ТЕМА 3. СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть X – нормированное векторное пространство.

Определение 1. Линейный оператор $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется *линейным функционалом.* Обозначим его как $f(x)$, $x \in X$. Линейность f означает, что $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$, $x,y \in X$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Линейный функционал f называется *ограниченным*, если для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant C\|x\|_X$ сразу для всех $x \in X$. Наименьшая из констант C, совпадающая с числом $\sup|f(x)|$, где sup берется по всем x с $\|x\| = 1$, называется *нормой* функционала и обозначается $\|f\|$. Ограниченность функционала эквивалентна его непрерывности.

Рассмотрим множество линейных ограниченных функционалов, определенных на нормированном пространстве X, $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})(\mathbb{C}^n)$. Это банахово пространство, так как пространство $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ банахово. Оно называется *сопряженным* пространством к пространству X и обозначается X^*.

В банаховом пространстве X^* можно рассматривать два типа сходимости.

Определение 2. Последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ сходится к $f \in X^*$

- *сильно*, если $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
- *слабо*, если $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ для любого $x \in X$.

Примеры линейных ограниченных функционалов

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ с базисом $e_1,\ldots,e_n$. Возьмем $x \in \mathbb{R}^n$ и разложим его по базису $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. Рассмотрим линейный функционал f на элементе x, тогда

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = (x,y)_{\ \mathbb{R}^n},$$

где $y_k = f(e_k)$. $|f(x)| = |(x,y)| \leqslant \|y\| \cdot \|x\|$. Значит $\|f\| \leqslant \|y\|$.

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^n$ каждый линейный функционал ограничен.

Пример 2. Пусть $X \in C[a,b]$. Рассмотрим функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k x(t_k)$, где t_k – система точек на отрезке $[a,b]$. Примером такого функционала являются конечные разности функции $x(t) \in C[a,b]$. Данный функционал ограничен. Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k||x(t_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k| \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|, \quad \|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k|.$$

Пример 3. Определим на пространстве $C[a,b]$ функционал вида

$$f(x) = \int\limits_{a}^{b} a(t)x(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $a(t)$ – непрерывная либо суммируемая на отрезке $[a,b]$ функция. Примером такого функционала служат коэффициенты Фурье. Данный функционал линеен и ограничим, причем $\|f\| \leqslant \int\limits_{a}^{b} a(t)\,\mathrm{d}t$.

Множество линейных ограниченных функционалов, определенных на нормированном пространстве X называется *сопряженным* пространством и обозначается X^*.

В банаховом пространстве X^* можно рассматривать два типа сходимости. Последовательность $(f_n) \subset X^*$ сходится к $f \in X^*$ *сильно*, если $\|f_n - f\| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$; *слабо*, если $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in X$.

С помощью сопряженного пространства в пространстве X можно ввести новый тип сходимости. Говорят, что последовательность $(x_n) \subset X$ сходится к $x \in X^*$ справедливо $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. *(Хана-Банаха). Пусть X – нормированное векторное пространство, X_0 – его подпространство, $f_0 : X_0 \to \mathbb{C}$ – линейный ограниченный функционал. Тогда существует ограниченный функционал $f : X \to \mathbb{C}$, продолжающий f_0, и при том такой, что*

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

***Следствие** 1 (об отделимости точек в X).* Пусть X – нормированное пространство и $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Тогда существует такой линейный ограниченный функционал в пространстве X, что

1. $\|f\| = 1$;
2. $f(x_0) = \|x_0\|$.

***Следствие** 2 (об отделимости точки от пространства).* Пусть в нормированном пространстве X задано подпространство X_0 и элемент x_0 такой, что $\rho(x_0,X_0) = d > 0$. Тогда существует линейный ограниченный функционал $f \in X^*$, что

1. $f(x_0) = 1$;
2. $f(x) = 0$ для всех $x \in X_0$;
3. $\|f\| = \frac{1}{d}$.

***Следствие** 3.* Множество M всюду плотно в нормированном пространстве X тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in X^*$ такого, что $f(x) = 0$ для всех $x \in M$ следует, что $f = 0$, т. е. $f(x) = 0$, $x \in X$.

