Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой
_________________ Недзьведь А.М.
«28 »   января   2020 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан факультета
________________ Недзьведь А.М.
« 25 »   февраля   2020 г.

СОГЛАСОВАНО
Председатель
Учебно-методической комиссии факультета
________________ Филипцов А.В.
« 25»   февраля 2020 г.

Функциональный анализ и интегральные уравнения

Электронный учебно-методический комплекс для специальности:
1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)»
направление специальности: 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)»

Регистрационный № 2.4.2-12/41

Автор:
Чеб Е.С., кандидат физико-математических наук, доцент.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ 25 марта 2020 г., протокол № 4.

Минск 2020

УДК 517.98(075.8)+ 517.968(075.8)
Ч-34

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ.
Протокол № 4 от 25.03.2020 г.

Решение о депонировании вынес:
Совет факультета прикладной математики и информатики.
Протокол № 6 от 25.02.2020 г.

А в т о р :
Чеб Елена Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики БГУ.

Рецензенты:
кафедра функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета (заведующий кафедрой Лебедев А.В., доктор физико-математических наук, профессор);
Костюкова О. И., профессор кафедры информатики Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», доктор физико-математических наук, профессор.

Чеб, Е. С. Функциональный анализ и интегральные уравнения : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», направление специальности: 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)» / Е. С. Чеб ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2020. – 201 с. – Библиогр.: с. 200–201.

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения» предназначен для студентов специальности 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», составлен в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования и предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень практических занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

Оглавление

Пояснительная записка 6

1 Теоретический раздел 8
1.1 Банаховы пространства 8
1.1.1 Метрические пространства 8
1.1.2 Векторные (линейные) пространства 11
1.1.3 Нормированные векторные пространства 16
1.1.4 Неравенства Гельдера и Минковского 19
1.1.5 Множества в нормированных пространствах 21
1.1.6 Предельные точки, замыкание множества в нормированном пространстве 25
1.1.7 Предел последовательности в нормированном векторном пространстве 28
1.1.8 Аппроксимация в нормированных пространствах 31
1.1.9 Банаховы пространства 33
1.1.10 Ряды в банаховых пространствах 37
1.1.11 Пополнение нормированных векторных пространств . . . 38
1.1.12 Пространство $L_p[a, b], p \geqslant 1$ 38
1.1.13 Непрерывные отображения нормированных пространств . 43
1.2 Принцип сжимающих отображений 46
1.2.1 Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах 46
1.2.2 Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре 48
1.2.3 Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям 52
1.2.4 Применение принципа сжимающих отображений к дифференциальным уравнениям 56
1.3 Гильбертовы пространства и аппроксимация 57
1.3.1 Предгильбертовы пространства 58
1.3.2 Гильбертово пространство 60
1.3.3 Проекция в гильбертовом пространстве 62
1.3.4 Ортогональное разложение гильбертова пространства 64
1.3.5 Ортогональные системы и ряды Фурье 65
1.3.6 Полные ортонормированные системы 67
1.3.7 Изоморфизм гильбертовых пространств 70
1.4 Линейные ограниченные операторы 71
1.4.1 Линейные ограниченные операторы (основные понятия) 71
1.4.2 Примеры линейных ограниченных операторов 73

1.4.3 Пространство линейных ограниченных операторов 75
1.4.4 Принцип равномерной ограниченности 79
1.4.5 Обратные операторы. Непрерывная обратимость 83
1.4.6 Линейные операторные уравнения и их решения 85
1.4.7 Линейные операторные уравнения второго рода 90
1.4.8 Применение теории обратных операторов к интегральным уравнениям 93
1.5 Сопряженное пространство и сопряженные операторы 96
1.5.1 Линейные ограниченные функционалы 96
1.5.2 Продолжение линейного функционала 97
1.5.3 Следствия из теоремы Хана–Банаха 98
1.5.4 Структура сопряженного пространства 99
1.5.5 Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве 100
1.5.6 Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве 103
1.5.7 Операторы ортогонального проектирования 106
1.5.8 Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора 107
1.5.9 Неограниченные симметричные операторы 108
1.5.10 Сопряженный оператор в банаховом пространстве и его применение 109
1.6 Компактные множества и компактные операторы 111
1.6.1 Понятие компактного множества 111
1.6.2 Предкомпактные множества в банаховых пространствах 114
1.6.3 Критерий конечномерности нормированного векторного пространства 117
1.6.4 Непрерывные отображения на компактах 118
1.6.5 Определение и свойства компактных операторов 119
1.6.6 Теория Рисса – Шаудера для уравнений с компактным оператором 123
1.6.7 Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений второго рода 124
1.6.8 Линейные уравнения первого рода с компактным оператором 130
1.6.9 Собственные значения и собственные векторы компактного оператора 132
1.6.10 Компактные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H 135
1.6.11 Собственные векторы компактных самосопряженных операторов в H 136
1.6.12 Теорема Гильберта–Шмидта и ее применение 138

1.6.13 Интегральные уравнения с симметричным ядром 139

2 Практический раздел 145

2.1 Перечень практических занятий 145
Тема 1. Метрические и нормированные пространства 145
Тема 2. Сходимость и аппроксимация в нормированном пространстве 148
Тема 3. Множества в нормированном пространстве 151
Тема 4. Гильбертовы пространства 154
Тема 5. Аппроксимация и проекция в гильбертовом пространстве 156
Тема 6. Отображения в банаховых пространствах 159
Тема 7. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора . 161
Тема 8. Обратные операторы 166
Тема 9. Решение интегральных уравнений второго рода методом резольвент 169
Тема 10. Сопряженное пространство 170
Тема 11. Сопряженные, самосопряженные, компактные операторы 174
Тема 12. Теория Рисса–Шаудера разрешимости уравнений с компактным оператором 178
Тема 13. Собственные значения и собственные векторы компактного оператора 181
Тема 14. Интегральные уравнения с симметричным ядром . . . 183

3 Раздел контроля знаний 186

3.1 Перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов 186
Тема 1. Принцип сжимающих отображений 186
Тема 2. Принцип сжимающих отображений для решения СЛАУ 188
Тема 3. Принцип сжимающих отображений для решение интегральных уравнений 190
3.2 Перечень задач для проведения коллоквиумов 193
3.3 Примерный вариант контрольной работы 195
3.4 Перечень вопросов к экзамену 197

4 Вспомогательный раздел 200

4.1 Рекомендуемая литература 200
4.2 Электронные ресурсы 201

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящий электронно-методический комплекс (ЭУМК) разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 1-31 03 03 “Прикладная математика (по направлениям)” и предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины “Функциональный анализ и интегральные уравнения” для студентов данной специальности.

ЭУМК включает в себя разделы “Пояснительная записка”, “Теоретический раздел” (краткий курс лекций), “Практический раздел” (материалы к практическим занятиям), “Раздел контроля знаний” и “Вспомогательный раздел”.

“Теоретический раздел” представляет собой краткий курс лекций, охватывающий все разделы учебной программы.

В “Практическом разделе” содержатся материалы к практическим занятиям (задачи с разбивкой по темам) и соответствующие задания для самостоятельной работы.

В разделе контроля знаний представлены примерные варианты заданий по управляемой самостоятельной работе студентов, а также вопросы к коллоквиумам и варианты контрольной работы.

“Вспомогательный раздел” содержит рекомендуемую по курсу литературу и электронные ресурсы.

ЭУМК не предъявляет специальных требований к системе. Для работы с ним необходим компьютер или портативное устройство, на котором установлено приложение для просмотра PDF - документов (например, Adobe Acrobat Reader).

ЭУМК представлен в виде двух документов:

- сопроводительный документ;
- непосредственно электронный учебно-методический комплекс.

Учебная дисциплина “Функциональный анализ и интегральные уравнения” посвящена рассмотрению единых подходов к вопросу разрешимости дифференциальных и интегральных уравнений, граничных задач для уравнений в частных производных, бесконечных систем алгебраических уравнений.

Базой для изучения данной дисциплины являются дисциплины “Математический анализ”, “Алгебра и аналитическая геометрия” и "Дифференциальные уравнения" государственного компонента. Учебная дисциплина “Функциональный анализ и интегральные уравнения” непосредственно связана с основными учебными дисциплинами “Методы вычислений”, “Теория вероятностей”, “Уравнения математической физики” и “Методы оптимизации” государственного компонента и “Математическое моделирование” УВО.

Основной целью преподавания учебной дисциплины является обучение студентов основным положениям теории, а также методами применения ее для решения задач естествознания, техники и управления.

Основные задачи, решаемые при изучении учебной дисциплины “Функциональный анализ и интегральные уравнения”:

- изучение основных принципов и методов функционального анализа;
- формирование умений в области применения основных методов функционального анализа при решении теоретических и прикладных задач естествознания;
- получение практических навыков работы с методами функционального анализа.

При изложении дисциплины важно показать возможности применения основных положений функционального анализа при решении прикладных задач в различных областях науки, техники, экономике и др. В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия и методы теории банаховых и гильбертовых пространств;
- основные понятия теории линейных ограниченных операторов и функционалов;
- теорию разрешимости операторных уравнений 1-го и 2-го рода;

уметь:

- исследовать множества в банаховых пространствах и последовательности на сходимость;
- исследовать отображения в банаховых пространствах;
- аппроксимировать функции в гильбертовом пространстве рядами Фурье;
- вычислять норму линейного ограниченного оператора и функционала;
- вычислять сопряженный оператор в гильбертовом пространстве;
- решать интегральные уравнения Фредгольма и Вольтера аналитическими методами и методом последовательных приближений;
- использовать основные результаты функционального анализа в практической деятельности; владеть:
- основными методами исследования множеств в банаховых и гильбертовых пространствах;
- основами аппроксимации функций в гильбертовых пространствах;
- методами доказательств и аналитического исследования на разрешимость операторных уравнений первого и второго рода;
- основными методами исследования на разрешимость интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера;
- навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

1. Теоретический раздел

1.1. Банаховы пространства

1.1.1. Метрические пространства

Одним из часто встречающихся понятий в математике является понятие расстояния. Оно используется в аналитической геометрии при изучении свойств геометрических объектов в евклидовых пространствах, в математическом анализе при определении такого фундаментального понятия как предел числовой последовательности (или функции) и т. д. Обобщив некоторые понятия, французский математик М. Фреше в 1906 г. в своей диссертации построил теорию метрических пространств.

Определение 1.1.1. Пусть X – произвольное непустое множество. Говорят, что на X задано *расстояние (метрика)*, *векторным (линейным) пространством* над полем P, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие единственное число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее аксиомам

1) $\rho(x, y) \geqslant 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством.* Если множество $A \subset X$, то пара (A, ρ) образует подпространство метрического пространства X.

Рассмотрим некоторые примеры метрических пространств.

Пример 1. Пусть на не пустом множестве X метрика определена следующим образом

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Такое пространство называется метрическим пространством изолированных точек.

Пример 2. Рассмотрим множество X всевозможных упорядоченных наборов из m вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Тогда для любых двух элементов x, y множества X расстояние между ними определим формулой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}. \qquad (1.1.1)$$

Множество X с метрикой (1.1.1) порождает евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ с евклидовой геометрией. Евклидова геометрия изучается в школьном курсе.

Пример 3. На том же множестве всевозможных упорядоченных наборов из m вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определим метрику по формуле расстояние между ними определим формулой

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - y_i|. \tag{1.1.2}$$

Метрика (1.1.2) называется *чебышевской или равномерной* метрикой, на $\mathbb{Z}^m$ ее еще называют *метрикой решетки или метрикой хода короля.*

Пример 4. Теперь определим метрику таким образом

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| \tag{1.1.3}$$

Метрика (1.1.3) называется *манхэттенской или метрикой городских кварталов*, ее еще называют *метрикой прямого угла.* Название манхэттенское расстояние получило от правил уличной планировки города Манхэттена. С этой метрикой связана манхэттенская геометрия, которая не зависит от отражения относительно оси координат, но зависит от вращения.

Пример 5. На множестве X расстояние можно определить формулой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \ p \geqslant 1. \tag{1.1.4}$$

Пример 6. На множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ определим расстояние следующим образом. Если $x, y \in \mathbb{Q}$ и $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$. Если $x \neq y$, то разность $x - y$ представима в виде

$$x - y = p^k \frac{m}{n},$$

где p – простое число, m, n, k – целые числа, причем m и n не делятся на p. Тогда

$$\rho(x, y) = \frac{1}{p^k}. \tag{1.1.5}$$

Такая метрика называется *p-адической.* Для такой метрики неравенство треугольника выполняется в более сильной форме, а именно

$$\rho(x, y) \leqslant \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}.$$

Метрику, обладающую таким свойством, называют *неархимедовой.* p-адическая метрика является неархимедовой.

Упражнение 1. Пусть на плоскости три точки a, b и c ассоциируются с вершинами треугольника, а расстояние между этими точками – длина сторон треугольника. Покажите, что в нашем пространстве с неархимедовой метрикой все треугольники – равнобедренные.

Упражнение 2. Пусть $B(x_0, r)$ – круг с центром в точке x_0 радиуса r. Докажите, что если метрика ρ – неархимедова, то любая точка $y \in B(x_0, r)$ является центром этого круга, т. е. $B(x_0, r) = B(y, r)$, если $y \in B(x_0, r)$.

Метрические пространства играют основную роль в большинстве разделов математики. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть A – некоторое множество, $A^\star$ – семейство всех конечных последовательностей элементов из A, допускающая пустую последовательность. Будем интерпретировать A как алфавит некоторого языка. Тогда элементы из A естественно называть *буквами*, а элементы из $A^\star$ – *словами. Редакторской операцией* на $A^\star$ называется преобразование слова, состоящее из исключения одной буквы, либо вставки буквы в слово, или в замене одной буквы на другую. Наименьшее число редакторских операций, необходимых для перехода от одного слова к другому, называется *расстоянием Левинштейна.* Расстояние Левинштейна определяет метрику на $A^\star$.

Рассмотрим задачу о передаче информации по коммуникациям. В компьютерной технике информация передается с помощью последовательности битов, принимающих два значения 0 или 1. Биты будем рассматривать в качестве букв. Рассмотрим всевозможные упорядоченные последовательности битов длины N. Обозначим это множество через I^N. Мощность этого множества 2^N. В этом множестве выделим подмножество A^N, состоящее из значащих слов. Множество A^N является метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$, при этом x_i, y_i принимают два значения 0 или 1. Данная метрика называется *расстоянием Хемминга.*

Расстояние Хемминга используется для построения кодов с исправлением ошибок. Предположим, что в процессе передачи информации некоторые биты были искажены, т. е произошла замена 1 на 0 или наоборот Это означает, что произошла ошибка передачи.

Например, нам необходимо передать два слова, закодированных 1 и 0. В этом случае $N = 1$. При передаче информации такой код ничем не защищен. Можно усложнить код и дублировать каждое слово – 11 и 00. Тогда при однократной ошибке при передаче мы сможем узнать и констатировать ошибку, если получили сообщение вида 10 или 01. Если кодировать сообщение тремя битами, т. е. передавать 111 и 000, то можно не только распознать ошибку, но и исправить ее.

Пусть для элементов множества A^N выполняется неравенство $\rho(x, y) > d$, $x \neq y$. Тогда для того, чтобы код мог корректировать n ошибок при передаче достаточно выполнения условия $d \geqslant 2n + 1$. Из этого соотношения следует, что при кодировании слов нужно выбирать коды как можно дальше отстоящие друг от друга.

В задачах кластерного анализа и классификации используется статистическое расстояние или *расстояние Махаланобиса*, с помощью которого определяется сходство образов и классов. Оно отличается от расстояния Евклида тем, что учитывает дисперсии переменных и определяется по формуле

$$d_M(A, B) = \sqrt{(x-y)^\top S^{-1}(x-y)},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ элементы пространства $\mathbb{R}^N$, S – матрица ковариации. Расстояние Махаланобиса можно определить как меру несходства двух случайных величин x и y из одного распределения вероятностей с матрицей ковариации S.

1.1.2. Векторные (линейные) пространства

Часто приходится рассматривать множества объектов, для которых установлены так называемые линейные операции: сложение и умножение на число. Примером такого множества служит множество свободных векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ с покомпонентными операциями сложения векторов и покомпонентным умножением на число. При изучении таких множеств неважно, что это за объекты, насколько они похожи на вектора, важно то общее, что позволяет изучать линейные операции абстрактно, т. е. важно, что линейные операции над элементами множества не выводят за пределы этого множества.

Пусть P – поле действительных или комплексных чисел (поле скаляров).

Определение 1.1.2. Непустое множество E называется *векторным (линейным) пространством* над полем P, если для любых двух его элементов x и y определена их сумма $x+y$ – элемент того же множества и для любого $x \in E$ и любого $\alpha \in P$ определено произведение αx, являющееся элементом множества E, причем эти операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) в E существует элемент θ такой, что для любого $x \in E$ справедливо равенство $x + \theta = x$;
4) для каждого $x \in E$ существует элемент $-x \in E$, что выполняется равенство $x + (-x) = \theta$;
5) $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha\beta) \cdot x$;
6) $1 \cdot x = x, 0 \cdot x = \theta$;
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Если на множестве E введены операции сложения и умножения на число так, что E превращено в векторное пространство, то говорят, что E наделено структурой векторного пространства. Векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ называется *вещественным* векторным пространством, а векторное пространство над $\mathbb{C}$ – *комплексным* векторным пространством. Элементы векторного пространства будем называть векторами либо точками. Аксиомы векторного пространства — это известные свойства операций над векторами в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ очень важно такое понятие как базис пространства.

Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ называются *линейно зависимыми,* если существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что их линейная комбинация

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0.$$

Если равенство нулю линейной комбинации возможно лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то элементы $x_1, \ldots, x_n$ называют *линейно независимыми.*

Бесконечная система элементов $x_1, x_2, \ldots$ пространства E называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Как известно, понятие линейной зависимости обобщает понятие коллинеарности и компланарности векторов.

Упражнение 3. Покажите, что на отрезке $[0,\pi]$ функции $1, \cos t, \cos^2 t$ линейно независимы, а функции $1, \cos 2t, \cos^2 t$ линейно зависимы.

Упражнение 4. Проверьте, что система $x_n(t) = t^n, n = 0, 1, \ldots$ линейно независима в пространстве непрерывных на отрезке $[0, 1]$ для любого натурального n.

Определение 1.1.3. Векторное пространство называют m*-мерным*, если в нем существует m линейно независимых векторов, а всякие $m+1$ векторов линейно зависимы. Набор этих линейно независимы векторов называется *базисом* векторного пространства E, а m – его *размерностью.* Размерность пространства обозначается символом $\dim E$.

Конечномерные линейные пространства систематически изучаются в вузовском курсе линейной алгебры. Нас будут интересовать в основном бесконечномерные векторные пространства.

Определение 1.1.4. Векторное пространство E называется *бесконечномерным*, если для каждого натурального m в E существует m линейно независимых векторов.

Рассмотрим некоторые примеры векторных пространств.

Пример 7. Множество всевозможных векторов (в трехмерном пространстве, на плоскости или на прямой) образуют векторное пространство.

Сумма векторов определяется по правилу параллелограмма, а произведение вектора x на число α определяется как вектор αx длина которого есть произведение $|\alpha|$ на длину x, а направление совпадает с направлением x при $\alpha > 0$ и противоположно x при $\alpha < 0$.

Пример 8. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^m$ всевозможных упорядоченных наборов из m вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где сложение и умножение на число определяются формулами

$$(x_1, \ldots, x_m) + (y_1, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m),$$

$$\alpha(x_1, \ldots, x_m) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_m),$$

которое также является векторным пространством. Базис образован векторами

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0), e_m = (0, 0, \ldots, 1).$$

Размерность пространства $\dim \mathbb{R}^m = m$. Аналогично определяется комплексное пространство $\mathbb{C}^m$.

Наиболее важными для приложений являются пространства, элементами которых служат всевозможные функции. На функции, как правило, накладываются некоторые ограничения: непрерывность, непрерывная дифференцируемость, ограниченность и т. д.

Пример 9. Непрерывные (действительные или комплексные) функции, заданные на некотором отрезке $[a, b]$, с обычными операциями сложения функций и умножения их на число образуют векторное пространство $C[a, b]$, являющееся одним из важнейших для анализа. Учитывая упражнение 4, заключаем, что $C[a, b]$ – бесконечномерное векторное пространство.

Пример 10. Пространство $C^{(k)}[a, b], k \in \mathbb{N}$ – пространство k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Поскольку $\alpha x(t) \in C^{(k)}[a, b]$, если $x(t) \in C^{(k)}[a, b]$ и $x(t) + y(t) \in C^{(k)}[a, b]$, если $x(t)$ и $y(t)$ из $C^{(k)}[a, b]$, то $C^{(k)}[a, b]$ – векторное пространство.

По аналогии с пространством $\mathbb{R}^m$ можно рассмотреть пространство, элементами которого являются бесконечные числовые последовательности с соответствующими ограничениями.

Пример 11. Рассмотрим множество ℓ_2, элементами которого являются бесконечные последовательности чисел (действительных или комплексных) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Определим операции сложения и умножения на скаляр по следующему правилу:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots).$$

Тот факт, что сумма двух последовательностей, удовлетворяющих условию, также удовлетворяет этому условию, вытекает из элементарного неравенства $(a + b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$. Таким образом, ℓ_2 – векторное пространство.

Пространства ℓ_2 являются бесконечномерным, линейно независимую систему в нем образуют векторы

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots.$$

Пример 12. Совокупность m всех ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, $\sup\limits_i |x_i| < +\infty$, с теми же операциями сложения и умножения на число, что и в примере 11, тоже является векторным пространством.

Определение 1.1.5. Непустое подмножество L из E называют *векторным подпространством пространства* E, если оно само образует векторное пространство по отношению к определенным в E операциям сложения и умножения на число.

Иначе говоря, $L \subset E$ есть подпространство, если из того, что $x, y \in L$ следует, что $\alpha x + \beta y \in L$ для любых α и β из поля P. Всякое векторное подпространство обязательно содержит 0.

Во всяком векторном пространстве E есть подпространство, состоящее из одного нуля, – нулевое подпространство. С другой стороны, E можно рассматривать как свое подпространство. Подпространство, отличное от E и содержащее хотя бы один ненулевой элемент, называется *собственным.*

Приведем примеры собственных подпространств.

Пример 13. Пусть E – векторное пространство, размерность которого $\dim E > 1$, пусть $x \in E$, $x \neq \theta$. Совокупность элементов αx, где α пробегает все числа (соответственно действительные или комплексные), образует, очевидно, одномерное подпространство в E.

Пример 14. Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$ и множество в нем $L = \{x(t) \in C[a,b] : x(a) = 0\}$. L является подпространством пространства $C[a, b]$. В тоже время $C[a, b]$ можно рассматривать в качестве подпространства в более обширном классе функций $B[a, b]$ – всех ограниченных функций на отрезке $[a,b]$.

Пусть $\{x_\alpha\}, \alpha \in \Gamma$ – произвольное непустое множество элементов векторного пространства E. Тогда в E существует наименьшее подпространство (быть может совпадающее с E), которое содержит $\{x_\alpha\}$. Действительно, по крайней мере одно подпространство, содержащее $\{x_\alpha\}$ существует: это все E. Далее ясно, что пересечение любого множества $\{\mathscr{L}_\gamma\}$ подпространств есть снова подпространство. Возьмем теперь все подпространства, содержащие систему векторов $\{x_\alpha\}$, и рассмотрим их пересечение. Это и будет наименьшее подпространство, содержащее систему $\{x_\alpha\}$. Такое минимальное подпространство мы и называем подпространством, порожденным множеством $\{x_\alpha\}$, или *линейной оболочкой множества* $\{x_\alpha\}$. Мы будем обозначать это подпространство $\mathscr{L}(\{x_\alpha\})$.

Линейно независимая система $\{x_\alpha\}$ называется *алгебраическим базисом*, если $\mathscr{L}(\{x_\alpha\}) = E$. Всякий элемент $x \in E$ может быть представлен в форме линейной комбинации элементов алгебраического базиса единственным образом. Мощность алгебраического базиса называется *алгебраической размерностью* пространства.

Определение 1.1.6. Векторные пространства E и E^* называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое согласовано с операциями в E и E^* соответственно.

Изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации одного и того же пространства. Примерами изоморфных пространств могут служить пространство $\mathbb{R}^m$ и пространство всех многочленов степени $\leqslant m-1$ с вещественными коэффициентами.

Теорема 1.1.1. *Все конечномерные векторные пространства изоморфны между собой.*

Теорема 1.1.2. *Векторное пространство изоморфное m-мерному является m-мерным.*

Следствие 1.1.1. Бесконечномерное векторное пространство не изоморфно никакому конечномерному.

Пусть E – векторное пространство. Множество $M \subset E$ называется *линейным многообразием* в E, если для любых векторов $x, y \in E$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in P$ выполнено $\alpha x + \beta y \in M$.

Обобщение произвольной прямой или плоскости, не проходящих через начало координат, служит множество $x_0 + M$, где $x_0 \in E$, а M – линейное многообразие, называется *аффинным многообразием.*

Как видно, во всяком векторном пространстве существует великое множество подпространств. Выясним вопрос о разложении исходного пространства E на подпространства.

Векторное пространство E называется *алгебраической прямой суммой* векторных подпространств E_1 и E_2, если E_1, E_2 – векторные подпространства в E и любой элемент $x \in E$ однозначно представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$.

Лемма 1.1.1. *Векторные пространства E представляет собой прямую сумму подпространств E_1 и E_2 тогда и только тогда, когда $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.*

Пример 15. Рассмотрим пространство ограниченных комплекснозначных функций $B[-1{,}1]$ и множества в нем

$$E_1 = \{x(t) \in B[-1,1] : x(t_1) = 0, t_1 \in [-1,1]\},$$

$$E_2 = \{x(t) \in B[-1,1] : x(t_2) = 0, t_2 \in [-1,1]\}, t_1 \neq t_2.$$

Очевидно, что E_1, E_2 являются векторными подпространствами пространства $B[-1,1]$. Однако пространство $B[-1,1]$ не является прямой суммой E_1 и E_2.

Пусть E_1, E_2 — векторные пространства над полем P, *прямое произведение* $E = E_1 \times E_2$, $E = \{(x_1, x_2) : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$, становится векторным пространством, если операции над элементами в нем определить равенствами

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Пусть E – векторное пространство, $L \subset E$ – его подпространство. Объединим элементы из E в классы, относя два элемента x', x'' в один класс, если $x' - x'' \in L$. При этом, очевидно, различные классы не содержат общих элементов, и каждый элемент $x \in E$ входит только в один класс. Во множестве $E\big|_L$ всех классов можно ввести алгебраические операции, полагая $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$, где $\hat{x}$ – класс, содержащий $x, \alpha\hat{x} = \widehat{\alpha x}$. Эти определения операций не зависят от выбора представителей класса. В силу данных определений $E\big|_L$ становится векторным пространством и называется *фактор–пространством* пространства E по подпространству L. Роль нулевого элемента в нем играет класс, содержащий нулевой элемент пространства E, т. е. подпространство L. Если $\dim E = m$, $\dim L = k$, то $\dim E\big|_L = m - k$. Размерность фактор–пространства называется *коразмерностью* подпространства L в пространстве E.

1.1.3. Нормированные векторные пространства

Векторное пространство чисто алгебраический объект, не позволяющий решать задачи анализа. Поэтому в этом пространстве целесообразно ввести понятие нормы и тем самым измерять расстояние между точками данного пространства.

Нормированные векторные пространства представляют одну из важнейших математических структур. Теория этих пространств была развита в работах польского математика С. Банаха и ряда других авторов.

Определение 1.1.7. Векторное пространство E называется *нормированным векторным пространством*, если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствии неотрицательное число $\|x\| \in \mathbb{R}$ (норма x) так, что выполнены следующие аксиомы:

1) $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0$ в том и только том случае, когда $x = \theta$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \alpha \in P$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Рассмотрим примеры нормированных пространств.

Пример 16. Пространство $\mathbb{R}^m$. Норму на $\mathbb{R}^m$ можно ввести различными способами (которые в некотором смысле эквивалентны, как будет показано ниже). Например, если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то формулы

$$\|x\|_c = \Bigl(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\Bigr)^{1/2}; \quad \|x\|_k = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|; \quad \|x\|_0 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$$

задают норму, что легко проверить. Пусть $p \geqslant 1$, тогда норму можно определить и так

$$\|x\|_p = \Bigl(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\Bigr)^{1/p}.$$

Свойства 1) – 2) нормы очевидны, а свойство 3) (неравенство треугольника) будет доказано ниже.

Пример 17. В пространстве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций определим норму формулой

$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|.$$

Условия 1) – 2) нормы вытекают из свойств максимума.

Пример 18. Пространство $C^{(n)}[a,b]$ n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций становится нормированным, если мы введем норму

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x^{(k)}(t)|.$$

Пример 19. Вернемся к векторному пространству непрерывных на $[a,b]$ функций. Однако теперь мы введем норму по-другому

$$\|x\| = \Bigl(\int_a^b |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\Bigr)^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

Это пространство обозначается $\mathscr{L}_p\,[a,b]$. Аксиомы 1) – 2) проверяются непосредственно и вытекают из свойств интеграла, аксиома 3) будет следствием неравенства Минковского, которое будет доказано ниже.

Пример 20. Пространство m ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$ является нормированным пространством относительно нормы

$$\|x\| = \sup_i |x_i|.$$

Обратимся к рассмотрению свойств нормы.

Лемма 1.1.2. *Пусть E – нормированное векторное пространство. Тогда для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ выполняется обобщенное неравенство треугольника*

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|.$$

Лемма 1.1.3. *Пусть E – нормированное векторное пространство. Тогда для любых элементов $x, y \in E$ справедливо обратное неравенство треугольника*

$$\|x - y\| \geqslant \Big| \|x\| - \|y\| \Big|.$$

В нормированном пространстве E можно ввести *расстояние* между любыми двумя его элементами по формуле

$$\rho(x, y) = \|x - y\|,$$

и, тем самым, превратить E в метрическое пространство.

Метрика ρ называется *инвариантной относительно сдвига*, если выполняется равенство

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y);$$

положительно однородной, если

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y).$$

Заметим, что в нормированном векторном пространстве формула $\rho(x, y) = \|x - y\|$ задает инвариантную относительно сдвига положительно однородную метрику.

Упражнение 5. Покажите, что если в метрическом векторном пространстве определена положительно однородная инвариантная относительно сдвига метрика ρ, то формула $\rho(x, 0) = \|x\|$ определяет в этом пространстве норму.

Пусть E – нормированное векторное пространство и в E двумя способами введены нормы: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$.

Определение 1.1.8. Говорят, что *норма* $\|\cdot\|_1$ *подчинена* $\|\cdot\|_2$, если существует $\alpha > 0$ такое, что для любого $x \in E$ $\|x\|_1 \leqslant \alpha \|x\|_2$.

Очевидно, что $\|x\|_p = (\int\limits_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t)^{1/p}$ подчинена $\|x\|_c = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$ в пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций.

Две нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ *эквивалентны*, если существуют $\alpha, \beta > 0$ такие, что для всех $x \in E$ выполняется $\alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1$.

Таким образом, эквивалентные нормы подчинены друг другу.

Теорема 1.1.3 (об эквивалентных нормах). *Во всяком конечномерном нормированном векторном пространстве все нормы эквивалентны.*

Следует отметить, что в случае бесконечномерного пространства аналогичная теорема места не имеет. Таким образом, выбирая норму в конечномерном пространстве мы руководствуемся только удобством вычислений, а вот в бесконечномерном пространстве свойствами тех объектов, которые мы описываем.

1.1.4. Неравенства Гельдера и Минковского

Для расширения класса нормированных пространств нам понадобятся неравенства, имеющие самостоятельное значение.

Два вещественных числа p и q, такие что $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ называются *сопряженными*, если

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

если $p = 1$, то $q = +\infty$.

Лемма 1.1.4 (неравенство Юнга). *Пусть p и q — произвольные сопряженные вещественные числа большие 1. Тогда для любых $u, v > 0$ справедливо неравенство Юнга*

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

Лемма 1.1.5. *При любых значениях a и b имеет место неравенство*

$$|a+b|^p \leqslant 2^p\big(|a|^p + |b|^p\big), p \geqslant 1.$$

Теорема 1.1.4 (неравенство Гельдера). *Пусть $1 < p < \infty$ и q – число, сопряженное к нему. Тогда для любых функций $x(t)$ и $y(t)$, заданных на $[a, b]$, для которых существуют интегралы*

$$\int\limits_a^b |x(t)|^p \,\mathrm{d}t \ \textit{и} \ \int\limits_a^b |y(t)|^q \,\mathrm{d}t,$$

имеет место неравенство Гельдера

$$\int\limits_a^b |x(t)y(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_a^b |y(t)|^q \,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

Замечание 1.1.1. При $p = 1$ неравенство Гельдера принимает вид

$$\int\limits_a^b |x(t)y(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \sup_t |y(t)| \cdot \int\limits_a^b |x(t)| \,\mathrm{d}t$$

и вытекает из свойств интеграла.

Следствие 1.1.2. Пусть $p > 1$ и p и q таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть последовательности $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ таковы, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^q$ сходятся, тогда имеет место неравенство Гельдера

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\Big)^{1/q}.$$

Замечание 1.1.2. Если положить $p = q = 2$, то получим неравенство известное в математическом анализе как неравенство Коши – Буняковского.

Теорема 1.1.5 (неравенство Минковского). *Пусть* $p \geqslant 1$ *и пусть функции* $x(t), y(t)$ *таковы, что существуют и конечны интегралы* $\int\limits_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t$ *и* $\int\limits_a^b |y(t)|^q \, \mathrm{d}t$, *тогда справедливо неравенство Минковского*

$$\Big(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p \, \mathrm{d}t\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |y(t)|^p \, \mathrm{d}t\Big)^{1/p}.$$

Следствие 1.1.3. Пусть последовательности $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ таковы, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^p, p \geqslant 1$, сходятся, тогда справедливо неравенство Минковского

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Следствие 1.1.4. Пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций является нормированным векторным пространством относительно нормы

$$\|x\|_p = \Big(\int_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t\Big)^{1/p}.$$

Следствие 1.1.5. Пространство ℓ_p, $p \geqslant 1$, бесконечных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, является нормированным векторным пространством относительно нормы

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

1.1.5. Множества в нормированных пространствах

Рассмотрим важнейшие классы множеств класс в нормированном пространстве E: открытые и замкнутые множества.

Множество $B(x_0, r) = \{x \in E\colon \|x - x_0\| < r\}, r > 0$, называется *открытым шаром* с центром в точке x_0 радиуса r. Аналогично, множество $B[x_0, r] = \{x \in E\colon \|x - x_0\| \leqslant r\}, r > 0$, называется *замкнутым шаром* в пространстве E. Множество $S(x_0, r) = \{x \in E\colon \|x - x_0\| = r\}$ называется *сферой*. Очевидно, $B[x_0, r] = B(x_0, r) \bigcup S(x_0, r)$.

Посмотрим, как выглядят шары в конкретных нормированных пространствах.

Пример 21. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$, в котором заданы различные нормы. Тогда замкнутым шаром радиуса 1 с центром в начале координат является множество вида $B[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \|x\| \leqslant 1\}$. Если в $\mathbb{R}^2$ заданы соответственно кубическая, сферическая или октаэдрическая нормы, то

$$B_k[0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leqslant 1\}, \quad B_c[0, 1] = \{x,y) \in \mathbb{R}^2 : \\ |x|^2 + |y|^2 \leqslant 1\}, \quad B_0[0,1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}.$$

Пример 22. Рассмотрим пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций (в вещественном случае) с нормой $\|x\|_c = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|$.

Шар с центром в функции $x_0(t)$ радиуса r состоит из непрерывных функций, удовлетворяющих условию $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - x_0(t)| \leqslant r$. Построим предварительно графики функций $x_1(t) = x_0(t) - r$, $x_2(t) = x_0(t) + r$ и отрезки прямых $t = a$ и $t = b$. Полоса шириной $2r$ вокруг графика $x_0(t)$ служит шаром с центром в точке $x_0(t)$. В шаре $B(x_0,r)$ лежат те непрерывные функции, графики которых лежат строго между графиками функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Определение 1.1.9. Множество $A \subset E$ называется *открытым* в нормированном пространстве $(E,\| \cdot \|)$, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторый открытый шар $B(x_0, r)$ с центром в этой точке, т. е. для $\forall\, x_0 \in E, \exists\, r > 0$, что $B(x_0, r) \subset A$.

Определение 1.1.10. Множество $A \subset E$ называется *замкнутым* в E, если его дополнение $E \setminus A$ открыто в E.

Пример 23. Рассмотрим множество A в пространстве $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций вида $A = \{x(t) \in C[a, b];\ x(a) < 0\}$. Множество является открытым. Каждая функция $x(t)$ из множества A содержится в нем вместе с шаром радиуса $r_x = |x(a)|/2$.

Пример 24. На числовой прямой множество рациональных чисел не открыто и не замкнуто. Действительно, любой шар с центром в точке $x \in \mathbb{Q}$

(интервал), содержит иррациональные точки. Далее, $\mathbb{Q}$ не содержит ни одного открытого подмножества.

Определенное таким образом семейство открытых множеств обладает свойствами, которые можно описать следующим образом.

Утверждение 1.1.1. *Пусть* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, A_i \subset E$, *система открытых множеств, тогда множество* $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ *также открыто в* E.

Утверждение 1.1.2. *Пусть задана конечная система* $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ *открытых множеств* $A_i \subset E$, *тогда множество* $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ *так же открыто в* E.

Замечание 1.1.3. Утверждение справедливо лишь для конечного пересечения открытых множеств. Действительно, на числовой прямой одноточечное множество $\{0\} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$ не является открытым.

Все пространство E содержит все шары и, значит, удовлетворяет определению открытого множества. Пустое множество $\varnothing$ также будем считать открытым. Поскольку пустое множество и все E открыты и в тоже время служат дополнением друг к другу, то пустое множество и E замкнуты. Свойства замкнутых множеств описываются с помощью утверждения.

Утверждение 1.1.3. *Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством в нормированном пространстве* E.

Свойства открытых множеств в нормированном пространстве позволяют рассматривать его как топологическое пространство.

Определение 1.1.11. Множество X называется *топологическим пространством*, если в нем выделена система $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ подмножеств, называемых открытыми, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

- $\varnothing \in \tau, X \in \tau$;
- если $A_\alpha \in \tau$, то $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha \in \tau$;
- если $A_1, A_2 \in \tau$, то $A_1 \bigcap A_2 \in \tau$.

Семейство открытых множеств в нормированном пространстве порождает топологию, которая называется *естественной топологией.*

Простейшим примером открытого множества в нормированном пространстве является открытый шар.

Утверждение 1.1.4. *Открытый шар в пространстве* E *является открытым множеством.*

Упражнение 6. Показать, что множества $M_1 = \{x(t) \in C[a,b]\colon |x(t)| < k,\ t \in [a,b]\}$, $M_2 = \{x(t) \in C[a,b]\colon |x(t)| < \varphi(t)\}$, где $\varphi(t) \in C[a,b]$ и фиксирована, открыты в $C[a,b]$.

Структура открытых и замкнутых множеств в том или ином нормированном пространстве может быть весьма сложной. Однако на числовой прямой исчерпывающее описание всех открытых множеств (а следовательно, и всех замкнутых) не представляют труда. Оно дается следующей теоремой, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1.1.6. *Всякое открытое множество на числовой прямой представляет собой сумму конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов.*

Так как замкнутые множества – это дополнения открытых, то отсюда следует, что всякое замкнутое множество на прямой получается выбрасыванием из прямой конечного или счетного числа интервалов.

Определение 1.1.12. Множества $A \subset E$ называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Пример 25. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ будет связным, если любые две точки $x, y \in A$ могут быть соединены ломанной, целиком лежащей в A. Таким образом, внутренность круга – связное множество.

Определение 1.1.13. Множества $A \subset E$ называется *ограниченным*, если в пространстве E существует шар B сколь угодно большого, но конечного радиуса $r > 0$, что множество A содержится в этом шаре.

Определение 1.1.14. *Диаметром* множества $A \subset E$ называется число

$$d = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|.$$

Упражнение 7. Докажите, что множество ограничено тогда и только тогда, когда его диаметр конечен.

Определение 1.1.15. Множества $A \subset E$ называется *выпуклым*, если любые две точки x, y множества A содержатся в нем вместе с отрезком $[x,y] = \{\alpha x + (1-\alpha)y :\ \alpha \in [0,1]\}$, соединяющим эти точки.

Упражнение 8. Покажите, что шары $B[x_0, r]$ и $B(x_0, r)$ выпуклы. Будет ли $S(x_0,r)$ выпуклым множеством?

Упражнение 9. Пусть $A \subset E$ – выпуклое множество, а $x_0 \in E$ — фиксировано. Покажите, что $x_0 + A = \{x_0 + x, x \in A\}$ также выпуклое.

Упражнение 10. Пусть $A \subset E$ – выпуклое множество, $\alpha \in \mathbb{R}$. Будет ли множество что $\alpha A = \{y \in E : y = \alpha x, x \in A\}$ выпуклым?

Пример 26. Совокупность решений любой линейной системы неравенств вида

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \geqslant b_k, \quad (k = 1{,}2, \ldots)$$

образует выпуклое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество остается выпуклым, если знаки всех либо некоторых из неравенств заменить на знаки вида $>$ либо $=$.

Пример 27. В пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой выпуклыми множествами являются

- гиперплоскость: $\{x \in \mathbb{R}^n : \, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$;
- полупространство: $\{x \in \mathbb{R}^n : \, a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < b\}$.

Утверждение 1.1.5. *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Для произвольного множества $A \subset E$ существует наименьшее выпуклое множество, которое его содержит. Им является пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A. Заметим, что хотя бы одно выпуклое множество, содержащее A существует – это все пространство E. Минимальное выпуклое множество, содержащее A, называется *выпуклой оболочкой* множества A. Выпуклая оболочка множества A состоит из всевозможных конечных выпуклых линейных комбинаций вида

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Рассмотрим пример выпуклой оболочки.

Пример 28. Пусть E – векторное пространство, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ – точки в нем. Будем говорить, что точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ находятся в общем положении, если векторы $x_2 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1$ линейно независимы. Выпуклая оболочка точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, находящихся в общем положении, называется n-мерным *симплексом*, точки – его вершинами. Симплекс с вершинами в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ состоит из точек вида

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n+1),$$

т. е. является выпуклой оболочкой множества точек.

Выпуклые множества широко используются в задачах выпуклого программирования: вариационных задачах для выпуклых функций на выпуклых множествах.

1.1.6. Предельные точки, замыкание множества в нормированном пространстве

Пусть E – нормированное векторное пространство, $A \subset E$ – множество в нем. Точки пространства E могут быть по-разному расположены относительно множества A.

Определение 1.1.16. Точка $x_0 \in E$ называется *внутренней точкой* множества A, если существует шар $B(x_0, r) \subset E$ радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 такой, что $B(x_0, r) \subset A$.

Множество всех внутренних точек множества A называется его внутренностью и обозначается $intA$. Так, у множества рациональных точек внутренность пуста.

Упражнение 11. Докажите, что $intA$ – является наибольшим открытым множеством из всех, содержащихся в A.

Определение 1.1.17. Точка $x_0 \in E$ называется *внешней точкой* множества A, если существует существует шар $B(x_0, r) \subset E$ радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 такой, что $B(x_0, r) \cap A = \varnothing$, т. е. шар $B(x_0, r) \subset (E \setminus A)$.

Совокупность внешних точек множества A образует его внешность.

Упражнение 12. Докажите, что внешность множества является открытым множеством.

Таким образом, открытое множество – это множество, состоящее только из внутренних точек.

Определение 1.1.18. Точка $x_0 \in E$ называется *граничной точкой* множества A, если в любом шаре $B(x_0, r) \subset E$ есть точки, принадлежащие A, и точки, не принадлежащие A. *Границей* множества A называется множество ∂A его граничных точек.

Граничная точка A может принадлежать A, а может и не принадлежать. Поэтому возможно, что $\partial A \subset A$, что $\partial A \cap A = \varnothing$ или что $\partial A \cap A \neq \partial A$.

Определение 1.1.19. Точка $x_0 \in E$ называется *точкой прикосновения* множества A, если в любом шаре $B(x_0, r) \subset E$ радиуса $r > 0$ содержится хотя бы одна точка множества A.

Все точки множества A являются для него точками прикосновения.

Все точки прикосновения множества A подразделяются на изолированные и предельные точки.

Точка $x_0 \in A$ называется *изолированной точкой* множества A, если в достаточно малом шаре $B(x_0, r) \subset E$ с центром в точке x_0 нет точек из A, отличных от x_0.

Замкнутое множество без изолированных точек называется *совершенным*. Для совершенных множеств каждая точка множества является для него предельной. Примером совершенного множества может служить замкнутый шар $B[x_0, r]$ евклидова пространства.

Определение 1.1.20. Точка $x_0 \in E$ называется *предельной точкой* множества A, если в любом шаре $B(x_0, r) \subset E$ содержится бесконечно много точек из A.

Предельная точка может принадлежать, а может и не принадлежать множеству A. Например, если A – множество рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, то каждая точка этого отрезка – предельная для A.

Определение 1.1.21. Совокупность всех точек прикосновения множества A называется *замыканием* этого множества и обозначается символом $\overline{A}$.

Таким образом, мы определили для множества $A \subset E$ операцию замыкания – переход от множества A к его замыканию.

Упражнение 13. Доказать следующие свойства операции замыкания:

1) $A \subset \overline{A}$;

2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

3) если $A_1 \subset A_2$, то $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$;

4) $\overline{A_1 \bigcup A_2} = \overline{A_1} \bigcup \overline{A_2}$.

Упражнение 14. Что можно сказать о $\overline{A_1 \bigcap A_2}$ и $\overline{A_1} \bigcap \overline{A_2}$?

Пример 29. Замкнутый шар $B[x_0, r]$ является замыканием открытого шара $B(x_0, r)$ в нормированном пространстве.

Покажем, что $\overline{A}$ – это наименьшее замкнутое множество, содержащее множество A.

Теорема 1.1.7. *Пусть A – множество в нормированном векторном пространстве E. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) A – замкнутое множество;

2) $\overline{A} \subset A$, т. е. A содержит все свои точки прикосновения;

3) $\overline{A} = A$, т. е. A совпадает со своим замыканием.

Пример 30. Пусть множество $A = \{x(t) \in C[0, 1] \colon 0 < x(t) < 1\}$. Рассмотрим в пространстве $C[0, 1]$ норму $\|x\|_L = \int\limits_a^b |x(t)|\,\mathrm{d}t$. Тогда для всякой функции $x(t) \in A$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная функция $y(t)$, что $\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|\mathrm{d}t < \varepsilon$ и $y(t)$ принимает отрицательные значения для некоторых $t \in [0,1]$. (Построить такую функцию). Следовательно, A не является открытым. Оно не является и замкнутым, поскольку нулевая функция является точкой прикосновения для этого множества. Легко видеть, что его внутренность пуста и что его граница целиком содержит A. В противоположность этому множество A относительно нормы $\|x\|_C = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ является открытым (проверить это!).

Определим расстояние от точки $x_0 \in E$ до множества $A \subset E$ по формуле

$$\rho(x_0, A) = \inf_{x\in A} \|x_0 - x\|.$$

Теорема 1.1.8. *Точка $x_0 \in E$ является точкой прикосновения множества для $A \subset E$ тогда и только тогда, когда $\rho(x_0, A) = 0$.*

Упражнение 15. Привести пример двух замкнутых непересекающихся множеств, расстояние между которыми равно нулю.

Пусть A и B – два множества в нормированном пространстве E. Множество A называется *плотным* в B, если $\overline{A} \supset B$. В частности, множество A называется *всюду плотным* (в пространстве E), если его замыкание $\overline{A}$ совпадает со всем пространством E. Например, множество рациональных чисел всюду плотно на числовой прямой.

Плотные множества играют важную роль как в теории, так и в приложениях. В приложениях понятие плотности лежит в основе большинства численных методов и теории приближений.

Множество A называется *нигде не плотным*, если оно не плотно ни в одном шаре пространства E, т. е. в каждом шаре $B(x, \varepsilon) \subset E$ содержится другой шар $B_1(x_1, \varepsilon_1)$, не имеющий с A ни одной общей точки. Например, множество натуральных чисел нигде не плотно на числовой прямой. У нигде не плотного множества внутренность его замыкания пуста. А это в свою очередь означает, что $E \setminus \overline{A}$ всюду плотно в E.

Упражнение 16. Что можно сказать о дополнении к всюду плотному множеству?

Определение 1.1.22. Нормированное векторное пространство E называется *сепарабельным*, если в нем имеется счетное всюду плотное множество.

Пример 31. Пространство $C[0,1]$ всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[0,1]$ сепарабельно, так как совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами образует в нем счетное всюду плотное множество. Действительно, по теореме Вейерштрасса для любой функции $x(t) \in C[0,1]$ найдется многочлен $p(t) \in P[0,1]$ с рациональными коэффициентами, что $\|x(t) - p(t)\| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Значит, $p(t) \in B(x, \varepsilon)$, т. е. $x(t)$ является точкой прикосновения множества многочленов.

В пространстве $C[0,1]$ в качестве счетного всюду плотного множества можно взять также совокупность всех кусочно-линейных функций, графики которых представляют собой ломанные с вершинами в рациональных точках.

Упражнение 17. Докажите, что пространство $C^k[a,b]$ сепарабельно.

