbf{x} из некоторой окрестности точки \mathbf{x}_0 . Можно считать (уменьшая в случае необходимости a), что $\det J(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in P$.

Возьмем k такое, что $r+1 \leq k \leq m$, и построим функцию

$$\begin{aligned} g(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) = \\ = f_k(\varphi_1(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r), \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{10.30}$$

$(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1$. Покажем, что функция g не зависит от переменных (x_{r+1}, \dots, x_n) . Для этого достаточно показать, что

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = 0 \quad \forall (x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1, \quad j = r+1, \dots, n.$$

Составим систему тождеств

$$\begin{cases} f_1(\varphi_1, \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = y_1, \\ \dots \\ f_r(\varphi_1, \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = y_r, \\ f_k(\varphi_1, \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = g(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r), \end{cases}$$

$(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1$. Возьмем j такое, что $r + 1 \leq j \leq n$, и про-
дифференцируем эти тождества по x_j , получим

$(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1$. При любых фиксированных $(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1$ рассмотрим следующую систему линейных функций относительно переменных t_1, \dots, t_{r+1}

Поскольку ранг $\frac{dF}{dx} \Big|_{\mathbf{x}_0} = r < m$ и \mathbf{x}_0 является точкой стабильного ранга для матрицы $\frac{dF}{dx}$, то для любой точки $(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r)$ из клетки P_1 определитель матрицы системы линейных функций (10.32) равен нулю, в то же время $\det J(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in P$. По признаку независимости функций первые r функций системы (10.32) независимы, а из доказательства достаточности теоремы о зависимости линейных функций следует, что функция u_{r+1} является линейной комбинацией предыдущих функций u_1, \dots, u_r при каждом $(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1$. Из системы (10.31) следует, что в каждой точке $(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in P_1$ производная $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ является линейной комбинацией нулей и, следовательно, равна нулю. Таким образом, функция g не зависит от x_j . Аналогичным образом устанавливается независимость g от переменных $x_{r+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$. Из соотношения (10.30) следует $f_k(\mathbf{x}) = g(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}))$ для всех \mathbf{x} из некоторой окрестности точки \mathbf{x}_0 . \square

Замечание 10.2. При доказательстве теоремы была использована процедура, позволяющая фактическое нахождение отображения, связывающего функции f_k , $k = 1, \dots, m$.

Пример 10.6. Покажем, что функции

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ f_2 &= x_1 - x_2, \\ f_3 &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1 - x_2 - x_3 \end{aligned}$$

зависимы. Действительно, так как

$$\text{ранг } \frac{dF}{d\mathbf{x}} = \text{ранг} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 1 & 2x_2 - 2x_1 - 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

и все точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ являются точками стабильного ранга, то зависимость функций f_1, f_2, f_3 вытекает из признака локальной зависимости функций. Найдем отображение, связывающее эти функции. Из системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - y_1 = 0, \\ x_1 - x_2 - y_2 = 0 \end{cases}$$

выразим

$$\begin{cases} x_1 = 1/2(y_1 + y_2 - x_3), \\ x_2 = 1/2(y_1 - y_2 - x_3) \end{cases}$$

и построим функцию g , подставив найденные выражения для x_1, x_2 в функцию f_3 , получим

$$\begin{aligned} g &= \left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2 - x_3)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2 - x_3)\right)^2 - \left(y_1 + y_2 - x_3\right)\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2 - x_3)\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 - y_2 - x_3) - x_3 = y_2^2 - y_1, \end{aligned}$$

следовательно, $f_3 = f_2^2 - f_1$.

ГЛАВА 11

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА

11.1. Необходимое условие локального экстремума

Рассмотрим скалярную функцию векторного аргумента $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Внутреннюю точку $\mathbf{x}_0 \in D$ называют точкой локального максимума функции f , если существует δ -окрестность $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ точки \mathbf{x}_0 такая, что

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta).$$

Аналогично определяются точки локального минимума, строгого локального максимума и строгого локального минимума.

Необходимое условие локального экстремума функции векторного аргумента

Если функция f дифференцируема в точке локального экстремума \mathbf{x}_0 , то \mathbf{x}_0 — стационарная точка функции f , т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\mathbf{x}_0} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\mathbf{x}_0} = 0. \quad (11.1)$$

Доказательство. Если (x_{01}, \dots, x_{0n}) — точка локального экстремума, то для каждого $i = 1, \dots, n$ точка x_{0i} — точка локального экстремума для скалярной функции $y = f(x_{01}, \dots, x_{0(i-1)}, x_i, x_{0(i+1)}, \dots, x_{0n})$. Из необходимого условия локального экстремума скалярной функции (п. 4.2) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\mathbf{x}_0} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad \triangleleft$$

Таким образом, подозрительными на локальный экстремум точками для дифференцируемой функции являются точки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

или в векторной форме $\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

Если функция не дифференцируема в некоторых внутренних точках множества D , то такие точки, как и в случае скалярных функций, являются подозрительными на точки локального экстремума.

Квадратичные формы

Функцию $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$h(t_1, \dots, t_n) = a_{11}t_1^2 + 2a_{12}t_1t_2 + \dots + 2a_{1n}t_1t_n + a_{22}t_2^2 + \dots + 2a_{2n}t_2t_n + \dots + a_{nn}t_n^2$$

называют квадратичной формой, а матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

матрицей квадратичной формы. Квадратичная форма может быть записана в матричном виде

$$h(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\top A \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Если для любого ненулевого вектора $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $h(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\top A \mathbf{t} > 0$, то квадратичную форму называют положительно определенной; если $h(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\top A \mathbf{t} < 0 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{t} \neq \mathbf{0}$, то — отрицательно определенной; если $h(\mathbf{t})$ меняет знак, то — знакопеременной. Остальные квадратичные формы: $h(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\top A \mathbf{t} \geq 0 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ или $h(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\top A \mathbf{t} \leq 0 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ называют полуопределенными.

В дальнейшем мы используем критерий Сильвестра положительной и отрицательной определенности квадратичной формы, доказательство которого приводится в курсе линейной алгебры.

Критерий Сильвестра

Для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры ее матрицы были положительны (все главные угловые миноры нечетного порядка — отрицательны, а четного порядка — положительны).

11.2. Исследование стационарных точек

Допустим, что функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки \mathbf{x}_0 . Построим матрицу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{x}_0}$$

и образуем квадратичную форму

$$h(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\top \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{t}.$$

Достаточное условие локального экстремума

Пусть \mathbf{x}_0 — стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности этой точки функции f .

Если $h(\mathbf{t})$ — положительно определенная квадратичная форма, то \mathbf{x}_0 — точка локального минимума;

если $h(\mathbf{t})$ — отрицательно определенная квадратичная форма, то \mathbf{x}_0 — точка локального максимума;

если $h(\mathbf{t})$ — знакопеременная квадратичная форма, то \mathbf{x}_0 не является точкой локального экстремума.

Доказательство для локального минимума. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0 + \theta \Delta \mathbf{x})}{2!}, \quad (11.2)$$

$$df(\mathbf{x}_0) = 0, d^2 f(\mathbf{x}_0 + \theta \Delta \mathbf{x}) = \Delta \mathbf{x}^\top \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + \theta \Delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \Delta \mathbf{x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

По критерию Сильвестра все главные угловые миноры матрицы $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}^2}$ положительны. Миноры матрицы $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}$ являются непрерывными в точке \mathbf{x}_0 функциями. По теореме о стабилизации знака существует $\delta > 0$ такое, что для каждого вектора \mathbf{w} , $\|\mathbf{w}\| \leq \delta$, все главные угловые миноры матрицы $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}^2}$ положительны. По критерию Сильвестра функция

$$p(\Delta \mathbf{x}) = \Delta \mathbf{x}^\top \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + \theta \Delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \Delta \mathbf{x}$$

при всех $\Delta \mathbf{x}$, $0 < \|\Delta \mathbf{x}\| \leq \delta$, принимает лишь положительные значения. Отсюда и из соотношения (11.2) следует неравенство

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \Delta \mathbf{x}, \|\Delta \mathbf{x}\| \leq \delta.$$

т. е. \mathbf{x}_0 — точка локального минимума.

Пусть теперь существуют вектора \mathbf{t}^+ , \mathbf{t}^- такие, что

$$(\mathbf{t}^+)^{\top} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}^2} (\mathbf{t}^+) = a > 0, \quad (\mathbf{t}^-)^{\top} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}^2} (\mathbf{t}^-) = b < 0.$$

Функции

$$g_1(\mathbf{w}) = (\mathbf{t}^+)^{\top} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}^2} (\mathbf{t}^+), \quad g_2(\mathbf{w}) = (\mathbf{t}^-)^{\top} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}^2} (\mathbf{t}^-)$$

непрерывны в точке $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. По теореме о стабилизации знака существует $\delta_1 > 0$ такое, что $g_1(\mathbf{w}) \geq a/2$, $g_2(\mathbf{w}) \leq b/2$ для всех \mathbf{w} , $\|\mathbf{w}\| \leq \delta_1$. Положим в равенстве (11.2) сначала $\Delta \mathbf{x} = \alpha \mathbf{t}^+$, а затем $\Delta \mathbf{x} = \beta \mathbf{t}^-$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < |\alpha| \|\mathbf{t}^+\| \leq \delta_1$, $0 < |\beta| \|\mathbf{t}^-\| \leq \delta_1$, получим

$$f(\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{t}^+) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0 + \alpha \theta \mathbf{t}^+)}{2!} \geq \alpha^2 a / 4 > 0, \quad (11.3)$$

$$f(\mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{t}^-) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0 + \beta \theta \mathbf{t}^-)}{2!} \leq \beta^2 b / 4 < 0. \quad (11.4)$$

Из соотношений (11.3)–(11.4) следует, что в любой окрестности точки \mathbf{x}_0 всегда найдутся две точки вида $\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{t}^+$, $\mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{t}^-$, в которых $f(\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{t}^+) - f(\mathbf{x}_0) > 0$, $f(\mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{t}^-) - f(\mathbf{x}_0) < 0$, поэтому в точке \mathbf{x}_0 экстремум невозможен. \triangleleft

Пример 11.1. Найдем точки локального экстремума функции

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3x_2 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2 - 3x_1 = 0, \end{cases}$$

найдем стационарные точки

$$\begin{cases} x_{01} = 1, & \begin{cases} x_{11} = 0, \\ x_{12} = 0. \end{cases} \\ x_{02} = 1, & \end{cases}$$

Исследуем их на наличие экстремума:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{pmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{pmatrix},$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, M_1 = 6 > 0, M_2 = 27 > 0,$$

$(1, 1)$ – точка локального минимума;

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, M_1 = 0, M_2 = -9,$$

$$h(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\top \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{(0,0)} \mathbf{t} = -6t_1 t_2, h(1, 1) < 0, h(1, -1) > 0,$$

квадратичная форма $h(\mathbf{t})$ знакопеременная, точка $(0, 0)$ не является точкой локального экстремума.

11.3. Условный локальный экстремум

Рассмотрим скалярную функцию векторного аргумента $y = f(\mathbf{x})$, определенную на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Пусть M – подмножество множества E . Точку \mathbf{x}_0 называют точкой условного минимума функции f относительно M , если

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in M.$$

Точку \mathbf{x}_0 называют точкой локального условного минимума, если существует окрестность $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ точки \mathbf{x}_0 такая, что \mathbf{x}_0 – точка условного минимума относительно $M \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)$, т. е. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in M \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)$. Например, для функции $y = x_1^2 + x_2^2$ в случае, когда множество M – прямая $x_1 + x_2 = 1$, точка $(1/2, 1/2)$ является точкой условного минимума (рис. 11.1).

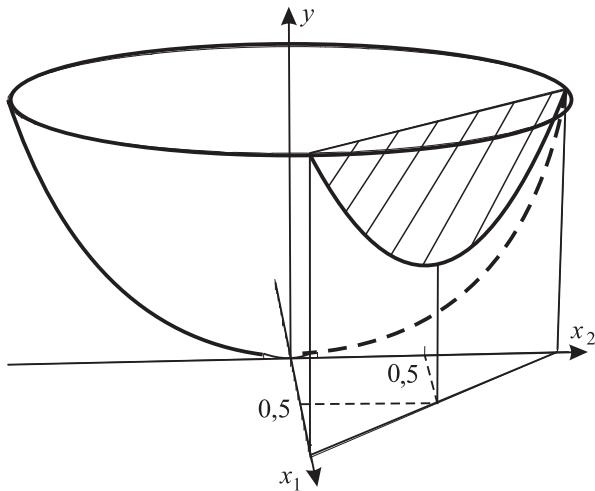


Рис. 11.1

Аналогично определяют точки условного максимума и локального условного максимума.

Пусть M является множеством точек (x_1, \dots, x_n) , удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (11.5)$$

Уравнения $F_i(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, \dots, m$, называют уравнениями связей.

Введем векторы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, \mathbf{t} = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и векторную функцию

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{z}, \mathbf{t}) \\ \dots \\ F_m(\mathbf{z}, \mathbf{t}) \end{pmatrix},$$

что позволяет функцию $y = f(\mathbf{x})$ и систему (11.5) записать в следующей векторной форме:

$$\begin{aligned} y &= f(\mathbf{z}, \mathbf{t}), \\ F(\mathbf{z}, \mathbf{t}) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

В дальнейшем в этом пункте предполагается, что выполняются следующих два условия:

1) функции $f, F_i, i = 1, \dots, m$, непрерывно дифференцируемы на множестве E ;

$$2) \text{ ранг } \frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = m \quad \forall \mathbf{x} \in M.$$

Согласно признаку независимости функциональной совокупности, система функций $F_i(\mathbf{z}, \mathbf{t}), i = 1, \dots, m$, независима на E .

Пусть $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{z}_0, \mathbf{t}_0)$ — точка, принадлежащая множеству M . Согласно условию 2), хотя бы один из миноров порядка m матрицы $\left. \frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}$ отличен от нуля. Предположим для определенности, что

$$\det \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{x}_0} \neq 0.$$

В силу теоремы о неявной векторной функции соотношение $F(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ в некоторой окрестности точки $(\mathbf{z}_0, \mathbf{t}_0)$ задает непрерывно дифференцируемую неявную векторную функцию $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{t})$, определенную в некоторой окрестности T точки \mathbf{t}_0 .

Построим функцию

$$g(\mathbf{t}) = f(\Phi(\mathbf{t}), \mathbf{t}), \mathbf{t} \in T.$$

Поскольку множество M в некоторой окрестности точки \mathbf{x}_0 совпадает с множеством $\{(\Phi(\mathbf{t}), \mathbf{t})\}, \mathbf{t} \in T$, то точка $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{z}_0, \mathbf{t}_0)$ является точкой условного локального экстремума для функции f относительно множества $M = \{(\mathbf{z}, \mathbf{t}) : F(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}\}$ тогда и только тогда, когда точка \mathbf{t}_0 является точкой локального экстремума для функции $g(\mathbf{t})$. В п. 11.2 было показано, что подозрительными на точки локального экстремума для функции $g(\mathbf{t})$ являются точки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{dg(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} = \mathbf{0}. \quad (11.6)$$

Пусть \mathbf{t}_0 — решение системы (11.6). Из достаточного условия локального экстремума вытекает: а) если квадратичная форма $h(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\top \left. \frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{t}^2} \right|_{\mathbf{t}_0} \mathbf{v}$ положительно определенная, то $(\Phi(\mathbf{t}_0), \mathbf{t}_0)$ — точка условного локального минимума; б) если $h(\mathbf{v})$ — отрицательно определенная, то $(\Phi(\mathbf{t}_0), \mathbf{t}_0)$ — точка условного локального максимума; в) если $h(\mathbf{v})$ — знакопеременная квадратичная форма, то $(\Phi(\mathbf{t}_0), \mathbf{t}_0)$ не является точкой условного локального экстремума.

Пример 11.2. Найдем точки условного локального экстремума в задаче

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 + z^2 + z^2 - yz, \\ x + y = 1. \end{cases} \quad (11.7)$$

Из уравнения связи $x + y = 1$ выражаем $y = 1 - x$ и подставляем в функцию u , в результате построим функцию $W = x^2 + (1 - x)^2 + z^2 - (1 - x)z = 2x^2 - 2x + z^2 - z + xz + 1$. Находим точки локального экстремума этой функции

$$\begin{cases} W'_x = 4x + z - 2 = 0, \\ W'_z = x + 2z - 1 = 0, \end{cases} \quad x = 3/7, z = 2/7,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, M_1 = 4 > 0, M_2 = 7 > 0,$$

$(3/7, 2/7)$ — точка локального минимума функции W , следовательно, $(3/7, 4/7, 2/7)$ — точка условного локального минимума для задачи (11.7).

Описанный выше метод позволяет свести нахождение точек условного локального экстремума к уже изученной проблеме нахождения точек локального экстремума. При этом наиболее трудный этап такого сведения — нахождение неявной функции $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{t})$. В методе, рассматриваемом в п. 11.4, такая функция уже не используется.

11.4. Метод Лагранжа нахождения точек условного локального экстремума

Предположим, что функции $f, F_i, i = 1, \dots, m$, удовлетворяют условиям 1), 2) из п. 11.3. Построим функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, d_1, \dots, d_m) = \\ = f(x_1, \dots, x_n) + d_1 F_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + d_m F_m(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

или в векторной форме

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{d}^\top F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{z}, \mathbf{t}) + \mathbf{d}^\top F(\mathbf{z}, \mathbf{t}),$$

где $\mathbf{d}^\top = (d_1 \dots d_m)$, $d_i, i = 1, \dots, m$, — множители Лагранжа; $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{t}$ — векторы, введенные в п. 11.3.

Необходимое условие Лагранжа локального условного экстремума

Пусть \mathbf{x}_0 — точка локального условного экстремума для функции f относительно множества M , заданного уравнениями связей (11.5). Тогда существует набор множителей Лагранжа $\mathbf{d}_0^\top = (d_{01} \dots d_{0m})$ такой, что точка $(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0)$ является стационарной точкой функции Лагранжа, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0)} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Возьмем матрицу

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{d}^\top \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}$$

и построим систему линейных уравнений относительно \mathbf{d}

$$\mathbf{d}^\top \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{x}_0} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{0}. \quad (11.8)$$

Определитель системы (11.8) $\det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{x}_0}$ не равен нулю, следовательно, система (11.8) имеет единственное решение $\mathbf{d}_0^\top = (d_{01} \dots d_{0m})$. При таком выборе множителей Лагранжа имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0)} = \mathbf{d}_0^\top \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{x}_0} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{0}. \quad (11.9)$$

Пусть $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{t})$ — непрерывно дифференцируемая неявная функция, определяемая соотношением $F(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = 0$ в окрестности точки $(\mathbf{z}_0, \mathbf{t}_0)$. Существование такой функции $\Phi(\mathbf{t})$ следует из теоремы о неявной векторной функции. Тогда

$$F(\Phi(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = \mathbf{0} \quad (11.10)$$

для всех \mathbf{t} из некоторой окрестности точки \mathbf{t}_0 .

Точка \mathbf{t}_0 является точкой локального экстремума функции $g(\mathbf{t}) = f(\Phi(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ (см. п. 11.3) и функции

$$p(\mathbf{t}) = f(\Phi(\mathbf{t}), \mathbf{t}) + \mathbf{d}_0^\top F(\Phi(\mathbf{t}), \mathbf{t})$$

(последнее утверждение вытекает из тождества (11.10)). Из необходимого условия локального экстремума следует, что $\frac{dp}{dt} \Big|_{\mathbf{t}_0} = 0$. Используя формулу (10.21), имеем

$$\frac{dp}{dt} \Big|_{\mathbf{t}_0} = \left(\mathbf{d}_0^\top \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\Phi}{dt} + \mathbf{d}_0^\top \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \right) \Big|_{\mathbf{t}_0}.$$

Отсюда и из равенства (11.9) следует

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{d}_0^\top \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{x}_0} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{0}.$$

Равенство

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{\mathbf{x}_0} = F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

вытекает из определения точки $\mathbf{x}_0 \in M$. \triangleleft

Из теоремы следует, что для нахождения точек локального условного экстремума методом Лагранжа надо:

- 1) построить функцию Лагранжа $L = f + \mathbf{d}^\top F$;
- 2) составить систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{0}; \quad (11.11)$$

3) найти решения системы (11.11);

4) провести исследование найденных решений на наличие условного локального экстремума.

Решения системы (11.11) являются лишь точками, подозрительными на точки локального условного экстремума. Для их исследования можно использовать матрицу $\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2}$. Пусть $(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0)$ — решение системы (11.11). Найдем матрицу $\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0)}$ и, используя уравнения связей, построим систему

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{u} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_{m+1} \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (11.12)$$

из которой найдем выражение вектора \mathbf{u} через \mathbf{v}

$$\mathbf{u}(\mathbf{v}) = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{t}} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{v}.$$

Построим квадратичную форму относительно \mathbf{v}

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{u}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v} \end{array} \right)^\top \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0)} \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v} \end{array} \right) = h(\mathbf{v}).$$

Можно проверить, что квадратичная форма $h(\mathbf{v})$ совпадает с квадратичной формой $\mathbf{v}^\top \frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{t}^2} \Big|_{\mathbf{t}_0} \mathbf{v}$, где $g(\mathbf{t}) = f(\Phi(\mathbf{t}), \mathbf{t})$. Из результатов п. 11.3 следует: если $h(\mathbf{v})$ — положительно определенная квадратичная форма, то \mathbf{t}_0 — точка

локального минимума функции $g(\mathbf{t})$, следовательно, \mathbf{x}_0 — точка условного локального минимума функции f относительно множества M ; если $h(\mathbf{v})$ — отрицательно определенная квадратичная форма, то \mathbf{x}_0 — точка условного локального минимума; если $h(\mathbf{v})$ — знакопеременная квадратичная форма, то \mathbf{x}_0 не является точкой локального условного экстремума.

Пример 11.3. Используя метод Лагранжа, найдем точки условного локального экстремума в задаче

$$\begin{cases} u = xy + yz, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2, \end{cases} E = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}. \quad (11.13)$$

Построим функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, d_1, d_2) = xy + yz + d_1(x^2 + y^2 - 2) + d_2(y + z - 2)$$

и найдем принадлежащую области E точку, подозрительную на точку условного локального экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = y + 2d_1x = 0, \\ L'_y = x + z + 2d_1y + d_2 = 0, \\ L'_z = y + d_2 = 0, \\ L'_{d_1} = x^2 + y^2 - 2 = 0, \\ L'_{d_2} = y + z - 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 1, \\ z_0 = 1, \\ d_{01} = -1/2, \\ d_{02} = -1, \end{cases} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{(\mathbf{x}_0, d_{01}, d_{02})} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и систему (11.12), которая в данном примере имеет вид

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 0, \\ u_2 + v = 0. \end{cases}$$

Отсюда $u_1 = v$, $u_2 = -v$. Построим квадратичную форму

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v} \end{array} \right)^T \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0)} \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v} \end{array} \right) = \\ & = (v \quad -v \quad v) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ -v \\ v \end{pmatrix} = -6v^2 < 0. \end{aligned}$$

Поскольку квадратичная форма является отрицательно определенной, то \mathbf{x}_0 — точка условного локального максимума в задаче (11.13).

11.5. Глобальные экстремумы функции векторного аргумента

Рассмотрим скалярную функцию $y = f(x_1, \dots, x_n)$, определенную на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. Величины $M = \sup_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$, $m = \inf_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$ называют экстремальными для функции f на D . Если существует точка $\mathbf{x}^* \in D$ такая, что $f(\mathbf{x}^*) = M$, то точку \mathbf{x}^* называют точкой глобального максимума и пишут $M = \max_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$, аналогично пишут $m = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$ в случае, если существует точка $\mathbf{x}_* \in D$ такая, что $f(\mathbf{x}_*) = m$. Ограничимся нахождением глобального экстремума в двух случаях.

1) D — компакт, граница которого ∂D имеет вид $\{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) = 0\}$, и функции f, F удовлетворяют условиям 1), 2) из п. 11.3. Для нахождения точек глобального экстремума в этом случае надо: а) найти стационарные точки функции f , принадлежащие $\text{int } D = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} — внутренняя точка $D\}$; б) найти стационарные точки функции Лагранжа $L = f(\mathbf{x}) + \mathbf{d}^\top F(\mathbf{x})$; в) вычислить значения функции f в найденных точках (если их конечное число) и среди найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее числа, первое из них — $\max_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$, второе — $\min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$.

2) D — область, f дифференцируема на D , $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ при $\mathbf{x} \rightarrow \partial D$ и f имеет конечное число стационарных точек $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ в D . Говорят, что $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ при $\mathbf{x} \rightarrow \partial D$, если $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, \exists компакт $K \subset D$ такой, что $f(\mathbf{x}) \geq \alpha \quad \forall \mathbf{x} \in D \setminus K$.

Покажем, что $\min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) = \min\{f(\gamma_1), \dots, f(\gamma_r)\}$. Действительно, возьмем компакт K такой, что $f(\mathbf{x}) \geq 1 + \max\{f(\gamma_1), \dots, f(\gamma_r)\} \quad \forall \mathbf{x} \in D \setminus K$. Следовательно, $\inf_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x})$. Поскольку $\min_{\mathbf{x} \in \partial K} f(\mathbf{x}) > \max\{f(\gamma_1), \dots, f(\gamma_r)\}$, то

$$\min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) = \min\{f(\gamma_1), \dots, f(\gamma_r)\}.$$

Глобальный минимум выпуклой функции

Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называют выпуклым, если

$$\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in D, \forall \tau : 0 \leq \tau \leq 1 \Rightarrow \mathbf{x}_\tau = \mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \in D.$$

Функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ называют выпуклой, если множество D — выпукло и для любых $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in D$, для любых τ , $0 \leq \tau \leq 1$, выполняется неравенство

$$f(\mathbf{x}_\tau) \leq f(\mathbf{x}_0) + \tau(f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)).$$

Достаточное условие выпуклости скалярной функции векторного аргумента

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на выпуклом множестве D . Если для любого $\mathbf{x} \in D$ все главные угловые миноры матрицы $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}$ положительны, то функция f является выпуклой.

Доказательство. Из критерия Сильвестра следует, что при каждом $\mathbf{x} \in D$ квадратичная форма $\mathbf{u}^\top \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{u}$ является положительно определенной. Пусть $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ — две различные точки из D . Рассмотрим скалярную функцию $\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0))$, $0 \leq t \leq 1$, и вычислим $\varphi''(t)$. Используя теорему о матрице Якоби сложной векторной функции, имеем

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{df(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0))}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^\top \left(\frac{df(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0))}{d\mathbf{x}} \right)^\top, \\ \varphi''(t) &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^\top \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0))}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0).\end{aligned}$$

Отсюда и из критерия Сильвестра следует, что $\varphi''(t) > 0 \quad \forall t \in [0, 1]$. По критерию выпуклости скалярных дважды дифференцируемых отображений функция $\varphi(t)$ выпукла на $[0, 1]$, т. е. для любых $t_0, t_1 \in [0, 1]$, для любых τ , $0 \leq \tau \leq 1$, выполняется неравенство $\varphi(t_0 + \tau(t_1 - t_0)) \leq \varphi(t_0) + \tau(\varphi(t_1) - \varphi(t_0))$. Полагая в последнем неравенстве $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, получим $f(\mathbf{x}_\tau) \leq f(\mathbf{x}_0) + \tau(f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0))$. \triangleleft

Теорема о глобальном минимуме выпуклой функции

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая выпуклая функция, \mathbf{x}_0 — внутренняя стационарная точка функции. Тогда \mathbf{x}_0 — точка глобального минимума f на D .

Доказательство. Предположим, что существует точка $\mathbf{x}_1 \in D$ такая, что

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_0). \tag{11.14}$$

Точка $t = 0$ является стационарной точкой скалярной функции $\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0))$, $t \in [-\delta, 1]$, где $\delta > 0$ такое число, что точка $\mathbf{x}_0 - \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ принадлежит D . Кроме того, φ — выпуклая функция на $[-\delta, 1]$ (доказать). По теореме о глобальном минимуме скалярной выпуклой функции (п. 4.5), $t = 0$ — точка глобального минимума для $\varphi(t)$, $t \in [-\delta, 1]$. Следовательно, $\varphi(1) \geq \varphi(0)$, отсюда $f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_0)$, что противоречит (11.14). \triangleleft

ГЛАВА 12

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

12.1. Поверхности

Пусть D — ограниченная область на плоскости $0uv$, ∂D — ее граница, а $D \cup \partial D = \overline{D}$ — замыкание D , и пусть $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ — три непрерывные функции, определенные на \overline{D} . Множество точек $M(u, v)$ с координатами $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \overline{D}$, в пространстве $Oxyz$ называют поверхностью с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in \overline{D}. \quad (12.1)$$

Векторную функцию

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \overline{D},$$

называют векторным уравнением поверхности (если различны параметрические уравнения двух поверхностей, то поверхности считаем различными, даже в том случае, когда совпадают множества точек в пространстве, соответствующие этим поверхностям). Поверхность называют простой, если у нее нет точек самопересечения, т. е. для любых двух различных точек (u_1, v_1) , $(u_2, v_2) \in \overline{D}$, причем хотя бы одна из них принадлежит области D , выполняется неравенство $\mathbf{r}(u_1, v_1) \neq \mathbf{r}(u_2, v_2)$.

Поверхность называют m раз непрерывно дифференцируемой, если функция $\mathbf{r}(u, v)$ m раз непрерывно дифференцируема на \overline{D} .

Пример 12.1. Поверхности с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = c + au + bv, \end{cases} \quad (u, v) \in \overline{D}; \quad \begin{cases} x = 3 \cos \varphi \cos \psi, \\ y = 3 \sin \varphi \cos \psi, \\ z = 3 \sin \psi, \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2, \end{array}$$

являются соответственно частью плоскости (рис. 12.1) и сферой радиусом 3 с центром в точке $(0,0,0)$ (рис. 12.2).

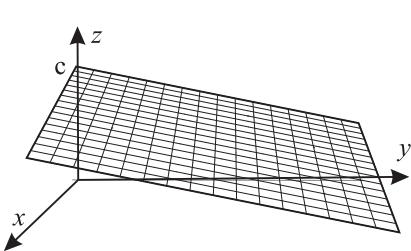


Рис. 12.1. Плоскость

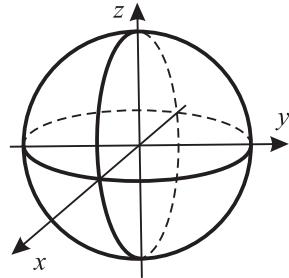


Рис. 12.2. Сфера

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — три непрерывные функции, определенные на отрезке $[a, b]$. Множество точек $M(t)$ в пространстве $Oxyz$ с координатами $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, называют пространственной кривой с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), & t \in [a, b], \\ z = z(t), \end{cases}$$

Векторную функцию

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b],$$

называют векторным уравнением кривой. Для пространственных кривых мы сохраняем все определения, касающиеся плоских кривых, и для них имеют место все утверждения с очевидными изменениями, справедливые для плоских кривых (кроме формулы Грина и вытекающих из этой формулы утверждений). Например, простая гладкая пространственная кривая спрямляема, и ее длина равна

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt. \quad (12.2)$$

Пусть AB^+ : $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), & t \in [a, b], \\ z = z(t), \end{cases}$ — кусочно-гладкий путь, а $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — четыре скалярные функции трех переменных.

Интеграл Римана вида

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt := \int_{AB^+} f(x, y, z) ds$$

принимают за криволинейный интеграл первого типа от f по пространственному пути AB^+ .

Интегралы

$$\int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) dt := \int_{AB^+} P(x, y, z) dx, \quad (12.3)$$

$$\int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) dt := \int_{AB^+} Q(x, y, z) dy,$$

$$\int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t) dt := \int_{AB^+} R(x, y, z) dz$$

принимают за криволинейные интегралы второго типа по пространственному пути AB^+ .

Пусть $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, — непрерывно дифференцируемая поверхность; (u_0, v_0) — точка, принадлежащая D . Пространственные кривые

$$l : \begin{cases} x = x(u_0, t), \\ y = y(u_0, t), \quad t \in [v_0 - \delta, v_0 + \delta], \\ z = z(u_0, t), \end{cases} l_1 : \begin{cases} x = x(t, v_0), \\ y = y(t, v_0), \quad t \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta], \delta > 0, \\ z = z(t, v_0), \end{cases}$$

находятся на поверхности S и являются непрерывно дифференцируемыми, а вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_v &= x'_v(u_0, v_0) \mathbf{i} + y'_v(u_0, v_0) \mathbf{j} + z'_v(u_0, v_0) \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_u &= x'_u(u_0, v_0) \mathbf{i} + y'_u(u_0, v_0) \mathbf{j} + z'_u(u_0, v_0) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

если они не равны нулю, — направляющими векторами касательных соответственно к кривым l и l_1 в точке (u_0, v_0) .

Непрерывно дифференцируемую поверхность $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$ называют гладкой, если в каждой точке $(u, v) \in \overline{D}$ векторы \mathbf{r}_u , \mathbf{r}_v не коллинеарны. Последнее условие равносильно тому, что векторное произведение $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ не равно нулю.

Плоскость, параллельную векторам $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ и проходящую через точку $(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, называют

касательной к поверхности S в точке (x_0, y_0, z_0) . Уравнение касательной плоскости

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 0.$$

Прямую, проходящую через точку касания поверхности и касательной плоскости и перпендикулярную касательной плоскости, называют нормальной прямой к поверхности в этой точке (рис. 12.3).