***Следствие** 4.* Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ – линейно-независимая система элементов в нормированном пространстве X. Тогда найдется система $\{f_e\}_{e=1}^n$ – линейных ограниченных функционалов на X такая, что

$$f_l(x_k) = \begin{cases} 1, k = l, \\ 0, k \neq l, \ \ k,l = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Определение 3. Система $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ и система функционалов $\{f_l\}_{l=1}^n \subset X^*$ называется *биортогональными*, если

$$f_e(x_k) = \begin{cases} 1, l = k, 0, l \neq k, \\ k, l = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

***Следствие** 5.* Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X^*$ – линейно независимая система линейных ограниченных функционалов. Тогда в X найдется система элементов $\{x_l\}_{l=1}^n$, биортогональная к ней.

Сопряженное пространство и его структура

Теорема 2. *(Ф. Рисса). Пусть H – гильбертово пространство. Для любого линейного ограниченного функционала $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$ такой, что для всех $x \in H$*

$$f(x) = (x,y)_H, \quad \|f\|_{H^*} = \|y\|_H. \tag{1}$$

Замечание 1. В силу теоремы Рисса существует сохраняющее норму взаимно однозначное соответствие между H^* и H. Это позволяет отождествить пространства H и H^*.

Теорема 3. *(Ф. Рисса). Каждый линейный ограниченный функционал в пространстве $C[a,b]$ задается формулой*

$$f(x) = \int\limits_a^b x(t)\,\mathrm{d}g(t), \tag{2}$$

где $g(t) \in \bigvee[a,b]$. При этом

$$\|f\| = \bigvee_a^b(g). \tag{3}$$

Замечание 2. Функция g по функционалу f определяется неоднозначно. Если же потребовать от g непрерывности слева и задать значение $g(a) = 0$, то g по f будет определяться однозначно.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 4. Доказать, что функционал

$$f\,(x) = \int_{-1}^{1} x\,(t)\,\mathrm{d}t - x\,(0)\,, \quad x\,(t) \in C[-1,1],$$

является ограниченным, найти его норму.

Решение. В соответствии с определением функционал f является ограниченным, если существует постоянная $C > 0$ такая, что:

$$|f\,(x)| \leqslant C \cdot \|x\|_{C[-1,1]}\,, \quad \forall x(t) \in C[-1,1].$$

Оценим норму $|f\,(x)|$.

$$|f\,(x)| = \left|\int_{-1}^{1} x\,(t)\ \mathrm{d}t - x\,(0)\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |x\,(t)|\,\mathrm{d}t + |x\,(0)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{t\in[-1,1]} |x\,(t)| + \max_{t\in[-1,1]} |x\,(t)| = 3\,\|x\|\,.$$

Таким образом, $\|f\| \leqslant 3$. С другой стороны, существует последовательность $x_n(t) \in C[-1{,}1]$, определяемая формулой

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, t \in [-1, -1/n], \\ -2nt - 1, t \in [-1/n{,}0], \\ 2nt - 1, t \in [0{,}1/n], \\ 1, t \in [1/n{,}1], \end{cases}$$

с $\|x_n(t)\| = 1$ такой, что

$$|f(x_n)| = \left| \int_{-1}^{-1/n} \mathrm{d}t + \int_{-1/n}^{0} t\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1/n} nt\,\mathrm{d}t + \int_{1/n}^{1} \mathrm{d}t + 1 \right| = 3 - 2/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3.$$

Таким образом $3 - 1/n \leqslant \|f\| \leqslant 3$, и поэтому $\|f\| = 3$.

Пример 5. Доказать, что функционал

$$f(x) = \int_{-1}^{0} t^3 x(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_{0}^{1/2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[-1{,}1],$$

является ограниченным, найти его норму.

Решение. Функционал f является ограниченным, если существует постоянная $C > 0$ такая, что:

$$|f(x)| \leqslant C \cdot \|x\|_{L_{3/2}[-1,1]}, \quad \forall x(t) \in L_{3/2}[-1{,}1].$$

Оценим $|f(x)|$.