Пример 32. Пространство ℓ_1 бесконечных числовых последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$, для которой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$, сепарабельно. Счетным всюду плотным множеством в ℓ_1 является, например, множество s_0, элементами которого являются последовательности рациональных чисел с конечным числом членов, отличных от нуля. Действительно, из сходимости ряда вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Поэтому заменим в последовательности $(x_1, x_2, \ldots)$, определяющей элемент x, все члены, начиная с $(n+1)$–го, нулями, а каждое вещественное число x_i соответствующим рациональным числом q_i. Получим последовательность $(q_1, q_2, \ldots)$. Совокупность таких последовательностей и образуют счетное всюду плотное множество в ℓ_1. Построенные последовательности, у которых конечное число членов отличных от нуля, принято называть *финитными последовательностями.*

Не всякое нормированное пространство сепарабельно.

Пример 33. Остановимся на примере несепарабельного пространства.

Рассмотрим пространство m ограниченных числовых последовательностей с $\|x\|_m = \sup\limits_i |x_i|$ и в нем всевозможные последовательности, состоящие из нулей и единиц. Они образуют множество мощности континуума. Расстояние между двумя такими последовательностями как элементами пространства m равно 1. Окружим каждый такой элемент открытым шаром радиуса $1/2$. Эти шары не пересекаются. Если в m существует всюду плотное множество, то каждый из построенных шаров должен содержать хотя бы по одной точке из этого множества, и, следовательно, оно не может быть счетным.

1.1.7. Предел последовательности в нормированном векторном пространстве

Рассмотрим в нормированном пространстве E последовательность элементов $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$.

Определение 1.1.23. Последовательность $(x^{(n)}) \subset E$, называется *сходящейся*, если существует такой элемент $a \in E$, что $\|x^{(n)} - a\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что для $n \geqslant n(\varepsilon)$

$$\|x^{(n)} - a\| < \varepsilon.$$

Если a есть предел последовательности $(x^{(n)})$, то будем писать $a = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$ или $x^{(n)} \to a$ при $n \to \infty$.

Назовем *окрестностью* $O_\varepsilon(a)$ точки $a \in E$ любой открытый шар с центром в этой точке радиуса ε. Тогда можно по-другому сформулировать определение сходящейся последовательности: последовательность $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ сходится к a, если каждая окрестность $O_\varepsilon(a)$ точки a содержит все элементы $x^{(n)}$ последовательности $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, начиная с некоторого номера $n(\varepsilon)$.

Из определения предела вытекают следующие свойства:

Свойство 1.1.1. В нормированном пространстве сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Свойство 1.1.2. Если последовательность $x^{(n)}$ сходится к a в E, то любая ее подпоследовательность сходится также к a.

Свойство 1.1.3. Сходящаяся в нормированном пространстве последовательность ограничена.

Замечание 1.1.4. Существуют ограниченные последовательности, которые не сходятся.

Например, в пространстве ℓ_2 с нормой $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$, последовательность $e^{(n)} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$ ограничена, причем $\|e^{(n)} - e^{(m)}\| = \sqrt{2}$ для всех $n \neq m$, но никакая ее подпоследовательность не сходится.

Свойство 1.1.4. Если $x^{(n)} \to a, \lambda_n \to \lambda$ при $n \to \infty$, где (λ_n) – числовая последовательность, то $\lambda_n x^{(n)} \to \lambda x$ при $n \to \infty$.

Свойство 1.1.5. Пусть $x^{(n)} \to a, y^{(n)} \to b$ при $n \to \infty$ в пространстве E, тогда $x^{(n)} + y^{(n)} \to a + b$.

Свойство 1.1.6. Если последовательность $(x^{(n)})$ сходится в E к элементу a, то числовая последовательность $(\|x^{(n)}\|)$ сходится в $\mathbb{R}$ к элементу $\|a\|$.

Общее понятие сходящейся последовательности в нормированном пространстве в конкретных случаях может иметь весьма различный вид, поэтому рассмотрим вид сходимости в каждом конкретном пространстве.

Пример 34. **Пространство** $C[a, b]$.

Пусть $(x^{(n)}) \subset C[a,b]$ и $x^{(n)} \to x$ при $n \to \infty$. Это означает, что для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(n)}(t) - x(t)| < \varepsilon$. Данный тип сходимости известен в математическом анализе как равномерная сходимость.

В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим последовательность функций $x^{(n)}(t) = t^n - t^{2n}$, которая в каждой точке $t \in [0, 1]$ сходится к нулю. Однако равномерно к нулю не сходится. Действительно,

$$\|t^n - t^{2n}\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t^n - t^{2n}| = |t^n - t^{2n}|_{t = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}} = \frac{1}{4} \not\to 0.$$

Пример 35. **Пространство** $\mathscr{L}_p\,[a,b]$, $p \geqslant 1$.

Условие $\|x^{(n)} - x\| \to 0$ при $n \to \infty$ означает, что

$$\Big(\int\limits_a^b |x^{(n)}(t) - x(t)|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Этот тип сходимости в пространстве непрерывных функций $\mathscr{L}_p\,[a,b]$ называется *сходимостью в среднем со степенью* p.

Последовательность $x^{(n)}(t) = n^2te^{-nt}(n \in \mathbb{N})$ сходится поточечно к функции $a(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0,1)$, но не сходится в пространстве $\mathscr{L}_1[0,1]$. Действительно, вычислим:

$$\|x^{(n)} - a\| = \int\limits_0^1 |x^{(n)}(t) - a(t)|\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 n^2te^{-nt}\mathrm{d}t = [nt = z] = \int\limits_0^n ze^{-z}\mathrm{d}z =$$

$$= 1 - ne^{-n} - e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Значит, последовательность $x^{(n)}(t)$ не сходится по норме пространства $\mathscr{L}_1[0{,}1]$, т. е. в среднем.

Упражнение 18. Приведите пример последовательности, сходящейся в среднем, но не сходящейся равномерно.

Пример 36. **Пространство** ℓ_p, $p \geqslant 1$.

Рассмотрим последовательность $(x^{(n)}) \subset \ell_p$, которая сходится к элементу $x \in \ell_p$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^p\Big)^{1/p} < \varepsilon.$$

Тогда для каждого слагаемого получаем $|x_i^{(n)} - x_i| < \varepsilon$, откуда следует, что для любого i $x_i^{(n)} \to x_i$ при $n \to \infty$. Таким образом, из сходимости по норме пространства ℓ_p, $p \geqslant 1$, вытекает покоординатная сходимость.

Упражнение 19. Привести пример последовательности $(x^{(n)}) \subset \ell_1$, покоординатно сходящейся, но не сходящейся в пространстве ℓ_1.

В нормированном векторном пространстве нормы можно определить по-разному. На что влияет выбор нормы?

Лемма 1.1.6. *Если последовательность $(x^{(n)}) \subset E$ сходится в пространстве E к элементу $x \in E$, то она сходится к этому же пределу и по любой другой эквивалентной норме.*

Однако выбор нормы может повлиять на скорость сходимости.

Пример 37. В пространстве ограниченных на отрезке $[0, 1]$ функций можно рассмотреть две эквивалентные нормы $\|x\|_1 = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ и $\|x\|_2 = \sup\limits_{t\in[0,1]} |e^{-\alpha t}x(t)|$, где $\alpha > 0$ – фиксировано. Действительно,

$$e^{-\alpha} \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |e^{-\alpha t}x(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|.$$

Для ускорения процесса сходимости при использовании приближенных методов целесообразно использовать норму вторую.

Следующая теорема устанавливает тесную связь между понятиями точки прикосновения и предела.

Теорема 1.1.9. *Для того, чтобы точка $x \in E$ была точкой прикосновения множества $A \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $(x^{(n)})$ точек из A, сходящаяся к x.*

Если $x \in E$ – предельная точка множества $A \subset E$, то соответствующие точки $x^{(n)} \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$, отвечающие разным n можно выбрать попарно различными. Таким образом, справедлива

Теорема 1.1.10. *Для того, чтобы точка x была предельной точкой для A, необходимо и достаточно, чтобы в A существовала последовательность попарно различных точек, сходящаяся к x.*

Из теорем 1.1.9 и 1.1.10 вытекают следующие важные следствия.

Следствие 1.1.6. Множество $A \subset E$ замкнуто в E, в том и только том случае, когда каждая сходящаяся из A последовательность своим пределом имеет элемент множества A.

Следствие 1.1.7. Множество $A \subset E$ всюду плотно в E тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in E$ найдется последовательность $(x^{(n)}) \subset A$ такая, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$.

1.1.8. Аппроксимация в нормированных пространствах

Очень часто приходится в математике решать задачу о приближенном представлении заданной функции некоторыми функциями специального вида. Возникает вопрос: всегда ли возможно такое приближение? Сначала определим, что мы будем понимать под приближением. Рассмотрим подпространство L пространства E и определим для $x \in E$ расстояние до L по формуле

$$\rho(x, L) = \inf_{\ell\in L} \|x - \ell\|.$$

Число $\rho(x, L)$ характеризует наилучшее приближение (наилучшую аппроксимацию) элемента x элементами подпространства L.

Определение 1.1.24. Если существует элемент $y \in L$ такой, что $\rho(x, L) = \|x-y\|$, то y называется *наилучшим элементом приближения* x элементами подпространства L или *элементом наилучшей аппроксимации.*

Наилучший элемент может оказаться не единственным, а может и не существовать вовсе. Оказывается, в одном из наиболее важных практически случаев, когда L конечномерно вопрос решается положительно.

Теорема 1.1.11 (о существовании аппроксимации). *Пусть L – конечномерное подпространство нормированного пространства E. Для любого элемента $x \in E$ существует (возможно, не единственный) элемент $y \in L$, что*

$$\rho(x, L) = \|x - y\|.$$

Приведем пример, показывающий, что элемент наилучшей аппроксимации может оказаться не единственным даже в конечномерном нормированном пространстве.

Пример 38. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ возьмем точку $x_0(1, -1)$ и одномерное подпространство L, порожденное элементом $e(1, 1)$, т. е. $L = \{l = \alpha e : \ \alpha \in \mathbb{R}, \, e(1, 1)\}$. Вычислим расстояние

$$\rho(x_0, L) = \inf_{l \in L} \|x_0 - l\| = \inf_{\alpha \in R} (|1 - \alpha| + |1 + \alpha|) = 2.$$

Очевидно, что точная нижняя грань достигается при любых $\alpha \in [-1, 1]$. Следовательно, имеется бесконечное множество элементов наилучшей аппроксимации вида $y = \alpha e$, $\alpha \in [-1, 1]$, приближающих $x_0(1, -1)$ с помощью элементов подпространства $L \subset \mathbb{R}^2$.

Таким образом, даже в случае конечномерного пространства не гарантировано существование единственного элемента наилучшей аппроксимации. Рассмотрим один из случаев, когда такой элемент единственный.

Определение 1.1.25. Нормированное векторное пространство E будем называть *строго нормированным*, если в нем равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно только при $y = \lambda x$, где $\lambda > 0$.

Теорема 1.1.12 (о единственности аппроксимации). *В строго нормированном пространстве E для каждого $x \in E$ и каждого подпространства $L \subset E$ может существовать не более одного элемента наилучшей аппроксимации x элементами L.*

Упражнение 20. Докажите, что $C[a, b]$ не является строго нормированным пространством.

К вопросу об элементе наилучшей аппроксимации мы вернемся при рассмотрении гильбертовых пространств.

1.1.9. Банаховы пространства

При изучении математического анализа мы видели, сколь важную роль играет в анализе свойство полноты числовой прямой, она вся сплошь заполнена вещественными числами. Условие полноты прямой выражается с помощью известного критерия Коши. Эта же идея лежит в основе понятия полноты нормированного пространства.

Определение 1.1.26. Последовательность $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ точек нормированного пространства E называют *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если $\lim \|x^{(n)} - x^{(m)}|_E = 0$ при $m, n \to \infty$.

Остановимся на свойствах последовательностей Коши.

Свойство 1.1.7. Всякая фундаментальная последовательность ограничена.

Свойство 1.1.8. Пусть последовательность $(x^{(n)}) \subset E$ фундаментальна и $\lambda \in P$, тогда $(\lambda x^{(n)}) \subset E$ также фундаментальна.

Свойство 1.1.9. Пусть $(x^{(n)}), (y^{(n)}) \subset E$ – фундаментальные последовательности, тогда последовательность $(x^{(n)} \pm y^{(n)})$ также фундаментальна.

Свойство 1.1.10. Если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к x, то сама последовательность сходится к x.

Упражнение 21. Докажите свойство 1.1.10.

Свойство 1.1.11. Если последовательность $(x^{(n)}) \subset E$ фундаментальна, тогда числовая последовательность $(\|x^{(n)}\|) \in \mathbb{R}$ также фундаментальна.

Лемма 1.1.7. *Всякая сходящаяся в нормированном векторном пространстве E подпоследовательность является фундаментальной.*

Обратное, как будет показано ниже, выполняется не всегда. Тем не менее очень важным является случай, когда это так. Рассмотрим одно из свойств фундаментальной последовательности, которое часто используется при доказательствах.

Лемма 1.1.8. *Пусть $(x^{(n)}) \subset E$ – фундаментальная последовательность в нормированном пространстве E, (ε_n) – бесконечно малая числовая последовательность, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда найдется такая подпоследовательность $(x^{(n_k)}) \subset (x^{(n)})$, что*

$$\|x^{(n_i)} - x^{(n_{i+1})}\| < \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

О п р е д е л е н и е 1.1.27. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

Приведем примеры банаховых пространств.

П р и м е р 39. **Пространство** $C[a,b]$.

Пусть $(x^{(n)}(t))$ – фундаментальная последовательность непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. По определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для $n,m \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| < \varepsilon$. Зафиксируем t, тогда для $n,m \geqslant N(\varepsilon)$ $\quad |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| < \varepsilon$. Это означает, что числовая последовательность $(x^{(n)}(t))$ является последовательностью Коши и в силу полноты $\mathbb{R}$ будет сходится к некоторому пределу. Обозначим через $x_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}(t)$. Таким образом, функция $x_0(t)$ – это та функция, к которой последовательность $x^{(n)}(t)$ сходится поточечно. Докажем, что $x_0(t)$ непрерывна и что $x^{(n)} \to x_0$ равномерно (т. е. по норме пространства $C[a,b]$). В неравенстве, записанном выше, перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получаем, что для $n \geqslant N(\varepsilon)$ $\quad \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x^{(n)}(t) - x_0(t)| \leqslant \varepsilon$, т. е. $x^{(n)}(t)$ сходится к $x_0(t)$ равномерно. Пусть $t_0 \in [a,b]$. По $\varepsilon > 0$ выберем n_1 так, чтобы было выполнено неравенство $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x^{(n_1)}(t) - x_0(t)| \leqslant \varepsilon/3$ и выберем $\delta > 0$ то, для которого из $|t - t_0| \leqslant \delta$ следует $|x^{(n_1)}(t) - x^{(n_1)}(t_0)| \leqslant \varepsilon/3$. Тогда для t таких, что $|t - t_0| < \delta$ справедливо неравенство

$$|x_0(t) - x_0(t_0)| \leqslant |x_0(t) - x^{(n_1)}(t)| + |x^{(n_1)}(t) - x^{(n_1)}(t_0)| + |x^{(n_1)}(t_0) - x_0(t_0)| \leqslant \varepsilon,$$

что и означает непрерывность функции x_0 в точке t_0.

П р и м е р 40. **Пространство** ℓ_1.

Покажем, что пространство ℓ_1 – банахово. Пусть $(x^{(n)}) \subset \ell_1$ – фундаментальная последовательность в ℓ_1. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon, \quad n,m \geqslant N(\varepsilon). \tag{1.1.6}$$

Из этого неравенства следует, что при любом i $|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$, т. е. при каждом i последовательность действительных чисел $(x_i^{(n)})$ фундаментальна и поэтому сходится. Положим $x_i = \lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)}$. Обозначим через x последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$. Нужно показать, что:

1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$, т. е. $x \in \ell_1$;

2) $\|x^{(n)}-x\|=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i^{(n)}-x_i|\to 0$ при $n\to\infty$.

Из неравенства (1.1.6) следует, что для любого фиксированного M

$$\sum_{i=1}^{M}|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|<\varepsilon.$$

В этой сумме теперь только конечное число слагаемых, и мы можем, зафиксировав n, перейти к пределу при $m\to\infty$. Получим неравенство $\sum\limits_{i=1}^{M}|x_i^{(n)}-x_i|<\varepsilon$, которое верно при любом M. Перейдем к пределу при $M\to\infty$, получим $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i^{(n)}-x_i|\leqslant\varepsilon$. Из сходимости рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i^{(n)}|$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i^{(n)}-x_i|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|$.

Пример 41. Рассмотрим пример неполного нормированного пространства.

Покажем, что пространство $\mathscr{L}_2[-1,1]$ непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций не является полным относительно нормы $\|x\|=\left(\int\limits_{-1}^{1}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$.

Рассмотрим последовательность непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $(x^{(n)}(t))_{n=1}^{\infty}$, которая задается следующим образом:

$$x^{(n)}(t)=\begin{cases}-1, & t\in[-1,-1/n),\\ nt, & t\in[-1/n,1/n],\\ 1, & t\in(1/n,1].\end{cases}$$

Видно, что $|x^{(n)}(t)|\leqslant 1$ для любых n, но тогда $|x^{(n)}(t)-x^{(m)}(t)|\leqslant 2$ и, следовательно,

$$||x^{(n)}-x_m||^2=\int\limits_{-1}^{1}|x^{(n)}(t)-x^{(m)}(t)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant 4\int\limits_{-1/n}^{1/n}\mathrm{d}t==\frac{8}{n}\to 0$$

при $n\to\infty$ $(m<n)$.

Заметим, что в каждой точке $t\in[-1,1]$ при $n\to\infty$ последовательность $x^{(n)}(t)$ имеет предел

$$x_0(t)=\begin{cases}-1, & t\in[-1,0),\\ 0, & t=0,\\ 1, & t\in(0,1],\end{cases}$$

при этом $|x_0(t)|<1$ и $|x^{(n)}(t)-x_0(t)|\leqslant 2$. Но тогда $\|x^{(n)}-x_0\|^2\leqslant\dfrac{8}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом, при $n\to\infty$ $x^{(n)}(t)\to x_0(t)$ в среднем, причем $x_0(t)$ разрывная функция, т. е. $x_0(t)\notin\mathscr{L}_2[-1,1]$. Предположим, что существует непрерывная функция $y_0(t)$, к которой сходится $x^{(n)}(t)$. Запишем неравенство для интегралов

$$\int_{-1}^{1} |x_0(t)-y_0(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{1} |x^{(n)}-x_0|^2\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} |x^{(n)}-y_0|^2\,\mathrm{d}t.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем $\int_{-1}^{1} |x_0(t)-y_0(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0$, и, значит, $y_0(t)$ почти всюду совпадает с $x_0(t)$.

Упражнение 22. Доказать полноту пространства ℓ_p при $p>1$.

Свойство полноты пространства $\mathbb{R}$ используется в подавляющем большинстве теорем математического анализа. Выделение класса полных пространств позволяет доказать ряд теорем, не имеющих места в обычных нормированных пространствах.

Теорема 1.1.13 (принцип вложенных шаров). *Для того, что бы нормированное пространство E было банаховым необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела единственную общую точку.*

Теорема 1.1.14. *В банаховом пространстве E всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых множеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет общую точку.*

Рассмотрим еще одну характеристику банаховых пространств.

Определение 1.1.28. Множество M в нормированном пространстве E называется *множеством I категории*, если оно является объединением счетного числа нигде не плотных множеств.

Если M нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств, то M называется *множеством II категории.* Например, множество рациональных чисел является на числовой прямой множеством первой категории.

В банаховом пространстве множество, дополнительное к множеству I категории, является множеством II категории. Так, иррациональные числа на $\mathbb{R}$ образуют множество II категории.

Упражнение 23. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $C[a,b]$ образует множество I категории.

Теорема 1.1.15 (Бэра о категориях). *Всякое банахово пространство является множеством II категории.*

Замечание 1.1.5. Всякое полное метрическое пространство без изолированных точек не счетно, ибо в таком пространстве каждое множество, содержащее лишь одну точку, нигде не плотно.

Можно дать и другую формулировку теоремы Бэра.

Теорема 1.1.16. *Пусть E – банахово пространство. (F_n) – последовательность замкнутых множеств в E и $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Тогда хотя бы одно из множеств F_n содержит открытый шар.*

1.1.10. Ряды в банаховых пространствах

Рассмотрим одну из характеристик банаховых пространств, которая выделяет их из класса нормированных векторных пространств.

Пусть E — нормированное пространство. Рассмотрим в E ряд по аналогии с числовым рядом, составленный из элементов нормированного векторного пространства E.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad x_k \in E \ (k = 1{,}2, \ldots). \tag{1.1.7}$$

Определение 1.1.29. Ряд (1.1.7) называется *сходящимся*, если последовательность его частных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ в пространстве E имеет предел. Элемент $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой ряда* и обозначается $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

Теорема 1.1.17. *Если ряд* (1.1.7) *сходится, то его общий член x_k стремится к нулю при $k \to \infty$.*

Упражнение 24. Докажите теорему 1.1.17.

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ – сходящиеся ряды, тогда будут сходится ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha x_k$, $\alpha \in P$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k \pm y_k)$, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha x_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (x_k \pm y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Приведем критерий Коши сходимости ряда в нормированном пространстве.

Теорема 1.1.18. *Пусть E – нормированное пространство. Для того, чтобы ряд* (1.1.7) *сходился, необходимо, а если E банахово, то и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и для всех $p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство*

$$\Big\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \Big\| \leqslant \varepsilon.$$

Определение 1.1.30. Если сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ *сходится абсолютно.*

Из математического анализа известно, что всякий абсолютно сходящийся числовой ряд сходится. В нормированных пространствах справедливо следующее утверждение

Теорема 1.1.19. *Нормированное векторное пространство является банаховым тогда и только тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.*

По аналогии с числовыми рядами сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд, называют *условно сходящимся.*

1.1.11. Пополнение нормированных векторных пространств

Рассмотрим процесс пополнения произвольного неполного нормированного пространства. Этот процесс аналогичен пополнению множества рациональных чисел до множества вещественных чисел классами эквивалентных фундаментальных последовательностей.

Определение 1.1.31. Банахово (полное)пространство $\hat{E}$ называется *пополнением* нормированного пространства E, если в $\hat{E}$ существует подпространство E', которое изоморфно пространству E и плотно в пространстве $\hat{E}$

Плотность E' в $\hat{E}$ означает, что для $\forall\hat{x}\in\hat{E}$ выполняется условие

$$\forall\hat{x}\in\hat{E}\;\;\exists x'\in E'\;\;\|\hat{x}-x'\|<\varepsilon.$$

Теорема 1.1.20 (о пополнении). *Для нормированного векторного пространства E существует пополнение*

Замечание 1.1.6. Пополнение нормированного пространства единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из E.

1.1.12. Пространство $L_p[a,b], p\geqslant 1$

Рассматривая пространство $\mathscr{L}_p[a,b]$, $p\geqslant 1$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, мы убедились, что оно не является банаховым относительно нормы $\|x\|_p=\left(\int\limits_a^b|x(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$. Согласно теореме о пополнении его можно пополнить. Рассмотрим его пополнение — пространство $L_p[a,b]$, которое назовем *пространством суммируемых со степенью p функций.*

Пусть $(x^{(n)})$ и $(y^{(n)})$ – последовательности непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. Будем называть их *эквивалентными в среднем со степенью p*, если

$$\|x^{(n)}-y^{(n)}\|^p=\int\limits_a^b|x^{(n)}(t)-y^{(n)}(t)|^p\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Далее, последовательность $(x^{(n)})$ непрерывных на $[a,b]$ функций будем называть *фундаментальной в среднем со степенью* p, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n,m>N(\varepsilon)$

$$\|x^{(n)}-x^{(m)}\|^p=\int\limits_a^b|x^{(n)}(t)-x^{(m)}(t)|^p\,\mathrm{d}t<\varepsilon^p.$$

Согласно теореме о пополнении пространство суммируемых со степенью p функций $L_p[a,b]$ состоит из элементов, являющихся классами эквивалентных в среднем со степенью p и фундаментальных в среднем со степенью p непрерывных функций. Определим норму в $L_p[a,b]$ как

$$\|x\|_{L_p[a,b]}=\lim_{n\to\infty}\|x^{(n)}\|_{\mathscr{L}_p[a,b]}=\lim_{n\to\infty}\Big(\int\limits_a^b|x^{(n)}(t)|^p\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}.$$

Функции $x(t)\in L_p[a,b]$ можно рассматривать как функции, приблизиться к которым практически всегда возможно с помощью непрерывных функций. Будем называть интегралом Лебега от функции $|x(t)|^p$ выражение

$$\int\limits_a^b|x(t)|^p\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b|x^{(n)}(t)|^p\,\mathrm{d}t.$$

Определение 1.1.32. *Пространством* $L_p[a,b], p\geqslant 1$, называется банахово пространство, элементами которого являются классы эквивалентных в среднем и фундаментальных в среднем со степенью p непрерывных функций с нормой

$$\|x\|_p=\Big(\int\limits_a^b|x(t)|^p\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}. \tag{1.1.8}$$

Заметим, что по теореме о пополнении каждая непрерывная функция принадлежит пространству $L_p[a,b]$, т. е каждая непрерывная функция суммируема (интегрируема по Лебегу), интеграл Лебега от нее совпадает с интегралом Римана.

Приведем примеры суммируемых функций.

Пример 42. Рассмотрим функцию $x(t)=\operatorname{sign}t, t\in[-1,1]$. Покажем, что $\operatorname{sign}t\in L_1[-1,1]$. Функция $\operatorname{sign}t$ разрывна в точке $t=0$ и имеет разрыв первого рода. Построим $x^{(n)}(t))_{n=1}^\infty$,

$$x^{(n)}(t)=\begin{cases}-1, & t\in[-1,-1/n),\\ nt, & t\in[-1/n,1/n],\\ 1, & t\in(1/n,1],\end{cases}$$

которая фундаментальна в среднем (покажите). Класс, содержащий своим представителем $x^{(n)}(t)$, можно отождествить с разрывной функцией $x(t) = \operatorname{sign} t$, $\|x(t)\| = \|\operatorname{sign} t\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^{(n)}\| = 2$.

Аналогично, можно показать, что любая непрерывная на отрезке функция, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, суммируема.

Пример 43. Покажем, что функция $x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \in L_1[0,1]$. Построим последовательность

$$x^{(n)}(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & t \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| = \int\limits_0^1 |x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)| \, \mathrm{d}t < \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, функция $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ суммируемая и интеграл Лебега от нее

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t = \lim \int\limits_0^1 x^{(n)}(t) \, \mathrm{d}t = 2.$$

Объединяя примеры 42 и 43, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1.1.21. *Пусть функция $x(t)$ определена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нем конечное число точек разрыва, причем сходится абсолютно интеграл Римана (собственный или несобственный) от функции $|x(t)|^p$. Тогда существует фундаментальная в среднем со степенью p последовательность непрерывных функций $(x^{(n)}(t))$ такая, что $\int\limits_a^b |x^{(n)}(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t \to 0, \quad n \to \infty$, и $x(t)$ принадлежит пространству $L_p[a, b]$.*

Определение 1.1.33. Множество $A \subset [a, b]$ называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная либо счетная система интервалов $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ такая, что

1) множество A покрывается этой системой, т. е. $A \subset \bigcup\limits_n (\alpha_n, \beta_n)$;
2) сумма дли интервалов (α_n, β_n) меньше ε, т. е. $\sum\limits_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$.

Упражнение 25. Докажите, что множество рациональных чисел на отрезке $[a, b]$ является множеством меры нуль.

Если какое-либо утверждение справедливо для всех точек отрезка $[a, b]$, за исключением точек множества меры нуль, то будем говорить, что оно справедливо почти всюду.

Определение 1.1.34. Две функции $x(t)$ и $y(t)$ называются *эквивалентными*, если они равны почти всюду.

Пример 44. На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим функцию Дирихле $D(t) = 1$, если $t \in \mathbb{Q}$ и $D(t) = 0$, если $t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Очевидно, что функция Дирихле эквивалентна функции $x(t) \equiv 0$. Эквивалентные функции лежат в одном классе, поэтому интегралы Лебега от них совпадают. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 D(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 x(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Сходимость в пространстве $L_p[a, b]$ называется *сходимостью в среднем со степенью p*. Наряду со сходимостью в среднем в пространстве $L_p[a, b]$ можно рассматривать сходимость почти всюду. Будем говорить, что последовательность $x^{(n)}(t)$ *сходится почти всюду*, если она сходится в каждой точке, за исключением точек множества меры нуль. Заметим, если последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $(x^{(n)}(t))$ в среднем сходится к нулю, то существует подпоследовательность $(x^{(n_k)}(t))$, которая сходится к нулю почти всюду.

Упражнение 26. Привести пример последовательности непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $(x^{(n)}(t))$, которая в среднем сходится к нулю, но расходится в каждой точке.

Рассмотрим всюду плотные множества в пространствах $L_p[a, b]$. Согласно теореме о пополнении множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций всюду плотно в пространстве $L_p[a, b]$, $p \geqslant 1$.

В дальнейшем мы укажем способ построения непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, аппроксимирующих суммируемые функции.

Заметим, что если последовательность непрерывных функций сходится равномерно, то она сходится и по норме пространств $L_p[a, b]$. Поскольку любую непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать последовательностью многочленов с рациональными коэффициентами, то справедлива аппроксимация в среднем. А это означает, что имеет место

Теорема 1.1.22. *Пространство $L_p[a, b]$, $p \geqslant 1$, сепарабельно.*

Отметим некоторые свойства функций, принадлежащих пространству $L_p[a, b]$.

Определение 1.1.35. Функция $x(t)$, принадлежащая пространству $L_p[a, b]$ (и продолженная нулем вне $[a, b]$), называется *непрерывной в среднем со степенью p* или в норме $L_p[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\|x(t+s)-x(t)\|^p = \int\limits_a^b |x(t+s)-x(t)|^p \, \mathrm{d}t < \varepsilon^p$$

для всех s таких, что $|s| < \delta$.

Теорема 1.1.23. *Любая функция из $L_p[a,b]$ непрерывна в среднем со степенью p.*

Мы показали, что каждую суммируемую функцию можно аппроксимировать непрерывной. Покажем, как можно построить такую непрерывную функцию.

На $(-\infty,\infty)$ рассмотрим функцию

$$\omega(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\, e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1; \\ 0, & |t| \geqslant 1, \end{cases}$$

где константа c выбрана так, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Отметим некоторые свойства функции $\omega(t)$. Функция $\omega(t)$ четная, неотрицательная и бесконечно дифференцируема на $(-\infty,\infty)$.

Рассмотрим функцию $\omega_h(t) = \frac{1}{h}\omega\left(\frac{t}{h}\right)$, которую назовем *ядром усреднения (радиуса $h > 0$)*. Функция $\omega_h(t)$ также четная, неотрицательная, бесконечно дифференцируемая на $(-\infty,\infty)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t)\,\mathrm{d}t = 1$, кроме того $\omega_h(t) = 0$, если $|t| \geqslant h$.

Пусть функция $x(t) \in L_p[a,b]$. Рассмотрим при $h > 0$ функцию

$$x_h(t) = \int\limits_a^b \omega_h(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (-\infty,\infty). \tag{1.1.9}$$

Функции $x_h(t)$, $h > 0$, называются *средними по Стеклову функциями* для функции $x(t)$.

Пользуясь свойствами ядра усреднения и теоремой о дифференцирования интеграла Лебега по параметру, можно доказать следующие свойства средних функций:

1) $x_h(t) = 0$ вне отрезка $[a-h, b+h]$;
2) $x_h(t)$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty,\infty)$.

Теорема 1.1.24. *Если $x(t) \in L_p[a,b]$, то средние по Стеклову $x_h(t)$ являются непрерывными функциями и*

$$\|x - x_h\|_{L_p[a,b]} \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

Определение 1.1.36. Функция $x(t)$ называется *финитной* на отрезке $[a,b]$, если существует такой отрезок $[a',b']$ строго внутренний по отношению к $[a,b]$, что $x(t)=0$ в $[a,b]\setminus[a',b']$.

Множество всех финитных k-раз непрерывно дифференцируемых функций обозначим через $\mathring{C}^k[a,b]$, а пересечение всех этих множеств $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}\mathring{C}^k[a,b]$ – через $\mathring{C}^\infty[a,b]$.

Теорема 1.1.25. *Множество $\mathring{C}^\infty[a,b]$ является всюду плотным в пространстве $L_p[a,b]$.*

Так как при любом $k\geqslant 0$ справедливо $\mathring{C}^\infty[a,b]\subset\mathring{C}^k[a,b]\subset L_p[a,b]$, то $\mathring{C}^k[a,b]$ при любом $k\geqslant 0$ всюду плотны в $L_p[a,b]$.

1.1.13. Непрерывные отображения нормированных пространств

Пусть E и F – два нормированных пространства. Если задано правило f, по которому каждой точке $x\in E$ ставится в соответствие точка $y=f(x)\in F$, то говорят, что задано *отображение* E в F,

$$f:E\to F.$$

Точка $y\in F$ называется *образом* точки $x\in E$ при отображении f, а точка x, соответственно, *прообразом* точки y при отображении f.

Для любого множества $A\subset E$ множество

$$f(A)=\{y\in F:\ \exists x\in A,\ f(x)=y\}$$

называется *образом множества* A. Для любого множества $B\subset F$ множество

$$f^{-1}(B)=\{x\in E:\ \exists y\in B,\ f(x)=y\}$$

называется *прообразом множества* B.

Определение 1.1.37. Отображение $f:E\to F$ называется *непрерывным в точке* $x_0\in E$, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех $x\in E$ таких, что $\|x-x_0\|_E<\delta$ выполнено неравенство $\|f(x)-f(x_0)\|_F<\varepsilon$. Если отображение f непрерывно во всех точках пространства E, то говорят, что f *непрерывно на* E.

Определение непрерывного отображения можно сформулировать и в терминах окрестностей. Отображение f называется *непрерывным в точке* $x_0\in E$, если для любой окрестности W_{y_0} точки $y_0=f(x_0)$ найдется такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что $f(V_{x_0})\subset W_{y_0}$.

Теорема 1.1.26 (о непрерывном отображении). *Пусть E и F - нормированные векторные пространства и $f : E \to F$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *f непрерывно в каждой точке $x \in E$;*
2) *прообраз открытого множества в F открыт в E;*
3) *прообраз замкнутого множества в F замкнут в E;*
4) *для любого множества $M \subset E$ справедливо $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.*

Легко убедиться, что образ открытого (замкнутого) множества при непрерывном отображении не обязательно открыт (замкнут). Например, рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Множество $(-1, 1)$ при этом отображении переходит в множество $[0, 1)$.

Отображение называется *открытым*, если оно переводит каждое открытое множество снова в открытое. Отображение, переводящее каждое замкнутое множество в замкнутое, называется *замкнутым.*

Для непрерывных отображений справедлива следующая теорема, аналогичная хорошо известной из анализа теореме о непрерывности сложной функции.

Теорема 1.1.27. *Пусть E, F, W – нормированные пространства и пусть f и g непрерывные отображения E в F и F в W соответственно. Тогда отображение $x \to g(f(x))$ пространства E в W непрерывно.*

Определение 1.1.38. Отображение $f : E \to F$ называется *равномерно-непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $x, y \in E$ таких, что $\|x - y\| < \delta$ выполняется $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Очевидно, что всякое равномерно непрерывное отображение является непрерывным.

Упражнение 27. Привести пример непрерывного отображения, не являющегося равномерно непрерывным.

Если отображение f удовлетворяет условию: существует постоянная $L > 0$, что $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant L\|x - y\|_E$ для всех $x, y \in E$, то говорят, что отображение f *удовлетворяет условию Липшица.*

Отображение, удовлетворяющее условию Липшица, непрерывно и равномерно непрерывно.

Упражнение 28. Привести пример равномерно непрерывного отображения, не удовлетворяющего условию Липшица.

Пусть $f : E \to F$ взаимно однозначно, тогда существует обратное отображение $f^{-1} : F \to E$. Если $x = f^{-1}(y)$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно (т. е. f, f^{-1} – непрерывные отображения), то оно называется *гомеоморфизмом*, а сами пространства E и F, между которыми можно установить гомеоморфизм, *гомеоморфными* между собой.

Гомеоморфные пространства имеют одинаковый запас открытых и замкнутых множеств, так как гомеоморфизм осуществляет взаимно однозначное соответствие между открытыми и замкнутыми множествами. Из определения гомеоморфизма вытекает, что для того, чтобы непрерывное отображение было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы образом открытого (замкнутого) множества являлось открытое (замкнутое) множество. Метрические свойства гомеоморфных пространств при этом могут быть различны.

Важным случаем гомеоморфизма является изоморфизм.

Определение 1.1.39. Отображение $f : E \to F$ называется *изоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно и при этом существуют постоянные $\alpha, \beta > 0$, для которых справедливо неравенство

$$\alpha\|x\|_E \leqslant \|f(x)\|_F \leqslant \beta\|x\|_E.$$

Наиболее интересен тот случай, когда изоморфизм является еще и линейным, т. е. $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для всех $x, y \in E$ и всех $\alpha,\beta \in P$.

Два нормированных пространства называются *изоморфными,* если между ними существует по крайней мере один изоморфизм. Изоморфизм, сохраняющий расстояние между точками пространства, называется *изометрией.*

Если пространство E изометрично некоторому подпространству $E' \subset F$, то говорят, что E *изометрично вкладывается в* F. Например, $\mathbb{R}^m$ изометрично вкладывается в $\mathbb{R}^n$ при $m < n$. Изометрией при этом является следующее отображение $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots,0)$, если $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Пример 45. Пространство $C[0,1]$ изометрично $C[a,b]$, отображение изометрии определяется формулой $f(x) = x\big(a(1-t) + bt\big)$.

Рассмотрим отображение вложения в общем случае.

Определение 1.1.40. Нормированное пространство E *вложено* в нормированное пространство F, если всюду на E задана линейная функция f такая, что существует $\beta > 0$ и при этом $\|f(x)\|_F \leqslant \beta\|x\|_E$ для всех $x \in E$.

Возможен случай, когда пространства E и F получены введением в одном и том же нормированном пространстве E различных норм, тогда в качестве отображения f выступает тождественное отображение. В этом случае говорят о естественном вложении пространств.

Пример 46. Пространство $C[a,b]$ вложено в $\mathscr{L}_p[a,b]$, $p \geqslant 1$. Действительно, рассмотрим тождественное отображение, тогда

$$\|x\|_p = \Big(\int\limits_a^b |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int\limits_a^b (\max_t |x(t)|)^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p} = \sqrt[p]{b-a} \cdot \|x\|_c.$$

1.2. Принцип сжимающих отображений

Понятие неподвижной точки отображения отображения одно из фундаментальных понятий функционального анализа. Принцип неподвижной точки применяется в различных задачах математического моделирования.

В экономике считается, что цены поднимаются, если спрос превышает предложение, и растут тем сильнее, чем выше эксцесс спроса. Если описать этот процесс математически, получим уравнение вида

$$p_{t+1} = p_t + DE(p_t),$$

где $E(p_t)$ – эксцесс или избыток спроса (т. е. разница между спросом и предложением), D – диагональная матрица с неотрицательными коэффициентами. В этом случае неподвижная точка дает стационарные, неизменные по времени цены. Такие цены называются *равновесными*.

Таким образом, нас будут интересовать следующие вопросы:

1) Существуют ли неподвижные точки?
2) Сколько их, одна или несколько?
3) Устойчивость в каком нибудь смысле;
4) Как вычислить неподвижные точки точно или приближенно?

В приложениях часто приходится иметь дело с неподвижными точками многозначных отображений.

1.2.1. Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах

Одним из простых, но довольно эффективным приемом при доказательстве теорем существования и единственности решения алгебраических, дифференциальных и других функциональных уравнений является принцип, который носит название *принципа сжимающих отображений*. Он был сформулирован С. Банахом в 1922 г.

Пусть в банаховом пространстве E действует отображение f.

Определение 1.2.1. Точка $x^* \in E$ называется *неподвижной точкой отображения* f, если

$$f(x^*) = x^*. \tag{1.2.1}$$

Таким образом, неподвижные точки f – это решения уравнения

$$x = f(x), \tag{1.2.2}$$

а поскольку к такому виду довольно часто удается преобразовать уравнение $F(x) = 0$, где F действует из банахова пространства X в банахово пространство Y, то важность определения неподвижных точек не вызывает сомнения.

Отображение f может и не иметь неподвижной точки. Например, отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$, где $a \neq 0$.

Среди отображений $f : E \to F$ выделим класс отображений специального вида.

Определение 1.2.2. Будем говорить, что отображение f является *сжимающим (сжатием)*, если существует константа $0 < \alpha < 1$ такая, что

$$||f(x) - f(y)||_F \leqslant \alpha \|x - y\|_E, \quad \forall\, x,y \in E. \tag{1.2.3}$$

Число α в (1.2.3) называют *коэффициентом сжатия.*

Теорема 1.2.1 (принцип сжимающих отображений). *Пусть отображение f отображает замкнутое в банаховом пространстве E множество M в себя и является на M сжимающим с коэффициентом сжатия α. Тогда на множестве M отображение f имеет единственную неподвижную точку x^*, которая может быть найдена методом последовательных приближений*

$$x_n = f(x_{n-1}),\, n = 1, 2, \dots, \tag{1.2.4}$$

где $(x_n) \subset M$ и $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$. Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_0 - x_1\|. \tag{1.2.5}$$

Условие сжатия нельзя, вообще говоря, заменить на более слабое, например: $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$ для всех $x, y \in M$.

Пример 47. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x) = |x| + \dfrac{1}{1 + |x|}$. Видно, что отображение f не имеет неподвижной точки. Однако справедлива оценка

$$|f(x) - f(y)| = \left|\left(1 - (1 + |x|)^{-1}(1 + |y|)^{-1}\right)\right| (|x| - |y|) \leqslant |x - y|.$$

Отметим теперь, что наиболее часто принцип сжимающих отображений применяется в двух следующих случаях: $M = E$ – все пространство и множество $M = B[x_0, r_0]$. Сформулируем соответствующие утверждения в виде следствий из теоремы 1.2.1.

Следствие 1.2.1. Пусть f отображает банахово пространство E само на себя и является сжатием. Тогда f имеет единственную неподвижную точку, которая может быть найдена методом последовательных приближений.

Следствие 1.2.2. Пусть f определено на $B[x_0, r_0] \subset E$, E – банахово пространство. Пусть f является на $B[x_0, r_0]$ сжатием и выполнено условие $\|f(x_0) - x_0\| \leqslant (1 - \alpha) r_0$. Тогда в шаре $B[x_0, r_0]$ существует единственная неподвижная точка отображения f, которая может быть найдена методом последовательных приближений.

Теорема 1.2.1 фактически устанавливает единственность решения нелинейного уравнения, что сравнительно редко.

Приведем одно обобщение теоремы о неподвижной точке.

Теорема 1.2.2. *Пусть отображение f отображает замкнутое множество $M \subset E$ в себя и при этом при некотором $m \in N$ отображение $f^m(x)$ является на M сжатием. Тогда в M существует единственная неподвижная точка отображения f.*

В заключение приведем еще одно следствие из теоремы 1.2.1.

Следствие 1.2.3. Пусть отображение f отображает замкнутое выпуклое множество $M \subset E$ в себя, причем на M оно непрерывно дифференцируемо и $\|f'(x)\| \leqslant \alpha < 1$. Тогда справедливы утверждения теоремы 1.2.1.

Рассмотрим применение принципа сжимающих отображений к решению скалярных уравнений вида

$$g(x) = 0, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Перепишем уравнение в виде

$$x = x - \frac{g(x)}{g'(x)} \text{ или } x = f(x).$$

Если отображение f является сжимающим, то можно построить итерационный процесс, который позволит найти приближенное решение уравнение с некоторой точностью $\varepsilon > 0$ по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Процесс продолжается до тех пор, пока

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Принцип сжимающих отображений позволяет дать простое доказательство различных теорем о существовании и единственности решения задачи Коши для некоторых типов дифференциальных и интегральных уравнений.

Отметим также, что принцип сжимающих отображений применяется при фрактальном сжатии изображений.

1.2.2. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре

Проблема решения системы линейных алгебраических уравнений возникает при решении многих прикладных задач, например, поиска безусловного экстремума функций многих переменных с помощью необходимых условий. Метод сжимающих отображений позволяет найти приближенное решение линейных систем m уравнений с m неизвестными, особенно когда m велико. Данный метод эффективен, когда система сильно разрежена.

Пусть $E = \mathbb{R}^m$, y – заданный вектор в $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, задаваемое системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j + b_i \ (i = 1,2,\ldots,m). \tag{1.2.6}$$

Приведем систему к виду

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j + b_i \ (i = 1,2,\ldots,m), \tag{1.2.7}$$

где $c_{ij} = -a_{ij} + \delta_{ij}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Если отображение F – сжатие, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $x = F(x)$.

При каких условиях отображение F будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от выбора нормы в $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ кубическую норму $\|x\|_k = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|$. Тогда

$$\|y^{(1)} - y^{(2)}\|_k = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \Big| \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| \cdot |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| \cdot \max_{1\leqslant j\leqslant m} |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| =$$

$$= \Big(\max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| \Big) \cdot \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_k = \alpha \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_k.$$

Отсюда вытекает, что условие сжимаемости имеет вид

$$\alpha = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| < 1. \tag{1.2.8}$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ октаэдрическую норму $\|x\|_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|$, тогда

$$\|y^{(1)} - y^{(2)}\|_0 = \sum_{i=1}^{m} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| = \sum_{i=1}^{m} \Big| \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| \cdot |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant m} \sum_{i=1}^{m} |c_{ij}| \cdot \sum_{j=1}^{m} |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| =$$

$$= \Big(\max_{1\leqslant j\leqslant m}\sum_{i=1}^{m}|c_{ij}|\Big)\cdot\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_0 = \alpha\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_0.$$

Условие сжатия имеет вид

$$\alpha = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\sum_{i=1}^{m}|c_{ij}| < 1. \tag{1.2.9}$$

Таким образом, если выполнено хотя бы одно из условий (1.2.8), (1.2.9), то выполнены условия теоремы 1.2.1 и ее можно сформулировать в эквивалентной формулировке

Теорема 1.2.3. *Если матрица системы* (1.2.7) *такова, что выполнено условие* $0 \leqslant \alpha < 1$*, где величина* α *определяется формулой* (1.2.8) *или* (1.2.9), *то система уравнений* (1.2.7) *имеет единственное решение. Это решение может быть найдена методом последовательных приближений*

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j^{(n)} + b_i, \tag{1.2.10}$$

а в качестве $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ *можно взять любую точку из* $\mathbb{R}^m$*. Скорость сходимости итерационного процесса оценивается неравенством* (1.2.5).

Отметим, что условие (1.2.8) или (1.2.9) не являются необходимыми для применения метода последовательных приближений.

Важно заметить, что если матрица $C = (c_{ij})$ симметрична, то по сферической норме условие сжатия имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}|c_{ij}| < 1 \tag{1.2.11}$$

и фактически означает, что $\|C\| < 1$. Из курса линейной алгебры известно, что $\|C\|$ совпадает с $|\lambda_1|$, где λ_1 – наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы C. Тогда условие (1.2.11) не только достаточно, но и необходимо для сходимости метода последовательных приближений. Действительно, выбирая в (1.2.7) собственный вектор, отвечающий λ_1, и полагая $x_i^{(0)} = 0$, получим $x_i^{(1)} = b_i$, $x_i^{(n+1)} = (1 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_1^n)b_i$, откуда следует, что при $n \to \infty$ последовательность $(x_i^{(n)})$ не имеет предела, если $|\lambda_1| \geqslant 1$ $(b_i \neq 0)$.

Таким образом, когда матрица C симметрична, процесс последовательных приближений для решения системы линейных уравнений сходится к решению тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы C меньше единицы по абсолютной величине.

Возникает вопрос, как привести систему (1.2.6) к виду, удобному для применения принципа сжимающих отображений. В общем случае это не простая задача, требующая специальных знаний. В некоторых случаях можно поступить следующим образом, сделав преобразования:

$$AX = (A - I + I)X = (A - I)X + X \text{ или } X = (I - A)X + B.$$

Самый простой способ получения системы следующий. Из первого уравнения системы (1.2.6) выразим x_1, из второго – x_2 и т. д. Тогда на главной диагонали матрицы C стоят нули, а ненулевые выражаются по формулам

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \; i,j = 1, 2, \ldots, n, i \neq j. \tag{1.2.12}$$

Для применения данного метода необходимо, чтобы на главной диагонали матрицы A стояли ненулевые элементы.

Рассмотрим теперь бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i \; (i = 1,2,\ldots). \tag{1.2.13}$$

Решением такой системы назовем бесконечную последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, которая обращает (1.2.13) тождество. Заметим, что в этом случае автоматически требуется сходимость рядов, входящих в (1.2.13). Ограничимся случаем, когда последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ ограничена, т. е. $x \in m$, $\sup\limits_i |x_i| < \infty$. Как и в первом случае приведем систему к виду

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j + b_i \; (i = 1,2,\ldots), \tag{1.2.14}$$

где $c_{ij} = -a_{ij} + \delta_{ij}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Определение 1.2.3. Система (1.2.14) называется *вполне регулярной*, если $\exists q : \; 0 < q < 1$ такое, что

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij} \leqslant q, \quad \forall i. \tag{1.2.15}$$

Определим отображение $F : m \to m$ и потребуем, чтобы вектор правой части $b = (b_1,b_2,\ldots,b_i,\ldots) \in m$.

