

1 Интерполяционный полином Лагранжа

Построим многочлен $P_n(x)$ такой, что $P_n(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, n}$

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

Будем строить, используя базисные ф-ции Лагранжа, обозначаем их $L_j(x)$, они обладают св-вом

$$L_j(x_i) = \delta_{ij}, i, j = \overline{0, n} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$L_j(x) \text{ можно представить в виде произведения } L_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$P_n(x)$ – полином n-ой степени, который проходит через точки (x_i, f_i) , $i = \overline{0, n}$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

$$\text{Пусть } \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i), \text{ тогда } L_j(x_i) = \frac{\omega(x)}{(x - x_j)\omega'(x_j)} \text{ и } P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$$

Очевидно, что погрешность $f(x) - P_n(x)$ можно представить как $\omega(x) K(x)$, $K(x)$ -некоторая ф-ция

$$\text{Для произвольной точки } f(x^*) - P_n(x^*) - \omega(x^*) K(x^*) = 0$$

Введём ф-цию $\Phi(x) = f(x) - P_n(x) - \omega(x) K(x^*)$. Если $f(x) \in C^{n+1}([a, b])$, то в силу того, что $P_n(x)$ – полином, степень которого $\leq n$, $K(x^*) = \text{const}$, $\Phi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - (n+1)! K(x^*)$.

Поскольку $\Phi(x)$ обращается в ноль $n+2$ раза в узлах (x^*, x_0, \dots, x_n) , то по Т.Ролля $\Phi'(x)$ обращается в ноль по крайней мере $n+1$ раз в интервале, который содержит x^*, x_0, \dots, x_n . Продолжая применять Т. Ролля, находим, что $\Phi^{(n+1)}(x)$ обращается в ноль по крайней мере один раз. Таким образом, в интервале значений x^*, x_0, \dots, x_n \exists такая точка $\xi(x)$, что производная $f^{(n+1)}(\xi(x)) = (n+1)! K(x^*)$.

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega(x) - \text{представление погрешности интерп. в т. X}$$

Замечание: Погрешность не обязательно убывает с ростом n

2 Оценка погрешности интерполяционного полинома на равномерной сетке.

Лемма:

На равномерной сетке узлов $\{x_i = a + ih, i = \overline{0, n}; h = \frac{b-a}{n}\}$ выполн. оценка

$$\prod_{i=0}^n |x - x_i| \leq \frac{1}{4} h^{n+1} n! \quad (1)$$

Д-во: Зафиксируем точку x и найдём номер узла j такого, что $x_j \leq x \leq x_{j+1}$. $|x - x_j| * |x - x_{j+1}| \leq \frac{h^2}{4} \quad (2)$

Используя ф-лу (2), находим $\prod_{i=0}^n (x - x_j) \leq \frac{h^2}{4} \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) * \prod_{i=j+2}^n (x_i - x)$ (3)

Оценку (3) буде усиливать: $\prod_{i=0}^n |x - x_j| \leq \frac{h^2}{4} \prod_{i=0}^{j-1} (x_{j+1} - x_i) * \prod_{i=j+2}^n (x_i - x_j)$ (4)

Т.к. сетка равномерная, то $x_{j+1} - x_i = (j + 1 - i)h$, $x_i - x_j = (i - j)h$. Подставим эти ф-лы в (4)

$\prod_{i=0}^n |x - x_j| \leq \frac{h^2}{4} h^j h^{n-(j+2)+1} \prod_{i=0}^{j-1} (j - i + 1) * \prod_{i=j+2}^n (i - j) \leq \frac{1}{4} h^{n+1} (j + 1)! (n - j)! \leq \frac{1}{4} h^{n+1} n!$ (6), поскольку $(j + 1)! (n - j)! \leq n!$ (7) Ч.Т.Д.

Теорема:

Пусть $f(x) \in C^{n+1}([a, b])$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Если $P_n(x)$ – интерполяционный полином степени $\leq n$, построенный на равномерной сетке узлов, оценка погрешности имеет вид:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M h^{n+1}$$

Д-во: следует из формулы $f^{(n+1)}(\xi(x)) = (n+1)! K(x^*)$ и доказанной леммы.

3. Разделенные разности (РР) и их свойства.

Опр. Разделённые разности нулевого порядка совпадают со значением ф-ции $f_i \equiv f(x_i)$

РР 1-го порядка будем записывать как $f(x_i; x_j) = \frac{f_j - f_i}{x_j - x_i}$ (1)

РР 2-го порядка будем записывать как $f(x_i; x_j; x_k) = \frac{f(x_j; x_k) - f(x_i; x_j)}{x_k - x_i}$ (2)

РР k-ого порядка аналогичным образом определяются через разделённые разности k-1-ого порядка:

$$f(x_1; x_2; \dots; x_{k+1}) = \frac{f(x_2; \dots; x_{k+1}) - f(x_1; \dots; x_k)}{x_{k+1} - x_1} \quad (3)$$

Лемма: Разделённую разность можно представить в виде суммы $f(x_0; x_1; \dots; x_k) = \sum_{j=0}^k \frac{f_j}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}$ (4)

Следствие 1: Значение $f(x_0; \dots; x_k)$ не зависит от упорядоч. узлов сетки

Следствие 2: Разность $f(x) - P_n(x) = f(x_0; \dots; x_k) \omega(x)$, $\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$

Д-во: $f(x) - P_n(x) = \omega(x) \left\{ \frac{f(x)}{\omega(x)} + \sum_{j=0}^n \frac{f_j}{(x_j - x) \omega'(x_j)} \right\}$, Ч.Т.Д.

Следствие 3: РР $f(x_0; \dots; x_k) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$, $\min\{x_0, \dots, x_k\} < \xi < \max\{x_0, \dots, x_k\}$

Следствие 4: РР явл-ся линейным оператором $(\alpha f + \beta g)(x_0; \dots; x_k) = \alpha f(x_0; \dots; x_k) + \beta g(x_0; \dots; x_k)$

Таблица разделённой разности

$$\begin{array}{llll}
x_1 & f_1 & & \\
x_2 & f_2 & f(x_1; x_2) & \\
x_3 & f_3 & f(x_2; x_3) & f(x_1; x_2; x_3) \quad f(x_1; x_2; x_3; x_4) \\
x_4 & f_4 & f(x_3; x_4) & f(x_2; x_3; x_4)
\end{array}$$

4. Интерполяционная формула Ньютона

Пусть $P_n(x)$ проходит через (x_i, f_i) , $i=\overline{0, n}$, т.е. он интер-ый степени $\leq n$.

Можем представить в виде $P_n(x) = f_0 + (x - x_0)P_{n-1}(x)$ **(1)**.

(1) $\Rightarrow P_{n-1}(x_i) = (P_n(x_i) - f_0)/(x_i - x_0) = (f_i - f_0)/(x_i - x_0) = f(x_0; x_i)$, $i=\overline{1, n}$ **(3)**.

$P_{n-1}(x)$ проходит через все т. $(x_i, f(x_0; x_i))$, $i=\overline{1, n}$. $\Rightarrow P_{n-1}(x) = f(x_0; x_1) + (x - x_1)P_{n-2}(x)$ **(4)** $\Rightarrow P_{n-2}(x_i) = (P_{n-1}(x_i) - f(x_0; x_1))/(x_i - x_1) = (f(x_0; x_i) - f(x_0; x_1))/(x_i - x_1) = f(x_0; x_1; x_i)$, $i=\overline{2, n}$. Продолжая по алгоритму, получаем $P_n(x) = f_0 + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f(x_0; \dots; x_n)$ **(6)** – ф-ла Ньютона представления интерполяционного полинома через разделенные разности. Погрешность: $f(x) - P_n(x) = f(x; x_0; \dots; x_n) \omega(x)$. В (6) порядок узлов не важен, поэтому роль x_0 может играть \forall точка, например: $P_n(x) = f_n + (x - x_n)f(x_{n-1}; x_n) + (x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_n; x_{n-1}; x_{n-2}) + \dots + (x - x_n) \dots (x - x_1)f(x_0; \dots; x_n)$ **(7)**.

Если сетка упорядочена по возрастанию, то (6)-ф-ла Ньютона для начала таблицы, (7)-для конца.

5. Конечные разности и их свойства

Опр. Разностный оператор Δ ставит в соответствие функции $Y(x)$ функцию $\Delta Y(x) = Y(x+h) - Y(x)$ **(1)**

Разностный оператор линейный, т.е. $\forall a, b = \text{const}, \Delta(af(x) + bg(x)) = a\Delta f(x) + b\Delta g(x)$ **(2)**

$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = \Delta(y(x+h) - y(x)) = y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)$ **(3)**

Δ^2 - Разность второго порядка, разности более высоких порядков определяются аналогичным образом

Конечн.разности удобно представлять в виде таблицы, основанной на фор-ле: $\Delta^k y_p = \Delta^{k-1} y_{p+1} - \Delta^{k-1} y_p = \Delta^{k-1}(y_{p+1} - y_p) = \Delta^{k-1}(\Delta y_p)$ **(4)**

Альтернативой явл-ся аналит.подход, основанный на разностной формуле Лагранжа: $\Delta^k y_p = \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} C_k^l y_{p+l}$ **(5)**

Конечная разность произвед.: $\Delta(f(x)g(x)) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x) = f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + g(x)(f(x+h) - f(x)) = f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$ **(6)**

Или $\Delta(f(x)g(x)) = g(x+h)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$ **(7)**

$\Delta \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+h)}$ **(8)**

Л. Если $\deg(f(x))=n$, то $\deg(\Delta f(x))=n-1$

• Пусть $f = x^n \Rightarrow \Delta f = (x+h)^n - x^n =$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k h^{n-k} x^k - x^n = nhx^{n-1} + \dots + h \quad (9)$$

Т.е. $\deg(\Delta x^n)=n-1$ ■

Т. Если $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_0$ (10), то $\Delta^n f =$

$$\alpha_n n! h^n, \Delta^{n+1} f = 0 \quad (11)$$

• Применим к (10) Лемму n раз. ■

6. Минимизация остатка интерполирования

$T_n(x) = \cos(n * \arccos(x))$, $x \in [-1, 1]$ -многочлены Чебышева

$$\text{Или } T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Л. \forall многочлена $P_n(x)$ степени n со старшим коэфф.=1 выполн.условие: $\max_{[-1,1]} |P_n(x)| \geq \max_{[-1,1]} |\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n}$, где $\bar{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x)$ (1)

• От противного. Пусть $\exists P_n^*(x): \max_{[-1,1]} |P_n^*(x)| < 2^{1-n}$. Тогда $\deg(\bar{T}_n(x) - P_n^*(x))=n-1$ и $\text{sgn}(\bar{T}_n(x_m) - P_n^*(x_m)) = \text{sgn}((-1)^m 2^{1-n} - P_n^*(x_m)) = (-1)^m$, т.к. $\forall m |P_n^*(x_m)| < 2^{1-n}$, где $x_m = \cos \frac{\pi m}{n}$ - корни $T_n(x)$, $m=\overline{0, n}$. Т.е. многочлен степени n-1 на отрезке $[-1, 1]$ меняет знак n+1 раз, т.е. имеет n корней – противоречие!! ■

В случае отрезка $[a, b]$ делаем замену $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} = \psi(t)$, $t \in [-1, 1]$ (2).

$$\text{Тогда } P_n(x) = x^n + P_{n-1}(x) = \psi^n(t) + P_{n-1}(\psi(t)) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \bar{P}_n(t) \quad (3).$$

По доказанному ранее $\max_{[a,b]} |P_n(x)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \max_{[-1,1]} |\bar{P}_n(t)| \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^n 2^{1-n} = (b-a)^n 2^{1-2n}$ (4).

Рав-во в (4) дост-ся на приведенном мног-не Чебыш. $\bar{T}_n^{[a,b]}(x) = (b-a)^n 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$ (5) – многочлен, наименее уклоняющ. от 0 на $[a, b]$ со старш коэфф.=1.

$$\text{Корни } \bar{T}_n^{[a,b]}: \bar{T}_n^{[a,b]}(x) = 0 \Rightarrow x_m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\pi\left(m + \frac{1}{2}\right)/n\right), m=\overline{0, n-1} \quad (6)$$

Для оценки остатка интерпол-ия ф-ции $f(x)$ на сетке узлов $\{x_k\} \in [a, b]$ будем испол-ть равномерн норму $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f(x)|$.

