БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

В. В. Дайняк, Е. С. Чеб

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Методические указания и задания к практическим занятиям по курсу “Функциональный анализ и интегральные уравнения” для студентов факультета прикладной математики и информатики

В трех частях

Часть 1

МИНСК
2020

УДК 515.124(075.8)+517.518(075.8)
ББК 22.152+22.161.5
Д 14

Рекомендовано советом
факультета прикладной математики и информатики
17 декабря 2019 г., протокол № 4

Р е ц е н з е н т
доктор физико-математических наук *Н. Н. Гринчик*

Дайняк, В. В.
Д Метрические пространства: методические указания и задания к практическим занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения". В 3 ч. Ч. 1 / В. В. Дайняк, Е. С. Чеб. – Минск: БГУ, 2020. – 52 с.

Часть 1 учебных материалов содержит задания для лабораторных, практических и самостоятельных работ по теме "Метрические пространства" для курса "Функциональный анализ и интегральные уравнения". В первой части рассматриваются основные метрические пространства, открытые, замкнутые, ограниченные и выпуклые множества в них, полные метрические пространства. В каждой теме приводится необходимый теоретический материал, примеры решения задач и набор задач для практических и лабораторных работ.

Рекомендовано студентам факультета прикладной математики и информатики.

УДК 515.124(075.8)+517.518(075.8)
ББК 22.152+22.161.5

ТЕМА 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть X – непустое множество произвольной природы. Функция $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ называется *метрикой (метрической функцией)* если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x, y \in X$ (аксиома симметрии);
3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых $x, y, z \in X$ (неравенство треугольника)

Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством.* Если ясно о какой функции ρ идет речь, то пишут просто X. Элементы метрического пространства называются *точками.* Значение функции $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x и y.

Из неравенства треугольника получается следующее "неравенство четырехугольника": для любых $x, x', y, y' \in X$

$$|\rho(x, y) - \rho(x', y')| \leqslant \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

Конечно, интуитивно понятно, что "расстояние" от точки x до точки y должно быть всегда неотрицательным. Однако это немедленно вытекает из свойств метрики.

$$0 = \rho(x, x) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y) \text{ для всех } x, y \in X.$$

Примеры метрических пространств

1. Пусть $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ – множество рациональных чисел на числовой прямой, а

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Тогда аксиомы $1) - 3)$ сразу следуют из свойств рациональных дробей и определения модуля числа.

2. Пусть $X = \mathbb{R}$ – множество действительных чисел, и

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Тогда аксиомы $1) - 3)$ сразу следуют из свойств вещественных чисел и определения модуля числа.

3. Пусть $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ – множество упорядоченных наборов действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Положим $X = \mathbb{R}^n$ и

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

Это евклидово n-мерное пространство.

Справедливость аксиом $1), 2)$ немедленно следует из определения функции $\tau = \sqrt{t}$. Проверим аксиому треугольника 3). Обозначим через $a_i = y_i - x_i$, $b_i = z_i - y_i$, получим $z_i - x_i = a_i + b_i$. Тогда из неравенства Коши–Буняковского следует

$$\rho(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Данную пару (X, ρ) будем обозначать $\mathbb{R}^n_2$ или просто $\mathbb{R}^n$.

4. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\rho_1(x, y) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$. Пару (X, ρ_1) будем обозначать $\mathbb{R}^n_1$.

5. Положим $X = \mathbb{R}^n$,

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

Данную пару (X, ρ_∞) будем обозначать $\mathbb{R}^n_\infty$.

6. Множество $\mathbb{R}^n_p$ $(\mathbb{C}^n)$ наборов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из n действительных (комплексных) чисел с метрикой

$$\rho_p(x, y) = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\Bigr)^{1/p}, (1 \leqslant p \leqslant n).$$

Выполнение аксиом тождества и симметрии очевидно. Неравенство треугольника следует из неравенства Минковского.

7. Пусть X – множество всевозможных последовательностей вещественных или комплексных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Положим

$$\rho_p(x, y) = \Bigl(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\Bigr)^{1/p}.$$

Ясно что для любого натурального N справедливо

$$\Bigl(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p\Bigr)^{1/p} \leqslant \Bigl(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\Bigr)^{1/p} + \Bigl(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\Bigr)^{1/p}.$$

то неравенство треугольника для метрики из пространства $\mathbb{R}_p^n$. Значит, переходя к пределу при $N \to \infty$, и используя признак сравнения сходимости числовых рядов, мы заключаем, что функция $\rho_p(x, y)$ определена для всех x и y из X. Справедливость аксиом 1), 2) очевидна. Проверим аксиому треугольника. Из неравенства треугольника для метрики пространства $\mathbb{R}_p^n$ следует, что

$$\rho(x, z) = \lim_{N\to\infty} \Bigl(\sum_{i=1}^{N} |x_i - z_i|^p\Bigr)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \biggl(\Bigl(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p\Bigr)^{1/p} + \Bigl(\sum_{i=1}^{N} |y_i - z_i|^p\Bigr)^{1/p}\biggr) = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Данную пару (X, ρ) будем обозначать ℓ_p.

8. Под $\ell_\infty = m$ будем понимать множество ограниченных последовательностей вещественных или комплексных чисел с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|.$$

Убедимся в выполнении для данной метрики неравенства треугольника (выполнение аксиом 1) и 2) очевидно). Для каждого $i \in \mathbb{N}$ в силу свойств абсолютной величины числа имеем

$$|x_i - y_i| = |x_i - z_i + z_i - y_i| \leqslant |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_i |x_i - z_i| + \sup_i |z_i - y_i|.$$

Перейдя в левой части к точной верхней грани, получим неравенство треугольника.

9. Множество сходящихся последовательностей вещественных или комплексных чисел с метрикой

$$\rho(x,y)=\sup_i |x_i-y_i|$$

обозначим через c; множество сходящихся к нулю – через c_0. Тогда $c_0\subset c\subset m$.

10. Множество произвольных последовательностей вещественных или комплексных чисел с метрикой

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}.$$

обозначим через s.

Справедливость аксиом 1), 2) очевидна. Докажем неравенство треугольника. Так как функция $\dfrac{t}{1+t}$ возрастающая и $|x_i-y_i|\leqslant|x_i-z_i|+|z_i-y_i|$, то

$$\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\leqslant\frac{|x_i-z_i|+|z_i-y_i|}{1+|x_i-z_i|+|z_i-y_i|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}.$$

Умножая левую и правую часть полученного неравенства на 2^{-i} и суммируя по i от $i=1$ до $i=N$ и устремляя затем $N\to\infty$, получаем неравенство треугольника.

11. Множество $C[a,b]$ непрерывных функций, заданных на некотором отрезке $[a,b]$, с метрикой

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

Аксиомы 1) и 2) очевидны, а справедливость аксиомы 3) вытекает из неравенства треугольника для метрических пространств $\mathbb{R}$.

12. Множество $\mathcal{M}[a,b]$ ограниченных функций, заданных на некотором отрезке $[a,b]$, с метрикой

$$\rho(x,y)=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

13. Пусть X – множество непрерывных функций, заданных на некотором отрезке $[a,b]$. Положим

$$\rho_p(x,y) = \Big(\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p},\ 1 \leqslant p < \infty.$$

Поскольку всякая непрерывная функция на отрезке является интегрируемой, то функция ρ определена для всех x и y из X. Проверим аксиому 1). Ясно, что $\rho(x,x)=0$. Обратно, пусть $x(t)-y(t)\neq 0$. Поскольку $x(t)-y(t)$ – непрерывная функция, то она отлична от нуля не только в некоторой точке $t_0 \in [a,b]$, но и в некоторой окрестности $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ этой точки. Тогда

$$\rho_p(x,y) \geqslant \Big(\int\limits_\alpha^\beta |x(t)-y(t)|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p} \geqslant 0,$$

т. е. аксиома 1) выполнена.

Аксиома 2) очевидна. Наконец, применяя неравенство треугольника для $\mathbb{R}_p^n$ к соответствующим интегральным суммам, мы заключаем, что

$$\Big(\int\limits_a^b |x(t)-z(t)|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int\limits_a^b |x(t)-z(t)|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p} + \Big(\int\limits_a^b |z(t)-y(t)|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}$$

для всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций x,y,z.

Таким образом, справедливость аксиомы 3) доказана. Это метрическое пространство обозначим через $\mathscr{L}_p[a,b]$.

14. Пусть X – произвольное множество, а

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x\neq y; \\ 0, & x=y. \end{cases}$$

Это, так называемое, дискретное пространство или пространство изолированных точек. Аксиомы 1), 2) метрики вытекают из определения метрики.

Докажем неравенство треугольника. Пусть x,y,z – произвольные элементы из X. Если $x=z$, то

$$\rho(x,z) = 0 \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z) = 0+0$$

либо

$$\rho(x,z) = 0 \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z) = 1+1.$$

Если $x \neq z$, то

$$\rho(x,z) = 1 \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z) = 0 + 1$$

либо

$$\rho(x,z) = 1 \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z) = 1 + 1.$$

Во всех случаях получаются верные неравенства.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Задают ли в пространстве $\mathbb{R}$ следующие функции расстояние:

$$\varphi_1(x,y) = |x^2 - y^2|, \quad \varphi_2(x,y) = |e^x - e^y|.$$

Решение. Функция $\varphi_1(x)$ не определяет метрику на числовой прямой, так как для несовпадающих точек $x = 1$, $y = -1$ $\varphi_1(x,y) = 0$, т. е. не выполняется первая аксиома метрики. Функция $\varphi_2(x,y)$ определяет метрику на числовой прямой. Для нее выполняются все три аксиомы метрики. Выполнение первой аксиомы следует из монотонности функции e^x, а вторая и третья аксиомы выполняются, исходя из свойств модуля.

Задача 2. Задает ли метрику в пространстве $\mathbb{R}^2$ расстояние между точками $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ функция

$$\varphi(A,B) = \Big(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\Big)^2.$$

Решение. Функция $\varphi(A,B)$ не определяет расстояние на плоскости, поскольку для нее не выполняется неравенство треугольника. Действительно, рассмотрим точки $A(1,0)$, $B(0,1)$ и $C(1,1)$, тогда

$$\varphi(A,B) = 4, \varphi(A,C) = 1, \varphi(C,B) = 1.$$

Это означает, что

$$\varphi(A,B) > \varphi(A,C) + \varphi(C,B).$$

Задача 3. Доказать, что функция

$$\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$$

задает метрику на действительной оси.

Р е ш е н и е. Очевидно, что $\rho(x, y) \geqslant 0$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$ в силу свойств функции модуль. Пусть $\rho(x, y) = |x^3 - y^3| = 0$, получаем, что $x = y$ в силу свойств функции модуль и строгого возрастания кубической функции.

Обратно, если $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$ Далее

$$\rho(x, y) = |x^3 - y^3| = |y^3 - x^3| = \rho(y, x)$$

по свойству функции модуль. Легко видеть, что

$$|x^3 - y^3| = |(x^3 - z^3) + (z^3 - y^3)| \leqslant |x^3 - z^3| + |z^3 - y^3|,$$

откуда сразу же получаем неравенство треугольника $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$. Поэтому функция $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$ является метрикой на $\mathbb{R}$, так как для нее выполнены все аксиомы метрики.

Задача 4. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Будет ли пара (X, d) метрическим пространством, если

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}.$$

Р е ш е н и е. Проверим выполнение аксиом метрики для функции $d(x, y)$. Очевидно, что $d(x, y) \geqslant 0$. Пусть $d(x, y) = 0$, тогда $\rho(x, y) = 0$ и, следовательно, $x = y$. Обратно, если $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$ и $d(x, y) = 0$. Таким образом, первая аксиома метрики выполнена.

Нетрудно заметить, что $d(x, y) = d(y, x)$. Поэтому и вторая аксиома выполняется.

Покажем, что справедливо неравенство треугольника для d, если оно выполняется для ρ, т. е.

