БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра высшей математики

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**Пособие для студентов
факультета прикладной математики и информатики**

МИНСК
2012

УДК 517.52(075.8)
ББК 22.161.1р.я73
Ч-67

Авторы:
О. А. Кастрица, С. А. Мазаник
А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович

Рекомендовано Советом
факультета прикладной математики и информатики
22 июня 2012 г., протокол № 8

Рецензент
кандидат физико-математических наук *С. Г. Красовский*

Ч-67 **Числовые** ряды. Пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики / О. А. Кастрица [и др.]. – Минск: БГУ, 2012. – 53 с.

В настоящем пособии представлены основные приемы исследования числовых рядов: исследование сходимости знакопостоянных рядов, абсолютной и неабсолютной сходимости знакопеременных рядов; действия над числовыми рядами; исследование сходимости двойных рядов и бесконечных произведений. Изложение материала иллюстрируется подробно разобранными примерами. В пособие включены упражнения для самостоятельного решения, снабженные ответами.

Пособие предназначено для студентов факультета прикладной математики и информатики; оно также будет полезным для всех студентов, изучающих математический анализ в объеме университетского курса.

УДК 517.52(072)(075.8)
ББК 22.161.1р.я73

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Сходимость числового ряда

Рассмотрим числовую последовательность (a_n). Отправляясь от нее, построим последовательность (S_n), полагая

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2,$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Последовательность (S_n) удобно изучать, записывая ее в виде выражения (бесконечной суммы)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{1.1}$$

называемого *числовым рядом* (коротко – рядом). Числа a_k называют *членами ряда*. Суммы $S_n, n = 1, 2, \ldots,$ называют *частными суммами* ряда (1.1). Если последовательность (S_n) сходится, т.е. если существует конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

то говорят, что ряд (1.1) *сходится*, и число S называют *суммой ряда*, записывая

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

В противном случае говорят, что ряд *расходится*.

Замечание 1.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, то допустима запись: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$ соответственно.

Таким образом, сходимость ряда – это сходимость последовательности его частных сумм; сумма ряда – это предел последовательности его частных сумм.

Замечание 1.2. Нумерация членов ряда может начинаться не обязательно с $k = 1$, а, например, с $k = 0$. Индекс суммирования может быть любым, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} = \dots .$$

Пример 1.1. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Изучим частную сумму ряда.

$$S_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \ln\left(\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k}\right] =$$

$$= \ln \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \ln \frac{n+1}{2n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{n+1}{2n} = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$, то ряд сходится и его сумма равна $-\ln 2$.

Пример 1.2. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. Значит, ряд сходится и имеет сумму $S = 1$.

Пример 1.3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ имеет частные суммы $S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = -1, S_4 = 0, \ldots$. Последовательность (S_n) не имеет предела. Значит, ряд расходится.

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{1.2}$$

называют *геометрическим рядом*.

Частная сумма этого ряда $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ при $q \neq 1$ и $S_n = n$, если $q = 1$.

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$. Если же $|q| \geq 1$, то S_n не имеет конечного предела.

Таким образом, геометрический ряд сходится, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \geq 1$.

Если $q \geq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & \text{если} \quad |q| < 1, \\ +\infty, & \text{если} \quad q \geq 1. \end{cases}$$

1.2. Общие принципы сходимости рядов

Если удалить несколько первых членов ряда (1.1), например, первые m членов, то получим новый ряд $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$, который называют *остатком* ряда (1.1). Для любого $n > m$ имеет место соотношение

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} a_k,$$

причем конечный предел в левой части равенства существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел в правой части.

Отсюда следует:

1. *Если ряд сходится, то сходится и любой его остаток.*

2. *Если сходится какой-либо остаток ряда, то сходится и ряд.*

3. *Если расходится какой-либо остаток ряда, то расходится и ряд.*

4. *Пусть* $\sigma_m = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$. *Если ряд сходится, то* σ_m *– сумма остатка, при этом* $S = S_m + \sigma_m$ *и* $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m = 0$, *т.е. последовательность* (σ_m) *бесконечно малая.*

Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

В частности, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится. Если $\beta \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ расходится.