Теорема 1.2.4. *Вполне регулярная система* (1.2.14) *имеет единственное решение* $x \in m$ *при любом* $b = (b_1,b_2,\ldots,b_i,\ldots) \in m$. *Если* $\|b\| \leqslant B$, *то*

$$|x_i| \leqslant \frac{B}{1-q}, \quad i = 1,2,\ldots.$$

Если отказаться от требования ограниченности решения, то решение может оказаться не единственным.

Упражнение 29. Привести пример бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с $q < 1$, которая имеет не единственное решение.

1.2.3. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям

Интегральными уравнениями называют уравнения относительно неизвестной функции, входящей в уравнение под знаком интеграла.

Ограничимся рассмотрением уравнений вида

$$a(t)x(t) - \int\limits_a^b \mathcal{K}\big(t, s, x(s)\big)\,\mathrm{d}s = y(t),\ t \in [a, b], \tag{1.2.16}$$

здесь $a(t)$, $y(t)$ – заданные функции; $\mathcal{K}\big(t, s, x(s)\big)$ – заданная функция, называемая *ядром интегрального уравнения;* $x(t)$ – неизвестная функция. Решение $x(t)$ разыскивается в различных пространствах функций в зависимости от свойств функции $\mathcal{K}(t,s,z)$ и y. Пространства выбираются так, чтобы интеграл в (1.2.16) существовал. Уравнение (1.2.16) называется уравнением Фредгольма. Если $a(t) \equiv 0$, то уравнение (1.2.16) называется уравнением Фредгольма первого рода, соответственно, при $a(t) \equiv 1$ – второго рода и уравнением третьего рода при $a(t) \neq 0$. Исследование уравнений второго и третьего рода не отличаются, поэтому мы ограничимся рассмотрением случая $a(t) = 1$.

В предыдущем параграфе мы рассматривали задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, которое сводится к рассмотрению интегрального уравнения. Можно привести и другие примеры, на которых мы останавливаться не будем.

Интегральное уравнение (1.2.16) называется *линейным,* если функция $\mathcal{K}(t, s, z)$ линейна по z. Если $y(t) = 0$, то уравнение (1.2.16) называется *однородным,* в противном случае *неоднородным.*

Решением уравнения (1.2.16) называется функция $x(t)$, при подстановке которой в уравнение выполняется равенство для всех $t \in [a, b]$ или почти всех. Линейное однородное уравнение всегда имеет решение $x(t) \equiv 0$.

Выделим класс уравнений с переменным верхним пределом вида

$$a(t)x(t) - \int\limits_a^t \mathcal{K}\big(t, s, x(s)\big)\mathrm{d}s = y(t), \tag{1.2.17}$$

называемые *интегральными уравнениями Вольтерра.*

Уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма, если переопределить ядро $\mathcal{K}\big(y, s, x(s)\big)$.

Идея применения принципа сжимающих отображений и интегральным уравнениям (1.2.16) либо (1.2.17) заключается в следующем.

Пусть имеется интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_T \mathcal{K}\big(t, s, x(s)\big)\,\mathrm{d}s + y(t), \tag{1.2.18}$$

где $T = [a,b]$ либо $T = [a,t]$. Соответствие $x \to \int\limits_T \mathcal{K}\big(t, s, x(s)\big)\mathrm{d}s + y(t)$ определяет отображение множества функций, заданных на T, на себя. Тогда уравнение (1.2.18) записывается в виде $x = F(x)$, а это означает, что искомое решение является неподвижной точкой отображения F. Для того, чтобы применить принцип сжимающих отображений, нужно:

- выбрать банахово пространство функций;
- проверить, что (1.2.18) определяет сжимающее отображение.

Покажем, каким образом такая схема реализуется в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ для линейного неоднородного уравнения Фредгольма

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{1.2.19}$$

Теорема 1.2.5. *Пусть* $\mathcal{K}(t, s)$ *– непрерывная функция на* $[a, b] \times [a,b] = \Omega$ *и* $M = \max\limits_{(t,s)\in\Omega} |\mathcal{K}(t, s)|$, *тогда для любого* λ *такого, что* $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ *интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет единственное решение для любой правой части* $y(t) \in C[a, b]$.

Перейдем к рассмотрению нелинейного уравнения

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s, x(s))\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{1.2.20}$$

Выясним, можно ли применить метод последовательных приближений к построению решения уравнения (1.2.20)

Теорема 1.2.6. *Пусть* $\mathcal{K}(t, s, z)$ *– непрерывная функция переменных* t, s, z, *удовлетворяющая условию Липшица по переменной* z *с константой* $L > 0$. *Если выполнено условие* $L(b - a)|\lambda| < 1$, *то интегральное уравнение* (1.2.20) *имеет единственное непрерывное решение для любой правой части* $y(t) \in C[a, b]$.

Таким образом, разрешимость уравнений Фредгольма зависит от условий на ядро. Покажем, что для уравнения Вольтерра условие разрешимости проще.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение Вольтерра

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{1.2.21}$$

Выясним, когда можно применить метод последовательных приближений для его решения.

Теорема 1.2.7. *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ – непрерывная функция по переменным t и s. Тогда для любой $y(t) \in C[a,b]$ и любого λ из поля $\mathcal{K}$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное решение.*

Существует класс интегральных уравнений, которые сводятся к линейным системам алгебраических уравнений. Это линейные интегральные уравнения с вырожденным ядром.

Ядро $\mathcal{K}(t,s)$ называется *вырожденным,* если оно имеет вид

$$\mathcal{K}(t,s) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)b_i(s), \tag{1.2.22}$$

где $a_i(t)$, $b_i(s)$ – равномерно непрерывные, линейно независимые функции, хотя независимость функций не существенна. Предположим, что уравнение (1.2.19) является уравнением с вырожденным ядром.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (1.2.19), тогда

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{m} a_i(t)b_i(s)x(s)\mathrm{d}s + y(t),$$

или

$$x(t) = \lambda \sum_{k=1}^{m} a_i(t) \int\limits_a^b b_i(s)x(s)\mathrm{d}s + y(t).$$

Положим $c_i = \int\limits_a^b b_i(s)x(s)\mathrm{d}s$, тогда

$$x(t) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_i(t)c_i + y(t). \tag{1.2.23}$$

Таким образом, если решение уравнения (1.2.19) существует, то оно имеет вид (1.2.22). Подставим (1.2.22) в уравнение, введем обозначения

$$a_{ij} = \lambda \int\limits_a^b b_i(s) a_j(s) \mathrm{d}s, \quad y_i = \int\limits_a^b b_i(s) y(s) \mathrm{d}s,$$

получим

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} c_j + y_i. \tag{1.2.24}$$

Итак, всякое решение интегрального уравнения (1.2.19) с ядром (1.2.21) однозначно определяется набором $(c_1, \ldots, c_m)$. Этот набор единственен в силу линейной независимости $a_i(t)$. Таким образом, задача свелась к исследованию СЛАУ.

Пример 48. Рассмотрим решение интегрального уравнения вида

$$x(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 tsx(s)\, \mathrm{d}s + \frac{5}{6}\, t.$$

Поскольку ядро $\mathcal{K}(t, s) = ts$ непрерывно в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$, причем $|\mathcal{K}(t, s)| \leqslant 1 = M$, то коэффициент сжатия $\alpha = |\lambda| M(b - a) = 1/2$. Следовательно, условие сжатия выполнено, и интегральное уравнение можно решить по принципу сжимающих отображений. Пусть $x_0(t) = 0$. Тогда

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 tsx_0(s)\, \mathrm{d}s + \frac{5}{6}\, t = \frac{5}{6}\, t,$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 tsx_1(s) \mathrm{d}s + \frac{5}{6}\, t = \frac{5}{6}\, t \Big(1 + \frac{1}{6}\Big),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 tsx_{n-1}(s) \mathrm{d}s + \frac{5}{6}\, t = \frac{5}{6}\, t \Big(1 + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6^{n-1}}\Big).$$

Значит,

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t) = t.$$

Заметим, что если в качестве начального приближения выбрать $x_0(t) = t$, то за одну итерацию получим решение интегрального уравнения. Таким образом, выбор начального приближения непосредственно влияет на скорость сходимости итерационного процесса.

1.2.4. Применение принципа сжимающих отображений к дифференциальным уравнениям

Принцип сжимающих отображений позволяет дать простое доказательство различных теорем о существовании и единственности решения задачи Коши для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Остановимся на задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(t,x) \tag{1.2.25}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2.26}$$

причем функция $F(t,x)$ определена и непрерывна в некоторой области D, содержащей точку (t_0, x_0) и удовлетворяет в этой точке условию Липшица по переменной x:

$$\|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| \leqslant L\|x_2 - x_1\|.$$

Докажем, что тогда на некотором сегменте $|t - t_0| \leqslant d$ существует единственное решение $x(t)$ задачи Коши (1.2.25) – (1.2.26). Если функция $x(t)$ является решением задачи (1.2.25) – (1.2.26), то она непрерывно дифференцируема, обращает (1.2.25) в тождество и удовлетворяет (1.2.26). Подставим $x(t)$ в (1.2.25) и проинтегрируем полученное тождество на $[t_0, t]$ с учетом (1.2.26). Получим, что $x(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,\mathrm{d}s. \tag{1.2.27}$$

В силу непрерывности функции F имеем $\|F(t,x)\| \leqslant K$ в некоторой области $D' \subset D$, содержащей точку (t_0, x_0). Подберем d так, чтобы выполнялись условия:

1) $(t,x) \in D'$, если $|t - t_0| \leqslant d$, $\|x(t) - x_0\| \leqslant Kd$;
2) $Ld < 1$.

Обозначим через $C_X[t_0, d]$ пространство непрерывных на отрезке $|t - t_0| \leqslant d$ функций и таких, что $\|x(t) - x_0\| \leqslant Kd$ с нормой $\|x\| = = \max\limits_t |x(t)|$. Пространство C_X полно, так как оно является замкнутым подпространством полного пространства всех непрерывных функций на $[t_0 - d, t_0 + d]$ (доказать). Рассмотрим отображение

$$f(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\,\mathrm{d}s,$$

где $|t - t_0| \leqslant d$. Отображение $f : C_X \to C_X$ является сжатием. Действительно, пусть $x(t) \in C_X$, тогда

$$\|f(x) - x_0\| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \|F(s, x(s))\| \, \mathrm{d}s \leqslant Kd,$$

и, следовательно, $f(C_X) \subset C_X$. Кроме того,

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \|F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s))\| \, \mathrm{d}s \leqslant Ld \cdot \|x_1 - x_2\|,$$

где $Ld < 1$. Отсюда вытекает, что задача Коши (1.2.25) – (1.2.26) имеет единственное решение.

Пример 49. Рассмотрим задачу Коши вида

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t), \quad x(0) = x_0 = 1.$$

Построим последовательные приближения:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = x_0 + \int\limits_0^t x_0(\tau) \, \mathrm{d}\tau = 1 + t,$$

$$x_2 = x_0 + \int\limits_0^t x_1(\tau) \, \mathrm{d}\tau = 1 + t + t^2/2,$$

$$x_n = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу, получим решение задачи Коши $x(t) = e^t$.

Замечание 1.2.1. В дальнейшем мы еще раз обратимся к принципу неподвижной точки – принципу Ю. Шаудера для компактных отображений.

1.3. Гильбертовы пространства и аппроксимация

Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ выделяется из всех конечномерных пространств тем, что в нем определено скалярное произведение, согласованное с евклидовой нормой. Наличие дополнительной алгебраической структуры сильно обогащает геометрические свойства пространства. Что наиболее важно, оно позволяет ввести понятие ортогональности двух векторов и тем самым существенно приблизиться к евклидовой геометрии. Как мы увидим в дальнейшем, бесконечномерные пространства со скалярным произведением имеют большое прикладное значение.

1.3.1. Предгильбертовы пространства

Определение 1.3.1. Говорят, что в комплексном векторном пространстве E задано *скалярное произведение*, если каждой паре элементов $x, y \in E$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) так, что выполнены следующие аксиомы:

1) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0$ в том и только в том случае, когда $x = \theta$;
2) $(x, y) = (\overline{y, x})$;
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y),\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$;
4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

В вещественном векторном пространстве скалярное произведение (x, y) – вещественное число, удовлетворяющее аксиомам 1) – 4), аксиома 2) в этом случае имеет вид $(x, y) = (y, x)$.

Определение 1.3.2. Векторное пространство, снабженное скалярным произведением, называется *предгильбертовым*.

Конечномерное вещественное предгильбертово пространство называют также евклидовым, а комплексное – унитарным.

Рассмотрим примеры предгильбертовых пространств.

Пример 50. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и унитарное пространство $\mathbb{C}^n$, в которых скалярное произведение определяется соответственно по формулам

$$(x, y)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad (x, y)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

Пример 51. Пространство ℓ_2 бесконечных числовых последовательностей вещественных чисел $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, $y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots)$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty$, относительно скалярного произведения

$$(x, y)_{\ell_2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i. \tag{1.3.1}$$

Сходимость ряда (1.3.1) вытекает из неравенства $|ab| \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$, справедливого для вещественных чисел.

Упражнение 30. Проверьте выполнение аксиом скалярного произведения в пространстве ℓ_2.

Пример 52. Пространство $\mathscr{L}_2[a,b]$ комплекснозначных непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций является предгильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(x,y)_{\mathscr{L}_2[a,b]} = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t. \qquad (1.3.2)$$

Упражнение 31. Проверьте аксиомы скалярного произведения в пространстве $\mathscr{L}_2[a,b]$.

Установим некоторые свойства скалярного произведения. Будем считать, что предгильбертово пространство E комплекснозначно. Если пространство вещественнозначно, то ниже перечисленные свойства будут иметь место и их доказательство значительно упрощается.

Свойство 1.3.1 (антилинейность по второму аргументу). Для любых $x, y_1, y_2 \in E$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}(x, y_1) + \overline{\beta}(x, y_2).$$

В вещественном предгильбертовом пространстве скалярное произведение линейно по второму аргументу.

Свойство 1.3.2 (неравенство Коши – Буняковского). Для любых $x, y \in E$ справедливо неравенство

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)\cdot(y,y).$$

Теперь в предгильбертовом пространстве можно ввести норму, порожденную скалярным произведением

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Упражнение 32. Доказать, что вышеуказанная формула действительно определяет в E норму, т. е. выполняются аксиомы 1) – 3) нормы.

В этих обозначениях неравенство Коши – Буняковского принимает вид

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|.$$

В пространстве $\mathscr{L}_2[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций неравенство Коши – Буняковского имеет вид

$$\int\limits_a^b |x(t)\overline{y(t)}|\,\mathrm{d}t = \Big(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_a^b |y(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}$$

и является частным случаем неравенства Гельдера.

Свойство 1.3.3. Скалярное произведение в предгильбертовом пространстве является непрерывной функцией своих аргументов относительно сходимости по норме, т. е. если $x^{(n)} \to x$, $y^{(n)} \to y$ при $n \to \infty$, то $(x^{(n)}, y^{(n)}) \to (x, y)$.

В предгильбертовом пространстве наряду со сходимостью по норме можно ввести еще один вид сходимости. Будем говорить, что последовательность $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ элементов $x^{(n)} \in E$ предгильбертова пространства *слабо сходится* к элементу $x \in E$, если для любого элемента $y \in E$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x^{(n)}, y)_E = (x, y)_E$.

Лемма 1.3.1. *Последовательность $x^{(n)} \in E$ не может слабо сходится к различным пределам.*

Лемма 1.3.2. *Последовательность $x^{(n)} \in E$ сходится по норме пространства E к элементу x, то она слабо сходится.*

Лемма 1.3.3. *Если последовательность $x^{(n)} \in E$ слабо сходится к элементу x, то $x^{(n)}$ ограничена.*

Упражнение 33. Докажите лемму 30

Лемма 1.3.4. *Если последовательность $x^{(n)} \in E$ слабо сходится к элементу x, а числовая последовательность $\|x^{(n)}\|$ сходится к $\|x\|$, то $x^{(n)}$ сходится по норме пространства E к элементу x.*

Теорема 1.3.1 (равенство параллелограмма). *Для того, чтобы нормированное векторное пространство E было пространством со скалярным произведением необходимо и достаточно, чтобы для любых двух его элементов x и y выполнялось тождество параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Тождество параллелограмма является характеристическим свойством нормы, порожденной скалярным произведением.

Упражнение 34. Показать, что в пространстве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой $\|x\|_{C[a,b]} = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$ пространства $C[a,b]$.

1.3.2. Гильбертово пространство

Гильбертово пространство впервые введено в рассмотрение немецким математиком Д. Гильбертом.

Пусть E – предгильбертово пространство, которое одновременно является нормированным относительно нормы, порожденной скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Согласно теоремы о пополнении его можно пополнить. Мы приходим к банахову пространству $\hat{E}$, элементами которого служат классы $\hat{x}$

эквивалентных фундаментальных последовательностей $(x^{(n)})$. Пусть $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$, а $(x^{(n)}) \in \hat{x}$, $(y^{(n)}) \in \hat{y}$, определим скалярное произведение в пространстве $\hat{E}$ по формуле

$$(\hat{x}, \hat{y})_{\hat{E}} = \lim_{n\to\infty} (x^{(n)}, y^{(n)})_E.$$

Упражнение 35. Проверьте аксиомы скалярного произведения.

Определение 1.3.3. Предгильбертово пространство называется *гильбертовым*, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением.

Гильбертовы пространства обычно обозначаются буквой H.

Пример 53. Пространство ℓ_2 является гильбертовым пространством. Покажем это. Рассмотрим в ℓ_2 фундаментальную последовательность $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, где $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^2 < +\infty$. Так как

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2\right)^{1/2} = \|x^{(n)} - x^{(m)}\|,$$

то при каждом фиксированном k числовая последовательность $(x_k^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной и поэтому сходится. Пусть $x_k^{(0)} = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$. Рассмотрим последовательность вещественных чисел

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, \ldots) = x_0$$

и покажем, что $x_0 \in \ell_2$ и $\|x^{(n)} - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$ в ℓ_2. В силу фундаментальности последовательности $x^{(n)}$ имеем: для $\forall\, p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2.$$

Перейдем к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| \leqslant \varepsilon^2$$

для всех $n > N(\varepsilon)$.

Последнее неравенство означает, что последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|^2$ монотонно возрастает и ограничена сверху, поэтому, перейдя к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$.

Полученное неравенство означает, что при $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ $x^{(n)} - x_0 \in \ell_2$ и что $\|x^{(n)} - x_0\| \leqslant \varepsilon$. Но тогда $x_0 = x^{(n)} + (x_0 - x^{(n)}) \in \ell_2$ в силу векторности ℓ_2.

Вернемся к вопросу об аппроксимации элементов гильбертова пространства элементами некоторого множества $M \subset H$, который мы рассматривали в нормированных пространствах.

В гильбертовом пространстве, вследствие его полноты и наличия понятия ортогональности элементов, удается полностью решить эту задачу.

Теорема 1.3.2. *Пусть H – гильбертово пространство, $M \subset H$ его замкнутое выпуклое множество. Тогда для $\forall x \in H \setminus M$*

$$\rho(x, M) > 0.$$

Теорема 1.3.3. *Пусть H – гильбертово пространство, $L \subset H$ его замкнутое векторное подпространство. Тогда для любого элемента $x \in H$ существует единственный элемент $y \in L$, являющийся элементом наилучшей аппроксимации x по L, т. е.*

$$\rho(x, L) = \|x - y\|.$$

1.3.3. Проекция в гильбертовом пространстве

Определение 1.3.4. Пусть H – гильбертово пространство. Два ненулевых вектора $x, y \in H$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение $(x, y) = 0$.

Очевидно, что нулевой вектор пространства H ортогонален любому вектору пространства.

Отметим свойства ортогональности векторов.

Свойство 1.3.4. Если $x \perp x$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

Свойство 1.3.5. Если $x \perp y_1$ и $x \perp y_2$, то $x \perp \alpha y_1 + \beta y_2$,

Свойство 1.3.6. Если $x \perp y^{(n)}$, а $y^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{H} 0$, при то $x \perp y$.

Упражнение 36. Докажите свойства (1.3.4) – (1.3.6).

Упражнение 37. Показать, что в пространстве со скалярным произведением два вектора x и y ортогональны тогда и только тогда, когда для любых скаляров α и β выполняется равенство

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2.$$

Углом между двумя ненулевыми векторами x и y называется угол φ такой, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Упражнение 38. Найти углы треугольника, образованного в пространстве $L_2[0,1]$ элементами $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 1$, $x_3(t) = t$.

Понятие ортогональности лежит в основе одной из древнейших теорем.

Теорема 1.3.4 (Пифагора). *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – система попарно ортогональных векторов в H и $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Тогда*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

На плоскости или в трехмерном пространстве теорема Пифагора в случае двух векторов x и y имеет простой геометрический смысл, а именно: если векторы x и y ортогональны, то ортогональными будут и векторы x и λy, $\lambda \in \mathbb{C}$, тогда вектор $x + \lambda y$ будет гипотенузой прямоугольного треугольника и ее длина $\|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|$. Если же векторы x и y не ортогональны, то всегда найдется вектор вида $x + \lambda y$, длина которого $\|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|$ будет меньше длины вектора x. Используя это очевидное свойство, можно сформулировать критерий ортогональности двух векторов.

Теорема 1.3.5. *В любом гильбертовом пространстве H два вектора $x, y \in H$ ортогональны тогда и только тогда, когда*

$$\|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Определение 1.3.5. Пусть L – линейное многообразие в H. *Проекцией* вектора x на L называется вектор $y \in L$ такой, что $x - y \perp L$, т. е. $(x - y, l) = 0$ для любого $l \in L$.

В отличие от конечномерного пространства в общем случае может не существовать проекция вектора на векторное подпространство.

Теорема 1.3.6 (о проекции в H). *Пусть H – гильбертово пространство, $L \subset H$ – его замкнутое векторное подпространство. Для любого элемента $x \in H$ существует единственная его проекция на подпространство L, т. е. $y = P_L x$.*

Можно несколько ослабить требования на L.

Следствие 1.3.1. Пусть H – гильбертово пространство, $M \subset H$ – замкнутое выпуклое множество. Тогда для любого $x \in H$ существует единственный элемент $y \in M$ такой, что $(x - y, l) = 0$ для $\forall l \in M$.

Заметим, если множество M не будет выпуклым, то проекции может не существовать.

Пример 54. В пространстве ℓ_2 рассмотрим множество M, порожденное векторами $e^{(n)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, которое ограничено и замкнуто, но не выпукло (докажите!). Пусть $x = (-1, -1/2, \ldots, -1/i, \ldots) \in \ell_2$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\|e^{(n)} - x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} + 1 + \frac{1}{n}.$$

Поэтому

$$\rho(x, M) = \inf_n \|e^{(n)} - x\|^2 = \frac{\pi^2}{6} + 1 < \|e^{(m)} - x\|^2.$$

для любого $m \in \mathbb{N}$.

Следствие 1.3.2. Пусть $L \subset H$ – подпространство в H. Тогда для любого $x \in H$ справедливо разложение $x = y + z$, где $y \in L$, $z \perp L$, причем это разложение единственное.

1.3.4. Ортогональное разложение гильбертова пространства

Известно, что любое конечномерное пространство можно представить в виде прямой суммы его подпространства и ортогонального дополнения к этому подпространству. Покажем, что такое разложение справедливо и для произвольного гильбертова пространства H.

Определение 1.3.6. Пусть L – линейное многообразие в H. Совокупность всех элементов из H, ортогональных к L называется *ортогональным дополнением* к L и обозначается $L^\perp$, т. е.

$$L^\perp = \{z \in H, z \perp L\}.$$

Лемма 1.3.5. *$L^\perp$ – подпространство в H.*

Теорема 1.3.7 (о разложении H). *Пусть H – гильбертово пространство, $L \subset H$ – его подпространство. Тогда $H = L \oplus L^\perp$.*

Теорема 1.3.8 (о всюду плотном множестве). *Пусть L – линейное многообразие в гильбертовом пространстве H. L всюду плотно в H тогда и только тогда, когда $L^\perp = \{0\}$.*

1.3.5. Ортогональные системы и ряды Фурье

Вернемся к задаче об аппроксимации элемента гильбертова пространства элементами подпространств. Для этого нам понадобится теория рядов Фурье в гильбертовых пространствах.

Определение 1.3.7. Система $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ ненулевых элементов гильбертова пространства H называется *ортогональной* в H, если любые два различных вектора из этой системы попарно ортогональны, т. е, $(\varphi_i, \varphi_j)_H = 0$ для $i \neq j$ и $(\varphi_i, \varphi_j)_H \neq 0$ для $i = j$. Ортогональная система называется *ортонормированной*, если $(\varphi_i, \varphi_i)_H = 1$, $i = 1, 2, \ldots$.

Пусть H – гильбертово пространство, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система элементов в нем. Отметим ее свойства.

Лемма 1.3.6. *Любая ортогональная система элементов пространства H линейно независима.*

Оказывается, любую линейно независимую систему $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно превратить в ортогональную (ортонормированную) систему с помощью процесса ортогонализации Грамма – Шмидта.

Лемма 1.3.7. *По любой конечной либо счетной системе линейно независимых элементов x_k, $k = 1, 2, \ldots$, гильбертова пространства H можно построить ортогональную и соответственно ортонормированную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем подпространства, порожденные этими системами совпадают.*

Пример 55. В пространстве $L_2[-1, 1]$ рассмотрим линейно независимую систему $\{1, t, t^2, \ldots\}$. Введем в $L_2[-1, 1]$ скалярное произведение с весом $p(t)$, где $p(t) \in C[-1, 1], p(t) > 0$.

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)x(t)y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Проводя процесс ортогонализации Грамма – Шмидта, можно получить различные системы ортогональных с весом $p(t)$ многочленов.

Если $p(t) \equiv 1$, то полученные ортогональные многочлены называются *полиномами Лежандра*.

Если $p(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$, то полученные ортогональные многочлены называются *полиномами Чебышева* 1-го рода.

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t); n = 1, 2, \ldots.$$

Замечание 1.3.1. Процесс ортогонализации Грамма – Шмидта при его реализации на ЭВМ обычно оказывается численно неустойчивым, что ограничивает возможности практического применения метода ортогонализации.

Определение 1.3.8. Пусть $x \in H$. Числа

$$C_k = (x, \varphi_k)/\|\varphi_k\|^2, \ k = 1, 2, \dots,$$

называются *коэффициентами Фурье* элемента x, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k \tag{1.3.3}$$

называется *рядом Фурье* для x по ортогональной системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k$ – *многочленом Фурье* элемента x.

Если система φ_k является ортонормированной, то коэффициенты Фурье элемента x вычисляются по упрощенной формуле $C_k = (x,\varphi_k)$.

Обозначим через L_n – подпространство, порожденное элементами $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Покажем, что оно может выступать в роли аппроксимирующего подпространства, т. е. для любого $x \in H$ существует $y \in L_n$ такой, что

$$\rho(x, L_n) = \|x - y\|. \tag{1.3.4}$$

Теорема 1.3.9 (о разложении в ряд Фурье). *Пусть H – гильбертово пространство, $\{\varphi_k\}_{k=1^\infty}$ – ортонормированная система в H, x – произвольный элемент, а $C_k = (x, \varphi_k)$ – его коэффициенты Фурье. Тогда:*

1) *числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k|^2$ сходится, причем справедливо неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \leqslant \|x\|^2; \tag{1.3.5}$$

2) *ряд Фурье 1.3.3 сходится;*

3) *сумма ряда Фурье $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \varphi_k$ является проекцией элемента $x \in H$ на подпространство L_n, порожденное $(\varphi_k, \dots, \varphi_k)$;*

4) *ряд Фурье 1.3.3 сходится к x тогда и только тогда, когда справедливо равенство Стеклова*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = \|x\|^2. \tag{1.3.6}$$

Теорема 1.3.10. *Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ – ортогональная система в H, L_n – подпространство, порожденное $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Тогда для $x \in H$*

$$\rho(x, L_n) = \|x - \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k\| = d_n, \quad d_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |C_k|^2. \tag{1.3.7}$$

Теорема 1.3.11 Рисса – Фишера. *Пусть H – гильбертово пространство, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ – произвольная ортонормированная система и пусть числа $C_1, C_2, \ldots$ таковы, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |C_k|^2 < \infty$. Тогда существует элемент $x \in H$, что*

$$C_k = (x, \varphi_k)_H, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |C_k|^2.$$

1.3.6. Полные ортонормированные системы

Определение 1.3.9. Ортогональная система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ называется *полной,* если в пространстве H не существует элемента отличного от нуля и ортогонального всем элементам этой системы, т. е. из того, что $(x, \varphi_k) = 0, n = 1,2\ldots$, следует $x = \theta$.

Из определения сразу вытекает, что к полной системе $\{\varphi_k\}$ нельзя присоединить элемент так, чтобы она осталась ортонормированной.

Теорема 1.3.12 (о полных системах). *Пусть H – гильбертово пространство, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ – ортонормированная система. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *любой элемент x является суммой своего ряда Фурье;*
2) *система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полная;*
3) *для любого $x \in H$ справедливо равенство Стеклова*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = \|x\|^2;$$

4) *линейная оболочка системы $\{\varphi_k\}$, всюду плотна в H.*

Следствие 1.3.3. Коэффициенты Фурье $C_k = (x, \varphi_k)_H$, $(k = 1, 2, \ldots)$, $\|\varphi_k\|_H = 1$, элемента $x \in H$ стремятся к нулю.

Утверждение данного следствия вытекает из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k|^2$, доказанного в теореме.

Определение 1.3.10. Полная ортогональная (ортонормированная) система $\{\varphi\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ называется *ортогональным (ортонормированным)* базисом в гильбертовом пространстве H.

Ортонормированный базис не является базисом в алгебраическом смысле (за исключением случая, когда H конечномерно).

Теорема 1.3.13. *Для того, чтобы в гильбертово пространство H было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовал ортогональный базис из конечного либо счетного числа элементов.*

Рассмотрим некоторые примеры полных ортонормированных систем, которые используются в теории аппроксимации.

В пространстве $L_2[-1,1]$ классическим примером полной ортонормированной системы является тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\pi t, \sin\pi t, \ldots, \cos k\pi t, \sin k\pi t, \ldots.$$

Ортонормированность системы проверяется непосредственным вычислением. А полнота следует из теоремы об аппроксимации непрерывной функции тригонометрическим многочленом и того факта, что непрерывные функции в $L_2[-1{,}1]$ образуют всюду плотное множество.

Тригонометрическим рядом Фурье функция $x(t) \in L_2[-1,1]$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi t,$$

где

$$a_0 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(t)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t; \quad a_k = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\cos k\pi t \mathrm{d}t,$$

$$b_k = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\sin k\pi t\,\mathrm{d}t.$$

Ряд Фурье в среднеквадратичном сходится $x(t)$ и справедлива оценка

$$\varepsilon^2 = \|x - S_N\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Тригонометрические ряды Фурье принимаются при решении краевых задач математической физики, в цифровой обработке сигналов. Представление в виде тригонометрического ряда по гармоникам удобно, например, тем, что звуковые процессы представляют собой гармоники. Разложение в виде ряда называется спектральным разложением сигнала.

В этом же пространстве $L_2[-1,1]$ можно получить полную ортонормированную систему, применяя процесс ортогонализации к системе функций $1, t, t^2, \ldots$.

Данная система называется системой многочленов Лежандра и имеет вид

$$P_k(t) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left[(t^2-1)^k\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тогда для любой функции $x(t) \in L_2[-1,1]$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(t), \quad C_k = \int_{-1}^{1} x(t) P_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Полиномы Лежандра связаны соотношением

$$(k+1)P_{k+1}(t) - (2k+1)tP_k(t) + kP_{k-1}(t) = 0,$$

откуда

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ P_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,t,\ P_1(t) = \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}(3t^2-1), \ldots.$$

В курсе дифференциальных уравнений полиномы Лежандра известны как ограниченные решения на отрезке $[-1,1]$ дифференциального уравнения Лежандра.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] + n(n+1)x(t) = 0.$$

Полиномы Лежандра применяются при решение краевых задач математической физики.

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим систему

$$\{e^{ik2\pi t},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

Так как по формуле Эйлера

$$\cos 2k\pi t = \frac{e^{i2k\pi t} + e^{-i2k\pi t}}{2}, \quad \sin 2k\pi t = \frac{e^{i2k\pi t} + e^{-i2k\pi t}}{2i},$$

то линейные комбинации рассматриваемой системы $e^{i2k\pi t}$ образуют всюду плотное счетное в $L_2[0,1]$ множество. Тогда

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i2k\pi t},\ C_k = \int_0^1 x(t) e^{-i2k\pi t}\,\mathrm{d}t.$$

Этот ряд называется тригонометрическим рядом в комплексной форме.

В теории вероятностей важную роль играет *система Радемахера*. Она определяется на отрезке $[0,1]$ по формуле

$$r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t)$$

и образует полную ортонормированную систему в $L_2[0,1]$. На нее можно посмотреть как на последовательность независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностью $1/2$.

Алгоритмы сжатия при обработке изображений базируются на методах вейвлет-анализа, основу которого составляет ортонормированный *базис Хаара*, заданный на отрезке $[0,1]$. Функции Хаара – это кусочно-постоянные функции, которые имеют вид

$$\chi_0^{(0)}(t) = 1, \quad \chi_0^{(1)}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}; \\ -1, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1; \\ 0, & t = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \dfrac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant t < \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}; \\ -\sqrt{2^n}, & \dfrac{2k-1}{2^{n+1}} < t \leqslant \dfrac{2k}{2^{n+1}}; \\ 0, & \text{в остальных точках}, \end{cases}$$

где $1 \leqslant k \leqslant 2n$, $n = 0,1,\ldots$. Каждая функция Хаара представляет собой ступеньку такого же вида, как функция $\sqrt{2^n}\,\mathrm{sign}\,t$ на $[-2^{-(n+1)},2^{-(n+1)}]$. Для каждого фиксированного n с ростом k ступенька сдвигается вправо. Вне ступеньки функция равна нулю.

Любую функцию $x(t) \in L_2[0,1]$ можно разложить в ряд Фурье по функциям Хаара

$$x(t) = C_0\chi_0^{(0)}(t) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n} C_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(t).$$

1.3.7. Изоморфизм гильбертовых пространств

Рассмотрим важнейшую теорему о гильбертовых пространствах, которая устанавливает изоморфизм сепарабельных пространств.

Два гильбертовых пространства H_1 и H_2 изоморфны, если существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение

$$f : H_1 \to H_2$$

такое, что

$$(x, y)_{H_1} = (f(x), f(y))_{H_2}.$$

Теорема 1.3.14. *Все конечномерные гильбертовы пространства размерности n изоморфны $\mathbb{C}^n$. Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны пространству ℓ_2.*

Данная теорема справедлива только для сепарабельных пространств.

1.4. Линейные ограниченные операторы

1.4.1. Линейные ограниченные операторы (основные понятия)

Пусть X и Y – нормированные векторные пространства и пусть множество $\mathscr{D}(A) \subseteq X$. Если каждому элементу $x \in \mathscr{D}(A)$ поставлен в соответствие определенный элемент $y \in Y$, то говорят, что задан оператор A и $y = Ax$. При этом множество $\mathscr{D}(A)$ называют *областью определения* оператора A. Множество $\mathscr{R}(A) = \{y \in Y : \exists x \in \mathscr{D}(A), y = Ax\}$ называют *областью значений* оператора A. В дальнейшем мы будем изучать линейные операторы, постоянно встречающиеся в приложениях. К тому же теория линейных операторов, обладающих целым рядом хороших свойств, разработана значительно лучше, чем теория нелинейных операторов.

Определение 1.4.1. Оператор $A : X \to Y$ с областью определения $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ называют *линейным*, если:

1) область определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A – линейное многообразие, т. е. если $x, y \in \mathscr{D}(A)$, то $\alpha x + \beta y \in \mathscr{D}(A)$ для всех скаляров $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$;
2) $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ для любых элементов $x, y \in \mathscr{D}(A)$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$.

Лемма 1.4.1. *Область значений всякого линейного оператора является линейным многообразием.*

Практически наиболее важны два случая задания линейных операторов:

1) $\mathscr{D}(A) = X$, т. е. оператор A задан всюду в нормированном пространстве X;
2) $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$, т. е. оператор A задан плотно в X.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, мы будем рассматривать лишь такие линейные операторы.

Определение 1.4.2. Линейный оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\|_X < \delta$, выполняется $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.

Замечание 1.4.1. В конечномерном пространстве каждый линейный оператор является непрерывным. В бесконечномерном пространстве это утверждение не справедливо. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать линейные непрерывные операторы.

Оказывается, судить о непрерывности линейного оператора в различных точках $x_0 \in X$ можно по непрерывности его в нуле пространства X.

Теорема 1.4.1. *Пусть X, Y – нормированные векторные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор. Тогда следующие свойства оператора A эквивалентны:*

1) *оператор A непрерывен в точке $x = 0$;*
2) *оператор A непрерывен в любой точке пространства X;*
3) *оператор A равномерно непрерывен.*

Определение 1.4.3. Линейный оператор A называется *ограниченным,* если существует константа $c > 0$ такая, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство ограниченности $\|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X$.

Таким образом, ограниченный оператор переводит каждое ограниченное множество в X в ограниченное множество в Y.

Теорема 1.4.2. *Пусть X, Y – нормированные векторные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор. Оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда A ограничен.*

Определение 1.4.4. Множество тех элементов $x \in X$, для которых $Ax = 0$, называется *ядром* линейного оператора и обозначается $KerA$.

Теорема 1.4.3. *Ядро линейного непрерывного оператора $A : X \to Y$ является подпространством пространства X.*

Рассмотрим ограниченный линейный оператор A и запишем условие ограниченности в виде $\dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant c$, или, обозначив через $x_0 = \dfrac{x}{\|x\|}$, будем иметь $\|Ax_0\| \leqslant c$ для $\|x_0\| = 1$.

Таким образом, наименьшая из констант c в неравенстве ограниченности есть точная верхняя грань множества $\{\|Ax\| : \ \|x\| = 1\}$,

$$\inf c = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Определение 1.4.5. Назовем *нормой линейного ограниченного оператора* наименьшую из констант ограниченности,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Определение 1.4.6. Норма $\|A\|$ называется *достижимой*, если существует такой элемент $x_0 \in X$, что

$$\|Ax_0\|_Y = \|A\| \|x_0\|_X.$$

1.4.2. Примеры линейных ограниченных операторов

Простейшими примерами вышеуказанных операторов служат нулевой и тождественный оператор. *Нулевой* оператор каждый элемент x пространства X переводит в нулевой элемент пространства Y, т. е. $0x = \theta$. Он имеет, очевидно, нулевую норму. Оператор I, переводящий каждый элемент пространства X в себя, называется *тождественным*. Его норма равна единице.

Перейдем к рассмотрению более общих примеров.

Пример 56. Пусть A – линейный оператор, отображающий пространство $\mathbb{R}^n$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ с базисом $f_1, \ldots, f_m$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad Ax = A\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i.$$

Разложим вектор $Ae_i \in \mathbb{R}^m$ по базису $f_1, \ldots, f_m$ пространства $\mathbb{R}^m$. Получим

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k.$$

Из определения видно, что линейный оператор в конечномерном пространстве определятся матрицей с элементами a_{ki}, $(k = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n)$, столбцами которой служат координаты векторов $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$ относительно базиса $f_1, \ldots, f_m$. Очевидно, что в конечномерном пространстве каждый линейный оператор ограничен.

Пример 57. Пусть $X = Y = l_2$, $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ – некоторая ограниченная последовательность. Для каждого $x(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) \in l_2$ положим

$$Ax = (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_i x_i, \ldots) \in l_2.$$

Линейность данного оператора очевидна. Ограниченность вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\|Ax\|_{l_2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i x_i|^2 \leqslant \sup_i |\alpha_i| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = c^2 \|x\|_{l_2}^2,$$

т. е. $\|A\| \leqslant \sup\limits_i |\alpha_i| = c$.

Пример 58. Пусть $X = Y = C[a, b]$. Для произвольной функции $x(t) \in C[a, b]$ положим

$$y(t) = Ax(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s) x(s)\, \mathrm{d}s, \tag{1.4.1}$$

где $\mathcal{K}(t,s)$ – ядро интегрального оператора, которое является непрерывной функцией по переменным t, s.

Используя равномерную непрерывность $\mathcal{K}(t,s)$, легко показать непрерывность $y(t)$. Значит, оператор A задает отображение пространства $C[a,b]$ в себя. Оператор A называется *интегральным оператором Фредгольма* с непрерывным ядром.

Теорема 1.4.4. *Формула* (1.4.1) *определяет линейный ограниченный оператор в пространстве* $C[a,b]$ *причем*

$$\|A\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\mathrm{d}s. \tag{1.4.2}$$

Пример 59. В примере 58 в случае непрерывного ядра $\mathcal{K}(t,s)$ возьмем функцию $x(t) \in L_p[a,b]$, $p \geqslant 1$. Тогда функция $y(t)$ будет определена и почти всюду конечна на отрезке $[a,b]$. В самом деле, при любом t_0 $\mathcal{K}(t_0,s)$ непрерывна по $s \in [a,b]$, значит, измерима и ограничена. Пусть $|\mathcal{K}(t_0,s)| \leqslant M$. По условию $x(s)$ суммируема, поэтому интеграл

$$y(t_0) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t_0,s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

определен и конечен,

$$|y(t_0)| \leqslant \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_0,s)||x(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant M\|x\|_{L_1[a,b]}.$$

Покажем, что $y(t) \in C[a,b]$. Используя равномерную непрерывность ядра, будем иметь

$$|y(t) - y(t')| \leqslant \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s) - \mathcal{K}(t',s)|\|x\|\,\mathrm{d}s \to 0$$

при $t \to t'$. Таким образом, $A : L_p[a,b] \to C[a,b]$. При этом

$$\|Ax\|_{C[a,b]} = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big|\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s\Big| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)||x(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant M\|x\|_{L_1[a,b]} \leqslant M(b-a)^{1/q}\|x\|_{L_p[a,b]}.$$

Теорема 1.4.5. *Пусть в* (1.4.1) *функция* $\mathcal{K}(t,s)$ *измерима и удовлетворяет условиям:*

1) найдется такая константа $c > 0$, *что* $\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\,\mathrm{d}s \leqslant c$ *для всех* $t \in [a,b]$;

2) для любого $t_1 \in [a,b]$ $\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t,s)|\,\mathrm{d}s \longrightarrow 0$ *при* $t_1 \to t$.

Тогда интегральный оператор (1.4.1) *ограничен в пространстве* $C[a,b]$.

Пример 60. Пусть $X = Y = L_2[a,b]$. Вновь рассмотрим оператор (1.4.1), но теперь будем предполагать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ интегрируемо с квадратом в прямоугольнике $[a,b]\times[a,b]$:

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = M^2 < \infty. \tag{1.4.3}$$

Теорема 1.4.6. *Пусть* $\mathcal{K}(t,s)$ *– измеримая функция и выполнено условие* (1.4.3). *Тогда формула* (1.4.1) *определяет ограниченный оператор в пространстве* $L_2[a,b]$.

Пример 61. Рассмотрим пример неограниченного оператора. Пусть $X = C^{(1)}[0,\pi]$ и $\|x\|_X = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$, $Y = C[0,\pi]$. Рассмотрим оператор дифференцирования

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : C^{(1)}[0,\pi] \to C[0,\pi].$$

Оператор дифференцирования в пространстве $X = C^{(1)}[0,\pi]$ с нормой пространства $C[0,\pi]$ неограничен, так как для последовательности $x^{(n)}(t) = \sin(nt)$, $n = 1, 2, \ldots$, с нормой $\|x^{(n)}\| = 1$ справедливо следующее соотношение

$$\|Ax^{(n)}\| = \|n\cos(nt)\| = n \max_{0\leqslant t\leqslant\pi} |\cos(nt)| = n \to \infty.$$

1.4.3. Пространство линейных ограниченных операторов

Для многих приложений важную роль играет изучение последовательностей линейных ограниченных операторов.

Пусть X и Y – нормированные векторные пространства, $A, B, \ldots$ – линейные ограниченные операторы, отображающие X в Y, множество которых обозначим через $\mathscr{B}(X,Y)$.

Теорема 1.4.7. *Множество* $\mathscr{B}(X,Y)$ *является нормированным векторным пространством.*

Как и во всяком нормированном пространстве, в $\mathscr{B}(X,Y)$ можно говорить о сходимости последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(X,Y)$.

Определение 1.4.7. Будем говорить, что последовательность линейных ограниченных операторов $A_n \in \mathscr{B}(X,Y)$ сходится *равномерно* к оператору $A \in \mathscr{B}(X,Y)$, если

$$\|A_n - A\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, равномерная сходимость последовательности операторов $A_n \in \mathscr{B}(X,Y)$ – это сходимость по норме пространства $\mathscr{B}(X,Y)$.

Теорема 1.4.8. *Для того, чтобы последовательность линейных ограниченных операторов $A_n \in \mathscr{B}(X,Y)$ сходилась к оператору $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ равномерно, необходимо и достаточно, чтобы $A_n x \rightrightarrows Ax$ при $n \to \infty$ равномерно по x в шаре $\|x\| \leqslant 1$.*

Следствие 1.4.1. Пусть $A_n \rightrightarrows A$ при $n \to \infty$ и $M \subset X$ – произвольное ограниченное множество. Тогда $A_n x \rightrightarrows Ax$ при $n \to \infty$ на множестве M.

Доказательство следствия основано на том, что всякое ограниченное множество содержится в некотором шаре.

Введем в пространстве еще один тип сходимости.

Определение 1.4.8. Пусть X, Y – нормированные векторные пространства. Последовательность $(A_n) \subset \mathscr{B}(X,Y)$ *сильно сходится* (точечно) к оператору A, если для любого $x \in X$ $\|A_n x - Ax\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что если последовательность (A_n) сходится равномерно, то она будет сильно сходится. Действительно, это вытекает сразу из оценки

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leqslant \|A_n - A\| \|x\|.$$

Приведем пример сильно сходящейся последовательности (A_n), которая равномерно не сходится.

Пример 62. В пространстве ℓ_2 рассмотрим полную ортонормированную систему $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда по теореме о разложении в ряд Фурье для каждого элемента $x \in \ell_2$ справедливо разложение $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i e_i$, $C_i = (x, e_i)_{\ell_2}$, а $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i e_i$ представляет собой проекцию элемента x на подпространство $L_n = \mathscr{L}\big\{(e_1, \ldots, e_n)\big\}$. Рассмотрим оператор P_n, который каждому x ставит в соответствие его проекцию $P_n x$ на подпространство L_n. Тогда

$$\|P_n x - x\|^2 = \|\sum_{i=n+1}^{\infty} C_i e_i\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \|C_i\|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

Следовательно, $\|(P_n-I)x\|^2 \leqslant \|x\|^2$. Это означает, что $\|(P_n-I)\| \leqslant 1$ и при этом $\|P_n x - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \|C_i\|^2$ представляет собой остаток сходящегося ряда. Рассмотрим элемент $x_0 = e_{n+1}$, тогда $\|x_0\| = 1$ и

$$\|P_n - I\| \geqslant \|(P_n - I)x_0\| = \|x_0\| = 1,$$

так как $P_n e_{n+1} = 0$. Следовательно, $\|P_n - I\| = 1$. Это означает, что $P_n \to I$ сильно, а равномерная сходимость отсутствует.

В определении предела сильно сходящейся последовательности операторов не требуется, чтобы предельный оператор был линейным и ограниченным. Однако, если операторы A_n являются линейными, то переходя к пределу в равенствах $A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A_n x + \beta A_n y$, убеждаемся, что оператор A будет линейным. Но в неполных пространствах оператор A может оказаться неограниченным.

Упражнение 39. Привести пример последовательности линейных ограниченных операторов, которая сильно сходится к неограниченному оператору.

Для любого нормированного пространства существует понятие полноты. Выясним, когда полно пространство $\mathscr{B}(X, Y)$.

Теорема 1.4.9. *Если пространство Y полно, то и пространство $\mathscr{B}(X, Y)$ полно.*

Рассмотрим несколько примеров сходящихся последовательностей операторов.

Пример 63. Пусть последовательность функций $\mathcal{K}_n(t, s)$, непрерывных на $[a,b] \times [a, b]$, равномерно сходится к функции $\mathcal{K}(t, s)$. Рассмотрим последовательность интегральных операторов Фредгольма

$$A_n x(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_n(t, s) x(s)\, \mathrm{d}s. \tag{1.4.4}$$

Она будет равномерно сходиться к интегральному оператору

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s) x(s)\, \mathrm{d}s. \tag{1.4.5}$$

Действительно, разность $A_n - A$ является интегральным оператором с ядром $\mathcal{K}_n(t, s) - \mathcal{K}(t, s)$. Поэтому по теореме 1.4.4

$$\|A_n - A\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}_n(t, s) - \mathcal{K}(t, s)|\, \mathrm{d}s \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Пример 64. Пусть функция $\mathcal{K}(t,s)$ определена для $[0,1]\times[0,1]$ и имеет вид

$$\mathcal{K}(t,s)=\frac{\mathcal{K}_0(t,s)}{|t-s|^\gamma},\quad 0<\gamma<1, \tag{1.4.6}$$

где $\mathcal{K}_0(t,s)$ – непрерывна функция по совокупности аргументов, т. е. ядро интегрального оператора $\mathcal{K}(t,s)$ является слабополярным. Покажем, что в пространстве $C[0,1]$ оператор (1.4.5) со слабополярным ядром является пределом последовательности (1.4.4) с ядром

$$\mathcal{K}_n(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\mathcal{K}_0(t,s)}{|t-s|^\gamma}, & |t-s|\geqslant\dfrac{1}{n},\\ n^\gamma\mathcal{K}_0(t,s), & |t-s|<\dfrac{1}{n},\end{cases}$$

Действительно,

$$\|A_n-A\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\Big|\int\limits_0^1\big(\mathcal{K}_n(t,s)-\mathcal{K}(t,s)\big)\,\mathrm{d}s\Big|=$$

$$=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}}\Big|\mathcal{K}_0(t,s)\frac{1}{|t-s|^\gamma}-n^\gamma\Big|\,\mathrm{d}s\leqslant\frac{C}{n^{1-\gamma}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Упражнение 40. Привести пример неполного пространства Y и последовательности Коши $(A_n)\subset\mathscr{B}(X,Y)$, которая не имеет предела.

