ТЕМА 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Непустое множество X называется *метрическим пространством*, если любым двум элементам $x, y \in X$ поставлено в соответствии неотрицательное число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$, называемое *расстоянием* или *метрикой*, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$; $\rho(x, y) = 0$ в том и только том случае, когда $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Примеры метрических пространств

1. Пусть на не пустом множестве X определена метрика так

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Такое метрическое пространство называется *пространством изолированных точек.*

2. Множество X всевозможных упорядоченных наборов из m вещественных чисел. Тогда для любых двух элементов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ определим расстояние как

$$\rho_c(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Множество X с такой метрикой порождает евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ с евклидовой геометрией.

На этом же множестве определим метрику по-другому:

$$\rho_k(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - y_i|.$$

Эта метрика называется *чебышевской* или *равномерной* метрикой. Если в качестве множества X выбрать множество целых чисел $\mathbb{Z}$, то полученная метрика называется *метрикой решетки* или *метрикой шага короля.*

Пусть на множестве X

$$\rho_0(x, y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|.$$

Такая метрика называется *манхэттенской или метрикой городских кварталов.* С этой метрикой связана манхэттеновская геометрия. Манхэттенская метрика не зависит от отражения относительно осей координат, но зависит от вращения.

На множестве X можно расстояние определить и так

$$\rho_p(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p \Big)^{1/p}, p \geqslant 1.$$

3. Множество ℓ_2, элементами которого являются бесконечные последовательности чисел (действительных или комплексных) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Определим на этом множестве метрику

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Полученное метрическое пространство называется *координатным пространством Гильберта.*

4. Непрерывные (действительные или комплексные) функции, заданные на некотором отрезке $[a,b]$, образуют метрическое пространство относительно расстояний

$$\rho(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|, \ \rho(x,y) = \left(\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}.$$

Полученные метрические пространства обозначаются соответственно $C[a,b]$, $CL_2[a,b]$. Аналогично, можно рассматривать пространство k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой

$$\rho(x,y) = \sum_{i=0}^{k} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|.$$

Полученное пространство обозначается $C^{(k)}[a,b]$.

Метрика, как математическая модель сходства объектов, и ее выбор во многих случаях неоднозначен. Она применяется в задачах кластерного анализа (*метрика Маханалобиса*), в теории информации и компьютерной лингвистики (*метрика Левенштейна*), в теории кодирования изображений (*метрика Хеминга*), в теории распознавания образов (*метрика Хаусдорфа*).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Задают ли в пространстве $\mathbb{R}$ следующие функции расстояние:

$$\varphi_1(x,y) = |x^2 - y^2|, \quad \varphi_2(x,y) = |e^x - e^y|.$$

Решение. Функция $\varphi_1(x,y)$ не определяет метрику на числовой прямой, так как для несовпадающих точек $x = 1$, $y = -1$, $\varphi_1(x,y) = 0$, т. е. не выполняется первая аксиома метрики. Функция $\varphi_2(x,y)$ определяет метрику на числовой прямой. Для нее выполняются все три аксиомы метрики. Выполнение первой аксиомы следует из монотонности функции e^x, а вторая и третья аксиомы выполняются исходя из свойств модуля.

Задача 2. Задает ли в пространстве $\mathbb{R}^2$ функция расстояние между точками $A = (x_1, y_1)$ и $B = (x_2, y_2)$:

$$\varphi(A,B) = \left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right)^2.$$

Решение. Функция $\varphi(A,B)$ не определяет расстояние на плоскости, поскольку для нее не выполняется неравенство треугольника. Действительно, рассмотрим точки $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (1,1)$. Тогда $\varphi_1(A,B) = 4$, $\varphi_1(A,C) = 1$, $\varphi_1(C,B) = 1$. Это означает, что $\varphi_1(A,B) > \varphi_1(A,C) + \varphi_1(C,B)$.

Задача 3. Пусть (X,ρ) – метрическое пространство. Доказать, что функция $\rho_1(x,y)$ также является метрикой на X.