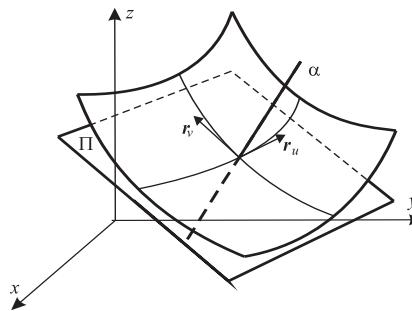


Рис. 12.3. Касательная плоскость (Π) и нормальная прямая (α)

Вектор

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \det \begin{pmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} \mathbf{i} + \det \begin{pmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{pmatrix} \mathbf{j} + \det \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \mathbf{k}$$

является направляющим вектором нормальной прямой.

Введем обозначения

$$A = \det \begin{pmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}, \quad B = \det \begin{pmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{pmatrix}, \quad C = \det \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}.$$

Параметрическое уравнение нормальной прямой

$$\begin{cases} x = At + x_0, \\ y = Bt + y_0, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = Ct + z_0, \end{cases}$$

Пусть $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, — непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим поверхность с параметрическим уравнением

$$\Gamma : \begin{cases} x = u, \\ y = v, \quad (u, v) \in \overline{D}. \\ z = f(u, v), \end{cases}$$

Она является простой гладкой поверхностью, и множество точек, лежащих на этой поверхности, совпадает с графиком функции $z = f(x, y), (x, y) \in \overline{D}$. Именно эта поверхность имеется в виду, когда говорится о графике функции $z = f(x, y)$ как о поверхности. В этом случае

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{j} + f'_v(u_0, v_0) \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_u = \mathbf{i} + f'_u(u_0, v_0) \mathbf{k},$$

$$A = -f'_u, \quad B = -f'_v, \quad C = 1, \quad [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = -f'_u \mathbf{i} - f'_v \mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0},$$

$$f'_u(u_0, v_0)(x - x_0) + f'_v(u_0, v_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 -$$

уравнение касательной плоскости,

$$\begin{cases} x = f'_u(u_0, v_0)t + x_0, \\ y = f'_v(u_0, v_0)t + y_0, \quad t \in \mathbb{R}, - \\ z = -t + z_0, \end{cases}$$

уравнение нормальной прямой.

12.2. Площадь поверхности

Пусть $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in \overline{D}, - \\ z = z(u, v), \end{cases}$ — простая гладкая

поверхность. Разобьем множество \overline{D} прямыми, параллельными осям $0u, 0v$, на n компактных частей \overline{D}_k . Прямые разбиения образуют прямоугольники, покрывающие фигуру \overline{D} . Возьмем одну из частей \overline{D}_k . Пусть $M_k = (u_k, v_k)$ — одна из вершин прямоугольника, принадлежащая \overline{D} , а $M'_k = (u_k + \Delta u_k, v_k)$, $M''_k = (u_k, v_k + \Delta v_k)$ — соседние вершины этого прямоугольника (рис. 12.4). Образ части \overline{D}_k при отображении $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — множество S_k , лежащее на поверхности S (рис. 12.5).

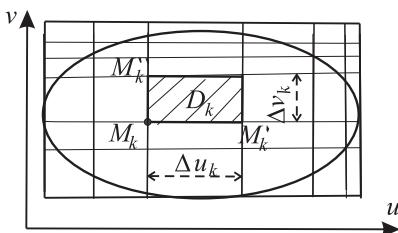


Рис. 12.4

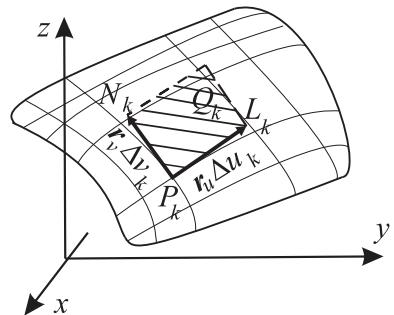


Рис. 12.5

Заменим S_k на параллелограмм Q_k , которой строится следующим образом: проведем касательную плоскость к поверхности S в точке $P_k = (x_k, y_k, z_k)$, $x_k = x(u_k, v_k)$, $y_k = y(u_k, v_k)$, $z_k = z(u_k, v_k)$, и на касательной плоскости возьмем параллелограмм Q_k с вершинами $P_k = (x_k, y_k, z_k)$,

$$L_k = (x_k + x'_u(u_k, v_k)\Delta u_k, y_k + y'_u(u_k, v_k)\Delta u_k, z_k + z'_u(u_k, v_k)\Delta u_k),$$

$$N_k = (x_k + x'_v(u_k, v_k)\Delta v_k, y_k + y'_v(u_k, v_k)\Delta v_k, z_k + z'_v(u_k, v_k)\Delta v_k).$$

Стороны параллелограмма Q_k параллельны векторам $\mathbf{r}_u(u_k, v_k), \mathbf{r}_v(u_k, v_k)$, и его площадь равна

$$\text{пл.} Q_k = \left| [\overrightarrow{P_k L_k}, \overrightarrow{P_k N_k}] \right| = \left| [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \right|_{(u_k, v_k)} |\Delta u_k \Delta v_k|$$

(здесь и в дальнейшем символом $|\mathbf{a}|$ обозначается длина вектора \mathbf{a} в пространстве $Oxyz$). Найдем сумму σ площадей всех параллелограммов Q_k

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \left| [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \right|_{(u_k, v_k)} |\Delta u_k \Delta v_k|.$$

Сумма σ является интегральной суммой для двойного интеграла $\iint_{\overline{D}} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| dudv$. Поскольку функция $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|$ непрерывна на компакте \overline{D} , то она интегрируема на \overline{D} и, согласно первому необходимому условию интегрируемости, для любой последовательности разбиений $(\{\overline{D}_k\}_m)$, $k = 1, \dots, n_m$, с диаметрами $\delta_m \rightarrow +0$ при любом выборе точек $(u_k, v_k)_m \in \in (\overline{D}_k)_m$ выполняется

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} \left| [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] \right|_{((u_k, v_k)_m)} \text{пл.} (\overline{D}_k)_m = \iint_{\overline{D}} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| dudv.$$

Приведенные рассуждения позволяют принять двойной интеграл

$$\text{пл.} S = \iint_{\overline{D}} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| dudv \tag{12.4}$$

за площадь поверхности S .

Поверхность $S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, называют кусочно-гладкой, если ограниченную замкнутую область \overline{D} можно разбить кусочно-гладкими кривыми на конечное число замкнутых областей \overline{D}_i , $i = 1, \dots, r$, таким образом, что любых два множества \overline{D}_i , \overline{D}_j не имеют общих внутренних точек и каждая из поверхностей $S_i : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \in \overline{D}_i$, является гладкой (рис. 12.6).

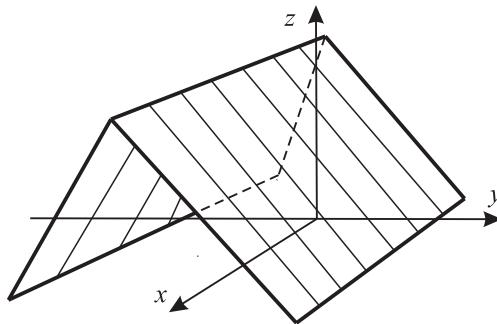


Рис. 12.6. Кусочно-гладкая поверхность

За площадь простой кусочно-гладкой поверхности S принимают сумму $\sum_{i=1}^r \text{пл.}S_i$. Из определения площади простой кусочно-гладкой поверхности и из аддитивности двойного интеграла следует, что площадь такой поверхности S равна $\iint_{\overline{D}} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| dudv$.

Поскольку $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, то формулу (12.4) можно записать в виде

$$\text{пл.}S = \iint_{\overline{D}} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv. \quad (12.5)$$

Если воспользоваться равенствами

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}),$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}),$$

где $\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ — угол между векторами, то выражение $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2$ можно представить в виде $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2$. Отсюда, в частности, имеем

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|^2 = |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2.$$

Обозначим $|\mathbf{r}_u|^2 = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) = E$, $|\mathbf{r}_v|^2 = (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) = G$, $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = F$. Тогда $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|^2 = EG - F^2$ и формулу (12.4) можно записать в следующем наиболее часто используемом виде:

$$\text{пл.}S = \iint_{\overline{D}} \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (12.6)$$

Если S является графиком непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, то формула (12.5) имеет следующий вид:

$$\text{пл.}S = \iint_{\overline{D}} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy.$$

12.3. Поверхностные интегралы

Пусть $w = f(x, y, z)$ — скалярная функция, заданная на множестве $E \subset \mathbb{R}^3$, а

$$S : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in \overline{D}, - \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

кусочно-гладкая поверхность, лежащая в E . Предположим, что функция $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ интегрируема по Риману на \overline{D} . Отображение $\sqrt{E((u, v))G((u, v)) - F^2((u, v))}$, $(u, v) \in \overline{D}$, ограничено и имеет множество точек разрыва нулевой площади, следовательно, оно тоже интегрируемо по Риману на \overline{D} . Функция $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}$ интегрируема на \overline{D} как произведение интегрируемых функций (доказать).

Двойной интеграл вида

$$\iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2} dudv$$

принимают за **поверхностный интеграл первого типа** от f по поверхности S (ПОВИ-1) и обозначают

$$\iint_S f(x, y, z) ds.$$

Таким образом, по определению

$$\iint_S f(x, y, z) ds := \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Свойства ПОВИ-1

1. Аддитивность

Рассмотрим поверхность $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$. Пусть $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_k$ — некоторое разбиение замкнутой области \overline{D} кусочно-гладкими кривыми на замкнутые области, не имеющие общих внутренних точек. Мы говорим, что поверхность S составлена из поверхностей S_i , если S_i , $i = 1, \dots, k$, — поверхности с векторными уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}_i$.

Если кусочно-гладкая поверхность S составлена из поверхностей S_i , $i = 1, \dots, k$, и определен интеграл $\iint_S f(x, y, z) ds$, то из определения ПОВИ-1 и из аддитивности двойного интеграла вытекает аддитивность ПОВИ-1, т. е.

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} f(x, y, z) ds. \quad (12.7)$$

2. Физический смысл. Пусть $\rho(x, y, z)$ — плотность простой кусочно-гладкой поверхности S в точке (x, y, z) . Тогда ПОВИ-1 $\iint_S \rho(x, y, z) ds$ равен массе поверхности S .

Перейдем к определению поверхностных интегралов второго типа. Рассмотрим простую гладкую поверхность

$$S : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in \overline{D}. \quad (12.8)$$

Пусть (u_0, v_0) — граничная точка множества \overline{D} . Точку $L = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ называют краевой для поверхности S . Множество краевых точек называют краем поверхности. Точки $M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$, называют внутренними точками поверхности.

В каждой точке $M(u, v)$ поверхности S определены два противоположно направленных единичных нормальных вектора

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\|}$$

и $-\mathbf{n}(u, v)$. Так как поверхность является гладкой, то функция $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ непрерывна на \overline{D} . Фиксируем один из единичных нормальных векторов $\mathbf{n}(u, v)$ или $-\mathbf{n}(u, v)$ и обозначим его через $\mathbf{q}(u, v)$. Пару (S, \mathbf{q}) называют положительной стороной поверхности и ее обозначают S^+ (рис. 12.7).

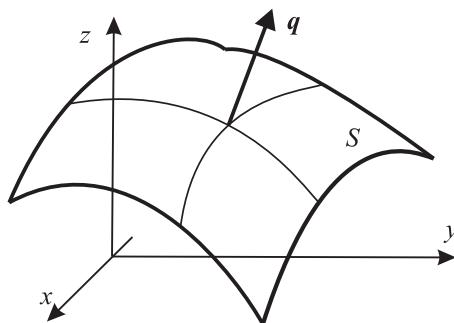


Рис. 12.7. Сторона поверхности

Пара (S, \mathbf{q}) — противоположная отрицательная сторона, которую обозначают S^- . При выборе стороны поверхности достаточно указать нормаль в одной точке этой поверхности.

Пусть S — простая гладкая поверхность с краем ∂S . Предположим, что край является простой кусочно-гладкой замкнутой кривой. Выбрав положительную сторону поверхности S^+ , мы задаем положительное направление движения по краю ∂S , а именно то направление, двигаясь по которому наблюдатель, находящийся на положительной стороне поверхности, видит поверхность S слева. Обратно по положительному направлению движения по краю можно однозначно восстановить положительную сторону поверхности. Направление движения по ∂S , противоположное положительному, называют отрицательным.

Пусть теперь S — кусочно-гладкая поверхность, составленная из простых гладких поверхностей S_1, \dots, S_k , причем край ∂S_i каждой поверхности является простой кусочно-гладкой кривой и любые две части S_i, S_j , имеющие общие точки, примыкают друг к другу по некоторой кусочно-гладкой кривой. Пусть S_1^+ — положительная сторона части S_1 . Выбор стороны задает положительное направление на крае ∂S_1 . Далее выбираем положительные направления движения на краях частей, смежных с S_1^+ , а именно, выбираем те направления, которые противоположны направлению на ∂S_1^+ и т. д. Кусочно-гладкую поверхность S называют двухсторонней, если по указанному выше правилу можно однозначно установить положительное движение по краю каждой части $S_i, i = 1, \dots, k$. По положительным направлениям на краях находим соответствующие стороны S_i^+ каждой части. Составность (S_1^+, \dots, S_k^+) называют положительной стороной кусочно-гладкой двухсторонней поверхности S . В дальнейшем рассматриваем лишь кусочно-гладкие двухсторонние поверхности.

Пусть на множестве $E \subset \mathbb{R}^3$ заданы три скалярные функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ и пусть $S^+ = (S, \mathbf{q})$ — положительная сторона простой гладкой поверхности, $S \subset E$.

Поверхностные интегралы первого типа

$$\iint_S P(x, y, z) \cos(\widehat{\mathbf{q}\mathbf{i}}) ds, \iint_S P(x, y, z) \cos(-\widehat{\mathbf{q}\mathbf{i}}) ds,$$

$$\iint_S Q(x, y, z) \cos(\widehat{\mathbf{q}\mathbf{j}}) ds, \iint_S Q(x, y, z) \cos(-\widehat{\mathbf{q}\mathbf{j}}) ds,$$

$$\iint_S R(x, y, z) \cos(\widehat{\mathbf{q}\mathbf{k}}) ds, \iint_S R(x, y, z) \cos(-\widehat{\mathbf{q}\mathbf{k}}) ds$$

относят к **поверхностным интегралам второго типа** (ПОВИ-2) и

обозначают соответственно

$$\iint_{S^+} P(x, y, z) dy dz, \iint_{S^-} P(x, y, z) dy dz, \iint_{S^+} Q(x, y, z) dx dz,$$

$$\iint_{S^-} Q(x, y, z) dx dz, \iint_{S^+} R(x, y, z) dx dy, \iint_{S^-} R(x, y, z) dx dy.$$

Чаще всего рассматривают сумму интегралов $\iint_{S^+} P dz dy + \iint_{S^+} Q dx dz + \iint_{S^+} R dx dy$, которую обозначают следующим образом:

$$\iint_{S^+} P dz dy + Q dx dz + R dx dy.$$

Свойства ПОВИ-2

1. ПОВИ-2 меняет знак при замене стороны поверхности на противоположную.

Доказательство для интеграла $\iint_{S^+} R dx dy$. Поскольку $\widehat{(\mathbf{q}\mathbf{k})} + \widehat{(-\mathbf{q}\mathbf{k})} = \pi$, то

$$\cos(\widehat{\mathbf{q}\mathbf{k}}) = -\cos(\widehat{-\mathbf{q}\mathbf{k}}), \iint_{S^+} R dx dy = -\iint_{S^-} R dx dy. \triangleleft$$

2. Формулы сведенияния ПОВИ-2 к двойному интегралу.

Если функции $P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ интегрируемы по Риману на \overline{D} и нормаль \mathbf{q} , соответствующая положительной стороне $S^+ = (S, \mathbf{q})$ простой гладкой поверхности (12.8), совпадает с вектором

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||} = \frac{A}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||} \mathbf{i} + \frac{B}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||} \mathbf{j} + \frac{C}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||} \mathbf{k},$$

то

$$\iint_{S^+} P(x, y, z) dy dz = \iint_{\overline{D}} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) A du dv, \quad (12.9)$$

$$\iint_{S^+} Q(x, y, z) dx dz = \iint_{\overline{D}} Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) B du dv, \quad (12.10)$$

$$\iint_{S^+} R(x, y, z) dy dx = \iint_{\overline{D}} R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C du dv. \quad (12.11)$$

Если же $\mathbf{q} = -\mathbf{n}$, то в правых частях формул (12.9)–(12.11) знак меняется на противоположный.

Доказательство для интеграла $\iint_{S^+} R dy dx$. Действительно,

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\mathbf{n}\mathbf{k}}) &= \frac{([\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v], \mathbf{k})}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} = \frac{C}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \iint_{S^+} R(x, y, z) dy dx &= \iint_S R(x, y, z) \cos(\widehat{\mathbf{n}\mathbf{k}}) ds = \\ &= \iint_{\overline{D}} R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}} \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ &= \iint_{\overline{D}} R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C du dv. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

3. Пусть поверхность S является графиком непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, и пусть $(S, \mathbf{n}) = S^+$ – сторона поверхности, соответствующая нормальному вектору

$$\mathbf{n} = \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \mathbf{i} + \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \mathbf{k}.$$

Эту сторону S^+ называют верхней, и в этом случае формулы сведения ПОВИ-2 к 2И имеют вид

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} P(x, y, z) dy dz &= - \iint_{\overline{D}} P(x, y, f(x, y)) f'_x(x, y) dx dy, \\ \iint_{S^+} Q(x, y, z) dx dz &= - \iint_{\overline{D}} Q(x, y, f(x, y)) f'_y(x, y) dx dy, \\ \iint_{S^+} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\overline{D}} R(x, y, f(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Если $S^+ = (S, -\mathbf{n})$ – нижняя сторона поверхности, то

$$\iint_{S^+} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{\overline{D}} R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

4. Рассмотрим гладкую поверхность $S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, и диффеоморфное преобразование

$$\begin{cases} u = \varphi(t, \tau), \\ v = \psi(t, \tau) \end{cases} \quad (12.12)$$

ограниченной замкнутой области $\overline{E} = E \cup \partial E$ в \overline{D} . Якобиан этого преобразования $I(t, \tau)$ непрерывен и не равен нулю (п. 8.5). Диффеоморфное преобразование (12.12) называют допустимой заменой параметров, если для любых $(t, \tau) \in \overline{E}$ его якобиан $I(t, \tau)$ положителен.

Пусть $u = \varphi(t, \tau), v = \psi(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \overline{E}$, — допустимая замена параметров. Рассмотрим поверхность $L : x = \xi(t, \tau) = x(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)), y = \eta(t, \tau) = y(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)), z = \chi(t, \tau) = z(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau))$, $(t, \tau) \in \overline{E}$. Она является гладкой (доказать), и множества в пространстве $0xyz$, которые пробегают точки $M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ и $N(t, \tau) = (\xi(t, \tau), \eta(t, \tau), \chi(t, \tau))$, когда (u, v) и (t, τ) принимают значения соответственно из множеств \overline{D} и \overline{E} , совпадают. В дальнейшем говорим, что поверхность L получена из поверхности S с помощью допустимой замены параметров.

Если поверхность L получена из простой гладкой поверхности S с помощью допустимой замены параметров $u = \varphi(t, \tau), v = \psi(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \overline{E}$, и определен интеграл $\iint_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdx dy$, где $S^+ = (S, \mathbf{q}(u, v))$ — положительная сторона поверхности S , то

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \iint_{L^+} Pdydz + Qdxdz + Rdx dy,$$

где $L^+ = (L, \mathbf{q}(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)))$.

Доказательство для интеграла $\iint_{S^+} Rdx dy$ в случае $\mathbf{q} = \mathbf{n} = \frac{A}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} \mathbf{i} + \frac{B}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} \mathbf{j} + \frac{C}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} \mathbf{k}$. По формуле (12.11)

$$\iint_{S^+} R(x, y, z) dx dy = \iint_D R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C(u, v) du dv.$$

Используя замену переменных $\begin{cases} u = \varphi(t, \tau), \\ v = \psi(t, \tau), \end{cases}$ $(t, \tau) \in \overline{E}$, в двойном интеграле последней формулы, имеем (п. 8.5)

$$\iint_{S^+} Rdx dy = \iint_{\overline{E}} R(x(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)), y, z) C(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)) I(t, \tau) dt d\tau.$$

Так как $C(\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau))I(t, \tau) = \xi'_t \eta'_\tau - \eta'_t \xi'_\tau = C_1(t, \tau)$, то

$$\iint_{S^+} R dxdy = \iint_{\bar{E}} R(\xi(t, \tau), \eta(t, \tau), \chi(t, \tau)) C_1(t, \tau) dt d\tau = \iint_{L^+} R(x, y, z) dx dy. \triangleleft$$

Замечание 12.1. Согласно четвертому свойству поверхностных интегралов второго типа, значения интеграла для всех поверхностей, параметрические уравнения которых связаны допустимыми заменами параметров, совпадают. Поэтому часто при задании поверхностного интеграла задают лишь множество точек в пространстве, соответствующее поверхности, не указывая параметрическое уравнение поверхности. В этом случае предполагается, что существует такое параметрическое уравнение, соответствующее указанному множеству, что поверхность с этим уравнением является простой гладкой. В этом случае интеграл вычисляется по этой поверхности или по любой другой, полученной из нее допустимой заменой параметров.

5. Если S — цилиндрическая поверхность, образующая которой параллельна оси $0z$, то $\cos(\widehat{\mathbf{n}\mathbf{k}}) = 0$ и, следовательно,

$$\iint_{S^+} R(x, y, z) dy dx = 0.$$

6. Если (S_1^+, \dots, S_k^+) — положительная сторона кусочно-гладкой поверхности S , то по определению полагают

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} P dy dz &:= \sum_{i=1}^k \iint_{S_i^+} P dy dz, \quad \iint_{S^+} Q dx dz := \sum_{i=1}^k \iint_{S_i^+} Q dx dz, \\ \iint_{S^+} R dx dy &:= \sum_{i=1}^k \iint_{S_i^+} R dx dy. \end{aligned}$$

Пример 12.2. Вычислим ПОВИ-2

$$I = \iint_{S^+} x dy dz + y dx dz + z dx dy,$$

где S^+ — внутренняя сторона цилиндра (рис. 12.8):

$$x^2 + y^2 = a^2, -h \leq z \leq h.$$

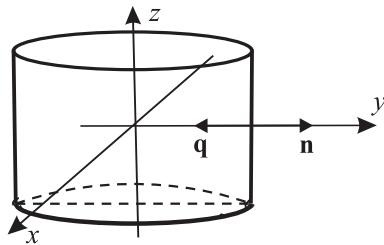


Рис. 12.8

Параметрическое уравнение поверхности S :

$$\begin{cases} x = a \cos u, \\ y = a \sin u, \\ z = v, \end{cases} D : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi, \\ -h \leq v \leq h. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты A, B, C для S :

$$A = \det \begin{pmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = a \cos u, \quad B = \det \begin{pmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{pmatrix} = a \sin u, \quad C = 0.$$

Вектор $\mathbf{n} = \left(\frac{A}{\|\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\|} \mathbf{i} + \frac{B}{\|\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\|} \mathbf{j} + \frac{C}{\|\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\|} \mathbf{k} \right) \Big|_{(\pi/2, 0)}$ образует острый угол

с осью $0y$, а вектор \mathbf{q} , соответствующий внутренней стороне цилиндра в той же точке поверхности, образует тупой угол с этой осью, следовательно, $\mathbf{q} = -\mathbf{n}$. Используя формулы сведения ПОВИ-2 к двойному интегралу, имеем

$$I = - \iint_D a^2 du dv = -a^2 \text{пл.} D = -4\pi a^2 h.$$

12.4. Формула Гаусса — Остроградского

Пусть T — ограниченная замкнутая область в \mathbb{R}^3 , граница которой ∂T является простой кусочно-гладкой поверхностью. Граница ∂T делит пространство \mathbb{R}^3 на две части, одна внутренняя — это множество T , вторая внешняя — это область $\mathbb{R}^3 \setminus T$. За положительную сторону ∂T^+ границы тела T принимаем внешнюю сторону $(\partial T, \mathbf{q})$, т. е. ту сторону, которая соответствует нормали \mathbf{q} , направленной из внутренней части пространства во внешнюю.

Лемма 12.1

Пусть G — элементарный относительно оси $0z$ цилиндроид, граница которого является простой кусочно-гладкой поверхностью S (рис. 12.9), и пусть $R(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая на G функция. Тогда

$$\iint_{S^+} R dxdy = \iiint_G R'_z dxdydz,$$

где S^+ — внешняя сторона границы цилиндроида.

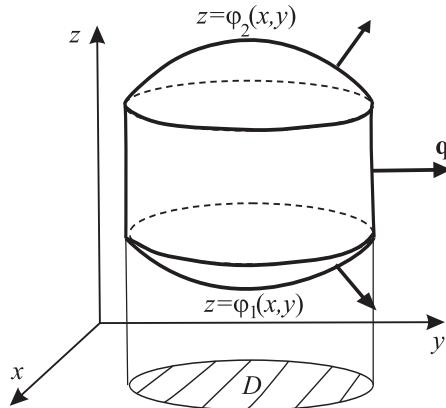


Рис. 12.9

Доказательство. По теореме о сведении кратного интеграла к повторному имеем

$$\begin{aligned} \iiint_G R'_z dxdydz &= \iint_D R(x, y, z) \Big|_{z=\varphi_1(x, y)}^{z=\varphi_2(x, y)} dxdy = \\ &= \iint_D (R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y))) dxdy. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Используя свойства ПОВИ-2, получаем

$$\iint_D R(x, y, \varphi_2(x, y)) dxdy = \iint_{S_2^+} R(x, y, z) dxdy, \quad (12.14)$$

$$\iint_D R(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy = - \iint_{S_1^+} R(x, y, z) dx dy, \quad (12.15)$$

$$\iint_{S_3^+} R(x, y, z) dx dy = 0, \quad (12.16)$$

где S_1 — нижняя, S_2 — верхняя и S_3 — боковая стороны цилиндроида. Из равенств (12.13)–(12.16) вытекает

$$\begin{aligned} \iiint_G R'_z dx dy dz &= \iint_{S_1^+} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_2^+} R(x, y, z) dx dy + \\ &+ \iint_{S_3^+} R(x, y, z) dx dy = \iint_{S^+} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

Тело $T \subset \mathbb{R}^3$ называют составным, если его можно разбить цилиндрическими поверхностями с образующей, параллельной оси $0z$, на конечное число цилиндроидов, каждый из которых является элементарным относительно оси $0z$ и ограничен простой кусочно-гладкой поверхностью, а также если тело обладает аналогичным свойством относительно других осей $0x$ и $0y$.

Теорема о сведении ПОВИ-2 к тройному интегралу

Пусть граница ∂T ограниченной замкнутой области $T \subset \mathbb{R}^3$ является простой кусочно-гладкой поверхностью и пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — скалярные непрерывно дифференцируемые на T функции. Тогда имеет место формула Гаусса — Остроградского

$$\iint_{\partial T^+} P dz dy + Q dx dz + R dx dy = \iiint_T (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz,$$

где ∂T^+ — внешняя сторона границы тела T .

Доказательство проведем лишь, когда T — составное тело. Пусть $\{T_j\}$, $j = 1, \dots, k$, — разбиение тела T на цилиндроиды T_j , элементарные относительно оси $0z$.

На основании леммы 12.1 и свойства аддитивности тройного интеграла имеем

$$\iiint_T R'_z dx dy dz = \sum_j \iiint_{T_j} R'_z dx dy dz = \sum_j \iint_{\partial T_j^+} R(x, y, z) dx dy.$$

Границы ∂T_j цилиндроидов T_j состоят, во-первых, из поверхностей, которые входят в границу ∂T тела T , и, во-вторых, из поверхностей, появившихся в результате разбиения тела T . Вторые поверхности являются цилиндрическими, образующие которых параллельны оси $0z$, и по свойству 5 ПОВИ-2, интегралы по ним равны нулю, поэтому

$$\iiint_T R'_z dxdydz = \iint_{\partial T^+} R dx dy. \quad (12.17)$$

Если $\{T_i\}$ — разбиение тела T на цилиндроиды T_i , элементарные относительно оси $0x$ или оси $0y$, то аналогичным образом получаем

$$\iiint_T P'_x dxdydz = \iint_{\partial T^+} P dy dz, \quad (12.18)$$

$$\iiint_T Q'_y dxdydz = \iint_{\partial T^+} Q dx dz. \quad (12.19)$$

Складывая формулы (12.17)–(12.19) приходим к формуле Гаусса — Остроградского. \triangleleft

12.5. Формула Стокса

Пусть $S^+ = (S, \mathbf{q})$ — положительная сторона простой гладкой поверхности

$$S : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in \overline{D}, \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

где \overline{D} — ограниченная замкнутая область, граница которой является простой кусочно-гладкой кривой $l : \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} t \in [a, b]$, причем путь l^+ , лежащий на этой кривой, таков, что при движении по пути l^+ область D остается слева. Кривая

$$L : \begin{cases} x = x(u(t), v(t)), \\ y = y(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b], \\ z = z(u(t), v(t)), \end{cases}$$

является краем поверхности S . Предположим, что путь L^+ , лежащий на кривой L , является простым кусочно-гладким. Если наблюдатель, находящийся на положительной стороне поверхности и двигающийся по пути L^+ , видит поверхность слева, то положим $\partial S^+ = L^+$, в противном случае — $\partial S^+ = L^-$ (рис. 12.10).

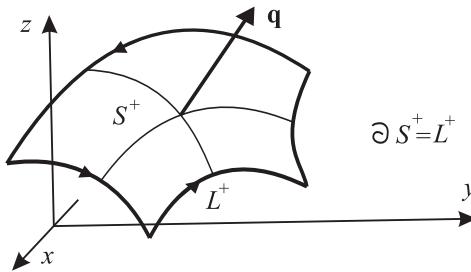


Рис. 12.10

Теорема о сведении КРИ-2 к ПОВИ-2

Пусть S^+ , ∂S^+ — сторона поверхности и путь, указанные перед формулировкой теоремы, а $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемые на S функции. Тогда имеет место следующая формула Стокса:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S^+} P dx + Q dy + R dz = \\ & = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (12.20) \end{aligned}$$

Доказательство для дважды непрерывно дифференцируемой поверхности (с помощью несколько более сложных рассуждений, чем приведенное ниже доказательство, теорема может быть установлена и без этого условия).

Предположим для определенности, что $\partial S^+ = L^+$ и вектор \mathbf{q} , соответствующий положительной стороне S^+ , совпадает с вектором $\mathbf{n} = \frac{1}{\|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\|} (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k})$. Используя свойства криволинейных интегралов и формулу Грина, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial S^+} P dx &= \int_{L^+} P dx = \int_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \times \\ &\quad \times (x'_u(u(t), v(t))u'(t) + x'_v(u(t), v(t))v'(t)) dt = \\ &= \int_{l^+} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))(x'_u(u, v)du + x'_v(u, v)dv) = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u}(Px'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Px'_u) \right) dudv. \end{aligned}$$

Далее, поскольку $x''_{vu} = x''_{uv}$ и $z'_u x'_v - z'_v x'_u = B$, $y'_u x'_v - y'_v x'_u = -C$, то

$$\begin{aligned} \int_{\partial S^+} P dx &= \iint_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} x'_u + \frac{\partial P}{\partial y} y'_u + \frac{\partial P}{\partial z} z'_u \right) x'_v + \right. \\ &\quad \left. + P x''_{vu} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} x'_v + \frac{\partial P}{\partial y} y'_v + \frac{\partial P}{\partial z} z'_v \right) x'_u + P x''_{uv} \right) dudv = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) dudv = \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Аналогично

$$\int_{\partial S^+} Q dy = \iint_{S^+} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dx dz, \quad (12.22)$$

$$\int_{\partial S^+} R dz = \iint_{S^+} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx dz. \quad (12.23)$$

Складывая формулы (12.21)–(12.23), приходим к формуле Стокса (12.20).

Замечание 12.2. Формулу Стокса можно записать в следующем легко запоминаемом виде

$$\int_{\partial S^+} P dx + Q dy + R dz = \iint_{S^+} \begin{vmatrix} dy dz & dx dz & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Пример 12.3. Применяя формулу Стокса, покажем, что криволинейный интеграл $I = \int_{l^+} (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$, где l^+ — путь, лежащий на эллипсе $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$, равен нулю. Действительно, в этом примере $P = y + z$, $Q = z + x$, $R = x + y$ и $Q'_x - P'_y = 0$, $R'_y - Q'_z = 0$, $P'_z - R'_x = 0$, следовательно, по формуле Стокса $I = 0$.

12.6. Условия независимости криволинейного интеграла второго типа от пути интегрирования в пространстве

Область $E \subset \mathbb{R}^3$ называют поверхностью-односвязной, если для любой простой замкнутой ломаной L , принадлежащей области E , существует простая гладкая поверхность S , содержащаяся в E , для которой L является ее краем. Аналогично теореме о независимости КРИ-2 от пути интегрирования (п. 9.5) доказывается следующая теорема.

