# ТЕМА 2. ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Непрерывно обратимые операторы.** Пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ и областью значений $\mathscr{R}(A) \subseteq Y$. Если оператор $A$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{D}(A)$ и $\mathscr{R}(A)$, то к оператору $A$ существует обратный оператор $A^{-1}$, и решение уравнения $Ax = y$ может быть записано в явном виде $x = A^{-1}y$.

**Теорема 1.** *Линейный оператор $A$ переводит $\mathscr{D}(A)$ в $\mathscr{R}(A)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда*

$$KerA = \{x \in \mathscr{D}(A) : Ax = 0\} = \{0\}. \tag{1}$$

**Теорема 2.** *Если $A : X \to Y$ линеен, то и $A^{-1} : Y \to X$ линеен.*

**Теорема 3.** *Оператор $A^{-1}$ существует и одновременно ограничен на $\mathscr{R}(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in \mathscr{D}(A)$ выполняется энергетическое неравенство*

$$\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X. \tag{2}$$

Будем говорить, что линейный оператор $A : X \to Y$ *непрерывно обратим*, если $\mathscr{R}(A) = Y$, оператор $A$ обратим и $A^{-1}$ ограничен.

**Теорема 4 (Банаха об обратном операторе).** *Пусть $X$ и $Y$ – банаховы пространства, $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, отображающий $X$ в $Y$ взаимно однозначно. Тогда обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$ ограничен.*

***Следствие** 1.* Пусть на нормированном пространстве $X$ заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ и пространство $X$ полно относительно каждой из норм. Если $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$ для всех $x \in X$, то эти нормы эквивалентны.

**Левый и правый обратные операторы.** Пусть $X, Y$ – нормированные векторные пространства и $A : X \to Y$.

Оператор $A_r^{-1} : Y \to X$ называется *правым обратным оператором* к $A$, если $AA_r^{-1} = I_y$. Оператор $A_l^{-1} : Y \to X$ называется *левым обратным оператором* к $A$, если $A_l^{-1}A = I_x$.

**Теорема 5.** *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:*

*1) решение уравнения $Ax = y$ единственно для любого $y \in \mathscr{R}(A)$;*

*2) $Ker A = \{0\}$, т. е. оператор $A$ инъективен;*

*3) для оператора $A$ существует левый обратный оператор $A_l^{-1}$.*

**Теорема 6.** *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:*

*1) решение уравнения $Ax = y$ существует для любого $y \in Y$;*

*2) $\mathscr{R}(A) = Y$, т. е. оператор $A$ сюръективен;*

*3) для оператора $A$ существует правый обратный оператор $A_r^{-1}$.*

**Решение операторных уравнений второго рода.** Рассмотрим операторные уравнения второго рода

$$x - Ax = y. \tag{3}$$

$$x - \lambda Ax = y, \tag{4}$$

где $X$ – банахово пространство, $A : X \to X$, $A \in \mathscr{B}(X)$.

**Теорема 7.** *Пусть $X$ – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$ и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим и при этом справедливы оценки*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad \|I - (I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}. \tag{5}$$

**Теорема 8.** *Пусть $X$ – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$ и $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$. Тогда оператор $I - \lambda A$ непрерывно обратим, причем*

$$(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^n A^n + \ldots .$$

**Теорема 9 (о четырех шарах).** *Если $A, A^{-1} \in \mathscr{B}(X)$, то множество $G$ элементов $\mathscr{B}(X)$, имеющих в $\mathscr{B}(X)$ обратные, содержит вместе с операторами $A$ и $A^{-1}$ два шара*

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ B \in \mathscr{B}(X) : \|A - B\| < \frac{1}{A^{-1}} \right\}, \\ B_2 &= \left\{ B \in \mathscr{B}(X) : \|A^{-1} - B\| < \frac{1}{A} \right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

*Если оператор $B$ лежит в шаре $B_1$, то его обратный представим в виде*

$$B^{-1} = A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[(A-B)A^{-1}]^n \tag{7}$$

*или*

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[A^{-1}(A-B)]^n A^{-1}, \tag{8}$$

*причем справедливо неравенство*

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2\|A-B\|}{1-\|A-B\|\|A^{-1}\|}; \tag{9}$$