Очень часто встречается в приложениях пространство $\mathscr{B}(X,X)=\mathscr{B}(X)$. В пространстве $\mathscr{B}(X)$ помимо введенных ранее операций над операторами можно ввести еще одну операцию – умножение операторов по формуле

$$(AB)x=A(Bx). \tag{1.4.7}$$

Упражнение 41. Пусть $A,B\in\mathscr{B}(X)$. Показать, что $AB\in\mathscr{B}(X)$.

Вообще говоря, $BA\neq AB$. Равенство выполняется не всегда даже в конечномерных пространствах.

Два оператора $A,B\in\mathscr{B}(X)$ называются *перестановочными* или *коммутативными* если $AB=BA$.

Пусть $A,B\in\mathscr{B}(X)$. Тогда справедливы оценки

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|,\quad \|BA\|\leqslant\|B\|\cdot\|A\|,$$

которые легко проверяются. В пространстве $\mathscr{B}(X)$ существует тождественный оператор I и определена степень A^k оператора $A: A^2 = A \cdot A, \ldots, A^k = A \cdot A^{k-1}$, $A^0 = I$, причем

$$\|A^k\| \leqslant \|A\|^k.$$

Это дает возможность ввести в рассмотрение многочлены от операторов

$$P_N(A) = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k \tag{1.4.8}$$

и функции от операторов.

Пусть $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$ – аналитическая в круге $|\lambda| < R$ функция комплексного переменного λ, $A \in \mathscr{B}(X)$, $\|A\| < R$. Тогда операторная функция $\varphi(A)$ оператора A может быть определена по формуле

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k, \tag{1.4.9}$$

например, $\varphi(A) = e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ или $\varphi(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ при $\|A\| < 1$. Последний ряд носит название ряда *Неймана.*

1.4.4. Принцип равномерной ограниченности

Принцип равномерной ограниченности является одним из трех основных принципов функционального анализа. Он применяется, например, для оценки метода интерполирования по Лагранжу, к представлению функций интегралами Фурье.

Лемма 1.4.2. *Пусть X, Y – нормированные векторные пространства и $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность операторов пространства $\mathscr{B}(X, Y)$. Пусть существуют постоянная $c > 0$ и замкнутый шар $B[x_0, r]$, $r > 0$, такие, что $\|A_n x\| \leqslant c$ для всех $x \in B[x_0, r]$, т. е. последовательность $(A_n x)$ равномерно ограничена на шаре $B[x_0, r]$. Тогда числовая последовательность $\big(\|A_n\|\big)$ ограничена.*

Теорема 1.4.10 (принцип равномерной ограниченности). *Если последовательность $(A_n x)$ в банаховом пространстве Y ограничена при каждом фиксированном x из банахова пространства X, то последовательность $\big(\|A_n\|\big)$ ограничена.*

Из теоремы 1.4.10 можно заключить, что справедлива

Теорема 1.4.11 (принцип фиксации особенности). *Если*

$$\sup_n \|A_n\| = \infty,$$

то найдется такой элемент $\bar{x} \in X$, что

$$\|A_n \bar{x}\| = \infty.$$

В предыдущем пункте мы говорили о том, что в случае сильной сходимости последовательности линейных ограниченных операторов предельный оператор может оказаться неограниченны. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия, при выполнении которых предельный оператор будет ограниченным.

Теорема 1.4.12 (Банаха – Штейнгауза). *Пусть X и Y – банаховы пространства и последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(X, Y)$. Для того, чтобы $A_n \to A \in \mathscr{B}(X, Y)$, $n \to \infty$, сильно, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *последовательность $\big(\|A_n\|\big)$ была ограничена;*
2) *$A_n \to A$, $n \to \infty$, сильно на некотором линейном многообразии X', плотном в X.*

Перейдем к примерам, показывающим применение теоремы Банаха – Штейнгауза в вычислительной математике.

Пример 65. Пусть в прямоугольнике $[a, b] \times [a, b]$ задана последовательность непрерывных функций $\big(\mathcal{K}_n(t, s)\big)$. Будем говорить, что функция $x(t)$ представима через сингулярные интегралы Лебега, если последовательность

$$x^{(n)}(t) = \int_a^b \mathcal{K}_n(t, s) x(s)\, \mathrm{d}s, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.4.10}$$

в некотором смысле сходится к $x(t)$. Такого рода интегралы встречаются в различных вопросах теории аппроксимации. Наша задача – указать необходимые и достаточные условия сходимости последовательности x_n.

Для примера рассмотрим полную ортонормированную в смысле нормы пространства $L_2[a, b]$ систему непрерывных на $[a, b]$ функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$. Рассмотрим частную сумму ряда Фурье (многочлен Фурье) порядка n для функции $x(t)$:

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) \int_a^b x(s) \varphi_j(s)\, \mathrm{d}s = \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) \varphi_j(s) x(s)\, \mathrm{d}s = \int_a^b \mathcal{K}_n(t,s) x(s)\, \mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

где $\mathcal{K}_n(t,s) = \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(t)\varphi_j(s)\,\mathrm{d}s$.

Запишем (1.4.11) в виде последовательности операторов

$$A_n x(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_n(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.4.12}$$

отображающих пространство $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Согласно теореме 1.4.4

$$\|A_n\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}_n(t,s)|\,\mathrm{d}s.$$

Теорема Банаха – Штейнгауза в этом случае будет иметь вид:

Теорема 1.4.13. *Для того, чтобы последовательность* $\left(x^{(n)}(t)\right) \subset C[a,b]$ *сходилась в пространстве непрерывных на отрезке* $[a,b]$ *к функции* $x(t) \in C[a,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\exists M > 0$ *такое, что* $\|A_n\| \leqslant M$;

2) *последовательность* $A_n x(t)$ *сходилась к* $x(t)$ *на всюду плотном в* $C[a,b]$ *множестве функций, например, на множестве алгебраических или тригонометрических многочленов.*

Пример 66. В качестве приложения теоремы Банаха – Штейнгауза рассмотрим вопрос о приближенном вычислении определенного интеграла вида

$$Ax = \int\limits_a^b x(t)\,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in C[a,b]. \tag{1.4.13}$$

Различные методы приближенного вычисления заключаются в том, интеграл заменяется суммой произведений значения интегрируемой функции в соответствующих точках на некоторые коэффициенты, причем точки и коэффициенты не зависят от функции, а зависят от вида квадратурной формулы. Так, в методе трапеций отрезок $[a,b]$ разбивается точками деления $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ на равные промежутки и

$$\int\limits_a^b x(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{2n}\,x(t_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b-a}{n}\,x(t_k) + \frac{b-a}{2n}\,x(t_n).$$

Пусть для каждого натурального n заданы $n+1$ точек $a \leqslant t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \leqslant b$ и числа $A_k^{(n)}, k = 0, 1, \ldots, n$. Выпишем так называемые *квадратурные* *формулы* вида

$$\int\limits_a^b x(t)\,\mathrm{d}t \approx A_n x = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x\bigl(t_k^{(n)}\bigr), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.4.14}$$

где точки $t_k^{(n)}$ называются *узлами*, $t_k^n \neq t_k^m$, $n \neq m$; числа $A_k^{(n)}$ – *весами* квадратурной формулы (1.4.14). Для того, чтобы формула представляла практический интерес, нужно определить ее точность. Например, естественно потребовать, чтобы с ростом n улучшалась точность, т. е. чтобы процесс сходился. Тогда для любой $x(t) \in C[a,b]$ $A_n x \to Ax$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность $A_n x$ в (1.4.14), которая задает последовательность линейных ограниченных операторов. Заметим, что

$$\|A_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|. \tag{1.4.15}$$

Упражнение 42. Докажите формулу (1.4.15).

Потребуем, чтобы при каждом n формула (1.4.14) была точна для всех алгебраических многочленов степени не выше, чем n, т. е. $Ax == A_n x$ для любого $x(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i$. Таким образом, для определения весов получается система уравнений вида

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \bigl(t_k^{(n)}\bigr)^i = \int\limits_a^b t^i\,\mathrm{d}t, \quad i = 0{,}1, \ldots, n.$$

Отметим, что множество многочленов образуют всюду плотное множество в пространстве непрерывных на отрезке $[a{,}b]$ функций.

В формуле (1.4.13) может присутствовать весовая функция $\omega(t)$, т. е. речь идет о приближенном вычислении интеграла вида $\int\limits_a^b \omega(t)x(t)\,\mathrm{d}t$. Существуют различные принципы определения узлов и весов в квадратурной формуле (1.4.14). С помощью выбора весовых функций $\omega(t)$ можно учесть особенности класса интегрируемых функций. Теорема Банаха – Штейнгауза для этого случая формулируется в виде:

Теорема 1.4.14 (Т. Сеге). *Для того, чтобы квадратурный процесс сходился* (1.4.14) *для любой функции* $x(t) \in C[a,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\exists M > 0$ *такое, что* $\sum\limits_{k=1}^{n} |A_k^n| \leqslant M$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$;

2) *сходимость имела место для любого многочлена порядка* n.

Обратимся к рассмотрению случая, когда линейный оператор A задан не на всем пространстве X, однако область его задания $\mathscr{D}(A)$ является всюду плотным множеством в X, т. е. $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$. Для таких операторов можно сформулировать понятие ограниченности. Будем говорить, что линейный оператор $A : X \to Y$ ограничен на $\mathscr{D}(A)$, если существует постоянная $c > 0$, что

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\|, \quad \forall x \in \mathscr{D}(A).$$

Теорема 1.4.15 (о продолжении по непрерывности). *Пусть X – нормированное, Y – банахово пространства и A – линейный ограниченный на $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ оператор, причем $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$. Тогда существует линейный ограниченный оператор $\overline{A}$, являющийся продолжением A, и*

1) $Ax = \overline{A}x$ *для всех* $x \in \mathscr{D}(A)$;

2) $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

Построенное продолжение оператора A называется *продолжением оператора A по непрерывности.*

1.4.5. Обратные операторы. Непрерывная обратимость

Большой класс задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, в частности, системы линейных алгебраических уравнений, можно записать в виде операторного уравнения

$$Ax = y, \tag{1.4.16}$$

где x – неизвестная функция из некоторого нормированного векторного пространства X, y – заданная функция из нормированного векторного пространства Y, A – линейный оператор, отображающий X в Y. Выясним, при каких условиях уравнение (1.4.16) имеет единственное решение и как зависит это решение от известной функции $y \in Y$. Этот круг вопросов связан с обратимостью оператора A.

Итак, пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ и областью значений $\mathscr{R}(A) \subseteq Y$. Если оператор A осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{D}(A)$ и $\mathscr{R}(A)$, то к оператору A существует обратный оператор A^{-1}, и решение уравнения (1.4.16) может быть записано в явном виде

$$x = A^{-1}y, \tag{1.4.17}$$

Выясним, когда это возможно.

Теорема 1.4.16. *Линейный оператор A переводит $\mathscr{D}(A)$ в $\mathscr{R}(A)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда*

$$KerA = \{x \in \mathscr{D}(A) : Ax = 0\} = \{0\}. \tag{1.4.18}$$

Пусть A отображает $\mathscr{D}(A)$ на $\mathscr{R}(A)$ взаимно однозначно и является линейным оператором. Тогда A^{-1} взаимно однозначно отображает $\mathscr{R}(A)$ на $\mathscr{D}(A)$ и также является линейным, т. е. справедлива

Теорема 1.4.17. *Если $A : X \to Y$ линеен, то и $A^{-1} : Y \to X$ линеен.*

Таким образом, если оператор $A : X \to Y$, то обратный к нему оператор $A^{-1} : Y \to X$ определен на $\mathscr{R}(A)$ и принимает значения в $\mathscr{D}(A)$ и при этом

$$\begin{aligned} &A^{-1}Ax = x, \quad x \in \mathscr{D}(A), \\ &AA^{-1}Ay = y, \quad y \in \mathscr{R}(A). \end{aligned} \tag{1.4.19}$$

Если оператор A является ограниченным, то оператор A^{-1} при этом может оказаться неограниченным. Выясним, в каком случае он будет ограниченным.

Теорема 1.4.18. *Оператор A^{-1} существует и одновременно ограничен на $\mathscr{R}(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in \mathscr{D}(A)$ выполняется неравенство*

$$\|Ax\| \geqslant m\|x\|. \tag{1.4.20}$$

Определение 1.4.9. Будем говорить, что линейный оператор $A : X \to Y$ *непрерывно обратим*, если $\mathscr{R}(A) = Y$, оператор A обратим и A^{-1} ограничен.

Рассмотрим теперь случай, когда ограниченный линейный оператор A задан на всем пространстве X.

Теорема 1.4.19 (Банаха об обратном операторе). *Пусть X и Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, отображающий X в Y взаимно однозначно. Тогда обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$ ограничен.*

Приведем некоторые важные следствия из этой теоремы.

Следствие 1.4.2. Пусть на векторном пространстве X заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ и пространство X полно относительно каждой из норм. Если $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$ для всех $x \in X$, то эти нормы эквивалентны.

Следствие 1.4.3. Пусть X, Y – банаховы пространства. Если линейное непрерывное отображение A отображает все пространство X на все Y, то отображение A открыто.

Упражнение 43. Доказать следствие 1.4.3.

Пример 67. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма

$$Ax(t) \equiv x(t) - \int\limits_0^1 t^2 s^3 x(s)\,\mathrm{d}s = y(t),$$

или $Ax(t) = y(t)$. Тогда $x(t) = y(t) + t^2 c$, где

$$c = \int\limits_0^1 s^3 x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Подставляя в данную формулу выражение для $x(s)$, получим

$$c = \int\limits_0^1 s^3 (cy(s) + cs^3)\,\mathrm{d}s = \frac{6}{5}\int\limits_0^1 s^3 y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Значит, при любой правой части $y(t) \in C[0,1]$ решение исходного уравнения имеет вид

$$x(t) = y(t) + \frac{6}{5}\int\limits_0^1 t^2 s^3 y(s)\,\mathrm{d}s \equiv A^{-1}y(t).$$

Мы доказали непрерывную обратимость оператора A.

Более подробно уравнения второго рода, в том числе и интегральные, будут рассмотрены в последующих пунктах.

1.4.6. Линейные операторные уравнения и их решения

Разрешимость линейных операторных уравнений зависит как от свойств оператора так и от размерности пространства.

Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, тогда он всегда будет непрерывным. Разрешимость уравнения

$$Ax = y \tag{1.4.21}$$

как мы выяснили в п. 1.4.5 связана с существованием обратного оператора A^{-1}, т. е. оператор A должен быть сюръективным. В конечномерном пространстве справедлива следующая теорема

Теорема 1.4.20. *Для линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) A биективен;

2) $Ker A = \{0\}$, т. е. оператор A инъективен;

3) A сюръективен.

Упражнение 44. Докажите теорему 1.4.20.

Итак, если ядро оператора является нулевым, т. е. однородное уравнение имеет только нулевое решение, то неоднородное уравнение (1.4.21) разрешимо при любой правой части $y \in \mathbb{R}^n$ и имеет единственное решение. Для того, чтобы

$KerA = \{0\}$ достаточно в $\mathbb{R}^n$, чтобы определитель матрицы, описывающий оператор A, был равен нулю.

Теперь пусть X, Y – бесконечномерные банаховы пространства, A – линейный непрерывный, т. е. ограниченный оператор. В бесконечномерном пространстве линейный оператор не обязательно непрерывен, поэтому целесообразно в таких пространствах рассматривать линейные непрерывные операторы. Рассмотрим уравнение (1.4.21). Выясним, что измениться теперь. Как показано в п. 1.4.5, если $KerA = \{0\}$, то оператор A взаимно однозначно отображает $\mathscr{D}(A)$ в $\mathscr{R}(A)$, т. е. уравнение (1.4.21) разрешимо только при $y \in \mathscr{R}(A)$. Рассмотрим следующий пример.

Пример 68. Пусть $A : C[0,1] \to C[0,1]$ – оператор, определенный формулой

$$Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Оператор A задан на всем пространстве $C[0,1]$. Заметим, что ядро $KerA = \{0\}$, поскольку однородное уравнение имеет только нулевое решение. Однако $\mathscr{R}(A) = \{y(t) \in C[0,1] : y(t) \in C^{(1)}[0,1], y(0) = 0\}$, поэтому оператор A не является сюръективным и, следовательно, уравнение разрешимо не при любой правой части.

Данный пример показывает, что известные результаты для обратных операторов в конечномерных пространствах нельзя непосредственно перенести на бесконечномерные пространства. Наша задача, найти условия обратимости оператора A в бесконечномерном пространстве и описать свойства обратного. Если оператор A непрерывно обратим, то уравнение (1.4.21) имеет единственное решение при любой правой части $y \in Y$. Пусть теперь $\tilde{x}$ – решение возмущенного уравнения

$$Ax = \tilde{y}. \tag{1.4.22}$$

Тогда

$$\|\tilde{x} - x\| \leqslant \|A^{-1}\| \|\tilde{y} - y\|.$$

Это означает, что $\|\tilde{y} - y\| \to 0$ будет и $\|\tilde{x} - x\| \to 0$. Другими словами, малое изменение правой части y в (1.4.21) влечет за собой малое изменение решения x в (1.4.21).

Определение 1.4.10. Будем говорить, что уравнение (1.4.21) *корректно разрешимо*, если

1) решение x уравнения (1.4.21) существует для любой правой части $y \in Y$;
2) решение единственно;
3) решение непрерывно зависит от входных данных $y \in Y$.

Таким образом, корректная разрешимость уравнения (1.4.21) эквивалентна непрерывной обратимости оператора A.

Как показал предыдущий пример, не всегда уравнение (1.4.21) разрешимо при любой правой части $y \in Y$, если решение существует, то оно может оказаться не единственным. Далее, решение может существовать лишь при определенных условиях, налагаемых на правую часть. Чтобы осветить круг этих вопросов, введем в рассмотрение для линейного оператора $A : X \to Y$ правый и левый обратные операторы.

Определение 1.4.11. Оператор $A_r^{-1} : Y \to X$ называется *правым обратным оператором* к линейному оператору $A : X \to Y$, если $AA_r^{-1} = I_y$ для любого $y \in \mathscr{R}(A)$. Оператор $A_l^{-1} : Y \to X$ называется *левым обратным оператором* к A, если $A_l^{-1}A = I_x$ для любого $x \in \mathscr{D}(A)$.

Теорема 1.4.21. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) решение уравнения (1.4.21) *единственно для любого $y \in \mathscr{R}(A)$;*

2) $KerA = \{0\}$, т. е. оператор A инъективен;

3) для оператора A существует левый обратный оператор A_l^{-1}.

Теорема 1.4.22. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) решение уравнения (1.4.21) *существует для любого $y \in Y$;*

2) $\mathscr{R}(A) = Y$, т. е. оператор A сюръективен;

3) к оператору A существует правый обратный оператор A_r^{-1}.

Приведем примеры левого и правого обратных операторов.

Пример 69. В пространстве ℓ_2 бесконечных числовых последовательностей со сходящимися рядами рассмотрим полную ортонормированную систему $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, $e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots)$.

Определим линейный оператор A на элементах базиса следующей формулой

$$Ae_1 = 0, \quad Ae_i = e_{i-1}, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Очевидно, что оператор A является оператором сдвига и $\|A\| = 1$. Определим оператор A_r^{-1} следующим образом:

$$A_r^{-1}e_i = e_{i+1} + c_i e_1, \quad i = 1, 2, \ldots ,$$

где c_i, $i = 1, 2, \ldots$ – некоторые произвольные постоянные, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$.

Покажем, что A_r^{-1} – правый обратный к оператору A. Действительно,

$$AA_r^{-1}e_i = A(e_{i+1} + c_i e_1) = Ae_{i+1} + c_i Ae_1 = e_i, \ i = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим ядро оператора A. $KerA = \{x \in \ell_2 : Ax = 0\}$. Пусть $x \in \ell_2$, $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in KerA$. Тогда

$$A\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i A e_i = x_1 \cdot 0 + \sum_{i=2}^{\infty} x_i e_{i-1} = 0.$$

Откуда следует, что вектор $e_1 = (1, 0, \ldots, 0, \ldots) \in KerA$. Таким образом, $KerA$ представляет собой одномерное подпространство, порожденное вектором e_1. Из теоремы 1.4.21 следует, что к оператору A не определен левый обратный оператор. По построению правых обратных операторов бесконечно много.

Покажем, что $\mathscr{R}(A) = \ell_2$. Рассмотрим $y \in \ell_2$. Тогда $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i e_i$ и его прообраз $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ определиться следующим образом:

$$x_{i+1} = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, x_1 = a, \ a \in \mathbb{R},$$

где a – произвольное число.

Таким образом, уравнение $Ax = y$ разрешимо при любой правой части $y \in \ell_2$ и имеет бесконечно много решений.

Упражнение 45. Пусть $A : \ell_2 \to \ell_2$ и действует по формуле

$$Ae_i = e_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Показать, что $KerA = \{0\}$ и, следовательно, к оператору A существует левый обратный оператор. Построить A_l^{-1}. Описать множество $\mathscr{R}(A)$.

Таким образом, к линейному ограниченному оператору может существовать семейство левых обратных либо правых обратных операторов. Однако справедлива

Теорема 1.4.23. *Пусть $A \in \mathscr{B}(X, Y)$ и пусть существуют операторы A_l^{-1} и A_r^{-1}. Тогда существует обратный оператор A^{-1} и*
1) $A^{-1} = A_l^{-1} = A_r^{-1}$;
2) $\mathscr{D}(A^{-1}) = Y$ $\mathscr{R}(A^{-1}) = X$;
3) A_l^{-1} и A_r^{-1} единственны.

Упражнение 46. Доказать, что операторы A_l^{-1} и A_r^{-1} единственны.

Теория обратных операторов используется при обосновании вычислительных методов. Итак, пусть u – приближенное решение уравнения (1.4.21), $\varepsilon = x - u$ – вычислительная ошибка, $r = y - Au$ – невязка. При реальных вычислениях нас интересуют следующие проблемы:

1) имея приближенное решение u уравнения (1.4.21), оценить по невязке r сверху и снизу норму относительной ошибки;

2) оценить сверху норму относительной ошибки при некоторых возмущениях в (1.4.21) оператора A и правой части y.

Рассмотрим вкратце первую проблему. Пусть X – банахово пространство, $A : X \to X$, $A \in \mathscr{B}(X)$. Назовем число

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \tag{1.4.23}$$

числом обусловленности оператора A. Очевидно, что

$$k(A) = k(A^{-1}),\ k(A) \geqslant 1,$$

поскольку $AA^{-1} = I$ и

$$\|I\| = 1 \leqslant \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = k(A).$$

Воспользуемся соотношениями

$$x = A^{-1}y, \quad A\varepsilon = r, \quad \varepsilon = A^{-1}r \tag{1.4.24}$$

Тогда из соотношений (1.4.24) и уравнения (1.4.21) получаем неравенства

$$\begin{aligned} \|y\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|, \quad \|x\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|y\|, \\ \|r\| \leqslant \|A\| \cdot \|\varepsilon\|, \quad \|\varepsilon\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|r\|. \end{aligned} \tag{1.4.25}$$

Покажем, что для величины относительной погрешности $\|\varepsilon\|\|x\|$ справедливо неравенство

$$k^{-1}(A)\frac{\|r\|}{\|y\|} \leqslant \frac{\|\varepsilon\|}{\|x\|} \leqslant k(A)\frac{\|r\|}{\|y\|}, \tag{1.4.26}$$

в которое входят только $k(A)$, норма правой части и норма невязки.

Действительно, из (1.4.25) получаем

$$\frac{\|\varepsilon\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|A\|^{-1}\|y\|} = k(A)\frac{\|r\|}{\|y\|}.$$

Действительно, из (1.4.25) получаем

$$\frac{\|\varepsilon\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|A\|^{-1}\|r\|}{\|A^{-1}\|\|y\|} = k^{-1}(A)\frac{\|r\|}{\|y\|}.$$

Неравенство (1.4.26) может быть использовано для оценки точности различных приближенных методов решения уравнения (1.4.21).

1.4.7. Линейные операторные уравнения второго рода

Теперь мы будем рассматривать уравнения второго рода. Наша цель – выяснить условия непрерывной обратимости оператора уравнения и обосновать методы приближенного решения такого уравнения, основанные на рассмотрении аппроксимирующего оператора, в некотором смысле близкого к исходному, при условии, что его обратный известен.

Пусть X – банахово пространство и $A : X \to X$ – линейный ограниченный оператор. Рассмотрим операторное уравнение второго рода

$$x - Ax = y. \tag{1.4.27}$$

Как и в предыдущих пунктах нас будет интересовать при каких условиях на оператор $A \in \mathscr{B}(X)$ уравнение (1.4.27) корректно разрешимо.

Теорема 1.4.24. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$, норма которого $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим и при этом справедливы оценки*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad \|I - (I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}. \tag{1.4.28}$$

Замечание 1.4.2. Для оператора $S = (I - A)^{-1}$ справедливо двойное представление

$$S = (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \prod_{k=0}^{\infty} \bigl(I + A^{2^k}\bigr). \tag{1.4.29}$$

Упражнение 47. Докажите формулу (1.4.29)

Теорема 1.4.24 является некоторым усилением принципа сжимающих отображений для линейных операторов в банаховых пространствах. А именно: решение уравнения (1.4.27) есть неподвижная точка отображения $f(x) = Ax + y$, которое является сжимающим при условии $\|A\| < 1$.

Наряду с уравнением (1.4.27), рассмотрим более общее уравнение, а именно: уравнение с параметром λ

$$x - \lambda Ax = y. \tag{1.4.30}$$

Далее для него можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 1.4.24

Теорема 1.4.25. *Пусть X – банахово пространство, оператор $A \in \mathscr{B}(X)$ и $\|\lambda\| < 1/\|A\|$. Тогда оператор $I - \lambda A$ непрерывно обратим, причем*

$$(I - \lambda A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k. \tag{1.4.31}$$

Теорема 1.4.25 непосредственно вытекает из 1.4.24.

При обосновании вычислительных алгоритмов часто используется теорема, которую называют теоремой о четырех шарах.

Теорема 1.4.26 (о четырех шарах). *Если $A, A^{-1} \in \mathscr{B}(X)$, то множество G элементов $\mathscr{B}(X)$, имеющих в $\mathscr{B}(X)$ обратный, содержит вместе с операторами A и A^{-1} два шара*

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ B \in \mathscr{B}(X) : \|A - B\| < \frac{1}{A^{-1}} \right\}, \\ B_2 &= \left\{ B \in \mathscr{B}(X) : \|A^{-1} - B\| < \frac{1}{A} \right\}. \end{aligned} \tag{1.4.32}$$

Если оператор B лежит в шаре B_1, то

$$B^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(A - B)A^{-1}]^n, \tag{1.4.33}$$

или

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [A^{-1}(A - B)]^n A^{-1}, \tag{1.4.34}$$

причем справедливо неравенство

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|}{1 - \|A - B\| \|A^{-1}\|}; \tag{1.4.35}$$

если $B_\varepsilon \in G$ и $\|B_\varepsilon - A\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то и $\|B_\varepsilon^{-1} - A^{-1}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Если оператор B лежит в шаре B_2, то

$$B^{-1} = A \sum_{n=0}^{\infty} [(A^{-1} - B)A]^n, \tag{1.4.36}$$

или

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [A(A^{-1} - B)]^n A, \tag{1.4.37}$$

причем справедливо неравенство

$$\|B^{-1} - A\| \leqslant \frac{\|A\|^2 \|A^{-1} - B\|}{1 - \|A^{-1} - B\| \|A\|};$$

если $B_\varepsilon \in G$ и $\|B_\varepsilon - A^{-1}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то и $\|B_\varepsilon^{-1} - A^{-1}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Следствие 1.4.4. Множество обратимых операторов в пространстве $\mathscr{B}(X)$ открыто.

Следствие 1.4.5. Пусть $A \in \mathscr{B}(X)$ – непрерывно обратимы и пусть последовательность $A_n \subset \mathscr{B}(X)$, равномерно сходится к . Тогда, начиная с некоторого номера $n_0 \in N$ все операторы A_n непрерывно обратимы и $A_n^{-1} \rightrightarrows A^{-1}$ при $n \to \infty$.

Теорема 1.4.26 используется при обосновании вычислительных методов. А именно: требуется оценить норму относительно ошибки, если оператору задачи и правой части придать некоторое возмущение; оценить по невязке норму относительной ошибки.

Теперь выясним, что можно сказать об обратном к A операторе, если известен оператор A_0^{-1}, где A_0 в некотором смысле аппроксимирует A? Пусть $B = A_0 - A$, тогда $A = A_0 - B = A_0\big(I - A_0^{-1}\big)$. Предположим, что $\|B\| \leqslant \|A_0^{-1}\|^{-1}$. Тогда $\|A_0^{-1}B\| < 1$ и по теореме 1.4.24 $\big(I - A_0^{-1}\big)^{-1} \in \mathscr{B}(X)$. Следовательно, $A^{-1} \in \mathscr{B}(X)$ и

$$A^{-1} = \Big[A_0\big(I - A_0^{-1}B\big)\Big]^{-1} = \big(I - A_0^{-1}B\big)^{-1}A_0^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\big(A_0^{-1}B\big)^k A_0^{-1}.$$

Тогда

$$\|A^{-1} - A_0^{-1}\| \leqslant \|A_0^{-1}\| \sum_{k=1}^{\infty}\big\|A_0^{-1}\big\|^k \|B\|^k =$$

$$= \big\|A_0^{-1}\big\|^2 \|B\| \Big[1 - \big\|A_0^{-1}B\big\| \|B\|\Big]^{-1}.$$

Тем самым доказана теорема

Теорема 1.4.27. *Пусть X – банахово пространство, операторы $A, A_0, A_0^{-1} \in \mathscr{B}(X)$. Пусть $\Delta = \|A - A_0\| \big\|A_0^{-1}\big\| < 1$. Тогда оператор $I - \lambda A$ непрерывно обратим, причем*

$$A^{-1} = \Big[\sum_{k=0}^{\infty}\big(A_0^{-1}(A_0 - A)^n\big)\Big]A_0^{-1}, \|A^{-1} - A_0^{-1}\| \leqslant (1 - \Delta)^{-1}\Delta\|A_0^{-1}\|.$$

Эта теорема описывает результаты, которые получаются в теории возмущений.

Рассмотрим уравнение (1.4.21). Предположим, что оператор A претерпевает некоторые возмущения, возмущенный оператор B удовлетворяет условию (1.4.32), т. е. $\|A - B\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$ и для него рассматривается задача вида

$$Bu = y + \delta y, \tag{1.4.38}$$

где δy – возмущение правой части, u – решение (1.4.38), определяемое формулой $u = B^{-1}(y + \Delta y)$. Рассмотрим оценку для относительной ошибки $\|x - u\| \| \|x\|$, возникающей от замены уравнения (1.4.21) на уравнение (1.4.38). Пусть $B = A + \Delta A$, тогда

$$u - x = (B^{-1}A - I)x + B^{-1}\Delta y. \tag{1.4.39}$$

Используя разложение оператора B^{-1} в ряд и оценивая сверху ряды в слагаемых (1.4.39) по норме, получим

$$\|u-x\| \leqslant \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\| \|x\| + \|\Delta y\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|}. \tag{1.4.40}$$

Далее, разделим обе части (1.4.40) $\|x\|$, получим

$$\frac{\|u-x\|}{\|u\|} \leqslant \frac{k(A)}{1 - k(A)\|\Delta A\|/\|A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} \right). \tag{1.4.41}$$

1.4.8. Применение теории обратных операторов к интегральным уравнениям

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с параметром λ, записанное в виде

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s = y(t), \tag{1.4.42}$$

где функция $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$ и $x(t), y(t) \in C[a,b]$.

Уравнение (1.4.42) можно представить в виде

$$x - \lambda A x = y, \tag{1.4.43}$$

обозначив через A интегральный оператор Фредгольма. Тогда исследование интегрального уравнения (1.4.43) можно провести с использование теоремы 1.4.25.

Теорема 1.4.28. *Пусть ядро интегрального оператора Фредгольма* $\mathcal{K}(t,s)$ *непрерывно в области* $\Omega = [a,b]\times[a,b]$, *пусть параметр* λ *таков, что* $|\lambda|\|A\| < 1$. *Тогда для любого* $y(t) \in C[a,b]$ *существует единственное непрерывное решение* $x(t)$ *уравнения* (1.4.42), *представимое в виде.*

$$x(t) = y(t) + \lambda \int\limits_a^b R(t,s;\lambda)y(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.4.44}$$

где

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n-1}\mathcal{K}_n(t,s), \tag{1.4.45}$$

$$\mathcal{K}_n(t,s) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,\tau)\mathcal{K}_{n-1}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.4.46}$$

Функция $R(t, s; \lambda)$ называется *разрешающим ядром* или *резольвентой ядра* $\mathcal{K}(t, s)$, $\mathcal{K}_n(t, s)$ – повторным ядром.

Формула (1.4.44) верна лишь при λ, удовлетворяющих условию

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \tag{1.4.47}$$

где $M = \max\limits_{(t,s)\in\Omega} |\mathcal{K}(t, s)|$. Поэтому такие интегральные уравнения называются *уравнениями с малыми ядрами.*

Существуют ядра, для которых формула (1.4.44) определяет решение при любом значении λ Например, если $\mathcal{K}_2(t, s) = 0$, тогда все повторные ядра обращаются в нуль. Это случай ядра, ортогонального самому себе. Примером такого ядра служит ядро $\mathcal{K}(t, s) = \; = \sin(t)\cos(s)$, $0 \leqslant t, s \leqslant \pi$.

Упражнение 48. Решить с помощью резольвенты интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^1 tsx(s)\,\mathrm{d}s + y(t).$$

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^t \mathcal{K}(t, s)x(s)\,\mathrm{d}s + y(t). \tag{1.4.48}$$

Уравнения (1.4.48) можно рассматривать как частный случай уравнения (1.4.42), если в нем рассмотреть ядро

$$\mathcal{K}(t, s) = \begin{cases} \mathcal{K}(t, s), & s \leqslant t, \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

Поэтому к уравнению (1.4.48) применима вся выше изложенная теория.

Теорема 1.4.29. *Пусть $\mathcal{K}(t, s)$ непрерывная функция по переменным t и s. Тогда для любой непрерывной функции $y(t)$ в пространстве $C[a, b]$ существует единственное решение уравнения* (1.4.48), *которое можно представить в виде*

$$x(t) = y(t) + \lambda \int\limits_a^t R(t, s; \lambda)\, y(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.4.49}$$

где

$$R(t, s; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n-1} \mathcal{K}_n(t, s), \tag{1.4.50}$$

$$\mathcal{K}_n(t, s) = \int\limits_s^t \mathcal{K}(t, \tau)\mathcal{K}_{n-1}(\tau, s)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.4.51}$$

Упражнение 49. Покажите, что резольвента $R(t, s; \lambda)$ уравнения Вольтерра (1.4.48) удовлетворяет уравнению

$$R(t, s; \lambda) = \mathcal{K}(t, s) + \lambda \int\limits_s^t \mathcal{K}(t, \tau) R(\tau, s; \lambda)\, \mathrm{d}s.$$

Пример 70. С помощью резольвенты решим интегральное уравнение Вольтерра вида

$$x(t) = e^t + \int\limits_0^t e^{t-s} x(s)\, \mathrm{d}s.$$

В нашем случае $\lambda = 1$, $\mathcal{K}(t,s) = e^{t-s}$. Вычислим итерированные ядра

$$\mathcal{K}_2(t, s) = \int\limits_s^t e^{t-\tau} e^{\tau - s}\, \mathrm{d}\tau = e^{t-s}(t - s),$$

$$\mathcal{K}_3(t, s) = \int\limits_s^t e^{t-\tau} e^{\tau - s}\, \mathrm{d}\tau = e^{t-s}\frac{(t - s)^2}{2!},$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{K}_n(t, s) = e^{t-s}\frac{(t - s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Резольвента $R(t,s;1)$ представляет собой следующую сумму

$$R(t, s; 1) = e^{t-s} + e^{t-s}\frac{t-s}{1!} + \ldots + e^{t-s}\frac{(t-s)^n}{n!} + \ldots = e^{2(t-s)}.$$

Тогда решение исходного уравнения запишется по формуле (1.4.49) в виде

$$x(t) = e^t + \int\limits_0^t e^{2(t-s)} e^s \mathrm{d}s = e^{2t}.$$

Замечание 1.4.3. Решение интегрального уравнения Вольтерра, как видно из (1.4.42)

Рассмотрим вопрос о приближенном решении уравнения (1.4.42). Этот метод основан на том, что ядро интегрального оператора $\mathcal{K}(t, s)$ заменяется на ядро $\mathcal{K}_0(t, s)$, для которого разрешимо уравнение

$$x(t) - \lambda \int\limits_a \mathcal{K}_0(t, s)\, y(s)\, \mathrm{d}s = y(t) \qquad (1.4.52)$$

по теореме 1.4.28. Это может быть случай уравнения с вырожденным ядром. Пусть $x_0(t)$ его решение. Если $y(t) \in C[a,b]$ и $\|\mathcal{K}_0\| < 1$, тогда по теореме 1.4.28 уравнение (1.4.42) имеет решение и справедлива оценка

$$\|x - x_0\| \leqslant (1-\Delta)^{-1}\Delta\big(1 - \|\mathcal{K}_0\|\big)^{-1}\|y\|. \tag{1.4.53}$$

Полученная оценка погрешности (1.4.53) используется при численном решении интегральных уравнений.

1.5. Сопряженное пространство и сопряженные операторы

1.5.1. Линейные ограниченные функционалы

Пусть X – нормированное векторное пространство. Рассмотрим оператор $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, который назовем *функционалом.* Обозначим его как $f(x)$, $x \in X$.

Определение 1.5.1. Функционал f называется *линейным функционалом*, если $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Линейный функционал f называется *ограниченным*, если для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant C\|x\|_X$ сразу для всех $x \in X$. Наименьшая из констант C, совпадающая с числом $\sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$ называется *нормой* функционала и обозначается $\|f\|$.

Ограниченность функционала эквивалентна его непрерывности. Все теоремы, сформулированные выше для линейных операторов, справедливы и для линейных функционалов.

Остановимся на примерах линейных ограниченных функционалов.

Пример 71. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ – его базис. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathbb{R}^n$ и разложим его по базису: $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. Рассмотрим линейный функционал f на элементе x, тогда

$$f(x) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = (x,y)_{\mathbb{R}^n},$$

где $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n)$, $y_k = f(e_k)$. Из оценки $|f(x)| = |(x,y)| \leqslant \|y\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}$ вытекает, что все линейные функционалы в пространстве $\mathbb{R}^n$ являются ограниченными и $\|f\| \leqslant \|y\|_{\mathbb{R}^n}$.

Пример 72. Пусть X – пространство непрерывных функций $C[a,b]$. Рассмотрим функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k x(t_k)$, где $\{t_k\}_{k=1}^{n}$ – система точек на отрезке $[a,b]$. Примером такого функционала являются конечные разности функции

$x(t) \in C[a,b]$. Данный функционал ограничен. Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k||x(t_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k| \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|, \quad \|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k|.$$

Пример 73. Определим на пространстве $C[a,b]$ функционал вида

$$f(x) = \int_a^b a(t)x(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $a(t)$ – непрерывная либо суммируемая функция. Примером такого функционала служат коэффициенты Фурье. Данный функционал линеен и ограничим, причем $\|f\| \leqslant \int\limits_a^b |a(t)|\,\mathrm{d}t$.

Рассмотрим множество линейных ограниченных функционалов, определенных на нормированном пространстве X, $\mathscr{B}(X,\mathbb{C})$. Это банахово пространство, так как пространство $\mathbb{C}$ банахово. Оно называется *сопряженным* пространством пространству X и обозначается X^*.

В банаховом пространстве X^* можно рассматривать два типа сходимости.

Определение 1.5.2. Последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ сходится к $f \in X^*$

- *сильно*, если $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
- *слабо*, если $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ для любого $x \in X$.

С помощью сопряженного пространства в пространстве X можно ввести новый тип сходимости.

Определение 1.5.3. Последовательность $(x^{(n)}) \subset X$ сходится в пространстве X к элементу $x \in X$ *слабо*, если для любого линейного непрерывного функционала $f \in X^\star$ справедливо $f(x^{(n)}) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

1.5.2. Продолжение линейного функционала

Ранее мы рассматривали теорему 1.4.13 о продолжении линейного ограниченного оператора. Теперь обратимся к вопросу о продолжении линейного ограниченного функционала. Это теорема Хана-Банаха. Она является одной из основных теорем функционального анализа и справедлива для нормированного пространства общего вида. Мы докажем ее для случая сепарабельного банахова пространства.

Теорема 1.5.1 (Хана–Банаха). *Пусть X – сепарабельное банахово пространство, X_0 – его подпространство, на котором задан линейный ограниченный функционал f_0. Тогда существует линейный ограниченный функционал*

$f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, *продолжающий* f_0, *и при том такой, что*

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

В случае произвольного пространства X для доказательства используется лемма Цорна.

Упражнение 50. В пространстве $X = \mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\|_{\mathbb{R}^2} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ задано подпространство $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - 2x_2 = 0\}$. Определим на L функционал $f_0(x) = x_1$ для всех $x \in L$. Построить его продолжение на все пространство $\mathbb{R}^2$.

1.5.3. Следствия из теоремы Хана–Банаха

Теорема Хана – Банаха представляет собой один из фундаментальных результатов функционального анализа и будет в дальнейшем часто применяться. Прежде всего она позволяет ответить на вопрос, если $X \neq \varnothing$, то существует ли вообще на X линейные ограниченные функционалы, т. е. будет ли $X^* \neq \varnothing$. Ответ на этот вопрос положителен.

Следствие 1.5.1 (об отделимости точек в пространстве X). Пусть X – нормированное пространство и $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Тогда существует такой линейный ограниченный функционал в пространстве X, что

1) $\|f\| = 1$;
2) $f(x_0) = \|x_0\|$.

Данное следствие можно сформулировать еще и так : пусть $x, y \in E$ и $x \neq y$, тогда существует такой функционал $f \in X^*$, что $f(x) \neq f(y)$, т. е. функционал f разделяет точки x и y в пространстве X. Это означает, что линейных ограниченных функционалов так много как точек в нормированном векторном пространстве, на котором данные функционалы заданы.

Упражнение 51. Выяснить геометрический смысл следствия в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Следствие 1.5.2 (об отделимости точки от пространства). Пусть в нормированном пространстве X задано подпространство X_0 и элемент $x_0 \in X$ такой, что $\rho(x_0, X_0) = d > 0$. Тогда существует линейный ограниченный функционал $f \in X^*$, что

1) $f(x_0) = 1$;
2) $f(x) = 0$ для всех $x \in X_0$;
3) $\|f\| = \dfrac{1}{d}$.

Следствие 1.5.3. Множество M всюду плотно в нормированном пространстве X тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in X^*$ такого, что $f(x) = 0$ для всех $x \in M$ следует, что $f = 0$, т. е. $f(x) = 0$, $x \in X$.

Следствие 1.5.4. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ – линейно-независимая система элементов в нормированном пространстве X. Тогда найдется система $\{f_e\}_{e=1}^n$ – линейных ограниченных функционалов на X, что

$$f_e(x_k) = \begin{cases} 1, k = e, \\ 0, k \neq e, \ k, e = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Определение 1.5.4. Система $\{x_k\}_{k=1}^1 \subset X$ и система функционалов $\{f_e\}_{e=1}^n \subset X^*$ называются *биортогональными*, если

$$f_e(x_k) = \begin{cases} 1, e = k, \\ 0, e \neq k, k, e = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Следствие 1.5.5. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X^*$ – линейно независимая система функционалов. Тогда в X найдется система элементов $\{x_e\}_{e=1}^n \subset E$, биортогональная к ней.

1.5.4. Структура сопряженного пространства

В примере 71 п. 1.5.1 мы показали, что всякий линейный функционал f в пространстве $\mathbb{R}^n$ ограничен и имеет вид $f(x) = (x, y)$, где $y = = (y_1, \ldots, y_n)$, $y_i = f(e_i)$, $e_1, \ldots, e_n$ – базис $\mathbb{R}^n$, причем $\|f\| \leqslant \|y\|$. С другой стороны, пусть $x_0 = (\text{sign } y_1, \text{sign } y_2, \ldots, \text{sign } y_n)$, $\|x_0\| = 1$, тогда

$$\|y\| = \sum_{k=1}^{n} |y_k = |f(x_0)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_0\| = \|f\|.$$

Следовательно, $\|f_0\| = \|y\|$.

Таким образом, мы показали, что каждому линейному ограниченному функционалу $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ поставлен в соответствие элемент $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\|f\| = \|y\|$, т. е. между пространствами $(\mathbb{R}^n)^*$ и $\mathbb{R}^n$ существует гомеоморфизм с сохранением нормы. Покажем, что аналогичный результат имеет место в произвольном гильбертовом пространстве H.

Теорема 1.5.2 Ф. Рисса. *Пусть H – гильбертово пространство. Для любого линейного ограниченного функционала $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$ такой, что для всех $x \in H$*

$$f(x) = (x, y)_H, \quad \|f\| = \|y\|. \tag{1.5.1}$$

Замечание 1.5.1. В силу теоремы Рисса существует сохраняющее норму взаимно однозначное соответствие между H^* и H. Это позволяет отождествить пространства H и H^*.

Упражнение 52. Докажите теорему Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Упражнение 53. Используя теорему Рисса докажите теорему Хана–Банаха о продолжении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Однозначно ли в этом случае продолжение?

1.5.5. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве

Сопряженные операторы широко используются в высшей математике. Так, в уравнениях математической физики с их помощью обосновывается теория существования решений граничных задач.

Пусть H – гильбертово пространство, $A : H \to H$ и $A \in \mathscr{B}(H)$. Рассмотрим скалярное произведение $(Ax, y)_H$ и покажем, что с ним можно связать некоторый линейный ограниченный функционал $g(x)$, определенный на всем пространстве H.

Итак, пусть $x_1, x_2, y \in H$, $\alpha, \beta \in P$, тогда

$$g(\alpha x_1 + \beta x_2) = (A(\alpha x_1 + \beta x_2), y) = \alpha(Ax_1, y) + \beta(Ax_2, y) = \alpha g(x_1) + \beta g(x_2)$$

и

$$|g(x)| = |(Ax, y)| \leqslant \|Ax\|\|y\| \leqslant \|A\|\|x\|\|y\|,$$

откуда

$$\|g\| \leqslant \|A\|\|y\|,$$

т. е. $g \in H^\star$. Тогда по теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве H найдется единственный элемент $y^\star \in H$ такой, что $g(x) = (x, y^\star)$.

Таким образом, мы построили отображение, которое каждому элементу $y \in H$, ставит в соответствие некоторый элемент $y^\star \in H$, причем

$$\|y^\star\| = \|g\| \leqslant \|A\|\|y\|.$$

Следовательно, на H определено отображение

$$A^* : H \to H, \quad y^\star = A^\star y.$$

Оператор, осуществляющий это соответствие, обозначим через A^*.

Определение 1.5.5. *Сопряженным оператором* $A^* : H \to H$ к линейному ограниченному оператору $A : H \to H$ называется оператор, действующий по формуле

$$(Ax, y) = (x, A^\star y) \tag{1.5.2}$$

для всех $x, y \in H$.

Теорема 1.5.3. *Сопряженный оператор A^* к оператору $A \in \mathscr{B}(H)$ является линейным ограниченным оператором и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Мы для каждого оператора $A \in \mathscr{B}(H)$ построили сопряженный оператор $A^* \in \mathscr{B}(H)$, определив тем самым *операцию сопряжения.* Приведем некоторые ее свойства.

Свойство 1.5.1.

$$(A+B)^* = A^* + B^*; \quad (\alpha A)^* = \alpha A^*.$$

Свойство 1.5.2.

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Это свойство доказано в теореме 1.5.3.

Свойство 1.5.3.

$$(AB)^* = B^*A^*; \quad I^* = I.$$

Свойство 1.5.4.

$$(A^\star)^\star = A.$$

Свойство 1.5.5. Если оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}, то и $A^\star$ также обратим, причем

$$(A^\star)^{-1} = (A^{-1})^\star.$$

Упражнение 54. Доказать свойства 1.5.1–1.5.5.

Приведем примеры сопряженных операторов.

Пример 74. Пусть пространство ℓ_2 задано над полем $\mathbb{C}$ и пусть $x \in \ell_2$. Определим оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$ следующим образом:

$$Ax = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots),$$

где $\big(\alpha_i\big)_{i=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность в $\mathbb{C}$.

