ТЕМА 1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Т Е О Р И Я

Пусть $t = t_0$, где $t_0 \in \mathbf{T}$ – некоторое фиксированное значение временного параметра. Тогда значение случайного процесса $x(\omega, t)$ в точке $t = t_0$

$$x(t_0) = x(\omega, t_0)$$

является случайной величиной (функцией элементарных исходов ω), определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. и называется *отсчетом случайного процесса* $x(\omega, t)$ в заданной точке $t_0 \in \mathbf{T}$.

Реализацией (*траекторией*) *случайного процесса* $x(\omega, t)$ называется числовая функция вещественной переменной

$$x(t) = x(\omega_0, t),$$

где $t \in \mathbf{T}$, а ω_0 – некоторый фиксированный элементарнный исход ($\omega_0 \in \Omega$).

Совокупность $\{x(\omega, t), \, t \in \mathbf{T}, \, \omega \in \Omega\}$ всех возможных реализаций случайного процесса $x(\omega, t)$ называется *ансамблем реализаций*.

Рассмотрим случайный процесс

$$x = x(t) = x(\omega, t), t \in \mathbf{T},$$

положим $t = t_0$. Тогда случайная величина $x(t_0)$ (сечение процесса) имеет функцию распределения

$$F_{x(t_0)}(z) = \mathbf{P}\{x(t_0) < z\} = F_x(z, t_0). \qquad (1)$$

Для любого n и любых точек $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{T}$ набор случайных величин

$$\{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)\}$$

является n-мерной случайной величиной с n-мерной функцией распределения

$$\begin{aligned}
&F_{x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_n)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\
&= F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\
&= \mathbf{P}\left\{x(t_1) < z_1, x(t_2) < z_2, \ldots, x(t_n) < z_n\right\} = \\
&= \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}\{x(t_i) < z_i\}\right\}.
\end{aligned}$$

Определение. Семейство функций

$$\left\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}$$

называется *семейством конечномерных распределений* случайного процесса $x = x(t)$.

Определение. Семейство функций

$$\left\{F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(z_1,z_2,\dots,z_n)\right\}$$

называется *согласованным семейством конечномерных распределений*, если оно для любого n удовлетворяет свойствам функций распределения n-мерных случайных величин.

Теорема Колмогорова о согласованности. Если при любом n и любых

$$t_1,t_2,\dots,t_n \in \mathbf{T}$$

семейство функций

$$\left\{F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(z_1,z_2,\dots,z_n)\right\}$$

является согласованным, то существует вероятностное пространство $(\mathbf{\Omega},\mathcal{F},\mathbf{P})$ и случайный процесс $x(\omega,t)$, определенный на этом вероятностном пространстве, для которого данное семейство будет семейством конечномерных распределений.

Основные характеристики случайных процессов

Математическим ожиданием случайного процесса $x(t)=x(\omega,t)$ называется функция

$$m_x(t)=\mathbf{E}\{x(t)\}, \qquad (2)$$

равная в каждый фиксированный момент времени $t \in \mathbf{T}$ математическому ожиданию сечения. Случайный процесс

$$\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$$

называется *центрированным случайным процессом*.

Дисперсией случайного процесса $x(t) = x(\omega, t)$ называется функция

$$\mathbf{D}_x(t) = \mathbf{D}\{x(t)\} = \mathbf{E}\{(x(t) - m(t))^2\}, \qquad (3)$$

равная в каждый фиксированный момент времени $t \in \mathbf{T}$ дисперсии сечения.

Средним квадратическим отклонением случайного процесса $x(t) = x(\omega, t)$ называется функция

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\mathbf{D}_x(t)},\ t \in \mathbf{T}.$$

Ковариационной функцией случайного процесса (автоковариацией) $x(t) = x(\omega, t)$ называется функция $\sigma_x(t_1, t_2)$ двух переменных $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$, которая при любых фиксированных значениях t_1 и t_2 равна ковариации сечений $x(t_1)$ и $x(t_2)$, то есть

$$\sigma_x(t_1,t_2) = \mathbf{Cov}\{x(t_1),x(t_2)\} = \\ = \mathbf{E}\{(x(t_1)-m_x(t_1))(x(t_2)-m_x(t_2))\}. \quad (4)$$

Моментной функцией 2-го порядка для $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ называется смешанный начальный момент 2-го порядка отсчетов этого процесса

$$k_x(t_1,t_2) = \mathbf{E}\{x(t_1),x(t_2)\}, t_1,t_2 \in \mathbb{R}.$$

Между ковариационной функцией и моментной функцией существует связь:

$$\sigma_x(t_1,t_2) = k_x(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2)$$

и

$$k_x(t_1,t_2) = \sigma_x(t_1,t_2) + m_x(t_1)m_x(t_2),\ t_1,t_2 \in \mathbb{R}.$$

Корреляционной функцией случайного процесса (автокорреляцией) $x(t) = x(\omega,t)$ называется функция $\rho_x(t_1,t_2)$ двух переменных $t_1,t_2 \in \mathbf{T}$, которая при любых фиксированных значениях t_1 и t_2 равна корреляции сечений $x(t_1)$ и $x(t_2)$, то есть

$$\rho_x(t_1, t_2) = \mathbf{Corr}\{x(t_1), x(t_2)\} = \frac{\mathbf{Cov}\{x(t_1), x(t_2)\}}{\sqrt{\mathbf{D}_x(t_1)\mathbf{D}_x(t_2)}}. \tag{5}$$

Свойства ковариационной и корреляционной функций случайного процесса

Пусть $\sigma_x(t_1, t_2)$ – ковариационная, а $\rho_x(t_1, t_2)$ – корреляционная функции случайного процесса $x(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ – некоторые неслучайные функции, заданные на множестве $\mathbf{T}$. Тогда для любых $t, t_1, t_2 \in \mathbf{T}$, имеют место свойства:

Свойство 1. $\sigma_x(t, t) = \mathbf{D}_x(t)$; $\rho_x(t, t) \equiv 1$.

Свойство 2. $\sigma_x(t_1, t_2) = \sigma_x(t_2, t_1)$; $\rho_x(t_1, t_2) = \rho_x(t_2, t_1)$.

Свойство 3. Для линейного преобразования $a(t)x(t)+b(t)$ случайного процесса справедливо:

$$\sigma_{ax+b}(t_1, t_2) = a(t_1)a(t_2)\sigma_x(t_1, t_2);$$

$$\rho_{ax+b}(t_1, t_2) = sign(a(t_1)a(t_2))\rho_x(t_1, t_2).$$

Свойство 4.

$$\sigma_x(t_1, t_2) \leq \sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2);$$

$$\rho_x(t_1, t_2) \leq 1.$$

Свойство 5. $\sigma_x(t_1, t_2)$ и $\rho_x(t_1, t_2)$ – неотрицательно определенные функции.

Взаимной ковариационной функцией случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется функция $\sigma_{xy}(t_1, t_2)$ двух переменных $t_1 \in \mathbf{T}_x$ и $t_2 \in \mathbf{T}_y$, которая при любых фиксированных значениях t_1 и t_2 равна ковариации сечений $x(t_1)$ и $y(t_2)$, то есть

$$\sigma_{xy}(t_1, t_2) = \mathbf{Cov}\{x(t_1), y(t_2)\}. \qquad (6)$$

Из определения взаимной ковариационной функции (6) вытекают формулы для вычисления:

$$\sigma_{xy}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{\overset{\circ}{x}(t_1)\overset{\circ}{y}(t_2)\}, \qquad (7)$$

$$\sigma_{xy}(t_1,t_2) = \mathbf{E}\{(x(t_1)-m_x(t_1))(y(t_2)-m_y(t_2))\}, \tag{8}$$

$$\sigma_{xy}(t_1,t_2) = \mathbf{E}\{x(t_1)y(t_2)\} - m_x(t_1)m_y(t_2). \tag{9}$$

Случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$, определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *некоррелированными случайными процессами*, если для любых значений $(t_1,t_2) \in \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y$

$$\sigma_{xy}(t_1,t_2) \equiv 0.$$

Свойства взаимной ковариационной функции

Для любых $(t_1,t_2) \in \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y$ имеют место следующие свойства:

Свойство 1. $\sigma_{xy}(t_1,t_2) = \sigma_{yx}(t_2,t_1)$.