Из представления остатка следует $\|f(x) - P_{n-1}(x)\| \leq \frac{1}{n!} \|f^{(n)}(x)\|_\infty \|\omega(x)\|_\infty$ (7). $\omega(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$. Будем минимизировать правую часть (7). $\deg(\omega)=n$, поэтому если в кач-ве узлов интерпол-ия взять корни мног-на Чебыш., то $\omega(x) = \bar{T}_n^{[a,b]}(x)$ (8). $\|\omega\|_\infty = (b-a)^n 2^{1-2n}$, поэтому на чебышевском наборе узлов оценка погр-ти интер-ия $\|f(x) - P_{n-1}(x)\| \leq \frac{1}{n!} \|f^{(n)}(x)\|_\infty (b-a)^n 2^{1-2n}$. Это неулучшаемая оценка погрешности интерполирования.

7. Интерполирование с кратными узлами.

Пусть $\omega = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ – сетка узлов интерполяции, среди которых нет совпадающих, и пусть в этих узлах заданы значения функции $f(x_i)$ и ее производных до $n_i - 1$ включительно, где n_i – кратность i-го узла. Требуется найти многочлен $P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ наименьшей степени n такой, что

$$\begin{cases} P_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), & i = \overline{0, k}, \quad j = \overline{0, n_i - 1} \\ \sum_{i=0}^k n_i = n + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Если $n_i = 1$, то узел – простой; если $n_i > 1$, то узел кратности n_i (кратный).

Теорема 1: Задача (1) имеет единственное решение.

Д-во: Очевидно, что система (1.1) относительно α_i является линейной алгебраической порядка $n + 1$.

Чтобы доказать, что СЛАУ имеет единственное решение, достаточно убедиться, что однородная СЛАУ имеет только нулевое решение.

Пусть $f^{(j)}(x_i) = 0$. Тогда однородная СЛАУ имеет вид: $P_n^{(j)}(x_i) = 0$

Покажем, что из этого следует, что $\alpha_i = 0$ при всех i .

Пусть, от противного, тогда каждый узел x_i является корнем полинома $(P_n(x))$ кратности n_i , т.е. справедливо

представление $P_n(x) = d * \prod_{i=0}^k (x - x_i)^{n_i}$, значит полином кратности n имеет $n + 1$ действительных корней – противоречие. Значит теорема доказана.

Многочлен, удовлетворяющий условиям (1), называют интерполяционным многочленом Эрмита.

Рассмотрим погрешность интерполяции $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Теорема 2: Существует точка $\bar{x} \in [a, b]: R_n(\bar{x}) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})$, где $\omega(x) = (x - x_0)^{n_0} (x - x_1)^{n_1} \dots (x - x_k)^{n_k}$

Введем функцию $F(z) = f(z) - P_n(z) - \frac{\omega(z)}{\omega(x)} [f(x) - P_n(x)]$, $F \in$

$C^{m+1}[a; b]$ по построению, причем x_i и x корни для $F(z)$ с кратностями n_i и 1 соответственно. Сумма кратностей тогда не менее $n+2$. Тогда $F'(z)$ по т. Ролля на каждом отрезке между соседними узлами имеет не менее одного корня (k корней). Также производная имеет корни x_i с кратностями $n_i - 1$ ($n + 1 - k$ в сумме). Получаем, что сумма кратностей корней производной $n + 1$. Аналогично рассматриваем производные более высоких порядков. Тогда для $F^{(n+1)}(z)$ по крайней мере 1 корень $\bar{x} \in [a, b]: F^{(n+1)}(\bar{x}) = f^{(n+1)}(\bar{x}) - \frac{(n+1)!}{\omega(x)} [f(x) - P_n(x)] = f^{(n+1)}(\bar{x}) - \frac{(n+1)!}{\omega(x)} R_n(x) = 0$.

8. Интерполяционный кубический сплайн.

Пусть $\omega = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ – сетка узлов интерполяции; $f(x)$ – интерполируемая функция, заданная в этих узлах.

Кубический интерполяционный сплайн определяется условиями:

а) $S_3(x) = \{P_{3,i}(x) = a_{0,i}x^3 + a_{1,i}x^2 + a_{2,i}x + a_{3,i} \mid x \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, N}\};$

б) $P_{3,i}(x_i) = P_{3,i+1}(x_i); \quad i = \overline{1, N-1};$

$P'_{3,i}(x_i) = P'_{3,i+1}(x_i); \quad i = \overline{1, N-1};$

$P''_{3,i}(x_i) = P''_{3,i+1}(x_i); \quad i = \overline{1, N-1};$

в) $P_{3,i}(x_i) = f_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad P_{3,1}(x_0) = f_0.$

Неизвестных здесь $4N$, условий а), б), в) $4N - 2$. Не хватает 2 условий для замыкания СЛАУ. Их обычно накладывают на концах отрезка $[a, b]$, исходя из наличия или отсутствия

дополнительной информации о функции $f(x)$ в точках a и b .

Если известны первые производные, то

з-1) $S'_3(a) = P'_{3,1}(a) = f'_0, \quad S'_3(b) = P'_{3,N}(b) = f'_N$

Вторые

з-2) $S''_3(a) = P''_{3,1}(a) = f''_0, \quad S''_3(b) = P''_{3,N}(b) = f''_N$

Ничего не известно

$$2-3) S_3''(a) = P_{3,1}''(a) = 0, \quad S_3''(b) = P_{3,N}''(b) = 0.$$

Преобразуем задачу к более простому виду. Для этого введем обозначения $h_i = x_i - x_{i-1}$, $M_i = S_3''(x_i)$.

Так как функция $S_3''(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и линейна на каждом элементе $l_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, N}$, то при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ можно записать

$$S_3''(x) = P_{3,i}''(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (1)$$

Проинтегрируем (1) дважды:

$$S_3'(x) = P_{3,i}'(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + c_i,$$

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + c_i x + d_i.$$

Или

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i \frac{x_i - x}{h_i} + B_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (2)$$

$$c_i = \frac{B_i - A_i}{h_i}, \quad d_i = \frac{A_i x_i - B_i x_{i-1}}{h_i}.$$

Константы A_i и B_i определяем из условий (в) и непрерывности сплайна $S_3(x)$:

$$\begin{cases} S_3(x_i) = P_{3,i}(x_i) = M_i \frac{h_i^2}{6} + B_i = f_i & \Rightarrow & B_i = f_i - M_i \frac{h_i^2}{6} \\ S_3(x_{i-1}) = P_{3,i}(x_{i-1}) = M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + A_i = f_{i-1} & \Rightarrow & A_i = f_{i-1} - M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \end{cases}$$

В окончательном виде

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_{i-1} - M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - M_i \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, N} \quad (3)$$

Таким образом, мы привели сплайн к виду (3), где неизвестными являются M_i , которых столько

же, сколько узлов, т.е. $N+1$. Это значит, что число неизвестных, определяющих кубический сплайн

$S_3(x)$ сократилось в 4 раза. Чтобы привести сплайн к виду (3), мы использовали условия непрерывности $S_3(x)$ и $S_3''(x)$ а также условие (в). Осталось неиспользованным условие

непрерывности $S_3'(x)$ с помощью которого построим СЛАУ для неизвестных M_i $i = \overline{0, N}$

Имеем

$$S_3'(x) = P_{3,i}'(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{1}{6} h_i (M_i - M_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (4)$$

Условие непрерывности $S_3'(x)$ во внутренних узлах $P_{3,i}'(x_i) = P_{3,i+1}'(x_i)$, $i = \overline{1, N-1}$

$$\frac{1}{6} h_i M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{1}{6} h_{i+1} M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, N-1}$$

Имеем СЛАУ (5) из $N-1$ уравнений для $N+1$ неизвестных M_i . Остальные 2 уравнения получим из

условий (г).

В случае условий (г-1)

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} h_1 M_0 - \frac{1}{6} h_1 M_1 + \frac{f_1 - f_0}{h_1} = f_0' \\ \frac{1}{3} h_N M_N + \frac{1}{6} h_N M_{N-1} + \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} = f_N' \end{cases}$$

$$(\Gamma-2): M_0 = f_0'' \quad M_N = f_N'' \quad (\Gamma-3): M_0 = 0 \quad M_N = 0 \quad (6)$$

Получили СЛАУ (5), (6) из $N+1$ уравнений с трехдиагональной матрицей для неизвестных M_i $i = \overline{0, N}$. Для ее решения удобно применять метод прогонки, который в данном случае применим и абсолютно устойчив. Найдя M_i мы можем записать искомый кубический сплайн на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, N}$ в виде (3).

9. Наилучшие приближения в линейном нормированном пространстве

Пусть H – линейное нормированное пространство. Требуется найти элемент наилучшего приближения $f \in H$ с помощью линейной комбинации $\sum_{j=1}^n c_j g_j$, $g_j \in H$ и g_j – линейно независимы. Т.е. требуется найти элемент $\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j$ такой, что $\Delta = \|f - \varphi\| = \inf_{c_1, \dots, c_n} \|f - \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j\|$.

Если существует такой элемент $\varphi \in H$, то он называется элементом наилучшего приближения (ЭНП).

Теорема. ЭНП в линейном нормированном пространстве существует.

Доказательство.

$$\left| \|f - \sum_{j=1}^n \beta_j g_j\| - \|f - \sum_{j=1}^n \gamma_j g_j\| \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^n (\beta_j - \gamma_j) g_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\beta_j - \gamma_j| \|g_j\|.$$

$F(c_1, \dots, c_n) = \left\| f - \sum_{j=1}^n c_j g_j \right\|$ является непрерывной функцией $\forall f \in H$

$|c| = \|c\|_2$ – Евклидова норма

$F_0(c_1, \dots, c_n) = \left\| f - \sum_{j=1}^n c_j g_j \right\|$ непрерывна на сфере $|c| = 1$ и в некоторой ее точке $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$ достигает свою нижнюю грань $\bar{F} \neq 0$.

$\bar{F} = \left\| \sum_{j=1}^n \bar{c}_j g_j \right\| = 0 \Rightarrow g_j$ – линейно зависимые, получаем противоречие.

$$\forall c \neq 0: F_0(c_1, \dots, c_n) = |c| F_0\left(\frac{c_1}{|c|}, \dots, \frac{c_n}{|c|}\right) \geq |c| \bar{F}$$

Выберем $\gamma = \text{const} > \frac{2\|f\|}{\bar{F}}$. $F(c_1, \dots, c_n)$ непрерывна в шаре $|c| \leq \gamma$ и в некоторой его точке $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ достигает нижнюю грань F^* . $F^* \leq F(0, \dots, 0) = \|f\|$. Точка $(0, \dots, 0) \in |c| \leq \gamma$. Вне шара: $|c| > \gamma > \frac{2\|f\|}{\bar{F}}$. $F(c_1, \dots, c_n) \geq \left| \sum_{j=1}^n c_j g_j \right| - \|f\| > \frac{2\|f\|\bar{F}}{\bar{F}} - \|f\| = \|f\| \geq F^* = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. \square

Замечание: ЭНП может быть не единственным.

H – линейно нормированное пространство называется строго нормированным, если из $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$, $\|f\|, \|g\| \neq 0$ следует: $f = \alpha g$, $\alpha > 0$.

Теорема. Если H – строго нормированное, то существует единственный ЭНП.

Доказательство. От противного.