Теорема о независимости КРИ-2 от пути интегрирования в пространстве

Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемы в поверхности-односвязной области E . Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

- 1) для любого замкнутого ломаного пути L^+ , принадлежащего E , имеет место равенство

$$\int_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

- 2) для любых точек A и $B \in E$ интеграл

$$\int_{AB^+} Pdx + Qdy + Rdz$$

не зависит от ломаного пути, соединяющего эти точки;

- 3) существует непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y, z)$ такая, что

$$du = Pdx + Qdy + Rdz \quad \forall (x, y, z) \in E;$$

- 4) функции P , Q , R удовлетворяют условию Эйлера

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \forall (x, y, z) \in E.$$

Следствие 12.1. Пусть выполнено одно из условий теоремы. Тогда КРИ-2 не зависит от пути интегрирования и для любого кусочно-гладкого замкнутого пути $l^+ \in E$ выполняется равенство $\int_{l^+} Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

Замечание 12.3. Функцию $u(x, y, z)$ такую, что $du = Pdx + Qdy + Rdz \quad \forall (x, y, z) \in E$, называют первообразной для выражения $Pdx + Qdy + Rdz$ в области E . При выполнении одного из условий теоремы функция

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz,$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка из E , а (x, y, z) — произвольная точка из E , является первообразной для выражения $Pdx + Qdy + Rdz$ в E .

12.7. Потенциальные и соленоидальные векторные поля

Пусть T — тело в \mathbb{R}^3 . Если на теле T определена скалярная функция векторного аргумента $f : T \rightarrow \mathbb{R}$, то говорят, что на T задано скалярное поле f . Если на теле T определена векторная функция $\mathbf{a} : T \rightarrow \mathbb{R}^3$, то говорят, что на T задано векторное поле \mathbf{a} . Пусть $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ — компоненты векторной функции \mathbf{a} , т. е.

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Векторное $\mathbf{a}(x, y, z)$ (скалярное $f(x, y, z)$) поле называют непрерывно дифференцируемым, если функция $\mathbf{a}(x, y, z)$ ($f(x, y, z)$) непрерывно дифференцируема на T . В дальнейшем рассматриваем лишь непрерывно дифференцируемые векторные и скалярные поля.

Вектор

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

называют градиентом скалярного поля f и обозначают $\text{grad}(f)$.

Выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ принимают за дивергенцию векторного поля $\mathbf{a}(P, Q, R)$ и обозначают $\text{div}(\mathbf{a})$.

Вектор

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

принимают за ротор векторного поля $\mathbf{a}(P, Q, R)$ и обозначают $\text{rot}(\mathbf{a})$.

Пусть l^+ — кусочно-гладкий путь. Интеграл $\int_{l^+} Pdx + Qdy + Rdz$ принимают за циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}(P, Q, R)$ по пути l^+ и обозначают $\int_{l^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$, где $d\mathbf{r} = (dx \ dy \ dz)^\top$, а $(\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ — скалярное произведение векторов. Пусть $S^+ = (S, \mathbf{n})$ — сторона гладкой поверхности S , соответствующая нормали

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\mathbf{i} + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\mathbf{j} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\mathbf{k} = \\ &= \cos(\widehat{\mathbf{n}\mathbf{i}})\mathbf{i} + \cos(\widehat{\mathbf{n}\mathbf{j}})\mathbf{j} + \cos(\widehat{\mathbf{n}\mathbf{k}})\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Интеграл

$$\iint_S P(x, y, z) \cos(\hat{\mathbf{n}}\mathbf{i}) ds + \iint_S Q(x, y, z) \cos(\hat{\mathbf{n}}\mathbf{j}) ds + \iint_S R(x, y, z) \cos(\hat{\mathbf{n}}\mathbf{k}) ds$$

принимают за поток векторного поля \mathbf{a} через сторону S^+ поверхности S и обозначают $\iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}) ds$.

Используя введенные понятия дивергенции, ротора, циркуляции и потока, формулу Стокса можно записать в следующем виде:

$$\int_{\partial l^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_S (\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{n}) ds,$$

где $\partial l^+, S$ — путь и поверхность, удовлетворяющие условиям теоремы о сведении КРИ-2 к ПОВИ-2; а формулу Гаусса — Остроградского — в виде

$$\iint_{\partial E} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) ds = \iiint_E \text{div}(\mathbf{a}) dx dy dz,$$

где $\partial E, E$ — поверхность и тело, удовлетворяющие условиям теоремы о сведении ПОВИ-2 к тройному интегралу.

Векторное поле $\mathbf{a} : T \rightarrow \mathbb{R}^3$, где T — область в \mathbb{R}^3 , циркуляция которого по любому замкнутому ломаному пути, лежащему в T , равна нулю, называют потенциальным.

Теперь теорему о независимости КРИ-2 от пути интегрирования в пространстве можно сформулировать следующим образом:

если векторное поле $\mathbf{a}(P, Q, R)$ непрерывно дифференцируемо на поверхности-односвязной области $T \subset \mathbb{R}^3$, то следующих четыре условия эквивалентны:

- 1) векторное поле потенциальное;
- 2) циркуляция $\int_{AB^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ не зависит от ломаного пути, соединяющего произвольные точки $A, B \in T$;
- 3) существует функция $u(x, y, z)$ такая, что $\text{grad}(u) = \mathbf{a} \quad \forall (x, y, z) \in T$;
- 4) векторное поле безвихревое, т. е. $\text{rot}(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad \forall (x, y, z) \in T$.

Функцию, удовлетворяющую третьему условию последнего утверждения, называют потенциалом векторного поля \mathbf{a} .

Область $T \subset \mathbb{R}^3$ называют объемно-односвязной, если любое тело E , граница которого принадлежит T , содержится целиком в T . Открытый шар — объемно-односвязная область. Область, ограниченная двумя сферами с общим центром, — нет.

Векторное поле \mathbf{a} называют соленоидальным, если его поток через границу любого составного тела, принадлежащего T , равен нулю.

Критерий соленоидальности векторного поля

Для того чтобы векторное поле $\mathbf{a}(x, y, z)$ было соленоидальным в объемно-односвязной области T , необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}) = 0 \quad \forall(x, y, z) \in T.$$

Доказательство. Необходимость. Допустим противное, т. е. существует точка (x_0, y_0, z_0) , в которой $\operatorname{div}(\mathbf{a}) \neq 0$. Пусть для определенности $\operatorname{div}(\mathbf{a})|_{(x_0, y_0, z_0)} > 0$. Функция $(x, y, z) \rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{a})$ непрерывна на T . По теореме о стабилизации знака существует шар $B((x_0, y_0, z_0), r)$, принадлежащий T , такой, что $\operatorname{div}(\mathbf{a}) > 0 \quad \forall(x, y, z) \in B((x_0, y_0, z_0), r)$. Пусть S^+ — внешняя сторона сферы $S((x_0, y_0, z_0), r)$. По формуле Гаусса — Остроградского

$$\iint_{S^+} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) ds = \iiint_B \operatorname{div}(\mathbf{a}) dx dy dz > 0,$$

что противоречит соленоидальности поля \mathbf{a} .

Достаточность. Возьмем произвольное составное тело D , принадлежащее T , так как тело T — объемно-односвязно, то $D \subset T$. По формуле Гаусса — Остроградского $\iint_{\partial D^+} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) ds = \iiint_D \operatorname{div}(\mathbf{a}) dx dy dz = 0$.

Поскольку D — произвольное тело указанного выше вида, то \mathbf{a} — соленоидальное векторное поле. \triangleleft

ГЛАВА 13

ЧИСЛОВОЙ РЯД

13.1. Критерий сходимости и признаки сравнения для положительного ряда

Рассмотрим последовательность действительных чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Выражение

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называют числовым рядом, а последовательность $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ — последовательностью частных сумм этого ряда.

Если последовательность (s_n) является сходящейся, то ряд называют сходящимся, а число $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ — его суммой и пишут $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ либо не существует, либо равен бесконечности, то ряд называют расходящимся. Иногда в случае, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, говорят, что сумма ряда равна бесконечности.

Необходимое условие сходимости ряда

|| *Если ряд сходится, то последовательность его членов бесконечно мала,*
т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доказательство. Пусть s — предел последовательности (s_n) . Последовательность (s_{n+1}) также имеет предел s . Поскольку $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = s - s = 0$. ◁

Если $a_n \geq 0$, то ряд называют положительным, если же $a_n > 0$, то строго положительным.

Критерий сходимости положительных рядов

Для сходимости положительного ряда необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частных сумм была ограниченной.

Доказательство. Последовательность s_n для положительных рядов является возрастающей. Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена. \triangleleft

Признак сравнения

Если

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (13.1)$$

то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости второго ряда следует расходимость первого.

Доказательство. Пусть $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ — частные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ соответственно. Из неравенства (13.1) следует $0 \leq A_n \leq B_n$. Поэтому из ограниченности последовательности B_n следует ограниченность A_n , а из неограниченности A_n — неограниченность последовательности B_n . Теперь справедливость признака вытекает из критерия сходимости положительных рядов. \triangleleft

Ряд $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, $m \in \mathbb{N}$, называют остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ясно, что если ряд сходится, то сходится и любой его остаток. Если же сходится какой-то остаток ряда, то сходится и сам ряд.

Пределочный признак сравнения

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — строгое положительные ряды.

1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, $0 < l < \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.
2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
3. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, то из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. 1. Для $\varepsilon = l/2$, $\exists \delta(l/2) > 0$, $\forall n \geq \delta(l/2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| \leq \frac{l}{2}, \quad \frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}l, \quad \frac{l}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}l b_n.$$

Из неравенства $a_n \leq 3/2l b_n$ $\forall n \geq \delta(l/2)$ и из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; из неравенства $l/2b_n \leq a_n$ $\forall n \geq \delta(l/2)$ и из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Для

$$\varepsilon = 1, \exists \delta(1) > 0, \forall n \geq \delta(1) \Rightarrow 0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1, 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Из признака сравнения следует, что сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ влечет сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. Для

$$\varepsilon = 1, \exists \delta(1) > 0, \forall n \geq \delta(1) \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq 1, a_n \geq b_n.$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже расходящийся, а сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ влечет сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. \triangleleft

13.2. Признаки Коши и Даламбера

Геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ имеет частные суммы

$$s_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

При $|q| < 1$, $s_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{1 - q}$, следовательно, в этом случае геометрический ряд сходится, а при $|q| \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} \neq 0$, геометрический ряд расходится.

Признак Коши ($a_n \geq 0$)

|| Если $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} q$, то при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ расходится.

Доказательство. Пусть $q < 1$. Возьмем число r , удовлетворяющее неравенствам $q < r < 1$. Существует номер m такой, что $\sqrt[m]{a_n} \leq r \Rightarrow a_n \leq r^m \quad \forall n \geq m$. Теперь требуемое утверждение следует из признака сравнения и сходимости геометрического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$. Если $q > 1$, то существует номер m такой, что $\sqrt[m]{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1 \quad \forall n \geq m$, и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не удовлетворяет необходимому условию сходимости, что влечет его расходимость. \triangleleft

Лемма 13.1

|| Если $a_n > 0$, $b_n > 0$ и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

|| то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство.

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \quad \dots, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Перемножим эти неравенства, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_1}, \quad a_{n+1} \leq \frac{a_1}{b_1} b_{n+1} \quad \forall n.$$

Теперь требуемое утверждение вытекает из признака сравнения. \triangleleft

Признак Даламбера ($a_n > 0$)

Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q$, то при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ расходится.

Доказательство. Пусть $q < 1$. Возьмем число p , удовлетворяющее неравенствам $q < p < 1$. Найдется номер m такой, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq p = \frac{p^{n+1}}{p^n} \quad \forall n \geq m.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$ сходится. По лемме 13.1 остаток ряда $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ сходится, что влечет сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если $q > 1$, то существует номер k такой, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq k,$$

т. е. $a_{n+1} \geq a_n$ при $n \geq k$. Последовательность a_n , начиная с некоторого номера, возрастающая и, следовательно, не является бесконечно малой, что влечет расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. \triangleleft

13.3. Интегральный критерий. Степенной признак сходимости ряда

Функцию $f(x)$, $x \geq 1$, называют производящей для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если $f(n) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Интегральный критерий ($a_n \geq 0$)

Если функция $f(x)$, производящая для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, убывает, то для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A f(x) dx.$$

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ убывает, то

$$a_k \geq f(x) \geq a_{k+1} \quad \forall x \in [k, k+1] \Rightarrow a_k \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq a_{k+1}.$$

Отсюда

$$s_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq s_{n+1} - a_1. \quad (13.2)$$

Последовательность s_n и функция $F(A) = \int_1^A f(x) dx$ являются возрастающими. Из неравенств (13.2) вытекает, что последовательность s_n и функция $F(A)$ одновременно ограничены или неограничены, т. е. ряд и интеграл сходятся или расходятся одновременно. \triangleleft

Пример 13.1. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя его члены стремятся к нулю. Действительно,

$$\int_1^A \frac{dx}{x} = \ln A \xrightarrow{A \rightarrow \infty} +\infty.$$

Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \neq 1$, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$, так как

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{A^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, & \text{если } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

Степенной признак ($a_n \geq 0$)

|| Если $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{M}{n^\alpha}$, $M - \text{const}$, $0 < M < +\infty$, то при $\alpha > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится.

Доказательство сразу следует из условий сходимости и расходимости обобщенного гармонического ряда расходимости гармонического ряда и предельного признака сравнения. \triangleleft

13.4. Признак Раабе

Когда пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ в признаках Коши и Даламбера равны 1, эти признаки не позволяют установить сходимость ряда. Следующий признак часто дает возможность исследовать и такие ряды.

Признак Раабе ($a_n > 0$)

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q,$$

то при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q < 1$ расходится.

Доказательство. Пусть $q > 1$. Возьмем числа p и s такие, что $1 < s < p < q$. Существует номер m , что

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq p,$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{p}{n} + 1 \quad \forall n \geq m. \quad (13.3)$$

Из степенного замечательного предела (п. 2.11) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 1/n)^s - 1}{1/n} = s.$$

Существует номер $m_1 \geq m$ такой, что

$$\frac{(1 + 1/n)^s - 1}{1/n} \leq p \Rightarrow (1 + 1/n)^s \leq \frac{p}{n} + 1 \quad \forall n \geq m_1. \quad (13.4)$$

Из неравенств (13.3) и (13.4) следует

$$(1 + 1/n)^s \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{(1 + 1/n)^s} = \frac{1/(n+1)^s}{1/n^s}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ сходится. По лемме 13.1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходящийся.

Пусть теперь $q < 1$. Существует номер m такой, что

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \quad \forall n \geq m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{n} + 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{1 + 1/n} = \frac{1/(n+1)}{1/n}.$$

Гармонический ряд расходится. По лемме 13.1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходящийся. \triangleleft

Замечание 13.1. Если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (признак Гаусса).

Замечание 13.2. Если $a_n \leq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют отрицательным. Из соотношения $\sum_{k=1}^n a_k = -\sum_{k=1}^n (-a_k)$ следует, что сходимость отрицательного ряда равносильна сходимости положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$.

13.5. Знакопеременный ряд

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют знакопеременным, если бесконечное множество членов ряда положительно и бесконечное множество членов ряда отрицательно.

Критерий Коши сходимости ряда

Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

Доказательство сразу вытекает из критерия Коши для последовательностей. Действительно, последовательность s_n сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| \leq \varepsilon.$$

Отсюда и вытекает требуемое соотношение, так как

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=1+n}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon. \triangleleft$$

Лемма 13.2

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также является сходящимся.

Доказательство. По критерию Коши сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1+n}^{n+p} |a_k| \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=1+n}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=1+n}^{n+p} |a_k| \leq \varepsilon.$$

По критерию Коши сходимости ряда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. \triangleleft

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Из леммы 13.2 следует, что абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют условно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся.

13.6. Знакочередующийся ряд

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{13.5}$$

называют знакочередующимся.

Признак Лейбница

Если последовательность a_n является монотонной и бесконечно малой, то знакочередующийся ряд (13.5) сходится и для его остатков имеют место оценки

$$\left| \sum_{k=1+n}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \right| \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Доказательство. Последовательность a_n может быть лишь монотонно убывающей. Четные частные суммы ряда можно записать следующими двумя способами:

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (a_1 - a_2) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}) = \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. \end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что последовательность s_{2m} — монотонно возрастающая: $0 \leq s_{2m} \leq s_{2m+2}$, а из второго — ее ограниченность сверху: $s_{2m} \leq a_1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = \bar{s}$, $-\infty < \bar{s} < +\infty$.

Нечетные частные суммы запишем также двумя способами:

$$\begin{aligned}s_{2m+1} &= a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2m} - a_{2m+1}) = \\&= (a_1 - a_2) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}) + a_{2m+1}.\end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что последовательность s_{2m+1} — монотонно убывающая: $s_{2m-1} \geq s_{2m+1}$, а из второго — ее ограниченность снизу: $s_{2m-1} \geq 0 \forall m \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \underline{s}$, $-\infty < \underline{s} < +\infty$.

Поскольку $s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, то пределы \bar{s}, \underline{s} совпадают, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = s = \bar{s} = \underline{s}$.

Из неравенств $s_{2m} \leq s \leq s_{2m+1}$ следует

$$|s_{2m} - s| \leq s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1}, \quad |s_{2m-1} - s| \leq s_{2m-1} - s_{2m} = a_{2m}.$$

Отсюда вытекает требуемое неравенство $|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k| \leq a_{n+1}$. \diamond

13.7. Признаки Дирихле и Абеля

Лемма 13.3

Пусть a_1, \dots, a_p — монотонная, b_1, \dots, b_p — произвольная совокупности чисел, $s = a_1 b_1 + \dots + a_p b_p$, $p \in \mathbb{N}$, $B_k = b_1 + \dots + b_k$, $|B_k| \leq M - \text{const } \forall k = 1, \dots, p$. Тогда $|s| \leq M(|a_1| + 2|a_p|)$.

Доказательство для возрастающей совокупности чисел a_i :

$$\begin{aligned}s &= a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_p (B_p - B_{p-1}) = \\&= (a_1 - a_2) B_1 + \dots + (a_{p-1} - a_p) B_{p-1} + a_p B_p, \\|s| &\leq |a_1 - a_2| |B_1| + \dots + |a_{p-1} - a_p| |B_{p-1}| + |a_p| |B_p| \leq \\&\leq M(|a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots + a_p - a_{p-1}| + |a_p|) \leq M(|a_1| + 2|a_p|). \diamond\end{aligned}$$

Признак Дирихле

Если:

- 1) последовательность a_m является монотонной и бесконечно малой;
- 2) частные суммы B_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, т. е. $|B_n| \leq M - \text{const } \forall n \in \mathbb{N}$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Поскольку $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon. \quad (13.6)$$

Из второго условия признака Дирихле имеем $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} b_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{n+p} b_i - \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq 2M. \quad (13.7)$$

Используя лемму 13.3 и неравенства (13.6)–(13.7), получаем

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i \right| \leq 2M(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq 6M\epsilon \quad \forall n \geq \delta(\epsilon), \forall p \in \mathbb{N}.$$

На основании критерия Коши (п. 13.5) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. \triangleleft

Признак Абеля

Если:
 1) последовательность a_n является монотонной и ограниченной;
 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится,
 то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также является сходящимся.

Доказательство. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то согласно критерию Коши сходимости ряда (п. 13.5)

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall n \geq \delta(\epsilon), \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} b_i \right| \leq \epsilon. \quad (13.8)$$

Пусть $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тогда используя лемму 13.3 и неравенство (13.8), имеем

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i \right| \leq \epsilon(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq 3M\epsilon \quad \forall n \geq \delta(\epsilon), \forall p \in \mathbb{N}.$$

На основании критерия Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. \triangleleft

13.8. Действия над числовыми рядами

1. Линейная комбинация рядов

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ также является сходящимся и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (13.9)$$

Действительно, $\sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k$. Переходя к пределу в последнем соотношении, приходим к равенству (13.9).

2. Группировка членов ряда

В ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сгруппируем слагаемые, объединив без изменения порядка следования по несколько (конечное число) членов ряда. Получим новый ряд, последовательность частных сумм которого является подпоследовательностью частных сумм исходного ряда. Поэтому, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и имеет ту же сумму преобразованный ряд, полученный группировкой членов ряда.

Раскрытие скобок в общем случае недопустимо. Например, ряд $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$ сходится, а ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расходится. Однако в следующих двух частных случаях раскрытие скобок возможно. Во-первых, если после раскрытия скобок получается сходящийся ряд. Во-вторых, если в каждой скобке все слагаемые имеют один и тот же знак (доказать).

3. Перестановка членов ряда

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть $b_k = 1/2(|a_k| + a_k)$, $c_k = 1/2(|a_k| - a_k)$. Тогда $a_k = b_k - c_k$, $|a_k| = b_k + c_k$, $b_k \geq 0$, $c_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Лемма 13.4

|| Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Доказательство. Необходимость. $|a_k| \geq b_k \geq 0$, $|a_k| \geq c_k \geq 0$. По признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходятся.

Достаточность. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, как разность сходящихся рядов. \triangleleft

Следствие 13.1

|| Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ являются расходящимися.

Доказательство. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходятся, то согласно лемме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Если один из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, а другой расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет бесконечную сумму и, следовательно, расходится. Таким образом, условная сходимость возможна лишь при одновременной расходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. \triangleleft

Последовательность (m_n) называют перестановкой последовательности натуральных чисел (n) , если каждое натуральное число встречается в (m_n) и притом только один раз. Если (m_n) — перестановка (n) , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}$ называют перестановкой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема о перестановке ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка является сходящимся рядом с той же суммой.

Доказательство. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительный, то $\sum_{k=1}^n a_{m_k} \leq \sum_{k=1}^Q a_k$, где $Q = \max\{m_1, \dots, m_n\}$, и поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

т. е. перестановка не увеличивает сумму ряда. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ в свою очередь является перестановкой $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то обе суммы совпадают.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ знакопеременный, то представив его в виде $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ и воспользовавшись первой частью доказательства, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{m_n} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{m_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n}. \triangleleft$$

4. Произведение рядов

Возьмем два ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Построим последовательность $c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots, c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}, \dots$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ называют произведением рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Теорема о произведении рядов

Если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ также сходится абсолютно и

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Доказательство. Пусть

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|, T = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|, A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^n |c_k| = \sum_{k=0}^n \left| \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k |a_i| |b_{k-i}| \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^n |b_k| \right) \leq ST,$$

т. е. частные суммы ряда $\sum_{k=0}^n |c_k|$ ограничены, следовательно, по критерию сходимости положительных рядов этот ряд сходится. Из неравенства $(\sum_{k=0}^n |a_k|)(\sum_{k=0}^n |b_k|) \leq ST$ также вытекает, что ряд

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 + \dots \quad (13.10)$$

является абсолютно сходящимся. Воспользовавшись теоремой о перестановке членов ряда, представим ряд (13.10) в виде

$$\begin{aligned} & a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 + \\ & + a_0b_3 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + a_3b_0 + \dots . \end{aligned}$$

Если обозначить через L_n частные суммы последнего ряда, то $L_{n^2} = (\sum_{k=0}^n a_k)(\sum_{k=0}^n b_k)$, следовательно, $L_{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$, но тогда и $L_n \rightarrow AB$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ получается из (13.10) группировкой членов, поэтому $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$. \triangleleft

13.9. Двойной ряд

Если каждой паре натуральных чисел n, m поставлено в соответствие некоторое вещественное число a_{nm} , то говорят, что задана двойная последовательность (a_{nm}) .

Число A называют пределом двойной последовательности, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n, m \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |a_{nm} - A| \leq \varepsilon,$$

пишут

$$A = \lim_{n, m \rightarrow \infty} a_{nm}.$$

Двойную последовательность, имеющую предел $A \in \mathbb{R}$, называют сходящейся. Наряду с (a_{nm}) рассмотрим последовательности (b_m) , (c_n) , где $b_m = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}$, $c_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm}$. Пределы $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm})$ называют повторными пределами двойной последовательности.

Теорема о двойной последовательности

Если двойная последовательность (a_{nm}) сходится и при каждом $m \in \mathbb{N}$ существует предел $b_m = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}$, то

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} a_{nm} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}).$$

Доказательство. Пусть $A = \lim_{n,m \rightarrow \infty} a_{nm}$. Для любого $\varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n, m \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |a_{nm} - A| \leq \varepsilon$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в последнем неравенстве, получим $|b_m - A| \leq \varepsilon$. Отсюда имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = A$. \triangleleft

Двойную последовательность (a_{nm}) называют монотонно возрастающей, если $\forall n, m \in \mathbb{N}, \forall i \geq n, \forall j \geq m$ выполняется неравенство $a_{nm} \leq a_{ij}$.

Теорема о возрастающей ограниченной двойной последовательности

||| Если монотонно возрастающая двойная последовательность ограничена, т. е. $|a_{nm}| \leq M - \text{const } \forall n, m \in \mathbb{N}$, то она сходится.

Доказательство. Пусть $A = \sup_{n,m \in N} \{a_{nm}\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют номера $n(\varepsilon), m(\varepsilon)$ такие, что $a_{n(\varepsilon)m(\varepsilon)} > A - \varepsilon$. Поскольку последовательность (a_{nm}) монотонно возрастающая, то $\forall i, j \geq \max\{n(\varepsilon), m(\varepsilon)\} = \delta(\varepsilon) \Rightarrow A - \varepsilon < a_{ij} \leq A$. Отсюда $|a_{ij} - A| \leq \varepsilon \quad \forall i, j \geq \delta(\varepsilon)$, т. е. $\lim_{i,j \rightarrow \infty} a_{ij} = A$. \triangleleft

Выражение вида $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ называют двойным рядом. Частные суммы этого ряда $s_{nm} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ki}$ образуют двойную последовательность. Если существует предел частных сумм $\lim_{n,m \rightarrow \infty} s_{nm} = A$, то двойной ряд называют сходящимся, а число A его суммой. Поскольку последовательность частных сумм положительного двойного ряда $(a_{nm} \geq 0)$ — монотонно возрастающая, то положительный двойной ряд, для которого последовательность частных сумм ограничена — сходящийся.

Ряд $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|$. Абсолютно сходящийся двойной ряд является сходящимся (доказать).

Из теоремы о двойной последовательности сразу вытекает следующее утверждение.

Теорема о двойном ряде

||| Если двойной ряд $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ сходится и при каждом m сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$, то

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \right).$$

13.10. Бесконечное произведение

Рассмотрим последовательность $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, $p_i \in \mathbb{R}$. Выражение $p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$ называют бесконечным произведением, а последовательность $P_n = \prod_{k=1}^n p_k$ — последовательностью его частных произведений. Если существует ненулевой предел $a \neq 0$ последовательности (P_n) , то бесконечное произведение называют сходящимся. Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ либо не существует, либо равен бесконечности, то бесконечное произведение называют расходящимся. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$, то бесконечное произведение называют расходящимся к нулю.

Свойства бесконечных произведений

1. Необходимое условие сходимости. Если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$.

Доказательство. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{A}{A} = 1$. \triangleleft

2. Для сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \ln p_k$. Тогда $P_n = e^{S_n}$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = e^S$. Обратно, если $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = A$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln A$. \triangleleft

3. Запишем p_n в виде $p_n = 1 + \alpha_n$. Если $\alpha_n > 0$ или $-1 < \alpha_n < 0$, то для сходимости бесконечного произведения необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Доказательство. Поскольку $\ln(1 + \alpha_n) \underset{\alpha_n \rightarrow 0}{\sim} \alpha_n$, то по предельному признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходятся или расходятся одновременно. Теперь требуемое утверждение вытекает из свойства 2. \triangleleft

4. Бесконечное произведение называют абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$. Для абсолютной сходимости бесконечного произведения необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Пусть (m_n) — перестановка последовательности (n) . Если произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка $\prod_{n=1}^{\infty} p_{m_n}$ сходится и $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty} p_{m_n}$ (доказать).

ГЛАВА 14

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

14.1. Поточечная и равномерная сходимости функциональной последовательности

Рассмотрим последовательность скалярных функций $(a_n(x))$, заданных на одном и том же множестве E . Предположим, что при каждом фиксированном $x \in E$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x)$. Функцию

$$a(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x), \quad x \in E,$$

называют предельной для последовательности $(a_n(x))$. Соотношение $a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x), x \in E$, с помощью « ε - δ » записывается следующим образом:

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \delta(\varepsilon, x) \Rightarrow |a_n(x) - a(x)| \leq \varepsilon. \quad (14.1)$$

Последовательность, удовлетворяющую условию (14.1), называют поточечно сходящейся на E к предельной функции $a(x)$. Если последовательность $(a_n(x))$ удовлетворяет более сильному, чем (14.1) условию

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \delta(\varepsilon), \forall x \in E \Rightarrow |a_n(x) - a(x)| \leq \varepsilon, \quad (14.2)$$

то ее называют равномерно сходящейся на E и используют обозначение

$$a_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} a(x).$$

При равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$, пригодное сразу для всех $x \in E$, которое обеспечивает выполнение неравенства $|a_n(x) - a(x)| \leq \varepsilon$ при $n \geq \delta(\varepsilon)$.

Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности

Последовательность $a_n(x)$ сходится равномерно на E к функции $a(x)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |a_n(x) - a(x)| = 0$.

Доказательство. Необходимость.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \delta(\varepsilon), \forall x \in E \Rightarrow |a_n(x) - a(x)| \leq \varepsilon.$$

Отсюда $\sup_{x \in E} |a_n(x) - a(x)| \leq \varepsilon$, что означает $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |a_n(x) - a(x)| = 0$.

Достаточность.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in E} |a_n(x) - a(x)| \leq \varepsilon.$$

Отсюда $\forall x \in E \quad |a_n(x) - a(x)| \leq \varepsilon$, т. е. $a_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} a(x)$. \triangleleft

Пример 14.1. Последовательность $a_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$, сходится по точечно к функции $a(x) \equiv 0$ на промежутке $[0, 1]$, но по критерию равномерной сходимости она не является равномерно сходящейся. Действительно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |a_n(x) - a(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} x^n = [\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$.

Пример 14.2. Рассмотрим последовательность $a_n(x) = x^n - x^{n+1}, x \in [0, 1]$. Функция $a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - x^{n+1}) = 0$ является предельной для этой последовательности. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} (x^n - x^{n+1}) = [(x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0, x = 0, x = \frac{n}{n+1}, \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^n - x^{n+1}) = 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = 0$, то по критерию равномерной сходимости последовательность сходится равномерно на промежутке $[0, 1]$ к функции $a(x) \equiv 0$.

Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

Для равномерной сходимости последовательности $(a_n(x))$ на E необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in E \Rightarrow \\ \Rightarrow |a_n(x) - a_{n+p}(x)| \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Доказательство. Необходимость следует из неравенства

$$|a_n(x) - a_{n+p}(x)| \leq |a_{n+p}(x) - a(x)| + |a_n(x) - a(x)|.$$

Достаточность. Из условия (14.3) и критерия Коши сходимости числовых последовательностей вытекает поточечная сходимость последовательности $(a_n(x))$. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = a(x), \quad x \in E.$$

При каждом фиксированном $n \geq \delta(\varepsilon)$ и при каждом фиксированном $x \in E$ перейдем к пределу при $p \rightarrow \infty$ в неравенстве $a_{n+p}(x) - \varepsilon \leq a_n(x) \leq a_{n+p}(x) + \varepsilon$, получим $a(x) - \varepsilon \leq a_n(x) \leq a(x) + \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = a(x)$. \square

14.2. Равномерная сходимость функционального ряда

Ряды, члены которых являются функциями, относят к функциональным. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $a_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, называют **равномерно сходящимся** на E , если последовательность частных сумм $s_n(x)$ этого ряда сходится равномерно на E , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \delta(\varepsilon), \forall x \in E \Rightarrow |s_n(x) - s(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Следующие два критерия непосредственно вытекают из критерия Коши и критерия равномерной сходимости функциональной последовательности (п. 14.1).

Критерий равномерной сходимости функционального ряда

Функциональный ряд сходится равномерно на E тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| = 0.$$

Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда

Функциональный ряд сходится равномерно на E тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in E \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Пример 14.3. Используя критерий равномерной сходимости, исследуем на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right), -1 < x < 1.$$

Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (-1,1)} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (-1,1)} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$. По критерию равномерной сходимости функциональный ряд сходится равномерно на интервале $(-1, 1)$.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называют мажорантой на E для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, если

$$|a_n(x)| \leq b_n \quad \forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (14.4)$$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

|| *Если функциональный ряд имеет сходящуюся мажоранту на E , то он сходится равномерно на E .*

Доказательство. По критерию Коши сходимости числового ряда имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in E \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| \leq \varepsilon.$$

Отсюда на основании неравенства (14.4) имеем

$$\forall n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in E \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| \leq \varepsilon.$$

По критерию Коши равномерной сходимости ФР, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на E . ◁

Пример 14.4. Поскольку $\left| \frac{\sin x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, то функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$$

сходится равномерно на \mathbb{R} по признаку Вейерштрасса.

14.3. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Признак Дирихле равномерной сходимости ФР

Пусть:

- 1) $a_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} 0$;
- 2) при каждом фиксированном $x \in E$ последовательность $(a_n(x))$ монотонна;
- 3) частные суммы $B_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничены, т. е. $|B_n(x)| \leq M - \text{const}$ $\forall x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E .