Применяя теорему Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, получим

$$(Ax, y)_{l_2} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \overline{y}_{i+k} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \alpha_i \overline{y}_{i+k} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{\overline{\alpha}_i y}_{i+k} = (x, A^* y).$$

С другой стороны

$$(x, A^* y) = (x, z)_{l_2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{z}_i,$$

где $z = A^* y$, $z_i = \overline{\alpha}_i y_{i+k}$. Следовательно,

$$A^* y = (\overline{\alpha}_1 y_{k+1}, \overline{\alpha}_2 y_{k+2}, \ldots).$$

Здесь мы заменили пространство функционалов изоморфным ему пространством, а именно, пространством ℓ_2.

Пример 75. Пусть $X = Y = L_2[a,b]$. оператор

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

с ядром $\mathcal{K}(t,s)$ удовлетворяющим условию

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s < \infty.$$

Поступим, как в предыдущем случае, заменим пространство $(L_2[a,b])^*$ на ему изоморфное $L_2[a,b]$. Получим

$$(Ax,y)_{L_2[a,b]} = \int\limits_a^b Ax(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s\Big)y(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_a^b x(s)\Big(\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)y(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}s = \int\limits_a^b x(t)\Big(\int\limits_a^b \mathcal{K}(s,t)y(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_a^b x(t)z(t)\,\mathrm{d}t = (x,z) = (x,A^*y)_{L_2[a,b]},$$

где

$$z(t) = A^*y(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(s,t)y(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.5.3}$$

В цепочке равенств мы использовали теорему Фубини о перемене порядка интегрирования по переменным t и s в интеграле Лебега. Формула (1.5.3) говорит о том, что сопряженным к интегральному оператору Фредгольма является интегральный оператор Фредгольма с ядром $\mathcal{K}(s,t)$ – транспонированным к исходному ядру $\mathcal{K}(t,s)$.

Пример 76. В пространстве $L_2[0,1]$ построим сопряженный оператор к интегральному оператору Вольтерра с непрерывным ядром $\mathcal{K}(t,s)$ по переменным t и s

$$Ax(t) = \int\limits_0^t t^2 s x(s)\,\mathrm{d}s.$$

По определению сопряженного оператора имеем

$$(Ax,y)_{L_2[0,1]} = \int\limits_0^1 Ax(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^t t^2 s x(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^1 x(s)\Big(\int\limits_s^1 t^2 s y(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_t^1 s^2 t y(s)\,\mathrm{d}s\Big) x(t)\,\mathrm{d}t = (x, A^*y)_{L_2[0,1]}.$$

Откуда

$$A^*y(t) = \int\limits_t^1 ts^2 y(s)\,\mathrm{d}s.$$

1.5.6. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Самосопряженные операторы являются самым простым классом линейных ограниченных операторов и в тоже время самым полезным. Самосопряженные операторы широко используются в теоретической физике. Квантовая механика описывается на языке самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве. Один из постулатов квантовой физики гласит, что всякой наблюдаемой величине соответствует некоторый самосопряженный оператор.

Пусть H – гильбертово пространство, $A \in \mathscr{B}(H)$.

Определение 1.5.6. Оператор A называется *самосопряженным,* если $A = A^*$, т. е.

$$(Ax,y)_H = (x, Ay)_H. \tag{1.5.4}$$

для всех $x, y \in H$.

В предыдущем пункте в примерах 74 и 75 мы рассматривали сопряженные операторы. Так, в случае когда оператор задан в пространстве $\mathbb{R}^n$ матрицей (a_{ij}), $i, j = 1, \ldots, n$, условие $A = A^*$ будет выполняться, когда матрица оператора будет симметричной.

Упражнение 55. Пусть оператор $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и задается матрицей (a_{ij}), $i, j = 1, \ldots, n$. Доказать, что $A = A^*$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Интегральный оператор Фредгольма в пространстве $L_2[a,b]$ будет самосопряженным в том случае, когда ядро оператора является симметричным, т. е. $\mathcal{K}(t,s) = \mathcal{K}(s,t)$.

Пример 77. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим оператор умножения на непрерывную функцию, т. е. $Ax(t) = m(t)x(t)$, $m(t) \in C[a,b]$ – некоторая фиксированная функция. Если функция $m(t)$ действительная, то оператор A будет самосопряженным.

Сформулируем некоторые свойства самосопряженных операторов.

Теорема 1.5.4. *Самосопряженные операторы в пространстве линейных ограниченных операторов образуют замкнутое линейное многообразие, т. е. подпространство.*

В пространстве $\mathscr{B}(H)$ определено произведение операторов. Выясним, когда в произведении получается самосопряженный оператор.

Теорема 1.5.5. *Пусть A и B – самосопряженные операторы в H. Оператор AB являются самосопряженными тогда и только тогда, когда $AB = BA$.*

Теорема 1.5.6. *Пусть $A : H \to H$ – самосопряженный оператор. Тогда*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \left|\big(Ax, x\big)\right|. \tag{1.5.5}$$

Следствие 1.5.6. Если для самосопряженного оператора выполнено равенство $(Ax, x) = 0$ для всех $x \in H$, то оператор A – нулевой, т. е. $A = \Theta$.

Для самосопряженного оператора определим понятие нижней и верхней граней оператора A

$$m_A = \inf_{\|x\|=1} \big(Ax, x\big), \quad M_A = \sup_{\|x\|=1} \big(Ax, x\big). \tag{1.5.6}$$

Из соотношений (1.5.6) и теоремы 1.5.6 вытекает следующая

Теорема 1.5.7. *Пусть $A : H \to H$ – самосопряженный оператор. Тогда*

$$\|A\| = \max\left\{|m_A|, |M_A|\right\}. \tag{1.5.7}$$

С каждым самосопряженным оператором A можно связать симметричную билинейную эрмитову форму

$$S(x, y) = \big(Ax, y\big)_H. \tag{1.5.8}$$

Билинейная форма линейна по первой переменной и антилинейна по второй. $S(x,y)$ называется *положительно определенной*, если существует постоянная $c > 0$, что

$$S(x, y) \geqslant \|x\|^2,\ x \in H.$$

Определение 1.5.7. Самосопаряженный оператор A называется *положительным,* $A > 0$, если он он отличен от нулевого и его нижняя грань m неотрицательна, т. е. если

$$\big(Ax, x\big) \geqslant 0$$

для любого $x \in H$ и $\big(Ax, x\big) > 0$ хотя бы для одного $x \in H$; *неотрицательным,* если $\big(Ax, x\big) \geqslant 0$ для любого $x \in H$.

С билинейной формой (1.5.8), оператор которой является неотрицательным, можно связать скалярное произведение

$$[(x,y)]_A = \big(Ax, y\big)_H. \tag{1.5.9}$$

и норму $[\|x\|]_A = \big(Ax, x\big)_H$.

Упражнение 56. Доказать, что (1.5.9) задает в H скалярное произведение.

Таким образом, наряду с обычным скалярным произведением в пространстве H можно рассмотреть скалярное произведение (1.5.9), относительно которого пространство H называется *энергетическим пространством.*

Говорят, что самосопряженный оператор A больше самосопряженного оператора B, если $A-B>0$. Таким образом, между самосопряженными операторами можно ввести отношение порядка и превратить множество самосопряженных операторов в частично упорядоченное множество.

С помощью формулы (1.5.9) в гильбертовом пространстве H мы ввели скалярное произведение. Как известно, для обычного скалярного произведения справедливо неравенство Коши–Буняковского. Что можно сказать о скалярном произведении $[(x,y)]_A$?

Лемма 1.5.1. *Пусть $A > 0$ – самосопряженный оператор в H. Тогда для любых $x, y \in H$ справедливо обобщенное неравенство Коши–Буняковского*

$$\big|\big(Ax, y\big)\big|^2 \leqslant \big(Ax, x\big)\big(Ay, y\big). \tag{1.5.10}$$

Упражнение 57. Доказать неравенство (1.5.10).

В численном анализе с положительным самосопряженным оператором связан основной вариационный принцип. Сформулируем его.

Пусть $A : H \to H$, $A = A^*$, $A > 0$. Рассмотрим операторное уравнение

$$Ax = y. \tag{1.5.11}$$

Уравнению (1.5.11) поставим в соответствие экстремальную задачу, а именно, задачу отыскания минимума функционала

$$f(x) = \big(Ax, y\big) - 2(y, x). \tag{1.5.12}$$

Теорема 1.5.8. *Пусть $A : H \to H$ – самосопряженный положительный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) = H$. Если уравнение* (1.5.11) *имеет решение, то на нем функционал f вида* (1.5.12) *принимает наименьшее значение и наоборот.*

Эквивалентность уравнений (1.5.11) и (1.5.12) лежит в основе широко используемого в вычислительной математике метода Ритца.

В заключении определим некоторые операторы, которые встречаются в литературе.

Оператор $A \in \mathscr{B}(H)$ называется *нормальным,* если $AA^* = A^*A$. Очевидно, что A нормален тогда и только тогда, когда $A^\star$ нормален.

Оператор $A \in \mathscr{B}(H)$ называется *унитарным,* если $AA^* = A^*A = I$, т. е. $A^* = A^{-1}$.

1.5.7. Операторы ортогонального проектирования

Рассмотрим частный случай самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве – оператор ортогонального проектирования или ортопроектор.

Пусть в H задано подпространство $L \subset H$. Согласно теореме о разложении в прямую сумму гильбертова пространства имеем $H = L \oplus L^\perp$ или $x = y + z, y \in L, z \in L^\perp$. Тогда каждому элементу $x \in H$ можно поставить в соответствие единственный элемент $y \in L$ – проекцию элемента x на подпространство L. Тем самым определяется отображение отображение или оператор, который называется *ортопроектором* и $y = Px$. Если H является сепарабельным пространством, тогда в нем существует полная ортонормированная система $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$. Выберем в ней некоторую подсистему $\{\varphi_{jk}\} \subset \{\varphi_j\}$. Рассмотрим подпространство L, порожденное этой подсистемой. Согласно теореме о разложении в ряд Фурье каждому элементу $x \in H$ можно поставить в соответствие единственный элемент $y \in L$, который является его проекцией, при этом $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{jk}\varphi_{jk}, c_{jk} = (x,\varphi_{jk})$. Обозначим через $\{\varphi_{ik}\}$ – подсистему, дополнительную к $\{\varphi_{jk}\}$. Тогда подпространство, порожденное этой подсистемой, представляет собой $L^\perp$ и каждый элемент $z \in L^\perp$ можно записать так $z = \sum\limits_k c_{ik}\varphi_{ik}$, $c_{ik} = (x,\varphi_{ik})$. В этом случае z является проекцией вектора $x \in H$ на $L^\perp$.Если P – ортопроектор на $L^\perp$, то $I - P$ – ортопроектор на $L^\perp$. Операторы P и $I - P$ еще называют *проекционными операторами.*

Упражнение 58. Покажите, что $x \in L$ тогда и только тогда, когда $Px = x$, соответственно $x \in L^\perp$ тогда и только тогда, когда $Px = 0$.

Рассмотрим основные свойства ортопроекторов.

Свойство 1.5.6. Каждый ортопроектор определен на всем H и является линейным оператором.

Свойство 1.5.7. $P \in \mathscr{B}(H)$, $\|P\| = 1$, если $L \neq \{0\}$.

Свойство 1.5.8. $P^2 = P$.

Свойство 1.5.9. $P = P^*$.

Свойство 1.5.10. Оператор ортогонального проектирования неотрицателен, т. е. $(Px, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$.

Свойство 1.5.11. $x \in L$ тогда и только тогда, когда

$$\|Px\| = \|x\|.$$

Данное свойство вытекает из теоремы Пифагора.

Свойство 1.5.12. $(Px, x) \leqslant \|x\|^2$ для всех $x \in H$, $(Px, x) = \|x^2\|$ тогда и только тогда, когда $x \in L$.

Учитывая доказанные свойства, можно среди всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве выделить оператор ортогонального проектирования.

Теорема 1.5.9. *Пусть в гильбертовом пространстве H задан оператор $A \in \mathscr{B}(H)$ такой, что $A = A^*$ и $A^2 = A$. Тогда A является проектором на некоторое подпространство $L \subset H$.*

Замечание 1.5.2. В банаховом пространстве X можно также определить понятие *оператора проектирования*. В этом случае оператор $A \in \mathscr{B}(X)$ называется оператором проектирования, если $A^2 = A$.

1.5.8. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора

Собственные значения и собственные векторы играют важную роль в различных областях математики. В частности, в основе метода Фурье для решения смешанных и граничных задач математической физики лежит задача на собственные векторы и собственные значения дифференциального оператора – задача Штурма–Лиувилля.

Пусть H – гильбертово пространство, $A : H \to H$ – линейный ограниченный оператор.

Определение 1.5.8. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением оператора* A, если существует ненулевой элемент $x \in H$ такой, что

$$Ax = \lambda x.$$

Элемент $x \neq \theta$ называется *собственным вектором*, отвечающим собственному значению λ оператора A.

Поскольку наряду с вектором x вектор cx (c – const, $c \neq 0$) также является собственным, то собственные векторы можно считать нормированными, например, условием $\|x\|_H = 1$.

Заметим, что число $\lambda = 0$ является собственным числом оператора A, если уравнение $Ax = \theta$ имеет ненулевое решение.

Пусть λ – собственное значение оператора A, а L_λ – совокупность всех собственных векторов, соответствующих λ. Рассмотрим это множество.

Теорема 1.5.10. *Пусть λ – собственное значение оператора A, а L_λ – совокупность всех собственных векторов, соответствующих λ, дополненная нулевым вектором θ. Тогда L_λ образует в H подпространство, т. е. замкнутое линейное многообразие.*

Подпространство L_λ называется *собственным подпространством* оператора A, соответствующим собственному значению λ. Собственное подпространство самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве можем быть как конечномерным так и бесконечномерным.

Пример 78. Рассмотрим тождественный оператор в гильбертово пространстве. Тогда, очевидно, что $\lambda = 1$ является собственным числом тождественного оператора. Соответствующее собственное подпространство – это все H.

Теорема 1.5.11. *Все собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве H вещественны. Собственные подпространства L_{λ_1} и L_{λ_2}, отвечающие различным собственным значениям, λ_1 и λ_2, ортогональны.*

Следствие 1.5.7. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значения линейного оператора, линейно независимы.

Таким образом, мы установили основные свойства собственных значений самосопряженных операторов в предположении, что они существуют. Для пространства $\mathbb{R}^n$ вопрос решается положительно.

Пример 79. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, определенный матрицей (a_{ij}), $i, j = \overline{1, n}$. Тогда для нахождения собственных значений оператора A необходимо, чтобы уравнение $(A - \lambda E)x = 0$ имело нетривиальное решение. Это равносильно тому, что

$$\det |A - \lambda E| = 0. \tag{1.5.13}$$

Уравнение (1.5.13) называется *характеристическим уравнением.*

Таким образом, в конечномерном пространстве собственные значения линейного оператора являются корнями характеристического уравнения.

В бесконечномерном пространстве H существуют операторы, не имеющие собственных значений.

1.5.9. Неограниченные симметричные операторы

Расширим определение сопряженного оператора на неограниченные операторы. Это достаточно широкий класс дифференциальных операторов. Как правило, область определения неограниченных операторов является линейным многообразием в пространстве H. Особый интерес представляет случай, когда оператор A определен на всюду плотном в H множестве, тогда сохраняются почти все свойства сопряженных операторов.

Определение 1.5.9. Пусть A – линейный неограниченный оператор из H в H с плотной областью определения D_A. Определим $D_{A^\star}$ как множество таких элементов y, для которых существует $y^\star$, что $(Ax, y) = (x, y^\star)$для всех $x \in D_A$. Пусть $A^\star$ – оператор с областью определения $D_{A^\star}$. $A^\star$ называется *сопряженным* к A, если

$$(Ax, y)_H = (x, A^\star y)_H. \qquad (1.5.14)$$

для всех $x \in D_A, y \in D_{A^\star}$.

В теории дифференциальный уравнений такой оператор называется формально сопряженным.

Если выполняется равенство $\big(Ax, y\big) = \big(x, Ay\big)$ для всех $x, y \in \mathscr{D}(A)$, то оператор A называется *симметричным.*

Пример 80. Для уравнений с частными производными хорошо известен дифференциальный оператор вида:

$$Ax = -\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + x,$$

заданный в пространстве $L_2[a, b]$, областью определения $\mathscr{D}(A)$ которого имеет вид $\mathscr{D}(A) = \big\{x(t) \in C^2[0, \pi] : x(0) = x(\pi) = 0\big\}$. Покажем, что A – симметричный оператор. Пусть $x(t), y(t) \in \mathscr{D}(A)$, тогда используя дважды формулу интегрирования по частям, получим

$$\big(Ax, y\big) = \int\limits_0^\pi \Big(-\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + x(t)\Big) y(t)\,\mathrm{d}t = -y(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_0^\pi +$$

$$+\int\limits_0^\pi \Big(-\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t)\Big) x(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\pi \Big(-\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + y(t)\Big) x(t)\,\mathrm{d}t = \big(x, Ay\big).$$

Оператор $A : L_2[0, \pi] \to L_2[0, \pi]$ является неограниченным. Так для последовательности функций $x_n(t) = \sqrt{2/\pi}\sin nt$, $n = 1, 2, \ldots,$ с $\|x_n\| = 1$ имеем

$$\|Ax_n\|^2_{L_2[0,\pi]} = n^2 + 1 \to \infty \ \text{ при } n \to \infty.$$

1.5.10. Сопряженный оператор в банаховом пространстве и его применение

Сопряженные и самосопряженные операторы широко используются в высшей математике. Так, в уравнениях математической физики с их помощью обосновывается теория существования решений граничных задач. Квантовая механика описывается на языке самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве.

Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ и $A \in \mathscr{B}(X{,}Y)$, f – линейный ограниченный функционал, определенный на пространстве Y, т. е. $f \in Y^*$. Для произвольного элемента $x \in X$ положим

$$g(x) = f(Ax). \tag{1.5.15}$$

Формула (1.5.15) определяет линейный ограниченный функционал в пространстве X. Действительно,

$$g(\alpha x + \beta y) = f\big(A(\alpha x + \beta y)\big) = f(\alpha Ax + \beta Ay) =$$
$$= \alpha f(Ax) + \beta f(Ay) = \alpha g(x) + \beta g(y),$$
$$|g(x)| = |f(Ax)| \leqslant \|f\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|f\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

т. е.

$$\|g\| \leqslant \|f\| \cdot \|A\|. \tag{1.5.16}$$

Таким образом, мы построили отображение, которое каждому элементу $f \in Y^*$ ставит в соответствие некоторый элемент $g \in X^*$. Оператор, осуществляющий это соответствие, обозначим через A^*.

Определение 1.5.10. *Сопряженным оператором* $A^* : Y^* \to X^*$ к линейному ограниченному оператору $A : X \to Y$ называется оператор, действующий по формуле

$$A^* f = g \quad \text{или} \quad f(Ax) = A^* f(x) \tag{1.5.17}$$

для всех $x \in X$.

Теорема 1.5.12. *Сопряженный оператор A^* является линейным ограниченным оператором из Y^* в X^* и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Теорема 1.5.13. *Пусть X, Y – банаховы пространства, оператор $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, $\mathscr{R}(A) \subset Y$ – множество его значений. Тогда замыкание $\mathscr{R}(A)$ совпадает с множеством таким $y \in Y$, что $f(y) = 0$ для всех функционалов $f \in Y^*$, удовлетворяющих условию $A^* f = 0$.*

Следствие 1.5.8. Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо при заданном y необходимо, а если $\mathscr{R}(A)$ замкнуто, то и достаточно, чтобы любой функционал, удовлетворяющий уравнению $A^* f = 0$, на заданном y обращается в нуль.

Следствие 1.5.9. Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо для любого $y \in Y$, необходимо, чтобы уравнение $A^* f = 0$ имело только нулевое решение.

Следствие 1.5.10. Уравнение $A^* f = 0$ имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда $\overline{\mathscr{R}(A)} = Y$.

1.6. Компактные множества и компактные операторы

1.6.1. Понятие компактного множества

Доказательства основных теорем математического анализа опираются на известную теорему Больцано – Вейерштрасса. Она утверждает следующее: из всякой ограниченной бесконечной последовательности чисел можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу. К сожалению, в бесконечномерных пространствах существует класс множеств, для которых утверждение теоремы не справедливо. Поэтому мы возьмем утверждение этой теоремы в качестве определяющего свойства компактного множества. Хотя компактных множеств не так много в произвольном банаховом пространстве, как замкнутых ограниченных множеств, но тем не менее в тех пространствах, которые используются в приложениях их запас достаточен.

Пример 81. В пространстве бесконечных числовых последовательностей ℓ_2 с нормой $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$ рассмотрим множество векторов $e_i, i = 1, 2, \ldots,$ образующих в ℓ_2 полную ортонормированную систему

$$e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots).$$

Все эти вектора принадлежат единичному шару пространства ℓ_2. Пусть $i \neq j$, тогда

$$\|e_i - e_j\|^2 = \sqrt{2}.$$

Это означает, что последовательность $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset \ell_2$ не является последовательностью Коши и, следовательно, расходится.

Таким образом, в бесконечномерном нормированном пространстве теорема Больцано–Вейерштрасса места не имеет. Выделим в банаховых пространствах класс множеств, для которых справедливо заключение теоремы.

Определение 1.6.1. Пусть E – банахово пространство, $M \subset E$ – множество в нем. M называют *компактным*, если из каждой последовательности $(x^{(n)} \subset M$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(x^{(n_k)}) \subset (x^{(n)})$, предел которой принадлежит M.

Отметим основные свойства компактных множеств.

Свойство 1.6.1. Всякое компактное множество в банаховом пространстве E ограничено.

Свойство 1.6.2. Компактное множество в банаховом пространстве замкнуто.

Свойство 1.6.3. Всякое компактное множество в банаховом пространстве полно.

Можно сформулировать другое определение компактного множества, которое опирается на известную в математическом анализе лемму Гейне–Бореля. Она утверждает следующее: для всякого замнутого ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}$ из любого семейства открытых множеств, объединение которых содержит M, можно выбрать подсемейство, состоящее из конечного числа элементов, которое содержит M.

Определение 1.6.2. Множество M в банаховом пространстве E называют *компактным*, если из каждого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное открытое подпокрытие.

Упражнение 59. Докажите эквивалентность двух определений компактного множества в банаховых пространствах.

Как показывает пример 81 ограниченное множество может не быть компактным в бесконечномерном банаховом пространстве. Выясним, какое же требование к множеству $M \subset E$ обеспечивает компактность. Предварительно введем некоторые понятия.

Определение 1.6.3. Множество $S_\varepsilon \subset E$ называется *ε-сетью*, $\varepsilon > 0$, для множества $M \subset E$, если для любого $x \in M$ найдется $s \in S_\varepsilon$ такое, что $\|x - s\| < \varepsilon$.

Понятие ε-сети для множества M допускает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть S_ε – сеть для M. Рассмотрим множество шаров $B(s, \varepsilon)$ с центрами в точках $s \in S_\varepsilon$ таких, что $\|s - x\| < \varepsilon$. Очевидно, что

$$M \subset \bigcup_{s \in S_\varepsilon} B(s, \varepsilon),$$

т. е. совокупность шаров $B(s, \varepsilon)$ образует покрытие множества M открытыми в банаховом пространстве E множествами.

Множество $S_\varepsilon \subset E$ может не иметь с множеством $M \subset E$, для которого строится сеть, ни одной общей точки. Однако, имея для M некоторую ε-сеть S_ε, можно построить сеть $\widetilde{S}_\varepsilon \subset M$. Действительно, пусть

$$\widetilde{S}_\varepsilon = \{x_\varepsilon \in M\},$$

тогда

$$\|x - x_\varepsilon\| \leqslant \|x - s\| + \|s - x_\varepsilon\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что ε-сеть строится из элементов, принадлежащих множеству M.

Пример 82. Целочисленные точки на плоскости образуют сеть радиуса $\varepsilon = \sqrt{2}/2$.

Определение 1.6.4. Множество M в банаховом пространстве E называется *вполне ограниченным,* если для любого $\varepsilon > 0$ в E существует конечная ε-сеть для множества M.

Очевидно, что вполне ограниченное множество ограничено. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако, если $M \subset \mathbb{R}^n$ и ограничено, то оно будет и вполне ограниченным.

Действительно, пусть M содержится в кубе с достаточно большим ребром фиксированной длины r. Разобьем его на кубики с ребром ε, тогда их вершины образуют $r\sqrt{n}\varepsilon/2$-сеть в исходном кубе, а значит и во множестве M.

Пример 83. Рассмотрим в пространстве ℓ_2 бесконечных числовых последовательностей множество $\Pi = \left\{x \in \ell_2 : x(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots),\ |x_i| < \dfrac{1}{i}\right\}$, которое называется *основным параллелепипедом* пространства ℓ_2. Покажем, что Π – вполне ограниченное множество.

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем i_0 так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Тогда для любого элемента $x \in \Pi$ имеем

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} |x_i|^2 \leqslant \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

По множеству Π построим множество Π^*, состоящее из элементов x^* вида $(x_1, \ldots, x_{i_0}, 0, \ldots,)$ где $x = (x_1, \ldots, x_{i_0}, x_{i_0+1}, \ldots) \in \Pi$. Заметим, что каждому элементу $x \in \Pi$ можно поставить в соответствие элемент $y = (x_1, \ldots, x_{i_0}) \in \mathbb{R}^{i_0}$ i_0-мерного евклидова пространства.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^{i_0}$ состоит из элементов y. Очевидно, что Π^* линейно изометрично P, последнее ограничено, поскольку

$$\|y\| = \sum_{i=1}^{i_0} |x_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty.$$

Следовательно, P – вполне ограничено и для него, как и для Π^*, существует конечная ε-сеть. Очевидно, что она будет ε-сетью и для множества Π.

Теорема 1.6.1 критерий компактности Хаусдорфа. *Пусть E банахово пространство, $M \subset E$ – множество в нем. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *M компактно;*
2) *M замкнуто и вполне ограничено;*

Следствие 1.6.1. В конечномерном пространстве множество M компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Это следует из того, что всякое ограниченное в $\mathbb{R}^n$ множество, как показано выше, вполне ограничено.

Следствие 1.6.2. Всякое компактное множество в банаховом пространстве сепарабельно.

Пример 84. Рассмотрим множество Q рациональных чисел отрезка [0,1]. Это вполне ограниченное множество, но не компактное. Последовательность точек из этого множества 0; 0,4; 0,41; 0,414; 0,4142; ..., а именно, последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}-1$, не имеет в Q предельной точки.

1.6.2. Предкомпактные множества в банаховых пространствах

Пусть E – банахово пространство, $M \subset E$ – множество в нем. Очевидно, что если множество M не замкнуто в E, то оно не может быть компактным. Однако может так оказаться, что его замыкание $\overline{M}$ компактно.

Определение 1.6.5. Множество M в банаховом пространстве E называется *предкомпактным (относительно компактным)*, если его замыкание $\overline{M}$ компактно.

Из компактности $\overline{M}$ вытекает, что каждая последовательность $(x^{(n)}) \subset \overline{M}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит $\overline{M}$, или, что в силу полноты пространства одно и то же, содержит последовательность Коши. Учитывая, это можно дать другое определение предкомпактного множества.

Определение 1.6.6. Множество $M \subset E$ называется *предкомпактным*, если из каждой последовательности $(x^{(n)}) \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Ясно, что если M не замкнуто, то предел этой фундаментальной последовательности может M и не принадлежать. Поэтому понятие предкомпактности слабее компактности, однако имеет место теорема.

Теорема 1.6.2. *Предкомпактное множество в банаховом пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.*

Понятие предкомпактности связано с тем пространством, в котором мы данное множество рассматриваем, поскольку нам приходится рассматривать замыкание множества. Поэтому целесообразно рассмотреть критерий предкомпактности в каждом конкретном пространстве. Однако в целом остается справедлива теорема Хаусдорфа.

Теорема 1.6.3. *Множество M предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

Упражнение 60. Доказать теорему 1.6.3. Предварительно покажите, что если M вполне ограничено, то и $\overline{M}$ вполне ограничено.

1. Пространство $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.6.4. *Множество M в $\mathbb{R}^n$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено.*

2. Пространство $C[a,b]$.

Для формулировки критерия предкомпактности в $C[a,b]$ нам понадобятся следующие определения.

Определение 1.6.7. Множество $M \subset C[a,b]$ называется *равномерно ограниченным*, если существует постоянная $m > 0$ такая, что $\|x\| \leqslant m$ для всех $x(t) \in M$.

Определение 1.6.8. Множество $M \subset C[a,b]$ называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для всех $t_1, t_2 \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta$, выполняется неравенство $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ для всех $x(t) \in M$.

Пример 85. Рассмотрим в $C[0,1]$ множество

$$M = \left\{ x_n(t) = \frac{nt}{1 + n^2t^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0,1] \right\}.$$

M содержится в единичном шаре, поэтому равномерно ограничено. Покажем, что M не является равностепенно непрерывным множеством. Действительно, для любого $n \in N$ в точках $t_1 = 1/n, t_2 = 0$, таких, что $|t_1 - t_2| \leqslant 1/n$ выполнено $|x(t_1) - x(t_2)| = 1/2$. Это означает, что существует $\varepsilon_0 = 1/2$ такое, что для любого $\delta_n = 1/n$ нашлись точки $t_1,t_2 \in [0,1]$, $|t_1 - t_2| \leqslant \delta_n$, однако $|x(t_1) - x(t_2)| \geqslant \varepsilon_0$.

Если вычислить производную функции $x_n(t)$, то $x_n{}'(0) = n$. Это условие противоречит "равномерной гладкости" функций, которая в принципе требуется для равностепенной непрерывности.

Пример 86. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим множество M, состоящее из функций

$$y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad x \in B[0{,}1] \subset C[0{,}1].$$

Множество M равностепенно непрерывно. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon \leqslant \varepsilon$ такое, что

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqslant |t_1 - t_2|\|x\| < \varepsilon$$

как только $|t_1 - t_2| < \delta$.

Теорема 1.6.5 (Арцела–Асколи). *Для того, чтобы множество M непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций было предкомпактно в $C[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

3. Пространство ℓ_p, $p \geqslant 1$.

Теорема 1.6.6. *Множество M в пространстве ℓ_p, $p \geqslant 1$, предкомпактно тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) *существует $C \geqslant 0$, что*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \leqslant C^p \text{ для всех } x \in M;$$

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что*

$$\sum_{i=n_0(\varepsilon)+1}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p \text{ для всех } x \in M.$$

4. Пространство $L_p[a,b]$, $p \geqslant 1$.

Теорема 1.6.7. *Множество $M \subset L_p[a,b], p \geqslant 1$, предкомпактно тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) *существует константа $C > 0$ такая, что $\|x\| \leqslant C$ для всех $x \in M$;*
2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех s, удовлетворяющих условию $0 < s < \delta$, выполнено*

$$\int\limits_{[a,b]} |x(s+t) - x(t)|^p\,\mathrm{d}t < \varepsilon^p \text{ для всех } x \in M.$$

Пример 87. Рассмотрим множество

$$M = \Big\{ x(t) \in L_2[0,1] : x(t) = \int\limits_{[0,t]} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \int\limits_{[0,1]} |\varphi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \leqslant 1 \Big\}.$$

Покажем, что для множества $M \subset L_2[0,1]$ выполнены условия теоремы 1.6.7

$$\int\limits_{[0,1]} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int\limits_{[0,1]} \Big| \int\limits_{[0,t]} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Big|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int\limits_{[0,1]} \int\limits_{[0,1]} |\varphi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \leqslant 1,$$

т. е. $\|x\| \leqslant 1$ для всех $x \in M$.

$$\int\limits_{[0,1]} |x(t+s) - x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int\limits_{[0,1]} \Big| \int\limits_{[0,t+s]} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int\limits_{[0,t]} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Big|^2 \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{[0,1]} \int\limits_{t}^{t+s} |\varphi(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \leqslant s \int\limits_{[0,1]} |\varphi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau \leqslant s < \delta,$$

т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta \leqslant \varepsilon\colon 0 < s < \delta \Rightarrow \|x(t+s) - x(t)\|_2 < \varepsilon$.

1.6.3. Критерий конечномерности нормированного векторного пространства

Понятие размерности (конечномерности, бесконечномерности) векторного пространства есть алгебраическое понятие. Однако различие в размерности приводит и к существенным различиям в топологических свойствах пространств. Прежде чем перейти к формулировке критерия конечномерности, сформулируем вспомогательную лемму, имеющую самостоятельное значение.

Лемма 1.6.1 (о почти перпендикуляре). *Пусть E – нормированное пространство, $L \subset E$ – его подпространство, $L \neq E$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $y_\varepsilon \in E \setminus L$ такое, что:*

1) $\|y_\varepsilon\| = 1$;

2) $\|y_\varepsilon - \ell\| \geqslant 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ *для всех* $\ell \in L$.

Лемма имеет простой геометрический смысл. В случае, когда $E = \mathbb{R}^2$ – плоскость с евклидовой (сферической) нормой и L – прямая, проходящая через начало координат. Тогда существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ такой, что $\|y_0\| = 1$ и $\|y_0 - \ell\| \geqslant 1$. Элементом y_0 является перпендикуляр к L единичной длины. При других нормах такого элемента (с $\varepsilon = 0$) может не существовать, но есть элемент с близким свойством (почти перпендикуляр).

Теорема 1.6.8 Ф. Рисса (критерий конечномерности). *Нормированное векторное пространство конечномерно тогда и только тогда, когда в нем единичный шар предкомпактен.*

Следствие 1.6.3. В бесконечномерном нормированном векторном пространстве любое компактное множество нигде не плотно.

1.6.4. Непрерывные отображения на компактах

Один из способов пояснить понятие компактности заключается в том, чтобы проследить, как обобщаются известные результаты для вещественных функций на замкнутых ограниченных множествах в $\mathbb{R}$, когда область определения функции становится бесконечномерной.

Первый результат показывает, что на компактные множества распространяется хорошо известное утверждение об эквивалентности непрерывности и равномерной непрерывности на отрезке.

Теорема 1.6.9. *Пусть f – непрерывное отображение, заданное на компактном множестве M банахова пространства E. Тогда f равномерно непрерывно на M.*

Упражнение 61. Доказать, что при непрерывном отображении образом компактного множества в банаховом пространстве является компактное множество.

Из классического анализа известно, что всякая непрерывная вещественнозначная функция на замкнутом ограниченном в $\mathbb{R}$ множестве достигает своего максимума и минимума. Этот результат обобщается и на компактные множества.

Теорема 1.6.10. *Пусть f – непрерывная функция, заданная на компактном множестве M в банаховом пространстве E. Тогда f ограничена и достигает как верхней, так и нижней своей грани.*

Обе предыдущие теоремы неверны, если вместо компактности в бесконечномерном пространстве потребовать только замкнутость и ограниченность.

Пример 88. Рассмотрим в пространстве $M[0,1]$ ограниченных на отрезке $[0,1]$ функций с нормой $\|x\| = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$ замкнутое множество

$$M = \{x(t) \in M[0,1] : x(1) = 0\}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|\,\mathrm{d}t$, заданную на единичном шаре $B[0,1] \subset M$. Очевидно, что $|f(x)| \leqslant 1$ для всех $x(t) \in B[0,1]$. Рассмотрим последовательность $x^{(n)}(t) = 1 - t^n$ при $n \geqslant 1$. Имеем, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = 1$, откуда

$\sup\limits_{x \in B} f(x) = 1$. Однако $f(x) = 1$ для непрерывных $x(t)$ с $\|x\| \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда $x(t)$ есть постоянная функция, равная либо 1, либо -1. Поскольку ни одна из этих функций не принадлежит шару B, функция f не достигает на нем своей верхней грани.

Такого рода трудности часто встречаются в теории оптимизации. Отсюда видно, что проблема нахождения экстремумов в бесконечномерном случае значительно тоньше, чем в конечномерном.

Обратимся к вопросу о существовании неподвижной точки отображения $f : E \to E$, где E – банахово пространство. Идея нахождения неподвижной точки заключается в построении последовательностей приближений x_n таких, что $|f(x_n) - x_n|$ стремится к нулю, но тогда у нее найдется сходящаяся подпоследовательность, предел которой и будет неподвижной точкой отображения f. Однако, если E – бесконечномерно, то сходящейся подпоследовательности у (x_n) может не существовать. Поэтому, очевидно (x_n) должна принадлежать компактному в E множеству.

Теорема 1.6.11. *Пусть M – компактное множество в банаховом пространстве E и $f : M \to E$ – непрерывное отображение. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f(x_n) - x_n\| = 0$ для некоторой последовательности $(x_n) \subset M$. Тогда (x_n) содержит сходящуюся подпоследовательность с пределом $x^* \in M$ и x^* является неподвижной точкой отображения f.*

1.6.5. Определение и свойства компактных операторов

Вполне непрерывные или компактные операторы интересны тем, что они наследуют многие свойства линейных операторов в конечномерных пространствах и допускают детальное описание. При помощи компактных самосопряженных операторов можно построить теорию представления решения широкого класса дифференциальных операторов в ряд по собственным функциям. Применение теории компактных операторов в пространствах Соболева позволяет построить теорию разрешимости эллиптических дифференциальных уравнений. Разрешимость интегральных уравнений в рамках теории компактных операторов позволяет обосновать подходы приближенного решения интегральных уравнений.

Определение 1.6.9. Пусть X и Y – банаховы пространства. Линейный оператор $A : X \in Y$ называются *вполне непрерывным* или *компактным*, если он отображает всякое ограниченное множество M пространства X в предкомпактное множество $f(M)$ пространства Y.

Совокупность всех компактных операторов, действующих из X в Y, обозначим символом $\mathscr{K}(X, Y)$. Очевидно, что всякий компактный оператор является ограниченным в силу ограниченности предкомпактного множества, поэтому $\mathscr{K}(X,Y) \subset \mathscr{B}(X,Y)$. С учетом свойств ограниченных и предкомпактных (вполне ограниченных) множеств можно сформулировать другие определения, эквивалентные определению 1.6.9, которыми удобно пользоваться на практике.

Определение 1.6.10. Линейный оператор называется *компактным*, если для любой последовательности $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset B[0,r] \subset X$ последовательность образов $(Ax^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ содержит фундаментальную подпоследовательность.

Определение 1.6.11. Линейный оператор A называются *компактным*, если образ $A(B)$ любого шара $B[0,r] \subset X$ является вполне ограниченным в Y множеством.

Рассмотрим несколько примеров компактных операторов.

Пример 89. Пусть Y – конечномерное банахово пространство, $A : X \to Y$, $A \in \mathscr{B}(X,Y)$. Тогда, $A(B)$ – образ шара $B[0,r]$ пространства X, будет ограниченным в Y множеством, и, следовательно, вполне ограниченным.

Пример 90. Оператор $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ называется *оператором конечного ранга,* если $\dim \mathscr{R}(A) < \infty$, т. е. если множество его значений $\mathscr{R}(A)$ есть конечномерное подпространство пространства Y. В этом случае $A(B)$ является ограниченным множеством в конечномерном пространстве, поэтому предкомпактным, т. е. $A \in \mathscr{K}(X,Y)$. Таким образом, любой линейный ограниченный оператор конечного ранга компактен. Примером такого оператора служит интегральный оператор Фредгольма с вырожденным ядром, действующий в пространстве $C[a,b]$ либо $L_p[a,b]$, $p \geqslant 1$. В этом случае ядро $\mathcal{K}(t,s)$ оператора A представимо в виде

$$\mathcal{K}(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s), \tag{1.6.1}$$

где $a_i(t), b_i(s)$ $(i = \overline{1,n})$ – фиксированные линейно–независимые функции. А область значений оператора A

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.6.2}$$

содержится в линейной оболочке функций $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 91. Рассмотрим оператор (1.6.2) как оператор, действующий из пространства $C[a,b]$ в пространство $C[a,b]$, ядро которого $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно по совокупности переменных. Покажем, что $A(B)$ предкомпактно в $C[a,b]$. По теореме Арцела – Асколи мы должны проверить условия равномерной ограниченности и равномерной непрерывности множества функций $y(t) = Ax(t) \subset A(B)$.

Итак,

$$\|y\|_C = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |Ax(t)| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)x(s)|\,\mathrm{d}s \cdot \|x\| \leqslant \mathcal{M}(b-a), \text{ где } M = \max_{a\leqslant t,s\leqslant b} |\mathcal{K}(t,s)|.$$

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leqslant \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)|\,\mathrm{d}s \cdot \|x\| \leqslant \varepsilon(b-a),$$

так как в силу равномерной непрерывности функции $\mathcal{K}(t,s)$ на компакте $[a,b]\times[a,b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t_1, t_2 \in [a,b]$: $|t_1 - t_2| < \delta$ следует, что

$$|\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)| < \varepsilon.$$

Таким образом, интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром компактен в пространстве $C[a,b]$.

Упражнение 62. Доказать, что оператор умножения на непрерывную функцию в $C[a,b]$ не является компактным в пространстве $C[a,b]$.

Пример 92. Рассмотрим интегральный оператор (1.6.2) в пространстве $L_2[a,b]$ при условии, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно. В примере 91 мы показали, что образ единичного шара $A(B)$ – предкомпактное множество в $C[a,b]$. Поэтому из любой последовательности $(y^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset A(B)$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность $(y^(n_k))$ в $C[a,b]$, т. е.

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b} |y^{(n_k)}(t) - y^{(n_m)}(t)| \xrightarrow[k,m\to\infty]{} 0.$$

Далее, для любой функции $y(t) \in C[a,b]$ имеем

$$\|y\|_{L_2[a,b]} = \Big(\int\limits_a^b |y(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big) \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t)| \cdot \sqrt{b-a} = \sqrt{b-a} \cdot \|x\|_{C[a,b]}.$$

Значит, любая последовательность $(y^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ во множестве $A(B) \subset L_2[a,b]$ содержит фундаментальную подпоследовательность $(y^{(n_k)})$ и множество $A(B)$ предкомпактно в $L_2[a,b]$. Случай более общего ядра будет рассмотрен позже в данном параграфе.

Пример 93. Тождественный оператор $I : X \to X$ будет компактным тогда и только тогда, когда $\dim X < \infty$. Поскольку единичный шар предкомпактен только в конечномерном пространстве (см. критерий конечномерности).

Теорема 1.6.12. *Пусть $A : X \to Y$ – компактный оператор. Тогда область его значений сепарабельна.*

Теорема 1.6.13. *Пусть $A_1, A_2 : X \to Y$, $A_1, A_2 \in \mathscr{K}(X, Y)$. Тогда операторы $A_1 + A_2$, αA_1, $\alpha \in P$, также компактны.*

Теорема 1.6.14. *Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность компактных операторов, действующих из X в Y, равномерно сходится к оператору A. Тогда $A \in \mathscr{K}(X, Y)$.*

Упражнение 63. Показать, что в $C[0, 1]$ интегральный оператор со слабо полярным ядром

$$Ax(t) = \int_0^1 \frac{\mathcal{K}_0(t, s)}{|t - s|^{\gamma}},\ 0 < \gamma < 1,$$

компактен.

Замечание 1.6.1. Если $(A_n) \subset \mathscr{K}(X, Y)$ – последовательность, сходящаяся в каждой точке $x \in X$, то предельный оператор A может оказаться не компактным. В самом деле, в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве с базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим последовательность операторов ортогонального проектирования на конечномерное подпространство, порожденное векторами $\varphi_1, \dots \varphi_n$. Тогда

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, \varphi_i)\varphi_i.$$

Операторы P_n являются операторами конечного ранга, поэтому они компактны. Но при $n \to \infty$ $P_n x \to x$, т. е. $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$ сильно. Однако тождественный оператор в бесконечномерном пространстве не является компактным.

Пусть $X = Y$. Рассмотрим пространство $\mathscr{K}(X)$ по аналогии с $\mathscr{B}(X)$. В этом пространстве можно рассмотреть произведение операторов.

Теорема 1.6.15. *Пусть $A, B \in \mathscr{B}(X)$. Если хотя бы один из операторов является компактным, то компактным будет и произведение AB.*

Следствие 1.6.4. В бесконечномерном банаховом пространстве X компактный оператор $A : X \to X$ не может иметь ограниченного обратного.

Действительно, иначе тождественный оператор $I = AA^{-1}$ был бы компактен в бесконечномерном пространстве X, что невозможно.

Теорема 1.6.16. *Пусть X, Y – банаховы пространства, $A \in \mathscr{K}(X, Y)$. Тогда $A^* \in \mathscr{K}(X^*, Y^*)$.*

1.6.6. Теория Рисса – Шаудера для уравнений с компактным оператором

Исследуя на разрешимость интегральные уравнения второго рода, Э. Фредгольм получил результаты, которые не имели места в случае уравнения общего вида. В дальнейшем Ф.Рисс и Ю.Шаудер показали, что свойства интегральных уравнений связаны с компактностью интегрального оператора и построили общую теорию уравнений с компактными операторами.

Пусть A – компактный оператор, заданный на банаховом пространстве X, т. е. $A \in \mathscr{K}(X)$. Рассмотрим в X линейное уравнение второго рода

$$x - Ax = y \tag{1.6.3}$$

Наряду с уравнением (1.6.3) рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$z - Az = 0, \tag{1.6.4}$$

а также сопряженное уравнение

$$f - A^*f = g \tag{1.6.5}$$

и однородное сопряженное уравнение

$$h - A^*h = 0. \tag{1.6.6}$$

По теореме 1.6.16 $A^* \in \mathscr{K}(X^*)$.

Теорема 1.6.17. *Пусть X – банахово пространство, A – компактный оператор. Тогда множество значений $\mathscr{R}(I - A)$ оператора $I - A$ замкнуто в X, и, соответственно, множество $\mathscr{R}(I - A^*)$ замкнуто в X^*.*

Лемма 1.6.2. *Пусть x – некоторое решение уравнения* (1.6.3), *где $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда существует постоянная $m > 0$, зависящая лишь от A, что выполняется неравенство:*

$$\|x - Ax\| = \|y\| \geqslant m\|x\|,\ x \in X. \tag{1.6.7}$$

Следующие теоремы составляют содержание теории Рисса – Шаудера (в упрощенном варианте), являющейся обобщением фредгольмовской теории интегральных уравнений.

Теорема 1.6.18 (первая теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$ Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) уравнение (1.6.3) *имеет решение при любой правой части $y \in X$;*

2) уравнение (1.6.4) *имеет только нулевое решение;*

3) уравнение (1.6.5) *разрешимо при любом $g \in X^*$;*

4) уравнение (1.6.6) *имеет только нулевое решение.*

Если выполнено одной из условий 1), 2), 3), 4), то операторы $I - A$ и $I - A^*$ непрерывно обратимы.

Теорема 1.6.19 (вторая теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда уравнения* (1.6.4) *и* (1.6.6) *имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Теорема 1.6.20 (третья теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, оператор $A \in \mathscr{K}(X)$. Для того, чтобы уравнение* (1.6.3) *имело хотя бы одно решение при заданной правой части $y \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения h уравнения* (1.6.6) *выполнялось условие* $h(y) = 0$.

Определение 1.6.12. Пусть X, Y – банаховы пространства. Оператор $A \in \mathscr{B}(X, Y)$ называется *фредгольмовым оператором*, если

1) $\dim Ker(A) < \infty$;
2) $\dim Ker(A^*) < \infty$;
3) образ $\mathscr{R}(A)$ замкнут в Y;

Следовательно оператор $I - A$, где $A \in \mathscr{K}(X)$, является фредгольмовым.

Число $n = \dim KerA$ называется *числом нулей оператора* A; число $m = \dim KerA^*$ – *дефектом оператора* A; число $\operatorname{ind}(A) = n - m$ – *индексом оператора* A.

Для уравнения первого рода $Ax = y$, где A – фредгольмов оператор, справедливы теоремы Фредгольма.

Класс ограниченных фредгольмовых операторов полностью описывается теоремой.

Теорема 1.6.21 (С.М. Никольского). *Пусть X, Y – банаховы пространства, $A \in \mathscr{B}(X, Y)$. Для того, чтобы оператор A был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) *$A = B + P$, где $B \in \mathscr{B}(X, Y)$ – непрерывно обратим, $P \in \mathscr{B}(X, Y)$ – оператор конечного ранга;*
2) *$A = C + T$, где $C \in \mathscr{B}(X, Y)$ – непрерывно обратим, $T \in \mathscr{K}(X, Y)$ – компактен.*

1.6.7. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений второго рода

Применим теорию Рисса – Шаудера к исследованию разрешимости интегральных уравнений второго рода.

Рассмотрим в пространстве $L_2[a, b]$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) - \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{1.6.8}$$

где

$$\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Данное уравнение можно записать в виде $x - Ax = y$, где A – компактный оператор. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$x(t) - \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{1.6.9}$$

Поскольку $L_2[a,b]$ – гильбертово пространство и $(L_2[a,b])^*$ линейно изоморфно $L_2[a,b]$, то соответствующие сопряженные уравнения можно записать опять же на элементах пространства $L_2[a,b]$.

$$u(t) - \int_a^b \mathcal{K}(s,t)u(s)\,\mathrm{d}s = g(t). \tag{1.6.10}$$

$$u(t) - \int_a^b \mathcal{K}(s,t)u(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{1.6.11}$$

Теорема 1.6.22 (альтернатива Фредгольма). *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ – такое ядро, при котором интегральный оператор компактен в $L_2[a,b]$. Тогда возможны лишь два случая:*

1) *Однородные уравнения* (1.6.9) *и* (1.6.11) *имеет только нулевые решения; уравнения* (1.6.8) *и* (1.6.10) *разрешимы для любой правой части и имеют единственные решения.*
2) *Уравнение* (1.6.9) *имеет лишь конечное число линейно независимых решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда уравнение* (1.6.11) *имеет то же количество линейно независимых решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Уравнение* (1.6.8) *разрешимо, если*

$$\int_a^b u_i(t)y(t)\,\mathrm{d}t = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.6.12}$$

и его решение

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k x_k + x_0(t),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные; x_0 – некоторое частное уравнение уравнения (1.6.8).