Существует $f_1 \neq f_2$, $f_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} g_i$, $j = 1, 2, \dots$

$\|f - f_1\| = \|f - f_2\| = \Delta$. Очевидно, $\Delta \neq 0$, т.к. иначе $f_1 = f_2 = f$ (противоречит нашему предположению)

$$\left\| f - \frac{f_1 + f_2}{2} \right\| = \left\| \frac{f - f_1}{2} + \frac{f - f_2}{2} \right\| \leq \left\| \frac{f - f_1}{2} \right\| + \left\| \frac{f - f_2}{2} \right\| = \Delta, \left\| f - \frac{f_1 + f_2}{2} \right\| \geq \Delta$$

$\frac{f-f_1}{2} = \alpha \frac{f-f_2}{2}$. При $\alpha \neq 1$: $f = \frac{f_1 - \alpha f_2}{1 - \alpha}$, т.е. f – линейная комбинация g_1, \dots, g_n , т.е. $\Delta = 0$. При $\alpha = 1$: $f_1 = f_2$ \square

10. Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве

$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ Пусть H – гильбертово пространство. Для H элемент наилучшего приближения (ЭНП) φ единственен и его построение сводится к решению системы линейных уравнений. $G = \text{span}\{g_1, \dots, g_n\}, g_j \in H, j = 1, \dots, n$ – линейно независимая система

$$f \in H \quad \|f - \varphi\| = \inf_{h \in G} \|f - h\|$$

Лемма 1. $\varphi \in H$ – ЭНП. Тогда $f - \varphi$ ортогональна всем элементам G .

Доказательство. От противного.

Существует $\psi \in G$: $(f - \varphi, \psi) = \alpha \neq 0$. $\|\psi\| = 1$.

Рассмотрим $\xi = (\varphi + \alpha \psi) \in G$. $\|f - \xi\|^2 = (f - \varphi - \alpha \psi, f - \varphi - \alpha \psi) = (f - \varphi, f - \varphi) - \alpha(\psi, f - \varphi) - \bar{\alpha}(f - \varphi, \psi) + \alpha \bar{\alpha}(\psi, \psi)$

$$(\psi, f - \varphi) = \overline{(f - \varphi, \psi)} = \bar{\alpha}$$

$$\|f - \xi\|^2 = -\alpha \bar{\alpha} - \alpha \bar{\alpha} + \|f - \varphi\|^2 + \alpha \bar{\alpha} = \|f - \varphi\|^2 - \alpha \bar{\alpha}. \text{ Получили противоречие } \square$$

Лемма 2. $(f - \varphi, h) = 0 \forall h \in G$. Тогда φ – ЭНП.

Доказательство. $\forall h \in G \|f - h\|^2 = (f - \varphi + \varphi - h, f - \varphi + \varphi - h) = \|f - \varphi\|^2 + (\varphi - h, f - h) + (f - h, \varphi - h) + \|\varphi - h\|^2 = \|f - \varphi\|^2 + \|\varphi - h\|^2$

$\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j$. Из **леммы 1** следует: $(f - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i, g_i) = 0, i = 1, \dots, n$

$$(f - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i, g_i) = \sum_{i=1}^n (g_i, g_j) \alpha_i = (f, g_j), j = 1, \dots, n. \quad \square$$

Замечание 1: Если элементы g_i ортонормированные $(g_i, g_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, n$. Тогда $\alpha_j = (f, g_j), j = 1, \dots, n$. $\varphi = \sum_{i=1}^n (f, g_i) g_i$ – отрезок ряда Фурье, α_j – коэффициенты Фурье

Замечание 2: φ – ЭНП $\Rightarrow (f - \varphi, \varphi) = 0$

$$\|f, \varphi\| = \|\varphi\|^2 \quad \|f - \varphi\|^2 = \|f\|^2 - \|\varphi\|^2$$

Замечание 3: Типичный пример гильбертова пространства это $L_2(a, b)$

Замечание 4: Коэффициенты Фурье дают наилучшее среднеквадратичное приближение.

11. Интерполяционные квадратурные формулы.

Рассмотрим квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании функции

$$f(x) \quad x \in [a, b]$$

Узлы $x_k, k = \overline{0, n}$ считаем заданными

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)} \quad (1)$$

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)P_n(x)dx + \int_a^b p(x)r_n(x)dx \quad (2)$$

Отбрасывая второй интеграл в (2), получаем квадратурную формулу интерполяционного типа

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n C_k f_k \quad (3)$$

$$C_k = \int_a^b p(x) \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)} dx \quad (4)$$

Теорема

Для того чтобы квадратурная формула (3), построенная на $n + 1$ несовпадающих была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точной на полиномах степени n (замечание при этом квадратурная формула может быть точной для полинома степени выше n).

Доказательство:

Необходимость очевидна.

Интерполяционная квадратурная формула, построенная на $n + 1$ различных узлах будет точной для полиномов степени n , когда подынтегральная функция заменяется равным ей интерполянтом.

Достаточность:

Если квадратурная формула (3) точна для любого полинома, степени не выше n , то её весовые коэффициенты находятся по формуле (4), т. е. она является формулой интерполяционного типа.

Рассмотрим базисные функции Лагранжа

$$l_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)} \quad (5)$$

$$w(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$$

$$l_i(x) = \delta_{ik}$$

С учетом этого находим

$$\int_a^b p(x)l_i(x)dx = \sum_{k=0}^n C_k l_i(x_k) = C_i, i = \overline{0, n} \quad (6)$$

т. е. формула (4) является справедливой

Погрешность квадратурной формулы

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)r_n(x)dx \quad (7)$$

$$r_n(x) = w(x)f(x_0; x_1; \dots; x_n; x) \quad (8)$$

Тогда

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)w(x)f(x_0; x_1; \dots; x_n; x)dx \quad (9)$$

Если $f(x) \in C^{k+1}[a, b]$ гладкая, то

$$r_n(x) = \frac{w(x)}{(n+1)!} f^{(k+1)}(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (10)$$

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f(x)w(x)f^{(k+1)}(\xi(x))dx \quad (11)$$

Если мы знаем оценку

$$|f^{(k+1)}(x)| \leq M_n \quad x \in [a, b],$$

то

$$R_n(f) \leq \frac{M_n}{(n+1)!} \int_a^b |p(x)w(x)|dx \quad (12)$$

12. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций.

Берем равномерную сетку узлов $x_i = x_{i-1} + h \quad i = \overline{1, n}$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \quad (1)$$

Если для интеграла в правой части построить квадратурную формулу, то получим составную квадратурную формулу

1) Формула средних прямоугольников

$$\begin{aligned} x \in [x_{i-1}, x_i] \quad f(x) \approx f(x_i - 0,5h) \cong \\ \cong f_{i-\frac{1}{2}} \quad - \quad \text{значение функции в средней точке отрезка} \end{aligned}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx hf_{i-\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$\text{Погрешность } \varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - hf_{i-\frac{1}{2}})dx \quad (3)$$

Оценим погрешность с помощью формулы Тейлора

$$\varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f_{i-\frac{1}{2}})dx \quad (4)$$

$$f(x) = f_{i-\frac{1}{2}} + \left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right) f'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2 f''(\xi_i), \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (5)$$

Используя (5) и (4), находим

$$\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 f''(\xi_i)dx \quad (6)$$

Введем обозначение:

$$M_{2,i} = \max_{[x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|$$

Тогда

$$|\varphi_i| \leq \frac{1}{2} M_{2,i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 dx = \frac{h^3}{24} M_{2,i} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + ht, & dx &= hdt \\ x_i - x_{i-\frac{1}{2}} &= x_{i-1} - x_{i-\frac{1}{2}} + ht = -\frac{h}{2} + ht, & dx &= hdt \end{aligned}$$

Составная квадратурная формула

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n h f_{i-1/2} \quad (8)$$

Найдем погрешность

$$R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n h f_{i-1/2} \quad (9)$$

Очевидно, что она равна сумме погрешностей простой формулы (8)

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2} (x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 f''(\xi_i) dx \quad (10)$$

$$M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Тогда

$$|R_n(f)| \leq \frac{1}{24} M_2 n h^3 = \frac{1}{24} h^2 (b-a) M_2 \quad (11)$$

Таким образом, погрешность составной формулы на $[a, b]$ есть

$$O(h^2) \text{ или } |R_n(f)| = O(h^2)$$

Формула имеет второй порядок точности

2) Формула трапеций

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{1}{2} (f_{i-1} + f_i) h \quad (12)$$

$$L_{1,i}(x) = \frac{1}{2} (f_{i-1}(x - x_{i-1}) + f_i(x_i - x)) \quad (13)$$

Погрешность интерполяции

$$f(x) - L_{1,i}(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_i(x)) (x - x_{i-1})(x_i - x) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{1}{2} h (f_{i-1} + f_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - L_{1,i}) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})(x - x_i) f''(\xi_i(x)) dx \quad (15) \end{aligned}$$

$$|\varphi_i| \leq \frac{h^3}{12} M_{2,i} \quad (16)$$

Полученная оценка (16) является не улучшаемой, равенство в (16) достигается, если $f(x) = (x - x_i)^2$

Составная формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} h(f_{i-1} + f_i) \quad (17)$$

$$|R_n(f)| \leq \frac{1}{24} h^2 (b-a) M_2 \quad (18)$$

13. Квадратурная формула Симпсона.

Формула Симпсона

$$x_i, x_{i-1}, x_{i-1/2} \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$L_{2,i}(x) = \frac{2}{h^2} \left(\left(x - x_{i-1/2} \right) (x - x_i) f_{i-1} - 2(x - x_{i-1})(x - x_i) f_{i-1/2} + \left(x - x_{i-1/2} \right) (x - x_{i-1}) f_i \right) \quad (19)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{2,i}(x) dx = \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i) \quad (20)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i) \quad (21)$$

Для оценки погрешности построим интерполяционный полином Эрмита 3-ей степени, который удовлетворяет условиям:

$$H_3(x_{i-1}) = f_{i-1}, \quad H_3(x_{i-1/2}) = f_{i-1/2}, \quad H_3(x_i) = f_i, \quad H'_3(x_{i-1/2}) = f'_{i-1/2} \quad (22)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} H_3(x) dx = \frac{h}{6} \left(H_3(x_{i-1}) + 4H_3(x_{i-1/2}) + H_3(x_i) \right) = \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i) \quad (23)$$

$$f(x) = H_3(x) + r_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (24)$$

$$\varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{h}{6} (f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} r_i(x) dx \quad (25)$$

$$r_i(x) = \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_i) (x - x_{i-1}) \left(x - x_{i-1/2} \right)^2 (x - x_i) \quad (26)$$

Из (25) и (26) следует:

$$|\varphi_i| \leq \frac{1}{24} M_{4,i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \left(x - x_{i-1/2} \right)^2 (x - x_i) dx \quad (27)$$

$$M_{4,i} = \max_{[x_{i-1}, x_i]} |f^{(4)}(x)|$$

$$|\varphi_i| \leq \frac{h^5}{2880} M_{4,i} \quad (28)$$

$$|R_n(f)| \leq \frac{h^4}{2880} (b-a) M_4 \quad (29)$$

$$M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

14. Критерий квадратурных формул НАСТ.

Если в квадратурной формуле интерполяционного типа использовать n узлов, то она будет точна для многочленов степени $n-1$.

Оказывается, что за счёт выбора узлов сетки можно построить квадратурные формулы, которые будут точны для степени $< 2n-1$

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n C_k f_k \quad (1)$$

Потребуем, чтобы эта формула была точна для любого полинома степени m , т. е.

$$\forall f(x) = x^\alpha, \quad \sum_{k=1}^n C_k x_k^\alpha = \int_a^b p(x) f(x) dx, \quad \alpha = \overline{0, m} \quad (2)$$

Получим систему относительно $C_1, \dots, C_n, x_1, \dots, x_n$

Можно показать, что это система при $m = 2n - 1$ имеет единственное решение

Сформулируем критерий квадратурных формул НАСТ

Теорема

Квадратурная формула (1) точна для любого полинома степени $2n-1$ когда выполняются условия:

- 1) $w(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ ортогонален с весом $p(x) > 0$ любому полиному $q(x)$ степени $< n$

$$\int_a^b p(x) q(x) w(x) dx = 0 \quad (5)$$

- 2) Формула (1) является формулой интерполяции типа, т.е.

$$C_k = \int_a^b p(x) \frac{w(x)}{(x - x_k) w'(x_k)} dx \quad (6)$$

Необходимость:

Пусть формула (1) точна для любого многочлена степени $m=2n-1$. Это значит, что она точна и для $w(x)q(x)$, степень которого $\leq 2n-1$. Условие (6) выполняется также в силу критерия интерполяционной формулы.