Доказательство. Поскольку $a_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \delta(\varepsilon), \forall x \in E \Rightarrow |a_n(x)| \leq \varepsilon. \quad (14.5)$$

Из ограниченности частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ следует

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n+p} b_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| \leq 2M \quad \forall x \in E, \quad \forall n, p \in \mathbb{N}. \quad (14.6)$$

Используя лемму 13.3 и неравенства (14.5), (14.6), имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2M(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \leq 6M\varepsilon \quad \forall n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in E$$

На основании критерия Коши (п. 14.2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E . \triangleleft

Признак Абеля равномерной сходимости ФР

Пусть:

- 1) последовательность $(a_n(x))$ ограничена, т. е. $|a_n(x)| \leq M - \text{const}$ $\forall x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- 2) при каждом фиксированном $x \in E$ последовательность $(a_n(x))$ монотонна;
- 3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на E .

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ также сходится равномерно на E .

Доказательство. Согласно критерию Коши равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \delta(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in E \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Отсюда, используя лемму 13.3 и первое условие признака Абеля, получаем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n(x)b_k(x) \right| \leq \varepsilon(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \leq 3M\varepsilon.$$

На основании критерия Коши (п. 14.2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E . \triangleleft

Пример 14.5. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно по $x \in [1, 2]$. Проверим, что для ряда выполняются условия признака Дирихле. Частные суммы $\sum_{k=1}^n \sin kx$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ ограничены:

$$|\sin x + \dots + \sin nx| = \left| \frac{\sin(nx/2) \sin((n+1)x/2)}{\sin x/2} \right| \leq \frac{1}{\sin 1} \quad \forall x \in [1, 2], n \in \mathbb{N}.$$

Так как члены последовательности $(1/n)$ не зависят от x , то для проверки первых двух условий признака Дирихле достаточно убедиться, что последовательность $(1/n)$ является монотонной и бесконечно малой: $1/n > 1/(n+1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. По признаку Дирихле ряд сходится равномерно на отрезке $[1, 2]$.

14.4. Непрерывность суммы функционального ряда

Конечная сумма непрерывных на отрезке функций является непрерывной функцией (п. 2.9). Для рядов, т. е. для бесконечной суммы непрерывных функций, это утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 14.6. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$, $x \in [0, 1]$. Частные суммы этого ряда можно представить в виде $s_n(x) = \sum_{k=1}^n (x^k - x^{k+1}) = x - x^{n+1}$. Отсюда следует, что сумма ряда равна

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - x^{n+1}) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Функции $x^n - x^{n+1}$ непрерывны на отрезке $[0, 1]$, но сумма ряда $s(x)$ — функция, разрывная в точке $x = 1$.

Из следующей теоремы следует, что сумма равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами — функция непрерывная.

Теорема Стокса — Зайделя

Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$ и ряд сходится равномерно на $[c, d]$, то сумма ряда непрерывна на $[c, d]$.

Доказательство. Пусть $s(x)$ — сумма ряда и пусть $x_0, x_0 + \Delta x \in [c, d]$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку ряд сходится равномерно, то

$$\exists v(\varepsilon) > 0, \forall n \geq v(\varepsilon), \forall x \in [c, d] \Rightarrow |s_n(x) - s(x)| \leq \varepsilon. \quad (14.7)$$

Зафиксируем номер $\bar{n} \geq v(\varepsilon)$. Оценим приращение функции $s(x)$

$$\begin{aligned} |s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)| &\leq |s(x_0 + \Delta x) - s_{\bar{n}}(x_0 + \Delta x)| + \\ &+ |s_{\bar{n}}(x_0 + \Delta x) - s_{\bar{n}}(x_0)| + |s_{\bar{n}}(x_0) - s(x_0)|. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Функция $s_{\bar{n}}(x)$ непрерывна в точке x_0 , поэтому

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \Delta x : |\Delta x| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |s_{\bar{n}}(x_0 + \Delta x) - s_{\bar{n}}(x_0)| \leq \varepsilon. \quad (14.9)$$

Из неравенств (14.7)–(14.9) следует

$$|s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)| \leq 3\varepsilon \quad \forall \Delta x : |\Delta x| \leq \delta(\varepsilon),$$

что обеспечивает непрерывность функции $s(x)$ в точке x_0 . \triangleleft

14.5. Почленное интегрирование функционального ряда

Теорема о почленном интегрировании ФР

Равномерно сходящийся на промежутке $|c, d|$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ с непрерывными на $|c, d|$ членами можно почленно интегрировать на любом отрезке $[\alpha, \beta] \in |c, d|$, т. е.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} a_n(x) dx \right).$$

Доказательство. На основании теоремы Стокса — Зайделя сумма ряда $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ непрерывна и тем более интегрируема на любом отрезке

$[\alpha, \beta] \in |c, d|$. Пусть A_n частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n(x) dx$. Требуется доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $|c, d|$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \delta(\varepsilon), \forall x \in |c, d| \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall n \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \right) dx - \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=1}^n a_k(x) \right) dx \right| \leq \varepsilon(\beta - \alpha).$$

Оценим

$$\begin{aligned} \left| A_n - \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} a_k(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx \right| = \\ &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \right) dx - \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=1}^n a_k(x) \right) dx \right| \leq \varepsilon(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx$. \triangleleft

14.6. Почленное дифференцирование функционального ряда

Теорема о почленном дифференцировании ФР

Если:

- 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится поточечно на отрезке $[c, d]$;
- 2) члены ряда $a_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$;
- 3) ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ сходится равномерно на $[c, d]$,
то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ можно почленно дифференцировать,
т. е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) \quad \forall x \in [c, d].$$

Доказательство. На основании теоремы о почленном интегрировании функционального ряда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ можно почленно интегрировать на любом отрезке $[c, x] \subset [c, d]$, т. е.

$$\begin{aligned} \int_c^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) \right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x a'_n(x) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(c)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(c). \end{aligned} \quad (14.10)$$

Функция $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ по теореме Стокса — Зайделя непрерывна на отрезке $[c, d]$, следовательно, используя теорему Барроу (п. 6.6), из равенства (14.10) имеем

$$\left(\int_c^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) \right) dx \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)' + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(c) \right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)'$$

14.7. Локально равномерная сходимость

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ называют локально равномерно сходящимся на промежутке $|c, d|$, если он сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset |c, d|$.

Следующий пример показывает, что локально равномерно сходящийся ряд не обязательно является равномерно сходящимся.

Пример 14.7. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, +1).$$

Для произвольного отрезка $[\alpha, \beta] \subset (-1, +1)$ имеем $|x^n| \leq p^n \quad \forall x \in [\alpha, \beta], \forall n \in \mathbb{N}$, где $p = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$, т. е. ряд сходится локально равномерно на интервале $(-1, 1)$. В то же время

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (-1, +1)} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (-1, +1)} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \infty.$$

По критерию равномерной сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится неравномерно на $(-1, 1)$.

Следствие из теоремы Стокса — Зайделя

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ непрерывны на промежутке $|c, d|$ и ряд сходится локально равномерно на $|c, d|$, то сумма ряда непрерывна на $|c, d|$.

Доказательство для случая, когда промежуток $|c, d|$ является интервалом (c, d) . Возьмем произвольную точку $x_0 \in (c, d)$. Существует отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, принадлежащий (c, d) . По теореме Стокса — Зайделя сумма ряда непрерывна на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, в частности, непрерывна в точке x_0 . Поскольку x_0 произвольная точка из (c, d) , то сумма ряда непрерывна на (c, d) . \triangleleft

Следствие из теоремы о почленном дифференцировании ФР

Если:

- 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится поточечно на $|c, d|$;
- 2) члены ряда $a_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $|c, d|$;
- 3) ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ сходится локально равномерно на $|c, d|$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ можно почленно дифференцировать на $|c, d|$ (доказать).

Свойства функциональных последовательностей

Функциональную последовательность называют локально равномерно сходящейся на $|c, d|$, если она сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset |c, d|$.

1. Если члены функциональной последовательности $(a_n(x))$ непрерывны на промежутке $|c, d|$ и последовательность сходится локально равномерно на $|c, d|$ к функции $a(x)$, то $a(x)$ непрерывна на $|c, d|$.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_{n-1}(x))$, $a_0(x) \equiv 0$. Частные суммы этого ряда

$$s_n(x) = (a_1(x) - a_0(x)) + (a_2(x) - a_1(x)) + \dots + (a_n(x) - a_{n-1}(x)) = a_n(x)$$

совпадают с членами последовательности $(a_n(x))$. Поэтому сумма ряда $s(x)$ совпадает с пределом $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = a(x)$. По следствию из теоремы Стокса — Зайделя сумма ряда $s(x)$ непрерывна на $|c, d|$, следовательно, непрерывна и предельная функция $a(x)$. \triangleleft

2. Пусть:

- 1) функциональная последовательность $(a_n(x))$ сходится поточечно на промежутке $|c, d|$;
- 2) члены $a_n(x)$ последовательности непрерывно дифференцируемы на $|c, d|$;
- 3) последовательность из производных $(a'_n(x))$ сходится локально равномерно на $|c, d|$.

Тогда функциональную последовательность $(a_n(x))$ можно почленно дифференцировать, т. е.

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n(x) \quad \forall x \in |c, d|.$$

Доказательство. Так как частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_{n-1}(x))$, $a_0(x) \equiv 0$, совпадают с членами последовательности $(a_n(x))$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_{n-1}(x))$ удовлетворяет всем условиям следствия из теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда, то

$$\begin{aligned} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) \right)' &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_{n-1}(x)) \right)' = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n(x) - a'_{n-1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n(x) \quad \forall x \in |c, d|. \end{aligned}$$

3. Если члены функциональной последовательности $(a_n(x))$ непрерывны на промежутке $|c, d|$ и последовательность сходится локально равномерно на $|c, d|$, то для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset |c, d|$ имеет место равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n(x) dx \quad (\text{доказать}).$$

ГЛАВА 15

СТЕПЕННОЙ РЯД

15.1. Радиус сходимости степенного ряда

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R},$$

называют степенным рядом.

С помощью замены $x - x_0$ на x степенной ряд можно привести к виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. В таком виде и будем рассматривать степенные ряды.

Лемма Абеля

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x = \xi \neq 0$, то он сходится локально равномерно и абсолютно на интервале $(-\|\xi\|, \|\xi\|)$.

Доказательство. Из необходимого условия сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ следует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$. Поэтому последовательность $(a_n \xi^n)$ ограничена (п. 1.5) $|a_n \xi^n| \leq M - \text{const}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольный отрезок $[\alpha, \beta]$, принадлежащий интервалу $(-\|\xi\|, \|\xi\|)$. Для любого $x \in [\alpha, \beta]$ имеем

$$|a_n x^n| = |a_n \xi^n| \left| \frac{x}{\xi} \right|^n \leq M \left| \frac{p}{\xi} \right|^n = M q^n,$$

где $p = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, $q = p/\|\xi\| < 1$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ имеет сходящуюся числовую мажоранту $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$. На основании признака Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$. Абсолютная сходимость степенного ряда на $[\alpha, \beta]$ следует из признака сравнения (п. 13.1). \triangleleft

Пусть E — множество сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, т. е. множество тех значений $x = \xi$, при которых числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ является

сходящимся. Множество сходимости E любого степенного ряда непусто, так как содержит точку $x = 0$. Величину

$$R = \sup_{\xi \in E} \{|\xi|\}, \quad 0 \leq R \leq +\infty,$$

называют радиусом сходимости степенного ряда.

Из леммы Абеля следует, что степенной ряд сходится локально равномерно и абсолютно на интервале $(-R, R)$ и расходится при $|x| > R$. В точках $x = -R, x = R$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример 15.1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n}} = |x|.$$

По признаку Коши он сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Если $x = 1$, то ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n$, и он расходится, если $x = -1$, то вид $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/n$, и он сходится по признаку Лейбница. Множество сходимости ряда $E = [-1, 1)$.

Вычисление радиуса сходимости

1) Формула Коши. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q, \quad 0 \leq q \leq \infty,$$

то радиус сходимости R ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен $1/q$ ($R = 0$ при $q = \infty$, $R = \infty$ при $q = 0$).

Доказательство. Применим признак Коши к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = q|x|.$$

Пусть сначала $0 < q < \infty$. Если $q|x| < 1$, т. е. $|x| < 1/q$, то ряд сходится, если $q|x| > 1$, т. е. $|x| > 1/q$, то ряд расходится. Следовательно, $R = 1/q$.

Если же $q = 0$, то ряд сходится при всех x и $R = \infty$, если же $q = \infty$, то ряд расходится при всех $x \neq 0$ и $R = 0$. \triangleleft

2) Формула Даламбера. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = p$, $0 \leq p \leq \infty$, то $R = p$.

Доказательство. Пусть сначала $0 < p < \infty$. Применим признак Даламбера к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{1}{p} |x|.$$

Если $|x|/p < 1$, т. е. $|x| < p$, то ряд сходится, если $|x|/p > 1$, т. е. $|x| > p$, то ряд расходится. Следовательно, $R = p$.

Если же $p = 0$, то ряд расходится при всех $x \neq 0$ и $R = 0$, если же $p = \infty$, то ряд сходится при всех x и $R = \infty$. \triangleleft

3) Формула Коши — Адамара

Лемма 15.1

Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = p < \infty, \quad (15.1)$$

то

a) $\forall d > p, \exists \nu > 0, \forall n \geq \nu \Rightarrow b_n \leq d$;

б) $\forall r < p$, существует подпоследовательность (b_{n_i}) такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} b_{n_i} > r$.

Доказательство. а) Предположим противное:

$$\exists d^* > p, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n_m \geq m \Rightarrow b_{n_m} > d^*.$$

Поскольку $p < \infty$, то последовательность (b_{n_m}) ограничена сверху. На основании принципа выбора существует подпоследовательность $(b_{n_{m_k}})$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_{m_k}} \geq d^* > p$, что противоречит (15.1).

б) Существование требуемой подпоследовательности вытекает из определений точной верхней грани и верхнего предела. \triangleleft

Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, $0 \leq q \leq \infty$, то радиус сходимости степенного ряда может быть найден по следующей формуле Коши — Адамара:

$$R = \begin{cases} 1/q, & 0 < q < \infty, \\ 0, & q = \infty, \\ +\infty, & q = 0. \end{cases}$$

Доказательство для случая $0 < q < \infty$. Пусть $|x| < 1/q$. Возьмем r такое, что $|x| < 1/r < 1/q$, т. е. $q < r, r|x| < 1$. По лемме 15.1

$$\exists \nu > 0, \forall n \geq \nu \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq r \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}|x| \leq r|x| \Rightarrow |a_n||x|^n \leq r^n|x|^n.$$

Так как геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (r|x|)^n$ сходится, то остаток ряда $\sum_{n=\nu}^{\infty} |a_n x^n|$, $n \geq \nu$, сходится по признаку сравнения. Следовательно, $R \geq 1/q$. Если $|x| > 1/q$, то возьмем r такое, что $|x| > 1/r > 1/q$, т. е. $r < q, r|x| > 1$. По лемме 15.1 существует подпоследовательность $|a_{n_m}|^{1/n_m}$ такая, что $|a_{n_m}|^{1/n_m} > r \quad \forall m$. Отсюда $|a_{n_m}|^{1/n_m}|x| > r|x| \Rightarrow |a_{n_m}||x|^{n_m} > 1$, т. е. последовательность $|a_n x^n|$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ расходится. Таким образом, $R = 1/q$. \triangleleft

15.2. Свойства степенного ряда

1) Линейная комбинация и произведение степенных рядов

Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, R_1 и R_2 — радиусы сходимости соответственно степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, то на интервале $] -Q, Q[$, где $Q = \min\{R_1, R_2\}$, оба ряда сходятся локально равномерно и абсолютно и

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n x^n + \beta b_n x^n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \forall x, |x| < Q, \quad (15.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \quad \forall x, |x| < Q. \quad (15.3)$$

Локально равномерная и абсолютная сходимость степенных рядов на интервале $] -Q, Q[$ следует из леммы Абеля, а формулы (15.2) и (15.3) вытекают из соответствующих свойств числовых рядов (п. 13.8).

2) Непрерывность суммы степенного ряда

Сумма $s(x)$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрерывна на множестве сходимости.

Доказательство. Если множество сходимости ряда — интервал $(-R, R)$, то непрерывность суммы $s(x)$ следует из локально равномерной сходимости ряда на интервале $(-R, R)$ и из следствия из теоремы Стокса — Зайделя (п. 14.7).

Пусть степенной ряд сходится на конце интервала сходимости, например, в точке $x = R$. Покажем, что тогда ряд сходится равномерно на отрезке $[0, R]$. Воспользуемся признаком Абеля (п. 14.3). Представим ряд в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R} \right)^n.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится по условию, а последовательность $((x/R)^n)$ монотонна при каждом фиксированном $x \in [0, R]$ и ограничена $|((x/R)^n)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, R]$. По теореме Стокса — Зайделя (п. 14.4) функция $s(x)$ непрерывна на $[0, R]$, в частности, непрерывна слева в точке $x = R$. Случай, когда степенной ряд сходится в точке $x = -R$ рассматривается аналогичным образом. \triangleleft

3) Почленное интегрирование степенного ряда

Для любого x из промежутка сходимости степенного ряда

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad (\text{доказать}). \quad (15.4)$$

15.3. Дифференцирование степенного ряда

Лемма 15.2

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| = p$, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n |a_n|^{\beta_n} = p$.

Доказательство. Множество A частичных пределов последовательности $(|a_n|)$ совпадает с множеством B частичных пределов последовательности $(\alpha_n |a_n|^{\beta_n})$, поэтому $\sup\{A\} = \sup\{B\} \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n |a_n|^{\beta_n}$. \triangleleft

Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда

Пусть $R \neq 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $s(x)$ — его сумма, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$s^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad \forall x \in (-R, R).$$

Доказательство. Из формулы Коши — Адамара следует, что для каждого $r \in \mathbb{N}$ радиус сходимости R_r ряда

$$\sum_{n=r}^{\infty} n(n-1)\dots(n-r+1) a_n x^{n-r} \tag{15.5}$$

равен R . Действительно, используя лемму 15.2, имеем

$$\begin{aligned} R &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^{1/n})^{n/n-r} (n(n-1)\dots(n-r+1))^{1/n-r} = \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|a_n| n(n-1)\dots(n-r+1))^{1/n-r} = R_r. \end{aligned}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ сходится локально равномерно на интервале $(-R, R)$. По следствию из теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда имеем

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in (-R, R). \tag{15.6}$$

Применяя формулу (15.6) к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, получаем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right)' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \forall x \in (-R, R).$$

Аналогично,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad \forall x \in (-R, R), \quad k \in \mathbb{N}. \triangleleft$$

Ряд

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

называют рядом Тейлора для функции $f(x)$ в точке $x = c$.

Если $s(x)$ сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n, R \neq 0$, то из теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда следует $s(c) = a_0, s'(c) = 1!a_1, \dots, s^{(n)}(c) = n!a_n, \dots$, т. е. степенной ряд с не нулевым радиусом сходимости является рядом Тейлора для его суммы.

Критерий совпадения степенных рядов

Суммы двух степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ совпадают на некотором интервале $(-R, R)$ тогда и только тогда, когда $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Необходимость. Если $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, то $a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}, \quad b_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}$. Поэтому $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Обратное утверждение очевидно. \triangleleft

Вывод. Из свойств степенных рядов, установленных в п. 15.2, 15.3, вытекает следующее утверждение: на интервале сходимости образование линейной комбинации степенных рядов, перемножение, интегрирование, дифференцирование степенных рядов и их сравнение выполняются по правилам для многочленов.

15.4. Композиция степенных рядов

Любая натуральная степень степенного ряда с радиусом сходимости R является степенным рядом с тем же радиусом сходимости (п. 15.2)

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad s^2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k a_i a_{k-i} \right) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} t^k, \quad a_k^{(2)} = \sum_{i=0}^k a_i a_{k-i},$$

$$s^3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k a_i^{(2)} a_{k-i} \right) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(3)} t^k, \quad a_k^{(3)} = \sum_{i=0}^k a_i^{(2)} a_{k-i}, \dots,$$

$$s^m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k a_i^{(m-1)} a_{k-i} \right) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m)} t^k, \quad a_k^{(m)} = \sum_{i=0}^k a_i^{(m-1)} a_{k-i}.$$

Выражение $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)^n$ с помощью формальных преобразований можно записать следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} t^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n a_k^{(n)} \right) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k.$$

Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$, где $d_k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_k^{(n)}$, называют композицией степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ и $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$.

Теорема о разложении сложной функции в степенной ряд

Пусть функции $y = f(x)$ и $x = s(t)$ разложимы в степенные ряды

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad -\rho < x < \rho, \quad (15.7)$$

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad -R < t < R, \quad (15.8)$$

причем $|a_0| < \rho$. Тогда существует r , $0 < r < R$, такое, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$, являющийся композицией степенных рядов (15.7) и (15.8), сходится на интервале $(-r, r)$, и его сумма равна $f(s(t))$

$$f(s(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k \quad \forall t \in (-r, r).$$

Доказательство. Сумма ряда $\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n$ непрерывна на интервале $-R < t < R$, причем $\tau(0) = |a_0| < \rho$. Существует r , $0 < r < R$, такое, что $\tau(r) < \rho$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \tau^n(r)$ сходится. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \tau^n(r) = A$. Рассмотрим двойной ряд

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} |b_n| |a_k^{(n)}| |t|^k. \quad (15.9)$$

Частные суммы $s_{ij}(t) = \sum_{n=0}^i \sum_{k=0}^j |b_n| |a_k^{(n)}| |t|^k$ ряда (15.9) ограничены $|s_{ij}(t)| \leq A \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_0, \forall t, |t| < r$, следовательно, двойной ряд (15.9) при $|t| < r$ является сходящимся. Аналогичным образом показывается сходимость рядов $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| |a_k^{(n)}| \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(n)}| |t|^k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall t, |t| < r$. Но тогда сходится двойной ряд $\sum_{n,k=0}^{\infty} |b_n| |a_k^{(n)}| |t|^k$ так же, как и ряды $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \tau^n(r) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(n)}| |t|^k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall t, |t| < r$.

Используя теорему о двойном ряде (п. 13.9), имеем

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_n a_k^{(n)} t^k \right) = \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} b_n a_k^{(n)} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n a_k^{(n)} \right) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k \quad \forall t, -r < t < r. \end{aligned}$$

15.5. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды

Пусть функция $f(x)$ имеет производные любого порядка на интервале I и $x_0 \in I$. Функцию $f(x)$ на I можно представить по формуле Тейлора (п. 3.9) в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

Пусть I_1 — множество тех x из интервала I , при которых остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Тогда при каждом $x \in I_1$ частная сумма $s_n(x)$ ряда

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (15.10)$$

сходится к $f(x)$, т. е. функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора (15.10) на множестве I_1 . При $x_0 = 0$ ряд Тейлора часто называют рядом Маклорена. Найдем разложение основных элементарных функций в степенные ряды.

а) Возьмем разложение функции $y = e^x$ по формуле Тейлора

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Для остаточного члена $R_n(x)$ верна оценка

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max\{e^x, 1\}}{(n+1)!} |x|^{(n+1)}.$$

При каждом $x \in (-\infty, +\infty)$ имеем $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поэтому

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

б) Разложим функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ по формуле Тейлора

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}^*(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}^{**}(x).$$

Оценим $|R_{2n+2}^*(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$, $|R_{2n+1}^{**}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Отсюда видим, что при каждом $x \in (-\infty, +\infty)$ выполняется $R_{2n+2}^*(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $R_{2n+1}^{**}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

в) Разложим функцию $y = \ln(1+x)$ по формуле Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + R_n(x), \quad -1 < x < +\infty.$$

Запишем $R_n(x)$ в форме Коши

$$R_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Возьмем произвольную точку $x \in (-1, 1)$ и оценим

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \leq |x|^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta|x|)^{n+1}} \leq |x|^{n+1} \frac{(1-\theta|x|)^n}{(1-\theta|x|)^{n+1}} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$

Отсюда для $x \in (-1, 1)$ имеем $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Следовательно,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x < +1. \quad (15.11)$$

г) Разложим функцию $y = (1+x)^\mu$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Коши ($-1 < x < +\infty$)

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{n!} (1-\theta)^n \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\mu}} x^{n+1}.$$

Возьмем произвольную точку $x \in (-1, 1)$. Пусть $\mu \neq 0$. Существует натуральное число k такое, что $1/k \leq |\mu| < k$. Считая, что $n > k$, оценим

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \frac{|\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)|}{n!}(1-\theta)^n \frac{1}{(1-\theta|x|)^{n-\mu+1}}|x|^{n+1} \leq \\ &\leq \frac{|\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)|}{n!}(1-\theta|x|)^n \frac{1}{(1-\theta|x|)^{n-\mu+1}}|x|^{n+1} \leq \\ &\leq \frac{k(k+1)\cdots(k+n)}{n!} \frac{1}{(1-\theta|x|)^{-\mu+1}}|x|^{n+1} \leq \\ &\leq \begin{cases} (n+k)^{k+1}|x|^{n+1}(1+|x|)^{\mu-1}, & 1-\mu \leq 0, \\ \frac{(n+k)^{k+1}|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{1-\mu}}, & 1-\mu > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+k)^{k+1}|x|^{n+1} &= [|x| = \frac{1}{b}, b > 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+k)^{k+1}}{b^{n+1}}, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(y+k)^{k+1}}{b^{y+1}} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)(y+k)^k}{b^{y+1} \ln b} = \dots = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)k \cdots 1(y+k)^0}{b^{y+1} \ln^{k+1} b} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для $-1 < x < 1$ имеем

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^n}{n!} + \dots.$$

Лемма 15.3

Если функция $f(x)$ является суммой ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на интервале $(-R, R)$, ряд сходится в точке $x = R$ ($x = -R$), а функция $f(x)$ непрерывна справа (слева) в точке $x = R$ ($x = -R$), то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (15.12)$$

на промежутке $(-R, R]$ ($[-R, R)$).

Доказательство для промежутка $(-R, R]$. Пусть $s(x)$ — сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тогда $f(x) = s(x)$ для $x \in (-R, R)$. Функция $s(x)$ непрерывна на промежутке $(-R, R]$ (п. 15.2). Теперь имеем

$$f(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow R-0} s(x) = s(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n. \triangleleft$$

Применяя лемму 15.3 к разложению (15.11), видим, что равенство (15.11) справедливо при $x \in (-1, 1]$. В частности, из (15.11) при $x = 1$ имеем

$$1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \ln 2.$$

Пример 15.2. Найдем разложение в степенной ряд функции $y = \arctg x$. Так как $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$, $x \in (-1, 1)$, то отсюда для $x \in (-1, 1)$, используя третье свойство степенных рядов (п. 15.2), имеем

$$\arctg x = \int_0^x (\arctg t)' dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} (-1)^n. \quad (15.13)$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} (-1)^n$ сходится в точках $x = 1$, $x = -1$, а функция $y = \arctg x$ непрерывна в этих точках, по лемме 15.3 разложение (15.13) имеет место на отрезке $[-1, 1]$.

ГЛАВА 16

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

16.1. Несобственный интеграл первого типа

Рассмотрим скалярную функцию $y = f(x)$, заданную на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируемую по Риману на любом отрезке $[a, A]$, $A > a$.

Построим функцию

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx, \quad A \in [a, \infty).$$

Предел функции $\Phi(A)$ при $A \rightarrow \infty$ называют **несобственным интегралом первого типа** (НИ-1) от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow \infty} \Phi(A) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx.$$

Если предел $\lim_{A \rightarrow \infty} \Phi(A)$ конечен, то несобственный интеграл называют **сходящимся**, а функцию $f(x)$ — **интегрируемой** (в несобственном смысле) на $[a, +\infty)$. В противном случае, если предел $\lim_{A \rightarrow \infty} \Phi(A)$ либо не существует, либо равен ∞ , то интеграл называют **расходящимся**.

Если $f(x)$ при $x \geq a$ неотрицательная и непрерывная функция, то $\int_a^A f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью $0x$, прямыми $x = a$, $x = A$ и графиком функции $y = f(x)$ (п. 6.7). В случае сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ его значение естественно принять за площадь неограниченной фигуры, заключенной между осью $0x$, прямой $x = a$ и графиком функции $f(x)$ (рис. 16.1).

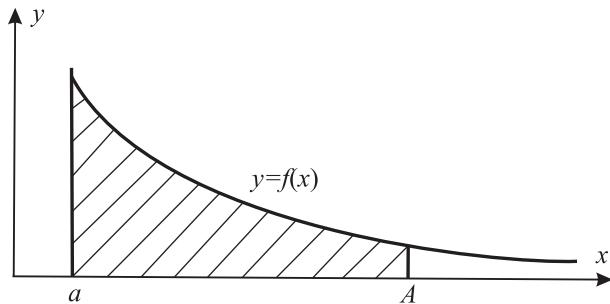


Рис. 16.1

Следующие свойства НИ-1 непосредственно вытекают из свойств интеграла Римана и свойств предела функции.

Свойства несобственных интегралов первого типа

1. Линейность. Если интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся, то

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Аддитивность. Интеграл $\int_b^{+\infty} f(x)dx$, $b > a$, называют остатком для $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Если несобственный интеграл сходится, то сходится любой его остаток. Обратно, если сходится какой-то остаток интеграла, то сходится и сам интеграл. При этом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$$

3. Монотонность. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, +\infty)$ и $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Отметим, что для несобственных интегралов утверждение, аналогичное необходимому условию сходимости числового ряда, не имеет места, т. е. из сходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ не следует, что $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

Пример 16.1. $f(x) = 1$, если $x \in [n - 1, n - 1 + 1/n^2)$ и $f(x) = 0$, если $x \in [n - 1 + 1/n^2, n]$, $n = 1, 2, \dots$, $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Ряд, а следовательно, и интеграл сходятся, но $f(x)$ не стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ (рис. 16.2).

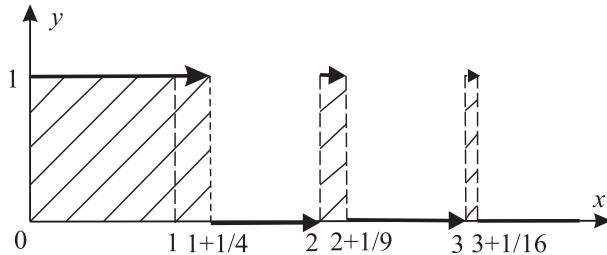


Рис. 16.2

Критерий сходимости НИ-1 от положительной функции

Для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $f(x) \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$, $A \in [a, +\infty)$, была ограниченной.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, то функция $\Phi(A)$, $A \geq a$, является монотонно возрастающей. Монотонно возрастающая функция имеет конечный предел при $A \rightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда она ограничена. \triangleleft

Признак сравнения для НИ-1

Если

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty), \quad (16.1)$$

то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доказательство. Пусть

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx, G(A) = \int_a^A g(x)dx.$$

Из неравенства (16.1) следует $0 \leq F(A) \leq G(A)$. Из ограниченности функции $G(A)$ следует ограниченность $F(A)$, а из неограниченности $F(A)$ следует неограниченность $G(A)$. Теперь справедливость признака вытекает из критерия сходимости НИ-1 от положительной функции. \triangleleft

Пределочный признак сравнения для НИ-1 ($f(x) > 0, g(x) > 0$)

1. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l, 0 < l < \infty$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.
2. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.
3. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, то из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доказательство. 1. Для $\varepsilon = l/2, \exists \delta(l/2) > 0, \forall x \geq \delta(l/2) \Rightarrow |f(x)/g(x) - l| \leq l/2 \Rightarrow l/2 \leq f(x)/g(x) \leq 3l/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow lg(x)/2 \leq f(x) \leq 3lg(x)/2. \quad (16.2)$$

Теперь требуемое утверждение следует из неравенств (16.2) и из признака сравнения для НИ-1.

Аналогично:

2. Для $\varepsilon = 1, \exists \delta(1) > 0, \forall x \geq \delta(1) \Rightarrow f(x)/g(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq g(x).$
3. Для $\varepsilon = 1, \exists \delta(1) > 0, \forall x \geq \delta(1) \Rightarrow f(x)/g(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq g(x).$ ◁

Степенной признак для НИ-1 ($f(x) \geq 0$)

1. Если $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{M}{x^\alpha}, M - \text{const}, 0 < M < \infty$, то при $\alpha > 1$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, при $\alpha \leq 1$ расходится.
2. Если $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \alpha > 1$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Доказательство. Поскольку интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$, то степенной признак следует из предельного признака сравнения для НИ-1. ◁

Критерий Коши для НИ-1

Для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A', A'' \in [a, +\infty) : A' \geq \delta(\varepsilon), A'' \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Согласно критерию Коши существования предела функции (п. 2.3), предел $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A', A'' \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |F(A') - F(A'')| \leq \varepsilon.$$

Отсюда и из соотношений

$$|F(A') - F(A'')| = \left| \int_a^{A'} f(x) dx - \int_a^{A''} f(x) dx \right| = \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

вытекает требуемое утверждение. \square

Лемма 16.1

||| Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ также является сходящимся.

Доказательство. Согласно критерию Коши для НИ-1,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A', A'' \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx \right| \leq \varepsilon.$$

Так как $\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx \right|$, то $\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| \leq \varepsilon$ для $A', A'' \geq \delta(\varepsilon)$.

По критерию Коши для НИ-1 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится. \square

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называют абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$. Из леммы 16.1 следует, что абсолютная сходимость интеграла влечет его сходимость. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называют условно сходящимся, если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, а $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ является сходящимся.

