

Белорусский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

В.К. Полевилов

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ**

Курс лекций

Минск - 2015

Оглавление

§1.	Математическое моделирование и вычислительный эксперимент	5
§2.	Типичные задачи математической физики	6
2.1	Стационарные задачи	6
2.2	Нестационарные задачи	8
1	Основные понятия и математический аппарат теории разностных схем	11
§1.	Сетки и сеточные функции	11
1.1	Сетка в прямоугольнике	12
1.2	Сетка в параллелепипеде	14
1.3	Сетка в криволинейной ортогональной системе координат	15
1.4	Пространственно-временная сетка в прямоугольнике	16
1.5	Прямоугольная сетка в области сложной формы	16
1.6	Треугольная сетка в области сложной формы	17
1.7	Общее заключение	19
§2.	Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов в ЧП	21
§3.	Погрешность аппроксимации РС	26
§4.	Аппроксимация краевых условий. Повышение порядка аппроксимации РС	30
§5.	Устойчивость и сходимость разностных схем	34
§6.	Принцип максимума	37
§7.	Монотонные схемы для уравнений конвективного типа	44
§8.	Метод гармоник	48
2	РС для нестационарных задач МФ	51
§1.	Разностные схемы для одномерного уравнения	51
§2.	Семейство трехслойных схем для уравнения колебаний струны	57
§3.	Экономичные РС для многомерных задач МФ	61

3	Разностные схемы для стационарных задач МФ	69
§1.	Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона	69
§2.	Консервативные схемы. Интегро-интерполяционный метод построения КС	73
§3.	Итерационные методы решения разностных задач	79
4	Численные методы решения задач МФ в областях сложной формы	87
§1.	Разностный метод	87
§2.	Метод конечных элементов	90
§3.	Метод граничных элементов	102
	Литература	109

Введение

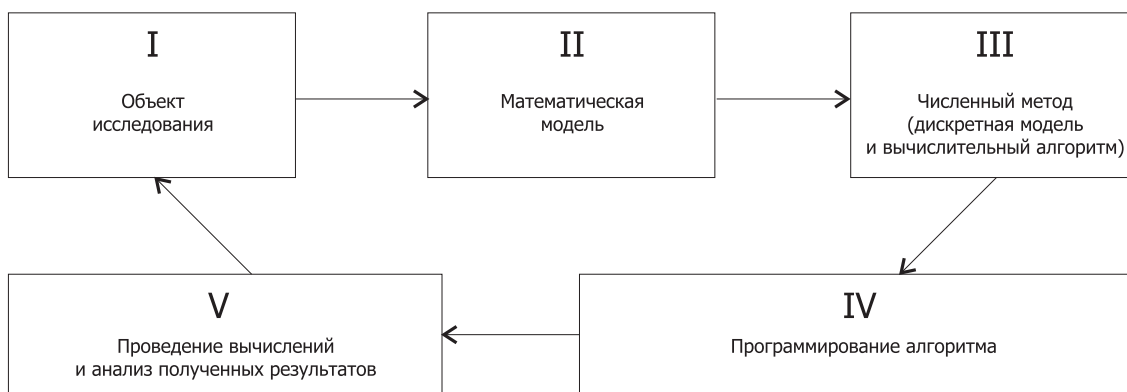
§1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент

Пусть требуется исследовать какой-то физический объект, явление, процесс.

Математической моделью физического процесса называют систему уравнений (дифференциальных, интегральных, алгебраических и т.д.) с дополнительными условиями, описывающих в математической форме данный физический процесс.

Она, как правило, имеет сложный вид, не поддающийся точному решению.

Вычислительным экспериментом называют компьютерную реализацию этой математической модели, то есть, иными словами, численное решение системы уравнений, описывающих данный физический процесс.



Естественно, что в схему необходимо также внести погрешности: *устраняемые* (погрешности округления и аппроксимации) и *неустраняемые* (погрешности модели и входных данных).

Вычислительный эксперимент является в настоящее время наиболее мощным средством исследования реальных физических процессов. Если математическая модель адекватно отражает реальный физический процесс, то вычислительный эксперимент может полностью заменить физические экспериментальные исследования.

В основе математической модели лежат некоторые фундаментальные физические

законы. Чтобы не усложнять модель, при ее построении мы пренебрегаем факторами, не оказывающими, на наш взгляд, существенного влияния на ход изучаемого физического процесса. Обратим внимание, что, хотя здесь и в дальнейшем речь будет идти о физических процессах, на самом деле рассматриваемые задачи могут возникать и в других областях науки.

§2. Типичные задачи математической физики

Различают два типа физических процессов — *нестационарные* (меняющиеся во времени) и *стационарные* (не меняющиеся во времени). Нестационарные процессы описываются уравнениями параболического и гиперболического типов, а стационарные процессы — уравнениями эллиптического типа.

$$\begin{aligned}\nabla u &= \text{grad } u, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= \text{div } \vec{u}, \\ \nabla \times \vec{u} &= \text{rot } \vec{u}, \\ \nabla^2 u &= \Delta u = (\nabla \cdot \nabla)u = \nabla \cdot (\nabla u).\end{aligned}$$

2.1 Стационарные задачи

Простейшим представителем уравнений эллиптического типа является *уравнение Лапласа*:

$$\nabla^2 u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad u = u(x), \quad x = (x_1, \dots, x_p) \quad (1)$$

Неоднородное уравнение

$$\nabla^2 u = -f(x) \quad (2)$$

называют *уравнением Пуассона*.

К уравнениям Лапласа и Пуассона приводят задачи о стационарном распределении тепла, задачи диффузии, электростатики, магнитостатики, гидродинамики и многие другие.

Стационарное распределение температуры в однородной среде, если интервал изменения температуры в среде невелик, описывается уравнением Пуассона:

$$k \nabla^2 u = -f(x),$$

где $f(x)$ — плотность тепловых источников (стоков), $k = \text{const} > 0$ — коэффициент теплопроводности. Если среда неоднородна, то тогда $k = k(x) > 0$, и

$$\nabla \cdot (k \nabla u) = -f(x).$$

Если интервал изменения температуры в среде достаточно большой, то $k = k(u)$, и мы получаем нелинейное (квазилинейное) стационарное уравнение теплопроводности:

$$\nabla \cdot (k \nabla u) = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) = -f(x). \quad (3)$$

Если в среде имеются источники или стоки тепла, пропорциональные температуре, то стационарное уравнение теплопроводности принимает вид

$$\nabla \cdot (k \nabla u) - q(x)u = -f(x)$$

(здесь при $q(x) < 0$ - сток, при $q(x) > 0$ - источник тепла).

Если процесс теплопроводности сопровождается конвективным переносом тепла, что имеет место в жидкостях и газах, то уравнение теплопроводности имеет вид

$$\nabla \cdot (k \nabla u) + \vec{v} \nabla u - qu = \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) + v_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right] - qu = -f(x),$$

где $\vec{v} = (v_1, \dots, v_p)$ — вектор скорости среды.

Остановимся на формулировке краевых задач для уравнения Пуассона.

Пусть G — область p -мерного пространства $x = (x_1, \dots, x_p)$ с границей Γ . Обычно ставятся следующие краевые задачи.

В замкнутой области $\bar{G} = G \cup \Gamma$ требуется найти решение уравнения

$$\nabla^2 u = -f(x), \quad x \in G,$$

удовлетворяющее на границе Γ одному из граничных условий:

1) $u = \mu_1(x)$ при $x \in \Gamma$ (условие первого рода) — получаем *первую краевую задачу*, для этого уравнения ее называют задачей Дирихле,

2) $\frac{\partial u}{\partial n} = \mu_2(x)$ при $x \in \Gamma$ (условие второго рода) — получаем *вторую краевую задачу* (задачу Неймана),

3) $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(u - \mu_3(x)) = 0$ — (условие третьего рода) — *третья краевая задача*,

где $\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x), \sigma = \sigma(x) \geq 0$ — заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к Γ .

Такие условия имеют следующий физический смысл:

1) на границе задана температура,

2) на границе задан тепловой поток,

3) на границе происходит теплообмен со средой, имеющей температуру $\mu_3(x)$.

Не обязательно задавать на границе условия одного типа. Возможна их комбинация.

2.2 Нестационарные задачи

Типичным представителем уравнений параболического типа является уравнение теплопроводности, описывающее нестационарный процесс переноса тепла:

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0,$$

где

$$Lu = \nabla \cdot (k \nabla u) = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right),$$

$k(x, t)$ - коэффициент теплопроводности, $c(x, t) > 0$ — теплоемкость единицы объема среды.

При $t = 0$ задается начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G},$$

а на границе Γ — одно из краевых условий 1) - 3), в которых все функции могут зависеть как от $x \in \Gamma$, так и от $t \geq 0$.

Так, в случае первой краевой задачи:

$$u = \mu(x, t), \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad t \geq 0.$$

В случае однородной среды, когда $k(x, t) = k = \text{const} > 0$, $c(x, t) = c = \text{const} > 0$, уравнение теплопроводности записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \nabla^2 u + \bar{f}(x, t), \quad a = \frac{k}{c} > 0, \quad \bar{f} = \frac{f}{c}, \quad (4)$$

где a — коэффициент температуропроводности.

Меняя масштаб для t , всегда можно добиться, чтобы коэффициент при $\nabla^2 u$ был равен 1:

$$t = \frac{\bar{t}}{a} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \nabla^2 u + \frac{1}{a} \bar{f}(x, \bar{t}), \quad \bar{t} > 0.$$

Таким образом, вместо уравнения (4) без ограничения общности можно рассматривать

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0 \quad (5)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (6)$$

и краевыми условиями, например, первого рода:

$$u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Упражнение. Привести в одномерном случае, при $p = 1$.

Наиболее известным уравнением гиперболического типа второго порядка является волновое уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad \rho(x, t) > 0,$$

где $Lu = \nabla \cdot (k \nabla u)$, если $k = k(x, t) > 0$, или $Lu = k \nabla^2 u$, если $k = \text{const} > 0$.

В случае однородной среды имеем:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \nabla^2 u + f(x, t), \quad \rho = \text{const} > 0, \quad k = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Для уравнения колебаний мембраны ($p = 2$) или струны ($p = 1$) ρ — плотность мембраны (струны), k — натяжение мембраны (струны).

На границе Γ краевые условия типа 1) - 3) с учетом зависимости от времени, например,

$$u = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0,$$

а при $t = 0$ два начальных условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{G}.$$

Заменив переменные $t = \sqrt{\frac{\rho}{k}} \bar{t}$, можно вместо уравнения (8) рассматривать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}^2} = \nabla^2 u + f(x, \bar{t}), \quad x \in G, \quad \bar{t} \geq 0.$$

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения колебаний струны ($p = 1$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, \bar{t}); \quad 0 < x < l$$

(здесь a — скорость распространения колебаний), которое после замены переменных $x = \bar{x}l$, $\bar{t} = \bar{t}/\sqrt{a}$ принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, \bar{t}), \quad 0 < x < 1, \quad \bar{t} > 0 \quad (9)$$

с краевыми условиями

$$u(0, \bar{t}) = \mu_1(\bar{t}), \quad u(1, \bar{t}) = \mu_2(\bar{t}) \quad (10)$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{t}}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (11)$$

Если среда жидкая или газообразная:

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla u) - \vec{v} \cdot \nabla u + f,$$

где $c(x, t) > 0$, $k(x, t) > 0$, $\vec{v} = (v_1(x, t), \dots, v_p(x, t))$. Уравнение Блэка-Шоулза (Black-Scholes equation).

Глава 1

Основные понятия и математический аппарат теории разностных схем

Одним из основных методов решения задач математической физики является *метод конечных разностей* (*метод сеток, разностный метод*). Важное его достоинство заключается в том, что он пригоден для решения не только линейных, но и нелинейных задач.

Процедура численного решения задачи математической физики по методу сеток содержит в себе четыре основных этапа (как и процедура решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения):

- 1) Строится сетка в области определения дифференциальной задачи.
- 2) В каждом узле сетки производится аппроксимация дифференциального уравнения и краевых (граничных, начальных) условий; в результате строится *разностная схема (РС)* — дискретный аналог исходной дифференциальной задачи, имеющий вид большой системы алгебраических уравнений.
- 3) Выбирается метод решения полученной разностной задачи (алгебраической системы), пригодный для компьютерной реализации.
- 4) Выбранный алгоритм реализуется программно.

§1. Сетки и сеточные функции

Остановимся на первом этапе построения РС — построении сетки. *Сеткой* называется некоторое конечное множество точек из области определения дифференциальной задачи. Эти точки — элементы сетки — называют *узлами*. Если узел принадлежит границе области определения, то его называют *граничным*; остальные узлы называют *внутренними*. Сетка обязательно должна содержать как граничные, так и внутренние узлы.

От выбора сетки зависит точность приближенного решения дифференциальной задачи.

При построении сетки следует учитывать конфигурацию расчетной области, особенности выбранной системы координат, структуру искомого решения дифференциальной задачи. Количество узлов и их распределение в области определения дифференциальной задачи выбирается в соответствии с требованиями к точности решения, при этом учитываются технические возможности вычислительной техники.

Обозначим $\bar{G} = G \cup \Gamma$ область определения задачи МФ, где Γ — граница области, и рассмотрим простейшие примеры сеток.

1.1 Сетка в прямоугольнике

Пусть G является прямоугольником с основанием a и высотой b . Физические процессы в областях с прямоугольной конфигурацией естественно рассматривать в прямоугольных декартовых координатах с осями, параллельными сторонам прямоугольника.

Предположим, что основание прямоугольника лежит на оси абсцисс OX_1 , а одна из боковых сторон — на оси ординат OX_2 . Тогда

$$\bar{G} = \{ (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b \}.$$

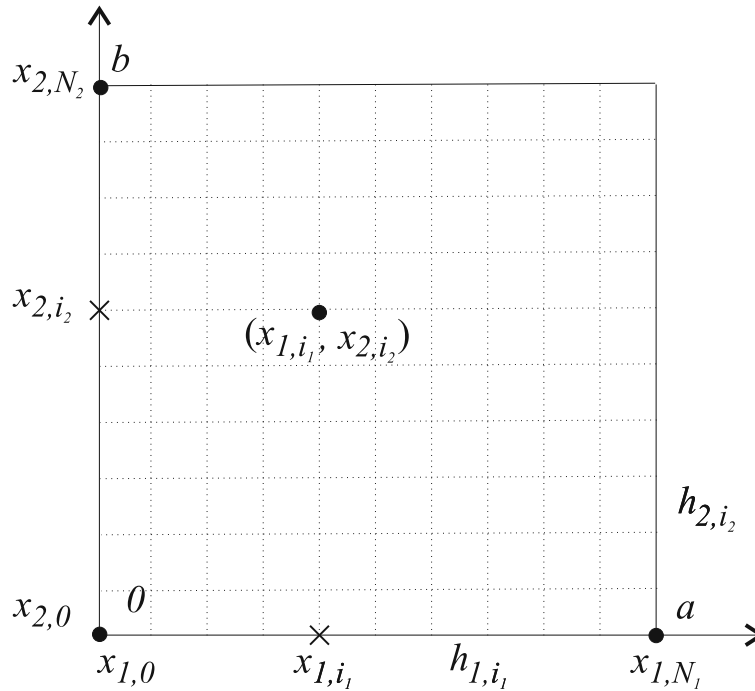


Рис. 1.1: Сетка в прямоугольнике.

Разобьем отрезки $[0, a]$ оси OX_1 и $[0, b]$ оси OX_2 на N_1 и N_2 соответственно.

Пусть точки деления, находящиеся на оси OX_1 , имеют координаты x_{1,i_1} , $i_1 = 0, 1, \dots, N_1$, а точки, находящиеся на OX_2 , — координаты x_{2,i_2} , $i_2 = 0, 1, \dots, N_2$; при этом:

$$\begin{aligned} 0 &= x_{1,0} < x_{1,1} < \dots < x_{1,N_1-1} < x_{1,N_1} = a, \\ 0 &= x_{2,0} < x_{2,1} < \dots < x_{2,N_2-1} < x_{2,N_2} = b. \end{aligned}$$

Через точки деления проведем два семейства прямых:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1,i_1}, \quad i_1 = 0, 1, \dots, N_1, \\ x_2 &= x_{2,i_2}, \quad i_2 = 0, 1, \dots, N_2, \end{aligned}$$

параллельных соответствующим осям.

В качестве узлов сетки возьмем точки пересечения этих прямых, (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}) . Общее число узлов, следовательно, равно $(N_1 + 1)(N_2 + 1)$, и все они принадлежат прямоугольнику \bar{G} .

Расстояния

$$\begin{aligned} h_{1,i_1} &= x_{1,i_1} - x_{1,i_1-1} > 0, \quad i_1 = 1, \dots, N_1, \\ h_{2,i_2} &= x_{2,i_2} - x_{2,i_2-1} > 0, \quad i_2 = 1, \dots, N_2 \end{aligned}$$

между прямыми называют *шагами сетки*.

Распределение узлов в области \bar{G} характеризуется векторным параметром $h = (h_{1,1}, h_{1,2}, \dots, h_{1,N_1}; h_{2,1}, h_{2,2}, \dots, h_{2,N_2})$, составленным из шагов.

Если шаги сетки как по направлению x_1 , так и по направлению x_2 равны между собой, т. е.

$$\begin{aligned} h_{1,1} &= h_{1,2} = \dots = h_{1,N_1} = a/N_1 = h_1, \\ h_{2,1} &= h_{2,2} = \dots = h_{2,N_2} = b/N_2 = h_2, \end{aligned}$$

то такая сетка называется *равномерной*.

В противном случае, т. е. если шаги $\{h_{1,i}\}$ или $\{h_{2,i}\}$ не все одинаковы, сетка называется *неравномерной*.

Если $h_1 = h_2$, то равномерная сетка называется *квадратной*.

Введем такие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \omega_h \cup \gamma_h \text{ — равномерная сетка,} \\ \hat{\omega}_h &= \hat{\omega}_h \cup \hat{\gamma}_h \text{ — неравномерная сетка.} \end{aligned}$$

В нашем случае, например,

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_h &= \{ (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}) \in G \mid x_{1,i_1} = i_1 h_1, x_{2,i_2} = i_2 h_2; h_1 = a/N_1, h_2 = b/N_2; \\ &\quad i_1 = 0, 1, \dots, N_1; i_2 = 0, 1, \dots, N_2 \}, \\ \hat{\omega}_h &= \{ (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}) \in G \mid x_{1,i_1} = x_{1,i_1-1} + h_{1,i_1}, x_{2,i_2} = x_{2,i_2-1} + h_{2,i_2}, \\ &\quad i_1 = 1, 2, \dots, N_1; i_2 = 1, 2, \dots, N_2, x_{1,0} = 0, x_{2,0} = 0 \}.\end{aligned}$$

Неравномерные сетки бывают эффективны в случае сильно неоднородного решения. Узлы сетки сгущают в зоне сильно изменяющегося решения за счет уменьшения их плотности на участках, где решение изменяется слабо. Важно, что при этом удастся улучшить точность решения без увеличения количества узлов.

1.2 Сетка в параллелепипеде

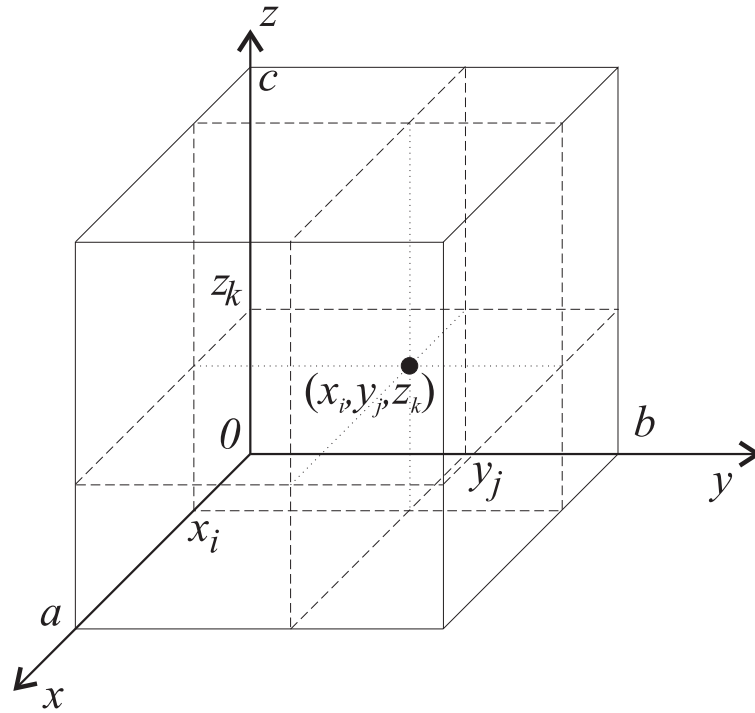


Рис. 1.2: Сетка в параллелепипеде.

$$\bar{G} = \{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c \}.$$

В этом случае все практически то же самое, только узлами сетки являются точки

пересечения трех семейств плоскостей, параллельных координатным плоскостям.

$$\begin{aligned}x &= x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \\y &= y_j, \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \\z &= z_k, \quad k = 0, 1, \dots, N_3.\end{aligned}$$

В случае равномерной сетки

$$\bar{\omega}_h = \{ (x_i, y_j, z_k) \mid x_i = ih_1, \quad y_j = jh_2, \quad z_k = kh_3; \quad h_1 = a/N_1, \quad h_2 = b/N_2, \quad h_3 = c/N_3; \\ i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad k = \overline{0, N_3} \}.$$

1.3 Сетка в криволинейной ортогональной системе координат

В качестве примера рассмотрим область \bar{G} , имеющую вид круга радиусом R . Двумерную задачу математической физики в такой области удобно формулировать в полярных координатах (r, φ) , поместив полюс в центр круга.

Тогда $\bar{G} = \{ (r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$.

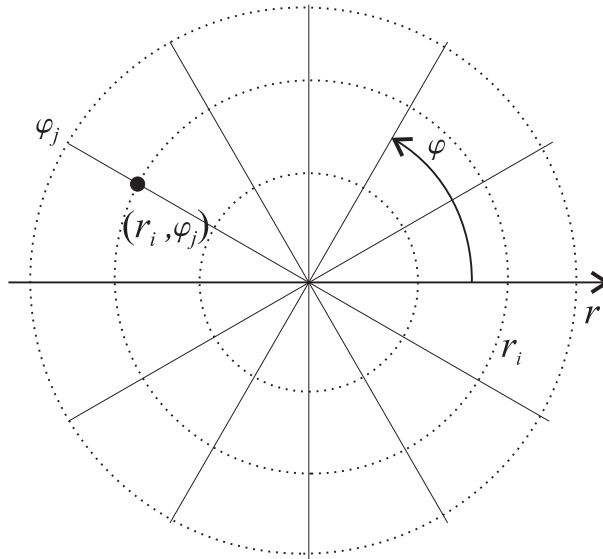


Рис. 1.3: Сетка в криволинейной ортогональной системе координат.

Проведем два семейства кривых, параллельных координатным линиям:

$$\begin{aligned}r &= r_i, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 \text{ — концентрические окружности,} \\ \varphi &= \varphi_j, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 \text{ — лучи, исходящие из полюса.}\end{aligned}$$

Узлы сетки: (r_i, φ_j) , $i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}$; $r_0 = 0$, $r_{N_1} = R$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{N_2} = 2\pi$. Обратим внимание, что дублирование узлов в сетке производится для удобства представления

разностных схем; так, например, точка $(0, 0)$ может обозначаться любым из способов $(0, \varphi_j)$, $j = \overline{0, N_2}$ в зависимости от места употребления.

1.4 Пространственно-временная сетка в прямоугольнике

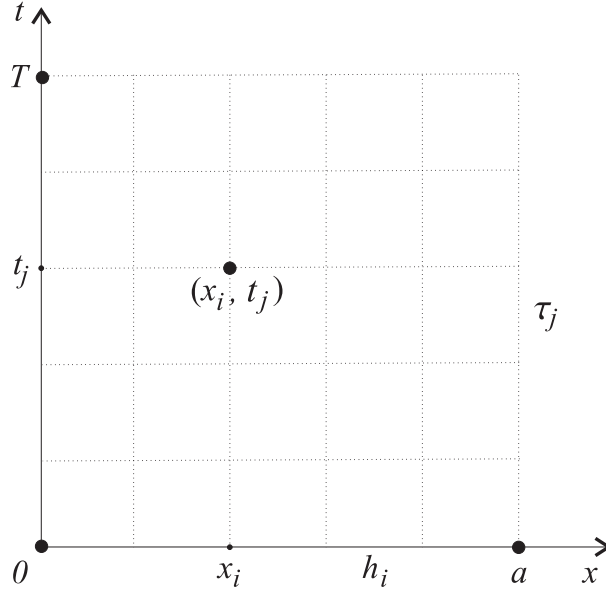


Рис. 1.4: Пространственно-временная сетка в прямоугольнике.

Строится аналогично примеру в пункте (1.1), но в других обозначениях.

$$\bar{G} = \{ (x, t) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T \}.$$

Равномерная сетка:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{ (x_i, t_j) \mid x_i = ih, t_j = j\tau; h = a/N_1, \tau = T/N_2; i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2} \}.$$

Здесь τ — шаг сетки по времени, h — шаг сетки по x .

Неравномерная сетка:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{h\tau} = \{ (x_i, t_j) \mid x_i = x_{i-1} + h_i, i = \overline{1, N_1} x_0 = 0, x_{N_1} = a; \\ t_j = t_{j-1} + \tau_j, j = \overline{1, N_2} t_0 = 0, t_{N_2} = T \}. \end{aligned}$$

Здесь h_i, τ_j — шаги неравномерной сетки.

1.5 Прямоугольная сетка в области сложной формы

Выберем шаги h_1, h_2 и проведем два семейства прямых.

$$\begin{aligned} x_1 = x_{1,i} = ih_1; i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ x_2 = x_{2,j} = jh_2; j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \end{aligned}$$

Узлами сетки являются точки пересечения этих прямых $(x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{G}$, а также точки их пересечения с границей Γ . Такая сетка неравномерна вблизи границы.

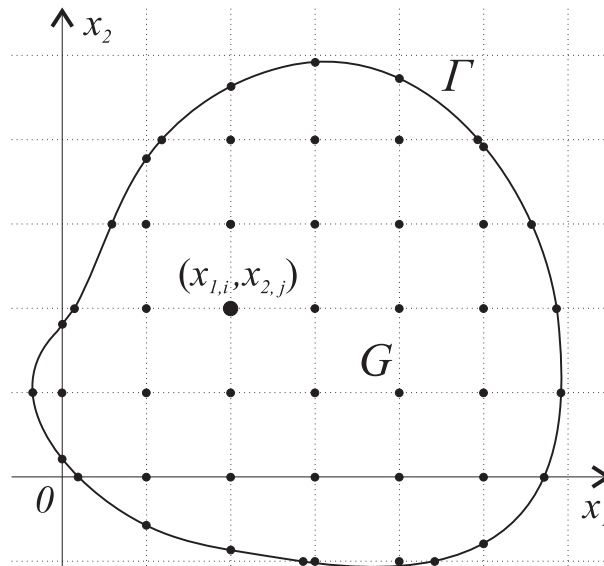


Рис. 1.5: Прямоугольная сетка в области сложной формы.

Узлы, лежащие внутри области G — *внутренние* (ω_h), узлы, лежащие на границе Γ — *граничные* (γ_h).

1.6 Треугольная сетка в области сложной формы

Здесь все узлы можно пронумеровать одним индексом.

Узлы $\xi_p = (x_p, y_p)$, $p = \overline{1, N}$, выбираются внутри и на границе области \bar{G} , вообще говоря, произвольно, исходя из структуры решения и требований точности. Затем они соединяются непересекающимися отрезками.

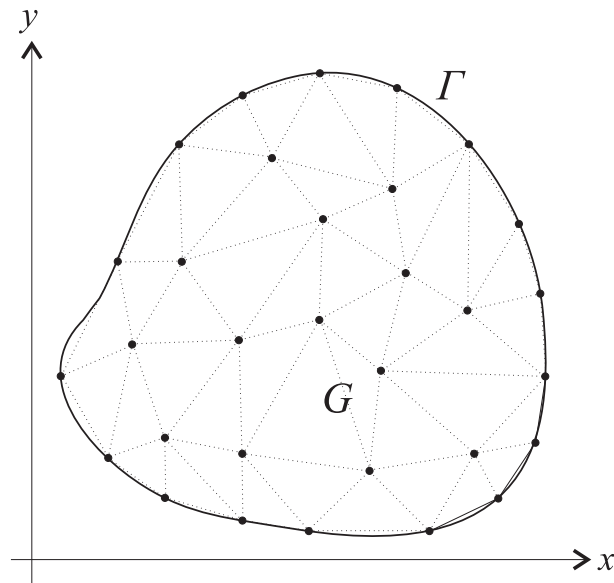


Рис. 1.6: Треугольная сетка в области сложной формы.

Рассмотрим такую конфигурацию области:

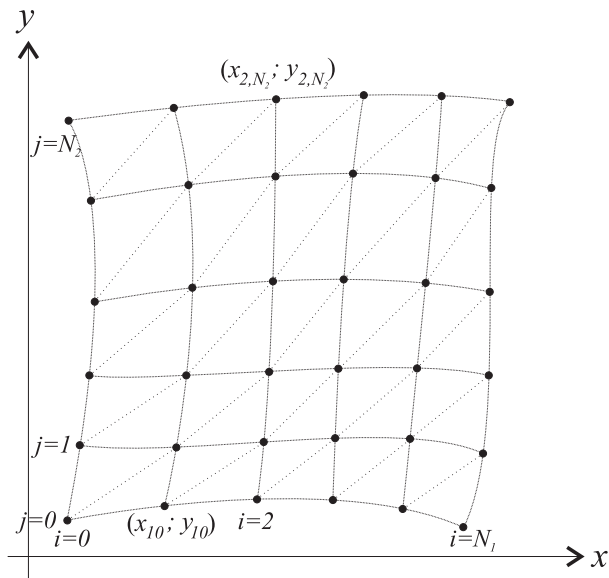


Рис. 1.7: Треугольная сетка в области сложной формы.

В этом случае узлы удобно нумеровать двумя индексами. Сначала выбираем узлы на границе — равное количество на противоположных сторонах криволинейного четырехугольника. Противоположные точки соединяем двумя семействами попарно непересекающихся кривых, включая границы. Точки пересечения этих семейств

образуют узлы:

$$\xi_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}), \quad i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}.$$

Элементы сетки — треугольники.

Аналогично строится сетка в трехмерной области; там элементами будут треугольные пирамиды.

1.7 Общее заключение

Итак, область \bar{G} непрерывного изменения аргумента $x = (x_1, \dots, x_p)$ или $x = (x_1, \dots, x_p, t)$ мы заменяем сеткой $\bar{\omega}_h \subset \bar{G}$ или $\bar{\omega}_{h\tau} \subset \bar{G}$, то есть конечным множеством точек $x_i = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{p,i_p})$, где $i = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ — вектор индексов.