Достаточность:

Пусть функция $f(x)$ – полином степени $2n-1$

Согласно теореме

$$f(x) = w(x)q(x) + r(x) \quad (7)$$

($r(x)$ является полиномом степени не выше $n-1$)

тогда находим

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) f(x) dx &= \left(\int_a^b p(x) w(x) q(x) dx = 0 \right) + \int_a^b p(x) r(x) dx \\ &= \int_a^b p(x) r(x) dx \quad (8) \end{aligned}$$

Т. к. $r(x)$ - полином степени не выше $n-1$ и квадратурная формула (1) является формулой интерполяционного типа, то она точна для $r(x)$, т. е. $\int_a^b p(x) r(x) dx = \sum_{k=1}^n C_k r(x_k) = \sum_{k=1}^n C_k (f_k - (w_k q_k = 0 \text{ (по опр.)})) = \sum_{k=1}^n C_k f_k \quad (9)$

Таким образом, $\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n C_k f_k$, т. е. формула (1) точна для любого полинома степени $2n-1$.

Замечание 1

Теорема упрощает построение формулы Гаусса

$$(w(x), x^\alpha) = 0, \quad \alpha = \overline{0, n-1} \quad (10)$$

Эта формула представляет собой систему из n уравнений относительно x_1, x_2, \dots, x_n

Таким образом, для построения квадратурной формулы Гаусса нужно найти узлы x_k из системы (10), затем коэффициенты C_k по формуле (6)

Замечание 2

Теорема не гарантирует \exists и $!$ решения системы (10). Докажем \exists и $!$

квадратурных формул Гаусса. Для этого докажем \exists и $!$ многочлена $w(x)$ степени n , ортогонального всем полиномам меньшей степени, корни которого

$x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$

Представим полином $w(x)$ в виде разложения по базису $1, x, x^2, \dots$

$$w(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \quad (11)$$

тогда из (10) имеем

$$\int_a^b p(x)x^\alpha (a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n)dx = 0, \quad \alpha = \overline{0, n-1} \quad (12)$$

(12) — система из n уравнений относительно неизвестных

переменных a_0, \dots, a_{n-1}

Умножим на a_2 и проведём

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} a_\alpha \int_a^b p(x) \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k x^\alpha dx = \int_a^b p(x) \sum_{\alpha,k=0}^{n-1} a_\alpha a_k x^k x^\alpha dx = 0 \quad (13)$$

Или

$$\int_a^b p(x) \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)^2 dx = 0 \quad (14), \text{ где } p(x) > 0$$

Поэтому (14) равенство может $= 0$, если все $a_i = 0$, т. е. система (12) имеет единственное решение $\Rightarrow \exists!$ полином $w(x)$ степени n ортогональный с весом $p(x)$ любому многочлену меньшей степени.

15 Существование и единственность квадратурных формул НАСТ

Теорема: Если $\rho(x) \geq 0, x \in [a, b]$, то $\exists!$ многочлен $w(x): w(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$

ортогональный с весом $\rho(x)$ всякому многочлену $P_m [a, b]$. Док-во: $w(x) = x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_{n+1}$

$$1, x, x^2, \dots, x^n - \text{базисные функции} \quad \int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f_i \quad АСТ = 2n + 1$$

Вместо $P_m(x)$ будем брать базисные функции

$$\begin{cases} \int_a^b \rho(x)[w(x)] * 1 dx = 0 \\ \int_a^b \rho(x)[w(x)] * x dx = 0 \\ \dots \\ \int_a^b \rho(x)[w(x)] * x^n dx = 0 \end{cases} \quad (1)\text{-неоднородная СЛАУ. Неодн СЛАУ имеет ! решение} \Leftrightarrow$$

однородную СЛАУ имеет только нулевое решение. Строим ещё одну СЛАУ, похожую на (1), где $w(x) = a_1 x^n + \dots + a_{n+1}$. СЛАУ (2) – однор, соответствует системе (1) и имеет ! решение (нулевое) :

$$\int_a^b \rho(x)(a_1 x + \dots + a_{n+1})^2 dx = 0 \Leftrightarrow (a_1 x + \dots + a_{n+1}) = 0 \rightarrow a_i = 0, i = \overline{1, n+1}$$

16 Свойства КФ НАСТ

1. $\rho(x) \geq 0 (\neq 0)$ на $[a, b]$, то все $A_i > 0, i = \overline{0, n}$

$$P! f_i(x) [\text{где } i = \overline{0, n}, \deg = 2n] = l_i^2(x) = \left(\frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)} \right)^2 = \left(\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right)^2, l_i(x_j) = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases}$$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f_i(x_k) = A_i f_i(x_i) = A_i > 0$$

2. $f(x) \in C^{2n+2} [a, b] \rightarrow \exists \xi \in [a, b]$

$$R_n = \frac{1}{(2n+2)!} f^{2n+2}(\xi) \int_a^b \rho(x) w^2(x) dx; P_{2n+1}(x) = \begin{cases} P_{2n+1}(x_i) = f_i, i = \overline{0, n} \\ P'_{2n+1}(x_i) = f'_i, i = \overline{0, n} \end{cases}$$

$\rightarrow 2n+2$ условий

$$r_n = \frac{1}{(2n+2)!} f^{2n+2}(\xi) w^2(x), f(x) = P_{2n+1}(x) + r_n(x); \int_a^b \rho(x) f(x) dx =$$

$$\int_a^b \rho(x) P_{2n+1}(x) dx + R_n = \sum_{i=0}^n A_i P_{2n+1}(x_i) + R_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + R_n; R_n =$$

$$\int_a^b \rho(x) r_n(x) dx = \frac{1}{(2n+2)!} \int_a^b f^{2n+2}(\eta) \rho(x) w^2(x) dx = \frac{1}{(2n+2)!} f^{2n+2}(\xi) \int_a^b \rho(x) w^2(x) dx$$

3. Если $f(x)$ непрерыв на $[a, b]$, то КФ НАСТ сходиться:

$$R_n = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{i=0}^n A_i f_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

17. Квадратурные формулы с равными коэффициентами

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx c \sum_{k=1}^n f_k \quad (1)$$

За счёт выбора параметров c, x_1, \dots, x_n можно повысить АСТ до n .

Возьмём $f(x) = 1$, подставим в формулу и потребуем выполнить равенства

$$\int_a^b \rho(x) dx = c * n, \quad c = \frac{1}{n} \int_a^b \rho(x) dx \quad (2)$$

Для определения x_k можно потребовать выполнение строгого равенства, когда $f = x, x^2, \dots, x^n$, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{c} \int_a^b \rho(x) x dx \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{1}{c} \int_a^b \rho(x) x^2 dx \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = \frac{1}{c} \int_a^b \rho(x) x^n dx \end{cases} \quad (3)$$

Построим многочлен $\omega(x)$ степени n , для которого узлы КФ x_1, \dots, x_n будут корнями, т.е.

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) * \dots * (x - x_n) \quad (4)$$

Этот полином можно представить как

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^{n-k} = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \dots + \alpha_n \quad (5)$$

$$\alpha_0 = 1 \text{ (см. (4))}$$

Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ являются известными симметричными функциями корней

$$\text{Введем обозначение } B_j = \sum_{k=1}^n x_k^j, \quad j = \overline{1, n} \quad (6)$$

Докажем равенство, которое часто называется соотношением Ньютона

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = -\alpha_1 \\ \alpha_1 B_1 + B_2 = -2\alpha_2 \\ \alpha_2 B_1 + \alpha_1 B_2 + B_3 = -3\alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} B_1 + \alpha_{n-2} B_2 + \dots + \alpha_1 B_{n-1} + B_n = -n\alpha_n \end{array} \right.$$

$$\text{Запишем } \omega'(x) = \omega(x) \frac{d}{dx} \ln \omega(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{x-x_k} \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} \ln \omega(x) = \frac{d}{dx} \ln \prod_{k=1}^n (x-x_k) = \frac{d}{dx} \ln \sum_{k=1}^n (x-x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x-x_k)}$$

$$\text{Очевидно, что отношение } \frac{\omega(x)}{x-x_k} = x^{n-1} + (\alpha_1 + x_k)x^{n-2} + (\alpha_2 + \alpha_1 x_k + x_k^2)x^{n-3} + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}x_k + \dots + \alpha_1 x_k^{n-2} + x_k^{n-1})$$

Тогда соотношение для производной можно представить в виде

$$\omega'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\alpha_k x^{n-k-1} = nx^{n-1} + (n\alpha_1 + B_1)x^{n-2} + (n\alpha_2 + \alpha_1 B_1 + B_2)x^{n-3} + \dots + (n\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}B_1 + \dots + \alpha_1 B_{n-2} + \alpha_1 B_{n-1}) \quad (10)$$

Из равенства коэффициентов при одинаковых степенях x следует соотношение (7)

Последнее уравнение системы (7) находим из сложения $\sum_{k=1}^n \omega(x_k) = 0$

$$\omega(x_k) = \sum_{j=0}^n \alpha_j x_k^{n-j}, k = \overline{1, n} \quad (11)$$

Суммируя (11), получаем последнее уравнение (7)

$$\alpha_{n-1} B_1 + \alpha_{n-2} B_2 + \dots + \alpha_1 B_{n-1} + B_n = -n\alpha_n \quad (12)$$

$$(3) \Rightarrow B_k = \frac{1}{c} \int_a^b \rho(x) x^k dx, k = \overline{1, n} \quad (13)$$

Находим $\alpha_1, \dots, \alpha_2, \alpha_n$, затем многочлен $\omega(x)$ по (5), далее приравниваем $\omega(x)$ к 0 и находим x_1, \dots, x_n . Эти корни и будут узлами квадратурной формулы Чебышева. Узлы x_k должны быть различными действительными числами, принадлежащими $[a, b]$

$$x_k \in [a, b]; x_k \in \mathbb{R}; x_i \neq x_k \forall i, k = \overline{1, n} \quad i \neq k$$

Рассмотрим случай, когда $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [-1, 1]$. Если в качестве узлов квадратичной формулы взять корни ортогонального многочлена Чебышева, то мы получим, с одной стороны, формулу Чебышева $c_k = c = \frac{\pi}{n} \quad k = \overline{1, n}$ (18), в результате получим

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi) = S_n(f) \quad (19)$$

Формула (19) имеет НАСТ = 2n-1

Покажем, что (19) точна для всех полиномов Чебышева $T_m \forall m < 2n$

$$m = 0 \quad T_0 = 1, \quad I(T_0) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

$$S_n(T_0) = \pi$$

$$m > 0 \quad T_m(x) = \cos(m * \arccos(x))$$

$I(T_m) = (T_m, T_0) = 0$, т.к. многочлены ортогональны

$$S_n(T_m) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \cos(m * \arccos(x_j)) = \left[x_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \right] = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \cos \left(\frac{m(2j-1)}{2n} \pi \right) \\ = 0 \quad \text{при } m < 2n (\text{убедиться})$$

Поскольку квадратурная сумма точна для всех компонентов Чебышева T_m , степени $m < 2n$, полиномы Чебышева ортогональны \Rightarrow квадратурная формула точна для всех компонентов степени $m < 2n$.