Пример 16.2. Покажем, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1-x+x^2} dx$ сходится абсолютно. Действительно, требуемое утверждение вытекает из неравенства $\left| \frac{\sin x}{1-x+x^2} \right| \leq \left| \frac{1}{1-x+x^2} \right| \quad \forall x \in [0, +\infty)$, признака сравнения для НИ-1 и сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x+x^2} dx$, который сходится по степенному признаку $\frac{1}{1-x+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

16.2. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственного интеграла первого типа

Обобщенная теорема о среднем для интеграла Римана

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке с концами a и b , функция $g(x)$ не меняет знак на этом отрезке, то существует точка $x = c$ на этом отрезке такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \quad (16.3)$$

Доказательство для случая $g(x) \geq 0$, $a \leq b$. Если $g(x) \equiv 0$, то равенство (16.3) имеет место с любой точкой $c \in [a, b]$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $g(x)$ отлична от нуля, хотя бы в одной точке, тогда $\int_a^b g(x)dx > 0$ (доказать). Пусть $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, $l = \min_{x \in [a, b]} f(x)$. Возьмем последовательность интегральных сумм

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f((\xi_k)_m)g((\xi_k)_m)(\Delta x_k)_m$$

с диаметрами $\delta_m \rightarrow 0$. Поскольку

$$l \sum_{k=1}^{n_m} g((\xi_k)_m)(\Delta x_k)_m \leq \sigma_m \leq M \sum_{k=1}^{n_m} g((\xi_k)_m)(\Delta x_k)_m,$$

то переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$l \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Отсюда

$$l \leq \left(\int_a^b g(x)dx \right)^{-1} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M.$$

По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции (п. 2.13) существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$f(c) = \left(\int_a^b g(x)dx \right)^{-1} \int_a^b f(x)g(x)dx. \triangleleft$$

Лемма 16.2

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a, b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = (F(b) - F(\xi))g(b) + (F(\xi) - F(a))g(a),$$

где $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Доказательство. Используя формулу интегрирования по частям и обобщенную теорему о среднем для интеграла Римана, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= [f(x)dx = dv, v = F(x), g(x) = u, g'(x)dx = du] = \\ &= F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi) \int_a^b g'(x)dx = \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)(g(b) - g(a)) = \\ &= (F(b) - F(\xi))g(b) + (F(\xi) - F(a))g(a), \end{aligned}$$

где ξ — некоторая точка из отрезка $[a, b]$. \triangleleft

Признак Дирихле для НИ-1

Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на промежутке $[a, \infty)$. Если:

- 1) функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ограничена на $[a, \infty)$, т. е. $|F(x)| \leq M - \text{const } \forall x \geq a$;
 - 2) $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$,
- то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Из первого условия признака Дирихле и из леммы 16.2 следует, что $\forall A', A'' \in [a, \infty)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| &= |(F(A'') - F(\xi))g(A'') + (F(\xi) - F(A'))g(A')| \leq \\ &\leq 2M(|g(A'')| + |g(A')|), \end{aligned} \tag{16.4}$$

где ξ — некоторая точка из отрезка с концами A', A'' . Поскольку $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$, то $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon$. Отсюда и из неравенства (16.4) вытекает

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| \leq 4M\varepsilon, \quad \text{если } A', A'' \geq \delta(\varepsilon).$$

Согласно критерию Коши для НИ-1, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится. \triangleleft

Признак Абеля для НИ-1

Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на промежутке $[a, +\infty)$. Если:

- 1) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;
 - 2) функция $g(x)$ ограничена на $[a, +\infty)$, т. е. $|g(x)| \leq M - \text{const} \quad \forall x \geq a$,
- то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.*

Доказательство. Из критерия Коши сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A_1, A_2 \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Отсюда для любых $A', A'' \geq \delta(\varepsilon)$, для любой точки ξ из отрезка с концами A', A'' , имеем

$$|F(\xi) - F(A')| \leq \varepsilon, \quad |F(A'') - F(\xi)| \leq \varepsilon. \quad (16.5)$$

Используя лемму 16.2 и неравенства (16.5), получаем оценку

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| \leq |(F(A'') - F(\xi))g(A'') + (F(\xi) - F(A'))g(A')| \leq 2M\varepsilon.$$

Согласно критерию Коши для НИ-1, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится. \triangleleft

16.3. Несобственный интеграл второго типа

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на промежутке $[a, b)$. Предположим, точка b такова, что на любом отрезке $[a, b - \eta]$, $0 < \eta < b - a$, функция интегрируема по Риману, но не интегрируема на отрезке $[a, b]$. Точку $x = b$ с такими свойствами называют особой точкой функции f . Если $x = b$ — особая точка, то для любого η , $0 < \eta < b - a$, функция $f(x)$ неограничена на промежутке $[b - \eta, b)$ (если $f(x)$ была бы ограниченной на некотором

промежутке $[b - \eta, b]$, то она была бы интегрируемой по Риману на $[a, b]$ (п. 6.10).

Предел

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx \quad (16.6)$$

называют **несобственным интегралом второго типа** (НИ-2) от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ (рис. 16.3) и обозначают $\int_a^b f(x) dx$.

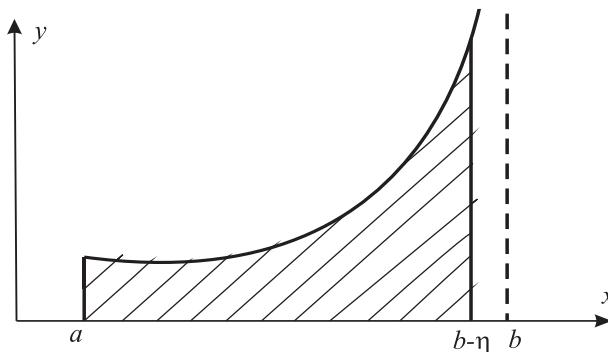


Рис. 16.3

Если предел (16.6) конечен, то несобственный интеграл второго типа называют **сходящимся**, а функцию f — интегрируемой (в несобственном смысле) на $[a, b]$. В противном случае говорят, что интеграл **расходится**.

Пусть теперь функция интегрируема по Риману на любом отрезке $[a + \eta, b]$, $0 < \eta < b - a$, но не интегрируема на $[a, b]$. В этом случае говорят, что точка $x = a$ — особая. Несобственный интеграл второго типа на промежутке $(a, b]$ определяют равенством

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx.$$

Ввиду полной аналогии теории НИ-2 с теорией НИ-1 мы не будем приводить всех теорем, касающихся НИ-2, сформулируем лишь несколько основных утверждений, предполагая, что $x = b$ — особая точка.

1. Для сходимости интеграла от неотрицательной функции $f(x) \geq 0$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x) dx$ была ограниченной на промежутке $(0, b - a]$ (доказать).

2. Если $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)/g(x) = l$, $0 < l < \infty$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно (доказать).

3. Степенной признак.

1. Если $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{M}{(b-x)^\alpha}$, $M - \text{const}$, $0 < M < \infty$, то при $\alpha < 1$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, при $\alpha \geq 1$ расходится.

2. Если $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right)$, $\alpha < 1$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится (доказать).

4. Если интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ также является сходящимся (доказать).

Рассмотрим функцию $f(x)$, имеющую конечное число особых точек на промежутке $[a, b]$, $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$. Отнесем $+\infty$ к особым точкам, если $b = +\infty$, также как и $-\infty$, если $a = -\infty$.

Разобьем промежуток $|a, b|$ на интервалы

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r), \alpha_1 = a, \beta_1 = \alpha_2, \dots, \beta_r = b,$$

таким образом, чтобы на каждом из них функция $f(x)$ имела одну особую точку, являющуюся одним из концов интервала. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называют **сходящимся**, если сходятся все интегралы $\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x)dx$, $i = 1, \dots, r$, и **расходящимся**, если хотя бы один из этих интегралов расходится. В случае сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ его значением считают величину

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x)dx + \dots + \int_{\alpha_r}^{\beta_r} f(x)dx \quad (16.7)$$

(легко видеть, что сходимость интеграла (16.7) и его значение не зависят от выбора точек α_i, β_i).

16.4. Методы вычисления несобственных интегралов

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$, предполагая, что b — единственная особая точка, которая может быть $+\infty$, а $f(x)$ — непрерывная на $[a, b)$ функция.

1. Формула Ньютона — Лейбница для НИ

Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a, b)$. Выражение $F(x)|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a)$, где $F(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$ (если $b = +\infty$, то $F(b-0) := F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$) называют **двойной подстановкой**.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел $F(b-0)$, и в случае сходимости интеграла имеет место формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^{b-0}.$$

Доказательство для случая $b < +\infty$. Пусть $0 < \eta < b-a$. По формуле Ньютона — Лейбница для интеграла Римана

$$\int_a^{b-\eta} f(x)dx = F(x) \Big|_a^{b-\eta}.$$

Переходя к пределу при $\eta \rightarrow +0$, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx = F(x) \Big|_a^{b-0}. \quad \diamond$$

2. Формула замены переменной для НИ

Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha, \beta]$, строго возрастает и $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = b$. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ и в случае сходимости одного из интегралов имеет место следующая формула замены переменной для НИ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (16.8)$$

Доказательство. Пусть $\tau \in [\alpha, \beta[, \varphi(\tau) = \xi$. Тогда $\varphi(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \beta-0} b$. По формуле замены переменной в интеграле Римана

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\alpha^\tau f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (16.9)$$

Если $\tau \rightarrow \beta-0$, то $\xi \rightarrow b$. Переходя к пределу при $\tau \rightarrow \beta-0$ в равенстве (16.9) получаем требуемую формулу (16.8). \diamond

3. Формула интегрирования по частям для НИ

Пусть функции $u(x), v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Если существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow b-0} u(x)v(x) = u(b-0)v(b-0) \quad (16.10)$$

и сходится один из интегралов $\int_a^b v(x)u'(x)dx$, $\int_a^b u(x)v'(x)dx$, то сходится другой интеграл и справедлива следующая формула интегрирования по частям для НИ

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^{b-0} - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $\tau \in [\alpha, \beta]$. По формуле интегрирования по частям для интеграла Римана

$$\int_a^\tau u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^\tau - \int_a^\tau v(x)u'(x)dx. \quad (16.11)$$

Переходя в (16.11) к пределу при $\tau \rightarrow \beta - 0$, приходим к требуемому утверждению. \triangleleft

ГЛАВА 17

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

17.1. Равномерная сходимость функции двух переменных к предельной функции

Рассмотрим скалярную функцию двух переменных $f(x, y)$, определенную на множестве $[a, b] \times Y$, $Y \subset \mathbb{R}$ (b может быть $+\infty$). Предположим, что при каждом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x, y)$ является интегрируемой на $[a, b]$ (интегрируемой по Риману, если b не является особой точкой, если же b — особая точка, то интегрируемой в несобственном смысле).

На множестве Y определена функция

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

которую называют интегралом, зависящим от параметра.

Эта глава посвящена изучению свойств функции $F(y)$. Если возможно вычислить интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$, например, как в случае

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_0^1 = \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = F(y), \quad y \neq 0,$$

то исследование функции $F(y)$ может быть проведено методами главы 4. Если же вычисление интеграла невозможно или формула для $F(y)$ сложна, то для исследования функции $F(y)$ используют теоремы этой главы. В дальнейшем важную роль играет введенное ниже понятие равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции, обобщающее понятие равномерной сходимости функциональной последовательности.

Пусть $\Psi(x, y)$ функция двух переменных, определенная на множестве $X \times Y$, $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ и пусть y_0 — предельная точка для Y .

Предположим, что при каждом фиксированном $x \in X$ существует предел $\lim_{y \rightarrow y_0, y \in Y} \Psi(x, y)$. Функцию $\psi(x) := \lim_{y \rightarrow y_0, y \in Y} \Psi(x, y)$, $x \in X$, называют

предельной для отображения $\Psi(x, y)$ при стремлении y к y_0 вдоль множества Y (в дальнейшем для краткости слова вдоль множества Y опускаем). При этом говорят, что функция $\Psi(x, y)$ сходится поточечно на множестве X к $\psi(x)$ при $y \rightarrow y_0$. Соотношение $\psi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} \Psi(x, y)$, $x \in X$, с помощью « $\varepsilon - \delta$ » записывается следующим образом:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(x, \varepsilon) > 0, \forall y \in Y :$$

$$0 < |y - y_0| \leq \delta(x, \varepsilon) \Rightarrow |\Psi(x, y) - \psi(x)| \leq \varepsilon.$$

Если же имеет место более сильное свойство

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y \in Y : 0 < |y - y_0| \leq \delta(\varepsilon),$$

$$\forall x \in X \Rightarrow |\Psi(x, y) - \psi(x)| \leq \varepsilon, \quad (17.1)$$

то говорят, что функция $\Psi(x, y)$ сходится равномерно относительно $x \in X$ при $y \rightarrow y_0$ к предельной функции $\psi(x)$ и обозначают

$$\Psi(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \psi(x).$$

Это определение сформулировано для случая $y_0 \in \mathbb{R}$, если же $y_0 = +\infty$ или $y_0 = -\infty$, то в определении надо сделать одно изменение — неравенство $0 < |y - y_0| \leq \delta(\varepsilon)$ следует заменить соответственно на неравенство вида $y \geq \delta(\varepsilon)$ или $y \leq -\delta(\varepsilon)$.

Критерий равномерной сходимости ф2п к предельной функции

Функция $\Psi(x, y)$ сходится равномерно относительно $x \in X$ при $y \rightarrow y_0$ к предельной функции $\psi(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \sup_{x \in X} |\Psi(x, y) - \psi(x)| = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Из (17.1) следует

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y \in Y : 0 < |y - y_0| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in X} |\Psi(x, y) - \psi(x)| \leq \varepsilon,$$

$$\text{т. е. } \lim_{y \rightarrow y_0} \sup_{x \in X} |\Psi(x, y) - \psi(x)| = 0.$$

Для доказательства достаточности надо все рассуждения провести в обратном порядке. \triangleleft

Критерий Коши равномерной сходимости ф2п к предельной функции

Функция $\Psi(x, y)$ сходится равномерно относительно $x \in X$ при $y \rightarrow y_0$ к некоторой предельной функции тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y', y'' \in Y : 0 < |y' - y_0| \leq \delta(\varepsilon), 0 < |y'' - y_0| \leq \delta(\varepsilon), \forall x \in X \Rightarrow |\Psi(x, y') - \Psi(x, y'')| \leq \varepsilon$ (доказать).

Пример 17.1. Рассмотрим функцию $\Psi(x, y) = ye^{-xy}$, $X = [0, \infty)$, $Y = (0, 1)$, $y_0 = 0$. Найдем предельную функцию $\psi(x) = \lim_{y \rightarrow +0} ye^{-xy} = 0$.

Используя критерий равномерной сходимости, покажем, что $ye^{-xy} \xrightarrow[y \rightarrow +0]{} 0$.

Действительно, $\sup_{x \in [0, \infty)} ye^{-xy} = [(ye^{-xy})'_x \neq 0, ye^{-xy}|_{x=0} = y, \lim_{x \rightarrow +\infty} ye^{-xy} = 0] = y, \lim_{y \rightarrow +0} \sup_{x \in [0, \infty)} ye^{-xy} = \lim_{y \rightarrow +0} y = 0$.

Достаточное условие равномерной сходимости ф2п к предельной функции

Если функция $\Psi(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ и $y_0 \in [c, d]$, то

$$\Psi(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \Psi(x, y_0).$$

Доказательство. По теореме Кантора (п. 7.3) функция $\Psi(x, y)$ равномерно непрерывна на компакте $[a, b] \times [c, d]$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in [a, b] : 0 < |x' - x''| \leq \delta(\varepsilon),$$

$$\forall y', y'' \in [c, d] : 0 < |y' - y''| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\Psi(x', y') - \Psi(x'', y'')| \leq \varepsilon.$$

Возьмем $x' = x'' = x \in [a, b]$, $y' = y$, $y'' = y_0$, $0 < |y - y_0| \leq \delta(\varepsilon)$. Тогда $|\Psi(x, y) - \Psi(x, y_0)| \leq \varepsilon$, т. е. $\Psi(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \Psi(x, y_0)$. \triangleleft

Теорема о непрерывности предельной функции

Если при каждом фиксированном $y \in Y$ функция $\Psi(x, y)$ непрерывна по x на отрезке $[a, b]$ и $\Psi(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \psi(x)$, то функция $\psi(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Возьмем последовательность $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y_0$, $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$. Покажем, что функциональная последовательность $\Psi(x, y_n)$ сходится равномерно по $x \in [a, b]$ к $\psi(x)$.

Из условия $\Psi(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a,b]} \psi(x)$ имеем $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0,$

$$\forall y \in Y : 0 < |y - y_0| \leq \delta(\varepsilon), \forall x \in [a, b] \Rightarrow |\Psi(x, y) - \psi(x)| \leq \varepsilon. \quad (17.2)$$

Поскольку $y_n \rightarrow y_0$, то

$$\exists \nu(\delta(\varepsilon)) > 0, \forall n \geq \nu(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow 0 < |y_n - y_0| \leq \delta(\varepsilon). \quad (17.3)$$

Из (17.2)–(17.3) вытекает

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\delta(\varepsilon)) > 0, \forall n \geq \nu(\delta(\varepsilon)), \forall x \in [a, b] \Rightarrow |\Psi(x, y_n) - \psi(x)| \leq \varepsilon.$$

т. е. $\Psi(x, y_n) \xrightarrow[y_n \rightarrow y_0]{[a,b]} \psi(x)$. Из свойства 1 функциональных последовательностей (п. 14.7) следует, что функция $\psi(x)$ непрерывна на $[a, b]$. \triangleleft

17.2. Свойства интеграла, зависящего от параметра

1. Теорема о переходе к пределу под знаком интеграла

Если при каждом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x, y)$ непрерывна по x на отрезке $[a, b]$ и $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a,b]} \varphi(x)$, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (17.4)$$

Доказательство. По теореме о непрерывности предельной функции, функция $\varphi(x)$ непрерывна, а следовательно, интегрируема на $[a, b]$. Поскольку $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a,b]} \varphi(x)$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y \in Y : 0 < |y - y_0| \leq \delta(\varepsilon), \forall x \in [a, b] \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Тогда при $0 < |y - y_0| \leq \delta(\varepsilon)$ имеем

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| dx \leq \varepsilon(b - a),$$

что доказывает равенство (17.4). \triangleleft

2. Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра

Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, то функция $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ непрерывна на $[c, d]$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $y_0 \in [c, d]$. Из достаточного условия равномерной сходимости ф2п к предельной функции следует, что $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} f(x, y_0)$. Используя теорему о предельном переходе под знаком интеграла (все условия этой теоремы выполнены), получаем

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y_0)dx = F(y_0),$$

что доказывает непрерывность функции $F(y)$ в точке y_0 . \triangleleft

3. Теорема о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра

Пусть:

- 1) функция $f(x, y)$ непрерывна по x при каждом фиксированном $y \in [c, d]$;
- 2) частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$.

Тогда имеет место следующая формула Лейбница:

$$F'(y) = \left(\int_a^b f(x, y)dx \right)' = \int_a^b f'_y(x, y)dx \quad \forall y \in [c, d].$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $y_0 \in [c, d]$. Пусть $y_0 + \Delta y \in [c, d]$. Тогда

$$\begin{aligned} F'(y) \Big|_{y_0} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx. \end{aligned} \tag{17.5}$$

Покажем, что

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} f'_y(x, y_0). \tag{17.6}$$

По формуле Лагранжа (п. 3.5)

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1, \quad \theta = \theta(x, \Delta y). \tag{17.7}$$

Из теоремы Кантора следует, что функция $f'_y(x, y)$ равномерно непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in [a, b] : 0 < |x' - x''| \leq \delta(\varepsilon),$$

$$\forall y', y'' \in [c, d] : 0 < |y' - y''| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f'_y(x', y') - f'_y(x'', y'')| \leq \varepsilon.$$

Положим здесь $x' = x'' = x \in [a, b]$, $y' = y_0$, $y'' = y_0 + \theta \Delta y$ получим, считая, что $|\Delta y| \leq \delta(\varepsilon)$ и учитывая (17.7):

$$\left| \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} - f'_y(x, y_0) \right| \leq \varepsilon,$$

т. е. соотношение (17.6) имеет место. Интеграл в равенстве (17.5) удовлетворяет всем условиям теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла. Воспользовавшись этой теоремой, имеем

$$F'(y) \Big|_{y_0} = \int_a^b \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \int_a^b f'_y(x, y) dx. \quad \diamond$$

4. Теорема о дифференцировании интеграла с пределами интегрирования, зависящими от параметра

Пусть функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, а отображения $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$, $y \in [c, d]$, непрерывно дифференцируемы, и их графики принадлежат прямоугольнику $[a, b] \times [c, d]$. Тогда

$$\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right)' = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \alpha'(y), \quad (17.8)$$

$$y \in [c, d].$$

Доказательство. Пусть $y_0 \in [c, d]$. Интеграл $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ представим в виде

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx. \quad (17.9)$$

Производная первого интеграла из равенства (17.9) по теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, равна

$$\left(\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx \right)' = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y) dx \quad \forall y \in [c, d]. \quad (17.10)$$

Используя теорему о среднем, второй интеграл из правой части равенства (17.9) можно представить в виде

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = f(\xi, y)(\beta(y) - \beta(y_0)),$$

где ξ — точка, лежащая между $\beta(y_0)$ и $\beta(y)$. Отсюда

$$\begin{aligned} & \left. \left(\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right)' \right|_{y_0} = \\ & = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} f(\xi, y)(\beta(y) - \beta(y_0)) = f(\beta(y_0), y_0) \beta'(y_0). \end{aligned} \quad (17.11)$$

Аналогично

$$\left. \left(- \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx \right)' \right|_{y_0} = -f(\alpha(y_0), y_0) \alpha'(y_0). \quad (17.12)$$

Объединяя формулы (17.10)–(17.12), убеждаемся в справедливости формулы (17.8). \triangleleft

Пример 17.2. Вычислим интеграл

$$F(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x}{\ln x} dx, \quad 1 \leq b \leq 2.$$

Воспользуемся формулой Лейбница. Функция $\frac{x^b - x}{\ln x}$ не определена в точке $x = 0$, поэтому сразу применить формулу Лейбница для вычисления $F'(b)$ мы не можем. Поскольку существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^b - x}{\ln x} = 0$, то можно построить функцию

$$g(x, b) = \begin{cases} \frac{x^b - x}{\ln x}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

которая уже непрерывна на прямоугольнике $[0, 1] \times [1, 2]$ вместе с частной производной $g'_b(x, b) = x^b$. Поскольку (п. 6.10)

$$\int_0^1 \frac{x^b - x}{\ln x} dx = \int_0^1 g(x, b) dx,$$

то можно вместо исходного интеграла вычислить интеграл $\int_0^1 g(x, b) dx$. Функция $g(x, b)$ уже удовлетворяет условиям теоремы о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра. По формуле Лейбница

$$F'(b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}.$$

Отсюда $F(b) = \ln(b+1) + C$. Так как при $b = 1$ интеграл $F(b)$ равен нулю, то $0 = F(1) = \ln 2 + C$, $C = -\ln 2$.

Таким образом,

$$F(b) = \ln \frac{b+1}{2}.$$

5. Теорема о перестановке порядка интегрирования

Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, то

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Доказательство вытекает из леммы о двойном интеграле по прямоугольнику (п. 8.4)

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \triangleleft$$

17.3. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$, определенную на множестве $[a, +\infty) \times Y$, $Y \subset \mathbb{R}$, такую, что при каждом фиксированном $y \in Y$ несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ является сходящимся.

Функцию

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

называют несобственным интегралом первого типа, зависящим от параметра (НИЗОП-1).

При изучении несобственных интегралов, зависящих от параметра, важную роль играет особый вид сходимости — равномерная сходимость, которую мы сейчас рассмотрим.

Введем функцию

$$\Phi(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx.$$

Сходимость интеграла $\int_a^b f(x, y) dx$ на множестве Y означает, что при каждом фиксированном $y \in Y$ выполняется соотношение $\Phi(A, y) \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} F(y)$.

Если

$$\Phi(A, y) \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{Y} F(y),$$

т. е.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A \geq \delta(\varepsilon), \forall y \in Y \Rightarrow |\Phi(A, y) - F(y)| \leq \varepsilon,$$

или

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A \geq \delta(\varepsilon), \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon,$$

то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ называют **равномерно сходящимся относительно $y \in Y$** .

Следующие два критерия сразу вытекают из соответствующих критериев равномерной сходимости ф2п к предельной функции.

Критерий равномерной сходимости НИЗОП-1

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{y \in Y} \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| = 0.$$

Критерий Коши равномерной сходимости НИЗОП-1

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A', A'': A' \geq \delta(\varepsilon), A'' \geq \delta(\varepsilon), \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon.$$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости НИЗОП-1

Если

$$|f(x, y)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty), \forall y \in Y, \quad (17.13)$$

и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то НИЗОП-1 $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Доказательство. Согласно критерию Коши сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A', A'' \in [a, +\infty) : A' \geq \delta(\varepsilon), A'' \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} g(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (17.13) вытекает

$$\forall A', A'' \geq \delta(\varepsilon), \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} f(x, y)dx \right| \leq \left| \int_{A'}^{A''} g(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

По критерию Коши равномерной сходимости НИЗОП-1, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$. \triangleleft

Пример 17.3. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in [1, \infty), \forall y \in \mathbb{R}$, и интеграл $\int_1^{+\infty} x^{-2}dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса рассматриваемый интеграл сходится равномерно относительно $y \in \mathbb{R}$.

Пример 17.4. Интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx, \quad y \in (0, +\infty)$ сходится неравномерно. Действительно,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{y \in (0, +\infty)} \int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{y \in (0, +\infty)} e^{-Ay} = 1 \neq 0.$$

По критерию равномерной сходимости рассматриваемый интеграл сходится неравномерно относительно $y \in (0, +\infty)$.

Аналогично лемме 16.2 устанавливается следующее утверждение.

Лемма 17.1

Пусть при каждом фиксированном $y \in Y$ функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, $g'_x(x, y)$ непрерывны по x на отрезке $[a, b]$, кроме того, $g'_x(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times Y$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$, $\xi = \xi(y)$, такая, что

$$\int_a^b f(x, y)g(x, y)dx = (F(b, y) - F(\xi, y))g(b, y) + (F(\xi, y) - F(a, y))g(a, y),$$

где $F(x, y) = \int_a^x f(t, y)dt$.

Признак Дирихле равномерной сходимости НИЗОП-1

Пусть при каждом фиксированном $y \in Y$ функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, $g'_x(x, y)$ непрерывны по x на отрезке $[a, b]$, кроме того $g'_x(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times Y$.

Если:

1) функция $F(x, y) = \int_a^x f(t, y)dt$ ограничена на $[a, +\infty) \times Y$, т. е. $|F(x, y)| \leq M - \text{const} \quad \forall (x, y) \in [a, +\infty) \times Y$;

2) $g(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{Y} 0$,

то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Доказательство. Из леммы 17.1 следует, что $\forall A', A'' \in [a, \infty), \forall y \in Y$, выполняется неравенство

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y)g(x, y)dx \right| \leq |F(A'', y) - F(\xi, y)| |g(A'', y)| + \\ + |F(\xi, y) - F(A', y)| |g(A', y)| \leq 2M(|g(A'', y)| + |g(A', y)|), \quad (17.14)$$

где ξ — некоторая точка из отрезка с концами A', A'' .

Поскольку $g(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{Y} 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \geq \delta(\varepsilon), \forall y \in Y \Rightarrow |g(x, y)| \leq \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (17.14) вытекает

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y)g(x, y)dx \right| \leq 4M\varepsilon \quad \forall A', A'' \geq \delta(\varepsilon).$$

Согласно критерию Коши равномерной сходимости НИЗОП-1, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$. \triangleleft

Признак Абеля равномерной сходимости НИЗОП-1

Пусть при каждом фиксированном $y \in Y$ функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, $g'_x(x, y)$ непрерывны по x на отрезке $[a, b]$, кроме того $g'_x(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times Y$.

Если:

- 1) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$;
 - 2) функция $g(x, y)$ ограничена на $[a, +\infty) \times Y$, т. е. $|g(x, y)| \leq M - \text{const} \quad \forall (x, y) \in [a, +\infty) \times Y$,
- то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Доказательство. Из критерия Коши равномерной сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ следует

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A_1, A_2 \geq \delta(\varepsilon), \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Отсюда для любых $A', A'' \geq \delta(\varepsilon)$, для любой точки ξ из отрезка с концами A', A'' и для любого $y \in Y$ имеем

$$|F(\xi, y) - F(A', y)| \leq \varepsilon, |F(A'', y) - F(\xi, y)| \leq \varepsilon. \quad (17.15)$$

Используя лемму 17.1 и неравенства (17.15), получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} f(x, y)g(x, y)dx \right| &\leq |F(A'', y) - F(\xi, y)||g(A'', y)| + \\ &+ |F(\xi, y) - F(A', y)||g(A', y)| \leq 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Согласно критерию Коши равномерной сходимости НИЗОП-1, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$. \triangleleft

17.4. Свойства несобственного интеграла первого типа, зависящего от параметра

1. Переход к пределу под знаком НИЗОП-1

Теорема о переходе к пределу под знаком интеграла (п. 17.2), как показывает следующий пример, не позволяет, вообще говоря, осуществлять предельный переход под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пример 17.5. Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ее члены $f_n(x)$ непрерывны по $x \in [0, \infty)$ при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, \infty)} f_n(x) = [(f_n(x))'_x = \frac{-3n}{x^4} e^{-\frac{n}{2x^2}} - \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} \left(\frac{n}{x^3}\right) = 0, x = \sqrt{n/3}],$$

$$f_n(\sqrt{n/3}) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}} e^{-3/2}, f_n(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}} e^{-3/2} = 0,$$

то согласно критерию равномерной сходимости ФП, последовательность сходится равномерно $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0, +\infty)} 0$. Все условия теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла выполнены, но

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1.$$

Требуются дополнительные условия, кроме условий теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла, гарантирующие возможность перехода к пределу под знаком НИЗОП-1. Этим дополнительным условием является равномерная сходимость НИЗОП-1.

Теорема о переходе к пределу под знаком НИЗОП-1

Пусть:

1) функция $f(x, y)$ непрерывна по $x \in [a, +\infty)$ при каждом фиксированном $y \in Y$;

2) для любого $A > a$ $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, A]} \varphi(x)$;

3) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Тогда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx. \quad (17.16)$$

Доказательство. По теореме о непрерывности предельной функции функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$, следовательно, интегрируема на любом отрезке $[A', A''] \subset [a, +\infty)$.

Из критерия Коши равномерной сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ следует

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A', A'': A' \geq \delta(\varepsilon), A'' \geq \delta(\varepsilon), \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon.$$

Для интеграла $\int_{A'}^{A''} f(x, y) dx$ выполнены все условия теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла (п. 17.2), поэтому

$$\left| \lim_{y \rightarrow y_0} \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{A'}^{A''} \varphi(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

На основании критерия Коши сходимости НИ-1 (п. 16.1) интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится.

Для любого $A > a$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \right| &\leq \left| \int_a^A f(x, y) dx - \int_a^A \varphi(x) dx \right| + \\ &+ \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} \varphi(x) dx \right|. \end{aligned} \quad (17.17)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall A \geq \delta(\varepsilon), \forall y \in Y$, второе и третье слагаемые в правой части неравенства (17.17) меньше ε . Зафиксируем A большее $\delta(\varepsilon)$. Из теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла следует, что

$$\exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall y \in Y : 0 < |y - y_0| \leq \nu(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int_a^A f(x, y) dx - \int_a^A \varphi(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall y \in Y : 0 < |y - y_0| \leq \nu(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \right| \leq 3\varepsilon,$$

что приводит к требуемой формуле (17.16). \triangleleft

2. Теорема о непрерывности НИЗОП-1

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times [c, d]$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$. Тогда функция $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ непрерывна на $[c, d]$.

Доказательство. Для любых $A > a$ и $y_0 \in [c, d]$ из достаточного условия равномерной сходимости функции $f(x, y)$ к предельной функции следует, что $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, A]} f(x, y_0)$. По теореме о переходе к пределу под знаком НИЗОП-1

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} f(x, y_0)dx = F(y_0),$$

что доказывает непрерывность функции $F(y)$ в точке y_0 . \triangleleft

3. Теорема о перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле с одним несобственным интегралом

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times [c, d]$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$. Тогда

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Доказательство. Возьмем $A > a$. Используя теорему о перестановке порядка интегрирования (п. 17.2), получаем

$$\begin{aligned} \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx &= \int_c^d dy \int_a^A f(x, y)dx + \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x, y)dx = \\ &= \int_a^A dx \int_c^d f(x, y)dy + \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x, y)dx. \end{aligned} \tag{17.18}$$

На основании равномерной сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A \geq \delta(\varepsilon), \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Поэтому $\left| \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon(d - c) \quad \forall A \geq \delta(\varepsilon)$, что означает

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x, y) dx = 0.$$

Отсюда и из равенства (17.18) вытекает

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad \diamond$$

4. Теорема о дифференцировании НИЗОП-1

Пусть:

- 1) функция $f(x, y)$ непрерывна по $x \in [a, +\infty)$ при каждом фиксированном $y \in [c, d]$;
 - 2) функция $f'_y(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times [c, d]$;
 - 3) при каждом фиксированном $y \in [c, d]$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится;
 - 4) интеграл $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$.
- Тогда справедлива следующая формула Лейбница для НИЗОП-1:

$$\frac{d}{dy} \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

Доказательство. Для произвольного $y \in [c, d]$ по теореме о перестановке порядка интегрирования с одним несобственным интегралом имеем

$$\begin{aligned} \int_c^y dy \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx &= \int_a^{+\infty} dx \int_c^y f'_y(x, y) dy = \\ &= \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, c) dx. \end{aligned} \quad (17.19)$$

Из теоремы о непрерывности НИЗОП-1 следует непрерывность функции

$$L(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx, \quad y \in [c, d],$$

что позволяет применить теорему Барроу (п. 6.6) к интегралу $\int_c^y L(t)dt$

$$\frac{d}{dy} \left(\int_c^y L(t)dt \right) = L(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx. \quad (17.20)$$

Дифференцируя соотношение (17.19) и используя равенство (17.20), получаем

$$\frac{d}{dy} \left(\int_a^{+\infty} f(x, y)dx \right) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx. \triangleleft$$

5. Локально равномерная сходимость НИЗОП-1

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ называют локально равномерно сходящимся относительно $y \in [c, d]$, если для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$ этот интеграл сходится равномерно относительно $y \in [\alpha, \beta]$.