Свойство 2. Для случайных процессов $a(t)x(t)+b(t)$ и $c(t)y(t)+d(t)$:

$$\sigma_{ax+b,cy+d}(t_1,t_2) = a(t_1)c(t_2)\sigma_{xy}(t_2,t_1).$$

Свойство 3. $|\sigma_{xy}(t_1, t_2)| \le \sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)$.

Свойство 4. Автоковариация случайного процесса $x(t) + y(t)$, $t \in \mathbf{T}$, вычисляется по формуле:

$$\sigma_{x+y}(t_1, t_2) = \sigma_x(t_1, t_2) + \sigma_y(t_1, t_2) +$$

$$+\sigma_{xy}(t_1, t_2) + \sigma_{xy}(t_2, t_1)$$

для любых $(t_1, t_2) \in \mathbf{T}$.

Доказательство. Обозначим

$$\zeta \doteq x(t) + y(t).$$

Тогда:

$$\sigma_{x+y}(t_1, t_2) = \sigma_\zeta(t_1, t_2) =$$

$$= \mathbf{E}\{(\zeta(t_1) - m_\zeta(t_1))(\zeta(t_2) - m_\zeta(t_2))\} =$$

$$= \mathbf{E}\{\overset{\circ}{\zeta}(t_1)\overset{\circ}{\zeta}(t_2)\}.$$

Так как

$$\overset{\circ}{\zeta}(t) = \overset{\circ}{x}(t) + \overset{\circ}{y}(t),$$

то

$$\sigma_{x+y}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{(\overset{\circ}{x}(t_1) + \overset{\circ}{y}(t_1))(\overset{\circ}{x}(t_2) + \overset{\circ}{y}(t_2))\} =$$

$$= \mathbf{E}\{\overset{\circ}{x}(t_1)\overset{\circ}{x}(t_2)\} + \mathbf{E}\{\overset{\circ}{y}(t_1)\overset{\circ}{y}(t_2)\} +$$

$$+ \mathbf{E}\{\overset{\circ}{x}(t_1)\overset{\circ}{y}(t_2)\} + \mathbf{E}\{\overset{\circ}{x}(t_2)\overset{\circ}{y}(t_1)\} =$$

$$= \sigma_x(t_1, t_2) + \sigma_y(t_1, t_2) + \sigma_{xy}(t_1, t_2) + \sigma_{xy}(t_2, t_1).$$

□

Взаимной корреляционной функцией случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется функция двух переменных $t_1 \in \mathbf{T}_x$ и $t_2 \in \mathbf{T}_y$:

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{\sigma_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}. \qquad (10)$$

Свойства взаимной корреляционной функции

Свойство 1. $\rho_{xy}(t_1, t_2) = \rho_{yx}(t_2, t_1)$.

Свойство 2. Для случайных процессов $a(t)x(t) + b(t)$ и $c(t)y(t) + d(t)$:

$$|\rho_{ax+b,cy+d}(t_1, t_2)| = |\rho_{xy}(t_2, t_1)|.$$

Свойство 3. $|\rho_{xy}(t_1, t_2)| \leq 1.$

1.2. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов

Понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости связаны с понятием предела функции, то есть с понятием сходимости. В теории вероятностей, рассматриваются различные виды сходимости: почти наверное, по вероятности, в среднем порядка r, по распределению. В теории случайных процессов обычно при определении указанных понятий используют сходимость в среднем квадратичном (хотя можно воспользоваться и другими).

Непрерывность случайных процессов

Непрерывность случайных процессов определяется по-разному, в зависимости от выбранного типа сходимости.

Случайный процесс $x(t)$, $t \in \mathbf{T}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *стохастически непрерывным* в точке t_0 $(t_0 \in \mathbf{T})$, если:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{P}\{|x(t) - x(t_0)| > \epsilon\} = 0.$$

Случайный процесс $x(t)$, $t \in \mathbf{T}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *непрерывным в среднем квадратичном* в точке t_0 $(t_0 \in \mathbf{T})$, если:

$$x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{\text{ср.кв.}} x(t_0).$$

Из непрерывности в среднем квадратичном случайного процесса $x(t)$ в точке t $(t \in \mathbf{T})$ согласно неравенству Чебышева:

$$\mathbf{P}\left\{|\zeta| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathbf{E}\{\zeta^2\}}{\varepsilon^2},$$

где

$$\zeta = x(t + \Delta) - x(t),\ \varepsilon > 0,$$

следует стохастическая непрерывность $x(t)$ в этой же точке.

Теорема. Критерий непрерывности случайных процессов в среднем квадратичном. Для того, чтобы случайный процесс $x(t)$ был непрерывным в среднем квадратичном в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы его ковариационная функция $\sigma_x(t, u)$ была непрерывной в точке $t = u = t_0$.

Дифференцируемость случайных процессов

Случайный процесс $x(t)$, $t \in \mathbf{T}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *дифференцируемым в среднем квадратичном* в точке t_0 ($t_0 \in \mathbf{T}$), если существует конечный предел:

$$\underset{h \to 0}{l.i.m.} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = x'(t_0).$$

Случайная функция $x'(t_0)$ *называется среднеквадратичной производной случайного процесса* $x(t_0)$ в точке t_0.

Теорема. Критерий дифференцируемости случайного процесса в среднем квадратичном. Для того, чтобы случайный процесс $x(t)$ имел производную в среднем квадратичном в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала смешанная частная призводная второго порядка

$$\left. \frac{\partial^2 \sigma_x(t,u)}{\partial t \partial u} \right|_{t=u=t_0}.$$

Если функция $\sigma_x(t,u)$ имеет вторую производную

$$\frac{\partial^2 \sigma_x(t,u)}{\partial t \partial u}$$

в точках $t = u$, то она имеет вторую производную во всех точках, причем эта производная является ковариационной функцией случайного процесса $x'(t)$.

Интегрируемость случайных процессов

Пусть $x(t)$ – случайный процесс, $\sigma_x(t,u)$ – ковариационная функция этого процесса, а $g(t)$ – некототорая неслучайная борелевская функция. Определим интегралы вида

$$I_1 = \int\limits_a^b x(t)g(t)\,dt,$$

$$I_2 = \int\limits_a^b g(t)\,dx(t),$$

где $[a,b]$ – конечный или бесконечный интервал.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Разобьем этот интервал точками $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ и определим:

$$\lambda_n = \max_k (t_k - t_{k-1}),$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} g(\overline{t_k})x(\overline{t_k})(t_k - t_{k-1}),$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} g(\overline{t_k})\left(x\left(t_k\right) - x\left(t_{k-1}\right)\right),$$

где $\overline{t_k} \in (t_{k-1} - t_k]$. Определим интегралы I_1 и I_2 как

$$I_1 = \underset{\lambda_n \to 0}{l.i.m.} S_1,\ I_2 = \underset{\lambda_n \to 0}{l.i.m.} S_2,$$

где пределы не зависят от разбиения отрезка $[a, b]$ и выбора точек $\overline{t_k}$.

Теорема. Интеграл I_1 существует тогда и только тогда, когда существует интеграл Римана

$$Q_1 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b g(t)g(u)\sigma_x\left(t, u\right)\, dt\, du,$$

Интеграл I_2 существует тогда и только тогда, когда существует интеграл Римана-Стилтьеса

$$Q_2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b g(t)g(u)\sigma_x\left(t, u\right)\, d_{t,u}\left(\sigma_x\left(t, u\right)\right),$$

причем

$$Q_1 = \mathbf{E}\left\{I_1^2\right\}, Q_2 = \mathbf{E}\left\{I_2^2\right\}.$$

Под интегралами по бесконечному промежутку понимается предел в среднем квадратичном по конечному промежутку, когда пределы интеграла стремятся к бесконечности.