Вместо функций $u(x)$ непрерывного изменения аргумента $x \in \bar{G}$ будем рассматривать сеточные функции $y(x_i) = y_h(x_i)$, то есть функции, определенные в узлах $x_i \in \bar{\omega}_h$. Если задача многомерная, то есть $x = (x_1, \dots, x_p)$, то под h следует понимать вектор $h = (h_1, \dots, h_p)$, если сетка $\bar{\omega}_h$ равномерна по каждому из аргументов x_1, \dots, x_p . Если сетка неравномерная, то

$$h = (h_{1,1}, h_{1,2}, \dots, h_{1,N_1}; h_{2,1}, h_{2,2}, \dots, h_{2,N_2}; \dots; h_{p,1}, h_{p,2}, \dots, h_{p,N_p}).$$

Пусть функция $u(x)$ непрерывного аргумента $x \in \bar{G}$ является элементом некоторого функционального пространства H . Множество сеточных функций $y(x) = y_h(x)$, определенных на сетке ω_h , образуют пространство H_h .

Таким образом, используя метод сеток, мы заменили пространство H пространством H_h сеточных функций $y(x)$.

Рассматривая множество сеток $\{\omega_h\}$, получаем множество $\{H_h\}$, пространств сеточных функций, зависящих от векторного параметра h .

В сеточном пространстве H_h вводится норма, являющаяся сеточным аналогом нормы в пространстве H .

Приведем простейшие типы норм в H_h для случая сетки $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih \mid i = \overline{0, N}; h = 1/N\}$ на отрезке $[0, 1]$:

1) Сеточный аналог нормы в C :

$$\|u\|_C = \max_{x \in \bar{G}} |u(x)| \sim \|y\|_{\bar{\omega}_h} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)| = \max_{0 \leq i \leq N} |y(x_i)|.$$

2) Сеточный аналог нормы в гильбертовом пространстве L_2 :

$$\|u\|_{L_2} = \left(\int_0^1 u^2(x) dx \right)^{1/2} = (u, u)^{1/2} \sim \|y\|_{\bar{\omega}_h} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h \right)^{1/2} = (y, y)^{1/2},$$

или

$$\|y\|_{\bar{\omega}_h} = \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 h \right)^{1/2} = (y, y)^{1/2}; \quad \|y\|_{\bar{\omega}_h} = \left(\sum_{i=0}^{N-1} y_i^2 h \right)^{1/2} = [y, y]^{1/2}.$$

Аналогично в многомерном случае.

Пусть $u(x) \in H$ — точное решение исходной непрерывной дифференциальной задачи, а $y = y_h \in H_h$ — решение приближенной (разностной) задачи. Основной практический интерес представляет оценка близости y_h к u . Однако y_h и u являются элементами разных пространств. Поэтому мы должны отобразить функцию $u(x)$ на пространство H_h , то есть функции непрерывного аргумента $u(x) \in H$ ставится в соответствие сеточная функция $u_h(x) = u(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, или $u_h(x_i) = u(x_i)$, $x_i \in \bar{\omega}_h$.

Теперь, имея сеточную функцию $u_h(x) \in H_h$, образуем разность $y_h - u_h$, являющуюся элементом H_h . Близость y_h к u характеризуется сеточной нормой $\|y_h - u_h\|$ в пространстве H_h .

§2. Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов в частных производных.

Пусть дан линейный дифференциальный оператор L , действующий на функцию $u = u(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_p)$ или $x = (x_1, \dots, x_p, t)$. Пусть $\bar{\omega}_h$ — сетка в области определения дифференциальной задачи с узлами $x_i = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{p,i_p})$. Заменяя в каждой точке $x_i \in \bar{\omega}_h$ входящие в Lu производные разностными отношениями, мы получим некоторое выражение $L_h u$, называемое *разностным оператором*, являющееся линейной комбинацией значений функции $u(x)$ на некотором множестве узлов $\Pi(x_i) \subset \bar{\omega}_h$:

$$Lu(x_i) \sim L_h u(x_i) = \sum_{x_j \in \Pi(x_i)} A(x_i, x_j) u(x_j), \quad \forall x_i \in \bar{\omega}_h,$$

или, в безындексной форме,

$$Lu(x) \sim L_h u(x) = \sum_{\xi \in \Pi(x)} A(x, \xi) u(\xi), \quad \forall x \in \bar{\omega}_h.$$

Такая приближенная замена Lu на $L_h u$ называется *аппроксимацией дифференциального оператора L разностным оператором L_h* или *разностной аппроксимацией оператора L* .

Множество сеточных узлов $\Pi(x_i)$, используемых для построения разностного оператора L_h в узле x_i , называется *шаблоном* разностного оператора L_h (разностной схемы) в узле x_i . Шаблон $\Pi(x_i)$ состоит из центрального узла x_i и периферийных узлов. Совокупность периферийных узлов шаблона $\Pi(x_i)$ называют *окрестностью узла x_i* и обозначают $\Pi'(x_i)$. ($\Pi'(x_i) = \Pi(x_i) \setminus \{x_i\}$).

Размером шаблона называют величину $\max \rho(x_i, x_j)$, $x_j \in \Pi'(x_i)$, где $\rho(x_i, x_j)$ — расстояние между узлами x_i и x_j .

Погрешностью аппроксимации дифференциального оператора Lu разностным оператором $L_h u$ в точке $x \in \bar{\omega}_h$ называется разность $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$.

Понятие погрешности аппроксимации имеет смысл рассматривать в более общем виде.

Пусть $x \in \bar{\omega}_h$ — узел сетки, $L_h u(x)$ — разностный оператор в этом узле, \bar{x} — некоторая точка пространства, находящаяся внутри окрестности узла x , т. е. $\rho(\bar{x}, x) \leq \max_{\xi \in \Pi'(x)} \rho(\xi, x)$, не обязательно являющаяся узлом сетки.

Величина $\psi(\bar{x}) = L_h u(x) - Lu(\bar{x})$ называется *погрешностью аппроксимации дифференциального оператора $Lu(x)$ разностным оператором $L_h u(x)$ в точке \bar{x}* .

Примеры:

1) $Lu = u''(x)$, $x \in R$, $\Pi(x_i) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$.

$$L_h u(x_i) = u_{\bar{x}\bar{x},i} = \frac{1}{\bar{h}_i} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right),$$

где $\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$.

Погрешность аппроксимации в точке $x_i \in \omega_h$:

$$\psi(x_i) = L_h(x_i) - u''(x_i) = O(\bar{h}_i).$$

Погрешность аппроксимации в точке $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}{3}$:

$$\psi(\bar{x}_i) = L_h(x_i) - u''(\bar{x}_i) = O(\bar{h}_i^2).$$

$$2) Lu = u'(x), \quad \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}).$$

$$L_h u(x) = u_x,$$

$$\psi(\bar{x}_i) = L_h(x_i) - u'(\bar{x}_i) = O(h_{i+1}^2).$$

Будем говорить, что *разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L в точке x* , если $\psi(x) \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$ для любой достаточно гладкой функции

$u(x)$, где $|h| = \max_{1 \leq i \leq p} h_i$ или $|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_p^2}$.

Будем говорить, что *разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L в точке x с порядком $m > 0$* (имеет порядок аппроксимации $m > 0$ в точке x), если $\psi(x) = O(|h|^m)$ для любой достаточно гладкой функции $u(x)$. Если $x \in \bar{\omega}_h$, то $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$, иначе $\psi(x) = L_h u(x_i) - Lu(x)$, где x_i — точка сетки, которая выбирается так, чтобы x принадлежал окрестности x_i и погрешность аппроксимации имела наименьший порядок.

Если задача многомерная, то

$$\begin{aligned} \psi(x) &= O(h_1^{m_1}) + O(h_2^{m_2}) + \dots + O(h_p^{m_p}) = \\ &= O(h_1^{m_1} + h_2^{m_2} + \dots + h_p^{m_p}) = O(|h|^m), \end{aligned}$$

где $m = \min_{1 \leq i \leq p} m_i > 0$ — порядок аппроксимации разностного оператора в точке x .

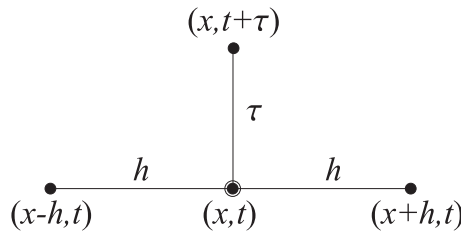
Если дифференциальная задача нестационарна, то есть $x = (x_1, x_2, \dots, x_p, t)$, то обычно различают порядки аппроксимации по пространственным переменным и по времени.

Принято говорить, что *разностный оператор $L_{h\tau}$ аппроксимирует дифференциальный оператор L в точке x с порядком $m > 0$ по пространству и с порядком $n > 0$ по времени*, если $\psi(x) = O(|h|^m + |\tau|^n)$, где $|\tau|$ — максимальный шаг сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$ по времени.

Пример 1.

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t).$$

Пусть (x, t) — фиксированная точка плоскости, $h > 0$ и $\tau > 0$ — шаги равномерной сетки по x и t . Чтобы написать разностный оператор $L_{h\tau}$, аппроксимирующий дифференциальный оператор L , мы должны прежде всего определить шаблон $\Pi(x, t)$. Пусть шаблон состоит из четырех точек:



На выбранном шаблоне определим $L_{h\tau}$ так:

$$L_{h\tau}^{(0)} u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)}{h^2}.$$

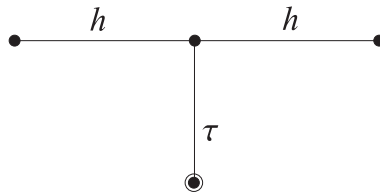
Введем рациональную символику:

$$u = u(x, t), \quad \hat{u} = u(x, t + \tau), \quad \check{u} = u(x, t - \tau), \quad u_{\bar{t}} = \frac{u - \check{u}}{\tau}, \quad u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}.$$

Тогда

$$L_{h\tau}^{(0)} u = u_t - u_{\bar{x}x}.$$

Теперь возьмем другой шаблон:



Получим

$$L_{h\tau}^{(1)}u = u_t - \hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x - h, t + \tau) - 2u(x, t + \tau) + u(x + h, t + \tau)}{h^2}.$$

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$L_{h\tau}^{(\sigma)}u = u_t - [(1 - \sigma)u_{\bar{x}x} + \sigma\hat{u}_{\bar{x}x}]$$

— *однопараметрическое семейство разностных операторов.*

Для оценки порядка аппроксимации воспользуемся разложениями:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial u(x, t + \frac{1}{2}\tau)}{\partial t} + O(\tau^2), \\ u_{\bar{x}x} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{12}h^2 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + O(h^4) = \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{1}{2}\tau)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{1}{2}\tau)}{\partial x^2 \partial t} + \\ &+ O(h^2 + \tau^2), \\ \hat{u}_{\bar{x}x} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2) = \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{1}{2}\tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{1}{2}\tau)}{\partial x^2 \partial t} + \\ &+ O(\tau^2 + h^2), \text{ заметив, что } \tau h = O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_{h\tau}^{(0)}u &= Lu(x, t) + \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2 + h^2) = Lu(x, t + \frac{1}{2}\tau) + \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{1}{2}\tau)}{\partial x^2 \partial t} + \\ &+ O(\tau^2 + h^2), \\ L_{h\tau}^{(1)}u &= Lu(x, t) + \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2) = Lu(x, t + \frac{1}{2}\tau) - \\ &- \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{1}{2}\tau)}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} L_{h\tau}^{(\sigma)}u &= Lu(x, t) + \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \sigma\tau \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= Lu(x, t + \frac{1}{2}\tau) + \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{1}{2}\tau)}{\partial x^2 \partial t} (1 - 2\sigma) + O(\tau^2 + h^2) \Rightarrow \\ L_{h\tau}^{(0,5)} &= Lu(x, t + \frac{1}{2}\tau) + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

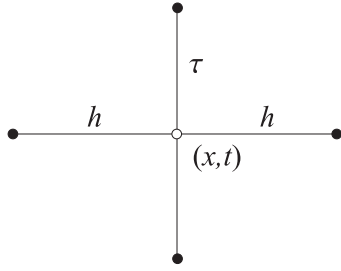
Таким образом, оператор $L_{h\tau}^{(\sigma)}u$ аппроксимирует L со вторым порядком по h для любого σ , но с первым порядком по τ при $\sigma \neq \frac{1}{2}$ и со вторым порядком по τ при $\sigma = \frac{1}{2}$ в точке $(x, t + \frac{1}{2}\tau)$.

Пример 2.

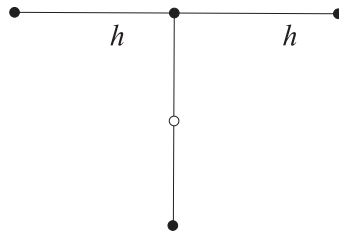
$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

В этом случае для записи разностного оператора $L_{h\tau}$ надо использовать значения сеточной функции в три момента времени, $t - \tau$, t , $t + \tau$. Минимальным является пятиточечный шаблон.

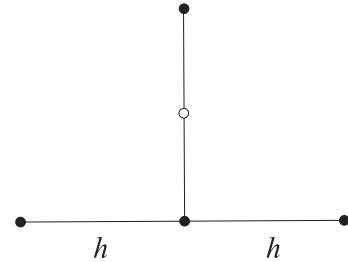
Пусть $L_{h\tau}^{(0,0)}u = u_{\bar{t}t} - u_{\bar{x}x}$, где $u_{\bar{t}t} = \frac{1}{\tau^2} \left[u(x, t - \tau) - 2u(x, t) + u(x, t + \tau) \right]$. (рисунки а), "крест").



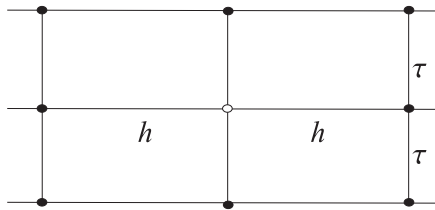
а)



б)



в)



г)

Аналогично построим

$$L_{h\tau}^{(1,0)}u = u_{\bar{t}t} - \hat{u}_{\bar{x}x}, \quad (\text{б}),$$

$$L_{h\tau}^{(0,1)}u = u_{\bar{t}t} - \check{u}_{\bar{x}x}, \quad (\text{в}).$$

На девятиточечном шаблоне (рисунки г), "ящик") рассмотрим двухпараметрическое семейство разностных операторов:

$$L_{h\tau}^{(\sigma_1, \sigma_2)}u = u_{\bar{t}t} - [\sigma_1 \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)u_{\bar{x}x} + \sigma_2 \check{u}_{\bar{x}x}].$$

Упражнение. Показать, что при любых $\sigma_1 = \sigma_2$ этот оператор будет иметь порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$, но при $\sigma_1 \neq \sigma_2$ порядок аппроксимации будет $O(\tau + h^2)$.

§3. Постановка разностных задач математической физики: погрешность аппроксимации разностных схем

Задача МФ, помимо дифференциальных уравнений, включает и краевые условия — граничные и начальные, которые обеспечивают выделение единственного решения из множества решений данного ДУ. Поэтому при формулировке разностной задачи необходимо описывать в разностном виде как само ДУ, так и краевые условия.

Разностной задачей или *разностной схемой* называют совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальное уравнение и краевые условия в узлах сетки.

Пример:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t); \quad 0 < x < 1; \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t), \quad 0 < t \leq T. \end{array} \right.$$

Введем равномерную сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_\tau \times \bar{\omega}_h$ с числом разбиений N_1 и N_2 и шагами h и τ . Выбрав простейший четырехточечный шаблон, получим РС:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = y_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h; \\ y_x(0, t) = \mu_0(t), \quad y(1, t) = \mu_1(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{0\}, \end{array} \right.$$

или, в индексной форме,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j; \quad i = \overline{1, N_1 - 1}; \quad j = \overline{0, N_2 - 1}; \\ y_i^0 = u_0(x_i); \quad i = \overline{0, N_1}; \\ \frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} = \mu_0(t_{j+1}); \quad y_{N_1}^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}); \quad j = \overline{0, N_2 - 1}. \end{array} \right.$$

Правую часть разностной схемы можно записать различными способами, например:

$$\varphi_i^j = f(x_i, t_j), \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_{j+1/2}), \quad \text{где } t_{j+1/2} = t_j + \tau/2, \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_{j+1}) \text{ и др.}$$

Построенная разностная схема является примером так называемой *явной схемы*: значение решения на верхнем слое $\hat{y} = y(x_i, t_{j+1})$ определяется через значения на предыдущем слое по явным формулам $\hat{y} = y + \tau(y_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi)$, $x \in \omega_h$, $\hat{y}_0 = -\hat{\mu}_0 h + \hat{y}_1$, $\hat{y}_{N_1} = \hat{\mu}_1$.

Рассмотрим неявную схему:

$$\begin{cases} y_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + \varphi, \\ y(x, 0) = u_0(x); \quad x \in \bar{\omega}_h; \\ y_x(0, t) = \mu_0(t); \quad y(1, t) = \mu_1(t); \quad t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Для определения значений $\hat{y} = y(x_i, t_{j+1})$ имеем СЛАУ

$$\frac{1}{\tau} \hat{y} - \hat{y}_{\bar{x}x} = F, \quad F = \frac{1}{\tau} y + \varphi, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad \hat{y}_0 = -\hat{\mu}_0 h + \hat{y}_1, \quad \hat{y}_{N_1} = \hat{\mu}_1.$$

с трехдиагональной матрицей, которую можно решать прогонкой.

Чтобы решить разностную задачу полностью, необходимо решить столько СЛАУ, сколько сетка имеет разбиений по времени, т. е. N_2 СЛАУ.

При построении разностной схемы важно знать, насколько хорошо она аппроксимирует исходную дифференциальную задачу.

Сформулируем исходную задачу в общем виде. Пусть $\bar{G} = G \cup \Gamma$ — заданная область точек x пространства (или пространства и времени). Требуется найти решение $u = u(x)$ дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений)

$$Lu = -f(x), \quad x \in G, \quad (1)$$

удовлетворяющее на границе Γ краевым условиям (граничным и начальным)

$$lu = -\mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

где L и l — заданные дифференциальные операторы, $f(x)$ и $\mu(x)$ — заданные функции (вектор-функции).

В стационарном случае $x = (x_1, \dots, x_p)$ — точка p -мерного пространства, условия (2) — граничные. В нестационарном случае $x = (x_1, \dots, x_p, t)$, условия (2) при $t = 0$ — начальные, при $t > 0$ — граничные.

Введем в области \bar{G} сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, где $\omega_h \subset G$ — множество внутренних узлов, $\gamma_h \subset \Gamma$ — множество граничных узлов. Плотность распределения узлов характеризуется векторным параметром h , компонентами которого являются шаги сетки $\bar{\omega}_h$.

Заменим на сетке $\bar{\omega}_h$ функции непрерывного аргумента $f(x)$ и $\mu(x)$ сеточными функциями $\varphi_h(x)$ и $\chi_h(x)$, определенными соответственно в узлах $x \in \omega_h$ и $x \in \gamma_h$, а дифференциальные операторы L и l — некоторыми разностными операторами L_h и l_h , действующими на сеточные функции, заданные на $\bar{\omega}_h$.

Получим разностную схему:

$$L_h y_h = -\varphi_h(x), \quad x \in \omega_h, \quad (3)$$

$$l_h y_h = -\chi_h(x), \quad x \in \gamma_h, \quad (4)$$

где сеточная функция $y_h = y_h(x)$, определяемая в узлах сетки $\bar{\omega}_h$, есть решение задачи (3),(4).

При замене дифференциальной задачи (1),(2) разностной задачей (3),(4) мы допускаем ошибку — *погрешность аппроксимации*. Она характеризуется величиной невязок

$$\begin{aligned}\psi_h(x) &= L_h u(x) + \varphi_h(x), \quad x \in \omega_h, \\ \nu_h(x) &= l_h u(x) + \chi_h(x), \quad x \in \gamma_h,\end{aligned}$$

которые вычисляются путем подстановки точного решения исходной задачи $u(x)$ в узлах сетки $\bar{\omega}_h$ в разностную схему.

Сеточные функции $\psi_h(x)$ и $\nu_h(x)$ называют соответственно *погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения (1) разностными уравнениями (3)* и *погрешностью аппроксимации краевых (граничных и начальных) условий (2) разностными условиями (4)*.

Обычно говорят коротко: ψ_h — погрешность аппроксимации разностного уравнения (3), ν_h — погрешность аппроксимации разностного условия (4).

Для обеспечения близости решений разностной и дифференциальной задач *необходимо*, чтобы при стремлении шагов сетки к нулю разностная задача в пределе совпадала с дифференциальной. Если это требование выполняется, то говорят, что *разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу*.

В дальнейшем будем говорить, что:

1) разностная схема (3),(4) *аппроксимирует дифференциальную задачу (1),(2) с порядком $m > 0$ (обладает порядком аппроксимации m)*, если

$$\|\psi_h\|_{\omega_h} + \|\nu_h\|_{\gamma_h} = O(|h|^m), \quad m > 0,$$

где $|h|$ — норма вектора шагов h , т. е. максимальный шаг сетки $\bar{\omega}_h$.

2) разностное уравнение (3) *обладает порядком аппроксимации m* , если $\|\psi_h\|_{\omega_h} = O(|h|^m)$, $m > 0$,

3) разностное условие (4) *обладает порядком аппроксимации m* , если $\|\nu_h\|_{\gamma_h} = O(|h|^m)$, $m > 0$.

Здесь $\|\cdot\|_{\omega_h}$ — норма в пространстве сеточных функций, определенных на сетке ω_h , например, $\|\psi_h\|_{\omega_h} = \max_{x \in \omega_h} |\psi_h(x)|$, $\|\nu_h\|_{\gamma_h} = \max_{x \in \gamma_h} |\nu_h(x)|$ в сеточной норме C .

Если исходная задача нестационарна, то обычно различают порядки аппроксимации по времени и пространственным переменным.

Принято говорить, что *схема (3),(4) аппроксимирует задачу (1),(2) с порядком $m > 0$ по пространству и порядком $n > 0$ по времени t* , если

$$\|\psi_h\|_{\omega_h} + \|\nu_h\|_{\gamma_h} = O(|\tau|^n + |h|^m),$$

где $|\tau|$ — максимальный шаг сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$ по направлению t , $|h|$ — максимальный шаг сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$ по остальным, т. е. пространственным переменным. Нормы $|h|$ и $|\tau|$, вообще говоря, могут быть и другими, например, евклидовыми.

§4. Аппроксимация краевых условий. Повышение порядка аппроксимации РС

Точность разностной схемы зависит не только от порядка аппроксимации дифференциального уравнения, но и граничных и начальных условий. Чтобы не ухудшать аппроксимационные свойства разностной схемы, порядок аппроксимации краевых условий должен быть не ниже, чем у дифференциального уравнения.

Рассмотрим несколько примеров повышения порядка аппроксимации граничных и начальных условий без расширения шаблона.

Пример 1: (задача с граничным условием третьего рода для уравнения теплопроводности)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \mu_0(t), \quad 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} + \sigma u(1, t) = \mu_1(t), \quad 0 < t \leq T, \quad \sigma = \text{const} \geq 0. \end{array} \right.$$

а) Явная схема на $\bar{\omega}_{h\tau}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = y_{\bar{x}\bar{x}} + f(x, t), \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) = \mu_0(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{0\}, \\ y_{\bar{x}}(1, t) + \sigma y(1, t) = \mu_1(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{0\}. \end{array} \right.$$

Разностное уравнение имеет погрешность аппроксимации $\psi = O(\tau + h^2)$, начальное условие — $\bar{\nu} = u(x, 0) - u_0(x) = 0$, граничное условие на левом конце — $\nu_0 = u(0, t) - \mu_0(t) = 0$, граничное условие на правом конце —

$$\begin{aligned} \nu_1 &= u_{\bar{x}, N_1} + \sigma u_{N_1} - \mu_1 = \\ &= \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} - \frac{1}{2}h \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} + O(h^2) + \sigma u(1, t) - \mu_1(t) = \\ &= -\frac{1}{2}h \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} + O(h^2) = O(h). \end{aligned}$$

За счет того, что $\nu_1 = O(h)$, разностная схема имеет погрешность аппроксимации $\|\psi\| + \|\bar{\nu}\| + \|\nu_0\| + \|\nu_1\| = O(\tau + h)$.

Повысим порядок аппроксимации граничного условия на правом конце, не рас-

ширяя шаблона. Для этого рассмотрим:

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}, N_1} &= \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} - \frac{1}{2}h \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} + O(h^2) = \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} - \frac{1}{2}h \left(\frac{\partial u(1, t)}{\partial t} - f(1, t) \right) + O(h^2) = \\ &= \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} - \frac{1}{2}h u_{\bar{t}, N_1} + \frac{1}{2}h f(1, t) + O(\tau h + h^2), \text{ но } O(\tau h + h^2) = O(\tau^2 + h^2), \text{ откуда:} \\ u_{\bar{x}, N_1} + \frac{1}{2}h u_{\bar{t}, N_1} - \frac{1}{2}h f_{N_1} &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

На этом основании построим граничное условие в виде

$$y_{\bar{x}, N_1} + \frac{1}{2}h y_{\bar{t}, N_1} - \frac{1}{2}h f_{N_1} + \sigma y_{N_1} = \mu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{0\}.$$

Погрешность аппроксимации этого условия $\nu_1 = O(\tau^2 + h^2)$. Поэтому его использование обеспечивает порядок аппроксимации разностной схемы $O(\tau + h^2)$.

Запишем явную схему с этим условием в индексной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + f_i^j, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{0, N_2 - 1}, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N_1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad j = \overline{0, N_2 - 1}, \\ \frac{y_{N_1}^{j+1} - y_{N_1-1}^{j+1}}{h} + \frac{1}{2}h \frac{y_{N_1}^{j+1} - y_{N_1}^j}{\tau} - \frac{1}{2}h f_{N_1}^{j+1} + \sigma y_{N_1}^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad j = \overline{0, N_2 - 1}. \end{array} \right.$$

На слое t_{j+1} решение определяется по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i^{j+1} = \frac{\tau}{h^2} \left(y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j \right) + \tau f_i^j + y_i^j, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad j = \overline{0, N_2 - 1}, \\ y_{N_1}^{j+1} = \left(\frac{1}{h} y_{N_1-1}^{j+1} + \frac{h}{2\tau} y_{N_1}^j + \frac{1}{2}h f_{N_1}^{j+1} + \mu_1^{j+1} \right) / \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{2\tau} + \sigma \right), \quad j = \overline{0, N_2 - 1}. \end{array} \right.$$

б) Неявная схема на $\bar{\omega}_{h\tau}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + f, \\ y(x, 0) = u_0(x), \\ \hat{y}_0 = \hat{\mu}_0, \\ \hat{y}_{\bar{x}, N_1} + \frac{1}{2}h y_{t, N_1} + \sigma \hat{y}_{N_1} = \hat{\mu}_1 + \frac{1}{2}h \hat{f}_{N_1}. \end{array} \right.$$

Погрешность аппроксимации этой схемы:

$$\|\psi\| + \|\bar{\nu}\| + \|\nu_0\| + \|\nu_1\| = O(\tau + h^2) + 0 + 0 + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau + h^2).$$

В индексной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_i^j, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{0, N_2 - 1}, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N_1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad j = \overline{0, N_2 - 1}, \\ \frac{y_{N_1}^{j+1} - y_{N_1-1}^{j+1}}{h} + \frac{1}{2}h \frac{y_{N_1}^{j+1} - y_{N_1}^j}{\tau} + \sigma y_{N_1}^{j+1} = \mu_1^{j+1} + \frac{1}{2}h f_{N_1}^{j+1}, \quad j = \overline{0, N_2 - 1}. \end{array} \right.$$

На каждом слое t_{j+1} мы имеем СЛАУ с трехдиагональной матрицей для нахождения y^{j+1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad y_{N_1}^{j+1} = \varkappa_2 y_{N_1-1}^{j+1} + \xi_2, \end{array} \right.$$

где

$$A_i = \frac{1}{h^2}, \quad B_i = \frac{1}{h^2}, \quad C_i = \frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau} > A_i + B_i, \quad F_i = f_i^j + \frac{1}{\tau} y_i^j, \\ \xi_2 = \left(\frac{h}{2\tau} y_{N_1}^j + \frac{h}{2} f_{N_1}^{j+1} + \mu_1^{j+1} \right) / \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{2\tau} + \sigma \right), \quad \varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = \frac{1/h}{\frac{1}{h} + \frac{h}{2\tau} + \sigma} < 1.$$

Система решается методом прогонки, который для нее абсолютно устойчив. Чтобы решить разностную задачу полностью, необходимо применить прогонку N_2 раз, т. е. решить с ее помощью N_2 СЛАУ относительно y^1, y^2, \dots, y^{N_2} .

Пример 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x), \quad 0 < x < 1. \end{array} \right.$$

Запишем разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{\bar{t}t} = y_{\bar{x}x} + f, \\ y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \\ y^0 = u_0, \quad y_t^0 = \bar{u}_0, \quad x \in \omega_h. \end{array} \right.$$

Разностное уравнение $y_{\bar{t}t} = y_{\bar{x}x} + f$ имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$, граничные условия $y_0 = \mu_0$, $y_N = \mu_1$ и начальное условие $y^0 = u_0$ аппроксимируют

точно. Второе начальное условие $y_t^0 = \bar{u}_0$ имеет погрешность аппроксимации

$$\tilde{v} = u_t^0 - \bar{u}_0 = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - \bar{u}_0(x) + \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = O(\tau).$$

Чтобы обеспечить разностной схеме второй порядок аппроксимации по времени, поднимем порядок аппроксимации второго начального условия, не расширяя шаблона.

$$\begin{aligned} u_t^0 &= \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau \left(\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + f(x, 0) \right) + O(\tau^2) = \\ &= \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau \left(\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x^2} + f(x, 0) \right) + O(\tau^2). \end{aligned}$$

На этом основании строим разностное условие

$$y_t^0 - \frac{1}{2}\tau \left[\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x^2} + f(x, 0) \right] = \bar{u}_0,$$

имеющее, в отличие от условия $y_t^0 = \bar{u}_0$, погрешность аппроксимации $\tilde{v} = O(\tau^2)$. Используя его, получаем для исходной дифференциальной задачи разностную схему порядка аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$, которую запишем в индексной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j-1} - 2y_i^j + y_i^{j+1}}{\tau^2} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + f_i^j, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \\ y_0^j = \mu_0^j, \quad y_{N_1}^j = \mu_1^j, \quad j = \overline{0, N_2}, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \\ \frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = \bar{u}_0(x_i) + \frac{1}{2}\tau \left[u_0''(x_i) + f_i^0 \right], \quad i = \overline{1, N_1 - 1}. \end{array} \right.$$

Решение разностной задачи осуществляется по явным формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \\ y_0^j = \mu_0(t_j), \quad y_{N_1}^j = \mu_1(t_j), \quad j = \overline{0, N_2}, \\ y_i^1 = y_i^0 + \tau [\bar{u}_0(x_i) + \frac{1}{2}\tau (u_0''(x_i) + f_i^0)], \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \\ y_i^{j+1} = 2y_i^j - y_i^{j-1} + \frac{\tau^2}{h^2} (y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j) + \tau^2 f_i^j, \\ \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}. \end{array} \right.$$

§5. Устойчивость и сходимость разностных схем

Применительно к задачам математической физики принято говорить, что задача поставлена *корректно*, если выполнены два условия:

- 1) решение задачи существует и единственно при любых входных данных из некоторого допустимого класса,
- 2) решение задачи $u(x)$ непрерывно зависит от входных данных $f(x), \mu(x)$ (см. задачу (1)).