Следствие из теоремы о непрерывности НИЗОП-1

Пусть:

- 1) функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times [c, d]$;
- 2) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится локально равномерно относительно $y \in [c, d]$.

Тогда функция $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ непрерывна на $[c, d]$ (доказать).

Следствие из теоремы о дифферентировании НИЗОП-1

Пусть:

- 1) функция $f(x, y)$ непрерывна по $x \in [a, +\infty)$ при каждом фиксированном $y \in [c, d]$;
- 2) функция $f'_y(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times [c, d]$;
- 3) при каждом фиксированном $y \in [c, d]$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ сходится;
- 4) интеграл $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)dx$ сходится локально равномерно относительно $y \in [c, d]$.

Тогда справедлива следующая формула Лейбница для НИЗОП-1:

$$\left(\int_a^{\infty} f(x, y)dx \right)'_y = \int_a^{\infty} f'_y(x, y)dx, \quad y \in [c, d] \quad (\text{доказать}).$$

6. Теорема о перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле с двумя несобственными интегралами

Пусть:

- 1) функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, +\infty) \times [c, +\infty)$;
- 2) интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$ сходится локально равномерно относительно $y \in (c, +\infty)$;
- 3) интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dy$ сходится локально равномерно относительно $x \in (a, +\infty)$;
- 4) один из интегралов $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$, $\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$ сходится.

Тогда сходится другой интеграл из условия 4) и

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy.$$

Доказательство. Первый этап: $f(x, y) \geq 0$. Пусть сходится интеграл $\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = I_1$. Возьмем произвольный отрезок $[c', d'] \in (c, \infty)$. Обозначим $J(c', d') = \int_{c'}^{d'} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$. По теореме о перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле с одним несобственным интегралом имеем

$$\begin{aligned} J(c', d') &= \int_{c'}^{d'} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{c'}^{d'} f(x, y) dy \leq \\ &\leq \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = I_1. \end{aligned} \quad (17.21)$$

Последнее неравенство вытекает из неотрицательности функции $f(x, y)$. При каждом фиксированном c' функция $J(c', d')$ является ограниченной и возрастающей относительно $d' \in [c', +\infty)$, следовательно, существует предел $\lim_{d' \rightarrow \infty} J(c', d') = K(c') = \int_{c'}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \leq I_1$. Функция $K(c')$ является убывающей и ограниченной, поэтому существует предел $\lim_{c' \rightarrow c+0} K(c') = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = I_2$, причем $I_2 \leq I_1$. Повторяя те же рассуждения, используя только в качестве начального интеграла $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$, получим $I_1 \leq I_2$. Таким образом, $I_1 = I_2$.

Второй этап: $f(x, y)$ — произвольная функция. Представим f в виде $f = f^+ - f^-$, где $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$ — неотрицательные функции.

При выполнении условий теоремы функции f^+, f^- также удовлетворяют этим условиям. Как было показано на первом этапе для f^+, f^- допустима перестановка порядка интегрирования, но тогда эта операция допустима и для функции f . \triangleleft

17.5. Несобственный интеграл второго типа, зависящий от параметра

Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $[a, b] \times Y, Y \subset \mathbb{R}$, где b — особая точка для интеграла $\int_a^b f(x, y)dx$, хотя бы при некоторых значениях параметра $y \in Y$, и пусть при каждом фиксированном $y \in Y$ этот интеграл сходится.

Функцию

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

называют несобственным интегралом второго типа (НИЗОП-2), зависящим от параметра.

Введем функцию

$$\Phi(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y)dx.$$

Сходимость интеграла $\int_a^b f(x, y)dx$ на множестве Y означает, что $\Phi(\eta, y) \xrightarrow[\eta \rightarrow +0]{} F(y)$ при каждом фиксированном $y \in Y$.

Если $\Phi(\eta, y) \xrightarrow[\eta \rightarrow +0]{Y} F(y)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \eta \in (0, b-a] : 0 < \eta \leq \delta(\varepsilon), \forall y \in Y \Rightarrow \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y)dx \right| \leq \varepsilon,$$

то интеграл $\int_a^b f(x, y)dx$ называют равномерно сходящимся относительно $y \in Y$.

Свойства НИЗОП-2 и их доказательства аналогичны свойствам НИЗОП-1. Сформулируем лишь те теоремы о свойствах НИЗОП-2, которые используются в дальнейшем.

Признак Вейерштрасса для НИЗОП-2

<p>Если</p> $ f(x, y) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b], \forall y \in Y,$ <p>и интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то интеграл, зависящий от параметра $\int_a^b f(x, y)dx$, сходится равномерно относительно $y \in Y$ (доказать).</p>
--

Теорема о переходе к пределу под знаком НИЗОП-2

Пусть:

- 1) функция $f(x, y)$ непрерывна по $x \in [a, b]$ при каждом фиксированном $y \in Y$;
- 2) для любого $\eta : 0 < \eta \leq b - a$, $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b-\eta]} \varphi(x)$;
- 3) интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Тогда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

(доказать).

Интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ называют локально равномерно сходящимся относительно $y \in |c, d|$, если для любого отрезка $[\alpha, \beta] \in |c, d|$ этот интеграл сходится равномерно относительно $y \in [\alpha, \beta]$.

Теорема о непрерывности НИЗОП-2

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, b] \times |c, d|$ и интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится локально равномерно относительно $y \in |c, d|$. Тогда функция $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ непрерывна на $|c, d|$ (доказать).

Теорема о дифференцировании НИЗОП-2

Пусть:

- 1) функция $f(x, y)$ непрерывна по $x \in [a, b]$ при каждом фиксированном $y \in |c, d|$;
- 2) функция $f'_y(x, y)$ непрерывна на множестве $[a, b] \times |c, d|$;
- 3) при каждом фиксированном $y \in |c, d|$ интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится;
- 4) интеграл $\int_a^b f'_y(x, y) dx$ сходится локально равномерно относительно $y \in |c, d|$.

Тогда справедлива следующая формула Лейбница для НИЗОП-2:

$$\frac{d}{dy} \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) = \int_a^b f'_y(x, y) dx, \quad y \in |c, d|$$

(доказать).

17.6. Интеграл Дирихле

Установленные выше свойства интегралов, зависящих от параметра, позволяют вычислить многие важные для приложений интегралы, вычисление которых с помощью других методов невозможно.

Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (17.22)$$

называют интегралом Дирихле. Для его вычисления рассмотрим более общий интеграл

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx, \quad a \geq 0. \quad (17.23)$$

Доопределим функцию $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$, считая, что ее значение в этой точке равно 1. После такого доопределения интеграл $F(a)$ не меняется, а функция $\frac{\sin x}{x}$ становится непрерывной на промежутке $[0, +\infty)$. Проверим, что интеграл (17.23) удовлетворяет условиям признака Абеля равномерной сходимости НИЗОП-1 (п. 17.4): 1) интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится по признаку Дирихле (п. 16.2); 2) функция e^{-ax} ограничена на множестве $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$, $|e^{-ax}| \leq 1$. Интеграл (17.23) сходится равномерно относительно $a \in [0, +\infty)$ по признаку Абеля. По следствию из теоремы о непрерывности НИЗОП-1 (п. 17.4) функция $F(a)$ непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$. Поэтому

$$\lim_{a \rightarrow +0} F(a) = F(0). \quad (17.24)$$

Интеграл (17.23) при $a > 0$ удовлетворяет условиям следствия из теоремы о дифференциировании НИЗОП-1 (п. 17.4). Все условия этого следствия, кроме локально равномерной сходимости интеграла

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right)'_a dx = - \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx$$

относительно $a > 0$, установлены выше. Локально равномерная сходимость этого интеграла вытекает из признака Вейерштрасса (п. 17.4), т. к. $|e^{-ax} \sin x| \leq e^{-\alpha x}$, если $a \in [\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = 1/\alpha$. По правилу

Лейбница для НИЗОП-1 имеем

$$F'(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx = -\frac{1}{1+a^2}, \quad a > 0.$$

Отсюда $F(a) = -\int \frac{1}{1+a^2} da = -\arctg a + C$, $a > 0$, где C — некоторая постоянная. Найдем эту постоянную. Поскольку

$$|F(a)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

то $\lim_{a \rightarrow +\infty} |F(a)| = 0$. Поэтому $-\arctg a + C \xrightarrow[a \rightarrow +\infty]{} 0$. Отсюда $C = \pi/2$. Таким образом, $F(a) = -\arctg a + \pi/2$, $a > 0$. Окончательно, отсюда и из (17.24) имеем

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow +0} (-\arctg a + \pi/2) = \pi/2.$$

Замечание 17.1. Покажем, что $G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a$. Действительно, если $a = 0$, то $G(0) = 0$, если $a < 0$, то с помощью замены $-ax = y$ получаем $G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{-\sin y}{y} dy = -\pi/2$. Аналогично, $G(a) = \pi/2$, если $a > 0$.

17.7. Интегралы Лапласа

Интегралами Лапласа называют следующие два интеграла:

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a \geq 0;$$

$$J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0.$$

Подынтегральные функции в интегралах Лапласа непрерывны на множестве $[0, +\infty) \times [a, +\infty)$. Первый интеграл сходится равномерно относительно $a \in [0, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса, и, следовательно, по теореме о

непрерывности НИЗОП-1 функция $I(a)$ непрерывна при $a \geq 0$. Второй интеграл сходится локально равномерно относительно $a \in (0, +\infty)$ (доказать). По формуле Лейбница для НИЗОП-1 (п. 17.4) при $a > 0$ имеем

$$I'(a) = -J(a). \quad (17.25)$$

Прибавим к (17.25) почленно равенство

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, \quad a > 0,$$

получим

$$I'(a) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} - \frac{x \sin ax}{1+x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(1+x^2)} dx.$$

Применяя формулу Лейбница для НИЗОП-1 к последнему интегралу (приверить, что формула Лейбница применима), имеем

$$I''(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = I(a), \quad a > 0. \quad (17.26)$$

Таким образом, функция $I(a)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка (17.26). Общее решение уравнения (17.26) $C_1 e^a + C_2 e^{-a}$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Функция $I(a)$ является частным решением этого дифференциального уравнения, следовательно,

$$I(a) = A_1 e^a + A_2 e^{-a}, \quad (17.27)$$

где A_1, A_2 — некоторые постоянные. Найдем эти постоянные. Поскольку функция $I(a)$ ограничена

$$|I(a)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

то в формуле (17.27) $A_1 = 0$. Из равенства $I(0) = \pi/2$ следует, что $A_2 = \pi/2$. Таким образом,

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a \geq 0; \quad J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0.$$

Замечание 17.2. Следующие два интеграла также называют интегралами Лапласа:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2} dx &= [x = kt, k > 0] = \int_0^{+\infty} \frac{\cos akt}{k^2 + k^2 t^2} k dt = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} \frac{\cos akt}{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{2k} e^{-ka}, \quad a \geq 0, \quad k > 0; \\ \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{k^2 + x^2} dx &= \frac{\pi}{2} e^{-ka}, \quad a > 0, \quad k > 0. \end{aligned}$$

17.8. В-функция

НИЗОП-2 вида

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

называют В-функцией.

Свойства В-функции

1) В-функция определена при $a > 0, b > 0$.

Действительно, интеграл в определении В-функции имеет две особые точки $x = 0, x = 1$:

$$B(a, b) = \int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = I_1 + I_2;$$

$$I_1 : x^{a-1} (1-x)^{b-1} \underset{x \rightarrow +0}{\sim} \frac{1}{x^{1-a}},$$

при $1 - a < 1, a > 0$ интеграл сходится, при $a \leq 0$ расходится;

$$I_2 : x^{a-1} (1-x)^{b-1} \underset{x \rightarrow 1-0}{\sim} \frac{1}{(1-x)^{1-b}},$$

при $1 - b < 1, b > 0$ интеграл сходится, при $b \leq 0$ расходится. Таким образом, оба интеграла I_1 и I_2 сходятся лишь при $a > 0$ и $b > 0$.

2) Представление В-функции через НИЗОП-1

$$B(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b-1}} dt.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \left[x = \frac{t}{1+t} \right] = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t} \right)^{a-1} \left(1 - \frac{t}{1+t} \right)^{b-1} \frac{1}{(1+t)^2} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b-1}} dt. \end{aligned}$$

3) Формула понижения для В-функции $B(a+1, b) = \frac{aB(a, b)}{a+b}$.

$$\begin{aligned} B(a+1, b) &= \int_0^1 x^a (1-x)^{b-1} dx = \left[x^a = u, du = ax^{a-1} dx, dv = \right. \\ &\quad \left. (1-x)^{b-1} dx, v = \frac{1}{-b} (1-x)^b \right] = \frac{a}{b} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^b dx = \\ &= [x^{a-1} (1-x)^b = (1-x)^{b-1} (x^{a-1} - x^a) = (1-x)^{b-1} x^{a-1} - (1-x)^{b-1} x^a] = \\ &= \frac{a}{b} B(a, b) - \frac{a}{b} B(a+1, b) \Rightarrow B(a+1, b) = \frac{aB(a, b)}{a+b}. \end{aligned}$$

4) В-функция симметрична относительно a и b $B(a, b) = B(b, a)$.

Действительно, с помощью замены переменной $x = 1-t$, получаем

$$B(b, a) = \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-1} dx = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = B(a, b).$$

5) Формула дополнения для В-функции

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

Доказательство.

$$B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)} dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{(1+x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)} dx = J_1(a) + J_2(a).$$

При каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} J_1(a) &= \int_0^1 x^{a-1} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{k+1} x^{n+1}}{(1+x)} \right) dx = \\ &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k x^{k+a-1} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^{k+1} x^{n+a}}{(1+x)} dx = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+a} + \int_0^1 \frac{(-1)^{k+1} x^{n+a}}{(1+x)} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{k+1} x^{n+a}}{(1+x)} dx \right| \leq \int_0^1 x^{n+a} dx = \frac{1}{n+a-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то

$$J_1(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+a},$$

$$\begin{aligned} J_2(a) &= \left[\frac{1}{x} = t, x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{1}{t^2} dt \right] = \int_0^1 \frac{t^{-a}}{(1+t)} dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-a)+1}}{(1+t)} dt = \\ &= J_1(1-a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k-a+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a-k}, \\ B(a, 1-a) &= \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся следующим разложением функции $1/\sin t$, которое будет получено в п. 18.6,

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{t+\pi k} + \frac{1}{t-\pi k} \right), \quad -\pi < t < \pi.$$

Полагая в последнем равенстве $t = \pi a$, имеем

$$\frac{1}{\sin \pi a} = \frac{1}{\pi a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\pi a + \pi k} + \frac{1}{\pi a - \pi k} \right).$$

Таким образом,

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1. \quad \diamond$$

17.9. Г-функция

НИЗОП-1 вида

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \Gamma(a)$$

называют Г-функцией.

Свойства Г-функции

1) Г-функция определена при $a > 0$.

Действительно, интеграл $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ имеет две особые точки $x = 0, x = \infty$:

$$K_1 = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx, \quad x^{a-1} e^{-x} \underset{x \rightarrow +0}{\sim} \frac{1}{x^{1-a}},$$

если $1 - a < 1, a > 0$, то по степенному признаку для НИ-2 интеграл K_1 сходится, если же $a \leq 0$, то интеграл расходится;

$$K_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad x^{a-1} e^{-x} \underset{x \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

по степенному признаку для НИ-1 интеграл K_2 сходится при любом a . Таким образом, оба интеграла сходятся лишь при $a > 0$.

2) Г-функция имеет производные всех порядков.

Доказательство. Представим функцию $\Gamma(a)$ в виде

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = K_1(a) + K_2(a),$$

$$f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}, f'_a(x, a) = x^{a-1} e^{-x} \ln x,$$

$$\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} \ln x dx = K_3(a), \quad \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx = K_4(a)$$

и воспользуемся теоремой о дифференцировании НИЗОП-2 и следствием из теоремы о дифференцировании НИЗОП-1. Проверим, что условия этих теорем выполняются. Возьмем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$. Интегралы $K_1(a), K_3(a)$ являются равномерно сходящимися относительно $a \in [\alpha, \beta]$ по признаку Вейерштрасса для НИЗОП-2 (мажоранты соответственно $x^{\alpha-1}, x^{\alpha-1} |\ln x|$).

Интегралы $K_2(a), K_4(a)$ сходятся равномерно относительно $a \in [\alpha, \beta]$ по признаку Вейерштрасса для НИЗОП-1 (мажоранты $x^{\beta-1}, x^{\beta-1} \ln x$ соответственно). По правилу Лейбница

$$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx \quad \forall a > 0.$$

Аналогично убеждаемся, что

$$\Gamma''(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln^2 x dx, \dots, \Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln^n x dx \quad \forall a > 0. \triangleleft$$

3) Формула понижения для Г-функции $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \left[x^{a-1} dx = dv, v = \frac{x^a}{a}, e^{-x} = u, du = -e^{-x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx + x^a e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a} \Gamma(a+1). \end{aligned}$$

4) График Г-функции.

Вторая производная Г-функции принимает положительные значения $\Gamma''(a) > 0 \quad \forall a > 0$, следовательно, функция является строго выпуклой. Так как $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, то по теореме Ролля между 1 и 2 лежит стационарная точка Г-функции, $\Gamma'(c) = 0$, которая является точкой глобального минимума, причем $\Gamma(c) > 0$. На интервале $(0, c)$ Г-функция строго убывает, а на $(c, +\infty)$ строго возрастает и

$$\lim_{a \rightarrow +0} \Gamma(a) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \Gamma(a) = +\infty$$

$(\Gamma(a) \geq n! \text{ при } a \geq n+1)$. График Г-функции представлен на рисунке.

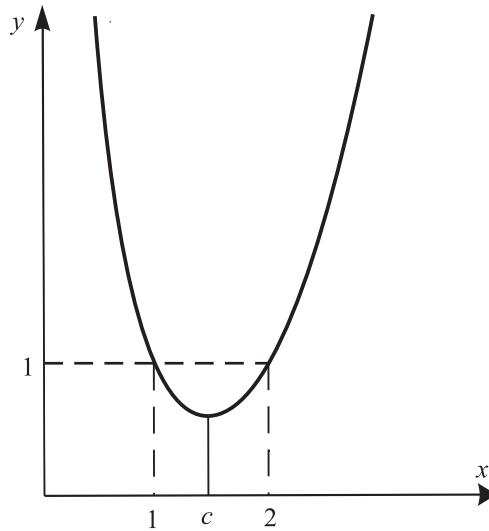


График Г-функции

5) Связь между В- и Г-функциями $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Доказательство проведем в два этапа.

Первый этап: $a > 1, b > 0$. В интеграле $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ сделаем замену $x = ty, t > 0$, получим

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^a y^{a-1} e^{-ty} dy, \quad \frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-ty} dy. \quad (17.28)$$

В формуле (17.28) заменим \$t\$ на \$1+t\$, а \$a\$ на \$a+b\$

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy. \quad (17.29)$$

Умножим обе части равенства (17.29) на t^{a-1} и проинтегрируем по \$t\$ от 0 до $+\infty$

$$\Gamma(a+b) \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} dt \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy. \quad (17.30)$$

В формуле (17.30) выражение слева равно $\Gamma(a+b) B(a, b)$, справа же, меняя

порядок интегрирования, получаем

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-ty} dt = \Gamma(a) \int_0^{+\infty} y^{b-1} e^{-y} dy = \Gamma(a)\Gamma(b).$$

Чтобы показать, что замена порядка интегрирования в формуле (17.30) возможна, достаточно проверить, что выполнены условия теоремы о перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле с двумя несобственными интегралами (п. 17.4):

- а) функция $y^{a+b-1}e^{-y}t^{a-1}e^{-ty} = f(t,y)$ непрерывна и не отрицательна на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty)$;
- б) интеграл $\int_0^{\infty} f(t,y)dt$ по признаку Вейерштрасса сходится локально равномерно относительно $y \in (0, +\infty)$. Действительно, $\forall [\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ имеет место неравенство $y^{a+b-1}e^{-y}t^{a-1}e^{-ty} \leq \beta^{a+b-1}e^{-\alpha}t^{a-1}e^{-t\alpha}$, а интеграл $\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t\alpha}dt$ сходится;
- в) интеграл $\int_0^{\infty} f(t,y)dy$ по признаку Вейерштрасса сходится локально равномерно относительно $t \in (0, +\infty)$. Действительно, $\forall [c, d] \subset (0, +\infty)$ имеет место неравенство $y^{a+b-1}e^{-y}t^{a-1}e^{-ty} \leq d^{a-1}e^{-y}y^{a+b-1}e^{-cy}$, а интеграл $\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y(c+1)}dy$ сходится;
- г) так как $\int_0^{+\infty} t^{a-1}dt \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy = \Gamma(a+b)B(a,b)$, то интеграл слева сходится.

Второй этап: $0 < a \leq 1, b > 0$. Как было показано на первом этапе,

$$B(a+1, b) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{a\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}. \quad (17.31)$$

Используя формулу понижения для B -функции

$$B(a+1, b) = \frac{a}{(a+b)}B(a, b)$$

из равенства (17.31), получаем $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$ ◀

6) Формула дополнения для Γ -функции

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

Действительно,

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = B(a)B(1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \Gamma(a)\Gamma(1-a).$$

6) Интеграл Эйлера — Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Действительно, используя замену $x^2 = t$, имеем

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Пример 17.6. К В-функции приводится следующий, часто встречающийся при решении задач, интеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} x \cos^{b-1} x dx = \left[\sin x = t, x = \arcsin x, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \\ &= \int_0^1 t^{a-1} (1-t^2)^{b-1} (1-t^2)^{-1/2} dt = \int_0^1 t^{a-1} (1-t^2)^{b/2-1} dt = \\ &= [t^2 = y, dt = \frac{1}{2} y^{-1/2} dy] = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{a/2-1/2} (1-y)^{b/2-1/2} dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right). \end{aligned}$$

ГЛАВА 18
РЯД ФУРЬЕ

18.1. Ряд Фурье по ортогональной системе функций

Рассмотрим систему

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (18.1)$$

непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Говорят, что система функций (18.1) ортогональна на $[a, b]$, если $\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$. Если, кроме того, $\int_a^b \varphi_m^2(x)dx = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$, то систему (18.1) называют ортонормированной на $[a, b]$.

Приведем примеры наиболее часто используемых ортогональных систем.

1) Тригонометрическая система

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

ортогональна на $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+m)x + \cos(n-m)x)dx = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x)dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mxdx = 0, \quad m \neq n.$$

Поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \pi,$$

то тригонометрическая система не является ортонормированной. Система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots$$

уже ортонормирована на $[-\pi, \pi]$.

2) Многочлены Лежандра

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad L_0(x) = 1, \quad (18.2)$$

образуют ортогональную систему на $[-1, 1]$.

Для доказательства ортогональности системы (18.2) надо показать, что

$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = 0, \quad n \neq m.$$

Пусть для определенности $n > m$. Точки $x = 1, x = -1$ являются нулями кратности k для многочлена $(x^2 - 1)^k$. Поэтому все производные многочлена $(x^2 - 1)^n$ до порядка $n - 1$ обращаются в нуль в точках $x = 1, x = -1$. Интегрируя по частям и используя тождество $((x^2 - 1)^m)^{(n+m)} \equiv 0$, имеем

$$\int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^n)^{(n)} ((x^2 - 1)^m)^{(m)} dx = \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)^n)^{(n-1)} ((x^2 - 1)^m)^{(m+1)} dx = \dots$$

$$\dots = \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)) ((x^2 - 1)^m)^{(n+m)} dx = 0.$$

3) Система косинусов

$$\frac{1}{2}, \cos x, \cos 2x, \dots$$

ортогональна на $[0, \pi]$ (доказать).

4) Система синусов

$$\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots$$

ортогональна на $[0, l]$ (доказать).

5) Тригонометрическая система

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots$$

ортогональна на $[-l, l]$ (доказать).

Говорят, что функция $f(x)$ разложима по ортогональной системе функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ на отрезке $[a, b]$, если существует последовательность действительных чисел (a_n) такая, что

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (18.3)$$

Всегда в дальнейшем считаем, что $\int_a^b \varphi_n^2(x) dx \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Лемма 18.1

Если функция $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся ряд (18.3), то функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и

$$a_n = \frac{1}{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx} \int_a^b \varphi_n(x) f(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (18.4)$$

Доказательство. Непрерывность функции $f(x)$ вытекает из теоремы Стокса — Зайделя. Из признака Абеля равномерной сходимости функционального ряда следует, что при умножении всех членов равномерно сходящегося ряда на ограниченную функцию получаем равномерно сходящийся ряд. Умножим ряд (18.3) на ограниченную по теореме Вейерштрасса функцию $\varphi_k(x)$, получим

$$f(x) \varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \varphi_k(x) \quad \forall x \in [a, b], \quad (18.5)$$

где справа — равномерно сходящийся на $[a, b]$ ряд. Проинтегрируем равенство (18.5) от a до b , получим

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = a_k \int_a^b \varphi_k^2(x)dx.$$

Возможность почлененного интегрирования ряда в последнем равенстве следует из теоремы о почленном интегрировании функционального ряда (п. 14.5). \triangleleft

Числа

$$a_n = \frac{1}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx} \int_a^b \varphi_n(x)f(x)dx$$

называют коэффициентами Фурье для функции $f(x)$.

В частности, если $\{\varphi_n(x)\}$ — тригонометрическая система и $f(x)$ — функция, разложимая в равномерно сходящийся на $[-\pi, \pi]$ ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то в этом случае коэффициенты Фурье имеют вид

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Говорят, что функция $f(x), x \in [a, b]$, кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, если существует разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ такое, что на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) функция $f(x)$ непрерывна и существуют односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_i-0)$, $f(x_i+0)$, $f(x_n-0)$, $i = 1, \dots, n-1$. Функцию $f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называют кусочно-непрерывной, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке $[a, b] \in (-\infty, +\infty)$.

Коэффициенты Фурье могут быть вычислены по формулам (18.4) для любой кусочно-непрерывной функции, а не только для функции, удовлетворяющей условию леммы 18.1.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, где a_n — коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, называют рядом Фурье для $f(x)$ по ортогональной системе функций $\{\varphi_n(x)\}$.

Если $f(x)$ произвольная кусочно-непрерывная функция, то далее будет показано, что ряд Фурье может оказаться расходящимся и даже если он сходится, то не обязательно к функции $f(x)$. Тот факт, что коэффициенты ряда Фурье вычислены по функции $f(x)$, будем записывать следующим образом:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

В частности, для тригонометрической на $[-l, l]$ системы ряда Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Перейдем к изучению сходимости ряда Фурье, при этом основную роль играет лемма Римана, к доказательству которой перейдем в п. 18.2.

18.2. Лемма Римана

Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin p x dx = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos p x dx = 0.$$

Доказательство достаточно провести для непрерывной функции $f(x)$, так как в силу аддитивности интеграла Римана интеграл от кусочно-непрерывной функции можно представить в виде суммы интегралов от непрерывных функций.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. На основании необходимого условия Дарбу интегрируемости (п. 6.9) существует разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ такое, что интегральное колебание Ω функции $f(x)$, соответствующее этому разбиению, не превосходит ε

$$\Omega = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k \leq \varepsilon, \quad \omega_k = \sup_{x_1, x_2 \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x_1) - f(x_2)|, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Зафиксируем это разбиение отрезка $[a, b]$. Пусть $m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin pxdx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \sin pxdx \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - m_k) dx \right| + \left| \sum_{k=1}^n m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin pxdx \right| \leq \\ &\leq \Omega + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n |m_k| |\cos px_k - \cos px_{k-1}| \leq \varepsilon + \frac{2}{p} \sum_{k=1}^n |m_k|. \end{aligned}$$

Существует $\nu(\varepsilon) > 0$, $\forall p \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow \frac{2}{p} \sum_{k=1}^n |m_k| \leq \varepsilon$. Таким образом,

$$\exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall p \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) \sin pxdx \right| \leq 2\varepsilon,$$

что доказывает равенство $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin pxdx = 0$. Второе соотношение $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos pxdx = 0$ доказывается аналогичным образом. \triangleleft

18.3. Представление Дирихле частных сумм тригонометрического ряда Фурье

Функцию $f(x)$ называют периодической, если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого x из множества задания $D(f)$ функции, точки $T + x, -T + x$ принадлежат $D(f)$ и

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T). \quad (18.6)$$

Наименьшее положительное число T , удовлетворяющее равенству (18.6), называют периодом функции, а функцию — T -периодической.

Рассмотрим функцию, определенную на $[-l, l]$. Ее можно периодически продолжить на \mathbb{R} , сдвигая последовательно ее график на промежуток $[-l, l]$ параллельно оси $0x$. В результате построим $2l$ -периодическую функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} \dots & \dots \\ f(x + l), & x \in [-3l, -l], \\ f(x), & x \in [-l, l], \\ f(x - l), & x \in [l, 3l], \\ \dots & \dots \end{cases}.$$

Если непрерывную на промежутке $[-l, l]$ функцию, имеющую предел $f(l-0)$, периодически продолжить на $(-\infty, +\infty)$, то продолженная функция непрерывна в том и только том случае, когда $f(l-0) = f(-l)$.

Лемма 18.2

Если $f(x)$ — кусочно-непрерывная, $2l$ -периодическая, определенная на $(-\infty, +\infty)$ функция, то для любого $a \in \mathbb{R}$ имеем $\int_{a-l}^{a+l} f(x)dx = \int_{-l}^l f(x)dx$.

Доказательство.

$$\int_{a-l}^{a+l} f(x)dx = \int_{a-l}^{-l} f(x)dx + \int_{-l}^l f(x)dx + \int_l^{a+l} f(x)dx.$$

В третьем интеграле сделаем замену переменных $x = t + 2l$

$$\int_l^{a+l} f(x)dx = \int_{-l}^{a-l} f(t + 2l)dt = - \int_{a-l}^{-l} f(t)dt.$$

Из последних двух соотношений получаем требуемое равенство. \triangleleft

Из леммы вытекает, что в формулах (18.4) для вычисления коэффициентов Фурье для $2l$ -периодической функции интегралы могут быть взяты по любому промежутку длины $2l$.

Рассмотрим 2π -периодическую, кусочно-непрерывную, определенную на \mathbb{R} функцию $f(x)$. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (18.7)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (18.8)$$

ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)$ по тригонометрической системе $1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$, $x \in [-\pi, \pi]$. Ряд (18.7) называют тригонометрическим рядом Фурье.

Исследуем поточечную сходимость ряда (18.7). Предварительно найдем представление Дирихле частных сумм

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0$$

тригонометрического ряда Фурье в точке x_0 . Заменим a_k, b_k их значениями по формулам (18.15)

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx \cos kx_0 + \sin kx \sin kx_0) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x - x_0) \right) dx. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Покажем, что

$$\frac{1}{2} + \cos x + \sin x + \cdots + \cos nx + \sin nx = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{2 \sin(x/2)}. \quad (18.10)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} &\frac{(1/2 + \cos x + \sin x + \cdots + \cos nx + \sin nx) 2 \sin(x/2)}{2 \sin(x/2)} = \\ &= \frac{\sin(x/2) + \sin(3x/2) - \sin(x/2) + \cdots + \sin((2n+1)x/2) - \sin((2n-1)x/2)}{2 \sin(x/2)} = \\ &= \frac{\sin((2n+1)x/2)}{2 \sin(x/2)}. \end{aligned}$$

Подставляя (18.10) в (18.9) и используя лемму 18.2, получаем

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin((2n+1)(x-x_0)/2)}{2 \sin((x-x_0)/2)} dx = [x-x_0=t] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(t+x_0) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x_0) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(t+x_0) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t+x_0) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt \right). \end{aligned}$$

После замены t на $-t$ во втором интеграле последней формулы имеем

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(t + x_0) + f(x_0 - t)) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt. \quad (18.11)$$

Представление частных сумм $S_n(x_0)$ ряда Фурье в виде (18.11) называют представлением Дирихле.