$$|f(x)| = \left| \int_{-1}^{0} t^3 x(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_{0}^{1/2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} \left|t^3 \chi_{[-1,0]}(t)\right| |x(t)| \mathrm{d}t + 2\int_{-1}^{1} \left|t^2 \chi_{[0,1/2]}(t)\right| |x(t)| \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\left| t^3 \chi_{[-1,0]}(t) \right| + 2 \left| t^2 \chi_{[0,1/2]}(t) \right| \right) |x(t)| \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-1}^{1} \left(\left| t^3 \chi_{[-1,0]}(t) \right| + 2 \left| t^2 \chi_{[0,1/2]}(t) \right| \right)^3 \mathrm{d}t \right)^{1/3} \left(\int_{-1}^{1} |x(t)|^{3/2} \mathrm{d}t \right)^{2/3} =$$

$$= c \|x\|_{L_{3/2}[-1,1]}.$$

Следовательно, $\|f\| \leqslant$. С другой стороны, существует функция $x\,(t) \in L_{3/2}[-1,1]$, которая задается формулой

$$x\,(t) = \begin{cases} t^6, & t \in [-1,0], \\ -2t^{4/3}, & t \in [0,1]\,, \end{cases}$$

для которой

$$\|f\| \geqslant \frac{|f\,(x)|}{\|x\|_{L_{3/2}[-1,1]}} = c.$$

Таким образом, $\|f\| = c$.

Пример 6. В соответствии с теоремой Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве H вычислите норму функционала в пространстве $L_2[-1,1]$:

$$f\,(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{1/2} \frac{1}{t^{1/3}}\, x\left(\sqrt{t}\right)\, \mathrm{d}t.$$

Решение. Согласно теореме Рисса существует единственная функция $y\,(t) \in H$, что $f\,(x) = (x,y)_H$ для любой функции $x\,(t) \in H$ и $\|f\| = \|y\|_H$, где в нашем случае $H = L_2[-1,1]$. Преобразуем выражение для функционала так, чтобы в конечном итоге получить формулу скалярного произведения в пространстве $L_2[-1,1]$. Предварительно во втором интеграле сделаем замену переменной.

$$\int_{0}^{1/2} \frac{1}{t^{1/3}}\, x\left(\sqrt{t}\right)\, \mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c} \sqrt{t} = \tau,\ t = \tau^2, \\ \mathrm{d}t = 2\tau \mathrm{d}\tau \end{array} \right] = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\tau^{3/2}}\, x\,(\tau)\, 2\tau\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} 2\tau^{1/3} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int\limits_{-1}^{1} 2\tau^{1/3} \chi_{[0,1/\sqrt{2}]}(\tau) x(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Тогда

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{-1}^{1} 2t^{1/3} \chi_{[0,1/\sqrt{2}]}(t) x(t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - 2t^{1/3} \chi_{[0,1/\sqrt{2}]}(t)\right) x(t)\,\mathrm{d}t = (x,y)_{L_2[-1,1]}\,.$$

Следовательно,

$$y(t) = \begin{cases} 1, \quad t \in [-1,0), \\ 1 - 2t^{1/3}, \quad t \in \left[0, 1/\sqrt{2}\right], \\ 1, \quad t \in \left(1/\sqrt{2},1\right], \end{cases}$$

и

$$\|f\| = \|y\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int\limits_{-1}^{1} |y(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}t + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} |1 - 2t^{1/3}|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{6}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{5/3}\right)^{1/2}.$$

Пример 7. Вычислить норму функционала в гильбертовом пространстве l_2 по теореме Рисса, если

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2.$$

Р е ш е н и е. По теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве существует единственный элемент $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_2$, такой, что $f(x) = (x,y)_{l_2}$ для любого элемента $x \in l_2$. Учитывая, что скалярное произведение в l_2 определяется по формуле $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, заключаем, что $y = \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{k},\ldots\right)$. Очевидно, что $y \in l_2$, тогда норма функционала $\|f\| = \|y\|_{l_2}$, т. е.

$$\|y\|_{l_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, $\|f\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

П р и м е р 8. Для $x\,(t) \in C[-1,1]$ положим

$$f(x) = \frac{x(1) + x(-1)}{2} + \int_{-1}^{1} tx\,(t)\,\mathrm{d}t.$$

Доказать, что f – ограниченный линейный функционал. Найти такую функцию $g(t)$ с ограниченным изменением на $[-1,1]$, что $f(x) = \int_{-1}^{1} x\,(t)\,\mathrm{d}g\,(t)$.