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \leqslant \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z)} + \frac{\rho(z, y)}{1 + \rho(z, y)}.$$

Данное неравенство равносильно верному неравенству

$$\big(\rho(x, z) + \rho(z, y) - \rho(x, y)\big) + \rho(x, z) \cdot \rho(z, y) + \rho(z, y) \cdot \rho(x, z) +$$

$$+ \rho(x, y) \cdot \rho(y, z) \cdot \rho(z, x) \geqslant 0.$$

Поэтому функция $d(x, y)$ задает метрику в пространстве X.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Являются ли метриками на числовой прямой следующие функции:

1. $\rho(x, y) = x^3 - y^3$;

2. $\rho(x, y) = |x^4 - y^4|$;

3. $\rho(x, y) = |\cos x - \cos y|$;

4. $\rho(x, y) = |\sin x - \sin y|$;

5. $\rho(x, y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|$;

6. $\rho(x, y) = |\sin (x - y)|$.

7. $\rho(x, y) = (x^2 + 2y^2)|x - y|$;

8. Каким условиям должна удовлетворять определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику с помощью равенства

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|?$$

Являются ли метриками на множестве натуральных чисел функции

9. $\rho(n, m) = \dfrac{|n - m|}{nm}$;

10. $\rho(n, m) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n + m}, & n \neq m; \\ 0, & n = m. \end{cases}$;

Образует ли метрическое пространство множество точек плоскости, если определить расстояние между точками $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ формулой

11. $\rho(M, N) = \left(\sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|}\right)^2$;

12. $\rho(M, N) = \sqrt[4]{(x_1 - x_2)^4 + (y_1 - y_2)^4}$;

13. $\rho(M, N) = \max\bigl\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\bigr\}$;

14. Является ли метрикой на множестве $X = \{a, b, c\}$ функция ρ, если $\rho(a, c) = \rho(c, a) = \rho(a, b) = \rho(c, b) = 2$, где $\rho(b, a) = \rho(b, c) = 1$? Удовлетворяет ли ρ аксиоме треугольника?

15. На множестве $X = \{a, b, c\}$ задана метрика ρ такая, что $\rho(a, b) = \rho(b, c) = 1$. Какое значение может принимать $\rho(a, c)$?

Пусть ρ – метрика на множестве X. Будет ли (X, d) метрическим пространством?

16. $d(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$;

17. $d(x, y) = \min 1, \rho(x, y)$;

18. $d(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{2 + \rho(x, y)}$.

19. Дано множество $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Зададим ρ так:
1) $\rho(x_i, x_i) = 0$;
2) $\rho(x_0, x_i) = \rho(x_i, x_0) = 1$ при $i > 0$;
3) $\rho(x_i, x_j) = d$ при $i \neq j,\ i > 0,\ j > 0$.
Доказать, что при $d = \sqrt{2}$ функция ρ удовлетворяет аксиомам метрики. Найти все значения d, при которых ρ – метрика.

20. Доказать, что множество целых чисел становится метрическим пространством, если положить $\rho(a, b) = 0$ при $a = b$ и $\rho(a, b) = 1/3^k$ при $a \neq b$, где k – наивысшая степень 3, на которую делится нацело разность $a - b$. Найти $\rho(7, 5)$, $\rho(7, -2)$, $\rho(7, 25)$.

21. Доказать, что множество полей шахматной доски образует метрическое пространство, если за расстояние от поля x до поля y принять наименьшее число ходов, которое потребуется наименьшее число ходов, которое потребуется коню, чтобы перейти с поля x на поле y.

22. Найти расстояние между функциями $x(t) = t^3$ и $y(t) = 3t + 4$ в пространствах:

а) $\mathscr{L}_1[0, 2]$; б)$\mathscr{L}_2[0, 2]$; в) $C[0, 2]$; г) $C^{(1)}[0, 2]$; д) $C^{(2)}[0, 2]$.

Здесь и далее $C^{(s)}[0, 2]$ – пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ с метрикой

$$\rho_s(x, y) = \sum_{j=0}^{s} \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{\mathrm{d}^j x(t)}{\mathrm{d}t^j} - \frac{\mathrm{d}^j y(t)}{\mathrm{d}t^j} \right|.$$

23. Найти расстояние между функциями $x(t) = t^2$ и $y(t) = 2t + 3$ в пространствах:

а) $C[0, 7/2]$; б)$\mathscr{L}_1[0, 7/2]$; в) $C^{(1)}[0, 7/2]$.

24. Найти расстояние между двумя последовательностями $x = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^{i-1}}, \ldots\right)$ и $y = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^i}, \ldots\right)$ в пространствах:

а) ℓ_2; б)ℓ_1; в) m.

ТЕМА 2. СХОДИМОСТЬ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $x^{(n)} \in X$. Говорят, что последовательность $x^{(n)}$ при $n \to \infty$ *сходится* в метрическом пространстве, если существует такой элемент $x \in X$, что $\rho(x^{(n)}, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Отметим, что сходящаяся в метрическом пространстве последовательность имеет единственный предел.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Исследовать на сходимость последовательность $x^{(n)} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots, 0, \ldots)$ пространстве S.

Решение. Последовательность $x^{(n)}$ при $n \to \infty$ покоординатно сходится к элементу $x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \in S$. Для того, чтобы выяснить сходится ли $x^{(n)}$ к x в пространстве S, рассмотрим величину $\rho(x^{(n)}, x)$. Зная, как задается метрика в пространстве S, перепишем эту величину в виде

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|1-0|}{1+|1-0|} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Последняя сумма является суммой бесконечно убывающей геометрической прогресс со знаменателем $1/2$, поэтому

$$\rho(x^{(n)}, x) = \frac{2^{-(n+2)}}{1-1/2} = \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, последовательность $x^{(n)}$ сходится в пространстве S к элементу $x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

Задача 2. Докажем, что сходимость в пространстве S совпадает с покоординатной сходимостью.

Решение. Пусть последовательность $x^{(n)}$ сходится к некоторому элементу x в пространстве S. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер элемента последовательности N такой, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1+|x_k^{(n)} - x_k|} < \varepsilon.$$

Зафиксируем номер координаты k. Тогда

$$\frac{1}{2^k}\,\frac{|x_k^{(n)}-x_k|}{1+|x_k^{(n)}-x_k|}<\varepsilon$$

для всех $n>N$. Так как ε произвольно, а k фиксировано, то последнее соотношение означает, что

$$|x_k^{(n)}-x_k|<\varepsilon,$$

т. е. из сходимости последовательности в пространстве S следует покоординатная сходимость.

Обратно, пусть каждая координата $x_k^{(n)}$ имеет предел x_k. Докажем сходимость в S. Так как ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}$ сходится, то остаток ряда стремится к нулю, т. е. для любого $\varepsilon>0$ найдется m такое, что $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, Тогда

$$\rho(x^{(n)},x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)}-x_k|}{1+|x_k^{(n)}-x_k|}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)}-x_k|}{1+|x_k^{(n)}-x_k|}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

(первое слагаемое мало за счет покоординатной сходимости, так как число слагаемых конечно).

Задача 3. Исследовать на сходимость следующие последовательности в пространствах ℓ_p,ℓ_∞,S:

а) $x^{(n)}=(1,2,\ldots,n,0,\ldots)$;
б) $y^{(n)}=(\underbrace{1/n,1/n,\ldots,1/n}_{n},\ldots,0,\ldots)$.

Решение. Сначала найдем покоординатный предел. Для первой последовательности он имеет вид $x=(1,2,\ldots,n,n+1,\ldots)$. Следовательно, последовательность $x^{(n)}$ сходится в пространстве S.

Она не сходится ни в одном из пространств ℓ_p, $1\leqslant p<\infty$. Действительно, покоординатный предел не принадлежит этим пространствам, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда: $x_i\nrightarrow 0$ при $i\to\infty$.

Последовательность а) не сходится также в пространстве ℓ_∞, поскольку покоординатный предел не принадлежит этому пространству $\sup\limits_{1\leqslant k<\infty}|x_i^{(n)}|=\infty$.

Покоординатный предел последовательности $y^{(n)}$ пункта б) равен $y = (0, \ldots, 0, \ldots)$. Следовательно, последовательность $y^{(n)}$ сходится в пространстве S.

Сходимость в пространстве ℓ_p $(1 < p < \infty)$ означает, что

$$\rho(y^{(n)}, y) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i^{(n)} - y_i|^p\Big)^{1/p} = \Big(n \cdot \Big(\frac{1}{n}\Big)^p\Big)^{1/p} = \frac{1}{n^{\frac{p-1}{p}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Поэтому последовательность $y^{(n)}$ сходится в ℓ_p $(1 < p < \infty)$. Однако в пространстве ℓ_1 сходимость отсутствует, так как

$$\rho(y^{(n)}, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |y_i^{(n)} - y_i| = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \nrightarrow 0.$$

Наконец, последовательность $y^{(n)}$ сходится в ℓ_∞, так как

$$\rho(y^{(n)}, y) = \sup_{1 \leqslant k < \infty} |x_i^{(n)}| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Задача 4. Доказать, что для пространств последовательностей выполняются теоретико-множественные включения

$$\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset \ell_\infty \subset S, \quad 1 < p < q < \infty.$$

Решение. Очевидно, что пространство всех последовательностей S содержит все пространства ℓ_p.

По определению, пространству ℓ_p принадлежат те последовательности, для которых ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_i^{(n)}|^p$ сходится. Следовательно, общий член ряда должен стремиться к нулю. Далее, если $x_i \to 0$ при $i \to \infty$ и $p < q$, то $|x_i|^q < |x_i|^p$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q < \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q.$$

Следовательно, $\ell_p \subset \ell_q$ при $p < q$. Учитывая, что каждая сходящаяся последовательность ограничена, то $\ell_q \subset \ell_\infty$.

Задача 5. Сходятся ли последовательности

а) $x^{(n)}(t) = t^n$, б) $x^{(n)}(t) = e^{-tn}$, в) $x^{(n)}(t) = te^{-tn}$, г) $x^{(n)}(t) = t^n - t^{n+1}$,

$$\text{д) } x^{(n)}(t) = \frac{t^n}{n}, \ \text{ е) } x^{(n)}(t) = \frac{tn}{1 + t^2 n^2}, \ \text{ ж) } x^{(n)}(t) = \frac{t}{1 + t^2 n^2}$$

в пространстве $C[0,1]$.

Р е ш е н и е. Отметим, что сходимость в пространстве $C[0,1]$ является равномерной.

а). Нет, так как последовательность поточечно сходится к разрывной функции

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1; \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

б). Нет. Поточечным пределом является разрывная функция

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leqslant 1; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

в). Да. Поточечным пределом является функция $x(t) \equiv 0$. Оценим расстояние

$$\rho(x^{(n)}, x) = \max_{t\in[0,1]} |x^{(n)}(t) - x(t)| = x^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Поэтому $x^{(n)}(t) \rightrightarrows x(t)$, т. е. сходится в пространстве $C[0,1]$.

г). Да. $x^{(n)}(t) \rightrightarrows x(t) \equiv 0$, так как

$$\rho(x^{(n)}, x) = \max_{t\in[0,1]} |x^{(n)}(t) - x(t)| = \max_{t\in[0,1]} |t^n - t^{n+1}| = x^{(n)}\left(\frac{n}{n+1}\right) =$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

е). Нет. Последовательность $x^{(n)}(t)$ при каждом $t \in [0,1]$ сходится к $x(t) = 0$. Однако

$$\rho(x^{(n)}, x) = \max_{t\in[0,1]} |x^{(n)}(t) - x(t)| = \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{tn}{1+t^2n^2}\right| = \frac{1}{2} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

ж). Да. Поточечный предел $x(t) \equiv 0$. При этом

$$\rho(x^{(n)}, x) = \max_{t\in[0,1]} |x^{(n)}(t) - x(t)| = \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{t}{1+t^2n^2}\right| = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Задача 6. Сходятся ли последовательности

$$x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots\right)$$

в пространствах $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty, c, c_0$?