*если $B_\varepsilon \in G$ и $\|B_\varepsilon - A\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то и $\|B_\varepsilon^{-1} - A^{-1}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

*Если оператор $B$ лежит в шаре $B_2$, то его обратный*

$$B^{-1} = A\sum_{n=0}^{\infty}[(A^{-1}-B)A]^n \tag{10}$$

*или*

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[A(A^{-1}-B)]^n A, \tag{11}$$

*причем справедливо неравенство*

$$\|B^{-1} - A\| \leqslant \frac{\|A\|^2\|A^{-1}-B\|}{1-\|A^{-1}-B\|\|A\|};$$

*если $B_\varepsilon \in G$ и $\|B_\varepsilon - A^{-1}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ , то и $\|B_\varepsilon^{-1} - A^{-1}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

Теорема 9 используется при обосновании вычислительных методов, а именно: требуется оценить норму относительно ошибки, если оператору задачи и правой части придать некоторое возмущение; оценить по невязке норму относительной ошибки.

***Следствие** 2.* Множество обратимых операторов в пространстве $\mathscr{B}(X)$ открыто.

***Следствие*** *3.* Пусть $A \in \mathscr{B}(X)$ – непрерывно обратимы и пусть последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(X)$ равномерно сходится к . Тогда, начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$, все операторы $A_n$ непрерывно обратимы и $A_n^{-1} \rightrightarrows A^{-1}$ при $n \to \infty$.

**Решение интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра методом резольвент.** Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с параметром $\lambda$, записанное в виде

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{12}$$

**Теорема 10.** *Пусть* $\mathcal{K}(t,s)$ *непрерывная функция по переменным* $t$ *и* $s$ *и* $|\lambda|M(b-a) < 1$, $M = \max\limits_{a\leqslant t,s\leqslant b} |\mathcal{K}(t,s)|$. *Тогда для любой непрерывной функции* $y(t)$ *в пространстве* $C[a,b]$ *существует единственное решение уравнения* (12), *которое можно представить в виде*

$$x(t) = y(t) + \lambda \int\limits_a^b R(t,s;\lambda)\,y(s)\mathrm{d}s, \tag{13}$$

*где резольвента* $R(t,s;\lambda)$ *ядра* $\mathcal{K}(t,s)$ *или разрешающее ядро имеет вид*

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}\mathcal{K}_i(t,s), \tag{14}$$

*а итерированные ядра вычисляются по формуле*

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_1(t,s) = \mathcal{K}(t,s), \\ &\mathcal{K}_i(t,s) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,\tau)\,\mathcal{K}_{i-1}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau,\ i = 2,3,\ldots. \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s + y(t). \tag{16}$$

**Теорема 11.** *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывная функция по переменным $t$ и $s$. Тогда для любой непрерывной функции $y(t)$ при любом значении параметра $\lambda$ в пространстве $C[a,b]$ существует единственное решение уравнения (12), которое можно представить в виде*

$$x(t) = y(t) + \lambda \int\limits_a^t R(t,s;\lambda)\, y(s)\, \mathrm{d}s, \tag{17}$$

*где*

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \mathcal{K}_i(t,s), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_1(t,s) = \mathcal{K}(t,s), \\ &\mathcal{K}_i(t,s) = \int\limits_s^t \mathcal{K}(t,\tau)\mathcal{K}_{i-1}(\tau,s)\, \mathrm{d}\tau,\ i = 2,3,\ldots. \end{aligned} \tag{19}$$

**Замкнутые операторы.** Пусть $X$ и $Y$ – банаховы пространства, $A : X \to Y$ линейный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subset X$. Множество $\{(x, Ax) : x \in \mathscr{D}(A), Ax \in \mathscr{R}(A)\}$ называется *графиком оператора* $A$ и обозначается $Gr_A$. Поскольку $A$ – линейный оператор, то $Gr_A$ представляет собой линейное многообразие в пространстве $X \times Y$, однозначно определяемое оператором $A$. Если оператор $A$ непрерывен, то линейное многообразие $Gr_A$ замкнуто, т. е. является подпространством в $X \times Y$.

Определение 1. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *замкнутым,* если его график $Gr_A$ является замкнутым множеством в $X \times Y$.