18. Методы Эйлера, Трапеций и Средней точки

$$\begin{cases} u' = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad (1) \text{ Задача Коши}$$

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, u(t)) dt \quad (2)$$

Используя для вычисления интеграла формулу левых прямоугольников, получим $h = x_{n+1} - x_n$, $f_n = f(x_n, u_n)$, $u_n = u(x_n)$

Если в (3) отбросим погрешность получим $y_{n+1} = y_n + hf_n$ (4) **Явный метод Эйлера**

Если для вычисления интеграла в формуле (2) применить формулу правых прямоугольников, то получим неявную формулу метода

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1} \quad (5) \text{ Неявный метод Эйлера}$$

$$f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

В общем случае неявный метод Эйлера представляет собой неявное уравнение относительно y_{n+1} . Для его решения можно использовать некоторый итерационный процесс, например, МПИ

$$y_{n+1}^{k+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^k), k = 0, 1, \dots \text{ номер итерации}$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1 \text{ порядковый номер узла}$$

$$|y_{n+1}^{k+1} - y_{n+1}^k| \leq \varepsilon$$

Для сходимости итераций достаточно потребовать выполнения условий

$$h \left| \frac{\partial f}{\partial y_{n+1}} \right| < \forall n \quad (7)$$

$$y_{n+1}^0 = y_n \quad \text{или} \quad y_{n+1}^0 = y_n + hf_n$$

Локальная погрешность явного и неявного методов Эйлера $O(h^2)$:

Подставляем в (5) точное решение, находим погрешность

$$\begin{aligned} r_n(x) &= u(x_n + h) - u(x_n) - hf(x_n + h, u(x_n + h)) \\ &= u_n + hu'_n + \frac{1}{2}h^2u''_n + O(h^2) - u_n - h(u'_n + hu''_n + O(h^2)) \\ &= -\frac{1}{2}h^2u''_n + O(h^3) = O(h^2) \end{aligned} \quad (8)$$

Явный метод Эйлера сложнее в реализации, но имеет значительное преимущество за счёт своей устойчивости, которая позволяет вести счёт с большим шагом.

Если для интеграла в (2) использовать формулу трапеций, то получим метод трапеций.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f_n + f_{n+1}) \\ y_0 = u_0, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (9) \quad \text{Метод трапеций}$$

Локальная погрешность: $r_n = O(h^3)$ находится аналогично (8)

Если в формуле (2) для вычисления интеграла применим формулу средних прямоугольников, то получим формулу средней точки

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf_{n+1/2} \\ y_0 = u_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (10) \quad \text{Метод средней точки}$$

$$f_{n+1/2} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$y_{n+1/2} \approx 0,5(y_n + y_{n+1}) \quad (11)$$

$$\text{По "явному Эйлеру"} \quad y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2}f_n \quad (12)$$

$$\text{Связка метода (10 - 11) образует неявную формулу } y_{n+1} = y_n + hf\left(x_{n+1/2}, 0,5(y_n + \frac{h}{2}f_n)\right) \quad (14)$$

19. Сходимость метода Эйлера.

- 1) Метод Эйлера $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ сходится в точке x^* , если $|y_i - U(x_i)| \rightarrow 0$ при $h \neq 0, x_i = x^*$
- 2) Метод сходится на отрезке $[0, X]$ если он сходится в каждой его точке отрезка $x \in [0, X]$
- 3) Метод имеет p -й порядок точности, если существует такое целое $p > 0$, что $|y_i - U(x_i)| = O(h^p)$ при $h \neq 0$

$$\text{Уравнение Эйлера, которому удовлетворяет разностная схема: } \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (1)$$

И сеточная ф-я, называемая погрешностью метода: $z_i = y_i - U(x_i)$

Для этого подставим сеточную ф-ю y_i в уравнение Эйлера, выразив ее предварительно через ф-ю погрешности $y_i = z_i + U(x_i)$, получим:

$$\frac{z_{i+1} + U(x_{i+1}) - z_i - U(x_i)}{h} = f(x_i, z_i + U(x_i)), i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2)$$

$$\text{Преобразуем и получим: } \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = f(x_i, z_i + U(x_i)) - \frac{U(x_{i+1}) - U(x_i)}{h}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3)$$

$$\text{Пусть } \varphi_i^1 = -\frac{U(x_{i+1}) - U(x_i)}{h} + f(x_i, U(x_i)), i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4) \text{ - невязка или погрешность аппроксимации разностного уравнения (1) для решения исходного дифф уравнения}$$

$$\text{Пусть } \varphi_i^2 = f(x_i, U(x_i) + z_i) - f(x_i, U(x_i)), i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

Перепишем правую часть (3):

$$\varphi_i^1 + \varphi_i^2 = -\frac{U(x_{i+1}) - U(x_i)}{h} + f(x_i, U(x_i)) + f(x_i, U(x_i) + z_i) - f(x_i, U(x_i))$$

И метод Эйлера будет выглядеть так :

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{h} = \varphi_i^1 + \varphi_i^2, i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6)$$

20. Методы Рунге-Кутты.

Рассмотрим две различные схемы Рунге-Кутты предназначенные для численного решения обыкновенных дифф уравнений 1-го порядка и имеющие третий пор аппроксимации:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} * K_1) \\ K_3 = f(x_k + h, y_k - hK_1 + 2hK_2) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{h}{3}K_1) \\ K_3 = f(x_k + \frac{2h}{3}, y_k + \frac{2h}{3}K_2) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_3) \end{array} \right.$$

И две схемы Рунге-Кутты имеющие 4-ый порядок аппроксимации:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{4}, y_k + \frac{h}{4}K_1) \\ K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_1 - 2hK_2 + 2hK_3) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_3 + K_4) \end{array} \right.$$

Метод Рунге-Кутты используют для расчета стандартных моделей тк он обладает точностью $O^4(h)$ при небольшом объеме вычислений.

Для построения разностной схемы интегрирования воспользуемся разложением ф-и:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), 0 < x \leq T, y(0) = y_0(1) \text{ в ряд Тейлора :}$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{y''(x_k)h^2}{2} + \dots$$

Заменим 2 ю производную в этом разложении выражением $y''(x_k) = (y'(x_k))' =$

$$f'(x_k, y(x_k)) \approx \frac{f(x^*, y^*) - f(x_k, y(x_k))}{\delta x}$$

$$X^* = x_k + \delta x$$

$$Y^* = y(x_k + \delta x)$$

Причем δ подбирается из условий достижения макс точности выражения

Окончательно схема Рунге-Кутты принимает вид:

$$y_{k+1} = y_k + h[(1-a) * f(x_k, y_k) + af(x_k, \frac{h}{2a}, y_k + \frac{f(x_k, y_k)h}{2a})]$$

Та же схема в форме разностного аналога уравнения (1):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = (1-a)f(x_k, y_k) + af(x_k + \frac{h}{2a}, y_k + \frac{f(x_k, y_k)h}{2a})$$

При $a=0$ получим как частный случай схему Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$$

21. Устойчивость линейных многошаговых методов

$$\begin{cases} U' = f(x, u) \\ U(x_0) = U_0 \end{cases} \quad (1)$$

Будем рассматривать равномерную сетку узлов $\omega_h = \{x_0 + ih, i = 0, 1, \dots\}$

Будем рассматривать линейный и m -шаговый метод

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m} = h \sum_{k=0}^m b_k f_{n-k}; \quad n = m, m+1, \dots \quad (2)$$

Для того, чтобы использовать (2), нужно задать стартовые значения y_0, y_1, \dots, y_{m-1} . y_0 находится из (1): $y_0 = U_0$. Остальные значения обычно находятся по методам Рунге-Кутты того же порядка точности, что формула 2

Запишем соотв. однородное уравнение для метода 2:

$$a_0 V_n + a_1 V_{n-1} + \dots + a_m V_{n-m} = 0; \quad n = m, m+1, \dots \quad (3)$$

Будем искать решение для этого уравнения в $V_n = q^n$, тогда

$$a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_m q^{n-m} = 0$$

$$a_0 q^m + a_1 q^{m-1} + \dots + a_m = 0 \quad (4) - \text{характеристическое уравнение}$$

Опр. Линейный m -шаговый метод 2 удовл. условию корней, если все корни q_1, \dots, q_m характ. ур-я 4 находятся внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, причем на границе нет кратных корней.

Опр. Разностное ур-е устойчиво по нач. данным, если существует постоянная M , которая не зависит от n такая, что для любых начальных данных V_0, V_1, \dots, V_{m-1} выполняется оценка решения $|V_n| \leq M * \max_{0 \leq i \leq m-1} |V_i|$; $n = m, m+1, \dots$ (5)

Таким образом, устойчивость означает равномерную по n ограниченность решения задачи Коши

Теорема. Условие корней необх. и дост. для устойчивости решения 3 по начальным данным

Д-во. Пусть характ. ур-е 4 имеет корень q такой, что $|q| > 1$. Зададим нач. значение $V_j = q^j$, $j=0, \dots, m-1$, тогда однородное разностное ур-е 3 имеет вид $V_n = q^n$, где $n \geq m$, которое неогранич. возрастает с ростом n и оценка 5 не выполняется. Следовательно, условие $|q| \leq 1, k = 1, \dots, m$ является необходимым для устойчивости. Рассмотрим случай, когда ур-е 4 имеет корень q с кратностью $r > 1$, причем $|q|=1$. В этом случае разностное ур-е будет иметь вид $n^{r-1} q^n$ и оценка 5 не выполняется

Замечание. Можно показать, что если метод 3 устойчив по начальным данным, то для неоднородного ур-я $a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m} = h q_{n-m}; n = m, m+1, \dots$ (6) выполняется оценка $|y_n| \leq M_1 \max_{0 \leq i \leq m-1} |y_i| + M_2 \sum_{k=0}^{n-m} h |g_k|$ (7)

Формула 7 означает устойчивость по начальным данным и по правой части

22. Метод Ритца.

$AU = f, \quad (1) \quad u \in D_A, f \in H$ – сепарабельное гильбертово пр-во с всюду плоской обл. опред. $D_A \in H$.

Опр. Оператор A наз. симметрическим, если $(AU, V) = (U, AV) \forall u, v \in D_A$ (2)

Опр. Оператор A наз. положительным $A > 0$, если $(AU, V) > 0 \forall u \in D_A, u \neq 0$ (3)

Опр. Симметрический оператор A назыв. положит. определенным $A \geq C^2 E$, если $\exists C \neq 0$: $(AU, U) \geq C^2(U, U) \quad \forall U \in D_A, u \neq 0$ (4)

Свяжем с ур-ем 1 квадратичный функционал $F(U) := (AU, U) - 2(f, U)$ (5)

Теорема 1. Если оператор $A > 0$, то ур-е 1 может иметь не более одного решения $U_0 \in D_A$ при любом $f \in H$

Док-во. Будем полагать, что $\exists u_1, u_2 \in D_A: AU_1 = AU_2 = f$, при этом $U_1 \neq U_2$. Тогда $AU_2 - AU_1 = A(U_2 - U_1) = 0$

$(A(U_2 - U_1), (U_2 - U_1)) = 0 \Rightarrow [A > 0] \Rightarrow U_2 - U_1 = 0 \Rightarrow U_2 = U_1$?!

Теорема 2. Пусть $A > 0$ и ур-е 1 имеет единств. решение $U_0 \in D_A$, тогда функционал энергии $F(u)$ принимает на $U = U_0$ мин. значение в области D_A . Если минимум $F(U)$ достигается на некот. $\forall U_0 \in D_A$, то этот эл-т является решением 1.

Из теоремы 2 следует, что задачу нахождения U_0 из 1 можно заменить равносильной задачей о нахожд. точки минимума функционала энергии $F(U)$. Такая задача наз. вариационной.

