3. Множества. Отображения. Принцип Дирихле.

1. Докажите следующие тождества, используя определение равенства множеств:
   (а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
   (б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
   (в) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n$;
   (г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
   (д) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

2. Докажите следующие тождества, используя равносильные преобразования:
   (а) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;
   (б) $A \oplus B \oplus (A \cap B) = A \cup B$;
   (г) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
   (д) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

3. Докажите следующие утверждения:
   (а) $A \cup B \subseteq C \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;
   (б) $A \subseteq B \cap C \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;
   (в) $A \cap B \subseteq C \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq \overline{B} \cup C$;
   (г) $A \subseteq B \cup C \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \overline{B} \subseteq C$;
   (д) $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} \subseteq \overline{A}$;

4. Решите следующие системы уравнений:
   (а)
   $$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases} \quad \text{где } A,\ B \text{ и } C \text{ — данные множества и } B \subseteq A \subseteq C.$$
   (б)
   $$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases} \quad \text{где } A,\ B \text{ и } C \text{ — данные множества и } B \subseteq A,\ A \cap C = \emptyset.$$

5. (а) Имеется последовательность множеств: $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots$ Докажите, что пересечение любой бесконечной подпоследовательности этих множеств совпадает с пересечением всей последовательности.
   (б) Имеется последовательность множеств: $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \ldots$ Докажите, что объединение любой бесконечной подпоследовательности этих множеств совпадает с объединением всей последовательности.

6. (а) Докажите, что $2^{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = 2^{A_1} \cap 2^{A_2} \cap \ldots \cap 2^{A_n}$.
   (б) Перечислите все элементы множества 2^A, где $A = \{1, 2, \{\{1\}, 2, 3\}\}$.
   (в) Перечислите все элементы множества 2^A, где $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1, \{1\}\}\} \setminus \{1, \{1\}\}$.

7. Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение; $A_i \subseteq X$ и $B_i \subseteq Y$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите следующие свойства образов и прообразов:
   (а) $f(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup \ldots \cup f(A_n)$;
   (б) $f^{-1}(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(B_n)$;
   (в) $f(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \cap \ldots \cap f(A_n)$;
   (г) $f^{-1}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \cap \ldots \cap f^{-1}(B_n)$.

8. Пусть U — универсальное множество, $S, T \subseteq U$ — фиксированные подмножества множества U. Определим отображение $f\colon 2^U \to 2^U$ как $f(A) = T \cap (S \cup A)$. Найдите $f^{(2)}$. Выясните, чему равно $f^{(n)}$ при $n > 2$.

9. Отображения $f, g, h\colon 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ заданы следующим образом: $f(A, B) = A \cap B$, $g(A, B) = A \cup B$, $h(A, B) = A \oplus B$. Выясните, какие из этих отображений являются инъективными, сюръективными и биективными. Установите, какие из указанных ниже множеств не являются конечными, и перечислите элементы конечных множеств: $f^{-1}(\emptyset)$, $g^{-1}(\emptyset)$, $h^{-1}(\emptyset)$, $f^{-1}(\{1\})$, $g^{-1}(\{2\})$, $h^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{4, 7\})$, $g^{-1}(\{8, 12\})$, $h^{-1}(\{5, 9\})$.
10. Выясните, для каких значений $n \in \mathbb{N}$ отображение $f_n\colon \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ является инъективным, сюръективным, биективным:
$$f_n(k) = \begin{cases} n - k, & \text{если } k < n; \\ n + k, & \text{если } k \geqslant n. \end{cases}$$
11. Выясните, является ли отображение $f\colon \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = (-1)^{n+1} \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ биективным? Если отображение биективно, то найдите обратное к f отображение.
12. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *обратимым слева* (*справа*), если существует такое отображение $f_l^{-1}\colon Y \to X$ ($f_r^{-1}\colon Y \to X$), что $f_l^{-1} \circ f = e_X$ ($f \circ f_r^{-1} = e_Y$). Отображение $f\colon X \to Y$ называется *обратимым*, если существует такое отображение $f^{-1}\colon Y \to X$, что $f^{-1} \circ f = e_X$ и $f \circ f^{-1} = e_Y$. Докажите, что
    (а) $f\colon X \to Y$ обратимо слева тогда и только тогда, когда f инъективно;
    (б) $f\colon X \to Y$ обратимо справа тогда и только тогда, когда f сюръективно;
    (в) $f\colon X \to Y$ обратимо тогда и только тогда, когда f биективно.
13. Докажите, что в любом множестве из 52 целых чисел найдутся по крайней мере два числа, сумма или разность которых делится на 100.
14. Точка $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ называется *целой*, если $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Докажите, что среди девяти целых точек найдутся по крайней мере две точки, для которых середина отрезка с концами в этих точках, также является целой точкой.
15. Докажите, что любое подмножество $S \subset \{1, 2, 3, \ldots, 200\}$ мощности $|S| = 101$ содержит по крайней мере два взаимно простых числа x и y, т. е. $\text{НОД}(x, y) = 1$.
16. Докажите, что любое подмножество $S \subset \{1, 2, 3, \ldots, 200\}$ мощности $|S| = 101$ содержит по крайней мере два таких элемента x и y, что либо $x \mid y$, либо $y \mid x$.
17. Пусть m — произвольное нечетное натуральное число. Докажите, что существует такое натуральное число n, что $m \mid 2^n - 1$.
18. Каждый день на протяжении четырехнедельного отпуска отдыхающий играл по крайней мере одну партию в шахматы. Общее число сыгранных партий не превышает 40. Докажите, что найдется промежуток времени, состоящий из последовательных дней, в течение которых было сыграно ровно 15 партий.