Р е ш е н и е. Исходя из определения ограниченности функционала, имеем

$$|f\,(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|x\,(-1)| + |x\,(1)|\right) + \int_{-1}^{1} |t|\,|x\,(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\|x\|_{C[-1,1]} + \|x\|_{C[-1,1]}\right) +$$

$$+ \|x\|_{C[-1,1]} \cdot \int_{-1}^{1} |t|\,\mathrm{d}t = 2\,\|x\|_{C[-1,1]}\,, \quad \|f\| \leqslant 2.$$

Любой ограниченный линейный функционал f, заданный на всем пространстве $C[-1,1]$, может быть представлен в виде интеграла Римана-Стилтьеса

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x\,(t)\,\mathrm{d}g\,(t)\,,$$

где $g(t)$ – функция с ограниченным изменением на отрезке $[-1,1]$. При этом норма функционала f равна полному изменению функции $g(t)$, которая является непрерывной слева и $g(-1) = 0$. В нашем случае функция $g(t)$ почти всюду на отрезке $[-1{,}1]$ дифференцируема и ее производная $g'(t) = t$, кроме того она имеет скачок в точках $t = -1$ и $t = 1$. Следовательно,

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t = -1, \\ t^2, & -1 < t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

и $\bigvee\limits_{-1}^{1} g(t) = \sup\limits_{k} \sum\limits_{k} |g(t_k) - g(t_{k-1})| = 2.$

Пример 9. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ с элементами $x\,(x_1,x_2)$ на подпространстве $L = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \; 2x_1 - x_2 = 0\right\}$ задан линейный функционал $f\,(x) = x_1$. Доказать, что существует единственное продолжение f на все $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы и найти это продолжение.

Решение. По теореме Хана – Банаха для всякого ограниченного линейного функционала f, заданного на подпространстве L, существует его продолжение на все X с сохранением нормы. Обозначим это продолжение через $F\,(x)$. В пространстве $\mathbb{R}^2$ линейный ограниченный функционал имеет вид $F\,(x) = (x{,}y) = \alpha x_1 + \beta x_2$, где $y = (\alpha, \beta)$. Тогда на подпространстве L, где $2x_1 - x_2 = 0$, имеем $\alpha x_1 + 2\beta x_1 = x_1$. Поскольку мы строим продолжение с сохранением нормы, то $\|F\| = \|f\|$. Вычислим соответствующие нормы. $\|F\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ вычислена по теореме Рисса. Вычислим $\|f\|$. Поскольку в $\mathbb{R}^2$ задана евклидова норма, тогда на подпространстве L

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{x_1^2 + 4x_1^2} = \sqrt{5}\,|x_1|\,,$$

а

$$|f\,(x)| = |x_1| = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\|x\|\,, \quad \text{т. е.} \quad \|f\| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Итак, $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1, \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1/5 \end{cases}$. Решение системы единственно, причем $\alpha = 1/5$, $\beta = 2/5$. Это означает, что продолжение единственно и $F\,(x) = 1/5x_1 + 2/5x_2$.

Пример 10. Для $x(t) \in L_2[-1,1]$ положим

$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} x(t) \cos \pi n t \, \mathrm{d}t.$$

а) Доказать, что f_n – ограниченный линейный функционал.
б) Исследовать последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на сходимость.

Решение. Линейность функционала вытекает из линейности интеграла. По теореме Рисса

$$\|f_n\| = \|\cos \pi n t\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int_{-1}^{1} |\cos \pi n t|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2} = 1.$$

Последовательность $f_n(x)$ представляет собой последовательность коэффициентов Фурье c_n при разложении четной функции в ряд по ортонормированной системе $\varphi_n(t) = \cos n\pi t$. По теореме о разложении в ряд Фурье имеем: $c_n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $f_n(x)$ слабо сходится к нулю. Однако $f_n(x)$ не сходится к нулю сильно, так как $\|f_n\| = 1$ и к нулю не стремится при $n \to \infty$.

Задание 1. Выяснить, задает ли следующая формула линейный ограниченный функционал. При положительном ответе вычислить норму f для $x(t) \in L_p[a,b]$, $p \geqslant 1$.

1.1. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t^{4/3} x\left(t^2\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{1/4}^{1} t x(t) \, \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_1[0,1];$

1.2. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t^5 x\left(t^2\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{-1}^{0} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_3[-1,1];$

1.3. $f(x) = \int\limits_{-1}^{-1/2} t x\left(t^3\right) \mathrm{d}t - 2\int\limits_0^{1} x\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_3[-1,1];$

1.4. $f(x) = \int\limits_0^{1} t^4 x\left(t^3\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{-1}^{0} t x\left(\sqrt[3]{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{9/2}[-1,1];$

1.5. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t x\left(\sqrt[3]{t}\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{1/2}^{1} t x(t) \, \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[0,1];$