Решение. Проверим выполнение аксиом метрики для $\rho_1(x,y)$. Очевидно, что $\rho_1(x,y) \geqslant 0$. Пусть $\rho_1(x,y) = 0$, тогда $\rho(x,y) = 0$, следовательно, $x = y$. Обратно, если $x = y$, то $\rho(x,y) = 0$, и $\rho_1(x,y) = 0$. Нетрудно заметить, что $\rho_1(x,y) = \rho_1(y,x)$. Покажем, что справедливо неравенство треугольника для ρ_1, если оно выполнено для ρ, т. е.

$$\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \leqslant \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} + \frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)}.$$

Данное неравенство равносильно верному неравенству вида

$$\big(\rho(x,z)+\rho(z,y)-\rho(x,y)\big)+$$
$$+\rho(x,z)\rho(z,y)+\rho(z,y)\rho(x,z)+\rho(x,y)\rho(y,z)\rho(z,x)\geqslant 0.$$

Задача 4. Найти расстояние между функциями $x(t)=t^3$ и $y(t)=$ $=3t+4$ в пространствах $C[0,2]$, $C^{(1)}[0,2]$, $CL_1[0,2]$, $CL_2[0,2]$.

Р е ш е н и е. По определению расстояние в пространстве $C[0,2]$ вычисляется по формуле

$$\rho(x,y)=\max_{0\leqslant t\leqslant 2}|t^3-3t-4|.$$

Предварительно вычислим максимум функции $f(t)=t^3-3t-4$ на отрезке $[0,2]$, используя производную $f'(t)=3t^2-3$. Откуда точками, подозрительными на экстремум, являются три точки $t_1=0$, $t_2=1$ и $t_3=2$. Тогда $|f(0)|=4$, $|f(1)|=6$, $|f(2)|=2$. Следовательно, в пространстве $C[0,2]$ расстояние $\rho(x,y)=6$.

Аналогично, вычислим расстояние в пространстве $C^{(1)}[0,2]$:

$$\rho(x,y)=\max_{0\leqslant t\leqslant 2}|t^3-3t-4|+\max_{0\leqslant t\leqslant 2}|3t^2-3|=6+9=15.$$

Рассмотрим вычисление расстояния в пространстве $CL_1[0,2]$

$$\rho(x,y)=\int\limits_0^2|t^3-3t-4|\,\mathrm{d}t.$$

Заметим, что на отрезке $[0,2]$ функция $t^3-3t-4<0$, поэтому

$$\int\limits_0^2|t^3-3t-4|\,\mathrm{d}t=-\int\limits_0^2(t^3-3t-4)\,\mathrm{d}t=10.$$

Итак, $\rho(x,y)=10$ в $CL_1[0,2]$. А в пространстве $CL_2[0,2]$

$$\rho(x,y)=\Big(\int\limits_0^2|t^3-3t-4|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}=2\sqrt{\tfrac{454}{35}}.$$

ЗАДАНИЯ

Задание 1. Задает ли данная функция расстояние в пространстве $\mathbb{R}^n$ при заданном n.

1.1. $\rho(x,y)=\big||x|-|y|\big|,\quad n=1;$

1.2. $\rho(x,y)=(x^2+2y^2)|x-y|,\quad n=1;$

1.3. $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|},\quad n=1;$

1.4. $\rho(x,y)=\sin|x-y|,\quad n=1;$

1.5. $\rho(x,y)=\left(|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^4\right)^{1/4},\quad n=2;$

1.6. $\rho(x,y)=\left(|x_1-x_2|^2+|y_1^3-y_2^3|^2\right)^{1/2},\quad n=2;$

1.7. $\rho(x,y)=|x_1-x_2|+\operatorname{tg}|y_1-y_2|,\quad n=2;$

1.8. $\rho(x,y)=|x_1^3-x_2^3|^2+|\operatorname{arctg}y_1-\operatorname{arctg}y_2|,\quad n=2;$

1.9. $\rho(x,y)=\max|x_1-x_2|,|y_1^5-y_2^5|,\quad n=2;$

1.10. $\rho(x,y)=\max|x_1^2-x_2^2|,|y_1^2-y_2^2|,\quad n=2;$

1.11. $\rho(x,y)=(x_1^2+x_2^2)|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|,\ \ n=3;$

1.12. $\rho(x,y)=\max|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|,\ \ n=3;$

1.13. $\rho(x,y)=(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|)^{1/2},\quad n=3;$

1.14. $\rho(x,y)=\left(|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|^2\right)^{1/2},\quad n=3.$

Задание 2. Вычислить расстояние между функциями $x(t)$ и $y(t)$ в пространствах а) $C[a,b]$, $C^{(1)}[a,b]$, б) $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$.