Обратимся теперь к интегральному уравнению вида (1.6.8) в пространстве $C[a,b]$. В этом случае сопряженным к пространству $C[a,b]$ служит пространство $V[a,b]$ функций с ограниченным изменением. Однако исследование решения сопряженного уравнения в этом пространстве сопряжено с рядом трудностей.

Заметим, что альтернатива Фредгольма, сформированная в пространстве $L[a,b]$, получена из общей теории Рисса – Шаудера, в которой не фигурирует конкретный вид сопряженного оператора и решений сопряженного уравнения. Поэтому первый пункт остается в силе. В пункте 2) нам понадобятся решения сопряженного однородного уравнения. Однако в случае непрерывного ядра $\mathcal{K}(t,s)$ можно обойтись без обращения к сопряженному пространству, а ввести в рассмотрение так называемое формально сопряженное уравнение

$$u(t) - \int\limits_a^b \mathcal{K}(s,t)u(s)\,\mathrm{d}s = 0 \tag{1.6.13}$$

в пространстве $C[a,b]$.

Теорема 1.6.23. *Пусть* $\mathcal{K}(t,s) \in C\left([a,b]\times[a,b]\right)$, *тогда для уравнения* (1.6.8) *справедлива альтернатива Фредгольма.*

Пример 94. При любых $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$ исследовать на разрешимость и найти решение интегрального уравнения

$$x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+ts}{1+s^2}\,x(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.6.14}$$

Применим теорему (1.6.8). Рассмотрим однородное уравнение и найдем его решение

$$x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(s)}{1+s^2}\,x(s)\,\mathrm{d}s - \lambda t \int\limits_{-1}^{1} \frac{sx(s)}{1+s^2}\,x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Имеем

$$x(t) = \lambda c_1 + \lambda t c_2,$$

где

$$c_1 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\lambda c_1 + \lambda s c_2}{1+s^2}\,x(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$c_2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{s(\lambda c_1 + \lambda s c_2)}{1+s^2}\,x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Откуда для определения c_1 и c_2 получим следующую однородную систему:

$$\begin{cases} c_1\left(1-\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)+c_2\cdot 0=0,\\ c_1\cdot 0+\left(\lambda\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)-1\right)c_2=0.\end{cases}$$

Вычислим ее определитель и приравняем к нулю

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0\\ 0 & \lambda\left(2-\frac{\pi}{2}\right)-1\end{vmatrix}=0,\quad \lambda_1=\frac{2}{\pi},\quad \lambda_2=\frac{2}{4-\pi}.$$

1) Если $\lambda\neq\dfrac{2}{\pi}$ и $\lambda\neq\dfrac{2}{4-\pi}$, то однородное уравнение имеет только нулевое решение, т. е. $c_1=c_2=0$. Согласно альтернативе Фредгольма неоднородное уравнение (1.6.14) будет разрешимо при любой правой части, т. е. при любых a и b, и будет иметь единственное решение. Найдем его. Решение будем искать в виде:

$$x(t)=\lambda c_1+\lambda t c_2+a+t+bt^2,$$

где

$$c_1=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(s)}{1+s^2}\,\mathrm{d}s=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\lambda c_1+\lambda s c_2+a+s+bs^2}{1+s^2}x(s)\,\mathrm{d}s=$$

$$=\frac{\pi}{2}\lambda c_1+\frac{\pi}{2}a+b(2-\frac{\pi}{2}),$$

$$c_2=\int\limits_{-1}^{1}\frac{sx(s)}{1+s^2}\,\mathrm{d}s=\int\limits_{-1}^{1}\frac{s(\lambda c_1+\lambda s c_2+a+s+bs^2)}{1+s^2}\,\mathrm{d}s=$$

$$=\lambda c_2(2-\frac{\pi}{2})+(2-\frac{\pi}{2})+b.$$

Откуда

$$c_1=\frac{\pi a+b(4-\pi)}{2-\pi\lambda},\quad c_2=\frac{4-\pi}{2-\lambda(4-\pi)}.$$

Тогда

$$x(t)=\frac{2a+\lambda b(4-\pi)}{2-\lambda\pi}+\frac{2}{2-\lambda(4-\pi)}+bt^2.$$

2) Пусть $\lambda=2/\pi$, тогда однородное уравнение имеет ненулевое решение $x(t)=c$. Рассмотрим соответствующее сопряженное однородное уравнение

$$u(t)-\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+st}{1+t^2}\,u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Оно также имеет одно линейно независимое решение

$$u_1(t) = \frac{1}{1+t^2}. \tag{1.6.15}$$

Условие разрешимости запишется в виде

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{a+t+bt^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

или $a\pi + b(4-\pi) = 0$. Исходное решение при таком условии на правую часть $y(t) = a + t + bt^2 + c$ примет вид

$$x(t) = \frac{\pi}{2(\pi-2)}t + bt^2 + c,$$

где c – произвольная постоянная.

Аналогично рассматривается уравнение при $\lambda = \dfrac{2}{4-\pi}$, тогда $u_2(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ и условие разрешимости

$$\int\limits_{-1}^{1} (a+t+bt^2)\cdot\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0,$$

или $a \cdot 0 + (2 - \dfrac{\pi}{2}) + b \cdot 0 = 0$. Очевидно, что таких a и b нет. Это означает, что при $\lambda = \dfrac{2}{4-\pi}$ уравнение (1.6.15) решений не имеет.

Пример 95. Показать, что уравнение

$$x(t) - \lambda \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \tag{1.6.16}$$

разрешимо при любой правой части $y(t) \in C[0,1]$ и найти его решение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$x(t) - \lambda \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

или

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Тогда $x(t) = \lambda c(t)$, где $c(t) = \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$. Проинтегрируем полученное равенство в пределах от 0 до t :

$$\int\limits_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lambda \int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Имеем

$$c(t) = \lambda \int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Это означает, $c(t)$ – непрерывно дифференцируема. Поэтому продифференцируем обе части равенства, получим дифференциальное уравнение

$$c'(t) = \lambda c(t),$$

к которому добавим условие $c(0) = 0$. Таким образом, мы пришли к задаче Коши для функции $c(t)$. Задача Коши имеет единственное нулевое решение. Поэтому уравнение (1.6.16) имеет единственное решение при $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ и при $\forall y \in C[0,1]$. Найдем его решение по изложенной выше схеме.

$$x(t) = \lambda c(t) + y(t),$$

$$\int\limits_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lambda \int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

$$c(t) = \lambda \int\limits_0^t c(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} - \lambda c(t) = y(t), \\ c(0) = 0. \end{cases}$$

Решение полученной задачи Коши можно записать в явном виде

$$c(t) = \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Возвращаясь к исходному уравнению (1.6.16), получим:

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau + y(t).$$

1.6.8. Линейные уравнения первого рода с компактным оператором

Пусть X, Y – банаховы пространства. Рассмотрим уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1.6.17}$$

где $A \in \mathscr{K}(X, Y)$. Пусть $\mathscr{D}(A) = X$. Теоремы Фредгольма для разрешимости уравнений второго рода опирались на замкнутость множества значений оператора $I - A$. Для уравнения (1.6.17) область значений $\mathscr{R}(A)$ оператора A, как правило, не замкнутое множество в Y.

Теорема 1.6.24. *Пусть X, Y – бесконечномерные банаховы пространства, $A \in \mathscr{K}(X, Y)$ и не является оператором конечного ранга. Тогда область значений $\mathscr{R}(A)$ оператора A не является замкнутым множеством в Y.*

Следствие 1.6.5. Пусть X, Y – конечномерные банаховы пространства, $A \in \mathscr{K}(X, Y)$. Тогда $\mathscr{R}(A)$ замкнутое множество.

Таким образом, в конечномерных пространствах теряется разница между уравнениями первого и второго рода.

Теорема 1.6.25. *Пусть X, Y – бесконечномерные банаховы пространства, $A \in \mathscr{K}(X, Y)$ и на $\mathscr{R}(A)$ существует обратный оператор A^{-1}. Тогда A^{-1} неограничен на $\mathscr{R}(A)$.*

Рассмотрим интегральные уравнения первого рода – уравнение Фредгольма

$$\int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \tag{1.6.18}$$

и уравнение Вольтерра

$$\int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{1.6.19}$$

Согласно теоремам 1.6.24 и 1.6.25 при заданной правой части $y(t) \in L_2[a, b]$ уравнение (1.6.18) может не иметь решения, а если это решение существует, то в силу неограниченности оператора A^{-1} на $\mathscr{R}(A)$ оно не будет непрерывно зависеть от правой части. Поэтому задача (1.6.18) является некорректной. Учитывая, что задача нахождения решения уравнения Фредгольма второго рода (1.6.17) корректна, можно применить так называемый *метод регуляризации*, который позволяет свести некорректную задачу (1.6.18) к корректной (1.6.8). В случае, когда $y \in \mathscr{R}(A)$ он основан на следующих теоремах.

Теорема 1.6.26. *Пусть H – гильбертово пространство и пусть $A \in \mathscr{K}(H)$. Тогда для любой $y \in H$ и любого значения параметра регуляризации $\alpha > 0$ существует единственное решение $x_\alpha \in H$, на котором реализуется*

$$\inf_{x \in H} \big\{ \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2 \big\}.$$

При этом x_α является решением уравнения второго рода

$$\alpha x + A^\star A x = A^\star y. \tag{1.6.20}$$

Теорема 1.6.27. *Пусть x_α – решение уравнения (1.6.20) и $y \in \mathscr{R}(A)$. Тогда при $\alpha \to 0$ величина $\|Ax_\alpha - y\|^2$ монотонно убывает и стремится к нулю.*

Пример 96. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода (1.6.18), где $\mathcal{K}(t,s), y(t)$ – непрерывные функции.

Пусть, например, $\mathcal{K}(t,s) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(s) t^i$, где $a_i(s)$ – многочлены относительно s. Предположим, что уравнение (1.6.18) имеет решение. Тогда левая часть уравнения (1.6.18) для любой функции $x(t) \in C[a,b]$ имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(s) t^i$. Это означает, что и правая часть уравнения (1.6.18) должна иметь такой же вид.

Уравнения вида (1.6.18) в случае симметричного ядра будут рассмотрены позднее.

Пример 97. Рассмотрим уравнение Вольтерра первого рода (1.6.19) Если для разрешимости уравнения второго рода достаточно потребовать, чтобы $\mathcal{K}(t,s), y(t) \in C[a,b]$, то в данном случае этого недостаточно. Будем предполагать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ и все его частные производные непрерывные функции. Для того, чтобы уравнение (1.6.19) имело непрерывное решение необходимо, чтобы $y(a) = 0$. Пусть теперь $y(t) \in C^{(1)}[a,b]$. Продифференцируем обе части (1.6.19) по t, получим уравнение

$$\mathcal{K}(t,t)x(t) + \int\limits_a^t \frac{\partial \mathcal{K}(t,s)}{\partial t} x(s)\, \mathrm{d}s = f'(t). \tag{1.6.21}$$

Пусть теперь $\mathcal{K}(t,t) \neq 0$, тогда, разделив обе части (1.6.21) на $\mathcal{K}(t,t)$, получим

$$x(t) + \int\limits_a^t \frac{\mathcal{K}'_t(t,s)}{\mathcal{K}(t,t)} x(s)\, \mathrm{d}s = \frac{f'(t)}{\mathcal{K}(t,t)}. \tag{1.6.22}$$

Уравнение (1.6.22) является уравнением второго рода. К нему можно применить рассмотренную ранее теорию разрешимости.

Теорема 1.6.28. *Пусть* $f(t), \mathcal{K}(t,s)$ *– непрерывные функции, имеющие непрерывные производные по* t, $y(a) = 0$ *и* $\mathcal{K}(t,t) \neq 0$ *для всех* $t \in [a,b]$, *то уравнение* (1.6.19) *имеет единственное решение.*

Замечание 1.6.2. Уравнение (1.6.19) при $\mathcal{K}(t,t) \neq 0$ можно свести к уравнению второго рода и с помощью интегрирования по частям.

Положим $F(t) = \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s, F(0) = 0$. Тогда

$$\int\limits_a^t x(s)\mathrm{d}s = -\int\limits_a^t \frac{\partial \mathcal{K}(t,s)}{\partial s} F(s)\,\mathrm{d}s + \mathcal{K}(t,s)F(s)\Big|_{s=a}^{s=t}$$

и уравнение (1.6.19) примет вид

$$\mathcal{K}(t,t)F(t) - \int\limits_a^t \frac{\partial \mathcal{K}(t,s)}{\partial s} F(s)\,\mathrm{d}s = y(t)$$

или

$$F(t) - \int\limits_a^t \frac{\partial \mathcal{K}'_s(t,s)}{\mathcal{K}(t,t)} F(s)\,\mathrm{d}s = \frac{y(t)}{\mathcal{K}(t,t)}).$$

Частным случаем уравнения (1.6.19) является уравнение

$$\int\limits_0^t \mathcal{K}(t-s)x(\tau)\,\mathrm{d}s = y(t), \tag{1.6.23}$$

которое хорошо известно в приложениях. Пусть, например $x(\tau)$ – изучаемый радиоимпульс, $f(t)$ – сигнал, записанный на некотором расстоянии от точки излучения, $\mathcal{K}(t-\tau)$ – импульсная функция трассы распространения радиоимпульса, зависящая от свойств среды. Тогда для восстановления импульса $x(t)$ решается задача (1.6.23).

Можно также решать задачу: по известному входу $x(t)$ и выходу $f(t)$ определить $\mathcal{K}(t-\tau)$. Тогда мы будем знать, как влияет преобразование сигнала на входной сигнал. Такая задача относится к классу так называемых обратных задач.

1.6.9. Собственные значения и собственные векторы компактного оператора

Пусть теперь X – банахово пространство, $A : X \to X$ компактный оператор. Изучим свойства собственных векторов и собственных значений оператора A.

Пусть λ – собственное значение оператора A, а X_λ – собственное подпространство, состоящее из собственных векторов, отвечающих значению λ, дополненное нулевым элементом.

Теорема 1.6.29. *Пусть X – банахово пространство, оператор $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда его собственное подпространство X_λ, отвечающее ненулевому собственному значению λ, конечномерно.*

Упражнение 64. Привести пример некомпактного оператора, у которого X_λ бесконечномерно.

Теорема 1.6.30. *Пусть X – банахово пространство, оператор $A \in \mathscr{K}(X)$. Множество собственных значений оператора A либо конечно, либо счетно и не имеет предельных точек, за исключением, быть может точки нуль.*

Следствие 1.6.6. Множество собственных значений компактного оператора не более чем счетно и может быть занумеровано в порядке невозрастания модулей $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant$ и $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.6.24}$$

с непрерывным комплекснозначным ядром $\mathcal{K}(t,s)$. Будем решать задачу на собственные значения и собственные вектора вида

$$Ax(t) \equiv \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = \lambda x(t). \tag{1.6.25}$$

Поскольку ядро $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно, то оператор A является компактным. Для (1.6.25) возможны следующие варианты:

1) (1.6.25) имеет лишь нулевое решение: $x(t) = 0$ при $\lambda \neq 0$. Это означает, что интегральный оператор не имеет собственных значений отличных от нуля;
2) существует конечное число собственных значений, отличных от нуля;
3) существует последовательность собственных значений λ_n, причем $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 98. Найти собственные значения и собственные векторы интегрального оператора

$$Ax(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin{(t+s)}x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Пусть $\lambda \neq 0$. Обозначим через $\bar{\lambda} = 1/\lambda$. Рассмотрим решение уравнения $x(t) = \bar{\lambda} A x(t)$. Учитывая, что интегральный оператор имеет вырожденное ядро, представим решение в виде $x(t) = \bar{\lambda} C_1 \sin t + \bar{\lambda} C_2 \cos t$, где

$$C_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos s x(s)\, \mathrm{d}s, \quad C_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin s x(s)\, \mathrm{d}s.$$

Относительно C_1 и C_2 выпишем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 - \bar{\lambda}\pi C_2 = 0, \\ \bar{\lambda}\pi C_1 - C_2 = 0. \end{cases}$$

Система имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю, т. е. $\bar{\lambda}^2\pi^2 = 1$.

При $\bar{\lambda} = 1/\pi$ собственный вектор имеет вид $x(t) = C(\sin t + \cos t)$, соответствующее собственное значение $\lambda = \pi$, а при $\bar{\lambda} = -1/\pi$ собственное значение $\lambda = -\pi$ и соответствующий собственный вектор имеет вид $x(t) = C(\sin t - \cos t)$.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Уравнение на собственные значения и собственные векторы принимает вид

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin{(t+s)} x(s)\, \mathrm{d}s = 0,$$

или $C_1 \sin t + C_2 \cos t = 0$. Поскольку функции $\sin t$ и $\cos t$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ линейно независимы, то $C_1 = C_2 = 0$ или

$$\begin{cases} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t\, x(s)\, \mathrm{d}s = 0, \\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos t\, x(s)\, \mathrm{d}s = 0. \end{cases}$$

В этом случае собственное подпространство будет бесконечномерным. Оно состоит из непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, ортогональных в смысле $L_2[-\pi, \pi]$ функциям $\sin t$ и $\cos t$.

В пространстве $L_2[a,b]$ рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с комплекснозначным параметром λ :

$$x(t) - \lambda \int\limits_{a}^{b} \mathcal{K}(t,s) x(s)\, \mathrm{d}s = y(t). \tag{1.6.26}$$

Будем предполагать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ интегрального оператора таково, что уравнение (1.6.26) является уравнением с компактным оператором.

Число λ называют *характеристическим числом* компактного оператора, если оно обратно к собственному значению. Тогда альтернатива Фредгольма для уравнения (1.6.26) может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 1.6.31. *Для того, чтобы уравнение* (1.6.26) *было разрешимо для любого* $y \in L_2[a,b]$ *необходимо и достаточно, чтобы* λ *не было характеристическим числом интегрального оператора* (1.6.24). *Если* λ – *характеристическое число, то его кратность конечна. Для разрешимости уравнения* (1.6.26) *необходимо и достаточно, чтобы функция* $y(t)$ *была ортогональна всем собственным функциям оператора* A^*, *соответствующим собственному значению* $\overline{\lambda}$.

1.6.10. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H

Понятие компактного оператора впервые было введено именно в гильбертовом пространстве. Покажем, что каждый компактный оператор в гильбертовом пространстве допускает равномерную аппроксимацию операторами конечного ранга.

Пусть H – гильбертово пространство, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ его ортонормированный базис. Обозначим через P_n – оператор ортогонального проектирования на подпространство $L_n = \mathcal{L}\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\}$, тогда $I - P_n$ – ортопроектор на $L_n^{\perp}$. В этом случае каждый элемент $x \in H$ представим в виде

$$x = P_n x + (I - P_n)x, \tag{1.6.27}$$

причем

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} (x,\varphi_i)\varphi_i, \quad (I - P_n)x = \sum_{i=n+1}^{\infty} (x,\varphi_i)\varphi_i. \tag{1.6.28}$$

По равенству Стеклова

$$\|P_n x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x,\varphi_i)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |C_i|^2,$$

$$\|(I - P_n)x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |(x,\varphi_i)|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |C_i|^2.$$

По теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|P_n x\|^2 + \|(I - P_n)x\|^2. \tag{1.6.29}$$

Теорема 1.6.32. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $A \in \mathscr{B}(H)$. Для того, чтобы $A \in \mathscr{K}(H)$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)$ и такие линейные операторы A_1 и A_2: A_1 – n-мерный, $\|A_2\| < \varepsilon$, что*

$$A = A_1 + A_2, \tag{1.6.30}$$

1.6.11. Собственные векторы компактных самосопряженных операторов в H

Рассмотрим вопрос о собственных значениях и собственных векторах компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве H.

Теорема 1.6.33. *Компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве имеет по крайней мере одно собственное значение.*

Таким образом, если A – компактный самосопряженный оператор, то экстремальная задача

$$|(Ax_0, x_0)| \to \sup \quad \text{при условии} \quad \|x\| = 1$$

имеет решение. Всякое ее решение x является собственной функцией оператора.

Следствие 1.6.7. Если компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H не имеет отличных от нуля собственных значений, то оператор $A = \Theta$.

Замечание 1.6.3. Найденное в теореме собственное значение оператора A $\lambda_1 = \|A\|$ является наибольшим по абсолютной величине.

Очевидно, что в конечномерном пространстве любой самосопряженный оператор является компактным и для него справедливо данное замечание.

Теорема 1.6.34. *Все собственные значения компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве расположены на отрезке $[m_A, M_A]$, где m_A, M_A – границы оператора.*

Следствие 1.6.8. Если A – компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, то $\|A\| = |\lambda_1|$, где λ_1 – наибольшее по модулю собственное значение A.

Пример 99. Вернемся к вычислению нормы оператора

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Для этого представим оператор A как композицию двух операторов $V \circ S$, где $Vy(t) = y(1-t)$, $Sx(t) = \int\limits_0^{1-t} x(s)\,\mathrm{d}s$. Заметим, что оператор V является унитарным оператором. Действительно, оператор V является оператором замены переменных, поэтому

$$(Vx, y) = \int\limits_0^1 Ax(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 x(1-t)y(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= [1-t=s] = -\int\limits_1^0 x(s)y(1-s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^1 x(t)y(1-t)\,\mathrm{d}t = (x, V^*y),$$

откуда $V^*y(t) = y(1-t)$, причем $\|V\| = \|V^\star\| = 1$.

S – самосопряженный оператор, поскольку

$$(Sx, y) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-t} x(s)\,\mathrm{d}s\right) y(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 x(s) \int\limits_0^{1-s} y(t)\,\mathrm{d}t = (x, S^*y),$$

откуда $S^*y(t) = \int\limits_0^{1-t} y(s)\,\mathrm{d}s$.

Кроме того, S – компактный оператор. Поэтому

$$\|A\| = \|S\|.$$

Вычисление нормы оператора S сводится к задаче вычисления максимального по модулю собственного значения оператора S. Следовательно, ищем $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых

$$Sx = \lambda x \text{ или } \int\limits_0^{1-t} x(s)\,\mathrm{d}s = \lambda x(t).$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\lambda x'(t) + x(1-t) = 0$$

с условиями $x(1) = 0$.

Эти решения заведомо являются решениями краевой задачи Штурма – Лиувилля

$$\lambda^2 x''(t) + x(t) = 0,$$
$$x(1) = 0,\ x'(0) = 0.$$

Решая ее, находим $\lambda_k = \bigl(\pi/2 + k\pi\bigr)^{-1}$, $k = 1,2,\ldots$, $\lambda = \pi/2$ – максимальное по модулю собственное значение задачи Штурма – Лиувилля. Следовательно, $\|A\| = \|S\| = 2/\pi$.

В теореме 1.6.33 мы показали, что компактный самосопряженный оператор в H имеет по крайней мере одно собственное значение и таким значением является норма оператора A.

Чтобы рассмотреть построение других собственных значений и соответствующих собственных векторов, введем новое понятие.

Подпространство $L \subset H$ назовем *инвариантным* подпространством оператора A, если для любого $x \in L$ имеем $Ax \in L$.

Обозначим через H_n подпространство пространства H, состоящее из элементов $x \in H$, ортогональных первым n собственным векторам $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ оператора A, $(x, x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Для любого $x \in H_n$ вектор $Ax \in H_n$, т. е. $(Ax, x_i) = (x, Ax_i) = \lambda_i(x, x_i) = 0$. Это означает, что оператор A можно рассматривать как оператор $A : H_n \to H_n$. При этом он, естественно, является самосопряженным и компактным. Поэтому, по теореме 1.6.32,

$$|\lambda_{n+1}| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H_n}} |(Ax,x)|$$

и так далее.

Применительно к сепарабельному гильбертову пространству данная идея будет развита в следующем параграфе.

1.6.12. Теорема Гильберта–Шмидта и ее применение

Известно из курса линейной алгебры, что существует базис, состоящий из собственных векторов, в котором симметрическая матрица самосопряженного оператора имеет диагональный вид. Докажем теорему Гильберта о приведении к диагональному виду самосопряженного компактного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве. ядрами.

Теорема 1.6.35. *Пусть A; $H \to H$ – компактный самосопряженный оператор, x – произвольный элемент из H. Тогда элемент $Ax \in H$ раскладывается в сходящийся ряд Фурье по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных векторов оператора A.*

Следствие 1.6.9. Если компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H имеет обратный, то система его собственных векторов образует базис пространства H.

Следствие 1.6.10. Для всякого компактного самосопряженного оператора $A : H \to H$, в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует ортонормированный базис пространства H, элементами которого являются собственные векторы оператора A.

Вернемся к решению уравнения второго рода с компактным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве H вида

$$(I - \lambda A)x = y, \tag{1.6.31}$$

где λ – некоторый параметр, $A : H \to H$, $A \in \mathscr{K}(H)$. Предположим, что параметр λ такой, что оператор $I - \lambda A$ непрерывно обратим. Построим решение уравнения (1.6.31)

Теорема 1.6.36. *Пусть A – компактный самосопряженный оператор из H в H, а λ таково, что оператор $I-\lambda A$ непрерывно обратим. Тогда для любого $y \in H$ существует единственное решение уравнения* (1.6.31), *которое имеет вид*

$$x = (I - \lambda A)^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_k)^{-1} (y, \varphi_k)\varphi_k = R(\lambda; A)y, \tag{1.6.32}$$

где $R(\lambda; A)$ – резольвента оператора A.

Данная теорема вытекает из теоремы Гильберта–Шмидта и показывает, как устроена в этом случае резольвента. Резольвента представляет собой аналитическую функцию от λ с простыми полюсами в собственных значениях, причем вычеты в этих полюсах дают собственные векторы. С практической точки зрения мы можем изучить решения уравнения (1.6.31), близкие к заданному ненулевому собственному значению.

В следующем пункте мы рассмотрим применение данной теоремы к построению решения интегрального уравнения второго рода.

1.6.13. Интегральные уравнения с симметричным ядром

В пространстве $L_2[a, b]$ рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) - \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t) \tag{1.6.33}$$

с симметричным ядром $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{1.6.34}$$

Из п.1.6.6 известно, что:

1) интегральное оператор

$$Ax(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.6.35}$$

имеет по крайней мере одно характеристическое число, причем все характеристические числа действительны;

2) собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны между собой;
3) каждому характеристическому числу может отвечать лишь конечное число линейно независимых собственных функций.

Будем считать, что известны характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ оператора (1.6.20) и соответствующие им собственные функции $\varphi_1,\varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$. Применим теорему Гильберта–Шмидта к исследованию на разрешимость уравнения (1.6.17).

Случай 1. Пусть λ не является характеристическим числом оператора (1.6.35). Применяя теорему Гильберта–Шмидта, разложим интегральный оператор (1.6.35) в ряд

$$Ax(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x,\varphi_i)}{\lambda_i}\, \varphi_i(t).$$

Подставим это выражение в уравнение (1.6.33), получим

$$x(t) - \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x,\varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i(t) = y(t). \tag{1.6.36}$$

Умножая равенство (1.6.36) скалярно на $\varphi_m(t)$, $m = 1,2,\ldots,n,\ldots$, приходим к соотношениям

$$(x,\varphi_m) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{(x,\varphi_i)}{\lambda_i} (\varphi_n,\varphi_i) = (\varphi_m,y), \quad m = 1,2,\ldots. \tag{1.6.37}$$

а так как λ – не характеристическое число, то можно найти коэффициенты разложения $c_m = (x,\varphi_m)$, $m = 1, 2, \ldots$, в (1.6.37)

$$c_m = \frac{\lambda_m(y,\varphi_m)}{\lambda_m - \lambda} = \frac{\lambda_m y_m}{\lambda_m - \lambda}.$$

Через y_m обозначены коэффициент Фурье функции $y(t)$ при разложении ее по собственным функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$. Подставляя эти коэффициенты в (1.6.36), получаем искомое решение:

$$x(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\lambda_i - \lambda}\, \varphi_i(t) + y(t). \tag{1.6.38}$$

Таким образом, *если λ не является характеристическим числом интегрального оператора, то уравнение* (1.6.33) *с симметричным ядром $\mathcal{K}(t,s)$ в пространстве $L_2[a,b]$ имеет единственное решение при любой правой части $y(t) \in L_2[a,b]$.*

Случай 2. Пусть теперь λ – характеристическое число кратности q, т. е. $\lambda = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_{p+q+1}$, $q \geqslant p$. Тогда из (1.6.37) можно определить коэффициенты c_m только при $m \neq \ ,p, p+1, \ldots, p+q-1$ и, следовательно,

$$c_m = \frac{\lambda_m y_m}{\lambda_m - \lambda}, \text{ если } m \neq p, p+1, \ldots, p+q-1.$$

Если же номер m таков, что $p \leqslant n \leqslant p+q+1$, о равенство (1.6.37) принимает вид

$$c_m(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}) = (y, \varphi_m), \text{ где } 1 - \frac{\lambda}{\lambda_m} = 0.$$

Это возможно лишь тогда, когда

$$(y, \varphi_m) = 0, \quad m = p, p+1, p+q-1. \tag{1.6.39}$$

Поэтому для разрешимости уравнения (1.6.33) необходимо, чтобы свободный член $y(t)$ был ортогонален всем собственным функциям $\varphi_m(t)$, соответствующим данному характеристическому числу λ_m. Если это условие выполнено, уравнение (1.6.33) имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой

$$x(t) = y(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq p, \ldots, p+q-1}}^{\infty} \frac{y_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(t) + \sum_{i=p}^{p+q} c_i \varphi_i(t). \tag{1.6.40}$$

Если же функция $y(t)$ не удовлетворяет условию (1.6.40), то уравнение (1.6.33) при $\lambda = \lambda_p = \ldots = \lambda_{p+q-1}$ решений не имеет.

Продемонстрируем общие рассуждения на примере.

Пример 100. В пространстве $L_2[0, \pi/2]$ рассмотрим уравнение

$$x(t) - \lambda \int_0^{\pi/2} \mathcal{K}(t,s) x(s) \, \mathrm{d}s = 1,$$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi/2, \\ \sin s \cos t, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

Найдем прежде всего характеристические числа и соответствующие им собственные функции интегрального оператора. Для этого решим уравнение вида

$$x(t) = \lambda \int_0^{\pi/2} \mathcal{K}(t, s) x(s) \, \mathrm{d}s,$$

которое можно записать следующим образом

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^t \sin s \cos t\; x(s)\,\mathrm{d}s + \lambda \int\limits_t^{\pi/2} \sin t \cos s\; x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Продифференцируем это равенство дважды по t :

$$x'(t) = -\lambda \sin t \int\limits_0^t \sin s\; x(s)\,\mathrm{d}s + \lambda \cos t \int\limits_t^{\pi/2} \cos s\; x(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$x''(t) = -\lambda \cos t \int\limits_0^t \sin s\; x(s)\,\mathrm{d}s - \lambda \sin t \sin t\; x(t) -$$

$$-\lambda \sin t \int\limits_t^{\pi/2} \cos s\; x(s)\,\mathrm{d}s - \lambda \cos t \cos t\; x(t) = -x(t) - \lambda\, x(t).$$

Таким образом, получили следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} x'' + (\lambda+1)x(t) = 0, \\ x(0) = 0,\; x(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

Это задача Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа. Решим ее.

1) Пусть $\lambda + 1 < 0$, т. е. $\lambda < -1$. Тогда общее решение дифференциального уравнения запишется в виде

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{-(\lambda+1)}t} + c_2 e^{+\sqrt{-(\lambda+1)}t}.$$

Учитывая граничные условия, получаем систему уравнений для определения коэффициентов c_1 и c_2:

$$c_1 + c_2 = 0,$$
$$c_1(e^{+\sqrt{-(\lambda+1)}\pi/2} - e^{-\sqrt{-(\lambda+1)}\pi/2}) = 0.$$

Данная система, очевидно, имеет только нулевое решение $c_1 = c_2 = 0$. Это означает, что все $\lambda < -1$ не являются характеристическими для интегрального оператора.

2) Пусть $\lambda = -1$. Тогда общим решением дифференциального уравнения будет функция

$$x(t) = c_1 t + c_2.$$

Из граничных условий вытекает, что

$$c_1 = c_2 = 0.$$

3) Пусть теперь $\lambda+1>0$, т. е. $\lambda>-1$. Тогда дифференциальное уравнение имеет решение

$$x(t)=c_1\cos\sqrt{\lambda+1}\;t+c_2\sin\sqrt{\lambda+1}\;t.$$

Принимая во внимание граничные условия, получаем

$$c_1=0,$$

$$c_2\sin\sqrt{\lambda+1}\;\frac{\pi}{2}=0.$$

Поскольку нас интересуют ненулевые решения, то $c_2\neq 0$ и

$$\sin\sqrt{\lambda+1}\;\frac{\pi}{2}=0,\quad \text{т. е.}\quad \sqrt{\lambda+1}\;\frac{\pi}{2}=\pi\,k,\;\; k=1,2,\ldots.$$

Это означает, что если

$$\lambda_k=4k^2-1,\qquad k=1,2,\ldots,$$

то

$$\varphi_k(t)=\sin 2kt,\qquad k=1,2,\ldots.$$

являются собственными функциями интегрального оператора.

Используя теперь теорему Гильберта – Шмидта, перейдем к решению интегрального уравнения.

В нашем случае $y\equiv 1$, поэтому

$$y_k=(y,\varphi_k)=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}1\cdot\sin 2kt\,\mathrm{d}t=-\frac{4}{\pi}\frac{\cos 2kt}{2k}\bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$\begin{cases}0, & k=2m,\\ \dfrac{4}{\pi(2m-1)}, & k=2m-1,\; m=1,2,\ldots.\end{cases}$$

Поэтому, применяя формулу предыдущего пункта, получаем для всех $\lambda\neq\lambda_k$ имеем

$$x(t)=1+\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\sin(4m-2)t}{\pi(2m-1)[(4(2m-1)^2-1)-\lambda]}=$$

$$=1+\frac{4\pi}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(4m-2)t}{(2m-1)(16m^2-16m+3-\lambda)}.$$

Если же $\lambda=\lambda_{2m}=16m^2-1$, то $y_{2m}=0$ и функция $y(t)=1$ ортогональна соответствующей собственной функции

$$\varphi_{2m}(t)=\sin 4mt.$$

Поэтому решение будет отличаться от полученного выше дополнительным слагаемым

$$C \sin 4mt, \text{ C – произвольная постоянная.}$$

В случае, когда $\lambda = \lambda_{2m-1} = 16m^2 - 16m + 3$, $m = 1, 2, \ldots$, уравнение решений не имеет.

2. Практический раздел

2.1. Перечень практических занятий

ТЕМА 1. Метрические и нормированные пространства

Задание 1. Задает ли данная функция расстояние в пространстве $\mathbb{R}^n$ при заданном n.

1.1. $\rho(x,y) = ||x| - |y||\,, \quad n = 1;$
1.2. $\rho(x,y) = (x^2 + 2y^2)|x - y|, \quad n = 1;$
1.3. $\rho(x,y) = \sqrt{|x - y|}, \quad n = 1;$
1.4. $\rho(x,y) = \sin|x - y|, \quad n = 1;$
1.5. $\rho(x,y) = \left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^4\right)^{1/4}, \quad n = 2;$
1.6. $\rho(x,y) = \left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1^3 - y_2^3|^2\right)^{1/2}, \quad n = 2;$
1.7. $\rho(x,y) = |x_1 - x_2| + \operatorname{tg}|y_1 - y_2|, \quad n = 2;$
1.8. $\rho(x,y) = |x_1^3 - x_2^3|^2 + |\operatorname{arctg} y_1 - \operatorname{arctg} y_2|, \quad n = 2;$
1.9. $\rho(x,y) = \max|x_1 - x_2|, |y_1^5 - y_2^5|, \quad n = 2;$
1.10. $\rho(x,y) = \max|x_1^2 - x_2^2|, |y_1^2 - y_2^2|, \quad n = 2;$
1.11. $\rho(x,y) = (x_1^2 + x_2^2)|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|, \; n = 3;$
1.12. $\rho(x,y) = \max|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|, \; n = 3;$
1.13. $\rho(x,y) = (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)^{1/2}, \quad n = 3;$
1.14. $\rho(x,y) = \left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|^2\right)^{1/2}, \quad n = 3.$

Задание 2. Вычислить расстояние между двумя функциями в пространстве $C[-1{,}1]$, $C^{(1)}[-1{,}1]$, $CL_1[-1{,}1]$, $CL_2[-1{,}1]$.

2.1. $x(t) = t^2, \; y(t) = 2t + 5;$
2.2. $x(t) = t^3, \; y(t) = t^2 - 1;$
2.3. $x(t) = t^4, \; y(t) = 2t^2 - 7;$
2.4. $x(t) = t^2 - 1, \; y(t) = 3t + 8;$
2.5. $x(t) = t^2 + 1, \; y(t) = t - 4;$
2.6. $x(t) = t^3 - 1, \; y(t) = t^2 + 1;$
2.7. $x(t) = t^4 - 1, \; y(t) = t^3 + 1;$
2.8. $x(t) = (t^2 - 1)(t^3 - 1), \; y(t) = t + 1;$
2.9. $x(t) = t^2 - 4, \; y(t) = t + 1.$

Задание 3. Задает ли в пространстве $C^{(2)}[a,b]$ дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций норму следующая функция:

3.1. $\varphi(x) = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

3.2. $\varphi(x) = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

3.3. $\varphi(x) = |x(a) - x(b)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

3.4. $\varphi(x) = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

3.5. $\varphi(x) = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,\frac{a+b}{2}]} |x'(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

3.6. $\varphi(x) = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,\frac{a+b}{2}]} |x''(t)|$;

3.7. $\varphi(x) = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,\frac{a+b}{2}]} |x'(t)| + \int\limits_{(a+b)/2}^{b} |x''(t)|\,\mathrm{d}t$.

Задает ли в пространстве $C^{(1)}[a,b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций норму следующая функция:

3.8. $\varphi(x) = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

3.9. $\varphi(x) = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

3.10. $\varphi(x) = |x(a) - x(b)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

3.11. $\varphi(x) = \max\limits_{t\in[a,b]} (|x(t)| + |x'(t)|)$.

3.12. $\varphi(x) = \max\Big(\max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|, \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|\Big)$.

Задает ли в пространстве $\mathbb{R}^m$ норму следующая функция:

3.13. $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2}$; 3.14. $\varphi(x) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} \left|\sum\limits_{i=1}^{k} x_i\right|$;

Задание 4. Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентными в нормированном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $C^{(2)}[a,b]$.

4.1. $\|x\|_{C^{(2)}[a,b]}$ и $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

4.2. $\|x\|_{C^{(2)}[a,b]}$ и $\|x\|_1 = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

4.3. $\|x\|_{C^{(2)}[a,b]}$ и $\|x\|_1 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

4.4. $\|x\|_{C^{(2)}[a,b]}$ и $\|x\|_1 = \max\limits_{0\leqslant l\leqslant 2}\left(\sum\limits_{i=0}^{l} \max\limits_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t)|\right)$;

4.5. $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$ и

$$\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|;$$

4.6. $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$ и

$$\|x\|_2 = \int\limits_a^b |x(t)|\,\mathrm{d}t + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|;$$

4.7. $\|x\|_1 = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,\frac{a+b}{2}]} |x'(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$ и

$$\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|.$$

Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентными в нормированном пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $C^{(1)}[a,b]$.

4.8. $\|x\|_{C^{(1)}[a,b]}$ и $\|x\|_2 = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

4.9. $\|x\|_{C^{(1)}[a,b]}$ и $\|x\|_2 = \int\limits_a^b |x(t)|\,\mathrm{d}t + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

4.10. $\|x\|_1 = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$ и

$$\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|;$$

4.11. $\|x\|_{C^{(1)}[a,b]}$ и $\|x\|_2 = \max\limits_{t\in[a,b]}\Big(|x(t)| + |x'(t)|\Big)$;

4.12. $\|x\|_{C^{(1)}[a,b]}$ и $\|x\|_2 = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \int\limits_a^b |x'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентными в нормированном пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $C[a,b]$.

4.13. $\|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)|\,\mathrm{d}t$ и $\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$;

4.14. $\|x\|_1 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$ и $\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b e^{-t}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$.

ТЕМА 2. Сходимость и аппроксимация в нормированном пространстве

Задание 1. Найти предел последовательности $x^{(n)}$ в нормированном пространстве $C[a,b]$, $C^{(1)}[a,b]$, $CL_1[a,b]$, если он существует.

1.1. $x^{(n)}(t) = t \operatorname{arctg}(nt), \quad t \in [0,3];$

1.2. $x^{(n)}(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}, \quad t \in [0,1];$

1.3. $x^{(n)}(t) = \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^2}}, \quad t \in [-2,2];$

1.4. $x^{(n)}(t) = \Big(1 + \dfrac{t}{n}\Big)^n, \quad t \in [-1,1];$

1.5. $x^{(n)}(t) = n\Big(\sqrt{t + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{t}\Big), \quad t \in [1,3];$

1.6. $x^{(n)}(t) = t\Big(1 + e^{-nt}\Big), \quad t \in [0,1];$

1.7. $x^{(n)}(t) = \dfrac{2nt}{1+n^2t^2}, \quad t \in [0,1];$

1.8. $x^{(n)}(t) = n^2\,(1-t)\,t^{n-1}, \quad t \in [0,1];$

1.9. $x^{(n)}(t) = \dfrac{n^2t+1}{n^2+t^2}, \quad t \in [0,2];$

1.10. $x^{(n)}(t) = n\,(1-t)\,t^{n-1}, \quad t \in [0,1];$

1.11. $x^{(n)}(t) = \dfrac{t(2+n^2t^2)}{1+n^2t^2}, \quad t \in [0{,}1];$

1.12. $x^{(n)}(t) = nt^2e^{-nt}, \quad t \in [0,2];$

1.13. $x^{(n)}(t) = \dfrac{nt}{\sqrt{n^2+1}}, \quad t \in [0,1];$

1.14. $x^{(n)}(t) = n^2\,(1-t)\,t^n, \quad t \in [0,1/2];$

1.15. $x^{(n)}(t) = \sqrt{n}e^{-nt}, \quad t \in [0,1];$

1.16. $x^{(n)}(t) = e^{n(t-2)}, \quad t \in [0,2];$

1.17. $x^{(n)}(t) = \dfrac{1}{2-(t^2-1)^n}, \quad t \in [0,4];$

1.18. $x^{(n)}(t) = \dfrac{n^2t^2}{n^2t+t^2}, \quad t \in [0,1];$

1.19. $x^{(n)}(t) = t + \operatorname{arctg} n(t-1/2), \quad t \in [0,1];$

1.20. $x^{(n)}(t) = t^n - 3t^{n+2} + 2t^{n+3}, \quad t \in [0,1].$

Задание 2. Найти предел последовательности $x^{(n)}$ в тех из нормированных пространств ℓ_p, $p \geqslant 1$, m, в которых она лежит, если он существует.

2.1. $x^{(n)} = \Bigg(\underbrace{\left(\frac{5n+1}{5n+2}\right)^n, \ldots, \left(\frac{5n+1}{5n+2}\right)^n}_{n}, 0, \ldots\Bigg);$

2.2. $x^{(n)} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2\sqrt{2n}}, \ldots, \frac{1}{i\sqrt{in}}, \ldots\right);$

2.3. $x^{(n)} = \left(\frac{\ln(2^n+1)}{n}, \frac{\ln(3^n+1)}{n}, \ldots, \frac{\ln((n+1)^n+1)}{n}, 0, \ldots\right);$

2.4. $x^{(n)} = \left(\frac{1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+4}}, \ldots\right);$

2.5. $x^{(n)} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots, \left(1+\frac{i}{n}\right)^{in}, \ldots\right);$

2.6. $x^{(n)} = \Bigg(\underbrace{\frac{\cos(n)}{n}, \ldots, \frac{\cos(n)}{n}}_{n}, 0, \ldots\Bigg);$

2.7. $x^{(n)} = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[n]{n}, 0, \ldots,)\ ;$

2.8. $x^{(n)} = \Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt[5]{n}}{n+5}, \ldots, \frac{\sqrt[5]{n}}{n+5}}_{n}, 0, \ldots\Bigg);$

2.9. $x^{(n)} = \Bigg(\underbrace{\frac{\cos 4^n}{n}, \ldots, \frac{\cos 4^n}{n}}_{n}, 0, \ldots\Bigg);$

2.10. $x^{(n)} = \left(\frac{1}{2^n+1}, \ldots, \frac{1}{2^n+n}, 0, \ldots\right);$

2.11. $x^{(n)} = \Bigg(\underbrace{\frac{\sin n^3}{n^3}, \ldots, \frac{\sin n^3}{n^3}}_{n^3}, 0, \ldots\Bigg);$

2.12. $x^{(n)} = \left(\frac{\sin 1}{2}, \frac{2\sin 2}{3}, \ldots, \frac{n \sin n}{n+1}, 0, \ldots\right);$

2.13. $x^{(n)} = \left(\frac{n^3}{1+n^3}, \frac{n^3}{1+4n^3}, \ldots, \frac{n^3}{1+i^2n^3}, \ldots\right);$

2.14. $x^{(n)} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+2}, \ldots, \left(1+\frac{1}{in}\right)^{n+i}, \ldots\right);$

2.15. $x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \ldots, \frac{1}{\ln n}, 0, \ldots\right);$

2.16. $x^{(n)} = \left(1, \dfrac{1}{2^{\alpha}}, \dfrac{1}{n^{\alpha}}, 0, \ldots\right), \alpha \in (0,\infty)$;

2.17. $x^{(n)} = \left(\dfrac{n^2}{1+n^3}, \dfrac{2n^2}{1+4n^3}, \ldots, \dfrac{in^2}{1+i^2n^3}, \ldots\right)$;

2.18. $x^{(n)} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, 0, \ldots\right)$;

2.19. $x^{(n)} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{4}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}, 0, \ldots\right)$;

Задание 3.

3.1. В пространстве непрерывных функций $C[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C[0,1] : x(0) = 0\}$. Описать множество элементов наилучшей аппроксимации элементами подпространства функции $x_0(t) = 1$.

3.2. В пространстве непрерывных функций $CL_2[0,1]$ рассмотрим множество $M = \{x(t) \in CL_2[0,1] : x(0) = 0\}$. Описать множество элементов наилучшей аппроксимации элементами подпространства функции $x_0(t) = e^t$.

3.3. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим подпространство многочленов степени не выше n. Описать множество элементов наилучшей аппроксимации элементами подпространства функции $x_0(t) = \sin t$.

3.4. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ выберем точку $x_0(1,-1)$ и одномерное подпространство L, порожденное элементом $e(1,1)$. Описать множество элементов наилучшей аппроксимации x_0 элементами подпространства L.

3.5. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\| = |x_1| + |x_2|\}$ выберем точку $x_0(-1,1)$ и одномерное подпространство L, порожденное элементом $e(1,1)$. Описать множество элементов наилучшей аппроксимации x_0 элементами подпространства L.

3.6. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\| = |x_1| + |x_2|\}$ выберем точку $x_0(1,0)$ и одномерное подпространство $L = \{x \in \mathbb{R} : x_1 = x_2\}$. Описать множество элементов наилучшей аппроксимации x_0 элементами подпространства L.

3.7. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ выберем точку $x_0(1,0)$ и одномерное подпространство $L = \{x \in \mathbb{R} : x_1 = 0\}$. Описать множество элементов наилучшей аппроксимации x_0 элементами подпространства L.

3.8. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с нормой $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ выберем точку $x_0(1,0)$ и одномерное подпространство $L = \{x \in \mathbb{R} : x_1 = 0\}$. Описать множество элементов наилучшей аппроксимации x_0 элементами подпространства L.

ТЕМА 3. Множества в нормированном пространстве

Задание 1. Определить, является ли множество открытым, замкнутым в пространстве $C[0,1]$, $CL_1[0,1]$.

1.1. $A = \{x(t) \in C[0,1] \, : x(0)\, x(1) = 0\}$;

1.2. $A = \{x(t) \in C[0,1] \, : x(0) = x(1)\}$;

1.3. $A = \{x(t) \in C[0,1] \, : x(0) = 1\}$;

1.4. $A = \{x(t) \in C[0,1] \, : 4 < x(t) < 10, \forall t \in [0,1]\}$;

1.5. $A = \{x(t) \in C[0,1] \, : x(0) > 0\}$;

1.6. $A = \left\{x(t) \in C[0,1] \, : \int\limits_0^1 x(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$;

1.7. $A = \left\{x(t) \in C^{(1)}[0,1] \, : x'(0) = 0\right\}$;

1.8. $A = \left\{x(t) \in C^{(1)}[0,1] \, : x'(0) > 0\right\}$;

1.9. $A = \{x(t) \in C[0,1] \, : |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in [0{,}1]\}$;

Определить, является ли множество открытым, замкнутым в пространстве $\ell_p, p \geqslant 1$.