Определим на D_A новое скал. произв. $(U, V)_A$, где $A \geq C^2 E$, $U, V \in D_A$ (6)

Введем на D_A энерг. норму по скал. произв. $\|U\|_A = \sqrt{(U, U)_A}$ (7), тогда D_A станет гильбертовым пр-вом, возможно, неполным. Пополним D_A по норме 7, т.е. присоединим к D_A те элементы, для которых новая норма конечна. Это пополнение будем обозн. H_A и наз. энергет. пр-вом оператора A

Замечание. Функционал энергии можно расширить с D_A на H_A так, что на этом мн-ве функционал $F(u)$ обяз. имеет минимум в нек. точке U_0 , тогда этот эл-т называют обобщенным решением ур-я 1

Замечание. Обобщ. решение вариационной задачи $F(u) = \min$ может быть представлено рядом Фурье в эррег. пр-ве H_A , т.е. $U_0 = \sum_{k=1}^n (f, \omega_k) \omega_k$ (8)

По полной ортонорм. сисеме $\{\omega_k\}$, $\omega_k \in H_A$ этот ряд сходится к U_0 в H_A , след-но, в H В методе Ритца приближ. решение вар. задачи $F(u) = \min$ ищется в подпр-ве, натянутом на мн-во координатных ф-ций $\{\varphi_k(x)\}$, $\varphi_k \in H_A$, т.е. $U_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$

Св-ва:

1) $\forall n \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n$ лин. независимы

2) Система коорд. ф-ций $\{\varphi_k(x)\}$ гполна в H_A

$F(U_N) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \right) - 2 \sum_{l=1}^n a_l (f, \varphi_l) = \sum_{j,k=1}^n (\varphi_k \varphi_j) a_k a_j - 2 \sum_{l=1}^n (f, \varphi_l) a_l$

$\frac{\partial F(U_N)}{\partial a_i} = 2 \sum_{j=1}^n (\varphi_i \varphi_j) a_j - 2(f, \varphi_i) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n (\varphi_i \varphi_j) a_j = (f, \varphi_i)$

23. Основные понятия теории разностных схем

Определение. Сеточные (разностные) методы основаны на переходе от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента, например, на отрезке $[0, l]$ вводятся узлы x_i :

$\{x_i = ih, i = \overline{0, n}, x_0 = 0, x_n = l\} = w_h$, — множество узлов, в которых будем определять приближенное решение, h — шаг сетки.

$y_h(x_i)$ или y_i — значения в узлах $i = \overline{1, n}$.

Для нахождения сеточной функции формулируется разностная задача. Запишем дифференциальную задачу в операторной форме: $Lu = F$. (1)

F — входные данные.

Пример. $\begin{cases} u' = f(x, u), & x > 0 \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$ (2)

$$L(u) = \begin{cases} u' - f(x, u), & x > 0 \\ u_0(x_0), & x = 0 \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ u_0, & x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f_i, & i = \overline{1, n} \\ y_0 = u_0, & i = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Или в операторном виде $\lambda_h y_h = \varphi_h$ (5)

$$\lambda_h y_h = \begin{cases} \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, & \varphi_h = \begin{cases} f_i, & i = \overline{1, n} \\ u_0, & i = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

λ_h – обозначение разностного оператора.

Введем норму сеточной функции.

$$\|y_h\|_h = \max_{0 \leq i \leq n} |y_i| \quad (7)$$

Определение. Решение разностной задачи (5) y_h сходится при $h \rightarrow 0$ к решению задачи (1), если $\|(u)_h - y_h\|_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ (8),

где $(u)_h$ – проекция функции u на сетку w_h (можно взять u_i , самая простая).

Определение. Если при наличии сходимости имеет место

$$\|(u)_h - y_h\|_h \leq ch^p \quad (c \neq c(h)) \quad (9), \text{ то имеет место сходимость порядка } p.$$

Определение. Говорят, что задача (5) аппроксимирует задачу (1) на ее решение u , если невязка $\|\psi_h\| \rightarrow 0$, при $h \rightarrow 0$ (10), где $\psi_h = \lambda_h(u)_h - \varphi_h$

Если при этом имеет места оценка $\|\psi_h\|_h \leq c_1 h^p \quad (c \neq c(h))$ (11), то говорят, что разностная схема имеет порядок аппроксимации p .

Очевидно, что (6) имеет первый порядок аппроксимации.

Определение. Разностная схема (5) устойчива, если \forall достаточно малых h , z_h возмущенная разностная схема $\lambda_h v_h = \varphi_h + z_h$ (12) однозначно разрешима и $\exists c_2 > 0$: $c_2 \neq c_2(h)$, $c_2 \neq c_2(z_h)$ такая, что $\|v_h - y_h\|_h \leq c_2 \|z_h\|_h$ (13)

Другими словами, малое возмущение правой части разностной схемы приводит к равномерно малому по h возмущению решения.

Поскольку $y_h = \lambda_h^{-1}(\varphi_h)$, $v_h = \lambda_h^{-1}(\varphi_h + z_h)$, то условие устойчивости (13) имеет вид:

$$\|\lambda_h^{-1}(\varphi_h) - \lambda_h^{-1}(\varphi_h + z_h)\|_h \leq c_2 \|z_h\|_h \quad (14)$$

означает непрерывность λ_h^{-1} в z_h .

Теорема Лакса

Любая устойчивая разностная схема p -ого порядка, аппроксимируемая на решении, является схемой p -ого порядка сходимости.

♦ Полагая $z_h = \lambda_h(u)_h - \varphi_h$, получаем $\|z_h\|_h = \|\lambda_h(u)_h - \varphi_h\|_h \leq c_1 h^p$ (15) в силу устойчивости $\|\lambda_h^{-1}(\varphi_h + z_h) - \lambda_h^{-1}(\varphi_h)\|_h \leq c_2 \|z_h\|_h$ (16)

$$\lambda_h^{-1}(\varphi_h + z_h) = \lambda_h^{-1}(\varphi_h + \lambda_h(u)_h - \varphi_h) = \lambda_h^{-1}\lambda_h(u)_h = (u)_h$$

$$\lambda_h^{-1}\varphi_h = y_h$$

в силу этого оценка (16) записывается в виде

$$\|(u)_h - y_h\|_h \leq c_2 \|z_h\|_h \leq c_1 c_2 h^p. \blacksquare$$

24. Простейшие разностные операторы

На $[0, l]$ $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, n}, nh = l\}$, ω_h – множество внутренних узлов. Построим разностную аппроксимацию $L(u) = u'$, $u(x) \in C^k(\overline{\Omega})$, $k \geq 2$.

Определение. Множество узлов сетки, которое используется при построении L_h , называется шаблоном.

ψ_i – погрешность аппроксимации оператора L .

$$\psi_i = L_h u_i - (Lu)_i$$

Будем использовать разложение в ряд Тейлора.

$$u_{i\pm 1} = u_i \pm hu'_i + \frac{h^2}{2}u''_i \pm \frac{h^3}{6}u'''_i + O(h^4)$$

$$u_{i\pm 1} = u(x_i \pm h)$$

$$L_h u = u_{\bar{x}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = u'_i - \frac{h}{2}u''_i + O(h^2) \quad (1) \text{ – левая разностная производная.}$$

Таким образом, разностный оператор левой производной аппроксимирует u' с 1-ым порядком аппроксимации.

$$L_h u = u_x = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = u'_i + \frac{h}{2}u''_i + O(h^2) \quad (2)$$

Если будем использовать трехточечный шаблон для аппроксимации, то

$$L_h u = u_{\bar{x}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{2h} = u'_i + \frac{h^2}{3}u'''_i + O(h^3) \quad (3)$$

$$L_h u = u_{\bar{x},i} = \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (4)$$

$$u_{\bar{x},i} = u''_i + \frac{h^2}{12}u^{(4)}_i + O(h^4)$$

Погрешность аппроксимации оценивалась в отдельном узле сетки. Для оценки погрешности на всей сетке ω_h необходимо использовать сеточные нормы

$$C_h, L_{2,h}$$

$$\|\psi\|_{C_h} = \max_{x \in \omega_h} |\psi(x)|$$

$$\|\psi\|_{L_{2,h}} = \left(\sum_{x \in \omega_h} \psi^2(x) h \right)^{1/2} \quad (5)$$

В примерах 1-4 погрешности аппроксимации имеют один и тот же порядок в нормах (5)

В общем случае порядок аппроксимации может быть разным в разных нормах.

Обозначим $u^{(k)} \equiv f(x)$

$$u(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-t)^{k-1} f(t) dt \quad (6)$$

Рассмотрим случай $k=1$, тогда на равномерной сетке узлов:

$$u_{i+1} - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(t) dt \quad (7)$$

Для вычисления интеграла в правой части можно использовать разложение квадр. формулы:

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i + O(h^2) \quad (8)$$

Использование квадр. формул с многими внутренними узлами приводит в компактным разностным операторам, например, если для (7) будем использовать Симпсона, получим:

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{1}{6} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) + O(h^4) \quad (9)$$

В этом случае достигается более высокий порядок аппроксимации.

25. Интегро-интерполяционный метод.

Вывод основных ДУ мат. физики основан на записи соотв. законов сохранения для некоторых элементарных объемов и стягивание этих объемов к 0.

Разностные схемы, выражающие законы сохранения на сетке, называются консервативными, при этом законы сохранения на всей сетке являются алгебраическим следствием разностных уравнений.

Для построения консервативных разностных схем исходят из закона сохранения для отдельных ячеек сетки. Построим схему для одномерного стационарного уравнения диффузии:

$$-(k(x) \cdot u'(x))' = f(x) \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$k(x) \geq k_1 > 0$$

$$-k(0) \cdot u'(0) + G u(0) = g_1 \quad (2)$$

$$u(1) = g_1 \quad (3)$$

$$\text{Введем обозначения: через } g(x) = -k(x) \cdot u'(x) \text{ – поток тепла} \quad (4)$$



$$q_{i+1/2} - q_{i-1/2} = \int_{X_{i-1/2}}^{X_{i+1/2}} f(x) dx \quad (5)$$

Отражает закон сохранения количества тепла на контрольном объеме $X_{i-1/2} \leq X \leq X_{i+1/2}$

Величина $q_{i-1/2}$ – количество тепла, которое поступает в контрольный объем через сечение $X_{i-1/2}$

$q_{i-1/2}$ – количество тепла, которое вытекает через сечение $X_{i+1/2}$

Дисбаланс этих потоков компенсируется распределением источников тепла (стоком).
Выразим значение в полужелтых узлах через значения u в узлах сетки:

$$U' = -g(x)/k(x) \quad (6)$$

Проинтегрируем (6) на отрезке $X_{i-1/2} \leq X \leq X_{i+1/2}$, получим:

$$u_{i-1/2} - u_i = \int_{X_{i-1/2}}^{X_i} \frac{g(x)}{k(x)} dx \approx q_{i-1/2} \int_{X_{i-1/2}}^{X_i} \frac{dx}{k(x)} \quad (7)$$

$$\text{Через } a_i \text{ обозначим } a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{X_{i-1/2}}^{X_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \quad (8) \text{ тогда } q_{i-1/2} = -a_i \cdot y_{\bar{x},i}$$

$$q_{i+1/2} = -a_i \cdot y_{x,i} \quad (9)$$

В формуле (8) a_i имеет физический смысл: среднее тепловое сопротивление на отрезке $X_{i-1/2}, X_i$

Из (5) и (9) получаем разностное уравнение:

$$= (-a_i \cdot y_{\bar{x}})_{x,i} = \varphi_i \quad (10), \text{ где } \varphi_i = \frac{1}{h} \int_{X_{i-1/2}}^{X_{i+1/2}} f(x) dx \quad (11)$$

Граничное условие первого рода задается точно $y_n = g_2$ (12)

Для аппроксимации (2) будем интегрировать уравнение:

$$q_{\frac{1}{2}} - q_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \quad (13)$$

$$(9) \rightarrow q_{\frac{1}{2}} = -a_1 y_{x,0}$$

$$(2) \rightarrow q_0 = g_1 - G u_0$$

$$-a_1 y_{x,0} + G u_0 = g_1 + \frac{h}{2} \varphi_0 \quad (14)$$

$$\varphi_0 = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} f(x) dx \quad (15)$$

26. Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации.

Если коэфф. и решение исходного ДУ имеют достаточную гладкость, то можно строить разностные схемы повышенного порядка.