**Лемма 1.** *Пусть $A : X \to Y$ , $A \in \mathscr{B}(X,Y)$, причем $\mathscr{D}(A) = X$. Тогда $A$ замкнут.*

**Лемма 2.** *Если $A$ замкнут и обратный оператор $A^{-1}$ существует, то $A^{-1}$ также замкнут.*

**Лемма 3.** *Если $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ и $A^{-1}$ существует, то $A^{-1}$ замкнут.*

**Теорема 12 (о замкнутом графике).** *Если линейный оператор $A$, отображающий банахово пространство $X$ в банахово пространство $Y$, имеет замкнутый график, то этот оператор ограничен.*

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Пример 1.* В гильбертовом пространстве $\ell_2$ с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ зададим линейный оператор $A$ следующим образом:

$$A\,e_1 = 0, A\,e_k = e_{k-1}, k = 2, 3, \ldots .$$

Какие из операторов $A_l^{-1}, A_r^{-1}, A^{-1}$ существуют, найти их?

Решение. Покажем, что ядро оператора $KerA$ представляет собой одномерное подпространство, натянутое на вектор $e_1$, а множество значений $\mathscr{R}(A)$ оператора совпадает с пространством $l_2$. Если $\mathscr{R}(A) = \ell_2$, то это означает, что к оператору $A$ существует правый обратный. Зададим правый обратный оператор $A_r^{-1}$ формулами

$$A_r^{-1}\,e_k = e_{k+1} + \gamma_k e_1, \quad k = 1{,}2, \ldots ,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ – некоторые постоянные такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$.

Пусть $y \in \ell_2$, т. е. $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty$, тогда

$$A_r^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k A_r^{-1} e_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_{k+1} + e_1 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k y_k.$$

По неравенству Коши-Буняковского ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k y_k$ сходится, поэтому $A_r^{-1}\,y \in l_2$. Заметим, что

$$AA_r^{-1} = I, \quad AA_r^{-1} e_k = A\,(e_{k+1} + \gamma_k e_1) = A\,e_{k+1} + \gamma_k A\,e_1 = e_k.$$

Следовательно, оператор $A$ имеет семейство правых обратных операторов.

Если бы к оператору $A$ существовал левый обратный оператор, то $Ker\ A = \{0\}$ или уравнение $Ax = 0$ имело бы только нулевое решение.

Рассмотрим это уравнение. Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, тогда

$$A\,x = x_1 A\,e_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x_k A\,e_k = x_1 \cdot 0 + \sum_{k=2}^{\infty} x_k e_{k-1} = 0.$$

Тогда $x = e_1$ является решением этого уравнения.

Следовательно, $Ker\ A = \mathscr{L}\left\{(e_1)\right\}$. Это означает, что к оператору не существует левого обратного, а значит и обратного оператора.

*Пример 2.* Рассмотрим оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$, действующий по формуле

$$Ax = \left(x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots\right).$$

Проверить, существует ли непрерывный обратный к оператору $A$ Найти $A^{-1}$.

Решение. Очевидно, что оператор $A$ является линейным. Покажем, что оператор $A$ является ограниченным. Действительно,

$$\|Ax\|^2 = |x_1 + 2x_2|^2 + |x_1 - x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(|x_1|^2 + 4|x_2|^2\right) + 2\left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right) + |x_3|^2 + \ldots \leqslant 10 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = 10\|x\|^2.$$

Рассмотрим решение уравнения $Ax = y$ при любой правой части $y \in \ell_2$. Имеем

$$x_1 + 2x_2 = y_1,\ x_1 + x_2 = y_2,\ \ x_3 = y_3,\ \ x_4 = y_4, \ldots.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{y_1 + 2y_2}{3},\ \ x_2 = \frac{y_1 - y_2}{3},\ \ x_i = y_i,\ \ i = 3, 4, \ldots.$$

Следовательно, к оператору $A$ существует обратный оператор, который имеет вид

$$x = A^{-1}y = \left(\frac{y_1 + 2y_2}{3}, \frac{y_1 - y_2}{3}, y_3, y_4, \ldots\right).$$

*Пример 3.* Рассмотрим оператор $A : C\,[0{,}1] \to C\,[0{,}1]$ , действующий по формуле

$$Ax\,(t) = x\,(t) + \int_0^1 e^{s+t} x\,(s)\;\mathrm{d}s.$$

Показать, что оператор $A$ непрерывно обратим. Найти $A^{-1}$.