Свойства производных и интегралов случайных процессов

Свойство 1. Так как определения производной и интеграла случайного процесса (случайной функции) полностью идентичны соответствующим определениям для неслучайных функций, то основные свойства производной и интеграла, а также правила дифференцирования и интегрирования остаются в силе. При использовани этих свойств и правил следует действовать так, как будто фиксируется элементарный исход $\omega \in \Omega$, а параметр $t \in \mathbf{T}$ – переменный.

Свойство 2. Математическое ожидание производной $x'(t)$ случайного процесса $x(t)$ равно производной от математического ожидания $x(t)$:

$$\mathbf{E}\{x'(t)\} = [m_x(t)]'.$$

Свойство 3. Математическое ожидание интеграла $\int\limits_0^t x(u)du$ случайного процесса $x(t)$ равно интегралу от математического ожидания $x(t)$:

$$\mathbf{E}\left\{\int\limits_0^t x(u)du\right\} = \int\limits_0^t m_x(u)du.$$

Свойство 4. Для ковариационной функции $\sigma_x(t_1, t_2)$ случайного процесса $x(t)$ справедливо равенство:

$$\sigma_\zeta(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 \sigma_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2},$$

где

$$\zeta(t) = x'(t).$$

Свойство 5.

$$\mathbf{D}\{x'(t)\} = \sigma_\zeta(t, t),$$

где

$$\zeta(t) = x'(t).$$

Свойство 6. Для ковариационной функции $\sigma_x(t_1, t_2)$ случайного процесса $x(t)$ справедливо равенство:

$$\sigma_\zeta(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1} du \int\limits_0^{t_2} \sigma_x(u, v) dv,$$

где

$$\zeta(t) = \int\limits_0^{t} x(u) du.$$

Свойство 7.

$$\mathbf{D}\left\{\int\limits_0^{t} x(u) du\right\} = \sigma_\zeta(t, t),$$

где

$$\zeta(t) = \int\limits_0^{t} x(u) du.$$

Р Е Ш Е Н И Е   З А Д А Ч

Задача 1. Задана случайная функция

$$x(t) = u \cdot t + b,\ b = const,\ t \geq 0,$$

а u – случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром λ.

Определить плотность сечения $x(t), t > 0$; $m_x(t)$, $\sigma_x(t_1, t_2)$, $D_x(t)$.

Р е ш е н и е. Имеем плотность распределения случайной величины u

$$p_u(z) = \lambda e^{-\lambda z},\ z \geq 0,\ \lambda > 0.$$

Для функции распределения случайной функции в сечении t находим

$$F_x(z) = \mathbf{P}\left\{x(t) < z\right\} = \mathbf{P}\left\{ut + b < z\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{u < \frac{z-b}{t}\right\} = F_u\left(\frac{z-b}{t}\right).$$

Отсюда вычисляем плотность сечения $x(t)$ в момент времени $t > 0$:

$$p_x(z) = F'_x(z) = F'_u\left(\frac{z-b}{t}\right) = p_u\left(\frac{z-b}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} =$$

$$= \frac{\lambda}{t} \exp\left(-\frac{\lambda}{t}(z-b)\right),$$

то есть получаем также показательное распределение с параметром $\dfrac{\lambda}{t}$.

Вычисляем величины $m_x(t)$, $\sigma_x(t_1, t_2)$, $D_x(t)$:

$$m_x(t) = \mathbf{E}\{u \cdot t + b\} = \frac{t}{\lambda} + b;$$

$$\sigma_x(t_1, t_2) = \mathbf{E}\left\{\left(ut_1 - \frac{t_1}{\lambda}\right) \cdot \left(ut_2 - \frac{t_2}{\lambda}\right)\right\} =$$

$$= t_1 \cdot t_2 \mathbf{E}\left\{\left(u - \frac{1}{\lambda}\right)^2\right\} = \frac{t_1 t_2}{\lambda^2};$$

$$D_x(t) = \frac{t^2}{\lambda^2}.$$

Задача 2. Случайная функция $x(t)$ задана в виде

$$x(t) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k(t),$$

где $\varphi(t)$, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ – неслучайные функции, $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ – центрированные некоррелированные случайные величины,

$$\mathbf{D}\{u_k\} = d_k,\ k = 1, \ldots, n.$$

Вычислить $m_x(t)$, $\sigma_x(t_1, t_2)$, $D_x(t)$. Вычислить числовые характеристики случайной функции

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Р е ш е н и е. Находим характеристики случайной функции $x(t)$:

$m_x(t) = \varphi(t)$;

$$\sigma_x(t_1, t_2) = \mathbf{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\varphi_k(t_1)\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} u_l\varphi_l(t_2)\right)\right\} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \varphi_k(t_1)\varphi_l(t_2)\mathbf{E}\left\{u_k u_l\right\} = \sum_{k=1}^{n} d_k\varphi_k(t_1)\varphi_l(t_2);$$

$$D_x(t) = \sum_{k=1}^{n} d_k\varphi_k^2(t).$$

Для случайной функции $y(t)$ получаем:

$$m_y(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt};$$

$$\sigma_y(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{n} d_k\frac{d\varphi_k(t_1)}{dt_1}\frac{d\varphi_k(t_2)}{dt_2};$$

$$D_y(t) = \sum_{k=1}^{n} d_k\left[\frac{d\varphi_k(t)}{dt}\right]^2.$$

Задача 3. Случайная функция $x(t)$ имеет характеристики:

$m_x(t) = t^2 - 1$; $\sigma_x(t_1, t_2) = 2\exp\left(-\alpha(t_2 - t_1)^2\right)$.

Определить характеристики случайных функций:

$$y(t) = tx(t) + t^2 + 1;\ z(t) = 2t\frac{dx(t)}{dt} + (1 - t)^2;$$

$$u(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 1.$$

Р е ш е н и е. Учитывая свойства ковариационной функции получаем:

$$m_y(t) = tm_x(t) + t^2 + 1 = t(t^2 - 1) + t^2 + 1 =$$
$$= t^3 + t^2 - t + 1;$$
$$\sigma_y(t_1, t_2) = 2t_1t_2 \exp\left(-\alpha(t_2 - t_1)^2\right);$$
$$m_z(t) = 2t\frac{dm_x(t)}{dt} + (1 - t)^2 = 1 - 2t + 5t^2;$$
$$\sigma_z(t_1, t_2) = 4t_1t_2\frac{\partial^2\sigma_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} =$$
$$= -\alpha 16 t_1t_2 \left[(t_2 - t_1) \exp\left(-\alpha(t_2 - t_1)^2\right) \times\right.$$
$$\left.\times 2\alpha(t_2 - t_1) - \exp\left(-\alpha(t_2 - t_1)^2\right)\right] =$$
$$= 16\alpha t_1t_2 \exp\left(-\alpha(t_2 - t_1)^2\right)\left[-2\alpha(t_2 - t_1)^2 + 1\right];$$
$$m_u(t) = \frac{d^2m_x(t)}{dt^2} + 1 = 3;$$
$$\sigma_u(t_1, t_2) = \frac{\partial^4\sigma_x(t_1, t_2)}{\partial t_1^2 \partial t_2^2}.$$

При вычислении $\sigma_z(t_1, t_2)$ мы уже нашли

$$\frac{\partial^2\sigma_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2},$$

следовательно,

$$\sigma_u(t_1,\,t_2) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} 4\alpha \exp\left(-\alpha(t_2-t_1)^2\right)\left[1-2\alpha(t_2-t_1)^2\right] =$$
$$= 8\alpha^2 \exp\left(-\alpha(t_2-t_1)^2\right) \times$$
$$\times \left[3+4\alpha^2(t_2-t_1)^4-12\alpha(t_2-t_1)^2\right].$$