1.6. $f(x) = \int\limits_0^{1/3} \sqrt{t} x\left(t^2\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{7/3}[0,2];$

1.7. $f(x)=\int\limits_{0}^{1/2}\sqrt[3]{t}x\left(\sqrt[11]{t}\right)\mathrm{d}t,\quad x(t)\in L_{6/5}[-1{,}1];$

1.8. $f(x)=\int\limits_{0}^{1/2}t^{5/3}x\left(t^2\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{1/2}^{1}tx(t)\,\mathrm{d}t,\quad x(t)\in L_1[0{,}1];$

1.9. $f(x)=\int\limits_{0}^{1/2}t^{4/3}x\left(t^3\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{1/2}^{1}t^2x(t)\,\mathrm{d}t,\quad x(t)\in L_{3/2}[0{,}1];$

1.10. $f(x)=\int\limits_{0}^{1/2}tx\left(t^2\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{1/2}tx\left(t^2\right)\mathrm{d}t,\quad x(t)\in L_{3/2}[0{,}1];$

1.11. $f(x)=\int\limits_{0}^{1/3}t^{1/3}x\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t,\quad x(t)\in L_{7/3}[0{,}1];$

1.12. $f(x)=\int\limits_{-1}^{0}t^2x\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{1}tx\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t,\quad x(t)\in L_1[-1{,}1];$

1.13. $f(x)=\int\limits_{-1}^{0}t^2x\left(t^3\right)\mathrm{d}t-\int_0^1 tx(t)\,\mathrm{d}t,\quad x(t)\in L_{3/2}[-1{,}1];$

1.14. $f(x)=\int\limits_{-1}^{0}x(t)\,\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{1}t^2x(t)\,\mathrm{d}t,\quad x(t)\in L_4[-1{,}1];$

1.15. $f(x)=\int\limits_{0}^{1/2}tx\left(t^2\right)\mathrm{d}t+\int\limits_{1/2}^{1}t^2x(t)\,\mathrm{d}t,\quad x(t)\in L_{5/2}[-1{,}1].$

Задание 2. Используя теорему Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве непрерывных на отрезке функций, найти норму функционала, если $x(t)\in C[-5{,}6]$.

2.1. $f(x)=x(-4)+2x(-3)+\int\limits_{-2}^{2}t^2x(t)\,\mathrm{d}t+x(2)-2x(4);$

2.2. $f(x)=3x(-3)+\int\limits_{-2}^{1}t^2x(t)\,\mathrm{d}t+2x(1)-\int\limits_{2}^{4}tx(t)\,\mathrm{d}t-x(5);$

2.3. $f(x)=2x(-5)-\int\limits_{-3}^{1}tx(t)\,\mathrm{d}t+3x(1)+\int\limits_{2}^{3}t^2x(t)\,\mathrm{d}t-x(4);$

2.4. $f(x)=3x(-4)-\int\limits_{-3}^{0}t^2x(t)\,\mathrm{d}t+2x(0)-\int\limits_{1}^{3}tx(t)\,\mathrm{d}t+5x(3);$

2.5. $f(x)=4x(-4)+\int\limits_{-4}^{-2}tx(t)\,\mathrm{d}t-2x(-2)+\int\limits_{1}^{2}t^3x(t)\,\mathrm{d}t+x(2);$

2.6. $f(x) = x(-4) - \int\limits_{-3}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t + 2x(1) + \int\limits_{2}^{3} tx(t)\,\mathrm{d}t - x(3)\,;$

2.7. $f(x) = 3x(-4) + \int\limits_{-4}^{2} (t-1)^2 x(t)\,\mathrm{d}t + x(2) - 7x(3)\,;$

2.8. $f(x) = 5x(-4) + x(-3) + \int\limits_{-3}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - 2x(1) - x(3)\,;$

2.9. $f(x) = 3x(-4) + x(-4) + \int\limits_{-4}^{-2} tx(t)\,\mathrm{d}t + x(-2) + 4x(3)\,;$

2.10. $f(x) = 2x(-4) + x(-3) + \int\limits_{-2}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t + 5x(1) - 2x(4)\,;$

2.11. $f(x) = 3x(-4) + x(-3) + \int\limits_{-3}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t - 2x(1) - x(5)\,;$

2.12. $f(x) = x(-4) - 2x(-2) + \int\limits_{-2}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - 3x(1) + 4x(5)\,;$

2.13. $f(x) = x(-3) + 5x(-1) + \int\limits_{-1}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t + 4x(1) - 2x(3)\,;$

2.14. $f(x) = 2x(-4) + 4x(-2) + \int\limits_{-2}^{2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t + 5x(2) - 4x(4)\,;$

2.15. $f(x) = 3x(-4) - 2x(-2) - \int\limits_{-2}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t + 3x(1) - 4x(4)\,.$

Задание 3. Используя теорему об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, вычислить норму функционала в $L_2[-1{,}1]$.