Решение. Сходимость в вышеуказанных пространствах ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ влечет покоординатную сходимость. Покоодинатный предел $x = \Big(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{k}}, \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}, \dots\Big)$ не принадлежит пространствам ℓ_1 и ℓ_2, $x \in \ell_3$ и

$$\rho(x^{(n)}, x) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^3\Big)^{1/3} = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}\Big)^{1/3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

как остаток сходящегося ряда. Поэтому в пространстве ℓ_3 последовательность сходится. Такой же результат и для пространств ℓ_∞, c, c_0, так как в этих пространствах

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sup_k |x_k^{(n)} - x_k| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Задача 7. В каких из метрических пространств ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$, ℓ_∞, c, c_0, S сходятся последовательности

а) $x^{(n)} = \Big(1, 2, \dots, n, 0, \dots, \Big)$;

б) $x^{(n)} = \big(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n}, 0, \dots, \big)$;

в) $x^{(n)} = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, \dots, \Big)$;

г) $x^{(n)} = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, \dots, \Big)$;

д) $x^{(n)} = \Big(\underbrace{\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}, \dots, \frac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, \dots, \Big), \quad \alpha > 1$;

е) $x^{(n)} = \Big(e, e^2, \dots, e^n, 0, \dots, \Big)$;

ж) $x^{(n)} = \Big(e^{-1}, e^{-2}, \dots, e^{-n}, 0, \dots, \Big)$?

Решение. а). Только в пространстве S. Покоординатный предел $x = (1, 2, \dots, k, k+1, \dots)$ не принадлежит остальным пространствах. В пространстве S

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

как остаток сходящегося ряда.

б). Покоординатный предел $x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ принадлежит только пространствам c, ℓ_∞, S. В пространствах c, ℓ_∞

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sup_k |x_k^{(n)} - x_k| = 1,$$

поэтому в этих пространствах сходимости нет. В пространстве S

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k|} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

последовательность сходится.

в). Покоординатный предел этой последовательности $x = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Он принадлежит всем пространствам. В пространствах ℓ_p

$$\rho(x^{(n)}, x) = \left(n \frac{1}{n^p}\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

только при $p > 1$. Поэтому в пространстве ℓ_1 последовательность не сходится, а при $p > 1$ – сходится. В остальных пространствах последовательность сходится.

г). Покоординатный предел $x = (0, \ldots, 0, \ldots)$. В пространствах ℓ_p

$$\rho(x^{(n)}, x) = \left(n^2 \frac{1}{n^p}\right)^{1/p} = \frac{1}{n^{1-2/p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

только при $p > 2$. Поэтому при $p \leqslant 2$ сходимости нет, а при $p > 2$ последовательность сходится. В остальных пространствах последовательность сходится.

д). Покоординатный предел $x = (0, \ldots, 0, \ldots)$. В пространствах ℓ_p

$$\rho(x^{(n)}, x) = \left(n \frac{1}{n^{\alpha p}}\right)^{1/p} = \frac{1}{n^{\alpha-1/p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

так как $\alpha > 1$. Последовательность сходится во всех пространствах ℓ_p. В остальных пространствах последовательность так же сходится.

е) Покоординатный предел $x = (e, e^2, \ldots, e^k, e^{k+1}, \ldots)$ принадлежит только пространству S. В нем

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k|} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{e^k}{1 + e^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

последовательность сходится. В остальных пространствах последовательность не сходится.

ж) Покоординатный предел $x = (e^{-1}, e^{-2}, \ldots, e^{-k}, e^{-(k+1)}, \ldots)$ принадлежит всем пространствам и сходится в них. В пространстве ℓ_p

$$\rho(x^{(n)}, x) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-pk}\Big)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при всех $p \geqslant 1$. В пространствах c_0, c, ℓ_∞

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sup_k |x_k^{(n)} - x_k| = e^{-(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Сходимость в S показывается аналогично предыдущему случаю.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сходятся ли последовательности в пространстве $C[0,1]$?

а) $x^{(n)}(t) = \begin{cases} 1 - nt, & t \in \Big[0, \dfrac{1}{n}\Big]; \\ 0, & t \in \Big(\dfrac{1}{n}, 1\Big]. \end{cases}$

б) $x^{(n)}(t) = \begin{cases} n(1 - nt), & t \in \Big[0, \dfrac{1}{n}\Big]; \\ 0, & t \in \Big(\dfrac{1}{n}, 1\Big]. \end{cases}$

д) $x^{(n)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1 - nt}{n+1}, & t \in \Big[0, \dfrac{1}{n}\Big]; \\ 0, & t \in \Big(\dfrac{1}{n}, 1\Big]. \end{cases}$

е) $x^{(n)}(t) = \begin{cases} \sqrt{n}(1 - nt), & t \in \Big[0, \dfrac{1}{n}\Big]; \\ 0, & t \in \Big(\dfrac{1}{n}, 1\Big]. \end{cases}$

Выяснить, сходится ли последовательность функций $x^{(n)}(t)$ в указанном пространстве.

2. $x^{(n)}(t) = t^{2n}$ в $C\Big[0, \frac{1}{2}\Big]$.

3. $x^{(n)}(t) = t^{2n}$ в $C[0,1]$.

4. $x^{(n)}(t) = \dfrac{1}{2n}\sqrt[5]{n^5 t + 3}$ в $C[0,1]$.

5. $x^{(n)}(t) = t^n - t^{n+1}$ в $C[1,2]$.

6. $x^{(n)}(t) = t^n - t^{2n}$ в $C[0,1]$.

7. $x^{(n)}(t) = \dfrac{1}{t^2+nt+1}$ в $C[0,1]$.

8. $x^{(n)}(t) = \sin^{2n} t + \dfrac{1}{n^2}$ в $C[0,\pi]$.

9. $x^{(n)}(t) = \sin^{2n} t + \dfrac{1}{n^2}$ в $C[\delta,\pi-\delta]$, $0<\delta<\pi$.

10. $x^{(n)}(t) = \dfrac{\sin nt}{n}\sqrt[5]{n^5t+3}$ в $C[-A,A]$.

11. $x^{(n)}(t) = \dfrac{1}{2-(t^2-1)^n}$ в $C[0,4]$.

12. $x^{(n)}(t) = 1-(1-t^2)^n$ в $C[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

13. $x^{(n)}(t) = nt^2e^{-nt}$ в $C[0,2]$.

14. $x^{(n)}(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$ в $C[0,1]$.

15. $x^{(n)}(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$ в $C^{(1)}[0,1]$.

16. $x^{(n)}(t) = t^n - \dfrac{n}{n+1}t^{n+1}$ в $C^{(1)}[0,1]$.

17. $x^{(n)}(t) = \dfrac{\sin nt}{n}$ в $\mathscr{L}_2[0,\pi]$.

18. $x^{(n)}(t) = \dfrac{\cos nt}{n}$ в $\mathscr{L}_1[0,\pi]$.

19. $x^{(n)}(t) = \dfrac{nt}{1+n^2t^2}\operatorname{tg}\dfrac{t}{n}$ в $\mathscr{L}_1[0,\frac{\pi}{4}]$.

20. Доказать, что сходимость последовательности функций в пространстве $C[a,b]$ равносильна равномерной сходимости последовательности $x^{(n)}(t)$ на отрезке $[a,b]$.

21. Показать, что последовательность функций $x^{(n)}(t) = t^n$ сходится к функции $x_0(t) = 0$ в пространстве $\mathscr{L}_1[0,1]$. Сходится ли $x^{(n)}(a)$ к $x_0(a) = 0$ для любого $a \in [0,1]$?

22. Показать, что последовательность функций $x^{(n)}(t) = 2nte^{-nt^2}$ в каждой точке отрезка $[0,1]$ сходится к функции $x_0(t) = 0$. Сходится ли последовательность $x^{(n)}(t)$ к $x_0(t)$ по метрике пространства $\mathscr{L}_1[0,1]$?

23. Показать, что последовательность функций

$$x^{(n)}(t) = \begin{cases} nt, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]; \\ 1, & t \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

сходится к функции $x_0(t) = 1$ в пространстве $\mathscr{L}_1[0,1]$. Доказать, что $x^{(n)}(t)$ не сходится к $x_0(t)$ в пространстве $C[0,1]$.

24. Дана последовательность, элементы которой имеют вид

$x^{(1)} = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots,\right)$,

$x^{(2)} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots,\right)$,

....

$x^{(n)} = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}}, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^{n+1}}, \ldots,\right)$.

Выяснить, сходится ли она а) покоординатно, б) в ℓ_1, г) в ℓ_2 б) в ℓ_∞?

25. Найти предел последовательности

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \ldots, \frac{1}{n^i}, \ldots\right)$$

в пространстве ℓ_1.

26. Доказать, что сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ эквивалентна покоординатной сходимости.

27. Исследовать на сходимость в пространствах c_0 и ℓ_p последовательности:

а) $x^{(n)} = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$,

б) $x^{(n)} = \left(\dfrac{1}{\ln 2}, \dfrac{1}{\ln 3}, \ldots, \dfrac{1}{\ln n+1}, 0, 0, \ldots\right)$.

28. Исследовать на сходимость последовательность

$$x^{(n)} = \Big(\underbrace{0}_{n}, \frac{1}{2^n+1}, \ldots, \frac{1}{2^n+n}, 0, 0, \ldots\Big).$$

в пространствах ℓ_∞, ℓ_p, c_0.

Привести пример последовательности $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_i^{(n)}, \ldots\right)$, которая принадлежала бы каждому из рассматриваемой пары пространств и:

29. Сходилась в ℓ_2, но не сходилась в ℓ_1.

30. Сходилась в ℓ_∞, но не сходилась в ℓ_2.

ТЕМА 3. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть X, ρ – метрическое пространство.

Открытым шаром $B(x_0, r)$ с центром в точке x_0 радиуса r называется множество

$$B(x_0, r) = \{x \in X \,|\, \rho(x, x_0) < r\},$$

замкнутым шаром $B[x_0, r]$ с центром в точке x_0 радиуса r называется множество

$$B[x_0, r] = \{x \in X \,|\, \rho(x, x_0) \leqslant r\},$$

Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некотором шаре.

Множество $M \subset X$ будем называть *открытым*, если для каждой точки из M найдется открытый шар с центром в этой точке, содержащийся в M.

Точка x_0 называется *предельной точкой множества* M, если в любом шаре с центром в этой точке найдется бесконечно много точек множества M. Предельная точка может принадлежать, а может и не принадлежать множеству M.

Множество $M \subset X$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Пусть $S \subset X$, *замыканием* S в X называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих S и обозначается $\overline{S}$.

Из этого определения сразу следует, что замыкание множества содержит все его предельные точки.

Точка $x_0 \in X$ называется *граничной точкой* множества $A \subset X$, если в любом шаре $B(x_0, r)$ есть точки, принадлежащие A, и точки не принадлежащие A.

Границей множества A называется множество ∂A его граничных точек. Граничная точка может принадлежать A, а может и не принадлежать. Поэтому возможно, что $\partial A \subset A$, что $\partial A \cup A = \varnothing$ или, что $\partial A \cup A \neq \partial A$.

Точка x_0 называется *точкой прикосновения* (точкой касания) множества A, если в любом шаре $B(x_0, r)$ содержится хотя бы одна точка множества A. Все точки множества A являются для него точками прикосновения. Все точки прикосновения множества A подразделяются на изолированные и предельные точки.

Теорема 1. *Для того, чтобы точка x_0 была точкой прикосновения множества A, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $(x^{(n)}) \subset A$, сходящаяся x.*

Теорема 2. *Для того, чтобы точка x_0 была предельной для множества A, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $(x^{(n)}) \subset A$ попарно различных точек, сходящаяся x.*

Пусть A и B – множества в метрическом пространстве X. Множество A называется *плотным* в B, если $\overline{A} \supset B$. Множество A называется *всюду плотным* в X, если $\overline{A} = X$. Множество A называется *нигде не плотным*, если оно не плотно ни в одном шаре пространства X.

Точка $x_0 \in X$ называется *изолированной точкой* множества A, если в достаточно малом шаре $B(x_0, r)$ нет точек из A, отличных от x_0.