Пусть дана непрерывная дифференциальная задача математической физики:

$$\begin{cases} Lu = -f(x), & x \in G, \\ lu = -\mu(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть на некоторой сетке $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ она аппроксимируется разностной схемой

$$\begin{cases} L_h y_h = -\varphi_h, & x \in \omega_h, \\ l_h y_h = -\chi_h, & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (2)$$

Будем говорить, что разностная задача (2) *корректна*, если при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$

- 1) решение y_h разностной задачи *существует и единственно* для всех входных данных φ_h и χ_h из некоторого допустимого семейства,

- 2) решение y_h *непрерывно зависит* от φ_h и χ_h , причем эта зависимость равномерна по h , т. е. малое возмущение входных данных приводит к малому изменению решения.

Говоря более строго, второе условие означает, что существует такая постоянная $M > 0$, не зависящая от h , что при достаточно малом $|h| \leq h_0$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{y}_h - y_h\|_{\bar{\omega}_h} \leq M(\|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{\omega_h} + \|\tilde{\chi}_h - \chi_h\|_{\gamma_h}), \quad (*)$$

где y_h — решение задачи (2), соответствующее входным данным φ_h и χ_h , а \tilde{y}_h — решение задачи (2), соответствующее входным данным $\tilde{\varphi}_h$ и $\tilde{\chi}_h$, т. е.

$$\begin{cases} L_h \tilde{y}_h = -\tilde{\varphi}_h, & x \in \omega_h, \\ l_h \tilde{y}_h = -\tilde{\chi}_h, & x \in \gamma_h. \end{cases}$$

Свойство непрерывной зависимости разностного решения от входных данных называется *устойчивостью разностной схемы*.

В случае линейных разностных операторов L_h и l_h условие устойчивости имеет вид:

$$\|y_h\|_{\bar{\omega}_h} \leq M(\|\varphi_h\|_{\omega_h} + \|\chi_h\|_{\gamma_h}), \quad (3)$$

поскольку возмущения входных данных и решения удовлетворяют задаче (2):

$$\begin{aligned} L_h(\tilde{y}_h - y_h) &= \tilde{\varphi}_h - \varphi_h, \quad x \in \omega_h, \\ l_h(\tilde{y}_h - y_h) &= \tilde{\chi}_h - \chi_h, \quad x \in \gamma_h. \end{aligned}$$

Обозначим $z_h = y_h - u_h$ погрешность разностного решения.

Оценка погрешности z_h является одним из основных вопросов вычислительной математики.

Будем говорить, что решение разностной схемы (2) сходится к решению дифференциальной задачи (1) (схема (2) сходится), если

$$\|z_h\|_{\bar{\omega}_h} = \|y_h - u_h\|_{\bar{\omega}_h} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0.$$

Если $\|z_h\|_{\bar{\omega}_h} = O(|h|^m)$, где $m > 0$, то говорят, что разностная схема (2) сходится со скоростью $O(|h|^m)$ (имеет порядок точности m).

В случае линейных разностных операторов

$$\begin{aligned} L_h z_h &= \underbrace{L_h y_h + \varphi_h}_{=0} - (L_h u_h + \varphi_h) = -\psi_h, \\ l_h z_h &= \underbrace{l_h y_h + \chi_h}_{=0} - (l_h u_h + \chi_h) = -\nu_h, \end{aligned}$$

где ψ_h и ν_h — погрешности аппроксимации уравнения и краевых условий.

Таким образом, для погрешности z_h имеем задачу:

$$\begin{cases} L_h z_h = -\psi_h, & x \in \omega_h, \\ l_h z_h = -\nu_h, & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (4)$$

т. е. погрешность z_h является решением разностной задачи (2) со входными данными ψ_h, ν_h .

Если операторы L_h и l_h линейны и разностная схема (2) корректна, то в силу устойчивости будем иметь оценку

$$\|z_h\|_{\bar{\omega}_h} \leq M(\|\psi_h\|_{\omega_h} + \|\chi_h\|_{\gamma_h}). \quad (5)$$

Отсюда видно, что если разностная схема корректна и аппроксимирует исходную задачу, то она сходится, т. е. $\|z_h\|_{\bar{\omega}_h} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$ (обычно говорят: из аппроксимации и устойчивости следует сходимость), причем порядок точности (скорость сходимости) совпадает с порядком аппроксимации, т. е. $\|z_h\|_{\bar{\omega}_h} = O(|h|^m)$, где $m > 0$ — порядок аппроксимации разностной схемы.

Это утверждение известно как *теорема сходимости*. Таким образом, изучение сходимости и порядка разностной схемы сводится к изучению погрешности аппроксимации и устойчивости.

В заключение отметим, что в настоящее время не существует удовлетворительной теории нелинейных разностных схем. Однако даже в линейном случае исследовать устойчивость разностной схемы удастся далеко не всегда. Часто ограничиваются установлением непрерывной зависимости решения от входных данных какого-либо одного типа, например, от правой части разностных уравнений или от начальных условий и т. д.

Говорят, что схема (2) *устойчива по правой части*, если она устойчива при $\chi_h \equiv 0$.

Стационарная схема называется *устойчивой по граничным условиям*, если она устойчива при $\varphi_h \equiv 0$.

Нестационарную схему называют:

а) *устойчивой по начальным данным (условиям)*, если она устойчива при $\varphi_h \equiv 0$ и однородных граничных условиях ($\chi_h = 0$ при $t > 0$).

б) *устойчивой по граничным условиям*, если она устойчива в случае $\varphi_h \equiv 0$ и однородных начальных условиях ($\chi_h = 0$ при $t = 0$).

§6. Принцип максимума

Одним из наиболее простых и универсальных методов исследования устойчивости разностных схем является *принцип максимума*.

Пусть $\bar{\omega}_h$ — сетка в некоторой ограниченной области $\bar{G} = G \cup \Gamma$ p -мерного евклидова пространства (пространства и времени), $x = (x_1, \dots, x_p) \in \bar{\omega}$ — узел сетки, $\Pi(x) \subseteq \bar{\omega}$ — шаблон схемы в точке x , $\Pi'(x) = \Pi(x) \setminus \{x\}$ — окрестность узла x .

Рассмотрим разностную задачу

$$\Lambda y(x) \equiv A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi)y(\xi) = F(x), \quad x \in \bar{\omega}, \quad (1)$$

где $y(x)$ — искомая, $A(x), B(x, \xi), F(x)$ — заданные сеточные функции от $x, \xi \in \bar{\omega}$, Λ — линейный разностный оператор.

Будем предполагать, что коэффициенты A и B удовлетворяют условиям

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad D(x) \equiv A(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi) \geq 0 \quad (2)$$

для любых $x \in \bar{\omega}, \xi \in \Pi'(x)$.

Если окрестность $\Pi'(x)$ есть пустое множество: $\Pi'(x) = \emptyset$, — то такую точку x будем условно называть *граничным узлом*, а остальные узлы, окрестность которых состоит по крайней мере из одной точки, — *внутренними узлами*. Обозначим γ множество граничных узлов, ω — множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}$, так что $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$.

При наличии граничных точек ($\gamma \neq \emptyset$) задача (1) формулируется следующим образом: найти решение разностного уравнения

$$\Lambda y(x) = F(x) \quad \text{при } x \in \omega, \quad (3)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$y(x) = g(x) \quad \text{при } x \in \gamma, \quad (4)$$

где $F(x)$ и $g(x)$ — заданные функции. В этом случае условия (2) должны выполняться на сетке ω .

В случае второй и третьей краевых задач граничные узлы в смысле данного выше определения отсутствуют, т. е. $\gamma = \emptyset, \bar{\omega} = \omega$.

Введем понятие *связной сетки*. Сетка $\bar{\omega}$ называется *связной*, если для любых двух узлов $\bar{x} \in \omega, \bar{\bar{x}} \in \bar{\omega}$ можно указать такую последовательность внутренних узлов $x_1, x_2, \dots, x_m \in \omega$, что

$$x_1 \in \Pi'(\bar{x}), x_2 \in \Pi'(x_1), x_3 \in \Pi'(x_2), \dots, x_m \in \Pi'(x_{m-1}), \bar{\bar{x}} \in \Pi'(x_m). \quad (5)$$

Последовательность точек может быть пустой, если $\bar{\bar{x}} \in \Pi'(\bar{x})$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только связные сеточные области $\bar{\omega}$.

Говорят, что схема (1) *удовлетворяет принципу максимума*, если она удовлетворяет условиям (2). Если схема удовлетворяет условиям (2) при любых h , ее называют *монотонной*.

Теорема 1. (принцип максимума)

Пусть задача (1) определена на связной сетке $\bar{\omega}$ и пусть существует связное подмножество $\omega^o \subseteq \bar{\omega}$, на котором выполняются условия (2), т. е.

$$A(x) > 0, B(x, \xi) > 0, D(x) \geq 0 \quad \forall x \in \omega^o, \forall \xi \in \Pi'(x).$$

Тогда, если сеточная функция $y(x)$, заданная на $\bar{\omega}$, не является постоянной на сетке

$$\bar{\omega}^o = \bigcup_{x \in \omega^o} \Pi(x) \subseteq \bar{\omega},$$

т. е. $y(x) \neq \text{const}$ при $x \in \bar{\omega}^o$, и выполняется неравенство

$$\Lambda y(x) \leq 0 \quad (\Lambda y(x) \geq 0) \quad \forall x \in \omega^o,$$

то $y(x)$ не может принимать положительного максимального (отрицательного минимального) значения на сетке ω^o .

Доказательство.

1) Пусть $\Lambda y(x) \leq 0$ во всех узлах $x \in \omega^o$. Предположим от противного, что найдется узел $\bar{x} \in \omega^o$, в котором

$$y(\bar{x}) = \max_{x \in \bar{\omega}} y(x) > 0.$$

Тогда в этом узле

$$\Lambda y(\bar{x}) \equiv A(\bar{x})y(\bar{x}) - \sum_{\xi \in \Pi'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)y(\xi) = \underbrace{D(\bar{x})y(\bar{x})}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{\xi \in \Pi'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)[y(\bar{x}) - y(\xi)]}_{\geq 0} \leq 0.$$

Так как согласно условиям (2) $D(\bar{x}) \geq 0$, $B(\bar{x}, \xi) > 0$ и на основании допущения $y(\bar{x}) > 0$, $y(\bar{x}) \geq y(\xi) \quad \forall \xi \in \Pi'(\bar{x})$, то и первое, и второе слагаемые в правой части неотрицательны.

В этом утверждении содержатся две возможности: $\Lambda y(\bar{x}) > 0$ и $\Lambda y(\bar{x}) = 0$. Если $\Lambda y(\bar{x}) > 0$, получаем противоречие, т. е. первая возможность верной быть не может. Если $\Pi'(\bar{x}) = \emptyset$, то в этом случае $D(\bar{x}) = A(\bar{x}) > 0$, т. е. $\Lambda y(\bar{x}) > 0$ — противоречие.

Осталось рассмотреть случай $\Lambda y(\bar{x}) = 0$. Очевидно, что это возможно лишь при $D(\bar{x}) = 0$, $y(\bar{x}) = y(\xi) \quad \forall \xi \in \Pi'(\bar{x}) \neq \emptyset$.

Таким образом, тот факт, что максимум на $\bar{\omega}$ достигается в узле $\bar{x} \in \omega^o$, распространился на всю его окрестность $\Pi'(\bar{x})$. В силу связности сетки ω^o можем утверждать, что $y(x) = y(\bar{x}) \forall x \in \bar{\omega}^o$. Получили противоречие.

2) Если $\Lambda y(x) \geq 0$, то достаточно заменить $y(x)$ на $-y(x)$, для которой $\Lambda(-y(x)) \leq 0$ и повторить рассуждение 1).

⊗

Следствие 1. Пусть для задачи (1) удовлетворяются условия (2) на связной сетке $\bar{\omega}$. Тогда, если $\Lambda y(x) \leq 0$ ($\Lambda y(x) \geq 0$) на $\bar{\omega}$ и существует по крайней мере один узел $x_0 \in \bar{\omega}$, в котором

$$D(x_0) > 0, \quad x_0 \in \bar{\omega}, \quad (6)$$

то $y(x) \leq 0$ ($y(x) \geq 0$) на сетке $\bar{\omega}$.

Доказательство.

Пусть $\Lambda y(x) \leq 0$. Если $y(x) \equiv \text{const}$ при $x \in \bar{\omega}$, то

$$\Lambda y(x_0) = D(x_0)y(x_0) + \sum_{\xi \in \Pi'(x_0)} B(x_0, \xi)[y(x_0) - y(\xi)] = \underbrace{D(x_0)y(x_0)}_{>0} \leq 0,$$

откуда $y(x) \leq 0$.

Если $y(x) \not\equiv \text{const}$ при $x \in \bar{\omega}$, то $y(x) \leq 0$ на основании принципа максимума при $\omega^o = \bar{\omega}$, т. к. согласно теореме 1 $y(x)$ не может принимать положительного значения на $\bar{\omega}$.

⊗

Замечание 1. Если сетка $\bar{\omega}$, содержит граничные узлы ($\gamma \neq \emptyset$), то условие (6) выполняется автоматически $\forall x \in \gamma$.

Следствие 2. Пусть оператор Λ на связной сетке $\bar{\omega}$ удовлетворяет условиям (2), (6). Тогда задача (1) имеет единственное решение.

Доказательство.

Для доказательства существования и единственности решения задачи (1) достаточно убедиться, что однородная задача $\Lambda y(x) = 0$ на $\bar{\omega}$ имеет только тривиальное решение. Это вытекает из следствия 1:

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda y(x) \leq 0 \Rightarrow y(x) \leq 0 \\ \Lambda y(x) \geq 0 \Rightarrow y(x) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) \equiv 0 \text{ на } \bar{\omega}.$$

⊗

Теорема 2. (теорема сравнения)

Пусть $y(x)$ — решение задачи (1), (2), (6), а $\bar{y}(x)$ — решение той же задачи с правой частью $\bar{F}(x)$. Тогда из условия $|F(x)| \leq \bar{F}(x)$ на $\bar{\omega}$ следует, что $|y(x)| \leq \bar{y}(x) \forall x \in \bar{\omega}$.

Доказательство.

В силу следствия 1 функция $\bar{y}(x) \geq 0$ на $\bar{\omega}$, т. к. $\Lambda \bar{y}(x) = \bar{F}(x) \geq 0$. Сложим и вычтем уравнения $\Lambda y = F$ и $\Lambda \bar{y} = \bar{F}$:

$$\Lambda(\bar{y} + y) = \bar{F} + F \geq 0, \quad \Lambda(\bar{y} - y) = \bar{F} - F \geq 0, \quad \forall x \in \bar{\omega}.$$

Применяя следствие 1, заключаем, что

$$\bar{y}(x) + y(x) \geq 0, \quad \bar{y}(x) - y(x) \geq 0 \Leftrightarrow |y(x)| \leq \bar{y}(x) \text{ на } \bar{\omega}.$$

⊗

Функция $\bar{y}(x)$ называется *мажорантной функцией* для решения задачи (1).

Следствие 3. Для решения задачи $\Lambda y(x) = 0$ на ω , $y(x) = g(x)$ на $\gamma \neq \emptyset$ при условиях (2) на ω имеет место априорная оценка:

$$\max_{\bar{\omega}} |y(x)| \leq \max_{\gamma} |g(x)|. \quad (7)$$

Доказательство.

Пусть $\bar{y}(x)$ — решение задачи $\Lambda \bar{y} = 0$ на ω , $\bar{y} = |g(x)| = \bar{g}$ на γ . На основании теоремы сравнения 2 имеем $|y(x)| \leq \bar{y}(x) \forall x \in \bar{\omega}$.

Если $\bar{y}(x) \equiv \text{const}$ на $\bar{\omega}$, то (7) выполнено.

Если же $\bar{y}(x) \not\equiv \text{const}$ на $\bar{\omega}$, то из принципа максимума при $\omega^o = \omega$ следует, что максимум функции $\bar{y}(x) \geq 0$ достигается на границе γ , т. е. $|y(x)| \leq \bar{y}(x) \leq \max_{\gamma} |y(x)| = \max_{\gamma} |g(x)| \forall x \in \bar{\omega}$.

(Из следующих соображений: т. к. $\Lambda \bar{y} = 0$ на ω , то \bar{y} не может принимать на $\omega = \omega^o$ ни положительного максимального значения, ни отрицательного минимального значения. Но, поскольку $\bar{y}(x) \geq 0$ на ω , то она не может принимать на ω максимального значения.)

⊗

Замечание 2. Оценка (7) означает устойчивость схемы (3),(4) по начальным и граничным условиям первого рода.

Теорема 3.

Если $D(x) > 0$ на $\bar{\omega}$, то для решения $y(x)$ задачи (1), (2) верна априорная оценка

$$\max_{\bar{\omega}} |y(x)| \leq \max_{\bar{\omega}} \frac{|F(x)|}{D(x)}. \quad (8)$$

Доказательство.

Введем мажорантную функцию.

Пусть $\bar{y}(x)$ — решение задачи $\Lambda \bar{y} = |F(x)|$ на $\bar{\omega}$. Тогда по теореме 2 имеем $|y(x)| \leq \bar{y}(x)$. Пусть $\bar{x} \in \bar{\omega}$ — узел, в котором функция $\bar{y}(x) \geq 0$ достигает наибольшего значения, т. е. $\bar{y}(\bar{x}) = \max_{\bar{\omega}} \bar{y}(x) \geq 0$. В этом узле запишем уравнение (1) в виде

$$D(\bar{x})\bar{y}(\bar{x}) + \sum_{\xi \in \Pi'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi) [\bar{y}(\bar{x}) - \bar{y}(\xi)] = |F(\bar{x})|.$$

Так как $\bar{y}(\bar{x}) \geq \bar{y}(\xi)$, то $D(\bar{x})\bar{y}(\bar{x}) \leq |F(\bar{x})|$, откуда

$$\bar{y}(\bar{x}) \leq \frac{|F(\bar{x})|}{D(\bar{x})} \leq \max_{\bar{\omega}} \frac{|F(x)|}{D(x)}.$$

⊗

Следствие 4. Если $D(x) \geq D_0 > 0$ на $\bar{\omega}$, то для решения задачи (1), (2) верна оценка

$$\|y\|_{\bar{\omega}} \leq \frac{1}{D_0} \|F\|_{\bar{\omega}}. \quad (9)$$

Замечание 3. Если D_0 — константа, не зависящая от шага h , то оценка (9) означает, что схема (1) устойчива как по правой части, а также по начальным и граничным условиям первого рода.

Теорема 4.

Пусть $\bar{\omega} = \omega^o \cup \omega^*$, где ω^o — связная сетка, $\omega \neq \emptyset$, $\omega^* \neq \emptyset$, $\omega^o \cap \omega^* = \emptyset$, и пусть на сетке $\bar{\omega}$ выполняются условия (2).

Тогда, если $F(x) \equiv 0$ на ω^o , а на ω^* имеем $F(x) \not\equiv 0$, $D(x) > 0$, то для решения $y(x)$ задачи (1) справедлива оценка

$$\max_{\bar{\omega}} |y(x)| \leq \max_{\omega^*} \frac{|F(x)|}{D(x)}. \quad (10)$$

Доказательство.

Введем мажорантную функцию $\bar{y}(x)$, которая является решением задачи (1) с правой частью $\bar{F}(x) = |F(x)| \geq 0$, т. е. $\Lambda \bar{y} = 0$ на ω^o , $\Lambda \bar{y} = \bar{F}(x)$ на ω^* .

Т. к. $D(x) > 0$ на $\omega^* \neq \emptyset$, то на основании следствия 2 функции $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ существуют и единственны. В силу теоремы сравнения (теоремы 2) $|y(x)| \leq \bar{y}(x)$ на $\bar{\omega}$.

Оценим $\bar{y}(x)$. Если $\bar{y}(x) \neq \text{const}$ на $\bar{\omega}^o = \bigcup_{x \in \omega^o} \Pi(x)$, то в силу принципа максимума, т. к. $\Lambda \bar{y} \equiv 0$ на ω^o , функция $\bar{y}(x) \geq 0$ не может принимать наибольшего значения на ω^o , т. е.

$$\max_{\omega^o} \bar{y}(x) \leq \max_{\omega^*} \bar{y}(x). \quad (11)$$

Т. к. $\omega^o \neq \emptyset$, $\omega^* \neq \emptyset$, ω^o и $\bar{\omega}$ — связные сетки, то $\bar{\omega}^o \cap \omega^* \neq \emptyset$, и, следовательно, это неравенство выполняется и в случае $\bar{y}(x) \equiv \text{const}$ на $\bar{\omega}^o$.

Пользуясь (11), получим оценку (10). Пусть $\max_{\bar{\omega}} \bar{y}(x)$ достигается в узле $x_0 \in \omega^*$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_0) &= D(x_0)\bar{y}(x_0) + \sum_{\xi \in \Pi'(x_0)} B(x_0, \xi) [\bar{y}(x_0) - \bar{y}(\xi)] \geq D(x_0)\bar{y}(x_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \max_{\bar{\omega}} \bar{y}(x) \leq \frac{\bar{F}(x_0)}{D(x_0)} \Rightarrow \max_{\bar{\omega}} |y(x)| \leq \max_{\omega^*} \frac{|F(x)|}{D(x)}. \end{aligned} \quad \otimes$$

Следствие 5. При условиях теоремы 4 и $D(x) \geq D_0 > 0$ на ω^* справедлива оценка

$$\|y\|_{\bar{\omega}} \leq \frac{1}{D_0} \|F\|_{\omega^*}. \quad (12)$$

Замечание 4. Если D_0 — константа, не зависящая от шага h , а ω^* — сетка узлов, в которых заданы начальные и граничные условия, в том числе 2-го и 3-го рода, то оценка (12) означает, что схема (1) устойчива по начальным и граничным условиям.

Пример.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x \leq 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = \mu_0(t), \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} + \sigma u(1, t) = \mu_1(t), \quad \sigma > 0. \end{array} \right.$$

Применяем явную схему $O(\tau + h^2)$ (см. §4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + f_i^j \text{ на } \omega^o, \\ y_i^0 = u_0(x_i) \text{ на } \omega^*, \quad y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}) \text{ на } \omega^*, \\ \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{2\tau} + \sigma \right) y_{N_1}^{j+1} = \frac{h}{2\tau} y_{N_1}^j + \frac{1}{h} y_{N_1-1}^{j+1} + \underbrace{\frac{1}{2} h f_{N_1}^{j+1} + \mu_1^{j+1}}_{=F_{N_1}^{j+1}} \text{ на } \omega^*. \end{array} \right.$$

В узлах $(x_i, t_{j+1}) \in \omega^o$:

$$A_i^{j+1} = \frac{1}{\tau} > 0, \quad B_{i-1}^j = B_{i+1}^j = \frac{1}{h^2} > 0, \quad B_i^j = \frac{1}{\tau} - \frac{2}{h^2} \Rightarrow D_i^{j+1} = 0.$$

Если $\frac{1}{\tau} - \frac{2}{h^2} \geq 0$, или $\tau \leq \frac{1}{2}h^2$, то условия (2) принципа максимума удовлетворяются.

В начальных условиях и граничных условиях на левом конце $D(x) = A(x) = 1 > 0$, $\Pi'(x) = \emptyset$ на ω^* .

В условиях на правом конце:

$$A_{N_1}^{j+1} = \frac{1}{h} + \frac{h}{2\tau} + \sigma > 0, \quad B_{N_1-1}^{j+1} = \frac{1}{h}, \quad B_{N_1}^j = \frac{h}{2\tau} > 0, \quad D_{N_1}^{j+1} = \sigma \geq 0.$$

Таким образом, выполняются все условия теоремы 4. Тогда, согласно следствию 5, при $f \equiv 0$ справедлива оценка (12), т. е.

$$\|y\|_{\bar{\omega}} \leq \frac{1}{D_0} \left(\|u_0\|_{\omega_h} + \|\mu_0\|_{\bar{\omega}_\tau} + \|\mu_1\|_{\bar{\omega}_\tau} + \|f(1, t)\|_{\bar{\omega}_\tau} \right),$$

где $D_0 = \min_{\omega^*} D(x) = \min(1, \sigma)$.

Таким образом, при условии $\tau \leq \frac{1}{2}h^2$ построенная явная схема устойчива как по начальным данным, так и по граничным условиям.

§7. Монотонные схемы для уравнений конвективного типа

Распространение тепла в подвижных средах (жидкости, газы) описывается уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla u) + \vec{v} \cdot \nabla u + f(x, t) = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u + f(x, t) = \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) + v_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right] + f(x, t). \quad (1)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках — *диффузионные члены*, второе — *конвективные члены*. $k(x, t) > 0$, $v_{\alpha}(x, t)$ — составляющие вектора \vec{v} скорости жидкости в точке $x = (x_1, \dots, x_p)$ в момент времени $t > 0$.

Рассмотрим одномерное ($p = 1$) стационарное уравнение конвекции

$$(ku')' + v(x)u' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

которое для определенности дополним граничными условиями первого рода

$$u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1. \quad (3)$$

Построим для задачи (2), (3) монотонную разностную схему второго порядка аппроксимации на равномерной сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih \mid i = \overline{0, N}, \quad h = \frac{1}{N}\},$$

т. е. схему, удовлетворяющую принципу максимума при любых h .

Оператор $(ku')'$ заменим обычным разностным оператором $(k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x$, который аппроксимирует исходный оператор $(ku')'$ со вторым порядком:

$$(k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x - (ku')' = \frac{1}{h} \left(k_{i+\frac{1}{2}} u_{x,i} - k_{i-\frac{1}{2}} u_{\bar{x},i} \right) - (ku')'_i = O(h^2).$$

Построить разностную схему с $\psi = O(h^2)$ не составляет труда:

$$\begin{cases} (k^{(-0,5)}y_{\bar{x}})_x + vy_{\circ} = -f, & x \in \omega_h, \\ y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1, \end{cases}$$

$$\psi = (k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x + vu_{\circ} + f = (ku')' + vu' + f + O(h^2) = O(h^2).$$

Она имеет трехдиагональную матрицу, т. е. может быть записана в виде:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1, \end{cases}$$

где

$$A_i = \frac{1}{h^2} k_{i-\frac{1}{2}} - v_i \frac{1}{2h}, \quad B_i = \frac{1}{h^2} k_{i+\frac{1}{2}} + v_i \frac{1}{2h}, \quad C_i = A_i + B_i.$$

Условия (2) принципа максимума обеспечиваются при $A_i > 0, B_i > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2} k_{i-\frac{1}{2}} > |v_i| \frac{1}{2h} \Leftrightarrow h|v_i| < 2k_{i-\frac{1}{2}}.$$

Для удобства исследования уравнение (2) запишем в виде

$$(ku')' + \tilde{v}ku' = -f(x), \quad \tilde{v} = \frac{v}{k},$$

и схему второго порядка аппроксимации для него в виде

$$(k^{(-0,5)}y_{\bar{x}})_x + \tilde{v}\frac{1}{2}(k^{(-0,5)}y_{\bar{x}} + k^{(+0,5)}y_x) = -f. \quad (4)$$

Для нее условия принципа максимума обеспечиваются при

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{h^2} k_{i-\frac{1}{2}} - \tilde{v}_i \frac{1}{2h} k_{i-\frac{1}{2}} > 0 \\ B_i &= \frac{1}{h^2} k_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{v}_i \frac{1}{2h} k_{i+\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h < \frac{2}{|\tilde{v}_i|} \Rightarrow h < \frac{2}{\max_x \left(\frac{|v|}{k} \right)}.$$

Полученная схема имеет второй порядок аппроксимации, но не является монотонной.

Для построения монотонной схемы первую производную будем аппроксимировать не центральной разностью, а односторонней — левой или правой, в зависимости от знака скорости \tilde{v}_i .

Именно,

$$\tilde{v}_i k_i u'_i \sim \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{v}_i k_{i+\frac{1}{2}} u_{x,i}, & \text{если } \tilde{v}_i \geq 0 \\ \tilde{v}_i k_{i-\frac{1}{2}} u_{\bar{x},i}, & \text{если } \tilde{v}_i \leq 0 \end{array} \right\} = \tilde{v}_i^+ k_{i+\frac{1}{2}} u_{x,i} + \tilde{v}_i^- k_{i-\frac{1}{2}} u_{\bar{x},i},$$

где

$$\tilde{v}_i^+ = \frac{1}{2}(\tilde{v}_i + |\tilde{v}_i|) = \begin{cases} \tilde{v}_i, & \tilde{v}_i > 0 \\ 0, & \tilde{v}_i \leq 0 \end{cases}, \quad \tilde{v}_i^- = \frac{1}{2}(\tilde{v}_i - |\tilde{v}_i|) = \begin{cases} \tilde{v}_i, & \tilde{v}_i \leq 0 \\ 0, & \tilde{v}_i > 0 \end{cases}.$$

Получаем схему

$$\left\{ \begin{array}{l} (k^{(-0,5)}y_{\bar{x}})_x + \tilde{v}^+ k^{(+0,5)}y_x + \tilde{v}^- k^{(-0,5)}y_{\bar{x}} = -f, \quad x \in \omega_h, \\ y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1. \end{array} \right. \quad (5)$$

$$A = \frac{1}{h^2} k^{(-0,5)} - \frac{1}{h} k^{(-0,5)} \tilde{v}^- > 0,$$

$$B = \frac{1}{h^2} k^{(+0,5)} + \frac{1}{h} k^{(+0,5)} \tilde{v}^+ > 0,$$

$$C = A + B,$$

т. е. схема (5) монотонна и, согласно принципу максимума, абсолютно устойчива по граничным условиям.

$$\begin{aligned}
\psi &= (k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x + \tilde{v}^+ k^{(+0,5)}u_x + \tilde{v}^- k^{(-0,5)}u_{\bar{x}} + f = \\
&= (ku')' + O(h^2) + \frac{1}{2}\tilde{v}(k^{(+0,5)}u_x + k^{(-0,5)}u_{\bar{x}}) + \frac{1}{2}|\tilde{v}|(k^{(+0,5)}u_x - k^{(-0,5)}u_{\bar{x}}) + f = \\
&= (ku')' + \tilde{v}ku' + \frac{1}{2}|\tilde{v}|h(k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x + O(h^2) + f = \\
&= \frac{1}{2}|\tilde{v}|h(k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x + O(h^2) = \frac{1}{2}|\tilde{v}|h(ku')' + O(h^2) = O(h),
\end{aligned}$$

т. е. схема (5) является монотонной, но имеет первый порядок аппроксимации. Чтобы получить $\psi = O(h^2)$, можно в схеме (5) перед первым слагаемым поставить коэффициент $1 - \frac{1}{2}h|\tilde{v}|$. Но в этом случае теряется монотонность из-за знака «-».