Задача 4. Имеются две некоррелированные случайные функции $x(t)$ и $y(t)$ с характеристиками

$$m_x(t) = t^2;\; \sigma_x(t_1,\,t_2) = \exp\left(\alpha_1(t_1+t_2)\right);$$

$$m_y(t) = 1;\; \sigma_y(t_1,\,t_2) = \exp\left(\alpha_2(t_2-t_1)^2\right).$$

Найти характеристики случайной функции

$$z(t) = x(t) + ty(t) + t^2.$$

Решить ту же задачу, если случайные функции $x(t)$ и $y(t)$ коррелированы и их взаимная корреляционная функция равна

$$\sigma_{xy}(t_1,\,t_2) = \alpha \exp\left(-\alpha|t_2-t_1|\right).$$

Р е ш е н и е. В случае, если $\sigma_{xy}(t_1, t_2) \equiv 0$:

$$
\begin{aligned}
&m_z(t) = m_x(t) + t m_y(t) + t^2 = 2t^2 + t;\\
&\sigma_z(t_1, t_2) = \sigma_x(t_1, t_2) + t_1 t_2 \sigma_y(t_1, t_2) =\\
&= \exp\left(\alpha_1(t_1 + t_2)\right) + t_1 t_2 \exp\left(\alpha_2(t_2 - t_1)^2\right).
\end{aligned}
$$

В случае, когда

$$\sigma_{xy}(t_1, t_2) = \alpha \exp\left(-\alpha|t_2 - t_1|\right).$$

$m_z(t)$ не меняется, а:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_z(t_1, t_2) = \sigma_x(t_1, t_2) + t_1 t_2 \sigma_y(t_1, t_2) +\\
&+ t_2 \sigma_{xy}(t_1, t_2) + t_1 \sigma_{xy}(t_2, t_1) =\\
&= \exp\left(\alpha_1(t_1 + t_2)\right) + t_1 t_2 \exp\left(\alpha_2(t_2 - t_1)^2\right) +\\
&+ \alpha(t_1 + t_2) \exp\left(-\alpha|t_2 - t_1|\right).
\end{aligned}
$$

Задача 5. Математическое ожидание и корреляционная функция случайной функции $x(t)$, $t \in \mathbf{T} \subseteq \mathbb{R}$ заданы выражениями

$$m_x(t) = t + 4, \ \sigma_x(t_1, t_2) = t_1 t_2$$

Пусть

$$y(t) = 5tx(t) + 2.$$

Найти $m_x(t)$, $\sigma_y(t_1, t_2)$.

Р е ш е н и е.

$m_x(t) = \mathbf{E}\{5tx(t) + 2\} = 5t\mathbf{E}\{x(t)\} + 2 =$
$= 5t(t + 4) + 2 = 5t^2 + 20t + 2;$
$\sigma_y(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{(y(t_1) - m_y(t_1))(y(t_2) - m_y(t_2))\} =$
$= \mathbf{E}\Big\{\Big(5t_1x(t_1) + 2 - (5t_1^2 + 20t_1 + 2)\Big) \times$
$\times \Big(5t_2x(t_2) + 2 - (5t_2^2 + 20t_2 + 2)\Big)\Big\} =$
$= \mathbf{E}\{(5t_1(x(t_1) + 2 - (t_1 + 4)) \times$
$\times (5t_2(x(t_2) + 2 - (t_2 + 4))\} =$
$= 25t_1\, t_2\sigma_x(t_1, t_2) = 25t_1^2t_2^2.$

Задача 6. Зная математическое ожидание

$$m_x(t) = 3t^2 + 1,$$

случайного процесса $x(t)$, найти математическое ожидание интеграла

$$y(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Р е ш е н и е.

$$m_y(t) = \mathbf{E}\{y(t)\} = \int_0^t m_x(s)ds =$$

$$= \int_0^t \left(3s^2 + 1\right) ds = t^3 + t.$$

Задача 7. Задана ковариацонная функция

$$\sigma_x(t_1, t_2) = \cos\omega t_1 \cos\omega t_2,$$

случайного процесса $x(t)$. Найти: а) ковариационную функцию; б) дисперсию интеграла

$$y(t) = \int\limits_0^t x(s)ds.$$

Р е ш е н и е. а) Ковариацонная функция интеграла

$$y(t) = \int\limits_0^t x(s)ds.$$

равна двойному интегралу от заданной ковариацонной функции:

$$\sigma_y(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} \sigma_x(s_1, s_2)ds_1 ds_2 =$$

$$= \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} \cos\omega s_1 \cos\omega s_2 ds_1 ds_2 =$$

$$= \int\limits_0^{t_1} \cos\omega s_1 ds_1 \int\limits_0^{t_2} \cos\omega s_2 ds_2 = \frac{\sin\omega t_1 \sin\omega t_2}{\omega^2}.$$

б) Найдем искомую дисперсию полагая $t_1 = t_2 = t$:

$$D_y(t) = \sigma_y(t,\, t) = \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2}.$$

Задача 8. Задана случайная функция

$$x(t) = \xi e^{3t} \cos 2t,$$

где ξ – некоторая случайная величина, имеющая характеристики $\mathbf{E}\{\xi\} = 5$, $\mathbf{D}\{\xi\} = 1$. Найти: а) $m_y(t)$; б) $D_y(t)$; в) $\sigma_y(t_1,\, t_2)$, где

$$y(t) = \int\limits_0^t x(s)ds.$$

Р е ш е н и е. а) Предварительно вычислим $m_x(t)$:

$$m_x(t) = \mathbf{E}\left\{\xi e^{3t} \cos 2t\right\} =$$

$$= \mathbf{E}\{\xi\}\, e^{3t} \cos 2t = 5e^{3t} \cos 2t.$$

Найдем искомое математическое ожидание:

$$m_y(t) = \int\limits_0^t m_x(s)ds = 5\int\limits_0^t e^{3s} \cos 2s ds =$$

$$= \Big[\text{ интегрируя дважды по частям, получим}\Big]$$

$$= \frac{5}{13}\left[e^{3t}\left(2\sin 2t + 3\cos 3t\right) - 3\right].$$

б) Предварительно вычислим $\sigma_x(t_1,\, t_2)$:

$$\sigma_x(t_1,\, t_2) = \mathbf{E}\left\{\left(x(t_1) - m_x(t_1)\right)\left(x(t_2) - m_x(t_2)\right)\right\} =$$

$$= \mathbf{E}\left\{\left(\xi e^{3t_1}\cos 2t_1 - 5e^{3t_1}\cos 2t_1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\xi e^{3t_2}\cos 2t_2 - 5e^{3t_2}\cos 2t_2\right)\right\} =$$

$$= e^{3(t_1+t_2)}\cos 2t_1\cos 2t_2 \mathbf{E}\left\{(\xi - 5)^2\right\}.$$

Поусловию

$$\mathbf{E}\left\{(\xi - 5)^2\right\} = \mathbf{D}\left\{\xi\right\} = 1,$$

Следовательно,

$$\sigma_x(t_1,\, t_2) = e^{3(t_1+t_2)}\cos 2t_1\cos 2t_2,$$

а

$$\sigma_y(t_1,\, t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} e^{3(s_1+s_2)}\cos\omega s_1\cos\omega s_2 ds_1 ds_2.$$