В некоторых метрических пространствах могут существовать множества, некоторые точки которых являются одновременно изолированными и внутренними. Имеют место следующие свойства.

Свойство 1. Точки, принадлежащие множеству, делятся на внутренние и граничные.

Свойство 2. Точки касания делятся на изолированные точки множества (обязательно принадлежащие ему) и предельные точки, которые могут как принадлежать множеству (среди них могут быть внутренние), так и не принадлежать.

Свойство 3. Граничные точки делятся на изолированные точки множества (обязательно принадлежащие ему) и предельные точки, которые могут как принадлежать множеству (но не быть внутренними), так и не принадлежать.

Свойство 4. Изолированные точки множества могут являться граничными, а могут и не являться.

Свойство 5. Открытое множества целиком состоит из своих внутренних точек (среди которых могут быть изолированные), а его граничные точки могут ему не принадлежать.

Обсудим теперь возможные (равносильные) определения замкнутого множества в метрическом пространстве.

Свойство 6. Дополнение замкнутого множества открыто.

Свойство 7. Замыкание замкнутого множества совпадает с самим множеством.

Свойство 8. Замкнутое множества содержит все свои граничные точки.

Свойство 9. Замкнутое множества содержит все свои предельные точки.

Свойство 10. В замкнутом множества каждая сходящаяся последовательность сходится к элементу данного множества.

Свойство 11. Пустое множество и все пространство являются одновременно открытыми и замкнутыми.

Свойство 12. Произвольное пересечение и конечное объединение замкнутых множеств – замкнутое множество.

Отметим свойства операции замыкания.

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$ –множество в нем. Тогда справедливы следующие свойства операции замыкания:

1). $\overline{A}$ – замкнутое множество.

Замыкание замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

2) $A \subset \overline{A}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда A – замкнутое множество.

Данное утверждение следует из того, что в пересечение входят лишь те замкнутые множества, которые содержат множества A. Далее, если само A замкнуто, то оно входит в число пересекаемых множеств и поэтому указанное пересечение содержится в A. А поскольку верно и обратное включение, то они совпадают. Обратно, из равенства множества A своему замыканию следует, что множество A замкнуто.

3). $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, где $\overline{\overline{A}} = \overline{(\overline{A})}$.

В силу 1) $\overline{A}$ – замкнуто. Тогда согласно 2) имеет место равенство множества $\overline{A}$ и его замыкания $\overline{\overline{A}}$.

4). Если $A_1 \subset A_2$, то $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$.

Поскольку $A_1 \subset A_2$ и $A_2 \subset \overline{A_2}$, то среди замкнутых множеств, содержащих A_1, есть множество $\overline{A_2}$, а тогда пересечение таких множеств содержится в каждом из пересекаемых множеств.

5). $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

Для доказательства вложения $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$ достаточно заметить, что $A_i \subset A_1 \cup A_2$ $(i = 1, 2)$, и применить 4). Тогда мы получим, что $\overline{A_i} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$, следовательно, то же включение верно и для объединения $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. Заметим, что это рассуждение проходит для объединения любого (конечного или бесконечного семейства множеств).

Для доказательства обратного вложения заметим, что $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ замкнуто, как объединение конечного семейства замкнутых множеств и содержит A_1 и A_2, а следовательно, их объединение $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \supset A_1 \cup A_2$. Тогда, применив 4) вместе с 2), получаем $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}} \supset \overline{A_1 \cup A_2}$. Это рассуждение может быть обобщено на любое конечное семейство множеств $\{A_k\}_{k=1}^n$, но не на счетное. Легко привести контрпример: если $A_k = \{g_k\}$, где последовательность $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ – это все рациональные точки отрезка $[0, 1]$, то замыкание объединения представляет собой весь отрезок $[0, 1]$, а объединение замыканий содержит только эти точки.

Итак, обобщение свойства 4) на бесконечные объединения неверно. Неверно и обобщение этого свойства на пересечение. Действительно, $\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \varnothing$, но $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Однако можно утверждать, что

6). $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$.

Действительно, имеем $A_1 \cap A_2 \subset A_i \subset \overline{A_i}$ $(i = 1, 2)$. Тогда $A_1 \cap A_2 \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. А поскольку $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ – замкнутое множество как пересечение замкнутых 2) и 4). Имеем

$$\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2},$$

что и требовалось.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. а) Доказать, что в произвольном метрическом пространстве $\overline{B(x_0, r)} \subset B[x_0, r]$. б) Привести пример метрического пространства, в котором $\overline{B(x_0, r)} \neq B[x_0, r]$.

Решение. а) Пусть $x \in \overline{B(x_0, r)}$. Тогда $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$, где $x^{(n)} \in B(x_0, r)$. Зафиксируем n и воспользуемся неравенством треугольника

$$\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, x^{(n)}) + \rho(x^{(n)}, x_0) \leqslant \rho(x, x^{(n)}) + r,$$

а теперь при $n \to \infty$ получаем, что $\rho(x, x^{(n)}) \to 0$. Таким образом, $\rho(x, x_0) \leqslant r$. А это и означает, что $x \in B[x_0, r]$.

б). Пусть X – произвольное метрическое пространство, содержащее более одной точки с метрикой

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

тогда для произвольной точки $x_0 \in X$ с одной стороны

$$\overline{B(x_0,1)} = B(x_0,1)\{x_0\},$$

а с другой стороны $B[x_0,1] = X$.

Задача 2. Что представляет собой шар $B[0,r]$ пространства $C[0,1]$, шар $B[x_0,r]$ пространства $C[a,b]$, где $x_0 \in C[a,b]$?

Решение. Шар $B[0,r]$ пространства $C[0,1]$ – множество непрерывных функций, графики которых целиком лежат в прямоугольнике $[0,1]\times[-r,r]$. Шар $B[x_0,r]$ пространства $C[a,b]$ – множество непрерывных функций, графики которых целиком расположены между кривыми $x(t) = x_0(t) - r$, $x(t) = x_0(t) + r$, где $t \in [a,b]$.

Задача 3. Пусть M – произвольное множество. Положим $\rho(x,y) = 0$, если $x = y$ и $\rho(x,y) = 1$, если $x \neq y$. Что представляет собой открытый и замкнутый шары в этом пространстве?

Решение. Если $r < 1$, то $B(x_0,r) = B[x_0,r] = \{x_0\}$. Если $r = 1$, то $B(x_0,r) = \{x_0\}$, а $B[x_0,r] = M$. Если $r > 1$, то $B(x_0,r) = B[x_0,r] = M$.

Задача 4. Может ли шар радиуса 4 быть подмножеством шара радиуса 3 в некотором метрическом пространстве?

Решение. Да, может. Рассмотрим, например, метрическое пространство

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 3\}$$

с обычным расстоянием. Тогда, очевидно, шары радиусов 3 и 4 с центром в точке $(0,0)$ совпадают.

Задача 5. Можно ли усилить результаты предыдущего примера так, чтобы шар радиуса 4 был собственным подмножеством шара радиуса 3 в некотором метрическом пространстве?

Решение. Это возможно. Положим $X = \{-2\} \cup [0,4]$. Нетрудно убедиться, что

$$[0,4]=B[3,4]\subset B[1,3]=\{-2\}\cup[0,4].$$

Задача 6. Приведите пример такого метрического пространства, в котором шар большего радиуса составлял бы правильную часть шара меньшего радиуса.

Р е ш е н и е. Пусть X – круг радиуса 2 с центром в начале координат (с метрикой пространства $\mathbb{R}^2_2$, B – круг радиуса 3 с центром в точке $(2,0)$. Тогда $X\cap B$ шар пространства X радиуса 3, целиком лежащий в шаре радиуса 2, который совпадает с этим пространством (сделайте рисунок).

Задача 7. Покажите, что, если поменять в задаче 5 число 4 на число 7, ответ будет отрицательный. Докажем более общее утверждение: если некоторый замкнутый шар $B[x_0,R]$ радиуса R целиком содержится в замкнутом шаре $B[x_0,r]$ радиуса r и $R\geqslant 2r$, то эти шары совпадают.

Р е ш е н и е. Для этого достаточно доказать, в дополнение к имеющемуся вложению $B[x_0,R]\subset B[x_0,r]$, обратное вложение. Для этого выберем произвольную точку $x\in B[x_0,r]$. Обозначив через O_r O_R центры соответствующих шаров, из определения шара и неравенства треугольника с учетом условия $R\geqslant 2r$ и того факта, что $O_R\in B[x_0,R]\subset B[x_0,r]$, имеем

$$\rho(O_R,x)\leqslant\rho(O_R,O_r)+\rho(O_r,x)\leqslant r+r=2r\leqslant R,$$

т. е. $x\in B[x_0,R]$, что и требовалось доказать.

Задача 8. Приведите пример пространства $X\subset\mathbb{R}^2$ и открытого шара в нем, так чтобы он являлся замкнутым множеством, но не замкнутым шаром.

Р е ш е н и е. Проще всего описать этот пример на комплексной плоскости. Нарисуем интервалы $(-1,1)$ и $(-i,i)$, а также четыре точки $\pm\sqrt{2}/2$, $\pm i\sqrt{2}/2$. Тогда

$$X=\Big\{\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i),$$

$$\alpha_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\quad \alpha_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i),\ (-1,1),\ (-i,i)\Big\}.$$

Полученное множество и будем считать метрическим пространством X. Легко видеть, что открытый шар B с центром в точке $(0,0)$ радиуса

1 совпадает с X если из него исключить точки α_i, $(i = \overline{1,4})$. Это множество замкнуто, так как его дополнение – множество $A = X \setminus B$ состоит из четыре точек α_i, открыто. В самом деле, Но множество B не является замкнутым шаром в пространстве X: нетрудно видеть, что какой бы центр $O_1 \in X$ и какой бы радиус мы не брали, в полученный замкнутый шар или не входят некоторые точки множества B, или входит по крайней мере одна точка множества A.

Задача 9. Пусть X – произвольное множество. Доказать, что

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ \alpha, & x \neq y, \quad \alpha > 0, \end{cases}$$

определяет метрику на X. Доказать, что любое подмножество X является одновременно и открытым и замкнутым множеством.

Решение. Функция $\rho(x,y)$ принимает всего два значения: 0 и $\alpha > 0$, поэтому $\rho(x,y) \geqslant 0$ для любых x и y из X. Легко видеть, что $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Симметрия функции $\rho(x,y)$ относительно переменных x и y тоже очевидна. Осталось проверить аксиому треугольника, т. е. выполнение неравенства $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ для любых $x, y, z \in X$. Как уже отмечалось выше функция $\rho(x,y)$ принимает всего два значения, а, следовательно, возможно лишь несколько вариантов для неравенства. Заметим, что аксиома треугольника не выполняется в одном единственном случае, когда $\rho(x,y) = \alpha$, $\rho(x,z) = 0$, $\rho(z,y) = 0$, однако этот случай невозможен. Действительно, так $\rho(x,y) = \alpha$, получаем, что $x \neq y$, но с другой стороны $x = y = z$, получаем противоречие.

Пусть множество $M \subset X$. Возьмем произвольную точку $x \in M$ и рассмотрим шар $B(x, \alpha/2)$. $B(x, \alpha/2) \subset M$, так как от состоит из одной точки x. Получаем, что вместе с каждой точкой x во множестве M лежит открытый шар $B(x, \alpha/2)$, т. е. множество M открыто, а, следовательно, $X \setminus M$ – замкнуто. Далее рассмотрим множество $X \setminus M \subset X$. Из тех же самых соображений, что и ранее, получим открытость множества $X \setminus M$ и замкнутость M.

Задача 10. Зададим на прямой $X = \mathbb{R}$ стандартную метрику $\rho(x,y) = |x-y|$. Тогда интервал (a,b) является открытым множеством, отрезок $[a,b]$ – замкнутым множеством, а полуинтервал $[a,b)$ не является ни открытым, ни замкнутым множеством

Задача 11. Рассмотрим в качестве множества $X = (a,b)$, определим на нем метрику $\rho(x,y) = |x-y|$. Тогда интервал, полуинтервал и отрезок будут одновременно и открытыми и замкнутыми множествами.