Учитывая, что

$$1 - \frac{1}{2}h|\tilde{v}| - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}h|\tilde{v}|} = \frac{-(\frac{1}{2}h|\tilde{v}|)^2}{1 + \frac{1}{2}h|\tilde{v}|} = O(h^2),$$

вместо $(1 - \frac{1}{2}h|\tilde{v}|)$ перед старшей производной поставим

$$\varkappa = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}h|\tilde{v}|} > 0.$$

В результате получаем схему

$$\begin{cases} \Lambda y \equiv \varkappa(k^{(-0,5)}y_{\bar{x}})_x + \tilde{v}^+ k^{(+0,5)}y_x + \tilde{v}^- k^{(-0,5)}y_{\bar{x}} = -f, & x \in \omega_h, \\ y_0 = \mu_0, & y_N = \mu_1, & \varkappa = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}h|\tilde{v}|} > 0, & \tilde{v} = \frac{v}{k}. \end{cases} \quad (6)$$

Она монотонна, т. к.

$$A = \frac{\varkappa}{h^2}k^{(-0,5)} - \frac{1}{h}k^{(-0,5)}\tilde{v}^- > 0, \quad B = \frac{\varkappa}{h^2}k^{(+0,5)} + \frac{1}{h}k^{(+0,5)}\tilde{v}^+ > 0, \quad C = A + B.$$

Найдем порядок аппроксимации:

$$\begin{aligned}
\psi &= \varkappa(k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x + \tilde{v}^+ k^{(+0,5)}u_x + \tilde{v}^- k^{(-0,5)}u_{\bar{x}} + f = (k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x + \tilde{v}\frac{1}{2}(k^{(+0,5)}u_x + \\
&+ k^{(-0,5)}u_{\bar{x}}) + f + (\varkappa - 1)(k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x + \frac{1}{2}|\tilde{v}|(k^{(+0,5)}u_x - k^{(-0,5)}u_{\bar{x}}) = O(h^2) + \\
&+ (\varkappa - 1)(k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x + \frac{1}{2}h|\tilde{v}|(k^{(-0,5)}u_{\bar{x}})_x = (\varkappa - 1 + \frac{1}{2}h|\tilde{v}|)(ku')' + O(h^2).
\end{aligned}$$

Т. к.

$$\varkappa - 1 + \frac{1}{2}h|\tilde{v}| = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}h|\tilde{v}|} - (1 - \frac{1}{2}h|\tilde{v}|) = \frac{(\frac{1}{2}h|\tilde{v}|)^2}{1 + \frac{1}{2}h|\tilde{v}|} = O(h^2),$$

то $\psi = O(h^2)$.

Таким образом, монотонная схема (6) имеет второй порядок аппроксимации.

Согласно следствию 3 (принцип максимума), $\|y(x)\|_{\bar{\omega}} \leq \max(|\mu_0|, |\mu_1|)$ при $f \equiv 0$, что обеспечивает устойчивость схемы (6) по граничным условиям при любом шаге h .

В многомерном уравнении (1) оператор $L_\alpha u$ аппроксимируется согласно (6) монотонным оператором второго порядка:

$$L_\alpha u \sim \Lambda_{\alpha y} = \varkappa_\alpha (k^{(-0,5_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \tilde{v}_\alpha^+ k^{(+0,5_\alpha)} y_{x_\alpha} + \tilde{v}_\alpha^- k^{(-0,5_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha}, \quad (7)$$

где $\tilde{v}_\alpha = \frac{v_\alpha}{k}$, $\varkappa_\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}h_\alpha|\tilde{v}_\alpha|}$, $k^{-0,5_\alpha} = k(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - h_\alpha/2, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t)$.

Упражнение. С помощью принципа максимума исследовать устойчивость и порядок аппроксимации явной разностной схемы

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y + f,$$

где $\Lambda_\alpha y$ является монотонным оператором второго порядка (7), и явной центрально-разностной схемы

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\Lambda}_\alpha y + f,$$

где

$$\overset{\circ}{\Lambda}_\alpha y = (k^{(-0,5_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \tilde{v}_\alpha \frac{1}{2} \left(k^{(-0,5_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha} + k^{(+0,5_\alpha)} y_{x_\alpha} \right),$$

а также устойчивость и порядок аппроксимации соответствующих неявных схем.

§8. Метод гармоник

Метод гармоник является методом исследования устойчивости разностных схем. Он не учитывает влияние граничных условий и правых частей, поэтому является методом исследования устойчивости по начальным данным, то есть применим только для нестационарных разностных схем с постоянными коэффициентами и граничными условиями первого рода.

В теоретической физике весьма распространенным приемом исследования устойчивости физических процессов является подстановка в описывающий процесс дифференциальное уравнение изолированной в пространстве и во времени волны:

$$u(x, t) = \hat{u}e^{i(\omega t - kx)} = \hat{u}[\cos(\omega t - kx) + i\sin(\omega t - kx)], \quad (1)$$

где $i = \sqrt{-1}$, которую называют *гармоникой*. В этой формуле обозначены \hat{u} — начальная амплитуда колебаний волны, ω — частота колебаний волны (т. е. число колебаний в единицу времени), k — волновое число, связанное с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$.

Функцию (1) иногда называют *фурье-гармоникой* или *фурье-модой*, имея в виду, что члены ряда Фурье при различных ω имеют вид (1). Любую гармоническую функцию можно представить в виде разложения в ряд Фурье по функциям (1).

Функция (1) представляет собой уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся в направлении оси OX ($k > 0$) или в противоположном направлении ($k < 0$).

Характер колебаний определяется зависимостью $\omega(k)$. Частота ω может быть действительной, когда описывается процесс с постоянной амплитудой, и мнимой, когда описывается нарастание и затухание гармоник.

Процесс называется *устойчивым*, если амплитуда волны (1) с ростом t не возрастает при любых k .

Аналогичный метод используется для исследования устойчивости разностных схем. Гармонику (1) можно представить в виде

$$u(x, t) = \hat{u}(e^{i\omega})^t e^{i\varphi x}, \quad \varphi = -k \in \mathbb{R}.$$

Без ограничения общности амплитуду \hat{u} будем считать равной 1. Тогда на сетке $\{x_k, t_j\}$ гармонику (1) можно рассматривать в виде

$$y_k^j(\varphi) = q^j e^{i\varphi x_k} = q^j e^{i\varphi k h}, \quad (2)$$

где $q = e^{i\omega\tau}$. Эволюция гармоник (2) с ростом времени определяется изменением модуля амплитуды $|q^j| = |q|^j$ при $j \rightarrow \infty$. Если $|q| < 1$, волна затухает, если $|q| > 1$ — волна нарастает.

Идея метода гармоник состоит в том, что в начальные условия разностной задачи вносится возмущение вида (2), являющееся решением однородного разностного уравнения при любом $j = 1, 2, \dots$, и рассматривается поведение этого возмущения при $j \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$). Если $|q| \leq 1$ при любых действительных φ , то разностная схема считается *устойчивой по начальным данным*, а если $|q| > 1$ хотя бы для одного φ , то *неустойчивой*.

Пример.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

явная разностная схема:

$$y_t = y_{\bar{x}x} + f.$$

Исследуем устойчивость по начальным данным с помощью метода гармоник. Для этого исследуем устойчивость явной схемы при $f \equiv 0$:

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} = \frac{y_{k-1}^j - 2y_k^j + y_{k+1}^j}{h^2}. \quad (*)$$

Внесем в это уравнение возмущение в виде гармоник (волны).

Рассмотрим поведение частного решения этого уравнения в виде гармоник

$$y_k^j = q^j e^{i\varphi x_k}, \\ i = \sqrt{-1}, \quad x_k = kh, \quad e^{i\varphi x_k} = \cos \varphi kh + i \sin \varphi kh$$

с ростом j .

Найдем значение амплитуды q , при котором гармоника будет решением разностного уравнения (*):

$$\frac{q^{j+1} e^{i\varphi kh} - q^j e^{i\varphi kh}}{\tau} = \frac{q^j e^{i\varphi(k-1)h} - 2q^j e^{i\varphi kh} + q^j e^{i\varphi(k+1)h}}{h^2}.$$

Сократим на $q^j e^{i\varphi kh}$, получим

$$\frac{q - 1}{\tau} = \frac{e^{-i\varphi h} - 2 + e^{i\varphi h}}{h^2} \Rightarrow \frac{q - 1}{\tau} = \frac{2}{h^2} (\cos \varphi h - 1)$$

или

$$q = 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi h}{2}.$$

Согласно методу гармоник, схема устойчива по начальным данным, если $|q| \leq 1$ при любых φ . Имеем $q \leq 1$. Поэтому достаточно решить неравенство $q \geq -1$, т. е.

$$1 - 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi h}{2} \geq -1 \quad \forall \varphi \Rightarrow 2 \frac{\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi h}{2} \leq 1 \quad \forall \varphi \Rightarrow 2 \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi h}{2}} \quad \forall \varphi.$$

Если $2 \frac{\tau}{h^2} \leq 1$, то $|q| \leq 1 \quad \forall \varphi$.

Отсюда получаем, что при $\tau \leq \frac{1}{2}h^2$ явная схема $y_t = y_{\bar{x}x} + f$ устойчива по начальным данным.

Глава 2

Разностные схемы для нестационарных задач математической физики

§1. Разностные схемы для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

а) Семейство двухслойных схем

Будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в прямоугольнике $\bar{D} = \{ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T \}$. Требуется найти непрерывное в \bar{D} решение $u = u(x, t)$ задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad \text{где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{array} \right. \quad (1)$$

Введём сетки по пространству $\bar{\omega}_h = \{ x_i = ih \mid i = \overline{0, N_1}, h = 1/N_1 \}$ и времени $\bar{\omega}_\tau = \{ t_j = j\tau \mid j = \overline{0, N_2}, \tau = T/N_2 \}$ и образуем сетку в \bar{D} :

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{ (x_i, t_j) \mid x_i = ih, t_j = j\tau, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2} \}$$

с шагами $h = 1/N_1, \tau = T/N_2$. Обозначим $y_i^j = y(x_i, t_j)$ значение сеточной функции $y(x, t)$ в узле $(x_i, t_j) \in \bar{\omega}_{h\tau}$.

Рассмотрим на сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ однопараметрическое семейство разностных схем:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \sigma \Lambda y_i^{j+1} + (1 - \sigma) \Lambda y_i^j + \varphi_i^j, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{0, N_2 - 1}, \quad (2)$$

где $0 \leq \sigma \leq 1$ — произвольный вещественный параметр. Схему (2) будем называть *схемой с весами*, а параметр σ — *весом*. Здесь $\Lambda y_i = y_{\bar{x}x, i} = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$, φ_i^j — сеточная функция, аппроксимирующая правую часть f уравнения (1), например,

$$\varphi_i^j = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}) = f(x_i, t_j + \frac{1}{2}\tau) = f_i^{j+\frac{1}{2}}.$$

Граничные и начальные условия аппроксимируются точно:

$$y_0^j = \mu_0(t_j), \quad y_{N_1}^j = \mu_1(t_j), \quad j = \overline{1, N_2}, \quad y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N_1}. \quad (3)$$

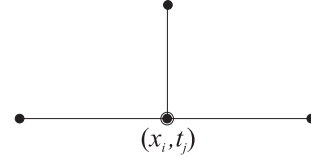
Разностная схема (2), (3) записана, вообще говоря, на шеститочечном шаблоне.

Множество узлов сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$, лежащее на прямой $t = t_j$, называют *слоем номер j* или *j -ым слоем по времени*. Схема (2) содержит значение искомого решения, принадлежащее двум временным слоям. Поэтому ее называют *двухслойной схемой*.

От выбора параметра σ зависит точность и устойчивость схемы (2).

При $\sigma = 0$ получаем *явную схему*:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^j + \varphi_i^j$$



или

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma)y_i^j + \gamma(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad (4)$$

где $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$. Значение y_i^{j+1} в каждой точке слоя $t = t_{j+1}$ выражаются в явном виде через значения на j -ом слое. Так как при $t = 0$ задано начальное значение $y_i^0 = u_0(x_i)$, то по формуле (4) последовательно определим значения y_i^j на любом слое.

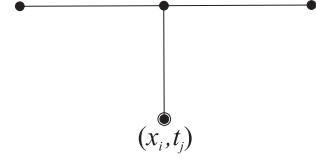
Если $\sigma \neq 0$, то схему (2) называют *неявной двухслойной схемой*. Для определения y_i^{j+1} на слое $j + 1$ получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} \sigma \Lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = -F_i^j, & F_i^j = \frac{1}{\tau} y_i^j + (1 - \sigma) \Lambda y_i^j + \varphi_i^j, \\ i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad y_0^{j+1} = \mu_0^{j+1}, \quad y_{N_1}^{j+1} = \mu_1^{j+1}. \end{cases} \quad (5)$$

Матрица системы (5) является трехдиагональной и решение y^{j+1} определяется по методу прогонки, который в данном случае абсолютно устойчив.

При $\sigma = 1$ имеем *чисто неявную схему*.

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^j$$



При $\sigma = 1/2$ — шеститочечная *симметричная схема*

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\Lambda y_i^{j+1} + \Lambda y_i^j \right) + \varphi_i^j, \quad (6)$$

которую называют также *схемой Кранка-Никольсона*.

б) погрешность аппроксимации

Разностную схему (2),(3) для задачи (1) запишем в безындексной форме

$$\begin{cases} y_t = (1 - \sigma)\Lambda y + \sigma\Lambda\hat{y} + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(0, t) = \mu_0(t), \quad y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \bar{\omega}_\tau, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h. \end{cases}$$

Оценим погрешность аппроксимации разностного уравнения, предполагая, что $u = u(x, t)$ имеет нужное по ходу изложения число производных. Будем пользоваться обозначениями:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \bar{u} = u(x_i, t_{j+1/2}).$$

Пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{1}{2}(\hat{u} + u) + \frac{1}{2}(\hat{u} - u) = \frac{1}{2}(\hat{u} + u) + \frac{1}{2}\tau u_t, \\ u &= \frac{1}{2}(\hat{u} + u) - \frac{1}{2}(\hat{u} - u) = \frac{1}{2}(\hat{u} + u) - \frac{1}{2}\tau u_t, \\ (1 - \sigma)u + \sigma\hat{u} &= \frac{1}{2}(\hat{u} + u) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau u_t, \end{aligned}$$

запишем ψ в виде

$$\begin{aligned} \psi &= (1 - \sigma)\Lambda u + \sigma\Lambda\hat{u} - u_t + \varphi = \Lambda[(1 - \sigma)u + \sigma\hat{u}] - u_t + \varphi = \\ &= \Lambda\left(\frac{\hat{u} + u}{2}\right) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau\Lambda u_t - u_t + \varphi. \end{aligned}$$

Справедливы разложения

$$\begin{aligned}\Lambda \bar{u} &= \bar{u}'' + \frac{1}{12}h^2\bar{u}^{(4)} + O(h^4) = L\bar{u} + \frac{1}{12}h^2L^2\bar{u} + O(h^4), \\ \hat{u} &= \bar{u} + \frac{1}{2}\tau\dot{\bar{u}} + \frac{1}{8}\tau^2\ddot{\bar{u}} + O(\tau^3), \\ u &= \bar{u} - \frac{1}{2}\tau\dot{\bar{u}} + \frac{1}{8}\tau^2\ddot{\bar{u}} + O(\tau^3), \\ \frac{1}{2}(u + \hat{u}) &= \bar{u} + O(\tau^2), \\ u_t &= \dot{\bar{u}} + O(\tau^2),\end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned}\psi &= \Lambda(\bar{u} + O(\tau^2)) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau\Lambda(\dot{\bar{u}} + O(\tau^2)) - \dot{\bar{u}} + O(\tau^2) + \varphi = L\bar{u} + \frac{1}{12}h^2L^2\bar{u} + \\ &+ \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\dot{\bar{u}} - \dot{\bar{u}} + \varphi + O(\tau^2 + h^4) = \underbrace{L\bar{u} - \dot{\bar{u}} + \bar{f}}_{=0} + \frac{1}{12}h^2(L\dot{\bar{u}} - L\bar{f}) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\dot{\bar{u}} + \\ &+ (\varphi - \bar{f}) + O(\tau^2 + h^4) = \varphi - \bar{f} - \frac{1}{12}h^2L\bar{f} + \left[\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau + \frac{1}{12}h^2\right]L\dot{\bar{u}} + O(\tau^2 + h^4).\end{aligned}$$

Приравнивая нулю выражения в скобках, найдем

$$\sigma = \sigma^* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\gamma}, \quad (7)$$

$$\varphi = \varphi^* = \bar{f} + \frac{1}{12}h^2L\bar{f} = f_i^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i^{j+\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

При $\sigma = \sigma^*$, $\varphi = \varphi^*$ схема (2) имеет погрешность аппроксимации $\psi = O(\tau^2 + h^4)$.

Порядок аппроксимации не нарушится, если взять

$$\varphi = \varphi^* = f_i^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}h^2(f_{xx})_i^{j+\frac{1}{2}}. \quad (9')$$

Нетрудно сделать общий вывод: в классе достаточно гладких функций схема (2) имеет погрешность аппроксимации

- 1) $O(\tau^2 + h^4)$ при $\sigma = \sigma^*$, $\varphi = \varphi^*$ — схема повышенного порядка аппроксимации,
- 2) $O(\tau^2 + h^2)$ при $\sigma = \frac{1}{2}$, $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau^2)$ — схема Кранка-Никольсона,
- 3) $O(\tau + h^2)$ при $\sigma \neq \frac{1}{2}$, не зависит от τ и h , $\varphi = \bar{f} + O(\tau + h^2)$ — например, явная и чисто неявная схемы.

В 2), например, можно взять $\varphi = f_i^{j+\frac{1}{2}}$ или $\varphi = \frac{f_i^j + f_i^{j+1}}{2}$, в 3) можно взять $\varphi = f_i^j$ или $\varphi = f_i^{j+1}$.

в) устойчивость согласно принципа максимума

С помощью принципа максимума сначала исследуем устойчивость схемы (2),(3) по начальным данным и граничным условиям. Для этого запишем ее при $\varphi \equiv 0$:

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\sigma}{h^2}\right)\hat{y} - \left[\frac{1}{h^2}\sigma(\hat{y}^{(-1)} + \hat{y}^{(+1)}) + \frac{1-\sigma}{h^2}(y^{(-1)} + y^{(+1)}) + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2(1-\sigma)}{h^2}\right)y\right] = 0, \quad (9)$$

$$\hat{y}_0 = \hat{\mu}_0, \quad \hat{y}_{N_1} = \hat{\mu}_1, \quad y^0 = u_0, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Очевидно, что условие принципа максимума выполняется, если $\frac{1}{\tau} - 2\frac{1-\sigma}{h^2} \geq 0$, т. е. при

$$\gamma \leq \frac{1}{2(1-\sigma)}, \quad \text{где } \sigma \geq 1 - \frac{1}{2\gamma}, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}. \quad (10)$$

Согласно следствию 3 принципа максимума, в этом случае справедлива оценка

$$\|y\|_{\bar{\omega}_{h\tau}} \leq \|u_0\|_{\bar{\omega}_h} + \|\mu_0\|_{\bar{\omega}_\tau} + \|\mu_1\|_{\bar{\omega}_\tau},$$

которая означает, что схема (2),(3) при условии (10) устойчива по начальным данным и граничным условиям.

Теперь исследуем устойчивость по правой части. Для этого запишем схему (2),(3) при $\mu_0 \equiv 0, \mu_1 \equiv 0, u_0 \equiv 0$:

$$(1 + 2\gamma\sigma)y_i^{j+1} = \gamma\sigma(y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}) + \gamma(1-\sigma)(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + [1 - 2\gamma(1-\sigma)]y_i^j + \tau\varphi_i^j, \quad (11)$$

$$\gamma = \tau/h^2, \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \\ y_0^{j+1} = y_{N_1}^{j+1} = 0, \quad y_i^0 = 0.$$

Оценим y_i^{j+1} :

$$\begin{aligned} (1 + 2\gamma\sigma)\|y^{j+1}\|_{\bar{\omega}_h} &\leq 2\gamma\sigma\|y^{j+1}\|_{\bar{\omega}_h} + 2\gamma(1-\sigma)\|y^j\|_{\bar{\omega}_h} + |1 - 2\gamma(1-\sigma)|\|y^j\|_{\bar{\omega}_h} \\ &\quad + \tau\|\varphi^j\|_{\bar{\omega}_h}, \quad \text{откуда } \|y^{j+1}\|_{\bar{\omega}_h} \leq \|y^j\|_{\bar{\omega}_h} + \tau\|\varphi\|_{\bar{\omega}_{h\tau}} \leq \|y^{j-1}\|_{\bar{\omega}_h} + 2\tau\|\varphi\|_{\bar{\omega}_{h\tau}} \leq \dots \leq \\ &\leq \|y^0\|_{\bar{\omega}_h} + \tau(j+1)\|\varphi\|_{\bar{\omega}_{h\tau}} \leq \left[\|y^0\|_{\bar{\omega}_h} = 0, \quad \tau(j+1) = t_{j+1} \leq T\right] \leq T\|\varphi\|_{\bar{\omega}_{h\tau}}. \end{aligned}$$

Т.к. эта оценка верна для любого слоя, то

$$\|y\|_{\bar{\omega}_{h\tau}} \leq T\|\varphi\|_{\bar{\omega}_{h\tau}},$$

здесь $T > 0$, не зависит от h и τ .

Эта оценка означает, что схема (11) устойчива.

Таким образом, схема (2),(3) при условии (10) устойчива по правой части.

Мы показали, что схема (2),(3) при условии (10) устойчива по всем входным данным.

г) устойчивость по начальным данным согласно методу гармоник

Принцип максимума дает слишком жесткие достаточные условия устойчивости (т. е. слишком сильные ограничения на τ, h). Например, схема Кранка-Никольсона и схема повышенного порядка согласно принципу максимума являются условно устойчивыми, т.е. устойчивыми не при любых шагах h, τ , хотя с помощью других методов можно показать, что они абсолютно устойчивы.

Исследуем, например, устойчивость схемы (2),(3) по начальным данным, используя метод гармоник. Для этого запишем разностное уравнение (2) при $\varphi \equiv 0$:

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} = (1 - \sigma) \frac{y_{k-1}^j - 2y_k^j + y_{k+1}^j}{h^2} + \sigma \frac{y_{k-1}^{j+1} - 2y_k^{j+1} + y_{k+1}^{j+1}}{h^2}, \quad k = \overline{1, N_1 - 1}. \quad (12)$$

Подставим в (12) гармонику $y_k^j = q^j e^{i\varphi kh}$ и найдем значение амплитуды q , при котором гармоника будет решением уравнения (12):

$$\frac{q - 1}{\tau} = (1 - \sigma) \frac{e^{-i\varphi h} - 2 + e^{i\varphi h}}{h^2} + \sigma q \frac{e^{-i\varphi h} - 2 + e^{i\varphi h}}{h^2}, \quad \text{или}$$

$$q - 1 = \gamma(1 - \sigma + \sigma q)(-2 + 2 \cos \varphi h), \quad \text{где } \gamma = \frac{\tau}{h^2}, \quad \text{или}$$

$$q = 1 - 4\gamma(1 - \sigma + \sigma q) \sin^2 \frac{\varphi h}{2}, \quad \text{откуда } q = \frac{1 - 4\gamma(1 - \sigma) \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}{1 + 4\gamma\sigma \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}, \quad \text{где } 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Найдем γ , при которых $|q| \leq 1$ для $\forall \varphi$. Очевидно, $q \leq 1$. Поэтому решим неравенство $q \geq -1$:

$$\begin{aligned} \frac{1 - 4\gamma(1 - \sigma) \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}{1 + 4\gamma\sigma \sin^2 \frac{\varphi h}{2}} \geq -1 &\Leftrightarrow 1 - 4\gamma(1 - \sigma) \sin^2 \frac{\varphi h}{2} \geq -1 - 4\gamma\sigma \sin^2 \frac{\varphi h}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\gamma(1 - 2\sigma) \sin^2 \frac{\varphi h}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sigma \leq \frac{1}{2\gamma \sin^2 \frac{\varphi h}{2}} \Leftrightarrow \sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\gamma \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при условии

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\gamma}. \quad (13)$$

будем иметь $|q| \leq 1$ при любом φ , т. е. при условии (13), согласно методу гармоник, схема (2),(3) будет *устойчивой по начальным данным*.

Таким образом, не только чисто неявная схема ($\sigma = 1$), но и схема Кранка-Никольсона ($\sigma = \frac{1}{2}$) и схема повышенного порядка ($\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\gamma}$) удовлетворяют условию (13), т. е. являются абсолютно устойчивыми по начальным данным.

Замечание. Другими методами, используя сеточную норму L_2 , можно показать, что схемы семейства (2),(3), удовлетворяющие условию (13), являются абсолютно устойчивыми не только по начальным условиям, но и по правой части и по граничным условиям, т.е. абсолютно устойчивыми по всем входным данным.

§2. Семейство трехслойных схем для уравнения колебаний струны (волнового уравнения)

Уравнение колебаний струны рассмотрим в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

В начальный момент времени задаются начальное отклонение и начальная скорость

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_0(x). \quad (2)$$

Концы струны движутся по заданным законам:

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t). \quad (3)$$

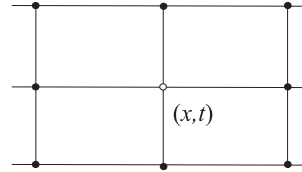
Введем в области $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T\}$ прямоугольную сетку $\bar{\omega}_{h\tau}$. Т. к. уравнение (1) содержит вторую производную по t , то число слоев не может быть меньше трех.

Рассмотрим однопараметрическое семейство трехслойных схем с весами:

$$y_{\bar{t}\bar{t}} = \sigma \Lambda \bar{y} + (1 - 2\sigma) \Lambda y + \sigma \Lambda \hat{y} + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau},$$

$$y(0, t) = \mu_0(t), \quad y(1, t) = \mu_1(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau,$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{v}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$



$$\Lambda y = y_{\bar{x}\bar{x}}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad (4)$$

где φ и \tilde{v}_0 определим ниже, исходя из требования второго порядка аппроксимации по времени. Граничные и первое начальное условие аппроксимируются точно.

Выберем $\tilde{v}_0(x)$ так, чтобы второе начальное условие имело погрешность аппроксимации $O(\tau^2)$. Имеем

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \dot{u}(x, 0) + \frac{1}{2}\tau \ddot{u}(x, 0) + O(\tau^2) = v_0(x) + \frac{1}{2}\tau [u''(x, 0) + f(x, 0)] + O(\tau^2) = \\ &= v_0(x) + \frac{1}{2}\tau [u_0''(x) + f(x, 0)] + O(\tau^2), \end{aligned}$$

$$\nu = u_t(x, 0) - \tilde{v}_0(x) = v_0(x) + \frac{1}{2}\tau [u_0''(x) + f(x, 0)] - \tilde{v}_0(x) + O(\tau^2).$$

Таким образом, в схеме (4) следует положить

$$\tilde{v}_0(x) = v_0(x) + \frac{1}{2}\tau [u_0''(x) + f(x, 0)], \quad (5)$$

чтобы второе начальное условие аппроксимировалось с погрешностью $\nu = O(\tau^2)$.

Погрешность аппроксимации разностного уравнения в точке (x, t) :

$$\begin{aligned}\psi &= \Lambda \left[\sigma \check{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma \hat{u} \right] - u_{\bar{t}t} + \varphi = \Lambda \left[\sigma(u - \tau u_{\bar{t}}) + (1 - 2\sigma)u + \sigma(u + \tau u_t) \right] - \\ &- u_{\bar{t}t} + \varphi = \Lambda \left[u + \sigma \tau (u_t - u_{\bar{t}}) \right] - u_{\bar{t}t} + \varphi = \Lambda u + \sigma \tau^2 \Lambda u_{\bar{t}t} - u_{\bar{t}t} + \varphi = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) + \sigma \tau^2 \Lambda \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) \right] - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) \right] + \varphi = \varphi - f + O(\tau^2 + h^2).\end{aligned}$$

Таким образом, при $\varphi = f + O(\tau^2 + h^2)$ имеем $\psi = O(\tau^2 + h^2) \forall \sigma$.

Например:

$$\varphi(x, \tau) = f(x, t),$$

$$\varphi(x, \tau) = \frac{1}{2} \left[f(x, t + \tau) + f(x, t - \tau) \right], \quad (6)$$

$$\varphi(x, \tau) = \frac{1}{3} \left[f(x, t - \tau) + f(x, t) + f(x, t + \tau) \right].$$

Следовательно, схема (4),(5),(6) имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ для любых σ .

Для определения $\hat{y} = y^{j+1}$ получаем разностную задачу

$$\begin{cases} \frac{\sigma \tau^2}{h^2} (y_{k-1}^{j+1} + y_{k+1}^{j+1}) - \left(1 + 2\sigma \frac{\tau^2}{h^2} \right) y_k^{j+1} = -F_k, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0^{j+1}, \quad y_{N_1}^{j+1} = \mu_1^{j+1}, \\ F_k = \tau^2 \varphi_k^j + 2y_k^j - y_k^{j-1} + \tau^2 \sigma y_{\bar{x}x,k}^{j-1} + \tau^2 (1 - 2\sigma) y_{\bar{x}x,k}^j, \end{cases} \quad (7)$$

которая при $\sigma > 0$ является неявной разностной схемой и решается методом прогонки, а при $\sigma = 0$ представляет собой явный алгоритм для вычисления $y_k^{j+1} = F_k$. Прогонка при $\sigma > 0$ абсолютно устойчива.

Исследуем устойчивость схемы (4) по начальным данным методом гармоник. Для этого рассмотрим частное решение однородного уравнения (4) вида $y_k^j = q^j e^{i\varphi k h}$.