Выполнив интегрирование, окончательно имеем:

$$\sigma_y(t_1,\, t_2) = \frac{1}{169}\left[e^{3t_1}(2\sin 2t_1 + 3\cos 2t_1) - 3\right]\times$$

$$\times\left[e^{3t_2}(2\sin 2t_2 + 3\cos 2t_2) - 3\right].$$

в) Вычисление дисперсии:

$$D_y(t) = \sigma_y(t,\, t) =$$

$$= \frac{1}{169}\left[e^{3t}(2\sin 2t + 3\cos 2t) - 3\right]^2.$$

ТЕМА 2. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Т Е О Р И Я

Определение. Случайный процесс

$$x(t) = x(\omega, t),$$

определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *стационарным в узком смысле случайным процессом*, если все его конечномерные распределения не зависят от сдвига, то есть для любых $\tau \in \mathbf{T}$ и $n \in \mathbb{N}$ для конечномерных функций распределения сечений

$$x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)$$

и

$$x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau), \ldots, x(t_n + \tau)$$

случайного процесса $x(t)$ выполняется равенство:

$$F_{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) =$$

$$= F_{x(t_1+\tau), x(t_2+\tau), \ldots, x(t_n+\tau)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) =$$

$$= F_{1,2,\ldots,n}(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Определение. Случайный процесс $x(t) = x(\omega, t)$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *стационарным в широком смысле случайным процессом*, если для любых $t, t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ выполнены следующие три условия:

1) $\mathbf{E}\left\{| x(t) |^2\right\} < \infty$;
2) $m_x(t) = m,$ то есть все его средние значения не зависят от времени;
3) $\sigma_x(t_1, t_2) = \sigma_x(t_1 - t_2),$ то есть ковариационная функция зависит лишь от разности аргументов.

Теорема (связь стационарности в узком и широком смысле). Пусть случайный процесс $x(t), t \in \mathbf{T}$ является стационарным в узком смысле и имеет конечный момент $\mathbf{E}\left\{| x(t) |^2\right\} < \infty, t \in \mathbf{T}$, тогда этот случайный процесс стационарен в широком смысле.

Доказательство. По условию теоремы, условие 1) стационарности в широком смысле выполнено. Покажем, что выполняются условия 2) и 3).

Замечание. Из стационарности в широком смысле не следует стационарность в узком смысле. Единственный пример на практике, когда стационарный в широком и узком смысле эквивалентно это случайный Гауссовский процесс.

Гауссовский случайный процесс. Случайный процесс $x(t) = x(\omega, t)$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *гауссовским случайным процессом*, если все его конечномерные распределения гауссовские, то есть для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $t_k \in \mathbf{T}\,(k = 0, 1, \ldots, n)$ случайный вектор

$$(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n))^{\mathbf{T}}$$

имеет n-мерное нормальное распределение.

Из определения следует, что если гауссовский случайный процесс задан n сечениями

$$x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n),$$

для которых известны математические ожидания

$$\mathbf{E}\{x(t_k)\} = a_k, k = 1, 2, \ldots, n,$$

и матрица ковариаций

$$K = \|K(t_i, t_j)\|, i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$K(t_i, t_j) = \sigma_x(t_i, t_j),$$

то для любого n плотность распределения случайного вектора

$$(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n))^{\mathbf{T}}$$

имеет вид:

$$\begin{aligned}
&p_{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\
&= p_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\
&= p_{1,2,\ldots,n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|K|}} \times \\
&\times \exp\Big\{-\frac{1}{2|K|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Big[(z_i - a_i) K_{ij} (z_j - a_j)\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

где $|K|$ – определитель матрицы K, K_{ij} – алгебраическое дополнение элемента $K(t_i, t_j)$ матрицы K.

Ковариационная и корреляционная функции стационарных случайных процессов и их свойства

Так как ковариационная $\sigma_x(t_1, t_2)$ и корреляционная функции $\rho_x(t_1, t_2)$ стационарного случайного процесса $x(t)$ зависят только от разности аргументов $t_1 - t_2$, то полагая $\tau = t_1 - t_2$, будем в дальнейшем обозначать их $\sigma_x(\tau)$ и $\rho_x(\tau)$ соответственно.

Свойство 1. Для любого $t \in \mathbf{T}$:

$$\mathbf{D}x(t) = \sigma_x(0),$$

$$\rho_x(0) = 1.$$

Свойство 2. Для любого $\tau > 0$:

$$\sigma_x(\tau) = \sigma_x(-\tau),$$

$$\rho_x(\tau) = \rho_x(-\tau).$$

Свойство 3. Для любого $\tau > 0$:

$$|\sigma_x(\tau)| \leq \sigma_x(0) = \mathbf{D}x,$$

$$|\rho_x(\tau)| = \rho_x(0) = 1.$$

Дифференцирование и интегрирование стационарных случайных процессов

Теорема. Если $x(t)$ – стационарный случайный процесс, то его производная $x'(t)$ – также стационарный процесс с

$$\mathbf{E}\{x'(t)\} = 0,$$

и

$$\sigma_{x'}(\tau) = \frac{d^2\sigma_x(\tau)}{d\tau^2}.$$

Теорема. Если $x(t)$ – стационарный случайный процесс с $m_x \neq 0$, то

$$\int\limits_0^t x(u)du$$

не является стационарным случайным процессом. Если же $m_x = 0$, то указанный интеграл может оказаться как стационарным, так и нестационарным случайным процессом.

Замечание 1. Если стационарный случайный процесс $x(t)$ является гауссовским, то его n-я производная $x^{(n)}(t)$ – также стационарный гауссовский случайный процесс с

$$m_{x^{(n)}} = 0$$

и

$$\sigma_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{2n}\sigma_x(\tau)}{d\tau^{2n}}.$$

Замечание 2. Интеграл от стационарного гауссовского случайного процесса является также гауссовским случайным процессом.

Спектральная плотность стационарного случайного процесса

Определение. *Спектральной плотностью* $f_x(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]$, стационарного случайного процесса $x(t), t \in \mathbf{T}$, имеющего ковариационную функцию $\sigma_x(\tau), \tau \in \mathbf{T}$, называется преобразование Фурье от ковариационной функции:

$$f_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \sigma_x(t) dt. \qquad (11)$$

Достаточным условием существования спектральной плотности является условие:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\sigma_x(\tau)| d\tau < \infty. \qquad (12)$$

В свою очередь, необходимым условием сходимости интеграла в (12) является *условие затухания ковариационных функций*:

$$|\sigma_x(\tau)| \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 0. \qquad (13)$$

Замечание. Отметим только , что (12) – достаточное условие существования спектральной плотности. Если (12) не выполняется, то это не значит, что не существует спектральной плотности.

Теорема (Винера - Хинчина). Пусть стационарный случайный процесс $x(t)$ имеет спектральную плотность

$$f_x(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Тогда она может быть вычислена из соотношения

$$f_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(\tau) \cos(\lambda\tau) d\tau, \qquad (14)$$

а по ней может быть восстановлена его ковариационная функция обратным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} \sigma_x(\tau) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda\tau) f_x(\lambda) d\lambda = \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda\tau) f_x(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \qquad (15)$$

Замечание. Из теоремы следует, что при условии существования спектральной плотности имеет место взаимнооднозначное соответствие спектральной плотности и ковариационной функции:

$$F(\cdot) \Longleftrightarrow \sigma(\cdot).$$

Смысл коваиационной функции – ковариация двух отсчетов. Смысл спектральной плотности непонятен и теоретически это избыточная характеристика, у нее есть лишь одно теоретически необоснованное объяснение, ее используют для определения статистического периода, то есть периода по времени, через который свойства случайного процесса статистически поаторяются. Прежде, чем определить понятие статистического периода приведем свойства спектральной плотности, как прямого преборазования Фурье частной функции:

Свойство 1. $f_x(\lambda) > 0,\ \lambda \in [-\pi, \pi]$.

Свойство 2. $f_x(\lambda) = f_x(-\lambda),\ \lambda \in [-\pi, \pi]$.