В качестве примера - одномерное уравнение диффузии

$$Lu = -u''(x) = f(x) \quad (1)$$

Первая возможность связана с использованием расширенного шаблона из 5 точек

$$\Delta u = -\frac{1}{12h^2}(-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}) \quad (2)$$

$$\Delta u = \varphi \quad (3)$$

Самый простой выбор – $\varphi = f$

Повышенный порядок можно получить без использования дополнительных узлов сетки, за счёт использования компактных аппроксимаций:

$$\text{Центральная производная} - u_{\bar{x}x} = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4) \quad (4)$$

$$\text{Где } u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = u'' + O(h^2) \quad (5) - 3\text{-х точечная}$$

$$\text{Из (4,5) следует, что } u_{\bar{x}x} = u'' + \frac{h^2}{12}u_{\bar{x}x}'' + O(h^4) \quad (6)$$

Введем обозначения:

Оператор Δ , действующий на u в точке i :

$$\Delta u_i \equiv u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \quad (7), \text{ тогда отбрасывая } O(h^4) \text{ в (6) получаем:}$$

$$\frac{\Delta u_i}{h^2} = [u_{\bar{x}x,i}] = \left(1 + \frac{\Delta}{12}\right)u_i'' \quad (8)$$

$$\text{или } u_i'' = \left(1 + \frac{\Delta}{12}\right)^{-1} \Delta u_i \quad (9) - \text{ неявная аппроксимация 2-й производной}$$

При использовании формул (1),(8) где в правой части (8): $f_i + \frac{1}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})$,

причем $f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} = \Delta f$

$$\Delta u = -u_{\bar{x}x}, \quad \varphi = \frac{1}{12}(f(x-h) + 10f(x) + f(x+h)) \quad (10)$$

Рассмотрим способ повышения порядка аппроксимации для решения исходного ДУ

$$\text{Трёхточечная схема: } \Delta u = -u_{\bar{x}x}, \quad \varphi(x) = F(x) + r(x) \quad (11)$$

$r(x)$ нужно выбирать так, чтобы повысить порядок аппроксимации

$$\psi = \varphi - \Delta u, \quad \Delta u = Lu - \frac{h^2}{12}u + O(h^4),$$

$$L^2 u = Lf \rightarrow \psi = f + r - Lu + \frac{h^2}{12}Lf + O(h^4) \quad (12)$$

$$\text{Если в (12) в качестве } r(x) \text{ взять } \frac{h^2}{12}f'', \text{ или } r(x) = \frac{h^2}{12}f_{\bar{x}x} \quad (13),$$

то $\psi = O(h^4)$

27-28

29 Уравнение переноса, начально-периодическая задача, явная схема с левой разностной производной.

$$\text{Рассмотрим } \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad 0 < t < T \quad (1)$$

$u(0, x) = g(x)$, x – любое.

Если функции g и f являются периодическими с общим периодом длина которого $= 1$, то решение исходной задачи (1) будет являться периодической функцией с тем же периодом.

Задачу (1) можно переформулировать:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, & 0 < t < T, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, x) = g(x), \quad u(x) = u(x+1), \forall x \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим разностную схему с левой производной

$$1/\tau (y_i^{n+1} - y_i^n) + \frac{a}{h} (y_i^n - y_{i-1}^{n+1}) = f_i^n, \quad i = 1 \dots N$$

$$y_0^n = y_N^n$$

$$y_i^0 = g_i$$

Докажем устойчивость схемы в равной норме, предполагая $a > 0$, $\frac{a\tau}{h} \leq 1$

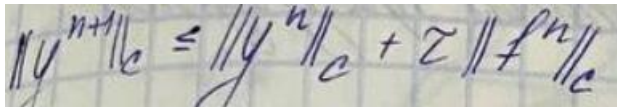
Введем обозначение $\frac{a\tau}{h} = \sigma$

$$y_i^{n+1} = (1 - \sigma)y_i^n + \sigma y_{i-1}^n + \tau f_i^n$$

Рассмотрим устойчивость:

$$y^{n+1} = Ay^n + \tau f^n$$

Если $\tau \leq 1, a > 0$, то $\|A\|_c \leq 1$



Для y^n можно записать аналогичное нер-во, поэтому

$$\|y^{n+1}\|_c \leq \dots \leq \|y^0\|_c + (n+1) \tau \max \|f^k\|_c \leq \|y^0\|_c + T \max \|f^k\|_c$$

Иследуем устойчивость схемы (2)

Для этого запишем соответствующее однородное разностное уравнение:

$$y_k^{n+1} = (1 - \sigma)y_k^n + \sigma y_{k-1}^n, \quad k = 1 \dots N \quad (3)$$

Решение уравнения будем искать в виде:

$$y_k^j = q^j e^{ik\varphi} \quad (4)$$

Подставим (4) в (3) и найдем знак q :

$$q = 1 - \sigma + \sigma e^{-i\varphi} = 1 + (1 - \cos\varphi)(2\sigma^2 - 2\sigma)$$

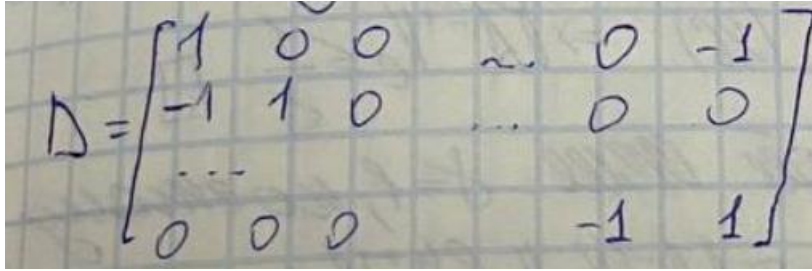
Откуда следует, что $|q| \leq 1$ при $\sigma \leq 1$

30 Уравнение переноса, начально-периодическая задача, неявная схема с левой разностной производной.

$$\begin{cases} \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{a}{h}(y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}) = f_i^n, & i = 1 \dots N \\ y_0^n = y_N^n, & \forall n \end{cases}$$

Докажем, что эта схема устойчива при $a > 0$ в равномерной норме:

$$(E + 6D)y^{n+1} = y^n + \tau f_i^{n+1}, \quad \frac{a\tau}{h} = \sigma$$



$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_n = \begin{bmatrix} y_1^n \\ \dots \\ y_N^n \end{bmatrix}$$

$$(1 + \sigma)y_i^{n+1} - \sigma y_{i-1}^{n+1} = y_i^n + \tau f_i^n$$

$A = E + \sigma D$ имеет положительные диагональные элементы и неположительные внедиагональные, строго диагональное преобладание по строкам:

$$|a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \geq \gamma = 1, \quad \forall i$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \sigma & 0 & \dots & 0 & \sigma \\ -\sigma & 1 + \sigma & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\sigma & 1 + \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^n \\ \dots \\ y_N^n \end{bmatrix} = \tau f^{n+1} + y_n$$

$$A = E + \sigma D,$$

$$\text{Так как } \|A^{-1}\|_c \leq \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma - \text{константа}$$

В нашей трехточечной схеме $\gamma = 1$, поэтому

$$\|y^{n+1}\|_c \leq \|A^{-1}\|_c \|y^n\|_c + \tau \|A^{-1}\|_c \|f^{n+1}\|_c \leq \|y^0\|_c + T \|f\|_c$$

31. Уравнение переноса, начально-краевая задача, неявная схема с левой разностной производной

Рассмотрим неявную схему с левой производной

=

$$\begin{cases} \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{a}{h}(y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}) = f_i^n \\ y_0^n = y_N^n \end{cases}$$

Докажем, что схема устойчива при $a > 0$

$$(E + \sigma D)y^{n+1} = y^n + \tau f^{n+1} \quad \sigma = \frac{ax}{h}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad y_n = \begin{bmatrix} y_1^n \\ \vdots \\ y_N^n \end{bmatrix}$$

$$(1 + \sigma)y_i^{n+1} - \sigma y_{i-1}^{n+1} = y_i^n + \tau f_i^n$$

$A = E + \sigma D$ имеет положительные диагональные элементы и неположительные внедиагональные, строго диагональное преобладание по строкам

$$|a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \geq \gamma = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+\sigma & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma \\ -\sigma & 1+\sigma & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\sigma & 1+\sigma \end{bmatrix} \quad y^{n+1} = \begin{bmatrix} y_1^{n+1} \\ \vdots \\ y_N^{n+1} \end{bmatrix} = E y^n + \tau f^{n+1}$$

$$A = E + \sigma D$$

$$\|A^{-1}\|_c \leq \frac{1}{\gamma} \quad \gamma - \text{константа}$$

Доказательство

Рассмотрим систему $Ax = f$, где $f_i \geq 0$

Пусть $\exists x_k = \min x_i < 0, \Rightarrow 0 \leq f_k = a_{kk}x_k - \sum_{j \neq k} |a_{kj}|x_j = x_k(a_{kk} - \sum_{j \neq k} |a_{kj}|) \leq 0$ — противоречие

Введем вектор $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ и $r = Ae$ (23)

Очевидно что $r_0 \geq \delta$, тогда берем $A(\frac{1}{\gamma} \|f\|_c c \pm x) = \frac{1}{\gamma} \|f\|_c r \pm f$ (24)

В формуле 24 вектор c с неотрицательными координатами $\Rightarrow \|A^{-1}\|_c \leq \frac{1}{\gamma}$ (доказано)

32 Уравнение теплопроводности, начально-периодическая задача, явная схема.

Наиболее простая разностная схема получится, если использовать следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(x, t) &= \dot{u}(x, t) - u''(x, t) \approx u_t - u_{\bar{x}x} = \\ &= \frac{1}{\tau} \left(u(x, t + \tau) - u(x, t) \right) - \frac{1}{h^2} \left(u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t) \right).\end{aligned}$$

Подставляя сюда $x = x_i$, $t = t_j$ и заменяя $u(x_i, t_j)$ их приближенными значениями в узлах сетки,

$$y_i^j \approx u(x_i, t_j),$$

получаем следующий вид разностного оператора L :

$$(Ly)_i^j = \frac{1}{\tau} (y_i^{j+1} - y_i^j) - \frac{1}{h^2} (y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j). \quad (34.2)$$

Шаблон этого оператора имеет вид

$$\mathbb{W}(i, j) = \left\{ \begin{array}{ccc} & (i, j+1) & \\ (i-1, j) & (i, j) & (i+1, j) \end{array} \right\}.$$

Используя построенный оператор и учитывая граничные и начальные условия, получаем разностную схему

$$\frac{1}{\tau} (y_i^{j+1} - y_i^j) - \frac{1}{h^2} (y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j) = \varphi_i^j, \quad \begin{array}{l} i = \overline{1, n-1}, \\ j = \overline{0, m-1}, \end{array} \quad (34.3a)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad (34.3b)$$

$$y_0^j = \mu_0(t_j), \quad y_n^j = \mu_1(t_j), \quad j = \overline{0, m}. \quad (34.3c)$$

Здесь, как обычно, φ — сеточная функция, приближающая f . В простейшем случае $\varphi_i^j = f(x_i, t_j)$. Сеточное уравнение в (34.3a) можно переписать в так называемой безындexсной форме:

$$y_t - y_{\bar{x}x} = \varphi, \quad \text{или} \quad \frac{\hat{y} - y}{\tau} - y_{\bar{x}x} = \varphi. \quad (34.3a')$$

Здесь $y = y_i^j$ — значение сеточной функции в «текущей точке», $\hat{y} = y_i^{j+1}$ — значение на «верхнем слое». Под слоем подразумевается множество значений сеточной функции y при фиксированном значении индекса j .

Заметим, что структура уравнений (34.3a') позволяет легко находить решение «послойно» (так как все значения на нулевом слое известны):

$$\hat{y} = y + \tau(\varphi + y_{\bar{x}x}),$$

или

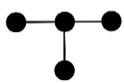
$$y_i^{j+1} = y_i^j + \tau \left(\varphi_i^j + \frac{1}{h^2} (y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j) \right), \quad \begin{aligned} i &= \overline{1, n-1}, \\ j &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поэтому схема и называется явной (по аналогии с явными методами решения задачи Коши).

Найдём порядок аппроксимации построенной разностной схемы. Так как все краевые условия и правая часть уравнения приближаются точно, достаточно рассмотреть погрешность аппроксимации только во внутренних узлах (напомним, что разностный оператор $L \approx \mathcal{L}$ определяется формулой (34.2), а P — проектор на сетку $\omega_{h\tau}$):

$$\begin{aligned} \psi_i^j &= \varphi_i^j - (LP(u))_i^j = \varphi_i^j - \frac{1}{\tau} (u_i^{j+1} - u_i^j) + \frac{1}{h^2} (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) = \\ &= f(x_i, t_j) - \frac{1}{\tau} (u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)) + \frac{1}{h^2} (u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)) = \\ &= \left[f(x, t) - \dot{u}(x, t) - u''(x, t), (33.11), (33.14) \right] = O(h^2) + O(\tau) = O(h^2 + \tau). \end{aligned}$$

33. Уравнение теплопроводности, начально-периодическая задача, неявная схема.