Чтобы найти амплитуду q , при которой гармоника удовлетворяет уравнению (4),

подставим ее в однородное уравнение (4) и сократим на $q^j e^{i\varphi kh}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{q - 2 + \frac{1}{q}}{\tau^2} &= \frac{\sigma}{h^2} \cdot \frac{1}{q} \left(e^{i\varphi h} - 2 + e^{-i\varphi h} \right) + \frac{1 - 2\sigma}{h^2} \left(e^{i\varphi h} - 2 + e^{-i\varphi h} \right) + \frac{\sigma}{h^2} q \left(e^{i\varphi h} - 2 + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i\varphi h} \right) \Rightarrow q - 2 + \frac{1}{q} = \frac{\tau^2}{h^2} \left(e^{i\varphi h} + e^{-i\varphi h} - 2 \right) \left(\frac{1}{q} \sigma + 1 - 2\sigma + q\sigma \right) \Rightarrow q + \frac{1}{q} - 2 = \\
 &\quad -2 \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 (1 - \cos h\varphi) \left[\sigma \left(q + \frac{1}{q} - 2 \right) + 1 \right] \Rightarrow q + \frac{1}{q} = 2 - \frac{4 \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}{1 + 4\sigma \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}} \Rightarrow \\
 &\quad \Rightarrow q^2 - 2q \left(1 - \frac{2 \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}{1 + 4\sigma \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}} \right) + 1 = 0. \tag{*}
 \end{aligned}$$

Требуется найти σ, τ, h , при которых $|q| \leq 1 \forall \varphi$ и удовлетворяет условию (*).

По теореме Виета следует, что $q_1 q_2 = 1$. Так как условие $|q| \leq 1$ должно выполняться и для q_1 , и для q_2 , то $|q_1| = |q_2| = 1$. Это имеет место, если корни (*) комплексно сопряжены, то есть, дискриминант

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{2 \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}{1 + 4\sigma \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}} \right)^2 - 1 &\leq 0 \Leftrightarrow \left| 1 - \frac{2 \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}{1 + 4\sigma \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1 - \frac{2 \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}{1 + 4\sigma \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}} &\geq -1 \text{ при } \sigma \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}{1 + 4\sigma \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}} \leq 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sigma &\geq \frac{\left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2} - 1}{4 \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi h}{2}}.
 \end{aligned}$$

Это неравенство выполняется при любых φ при условии

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}, \tag{8}$$

которое является *условием устойчивости по начальным данным* схемы (2),(3). При $\sigma \geq \frac{1}{4}$ это верно для $\forall \tau, h$, иначе получаем

$$\frac{h^2}{\tau^2} \geq 1 - 4\sigma, \text{ или } \tau \leq \frac{h}{\sqrt{1 - 4\sigma}}.$$

Отсюда следует, что явная схема ($\sigma = 0$) устойчива при

$$\tau \leq h. \tag{9}$$

Условие (9) называют *условием Куранта*.

Все неявные схемы, соответствующие $\sigma \geq \frac{1}{4}$, абсолютно устойчивы, т.е. устойчивы при любых τ и h .

§3. Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики

а) понятие экономичности разностной схемы

Одной из основных проблем теории численных методов является поиск *экономичных* вычислительных алгоритмов, требующих *минимального машинного времени* для получения приближенного решения с заданной точностью.

Основным показателем экономичности обычно считают число *арифметических действий* $Q(\varepsilon)$, которое требуется для получения решения с точностью $\varepsilon > 0$.

Особенно большую остроту вопрос экономичности приобретает при численном решении многомерных задач математической физики.

Задачу будем называть *многомерной*, если число независимых пространственных переменных больше единицы.

Пусть $\bar{G} = G \cup \Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_p) \mid 0 \leq x_\alpha \leq 1, \alpha = \overline{1, p}\}$ — p -мерный куб.

Рассмотрим p -мерное уравнение теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad x \in G, \quad t \in (0, T], \\ u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \leq 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}. \end{cases} \quad (1)$$

В кубе \bar{G} введем кубическую сетку с шагом $h = 1/N$:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{p,i_p}) \mid x_{1,i_1} = i_1 h, \dots, x_{p,i_p} = i_p h, \\ i_1, \dots, i_p = \overline{0, N}, \quad h = 1/N\} = \omega_h \cup \gamma_h.$$

По времени введем равномерную сетку:

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau \mid j = \overline{0, N_2}, \quad \tau = T/N_2\}.$$

Образует пространственно-временную сетку:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), x_i \in \bar{\omega}_h, t_j \in \bar{\omega}_\tau\}.$$

Для задачи (1) напомним двухслойную схему с весами:

$$\begin{cases} y_t = (1 - \sigma)\Lambda y + \sigma\Lambda \hat{y} + \varphi, \quad (x, t) \in \bar{\omega}_{h\tau}, \\ \hat{y}|_{\gamma_h} = \hat{\mu}|_{\gamma_h}, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \\ \Lambda y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}. \end{cases} \quad (2)$$

Упражнение. Используя метод гармоник, показать, что схема (2) устойчива по начальным данным при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4p\tau} = \sigma_0. \quad (3)$$

Замечание. (к §8 главы I) В многомерном случае частное решение однородного уравнения ищется в виде

$$y_i^j = q^j e^{I(\varphi_1 x_{1,i_1} + \dots + \varphi_p x_{p,i_p})}, \quad i = (i_1, \dots, i_p), \quad I = \sqrt{-1}$$

или

$$y_i^j = q^j e^{I(\varphi_1 i_1 h + \dots + \varphi_p i_p h)},$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ — любые вещественные числа.

Полагая $\sigma = 0$, получим явную схему

$$\begin{cases} y_t = \Lambda y + \varphi \Rightarrow \hat{y} = y + \tau(\Lambda y + \varphi), \quad y^{j+1} = y^j + \tau(\Lambda y^j + \varphi^j), \\ y^{j+1}|_{\gamma_k} = \mu^{j+1}|_{\gamma_h}, \quad y^0 = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \end{cases} \quad (4)$$

устойчивую при условии

$$\tau \leq \frac{h^2}{2p}.$$

Отсюда видно, что максимально допустимый шаг τ для явной схемы уменьшается с ростом размерности p . По этой причине использование явных схем часто оказывается нецелесообразным, т. к. требует большого числа временных слоев. С другой стороны, явная схема обладает важным достоинством: решение $\hat{y} = y^{j+1}$ определяется по явной формуле (4), причем общее число арифметических операций на каждом слое пропорционально числу узлов сетки $\bar{\omega}_h$, т. е. является величиной $O(N^p) = O(1/h^p)$.

Теперь рассмотрим чисто неявную схему ($\sigma = 1$):

$$\begin{cases} y_t = \Lambda \hat{y} + \varphi \Rightarrow \hat{y} - \tau \Lambda \hat{y} = y + \tau \varphi \Rightarrow y^{j+1} - \tau \Lambda y^{j+1} = y^j + \tau \varphi^j, \\ y^{j+1}|_{\gamma_h} = \mu^{j+1}|_{\gamma_h}, \quad y^0 = u_0(x). \end{cases} \quad (5)$$

В силу критерия (3) она устойчива при любых τ, h . Однако для решения СЛАУ (5) на каждом слое $j+1$ она требует слишком большого числа арифметических действий; например, по методу Гаусса — порядка $O(N^{3p}) = O(1/h^{3p})$.

Итак, явная схема требует на каждом слое минимального числа действий, но в силу малого τ число должно быть большим; неявная схема абсолютно устойчива, но на каждом слое она требует большого числа арифметических действий. Таким образом, *обе они неэкономичны*.

Возникает вопрос: можно ли построить схему, сочетающую в себе лучшие качества явной и неявной схем, то есть абсолютно устойчивую, как неявная схема, и требующую на каждом временном слое числа арифметических действий $O(1/h^p)$, как явная схема?

Такие схемы принято называть *экономичными*.

б) схема переменных направлений

В одномерном случае ($p = 1$) неявная схема (5) на каждом слое приводит к разностной задаче

$$\begin{cases} A_i \hat{y}_{i-1} - C_i \hat{y}_i + B_i \hat{y}_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \hat{y}_0 = \hat{\mu}_0, \quad \hat{y}_N = \hat{\mu}_1; \quad A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i > A_i + B_i, \end{cases} \quad (6)$$

которая решается стандартным методом прогонки с числом арифметических действий $O(N)$, пропорциональным числу узлов N пространственной сетки $\bar{\omega}_h$.

Основная идея экономических схем для многомерных задач ($p = 2$) состоит в сведении решения на каждом слое к последовательному решению одномерных задач вида (6).

Мы рассмотрим наиболее известную и употребительную из экономичных схем — *схему переменных направлений*. Она является первой из экономичных схем и была разработана в 1955 году Писменом и Рэкфордом. Эта схема применима только для двумерных задач ($p = 2$).

В прямоугольнике $\bar{G} = G \cup \Gamma = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ со сторонами l_1 и l_2 и границей Γ рассмотрим двумерную задачу теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \\ u(0, x_2, t) = \mu_1(x_2, t); \quad u(l_1, x_2, t) = \mu_2(x_2, t); \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad t \leq 0, \\ u(x_1, 0, t) = g_1(x_1, t), \quad u(x_1, l_2, t) = g_2(x_1, t); \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad t \leq 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$Lu = \nabla^2 u = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}.$$

В прямоугольнике \bar{G} введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h = \{ (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}) \mid x_{\alpha,i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha}, \alpha = 1, 2 \}.$$

По времени введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{ t_j = j\tau; j = \overline{0, N}, \tau = T/N \}.$$

В области определения построим пространственно-временную сетку

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{ (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, t_j) \}.$$

Оператор L_α заменим разностным оператором

$$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \sim L.$$

Запишем схему переменных направлений для задачи (7). Для этого наряду с основными сеточными функциями $y = y^j$ и $\hat{y} = y^{j+1}$ вводится некоторая вспомогательная функция \tilde{y} , которую можно формально рассматривать как некоторую промежуточную между y^j и y^{j+1} .

По схеме переменных направлений переход от слоя j к слою $j+1$ осуществляется в два этапа с шагом $\tau/2$:

$$\frac{\tilde{y}_i - y_i^j}{\tau/2} = \Lambda_1 \tilde{y}_i + \Lambda_2 y_i^j + \varphi_i^j, \quad (8)$$

$$\frac{y_i^{j+1} - \tilde{y}_i}{\tau/2} = \Lambda_1 \tilde{y}_i + \Lambda_2 y_i^{j+1} + \varphi_i^j, \quad (9)$$

$$i = (i_1, i_2), i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Можно, например, положить $\varphi_i^j = f_i^{j+1/2} = f(\overbrace{x_{1,i_1}, x_{2,i_2}}^{=x_i}, t_{j+1/2})$.

Схема (8) неявна по направлению x_1 , но явна по x_2 ; схема (9) неявна по направлению x_2 , но явна по x_1 .

Добавим сюда начальные условия

$$y_i^0 = u_0(x_i) = u_0(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}); i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \alpha = 1, 2 \quad (10)$$

и граничные условия

$$\begin{cases} y_{0,i_2}^{j+1} = \mu_1(x_{2,i_2}, t_{j+1}), y_{N_1,i_2}^{j+1} = \mu_2(x_{2,i_2}, t_{j+1}), \\ y_{i_1,0}^{j+1} = g_1(x_{1,i_1}, t_{j+1}), y_{i_1,N_2}^{j+1} = g_2(x_{1,i_1}, t_{j+1}), \end{cases} \quad (11)$$

$$i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \alpha = \overline{1, 2}.$$

Для вспомогательной функции \tilde{y} граничные условия требуются только на левой и правой сторонах прямоугольника \bar{G} и задаются в виде

$$\tilde{y}_{0,i_2} = \tilde{\mu}_{1,i_2}, \quad \tilde{y}_{N_1,i_2} = \tilde{\mu}_{2,i_2}; \quad i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \quad (12)$$

где

$$\tilde{\mu}_\alpha = \frac{1}{2} \left(\mu_\alpha^{j+1} + \mu_\alpha^j \right) - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 \left(\mu_\alpha^{j+1} - \mu_\alpha^j \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

В силу (12) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{1,i_2} &= \frac{1}{2} \left(y_{0,i_2}^{j+1} + y_{0,i_2}^j \right) - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 \left(y_{0,i_2}^{j+1} - y_{0,i_2}^j \right), \\ \tilde{\mu}_{2,i_2} &= \frac{1}{2} \left(y_{N_1,i_2}^{j+1} + y_{N_1,i_2}^j \right) - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 \left(y_{N_1,i_2}^{j+1} - y_{N_1,i_2}^j \right). \end{aligned}$$

Смысл граничных условий (11) ясен, а условия (12) станут понятны позднее (в пункте (в)).

Таким образом, разностная задача (8)–(12), соответствующая исходной дифференциальной задаче (7), поставлена. Остановимся на методе решения этой задачи.

Переписывая (8),(9) в виде

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\tau} \tilde{y} + \Lambda_1 \tilde{y} &= -F, \quad F = \frac{2}{\tau} y + \Lambda_2 y + \varphi, \\ -\frac{2}{\tau} \hat{y} + \Lambda_2 \hat{y} &= -\tilde{F}, \quad \tilde{F} = \frac{2}{\tau} \tilde{y} + \Lambda_1 \tilde{y} + \varphi. \end{aligned}$$

Разностную схему (8)–(12) можно представить в виде двух семейств одномерных трехточечных задач:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{h_1^2} \tilde{y}_{i_1-1,i_2} - 2 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h_1^2} \right) \tilde{y}_{i_1,i_2} + \frac{1}{h_1^2} \tilde{y}_{i_1+1,i_2} = -F_{i_1,i_2}, \\ &F_{i_1,i_2} = \frac{2}{\tau} y_{i_1,i_2}^j + \Lambda_2 y_{i_1,i_2}^j + \varphi_{i_1,i_2}^j, \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, \\ &\tilde{y}_{0,i_2} = \tilde{\mu}_{1,i_2}, \quad \tilde{y}_{N_1,i_2} = \tilde{\mu}_{2,i_2}, \quad i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1 \end{aligned} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{h_2^2} y_{i_1,i_2-1}^{j+1} - 2 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h_2^2} \right) y_{i_1,i_2}^{j+1} + \frac{1}{h_2^2} y_{i_1,i_2+1}^{j+1} = -\tilde{F}_{i_1,i_2}, \\ &\tilde{F}_{i_1,i_2} = \frac{2}{\tau} \tilde{y}_{i_1,i_2} + \Lambda_1 \tilde{y}_{i_1,i_2} + \varphi_{i_1,i_2}^j, \quad i_2 = \overline{1, N_2 - 1}, \\ &y_{i_1,0}^{j+1} = q_{1,i_1}^{j+1}, \quad y_{i_1,N_2}^{j+1} = q_{2,i_2}^{j+1}, \quad i_1 = \overline{1, N_1 - 1} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Пусть известно $y = y^j$ и требуется найти $\hat{y} = y^{j+1}$. Для этого сначала решаем прогонки $N_2 - 1$ одномерных задач (13) по направлению x_1 и находим \tilde{y} во всех узлах

сетки ω_h . Затем аналогично решаем $N_1 - 1$ одномерных задач (14) по направлению x_2 и находим искомое решение y^{j+1} во всех узлах сетки ω_h и на горизонтальных границах. К этому следует добавить

$$y_{0,i_2}^{j+1} = \mu_{1,i_2}^{j+1}, \quad y_{N_1,i_2}^{j+1} = \mu_{2,i_2}^{j+1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2}. \quad (15)$$

Таким образом решение y^{j+1} будет найдено на всей сетке $\bar{\omega}_h$.

При переходе от слоя $j + 1$ к слою $j + 2$ эта процедура повторяется, то есть все время происходит чередование направлений.

Прогонка по направлению x_1 требует числа арифметических действий $O(N_1)$, а по $x_2 - O(N_2)$. Таким образом, при переходе от слоя j к слою $j + 1$ требуется $Q = (N_2 - 1)O(N_1) + (N_1 - 1)O(N_2) = O(N_1 N_2)$ действий, то есть алгоритм метода переменных направлений является *экономичным*, если схема (8)–(12) абсолютно устойчива.

Замечание. Здесь $\Lambda_\alpha u = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$. Но если в уравнении (7) $L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$, $k_\alpha > 0$, то в схеме переменных направлений следует положить

$$\Lambda_1 \tilde{y} = (a_\alpha^{j+\frac{1}{2}} \tilde{y}_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad \Lambda_2 y^j = (a_\alpha^j y_{\bar{x}_\alpha}^j)_{x_\alpha}, \quad \Lambda_2 y^{j+1} = (a_\alpha^{j+1} y_{\bar{x}_\alpha}^{j+1})_{x_\alpha},$$

где a_α определяется, например, по формуле

$$a_\alpha = k_\alpha^{(-0,5\alpha)} \text{ или } a_\alpha = \frac{1}{2} \left(k_\alpha^{(-1\alpha)} + k_\alpha \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

в) погрешность аппроксимации и устойчивость СПН

Для исследования аппроксимации схемы (8)–(12) проведем исключение промежуточного значения \tilde{y} . Вычитая (9) из (8), находим

$$\tilde{y} = \frac{\hat{y} + y}{2} - \frac{1}{4} \tau \Lambda_2 (\hat{y} - y), \quad x \in \omega_h. \quad (16)$$

Кроме того, на вертикальных границах $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$ имеем из условия (12)

$$\tilde{y} = \frac{\hat{y} + y}{2} - \frac{1}{4} \tau \Lambda_2 (\hat{y} - y), \quad x_1 = 0, l_1. \quad (17)$$

Подставим (16) и (17) в уравнение (8). Получим при $x \in \omega_h$ разностное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{1}{2} \Lambda_2 (\hat{y} - y) &= \frac{1}{2} \Lambda_1 (\hat{y} + y) - \frac{1}{4} \tau \Lambda_1 \Lambda_2 (\hat{y} - y) + \Lambda_2 y + \varphi, \\ y_t &= \Lambda_1 \left(\frac{\hat{y} + y}{2} \right) + \Lambda_2 \left(\frac{\hat{y} + y}{2} \right) - \frac{1}{4} \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 y_t + \varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Оценим погрешность аппроксимации схемы (18):

$$\begin{aligned} \psi &= -u_t + \Lambda_1 \left(\frac{\hat{u} + u}{2} \right) + \Lambda_2 \left(\frac{\hat{u} + u}{2} \right) - \frac{1}{4} \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 u_t + \varphi = -\dot{u} + O(\tau^2) + \Lambda_1 [\bar{u} + O(\tau^2)] + \\ &+ \Lambda_2 [\bar{u} + O(\tau^2)] - \frac{1}{4} \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 [\dot{u} + O(\tau^2)] + \varphi = -\dot{u} + L_1 \bar{u} + L_2 \bar{u} - \frac{1}{4} \tau^2 \Lambda_1 [L_2 \dot{u} + O(h_2^2) + \\ &+ O(\tau^2)] + \varphi + O(\tau^2 + |h|^2) = \varphi - f - \frac{1}{4} \tau^2 L_1 L_2 \dot{u} + O(\tau^2 + |h|^2) = \varphi - f + O(\tau^2 + |h|^2), \end{aligned}$$

$$x \in \omega_h.$$

Так как граничные и начальные условия аппроксимируются точно, то это означает, что при $\varphi = f + O(\tau^2 + |h|^2)$ СПН (8)–(12) имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + |h|^2)$, $|h| = \max(h_1, h_2)$. Например, можно выбрать $\varphi_i^j = f_i^{j+\frac{1}{2}}$ или $\varphi_i^j = \frac{1}{2}(f_i^j + f_i^{j+1})$.

Устойчивость СПН исследуем по начальным данным методом гармоник. Учитывая, что задача является двумерной ($p = 2$), частное решение строится в виде гармоники

$$y_i^j = q^j e^{I(\varphi_1 i_1 h_1 + \varphi_2 i_2 h_2)}, \quad I = \sqrt{-1}. \quad (19)$$

Подставим гармонику в уравнение (18) при $\varphi \equiv 0$. После сокращений получим

$$\begin{aligned} \frac{q-1}{\tau} &= \frac{q+1}{2} \frac{1}{h_1^2} \left(e^{I\varphi_1 h_1} - 2 + e^{-I\varphi_1 h_1} \right) + \frac{q+1}{2} \frac{1}{h_2^2} \left(e^{I\varphi_2 h_2} - 2 + e^{-I\varphi_2 h_2} \right) - \\ &- \frac{1}{4} \tau (q-1) \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left[e^{I(\varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2)} + e^{I(\varphi_1 h_1 - \varphi_2 h_2)} + e^{I(-\varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2)} + \right. \\ &\left. + e^{I(-\varphi_1 h_1 - \varphi_2 h_2)} - 2e^{I\varphi_1 h_1} - 2e^{-I\varphi_1 h_1} - 2e^{I\varphi_2 h_2} - 2e^{-I\varphi_2 h_2} + 4 \right], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} q-1 &= \frac{1}{2} (q+1) \gamma_1 (e^{I\varphi_1 h_1} + e^{-I\varphi_1 h_1} - 2) + \frac{1}{2} (q+1) \gamma_2 (e^{I\varphi_2 h_2} + e^{-I\varphi_2 h_2} - 2) - \\ &- \frac{1}{4} (q-1) \gamma_1 \gamma_2 (e^{I\varphi_1 h_1} + e^{-I\varphi_1 h_1} - 2)(e^{I\varphi_2 h_2} + e^{-I\varphi_2 h_2} - 2), \end{aligned}$$

где $\gamma_1 = \tau/h_1^2$, $\gamma_2 = \tau/h_2^2$. Отсюда

$$q-1 = -2(q+1) \left(\gamma_1 \sin^2 \frac{\varphi_1 h_1}{2} + \gamma_2 \sin^2 \frac{\varphi_2 h_2}{2} \right) - 4(q-1) \gamma_1 \gamma_2 \sin^2 \frac{\varphi_1 h_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 h_2}{2},$$

откуда получаем

$$q = \frac{1 - 2(\gamma_1 \sin^2 \frac{\varphi_1 h_1}{2} + \gamma_2 \sin^2 \frac{\varphi_2 h_2}{2}) + 4\gamma_1 \gamma_2 \sin^2 \frac{\varphi_1 h_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 h_2}{2}}{1 + 2(\gamma_1 \sin^2 \frac{\varphi_1 h_1}{2} + \gamma_2 \sin^2 \frac{\varphi_2 h_2}{2}) + 4\gamma_1 \gamma_2 \sin^2 \frac{\varphi_1 h_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 h_2}{2}},$$

и, значит, $|q| \leq 1$ при $\forall \varphi_1, \varphi_2$, а также $\forall \gamma_1, \gamma_2$.

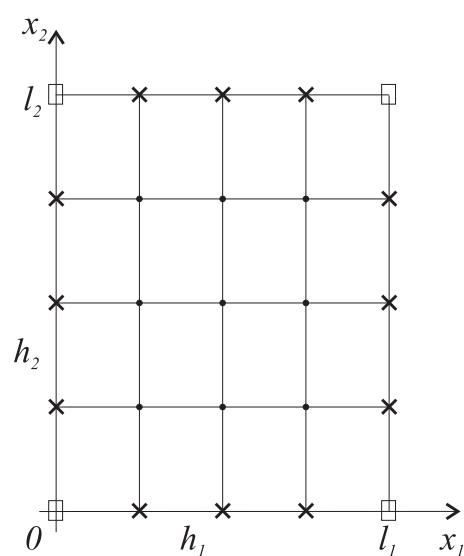
Следовательно, СПН (8)–(12) абсолютно устойчива.

Глава 3

Разностные схемы для стационарных задач математической физики

Большой класс физических задач составляют стационарные задачи, решение которых не зависит от времени, а определяется только пространственными переменными.

§1. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона



Пусть $\bar{G} = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ — прямоугольник со сторонами l_1 и l_2 и границей Γ . В области $\bar{G} = G \cup \Gamma$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

Пуассона:

$$\begin{cases} Lu = L_1u + L_2u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \\ u \Big|_{\Gamma} = \mu(x), \quad x \in \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

Построим в \bar{G} равномерную сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ с шагами $h_1 = l_1/N_1$, $h_2 = l_2/N_2$ и узлами $x_i = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2})$, $i_1 = \overline{0, N_1}$, $i_2 = \overline{0, N_2}$.

Во внутренних узлах заменим оператор Лапласа разностным оператором

$$Lu \sim \Lambda u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}, \quad x \in \omega_h.$$

Правую часть $f(x)$ аппроксимируем сеточной функцией $\varphi(x)$ такой, что $\varphi(x) = f(x) + O(|h|^2)$, $x \in \omega_h$. Например, $\varphi(x) = f(x)$.

Исходной дифференциальной задаче (1) поставим в соответствие разностную задачу:

$$\begin{cases} \Lambda y \equiv y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (2)$$

Разностная задача (2) является СЛАУ и может быть решена любым подходящим методом решения СЛАУ, например: МПИ, Зейделя, релаксации.

Оценим погрешность аппроксимации в точке $x = (x_1, x_2) \in \omega_h$ в классе достаточно гладких функций:

$$\begin{aligned} \psi(x) = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2} + \varphi(x) &= Lu + \frac{1}{12} h_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{1}{12} h_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + O(|h|^4) + \varphi = \\ &= (\varphi - f) + \frac{1}{12} h_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + O(|h|^4) = O(|h|^2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\psi\|_{\omega_h} = O(|h|^2). \quad (3)$$

Поскольку граничные условия аппроксимируются точно, то (3) означает, что разностная схема (2) имеет *второй* порядок аппроксимации.

Исследуем устойчивость и сходимость разностной задаче (2). Для этого представим ее в канонической форме принципа максимума:

$$\begin{cases} -\Lambda y(x) \equiv \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) y(x) - \left[\frac{1}{h_1^2} y^{(-1_1)} + \frac{1}{h_1^2} y^{(+1_1)} + \frac{1}{h_2^2} y^{(-1_2)} + \frac{1}{h_2^2} y^{(+1_2)} \right] = \\ = \varphi(x), \quad x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h \end{cases} \quad (4)$$

Схема приведена к виду

$$A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi)y(\xi) = F(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} > 0, \quad F(x) = \varphi(x), \\ B(x, x^{(\pm 1_1)}) &= \frac{1}{h_1^2} > 0, \quad B(x, x^{(\pm 1_2)}) = \frac{1}{h_2^2} > 0, \\ D(x) &= A(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi) = 0 \text{ при } x \in \omega_h, \\ A(x) &= 1 > 0, \quad F(x) = \mu(x), \quad \Pi'(x) = \emptyset, \\ D(x) &= A(x) = 1 > 0 \text{ при } x \in \gamma_h. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты схемы (4) удовлетворяют условиям принципа максимума при любых h_1, h_2 .

Согласно следствию 3 принципа максимума, схема 4 *устойчива по граничным условиям*. С помощью теоремы сравнения принципа максимума можно доказать, что схема (4) *абсолютно устойчива*. Для этого выберем функцию

$$\bar{y}(x) = c_1 [L^2 - (x_1^2 + x_2^2)] + c_2, \quad L^2 = l_1^2 + l_2^2 \quad (5)$$

в качестве мажоранты, где $c_1 = \text{const} \geq 0, c_2 = \text{const} \geq 0$, которые мы выберем позже.

Вычислим

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x) &= -\Lambda \bar{y}(x) = -\bar{y}_{\bar{x}_1 x_1} - \bar{y}_{\bar{x}_2 x_2} = c_1 [(x_1^2)_{\bar{x}_1 x_1} + (x_2^2)_{\bar{x}_2 x_2}] = \\ &= c_1 \left[\frac{(x_1 - h_1)^2 - 2x_1^2 + (x_1 + h_1)^2}{h_1^2} + \frac{(x_2 - h_2)^2 - 2x_2^2 + (x_2 + h_2)^2}{h_2^2} \right] = 4c_1, \quad x \in \omega_h. \end{aligned}$$

$$\bar{\mu}(x) = \bar{y}(x) \geq c_2, \quad x \in \gamma_h.$$

Выбирая

$$\begin{aligned} 4c_1 &= \|\varphi\|_{\omega_h} = \max_{x \in \omega_h} |\varphi(x)| \geq |\varphi(x)|, \\ c_2 &= \|\mu\|_{\gamma_h} = \max_{x \in \gamma_h} |\mu(x)| \geq |\mu(x)|, \end{aligned}$$

будем иметь задачу

$$\begin{cases} \Lambda \bar{y}(x) = -\bar{\varphi}(x), & x \in \omega_h, \\ \bar{y}(x) = \bar{\mu}(x), & x \in \gamma_h, \end{cases}$$

где $\bar{\varphi}(x) \geq |\varphi(x)|$ при $x \in \omega_h$, $\bar{\mu}(x) \geq |\mu(x)|$ при $x \in \gamma_h$.

По теореме сравнения справедлива оценка

$$|y(x)| \leq \bar{y}(x) \quad \forall x \in \bar{\omega}_h$$

для решения задачи (4), или

$$|y(x)| \leq \bar{y}(x) \leq c_1 L^2 + c_2 = \frac{L^2}{4} \|\varphi(x)\|_{\omega_h} + \|\mu\|_{\gamma_h}. \quad (6)$$

Неравенство (6) означает, что схема (4), т. е. (2), *устойчива при любых h_1, h_2* .

По *теореме сходимости* из (3), (6) следует, что

$$\|z\|_{\bar{\omega}_h} = \|y - u\|_{\bar{\omega}_h} = O(h^2),$$

т. е. схема (2) имеет *второй порядок сходимости* (схема (2) равномерно сходится со скоростью $O(|h|^2)$).

§2. Консервативные схемы. Интегро-интерполяционный метод построения консервативных схем (метод контрольного объема)

Уравнения математической физики выражают некоторые физические законы сохранения. Например, уравнение теплопроводности выражает закон сохранения тепла в любом объеме, принадлежащем области определения задачи.

Дифференциальные уравнения математической физики получаются из законов сохранения (*интегральных уравнений баланса*) при достаточной гладкости функций, входящих в эти уравнения. То есть, основным уравнением, описывающим физический процесс, является *уравнение баланса*. Поэтому естественно строить разностную схему, аппроксимирующую не дифференциальное уравнение, а соответствующее ему уравнение баланса.

В теории и практике численных методов для уравнений математической физики широко известен *интегро-интерполяционный метод* построения разностных схем, когда дискретизации на сеточном шаблоне подвергается не дифференциальное уравнение, а соответствующее ему интегральное уравнение баланса. Метод позволяет конструировать схемы, отражающие в дискретной форме интегральные законы сохранения на сколь угодно больших и сколько угодно малых участках сеточной области. Такие схемы называются *консервативными*.

Продemonстрируем интегро-интерполяционный метод на примере задачи Дирихле в прямоугольнике стационарного двумерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} Lu \equiv \nabla \cdot (k \nabla u) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \\ u|_{\Gamma} = \mu(x), \quad x \in \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $k = k(x) > 0$ — коэффициент теплопроводности, G — прямоугольник с границей Γ , $f(x)$ — функция, описывающая мощность и распределение внутренних источников (стоков) тепла в области G , $u(x)$ — искомая температура в точке $x \in \bar{G}$.

Для построения консервативной схемы необходимо сначала найти выражение для закона сохранения, соответствующего уравнению (1).