Задача 12. Докажите, что множество

$$A = \big\{x(t) \in C[a,b] \,|\, |x(t)| < 1, t \in [0,1]\big\}$$

открыто в $C[0,1]$.

Решение. Пусть $x \in A$. Тогда $\max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| < 1$ (если бы максимум равнялся 1, существовала бы точка $t^\star \in [0,1]$ такая, что $x(t^\star) = 1$). Выберем $\varepsilon < 1 - \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ и пусть $y \in B(x,\varepsilon)$. Тогда для всех $t \in [0,1]$

$$|y(t)| \leqslant |y(t) - x(t)| + |x(t)| < \varepsilon + \max_{t\in[0,1]} |x(t)| < 1.$$

Значит, $y \in A$, $B(x,\varepsilon) \subset A$, т. е. A – открытое множество.

Задача 13. Пусть $M \subset \mathbb{R}$. Положим

$$A_M = \Big\{x(t) \in C[a,b] \,|\, |x(t)| \in M \text{для всех} t \in [a,b]\Big\}.$$

Будет ли A_M

а) открытым, если A открыто;

б) замкнутым, если A замкнуто?

Решение. а) Если M открыто в $\mathbb{R}$, то A_M открыто в $C[a,b]$. Действительно, пусть $x \in A_M$. По теореме Больцано–Коши все $x(t)$ попадут в некоторый открытый промежуток. Не ограничивая общности, можно считать что $c < x(t) < d$ ($t \in [a,b]$). Возьмем $\varepsilon < \min\{d - \max\limits_{t\in[a,b]}, \min\limits_{t\in[a,b]} x(t) - c\}$. Рассуждая аналогично как в задаче 12, видим, что $B(x,\varepsilon) \subset A_M$.

б) Если M – замкнуто в $\mathbb{R}$, то A_M замкнуто в $C[a,b]$. Покажем это. Пусть x – предельная точка A_M. Тогда найдется последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A_M$, которая сходится в $C[a,b]$ некоторой функции x. Это означает, что $x^{(n)}(t) \rightrightarrows x(t)$. Так как $x^{(n)}(t) \in M$ при каждом $t \in [a,b]$, то в силу замкнутости множества M его предельная точка $x(t) \in M$ при каждом фиксированном $t \in [a,b]$. Следовательно, $x \in A_M$, т. е. A_M замкнуто.

Задача 14. В пространстве $C[a,b]$ рассмотрим множества

а) $A_1 = \{x(t) \in C[a,b] \,|\, c \leqslant x(t) \leqslant d, \quad t \in [a,b]\}$;

б) $A_2 = \{x(t) \in C[a,b] | \, c < x(t) < d, \;\; t \in [a,b]\}$;

в) $A_3 = \{x(t) \in C[a,b] | x(t) < g(t), \;\; t \in [a,b], \;\; g(t) \in C[a,b]\}$;

г) $A_4 = \{x(t) \in C[a,b] | x(t) \geqslant g(t), \;\; t \in [a,b], \;\; g(t) \in C[a,b]\}$.

Есть ли среди этих множеств открытые? Замкнутые?

Решение. В обозначениях задачи 13 $A_1 = A_{M_1}$, где $M_1 = [c,d]$ замкнуто в $\mathbb{R}$. $A_2 = A_{M_2}$, где $M_2 = (c,d)$ открыто в $\mathbb{R}$. Поэтому A_1 открыто в $C[a,b]$, A_2 замкнуто в $C[a,b]$.

Пусть $x_0 \in A_3$, т. е. $x_0(t) < g(t)$ для всех $t \in [a,b]$. По теореме Вейерштрасса о достижении точных верхних граней непрерывной функцией найдется $\alpha > 0$ такое, что $g(t) - x_0(t) \geqslant \alpha > 0$ для всех $t \in [a,b]$. Это неравенство означает, что шар $B(x_0, \alpha/2)$ целиком лежит в A_3, т. е. A_3 открыто в $C[a,b]$.

Пусть $x^\star$ – предельная точка множества A_4 и последовательность $x^{(n)} \in A_4$ такая, что $x^{(n)} \to x^\star$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу в неравенстве $x^{(n)}(t) \geqslant g(t)$, приходим к неравенству $x^\star(t) \geqslant g(t)$, т. е. $x^\star \in A_4$. Значит, множество A_4 замкнуто.

Задача 15. В пространстве ℓ_p $(p \geqslant 1)$ рассмотрим множества

а) $M_1 = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) | \, x_k > 0, k = 1, 2, \ldots\}$;

б) $M_2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) | \, x_k \geqslant 0, k = 1, 2, \ldots\}$.

Открыто ли множество M_1 в ℓ_p? Замкнуто ли M_2 в ℓ_p?

Решение. Множество M_1 не является открытым. Пусть $x^\star = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots\right)$ и $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Найдется натуральное n_ε такое, что

$$\frac{1}{2^{n_\varepsilon}} \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2^{n_\varepsilon} - 1}.$$

Положим

$$x_k = \frac{1}{2^k} (k \neq n_\varepsilon), \quad x_{n_\varepsilon} = -\frac{1}{2^{n_\varepsilon}}.$$

Точка $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \notin M_1$. Тогда

$$\rho(x^\star, x) = \frac{1}{2^{n_\varepsilon} - 1} > \varepsilon.$$

Таким образом, шар сколь угодно малого радиуса с центром в точке $x^\star \in M_1$ содержит точки, не принадлежащие M_1. Это означает, что множество M_1 не является открытым.

Так как сходимость в пространстве ℓ_p влечет равномерную покоординатную сходимость, то доказательство замкнутости множества M_2 осуществляется аналогично доказательству замкнутости множества A_4 в задаче 14.

Задача 16. Замкнуто ли множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в пространстве $\mathbb{R}$; в пространстве $(\mathbb{Q}, \rho)$, где $\rho(x, y) = |x - y|$?

Решение. Множество $\mathbb{Q}$ плотно в пространстве $\mathbb{R}$ и, следовательно, незамкнуто. В пространстве $(\mathbb{Q}, \rho)$ множество замкнуто, так как содержит все рациональные предельные точки.

Задача 17. Замкнуто или открыто множество $A = (\sqrt{3}, \sqrt{8}) \cup \mathbb{Q}$ в пространстве $(\mathbb{Q}, \rho)$, где $\rho(x, y) = |x - y|$; в пространстве $\mathbb{R}$;?

Решение. Множество A замкнуто в пространстве $(\mathbb{Q}, \rho)$, так как содержит все рациональные предельные точки. В пространстве $\mathbb{R}$ множество A незамкнуто. Оно также не является открытым в пространстве $\mathbb{R}$, так как не содержит внутренних точек.

Задача 18. Пусть $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1) \cap \{2\}$. Тогда

1) $[0, 1]$ суть предельные точки множества A;
2) $0, 1, 2$ суть граничные точки множества A;
3) $[0, 1]$ и 2 суть точки касания множества A;
4) $(0, 1)$ суть внутренние точки множества A;
5) 2 – изолированная точка A.

Задача 19. Пусть $X = \mathbb{R}^2$,

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\Big\} \cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 10 \leqslant x \leqslant 11\Big\} \cup$$

$$\cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (100, 100)\Big\}.$$

Тогда

1) $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1\Big\} \cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 10 \leqslant x \leqslant 11\Big\}$ суть предельные точки множества A;
2) $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1\Big\} \cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 10 \leqslant x \leqslant 11\Big\}$ $\cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (100, 100)\Big\}$ суть граничные точки множества A;

3) $A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1\Big\} \cup \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 10 \leqslant x \leqslant 11\Big\} \cup \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (100,100)\Big\}$ – точки касания множества A ;

4) $\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < 1\Big\}$ – внутренние точки множества A;

5) $(100,100)$ – изолированная точка A.

Задача 20. Пусть $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1) \cap \mathbb{Q}$. Тогда

1) $[0,1]$ – предельные точки множества A;
2) $[0,1]$ – граничные точки множества A;
3) $[0,1]$ – точки касания множества A;
4) внутренних точек у множества A нет;
5) изолированных точек у множества A нет.

Задача 21. Пусть $X = \mathbb{R}$, $A = \Big\{1/n : n \in \mathbb{N}\Big\}$. Тогда

1) 0 – предельные точки множества A;
2) $\{0\} \cup A$ – граничные точки множества A;
3) $\{0\} \cup A$ – точки касания множества A;
4) внутренних точек у множества A нет;
5) множество изолированных точек множества A совпадает с A.

Задача 22. Пусть $X = [0,1) \cap \{2\}$, $A = (0,1) \cap \{2\}$. Тогда

1) $[0,1)$ – предельные точки множества A;
2) 0 – граничные точки множества A;
3) $[0,1) \cup \{2\}$ – точки касания множества A;
4) $(0,1) \cup \{2\}$ – внутренние точки множества A;
5) 2 – изолированная точка множества A.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Принадлежит ли открытому шару радиуса 1 с центром в точке $0 = (0,0,\ldots,)$ точка $x = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \ldots\right)$ в пространстве: а) ℓ_1, б) ℓ_2?

2. Указать какой нибудь элемент пространства $\mathscr{L}_1[-1,1]$, принадлежащий открытому шару радиуса $1/4$ с центром $x_0(t) = t^2$.

Рассмотрим множество $\aleph$ всевозможных последовательностей $x = (n_1, n_2, \dots, x_k, \dots)$ и $y = (m_1, m_2, \dots, m_k, \dots)$ натуральных чисел. Обозначим через $k_0(x, y)$ наименьший индекс, при котором $n_k \neq m_k$. Введем на $\aleph$ метрику по формуле

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k_0(x,y)}, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Показать, что $(\aleph, \rho)$ – метрическое пространство.

3. Доказать, что в $(\aleph, \rho)$ аксиома треугольника выполняется в усиленной форме

$$\rho(x, y) \leqslant \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}.$$

4. Доказать, что в метрическом пространстве $(\aleph, \rho)$ любой открытый шар $B(x_0, r)$ является одновременно замкнутым множеством.

5. Доказать, что в метрическом пространстве $(\aleph, \rho)$ верно $B(x_0, r) = B(y, r)$ для всех $y \in B(x_0, r)$.

6. Доказать, что в метрическом пространстве $(\aleph, \rho)$ любой замкнутый шар $B[x_0, r]$ является одновременно открытым множеством.

7. Доказать, что в метрическом пространстве $(\aleph, \rho)$ верно $\overline{B(x_0, r)} = \overline{B(y, r)}$ для всех $y \in \overline{B(x_0, r)}$.

8. Доказать, что если в $(\aleph, \rho)$ два шара имеют общую точку, то один из них содержится в другом.

9. Доказать, что в метрическом пространстве $(\aleph, \rho)$ расстояние между двумя различными открытыми шарами радиуса R, содержащимися в замкнутом шаре радиуса R, равно R.

10. Доказать, что в произвольном метрическом пространстве открытый шар $B(x_0, r)$ – открытое множество.

11. Доказать, что в произвольном метрическом пространстве замкнутый шар $B[x_0, r]$ – замкнутое множество.

12. Доказать, что в произвольном метрическом пространстве замыкание $\overline{B(x_0, r)}$ открытого шара $B(x_0, r)$ содержится в замкнутом шаре $B[x_0, r]$. Возможно ли при этом, что $\overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]$.

13. В пространстве $\mathbb{R}^2$ привести пример двух замкнутых множеств A и B таких, что $\rho(A, B) = 0$ и $A \cap B = \varnothing$.

14. Пусть x – произвольна точка, A – произвольное множество в некотором метрическом пространстве. Доказать, что $\rho(x, A) = \rho(x, \overline{A})$.

ТЕМА 4. ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Последовательность $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ точек метрического пространства X называется *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует ν_ε такое, что $\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant \nu_\varepsilon$ и $m \geqslant \nu_\varepsilon$.