Исходя из свойства 2 спектральную плотность достаточно определить на луче

$$f(\lambda),\, \lambda \in [0; +\infty).$$

Поясним, как определяется период. Находится глобальный максимум:

$$\lambda_0 = \arg \max_{\lambda \in [0, +\infty)} f(\lambda).$$

Так как

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

где T_0 – период, то

$$T_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

Эргодические по математическому ожиданию случайные процессы

Определение. Стационарный случайный процесс $x(t), t \in \mathbf{T}$, называется *эргодическим случайным процессом по отношению к некоторой функции* $g(t)$, если имеет равенство по вероятности:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} g(x(t))dt = \mathbf{E}\{g(x(t)\}.$$

Случайный процесс $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ называется *эргодическим по математическому ожиданию*, если выполняются условия:

1). Отсчеты случайного процесса $x(t)$ имеют конечный второй момент;

2). Математическое ожидание случайного процесса $x(t)$ не меняется

$$m_x(t) = \mathbf{E}\{x(t)\} = m \ \forall t \in \mathbb{R};$$

3). Временные средние

$$\overline{x}_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt$$

случайного процесса $x(t)$ подсчитанные по всей реализации сходятся в среднеквадратичном с ростом длины реализации к математическому ожиданию m:

$$\overline{x}_T \xrightarrow[T\to\infty]{L_2} m$$

или

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\{(\overline{x}_T - m)^2\} = 0.$$

Очевидно, что в условиях 1).-3). временное среднее $\overline{x}_T$ – состоятельная оценка для математического ожидания m по реализации $x(t),\ t \in [0;T],\ T > 0:$

$$\overline{x}_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbf{P}} m.$$

Если время меняется дискретно либо счетно, то есть имеем дело с временным рядом, то реализация длины приводит к

$$\overline{x}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t,$$

где интеграл заменен на сумму, условия 1). - 3). формируются аналогично и:

$$\overline{x}_T \xrightarrow[T\to\infty]{L_2} m,$$

$$\overline{x}_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbf{P}} m.$$

Теорема. Пусть случайный процесс

$$x = x(t),\ t \in \mathbb{R}$$

удовлетворяет условиям 1).- 2). и пусть

$$\sigma_x(t_1, t_2) = \mathbf{Cov}\{x(t_1, x(t_2)\}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} -$$

его ковариационная функция, тогда условие 3). эквивалентно следующему условию

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \sigma(t_1, t_2)dt_1 dt_2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \qquad (16)$$

Следствие. Для того, чтобы выполнить 3) достаточно, чтоб ковариационная функция затухала с ростом расстояния отсчетов по времени

$$\sigma(t_1, t_2) \to 0 \text{ при } |t_1 - t_2| \to \infty.$$

Статистическое оценивание характеристик стационарных случайных процессов

Пусть наблюдается реализация

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$ стационарного в широком смысле временного ряда

$$\{x_t = xt,\, t = \ldots,\, -1,\, 0,\, 1, \ldots\},$$

для которого определены характеристики:

математическое ожидание

$$\mu = \mathbf{E}\{x_t\},\, t \in \mathbb{Z};$$

ковариационная функция

$$\sigma(\tau) = \mathbf{E}\Big\{(x_t - \mu)\Big(x_{t+\tau} - \mu\Big)\Big\},\, t, \tau \in \mathbb{Z};$$

спектральная плотность

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) \cos(\lambda\tau),\ \lambda \in [-\pi, \pi],$$

которая существует, если

$$\sum_{\tau=1}^{+\infty} |\sigma(\tau)| < +\infty, \qquad (17)$$

На практике обычно математическое ожидание и ковариационная функция неизвестны. Их оценки, а также оценка спектральной плотности, вычисляются по имеющейся реализации X.

Определение. *Выборочным средним для временного ряда* $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, вычисленным по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, называется статистика

$$\overline{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t. \qquad (18)$$

Теорема 1. Пусть $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, – стационарный временной ряд с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\left\{x_t\right\}, t \in \mathbb{Z}.$$

Тогда выборочное среднее (18) является несмещенной оценкой для μ, то есть

$$\mathbf{E}\{\overline{x}\} = \mu.$$

Теорема 2. Пусть $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, – стационарный в широком смысле временной ряд с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\left\{x_t\right\}, t \in \mathbb{Z}.$$

Тогда для дисперсии выборочного среднего (18) справедливо соотношение:

$$\mathbf{D}\{\overline{x}\} = \frac{1}{T} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \sigma(\tau), \qquad (19)$$

где $\sigma(\tau)$ – ковариационная функция.

Теорема 3. Если для стационарного в широком смысле временного ряда $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\left\{x_t\right\}, t \in \mathbb{Z}$$

выполняется условие (17), то выборочное среднее (18) является состоятельной в среднеквадратическом оценкой для μ:

$$\mathbf{E}\left\{(\overline{x}-\mu)^2\right\} \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0,$$

и для его дисперсии справедливо асимптотическое соотношение:

$$\lim_{T\to+\infty}(T\mathbf{D}\{\overline{x}\}) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}\sigma(\tau). \qquad (20)$$

Теорема 4. В условиях теоремы 3 выборочное среднее (18) является состоятельной оценкой для математического ожидания μ:

$$\overline{x} \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu,\ T\to+\infty.$$

Рассмотрим стационарный в широком смысле временной ряд $\{x_t = x(t) \,:\, t\in\mathbb{Z}\}$. Для данного временного ряда существуют математическое ожидание

$$\mu = \mathbf{E}\left\{x_t\right\},\ t\in\mathbb{Z},$$

и ковариационная функция

$$\sigma(\tau) = \mathbf{E}\left\{(x_t-\mu)\left(x_{t+\tau}-\mu\right)\right\},\ t,\tau\in\mathbb{Z}.$$

Определение. *Выборочной ковариационной функцией* для временного ряда $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, вычисленной по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, *в случае известного математического ожидания* μ называется статистика:

$$c_\tau = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} (x_t - \mu) \left(x_{t+\tau} - \mu\right), \qquad (21)$$

где $c_{-\tau} = c_\tau$, $\tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Определение. *Выборочной ковариационной функцией* для временного ряда $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, вычисленной по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, *при неизвестном математическом ожидании* μ называется статистика:

$$c^*_\tau = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} (x_t - \overline{x}) \left(x_{t+\tau} - \overline{x}\right), \qquad (22)$$

где $c^*_{-\tau} = c^*_\tau$, $\tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, а $\overline{x}$ определено в (18).

Исследуем свойства выборочной ковариационной функции (21). Это можно сделать и в общем случае для всех стационарных в широком смысле временных рядов, однако достаточно простыми аналитическими характеристиками она обладает только для гауссовских временных рядов.

Теорема 5. Пусть $x_t = x(t)\,,\, t \in \mathbb{Z}$, – стационарный гауссовский временной ряд с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\{x_t\}\,,\, t \in \mathbb{Z},$$

и ковариационной функцией

$$\sigma(\tau) = \mathbf{E}\Big\{(x_t - \mu)\Big(x_{t+\tau} - \mu\Big)\Big\}\,,\, t, \tau \in \mathbb{Z}.$$

Тогда выборочная ковариационная функция c_τ из (21) является несмещенной оценкой для $\sigma(\tau)$, то есть:

$$\mathbf{E}\{c_\tau\} = \sigma(\tau),\, \tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\}.$$

Теорема 6. Для выборочной ковариационной функции c_τ из (21), вычисленной по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, стационарного гауссовского временного ряда с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\left\{x_t\right\}, \, t \in \mathbb{Z},$$

и ковариационной функцией

$$\sigma(\tau) = \mathbf{E}\Big\{(x_t - \mu)\Big(x_{t+\tau} - \mu\Big)\Big\}, \, t, \tau \in \mathbb{Z},$$

справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{Cov}\left\{c_h, c_g\right\} = \frac{1}{T-h}\frac{1}{T-g} \times \\ \times \sum_{t_1=1}^{T-h} \sum_{t_2=1}^{T-g} \Big(\sigma\left(t_1 - t_2\right) \sigma\left(t_1 - t_2 + h - g\right) + \\ + \sigma\left(t_1 - t_2 + h\right) \sigma\left(t_1 - t_2 - g\right)\Big), \tag{23}$$

$$\mathbf{D}\left\{c_h\right\} = \frac{1}{T-h} \sum_{\tau=-(T-h-1)}^{T-h-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{T-h}\right) \times \\ \times \Big(\sigma^2(\tau) + \sigma(\tau - h)\sigma(\tau + h)\Big), \tag{24}$$