Интеграл (18.11) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(t + x_0) + f(x_0 - t)) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_\delta^\pi (f(t + x_0) + f(x_0 - t)) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^\delta (f(t + x_0) + f(x_0 - t)) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt \right) \end{aligned}$$

где $0 < \delta < \pi$. Функция $(f(t + x_0) + f(x_0 - t)) \frac{1}{2 \sin(t/2)}$ кусочно-непрерывна на отрезке $[\delta, \pi]$. По лемме Римана

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi (f(t + x_0) + f(x_0 - t)) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt = 0.$$

Поэтому предел частных сумм $S_n(x_0)$ ряда Фурье равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta (f(t + x_0) + f(x_0 - t)) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt.$$

В последний интеграл входят значения функции $f(x)$ лишь из промежутка $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, что позволяет сделать следующее заключение.

Принцип локализации. Сходимость ряда Фурье и его сумма в точке x_0 зависят исключительно от значений функции $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ точки x_0 .

Замечание 18.1. Для функции $f(x) \equiv 1$ ряд Фурье (18.7) состоит из одного слагаемого 1, следовательно, для этой функции $S_n(x) \equiv 1$ и равенство (18.11) в этом случае имеет вид

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt. \quad (18.12)$$

18.4. Поточечная сходимость ряда Фурье

Говорят, что функция $f(x), x \in [a, b]$, кусочно-дифференцируема, если существует такое разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, что на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, \dots, n$, функция $f(x)$ дифференцируема и имеет односторонние пределы $f(x_i + 0)$, $f(x_i - 0)$, $f(a + 0)$, $f(b - 0)$, $i = 1, \dots, n - 1$, кроме того, существуют односторонние производные $f'_+(x_i)$, $f'_-(x_i)$, $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ при условии, что значения функции на концах интервалов (x_{i-1}, x_i) заменены на соответствующие односторонние пределы. Функцию $f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называют кусочно-дифференцируемой, если она кусочно-дифференцируема на любом отрезке $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье

Если функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится поточечно к функции, которая является периодическим продолжением на \mathbb{R} функции

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & x \in (-\pi, \pi), \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = -\pi, x = \pi. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $f^*(x)$ — периодическое продолжение на \mathbb{R} функции $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in [-\pi, \pi]$ и рассмотрим представление Дирихле частных сумм ряда Фурье для функции $f^*(x)$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f^*(t+x_0) + f^*(x_0-t)) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt. \quad (18.13)$$

Умножая обе части равенства (18.12) на число

$$S(x_0) = \frac{f^*(x_0+0) + f^*(x_0-0)}{2}$$

и вычитая из (18.13), получаем

$$\begin{aligned} S_n(x_0) - S(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f^*(t+x_0) + f^*(x_0-t) - \\ &- f^*(x_0+0) - f^*(x_0-0)) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt. \end{aligned} \quad (18.14)$$

Покажем, что функция $g(t)$, принимающая на промежутке $t \in (0, \pi]$ значения

$$\left(\frac{f^*(t+x_0) - f^*(x_0+0)}{t} + \frac{f^*(x_0-t) - f^*(x_0-0)}{t} \right) \frac{t/2}{\sin(t/2)},$$

и $g(0) = 0$ является кусочно-непрерывной. Достаточно установить, что функции

$$g_1(t) = \begin{cases} \left(\frac{f^*(x_0+t) - f^*(x_0+0)}{t} \right) \frac{t/2}{\sin(t/2)}, & t \in (0, \pi], \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} \left(\frac{f^*(x_0-t) - f^*(x_0-0)}{t} \right) \frac{t/2}{\sin(t/2)}, & t \in (0, \pi], \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

кусочно-непрерывны. Рассмотрим, например, функцию $g_1(t)$. Функция $g_2(t)$ исследуется аналогичным образом. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \pi$ разбиение отрезка $[0, \pi]$ на интервалы, на которых функция $f^*(x_0+t)$ дифференцируема и, следовательно, непрерывна. На интервалах (t_{i-1}, t_i) , $i = 1, \dots, n$, функция $g_1(t)$ непрерывна, так как непрерывны функции $f^*(x_0+t)$, t , $\sin(t/2)$ и $t \neq 0$, $\sin(t/2) \neq 0$. Существуют пределы $g_1(t_i+0)$, $g_1(t_i-0)$, $i = 1, \dots, n$, так как функция $f^*(x_0+t)$ кусочно-дифференцируема. Остается показать, что существует предел $\lim_{t \rightarrow +0} g_1(t)$. Если x_0 является точкой, в которой $f^*(x)$ дифференцируема, то

$$\lim_{t \rightarrow +0} g_1(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{f^*(x_0+t) - f^*(x_0+0)}{t} \right) \frac{t/2}{\sin(t/2)} = (f^*)'(x_0).$$

Если x_0 является точкой, в которой $f^*(x)$ имеет лишь односторонние производные, то односторонний предел $g_1(+0)$ тоже существует и $\lim_{t \rightarrow +0} g_1(t) = (f^*)'_+(x_0)$. Переходя к пределу в равенстве (18.14) и используя лемму Римана, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(x_0) - S(x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t) \sin((2n+1)t/2) dt = 0.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что

$$S(x_0) = \begin{cases} \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}, & x_0 \in (-\pi, \pi), \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x_0 = -\pi, x_0 = \pi \end{cases}$$

и что сумма ряда Фурье — 2π -периодическая функция, потому что такими являются все члены ряда Фурье. \triangleleft

Следствие 18.1. Если $f(x)$ — кусочно-дифференцируемая, 2π -периодическая, определенная на \mathbb{R} функция, которая в каждой точке разрыва \bar{x} принимает значение

$$f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+0) + f(\bar{x}-0)}{2},$$

то ее тригонометрический ряд Фурье сходится поточечно на \mathbb{R} к функции $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство вытекает из теоремы о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье, так как при сделанных предположениях $\tilde{S}(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, где $\tilde{S}(x)$ — функция, к которой сходится ряд Фурье.

Следствие 18.2. Если $f(x)$ — непрерывная, кусочно-дифференцируемая, 2π -периодическая, определенная на \mathbb{R} функция, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится поточечно на \mathbb{R} к функции $f(x)$.

18.5. Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Рассмотрим кусочно-непрерывную на отрезке $[-l, l]$ функцию $f(x)$. Построим функцию $\tilde{f}(y) = f(y/\pi)$, которая определена и кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Пусть $\tilde{f}(y)$ соответствует тригонометрический ряд Фурье

$$\tilde{f}(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny + b_n \sin ny,$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) dy, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \cos ny dy, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \sin ny dy, \quad n = 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{18.15}$$

Вернемся к начальной переменной x , полагая $y = \pi x/l$, получим для функции $f(x)$ следующий ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{18.16}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \cos ny dy = \left[y = \frac{\pi x}{l} \right] = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (18.17)$$

Если $f(x)$ является, кроме того, кусочно-дифференцируемой, то из теоремы о поточечной сходимости ряда Фурье следует, что ряд Фурье (18.16), (18.17) сходится к значению функции $f(x)$ в каждой точке x из интервала $(-l, l)$, в которой $f(x)$ непрерывна и в каждой точке разрыва $\bar{x} \in (-l, l)$, в которой $f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+0) + f(\bar{x}-0)}{2}$, а также в точке $x = -l$, если $f(-l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}$, и в точке $x = l$, если $f(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}$.

Рассмотрим теперь функцию $\bar{f}(x)$, кусочно-непрерывную на отрезке $[a, b]$. Продолжая функцию $\bar{f}(x)$, $x \in [a, b]$, периодически на \mathbb{R} , построим функцию $f(x)$, которая является $2l$ -периодической, где $l = (b-a)/2$. Пусть функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье (18.16) с коэффициентами (18.17). Если $\bar{f}(x)$ кусочно-дифференцируемая, то используя лемму 18.2 и приведенные в начале п. 18.5 рассуждения видим, что функции $\bar{f}(x)$ соответствует ряд Фурье

$$\bar{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a}$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \bar{f}(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \bar{f}(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

который сходится к значению функции $\bar{f}(x)$ в каждой точке x из интервала (a, b) , в которой $\bar{f}(x)$ непрерывна, и в каждой точке разрыва $\bar{x} \in (a, b)$, в которой $\bar{f}(\bar{x}) = \frac{\bar{f}(\bar{x}+0) + \bar{f}(\bar{x}-0)}{2}$, а также в точке $x = a$, если $\bar{f}(a) = \frac{\bar{f}(a+0) + \bar{f}(b-0)}{2}$, и в точке $x = b$, если $\bar{f}(b) = \frac{\bar{f}(a+0) + \bar{f}(b-0)}{2}$.

Рассмотрим четную кусочно-непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

тригонометрический ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)$. Сделаем замену переменных $x = -t$ в первых слагаемых последних двух формул, получим

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0.$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье четной функции содержит лишь косинусы

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, то

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Ряд Фурье нечетной функции содержит лишь синусы

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Предположим далее, что функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и задана лишь на промежутке $[0, \pi]$. Определим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

которая является четной, следовательно, ее тригонометрический ряд Фурье содержит лишь косинусы

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (18.18)$$

Если ввести нечетную функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi], \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

то

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (18.19)$$

т. е. ее тригонометрический ряд Фурье содержит лишь синусы. Допустим дополнительно, что $f(x)$ кусочно-дифференцируема и непрерывна на $[0, \pi]$. Поскольку $f(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x)$ для $x \in (0, \pi]$, то из (18.18), (18.19) получаем разложение функции $f(x)$ в ряды Фурье, содержащие лишь косинусы или лишь синусы

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \in [0, \pi],$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad x \in (0, \pi), \quad S(0) = S(\pi) = 0.$$

Пример 18.1. Разложим функцию

$$y = \cos ax, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad a \text{ — нецелое число},$$

в тригонометрический ряд Фурье. Функция является четной непрерывно дифференцируемой и $f(\pi) = f(-\pi)$, следовательно, $b_n = 0$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax dx = \frac{2 \sin a\pi}{a\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(a+n)x + \cos(a-n)x) dx = (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \frac{\sin a\pi}{\pi}, \\ \cos ax &= \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \frac{\sin a\pi}{\pi} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

При $x = 0$ получим

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a\pi}{(a\pi)^2 - (n\pi)^2}.$$

Если положить $a\pi = t$, то имеем

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2t}{t^2 - (n\pi)^2} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right), \quad (18.20)$$

$t \neq k\pi$, $k = 0, -1, +1, \dots$. Формула (18.20) использовалась в п. 17.8 при исследовании В-функции.

18.6. Неравенство Бесселя

Пусть $f(x)$ — кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, $\{\varphi_n(x)\}$ — ортогональная на $[a, b]$ система непрерывных функций, а

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) -$$

соответствующий ряд Фурье. Тогда коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют следующему неравенству Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_a^b \varphi_n^2(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) dx.$$

Доказательство. Используя ортогональность системы $\{\varphi_n(x)\}$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x))^2 dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \int_a^b f(x) a_k \varphi_k(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x) dx = \\ &= \left[\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = a_k \int_a^b \varphi_k^2(x) dx \right] = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x) dx, \\ &\quad \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Частные суммы положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_a^b \varphi_n^2(x) dx$ ограничены. Следовательно, этот ряд сходится и его сумма не превосходит $\int_a^b f^2(x) dx$. \triangleleft

Следствие 18.3. Пусть $f(x)$ кусочно-непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция. Тогда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad (18.21)$$

где a_n, b_n — коэффициенты тригонометрического ряда Фурье, соответствующего функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ — тригонометрический ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)$. Для этого ряда $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} (1/2)^2 dx = \pi/2$ и неравенство Бесселя в этом случае имеет вид (18.21). \triangleleft

18.7. Равномерная сходимость ряда Фурье

Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(\pi) = f(-\pi)$. Тогда ее тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (18.22)$$

сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$.

Доказательство. Из теоремы о поточечной сходимости ряда Фурье следует, что ряд (18.22) сходится поточечно к функции $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Пусть производной $f'(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Найдем формулы, связывающие коэффициенты тригонометрических рядов Фурье функций $f(x)$ и $f'(x)$, $\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx =$

$$= [f'(x)dx = dv, v = f(x), \cos nx = u, du = -n \sin nx dx] =$$

$$= f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n, n = 1, 2, \dots, \alpha_0 = 0,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = -na_n, n = 1, 2, \dots.$$

Таким образом,

$$b_n = \frac{\alpha_n}{n}, \quad a_n = -\frac{\beta_n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots . \quad (18.23)$$

Запишем неравенство Бесселя для производной $f'(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx. \quad (18.24)$$

Используя соотношения (18.23), имеем

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| = \left| \frac{\alpha_n}{n} \right| + \left| \frac{\beta_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} |\alpha_n|^2 + \frac{1}{2} |\beta_n|^2 + \frac{1}{n^2}.$$

Из неравенства (18.24) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} ((1/2)|\alpha_n|^2 + (1/2)|\beta_n|^2)$.

По признаку Вейерштрасса (п. 14.2) функциональный ряд (18.22) сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$. \triangleleft

18.8. Почленное интегрирование ряда Фурье

Теорема о почленном интегрировании ряда Фурье

Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx -$$

ее тригонометрический ряд Фурье. Тогда для любого $x \in [-\pi, \pi]$ имеем

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx + b_n \left(\frac{1 - \cos nx}{n} \right),$$

причем ряд справа сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. По теореме Барроу функция

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{a_0 x}{2}$$

непрерывно дифференцируема на $[-\pi, \pi]$ и

$$\Phi(\pi) - \Phi(-\pi) = \int_0^{\pi} f(t) dt - \int_0^{-\pi} f(t) dt - a_0 \pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - a_0 \pi = 0.$$

По теореме о равномерной сходимости ряда Фурье тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx, \quad (18.25)$$

соответствующий функции $\Phi(x)$, сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функции $\Phi(x)$, здесь

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-\sin nx}{n} \Phi(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right) \sin nx dx \right) = -\frac{b_n}{n},$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \sin nx dx = \frac{a_n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Найдем коэффициент A_0 . Полагая в равенстве (18.25) $x = 0$, получаем

$$-\frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Таким образом,

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx + b_n \left(\frac{1 - \cos nx}{n} \right). \quad \triangleleft$$

18.9. Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических

Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция, $f(-\pi) = f(\pi)$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx -$$

ее тригонометрический ряд Фурье.

Ряд Фурье при сделанных предположениях, вообще говоря, не сходится к функции $f(x)$. Цель п. 18.9 — показать, что, тем не менее, последовательность средних арифметических частных сумм ряда Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$.

Пусть

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad \sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}.$$

Теорема Фейера

Если $f(x)$ — непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция и $f(-\pi) = f(\pi)$, то

$$\sigma_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows}^{\left[-\pi, \pi\right]} f(x).$$

Доказательство. Продолжим $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, периодически на \mathbb{R} , получим непрерывную на \mathbb{R} функцию $f^*(x)$. Воспользуемся представлением частных сумм $S_n(x)$ ряда Фурье функции $f^*(x)$, полученным в п. 18.3,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t+x) \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} dt.$$

Отсюда

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t+x) F_n(t) dt,$$

где

$$F_n(x) = \frac{D_0(x) + \dots + D_n(x)}{n+1}, \quad D_i(x) = \frac{\sin((2i+1)x/2)}{2 \sin(x/2)},$$

$x \in (n\pi, (n+1)\pi)$, $D_i(n\pi) = (2i+1)/2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Функции $F_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, называют ядрами Фейера. Покажем, что ядра Фейера обладают следующими свойствами:

- 1) $F_n(x)$ — четные, 2π -периодические и непрерывные функции;
- 2) $1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$;
- 3) $F_n(x) \geq 0$;
- 4) $\forall \delta : 0 < \delta < \pi \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\delta \leqslant x \leqslant \pi} F_n(x) = 0$.

Свойство 1) следует из аналогичных свойств функций $D_i(x)$.

Свойство 2) вытекает из установленной в п. 18.3 формулы

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Чтобы установить свойство 3), функцию $(n+1)F_n(x)$ представим в виде

$$(n+1)F_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin((2k+1)t/2)}{2 \sin(t/2)} = \\ = \frac{1}{4 \sin^2(x/2)} \sum_{k=0}^n 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2k+1}{2} x = \frac{1 - \cos((n+1)x)}{4 \sin^2(x/2)}. \quad (18.26)$$

Отсюда $F_n(x) \geq 0$.

Свойство 4) следует из соотношения (18.26). Действительно,

$$\max_{x \in [\delta, \pi]} F_n(x) \leq \frac{1}{2(n+1) \sin^2(\delta/2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Функция $f^*(x)$ непрерывна на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$. По теореме Кантора она равномерно непрерывна на $[-2\pi, 2\pi]$, т. е.

$$\exists \delta(\varepsilon), 0 < \delta(\varepsilon) < \pi, \forall x', x'' \in [-2\pi, 2\pi] : |x' - x''| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f^*(x') - f^*(x'')| \leq \varepsilon.$$

Отсюда

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \forall t : |t| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f^*(x+t) - f^*(x)| \leq \varepsilon. \quad (18.27)$$

Из свойств 1), 4) функций $F_n(x)$ имеем

$$\exists v(\varepsilon) > 0, \forall n \geq v(\varepsilon) \Rightarrow \max_{\delta(\varepsilon) \leq x \leq \pi} F_n(x) \leq \varepsilon, \max_{-\pi \leq x \leq -\delta(\varepsilon)} F_n(x) \leq \varepsilon. \quad (18.28)$$

Теперь, используя неравенства (18.27), (18.28) и ограниченность функции $f^*(x)$, $|f^*(x)| \leq M - \text{const}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, имеем

$$|\sigma_n(x) - f^*(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(t+x) - f^*(x)| F_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta(\varepsilon)} |f^*(t+x) - f^*(x)| F_n(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)} |f^*(t+x) - f^*(x)| F_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta(\varepsilon)}^{\pi} |f^*(t+x) - f^*(x)| F_n(t) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} (2M\pi\varepsilon + \varepsilon + 2M\pi\varepsilon) \quad \forall n \geq v(\varepsilon), \forall x \in [-\pi, \pi],$$

что означает $\sigma_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[-\pi, \pi]} f^*(x) = f(x)$. \square

18.10. Приближение непрерывной функции многочленами

Функцию вида

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos kx + B_k \sin kx = T_n(x), \quad A_k, B_k \in \mathbb{R},$$

называют тригонометрическим полиномом порядка n .

Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P(x)$ такой, что $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$.

Доказательство проведем в два этапа.

Первый этап, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$. Продолжим $f(x)$ на отрезок $[-\pi, \pi]$ четным образом. Получим четную непрерывную функцию $f^*(x)$ такую, что $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$, и совпадающую с $f(x)$ на $[0, \pi]$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. На основании теоремы Фейера существует тригонометрический многочлен $T(x)$ (среднее арифметическое частных сумм ряда Фурье) такой, что

$$|f^*(x) - T(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Функции $\cos kx, \sin kx$ разложимы в степенные ряды, локально равномерно сходящиеся на \mathbb{R} . Поскольку $T(x)$ — конечная линейная комбинация функций $\cos kx, \sin kx$, то существует многочлен $P(x)$ такой, что

$$|T(x) - P(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Теперь $\forall x \in [0, \pi]$

$$|f(x) - P(x)| \leq |f(x) - T(x)| + |T(x) - P(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Второй этап, функция $f(x)$ непрерывна на произвольном отрезке $[a, b]$. Положим $\Psi(t) = f\left(a + \frac{t}{\pi}(b-a)\right)$, $t \in [0, \pi]$. Функция $\Psi(t)$ непрерывна на $[0, \pi]$. Как было показано на первом этапе, для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P_\varepsilon(t)$ такой, что $|\Psi(t) - P_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0, \pi]$. Полагая в последнем равенстве $t = \frac{\pi(x-a)}{b-a}$, имеем

$$|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b],$$

где $P(x) = P_\varepsilon\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right)$. \triangleleft

Следствие 18.4. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует последовательность многочленов, равномерно сходящаяся на $[a, b]$ к функции $f(x)$ (доказать).

ГЛАВА 19

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

19.1. Интеграл Фурье

Пусть функция $f(t)$ кусочно-непрерывна и абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ является сходящимся. По признаку сравнения (п. 16.1) абсолютно сходятся также интегралы

$$a(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ty dt, \quad b(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ty dt \quad (19.1)$$

Несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(y) \cos xy + b(y) \sin xy dy \sim f(x) \quad (19.2)$$

называют интегралом Фурье для функции $f(x)$.

Подставляя выражения для $a(y)$ и $b(y)$ в интеграл (19.2), получим

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos ty \cos yx + \sin ty \sin yx) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t-x) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t-x) dt. \end{aligned} \quad (19.3)$$

Возьмем точку $x_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим функцию

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t-x_0) dt, \quad A > 0.$$

Получим аналог формулы (18.11) для интеграла Фурье. При любом $B > 0$ по теореме о перестановке порядка интегрирования (п. 17.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^A dy \int_{-B}^B f(t) \cos y(t - x_0) dt &= \int_{-B}^B dt \int_{-0}^A f(t) \cos y(t - x_0) dy = \\ &= \int_{-B}^B f(t) \frac{\sin A(t - x_0)}{t - x_0} dt. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Упомянутая теорема о перестановке порядка интегрирования применима, если подынтегральная функция $f(t) \cos y(t - x_0)$ непрерывна на прямоугольнике $[-B, B] \times [0, A]$. Но функция $f(t)$ лишь кусочно-непрерывна на $[-B, B]$. Чтобы воспользоваться теоремой, предварительно интеграл $\int_{-B}^B f(t) \cos y(t - x_0) dt$ представим в виде суммы интегралов по промежуткам, на которых $f(t)$ непрерывна, применим эту теорему к каждому слагаемому и затем опять вернемся к интегралу по промежутку $[-B, B]$. Перейдем к пределу в равенстве (19.4) при $B \rightarrow +\infty$. Справа получим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin A(t - x_0)}{t - x_0} dt,$$

слева —

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^A dy \int_{-B}^B f(t) \cos y(t - x_0) dt &= \int_0^A dy \left(\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^B f(t) \cos y(t - x_0) dt \right) = \\ &= \int_0^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t - x_0) dt = J(A). \end{aligned}$$

В предыдущей цепочке равенств мы перешли к пределу под знаком интеграла. Чтобы обосновать эту операцию, достаточно проверить, что выполняются условия теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла (п. 17.2): по теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра (п. 17.2), функция $g(B, y) = \int_{-B}^B f(t) \cos y(t - x_0) dt$ непрерывна по $y \in [0, A]$ при каждом фиксированном B (так как функция $f(t)$ лишь кусочно-непрерывна, то теорему о непрерывности ИЗОП следует применять следующим образом: представить интеграл $\int_{-B}^B f(t) \cos y(t - x_0) dt$ в виде суммы интегралов по промежуткам, на которых $f(t)$ непрерывна, по теореме о непрерывности ИЗОП

все эти интегралы — функции, непрерывные по y , но тогда непрерывна по y и функция $g(B, y)$ как сумма непрерывных функций);

$$g(B, y) \underset{B \rightarrow +\infty}{\overset{[0, A]}{\Rightarrow}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t - x_0) dt,$$

т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t - x_0) dt$ является равномерно сходящимся по $y \in [0, A]$, что следует из признака Вейерштрасса (п. 17.3), так как $|f(t) \cos y(t - x_0)| \leq |f(t)| \quad \forall t \in (-\infty, \infty), \quad \forall y \in [0, A]$, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ сходится.

Таким образом, $J(A)$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} J(A) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin A(t - x_0)}{t - x_0} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u + x_0) \frac{\sin Au}{u} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^0 f(u + x_0) \frac{\sin Au}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(u + x_0) \frac{\sin Au}{u} du \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(u + x_0) + f(x_0 - u)) \frac{\sin Au}{u} du. \end{aligned} \tag{19.5}$$

Формула (19.5) является аналогом представления Дирихле для частных сумм ряда Фурье.

19.2. Представление функции интегралом Фурье

Лемма Римана для несобственного интеграла

Если функция $f(t)$ кусочно-непрерывна и абсолютно интегрируема на промежутке $[a, +\infty)$, то

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(t) \sin pt dt = 0, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(t) \cos pt dt = 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из абсолютной интегрируемости функции $f(t)$ следует, что

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall A \geq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \int_A^{+\infty} f(t) \sin pt dt \right| \leq \varepsilon. \tag{19.6}$$

Зафиксируем некоторое $A \geq \delta(\varepsilon)$. Согласно лемме Римана,

$$\exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall p \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int_a^A f(t) \sin pt dt \right| \leq \varepsilon. \quad (19.7)$$

Из неравенств (19.6) и (19.7) имеем

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t) \sin pt dt \right| \leq 2\varepsilon \quad \forall p \geq \nu(\varepsilon),$$

что означает $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(t) \sin pt dt = 0$. Второе равенство доказывается аналогичным образом. \triangleleft

Теорема о представлении функции интегралом Фурье

Пусть функция $f(t)$ кусочно-дифференцируема и абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$. Тогда для любого $x \in (-\infty, +\infty)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(y) \cos xy + b(y) \sin xy dy = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

\vdots

$$a(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ty dt, \quad b(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ty dt.$$

Доказательство. Возьмем точку $x_0 \in (-\infty, \infty)$. Пусть

$$\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} = S_0.$$

Умножим обе части равенства (п. 17.7, с. 324)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin Ax}{x} dx = 1, \quad A > 0,$$

на S_0 и вычтем из (19.5), получим

$$J(A) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t+x_0) - f(x_0+0)}{t} - \frac{f(x_0-t) - f(x_0-0)}{-t} \right) \frac{\sin At}{t} dt.$$

Теперь разность $J(A) - S_0$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 J(A) - S_0 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 \left(\frac{f(t+x_0) - f(x_0+0)}{t} - \frac{f(x_0-t) - f(x_0-0)}{-t} \right) \frac{\sin At}{t} dt + \right. \\
 &\quad + \int_1^{+\infty} \left(\frac{f(t+x_0) + f(x_0-t)}{t} \right) \frac{\sin At}{t} dt + \\
 &\quad \left. + 2S_0 \int_1^{+\infty} \frac{\sin At}{t} dt \right) = J_1(A) + J_2(A) + J_3(A). \tag{19.8}
 \end{aligned}$$

Так как функция $f(x)$ кусочно-дифференцируемая, то функция

$$h(t) = \frac{f(t+x_0) - f(x_0+0)}{t} - \frac{f(x_0-t) - f(x_0-0)}{-t}$$

имеет предел при $t \rightarrow +0$, равный $f'_+(x_0) - f'_-(x_0)$. Отсюда и из условия, что функция f' является кусочно-непрерывной, следует, что $h(t)$ кусочно-непрерывна на $[0, 1]$. По лемме Римана предел $\lim_{A \rightarrow +\infty} J_1(A)$ равен нулю.

Функция

$$h_1(t) = \frac{f(t+x_0) + f(x_0-t)}{t}$$

кусочно-непрерывна и абсолютно интегрируема на промежутке $[1, +\infty)$. Абсолютная интегрируемость $h_1(t)$ на $[1, +\infty)$ вытекает из неравенства

$$\left| \frac{f(t+x_0) + f(x_0-t)}{t} \right| \leq |f(x_0+t)| + |f(x_0-t)|,$$

абсолютной интегрируемости на $(-\infty, +\infty)$ функции f и признака сравнения. По лемме Римана для несобственного интеграла имеем $\lim_{A \rightarrow +\infty} J_2(A) = 0$.

В интеграле $\int_1^{+\infty} \frac{\sin At}{t} dt$ сделаем замену $At = y$, получим $\int_A^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$.

Отсюда и из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$ имеем $\lim_{A \rightarrow +\infty} J_3(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 0$. Таким образом, из равенства (19.8) вытекает $\lim_{A \rightarrow +\infty} (J(A) - S_0) = 0$. \triangleleft

Пример 19.1. Представим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ интегралом Фурье. Функция $f(x)$ дифференцируема и абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, следовательно, представима интегралом Фурье.

В силу четности $f(x)$ имеем $b(y) = 0$,

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx = e^{-y}, \quad y \geq 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y} \cos xy dy.$$

19.3. Преобразование Фурье

Пусть $f(t)$ — непрерывная, кусочно-дифференцируемая и абсолютно интегрируемая на промежутке $(-\infty, +\infty)$ функция. По теореме о представлении функции интегралом Фурье для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(y) \cos xy + b(y) \sin xy dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt. \quad (19.9)$$

По признаку Вейерштрасса интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t) dt$ сходится равномерно относительно $y \in (-\infty, \infty)$, поэтому согласно следствию из теоремы о непрерывности НИЗОП-1 (п. 17.4) функция

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t) dt$$

непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и, следовательно, интегрируема по Риману на любом отрезке $[-A, A]$, более того, в силу нечетности функции $f(t) \sin y(x-t)$ по y

$$\int_{-A}^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t) dt = 0. \quad (19.10)$$

Однако нельзя утверждать, что несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t) dt \quad (19.11)$$

сходится. Последний интеграл является сходящимся лишь в смысле главного значения.

Введем понятие сходимости несобственного интеграла в смысле главного значения. Пусть функция $\varphi(t)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[-A, A] \subset (-\infty, +\infty)$. Если существует предел

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \varphi(t) dt,$$

то его называют главным значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt$ и обозначают

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt.$$

В этом случае функцию $\varphi(t)$ называют интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$ (в смысле главного значения), а интеграл — сходящимся в смысле главного значения. Несобственный интеграл сходится, если конечны два предела $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \varphi(t) dt$, $\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^0 \varphi(t) dt$. Ясно, что если несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt$ сходится, то

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt.$$

Интеграл может быть сходящимся в смысле главного значения, но являться расходящимся. Например, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ расходится, но $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = 0$.

Вернемся теперь к интегралу (19.11). Из (19.10) следует, что

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t) dt = 0. \quad (19.12)$$

Умножим обе части равенства (19.12) на $i/2\pi$ и сложим с (19.9), получим

$$\begin{aligned} f(x) &= v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos y(x-t) + i \sin y(x-t)) dt = \\ &= v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt. \end{aligned} \quad (19.13)$$

Если положить

$$F(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt,$$

то формула (19.13) примет вид

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) e^{iyx} dy. \quad (19.14)$$

Рассмотрим две вещественные функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на промежутке $[a, b]$. Сумму $f(x) + ig(x) = h(x)$, $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, где \mathbb{C} — множество комплексных чисел, называют комплекснозначной функцией с вещественной компонентой $f(x)$ и мнимой — $g(x)$. Комплекснозначную функцию считаем непрерывной (ограниченной), если непрерывны (ограничены) ее вещественная и мнимая компоненты. Производную и интеграл от комплекснозначной функции определяют покомпонентно

$$h'(x) = f'(x) + ig'(x), \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + i \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx, \alpha, \beta \in [a, b],$$

$$|h(x)| = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}.$$

Отображение, ставящее в соответствие комплекснозначной функции $h(x)$, заданной на \mathbb{R} , функцию

$$F(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-iyx} dx,$$

называют **преобразованием Фурье** для $h(x)$ и обозначают $F[h]$.

Отображение, ставящее в соответствие комплекснозначной функции $Q(y)$, заданной на \mathbb{R} , функцию

$$H(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) e^{iyx} dy,$$

называют обратным преобразованием Фурье и обозначают $F^{-1}[Q]$.

Свойства преобразования Фурье

1. Преобразование Фурье непрерывной абсолютно интегрируемой на \mathbb{R} вещественной функции $h(x)$ является непрерывной ограниченной на \mathbb{R} функцией.

Доказательство. Поскольку функция $h(x)$ абсолютно интегрируема на \mathbb{R} , то

$$|F(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{iyx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| dx = M - \text{const},$$

следовательно, $F(y)$ ограниченная на \mathbb{R} функция.

Запишем $F(y)$ в виде

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cos yx dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \sin yx dx \right) = F_1(y) - iF_2(y).$$

Функции $F_1(y)$ и $F_2(y)$ непрерывны по следствию из теоремы о непрерывности НИЗОП-1 (п. 17.4, с. 319). \triangleleft

2. Если $f(x)$ непрерывная, абсолютно интегрируемая и кусочно-дифференцируемая на $(-\infty, +\infty)$ вещественная функция, то

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad (19.15)$$

$$F[F^{-1}[f]] = f.$$

Доказательство. Формула (19.15) является другой записью формулы (19.14). В силу четности косинуса и нечетности синуса наряду с формулой (19.13) имеет место равенство

$$f(x) = v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(t-x)} dt,$$

что означает $F[F^{-1}[f]] = f$. \triangleleft

Пример 19.2. Найдем $F[e^{-x^2/2}]$.

$$I(y) = F[e^{-x^2/2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2 - ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos xy dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \sin xy dx \right).$$

Дифференцируя по y (показать возможность дифференцирования), получаем

$$\begin{aligned} I'(y) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2} \sin xy dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2} \cos xy dx \right) = \\ &= [xe^{-x^2/2} dx = dv, v = -e^{-x^2/2}, \sin xy = u, du = y \cos xy dx] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-x^2/2} \sin xy \Big|_{-\infty}^{+\infty} - y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos xy dx + e^{-x^2/2} \cos xy \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \right. \\ &\quad \left. - iy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \sin xy dx \right) = -yI(y). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I'(y) &= yI(y), \quad I(y) = Ce^{-y^2/2}, \quad I(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 1, \\ C &= 1, \quad I(y) = e^{-y^2/2}. \end{aligned} \tag{19.16}$$

Пример 19.3. Покажем, что

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] = e^{-y^2t}, \quad t > 0. \tag{19.17}$$

Действительно, используя формулу (19.16), имеем

$$\begin{aligned} F\left[\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}-ixy} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}-is(\sqrt{2t})y} ds = I(y\sqrt{2t}) = e^{-y^2t}. \end{aligned}$$

3. Преобразование Фурье для производной

Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема на \mathbb{R} и абсолютно интегрируема на \mathbb{R} вместе с $f'(x)$. Тогда

$$F[f'(x)] = iyF[f(x)].$$

Доказательство. По формуле Ньютона — Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

Поскольку $f'(x)$ абсолютно интегрируема, то существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)dt = A.$$

Покажем, что $A = 0$. Если предположить, что, например, $A > 0$, то для всех достаточно больших x выполняется неравенство $|f(x)| \geq A/2$, откуда по признаку сравнения интеграл $\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ является расходящимся, что противоречит условию теоремы. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Аналогично, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} F[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x)e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx \right) = iyF[f(x)]. \end{aligned} \quad \diamond$$

4. Преобразование Фурье для свертки

Пусть две комплекснозначные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены на \mathbb{R} , и несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)dt$ сходится при любом $x \in \mathbb{R}$. Тогда этот интеграл называют сверткой функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и обозначают $\varphi * \psi$

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)dt.$$

Лемма 19.1. *Если функции $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на \mathbb{R} , то свертка $\varphi * \psi$ также непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема на \mathbb{R} .*

Доказательство. Ограниченностость функции $(\varphi * \psi)(x)$ следует из неравенства

$$|(\varphi * \psi)(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| |\psi(x-t)| dt \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |\psi(t)| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt.$$

Поскольку функция $\varphi(t)\psi(x-t)$ непрерывна, а из неравенства

$$|\varphi(t)\psi(x-t)| \leq M|\varphi(t)|, M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\psi(t)|, \quad (19.18)$$

и сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt$ по признаку Вейерштрасса вытекает равномерная сходимость по $x \in \mathbb{R}$ несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|dt$, то выполнены все условия следствия из теоремы о непрерывности НИЗОП-1, следовательно, функция $(\varphi * \psi)(x)$ непрерывна на \mathbb{R} .