Лемма 1. *Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.*

Метрическое пространство X называется *полным*, если в нем каждая фундаментальная последовательность имеет предел.

Всякое подмножество $M \subset X$ метрического пространства (X, ρ_X) такое, что $\rho_M(x, y) = \rho_X(x, y)$ для любых $x, y \in M$ называется *подпространством* пространства (X, ρ_X).

Полное метрическое пространство $\bar{X}$ называется *пополнением метрического пространства* X, если X является подпространством $\bar{X}$ и X всюду плотно в $\bar{X}$, т. е. $\overline{X} = \bar{X}$.

Взаимно однозначное отображение $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется *изометрией*, если $\rho_X(x, y) = \rho_Y(f(x), f(y))$ для любых $x, y \in X$.

Метрические пространства называются *изометричными*, если между ними существует изометрия.

Теорема 1. *Для любого метрического пространства существует пополнение. Любые два пополнения изометричны.*

Одной из характеристик полного метрического пространства является теорема о вложенных шарах.

Теорема 2. *Метрическое пространство X является полным тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных в друг друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку.*

Теорема 3. *Пусть L – подпространство метрического пространства X. Тогда*

1) *если L – полное пространство, то L замкнуто в X;*
2) *если X – полное, а L замкнуто в X, то L – полное пространство.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Конечный интервал $(a, b) \in \mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ является неполным метрическим пространством.

Решение. Последовательность $(x^{(n)}) \subset (a, b)$, $x^{(n)} = a + 1/n$ является фундаментальной, но, очевидно, предела не имеет.

Задача 2. Пространство последовательностей ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ – полное метрическое пространство.

Решение. Пусть $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_i^{(m)}, \dots,)$ – фундаментальная последовательность в ℓ_p. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует ν_ε такое, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(k)} - x_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p \tag{1}$$

для всех $k > \nu_\varepsilon$ и $m > \nu_\varepsilon$. Зафиксируем произвольное $1 \leqslant i \leqslant n$, мы получим $|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$ для всех $k > \nu_\varepsilon$ и $m > \nu_\varepsilon$, т. е. $(x_i^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ – фундаментальная числовая последовательность. Так как пространство $\mathbb{R}$ полно, то существует $\lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i$.

Докажем, что $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$ принадлежит пространству ℓ_p и $\rho(x^{(m)}, x) \to 0$ при $m \to \infty$. Из неравенства (1) следует, что для любого фиксированного N

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i^{(k)} - x_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p.$$

В этой сумме теперь лишь конечное число слагаемых, и мы можем , зафиксировав N, перейти к пределу при $m \to \infty$. Получаем

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i^{(k)} - x_i|^p < \varepsilon^p.$$

Это неравенство верно при любом N. Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(k)} - x_i|^p < \varepsilon^p \tag{2}$$

Используя неравенство треугольника для метрики в пространстве $\mathbb{R}_p^N$, имеем

$$\Big(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N}|x_i^{(k)}|^p + \sum_{i=1}^{N}|x_i^{(k)} - x_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и учитывая сходимости рядов $\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i^{(k)}|^p$, $\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i^{(k)} - x_i|^p$, мы заключаем, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i|^p$ сходится, т. е. $x \in \ell_p$.

Наконец, в силу произвольности ε, из неравенства (2) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x, x^{(k)}) = \lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(k)} - x_i|^p\Big)^{1/p} = 0,$$

т. е. фундаментальная последовательность $x^{(m)}$ имеет в пространстве ℓ_p предел.

Задача 3. Пространство $C[a,b]$ – полное метрическое пространство.

Решение. В самом деле, пусть $(x^{(n)}(t))_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в $C[a,b]$. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует ν_ε такое, что $|x^{(k)}(t) - x^{(m)}(t)| < \varepsilon$ для всех $k > \nu_\varepsilon$ и $m > \nu_\varepsilon$ и всех $a \leqslant t \leqslant b$. Значит последовательность $x^{(k)}(t)$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$. По теореме из курса математического анализа ее предел $x(t)$ есть непрерывная на $[a,b]$ функция. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $|x(t) - x^{(m)}(t)| < \varepsilon$ для всех $m > \nu_\varepsilon$ и всех $a \leqslant t \leqslant b$. Следовательно, $\rho(x^{(m)}, x) \to 0$ при $m \to \infty$ в пространстве $C[a,b]$.

Задача 4. Докажем, что вещественная прямая $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x_1,x_2) = |\operatorname{arctg}(x_1) - \operatorname{arctg}(x_2)|$ является неполным метрическим пространством.

Решение. Так как функция $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ монотонна, то для $\rho(x_1,x_2)$ выполняются аксиомы метрики.

Функция $\operatorname{arctg}(x)$ осуществляет взаимно–однозначное отображение вещественной прямой $\mathbb{R}$ на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. Пусть $X = \mathbb{R}$, $Y = (-\pi/2, \pi/2)$. Рассмотрим два метрических пространства (X,ρ) и (Y,d), где d – стандартная метрика на прямой

$$d(u,v) = |u - v|.$$

Так как отображение $f : X \to Y$ биективно, и имеет место равенство

$$\rho(x_1, x_2) = d(f(x_1) - f(x_2)),$$

то вещественная прямая с метрикой ρ изометрически изоморфна интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ с метрикой d:

$$(\mathbb{R}, \rho) \sim \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), d\right).$$

Но интервал, как показано выше, со стандартной метрикой является неполным метрическим пространством. Следовательно, вещественная прямая с метрикой ρ также является неполным метрическим пространством.

Чтобы пополнить пространство (Y, d), достаточно включить точки $-\pi/2$ $\pi/2)$. В исходном пространстве (X, ρ) тому соответствует добавление к вещественной прямой бесконечно удаленных точек $+\infty$ и $-\infty$.

Задача 4. Докажем полноту пространства $\mathcal{M}[a, b]$ ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций.

Решение. Пусть $(x^{(n)}(t))_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в $\mathcal{M}[a, b]$, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует ν_ε такое, что для всех $n, m > \nu_\varepsilon$

$$\sup_{t \in [a,b]} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда при каждом $t \in [a, b]$ для $n, m > \nu_\varepsilon$ имеем

$$|x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Это означает, что при каждом фиксированном $t \in [a, b]$ числовая последовательность $(x^{(n)}(t))_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$, т. е. при каждом $t \in [a, b]$ существует предел $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}(t)$. Покажем, что $x(t)$ – ограниченная функция. Перейдем в (3) к пределу при $m \to \infty$

$$|x^{(n)}(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $t \in [a, b]$ и $n > \nu_\varepsilon$. Значит

$$\sup_{t \in [a,b]} |x^{(n)}(t) - x(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{4}$$

Зафиксировав $n > \nu_\varepsilon$, найдем такое K, что $|x^{(n)}(t)| \leqslant K$ для всех $t \in [a,b]$. Считая $\varepsilon < 1$, имеем

$$|x(t)| \leqslant |x(t) - x^{(n)}(t)| + |x^{(n)}(t)| < 1 + K,$$

т. е. $x(t) \in \mathcal{M}[a,b]$. Из (4) следует, что $\rho(x^{(n)}, x) \to 0$ при $n \to \infty$ в пространстве $\mathcal{M}[a,b]$. Тем самым полнота $\mathcal{M}[a,b]$ доказана.

Приведем примеры неполных пространств

Задача 6. Докажем, что пространство рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с метрикой $\rho(x,y) = |x-y|$ неполное метрическое пространство.

Решение. Очевидно, что $\mathbb{Q}$ – подпространство в $\mathbb{R}$. Так как последовательность $x^{(n)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится в пространстве $\mathbb{R}$, то она фундаментальна в нем, а, значит, и в пространстве $\mathbb{Q}$. Однако, предел этой последовательности (число e) есть число иррациональное. Значит пространство $\mathbb{Q}$ неполное. Это означает также, что множество $\mathbb{Q}$ не замкнуто в пространстве $\mathbb{R}$.

Задача 7. Пространство $\mathscr{L}_1[-1,1]$ непрерывных на отрезке $[-1,1]$ не является полным.

Решение. Рассмотрим последовательность

$$x^{(n)}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, -1/n); \\ nt, & t \in [-1/n, 1/n]; \\ 1, & t \in (-1/n, 1]. \end{cases}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $m > n$. Поэтому

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \int\limits_{-1}^{1} |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)|\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\Big(\int\limits_{0}^{1/m} |mt - nt|\,\mathrm{d}t + \int\limits_{1/m}^{1/n} |1 - nt|\,\mathrm{d}t\Big) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

т. е. последовательность $x^{(n)}(t)$ фундаментальна в пространстве $\mathscr{L}_1[-1,1]$. Покажем, что она не сходится ни к какой непрерывной функции.

Предположим противное. Пусть $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}_1[-1,1]} x(t)$ и $y(t) = \mathrm{sign}(t)$. При каждом $t \in [-1,1]$ $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} y(t)$. Так как $x(t)$ непрерывна, а $y(t)$

разрывна в нуле с ненулевым скачком, то

$$0 < \int\limits_{-1}^{1/m} |x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |y(t)-x^{(n)}(t)|\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{1} |x^{(n)}(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Первый интеграл в правой части стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, второй – по сделанному выше предположению. Полученное предположение означает, что $x^{(n)}$ не сходится в пространстве $\mathscr{L}_1[-1,1]$, т. е. это пространство неполное.

Задача 8. Покажите, исходя из определения, что последовательность а) $x^{(n)}(t) = t^n$; б) $x^{(n)}(t) = e^{-nt}$ не является фундаментальной в пространстве $C[0,1]$.

Р е ш е н и е. а). Пусть $m > n$, $g(t) = t^n - t^m$. Функция $g(t)$ достигает максимума на отрезке $[0,1]$ в точке $t^\star = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}$. Поэтому

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \max_{t\in[0,1]} |g(t)| = g(t^\star) = a_{n,m} = \left(\frac{n}{m}\right)^{n/m-n} \frac{m-n}{n} \not\to 0,$$

так как $a_{n,2n} = 1/2$.

б). Пусть $m > n$, $g(t) = e^{-nt} - e^{-mt}$. Функция $g(t)$ достигает максимума на отрезке $[0,1]$ в точке $t^\star = \frac{1}{m-n} \ln \frac{m}{n}$. Далее

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \max_{t\in[0,1]} |g(t)| = g(t^\star) = b_{n,m} = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} \frac{m-n}{n} \not\to 0,$$

так как $a_{n,2n} = 1/2$.

Задача 9. Проверьте с помощью определения являются ли последовательности

а) $x^{(n)}(t) = \begin{cases} 1-nt, & t \in [0,1/n]; \\ 0, & t \in (1/n,1]. \end{cases}$

б) $x^{(n)}(t) = \begin{cases} n(1-nt), & t \in [0,1/n]; \\ 0, & t \in (1/n,1]. \end{cases}$

в) $x^{(n)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1-nt}{n+1}, & t \in [0,1/n]; \\ 0, & t \in (1/n,1]. \end{cases}$

г) $x^{(n)}(t) = \begin{cases} \sqrt{n}(1-nt), & t \in [0,1/n]; \\ 0, & t \in (1/n,1]. \end{cases}$

фундаментальными в пространстве $C[0,1]$?

Р е ш е н и е. а). Пусть $m > n$. Тогда

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \max_{t\in[0,1]} |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| = \max_{t\in[0,1/n]} |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| =$$

$$= x^{(n)}\left(\frac{1}{m}\right) = 1 - \frac{n}{m} \nrightarrow 0,$$

так как эта последовательность при $m = 2n$ имеет предел $1/2$. Последовательность не фундаментальна, и, следовательно, не сходится.

б). Пусть $m > n$. Тогда

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \max_{t\in[0,1]} |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| =$$

$$= \max\left\{m - n, x^{(n)}\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{m-n}{m^2}\right\} = m - n \nrightarrow 0,$$

Последовательность не фундаментальна, и, значит, не сходится.