где $h, g \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Теорема 7. Если сходится ряд (17), то выборочная ковариационная функция c_τ из (21), вычисленная по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, стационарного гауссовского временного ряда с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\{x_t\}, \, t \in \mathbb{Z},$$

и ковариационной функцией

$$\sigma(\tau) = \mathbf{E}\Big\{(x_t - \mu)\Big(x_{t+\tau} - \mu\Big)\Big\}, \, t, \tau \in \mathbb{Z},$$

является состоятельной в среднеквадратическом оценкой для $\sigma(\cdot)$, и для ее дисперсии справедливо асимптотическое соотношение:

$$\lim_{T \to +\infty} (T\mathbf{D}\{c_h\}) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \Big(\sigma^2(\tau) + \sigma(\tau - h)\sigma(\tau + h \tag{25}$$

где $h \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Замечание. Из теоремы (соотношение (24)) видно, что точность оценивания ковариационной функции $\sigma(h)$ «падает» с увеличением лага h. Это связано с уменьшением числа слагаемых в (21). Хуже всего, если значение h приближается к $T-1$.

Замечание. Для оценки (22) можно получить похожие результаты. В этом случае c_h^*, $h \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, будет асимптотически несмещенной и состоятельной.

Замечание. Для состоятельности в среднеквадратическом выборочных среднего и ковариационной функции требовалась сходимость ряда (17), необходимым (но не достаточным!) условием которой является:

$$\sigma(\tau) \to 0,\ \tau \to +\infty.$$

Иными словами, ковариационная функция $\sigma(\tau)$ (корреляционная функция $\rho(\tau) = \sigma(\tau)/\sigma(0)$) «затухает» с ростом лага τ. Это условие используют на практике как эмпирическое правило для выявления временных рядов, подозрительных на стационарность. Для таких временных рядов выборочная ковариационная (корреляционная) функция должна «затухать».

Статистическое оценивание спектральной плотности

Пусть для стационарного в широком смысле временного ряда $x_t = x(t)]$, $t \in \mathbf{Z}$, существует спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Рассмотрим задачу оценивания спектральной плотности $f(\cdot)$ по реализации $X = \{x_1, \ldots, x_T\}$ длительности $T \geq 1$.

Введем вспомогательные статистики:

$$A(\lambda) = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu) \cos(\lambda t),$$

$$B(\lambda) = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu) \sin(\lambda t)$$

и

$$A^*(\lambda) = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \overline{x}) \cos(\lambda t),$$

$$B^*(\lambda) = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \overline{x}) \sin(\lambda t),$$

где $\overline{x}$ – выборочное среднее (18), $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Определение. *Спектрограммой* называется статистика, определенная по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, в случае известного математического ожидания μ равенством

$$R^2(\lambda) = A^2(\lambda) + B^2(\lambda), \qquad (26)$$

а в случае неизвестного математического ожидания μ равенством

$$R^{*^2}(\lambda) = A^{*^2}(\lambda) + B^{*^2}(\lambda), \qquad (27)$$

где $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Определение. *Выборочной спектральной плотностью* (*периодограммой*) для временного ряда $x_t = x(t)]$, $t \in \mathbf{Z}$,, вычисленной по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, называется статистика, определенная в случае известного математического ожидания μ равенством

$$I(\lambda) = \frac{T}{8\pi} R^2(\lambda), \qquad (28)$$

а в случае неизвестного математического ожидания μ равенством

$$I^*(\lambda) = \frac{T}{8\pi} R^{*^2}(\lambda), \qquad (29)$$

где $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Замечание. На практике $\lambda \in [-\pi, \pi]$ (аргумент спектральной плотности $f(\lambda)$) не может меняться непрерывно. Поэтому обычно рассматривают сетку:

$$\lambda = \frac{2\pi j}{T}, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{T}{2},$$

в узлах которой выполняются равенства:

$$A(\lambda) = A^*(\lambda),\ B(\lambda) = B^*(\lambda),\ R^2(\lambda) = {R^*}^2(\lambda).$$

Замечание. Коэффициенты $A(\lambda)$, $A^*(\lambda)$, спектрограмма и выборочная спектральная плотность – четные функции, а коэффициенты $B(\lambda)$, $B^*(\lambda)$ – нечетные.

Теорема 8. Пусть $\tilde{c}_\tau$, $\tau \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ – специальным образом отнормированные значения выборочной ковариационной функции (21):

$$\tilde{c}_\tau = \tilde{c}_{-\tau} = \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) c_\tau.$$

Тогда для выборочной спектральной плотности справедливо представление

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \tilde{c}_\tau \cos(\lambda\tau),\ \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{30}$$

Следствие. Выборочная ковариационная функция и выборочная спектральная плотность связаны соотношением

$$\tilde{c}_\tau = \tilde{c}_{-\tau} = \int_{-\pi}^{\pi} I(\lambda)\cos(\lambda\tau)d\lambda, \qquad (31)$$

$\tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Замечание. В случае неизвестного математического ожидания μ результаты аналогичны.

Теорема 9. Пусть $\{x_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ – стационарный гауссовский временной ряд, имеющий непрерывную спектральную плотность $f(\lambda)$. Тогда выборочная спектральная плотность $I(\lambda)$, определенная в (30), является асимптотически несмещенной, то есть:

$$\mathbf{E}\{I(\lambda)\} \to f(\lambda),\ \lambda \in [-\pi, \pi],\ T \to +\infty, \qquad (32)$$

но несостоятельной оценкой $f(\lambda)$:

$$\mathbf{E}\left\{(I(\lambda) - f(\lambda))^2\right\} \to \begin{cases} 2f^2(\lambda), & \lambda = 0, \pm\pi, \\ f^2(\lambda), & \lambda \neq 0, \pm\pi, \end{cases} \quad T \to \qquad (33)$$

где $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Из теоремы следует, что выборочная спектральная плотность $I(\lambda)$ для практики неприемлема как оценка спектральной плотности $f(\lambda)$ в силу своей несостоятельности. Чтобы улучшить оценку спектральной плотности, используют так называемую сглаженную спектральную плотность.

Определение. *Сглаженной спектральной плотностью* (*взвешенной спектральной плотностью, сглаженной периодограммой*) называется статистика, определенная по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, равенством

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \tilde{\omega}_\tau \tilde{c}_\tau \cos(\lambda\tau),\ \lambda \in [-\pi, \pi], \tag{34}$$

где $\tilde{\omega}_\tau$ – специальным образом подобранные веса.

Из определения спектральной плотности:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) \cos(\lambda\tau),\ \lambda \in [-\pi, \pi],$$

видно, что можно было сразу записать сглаженную (взвешенную) оценку спектральной плотности в виде

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \omega_\tau c_\tau \cos(\lambda\tau),\ \lambda \in [-\pi, \pi],$$

где веса $\{\omega_\tau\}$ связаны с весами $\{\tilde{\omega}_\tau\}$ соотношением

$$\omega_\tau = \tilde{\omega}_\tau \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right).$$

На практике часто используются следующие способы задания весов:

1. При

   $$\tilde{\omega}_\tau = 1 \text{ для любого } \tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\},$$

   $\widehat{f}(\lambda) = I(\lambda)$ – обычная выборочная спектральная плотность;

2. «Усеченная» выборочная спектральная плотность ($k < T$ – параметр «усечения»):

   $$\tilde{\omega}_\tau = \begin{cases} 1, & |\tau| \le k, \\ 0, & |\tau| > k; \end{cases}$$

3. Семейство оценок Парзена ($q = 1;\ 2; \ldots$):

$$\tilde{\omega}_\tau = \begin{cases} 1 - (\frac{\tau}{k})^q, & |\tau| \le k, \\ 0, & |\tau| > k. \end{cases}$$

В частности, при $q = 1$ имеем оценку Бартлетта, а при $q = 2$ – собственно оценку Парзена.