С этой целью проинтегрируем уравнение (1) по произвольной площади (объему) $D \subseteq \bar{G}$:

$$\iint_D \left[\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + f \right] dx_1 dx_2 = 0.$$

Переходя от двойного интеграла к контурному по формуле Грина (Остроградского),

имеем

$$\oint_C (L_1 u dx_2 - L_2 u dx_1) + \iint_D f dx_1 dx_2 = 0, \quad (2)$$

где C — граница области D ,

$$L_\alpha u = k \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Замечание 1. Уравнение баланса (2) можно записать по-другому:

$$\oint_C q dC = \iint_D f dx_1 dx_2,$$

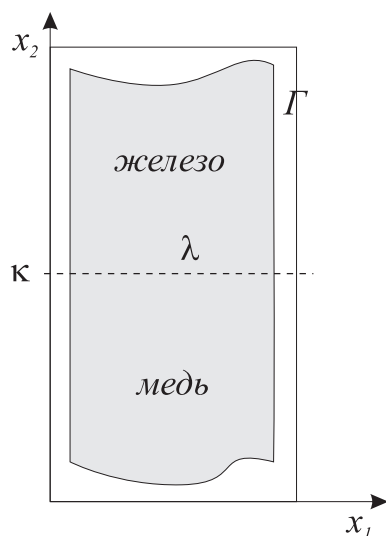
где $q = -k \frac{\partial u}{\partial n}$ — тепловой поток в точке $x \in C$, n — внешняя нормаль к контуру C .

Первый интеграл определяет количество тепла, которое проходит через контур C в единицу времени, то есть разность между количеством тепла, поступившего в область D и количеством тепла, вышедшего из области D через контур C .

Второй интеграл представляет собой количество тепла, выделенного (поглощенного) в объеме D за счет внутренних источников (стоков). Следовательно, соотношение (2) выражает *закон сохранения тепла в области $D \subseteq \bar{G}$* .

Замечание 2. Уравнения (1) и (2) эквивалентны лишь при условии, что функции $L_1 u$, $L_2 u$ непрерывно дифференцируемы.

Пример:



$$[u] = 0, \left[k \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] = 0$$

— условия сопряжения на λ (температура и тепловой поток).

На границе раздела λ уравнение баланса (2) справедливо, а дифференциальное уравнение (1), вообще говоря, не имеет смысла.

$$k = \begin{cases} k_1 = \text{const при } x_2 \leq \kappa, \\ k_2 = \text{const при } x_2 > \kappa, \end{cases}$$

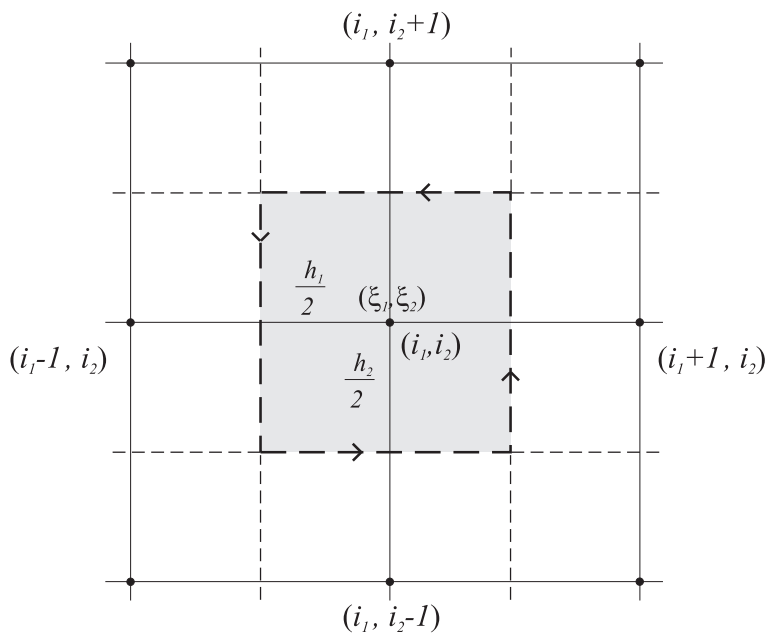
$$u(x_1, \kappa - 0) = u(x_1, \kappa + 0),$$

$$k_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}(\kappa - 0) = k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(\kappa + 0).$$

Введем в прямоугольнике \bar{G} равномерную сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ шагами h_1, h_2 и узлами $x_i = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2})$, $x_{1,i_1} = i_1 h_1$, $i_1 = \overline{0, N_1}$, $x_{2,i_2} = i_2 h_2$, $i_2 = \overline{0, N_2}$.

Чтобы построить консервативную схему в узле $x_i = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2})$, $i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}$. Выберем в качестве области интегрирования D элементарную площадку D_i (контрольный объем), ограниченную линиями

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(-0,5)} = x_{1,i_1-\frac{1}{2}} = x_{1,i_1} - \frac{1}{2}h_1, \\ x_1 &= x_1^{(+0,5)} = x_{1,i_1+\frac{1}{2}} = x_{1,i_1} + \frac{1}{2}h_1, \\ x_2 &= x_2^{(-0,5)} = x_{2,i_2-\frac{1}{2}} = x_{2,i_2} - \frac{1}{2}h_2, \\ x_2 &= x_2^{(+0,5)} = x_{2,i_2+\frac{1}{2}} = x_{2,i_2} + \frac{1}{2}h_2. \end{aligned}$$



Интеграл по контуру в (2) тогда трансформируется следующим образом:

$$\oint_C (L_1 u dx_2 - L_2 u dx_1) = - \int_{x_1^{(-0,5)}}^{x_1^{(+0,5)}} L_2 u \Big|_{x_2=x_2^{(-0,5)}} dx_1 + \int_{x_2^{(-0,5)}}^{x_2^{(+0,5)}} L_1 u \Big|_{x_1=x_1^{(+0,5)}} dx_2 - \\ - \int_{x_1^{(+0,5)}}^{x_1^{(-0,5)}} L_2 u \Big|_{x_2=x_2^{(+0,5)}} dx_1 + \int_{x_2^{(+0,5)}}^{x_2^{(-0,5)}} L_1 u \Big|_{x_1=x_1^{(-0,5)}} dx_2.$$

Следовательно, для контрольного объема D_i уравнение баланса (2) примет вид

$$h_1 \left[\int_{x_2^{(-0,5)}}^{x_2^{(+0,5)}} L_1 u \Big|_{x_1=x_1^{(-0,5)}} dx_2 \right]_{x_1} + h_2 \left[\int_{x_1^{(-0,5)}}^{x_1^{(+0,5)}} L_2 u \Big|_{x_2=x_2^{(-0,5)}} dx_1 \right]_{x_2} + \\ + \int_{x_1^{(-0,5)}}^{x_1^{(+0,5)}} \int_{x_2^{(-0,5)}}^{x_2^{(+0,5)}} f dx_1 dx_2 = 0, \quad (3)$$

где $[\dots]_{x_1}, [\dots]_{x_2}$ — правые разностные производные.

Теперь, следуя интегро-интерполяционному методу, аппроксимируем уравнение баланса (3) путем интерполяции подынтегральных функций. От способа интерполяции зависят устойчивость, экономичность и аппроксимационные свойства разностной схемы.

Аппроксимируем подынтегральные функции $L_1 u, L_2 u$ некоторыми постоянными значениями на отрезке интегрирования, предполагая, что температура $u(x_1, x_2)$ и тепловые потоки $L_1 u = k \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $L_2 u = k \frac{\partial u}{\partial x_2}$ являются непрерывными функциями, а коэффициент теплопроводности $k(x_1, x_2)$ и производные $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ могут содержать разрывы I рода.

Имеем для первого интеграла:

$$L_1 u = k \frac{\partial u}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{k} L_1 u \text{ при } x_1 = x_1^{(-0,5)}, x_2^{(-0,5)} \leq x_2 \leq x_2^{(+0,5)}.$$

Проинтегрируем полученное соотношение по x_1 от $x_1 = x_1^{(-1)}$ до $x_1 = x_1^0$ при любом фиксированном $x_2^{(-0,5)} \leq x_2 \leq x_2^{(+0,5)}$:

$$u(x_1^0, x_2) - u(x_1^{(-1)}, x_2) = \int_{x_1^{(-1)}}^{x_1^0} \frac{1}{k} L_1 u dx_1.$$

Пользуясь непрерывностью $L_1 u$, сделаем приближенную замену:

$$\begin{aligned}
 u(x_1^0, x_2) - u(x_1^{(-1)}, x_2) &\approx L_1 u \Big|_{x_1=x_1^{(-0,5)}} \int_{x_1^{(-1)}}^{x_1^0} \frac{dx_1}{k} \text{ при } \forall x_2^{(-0,5)} \leq x_2 \leq x_2^{(+0,5)} \Rightarrow \\
 L_1 u \Big|_{x_1=x_1^{(-0,5)}} &\approx [u(x_1^0, x_2) - u(x_1^{(-1)}, x_2)] \left(\int_{x_1^{(-1)}}^{x_1^0} \frac{dx_1}{k} \right)^{-1} \text{ при } \forall x_2^{(-0,5)} \leq x_2 \leq x_2^{(+0,5)} \Rightarrow \\
 \int_{x_2^{(-0,5)}}^{x_2^{(+0,5)}} L_1 u \Big|_{x_1=x_1^{(-0,5)}} dx_2 &\approx \int_{x_2^{(-0,5)}}^{x_2^{(+0,5)}} [u(x_1^0, x_2) - u(x_1^{(-1)}, x_2)] \left(\int_{x_1^{(-1)}}^{x_1^0} \frac{dx_1}{k} \right)^{-1} dx_2 \approx \\
 &\approx (u - u^{(-1)}) \int_{x_2^{(-0,5)}}^{x_2^{(+0,5)}} \left(\int_{x_1^{(-1)}}^{x_1^0} \frac{dx_1}{k} \right)^{-1} dx_2 = h_1 h_2 u_{\bar{x}_1} a_1, \quad a_1 = \frac{1}{h_2} \int_{x_2^{(-0,5)}}^{x_2^{(+0,5)}} \left(\int_{x_1^{(-1)}}^{x_1^0} \frac{dx_1}{k} \right)^{-1} dx_2.
 \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\int_{x_1^{(-0,5)}}^{x_1^{(+0,5)}} L_2 u \Big|_{x_2=x_2^{(-0,5)}} dx_1 \approx h_1 h_2 u_{\bar{x}_2} a_2, \quad a_2 = \frac{1}{h_1} \int_{x_1^{(-0,5)}}^{x_1^{(+0,5)}} \left(\int_{x_2^{(-1)}}^{x_2^0} \frac{dx_2}{k} \right)^{-1} dx_1.$$

Используя эти приближения в уравнении баланса (3), деленном на $h_1 h_2$, получаем консервативную разностную схему:

$$\begin{cases} \Lambda y \equiv (a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -\varphi, & x = (x_1^0, x_2^0) \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_1^{(-0,5)}}^{x_1^{(+0,5)}} \int_{x_2^{(-0,5)}}^{x_2^{(+0,5)}} f dx_1 dx_2, \\
 a_1 &= \frac{1}{h_2} \int_{x_2^{(-0,5)}}^{x_2^{(+0,5)}} \left(\int_{x_1^{(-1)}}^{x_1^0} \frac{dx_1}{k} \right)^{-1} dx_2, \\
 a_2 &= \frac{1}{h_1} \int_{x_1^{(-0,5)}}^{x_1^{(+0,5)}} \left(\int_{x_2^{(-1)}}^{x_2^0} \frac{dx_2}{k} \right)^{-1} dx_1.
 \end{aligned} \quad (5)$$

Схема (4),(5) есть разностное представление интегрального закона сохранения (2) для контрольного объема D_i .

Можно показать, что консервативная схема (4),(5) имеет второй порядок аппроксимации как в случае гладких коэффициентов $k, f \in C^{(2)}(\bar{G})$, так и в случае, если эти коэффициенты имеют разрывы I рода.

Например, в случае гладких коэффициентов будем иметь, используя кубатурную формулу средних в формулах (5):

$$\varphi = f + O(|h|^2), \quad a_1 = k^{(-0,5_1)} + O(|h|^2), \quad a_2 = k^{(-0,5_2)} + O(|h|^2).$$

Таким образом, для погрешности аппроксимации схемы (4) получаем

$$\begin{aligned} \psi &= (a_1 u_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} + \varphi = (k^{(-0,5_1)} u_{\bar{x}_1})_{x_1} + (k^{(-0,5_2)} u_{\bar{x}_2})_{x_2} + f + \\ &+ (O(|h|^2) u_{\bar{x}_1})_{x_1} + (O(|h|^2) u_{\bar{x}_2})_{x_2} + O(|h|^2) = Lu + f + O(|h|^2) = O(|h|^2). \end{aligned}$$

В случае гладких коэффициентов можно, например, положить

$$\varphi = f = f_{i_1 i_2}, \quad a_1 = k^{(-0,5_1)} = k_{i_1 - \frac{1}{2}, i_2}, \quad a_2 = k^{(-0,5_2)} = k_{i_1, i_2 - \frac{1}{2}},$$

сохраняя второй порядок аппроксимации схемы (4).

Раскрывая обозначения для разностных производных в схеме (4), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{h_1} \left(a_1^{(+1_1)} \frac{y^{(+1_1)} - y}{h_1} - a_1 \frac{y - y^{(-1_1)}}{h_1} \right) + \frac{1}{h_2} \left(a_2^{(+1_2)} \frac{y^{(+1_2)} - y}{h_2} - a_2 \frac{y - y^{(-1_2)}}{h_2} \right) = -\varphi, \\ x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \end{array} \right.$$

Теперь очевидно, что схема (4),(5) удовлетворяет принципу максимума при любых h_1, h_2 .

Упражнение. Показать верность последнего утверждения.

Используя это обстоятельство, можно показать, что эта схема абсолютно устойчива.

Для ее реализации можно применять известные итерационные методы решения СЛАУ.

§3. Итерационные методы решения разностных задач

Аппроксимация краевых задач математической физики разностными задачами приводит, как правило, к СЛАУ $Ay = f$.

В результате решения этой системы искомая сеточная функция $y(x)$ определяется во всех узлах сетки $\bar{\omega}_h$. Матрица A этой системы имеет большой порядок, равный числу узлов сетки. Если решается p -мерная задача, то число узлов сетки $\bar{\omega}_h$ равно $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_p$, где N_α — число узлов по переменной x_α , $\alpha = \overline{1, p}$. Таким образом, при $p = 2, 3$ число уравнений может быть очень большим. Например, положив $N_1 = N_2 = 100$ при $p = 2$, имеем $N = 10^4$, а положив $N_1 = N_2 = N_3 = 100$ при $p = 3$, имеем $N = 10^6$ уравнений.

Матрица A , как правило, имеет ленточную структуру, то есть много нулевых элементов. Эта особенность позволяет разрабатывать специальные экономичные алгоритмы.

Как и для всякой СЛАУ, существуют прямые и итерационные методы решения разностных задач. Мы остановимся лишь на итерационных методах, которые являются наиболее универсальным средством решения разностных задач.

а) двухслойные итерационные схемы

Пусть требуется решить разностную задачу

$$\begin{cases} Ay = \varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (1)$$

Решение задачи (1) ищется в пространстве сеточных функций H_h , определенных на сетке $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$. Пусть $\overset{\circ}{H}_h \subseteq H_h$ — пространство сеточных функций, определенных на сетке $\bar{\omega}_h$ и обращающихся в ноль при $x \in \gamma_h$. Если $\gamma_h = \emptyset$, то $\overset{\circ}{H}_h = H_h$.

Оператор A называется *самосопряженным* в $\overset{\circ}{H}_h$ ($A = A^*$), если $\forall u, v \in \overset{\circ}{H}_h$ выполняется $(Au, v) = (u, Av)$.

Оператор A называется *положительно определенным* в $\overset{\circ}{H}_h$ ($A > 0$), если $\forall u \in \overset{\circ}{H}_h$ имеем $(Au, u) \geq 0$, причем $(Au, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Будем обозначать y^n итерационное приближение номер n к точному решению $y(x)$ задачи (1).

Двухслойной итерационной схемой будем называть всякий линейный одношаго-

вый итерационный метод решения задачи (1), представимый в виде

$$\begin{cases} B \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^n = \varphi, & x \in \omega_h, \\ y^{n+1} = \mu(x), & x \in \gamma_h, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2)$$

где $y^0 \in H_h$; $\tau > 0$ — параметр релаксации, B — линейный оператор (матрица).

Итерационные методы различаются матрицей B и параметром τ , выбор которых подчиняется требованиям сходимости $y^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ и экономичности, то есть получению решения с заданной точностью ε за минимальное число арифметических действий.

Теорема 1.

(Достаточное условие сходимости двухслойных итерационных схем)

Пусть $A = A^* > 0$ в пространстве сеточных функций $\overset{\circ}{H}_h$. Тогда, если

$$B - \frac{\tau}{2}A > 0 \text{ в пространстве } \overset{\circ}{H}_h, \quad (3)$$

то итерационный процесс (2) сходится.

Доказательство.

Рассмотрим итерационную погрешность $\varepsilon^n = y^n - y \in \overset{\circ}{H}_h$. Ввиду (1) и (2) для нее получаем однородную задачу

$$\begin{cases} B \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau} + A\varepsilon^n = 0, & x \in \omega_h, \\ \varepsilon^{n+1} = 0, & x \in \gamma_h, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \varepsilon^0 = y^0 - y. \end{cases} \quad (4)$$

Перепишем уравнение (4) в виде

$$(B - \frac{\tau}{2}A) \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau} + \frac{1}{2}A(\varepsilon^n + \varepsilon^{n+1}) = 0$$

и умножим его скалярно на $2(\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n)$:

$$\begin{aligned} 2 \left((B - \frac{\tau}{2}A) \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau}, \varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n \right) + \left(A(\varepsilon^n + \varepsilon^{n+1}), \varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\tau \left((B - \frac{\tau}{2}A) \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau}, \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau} \right) + (A\varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+1}) - (A\varepsilon^n, \varepsilon^n) + \\ + (A\varepsilon^n, \varepsilon^{n+1}) - (A\varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n) &= 0. \end{aligned}$$

Последние две скобки взаимно приводятся в силу свойства самосопряженности оператора A . Таким образом, имеем:

$$2\tau \left((B - \frac{\tau}{2}A) \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau}, \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau} \right) + (A\varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+1}) - (A\varepsilon^n, \varepsilon^n) = 0. \quad (5)$$

Отсюда, в силу (3), имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq (A\varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+1}) &= (A\varepsilon^n, \varepsilon^n) - 2\tau \left((B - \frac{\tau}{2}A) \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau}, \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau} \right) < \\ &< \left[(A\varepsilon^n, \varepsilon^n) > 0, \text{ так как } \varepsilon^n \neq 0, \text{ вторая скобка } > 0 \text{ в силу } \varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n \neq 0 \right] < \\ &< (A\varepsilon^n, \varepsilon^n) < (A\varepsilon^{n-1}, \varepsilon^{n-1}) < \dots < (A\varepsilon^0, \varepsilon^0). \end{aligned}$$

Так как числовая последовательность $(A\varepsilon^n, \varepsilon^n), n = 0, 1, 2, \dots$ является монотонно убывающей и ограниченной, то она сходится. Покажем, что $(A\varepsilon^n, \varepsilon^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Поскольку $(A\varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+1}) - (A\varepsilon^n, \varepsilon^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то из (5) следует

$$\begin{aligned} ((B - \frac{\tau}{2}A)(\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n), \varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow [(3)] \varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow [(4)] \\ &\Rightarrow A\varepsilon^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (A\varepsilon^n, \varepsilon^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \varepsilon^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

При доказательстве мы предполагали, что $\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots$. Если $\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n = 0$, то в силу (4) получаем $A\varepsilon^n = 0$. Но это возможно тогда и только тогда, когда $\varepsilon^n = y^n - y = 0$, то есть $y^n = y \Rightarrow y^{n+1} = y$ и т. д.

б) свойства разностного оператора Лапласа

В качестве примера рассмотрим разностный оператор

$$A = \Lambda y = -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad x \in \omega_h.$$

Покажем, что он является самосопряженным и положительно определенным в пространстве $\overset{\circ}{H}_h$.

Пусть $u, v \in \overset{\circ}{H}_h$. Тогда

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left[\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) u_{ij} - \frac{1}{h_1^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - \frac{1}{h_2^2} (u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) \right] v_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) u_{ij} v_{ij} - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{1}{h_1^2} u_{ij} v_{i+1,j} - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{1}{h_1^2} u_{ij} v_{i-1,j} - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{1}{h_2^2} u_{ij} v_{i,j+1} - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{1}{h_2^2} u_{ij} v_{i,j-1} = \\
&= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left[\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) v_{ij} - \frac{1}{h_1^2} (v_{i-1,j} + v_{i+1,j}) - \frac{1}{h_2^2} (v_{i,j-1} + v_{i,j+1}) \right] u_{ij} = (\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}). \\
(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left[\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) u_{ij}^2 - \frac{1}{h_1^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) u_{ij} - \frac{1}{h_2^2} (u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) u_{ij} \right] = \\
&= \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{1}{h_1^2} \sum_{i=1}^{N_1} (u_{i-1,j} - u_{ij})^2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \frac{1}{h_2^2} \sum_{j=1}^{N_2} (u_{i,j-1} - u_{ij})^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

причем $(Au, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u(x) = \text{const}$. Но, поскольку $u \in \mathring{H}_h$, то $u(x) = 0$. Таким образом, $(Au, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Упражнение. Доказать, что разностный оператор консервативной схемы

$$A = -\Lambda y = -(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} - (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2}$$

является самосопряженным и положительно определенным в \mathring{H}_h .

в) метод простых итераций

В качестве примера рассмотрим разностную задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике

$$\begin{cases} Ay = -\Lambda y = -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} = \varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (6)$$

В индексной форме:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) y_{ij} - \frac{1}{h_1^2} (y_{i-1,j} + y_{i+1,j}) - \frac{1}{h_2^2} (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = \varphi_{ij}, \\ i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \\ y_{0j} = \mu_{0j}, \quad y_{N_1 j} = \mu_{N_1 j}, \quad j = \overline{0, N_2}, \\ y_{i0} = \mu_{i0}, \quad y_{i N_2} = \mu_{i N_2}, \quad i = \overline{0, N_1}. \end{cases} \quad (7)$$

Матрица СЛАУ (7) является трехдиагональной, причем диагональным элементам соответствуют y_{ij} , $i = \overline{0, N_1}$, $j = \overline{0, N_2}$.

Алгоритм метода простых итераций:

$$\begin{cases} y_{ij}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}} \left(\frac{1}{h_1^2} (y_{i-1,j}^n + y_{i+1,j}^n) + \frac{1}{h_2^2} (y_{i,j-1}^n + y_{i,j+1}^n) + \varphi_{ij} \right), \\ i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, \\ y_{0j}^{n+1} = \mu_{0j}, \quad y_{N_1 j}^{n+1} = \mu_{N_1 j}, \quad j = \overline{0, N_2}, \\ y_{i0}^{n+1} = \mu_{i0}, \quad y_{iN_2}^{n+1} = \mu_{iN_2}, \quad i = \overline{0, N_1}. \end{cases} \quad (8)$$

Следствие 1. Метод простых итераций (8) сходится.

Доказательство.

Запишем (8) в матричной форме:

$$y^{n+1} = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}} (\Lambda y^n + \varphi) + y^n,$$

или

$$\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) (y^{n+1} - y^n) = \Lambda y^n + \varphi.$$

Следовательно, МПИ (8) имеет канонический вид (2), где

$$B = E, A = -\Lambda, \tau = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}}.$$

Поскольку матрица $A = -\Lambda = A^* > 0$ в \mathring{H}_h , то согласно теореме для сходимости МПИ (8) достаточно, чтобы выполнялось условие $B - \frac{\tau}{2}A = E + \frac{\tau}{2}\Lambda > 0$, где

$$\tau = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}}.$$

Проверим это для $u \in \mathring{H}_h$:

$$\begin{aligned} ((E + \frac{\tau}{2}\Lambda)u, u) &= (u, u) + \frac{\tau}{2}(\Lambda u, u) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} u_{ij}^2 + \frac{\tau}{2} \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{h_1^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h_2^2} (u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - \tau u_{ij}^2 \right] = \sum_i \sum_j \left(\frac{1}{2} u_{ij}^2 + \frac{\tau}{h_1^2} u_{i-1,j} u_{ij} + \frac{\tau}{h_2^2} u_{i,j-1} u_{ij} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left[\frac{1}{2} u_{ij}^2 + \frac{\tau}{2h_1^2} (u_{ij} + u_{i-1,j})^2 + \frac{\tau}{2h_2^2} (u_{ij} + u_{i,j-1})^2 - \frac{1}{2} u_{ij}^2 \right]. \end{aligned}$$

Это выражение либо > 0 , либо $= 0$ (тогда и только тогда, когда $u = 0$).

Следовательно, МПИ (8) для задачи (1) сходится.

Что и требовалось доказать.

г) методы Зейделя и релаксации

Метод Зейделя для задачи (6):

$$\begin{cases} y_{ij}^{n+1} = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}} \left[\frac{1}{h_1^2} (y_{i-1,j}^{n+1} + y_{i+1,j}^n) + \frac{1}{h_2^2} (y_{i,j-1}^{n+1} + y_{i,j+1}^n) + \varphi_{ij} \right], \\ i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, \\ y_{0j}^{n+1} = \mu_{0j}, y_{N_1 j}^{n+1} = \mu_{N_1 j}, j = \overline{0, N_2}, \\ y_{i0}^{n+1} = \mu_{i0}, y_{iN_2}^{n+1} = \mu_{iN_2}, i = \overline{0, N_1}. \end{cases} \quad (9)$$

Метод релаксации:

$$\begin{cases} y_{ij}^{n+1} = (1 - \tau)y_{ij}^n + \tau \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}} \left[\frac{1}{h_1^2} (y_{i-1,j}^{n+1} + y_{i+1,j}^n) + \frac{1}{h_2^2} (y_{i,j-1}^{n+1} + y_{i,j+1}^n) + \varphi_{ij} \right], \\ i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, \end{cases} \quad (10)$$

где τ — параметр релаксации. При $\tau = 1$ этот метод совпадает с методом Зейделя.

Следствие 2. Если параметр релаксации τ удовлетворяет условию $0 < \tau < 2$, то метод релаксации (10) сходится.

Доказательство.

Представим (10) в матричной форме:

$$Dy^{n+1} = (1 - \tau)Dy^n + \tau \left[\Lambda y^n + \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) y^n + \Lambda^-(y^{n+1} - y^n) + \varphi \right],$$

где

$$D = \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) E, \quad (\Lambda^- y)_{ij} = \frac{1}{h_1^2} y_{i-1,j} + \frac{1}{h_2^2} y_{i,j-1}, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1} \Rightarrow \\ \left(D - \tau \Lambda^- \right) \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} - \Lambda y^n = \varphi.$$

Следовательно, метод релаксации (10) имеет вид (2) при $A = -\Lambda$, $B = D - \tau \Lambda^-$. Поскольку $A = -\Lambda = A^* > 0$ в $\overset{\circ}{H}_h$, то, согласно общей теореме о сходимости, достаточно выбирать $\tau > 0$, при которых $B - \frac{1}{2}\tau A > 0$ в $\overset{\circ}{H}_h$.

Пусть $u \in \overset{\circ}{H}_h \Rightarrow$:

$$\begin{aligned} ((B - \frac{1}{2}\tau A)u, u) &= ((D - \tau\Lambda^- + \frac{1}{2}\tau\Lambda)u, u) = (Du, u) + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left[\frac{1}{h_1^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \right. \\ &+ \frac{1}{h_2^2} (u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) u_{ij} - \frac{2}{h_1^2} u_{i-1,j} - \frac{2}{h_2^2} u_{i,j-1} \left. \right] u_{ij} = \\ &= \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) \left(1 - \frac{\tau}{2} \right) (u, u) > 0 \text{ при } 0 < \tau < 2. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 3. Метод Зейделя (9) сходится.

Замечание 1. В случае задачи Дирихле (6) для уравнения Пуассона в прямоугольнике теория численных методов дает оптимальное значение параметра релаксации

$$\tau_{opt} = 2 / \left\{ 1 + \sqrt{1 - \left[1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right]^2} \right\}, \quad (11)$$

при котором достигается максимальная скорость сходимости метода релаксации (10). Очевидно, что $1 < \tau_{opt} < 2$. Поэтому метод релаксации (10) при $\tau = \tau_{opt}$ называют *методом верхней релаксации*.

Замечание 2. Для того, чтобы получить решение задачи (6) с точностью ε по методу верхней релаксации (10), (11) при $h_1 = h_2 = h = \frac{1}{N}$, $l_1 = l_2 = 1$, требуется

$$n_{min}(\varepsilon) = O(N \ln \frac{1}{\varepsilon})$$

итераций, что значительно меньше, чем по методу Зейделя ($\tau = 1$), когда

$$n_{min}(\varepsilon) = O(N^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}).$$

В свою очередь, метод Зейделя является более быстрым, чем метод простых итераций.

Глава 4

Численные методы решения задач математической физики в областях сложной формы

Наиболее распространенными методами решения задач математической физики в областях сложной формы являются метод замены переменных, разностный метод, метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ).

Метод замены переменных: ищется преобразование, переводящее область сложной формы в простую область — как правило, прямоугольной формы. Затем задача математической физики, переформулированная в новых переменных, решается в прямоугольнике обычным методом конечных разностей на прямоугольной сетке.

Недостатки данного метода:

- 1) чтобы найти преобразование переменных, в общем случае нужно решать дополнительную нелинейную дифференциальную краевую задачу,
- 2) в новых переменных усложняется вид исходной дифференциальной задачи МФ. В частности, в уравнениях возникают смешанные производные, аппроксимация которых, как правило, ухудшает устойчивость разностной схемы.

§1. Разностный метод

Рассмотрим задачу Дирихле

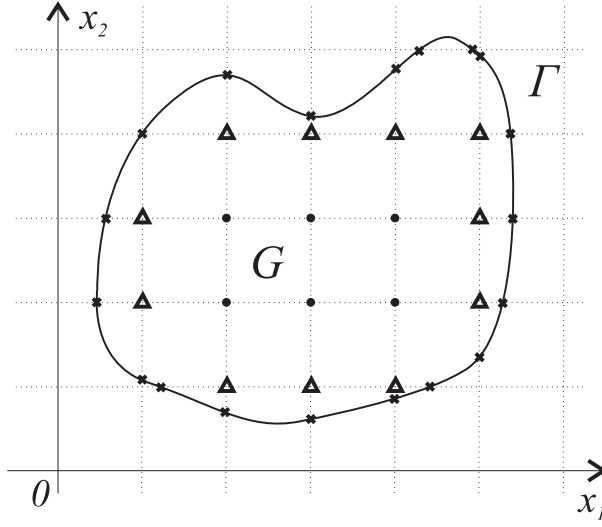
$$\begin{cases} Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), & x = (x_1, x_2) \in G, \\ u|_{\Gamma} = \mu(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{G} = G \cup \Gamma$ — область сложной формы.