в). Пусть $m > n$. Тогда

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \max_{t\in[0,1]} |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| =$$

$$= \frac{m-n}{m(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m}\,\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Последовательность фундаментальна, и, значит, сходится.

г). Пусть $m > n$. Тогда

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \max_{t\in[0,1]} |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| = \sqrt{n}\left(1 - \frac{n}{m}\right) \nrightarrow 0.$$

при $n, m \to \infty$. Последовательность не фундаментальна, и, значит, не сходится.

Задача 10. Является ли полным метрические пространство $(\mathbb{R}, \rho)$, если $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$, где $f(x) = x^3$.

Р е ш е н и е. Пусть $(x^{(n)})$ – произвольная фундаментальная в метрике ρ последовательность. Это означает, что

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = |(x^{(n)})^3 - (x^{(m)})^3| =$$

$$= |x^{(n)} - x^{(m)}||(x^{(n)})^2 + x^{(n)}x^{(m)} + (x^{(m)})^2| \to 0$$

Откуда $|x^{(n)} - x^{(m)}| \to 0$. Таким образом, последовательность $(x^{(n)})$ фундаментальна в естественной метрике $d(x,y) = |x - y|$. Значит, существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $|x^{(n)} - a| \to 0$. Но тогда и $|(x^{(n)})^3 - a^3| \to 0$. Следовательно, рассматриваемое пространство полно.

Задача 11. Какой должна быть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы метрическое пространство $(\mathbb{R}, \rho)$, если $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$, было полным?

Р е ш е н и е. Обозначим через $d(x,y) = |x - y|$ "естественную " метрику на $\mathbb{R}$. Пространство $(\mathbb{R}, d)$ – полное. Пусть $f(x)$ – строго возрастающая функция и $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Докажем, следующее утверждение: для того, чтобы пространство $(\mathbb{R}, \rho)$ было полным необходимо и достаточно, чтобы образ $f(\mathbb{R})$ был замкнутым в пространстве $(\mathbb{R}, d)$.

Достаточность. Пусть $f(\mathbb{R})$ замкнуто в $(\mathbb{R}, d)$ и $(x^{(n)})$ – фундаментальная в пространстве $(\mathbb{R}, \rho)$ последовательность. Это означает, что

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = |f(x^{(n)}) - f(x^{(m)})| = d(f(x^{(n)}), f(x^{(m)})) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

т. е. последовательность $f(x^{(n)})$ фундаментальна в $(\mathbb{R}, d)$. Так как это пространство полное, то существует $y \in \mathbb{R}$ такое, что $d(f(x^{(n)}), y) = |f(x^{(n)}) - y| \to 0$. В силу замкнутости $f(\mathbb{R})$ $y \in f(\mathbb{R})$. Поэтому найдется такое $x \in \mathbb{R}$, что $y = f(x)$.

Таким образом,

$$0 \leftarrow d(f(x^{(n)}), y) = |f(x^{(n)}) - y| = |f(x^{(n)}) - f(x)| = \rho(x^{(n)}, x),$$

т. е. $x^{(n)} \to x$ в $(\mathbb{R}, \rho)$ и $(\mathbb{R}, \rho)$ – полное пространство.

Необходимость. Пусть пространство $(\mathbb{R}, \rho)$ полное, и y – предельная точка множества $f(\mathbb{R})$ в пространстве $(\mathbb{R}, d)$. Существует последовательность

$$(y^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset f(\mathbb{R}),\ y^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{R},d)} y, \Rightarrow |y^{(n)} - y| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

По определению образа $f(\mathbb{R})$ для каждого n найдется $x^{(n)}$ такой, что $y^{(n)} = f(x^{(n)})$. Значит, $|f(x^{(n)} - y| \to 0$, т. е. последовательность $(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна в $(\mathbb{R}, d)$ (как сходящаяся), а последовательность $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $(\mathbb{R}, d)$. Так как по условию пространство $(\mathbb{R}, \rho)$ полное. то найдется такое число x, что $x^{(n)} \to x$ в пространстве $(\mathbb{R}, \rho)$, т. е. $|f(x^{(n)}) - f(x)| \to 0$. В силу единственности предела $y = f(x)$, следовательно, $y \in f(\mathbb{R})$. Значит, $f(\mathbb{R})$ замкнуто.

Заметим, что образ строго возрастающей непрерывной функции есть промежуток. Поэтому замкнутость $f(\mathbb{R})$ эквивалентна равенству $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Задача 12. Докажите, что пространство $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $x(t)$, обладающих свойством

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \ \rho(x, y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t) - y(t)|,$$

является полным.

Решение. Поскольку $C_0(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$, то достаточно доказать замкнутость $C_0(\mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R})$.

Пусть x предельная точка $C_0(\mathbb{R})$ и $x^{(n)} \to x$, $x^{(n)} \in C_0(\mathbb{R})$. В силу равномерной сходимости на $\mathbb{R}$ найдется натуральное n такое, что $|x^{(n)} - x| < \varepsilon/2$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Зафиксировав такое n, найдем $M > 0$, обеспечивающее неравенство $|x^{(n)}| < \varepsilon/2$ при $|t| > M$. Пусть $|t| > M$. Тогда

$$|x(t)| \leqslant |x(t) - x^{(n)}(t)| + |x^{(n)}(t)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Поэтому $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Значит, $x \in C_0(\mathbb{R})$, т. е. $C_0(\mathbb{R})$ замкнуто в $C(\mathbb{R})$.

Задача 13. Покажем, что если на множестве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций ввести метрику

$$\rho(x, y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - y(t)|,$$

то получится неполное метрическое пространство.

Решение. Последовательность $x^{(n)}(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$ сходится в пространстве $C[-1, 1]$, следовательно, является фундаментальной относительно предполагаемой метрики. Однако она не сходится в этой метрике к непрерывно дифференцируемой функции ($x^{(n)}(t) \rightrightarrows |t|$). Значит пространство не является полным.

Задача 14. На множестве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций введем метрику

$$\rho(x, y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - y(t)| + \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x'(t) - y'(t)|.$$

Покажите, что $\rho(x,y)$ удовлетворяет аксиомам метрики и полученное метрическое пространство $C^{(1)}[a,b]$ полное.

Решение. Аксиома симметрии и неравенство треугольника здесь очевидны. Проверим аксиому тождества. Пусть

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)-y'(t)|=0.$$

Тогда отсюда следует, что $|x(t)-y(t)|\equiv 0$, $|x'(t)-y'(t)|\equiv 0$. Это означает, что $x(t)\equiv y(t)$.

Пусть $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная в пространстве $C^{(1)}[a,b]$ последовательность. Это означает, что для всех $\varepsilon>0$ существует ν_ε такое, что для всех $n,m>\nu_\varepsilon$

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)-y'(t)|<\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|<\varepsilon,\quad \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t)-y'(t)|<\varepsilon,$$

что означает, что последовательности $(x^{(n)})$, $((x^{(n)})')$ фундаментальны в пространстве $C[a,b]$. В силу полноты пространства $C[a,b]$ существуют такие непрерывные функции $x,y\in C[a,b]$, что $x^{(n)}(t)\rightrightarrows x(t)$, $(x^{(n)})'(t)\rightrightarrows y(t)$. Так как $x^{(n)}(t)=x^{(n)}(a)+\int\limits_a^t(x^{(n)})'(s)\,\mathrm{d}s$, то переходя в этом представлении к пределу в силу равномерной сходимости производных, позволяет получить представление $x(t)=x(a)+\int\limits_a^t y(s)\,\mathrm{d}s$. Отсюда следует, что функция $x(t)$ непрерывно дифференцируема и $y(t)=x'(t)$. Таким образом, доказано, что

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(n)}(t)-x(t)|\to 0,\quad \max_{a\leqslant t\leqslant b}|(x^{(n)})'(t)-x'(t)|\to 0,$$

т. е. $\rho(x^{(n)},x)\to 0$ в пространстве $C^{(1)}[a,b]$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Является ли фундаментальной последовательность функций $x^{(n)}(t)=t^n$ в пространстве $C[-1/2,1/2]$?

2. Является ли фундаментальной последовательность функций $x^{(n)}(t) = \sin(2^n t)$ в пространстве $C[0, 2\pi]$?

3. Является ли фундаментальной последовательность функций $x^{(n)}(t) = \dfrac{\sin nt}{n}$ в пространстве $C^{(1)}[0, 1]$?

4. Является ли фундаментальной последовательность функций

$$x^{(n)}(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{n}, & |t| < n; \\ 0, & |t| \geqslant n. \end{cases}$$

в пространстве ограниченных на числовой прямой функций с метрикой $\rho(x, y) = \sup\limits_{-\infty<t<\infty} |x(t) - y(t)|$?

5. Привести пример фундаментальной последовательности не имеющей предела.

6. Является ли полным метрическим пространством множество натуральных чисел с метрикой

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & m \neq n; \\ 0, & m = n? \end{cases}$$

7. Является ли полным метрическим пространством множество натуральных чисел с метрикой

$$\rho(m, n) = \frac{|m - n|}{mn}?$$

8. Является ли полным метрическим пространством множество целых чисел пространства $\mathbb{R}$?

9. Доказать, что метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек, полное.

10. Найти пополнения следующих метрических пространств:

а) интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ числовой прямой с обычной метрикой;

б) открытый круг плоскости $\mathbb{R}^2$;

в) множество рациональных чисел на $\mathbb{R}$ с обычной метрикой.

11. Является ли полным метрическое пространство (X, ρ), где X – произвольное множество, а

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y? \end{cases}$$

12. Является ли полным метрическим пространством числовая прямая с метрикой

а) $\rho(x, y) = |x^5 - y^5|$;

б) $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$.

Если нет, описать пополнение $\mathbb{R}$ по каждой метрике.

13. Доказать неполноту пространства многочленов относительно метрики

а) $\rho(P, Q) = \max\limits_{x \in [0,1]} |P(x) - Q(x)|$;

б) $\rho(P, Q) = \int\limits_0^1 |P(x) - Q(x)| \, \mathrm{d}x$;

в) $\rho(P, Q) = \sum\limits_i |C_i|$, если $P(x) - Q(x) = \sum\limits_i C_i x^i$;

14. Во множестве отрезков на числовой прямой определим расстояние следующей формулой

$$\rho\big([a, b], [c, d]\big) = |a - c| + |b - d|.$$

Будет ли полученное пространство полным? Если нет, то описать его пополнение.

15. Доказать, что S – полное метрическое пространство.

16. Доказать, что $\ell_\infty = m$ – полное метрическое пространство.

17. Рассмотрим последовательность шаров $B[n, 1 + 1/2n]$ задачи 2). Доказать, что эти шары вложены друг в друга, однако не существует точки, принадлежащей всем шарам одновременно. Какое условие теоремы о вложенных шарах нарушено?

18. Доказать, что если опустить одно из условий:

1) полноту пространства;
2) замкнутость шаров;
3) стремление к нулю радиусов шаров;
4) вложенность шаров друг в друга,

то теорема о вложенных шарах перестанет быть верной.

19. Пусть $x^{(n)} \in X$ – фундаментальная последовательность, $x^{(n_k)}$ – ее сходящаяся подпоследовательность. Доказать, что $x^{(n)}$ сходится в X к тому же пределу, что и $x^{(n_k)}$.

ТЕМА 5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Метрические пространства играют основную роль в большинстве разделов математики. Рассмотрим некоторые из них.

1. Пусть A – некоторое множество, $A^\star$ – семейство всех конечных последовательностей элементов из A, допускающая пустую последовательность. Будем интерпретировать A как алфавит некоторого языка. Тогда элементы из A естественно называть *буквами*, а элементы из $A^\star$ – *словами. Редакторской операцией* на $A^\star$ называется преобразование слова, состоящее из исключения одной буквы, либо вставки буквы в слово, или в замене одной буквы на другую. Наименьшее число редакторских операций, необходимых для перехода от одного слова к другому, называется *расстоянием Левинштейна* и задает метрику на $A^\star$.

