7. Размещения. Перестановки. Сочетания.

Размещения и перестановки.

1. Имеется 25 занумерованных мест. Сколькими способами можно разместить пятерых человек на этих местах, если каждый из них может занимать ровно одно место?
2. Учащемуся нужно сдать четыре экзамена на протяжении восьми дней. Сколькими способами он может это сделать, если в один день разрешается сдавать не более одного экзамена?
3. На собрании должны выступить пять человек A, B, C, D и E, причем каждый по одному разу. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов, если: (а) нет ограничений на порядок выступлений; (б) B выступает сразу за A; (в) B не может выступать до того момента, пока не выступит A?
4. Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Найдите число способов, которыми можно выбрать подмножества S и T множества X при условии, что: (а) на выбор S и T нет ограничений; (б) $S \subseteq T$; (в) $S \cap T = \emptyset$; (г) $S \cap T \neq \emptyset$; (д) $S \subseteq T$ и $|T|$ – четное число.
5. Сколькими способами можно рассадить n человек: (а) в ряд; (б) за круглым столом (два размещения за круглым столом считаются одинаковыми, если у каждого человека сосед слева один и тот же)?
6. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?
7. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, чтобы числа 1, 2 и 3 стояли рядом в порядке возрастания?
8. Сколько существует перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, в которых два фиксированных элемента i и j не стоят рядом в любом порядке?
9. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?
10. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, чтобы каждое число, кратное 2, и каждое число, кратное 3, имело номер, кратный 2 и 3 соответственно?
11. Сколько существует перестановок $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, для которых имеет место неравенство $i_1 - i_2 > 1$?

Сочетания.

1. На плоскости проведено n прямых ($n \geqslant 2$), причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Найдите: (а) число точек пересечения прямых; (б) число треугольников, которые образуют эти прямые.
2. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого n-угольника ($n \geqslant 4$), если никакие три из них не пересекаются в одной точке?
3. В выпуклом n-угольнике ($n \geqslant 4$) проведены все диагонали, причем никакие три из них не пересекаются в одной точке. На сколько частей разделится при этом многоугольник?
4. Монета подброшена 10 раз. Сколько существует способов выпадения четырех «решек» и шести «орлов»? Сколько существует способов выпадения не менее трех «решек»?
5. Среди 20 человек 10 являются физиками, а другие 10 – математиками. Найдите число способов, которыми можно выбрать четверку людей так, чтобы в нее вошел по крайней мере один специалист из каждой области.
6. Определите число пятизначных натуральных чисел, десятичная запись которых содержит ровно две различные цифры.
7. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, десятичная запись которых состоит из трех четных и трех нечетных цифр? Определите число $2n$-значных ($n \geqslant 1$) натуральных чисел, десятичная запись которых состоит из n четных и n нечетных цифр.
8. Сколькими способами можно распределить 33 различные книги между тремя людьми A,

B и C так, чтобы A и B вместе получили книг в два раза больше, чем C?

9. Сколькими способами можно выбрать три различных числа из множества $\{1, 2, \ldots, 100\}$ так, чтобы их сумма делилась на 3? Тот же вопрос для множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.
10. Сколькими способами можно выбрать три различных числа из множества $\{1, 2, \ldots, 500\}$ так, чтобы одно из этих чисел было средним арифметическим двух других? Тот же вопрос для множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.
11. Дана квадратная решетка со сторонами n и n, где $n \geqslant 6$. Найдите число различных кратчайших путей из точки $O(0; 0)$ в точку $A(n; n)$, проходящих по сторонам решетки при условии, что путь содержит точку $B(n-2; n-2)$ и не проходит через точку $C(n-3; 1)$.
12. Колода из $4n$ карт содержит четыре масти и n ($n \geqslant 5$) карт в каждой масти, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Сколькими способами можно выбрать пять карт так, чтобы среди них оказались: (а) лишь карты одинаковой масти; (б) ровно четыре карты одной масти; (в) как минимум четыре карты одной масти; (г) карты всех мастей; (д) ровно три карты с одним и тем же номером; (е) две карты с одинаковыми, а остальные три – с различными номерами?
13. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, содержащей 52 карты так, чтобы среди них были карты каждой масти?
14. Сколько существует бинарных векторов длины $m+n$, содержащих m единиц и n нулей, в которых никакие две единицы не идут подряд ($m \leqslant n+1$)?
15. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом m мужчин и n женщин ($m \leqslant n$) на $m+n$ занумерованных местах так, чтобы никакие два мужчины не сидели рядом?
16. Сколькими способами можно составить треугольники, длины сторон которых являются натуральными числами, если длина каждой стороны больше n и не больше $2n$?
17. Бросают n одинаковых игральных костей, каждая из которых помечена очками $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Сколькими способами могут выпасть кости? Во скольких случаях: (а) хотя бы на одной из костей выпадет 6 очков; (б) ровно на одной из костей выпадет 6 очков; (в) на одной из костей выпадет 1 очко, а на другой – 2 очка?
18. Сколько существует n-значных ($n \geqslant 1$) натуральных чисел, в которых цифры расположены в неубывающем порядке?
19. Функция $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ называется *монотонной*, если $f(x) \leqslant f(y)$ для любых $x < y$. Определите число монотонных функций указанного вида.
20. Пусть r – целое неотрицательное число. Найдите число решений в целых неотрицательных числах (натуральных числах): (а) уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$; (б) неравенства $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant r$?
21. Сколькими способами можно разместить: (а) r различных шаров по n различным коробкам; (б) r одинаковых шаров по n различным коробкам?
22. Пусть r – целое неотрицательное число. Определите число целочисленных решений неравенства: (а) $|x_1| + |x_2| \leqslant 1000$; (б) $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leqslant r$.
23. Найдите число способов, которыми можно разложить число 1728 в произведение трех натуральных множителей при условии, что разложения, отличающиеся порядком следования множителей, считаются различными.
24. Сколькими способами три человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, 1 апельсин, 1 мандарин, 1 лимон, 1 грушу, 1 персик и 1 абрикос при условии, что: (а) количество плодов, получаемых одним человеком, не ограничено; (б) каждый получает ровно по 4 плода.
25. Сколькими способами можно выбрать k из n расположенных в ряд предметов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы при этом не были выбраны никакие два соседних предмета ($n \geqslant 2k-1$)?
26. На книжной полке в ряд расположено n книг. Сколькими способами из них можно выбрать p книг так, чтобы между любыми двумя выбранными книгами, равно как и после p-ой (последней) выбранной книги, располагалось не менее s книг ($p(s+1) \leqslant n$)?