Решение. Линейный оператор называется непрерывно обратимым, если $\mathscr{R}\,(A) = Y$ и существует обратный ограниченный оператор.

Рассмотрим уравнение вида $Ax = y$ и покажем, что для любой правой части $y\,(t) \in C\,[0{,}1]$ существует единственное решение уравнения. Это будет означать, что для оператора $A$ существует $A^{-1}$. Для нахождения решения используем вырожденность ядра $\mathcal{K}(t{,}s)$. Итак,

$$x\,(t) + \int_0^1 e^{t+s} x\,(s)\,\mathrm{d}s = y\,(t)\,.$$

Тогда

$$x\,(t) = y\,(t) - e^t \int_0^1 e^s x\,(s)\,\mathrm{d}s,$$

или

$$x\,(t) = y\,(t) - c\,e^t.$$

Таким образом, если мы определим значение постоянной, то тем самым сможем найти решение исходного интегрального уравнения. Умножим обе части полученного равенства на $e^t$ и проинтегрируем его по отрезку $[0,1]$.

$$\int_0^1 e^t x\,(t)\,\mathrm{d}t\; = \int_0^1 e^t y\,(t)\,\mathrm{d}t\; - c\int_0^1 e^{2t}\mathrm{d}t.$$

Откуда

$$c = \int_0^1 e^t y\,(t)\,\mathrm{d}t\; - c\left(e^2 - 1\right)\frac{1}{2}.$$

Полученное уравнение эквивалентно интегральному уравнению. Если данное уравнение имеет единственное решение, то исходное интегральное уравнение также будет однозначно разрешимым. Вычислим постоянную $c$

$$c = \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^t y\,(t)\,\mathrm{d}t,$$

тогда

$$x\,(t) = y\,(t) - \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{t+s} y\,(s)\,\mathrm{d}s.$$

Это означает разрешимость уравнения при любой правой части $y\,(t) \in C\,[0{,}1]$. Следовательно,

$$A^{-1}y\,(t) = y\,(t) - \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{t+s} y\,(s)\,\mathrm{d}s.$$

Заметим, что это интегральный оператор с непрерывным ядром, который является ограниченным. Таким образом, к оператору $A$ существует ограниченный обратный и $\mathscr{R}\,(A) = C\,[0{,}1]$ , поэтому оператор $A$ непрерывно обратим.

*Пример 4.* Рассмотрим оператор $A : C[0{,}1] \to C[0{,}1]$,

$$Ax(t) = x'(t) + x(t)$$

с областью определения $\mathscr{D}(A) = \big\{x(t) \in C^1[0{,}1] : x(0) = 0\big\}$. Доказать, что $A$ – неограниченный линейный оператор. Доказать, что $A$ непрерывно обратим, найти $A^{-1}$.

Решение. Оператор $A$ неограничен, так как последовательность $x_n = \sin nt \in \mathscr{D}(A)$ с $||x_n|| = 1$ под действием оператора перейдет в последовательность $Ax_n = n\cos nt + \sin nt$ и $||Ax_n|| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим на $\mathscr{D}\,(A)$ уравнение вида

$$x'\,(t) + x\,(t) = y\,(t)$$

и решим его методом Эйлера с учетом начальных условий

$$x\,(t) = e^{-t}\int_0^t e^{\tau} y\,(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Значит,

$$A^{-1} : C\,[0{,}1] \to \mathscr{D}\,(A)\,, \quad A^{-1}y\,(t) = e^{-t}\int_0^t e^{\tau} y\,(\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

$A^{-1}$ ограничен, т. е. $\exists\beta > 0$, что $\left|\left|A^{-1}y\right|\right|_{C[0,1]} \leqslant \beta\,||y||_{C[0,1]}$ . Действительно,

$$\left|\left|A^{-1}y\right|\right|_{C[0,1]} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|e^{-t}\int_0^t e^{\tau} y\,(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} e^{-t}\int_0^1 e^{\tau}\,|y\,(\tau)|\ \mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 e^{\tau} \left| y\left(\tau\right)\right| \,\mathrm{d}\tau \leqslant \left(e-1\right) \max_{0\leqslant\tau\leqslant 1} \left| y\left(\tau\right)\right| = \beta \left|\left|y\right|\right|_{C[0,1]}.$$

Следовательно, $A$ – неограниченный непрерывно обратимый оператор.