3.1. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{0}^{1/2} t^2 x\left(t^2\right)\mathrm{d}t;$

3.2. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} (t-1)\,x(t)\,\mathrm{d}t - 4\int\limits_{0}^{1/4} t^6 x\left(t^4\right)\mathrm{d}t;$

3.3. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t;$

3.4. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_{-1/4}^{1/4} t^6 x\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.5. $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}(t+1)\,x(t)\,\mathrm{d}t-3\int\limits_{-1/2}^{1/2}t^2x\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.6. $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}\left(t^2+t\right)x(t)\,\mathrm{d}t-5\int\limits_{0}^{1/4}t^6x\left(\sqrt[5]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.7. $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}tx(t)\,\mathrm{d}t-2\int\limits_{0}^{1/2}t^5x\left(t^2\right)\mathrm{d}t;$

3.8. $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}\left(t^2-t\right)x(t)\,\mathrm{d}t-4\int\limits_{0}^{1/4}t^2x\left(t^4\right)\mathrm{d}t;$

3.9. $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}t^2x(t)\,\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{1/4}t^6x\left(t^4\right)\mathrm{d}t;$

3.10. $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}t^3x(t)\,\mathrm{d}t-5\int\limits_{-1/2}^{1/2}t^3x\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.11. $f(x)=\int\limits_{0}^{1/2}t^2x(t)\,\mathrm{d}t-2\int\limits_{-1}^{0}t^6x\left(t^3\right)\mathrm{d}t;$

3.12. $f(x)=\int\limits_{0}^{1}t^2x(t)\,\mathrm{d}t-3\int\limits_{-1}^{0}tx\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.13. $f(x)=3\int\limits_{0}^{1}x(t)\,\mathrm{d}t-3\int\limits_{-1/2}^{1/2}t^4x\left(t^3\right)\mathrm{d}t;$

3.14. $f(x)=\int\limits_{0}^{1}t^{-1/3}x(t)\,\mathrm{d}t-9\int\limits_{-1}^{1}tx\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.15. $f(x)=\int\limits_{-1}^{0}t^3x\left(t^2\right)\mathrm{d}t+3\int\limits_{1/2}^{1}tx\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t.$

Задание 4. Вычислить норму функционала в гильбертовом пространстве l_2, используя теорему Рисса.

4.1.$f(x)=x_1+x_2-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k},\quad x(x_1,x_2,\ldots)\in l_2;$

4.2. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2x_k}{k}+x_4+2x_7,\quad x(x_1,x_2,\ldots)\in l_2;$

4.3. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k+1}x_k+x_1+2x_2,\quad x(x_1,x_2,\ldots)\in l_2;$

4.4. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}4^{-k}x_k-x_5-x_{10},\quad x(x_1,x_2,\ldots)\in l_2;$

4.5. $f(x) = x_2 - \sum\limits_{k=1}^{20} x_{2k-1}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.6. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 4^{-k} x_{k^2} - x_1 - x_2, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.7. $f(x) = x_1 + \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{x_{2k}}{2^k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.8. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{100} \frac{x_k}{k} - 2 \sum\limits_{k=200}^{300} x_k, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.9. $f(x) = 2x_2 - 3x_3 + \sum\limits_{k=5}^{10} \frac{x_k}{5^k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.10. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_{3k}}{3^k} - x_1 + 2x_2, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.11. $f(x) = x_5 - 2x_1 + \sum\limits_{k=1}^{10} \sqrt{k} \cdot x_k, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.12. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{5} \frac{x_k}{2^k} - \sum\limits_{k=3}^{10} \frac{x_k}{k} + x_{10}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.13. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} - \sum\limits_{k=3}^{20} k x_k + x_1, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.14. $f(x) = x_1 - \sum\limits_{k=1}^{20} \frac{x_{2k}}{4^k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.15. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{10} x_{k^2} - x_{101}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2.$