Если оба ряда расходятся, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Пример 1.4. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8 + 3 \cdot (-1)^n}{2^{n+2}}$.

Представим ряд в виде линейной комбинации рядов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8 + 3 \cdot (-1)^n}{2^{n+2}} = 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{3}{4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n}$. Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n}$ сходятся как геометрические ряды, следовательно, сходится и линейная комбинация этих рядов, т.е. исходный ряд.

Пусть ряд (1.1) сходится и имеет сумму S. Так как

$$S_n = S_{n-1} + a_n,$$

то в пределе, когда $n \to \infty$, получаем

$$S = S + \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Откуда следует, что для сходящегося ряда (1.1)выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.3}$$

Условие (1.3) является необходимым для сходимости ряда. Если это условие не выполнено, то ряд расходится.

Пример 1.5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2 + 5}{10n^2 + 2}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5}{10n^2 + 2} = \frac{3}{10} \neq 0,$$

т.е. не выполнено необходимое условие сходимости.

Пример 1.6. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2-1}{3n^2+1}\right)^{n^2+2}$.

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{3n^2+1}\right)^{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n^2+1}\right)^{n^2+2} =$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2(n^2+2)}{3n^2+1}} = e^{-2/3}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}. \tag{1.4}$$

Необходимое условие сходимости (1.3) для него выполняется. Предположим, что этот ряд сходится и имеет сумму S. Тогда, поскольку

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} = S_n + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > S_n + n\cdot\frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2},$$

при $n\to\infty$ получаем противоречие: $S \geq S + \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, гармонический ряд расходится, хотя (еще раз на это обращаем внимание) необходимое условие сходимости для него выполнено.

Сходимость ряда равносильна сходимости последовательности (S_n) его частных сумм. В соответствии с критерием Коши это означает, что любые частные суммы S_n и S_m с достаточно большими номерами n и m мало отличаются одна от другой. Отсюда получаем

Критерий Коши сходимости ряда. *Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\nu_\varepsilon \quad \forall\,n\geq\nu_\varepsilon \ \forall m>n \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \varepsilon.$$

Пример 1.7. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k^2}{2^{k-1}}$. Возьмем любое $\varepsilon>0$.

Имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\sin k^2}{2^k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m}\frac{|\sin k^2|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\right) <$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-n-1}}+\ldots\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \le \varepsilon,$$

если $n \ge \nu_\varepsilon = \log_2\frac{1}{\varepsilon}$, $\forall m > n$. На основании критерия Коши заключаем: ряд сходится.

Пример 1.8. Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln k}$ расходится, так как
$\left|\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots+\frac{1}{\ln m}\right| > \frac{m-n}{\ln m} = \big[\text{при } m = 2n\big] = \frac{n}{\ln 2n} > \varepsilon = \frac{1}{2}$
при любом $n \ge 2$. Действительно, функция $f(x) = \frac{x}{\ln 2x}$, $x \ge 2$, достигает минимума в точке $x = \frac{e}{2}$. Минимальное значение выражения $\frac{n}{\ln 2n}$ достигается при $n = 2$ и равно $\frac{1}{\ln 2} > 1$.

Заметим, что $1/\ln k \to 0$ при $k \to \infty$, т.е. необходимое условие сходимости ряда выполнено.

Замечание 1.3. Можно рассматривать и ряды с комплексными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k = \alpha_k + i\beta_k$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k$. При этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k$.

Пример 1.9. Пусть $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ (как и при $q \in \mathbb{R}$) сходится и имеет сумму $\frac{1}{1-q}$, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \ge 1$.