*Пример 5.* Рассмотрим оператор $A : C\,[0,1] \to C\,[0,1]$, действующий по формуле

$$Ax\left(t\right) = x\left(t\right) - \lambda \int_0^t x\left(s\right) \mathrm{d}s.$$

Доказать, что $A$ непрерывно обратим, найти $A^{-1}$.

Решение. Оператор $A$ является интегральным оператором Вольтерра с непрерывным ядром, поэтому $A$ ограничен. Рассмотрим уравнение

$$Ax\left(t\right) = y\left(t\right)$$

или

$$x\left(t\right) - \lambda \int_0^t x\left(s\right)\, \mathrm{d}s = y\left(t\right).$$

Откуда

$$x\left(t\right) = \lambda C\left(t\right) + y\left(t\right),$$

где $C\left(t\right) = \int_0^t x\left(s\right) \mathrm{d}s$, причем $C'\left(t\right) = x\left(t\right)$ и $C\left(0\right) = 0$. Следовательно, решение интегрального уравнения Вольтерра равносильно решению следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} C'\left(t\right) - \lambda C\left(t\right) = y\left(t\right), \\ C\left(0\right) = 0. \end{cases}$$

Решение задачи Коши согласно метода Лагранжа ищем в виде

$$C\left(t\right) = f\left(t\right) e^{\lambda t}.$$

Продифференцируем полученное равенство по переменной $t$

$$f^{'}\left(t\right) e^{\lambda t} = y\left(t\right) \Rightarrow f\left(t\right) - f\left(0\right) = \int_0^t e^{-\lambda s} y\left(s\right) \mathrm{d}s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\left(t\right) = e^{\lambda t} \left( f\left(0\right) + \int_0^t e^{-\lambda s} y\left(s\right) \mathrm{d}s \right) \Rightarrow$$

$$C(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s \Rightarrow x(t) = \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s + y(t)\,.$$

Значит,

$$A^{-1} y(t) = \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s + y(t)\,.$$

Это оператор Вольтерра 2-го рода и поэтому он ограничен.

*Пример 6.* В гильбертовом пространстве $\ell_2$ с ортогональным базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ рассмотрим оператор $A$, задаваемый формулами $Ae_k = \alpha_k e_k$, где $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел. При каком условии на последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператор $A$ замкнут?

Решение. Рассмотрим два случая:

1) Последовательность $\{|\alpha_n|\}$ ограничена. Пусть $C_A = \sup\limits_k |\alpha_k|$, тогда $\|Ax\|^2 \leqslant C_A \cdot \|x\|^2$. Следовательно оператор $A$ ограничен, а значит, и замкнут.

2) Последовательность $\{|\alpha_n|\}$ неограничена. Как показано в теме 1 в этом случае оператор $A$ неограничен. Если $\inf\limits_k |\alpha_k| = \beta_A > 0$ (т. е. $\alpha_k$ отделены от нуля положительным числом), то существует $A^{-1}$, определяемый на элементах $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty\right)$ формулой

$$A^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-1} y_k e_k.$$

Поскольку $\sup\limits_k \left|\alpha_k^{-1}\right| = \beta_A^{-1} < \infty$, то $A^{-1}$ ограничен $\left(\mathscr{D}\left(A^{-1}\right) = l_2\right)$. Таким образом, условие $\inf\limits_k |\alpha_k| > 0$ обеспечивает замкнутость оператора $A$.

*Пример 7.* Используя метод резольвент, решить интегральное уравнение Вольтерра вида

$$x(t) - \int\limits_0^t e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = y(t).$$

Решение. В нашем случае $\mathcal{K}(t,s) = e^{t-s}$ и к решению уравнения Вольтерра при любом $\lambda$ можно применить метод резольвент. Вычислим итерированные ядра

$$\mathcal{K}_1(t,s) = \mathcal{K}(t,s) = e^{t-s},$$

$$\mathcal{K}_2(t,s) = \int\limits_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s}\,\mathrm{d}\tau = e^{t-s}(t-s),$$

$$\mathcal{K}_3(t,s) = \int\limits_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s}(\tau-s)\,\mathrm{d}\tau = e^{t-s}\frac{(t-s)^2}{2!},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathcal{K}_i(t,s) = e^{t-s}\frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Резольвента $R(t,s;\lambda)$ представляет собой сумму ряда

$$R(t,s;1) = e^{t-s} + e^{t-s}\frac{(t-s)}{1!} + e^{t-s}\frac{(t-s)^2}{2!} +$$

$$+ \ldots + e^{t-s}\frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots = e^{2(t-s)}.$$