Докажем абсолютную интегрируемость свертки. Применяя теорему о перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле с двумя несобственными интегралами (п. 17.4), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |(\varphi * \psi)(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)||\psi(x-t)|dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)||\psi(x-t)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s)|ds. \end{aligned} \quad (19.19)$$

Осталось проверить, что выполнены условия теоремы о перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле с двумя несобственными интегралами. Равномерная сходимость по $x \in \mathbb{R}$ интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|dt$ показана выше. Равномерная сходимость интегралов

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|dx, \int_{-\infty}^0 |\varphi(t)\psi(x-t)|dx$$

по t из произвольного отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ следует из неравенств

$$|\varphi(t)\psi(x-t)| \leq M_1|\psi(x-t)|, M_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|,$$

$$\int_0^{+\infty} |\psi(x-t)|dx \leq \int_{-\beta}^{+\infty} |\psi(s)|ds, \int_{-\infty}^0 |\psi(x-t)|dx \leq \int_{-\infty}^{|\alpha|} |\psi(s)|ds$$

и сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s)|ds$. Сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)||\psi(x-t)|dx$ установлена при выводе формулы (19.19). \triangleleft

Теорема о преобразовании Фурье для свертки. Если функции $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на \mathbb{R} , то

$$F[\varphi * \psi] = \sqrt{2\pi} F[\varphi] F[\psi].$$

Доказательство. Применяя теорему о перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле с двумя несобственными интегралами, получаем

$$\begin{aligned} F[\varphi * \psi] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(t)\psi(x-t)) dt \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} \psi(x-t) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} \varphi(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isy} \psi(s) ds = \sqrt{2\pi} F[\varphi] \cdot F[\psi]. \end{aligned}$$

Возможность замены порядка интегрирования установлена при доказательстве леммы 19.1. \triangleleft

Пример 19.4. Найдем функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in R, \quad (19.20)$$

и начальному условию

$$u(x, +0) = f(x). \quad (19.21)$$

Далее мы не будем останавливаться на обосновании промежуточных преобразований, так как обычно при решении уравнений легче найти нужную функцию без обоснования проводимых преобразований, а затем непосредственной проверкой убедиться, что эта функция удовлетворяет рассматриваемому уравнению и начальному условию.

Будем искать решение уравнения (19.20) в следующем виде:

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f]v(t, y) e^{ixy} dy, \quad (19.22)$$

где $v(t, y)$ — некоторая функция, вид которой укажем позже. Функция $u(t, y)$ будет решением задачи (19.20), (19.21), если

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f] \left(\frac{\partial v(t, y)}{\partial t} + y^2 v(t, y) \right) e^{ixy} dy \equiv 0.$$

Чтобы имело место последнее тождество, достаточно, чтобы функция $v(t, y)$ удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial v(t, y)}{\partial t} + y^2 v(t, y) = 0$$

и начальному условию $v(y, 0) = 1$. Решением этой задачи является функция $v = e^{-ty^2}$. Подставляя ее в формулу (19.22), имеем

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f] e^{-ty^2} e^{ixy} dy.$$

Преобразуем последнее выражение, используя формулу (19.17) и свойства 2 и 4 преобразования Фурье,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f(x)] F\left[\frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] e^{ixy} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f(x)] * \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{ixy} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F^{-1}\left[F\left[f(x) * \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} f(s) ds. \end{aligned} \quad (19.23)$$

Формулу (19.23) называют формулой Пуассона. Функция $u(t, x)$ из формулы Пуассона является решением задачи (19.20), (19.21).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Архипов, Г. И.* Лекции по математическому анализу : учеб. для университетов и пед. вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. И. Чубариков. — М. : Выш. шк., 1999.
- Богданов, Ю. С.* Лекции по математическому анализу : в 2 ч. / Ю. С. Богданов. — Минск : БГУ, 1974, 1978. — 2 ч.
- Богданов, Ю. С.* Математический анализ / Ю. С. Богданов, О. А. Кастроца, Ю. Б. Сыроид. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
- Воднев, В. Т.* Основные математические формулы / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. — Минск : Выш. шк., 1995.
- Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1990.
- Зверович, Э. И.* Вещественный и комплексный анализ : в 6 ч. / Э. И. Зверович. — Минск : Выш. шк., 2006–2008. — 6 ч.
- Зорич, В. А.* Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Зорич. — М. : Наука, 1981, 1984. — 2 ч.
- Ильин, В. А.* Основы математического анализа : в 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Поняк. — М. : Наука, 2002, 2005. — 2 ч.
- Ильин, В. А.* Математический анализ. Начальный курс / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Ч. Сендов. — М. : МГУ, 1985.
- Ильин, В. А.* Математический анализ. Продолжение курса / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Ч. Сендов. — М. : МГУ, 1987.
- Кудрявцев, Л. Д.* Математический анализ : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Дрофа, 2003–2006. — 3 т.
- Никольский, С. М.* Курс математического анализа / С. М. Никольский. — М. : Наука, 2001.
- Рождественский, Б. Л.* Лекции по математическому анализу / Б. Л. Рождественский. — М. : Наука, 1972.
- Тер-Крикоров, А. М.* Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. — М. : Наука, 2001.
- Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Физматлит, 2003. — 3 т.
- Шварц, Л.* Анализ : в 2 т. / Л. Шварц. — М. : Мир, 1972. — 2 т.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аддитивность** 112, 159, 171, 175, 237
- Асимптота**
– вертикальная левосторонняя 89
– правосторонняя 89
– двухсторонняя 89
– наклонная 89
- Величины экстремальные** 228
- Градиент** 141, 251
- Грань**
– точная верхняя 7
– нижняя 7
- График** 131
- Группировка членов ряда** 264
- Диаметр**
– разбиения 106, 154, 199
– фигуры 153
- Дивергенция** 251
- Дифференциал** 57, 137, 190, 193
– биномиальный 103
– второй 63, 145
– порядка n 63, 145
- Длина**
– кривой 121
– пути 171
- Дополнение** 129
- Дробь простейшая** 98
- Замыкание** 129
- Инвариантность** формы
первого дифференциала 64, 141, 196
- Интеграл**
– двойной 154
– Дирихле 323
– зависящий от параметра 303
- кратный 199
– криволинейный первого типа 171, 232
– – второго типа 174, 232
– неберущийся 105
– неопределенный 93
– несобственный абсолютно сходящийся 295
– – сходящийся в смысле главного значения 362
– – условно сходящийся 295
– – первого типа 291
– – – зависящий от параметра 310
– – – – равномерно сходящийся 31
– – – – сходящийся локально равномерно 319
– – – – расходящийся 291
– – – – сходящийся 291
– – второго типа 299
– – – зависящий от параметра 321
– – – – равномерно сходящийся 32
– – – – второго типа
– – – – сходящийся 299
– – – – локально равномерно 322
– – – – расходящийся 299
– – – – поверхностный первого типа 237
– – – – второго типа 239
– – повторный 162
– – Римана 107
– – с переменным верхним пределом 11
– – Фурье 356
– – Эйлера – Пуассона 333
- Интегралы Лапласа** 324
- Интервал** 7
- Касательная** 169, 233
- Клетка** 199
- Колебание**
– интегральное 124
– функции 50
- Компакт** 130
- Композиция степенных рядов** 286

- Косинус гиперболический 43
 Котангенс гиперболический 43
 Коэффициенты Фурье 337
 Край поверхности 238
 Кривая 120
 - гладкая 121
 - замкнутая 120
 - кусочно-гладкая 153
 - простая 120
 - пространственная 231
 - спрямляемая 121
 Критерий
 - вогнутости дважды дифференцируемой функции 85
 - выпуклости 84
 - строгой 84
 - – – дважды дифференцируемой функции 85
 - Гейне 26
 - Гейне для ϕ_2 132
 - Гейне непрерывности функции 33
 - Дарбу для двойного интеграла 158
 - дифференцируемости функции 57
 - интегральный 257
 - квадрируемости 118
 - Коши интегрируемости по Риману 108, 155
 - – – равномерной сходимости ϕ_2 к предельной функции 305
 - – – – НИЗОП-1 270
 - – – – ФП 311
 - – – – ФР 271
 - – – сходимости НИ-1 294
 - – – последовательности 18
 - – – ряда 260
 - – – кубируемости 156
 - – – монотонности 78
 - – – строгой 79
 - – – непрерывности монотонной функции 36
 - – – постоянства дифференцируемой функции 67
 - – – равенства односторонних пределов 27
 - – – равномерной сходимости ϕ_2 к предельной функции 304
 - – – – НИЗОП-1 311
 - – – – ФП 270
- – – ФР 271
- различия чисел 6
 - Сильвестра 219
 - совпадения верхнего и нижнего пределов 20
 - – степенных рядов 285
 - соленоидальности векторного поля 253
 - сходимости положительного ряда 255
 - – НИ-1 от положительной функции 293
- Круг 129
- Лемма**
- Абеля 280
 - о двойном интеграле по прямоугольнику 160
 - о ломаной 182
 - Римана 338
 - – – для несобственного интеграла 358
- Ломаная 121
- Максимум**
- глобальный 228
 - локальный 80, 217
 - – – строгий 80, 217
- Матрица**
- квадратичной формы 218
 - Якоби 193
 - – – неявной векторной функции 209
- Мажоранта 272
- Минимум**
- глобальный 228
 - локальный 80, 217
 - – – строгий 80, 217
- Многочлен 97
- Многочлены Лежандра 335
- Множество**
- выпуклое 228
 - задания функции 21
 - замкнутое 129
 - значений функции 21
 - ограниченное 7, 130
 - открытое 129
 - связное 130
- M*-лемма для интеграла Римана 108

- для предела функции 25
- для последовательности 11
- Множители Лагранжа 224
- Неравенство**
 - Бесселя 349
 - треугольника 188
- Норма 188
- Нормаль 233
- Область** 130
 - объемно односвязная 249
 - ограниченная замкнутая 130
 - односвязная 183
 - поверхностью односвязная 249
- Объем 155, 199
- Окрестность 129, 189
 - левосторонняя 26
 - правосторонняя 26
 - проколотая 24
- Остаток последовательности 10
- Отображение 21
 - биективное 23
 - инъективное 23
 - сюръективное 23
- Отрезок 7
- Первообразная 93, 186
- Перестановка ряда 265
- Плоскость касательная 137
- Площадь
 - нулевая 153
 - поверхности 235
 - фигуры 118
- Поверхность 230
 - гладкая 232
 - двухсторонняя 239
 - кусочно-гладкая 235
 - простая 230
- Подпоследовательность 16
- Подстановки Эйлера 103
- Поле
 - векторное 251
 - – потенциальное 252
 - – соленоидальное 253
 - скалярное 251
- Полином тригонометрический 354
- Последовательность 10
 - бесконечно большая 14
 - бесконечно малая 11
 - возрастающая 15
 - двойная 266
 - локально равномерно сходящаяся 278
 - монотонная 15
 - ограниченная 10
 - расходящаяся 11
 - строго возрастающая 15
 - – убывающая 15
 - сходящаяся 10
 - – поточечно 269
 - – равномерно 269
 - – убывающая 15
 - частных сумм 254
 - фундаментальная 18
- Потенциал 252
- Правило Лейбница 62
 - Лопитала 69
 - первое исследования точек, подозрительных на наличие экстремума 81
 - второе исследования стационарных точек 81
 - третье исследования стационарных точек 82
 - первое исследования точек, подозрительных на наличие перегиба 86
 - второе исследования точек спрямления 87
 - третье исследования точек спрямления 87
- Предел 130, 189
 - бесконечный 15
 - верхний 19
 - вдоль множества 133, 189, 191
 - двойной последовательности 266
 - замечательный
- тригонометрический 30
 - логарифмический 45
 - нижний 19
 - повторный 266
 - показательно-степенной 45
 - показательный 45
 - последовательности 11
 - слева 27
 - справа 26
 - степенной 45

- частичный 19
- функции 24, 132
- Представление Дирихле частных сумм ряда Фурье 342
- Преобразование
 - диффеоморфное 164, 201
 - ε -диффеоморфное 166, 201
 - Фурье 363
 - Фурье обратное 363
- Приближение числа по недостатку порядка n 5
- Признак
 - Абеля 263
 - – для НИ-1 298
 - – равномерной сходимости
- НИЗОП-1 312
 - – – ФР 273
 - Вейерштрасса 272
 - – равномерной сходимости
- НИЗОП-1 312
 - – – НИЗОП-2 321
 - Гаусса 260
 - Даламбера 257
 - Дирихле 262
 - – равномерной сходимости
- НИЗОП-1 313
 - – – ФР 273
 - – для НИ-1 297
 - Коши 256
 - Лейбница 261
 - локальной зависимости функций 213
 - независимости функций 212
- Раабе 259
 - сравнения 255
 - – для НИ-1 293
 - – предельный 255
 - – – для НИ-1 294
 - степенной 258
 - – для НИ-1 294
- Принцип
 - выбора 17
 - локализации 342
 - математической индукции 10
- Приращение
 - аргумента 32
 - функции 32
- Произведение
 - бесконечное 268
 - – расходящееся 268
- – – к нулю 268
- – расходящееся 268
- рядов 265
- Производная 52
 - бесконечная 52
 - вторая 60
 - левосторонняя 58
 - параметрически заданной
- функции 64
 - по направлению 141
 - правосторонняя 58
 - смешанная 144
 - частная 137, 190
 - – порядка n 143, 197
- Промежуток 7
- Путь 170
 - замкнутый 120
 - кусочно гладкий 170
 - простой 170
 - спрямляемый 171
- Радиус сходимости 281
- Разбиение 154, 199
- Разложение
 - косинуса 75
 - логарифма 75
 - синуса 74
 - степенной функции 76
 - экспоненты 75
- Расстояние 129, 188
- Ротор 251
- Ряд
 - абсолютно сходящийся 261, 267
 - гармонический 258
 - – обобщенный 258
 - двойной 267
 - знакопеременный 260
 - знакочередующийся 261
 - локально равномерно сходящийся 277
 - положительный 254
 - равномерно сходящийся 271
 - расходящийся 254
 - степенной 280
 - строго положительный 254
 - сходящийся 254
 - Тейлора 285
 - условно сходящийся 261
 - Фурье 337
 - – тригонометрический 340

- числовой 254
- Свойства**
 - бесконечно больших последовательностей 14
 - бесконечных произведений 268
 - B -функции 326
 - Γ -функции 329
 - двойного интеграла 157
 - интеграла Римана 110
 - КРИ-1 171
 - КРИ-2 175
 - непрерывных функций двух переменных 135
 - НИ-1 292
 - НИ-2 299
 - ПОВИ-1 237
 - ПОВИ-2 240
 - предела функции 29
 - – – двух переменных 132
 - преобразования Фурье 364
 - степенных рядов 283
 - сходящихся последовательностей 12
- Сектор криволинейный 119
- Синус гиперболический 43
- Система функций
 - ортогональная 334
 - ортонормированная 334
- Следствие
 - из теоремы о дифференцировании НИЗОП-1 319
 - – о непрерывности НИЗОП-1 319
 - – – о почленном дифференцировании ФР 278
 - – – интегрировании ФР 278
 - – Стокса – Зайделя 278
- Сторона поверхности
 - отрицательная 238
 - положительная 238
- Сумма
 - двойного ряда 267
 - интегральная 106, 154, 199
- Совокупность
 - функциональная зависимая 210
 - – независимая 211
- Сходимость
 - поточечная 304
 - равномерная 304
- Сфера 190
- Таблица**
 - неопределенных интегралов 94
 - производных 57
- Тангенс гиперболический 43
- Тело 155, 199
 - кубируемое 155, 199
 - простое 199
 - составное 246
- Теорема
 - Барроу 113
 - Вейерштрасса 48
 - Кантора 49, 136
 - Коши 68
 - Лагранжа 67
 - о возрастающей ограниченной двойной последовательности 267
 - о выборе монотонной подпоследовательности 16
 - о глобальном минимуме выпуклой функции 89, 229
 - о гранях 8
 - о двойной последовательности 267
 - о двойном ряде 267
 - о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра 307
 - – НИЗОП-1 318
 - – НИЗОП-2 322
 - – – с пределами интегрирования, зависящими от параметра 308
 - – векторной функции 194
 - о длине кривой 122
 - о зависимости линейных функций 211
 - о замене переменной при вычислении предела 30
 - – переменных в 2И 167
 - – – в кратном интеграле 201
 - – порядка интегрирования 310
 - – – – в повторном интеграле
 - с одним несобственным интегралом 317
 - – – – – с двумя
 - несобственными интегралами 320
 - о колебании функции 51
 - о компакте 130
 - о локальной ограниченности 38
 - о матрице Якоби сложной функции 194
 - о монотонной ограниченной последовательности 15

- о наклонной асимптоте 90
- о независимости КРИ-2 от пути интегрирования 183, 250
- о непрерывности арифметических комбинаций непрерывных функций 38
- – векторной функции 192
- – интеграла, зависящего от параметра 307
- – НИЗОП-1 317
- – НИЗОП-2 322
- – обратной функции 37
- – предельной функции 305
- – сложной функции 37 134
- – функции, имеющей конечную производную 53
- о неявной функции 149
- – скалярной функции векторного аргумента 204
- – векторной функции 205
- о перестановке ряда 265
- о переходе к пределу под знаком интеграла 306
- – – НИЗОП-1 315
- – – НИЗОП-2 322
- о поточечной сходимости ряда Фурье 343
- о почленном дифференцировании степенного ряда 284
- – – ФР 276
- – интегрировании ФР 275
- – – ряда Фурье 351
- о представлении функции интегралом Фурье 359
- о приближении непрерывной функции многочленами 355
- о производной арифметических комбинаций функций 53
- – обратной функции 55
- – сложной функции 56
- о промежуточном значении 47
- о равномерной сходимости ряда Фурье 350
- о разложении рациональной функции 98
- – сложной функции в степенной ряд 286
- о сведении 2И к повторному интегралу 160
- – кратного интеграла к повторному интегралу 200
- – КРИ-2 к 2И 179
- – КРИ-2 к ПОВИ-2 248
- – ПОВИ-2 к ЗИ 246
- о смешанных производных 144
- о среднем 112, 157
- о стабилизации знака 38
- о частных производных сложной функции 138
- о функциях с совпадающими производными 67
- об интегрируемости функции с нулевым по площади множеством точек разрыва 160
- – – непрерывной на отрезке функции 110
- – – на компакте функции 155
- об обратной функции 210
- об общем виде первообразной 93
- об остаточном члене формул Тейлора 71
- обобщенная о среднем интеграла Римана 296
- Ролля 65
- Стокса — Зайделя 275
- Ферма 66
- Фейера 353
- Точка**
- бесконечного скачка 35
- внутренняя 129
- – поверхности 238
- глобального максимума 88
- – минимума 88
- граничная 129
- изолированная 129
- конечного скачка 34
- краевая 238
- неопределенности 35
- особая 298
- перегиба 85
- предельная 129
- разрыва первого типа 35
- – второго типа 35
- самопересечения 120
- спрямления 85
- стабильного ранга 213
- стационарная 65
- условного максимума 222
- – локального максимума 222
- – минимума 221
- – локального минимума 221
- Трапеция криволинейная** 118
- – элементарная относительно

-
- оси $0x$ 163
 --- $0y$ 162
- Уравнение**
 – векторное кривой 231
 – поверхности 230
 – параметрическое кривой 169, 231
 – поверхности 230
 – связи 222
- Условие**
 – Дарбу интегрируемости необходимое 124
 – Дарбу интегрируемости достаточное 126
 – достаточное дифференцируемости 140, 191, 194
 – локального экстремума 219
 – выпуклости скалярной функции векторного аргумента 229
 – равномерной сходимости ф2п к предельной функции 305
 – Коши 18
 – необходимое Лагранжа локального условного экстремума 225
 – локального экстремума 80, 217
 – точки перегиба 85
 – интегрируемости по Риману первое 107, 154
 – интегрируемости по Риману второе 107, 155
 – сходимости ряда 254
- Фигура** 117
 – квадрируемая 118
 – простая 118
 – составная 178
- Фигуры диффеоморфные** 164
- Форма**
 – квадратичная 218
 – положительно определенная 218
 – полуопределенная 218
 – отрицательно определенная 218
 – знакопеременная 218
 – Коши для остаточного члена 72
 – Лагранжа для остаточного члена 72
 – Пеано для остаточного члена 72
- Формула**
 – Гаусса – Остроградского 246
 – Грина 179
- Даламбера вычисления радиуса сходимости 281
 – интегрирования по частям 115, 302
 – замены переменных 115, 301
 --- в 2И 167
 – конечных приращений 67
 --- для ф2п 139
 – Коши вычисления радиуса сходимости 281
 – Коши – Адамара вычисления радиуса сходимости 282
 – Лагранжа 67
 – Лейбница 307
 – Ньютона – Лейбница 114, 300
 – сведения ПОВИ-2 к 2И 240
 – связывающая В- и Г-функции 331
 – Стокса 248
 – Тейлора 71, 147, 198
 -- в дифференциалах 73
- Функции эквивалентные** 21
- Функция** 21
 – бесконечно большая 46
 – малая 46
 – В 326
 – большого порядка малости 46
 – векторная 191
 – вещественная 21
 – вогнутая 83
 -- строго 83
 – возрастающая 35
 – выпуклая 82, 228
 -- строго 82
 – Г 329
 – двух переменных 131
 – дифференцируемая в точке 57, 137, 190, 192
 -- на промежутке n -раз 61
 – интегрируемая в несобственном смысле 291
 -- в смысле главного значения 362
 -- по Риману 107, 154, 199
 – комплекснозначная 363
 – кусочно-дифференцируемая 343
 – кусочно-непрерывная 35
 – Лагранжа 224
 – логарифмическая 42
 – монотонная 35
 – непрерывная в точке 32, 134, 189
 -- вдоль множества 134, 189, 192

- — на множестве 134
 - — по совокупности переменных 134
 - — по x и по y 134
 - — слева 34
 - — справа 34
 - непрерывно дифференцируемая на множестве 140, 190
 - — — m раз 145, 197
 - — — на промежутке 59
 - — — n -раз 61
 - неявная 148
 - — скалярная векторного аргумента 204
 - — векторная 205
 - обратная 23
 - периодическая 339
 - показательная 40
 - равномерно непрерывная 49
 - разрывная в точке 32
 - рациональная 97
 - — от двух переменных 102
 - — правильная 98
 - —rationально-тригонометрическая 104
 - — скалярная 21
 - — векторного аргумента 189
 - сложная 23
 - степенная с вещественным показателем 43
 - — с рациональным показателем 39
 - стремящаяся к бесконечности 2
 - строго монотонная 35
 - — возрастающая 35
 - — убывающая 35
 - — убывающая 35
 - элементарная 43
- Цилиндроид** 156, 200
- Циркуляция** 251
- Числа** натуральные 5
- вещественные 5
 - иррациональные 5
 - рациональные 5
- Член остаточный** формулы Тейлора 71
- Шар** 188
- Экстремум локальный** 80
- Ядра Фейера** 353
- Якобиан** 165

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	3
ПРЕДИСЛОВИЕ	4
 ГЛАВА 1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	
1.1. Числа.....	5
1.2. Границы числовых множеств.....	7
1.3. Логические операции	9
1.4. Предел последовательности	10
1.5. Свойства сходящейся последовательности	12
1.6. Бесконечно большая последовательность	14
1.7. Монотонная последовательность	15
1.8. Принцип выбора	16
1.9. Число e	17
1.10. Критерий Коши	18
1.11. Верхний и нижний пределы.....	19
 ГЛАВА 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ	
2.1. Функции.....	21
2.2. Предел функции	24
2.3. Односторонние и бесконечные пределы	26
2.4. Замечательный тригонометрический предел.....	30
2.5. Непрерывная функция	32
2.6. Классификация точек разрыва.....	34
2.7. Непрерывность монотонной функции	35
2.8. Непрерывность обратной и сложной функций.....	37
2.9. Локальные свойства непрерывной функции.....	38
2.10. Показательная, логарифмическая и гиперболические функции	39
2.11. Замечательные показательно-степенной, логарифмический, показательный и степенной пределы	45
2.12. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.....	46
2.13. Глобальные свойства непрерывной функции	47
2.14. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.....	49
2.15. Колебание функции	50
 ГЛАВА 3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ	
3.1. Определение производной. Производные основных элементарных функций.....	52
3.2. Производные обратной и сложной функций.....	55
3.3. Дифференцируемая функция. Дифференциал.....	57
3.4. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница	60

3.5. Свойства дифференцируемой функции.....	65
3.6. Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ по правилу Лопитала.....	68
3.7. Формула Тейлора. Теорема об остаточном члене формулы Тейлора	71
3.8. Представление остаточного члена формулы Тейлора в формах Лагранжа, Коши и Пеано	72
3.9. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора	74

**ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ
С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ**

4.1. Критерий монотонности	78
4.2. Локальный экстремум	80
4.3. Выпуклая функция.....	82
4.4. Точка перегиба	85
4.5. Глобальный экстремум	87
4.6. Асимптоты.....	89
4.7. Построение графиков функций.....	91

ГЛАВА 5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1. Первообразная. Неопределенный интеграл.....	93
5.2. Методы вычисления неопределенных интегралов	94
5.3. Разложение рациональной функции на простейшие дроби.....	97
5.4. Вычисление коэффициентов разложения рациональной функции на простейшие дроби	99
5.5. Интегрирование рациональных функций	101
5.6. Интегрирование иррациональных функций.....	102
5.7. Интегрирование рационально-тригонометрических функций.....	104

ГЛАВА 6. ИНТЕГРАЛ РИМАНА

6.1. Интегральные суммы и интеграл Римана	106
6.2. Критерий Коши интегрируемости по Риману	108
6.3. Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции	109
6.4. Свойства интеграла Римана	110
6.5. Теорема Барроу	113
6.6. Методы вычисления интегралов Римана	114
6.7. Геометрический смысл интеграла Римана	117
6.8. Длина кривой	120
6.9. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману.....	124
6.10. Классы функций, интегрируемых по Риману	127

ГЛАВА 7. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1. Последовательность в \mathbb{R}^2	129
7.2. Предел функции двух переменных	131
7.3. Непрерывная функция двух переменных.....	134
7.4. Дифференцируемая функция двух переменных.....	136
7.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных	143
7.6. Формула Тейлора для функции двух переменных	146
7.7. Теорема о неявной функции.....	148

ГЛАВА 8. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. Определение двойного интеграла.....	153
8.2. Геометрический смысл и свойства двойного интеграла	155
8.3. Критерий Дарбу для двойного интеграла	158
8.4. Сведение двойного интеграла к повторному	160
8.5. Замена переменных в двойном интеграле.....	164

ГЛАВА 9. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

9.1. Криволинейный интеграл первого типа	169
9.2. Криволинейный интеграл второго типа	174
9.3. Формула Грина.....	178
9.4. Выражение площади через криволинейный интеграл второго типа	181
9.5. Условия независимости криволинейного интеграла второго типа от пути интегрирования	182

ГЛАВА 10. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ

10.1. Топология \mathbb{R}^n	188
10.2. Дифференцируемая векторная функция	191
10.3. Матрица Якоби сложной векторной функции	194
10.4. Дифференциалы высших порядков векторной функции.....	197
10.5. Кратные интегралы	199
10.6. Неявная векторная функция.....	203
10.7. Матрица Якоби неявной векторной функции.....	208
10.8. Теорема об обратной функции	210
10.9. Зависимые и независимые функциональные совокупности	210
10.10. Признак независимости функциональной совокупности	212
10.11. Признак зависимости функциональной совокупности	213

**ГЛАВА 11. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ
ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА**

11.1. Необходимое условие локального экстремума.....	217
11.2. Исследование стационарных точек.....	219
11.3. Условный локальный экстремум	221
11.4. Метод Лагранжа нахождения точек условного локального экстремума	224
11.5. Глобальный экстремум функции векторного аргумента.....	228

ГЛАВА 12. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

12.1. Поверхности	230
12.2. Площадь поверхности.....	234
12.3. Поверхностные интегралы.....	237
12.4. Формула Гаусса – Остроградского	244
12.5. Формула Стокса	247
12.6. Условия независимости криволинейного интеграла второго типа от пути интегрирования в пространстве	249
12.7. Потенциальные и соленоидальные векторные поля.....	251

ГЛАВА 13. ЧИСЛОВОЙ РЯД

13.1. Критерий сходимости и признаки сравнения для положительного ряда	254
13.2. Признаки Коши и Даламбера	256
13.3. Интегральный критерий. Степенной признак сходимости ряда	257
13.4. Признак Раабе.....	259
13.5. Знакопеременный ряд.....	260
13.6. Знакочередующийся ряд.....	261
13.7. Признаки Дирихле и Абеля	262
13.8. Действия над числовыми рядами	263
13.9. Двойной ряд.....	266
13.10. Бесконечное произведение.....	268

**ГЛАВА 14. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ**

14.1. Поточечная и равномерная сходимости функциональной последовательности....	269
14.2. Равномерная сходимость функционального ряда.....	271
14.3. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функционального ряда....	273
14.4. Непрерывность суммы функционального ряда	274
14.5. Почленное интегрирование функционального ряда	275
14.6. Почленное дифференцирование функционального ряда	276
14.7. Локально равномерная сходимость.....	277

ГЛАВА 15. СТЕПЕННОЙ РЯД

15.1. Радиус сходимости степенного ряда.....	280
15.2. Свойства степенного ряда	283
15.3. Дифференцирование степенного ряда	284
15.4. Композиция степенных рядов	285
15.5. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды.....	287

ГЛАВА 16. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

16.1. Несобственный интеграл первого типа.....	291
16.2. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственного интеграла первого типа	296
16.3. Несобственный интеграл второго типа	298
16.4. Методы вычисления несобственных интегралов	300

**ГЛАВА 17. ИНТЕГРАЛЫ,
ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА**

17.1. Равномерная сходимость функции двух переменных к предельной функции.....	303
17.2. Свойства интеграла, зависящего от параметра.....	306
17.3. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра.....	310
17.4. Свойства несобственного интеграла первого типа, зависящего от параметра	314
17.5. Несобственный интеграл второго типа, зависящий от параметра	321
17.6. Интеграл Дирихле	323
17.7. Интегралы Лапласа	324
17.8. В-функция.....	326
17.9. Г-функция.....	329

ГЛАВА 18. РЯД ФУРЬЕ

18.1. Ряд Фурье по ортогональной системе функций.....	334
18.2. Лемма Римана.....	338
18.3. Представление Дирихле частных сумм тригонометрического ряда Фурье	339
18.4. Поточечная сходимость ряда Фурье.....	343
18.5. Разложение в ряд Фурье непериодических функций.....	345
18.6. Неравенство Бесселя	349
18.7. Равномерная сходимость ряда Фурье	350
18.8. Почленное интегрирование ряда Фурье	351
18.9. Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических	352
18.10. Приближение непрерывной функции многочленами.....	354

ГЛАВА 19. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

19.1. Интеграл Фурье.....	356
19.2. Представление функции интегралом Фурье.....	358
19.3. Преобразование Фурье.....	361

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	370
--------------------------------	-----

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	371
-----------------------------------	-----

Учебное издание

Леваков Анатолий Афанасьевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Редактор *Н. Ф. Акулич*

Художник обложки *Т. Ю. Таран*

Технический редактор *Т. К. Раманович*

Компьютерная верстка *А. А. Левакова*

Корректор *О. С. Сафонова*

Подписано в печать 27.06.2014. Формат 70×100/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 30,96.

Уч.-изд. л. 25,24. Тираж 250 экз. Заказ 556.

Белорусский государственный университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.