2. Рассмотрим задачу о передаче информации по коммуникациям. В компьютерной технике информация передается с помощью последовательности битов, принимающих два значения 0 или 1. Биты будем рассматривать в качестве букв. Рассмотрим всевозможные упорядоченные последовательности битов длины N. Обозначим это множество через I^N. Мощность этого множества 2^N. В этом множестве выделим подмножество A^N, состоящее из значащих слов. Множество I^N является метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$, при этом x_i, y_i принимают два значения 0 или 1. Данная метрика называется *расстоянием Хемминга.*

Расстояние Хемминга используется для построения кодов с исправлением ошибок. Предположим, что в процессе передачи информации некоторые биты были искажены, т. е произошла замена 1 на 0 или наоборот. Это означает, что произошла ошибка передачи.

Например, нам необходимо передать два слова, закодированных 1 и 0. В этом случае $N = 1$. При передаче информации такой код ничем не защищен. Можно усложнить код и дублировать каждое слово – 11 и 00. Тогда при однократной ошибке при передаче мы сможем констатировать ошибку, если получили сообщение вида 10 или 01. Если кодировать сообщение тремя битами, т. е. передавать 111 и 000, то ошибку можно исправить.

Пусть для элементов множества A^N выполняется неравенство $\rho(x, y) > d$, $x \neq y$. Тогда для того, чтобы код мог корректировать n ошибок при передаче достаточно выполнения условия $d \geqslant 2n + 1$. Из этого соотношения следует, что при кодировании слов нужно выбирать коды как можно дальше отстоящие друг от друга.

3. Пусть X – произвольное метрическое пространство. Для каждого $x \in X$ и не пустого $A \subset X$ положим

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a).$$

Для произвольных множеств $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A, B) = \max\big\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\big\}.$$

Если рассмотреть множество $\mathcal{H}(X)$ всех замкнутых ограниченных подмножеств в X, то на $\mathcal{H}(X)$ функция $d_H(A, B)$ определяет метрику, которая называется *расстоянием Хаусдорфа.* Расстояние Хаусдорфа используется в задачах распознавания изображений цифровых сигналов.

Пусть задан алфавит изображений-образцов и одно тестовое изображение. Задача состоит в том, чтобы для тестового изображения найти наиболее похожее на него изображение-образец. Степень схожести определяется метрикой Хаусдорфа. Применение метрики Хаусдорфа в задаче распознавания изображений основано на сопоставлении изображениям замкнутых ограниченных множеств. Заметим, что каждому растровому черно-белому изображению соответствует матрица $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$ такая, что $a_{ij} = 1$, если пиксель изображения с координатами (j,i) отличен от фона или $j = 1$. В противном случае $a_{ij} = 0$. Каждую матрицу можно соотнести с дискретным множеством точек на плоскости.

Метрика Хаусдорфа также применяется для анализа сходства траекторий в таких областях как экология, биология, геоинформатика, телемеханика. Анализ траекторий в телемеханике позволяет решить задачу об оптимизации маршрутов, навигации.

Рассмотрим еще одну задачу на метрику Хаусдорфа. Пусть имеются две дороги (непрерывные кривые, содержащие концы) Γ_1 и Γ_2. По дороге движется машина (точка), поливающая их. Будем считать, что машина поливает вокруг себя площадь замкнутого круга, причем радиус полива можно менять. Найдем наименьший радиус, при котором при движении машины по одной из дорог будут политы обе.

Если точка x движется по Γ_1, то чтобы полить точку $y \in \Gamma_2$, нужно выбрать радиус полива $R(y) = \min\limits_{x \in \Gamma_1} \|x - y\|$, а чтобы полить все точки $y \in \Gamma_2$, нужно выбрать радиус

$$R_1(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max_{y \in \Gamma_2} \min_{x \in \Gamma_1} \rho(x, y).$$

Аналогично, если точка x движется по Γ_2, то чтобы полить всю Γ_1, нужно выбрать радиус

$$R_2(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max_{y \in \Gamma_1} \min_{x \in \Gamma_2} \rho(x, y).$$

Обе дороги будут политы, если

$$R(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max\{R_1(\Gamma_1, \Gamma_2),\ R_2(\Gamma_1, \Gamma_2)\}.$$

Расстояние $R(\Gamma_1, \Gamma_2) = d_H(\Gamma_1, \Gamma_2)$ является метрикой Хаусдорфа.

4. В задачах кластерного анализа и классификации используется статистическое расстояние или *расстояние Махаланобиса*, с помощью которого определяется сходство образов и классов. Оно отличается от расстояния Евклида тем, что учитывает дисперсии переменных и определяется по формуле

$$d_M(A, B) = \sqrt{(x - y)^\top S^{-1} (x - y)},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ элементы пространства $\mathbb{R}^N$, S – матрица ковариации. Расстояние Махаланобиса можно определить как меру несходства двух случайных величин x и y из одного распределения вероятностей с матрицей ковариации S.

Литература

1. Антоневич, А.Б. *Функциональный анализ и интегральные уравнения: учеб. пособие* / А.Б. Антоневич, М.Х. Мазель, Я.В. Радыно. - Минск: БГУ, 2011. – 319 с.
2. Антоневич, А.Б. *Сборник задач по функциональному анализу.* 2-изд./ А.Б. Антоневич, П.Н. Князев, Я.В. Радыно. - М.: Либроком, 2010. – 208 с.
3. Арсеньев, А.А. *Лекции по функциональному анализу для начинающих специлистов по математической физике*/ А.А. Арсеньев. Москва – Ижевск: РХД, 2009. – 500 с.
4. Ахиезер, Н.И. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: В 2-х т.*/ Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – Х.: Выща. шкл. Изд-во Харьк. ун-те, 1977-1978. – Т.1. – 316 с.; Т.2. – 1978. – 288 с.
5. Березанский, Ю.М. *Функциональный анализ. Курс лекций* / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. – К.: Высш.шк., 1990. – 600 с.
6. Варга, Р. *Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе* / Р. Варга. – М.: Мир, 1974.
7. Городецкий, В.В. *Методы решения задач по функциональному анализу* / В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.Л. Настасиев. – Киев: Высш. шк., 1990. – 479 с.
8. Гелбаум, Б. *Контпримеры в анализе* / Б.Гелбаум, Дж.Олтстед. – М.: Мир, 1967. – 251 с.
9. Глазман, И.М. *Конечномерный линейный анализ в задачах* / И.М. Глазман, Ю.И. Любич. – М.: Наука, 1969. – 475 с.
10. Дерр, В.Я. *Функциональный анализ: лекции и упражнения: учебное пособие*/ В.Я. Дерр. – М.: КНОРУС, 2013. – 464 с.
11. Канторович, Л.В. *Функциональный анализ. 4-е изд., испр*/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. - СПб.:ВНМ, 2017. – 816 с.
12. Кириллов, А.А. *Теоремы и задачи функционального анализа* / А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. – М.: Наука, 1988. – 400 с.
13. Колмогоров, А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа* / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 286 с.
14. Коллатц, Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика* / Л. Коллатц. – М.: Мир, 1969.

15. Краснов, М.Л. *Интегральные уравнения* / М.Л. Краснов.– М.: Наука, 1975. – 304 с.

16. Кутателадзе, С.С. *Основы функционального анализа*/ С.С. Кутателадзе. – Новосибирск : Наука, 1983. – 222 с.

17. Кудрявцев, Л.Д. *Математический анализ. Т.3* / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2006. – 351 с.

18. Лебедев, В.И. *Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд., испр* / В.И. Лебедев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 296 с.

19. Леонтьева, Т.В. *Задачи по теории функций действительных переменных* / Т.А. Леонтьева, В.С. Панферов, В.С. Серов. – М: Изд.-во. Моск. ун-та, 1997. – 207 с.

20. Очан, Ю.С. *Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций*/ Ю.С. Очан. – М.: Просвещение, 1981. – 271 с.

21. Петровский, И.Г. *Лекции по теории интегральных уравнений* / И.Г.Петровский. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 136 с.

22. Рисс, Ф. *Лекции по функциональному анализу* / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь Б. – М.: Мир, 1979. – 592 с.

23. Рудин, У. *Функциональный анализ*/ У. Рудин. – М. : Мир, 1975. – 448 с.

24. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*/ С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

25. Треногин, В.А. *Функциональный анализ. - 4-е изд., исп.*/ В.А. Треногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.

26. Треногин, С.А. *Сборник задач по теории функций действительного переменного*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Наука, 1980. – 112 с.

27. Федоров, В.М. *Теория функций и функциональный анализ. Ч.1.*/ В.М. Федоров. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. – 184 с.

28. Федоров, В.М. *Теория функций и функциональный анализ. Ч.2.*/ В.М. Федоров. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. – 191 с.

29. Федоров, В.М. *Курс функционального анализа* / В.М. Федоров. СПб.: Изд-во Лань, 2001. – 352 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные метрические пространства		
Пространство	Описание	Метрика
$\mathbb{Q}$	Множество рациональных чисел	$\rho(x,y)=\lvert x-y\rvert$
$\mathbb{R}$	Множество действительных чисел	$\rho(x,y)=\lvert x-y\rvert$
$\mathbb{R}^n_2$	Множество упорядоченных наборов действительных чисел	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^2\right)^{1/2}$, $x=\{x_i\}_{i=1}^n$, $y=\{y_i\}_{i=1}^n$
$\mathbb{R}^n_1$	Множество упорядоченных наборов действительных чисел	$\rho(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert$, $x==\{x_i\}_{i=1}^n$, $y=\{y_i\}_{i=1}^n$
$\mathbb{R}^n_\infty$	Множество упорядоченных наборов действительных чисел	$\rho_\infty(x,y)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\lvert x_i-y_1\rvert$, $x=\{x_i\}_{i=1}^n$, $y=\{y_i\}_{i=1}^n$
$\mathbb{R}^n_p, p\geqslant 1$	Множество упорядоченных наборов действительных чисел	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert^p\right)^{1/p}$, $x=\{x_i\}_{i=1}^n$, $y=\{y_i\}_{i=1}^n$
ℓ_p, $p\geqslant 1$	Множество всевозможных последовательностей вещественных или комплексных чисел	$\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lvert x_i-y_i\rvert^p\right)^{1/p}$, $x=\{x_i\}_{i=1}^\infty$, $y=\{y_i\}_{i=1}^\infty$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lvert x_i\rvert^p<\infty$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lvert y_i\rvert^p<\infty$
$\ell_\infty=m$,	Множество всевозможных ограниченных последовательностей вещественных или комплексных чисел	$\rho(x,y)=\sup\limits_i\lvert x_i-y_i\rvert$, $x==\{x_i\}_{i=1}^\infty$, $y=\{y_i\}_{i=1}^\infty$

Основные метрические пространства		
Пространство	Описание	Метрика
c	Множество сходящихся последовательностей вещественных либо комплексных чисел	$\rho(x,y)=\sup\limits_k \lvert x_k-y_k\rvert$, $x=$ $=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$
c_0, $c_0\subset c\subset m$	Множество сходящихся к нулю последовательностей вещественных либо комплексных чисел	$\rho(x,y)=\sup\limits_k \lvert x_k-y_k\rvert$, $x=$ $=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$
S	Множество произвольных последовательностей вещественных либо комплексных чисел	$\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\lvert x_k-y_k\rvert}{1+\lvert x_k-y_k\rvert}$, $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$
$C[a,b]$	Множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций	$\rho(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\lvert x(t)-y(t)\rvert$
$M[a,b]$	Множество ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций	$\rho(x,y)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\lvert x(t)-y(t)\rvert$
$\mathscr{L}[a,b]$, $p\geqslant 1$	Множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций	$\rho(x,y)=\left(\int\limits_a^b \lvert x(t)-y(t)\rvert^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$

Учебное издание

Дайняк Виктор Владимирович
Чеб Елена Сергеевна

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Методические указания и задания к практическим занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для студентов факультета прикладной математики и информатики

В трех частях

Часть 1

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *Е. С. Чеб*

Подписано в печать 00.00.2019. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,01. Уч.-изд. л. 2,02. Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика на копировально-множительной технике факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск.