Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

(08.02.2021)

1. Вспомним основные определения и утверждения по теме занятия.

Определение 1. *Отображение* $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *называется гладкой (параметризованной) кривой, если* x *и* y *— непрерывно дифференцируемые функции на отрезке* $[a,b]$ *такие, что* $|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)| \neq 0$ *при всех* $t \in [a,b]$.

Определение 2. *Две гладкие кривые* $\gamma_1 \colon I_1 \to \mathbb{R}^2$ *и* $\gamma_2 \colon I_2 \to \mathbb{R}^2$ *называют эквивалентными и пишут* $\gamma_1 \sim \gamma_2$, *если существует такая замена параметра* $\sigma \colon I_1 \to I_2$, *что* σ *— непрерывно дифференцируемая функция, производная которой отличная от нуля в каждой точке отрезка* I_1, *и* $\gamma_1(t) \equiv \gamma_2\big(\sigma(t)\big)$ *при всех* $t \in I_1$.

Несложно видеть, что

1. $\gamma \sim \gamma$ (рефлексивность);
2. если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, то $\gamma_2 \sim \gamma_1$ (симметричность);
3. если $\gamma_1 \sim \gamma_2$ и $\gamma_2 \sim \gamma_3$, то $\gamma_1 \sim \gamma_3$ (транзитивность).

Другими словами, введённое отношение действительно является отношением эквивалентности на множестве гладких кривых. Классы эквивалентности по этому отношению называют непараметризованными гладкими кривыми. Для удобства будем отождествлять непараметризованную кривую и множество её точек на плоскости.

Определение 3. *Касательной в точке* (x_0, y_0) *непараметрической кривой* Γ *называется прямая*

$$\ell = \left\{ \big(x_0 + \tau \dot{x}(x_0), y_0 + \tau \dot{y}(t_0)\big) | \tau \in \mathbb{R} \right\},$$

где $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ *— некоторая параметризация кривой* Γ *и* $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$.

Несложно видеть, что касательная корректно определена, т.е. не зависит от выбора параметризации γ.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область и $P, Q \colon D \to \mathbb{R}$ — заданные функции. Рассмотрим задачу нахождения всех непараметрических кривых $\Gamma \subset D$ таких, что в каждой точке $(x,y) \in \Gamma$ касательная к кривой перпендикулярна вектору $\big(P(x,y), Q(x,y)\big)$. Если $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \colon I \to D$ — какая-либо параметризация кривой Γ, то условие перпендикулярности равносильно равенству

$$P\big(x(t), y(t)\big)\dot{x}(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)\dot{y}(t) \equiv 0.$$

Сформулированную задачу записывают в виде

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

и называют эту запись уравнением первого порядка в нормальной дифференциальной форме.

Если $Q(x,y) \neq 0$ в каждой точке области D и $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in I$, — параметризация произвольного решения уравнения (1), то $\dot{x}(t) \neq 0$ при всех $t \in I$. Следовательно,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{P\big(x(t), y(t)\big)}{Q\big(x(t), y(t)\big)} \quad \text{при всех} \quad t \in I,$$

а значит, искомая кривая является графиком решения уравнения $y' = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

Если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $u \colon D \to \mathbb{R}$, что

$$\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

т.е. $u'_x = P(x,y)$ и $u'_y = Q(x,y)$, то уравнение (1) называется уравнением в полных дифференциалах. В этом случае гладкая кривая $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \colon I \to D$ — параметризация решения уравнения (1) тогда и только тогда, когда $u\big(x(t), y(t)\big) \equiv C$, где C — некоторая постоянная.

Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемые функции. Необходимым и достаточным условием того, что уравнение в нормальной дифференциальной форме есть уравнение в полных дифференциалах, является выполнение условия Эйлера

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad \text{при всех} \quad (x,y) \in D. \tag{2}$$

Если выполнено условие (2), то функцию $u(x,y)$ можно найти по формуле

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad (x_0,y_0) \in D,$$

или из равенств $u'_x(x,y) = P(x,y)$ и $u'_y(x,y) = Q(x,y)$, интегрируя соответствующим образом.

Решение начальной задачи (задачи Коши), т.е. кривая, проходящая через заданную точку $(s,\xi) \in D$, определяется формулой

$$\int\limits_{(s,\xi)}^{(x,y)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Определение 4. *Функция $\mu(x,y)$, отличная от нуля во всех точках некоторой подобласти $G \subset D$, называется интегрирующим множителем уравнения (1), если уравнение*

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах на G.

Теорема 1. *Если $\omega = \omega(x,y)$ — заданная функция и*

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q\omega'_x - P\omega'_y} \equiv \Psi(\omega),$$

то $\mu(\omega) = \exp\left(\int \Psi(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right)$.

$\triangleright$ Действительно, так как $\dfrac{\partial \mu(\omega)}{\partial x} = \mu(\omega)\Psi(\omega)\omega'_x$ и $\dfrac{\partial \mu(\omega)}{\partial y} = \mu(\omega)\Psi(\omega)\omega'_y$, то

$$\begin{aligned}\big(\mu(\omega)P\big)'_y - \big(\mu(\omega)Q\big)'_x &= \mu(\omega)\Psi(\omega)(P\omega'_y - Q\omega'_x) + \mu(\omega)(P'_y - Q'_x) = \\ &= \mu(\omega)\big(-\Psi(\omega)(Q\omega'_x - P\omega'_y) + P'_y - Q'_x\big) = 0. \quad \triangleleft\end{aligned}$$

2. Решите следующие номера 637, 640, 642, 647, 650, 653, 658, 664, при этом решения задач 640, 653 и 664 сфотографируйте и вышлите для проверки до конца занятия.

3. Домашнее задание: 639, 648, 656, 660, 668.

4. Задача повышенной сложности (срок сдачи — следующее занятие):

Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется однородной порядка $\alpha \in \mathbb{R}$, если для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$ верно равенство $f(tx) = t^\alpha f(x)$.

a) *Пусть $F(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая однородная функция порядка α. Докажите тождество $xF'_x(x,y) + yF'_y(x,y) = \alpha F(x,y)$.*

b) *Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — непрерывно дифференцируемые однородные функции одного и того же порядка. Докажите, что $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}$ — интегрирующий множитель уравнения $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$.*