Вводится прямоугольная сетка, покрывающая всю область \bar{G} , т. е. строятся два семейства прямых

$$\begin{cases} x_1 = x_{1,i_1}, & i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ x_2 = x_{2,i_2}, & i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

так, что $x_{1,i_1} > x_{1,i_1-1}$, $x_{2,i_2} > x_{2,i_2-1}$.



Точки пересечения этих прямых

$$x = x_i = (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}),$$

лежащие внутри области \bar{G} , т. е. $x_i \in G$, назовем *внутренними узлами*. Множество внутренних узлов обозначим $\hat{\omega}_h \subset G$.

Точки пересечения этих прямых с границей Γ назовем *граничными узлами*. Это множество обозначим $\hat{\gamma}_h \subset \Gamma$.

Множество внутренних и граничных узлов назовем *сеткой* $\hat{\omega}_h = \hat{\omega}_h \cup \hat{\gamma}_h$ в области $\bar{G} = G \cup \Gamma$.

Если область \bar{G} , в которой ищется решение задачи (1), имеет криволинейную границу, то построить равномерную сетку $\bar{\omega}_h \subset \bar{G}$, вообще говоря, невозможно.

Для любых $x = (x_1, x_2) \in \hat{\omega}_h$ рассмотрим разностные операторы на нерегулярном шаблоне:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^* y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} &= \frac{1}{\bar{h}_1} \left(\frac{y^{(+1)} - y}{h_1^{(+1)}} - \frac{y - y^{(-1)}}{h_1} \right) = \\ &= \frac{1}{\bar{h}_1} \left(\frac{y(x_1 + h_1^{(+1)}, x_2) - y(x_1, x_2)}{h_1^{(+1)}} - \frac{y(x_1, x_2) - y(x_1 - h_1, x_2)}{h_1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_2^* y = y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} &= \frac{1}{\bar{h}_2} \left(\frac{y^{(+1_2)} - y}{h_2^{(+1)}} - \frac{y - y^{(-1_2)}}{h_2} \right) = \\ &= \frac{1}{\bar{h}_2} \left(\frac{y(x_1, x_2 + h_2^{(+1)}) - y(x_1, x_2)}{h_2^{(+1)}} - \frac{y(x_1, x_2) - y(x_1, x_2 - h_2)}{h_2} \right),\end{aligned}$$

где

$$\bar{h}_\alpha = \frac{1}{2} \left(h_\alpha + h_\alpha^{(+1)} \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

h_1 — расстояние между центральным узлом x шаблона $\Pi(x) \subset \hat{\omega}_h$ и периферийным узлом $x^{(-1_1)} = (x_1^{(-1)}, x_2) \in \Pi'(x) \subset \hat{\omega}_h$, лежащим слева от узла x ,

$h_1^{(+1)}$ — расстояние между узлом x и узлом $x^{(+1_1)} = (x_1^{(+1)}, x_2) \in \Pi'(x) \subset \hat{\omega}_h$, лежащим справа от узла x .

Аналогично определяются h_2 и $h_2^{(+1)}$.

С помощью этих операторов построим для задачи (1) разностную схему

$$\Lambda^* y \equiv y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -\varphi(x), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \hat{\gamma}_h. \quad (2)$$

Упражнение.

- 1) Показать, что $\forall \varphi(x) = f(x) + O(h^m)$, $m \geq 1$ схема (2) имеет первый порядок аппроксимации $\psi(x) = O(h)$, где $h = \max(h_1, h_2)$ на $\hat{\omega}_h$.
- 2) Показать, что разностная схема (2) удовлетворяет принципу максимума при любых h_1, h_2 .

Недостатки метода, связанные с прямоугольной сеткой:

- 1) сложность с построением *адаптивной* сетки, т. е. такой сетки, чтобы плотность узлов на участках сильного изменения решения была более высокой, чем на участках слабого изменения решения,
- 2) сложности с определением внутренних и граничных узлов $\hat{\omega}_h$ в случае, когда граница Γ является подвижной или описывается сеточной функцией.

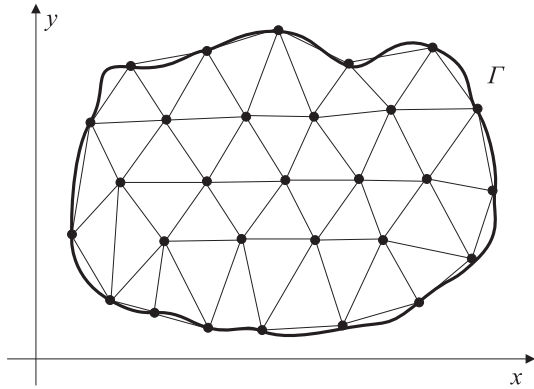
§2. Метод конечных элементов (МКЭ)

Будем рассматривать задачу Дирихле

$$\begin{cases} Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}(k \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k \frac{\partial u}{\partial y}) = -f(\xi), \quad \xi = (x, y) \in G, \quad k(\xi) > 0, \\ u|_{\Gamma} = \mu(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{G} = G \cup \Gamma$ — область сложной формы.

а) триангуляция области и базисные пирамидальные функции



В МКЭ область \bar{G} обычно покрывается треугольной сеткой $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$. Узлы сетки, произвольно выбранные в области и на границе Γ , соединяются непересекающимися отрезками так, чтобы каждый внутренний узел был вершиной 6 треугольников (элементов).

Такое построение сетки называется триангуляцией области \bar{G} . Так как граничные узлы также соединяются между собой отрезками, то криволинейная граница Γ заменяется ломаной линией.

Пусть в области \bar{G} содержится N внутренних и M граничных узлов, которые мы пронумеруем с помощью одного индекса:

$$\begin{aligned} \xi_i &= (x_i, y_i) \in \omega_h, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \xi_i &= (x_i, y_i) \in \gamma_h, \quad i = N + 1, N + 2, \dots, N + M. \end{aligned}$$

Обозначим $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, N, N + 1, \dots, N + M\}$ — множество индексов сеточных узлов.

Пусть $\xi_i = (x_i, y_i) \in \omega_h$ — внутренний узел. Обозначим Ω_i шестиугольник, состоящий из треугольных элементов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6$, примыкающих к узлу ξ_i , т. е.

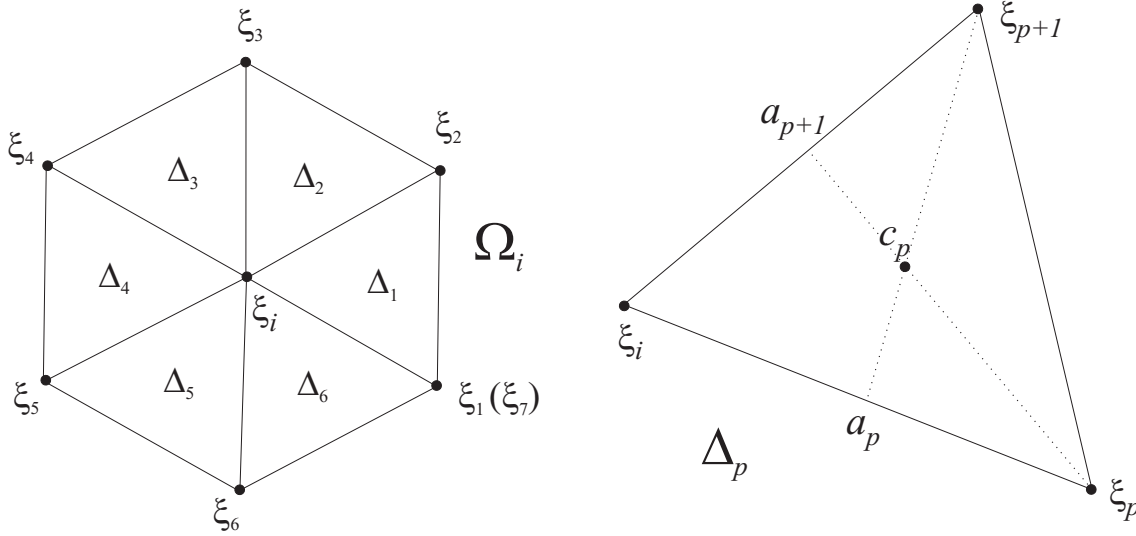
$$\Omega_i = \bigcup_{p=1}^6 \Delta_p \text{ — окрестность узла } \xi_i.$$

Вершинами треугольника Δ_p являются узлы

$$\xi_i = (x_i, y_i), \quad \xi_p = (x_p, y_p), \quad \xi_{p+1} = (x_{p+1}, y_{p+1}), \quad p = \overline{1, 6}.$$

Площадь треугольника Δ_p вычисляется по формулам:

$$S_p = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_p - x_i & y_p - y_i \\ x_{p+1} - x_i & y_{p+1} - y_i \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{p+1} - x_p & y_{p+1} - y_p \\ x_i - x_p & y_i - y_p \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i - x_{p+1} & y_i - y_{p+1} \\ x_p - x_{p+1} & y_p - y_{p+1} \end{vmatrix} > 0.$$



Центр масс треугольника Δ_p (точка пересечения медиан):

$$c_p = (x_{c_p}, y_{c_p}) = \frac{1}{3}(\xi_i + \xi_p + \xi_{p+1}),$$

т. е.

$$x_{c_p} = \frac{1}{3}(x_i + x_p + x_{p+1}), \quad y_{c_p} = \frac{1}{3}(y_i + y_p + y_{p+1}).$$

Обозначим

$$a_p = \frac{1}{2}(\xi_i + \xi_p) \text{ — середина стороны } [\xi_i, \xi_p], \\ a_{p+1} = \frac{1}{2}(\xi_i + \xi_{p+1}) \text{ — середина стороны } [\xi_i, \xi_{p+1}].$$

Таким образом, $x_{a_p} = \frac{1}{2}(x_i + x_p)$, $y_{a_p} = \frac{1}{2}(y_i + y_p)$.

Базисными пирамидальными функциями, заданными на треугольных элементах сетки $\bar{\omega}_h$, наывают систему линейно независимых функций $\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_N(\xi)$, каждая из которых отлична от нуля лишь в окрестности одного из внутренних узлов $\xi_1, \dots, \xi_N \in \omega_h$. Базисная функция $\varphi_i(\xi)$, соответствующая узлу $\xi \in \omega_h$, имеет вид

$$\varphi_i(\xi) = \begin{cases} \varphi_i^{(p)}(\xi), & \xi = (x, y) \in \Delta_p, \quad p = \overline{1, 6}, \\ 0, & \xi = (x, y) \notin \Omega_i, \end{cases}$$

где

$$\varphi_i^{(p)}(\xi_i) = \frac{1}{2S_p} [(x - x_{p+1})(y_p - y_{p+1}) - (y - y_{p+1})(x_p - x_{p+1})], \quad p = \overline{1, 6}$$

— линейная функция, обладающая свойствами

$$\varphi_i^{(p)}(\xi_i) = 1, \quad \varphi_i^{(p)}(\xi_{p+1}) = \varphi_i^{(p)}(\xi_p) = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi_i(\xi_i) = 1, \quad \varphi_i(\xi_p) = 0, \quad p = \overline{1, 6}.$$

Шестиугольник Ω_i называют *носителем базисной функции* $\varphi_i(\xi)$.

Пирамидальной функцией $\varphi_i(x)$, соответствующей узлу $\xi_i = (x_i, y_i) \in \bar{\omega}_h$, будем называть кусочно-линейную функцию вида

$$\varphi_i(\xi) = \begin{cases} \varphi_i^{(p)}(\xi) = \frac{(x - x_{p+1})(y_p - y_{p+1}) - (y - y_{p+1})(x_p - x_{p+1})}{2S_p}, \\ \quad \xi = (x, y) \in \Delta_p, \quad p = \overline{1, m}, \\ 0, \quad \xi \notin \Omega_i = \bigcup_{p=1}^m \Delta_p, \\ \quad i = \overline{1, N + M}. \end{cases} \quad (2)$$

Если $\xi_i \in \omega_h$, то $m = 6$, Ω_i — шестиугольник.

Если $\xi_i \in \gamma_h$, то $1 < m < 6$.

Поскольку функция $\varphi_i(x)$ отлична от нуля лишь в окрестности Ω_i узла ξ_i , $i = \overline{1, N + M}$, окрестность Ω_i называют *носителем функции* $\varphi_i(x)$.

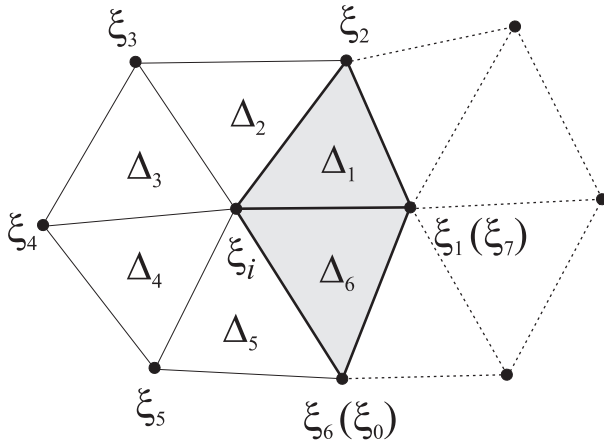
Линейная функция $\varphi_i^{(p)}(\xi)$ определена на треугольном элементе Δ_p и обладает свойствами

$$\varphi_i^{(p)}(\xi_i) = 1, \quad \varphi_i^{(p)}(\xi_p) = 0, \quad \varphi_i^{(p)}(\xi_{p+1}) = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi_i(\xi_i) = 1, \quad \varphi_i(\xi_p) = 0, \quad p = \overline{1, m}.$$

График функции $\varphi_i(\xi)$ является боковой поверхностью пирамиды единичной высоты с основанием Ω_i . Пусть узел ξ_i — внутренний. Тогда носитель Ω_i есть шестиугольник, а пирамида $\varphi_i(\xi)$ — шестигранная. Пусть $\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_6(\xi)$ — пирамидальные функции, соответствующие периферийным узлам ξ_1, \dots, ξ_6 , являющимся вершинами шестиугольника Ω_i .



Очевидно, что носитель Ω_i пирамидальной функции $\varphi_i(\xi)$ и носитель Ω_p пирамидальной функции $\varphi_p(\xi)$, $p = \overline{1, 6}$ пересекаются на треугольниках Δ_p, Δ_{p-1} , т. е. $\Omega_i \cap \Omega_p = \Delta_p \cup \Delta_{p-1}$.

На треугольнике Δ_p отличны от нуля лишь три базисные функции

$$\varphi_i(\xi) = \varphi_i^{(p)}(\xi), \quad \varphi_p(\xi) = \varphi_p^{(p)}(\xi), \quad \varphi_{p+1}(\xi) = \varphi_{p+1}^{(p)}(\xi), \quad \xi \in \Delta_p,$$

отвечающие вершинам треугольника Δ_p , так как $\Omega_i \cap \Omega_p \cap \Omega_{p+1} = \Delta_p$.

Эти функции на треугольнике Δ_p имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi_i^{(p)}(\xi) = \frac{(x - x_{p+1})(y_p - y_{p+1}) - (y - y_{p+1})(x_p - x_{p+1})}{2S_p}, \\ \varphi_p^{(p)}(\xi) = \frac{(x - x_i)(y_{p+1} - y_i) - (y - y_i)(x_{p+1} - x_i)}{2S_p}, \\ \varphi_{p+1}^{(p)}(\xi) = \frac{(x - x_p)(y_i - y_p) - (y - y_p)(x_i - x_p)}{2S_p}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\xi = (x, y) \in \Delta_p, \quad p = \overline{1, 6}$$

и обладают свойствами

$$\begin{cases} \varphi_i^{(p)}(\xi_i) = 1, \quad \varphi_i^{(p)}(\xi_p) = \varphi_i^{(p)}(\xi_{p+1}) = 0, \\ \frac{\partial \varphi_i^{(p)}}{\partial x} = \frac{y_p - y_{p+1}}{2S_p}, \quad \frac{\partial \varphi_i^{(p)}}{\partial y} = -\frac{x_p - x_{p+1}}{2S_p}, \\ \varphi_p^{(p)}(\xi_p) = 1, \quad \varphi_p^{(p)}(\xi_i) = \varphi_p^{(p)}(\xi_{p+1}) = 0, \\ \frac{\partial \varphi_p^{(p)}}{\partial x} = \frac{y_{p+1} - y_i}{2S_p}, \quad \frac{\partial \varphi_p^{(p)}}{\partial y} = -\frac{x_{p+1} - x_i}{2S_p}, \\ \varphi_{p+1}^{(p)}(\xi_{p+1}) = 1, \quad \varphi_{p+1}^{(p)}(\xi_i) = \varphi_{p+1}^{(p)}(\xi_p) = 0, \\ \frac{\partial \varphi_{p+1}^{(p)}}{\partial x} = \frac{y_i - y_p}{2S_p}, \quad \frac{\partial \varphi_{p+1}^{(p)}}{\partial y} = -\frac{x_i - x_p}{2S_p}. \end{cases} \quad (4)$$

б) МКЭ на основе метода Галеркина

Схемы МКЭ часто строят с помощью вариационных методов (Ритца, наименьших квадратов), а также методом Галеркина. При этом линейно независимые пирамидальные функции $\varphi_i(\xi)$, $i = \overline{1, N}$, соответствующие внутренним узлам $\xi_1, \dots, \xi_N \in \omega_h$, служат в качестве базисных функций.

Пирамидальные функции $\varphi_{N+1}(\xi), \dots, \varphi_{N+M}(\xi)$, соответствующие граничным узлам $\xi_{N+1}, \dots, \xi_{N+M} \in \gamma_h$, используются для того, чтобы обеспечить выполнение граничных условий задачи (1).

Приближенное решение дифференциальной задачи (1) на сетке треугольных элементов ищется в аналитическом виде

$$\tilde{u}(\xi) = \bar{u}(\xi) + \sum_{p=1}^N \tilde{u}_p \varphi_p(\xi), \quad \xi \in \bar{G}, \quad (5)$$

где $\bar{u}(\xi)$ призвано обеспечить выполнение граничных условий:

$$\bar{u}(\xi) = \sum_{p=N+1}^{N+M} u_p \varphi_p(\xi), \quad u_p = u(\xi_p) = \mu(\xi_p), \quad \xi_p \in \gamma_h,$$

\tilde{u}_p — неизвестные коэффициенты, требующие определения,

$\varphi_1, \dots, \varphi_N$ — пирамидальные функции вида (3), соответствующие внутренним узлам $\xi_1, \dots, \xi_N \in \omega_h$,

$\varphi_{N+1}, \dots, \varphi_{N+M}$ — пирамидальные функции, соответствующие граничным узлам $\xi_{N+1}, \dots, \xi_{N+M} \in \gamma_h$.

Заметим, что

$$\varphi_i(\xi_i) = 1, \quad \varphi_i(\xi_p) = 0 \quad \forall i = \overline{1, N+M}, \quad p \neq i.$$

В силу этого

$$\bar{u}(\xi_i) = \sum_{p=N+1}^{N+M} u_p \varphi_p(\xi_i) = u_i \varphi_i(\xi_i) = u_i = \mu(\xi_i), \quad i = \overline{N+1, N+M}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \tilde{u}(\xi_i) = \bar{u}(\xi_i) + \sum_{p=1}^N \tilde{u}_p \varphi_p(\xi_i) = [\varphi_p(\xi_i) = 0] = \bar{u}(\xi_i) = \mu(\xi_i) \text{ при } \xi_i \in \gamma_h, \\ \tilde{u}(\xi_i) = \bar{u}(\xi_i) + \sum_{p=1}^N \tilde{u}_p \varphi_p(\xi_i) = [\bar{u}(\xi_i) = 0] = \tilde{u}_i(\xi_i) \varphi_i(\xi_i) = \tilde{u}_i \text{ при } \xi_i \in \omega_h, \end{cases}$$

т. е. искомая функция (5) точно удовлетворяет граничным условиям задачи (1) в узлах $\xi_i \in \gamma_h$ и принимает значения \tilde{u}_i во внутренних узлах $\xi_i \in \omega_h$.

Таким образом, неизвестные коэффициенты \tilde{u}_i представляют собой значения приближенного решения $\tilde{u}(\xi)$ во внутренних узлах ξ_i , $i = \overline{1, N}$. Задачу (1) можно считать решенной, если найдены все \tilde{u}_i , $i = \overline{1, N}$.

Для удобства функцию $\tilde{u}(\xi)$ будем рассматривать в виде

$$\tilde{u}(\xi) = \sum_{p=1}^{N+M} \tilde{u}_p \varphi_p(\xi), \quad \xi \in \bar{G}, \quad (6)$$

полагая

$$\tilde{u}_p = \mu(\xi_p) \text{ при } p = \overline{N+1, N+M}.$$

Для построения алгоритма метода конечных элементов решения задачи (1) воспользуемся *методом Галеркина*, согласно которому неизвестные коэффициенты $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N$ определяются из условий

$$(L\tilde{u} + f, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{1, N} \quad (7)$$

или

$$(L\tilde{u}, \varphi_i) + (f, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

где

$$Lu = \nabla(k\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y}), \quad (f, g) = \int_{\bar{G}} fg dx dy.$$

Чтобы ослабить требования на гладкость базисных функций $\varphi_i(\xi)$, выполним интегрирование по частям в области \bar{G} :

$$\begin{aligned} (Lu, \varphi_i) &= (\nabla(k\nabla u), \varphi_i) = \int_{\bar{G}} \nabla(k\nabla u) \cdot \varphi_i dx dy = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_i d\Gamma - \int_{\bar{G}} k \nabla u \cdot \nabla \varphi_i dx dy = \\ &= [\varphi_i = 0 \text{ на границе } \Gamma] = - \int_{\bar{G}} k \nabla u \cdot \nabla \varphi_i dx dy, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Тогда условия Галеркина (7) принимают вид

$$\int_{\bar{G}} k \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi_i dx dy = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Обычно (7) называют *прямой формулировкой метода Галеркина*, а (8) — *слабой формулировкой метода Галеркина*.

Ввиду того, что $\varphi_i \equiv 0$ при $\xi = (x, y) \notin \Omega_i$, будем иметь

$$\int_{\Omega_i} k \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi_i dx dy = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad \text{где } (f, \varphi_i) = \int_{\Omega_i} f \varphi_i dx dy.$$

Подставляя сюда (6), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N$:

$$\sum_{p=1}^{N+M} \tilde{u}_p \int_{\Omega_i} k \nabla \varphi_p \cdot \nabla \varphi_i dx dy = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (9)$$

где Ω_i — носитель функции $\varphi_i(\xi)$.

Пусть Ω_i — шестиугольник с вершинами $\xi_1 = \xi_7, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6 = \xi_0$, которым соответствуют базисные функции $\varphi_1(\xi) = \varphi_7(\xi), \varphi_2(\xi), \varphi_3(\xi), \varphi_4(\xi), \varphi_5(\xi), \varphi_6(\xi) = \varphi_0(\xi)$. Поскольку на шестиугольнике Ω_i обращаются в нуль все базисные функции, за исключением $\varphi_i, \varphi_1, \dots, \varphi_6$, то в уравнениях (9) остаются лишь те слагаемые, которые соответствуют $p = \overline{1, 6}$ и $p = i$. Таким образом, система уравнений (9) имеет вид:

$$\tilde{u}_i \int_{\Omega_i} k |\nabla \varphi_i|^2 dx dy + \sum_{p=1}^6 \tilde{u}_p \int_{\Omega_i} (k \nabla \varphi_p \cdot \nabla \varphi_i) dx dy = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{1, N}$$

или

$$A_i \tilde{u}_i = \sum_{p=1}^6 B_{ip} \tilde{u}_p + F_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (10)$$

где $\tilde{u}_p = \mu(\xi_p)$, если $\xi_p \in \gamma_h$.

$$\begin{aligned} B_{ip} &= - \int_{\Omega_i} k \nabla \varphi_p \cdot \nabla \varphi_i dx dy = - \int_{\Delta_p} \overbrace{k (\nabla \varphi_p^{(p)} \cdot \nabla \varphi_i^{(p)})}^{=\text{const}} dx dy - \int_{\Delta_{p-1}} \overbrace{k (\nabla \varphi_p^{(p-1)} \cdot \nabla \varphi_i^{(p-1)})}^{=\text{const}} dx dy = \\ &= \left[r_p = \int_{\Delta_p} k dx dy, \Omega_i \cap \Omega_p = \Delta_{p-1} \cup \Delta_p \right] = - \left(\frac{\partial \varphi_p^{(p)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i^{(p)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_p^{(p)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_i^{(p)}}{\partial y} \right) r_p - \left(\frac{\partial \varphi_p^{(p-1)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i^{(p-1)}}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \varphi_p^{(p-1)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_i^{(p-1)}}{\partial y} \right) r_{p-1} = - \left(\frac{y_{p+1} - y_i}{2S_p} \cdot \frac{y_p - y_{p+1}}{2S_p} + \frac{x_{p+1} - x_i}{2S_p} \cdot \frac{x_p - x_{p+1}}{2S_p} \right) r_p - \\ &\quad - \left(\frac{y_i - y_{p-1}}{2S_p} \cdot \frac{y_{p-1} - y_p}{2S_p} + \frac{x_i - x_{p-1}}{2S_p} \cdot \frac{x_{p-1} - x_p}{2S_p} \right) r_{p-1} = \frac{1}{4S_p^2} [(x_p - x_{p+1})(x_i - x_{p+1}) + \\ &\quad + (y_p - y_{p+1})(y_i - y_{p+1})] r_p + \frac{1}{4S_{p-1}^2} [(x_{p-1} - x_p)(x_{p-1} - x_i) + (y_{p-1} - y_p)(y_{p-1} - y_i)] r_{p-1}, \end{aligned}$$

$$F_i = (f, \varphi_i) = \int_{\Omega_i} f \varphi_i dx dy \approx f_i \int_{\Omega_i} \varphi_i dx dy = \left[\int_{\Omega_i} \varphi_i dx dy - \text{объём пирамиды} \right] = f_i \frac{1}{3} \sum_{p=1}^6 S_p,$$

$$\begin{aligned}
A_i &= \int_{\Omega_i} k |\nabla \varphi_i|^2 dx dy = \sum_{p=1}^6 \int_{\Delta_p} \stackrel{=const}{k} |\nabla \varphi_i^{(p)}|^2 dx dy = \sum_{p=1}^6 |\nabla \varphi_i^{(p)}|^2 r_p = \\
&= \sum_{p=1}^6 \left[\left(\frac{\partial \varphi_i^{(p)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i^{(p)}}{\partial y} \right)^2 \right] r_p = \sum_{p=1}^6 \left[\left(\frac{y_p - y_{p+1}}{2S_p} \right)^2 + \left(\frac{x_p - x_{p+1}}{2S_p} \right)^2 \right] r_p = \\
&= \sum_{p=1}^6 \frac{1}{4S_p^2} [(x_{p+1} - x_p)^2 + (y_{p+1} - y_p)^2] r_p > 0,
\end{aligned}$$

$$r_p = \int_{\Delta_p} k dx dy \approx k(c_p) \int_{\Delta_p} dx dy = k(c_p) S_p = k((\xi_i + \xi_p + \xi_{p+1})/3) S_p.$$

Упражнение. Показать, что $A_i = \sum_{p=1}^6 B_{ip}$.

Замечание 1. При построении конечно-элементной схемы (10) во внутреннем узле $\xi_i \in \omega_h$ использована упрощенная нумерация вершин шестиугольника Ω_i , т. е. ξ_1, \dots, ξ_6 , не учитывающая зависимости от номера центрального узла ξ_i . Более корректной является нумерация этих вершин индексами $i_1 = i_7, i_2, \dots, i_5, i_6 = i_0 \in \mathcal{M}$. Перенумеровав в схеме (10) $\xi_1 = \xi_7$ в $\xi_{i_1} = \xi_{i_7}$, ξ_2 в ξ_{i_2} , \dots , ξ_5 в ξ_{i_5} , $\xi_6 = \xi_0$ в $\xi_{i_6} = \xi_{i_0}$, запишем схему (10) в виде

$$\begin{cases} A_i \tilde{u}_i = \sum_{p=1}^6 B_{ip} \tilde{u}_{i_p} + F_i, \quad i = \overline{1, N}, \\ \tilde{u}_{i_p} = \mu(\xi_{i_p}), \quad i_p = N+1, \dots, N+M, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\tilde{u}_{i_p} = \tilde{u}(\xi_{i_p}), \quad \xi_{i_p} = (x_{i_p}, y_{i_p}),$$

$$\begin{aligned}
B_{ip} &= \frac{1}{4S_{i_p}^2} [(x_{i_p} - x_{i_{p+1}})(x_i - x_{i_{p+1}}) + (y_{i_p} - y_{i_{p+1}})(y_i - y_{i_{p+1}})] r_p + \\
&+ \frac{1}{4S_{i_{p-1}}^2} [(x_{i_{p-1}} - x_{i_p})(x_{i_{p-1}} - x_i) + (y_{i_{p-1}} - y_{i_p})(y_{i_{p-1}} - y_i)] r_{p-1},
\end{aligned}$$

$$F_i = \frac{1}{3} f_i \sum_{p=1}^6 S_{i_p}, \quad A_i = \sum_{p=1}^6 B_{ip}, \quad r_p = \int_{\Delta_{i_p}} k dx dy.$$

$S_{i_p} = \frac{1}{2} [(x_{i_p} - x_i)(y_{i_{p+1}} - y_i) - (x_{i_{p+1}} - x_i)(y_{i_p} - y_i)] > 0$ — площадь треугольного элемента Δ_{i_p} с вершинами $\xi_i = (x_i, y_i)$, $\xi_{i_p} = (x_{i_p}, y_{i_p})$, $\xi_{i_{p+1}} = (x_{i_{p+1}}, y_{i_{p+1}})$.

Замечание 2. Можно показать, что если элементы сетки $\bar{\omega}_h$ являются остроугольными треугольниками, то все $B_{ip} > 0$. В этом случае схема (11) удовлетворяет принципу максимума, а матрица СЛАУ (11) будет иметь диагональное преобладание, на основании которого для ее решения можно применять известные итерационные методы.