Если $r = |q| < 1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$

$$= \frac{1-r\cos\varphi + ir\sin\varphi}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi} = \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2} + i\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

Приравнивая действительные и мнимые части этого равенства, получаем:

$$1 + r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi + \ldots + r^n\cos n\varphi + \ldots = \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2};$$

$$r\sin\varphi + r^2\sin 2\varphi + \ldots + r^n\sin n\varphi + \ldots = \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

Пример 1.10. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n$. Поскольку $\left|\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n\right| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$, то ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

1.3. Знакопостоянные ряды

Будем рассматривать ряды, у которых $a_k \geq 0$ при всех k. Такие ряды называют *положительными*. Последовательность частных сумм положительного ряда возрастает, поскольку при любом $n \geq 2$

$$S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}.$$

Воспользовавшись критерием сходимости монотонной последовательности, получаем

Критерий сходимости положительного ряда. *Для сходимости положительного ряда необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частных сумм (S_n) была ограничена сверху, т.е.*

$$\exists\, M, \quad \forall\, n \quad \Longrightarrow \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M.$$

Если последовательность (S_n) не ограничена, то $S_n \to +\infty$, ряд расходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$,

Пример 1.11. Так как $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e, \forall n$, то $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 1$, следовательно, $\dfrac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$. Складывая цепочку неравенств

$$1 > \ln 2, \quad \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n,$$

получаем $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} > \ln(n+1)$.

Сумма S_n – частная сумма гармонического ряда. Из полученного неравенства следует, что последовательность (S_n) не ограничена, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ расходится.

Ряд, у которого $a_k \leq 0, \forall k$, называют *отрицательным*. Изучение такого ряда сводится к изучению положительного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-a_k)$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать положительные ряды.

Признаки сравнения. В ряде случаев установить поведение ряда, т.е. его сходимость или расходимость, можно, сравнивая его члены с членами другого (эталонного) ряда, поведение которого известно.

В качестве эталонных рядов часто используют гармонический ряд (1.4) и геометрический ряд (1.2), $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k, q > 0$.

Рассмотрим положительные ряды (1.1) и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{1.5}$$

Признак сравнения 1^*. *Пусть* $a_k \leq c \cdot b_k$ *при всех* k, *где* c *— постоянная,* $c > 0$. *Тогда:*

а) *если сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *то сходится и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$;

б) *если расходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, *то расходится и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Замечание 1.4. Признак 1^* применим также и тогда, когда $a_k \leq c \cdot b_k$ не для всех k, а лишь для любого $k > m$. В этом случае можно отбросить m первых членов рядов (1.1) и (1.5), что, как известно, не повлияет на их сходимость, и использовать признак для остатков этих рядов.

Пример 1.12. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k+5}$ сходится, так как $\dfrac{1}{2^k+5} < \dfrac{1}{2^k}, \forall k$, и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ сходится (это геометрический ряд, $q = \dfrac{1}{2} < 1$).

Пример 1.13. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+\sin^2 n}{n^2-\cos n}$.

Так как $\dfrac{n+\sin^2 n}{n^2-\cos n} \geq \dfrac{n}{n^2+1} \geq \dfrac{n}{n^2+n^2} = \dfrac{1}{2n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то исходный ряд расходится.

Признак сравнения 2^*. *Пусть* $b_k > 0$ *при любом* k *и существует предел* $l = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k}$, $0 \leq l \leq +\infty$.

а) *Если* $0 < l < +\infty$, *то оба ряда сходятся или оба расходятся.*

б) *Если* $l = 0$, *то из сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$;

в) *если* $l = +\infty$, *то из расходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Пример 1.14. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10k-2}$ сравним с гармоническим рядом $\sum\limits_{k=1}^{k} \frac{1}{k}$. Так как $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{10k-2} : \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{10}$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, то и рассматриваемый ряд расходится.

Пример 1.15. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k-k}$ сравним с геометрическим сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$. Поскольку $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{10^k-k} : \frac{1}{10^k}\right) = 1$, то заданный ряд также сходится.

Интегральный признак. Пусть функция $f(x)$ определена на $[1, +\infty)$ и $f(k) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1.1. *Если функция* $f(x)$ *положительна и убывает, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 1.16. *Обобщенный гармонический ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

При $\alpha = 1$ данный ряд – гармонический, он расходится.

При $\alpha \le 0$ ряд расходится, так как $\frac{1}{k^\alpha} \nrightarrow 0$ при $k \to \infty$.

Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{если} \quad \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{если} \quad \alpha < 1. \end{cases}$. Поэтому интеграл, а значит, и ряд сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $0 < \alpha < 1$.

Использование обобщенного гармонического ряда в качестве эталонного в признаках сравнения позволяет получить другие признаки сходимости рядов.

Степенной признак сравнения. *Пусть* $a_k \sim \dfrac{c}{k^p}$ *при* $k \to \infty, c > 0$. *Если* $p > 1$, *то ряд (1.1) сходится, если* $p \leq 1$, *то ряд (1.1) расходится.*

Пример 1.17. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k-1}{k\sqrt{k+3}}$ расходится, так как

$$\frac{2k-1}{k\sqrt{k+3}} \sim \frac{2k}{k \cdot \sqrt{k}} = \frac{2}{k^{0,5}}.$$

Пример 1.18. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k-1}{(k+1)\sqrt{k^3+3}}$ сходится, поскольку $\dfrac{2k-1}{(k+1)\sqrt{k^3+3}} \sim \dfrac{2k}{k \cdot \sqrt{k^3}} = \dfrac{2}{k^{1,5}}$.

Пример 1.19. Изучим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 \cdot \sin \frac{1}{n}}{2n^3+3n+1}$. Воспользуемся степенным признаком: $\dfrac{n^2}{2n^3+3n+1} \sin \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{n^2}{2n^3} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2n^2}$. Значит, ряд сходится.

Пример 1.20. Члены ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln \dfrac{n-1}{n+1}$ отрицательны, $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln \dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^p} \cdot \ln\left(1 - \dfrac{2}{n+1}\right) \sim$ $\sim \dfrac{1}{\left(2n^{1/2}\right)^p} \cdot \left(-\dfrac{2}{n+1}\right) \sim -\dfrac{1}{2^{p-1}} \cdot \dfrac{1}{n^{p/2+1}}$. Ряд знакопостоянный. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{p/2+1}}$ сходится, когда $\dfrac{p}{2} + 1 > 1$, т.е. $p > 0$, и расходится при $\dfrac{p}{2} + 1 \leq 1$, т.е. $p \leq 0$, то и исходный ряд сходится, если $p > 0$, и расходится при $p \leq 0$.

Пример 1.21. Изучим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

$$a_n = \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = [\text{используем тейлоровские разложения}] =$$

$$= \left(1 - n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big)\right)^{\alpha} = \Big(\frac{1}{6n^2} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^{\alpha} \sim \frac{1}{6^{\alpha} n^{2\alpha}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ сходится при $\alpha > \dfrac{1}{2}$ и расходится при $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$. Следовательно, и исходный ряд сходится при $\alpha > \dfrac{1}{2}$ и расходится при $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$.

Пример 1.22. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln^\beta n}{n^\alpha}$.

1. Пусть $\alpha > 1$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha - \varepsilon > 1$. Так как $\dfrac{\ln^\beta n}{n^\varepsilon} \to 0$ при любом β, когда $n \to \infty$, то $\dfrac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}} \cdot \dfrac{\ln^\beta n}{n^\varepsilon} \leq \dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ для всех достаточно больших n. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ сходится, поскольку $\alpha-\varepsilon > 1$, поэтому, на основании признака 1^*, сходится и исходный ряд.

2. Пусть $\alpha < 1$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha + \varepsilon < 1$ и $\dfrac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}} \cdot n^\varepsilon \ln^\beta n > \dfrac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}$ при достаточно больших n, поскольку $n^\varepsilon \ln^\beta n \to +\infty$ при любом β, если $n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}$ расходится, следовательно, расходится и исследуемый ряд.

3. При $\alpha = 1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln^\beta n}{n}$. Для его исследования используем интегральный признак. Рассмотрим несобственный интеграл

$$I = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x} dx = [\ln x = t] = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} t^\beta dt.$$

Сходимость этого интеграла равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\beta$, который, как известно, сходится при $-\beta > 1$, т.е. $\beta < -1$, и расходится при $\beta \geq -1$. На основании интегрального признака ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln^\beta n}{n}$ сходится при $\beta < -1$ и расходится при $\beta \geq -1$.

Окончательно: ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln^\beta n}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и любом β и при $\alpha = 1, \beta < -1$; Ряд расходится во всех других случаях.

Признак Коши. *Пусть существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = c. \tag{1.6}$$

Если $c < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если $c > 1$, то ряд расходится.

Замечание 1.5. Предел (1.6) может не существовать. В этом случае можно использовать обобщение признака Коши:

если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k} < 1$, то ряд (1.1) сходится; если $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k} > 1$, то ряд (1.1) расходится.

Пример 1.23. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg}^k \frac{1}{k}$ по признаку Коши: $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{k} = 0$. Ряд сходится.

Пример 1.24. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$ при $n \to \infty$. Ряд сходится.

Пример 1.25. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$.

$\frac{n^5}{2^n+3^n} \le \frac{n^5}{2^n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ сходится по признаку Коши, так как $\sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1$. По признаку сравнения сходится и исходный ряд.

Пример 1.26. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3+(-1)^k}{7+(-1)^{k+1}}\right)^k$. Для этого ряда $\sqrt[k]{a_k} = \frac{3+(-1)^k}{7+(-1)^{k+1}}$ при $k \to \infty$ не имеет предела. Но $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{3} < 1$, значит, ряд сходится.

Пример 1.27. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-4x+6)^n}{3^n\, n}$.

Ряд положительный, так как $x^2 - 4x + 6 > 0$ для любых x. Применим признак Коши: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{x^2-4x+6}{3\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x^2-4x+6}{3}$. Ряд расходится, если $(x^2-4x+6)/3 < 1$, т.е. при $x \in (1;3)$. Ряд сходится, если $(x^2-4x+6)/3 > 1$, т.е. при $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. В точках $x = 1$ и $x = 3$ получаем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Таким образом, исходный ряд сходится при $x \in (1;3)$ и расходится при остальных значениях x.

Признак Даламбера. *Пусть существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = d. \tag{1.7}$$

Если $d < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если $d > 1$, то ряд расходится.

Замечание 1.6. Вместо (1.7) можно рассматривать предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \delta$. Если $\delta > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если $\delta < 1$, то ряд расходится.

Замечание 1.7. Признак Коши не работает, когда $c = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$. Это же можно сказать и о признаке Даламбера, если $d = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 1$. В этих случаях ряд может сходиться или быть расходящимся. Например, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ сходится. Но для обоих рядов $c = d = 1$.

Пример 1.28. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{p^{n^2}}$, $p > 0$. Для него

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\cdot p^{n^2}}{p^{(n+1)^2}\cdot n!} = \frac{n+1}{p^{2n+1}} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad p > 1, \\ +\infty, & \text{если} \quad 0 < p \le 1. \end{cases}$$

Значит, ряд сходится, если $p > 1$, и расходится при $0 < p \le 1$.

Пример 1.29. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n^2}{2^n}$ сходится по признаку Даламбера, т.к. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{5(n+1)^2\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot 5n^2} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$ при $n \to \infty$.

Замечание 1.8. Признак Коши "сильнее" признака Даламбера, т.е. во всех случаях, когда ряд можно исследовать по признаку Даламбера, можно установить сходимость или расходимость ряда и по признаку Коши. Но существуют ряды, сходимость которых можно исследовать по признаку Коши и не удается исследовать по признаку Даламбера.