1.10. $A = \{x \in \ell_1 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots\}$;

1.11. $A = \left\{x \in \ell_2 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), |x_i| \leqslant \dfrac{1}{2^{i-1}}, i = 1{,}2, \ldots\right\}$;

1.12. $A = \left\{x \in \ell_1 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), |x_i| \leqslant \dfrac{1}{i}, i = 1{,}2, \ldots\right\}$;

1.13. $A = \left\{x \in \ell_3 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = 0\right\}$;

1.14. $A = \{x \in \ell_1 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), |x_i| \leqslant 1, i = 1{,}2, \ldots\}$;

1.15. $A = \left\{x \in \ell_2 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < 1\right\}$;

1.16. $A = \left\{x \in \ell_2 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 0\right\}$;

Задание 2. Определить, является ли множество выпуклым в пространстве $\ell_p, p \geqslant 1$.

2.1. $A = \left\{x \in \ell_1 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), |x_i| \leqslant \dfrac{1}{2^{i-1}}, i = 1{,}2, \ldots\right\}$;

2.2. $A = \left\{x \in \ell_2 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), \sum\limits_{i=1}^{\infty} i^2 |x_i|^2, i = 1{,}2, \ldots\right\}$;

2.3. $A = \left\{ x \in m \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), \sup\limits_i |x_i| \leqslant 1 \right\};$

2.4. $A = \left\{ x \in \ell_3 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = 0 \right\};$

2.5. $A = \left\{ x \in \ell_1 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), |x_i| \leqslant \dfrac{1}{4^i}, i = 1{,}2, \ldots \right\};$

2.6. $A = \left\{ x \in \ell_2 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < 1 \right\};$

2.7. $A = \left\{ x \in \ell_2 \, : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leqslant 1 \right\};$

Определить, является ли множество выпуклым в пространстве $C[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций.

2.8. Множество многочленов степени n;

2.9. Множество многочленов степени не выше, чем n;

2.10. $A = \left\{ x(t) \in C[0,1] \, : \int\limits_0^1 |x(t)| \leqslant 1 \right\};$

2.11. $A = \left\{ x(t) \in C[0,1] \, : \int\limits_0^1 t^2 |x(t)|^2 \leqslant 1 \right\};$

2.12. $A = \left\{ x(t) \in C[0,1] \, : \max\limits_i |x(t)| \leqslant 1 \right\};$

2.13. $A = \left\{ x(t) \in C^{(1)}[0,1] \, : \max\limits_i |x'(t)| \leqslant 1 \right\};$

2.14. $A = \left\{ x(t) \in C[0,1] \, : \int\limits_0^1 e^{-t} |x(t)|^2 \leqslant 1 \right\}.$

Задание 3. Образуют ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство следующие множества функций:

3.1. Монотонные функции;

3.2. Четные функции;

3.3. Непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $x'(0) = 0$;

3.4. Непрерывные кусочно-линейные функции;

3.5. Непрерывно дифференцируемые функции;

3.6. Функции с ограниченным изменением;

3.7. Абсолютно непрерывные функции;

3.8. Периодические функции;

3.9. Функции, удовлетворяющие условию Липшица, с константой Липшица, зависящей от функции;

3.10. Функции, удовлетворяющие условию $\int\limits_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t = 0$;

3.11. Функции, удовлетворяющие условию $x(-1) = x(1) = 0$;

3.12. Функции, удовлетворяющие условию $x(-1) = x(1)$;

3.13. Функции, удовлетворяющие условию $x(0) = 0$;

3.14. Нечетные функции;

3.15. Многочлены степени не выше четвертой;

3.16. Многочлены произвольной степени.

Образуют ли в пространстве $C^{(1)}[-1,1]$ подпространство следующие множества функций:

3.17. Дважды непрерывно дифференцируемые функции;

3.18. Непрерывно дифференцируемые на $[-1,1]$ функции, удовлетворяющие условию $x'(0) = 0$;

3.19. Непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $x'(-1) = x'(1)$;

3.20. Функции, удовлетворяющие условию $\int\limits_{-1}^{1} x'(t)\,\mathrm{d}t = 0$;

3.21. Дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $x''(-1) = x''(1)$.

Задание 4. Доказать следующие утверждения.

4.1. Доказать, что для произвольного множества $A \subset E$ справедливо включение $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Возможно ли здесь строгое включение?

4.2. Пусть $A, B \subset E$ и $\overline{A} \subset \overline{B}$. Следует ли отсюда, что $A \subset B$? Ответ проиллюстрировать примером.

4.3. Пусть $A, B \subset E$ – замкнутые множества. Возможно ли, что $\rho(A,B) = 0$, если $A \cap B = \varnothing$?

4.4. Доказать, что алгебраическая сумма и объединение двух ограниченных множеств – ограниченное множества.

4.5. Доказать, что множество $A \subset E$ является ограниченным тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x^{(n)} \in E$ и любой числовой последовательности $\alpha_n \in \mathbb{C}$, стремящейся к нулю, последовательность $\alpha_n x^{(n)}$ сходится к нулю.

4.6. Доказать, что в любом нормированном векторном пространстве E существуют два непересекающиеся открытые множества, которые нельзя поместить в непересекающиеся замкнутые.

ТЕМА 4. Гильбертовы пространства

Задание 1. Провести процесс ортогонализации векторов x_1, x_2, x_3 в гильбертовом пространстве $H_p[a, b]$, в котором скалярное произведение имеет вид $(x, y)_p = \int\limits_a^b p(t)x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$.

1.1. $a = -1, b = 1, p(t) = 1, x_1 = t, x_2 = 2t - t^2, x_3 = e^t$;

1.2. $a = -1, b = 1, p(t) = e^t, x_1 = e^{-t}, x_2 = t + t^2, x_3 = t^2 + 1$;

1.3. $a = -2, b = 2, p(t) = 1, x_1 = \cos \pi t, x_1 = \sin \pi t, x_3 = t - 8$;

1.4. $a = -\pi, b = \pi, p(t) = \cos^2 t, x_1 = \cos t, x_2 = \sin t, x_3 = t + 1$;

1.5. $a = 0, b = 1, p(t) = 1, x_1 = 3t^2 - 2t, x_2 = 1, x_3 = 3t^2 - 1$;

1.5. $a = 0, b = 1, p(t) = t, x_1 = t + 2, x_2 = t - 3, x_3 = e^t + 1$;

1.6. $a = 0, b = 1, p(t) = t, x_1 = t + 2, x_2 = t - 3, x_3 = e^t + 1$;

1.7. $a = -1, b = 1, p(t) = 1, x_1 = \cos t, x_2 = 1, x_3 = e^t + 1$;

1.8. $a = -1, b = 1, p(t) = t^2, x_1 = t, x_2 = 1 - t^2, x_3 = t^3$;

1.9. $a = -\pi, b = \pi, p(t) = t^2, x_1 = \cos t, x_2 = \sin t, x_3 = t$;

1.10. $a = 0, b = 1, p(t) = e^t, x_1 = \sin t, x_2 = t, x_3 = e^t + 1$;

1.11. $a = -1, b = 1, p(t) = t^2, x_1 = t + 1, x_2 = 3t^2, x_3 = t^3 + 1$;

1.12. $a = -1, b = 1, p(t) = t, x_1 = t + 1, x_2 = 2t - t^2, x_3 = e^t - 1$;

1.13. $a = -1, b = 1, p(t) = t, x_1 = e^t, x_2 = t^2 + t, x_3 = t^3 + 1$;

1.14. $a = 0, b = 1, p(t) = t^3, x_1 = t, x_2 = 1 - t^2, x_3 = t^3$.

Задание 2. Найти угол между векторами $x(t)$ и $y(t)$ в пространстве $L_2[\pi, \pi]$.

2.1. $x(t) = \sin 3t,\ y(t) = \cos 5t$; 2.3. $x(t) = \sin 4t,\ y(t) = 1$;

2.2. $x(t) = \sin 3t,\ y(t) = \sin 5t$; 2.4. $x(t) = \sin t,\ y(t) = \cos t$;

Найти угол между векторами $x(t)$ и $y(t)$ в пространстве $L_2[0, \pi]$.

2.5. $x(t) = \sin 4t,\ y(t) = \cos 3t$; 2.7. $x(t) = \sin 2t,\ y(t) = \sin 4t$;

2.6. $x(t) = \sin 3t,\ y(t) = \sin 5t$; 2.8. $x(t) = \sin t,\ y(t) = t^2$;

Найти угол между векторами $x(t)$ и $y(t)$ в пространстве $L_2[-1, 1]$.

2.9. $x(t) = \sin 4t,\ y(t) = t$; 2.12. $x(t) = 2t^2,\ y(t) = \sin 4t$;

2.10. $x(t) = e^t,\ y(t) = e^{-2t}$; 2.13. $x(t) = \sin t,\ y(t) = t^2$;

2.11. $x(t) = \sin 3t,\ y(t) = 1$; 2.14. $x(t) = \sin t,\ y(t) = t$.

Задание 3. Найти ортогональное дополнение к следующим множествам в гильбертовом пространстве H:

3.1. $A = \{x(t) \in L_2[-1,1] : \ x(t) > 0$ при $t > 0\}$;

3.2. $A = \{x(t) \in L_2[-1,1] : \ \int\limits_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.3. $A = \{x(t) \in L_2[-1,1] : \ \int\limits_{0}^{1} \sin \pi t x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.4. $A = \{x(t) \in L_2[-1,1] : \ \int\limits_{0}^{1} \sin \pi t x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.5. $A = \{x(t) \in L_2[-1,1] : \ \int\limits_{0}^{1} \sin 4\pi t x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.6. $A = \{x(t) \in L_2[-1,1] : \ \int\limits_{-1}^{0} t x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.7. $A = \{x(t) \in L_2[-1,1] : \ \int\limits_{0}^{1} \sqrt{t}\, x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.8. $A = \{x(t) \in L_2[-1,1] : \ x(t) = 0$ при $t > 0\}$;

3.9. $A = \{x(t) \in L_2[-\pi,\pi] : \ x(t) = e^{-int}, \ n \in \mathbb{N}\}$;

3.10. $A = \{x(t) \in L_2[0,1] : \ x(t) = y(t^2), \ y(t) \in P[0,1]\}$;

3.11. $A = \{x(t) \in P[0,1] : \ x(0) = 0\} \subset L_2[0,1]$;

3.12. $A = \{x(t) \in \ell_2 : \ \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = 0\}$;

3.13. $A = \{x(t) \in \ell_2 : \ x_1 + x_2 = 0\}$;

3.14. $A = \{x(t) \in \ell_2 : \ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 0, \ m \in \mathbb{N}\}$.

Задание 4. Выяснить, принадлежат ли следующие функции пространству $L_2[0,1]$.

4.1. $x(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$;

4.2. $x(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t}}$;

4.3. $x(t) = \dfrac{t^2}{(1-t^2)^2}$;

4.4. $x(t) = \dfrac{e^{1/t}}{t^3}$;

4.5. $x(t) = \dfrac{\ln t}{t}$;

4.6. $x(t) = \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{\ln(1-t)}}$;

4.7. $x(t) = \dfrac{t-1}{\sqrt[3]{t^5}}$;

4.8. $x(t) = \dfrac{t-1}{\sqrt{1-t^3}}$.

ТЕМА 5. Аппроксимация и проекция в гильбертовом пространстве

Задание 1. В гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ функцию $x(t)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ приблизить тригонометрическим многочленом

1.1. $x(t) = 3^t$;

1.2. $x(t) = e^t$;

1.3. $x(t) = 2^{1+t}$;

1.4. $x(t) = t^5$;

1.5. $x(t) = \ln 1 + t^2$;

1.6. $x(t) = (1-2t^2)^3$;

1.7. $x(t) = t^{3/2}$;

1.8. $x(t) = t^2 + \cos t$;

1.9. $x(t) = t^2 + t$;

1.10. $x(t) = t - 5t^2$;

1.11. $x(t) = 3t + 7t^2$;

1.12. $x(t) = t^3 - t^2$;

1.13. $x(t) = t^2 - 2t$;

1.14. $x(t) = 8t - 1$.

Задание 2. В гильбертовом пространстве ℓ_2 найти проекцию элемента $x_0 \in \ell_2$ на подпространство $L \subset \ell_2$.

2.1. $x_0 = \left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \ldots, \dfrac{1}{3^i}, \ldots\right), \quad L = \{\alpha x + \beta y :$

$$x = \left(1, \frac{1}{5}, \frac{1}{5^2}, \ldots, \frac{1}{5^i}, \ldots\right), y = \left(1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6^2}, \ldots, \frac{1}{6^i}, \ldots\right), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\Bigg\};$$

2.2. $x_0 = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{i}, \ldots\right), \quad L = \{\alpha x + \beta y :$

$$x = (1, 1, 0, \ldots), y = (1,0, \ldots), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\};$$

2.3. $x_0 = (0, 1, 1, 2, 0, 0, \ldots,), \quad L = \left\{x \in \ell_2 : x_1 = 0, \ \sum\limits_{i=2}^{\infty} \dfrac{x_i}{2^i} = 0\right\};$

2.4. $x_0 = (0,1,1,0,0, \ldots,), \quad L = \left\{x \in \ell_2 : x_2 = 0, \ \sum\limits_{i=3}^{\infty} \dfrac{x_i}{3^i} = 0\right\};$

2.5. $x_0 = \left(0, 1, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots,\right), \quad L = \{x \in \ell_2 : x_1 - x_3 = 0, x_2 = 0,$

$$\left.\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{i} = 0\right\};$$

2.6. $x_0 = \left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \ldots, \dfrac{1}{3^i}, \ldots\right), \quad L = \{\alpha x + \beta y :$

$$x = (1, 0, 1, 0, 0, \ldots), y = (1,1,1, 0,0, \ldots), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\};$$

2.7. $x_0 = (1, 1, 0, 0, \ldots,), \quad L = \{x \in \ell_2 : x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_4 = 0,$

$$\left.\sum_{i=5}^{\infty} \frac{x_i}{4^i} = 0\right\};$$

2.8. $x_0 = (1, 0, 1, 1, 0, \ldots,)$, $\quad L = \{x \in \ell_2 : x_2 - x_3 = 0, x_1 = 0,$
$$\left.\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{2i}}{i^2} = 0\right\};$$

2.9. $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^i}, \ldots\right)$, $\quad L = \{x \in \ell_2 : x_1 - 2x_2 = 0,$
$$\left.\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{2i+1}}{2^i} = 0\right\};$$

2.10. $x_0 = \left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right)$, $\quad L = \{x \in \ell_2 : x_1 + 3x_2 = 0,$
$$\left. x_2 - 4x_4 = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{4^i} = 0\right\};$$

2.11. $x_0 = \left(1, \frac{1}{5}, \frac{1}{5^2}, \ldots, \frac{1}{5^i}, \ldots\right)$, $\quad L = \{\alpha x + \beta y :$
$$\left. x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^i}, \ldots\right), y = (1, 0, 1, 0, 0, \ldots), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

2.12. $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^i}, \ldots\right)$, $\quad L = \{\alpha x + \beta y :$
$$\left. x = \left(1, \frac{1}{7}, \frac{1}{7^2}, \ldots, \frac{1}{7^i}, \ldots\right), y = \left(1, \frac{1}{8}, \frac{1}{8^2}, \ldots, \frac{1}{8^i}, \ldots\right), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\};$$

2.13. $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{i}, \ldots\right)$, $\quad L = \{\alpha x + \beta y :$
$$x = (1, 1, 1, 0, 0, \ldots), y = (0, 0, 1, 1, 1,0,0 \ldots), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\};$$

2.14. $x_0 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots), L = \left\{x \in \ell_2 : x_1 - x_2 = 0, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{5^i} = 0\right\}.$

Задание 3. В гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ найти проекцию функции $x_0(t)$ на подпространство $L \subset L_2[-\pi, \pi]$.

3.1. $x_0(t) = t + 8, \quad L = \{x(t) : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t x(t)\, \mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} t x(t)\, \mathrm{d}t = 0\};$

3.2. $x_0(t) = t, \quad L = \{x(t) : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t x(t)\, \mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos t x(t)\, \mathrm{d}t = 0\};$

3.3. $x_0(t) = 2t, \quad L = \{x(t) : \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2 x(t)\, \mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t x(t)\, \mathrm{d}t = 0\};$

3.4. $x_0(t) = t - 4, L = \{x(t) : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t x(t)\, \mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos t x(t)\, \mathrm{d}t = 0\};$

3.5. $x_0(t) = e^t, \quad L = \{x(t) : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t x(t)\, \mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2 x(t)\, \mathrm{d}t = 0\};$

3.6. $x_0(t) = t^2, \quad L = \{x(t) : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin tx(t)\,\mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} tx(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.7. $x_0(t) = t^2 - 1, L = \{x(t) : \int\limits_{-\pi}^{\pi} tx(t)\,\mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

В гильбертовом пространстве $L_2[-1, 1]$ найти проекцию функции $x_0(t)$ на подпространство $L \subset L_2[-1, 1]$.

3.8. $x_0(t) = t - 1, L = \{x(t) : \int\limits_{-1}^{1} te^t x(t)\,\mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-1}^{1} e^{-t} x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.9. $x_0(t) = t + 1, L = \{x(t) : \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-1}^{1} \cos \pi tx(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.10. $x_0(t) = 2t + 1, L = \{x(t) : \int\limits_{-1}^{1} e^{|t|} x(t)\,\mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.11. $x_0(t) = e^{-t}, L = \{x(t) : \int\limits_{-1}^{1} \sin \pi tx(t)\,\mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.12. $x_0(t) = t, L = \{x(t) : \int\limits_{-1}^{1} \sin \pi tx(t)\,\mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.13. $x_0(t) = t, L = \{x(t) : \int\limits_{-1}^{1} \sin \pi tx(t)\,\mathrm{d}t = 0, \int\limits_{0}^{1} (t - 1)x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

3.14. $x_0(t) = t^2 - 1, \quad L = \{x(t) : \int\limits_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t = 0, \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$.

ТЕМА 6. Отображения в банаховых пространстваах

Задание 1. Выяснить, является ли отображение $f : E \to F$ непрерывным в точке $x_0 = (1, 1, 1, 0, 0, \ldots)$.

1.1. $E = \ell_1,\ F = m,\quad f(x) = \Big(x_1^2, \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2^i}, \ldots\Big);$

1.2. $E = \ell_3,\ F = \ell_1,\quad f(x) = \Big(x_1, \sqrt{x_2}, \dfrac{x_3}{3}, \ldots, \dfrac{x_i}{3^i}, \ldots\Big);$

1.3. $E = \ell_2,\ F = \ell_1,\quad f(x) = \Big(0, 1, \sqrt[3]{x_1^2}, 0, \ldots,\Big);$

1.4. $E = m,\ F = \ell_2,\quad f(x) = \Big(0, \dfrac{\sqrt[3]{x_1}}{3}, 2x_2, x_3, 0, \ldots,\Big);$

1.5. $E = \ell_4,\ F = m,\quad f(x) = \Big(0, 0, 1 + \sqrt[3]{x_1^2}, 0, \ldots,\Big);$

1.6. $E = \ell_1,\ F = m,\quad f(x) = \Big(x_1^2 + x_2^2, x_2, 3 + x_3, 1 + \sqrt{x_4}, 0, \ldots,\Big);$

1.7. $E = \ell_1,\ F = \ell_2,\quad f(x) = \Big(x_1, x_2^2, x_3, 0, 0, \ldots,\Big).$

Выяснить, является ли отображение $f : E \to F$ непрерывным в точке $x_0(t) = 0$.

1.8. $E = L_1[0,1],\ F = L_2[0,1],\quad f(x) = \int\limits_0^1 t^2 s x^2(s)\,\mathrm{d}s;$

1.9. $E = L_2[0,1],\ F = L_1[0,1],\quad f(x) = \int\limits_0^1 t x^2(s)\,\mathrm{d}s;$

1.10. $E = L_2[0,1],\ F = L_1[0,1],\quad f(x) = t^2 x(t^3);$

1.11. $E = L_4[0,1],\ F = L_2[0,1],\quad f(x) = x(\sqrt{t});$

1.12. $E = L_1[0,1],\ F = L_2[0,1],\quad f(x) = x(t);$

1.13. $E = C[0,1],\ F = L_2[0,1],\quad f(x) = t^2 x(0);$

1.14. $E = C[0,1],\ F = L_1[0,1],\quad f(x) = x(0) + \int\limits_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t.$

Задание 2. Выяснить, является ли отображение $f : E \to F$ непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица.

2.1. $E = L_1[0,1],\ F = L_1[0,1],\quad f(x) = x^3(t);$

2.2. $E = L_2[0,1],\ F = L_2[0,1],\quad f(x) = \int\limits_0^t e^t x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.3. $E = L_1[0,1],\ F = L_1[0,1],\quad f(x) = t x(t^2);$

2.4. $E = C[0,1],\ F = C[0,1],\quad f(x) = x^3(t);$

2.5. $E = C[0,1],\ F = C[0,1],\quad f(x) = \sqrt[3]{|x(t)|};$

2.6. $E = C[0,1],\ F = C[0,1],\quad f(x) = \dfrac{x(t)}{1+x^2(t)};$

2.7. $E = C[-2,4],\ F = C[-2,4],\quad f(x) = x(t) + \sin x(t);$

2.8. $E = C[0,1],\ F = C[0,1],\quad f(x) = \sqrt[3]{|x(t)|} + x(t);$

2.9. $E = C[0,1],\ F = C[0,1],\quad f(x) = \dfrac{x(t)}{1+t^2};$

2.10. $E = \ell_2,\ F = \mathbb{C},\quad f(x) = x_1 + \sin^2 x_2 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{x_i}{2^i};$

2.11. $E = \ell_2,\ F = \mathbb{C},\quad f(x) = \sin^2 x_1 + x_2 + 1;$

2.12. $E = \ell_2,\ F = \mathbb{C},\quad f(x) = x_1^2 + x_2^2;$

2.13. $E = \ell_2,\ F = \mathbb{C},\quad f(x) = x_1^2 + x_2 + x_3;$

2.14. $E = L_2[0,1],\ F = L_1[0,1],\quad f(x) = \dfrac{x(t)}{1+t^2}.$

Задание 3. Определить, является ли отображение f нормированного пространства E на себя сжимающим.

3.1. $E = C[-1,1],\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{3}\cos\left(x(t)\right) + e^t;$

3.2. $E = L_3[0,1],\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{3}\,x\Big(\sqrt[4]{t}\Big) + t^2;$

3.3. $E = L_2[-1,1],\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{3}\,t^{1/9}x\Big(\sqrt[3]{t}\Big) + t;$

3.4. $E = \ell_2,\quad f(x) = \Big(\dfrac{1}{2}\,x_1 + \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k + \dfrac{1}{k}\ldots,\Big);$

3.5. $E = \mathbb{R}^3,\quad f(x) = \Big(\dfrac{1}{4}\,x_1 + \dfrac{1}{8}\,x_3 + 1, \dfrac{1}{5}\,x_1 - \dfrac{1}{4}\,x_2 + 2, -\dfrac{1}{4}\,x_3 - 3\Big);$

3.6. $E = \ell_3,\quad f(x) = \Big(\dfrac{1}{4}\,x_1 + 1, \ldots, \dfrac{1}{4^k}\,x_k + \dfrac{1}{k}\ldots,\Big);$

3.7. $E = m,\quad f(x) = \Big(\dfrac{1}{2}\,x_2 + \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{2^{k-1}}\,x_k + \dfrac{1}{2^{k-1}}\ldots,\Big);$

3.8. $E = L_2[0,1],\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{2}\,x\Big(\sqrt{t}\Big) + t^2;$

3.9. $E = \ell_4,\quad f(x) = \Big(\dfrac{1}{2}\,x_1 + \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k + \dfrac{1}{4^k}\ldots,\Big);$

3.10. $E = C[-1,1],\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{3}\sin\left(x(t)\right) + \cos t;$

3.11. $E = L_2[0,1],\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{3}\,tx(\sqrt{t}) + t^3;$

3.12. $E = C[-1,1],\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{4}\left(x(t) + \sin x(t)\right) + \cos t.$

ТЕМА 7. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора

Задание 1. Доказать, что оператор умножения на непрерывную функцию, действующий в пространстве $X = C[a,b]$ является линейным ограниченным, найти его норму.

1.1. $Ax(t) = (5 - |t+8|)\, x(t), \quad t \in [-10, 10];$

1.2. $Ax(t) = \left(t - \sqrt{t-2}\right) x(t), \quad t \in [2, 8];$

1.3. $Ax(t) = \left(t^2 - 2t + 3\right) x(t), \quad t \in [1, 5];$

1.4. $Ax(t) = \left(-t^2 - 4t + 1\right) x(t), \quad t \in [-3, 0];$

1.5. $Ax(t) = \dfrac{2}{5 + |3t-2|}\, x(t), \quad t \in [-1/3, 1/3];$

1.6. $Ax(t) = \dfrac{2}{t^2 - 2t + 2}\, x(t), \quad t \in [-1, 5];$

1.7. $Ax(t) = \dfrac{2t}{t^2 + 1}\, x(t), \quad t \in [-2, 4];$

1.8. $Ax(t) = \dfrac{t}{4t^2 + 9}\, x(t), \quad t \in [-8, 15];$

1.9. $Ax(t) = \left(t^2 + 6t + 11\right) x(t), \quad t \in [-4, 2];$

1.10. $Ax(t) = \left(-t^2 + 2t + 2\right) x(t), \quad t \in [-1, 2];$

1.11. $Ax(t) = \dfrac{4t + 31}{t + 7}\, x(t), \quad t \in [-6, 10];$

1.12. $Ax(t) = \left(t^3 - 3t\right) x(t), \quad t \in [1, 5];$

1.13. $Ax(t) = \left(12t - t^3\right) x(t), \quad t \in [2, 4];$

1.14. $Ax(t) = \dfrac{4}{2 - t}\, x(t), \quad t \in [3, 6];$

1.15. $Ax(t) = \dfrac{t^3 + 8}{t + 2}\, x(t), \quad t \in [3, 5].$

Задание 2. Доказать, что оператор замены переменной в пространстве $X = L_p[a,b]$ является линейным ограниченным и найти его норму.

2.1. $X = L_2[0,1], \quad Ax(t) = (t^5 - t^8)x(t^3);$

2.2. $X = L_3[-1,1], \quad Ax(t) = t^2 x(t^3);$

2.3. $X = L_3[0,1], \quad Ax(t) = \sqrt{t}\, x(\sqrt[4]{t});$

2.4. $X = L_{3/2}[0,1], \quad Ax(t) = t x(\sqrt{t});$

2.5. $X = L_1[-1,1], \quad Ax(t) = (t^2 - 2t)x(\sqrt[3]{t});$

2.6. $X = L_2[-1,1], \quad Ax(t) = (t^2 + t)x(t^3)\ ;$

2.7. $X = L_1[-1,1]$, $\quad Ax(t) = \big((t-1)^2 + t\big)\, x(\sqrt[3]{t})$;

2.8. $X = L_2[-1,0]$, $\quad Ax(t) = t^2(t-1)x(t^3)$;

2.9. $X = L_3[0,1]$, $\quad Ax(t) = tx(t^4)$;

2.10. $X = L_{5/3}[-1,2]$, $\quad Ax(t) = (t-3t^2)x(\sqrt[3]{t})$;

2.11. $X = L_{7/2}[0,1]$, $\quad Ax(t) = (t^2-t)x(\sqrt{t})$;

2.12. $X = L_5[-1,1]$, $\quad Ax(t) = (t^2-t)x(t^5)$;

2.13. $X = L_3[0,1]$, $\quad Ax(t) = (t^3-t)x(t^3)$;

2.14. $X = L_{9/2}[-1,1]$, $\quad Ax(t) = (t^3-t^6)x(t^3)$;

2.15. $X = L_{3/2}[-1,1]$, $\quad Ax(t) = (t^5-t^{10})x(\sqrt[5]{t})$.

Задание 3. Доказать, что интегральный оператор с вырожденным ядром является линейным и ограниченным оператором, если $A : C[a,b] \to C[\alpha,\beta]$. Вычислить норму оператора.

3.1. $A : C[-1,1] \to C[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (\ln(t+5) + t)s\, x(s)\, \mathrm{d}s$;

3.2. $A : C[-2,2] \to C[3,5]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} t(s+1)\, x(s)\, \mathrm{d}s$;

3.3. $A : C[-1,1] \to C[-1,2]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{-1/3}^{1/3} \big(t^2 + t - 5\big)\, s\, x(s)\, \mathrm{d}s$;

3.4. $A : C[-1,2] \to C[-2,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (t^3 + t - 2)s^3\, x(s)\, \mathrm{d}s$;

3.5. $A : C[-2,1] \to C[1,3]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{-2}^{1} te^{t+s} s\, x(s)\, \mathrm{d}s$;

3.6. $A : C[-1,1] \to C[0,2]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3 \ln(1+t)\, x(s)\, \mathrm{d}s$;

3.7. $A : C[-1,1] \to C[0,3]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(t^3 - t - 1)\, x(s)\, \mathrm{d}s$;

3.8. $A : C[0,1] \to C[-1,2]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} \big(s - \frac{1}{2}\big)\, (t + \frac{1}{2})\, x(s)\, \mathrm{d}s$;

3.9. $A : C[-1,1] \to C[0,2]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} \big(s - \frac{1}{2}\big)\, t^2\, x(s)\, \mathrm{d}s$;

3.10. $A : C[-\pi,\pi] \to C[0,\pi]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{\pi} \sin s \sin t\, x(s)\, \mathrm{d}s$;

3.11. $A : C[-2,2] \to C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 (s-1)(t^2+2)\, x(s)\, \mathrm{d}s;$

3.12. $A : C[-1,2] \to C[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 s^3(t^3-t)\, x(s)\, \mathrm{d}s;$

3.13. $A : C[-1,2] \to C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 s^3 \ln(1+t)\, x(s)\, \mathrm{d}s;$

3.14. $A : C[-1,1] \to C[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(1-t)\, x(s)\, \mathrm{d}s;$

3.15. $A : C[-1,3] \to C[-2,0], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 (t^2 - |t| + 2)s^5\, x(s)\, \mathrm{d}s.$

Задание 4. Вычислить норму оператора $A : L_p[a,b] \to L_q[\alpha,\beta]$.

4.1.] $A : L_3[0,1] \to L_{3/2}[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 s(1+t)x(s)\, \mathrm{d}s;$

4.2. $A : L_4[-1,1] \to L_{5/2}[-1,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 s^2t^3x(s)\, \mathrm{d}s;$

4.3. $A : L_3[0,1] \to L_1[-1,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^{1/2} ts^2x(s^{3/2})\, \mathrm{d}s;$

4.4. $A : L_3[-1,1] \to L_2[-1,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 (1+t)(1+s)^3x(s)\, \mathrm{d}s;$

4.5. $A : L_4[0,1] \to L_1[-1,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^{1/2} t^2s^2x(s^{5/2})\, \mathrm{d}s;$

4.6. $A : L_{5/3}[0,1] \to L_1[0,2], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 st^{-1/3}x(\sqrt{s})\, \mathrm{d}s;$

4.7. $A : L_3[-1,1] \to L_1[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(t-1)x(s)\, \mathrm{d}s;$

4.8. $A : L_2[0,1] \to L_1[-1,2], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 (s-1/2)\, x(s)ds;$

4.9. $A : L_3[-1,1] \to L_{3/2}[0,2], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 t^2s^3x(s)\, \mathrm{d}s;$

4.10. $A : L_2[0,2\pi] \to L_1[0,\pi], \quad Ax(t) = \int\limits_0^{\pi} t\sin(s)x(s)\, \mathrm{d}s;$

4.11. $A : L_3[0,2] \to L_{5/2}[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 t^{3/2}s^3x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.12. $A : L_2[-1,2] \to L_1[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 s^3(1-t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.13. $A : L_3[-1,2] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 s^3\ln(1+t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.14. $A : L_3[-1,1] \to L_1[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(1-t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.15. $A : L_4[-1,3] \to L_2[-2,0], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 (1-t)s^5x(s)\,\mathrm{d}s.$

Задание 5. Вычислить норму оператора $A : C[a,b] \to L_p[0,1]$.

5.1. $Ax(t) = \int\limits_0^1 tsx(s)\,\mathrm{d}s - x(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 2;$

5.2. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 ts^2x(s)\,\mathrm{d}s + x(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 2;$

5.3. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 t^2sx(s)\,\mathrm{d}s + tx(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3;$

5.4. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (t+1)sx(s)\,\mathrm{d}s - tx(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3;$

5.5. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1/2} t^2sx(s)\,\mathrm{d}s - t^2x(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 1;$

5.6. $Ax(t) = \int\limits_{-1/4}^{1/4} tsx(s)\,\mathrm{d}s + tx(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 1;$

5.7. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 \left(t^2+1\right) sx(s)\,\mathrm{d}s + tx(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 1;$

5.8. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (t+1)\,sx(s)\,\mathrm{d}s - tx(1), \quad x(t) \in C[0,1], \quad p = 3;$

5.9. $Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} (t-1)\,s^3x(s)\,\mathrm{d}s + t^2x(1), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 1;$

5.10. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (t+1)\,(s-1)\,x(s)\,\mathrm{d}s - t^2x(1), \quad x(t) \in C[0,1], \quad p = 1;$

5.11. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (\ln t + 1)\, s x(s)\, \mathrm{d}s - t x(1), \quad x(t) \in C[0,1], \quad p = 3;$

5.12. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 s^3 (1-t) x(s)\, \mathrm{d}s + t x(0) \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3/2;$

5.13. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 s^3 \ln(1+t) x(s)\, \mathrm{d}s + t x(1) \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3/2;$

5.14. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 s(1-t^2) x(s)\, \mathrm{d}s - t x(1), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3;$

5.15. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (s-1)(t+2) x(s)\, \mathrm{d}s - t x(1), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3.$

Задание 6. Вычислить норму оператора $A : \ell_p \to \ell_q$.

6.1. $A : \ell_6 \to \ell_6, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{3}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{4}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt{k+2}}, \ldots \right);$

6.2. $A : \ell_5 \to \ell_5, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{5}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{5^2}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt{5^k}}, \ldots \right);$

6.3. $A : \ell_7 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{3}, \dfrac{x_2}{3^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{3^k}, \ldots \right);$

6.4. $A : \ell_{5/2} \to \ell_2, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{1}, \dfrac{x_2}{2}, \ldots, \dfrac{x_k}{k}, \ldots \right);$

6.5. $A : \ell_5 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{5}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{5^2}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt{5^k}}, \ldots \right);$

6.6. $A : \ell_{7/2} \to \ell_2, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{4}, \dfrac{x_2}{4^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{4^k}, \ldots \right);$

6.7. $A : \ell_4 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt[3]{3}}, \dfrac{x_2}{\sqrt[3]{4}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt[3]{k+2}}, \ldots \right);$

6.8. $A : \ell_5 \to \ell_5, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt[3]{7}}, \dfrac{x_2}{\sqrt[3]{7^2}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt[3]{7^k}}, \ldots \right);$

6.9. $A : \ell_{7/3} \to \ell_2, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{6}, \dfrac{x_2}{6^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{6^k}, \ldots \right);$

6.10. $A : \ell_3 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{2}, \dfrac{2\,x_2}{2^2}, \ldots, \dfrac{k\,x_k}{2^k}, \ldots \right);$

6.11. $A : \ell_{9/2} \to \ell_4, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt[4]{5}}, \dfrac{x_2}{\sqrt[4]{5^2}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt[4]{5^k}}, \ldots \right);$

6.12. $A : \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = \left(\dfrac{\sin 1\, x_1}{3}, \dfrac{\sin 2\, x_2}{3^2}, \ldots, \dfrac{\sin k\, x_k}{3^k}, \ldots \right).$

ТЕМА 8. Обратные операторы

Задание 1. Пусть $A : L \to C[0,1]$ Выяснить, при каких λ к оператору A существует обратный и построить его.

1.1. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) + \lambda x(t);$

1.2. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) + \lambda t x(t);$

1.3. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) - \lambda t x(t);$

1.4. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) + \lambda t^2 x(t);$

1.5. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.6. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x'(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.7. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x(0) = x'(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.8. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x'(0) = x'(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.9. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) - \lambda x(t);$

1.10. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) - \lambda x(t);$

1.11. $L = \{x(t) \in C^3[0,1] : x'(0) = x''(1) = 0\}, Ax(t) = x'''(t) + \lambda x(t).$

1.12. $L = \{x(t) \in C^3[0,1] : x(0) = x''(1) = 0\}, Ax(t) = x'''(t) - \lambda x(t).$

Задание 2. Пусть $A : C[0,1] \to C[0,1]$. Используя теорему Банаха об обратном операторе, показать, что оператор A непрерывно обратим, найти A^{-1}.

2.1. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\, \mathrm{d}s;$

2.2. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (t+s) x(s)\, \mathrm{d}s;$

2.3. $Ax(t) = x(t) + e^t \int\limits_0^1 e^{-s} x(s)\, \mathrm{d}s;$

2.4. $Ax(t) = x(t) + t \int\limits_0^t s x(s)\, \mathrm{d}s;$

2.5. $Ax(t) = x(t) - 2 \int\limits_0^1 t^2 s x(s) \mathrm{d}s;$

2.6. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (1+t+s) x(s)\, \mathrm{d}s;$

2.7. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 t s x(s)\, \mathrm{d}s;$

2.8. $Ax(t) = x(t) + 2\int\limits_0^1 e^{t+s}x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.9. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (s\cos\pi t - 1)x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.10. $Ax(t) = x(t) - \int\limits_0^1 tsx(s)\,\mathrm{d}s;$

2.11. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (1 - ts)x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.12. $Ax(t) = x(t) + t\int\limits_0^t s^2x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.13. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 \frac{t}{1+s}x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.14. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 \cos\pi(t - s)x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.15. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (t^2 - 1)sx(s)\,\mathrm{d}s.$

Задание 3. Проверить, существует ли непрерывный обратный к оператору $A : \ell_2 \to \ell_2$. В случае положительного ответа указать его.

3.1. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.2. $Ax = (x_1 + x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.3. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 - x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.4. $Ax = (x_1 - 2x_2, x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 - x_2, x_4, \ldots)\,;$

3.5. $Ax = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.6. $Ax = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.7. $Ax = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.8. $Ax = (2x_2 - 3x_3, -x_2 + 4x_3, -5x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.9. $Ax = (2x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.10. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.11. $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.12. $Ax = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 - 2x_3, x_1 - x_2, x_4, \ldots)\,;$

3.13. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_3, x_2 - x_3x_4, \ldots)\,;$

3.14. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_2 + 4x_3,x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.15. $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 3x_1 + x_3, x_4, \ldots)\,.$

Задание 4. Пусть $A : X \to Y$. Какие из операторов A_l^{-1}, A_r^{-1}, A^{-1} существуют? Если A^{-1} существует на $\mathscr{R}(A)$, будет ли A^{-1} ограничен.

4.1. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_2, x_3, \ldots)\,;$

4.2. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = \left(x_1, \dfrac{1}{2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{k}\,x_k, \ldots\right);$

4.3. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = \left(\dfrac{1}{2}\,x_1, \dfrac{1}{2^2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right);$

4.4. $A : l_4 \to l_4, \quad Ax = \left(\dfrac{1}{2}\,x_1, \dfrac{1}{2^2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right);$

4.5. $A : l_1 \to l_2, \quad Ax = (x_1, 0, x_2, \ldots, x_k, \ldots)\,;$

4.6. $A : l_2 \to l_3, \quad Ax = (0, 2x_1,\, 3x_2, \ldots, kx_{k-1}, \ldots)\,;$

4.7. $A : l_3 \to l_1, \quad Ax = \left(x_2, 0, x_1, \dfrac{1}{3^2}\,x_3, \dfrac{1}{4^2}\,x_4, \ldots\right);$

4.8. $A : m \to m, \quad Ax = \left(x_1, \dfrac{1}{2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{k}\,x_k, \ldots\right);$

4.9. $A : m \to l_2, \quad Ax = \left(x_1, \dfrac{1}{2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{2^{k-1}}\,x_k, \ldots\right);$

4.10. $A : l_3 \to l_2, \quad Ax = (x_2, x_3, \ldots)\,;$

4.11. $A : l_3 \to l_2, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_1 - x_2,\, x_3, x_4, \ldots)\,;$

4.12. $A : l_2 \to l_4, \quad Ax = (0, 2x_1, 3x_2, \ldots, kx_{k-1}, \ldots)\,;$

4.13. $A : l_{3/2} \to l_1, \quad Ax = \left(x_3, x_2, x_1, \dfrac{1}{2^4}\,x_4, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right);$

4.14. $A : l_2 \to l_1, \quad Ax = \left(x_2, 0, x_1, \dfrac{x_3}{3^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{k^2}, \ldots\right);$

4.15. $A : m \to l_1, \quad Ax = \left(x_1, \dfrac{1}{2^2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right).$

ТЕМА 9. Решение интегральных уравнений второго рода методом резольвент

Задание 1. Используя метод резольвент, найти решение следующих интегральных уравнений второго рода:

1.1. $x(t) - \int\limits_0^t e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = e^t;$

1.2. $x(t) - 2\int\limits_0^t e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = \sin t;$

1.3. $x(t) + \int\limits_0^t 3^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = t3^t;$

1.4. $x(t) - \int\limits_0^t \dfrac{2+\cos t}{2+\cos s} x(s)\,\mathrm{d}s = e^t \sin t;$

1.5. $x(t) + \int\limits_0^t e^{t^2-s^2} x(s)\mathrm{d}s = 1 - 2t;$

1.6. $x(t) - 2\int\limits_0^t e^{t^2-s^2} x(s)\,\mathrm{d}s = e^{t^2+2t};$

1.7. $x(t) - \int\limits_0^t \dfrac{1+t^2}{1+s^2} s x(s)\,\mathrm{d}s = 1 + t^2;$

1.8. $x(t) - \int\limits_0^t \sin(t-s) x(s)\,\mathrm{d}s = \dfrac{1}{1+t^2};$

1.9. $x(t) - \int\limits_0^t e^{-(t-s)} \sin(t-s) x(s)\,\mathrm{d}s = e^{-t};$

1.10. $x(t) - \int\limits_0^1 e^{t+s} x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

1.11. $x(t) - \int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos s x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

1.12. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 t e^s x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

1.13. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 t^2 s^2 x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

1.14. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 t s x(s)\,\mathrm{d}s = y(t).$

ТЕМА 10. Сопряженное пространство

Задание 1. Выяснить, задает ли следующая формула линейный ограниченный функционал. При положительном ответе вычислить норму f для $x(t) \in L_p[a,b]$, $p \geqslant 1$.

1.1. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t^{4/3} x\left(t^2\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{1/4}^{1} t x(t) \,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_1[0,1];$

1.2. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t^5 x\left(t^2\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{-1}^{0} t^2 x(t) \,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_3[-1,1];$

1.3. $f(x) = \int\limits_{-1}^{-1/2} t x\left(t^3\right) \mathrm{d}t - 2\int\limits_0^1 x\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_3[-1,1];$

1.4. $f(x) = \int\limits_0^1 t^4 x\left(t^3\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{-1}^{0} t x\left(\sqrt[3]{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{9/2}[-1,1];$

1.5. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t x\left(\sqrt[3]{t}\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{1/2}^{1} t x(t) \,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[0,1];$

1.6. $f(x) = \int\limits_0^{1/3} \sqrt{t} x\left(t^2\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{7/3}[0,2];$

1.7. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} \sqrt[3]{t} x\left(\sqrt[11]{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{6/5}[-1,1];$

1.8. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t^{5/3} x\left(t^2\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{1/2}^{1} t x(t) \,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_1[0,1];$

1.9. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t^{4/3} x\left(t^3\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{1/2}^{1} t^2 x(t) \,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[0,1];$

1.10. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t x\left(t^2\right) \mathrm{d}t - \int\limits_0^{1/2} t x\left(t^2\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[0,1];$

1.11. $f(x) = \int\limits_0^{1/3} t^{1/3} x\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{7/3}[0,1];$

1.12. $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} t^2 x\left(\sqrt[3]{t}\right) \mathrm{d}t - \int\limits_0^1 t x\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_1[-1,1];$

1.13. $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} t^2 x\left(t^3\right) \mathrm{d}t - \int_0^1 t x(t) \,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[-1,1];$

1.14. $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t) \,\mathrm{d}t - \int\limits_0^1 t^2 x(t) \,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_4[-1,1];$

1.15. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} tx\left(t^2\right) \mathrm{d}t + \int\limits_{1/2}^{1} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{5/2}[-1,1].$

Задание 2. Используя теорему Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве непрерывных на отрезке функций, найти норму функционала, если $x(t) \in C[-5,6]$.

2.1. $f(x) = x(-4) + 2x(-3) + \int\limits_{-2}^{2} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t + x(2) - 2x(4);$

2.2. $f(x) = 3x(-3) + \int\limits_{-2}^{1} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t + 2x(1) - \int\limits_{2}^{4} tx(t) \, \mathrm{d}t - x(5);$

2.3. $f(x) = 2x(-5) - \int\limits_{-3}^{1} tx(t) \, \mathrm{d}t + 3x(1) + \int\limits_{2}^{3} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t - x(4);$

2.4. $f(x) = 3x(-4) - \int\limits_{-3}^{0} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t + 2x(0) - \int\limits_{1}^{3} tx(t) \, \mathrm{d}t + 5x(3);$

2.5. $f(x) = 4x(-4) + \int\limits_{-4}^{-2} tx(t) \, \mathrm{d}t - 2x(-2) + \int\limits_{1}^{2} t^3 x(t) \, \mathrm{d}t + x(2);$

2.6. $f(x) = x(-4) - \int\limits_{-3}^{1} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t + 2x(1) + \int\limits_{2}^{3} tx(t) \, \mathrm{d}t - x(3);$

2.7. $f(x) = 3x(-4) + \int\limits_{-4}^{2} (t-1)^2 x(t) \, \mathrm{d}t + x(2) - 7x(3);$

2.8. $f(x) = 5x(-4) + x(-3) + \int\limits_{-3}^{1} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t - 2x(1) - x(3);$

2.9. $f(x) = 3x(-4) + x(-4) + \int\limits_{-4}^{-2} tx(t) \, \mathrm{d}t + x(-2) + 4x(3);$

2.10. $f(x) = 2x(-4) + x(-3) + \int\limits_{-2}^{1} tx(t) \, \mathrm{d}t + 5x(1) - 2x(4);$

2.11. $f(x) = 3x(-4) + x(-3) + \int\limits_{-3}^{1} tx(t) \, \mathrm{d}t - 2x(1) - x(5);$

2.12. $f(x) = x(-4) - 2x(-2) + \int\limits_{-2}^{1} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t - 3x(1) + 4x(5);$

2.13. $f(x) = x(-3) + 5x(-1) + \int\limits_{-1}^{1} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t + 4x(1) - 2x(3);$

2.14. $f(x) = 2x(-4) + 4x(-2) + \int\limits_{-2}^{2} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t + 5x(2) - 4x(4);$

2.15. $f(x) = 3x(-4) - 2x(-2) - \int\limits_{-2}^{1} t^2 x(t) \, \mathrm{d}t + 3x(1) - 4x(4).$

Задание 3. Используя теорему об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, вычислить норму функционала в $L_2[-1,1]$.

3.1. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{0}^{1/2} t^2 x\left(t^2\right)\mathrm{d}t;$

3.2. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} (t-1)\,x(t)\,\mathrm{d}t - 4\int\limits_{0}^{1/4} t^6 x\left(t^4\right)\mathrm{d}t;$

3.3. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t;$

3.4. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_{-1/4}^{1/4} t^6 x\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.5. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} (t+1)\,x(t)\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^2 x\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.6. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2+t\right)x(t)\,\mathrm{d}t - 5\int\limits_{0}^{1/4} t^6 x\left(\sqrt[5]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.7. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{0}^{1/2} t^5 x\left(t^2\right)\mathrm{d}t;$

3.8. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2-t\right)x(t)\,\mathrm{d}t - 4\int\limits_{0}^{1/4} t^2 x\left(t^4\right)\mathrm{d}t;$

3.9. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{0}^{1/4} t^6 x\left(t^4\right)\mathrm{d}t;$

3.10. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t^3 x(t)\,\mathrm{d}t - 5\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^3 x\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.11. $f(x) = \int\limits_{0}^{1/2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{-1}^{0} t^6 x\left(t^3\right)\mathrm{d}t;$

3.12. $f(x) = \int\limits_{0}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_{-1}^{0} tx\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.13. $f(x) = 3\int\limits_{0}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^4 x\left(t^3\right)\mathrm{d}t;$

3.14. $f(x) = \int\limits_{0}^{1} t^{-1/3} x(t)\,\mathrm{d}t - 9\int\limits_{-1}^{1} tx\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.15. $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} t^3 x\left(t^2\right)\mathrm{d}t + 3\int\limits_{1/2}^{1} tx\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t.$

Задание 4. Вычислить норму функционала в гильбертовом пространстве ℓ_2, используя теорему Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

4.1. $f(x) = x_1 + x_2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.2. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2x_k}{k} + x_4 + 2x_7, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.3. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{2^{k+1}} + x_1 + 2x_2, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.4. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{4^k} - x_5 - x_{10}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.5. $f(x) = x_2 - \sum\limits_{k=1}^{20} x_{2k-1}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.6. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_{k^2}}{4^k} - x_1 - x_2, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.7. $f(x) = x_1 + \sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{x_{2k}}{2^k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.8. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{100} \dfrac{x_k}{k} - 2\sum\limits_{k=200}^{300} x_k, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.9. $f(x) = 2x_2 - 3x_3 + \sum\limits_{k=5}^{10} \dfrac{x_k}{5^k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.10. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_{3k}}{3^k} - x_1 + 2x_2, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.11. $f(x) = x_5 - 2x_1 + \sum\limits_{k=1}^{10} \sqrt{k} \cdot x_k, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.12. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{5} \dfrac{x_k}{2^k} - \sum\limits_{k=3}^{10} \dfrac{x_k}{k} + x_{10}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.13. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{2^k} - \sum\limits_{k=3}^{20} kx_k + x_1, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$

4.14. $f(x) = x_1 - \sum\limits_{k=1}^{20} \dfrac{x_{2k}}{4^k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2.$

ТЕМА 11. Сопряженные, самосопряженные, компактные операторы

Задание 1. Найти сопряженный оператор A^* к линейному ограниченному оператору $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующему по следующим формулам:

1.1. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} tx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^3} t^2 sx(s)\mathrm{d}s;$

1.2. $Ax(t) = \begin{cases} x(t),\, 0 \le t \le \lambda\ , \\ 0, \lambda < t \leqslant 1, \end{cases}$

1.3. $Ax(t) = x(t^\alpha) - 2\sin tx(t);$

1.4. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^3} \cos ts^4 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^2}^{t^3} \sin tsx(s)\mathrm{d}s;$

1.5. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} sx\left(s^{1/4}\right)\mathrm{d}s + \int\limits_0^{t^4} \sin t\sqrt{s}x(s)\mathrm{d}s;$

1.6. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} \ln t + 1s^5 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^2}^{t} (t+1)sx(s)\mathrm{d}s;$

1.7. $Ax(t) = \int\limits_0^{1-t} ts^3 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^3} t^4 s^3 x(s)\mathrm{d}s;$

1.8. $Ax(t) = \int\limits_t^{1} e^s x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^2} t^5 \cos sx(s)\mathrm{d}s;$

1.9. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} ts^2 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^3}^{t^2} t^2 sx(s)\mathrm{d}s;$

1.10. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^4} ts^5 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^2}^{t} (t+1)^2 sx(s)\mathrm{d}s;$

1.11. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} tsx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^3}^{t^2} t^2 s^3 x(s)\mathrm{d}s;$

1.12. $Ax(t) = \int\limits_{t^3}^{1} t^2 x\left(\sqrt[3]{s}\right)\mathrm{d}s + \int\limits_0^{t^2} tsx(s)\mathrm{d}s;$

1.13. $Ax(t) = \int\limits_t^{t^2} e^t x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^3} \sin t\sqrt{s}x(s)\mathrm{d}s;$

1.14. $Ax(t) = \int\limits_t^{1} tx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{1} \cos tsx(s)\mathrm{d}s;$

1.15. $Ax(t) = \int\limits_t^{t^2} tx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{1} \sin ts^2 x(s)\mathrm{d}s.$

Задание 2. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A : \ell_2 \to \ell_2$, действующему по следующим формулам. Будет ли A самосопряженным?