Тогда решение запишется по формуле в виде

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t e^{2(t-s)}\,y(s)\,\mathrm{d}s.$$

**Задание 1.** Пусть $A : L \to C[0,1]$ Выяснить, при каких $\lambda$ к оператору $A$ существует обратный и построить его.

1.1. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) + \lambda x(t);$

1.2. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) + \lambda t x(t);$

1.3. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) - \lambda t x(t);$

1.4. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) + \lambda t^2 x(t);$

1.5. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.6. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x'(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.7. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] :\ x(0) = x'(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.8. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] :\ x'(0) = x'(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.9. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] :\ x(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) - \lambda x(t);$

1.10. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] :\ x(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) - \lambda x(t);$

1.11. $L = \{x(t) \in C^3[0,1] :\ x'(0) = x''(1) = 0\}, Ax(t) = x'''(t) + \lambda x(t).$

1.12. $L = \{x(t) \in C^3[0,1] :\ x(0) = x''(1) = 0\}, Ax(t) = x'''(t) - \lambda x(t).$

**Задание 2.** Пусть $A : C[0,1] \to C[0,1]$. Используя теорему Банаха об обратном операторе, показать, что оператор $A$ непрерывно обратим, найти $A^{-1}$.

2.1. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.2. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (t+s) x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.3. $Ax(t) = x(t) + e^t \int\limits_0^1 e^{-s} x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.4. $Ax(t) = x(t) + t \int\limits_0^t s x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.5. $Ax(t) = x(t) - 2 \int\limits_0^1 t^2 s x(s) \mathrm{d}s;$

2.6. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (1 + t + s) x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.7. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 t s x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.8. $Ax(t) = x(t) + 2 \int\limits_0^1 e^{t+s} x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.9. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (s \cos \pi t - 1) x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.10. $Ax(t) = x(t) - \int\limits_0^1 tsx(s)\,\mathrm{d}s;$

2.11. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (1 - ts)x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.12. $Ax(t) = x(t) + t\int\limits_0^t s^2x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.13. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 \frac{t}{1+s}x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.14. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 \cos\pi(t - s)x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.15. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (t^2 - 1)sx(s)\,\mathrm{d}s.$

**Задание 3.** Проверить, существует ли непрерывный обратный к оператору $A : \ell_2 \to \ell_2$. В случае положительного ответа указать его.

3.1. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.2. $Ax = (x_1 + x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.3. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 - x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.4. $Ax = (x_1 - 2x_2, x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 - x_2, x_4, \ldots)\,;$

3.5. $Ax = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.6. $Ax = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.7. $Ax = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.8. $Ax = (2x_2 - 3x_3, -x_2 + 4x_3, -5x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.9. $Ax = (2x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.10. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.11. $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.12. $Ax = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 - 2x_3, x_1 - x_2, x_4, \ldots)\,;$

3.13. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_3, x_2 - x_3x_4, \ldots)\,;$

3.14. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_2 + 4x_3,x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.15. $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 3x_1 + x_3, x_4, \ldots)\,.$

**Задание 4.** Пусть $A : X \to Y$. Какие из операторов $A_l^{-1}$, $A_r^{-1}$, $A^{-1}$ существуют? Если $A^{-1}$ существует на $\mathscr{R}(A)$, будет ли $A^{-1}$ ограничен.