в) интегро-интерполяционный метод конечных элементов

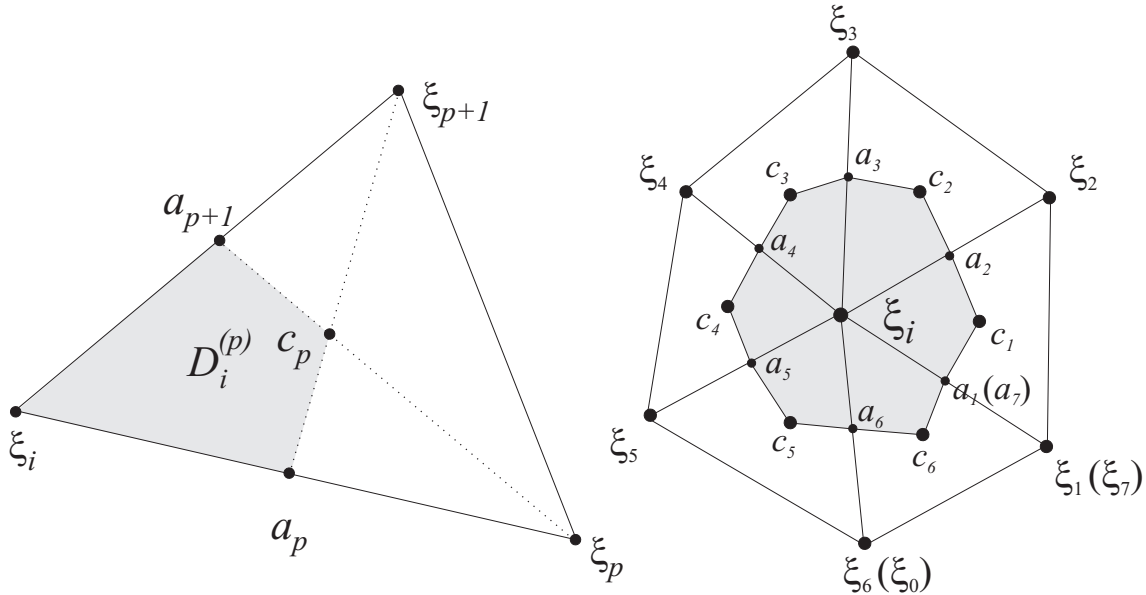
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(L_1 u) + \frac{\partial}{\partial x}(L_2 u) + f(\xi) = 0, \\ u|_{\Gamma} = \mu(\xi), \quad \xi \in \Gamma. \end{cases} \quad (12)$$

где $\xi = (x, y) \in G$, $k(\xi) > 0$, $L_1 u = k(\xi) \frac{\partial u}{\partial x}$, $L_2 u = k(\xi) \frac{\partial u}{\partial y}$, $\bar{G} = G \cup \Gamma$ — область сложной формы.

Рассмотрим уравнение баланса, соответствующее уравнению Пуассона (1), для произвольной области $D \subseteq \bar{G}$ (C — граница области D) (см. §2 главы 3):

$$\int_C (L_1 u dy - L_2 u dx) + \iint_D f dx dy = 0, \quad (13)$$

Пусть $\xi \in \omega_h$ — внутренний узел треугольной сетки, $a_p = \frac{1}{2}(\xi_i + \xi_p)$ — середина стороны $[\xi_i, \xi_p]$ треугольника Δ_p , $c_p = \frac{1}{3}(\xi_i + \xi_p + \xi_{p+1})$ — центр масс треугольника Δ_p .



На каждом шестиугольнике Ω_i выделим контрольный объем $D_i \subset \Omega_i$, соединив на каждом треугольнике Δ_p , $p = \overline{1, 6}$ отрезками последовательно три точки — a_p , c_p и a_{p+1} . Таким образом, на каждом шестиугольнике Ω_i контрольный объем D_i представляет собой двенадцатиугольник, не обязательно выпуклый, с замкнутой границей

(ломаной линией)

$$\Gamma_i = a_1 c_1 a_2 c_2 a_3 c_3 a_4 c_4 a_5 c_5 a_6 c_6 a_1.$$

Ту часть контрольного объема и ту часть его границы, которые принадлежат треугольнику Δ_p , обозначим $D_i^{(p)}$ и $\Gamma_i^{(p)}$ соответственно, т. е.

$$\Gamma_i^{(p)} = [a_p, c_p] \cup [c_p, a_{p+1}].$$

Теперь, следуя интегро-интерполяционному методу, запишем уравнение баланса (12) для контрольного объема $D_i = \bigcup_{p=1}^6 D_i^{(p)}$ с границей $\Gamma_i = \bigcup_{p=1}^6 \Gamma_i^{(p)}$:

$$\sum_{p=1}^6 \int_{\Gamma_i^{(p)}} (L_1 u dy - L_2 u dx) + \iint_{D_i} f dx dy = 0. \quad (14)$$

Следующий этап — аппроксимация уравнения баланса (13). Применим простейшие интерполяции для подынтегральных функций:

$$u(\xi) \approx u^{(p)}(\xi) = u_i \varphi_i^{(p)}(\xi) + u_p \varphi_p^{(p)}(\xi) + u_{p+1} \varphi_{p+1}^{(p)}(\xi) \text{ при } \xi \in \Delta_p, \quad p = \overline{1, 6}, \quad (15)$$

где $u^{(p)}(\xi)$ — линейная функция, определенная на треугольнике Δ_p и совпадающая с функцией $u(\xi)$ в вершинах треугольника, т. е. на треугольнике Δ_p она представляет собой плоскость, проходящую через точки (ξ_i, u_i) , (ξ_p, u_p) , (ξ_{p+1}, u_{p+1}) , $u_i = u(\xi_i)$, $u_p = u(\xi_p)$, $u_{p+1} = u(\xi_{p+1})$.

Тогда при $\xi = (x, y) \in \Delta_p$ будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(p)}}{\partial x} &= u_i \frac{\partial \varphi_i^{(p)}}{\partial x} + u_p \frac{\partial \varphi_p^{(p)}}{\partial x} + u_{p+1} \frac{\partial \varphi_{p+1}^{(p)}}{\partial x} = \\ &= u_i \frac{y_p - y_{p+1}}{2S_p} + u_p \frac{y_{p+1} - y_i}{2S_p} + u_{p+1} \frac{y_i - y_p}{2S_p} = \\ &= \frac{1}{2S_p} [(u_p - u_i)(y_{p+1} - y_i) - (u_{p+1} - u_i)(y_p - y_i)] = \text{const.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(p)}}{\partial y} &= u_i \frac{\partial \varphi_i^{(p)}}{\partial y} + u_p \frac{\partial \varphi_p^{(p)}}{\partial y} + u_{p+1} \frac{\partial \varphi_{p+1}^{(p)}}{\partial y} = \\ &= -u_i \frac{x_p - x_{p+1}}{2S_p} - u_p \frac{x_{p+1} - x_i}{2S_p} - u_{p+1} \frac{x_i - x_p}{2S_p} = \\ &= -\frac{1}{2S_p} [(u_p - u_i)(x_{p+1} - x_i) - (u_{p+1} - u_i)(x_p - x_i)] = \text{const.} \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_i^{(p)}} (L_1 u dy - L_2 u dx) &\approx \frac{\partial u^{(p)}}{\partial x} \int_{\Gamma_i^{(p)}} k dy - \frac{\partial u^{(p)}}{\partial y} \int_{\Gamma_i^{(p)}} k dx = [r_p = \int_{\Gamma_i^{(p)}} k dx, q_p = \int_{\Gamma_i^{(p)}} k dy] \\
&= \frac{\partial u^{(p)}}{\partial x} q_p - \frac{\partial u^{(p)}}{\partial y} r_p = (u_p - u_i) \frac{1}{2S_p} \left[(y_{p+1} - y_p) q_p + (x_{p+1} - x_p) r_p \right] + \\
&\quad + (u_{p+1} - u_i) \frac{1}{2S_p} \left[- (y_p - y_i) q_p - (x_p - x_i) r_p \right] \Rightarrow \\
\sum_{p=1}^6 \int_{\Gamma_i^{(p)}} (L_1 u dy - L_2 u dx) &\approx \sum_{p=1}^6 (u_p - u_i) B_{ip}, \tag{16}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
B_{ip} &= \frac{1}{2S_p} [r_p(x_{p+1} - x_i) + q_p(y_i - y_{p+1})] + \\
&\quad + \frac{1}{2S_{p-1}} [-r_{p-1}(x_{p-1} - x_i) - q_{p-1}(y_{p-1} - y_i)], \tag{17}
\end{aligned}$$

$$r_p = \int_{\Gamma_i^{(p)}} k dx \approx k(c_p) \int_{\Gamma_i^{(p)}} dx = k(c_p)(x_{a_{p+1}} - x_{a_p}) = \frac{1}{2} k((\xi_i + \xi_p + \xi_{p+1})/3)(x_{p+1} - x_p),$$

$$q_p = \int_{\Gamma_i^{(p)}} k dy \approx k(c_p) \int_{\Gamma_i^{(p)}} dy = k(c_p)(y_{a_{p+1}} - y_{a_p}) = \frac{1}{2} k((\xi_i + \xi_p + \xi_{p+1})/3)(y_{p+1} - y_p).$$

Применяя аппроксимацию (15), (16) к уравнению баланса (13), получаем конечно-элементную схему

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^6 B_{ip}(\tilde{u}_p - \tilde{u}_i) = -F_i, & \xi_i \in \omega_h, \\ \tilde{u}(\xi_i) = \mu(\xi_i), & \xi_i \in \gamma_h, \end{cases} \tag{18}$$

где $\tilde{u}(\xi)$, $\xi \in \bar{\omega}_h$ — искомая сеточная функция, $\tilde{u}_i \approx u_i = u(\xi_i)$, $\tilde{u}_p \approx u_p = u(\xi_p)$ — приближенные значения искомого решения $u(\xi)$ в узлах ξ_i и ξ_p , коэффициенты B_{ip} вычисляются по формуле (17). Правая часть:

$$F_i = \iint_{D_i} f(\xi) dx dy \approx f_i \sum_{p=1}^6 \iint_{D_i^{(p)}} dx dy = f_i \sum_{p=1}^6 \frac{1}{3} S_p. \tag{19}$$

Переобозначая периферийные узлы

$$\xi_1 = \xi_7 \rightarrow \xi_{i_1} = \xi_{i_7}, \quad \xi_2 \rightarrow \xi_{i_2}, \quad \dots, \quad \xi_5 \rightarrow \xi_{i_5}, \quad \xi_6 = \xi_0 \rightarrow \xi_{i_6} = \xi_{i_0},$$

запишем схему (16)-(18) в более корректной форме

$$\begin{cases} A_i \tilde{u}_i = \sum_{p=1}^6 B_{ip} \tilde{u}_{i_p} + F_i, & i = \overline{1, N}, \\ \tilde{u}_{i_p} = \mu(\xi_{i_p}), & i_p = \overline{N+1, N+M}, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$A_i = \sum_{p=1}^6 B_{ip}, \quad F_i = \frac{1}{3} f_i \sum_{p=1}^6 S_{i_p},$$

Замечание 3. Конечно-элементная схема (19), полученная интегро-интерполяционным методом, полностью совпадает со схемой (11), построенной по методу Галеркина. Поэтому к ней относятся те же замечания, что и к схеме (11).

Замечание 4. Конечно-элементные схемы, построенные как с помощью интегро-интерполяционного метода, так и по методу Галеркина, являются консервативными.

§3. Метод граничных элементов (МГЭ)

Область применимости метода граничных элементов — это уравнения математической физики, для которых известно фундаментальное решение. Это, например, уравнения Лапласа, Гельмгольца, однородное уравнение теплопроводности и другие.

Пусть $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа в двумерном пространстве, $u = u(\xi)$, $\xi = (x, y)$ — точка пространства. Пусть $\bar{G} = G \cup \Gamma$ — произвольная ограниченная область в двумерном пространстве с границей Γ . Для достаточно гладких в области \bar{G} функций $u(\xi)$, $v(\xi)$ справедлива *вторая формула Грина*:

$$\iint_{\bar{G}} u \nabla^2 v dx dy = \oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma + \iint_{\bar{G}} v \nabla^2 u dx dy, \quad (1)$$

где n — внешняя нормаль к границе Γ .

Пусть $\xi^0 = (x^0, y^0) \in \bar{G}$ — фиксированная точка (точка наблюдения), $\xi = (x, y) \in \bar{G}$ — текущая точка с переменными координатами x, y .

Функция $u^*(\xi^0, \xi)$ называется *фундаментальным решением уравнения Лапласа* $\nabla^2 u = 0$, если

$$\nabla^2 u^* = -\pi \alpha \Delta(\xi^0, \xi),$$

где Δ — дельта-функция Дирака, т. е.

1)

$$\nabla^2 u^*(\xi^0, \xi) = \begin{cases} 0, & \xi \neq \xi^0, \\ +\infty, & \xi = \xi^0. \end{cases}$$

2)

$$\iint_{\Omega} g(\xi) \nabla^2 u^*(\xi^0, \xi) dx dy = -\pi \alpha g(\xi^0)$$

для любой фиксированной точки ξ^0 , любой ее окрестности $\Omega \subseteq \bar{G}$, любой функции $g(\xi) = g(x, y)$, непрерывной в точке ξ^0 , где

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \xi^0 \in \Gamma, \\ 2, & \xi^0 \notin \Gamma, \text{ т. е. } \xi^0 \in G. \end{cases}$$

Фундаментальное решение двумерного уравнения Лапласа $\nabla^2 u = 0$ имеет вид

$$u^*(\xi^0, \xi) = \ln \frac{1}{\rho(\xi^0, \xi)} = -\ln \rho(\xi^0, \xi) = -\frac{1}{2} \ln [(x^0 - x)^2 + (y^0 - y)^2], \quad (2)$$

где $\rho(\xi^0, \xi) = \sqrt{(x^0 - x)^2 + (y^0 - y)^2}$ — расстояние от точки наблюдения до текущей точки.

Можно показать, что формула Грина (1) справедлива и для функции $v(\xi) = u^*(\xi^0, \xi)$, имеющей особенность в точке $\xi = \xi^0$ — разрыв второго рода. С учетом свойств фундаментального решения, получим:

$$-\pi\alpha u(\xi^0) = \oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma + \iint_{\bar{G}} u^* \nabla^2 u dx dy \quad \forall \xi^0 \in \bar{G},$$

$\alpha = 1$ при $\xi^0 \in \Gamma$, $\alpha = 2$ при $\xi^0 \in G$ ($\xi^0 \notin \Gamma$).

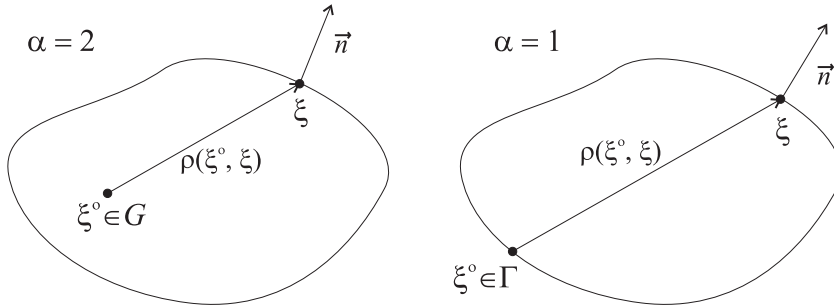
Если $u(\xi)$ — решение уравнения Лапласа $\nabla^2 u = 0$, то

$$-\pi\alpha u(\xi^0) = \oint_{\Gamma} (u q^* - u^* q) d\Gamma, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \xi^0 \in \Gamma, \\ 2, & \xi^0 \notin \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$q = q(\xi) = \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad q^* = q^*(\xi^0, \xi) = \frac{\partial u^*(\xi^0, \xi)}{\partial n} \Big|_{\Gamma},$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \cos(\widehat{x, n}) \frac{\partial u^*}{\partial x} + \cos(\widehat{y, n}) \frac{\partial u^*}{\partial y} = \cos(\widehat{x, n}) \frac{x - x^0}{\rho^2(\xi^0, \xi)} + \cos(\widehat{y, n}) \frac{y - y^0}{\rho^2(\xi^0, \xi)}.$$



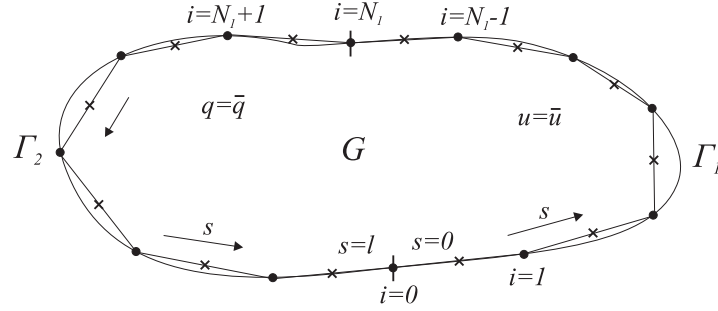
\vec{n} — внешняя нормаль к границе Γ в точке $\xi = (x, y) \in \Gamma$.

Таким образом, решение уравнения Лапласа $\nabla^2 u = 0$ в области $\bar{G} = G \cup \Gamma$ удовлетворяет интегральному уравнению (3).

Метод граничных элементов основан на решении уравнения (3).

Рассмотрим задачу Дирихле-Неймана для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & \xi = (x, y) \in G, \\ u(\xi) = \bar{u}(\xi), & \xi \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} = \bar{q}(\xi), & \xi \in \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma. \end{cases} \quad (4)$$



Уравнение (3) для задачи (4) принимает вид

$$-\pi\alpha u(\xi^0) = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}q^* - u^*q)d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (uq^* - u^*\bar{q})d\Gamma, \quad (5)$$

где неизвестными на Γ_1 являются $q(\xi)$, а на Γ_2 — $u(\xi)$. Левая часть, $\pi\alpha u(\xi^0)$, зависит от того, где находится ξ^0 : $\alpha = 1$, если $\xi^0 \in \Gamma$, $\alpha = 2$, если $\xi^0 \notin \Gamma$.

Если $\xi^0 \in \Gamma$, то уравнение (5) удобно рассматривать в виде двух уравнений:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_1} u^*q d\Gamma - \int_{\Gamma_2} uq^* d\Gamma = \pi\bar{u}(\xi^0) + \int_{\Gamma_1} \bar{u}q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u^*\bar{q} d\Gamma, & \text{если } \xi^0 \in \Gamma_1, \\ -\pi u(\xi^0) + \int_{\Gamma_1} u^*q d\Gamma - \int_{\Gamma_2} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \bar{u}q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u^*\bar{q} d\Gamma, & \text{если } \xi^0 \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (6)$$

Присутствующие в левой части части уравнений (6) $u(\xi)$ и $q(\xi)$ — неизвестные функции, требующие определения. В правой части все функции заданы.

Введем на границе Γ_1 сетку узлов $\xi_i = (x_i, y_i) \in \Gamma_1$, $i = \overline{0, N_1}$, а на границе Γ_2 — сетку узлов $\xi_i = (x_i, y_i) \in \Gamma_2$, $i = \overline{N_1, N_2}$, причем $\xi_0 = \xi_{N_2}$.

Первая аппроксимация:

Следуя МКЭ, аппроксимируем контур Γ замкнутой ломаной линией $\tilde{\Gamma}$, соединяя отрезками соседние узлы ξ_{j-1} и ξ_j при $j = \overline{1, N_2}$. Тогда

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup_{j=1}^{N_2} \tilde{\Gamma}_j,$$

где $\tilde{\Gamma}_j = [\xi_{j-1}, \xi_j]$ — отрезок, соединяющий точки ξ_{j-1} и ξ_j . Эти отрезки называются *границными элементами*.

Примем обозначения:

$$\begin{aligned}\Delta x_j &= x_j - x_{j-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \\ x_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j) = x_{j-1} + \frac{1}{2}\Delta x_j = x_j - \frac{1}{2}\Delta x_j, \\ y_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(y_{j-1} + y_j) = y_{j-1} + \frac{1}{2}\Delta y_j = y_j - \frac{1}{2}\Delta y_j, \\ l_j &= \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2} - \text{длина отрезка } \tilde{\Gamma}_j.\end{aligned}$$

Запишем в этих обозначениях параметрические уравнения j -го элемента $\tilde{\Gamma}_j = [\xi_{j-1}, \xi_j]$:

$$x(s) = x'_j(s - s_{j-\frac{1}{2}}) + x_{j-\frac{1}{2}}, \quad y(s) = y'_j(s - s_{j-\frac{1}{2}}) + y_{j-\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

где

$$x'_j = \frac{\Delta x_j}{l_j}, \quad y'_j = \frac{\Delta y_j}{l_j} \Rightarrow (x'_j)^2 + (y'_j)^2 = 1,$$

s — длина дуги линии $\tilde{\Gamma}$, изменяющаяся от $s = s_0 = 0$ в точке ξ_0 до $s = s_{N_2} = l = \sum_{j=1}^{N_2} l_j$ — в точке $\xi_{N_2} = \xi_0$ после прохождения всего контура $\tilde{\Gamma}$. При этом

$$\begin{aligned}s_j - s_{j-1} &= l_j, \\ x(s_{j-1}) &= \frac{\Delta x_j}{l_j}(s_{j-1} - s_{j-\frac{1}{2}}) + x_{j-\frac{1}{2}} = x_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta x_j = x_{j-1}, \\ x(s_j) &= \frac{\Delta x_j}{l_j}(s_j - s_{j-\frac{1}{2}}) + x_{j-\frac{1}{2}} = x_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta x_j = x_j.\end{aligned}$$

Задачу (4) будем рассматривать в области $\tilde{\bar{G}} = \tilde{G} \cup \tilde{\Gamma}$, где \tilde{G} — область, ограниченная ломаной $\tilde{\Gamma}$, т. е.

$$\nabla^2 u = 0, \quad \xi \in \tilde{G}, \quad u(\xi) = \bar{u}(\xi), \quad \xi \in \tilde{\Gamma}_1, \quad q(\xi) = \bar{q}(\xi), \quad \xi \in \tilde{\Gamma}_2. \quad (\tilde{4})$$

Следуя МКЭ, будем выбирать в качестве точки наблюдения ξ^0 граничные точки $\xi_{i-\frac{1}{2}} \in \tilde{\Gamma}$, $i = \overline{1, N_2}$. Запишем уравнения (6) для границы $\tilde{\Gamma}$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_1} \int_{s_{j-1}}^{s_j} u^* q ds - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} \int_{s_{j-1}}^{s_j} u q^* ds = \pi \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \bar{u} q^* ds - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} \int_{s_{j-1}}^{s_j} u^* \bar{q} ds, \\ & i = \overline{1, N_1}, \\ & -\pi u_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{s_{j-1}}^{s_j} u^* q ds - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} \int_{s_{j-1}}^{s_j} u q^* ds = \sum_{j=1}^{N_1} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \bar{u} q^* ds - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} \int_{s_{j-1}}^{s_j} u^* \bar{q} ds, \\ & i = \overline{N_1+1, N_2}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Вторая аппроксимация:

Аппроксимируем функции $u(\xi)$, $q(\xi)$, $\bar{u}(\xi)$, $\bar{q}(\xi)$ на каждом элементе константами:

$$u(\xi) \approx u_{j-\frac{1}{2}}, \quad q(\xi) \approx q_{j-\frac{1}{2}}, \quad \bar{u}(\xi) \approx \bar{u}_{j-\frac{1}{2}}, \quad \bar{q}(\xi) \approx \bar{q}_{j-\frac{1}{2}} \quad \text{при } \xi \in \tilde{\Gamma}_j = [\xi_{j-1}, \xi_j].$$

Тогда система (8) принимает вид СЛАУ относительно неизвестных $u_{i-\frac{1}{2}}$ при $i = \overline{1, N_1}$, $q_{i-\frac{1}{2}}$ при $i = \overline{N_1 + 1, N_2}$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_1} a_{ij} q_{j-\frac{1}{2}} - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} b_{ij} u_{j-\frac{1}{2}} = \pi \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{N_1} b_{ij} \bar{u}_{j-\frac{1}{2}} - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} a_{ij} \bar{q}_{j-\frac{1}{2}}, \\ i = \overline{1, N_1}, \\ -\pi u_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{N_1} a_{ij} q_{j-\frac{1}{2}} - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} b_{ij} u_{j-\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{N_1} b_{ij} \bar{u}_{j-\frac{1}{2}} - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} a_{ij} \bar{q}_{j-\frac{1}{2}}, \\ i = \overline{N_1 + 1, N_2}, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$a_{ij} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} u^*(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \xi) ds, \quad b_{ij} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} q^*(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \xi) ds.$$

Обозначая неизвестные одной буквой

$$v_i = \begin{cases} q_{i-\frac{1}{2}}, & i = \overline{1, N_1}, \\ u_{i-\frac{1}{2}}, & i = \overline{N_1 + 1, N_2}, \end{cases}$$

запишем систему линейных алгебраических уравнений в общем виде

$$\sum_{j=1}^{N_2} A_{ij} v_j = F_i, \quad i = \overline{1, N_2} \quad (10)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \begin{cases} a_{ij}, & j = \overline{1, N_1}, \\ b_{ij}, & j = \overline{N_1 + 1, N_2}, \end{cases} \quad (i \neq j), \quad A_{ii} = \begin{cases} a_{ii}, & i = \overline{1, N_1}, \\ -\pi - b_{ii}, & i = \overline{N_1 + 1, N_2}, \end{cases} \\ F_i &= \begin{cases} \pi \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{N_1} b_{ij} \bar{u}_{j-\frac{1}{2}} - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} a_{ij} \bar{q}_{j-\frac{1}{2}}, & i = \overline{1, N_1}, \\ \sum_{j=1}^{N_1} b_{ij} \bar{u}_{j-\frac{1}{2}} - \sum_{j=N_1+1}^{N_2} a_{ij} \bar{q}_{j-\frac{1}{2}}, & i = \overline{N_1 + 1, N_2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Матрица системы линейных алгебраических уравнений (10) является матрицей общего вида, поэтому для ее решения применяется метод Гаусса. Решая по методу Гаусса систему линейных алгебраических уравнений (10), найдем приближенное решение задачи (4) на границе Γ области \bar{G} .

Займемся вычислением коэффициентов a_{ij} и b_{ij} , определяющих матрицу и вектор правой части системы (10).

$$\begin{aligned}\rho^2(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \xi) &= ((x_{i-\frac{1}{2}} - x(s))^2 + (y_{i-\frac{1}{2}} - y(s))^2 = \\ &= ((x_{i-\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}} - x'_j(s - s_{j-\frac{1}{2}}))^2 + (y_{i-\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} - y'_j(s - s_{j-\frac{1}{2}}))^2 = \\ &= (s - s_{j-\frac{1}{2}} - c_{ij})^2 + d_{ij}^2, \text{ где} \\ c_{ij} &= x'_j(x_{i-\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}) + y'_j(y_{i-\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}), \quad x'_j = \frac{\Delta x_j}{l_j}, \\ d_{ij} &= y'_j(x_{i-\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}) - x'_j(y_{i-\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}), \quad y'_j = \frac{\Delta y_j}{l_j}.\end{aligned}\tag{12}$$

$\cos(\widehat{x, n_j}) = y'_j$, $\cos(\widehat{y, n_j}) = x'_j$, откуда

$$\begin{aligned}b_{ij} &= \int_{s_{j-1}}^{s_j} q^* ds = \int_{s_{j-1}}^{s_j} \left[\cos(\widehat{x, n_j}) \frac{x_{i-\frac{1}{2}} - x(s)}{\rho^2(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \xi)} + \cos(\widehat{y, n_j}) \frac{y_{i-\frac{1}{2}} - y(s)}{\rho^2(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \xi)} \right] ds = \\ &= \int_{s_{j-1}}^{s_j} \frac{y'_j [x_{i-\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}} - x'_j(s - s_{j-\frac{1}{2}})] - x'_j [y_{i-\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} - y'_j(s - s_{j-\frac{1}{2}})]}{(s - s_{j-\frac{1}{2}} - c_{ij})^2 + d_{ij}^2} ds = \\ &= d_{ij} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \frac{ds}{(s - s_{j-\frac{1}{2}} - c_{ij})^2 + d_{ij}^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{c_{ij} + \frac{1}{2}l_{ij}}{d_{ij}} - \operatorname{arctg} \frac{c_{ij} - \frac{1}{2}l_{ij}}{d_{ij}}, & \text{при } d_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{при } d_{ij} = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{ij} &= \int_{s_{j-1}}^{s_j} u^* ds = -\frac{1}{2} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \ln \rho^2(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \xi) ds = -\frac{1}{2} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \ln [(s - s_{j-\frac{1}{2}} - c_{ij})^2 + d_{ij}^2] ds = \\ &= -d_{ij} b_{ij} + l_j + \frac{1}{2} (c_{ij} - \frac{1}{2}l_j) \ln [(c_{ij} - \frac{1}{2}l_j)^2 + d_{ij}^2] - \\ &\quad - \frac{1}{2} (c_{ij} + \frac{1}{2}l_j) \ln [(c_{ij} + \frac{1}{2}l_j)^2 + d_{ij}^2].\end{aligned}\tag{13}$$

По найденным граничным значениям $q_{i-\frac{1}{2}}$, $i = \overline{0, N_1}$ и $u_{i-\frac{1}{2}}$, $i = \overline{N_1 + 1, N_2}$ с помощью явной формулы (5) можно вычислить значение $u(\xi^0)$ в любой внутренней точке $\xi^0 = (x^0, y^0) \notin \tilde{\Gamma}$:

$$u(\xi^0) = \frac{-1}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^{N_1} \left(b_j \bar{u}_{j-\frac{1}{2}} - a_j q_{j-\frac{1}{2}} \right) \sum_{j=N_1+1}^{N_2} \left(b_j u_{j-\frac{1}{2}} - a_j \bar{q}_{j-\frac{1}{2}} \right) \right],\tag{14}$$

где

$$a_{ij} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} u^*(\xi^0, \xi) ds = -\frac{1}{2} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \ln [(s - s_{j-\frac{1}{2}} - c_j)^2 + d_j^2] ds,$$

$$b_{ij} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} q^*(\xi^0, \xi) ds = d_j \int_{s_{j-1}}^{s_j} \frac{ds}{(s - s_{j-\frac{1}{2}} - c_j)^2 + d_j^2},$$

$$c_j = x'_j(x^0 - x_{j-\frac{1}{2}}) + y'_j(y^0 - y_{j-\frac{1}{2}}),$$

$$d_j = y'_j(x^0 - x_{j-\frac{1}{2}}) - x'_j(y^0 - y_{j-\frac{1}{2}}).$$

Достоинства метода:

- 1) понижает на единицу размерность задачи,
- 2) обладает высокой точностью.

Недостатки метода:

- 1) для его реализации обычно применяется метод исключения Гаусса, поэтому число узлов на границе не может быть большим, обычно не более 200,
- 2) пригоден только к уравнениям с известным фундаментальным решением.

Литература

Основная

- [1] Самарский А. А. *Теория разностных схем*. — М.: Наука, 1983.
- [2] Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. — М.: Наука, 1989.
- [3] Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики*. — М.: Наука, 1980.

Дополнительная

- [4] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. *Вычислительные гидромеханика и теплообмен*. — М.: Мир, 1990.
- [5] Бенерджи П., Баттерфилд Р. *Метод граничных элементов в прикладных науках*. — М.: Мир, 1984.
- [6] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов*. — М.: Мир, 1987.
- [7] Бреббия К., Уокер С. *Применение граничных элементов в технике*. — М.: Мир, 1982.
- [8] Калиткин Н. Н. *Численные методы*. — М.: Наука, 1978.
- [9] Митчелл Э., Уэйт Р. *Метод конечных элементов для уравнений с частными производными*. — М.: Мир, 1991.
- [10] Самарский А. А., Николаев Е. С. *Методы решения сеточных уравнений*. — М.: Наука, 1978.
- [11] Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. — М.: Наука, 1977.