Пример 1.30. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_{2k-1} = a_{2k} = \dfrac{1}{3^k}$, $k \in N$. Для этого ряда отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ равно либо 1, либо $\dfrac{1}{3}$ в зависимости от четности n. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует.

Однако, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{a_{2k-1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{1}{3^k}\right)^{\frac{1}{2k-1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{1}{3^k}\right)^{\frac{1}{2k}\cdot\frac{2k}{2k-1}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k]{a_{2k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{1}{3^k}\right)^{\frac{1}{2k}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$, значит, ряд сходится по признаку Коши.

При исследовании рядов в ряде случаев бывает удобным использование *формулы Стирлинга*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}, \quad n \to +\infty.$$

Пример 1.31. Для исследования сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$ возможно использование как признака Коши, так и признака Даламбера.

1. Используя признак Коши, получаем:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{n}\sqrt[n]{n!} \sim \left[\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}, n \to \infty\right] \sim \frac{2n}{ne} = \frac{2}{e} < 1,$$

и, следовательно, ряд сходится.

2. Используя признак Даламбера, получаем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!} = \frac{2(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1,$$

ряд сходится.

Пример 1.32. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Имеем $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \dfrac{(2n-1)!!(2n)!!}{\big((2n)!!\big)^2} = \dfrac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2} \sim \Big[$ используем формулу Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\Big] \sim \dfrac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Таким образом, $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\dfrac{1}{n^{1/2}}$ и так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1/2}}$ расходится, то расходится и исходный ряд.

Признак Даламбера не работает, если $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_k}{a_{k+1}} = 1$. В некоторых случаях исследовать сходимость ряда позволяет дальнейшее изучение отношения a_k/a_{k+1}.

Признак Дюамеля. *Пусть*

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 + \frac{\mu}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \infty. \tag{1.8}$$

Если $\mu > 1$, то ряд (1.1) сходится; если $\mu < 1$, то ряд (1.1) расходится.

Пример 1.33. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$.

Здесь $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \dfrac{(2k-1)!!(2k+2)!!}{(2k)!!(2k+1)!!} = \dfrac{2k+2}{2k+1} = 1 + \dfrac{1}{2k+1} =$
$= 1 + \dfrac{1}{2k}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{2k}} = 1 + \dfrac{1}{2k}\left(1 - \dfrac{1}{2k} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)\right) = 1 + \dfrac{1}{2k} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)$. В этом случае $\mu = \dfrac{1}{2}$, ряд расходится по признаку Дюамеля.

Пример 1.34. Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}$ имеем:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(2k-1)!!(2k+4)!!}{(2k+2)!!(2k+1)!!} = \frac{2k+4}{2k+1} = 1 + \frac{3}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$ Здесь $\mu = \frac{3}{2}$, ряд сходится по признаку Дюамеля.

Аналогом признака Дюамеля является

Признак Раабе. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = r$.

Если $r > 1$, то ряд (1.1) сходится; если $r < 1$, то ряд (1.1) расходится.

Пример 1.35. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}.$$

Составим отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2+\sqrt{n+1}}$. Так как $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, то признак Даламбера не работает. Используем признак Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = +\infty.$$

Согласно признаку Раабе ряд сходится.

Признак Дюамеля не дает ответа на вопрос о сходимости ряда в случае, когда $\mu = 1$. Но если $o\left(\frac{1}{k}\right)$ в формуле (1.8) можно представить в виде $o\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 0$, то получаем более сильный признак.

Признак Гаусса. *Пусть*

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + O\left(\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right), \quad k \to \infty, \quad \textit{где } \varepsilon > 0 - \textit{постоянная}. \qquad (1.9)$$

1. *Если $\lambda > 1$, то ряд (1.1) сходится.*
2. *Если $\lambda < 1$, то ряд (1.1) расходится.*
3. *Если $\lambda = 1$, то*

а) *при $\mu > 1$ ряд (1.1) сходится;* б) *при $\mu \le 1$ ряд (1.1) расходится.*

Пример 1.36. Исследуем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^p \cdot \frac{1}{k^q}$.