2.1. а) $x(t)=5,\quad y(t)=\sqrt{3(t+1)(2-t)},\quad t\in[-3,1],$
б) $x(t)=t,\quad y(t)=(t+1)^{-1/3},\quad t\in[0,1];$

2.2. а) $x(t)=t+1,\quad y(t)=2\sqrt{t+1},\quad t\in[-2,4],$
б) $x(t)=t,\quad y(t)=\sqrt{2-t^2},\ \ t\in[-1,1];$

2.3. а) $x(t)=(t^2-t)\sin t,\quad y(t)=2t^2-1,\quad t\in[-\pi/2,\pi],$
б) $x(t)=\cos t,\ \ y(t)=\cos t^2,\ \ t\in[0,\pi/2];$

2.4. а) $x(t)=\dfrac{4}{t+1},\quad y(t)=t^2+t-2,\ \ t\in[2,4],$
б) $x(t)=\dfrac{1}{1-t},\quad y(t)=\dfrac{1}{1+t},\quad t\in[0,1/2];$

2.5. а) $x(t)=t,\quad y(t)=\sin 2t,\quad t\in[-\pi/2,\pi/2],$
б) $x(t)=t,\quad y(t)=\cos^2 t,\quad t\in[0,\pi];$

2.6. а) $x(t)=\dfrac{4}{t}+1,\quad y(t)=t^2+t-1,\quad t\in[-7,4],$
б) $x(t)=\sin^2 t,\quad y(t)=\cos^2 t,\quad t\in[0,\pi/2];$

2.7. а) $x(t)=(t^2-t)\sin 2t,\quad y(t)=t,\quad t\in[-\pi/2,\pi,1],$
б) $x(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}},\quad y(t)=\sqrt{t},\quad t\in[1,2];$

2.8. а) $x(t) = e^t, \quad y(t) = t, \quad t \in [-1, 4]$,

б) $x(t) = \sin t, \quad y(t) = \sin 2t, \quad t \in [0, \pi]$;

2.9. а) $x(t) = 2t^2 + 1, \;\; y(t) = t^4, \;\; t \in [0, 4]$,

б) $x(t) = e^t, \quad y(t) = te^t, \quad t \in [0, 1]$;

2.10. а) $x(t) = \dfrac{1}{t^2+1}, \quad y(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}, \quad t \in [-5, 5]$,

б) $x(t) = t, \quad y(t) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}, \quad t \in [1, 2]$;

2.11. а) $x(t) = t^5 + 5t^3, \quad y(t) = 5t^4 - 1, \quad t \in [-1, 2]$,

б) $x(t) = e^t, \quad y(t) = e^{-t}, \quad t \in [0, 1]$;

2.12. а) $x(t) = 2t^2 + 5, \quad y(t) = 3t^4 + t^2 - 2, \quad t \in [-1, 7]$,

б) $x(t) = t, \quad y(t) = \sin 2t, \quad t \in [0, \pi/2]$;

2.13. а) $x(t) = 3 - t, \quad y(t) = \dfrac{2}{t+2}, \quad t \in [-1, 4]$,

б) $x(t) = \sqrt{\dfrac{t+2}{t-2}}, \quad y(t) = \sqrt{\dfrac{t-2}{t+2}}, \quad t \in [4, 6]$;

2.14. а) $x(t) = 2\sin t, \;\; y(t) = \cos 2t, \; t \in [0, \pi]$,

б) $x(t) = 2\ln t, \quad y(t) = 1, \; t \in [2, 4]$;

2.15. а) $x(t) = 2t^3 + 7, \quad y(t) = 6t^2 + 18t, \quad t \in [-2, 4]$,

б) $x(t) = e^{2t}, \quad y(t) = 2e^{1-t}, \quad t \in [0, 1]$;

2.16. а) $x(t) = 2\sin t, \quad y(t) = \cos 2t, \quad t \in [0, 3\pi/2]$,

б) $x(t) = t, \;\; y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \; t \in [0, 1]$;

2.17. а) $x(t) = \dfrac{16}{t-1}, \quad y(t) = -t^2 + 2t + 15, \quad t \in [2, 4]$,

б) $x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \quad y(t) = t, \quad t \in [-1, 1]$.