4.1. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_2, x_3, \ldots)\,;$

4.2. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = \left(x_1, \dfrac{1}{2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{k}\,x_k, \ldots\right);$

4.3. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = \left(\dfrac{1}{2}\,x_1, \dfrac{1}{2^2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right);$

4.4. $A : l_4 \to l_4, \quad Ax = \left(\dfrac{1}{2}\,x_1, \dfrac{1}{2^2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right);$

4.5. $A : l_1 \to l_2, \quad Ax = (x_1, 0, x_2, \ldots, x_k, \ldots)\,;$

4.6. $A : l_2 \to l_3, \quad Ax = (0, 2x_1,\, 3x_2, \ldots, kx_{k-1}, \ldots)\,;$

4.7. $A : l_3 \to l_1, \quad Ax = \left(x_2, 0, x_1, \dfrac{1}{3^2}\,x_3, \dfrac{1}{4^2}\,x_4, \ldots\right);$

4.8. $A : m \to m, \quad Ax = \left(x_1, \dfrac{1}{2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{k}\,x_k, \ldots\right);$

4.9. $A : m \to l_2, \quad Ax = \left(x_1, \dfrac{1}{2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{2^{k-1}}\,x_k, \ldots\right);$

4.10. $A : l_3 \to l_2, \quad Ax = (x_2, x_3, \ldots)\,;$

4.11. $A : l_3 \to l_2, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_1 - x_2,\, x_3, x_4, \ldots)\,;$

4.12. $A : l_2 \to l_4, \quad Ax = (0, 2x_1, 3x_2, \ldots, kx_{k-1}, \ldots)\,;$

4.13. $A : l_{3/2} \to l_1, \quad Ax = \left(x_3, x_2, x_1, \dfrac{1}{2^4}\,x_4, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right);$

4.14. $A : l_2 \to l_1, \quad Ax = \left(x_2, 0, x_1, \dfrac{x_3}{3^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{k^2}, \ldots\right);$

4.15. $A : m \to l_1, \quad Ax = \left(x_1, \dfrac{1}{2^2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right).$

**Задание 5.** Используя метод резольвент, найти решение следующих интегральных уравнений второго рода:

5.1. $x(t) - \int\limits_0^t e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = e^t;$

5.2. $x(t) - 2\int\limits_0^t e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = \sin t;$

5.3. $x(t) + \int\limits_0^t 3^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = t3^t;$

5.4. $x(t) - \int\limits_0^t \dfrac{2+\cos t}{2+\cos s} x(s)\,\mathrm{d}s = e^t \sin t;$

5.5. $x(t) + \int\limits_0^t e^{t^2-s^2} x(s)\mathrm{d}s = 1 - 2t;$

5.6. $x(t) - 2\int\limits_0^t e^{t^2-s^2} x(s)\,\mathrm{d}s = e^{t^2+2t};$

5.7. $x(t) - \int\limits_0^t \dfrac{1+t^2}{1+s^2} s x(s)\,\mathrm{d}s = 1 + t^2;$

5.8. $x(t) - \int\limits_0^t \sin(t-s) x(s)\,\mathrm{d}s = \dfrac{1}{1+t^2};$

5.9. $x(t) - \int\limits_0^t e^{-(t-s)} \sin(t-s) x(s)\,\mathrm{d}s = e^{-t};$

5.10. $x(t) - \int\limits_0^1 e^{t+s} x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

5.11. $x(t) - \int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos s x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

5.12. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 t e^s x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

5.13. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 t^2 s^2 x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

5.14. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 t s x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

5.15. $x(t) - \int\limits_0^1 (1 + (2t-1)(2s-1))\, x(s)\,\mathrm{d}s = y(t).$

**Задание 6.**

6.1. Доказать, что линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ замкнут тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}(A)$ замкнуто в $X$;

6.2. Доказать, что множество нулей замкнутого оператора является замкнутым множеством;

6.3. Пусть $A,B : X \to Y$ – линейные операторы, причем $A$ замкнут, $B$ ограничен и $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(B)$. Доказать, что $A + B$ – замкнутый оператор.

6.4. Пусть $A : X \to Y$ – замкнутый линейный оператор, $\mathscr{R}(A)$ замкнуто в $Y$ и существует такая константа $m \in \mathbb{R}$ $(m > 0)$, что для любого $x \in \mathscr{D}(A)$ выполняется неравенство $\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X$. Доказать, что $A$ – замкнутый оператор.

6.5. Пусть $A : X \to Y$ – замкнутый линейный оператор, $\mathscr{R}(A) = Y$ и существует оператор $A^{-1}$. Доказать, что $A^{-1}$ – линейный ограниченный оператор.

6.6. Пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор. Доказать, что оператор $A$ замкнут тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}(A)$ в норме $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ является банаховым пространством.