2.1. $Ax = (x_2, x_3, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.2. $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.3. $Ax = (0, 0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)\,, \alpha_i \in \mathbb{C},\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.4. $Ax = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.5. $Ax = \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, x_1, \ldots\Big),\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.6. $Ax = (\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \ldots)\,, \alpha_i \in \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.7. $Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3, x_4, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.8. $Ax = (x_3, x_1, x_2, x_4, x_5, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.9. $Ax = (-x_1, x_2, -x_3, x_4, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.10. $Ax = (0, 0, x_3 + x_4, x_4 - x_3, x_5, x_6, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.11. $Ax = (0, 0, x_1, x_2, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.12. $Ax = (x_2 + x_1, x_1 - x_2, x_4, x_3, x_5, x_6, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.13. $Ax = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;

2.14. $Ax = (x_2, 0, x_3, 0, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$.

Задание 3. Выяснить, является ли множество A предкомпактным в банаховом пространстве $C[0,1]$.

3.1. $A = \Big\{\dfrac{1}{1 + nt^2},\ n \in \mathbb{N}\Big\}$;

3.2. $A = \Big\{\dfrac{\sin nt}{n},\ n \in \mathbb{N}\Big\}$;

3.3. $A = \Big\{n\Big(1 - \cos\Big(\dfrac{t}{n}\Big)\Big),\ n \in \mathbb{N}\Big\}$;

3.4. $A = \big\{\cos(n + t),\ n \in \mathbb{N}\big\}$;

3.5. $A = \big\{a \sin(b + t),\ |a| \leqslant 10,\ b > 0\big\}$;

3.6. $A = \Big\{1 - \dfrac{2t^2}{n},\ n \in \mathbb{N}\Big\}$;

3.7. $A = \Big\{\dfrac{\sin \alpha t}{\alpha t},\ 0 < \alpha < \infty\Big\}$;

3.8. $A = \big\{\operatorname{arctg}(at + b),\ |a| < 1,\ b > 1\big\}$;

3.9. $A = \big\{x(t) \in C[0,1];\ |x(t)| \leqslant 2\big\}$;

3.10. $A = \big\{x(t) \in C[0,1];\ |x(t)| \leqslant 1,\ |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant 2|t_1 - t_2|\big\}$;

3.11. $A = \left\{x(t) \in C^{(1)}[0,1];\ |x(t)| \leqslant 2,\ |x'(t)| \leqslant 1\right\}$;

3.12. $A = \left\{x(t) \in C^{(2)}[0,1];\ |x(t)| \leqslant 1,\ |x''(t)| \leqslant 2\right\}$;

3.13. $A = \left\{x(t) \in C^{(2)}[0,1];\ |x'(t)| \leqslant 1,\ |x''(t)| \leqslant 1\right\}$;

3.14. $A = \left\{x(t) \in C[0,1];\ |x(0)| \leqslant 1,\ |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant 2|t_1 - t_2|\right\}$.

Задание 4. Являются ли компактными следующие операторы как отображение E в E ?

4.1. $E = C[0,1], \quad Ax(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2 x(1)$;

4.2. $E = C[0,1], \quad Ax(t) = x\left(t^2\right)$;

4.3. $E = C[-1,1], \quad Ax(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$;

4.4. $E = C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^t \tau x(\tau)\mathrm{d}\tau$;

4.5. $E = C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{ts}\tau x(s)\mathrm{d}s$;

4.6. $E = L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^t \tau x(\tau)\mathrm{d}\tau$;

4.7. $E = L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \dfrac{x(s)\mathrm{d}s}{|t-s|^{\alpha}}$;

4.8. $E = L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \dfrac{x\left(\sqrt{s}\right)}{s^{5/4}}\mathrm{d}s$;

4.9. $E = L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \dfrac{x(s)}{\sin(t-s)}\mathrm{d}s$;

4.10. $E = C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 (s\sin t + s^2\cos t)x(s)\mathrm{d}s$;

4.11. $E = L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \dfrac{x(s)}{s - 1/2}\mathrm{d}s$;

4.12. $E = C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 t^{\alpha}s^{\beta}x(s^{\gamma})\mathrm{d}s,\ \gamma > 0$;

4.13. $E = L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 t^{\alpha}s^{\beta}x(s^{\gamma})\mathrm{d}s,\ \gamma > 0$;

4.14. $E = C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 tsx(s)\mathrm{d}s + \sin tx(1)$.

3.15. $E = C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 tsx(s)\mathrm{d}s + \cos tx(0).$

Задание 5. С помощью сопряженного оператора найти необходимые условия разрешимости уравнения $Ax = y$, если $A : \ell_2 \to \ell_2$

5.1. $Ax = (x_1 - 3x_2, 3x_2 - x_1, x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;

5.2. $Ax = (x_1 + x_2, 3x_2 - x_1, x_3 - 2x_2, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;

5.3. $Ax = (x_1 - 3x_2, 3x_2 - x_1, x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;

5.4. $Ax = (x_1 - x_3, x_2 - x_1, x_3 - 2x_4, x_4 - 5x_1, x_5, x_6, \ldots)$;

5.5. $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, 3x_2 - x_1, x_2 - x_3 - x_4, x_4 - x_2, x_5, x_6, \ldots)$;

5.6. $Ax = (x_1 - x_2, 3x_2 - x_1 - x_3, x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_1, x_5, x_6, \ldots)$;

5.7. $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, 3x_2 - x_1 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - 2x_2, x_5, x_6, \ldots)$;

5.8. $Ax = (x_1 - x_2 + x_4, 3x_2 - x_1 - x_4, x_3 - x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;

5.9. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, 3x_2 - x_1, x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;

5.10. $Ax = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_3 - x_2 - 2x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;

5.11. $Ax = (x_1 + 2x_2, 3x_2 + 5x_1, x_1 - x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;

5.12. $Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_1, x_3 - x_4, x_4 - x_3, x_5, x_6, \ldots)$;

5.13. $Ax = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_3 - x_2 - x_4, x_4 - x_3, x_5, x_6, \ldots)$;

5.14 $Ax = (x_1, 3x_2 - x_1, x_4 - x_3 - x_2, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;

5.15 $Ax = (x_2, 3x_2 - 2x_1, x_4 - x_3 - 2x_2, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$.

ТЕМА 12. Теория Рисса-Шаудера разрешимости уравнений с компактным оператором

Задание 1. Найти все решения следующих интегральных уравнений при всех значениях $\lambda \neq 0$ и при всех значениях параметров $a, b, c \in \mathbb{R}$, входящих в свободный член этих уравнений.

1.1. $x(t) - \lambda \int\limits_0^\pi \cos(t+s)x(s)\,\mathrm{d}s = a\sin t + b;$

1.2. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 (ts+1)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt + c;$

1.3. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 (t^2 s + s^2 t)x(s)\,\mathrm{d}s = at + bt^3;$

1.4. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{2}(ts + s^2t^2)x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

1.5. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 \Big(5(ts)^{1/3} + 7(st)^{2/3}\Big)x(s)\,\mathrm{d}s = at + bt^{1/3};$

1.6. $x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (t + s - 2ts)\,x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt - ct^3;$

1.7. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 \big(\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t}\big)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt + c;$

1.8. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 (ts + s^2t + t^2 - 3t^2s^2)x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

1.9. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 (3t + ts - 5s^2t^2)x(s)\,\mathrm{d}s = at;$

1.10. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 (3ts^3 + 5s^2t^2)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt;$

1.11. $x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi}^\pi (t\sin s + \cos t)x(s)\,\mathrm{d}s = a + b\cos t;$

1.12. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 (st^2 + s^2t^3)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt + c;$

1.13. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 \dfrac{st + s^2t^2}{1+s^2}\,x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

1.14. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 (ts - 1/3)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 - bt + 1;$

1.15. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 (ts + 2s^2t^2)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt^4 - c;$

1.16. $x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (s\sin t + \cos s)x(s)\,\mathrm{d}s = at + b - c;$

1.17. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi/2} \cos(2t + 4s)x(s)\,\mathrm{d}s = e^{at+b}$;

1.18. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{1 + s^3 t}{1 + s^2}\, x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 - (b + c)t + b$;

1.19. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (s^2 t + s)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + b + ct$;

1.20. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(2ts^3 + 5t^2 s^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = (b + c)t + a$;

1.21. $x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (t \sin s + \cos t)x(s)\,\mathrm{d}s = (a - b)t + b$;

1.22. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t})x(s)\,\mathrm{d}s = (a + b)t^2 + t - c$;

1.23. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{1 + ts}{\sqrt{1 - s^2}}\, x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 - (b + c)t + b$;

1.24. $x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (t + s)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + b + 1$;

1.25. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi/2} \cos(2t + 4s)x(s)\,\mathrm{d}s = e^{at+b}$;

Задание 2. При каждом значении λ выяснить значения параметров a, b, c, используя сопряженный оператор, при которых существует решение интегрального уравнения в пространстве $L_2[a, b]$

2.1. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \sin(t - 2s)x(s)\,\mathrm{d}s = (a - b)t + c$;

2.2. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \sin(3t + s)x(s)\,\mathrm{d}s = ae^t(b + c)t$;

2.3. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \sin(2t + s)x(s)\,\mathrm{d}s = at + c + b \sin t$;

2.4. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \cos(2t + 4s)x(s)\,\mathrm{d}s = e^{at+b}$;

2.5. $x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (t \sin s + \cos t)\, x(s)\,\mathrm{d}s = at + b$;

2.6. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos(2t + s)x(s)\,\mathrm{d}s = a + 2b \cos 2t$;

2.7. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \sin(t + s)x(s)\,\mathrm{d}s = a \cos t + b \sin t + c$;

2.8. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi} (\cos t \cos s - \cos 2t \cos 2s)\, x(s)\,\mathrm{d}s = at + bt^2 + c$;

2.9. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(1 + s^2 + t^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = at + bt^3;$

2.10. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos t \cos s + 2 \sin 2t \sin 2s)\, x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

2.11. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{2\pi} \cos(3t + s) x(s)\,\mathrm{d}s = a + b + \sin t;$

2.12. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(5 + 4ts + 9t^2s^2 - 3t^2 - 3s^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

2.13. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{1} \left[\left(\frac{t}{s}\right)^{2/5} + \left(\frac{s}{t}\right)^{2/5}\right] x(s)\,\mathrm{d}s = (a - b)t + b - ct^2;$

2.14. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(ts - 3t^2s^2 + t^2 + s^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = c + (b + 1)t;$

2.15. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{1} (t + s - 2ts)\, x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt - ct^3;$

2.16. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2 - ts\right) x(s)\,\mathrm{d}s = (a + b) \sin t - b;$

2.17. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(5t^3s + t^4\right) x(s)\,\mathrm{d}s = at^3 + bt - c;$

2.18. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 - t + 2ts)\, x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

2.19. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(t^3s + t^2s^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = (a + b)t + ce^t;$

2.20. $x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos s \sin t + t \cos s) x(s)\,\mathrm{d}s = a + b \sin t.$

ТЕМА 13. Собственные значения и собственные векторы компактного оператора

Задание 1. Найти характеристические числа и собственные функции для следующих однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром:

1.1. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \, x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.2. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin t \cos s \, x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.3. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin t \sin s \, x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.4. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos(t+s) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.5. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{1} (45t^2 \ln s - 9s^2 \ln t) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.6. $x(t) - \lambda \int\limits_0^{1} (2ts - 4t^2) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.7. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (5ts^3 + 4t^2 s) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.8. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (5ts^3 + 4t^2 s + 3ts) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.9. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (t \cosh s - s \sinh t) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.10. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (t \cosh s - s^2 \sinh t) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.11. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (t \cosh s - s \cosh t) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.12. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts + t^2 s^3) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.13. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (t^2 \cosh s - s^2 \cosh t) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.14. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (t^3 \cos s - s^2 \cos t) x(s) \, \mathrm{d}s = 0.$

1.15. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts - \frac{1}{2}) x(s)\, \mathrm{d}s = 0.$

Задание 2. В пространстве $L_2[a,b]$ найти решение интегрального уравнения

$$x(t) - \lambda \int\limits_{a}^{b} \mathcal{K}(t,s) x(s)\, \mathrm{d}s = y(t)$$

с помощью разложения в ряд по собственным функциям.

2.1. $\mathcal{K}(t,s) = \sin(t+s),\ f(t) = t + \sin t,\ x(t) \in L_2[0, \frac{\pi}{2}];$

2.2. $\mathcal{K}(t,s) = \cos(t+s),\ f(t) = \cos t + 1,\ x(t) \in L_2[0,\pi];$

2.3. $\mathcal{K}(t,s) = \sin(t+s),\ f(t) = t + 1,\ x(t) \in L_2[0,\pi];$

2.4. $\mathcal{K}(t,s) = e^{t+s},\ f(t) = te^t,\ x(t) \in L_2[0,1];$

2.5. $\mathcal{K}(t,s) = ts + t^2 s^2,\ f(t) = t^2 + t + 1,\ x(t) \in L_2[-1,1];$

2.6. $\mathcal{K}(t,s) = \cos^2(t-s),\ f(t) = \sin 2t + 1,\ x(t) \in L_2[-\pi,\pi];$

2.7. $\mathcal{K}(t,s) = \cos(t+s),\ f(t) = t^2,\ x(t) \in L_2[0, \frac{\pi}{2}];$

2.8.

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} t(s-1), 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (s+1)t, s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \qquad f(t) = \cos \pi t,\ x(t) \in L_2[0,1];$$

2.9.

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} (t+1)s, 0 \leqslant t \leqslant s, \\ s-t, s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \qquad f(t) = t^3 - t^2,\ x(t) \in L_2[0,1];$$

2.10.

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} t(s-1), t \leqslant s, \\ s(t-1), s \leqslant t, \end{cases} \qquad f(t) = \sin \pi t,\ x(t) \in L_2[0,1];$$

2.11. $\mathcal{K}(t,s) = \min(t,s),\ f(t) = \sin \pi t,\ x(t) \in L_2[0,1];$

2.12. $\mathcal{K}(t,s) = 2\cos(t-s),\ f(t) = t^2 + t + 1,\ x(t) \in L_2[0,\pi];$

2.13. $\mathcal{K}(t,s) = ts,\ f(t) = t,\ x(t) \in L_2[0,1];$

2.14.

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, t \leqslant s, \\ \cos t \sin s, s \leqslant t, \end{cases} \qquad f(t) = t,\ x(t) \in L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

2.15.

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} t(s+1), t \leqslant s, \\ s(t+1), s \leqslant t, \end{cases} \qquad f(t) = t,\ x(t) \in L_2[0,1].$$

Тема 14. Интегральные уравнения с симметричным ядром

Задание 1. Решить следующие неоднородные интегральные симметричные уравнения:

2.1. $x(t) - \dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\int_0^1 \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = \dfrac{t}{2},$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t(2-s)}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{s(2-t)}{2}, & s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

2.2. $x(t) + \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = te^t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh t \sinh(s-1)}{\sinh 1}, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{\sinh s \sinh(t-1)}{\sinh 1}, & s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

2.3. $x(t) - \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = t-1,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} t-s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ s-t, & s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

2.4. $x(t) - \int\limits_0^{\pi/2} \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = \cos 2t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin s \cos t, & s \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

2.5. $x(t) + 2\int\limits_0^{\pi} \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = 1,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin s \cos t, & s \leqslant t \leqslant \pi; \end{cases}$$

2.6. $x(t) - 8\int\limits_0^{\pi} \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = 1,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin s \cos t, & s \leqslant t \leqslant \pi; \end{cases}$$

2.7. $x(t) - 4\int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} (t+1)(s-3), & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (s+1)(t-3), & s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

2.8. $x(t) + 9\int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} (t+1)(s-3), & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (s+1)(t-3), & s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

2.9. $x(t) - \int\limits_0^{\pi} \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = \sin t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin(t+\frac{\pi}{4})\cos(s-\frac{\pi}{4}), & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin(s+\frac{\pi}{4})\cos(t-\frac{\pi}{4}), & s \leqslant t \leqslant \pi; \end{cases}$$

2.10. $x(t) - \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = \sinh t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} -e^{-s}\sinh t, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ -e^{-t}\sinh s, & s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

2.11. $x(t) + 2\int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = \cosh t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\cosh t\cosh(s-1)}{\sinh 1}, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{\cosh s\cosh(t-1)}{\sinh 1}, & s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

2.12. $x(t) - 4\int\limits_0^{\pi} |t-s|x(s)\,\mathrm{d}s = 1;$

2.13. $x(t) - 16\int\limits_0^{\pi} |t-s|x(s)\,\mathrm{d}s = 1;$

2.14. $x(t) - \int\limits_0^1 \sin s\sin t\,x(s)\,\mathrm{d}s = 1 - \sin t;$

2.15. $x(t) - \int\limits_0^1 \cos s\cos t\,x(s)\,\mathrm{d}s = \cos t;$

2.16. $x(t) - 2 \int\limits_0^{\pi/2} \mathcal{K}(t,s)\, x(s)\, \mathrm{d}s = \cos 2t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin s \cos t, & s \leqslant t \leqslant \pi/2; \end{cases}$$

2.17. $x(t) - 4 \int\limits_0^{\pi} \mathcal{K}(t,s)\, x(s)\, \mathrm{d}s = 1,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin s \cos t, & s \leqslant t \leqslant \pi/2; \end{cases}$$

2.18. $x(t) + \int\limits_0^{1} \mathcal{K}(t,s)\, x(s)\, \mathrm{d}s = \cos \pi t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (t-1)s, & s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

2.19. $x(t) + \int\limits_0^{1} \mathcal{K}(t,s)\, x(s)\, \mathrm{d}s = t^3 - t^2,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} (t+1)s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (s+1)t, & s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

3. Раздел контроля знаний

3.1. Перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

ТЕМА 1. Принцип сжимающих отображений

Задание 1. Определить, является ли отображение f нормированного пространства E на себя сжимающим. Вычислить x_3, где $x_n = = f(x_{n-1})$, $x_0 = 0$. Оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки.

1.1. $E = C[-1,1]$, $\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{3}\cos\left(x(t)\right) + e^t$;

1.2. $E = L_3[0,1]$, $\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{3}\,x\Big(\sqrt[4]{t}\Big) + t^2$;

1.3. $E = L_2[-1,1]$, $\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{3}\,t^{1/9}x\Big(\sqrt[3]{t}\Big) + t$;

1.4. $E = \ell_2$, $\quad f(x) = \Big(\dfrac{1}{2}\,x_1 + \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k + \dfrac{1}{k}\ldots, \Big)$;

1.5. $E = \mathbb{R}^3$, $\quad f(x) = \Big(\dfrac{1}{4}\,x_1 + \dfrac{1}{8}\,x_3 + 1, \dfrac{1}{5}\,x_1 - \dfrac{1}{4}\,x_2 + 2, -\dfrac{1}{4}\,x_3 - 3\Big)$;

1.6. $E = \ell_3$, $\quad f(x) = \Big(\dfrac{1}{4}\,x_1 + 1, \ldots, \dfrac{1}{4^k}\,x_k + \dfrac{1}{k}\ldots, \Big)$;

1.7. $E = m$, $\quad f(x) = \Big(\dfrac{1}{2}\,x_2 + \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{2^{k-1}}\,x_k + \dfrac{1}{2^{k-1}}\ldots, \Big)$;

1.8. $E = L_2[0,1]$, $\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{2}\,x\Big(\sqrt{t}\Big) + t^2$;

1.9. $E = \ell_4$, $\quad f(x) = \Big(\dfrac{1}{2}\,x_1 + \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k + \dfrac{1}{4^k}\ldots, \Big)$;

1.10. $E = C[-1,1]$, $\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{3}\sin\left(x(t)\right) + \cos t$;

1.11. $E = L_2[0,1]$, $\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{3}\,tx(\sqrt{t}) + t^3$;

1.12. $E = L_2[0,1]$, $\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{4}\,t^4x(t^2) + t^4$;

1.13. $E = L_2[0,1]$, $\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{2}\,t^5x\Big(\sqrt[3]{t}\Big) + \sin t$;

1.14.$E = C[-1,1]$, $\quad f(x)(t) = \dfrac{1}{4}\left(x(t) + \sin x(t)\right) + \cos t$;

Задание 2. Приводя уравнение $g(x) = 0$ к виду, для которого справедлив принцип сжимающих отображений, найти корни уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2.1. $x^2 - 10x + 1 = 0$; $\qquad$ 2.8. $2x^2 + 16x - 9 = 0$;

2.2. $x^3 - 6x + 2 = 0$;
2.3. $3x^2 - 10x - 141 = 0$;
2.4. $4x^2 + 12x - 1 = 0$;
2.5. $2x^2 - 100x + 5 = 0$;
2.6. $4x^2 - 12x - 2 = 0$;
2.7. $3x^2 - 10x - 141 = 0$;
2.9. $x^3 - x - 1 = 0$;
2.10. $2x^2 + 8x - 3 = 0$;
2.11. $3x^2 - 5x + 4 = 0$;
2.12. $2x^2 + 16x - 9 = 0$;
2.13. $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$;
2.14. $5x^2 - 18x - 4 = 0$.

Задание 3. Доказать следующие утверждения.

3.1. Доказать, что непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

3.2. Пусть E – банахово пространство. Привести пример отображения $f : E \to E$, у которого для любых двух точек $x, y \in E$ выполняется условие $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$, но неподвижных точек нет.

3.3. На промежутке $[1,\infty)$ функция $f(x) = 0{,}5 \ln x$ задает сжимающее отображение. Показать, что оно не имеет неподвижной точки.

3.4. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{x^2}{2\,|x|}$ определяет сжимающее отображение на области определения, однако неподвижной точки не имеет.

3.5. Показать, что уравнение $2x(t) + \sin x(t) + a(t) = 0$ имеет единственное решение для любой непрерывной функции $a(t) \in C[0,1]$.

3.5. Показать, что уравнение $2x(t) + x(t^2) + t^3 = 0$ имеет единственное решение в пространстве $C[0,1]$.

3.6. Доказать, что при $0 \leqslant a \leqslant 1$ итерации

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a),\ x_0 = 0,\ n \in \mathbb{N},$$

сходятся к a.

3.7. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $A = [1, \infty)$. Показать, что отображение $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ обладает таким свойством, что для любых x и y найдется $\alpha < 1$, что справедливо неравенство $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha\|x - y\|$, f отображает A само на себя, но неподвижной точки не имеет. Пояснить почему.

3.8. Доказать, что отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ является сжимающим на шаре $B[0, r]$, где $r < 1/\sqrt{3}$, но не является сжимающим вблизи неподвижных точек $x = 1$ и $x = -1$.

3.9. Пусть задано уравнение $g(x) = 0$, где g – непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция. Рассмотрим равносильное уравнение $x - \lambda g(x) = x$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Всегда ли параметр λ можно выбрать так, что отображение $f(x) = x - \lambda g(x)$ было сжимающим на $[a, b]$?

ТЕМА 2. Принцип сжимающих отображений для решения СЛАУ

Задание 1. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

1.1. $\begin{cases} 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8, \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5, \\ 2{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}5. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 6{,}25x_1 - x_2 + 0{,}5x_3 = 7{,}5, \\ -x_1 + 5x_2 + 2{,}12x_3 = -8{,}68, \\ 0{,}5x_1 + 2{,}12x_2 + 3{,}6x_3 = -0{,}24. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = -6, \\ x_1 + x_2 + 9x_3 = -3. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} -0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 = -1, \\ -0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}1x_3 = 1, \\ -0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 1{,}1x_3 = -1. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} -1{,}1x_1 + 0{,}1x_3 = 0, \\ -0{,}1x_1 + 1{,}4x_2 = 1, \\ -0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}9x_3 = -1. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 1{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 1, \\ x_2 + 0{,}1x_3 = 1, \\ 0{,}1x_1 + 1{,}3x_3 = 1. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 0{,}9x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 = 1, \\ 0{,}2x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}2x_3 = 1, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 1{,}2x_3 = 0. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} -1{,}3x_1 - 0{,}2x_2 = 0, \\ -0{,}2x_1 + 1{,}0x_2 + 0{,}1x_3 = 1, \\ -0{,}1x_2 + 1{,}0x_3 = 1. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} -0{,}13x_1 - 0{,}02x_2 = 0, \\ -0{,}02x_1 + 0{,}1x_3 = 0{,}1, \\ -0{,}1x_2 + 1{,}0x_3 = 1. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} -1{,}4x_1 - 0{,}1x_3 = 1, \\ 0{,}1x_1 + 1{,}1x_2 - 0{,}1x_3 = 0, \\ 0{,}1x_2 - 1{,}2x_3 = -1. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 = -38, \\ 20x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 29, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = -8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 29. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 40x_3 + 15x_4 = 29, \\ -4x_1 - 2x_3 + 20x_4 = 70, \\ -5x_1 + 10x_2 + 3x_3 - x_4 = -41, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 32, \\ -16x_1 - 3x_3 + 5x_3 - 4x_4 = -74, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ -x_1 + 20x_2 + 12x_3 = -6. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 16x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 55, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 28, \\ -2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 25x_4 = 144, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_4 = -14. \end{cases}$

Задание 2.

2.1. Доказать, что бесконечная система линейных уравнений имеет единственное решение

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(i+j)} x_j + 2^{-i}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

в пространстве l_2.

2.2. Доказать, что бесконечная система линейных уравнений имеет единственное ограниченное решение

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(i+j)} x_j + 1, \quad i = 1, 2, \ldots$$

в пространстве m.

ТЕМА 3. Принцип сжимающих отображений для решения интегральных уравнений

Задание 1. Выяснить, при каких значениях параметра $\lambda \neq 0$ к интегральному уравнению Фредгольма второго рода применим принцип сжимающих отображений в пространстве $C[a, b]$ и в пространстве $L_2[a, b]$. При $\lambda = \lambda_0$ найти приближенное решение уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ и сравнить его с точным решением.

1.1. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (1 + t)s^2 x(s)\,\mathrm{d}s = t^2;$

1.2. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = 1;$

1.3. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 \cos \pi(t - s) x(s)\,\mathrm{d}s = 1;$

1.4. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 \dfrac{t}{\sqrt{1+s}}\, x(s)\,\mathrm{d}s = t^2;$

1.5. $a = -1,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (t^2 - 1)s^3 x(s)\,\mathrm{d}s = t;$

1.6. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 \dfrac{t}{1+s}\, x(s)\,\mathrm{d}s = -5;$

1.7. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 t^2 s x(s)\,\mathrm{d}s = t^3;$

1.8. $a = -1,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (t^2 - 1) s x(s)\,\mathrm{d}s = t;$

1.9. $a = -2,\ b = 2,\ x(t) - \lambda \int\limits_{-2}^2 (1 + t)(1 + s) x(s)\,\mathrm{d}s = t;$

1.10. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{1+t}}{1+s}\, x(s)\,\mathrm{d}s = 3;$

1.11. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 t\sqrt{1-s}\, x(s)\,\mathrm{d}s = \sqrt{1-t};$

1.12. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 t^3 s^2 x(s)\,\mathrm{d}s = t^2;$

1.13. $a = -1,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 (1 + t)s^2 x(s)\,\mathrm{d}s = t^2;$

1.14. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[4]{1+t}}{1+s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=1+t;$

1.15. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 \frac{t}{1+s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=t;$

1.16. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 t^2(1+s)x(s)\,\mathrm{d}s=2;$

1.17. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 t^3\sqrt{1+s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=t^2;$

1.18. $a=-1,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^1 t(s^2-1)x(s)\,\mathrm{d}s=1+\frac{4}{3}\,t;$

1.19. $a=-1,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^1 (ts+t^2)x(s)\,\mathrm{d}s=1;$

1.20. $a=-1,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^1 s^2e^tx(s)\,\mathrm{d}s=1+t;$

1.21. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 s^2(t^2+1)x(s)\,\mathrm{d}s=1;$

1.22. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 s(t^2-1)x(s)\,\mathrm{d}s=t;$

1.23. $a=-1,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^1 t^3sx(s)\,\mathrm{d}s=t;$

1.24. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^1 \frac{1+t}{1+s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=t;$

1.25. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 t^3s\,x(s)\,\mathrm{d}s=t^2;$

1.26. $a=1,\ b=e,\ x(t)-\lambda\int\limits_1^e \frac{\ln s}{t}\,x(s)\,\mathrm{d}s=\ln t;$

1.27. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 te^{t-s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=e^t.$

Задание 2. Методом последовательных приближений найти решение следующих уравнений Вольтерра второго рода в пространстве $C[0,1]$:

2.1. $x(t)-\int\limits_0^t (t-s)x(s)\,\mathrm{d}s=t;$

2.2. $x(t)+\int\limits_0^t (t-s)x(s)\,\mathrm{d}s=1;$

2.3. $x(t) - \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,\mathrm{d}s = 1;$

2.4. $x(t) + \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = \dfrac{t^2}{2} + t;$

2.5. $x(t) - \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,\mathrm{d}s = 1 + t;$

2.6. $x(t) + \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = 2t + 2;$

2.7. $x(t) - \int\limits_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = \dfrac{t^3}{3} - 2t;$

2.8. $x(t) + \int\limits_0^t tx(s)\,\mathrm{d}s = 2t^2 + 2;$

2.9. $x(t) - \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,\mathrm{d}s = 1 + t.$

2.10. $x(t) - \int\limits_0^t ts^2x(s)\,\mathrm{d}s = 1;$

2.11. $x(t) - \int\limits_0^t ts^3x(s)\,\mathrm{d}s = t;$

2.12. $x(t) - \int\limits_0^t t\,x(s)\,\mathrm{d}s = 2t^2 + t;$

2.13. $x(t) - \int\limits_0^t t^2s^2x(s)\,\mathrm{d}s = t.$

3.2. Перечень задач для проведения коллоквиумов

1. Доказать, что в нормированном пространстве E открытый шар $B(x_0, r)$ является открытым множеством.

2. Доказать, что для любых элементов $B(0,r)$ выполнено неравенство $\|x\| \leqslant \leqslant \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$.

3. Доказать, что алгебраическая сумма и объединение двух ограниченных множеств – ограниченное множество.

4. Пусть в пространстве со скалярным произведением E последовательности $x^{(n)}, y^{(n)} \in B[0,1]$ и $\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x^{(n)} - y^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

5. Пусть M и N такие множества в гильбертовом пространстве H, что $M \subset N$. Доказать, что $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

6. Пусть A – замкнутое множество в E. Доказать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.

7. Доказать, что для того, чтобы элемент $x \in H$ был ортогонален подпространству $L \subset H$ необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство $\|x\| \leqslant \|x - y\|$.

8. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ множество $M^{\perp} \subset H$ является подпространством в H.

9. Пусть $A, B \subset E$ и $\overline{A} \subset \overline{B}$. Следует ли, что $A \subset B$. Ответ обоснуйте и приведите пример.

10. Доказать, что пространство ℓ_2 является строго нормированным.

12. Доказать, что любое гильбертово пространство является строго нормированным.

12. Доказать, что ортогональная система без нулевого элемента линейно независима в гильбертовом пространстве.

13. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ в гильбертовом пространстве H имеет место включение $M \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Привести пример строгого включения.

14. Пусть $M \subset E$ выпуклое множество и α – некоторое число. Доказать, что множество $\alpha M = \{x \in E |\, x = \alpha y, y \in M\}$ – выпукло. Будет ли множество всех выпуклых подмножеств пространства E векторным пространством?

15. Будет ли замыкание выпуклого множества $M \subset E$ в нормированном векторном пространстве E выпуклым множеством? Ответ обоснуйте.

16. Пусть $A, B \subset E$ – замкнутые множества и их пересечение $A \cap B$ пусто. Может ли расстояние $\rho(A, B) = 0$?

17. Пусть M и N – подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что M и N – подпространство в H.

18. Пусть $M, N \subset H$ и $H = M + N$ Верно ли, что $N = M^{\perp}$.

19. Пусть $M, N \subset H$ такие, что любой $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = y + z$, $y \in N$, $z \in M$. Следует ли отсюда, что N и M – подпространства в H. Ответ обосновать.

20. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением выполнено равенство
$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\Big\|z-\frac{x+y}{2}\Big\|^2.$$

21. Доказать, что в унитарном пространстве H элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда
$$\|\alpha x+\beta y\|^2=\|\alpha x\|^2+\|\beta y\|^2,\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

22. Доказать, что в пространстве $C[a,b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.

23. Пусть $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty},(y^{(n)})_{n=1}^{\infty}\subset E$ – фундаментальные последовательности. Доказать, что числовая последовательность $\lambda_n=\|x^{(n)})-y^{(n)})\|$ сходится.

24. Доказать, что если отображение $f:X\to Y$ непрерывно, то для любого $A\subset X$ справедливо включение $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

25. Пусть множество $A\subset E$ фиксировано. Доказать, что функция $f(x)=$ $=\rho(x,A)$ непрерывно отображает E в $\mathbb{R}$.

26. Образует ли в пространстве $C[0,1]$ подпространство множество многочленов степени не выше чем n?

27. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой. Доказать, что множество $\{t\in\mathbb{R}:\ f(t)<1\}$ открыто на числовой прямой.

28. Пусть $f\colon X\to Y$ непрерывное отображение пространства X на все пространство Y, A – всюду плотное в X множество. Доказать, что $f(A)$ – множество, всюду плотное в Y.

29. Доказать, что множество $A\subset E$ является ограниченным тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x^{(n)}\in A$ и любой последовательности $\alpha_n\in\mathbb{C}$, $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$ последовательность $\alpha_n x^{(n)}\to 0$ при $n\to\infty$.

30. Пусть $M,N\subset H$ – подпространства гильбертова пространства H и $M\perp N$. Доказать, что $M+N$ – подпространство в H.

31. Пусть $E=E_1\times E_2$, где $(E_1,\|\cdot\|_1)$, $(E_2,\|\cdot\|_2)$ – нормированные векторные пространства. Будет ли E нормированным пространством относительно нормы
$$\|(x_1,x_2)\|=\|x_1\|_1+\|x_2\|_2.$$

32. В пространстве m ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\|=\sup\limits_i|x_i|$ построить замыкание множества
$$A=\Big\{x(x_1,\ldots,x_i,\ldots):\ \sum_{i=1}^{n}|x_i|<\infty\Big\}.$$

33. Пусть $A,B\subset E$ – всюду плотные множества в нормированном пространстве E. Возможно ли, что $A\cap B=\varnothing$?

34. Пусть E – вещественное нормированное пространство, $x,y\in E$. Доказать, что функция $f(t)=\|x-ty\|,t\in\mathbb{R}$, достигает своей точной нижней грани.

35. В пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $C^{(1)}[a, b]$ введем норму по формуле

$$\|x\| = \Big(\int\limits_a^b \big(|x(t)|^2 + |x'(t)|^2\big)\mathrm{d}t\Big)^{1/2}.$$

Будет ли пространство $C^1[a, b]$ банаховым?

36. Пусть $A, B \subset E$ – произвольные множества в нормированном пространстве E, причем $\rho_x(A, B) = 0$. Возможно ли, что $\rho_y(f(A), f(b)) \neq 0$, если $f\colon X \to Y$ есть:

- непрерывное отображение;
- равномерно непрерывное отображение?

37. Доказать, что непрерывное отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающее тем свойством, что образ каждого открытого множества есть открытое множество, – монотонная функция.

38. Привести пример последовательности непустых замкнутых множеств E_n в банаховом пространстве E таких, что

1) $E_{n+1} \subset E_n, n = 1, 2, \ldots;$
2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ пусто.

39. Между реками (непрерывными кривыми на плоскости, содержащими концы) Γ_1 и Γ_2, нужно построить канал (отрезок). Предположим, что расстояние между реками – длина самого короткого из возможных каналов, т. е.

$$\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min_{x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2} \|x - y\|.$$

Задает ли данная функция метрику на множестве всех рек?

40. Рассмотрим множество $C_\alpha[a, b], \alpha \in (0, 1]$, всех непрерывных на $[a, b]$ функций, для которых выполняется условие Гельдера

$$K_\alpha(x) = \sup_{t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} < +\infty.$$

Покажите, что $C_\alpha[a, b]$ будет нормированным пространством, если в нем норму задать как

$$\|x\|_\alpha = \|x\|_{C[a,b]} + K_\alpha(x).$$

3.3. Примерный вариант итоговой контрольной работы

1. В нормированном пространстве E найти предел последовательности, если он существует

$$E = m, \quad x^{(n)} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots, \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n, \ldots\right);$$

$$E = C[0,1], \quad x^{(n)}(t) = \frac{t(2+n^2t^2)}{1+n^2t^2}.$$

2. Выяснить, является ли отображение fв банаховом пространстве E сжимающим. Вычислить x_3

$$E = L_2[0,1], \quad f(x) = \int\limits_0^{1/2} ts^2 x(s)\,\mathrm{d}s;$$

$$E = \ell_2, \quad f(x) = \left(\frac{x_1}{3}, \ldots, \frac{ix_i}{3^i}, \ldots\right).$$

3. Доказать, что оператор $A : X \to Y$ является линейным ограниченным. Вычислить его норму.

$$X = C[-1,1], \quad Y = L_2[-1,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} ts^2 x(s)\,\mathrm{d}s - tx(0);$$

$$X = \ell_{5/3}, \quad Y = \ell_1, \quad Ax = \left(\frac{x_1}{2}, \ldots, \frac{x_i}{2^i}, \ldots\right).$$

4. Выяснить, является ли предкомпактным в пространстве $C[0,1]$ множество, состоящее из непрерывных функций, удовлетворяющих условию

- $|x'(t)| \leqslant 2$, $t \in [0,1]$;
- для любой $x(t) \in C[0,1]$ уравнение $x(t) = 0$ имеет хотя бы один корень.

5. По теореме Рисса вычислить норму функционала f в пространстве E

$$E = L_2[-1,1], \quad f(x) = \int\limits_{-1}^{1} ts^3 x(s)\,\mathrm{d}s - \int\limits_0^1 t^2 s x(s)\,\mathrm{d}s;$$

$$E = \ell_2, \quad f(x) = x_1 - x_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}.$$

$$E = C[-4,3], \quad f(x) = x(-3) - \int\limits_{-1}^{0} tsx(s)\,\mathrm{d}s - 2x(0) + \int\limits_0^1 t^2 s^2 x(s)\,\mathrm{d}s.$$

6. При каких $a, b \in \mathbb{R}$ разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (s\sin t + \cos s)x(s)\,\mathrm{d}s = at + b.$$

3.4. Перечень вопросов к экзамену

1. Метрические пространства. Способы задания расстояния. Прикладные задачи и способы задания метрики в них.

2. Векторные пространства. Примеры. Базис и размерность. Подпространства векторного пространства.

3. Нормированные векторные пространства. Примеры. Свойства нормы. Эквивалентные нормы. Теорема об эквивалентных нормах в конечномерных пространствах.

4. Неравенства Гельдера, Юнга, Минковского. Пространство $CL_p[a,b]$, ℓ_p, $p \geqslant 1$.

5. Открытые, замкнутые, ограниченные и выпуклые множества в нормированных векторных пространствах и их свойства. Примеры.

6. Внутренние, внешние, граничные и предельные точки. Примеры. Теорема о замкнутом множестве. Всюду плотные и нигде не плотные множества.

7. Предел последовательности в нормированном пространстве. Свойства предела. Теорема о точке прикосновения.

8. Аппроксимация в нормированных пространствах. Теоремы о существовании и единственности элемента наилучшей аппроксимации.

9. Банаховы пространства. Примеры. Принцип вложенных шаров.

10. Ряды в банаховых пространствах. Критерий полноты пространства.

11. Пополнение нормированных векторных пространств.

12. Пространство суммируемых по Лебегу функций $L_p[a,b]$.

13. Отображения в нормированных пространствах. Теорема о непрерывном отображении, непрерывность композиции отображений.

14. Предгильбертовы пространства. Свойства скалярного произведения. Примеры.

15. Гильбертовы пространства. Примеры. Теорема об элементе наилучшей аппроксимации.

16. Проекция в гильбертовом пространстве. Теорема о проекции.

17. Ортогональное дополнение. Ортогональное разложение гильбертова пространства в прямую сумму. Теорема о плотном множестве.

18. Ортогональные системы и ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Теорема о разложении в ряд Фурье. Экстремальное свойство отрезка ряда Фурье.

19. Полные ортонормированные системы в гильбертовом пространстве и их существование. Примеры полных ортонормированных систем в конкретных пространствах.

20. Изоморфизм гильбертовых пространств.

21. Сжимающие отображения. Теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения. Локальный принцип сжимающих отображений.

22. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре.

23. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

24. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Вольтера второго рода.

25. Применение принципа сжимающих отображений к дифференциальным уравнениям.6. Линейные ограниченные операторы. Ограниченность и непрерывность.

27. Примеры линейных ограниченных операторов. Ограниченность интегрального оператора в пространствах $C[a, b]$, $L_p[a, b]$, ℓ_p, $p \geqslant 1$.

28. Пространство линейных ограниченных операторов и его полнота. Равномерная сходимость. Примеры.

29. Сильная сходимость в пространстве (X, Y) линейных ограниченных операторов. Примеры. Принцип равномерной ограниченности.

30. Теорема Банаха-Штейнгауза о сильной сходимости и ее применение.

31. Обратные операторы. Непрерывная обратимость оператора и ее критерий.

32. Левый и правый обратные операторы и разрешимость уравнения $A = y$. Теорема Банаха об обратном операторе.

33. Непрерывная обратимость оператора $I - A$.

34. Применение теории обратных операторов к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода. Метод резольвент.

35. Сопряженное пространство. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

36. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного ограниченного функционала в сепарабельном нормированном и гильбертовом пространствах.

37. Следствия из теоремы Хана-Банаха об отделимости точек, об отделимости точки от подпространства, о всюду плотном множестве и биортогональных системах в банаховых пространствах.

38. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве, его норма. Свойства операции сопряжения.

39. Применение сопряженного оператора. Теорема о замыкании множества значений линейного ограниченного оператора.

40. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве и их свойства.

41. Норма самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

42. Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

43. Операторы ортогонального проектирования и их свойства.

44. Компактные множества в банаховых пространствах. Критерий компактности Хаусдорфа.

45. Предкомпактные множества в банаховых пространствах. Теорема Арцела-Асколи.

46. Лемма о почти перпендикуляре. Критерий конечномерности нормированного пространства.

47. Пространство компактных операторов. Примеры.

48. Теория Рисса–Шаудера разрешимости уравнений с компактным оператором.

49. Собственные векторы и собственные значения компактного самосопряженного оператора.

4. Вспомогательный раздел

4.1. Рекомендуемая литература

Основная

1. Дайняк, В.В. *Линейные ограниченные операторы. Ч.2.* / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Мн.: БГУ, 2015. – 56 с.

2. Дайняк, В.В. *Метрические пространства. Ч.1.* / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Мн.: БГУ, 2020. – 52 с.

3. Канторович, Л.В. *Функциональный анализ. – 4-е изд., испр.*/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – СПб.:ВНМ, 2017. – 816 с.

4. Колмогоров, А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд.* / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 286 с.

5. Лебедев, В.И. *Функциональный анализ и вычислительная математика. – 4-е изд., испр* / В.И. Лебедев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 296 с.

Дополнительная

6. Антоневич, А.Б. *Функциональный анализ и интегральные уравнения: учеб. пособие* / А.Б. Антоневич, М.Х. Мазель, Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2011. – 319 с.

7. Антоневич, А.Б. *Сборник задач по функциональному анализу.* 2-изд./ А.Б. Антоневич, П.Н. Князев, Я.В. Радыно. – М.: Либроком, 2010. – 208 с.

8. Арсеньев, А.А. *Лекции по функциональному анализу для начинающих специлистов по математической физике*/ А.А. Арсеньев. Москва – Ижевск: РХД, 2009. – 500 с.

9. Ахиезер, Н.И. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: В 2-х т.*/ Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – Х.: Выща. шкл. Изд-во Харьк. ун-те, 1977-1978. – Т.1. – 316 с.; Т.2. – 1978. – 288 с.

10. Березинский, Ю.М. *Функциональный анализ. Курс лекций* / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. – К.: Высш.шк., 1990. – 600 с.

11. Варга, Р. *Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе* / Р. Варга. – М.: Мир, 1974.

12. Гелбаум, Б. *Контрпримеры в анализе* / Б.Гелбаум, Дж.Олтстед. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 251 с.

13. Городецкий, В.В. *Методы решения задач по функциональному анализу* / В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.Л. Настасиев. – Киев: Высш. шк., 1990. – 479 с.

14. Дайняк, В.В. *Теория нормированных векторных пространств*/ В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Мн.: БГУ, 2005. – 82 с.

15. Дайняк, В.В. *Линейные ограниченные операторы. Ч.1.* / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Мн.: БГУ, 2013. – 52 с.

16. Дерр, В.Я. *Функциональный анализ: лекции и упражнения: учебное пособие*/ В.Я. Дерр. – М.: КНОРУС, 2013. – 464 с.

17. Кириллов, А.А. *Теоремы и задачи функционального анализа* / А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. – М.: Наука, 1988. – 400 с.

18. Краснов, М.Л. *Интегральные уравнения* / М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 304 с.

19. Кудрявцев, Л.Д. *Математический анализ. Т.3* / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2006. – 351 с.

20. Кутателадзе, С.С. *Основы функционального анализа. – 4-е изд., испр.*/ С.С. Кутателадзе. – Новосибирск : Изд-во Ин-та матем., 2001. – 354 с.

21. Леонтьева, Т.В. *Задачи по теории функций действительных переменных* / Т.А. Леонтьева, В.С. Панферов, В.С. Серов. – М: Изд.-во. Моск. ун-та, 1997. – 207 с.

22. Очан, Ю.С. *Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций*/ Ю.С. Очан. – М.: Просвещение, 1981. – 271 с.

23. Петровский, И.Г. *Лекции по теории интегральных уравнений. – 5-е изд.*/ И.Г.Петровский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 136 с.

26. Рисс, Ф. *Лекции по функциональному анализу* / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь Б. – М.: Мир, 1979. – 592 с.

27. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*/ С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

28. Треногин, В.А. *Функциональный анализ. – 4-е изд., исп.*/ В.А. Треногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.

29. Треногин, С.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу. – 2-е изд., исправ. и доп.*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 240 с.

30. Федоров, В.М. *Теория функций и функциональный анализ. Ч.1.*/ В.М. Федоров. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. – 184 с.

31. Федоров, В.М. *Теория функций и функциональный анализ. Ч.2.*/ В.М. Федоров. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. – 191 с.

32. Федоров, В.М. *Курс функционального анализа* / В.М. Федоров. СПб.: Изд-во Лань, 2001. – 352 с.

33. Хатсон, В. *Приложения функционального анализа и теории операторов*/ В. Хатсон, Дж. Пим. – М.: Мир. 1983. – 432 с.

34. Эдвардс, Р. *Функциональный анализ* / Р. Эдвардс. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.

4.2. Электронные ресурсы

1. Электронная библиотека БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа http://elib.bsu.by/handle/123456789/241306 – Дата доступа 20.02.2020.

2. Электронная библиотека БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа http://elib.bsu.by/handle/123456789/234115 – Дата доступа 20.02.2020.