Для асимптотической несмещенности и состоятельности взвешенной оценки спектральной плотности на практике требуется непрерывность спектральной плотности и выполнение асимптотики

$$T \to +\infty,\ k = k(T) \to +\infty,\ \frac{k}{T} \to 0.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1. Спектральная плотность стационарного в широком смысле случайного процесса $x_t = x(t)$, $t \in \mathbf{R}$ имеет вид:

$$f_x(\lambda) = \begin{cases} a, & |\lambda| \le \lambda_1, \\ 0, & |\lambda| > \lambda_1, \end{cases},\ a > 0,\ \lambda_1 > 0.$$

Найти ковариационную функцию $\sigma_x(t)$.

Р е ш е н и е. Если стационарный случайный процесс $x(t)$ имеет спектральную плотность

$$f_x(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi],$$

то она может быть вычислена из соотношения

$$f_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(\tau) \cos(\lambda\tau) d\tau,$$

по которому может быть восстановлена его ковариационная функция обратным преобразованием Фурье:

$$\sigma_x(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda\tau) f_x(\lambda) d\lambda =$$

$$= 2a \int\limits_{0}^{\lambda_1} \cos(\lambda\tau) d\lambda =$$

$$= \frac{2a \sin(\lambda_1 \tau)}{\tau}.$$

Задача 2. Ковариационная функция $\sigma_x(t)$ стационарного в широком смысле случайного процесса $x(t)$ имеет, имеет вид

$$\sigma_x(\tau) = de^{-\omega^2 \tau^2},\ d > 0.$$

Найти спектральную плотность $f_x(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]$.

Р е ш е н и е.

$$f_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(\tau)e^{i\lambda\tau}d\tau =$$

$$= \frac{d}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2\tau^2+i\lambda\tau}d\tau =$$

$$= \frac{d}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\left(\omega\tau-\frac{i\lambda}{2\omega}\right)^2-\frac{\lambda^2}{4\omega^2}\right)}d\tau =$$

$$= \frac{d}{2\omega\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\omega^2}}.$$

К У С О Ч Е К   Т Е О Р И И

Случайный процесс $x(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любых $t_0 < t_1 < \ldots < t_n \in \mathbf{T}$, $n \leq 1$, случайные величины

$$x(t_0),\ x(t_1)-x(t_0),\ x(t_2)-x(t_1), \ldots,\ x(t_n)-x(t_{n-1})$$

независимы.

Случайный процесс $x(t)$, $t \in \mathbf{T} \subset [0, \infty[$ называется *винеровским* (или *броуновским движением*), если:

1). $x(0) = 0$ почти наверное;

2). $x(t)$ – процесс с независимыми приращениями;

3). приращение $x(t) - x(s)$ при любых s, $t \in \mathbf{T}$, по нормальному закону, причем

$$\mathbf{E}\{x(t) - x(s)\} = 0, \ \mathbf{D}\{x(t) - x(s)\} = c(t-s), \ c > 0$$

Если $c = 1$, то *винеровский процесс* (*броуновское движение*) называется стандартным.

Траектории винеровского процесса $x(t)$ могут быть выбраны непрерывными с вероятностью 1.

Случайный процесс $x(t)$, $t \in \mathbf{T} \subset \mathbb{R}^+$, принимающий значения $0, 1, 2, \ldots$, называется *пуассоновским*, если:

1). $x(0) = 0$ почти наверное;

2). $x(t)$ – процесс с независимыми приращениями;

3). приращения $x(t) - x(s)$ для любых фиксированыч s, $t \in \mathbf{T}, s \le t$ распределены по закону Пуассона с параметром $\lambda(t-s)$, то есть:

$$\mathbf{P}\left\{x(t) - x(s) = k\right\} = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)},\ k = 0,\ 1,\ 2$$

Р Е Ш Е Н И Е   З А Д А Ч

Задача 3. Найти ковариационную функцию $\sigma_x(t)$ винеровского случайного процесса $x(t)$.

Р е ш е н и е. Пусть $t_1 < t_2$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\sigma_x(t_1, t_2) = \\
&= \mathbf{E}\left\{\left(x(t_1) - \mathbf{E}\left\{x(t_1)\right\}\right)\left(x(t_2) - \mathbf{E}\left\{x(t_2)\right\}\right)\right\} = \\
&= \mathbf{E}\left\{\left(x(t_1) - \mathbf{E}\left\{x(t_1) - x(0)\right\}\right) \times \right. \\
&\left. \times \left(x(t_2) - \mathbf{E}\left\{x(t_2) - x(0)\right\}\right)\right\} = \\
&= \mathbf{E}\left\{x(t_1)x(t_2)\right\} = \\
&= \mathbf{E}\left\{x(t_1)\left[\left(x(t_2) - x(t_1)\right) + x(t_1)\right]\right\} = \\
&= \mathbf{E}\left\{x(t_1)\left[x(t_2) - x(t_1)\right]\right\} + \mathbf{E}\left\{x^2(t_1)\right\} = \\
&= \mathbf{E}\left\{\left[x(t_1) - x(0)\right]\left[x(t_2) - x(t_1)\right]\right\} + \\
&+ \mathbf{E}\left\{\left(x(t_1) - x(0)\right) - \mathbf{E}\left\{x(t_1) - x(0)\right\}\right\}^2 = \\
&= \mathbf{E}\left\{\left(x(t_1) - x(0)\right) - \mathbf{E}\left\{x(t_1) - x(0)\right\}\right\}^2 = \\
&= \mathbf{D}\left\{x(t_1) - x(0)\right\} = c \cdot t_1.
\end{aligned}$$

Аналогично при $t_2 < t_1$

$$\sigma_x(t_1, t_2) = c \cdot t_2.$$

Поэтому

$$\sigma_x(t_1, t_2) = c \cdot min\left\{t_1,\, t_2\right\}.$$

Задача 4. Показать, что пуассоновский процесс $x(t)$ непрерывен по t с вероятностью 1.

Р е ш е н и е. Покажем, что для любого $t \in \mathbf{T}$

$$|x(t \pm \tau) - x(t)| \xrightarrow[\tau \to 0]{\mathbf{P}=1} 0$$

Имеем

$$\mathbf{P}\left\{|x(t+\tau) - x(t)| > 0\right\} = \mathbf{P}\left\{x(\tau) > 0\right\} =$$

$$= 1 - \mathbf{P}\left\{x(\tau) = 0\right\} =$$

$$= 1 - e^{-\lambda\tau} \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}\left\{|x(t-\tau) - x(t)| > 0\right\} = \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0.$$

Задача 5. Случайный процесс $x(t)$ имеет характеристики $m_x(t) = 1$ и

$$\sigma_x(t_1,\, t_2) = \exp(\alpha(t_1 + t_2)).$$

Определить характеристики случайной функции

$$y(t) = t\frac{d\,x(t)}{d\,t} + 1.$$

Определить, являются ли стационарными случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$.

Р е ш е н и е. В силу линейности преобразования

$$t\frac{d\,x(t)}{d\,t} + 1$$

имеем

$$m_y(t) = t\frac{d\,m_x(t)}{d\,t} + 1 = 1$$

и

$$\sigma_y(t_1,\, t_2) = t_1\, t_2 \frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2}\sigma_x(t_1,\, t_2) =$$

$$= t_1\, t_2 \alpha^2 \exp(\alpha(t_1 + t_2)).$$

Ни один из случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ не является стационарным, так как их ковариационные функции зависят не только от $\tau = t_2 - t_1$, но от каждого из аргументов t_1, t_2.