На нижнем уровне точка (j,i) , На верхнем (слева) $(j+1,i-1), (j+1,i), (j+1,i+1)$

$$u_t = au'' + f \rightarrow \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = a \frac{-y_{i-1}^{j+1} + 2y_i^{j+1} - y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_i^{j+1}, y_i^0 = g_i, i = \overline{1, N}; y_i^j = y_{i+N}^j \quad \forall j;$$

Порядок аппроксимации $\psi = O(\tau + h^2)$ Док-м устойчивость в равном норме $C_{\tau,h}([0, T] \times [0, 1])$

Запишем в матричном виде

$$(E + kA)y^{n+1} = y^n + \tau f^{n+1}, k = \frac{a\tau}{h^2} \geq 0$$

$$y^n = \begin{bmatrix} y_1^n \\ \dots \\ y_N^n \end{bmatrix}; \begin{pmatrix} 1+2k & -6 & 0 & \dots & 0 & 0 & -6 \\ -6 & 1+2k & -6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -6 & 1+2k & -6 \\ -6 & 0 & 0 & \dots & 0 & -6 & 1+2k \end{pmatrix}$$

Матрица имеет полож диагон элем и отриц внешн элем, строгое диагональ преобладание по строкам с $\varphi = 1 \rightarrow \|(E + kA)^{-1}\| \leq \frac{1}{\varphi} = 1; y^{n+1} = (E + kA)^{-1}y^n + (E + kA)^{-1}\tau f^{n+1}$

$$\|y^{n+1}\|_\infty \leq \|y^n\|_\infty + \tau\|f^{n+1}\|_\infty \leq \dots \leq \|y^0\|_\infty + \tau(\|f^1\|_\infty + \dots + \|f^{n+1}\|_\infty) \\ \leq \|g\|_\infty + T\|f\|_\infty - \text{доказали устойчивость в равномерн. норм.}$$

Докажем в $C_\tau(0, T) \times L_{2,h}(0,1)$: $\|(E + kA)^{-1}\|_{2,h} = \|(E + kA)^{-1}\|_2 \leq \max_{0 \leq \lambda \leq 4} (1 - 6\lambda)^{-1} = 1$;

$$\|y^{n+1}\|_{2,h} \leq \|y^n\|_{2,h} + \tau\|f^{n+1}\|_{2,h} \leq \|y^0\|_{2,h} + \tau(\|f^1\|_{2,h} + \dots + \|f^{n+1}\|_{2,h}) \leq \|y^0\|_{2,h} + \\ T \max_l \|f^l\|_{2,h} \max_l \|y^l\|_{2,h} \leq \|y^0\|_{2,h} T \max_l \|f^l\|_{2,h}; \|y^n\|_{2,h} = \sqrt{\sum |y_i^n|^2 h}$$

34. Уравнение теплопроводности с краевыми условиями Дирихле, шеститочечная схема

$$a \equiv 1 \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, & f(t, x), u(t, x), & 0 \leq t \leq T \\ u(0, x) = g(x), & x \in [0, 1], & 0 \leq x \leq 1 \\ u(t, 0) = \mu_1(t), & u(t, 1) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \lambda(\theta y_j^{n+1} + (1 - \theta)y_j^n) + \varphi_j^n, 0 < j < N \quad (2)$$

$$\lambda_y = Y_{\bar{x}x}, \quad y_0^n = \mu_1(t_0), \quad y_N^n = \mu_2(t_n) \quad (3)$$

$$y_j^0 = g(x_j) \quad (4)$$

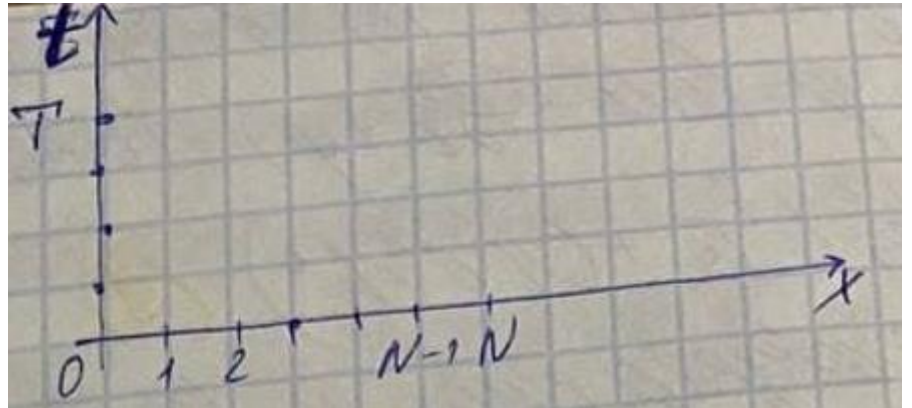
Эту схему называют

θ -методом или схемой с весами.

Найдем

погрешность

аппроксимации



$$\varphi = \lambda(\theta \hat{u} + (1 - \theta)u) - u_t + \varphi \quad (5)$$

$$\text{Пусть } \bar{u} = u(t_{n+1/2}; x_j), \quad t_{n+1/2} = t_n + \frac{1}{2}\tau, \quad \hat{u} = u(t_{n+1}; x_j)$$

$$\hat{u} = 0.5(\hat{u} + u) + 0.5(\hat{u} - u) = 0.5(\hat{u} + u) + 0.5 \tau u_t$$

$$u = 0.5(\hat{u} + u) - 0.5 \tau u_t$$

$$\theta \hat{u} + (1 - \theta)u = 0.5(\hat{u} + u) + (\theta - 0.5) \tau u_t \quad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow \psi = 0.5\lambda(\hat{u} + u) + (\theta - 0.5)\tau\lambda u_t + \varphi \quad (7)$$

Будем использовать разложение в ряд Тейлора:

$$\lambda u = Lu + \frac{h^2}{12} L^2 u + O(h^4), \quad L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\hat{u} = \bar{u} + 0.5\tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + O(\tau^3)$$

$$t_{n+1} = t_n + \tau = t_n + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}\tau$$

$$t_{n+1} = u, \quad t_n + \frac{1}{2}\tau = \bar{u} \Rightarrow$$

$$u = \bar{u} - 0.5\tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + O(\tau^3) \quad (8)$$

Подставляем (8) в (7), получаем

$$\psi = \left(L\bar{u} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varphi \right) + (\theta - 0.5)\tau L \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{h^2}{12} L^2 \bar{u} + O(\tau^2 + h^4) \quad (9)$$

Очевидно, что $\psi = (\theta - 0.5)\tau L \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + O(\tau^2 + h^2)$ при $\varphi_j = \bar{f}_j$ (первая скобочка – исходное уравнение $\Rightarrow = 0$),

$$L \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = L^2 \bar{u} + L\bar{f}$$

Из (9), делая такую замену, получим (10)

$$\psi = (\varphi - \bar{f}) + \left[\tau(\theta - 0.5) + \frac{h^2}{12} \right] L \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{h^2}{12} L \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + O(\tau^2 + h^4)$$

Если $\theta = \theta_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$, $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} L\bar{f}$, то получаем $\psi = O(\tau^2 + h^4)$

Если $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} \lambda \bar{f}$, $\varphi_j^n = \frac{5}{6} f_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} \left(f_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} + f_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} \right)$ (11), то $\psi = O(\tau^2 + h^4)$.

Исследуем устойчивость (2) при $\varphi = 0$:

$$-\theta \sigma u_{j-1}^{n+1} + (1 + \theta \sigma) u_j^{n+1} - \theta \sigma u_{j+1}^{n+1} = (1 - \theta) \sigma u_{j-1}^n + [1 - 2(1 - \theta) \sigma] u_j^n + (1 - \theta) \sigma u_{j+1}^n \quad (12)$$

$$\sigma = \frac{\tau}{h^2}, \quad u_j^n = \lambda^n e^{ij\varphi}$$

После подстановки получаем:

$$\lambda [-\theta \sigma e^{-ij\varphi} + (1 + 2\theta \sigma) - \theta \sigma e^{ij\varphi}] = (1 - \theta) \sigma e^{-ij\varphi} + (1 - 2(1 - \theta) \sigma) + (1 - \theta) \sigma e^{ij\varphi} \quad (13)$$

$$\lambda = \frac{1-2(1-\theta)\sigma(1-\cos \varphi)}{1+2\theta\sigma(1-\cos \varphi)} = \frac{1-4(1-\theta)\sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{1+4\theta\sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (14)$$

$\sigma > 0$, $\theta \in [0,1]$, тогда $\lambda \leq 1$ должно быть $|\lambda| \leq 1$, нужно проверить $-1 \leq \lambda$

$$\text{Из (14) получаем } 1 - 4(1 - \theta)\sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2} \geq -(1 + 4\theta\sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \Rightarrow (1 - 2\theta)\sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq \frac{1}{2} \quad (15)$$

θ -метод является безусловно устойчивым при $\theta \geq \frac{1}{2} \forall \sigma$

$$\text{Если } \theta < \frac{1}{2}, \text{ то метод будет устойчив при (из (15)) } \sigma = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)} \quad (16)$$

$$\text{При } \theta = 0 \Rightarrow \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \tau \leq \frac{h^2}{2}$$

$$\text{Если в качестве } \theta \text{ возьмем } \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} \text{ (эта величина } < \frac{1}{2}), \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{6(1-2\theta)}$$

Следовательно, (16) – частный случай, выполн., метод является устойчивым.

Для уравнения теплопроводности при $f \equiv 0$ известно, что решение достигает экстр. значения либо на границе, либо на нулевом слое. Это свойство – принцип максимума. Можно потребовать, чтобы решение разностной задачи также удовлетворяло этому принципу.

Теорема (принцип максимума для θ -метода)

Пусть $\theta \in [0,1]$, $(1 - \theta)\sigma \leq \frac{1}{2}$. Если решение разностной схемы имеет внутренний минимум или максимум, то оно постоянно.

♦

Значит, это экстремальное значение должно быть во всех узлах сетки, включая граничные. ■

Пусть $e_j^n = U_j^n - u_j^n$, где U_j^n – решение диффер. задачи в j -ой точке, u_j^n – решение, полученное по разностной схеме $\theta \in [0,1]$.

$$(1 - \theta)\sigma \leq \frac{1}{2}$$

Запишем разностной уравнение для погрешности:

$$(1 - 2\theta\sigma)e_j^n = \theta\sigma(e_{j-1}^n + e_{j+1}^n) + (1 - \theta)\sigma(e_{j-1}^{n-1} + e_{j+1}^{n-1}) + [1 - 2(1 - \theta)\sigma]e_j^{n-1} + \tau\psi_j^n \quad (18)$$

$$u_j^n < U_j^n - e_j^n$$

Поскольку коэфф. в (18) неотрицательны, то можем взять норму $\varepsilon^n = \|e^n\|_\infty = \max_j |e_j^n|$

$$(1 + 2\sigma\theta)\varepsilon^n \leq 2\theta\sigma\varepsilon^n + \varepsilon^{n-1} + \tau\|\psi^n\|_\infty \quad (19)$$

$$\varepsilon^n \leq \varepsilon^{n-1} + \tau\|\psi^n\|_\infty \leq \dots \leq \varepsilon^0 + \tau \sum_{k=1}^n \|\psi^k\|_\infty \quad (20)$$

$$\text{Т.к. } \varepsilon^0 = 0, \text{ то } \varepsilon^k \leq \tau \sum_{k=1}^n \|\psi^k\|_\infty \quad (21)$$

$$\varepsilon^n \leq h\tau \max_k \|\psi^k\|_\infty \quad (22)$$

$$\varepsilon^n \leq T \max_k \|\psi^k\|_\infty$$

$$C_{\tau,h}([0; T] \times [0,1]) \varepsilon^n \leq T \max_k \|\psi^k\|_\infty \quad (23)$$