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^p \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^q = \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^p \left(1 + \frac{1}{k}\right)^q =$$

$$= \left(1 + \frac{p}{2k+1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(1 + \frac{q}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{p}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(1 + \frac{q}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = 1 + \frac{\frac{p}{2} + q}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

По признаку Гаусса ряд сходится при $\frac{p}{2} + q > 1$ и расходится при $\frac{p}{2} + q \leq 1$.

Замечание 1.9. Результаты, сформулированные для положительных рядов, можно использовать для отрицательных рядов, т.е. рядов у которых $a_k \leq 0, \forall k$. Достаточно в этом случае рассмотреть положительный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-a_k)$.

1.4. Знакопеременные ряды

Будем рассматривать произвольный числовой ряд (1.1), не требуя, чтобы выполнялось условие $a_k \geq 0, \forall k$.

Ряд (1.1) называют *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \tag{1.10}$$

Теорема 1.2. *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Заметим, что ряд (1.10) положительный, поэтому для исследования его сходимости можно применять все признаки сходимости положительных рядов. Это облегчает во многих случаях исследование ряда (1.1).

Пример 1.37. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin \frac{1}{n}}{n}$. Для этого рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n \cdot \sin \frac{1}{n}}{n}\right|$. Для него $\left|\frac{\sin n \cdot \sin \frac{1}{n}}{n}\right| \leq \frac{\sin \frac{1}{n}}{n} \sim \frac{1}{n^2}$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$ сходится (по степенному признаку). По признаку сравнения 1* сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n \cdot \sin \frac{1}{n}}{n}\right|$, т.е. заданный ряд сходится абсолютно, а поэтому сходится.

Однако, ряд (1.10) может расходиться, а ряд (1.1) быть сходящимся. В этом случае ряд (1.1) называют *сходящимся неабсолютно* (*условно*).

Во множестве знакопеременных рядов выделяют ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\ a_k > 0, \tag{1.11}$$

которые называют *знакочередующимися*. Для исследования таких рядов можно использовать

Признак Лейбница. *Если последовательность* (a_k) *стремится к нулю монотонно, то ряд (1.11) сходится. Если* S *сумма ряда, и* S_n *— частная сумма, то* $|S_n - S| = \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k\Big| \le a_{n+1}$.

Пример 1.38. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ знакочередующийся. Исследуем его на абсолютную сходимость. Имеем $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\ln n}\right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$. Для этого ряда $a_n = \dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$. Так как $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится (это остаток гармонического ряда), то, по признаку 1*, расходится и $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся. В то же время $a_n = \dfrac{1}{\ln n} \to 0$ и $a_n = \dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{\ln(n+1)} = a_{n+1}, \forall n$, последовательность (a_n) монотонна. На основании признака Лейбница ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ сходится неабсолютно.

Пример 1.39. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n-5}{n^2+2}$.

Заметим, что ряд не сходится абсолютно, так как $|a_n| = \dfrac{|n-5|}{n^2+2} \sim \sim \dfrac{1}{n}$ при $n \to \infty$. Исходный ряд знакочередующийся. Воспользуемся признаком Лейбница. Очевидно, $a_n = \dfrac{n-5}{n^2+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Чтобы изучить монотонность последовательности a_n, рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2+2}$. Ее производная $f'(x) = \dfrac{x^2+2-2x(x-5)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-x^2+10x+2}{(x^2+2)^2}$. Так как $f'(x)$ отрицательна при всех значениях $x \ge 11$, то $f(x)$ убывает при $x \geq 11$. Поэтому последовательность (a_n) убывает при $n \geq 11$. По признаку Лейбница сходится остаток $\sum\limits_{n=11}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n-5}{n^2+2}$, а значит, сходится и изучаемый ряд.

Пример 1.40. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ сходится абсолютно при $\alpha > 1$. Если $0 < \alpha \leq 1$, то ряд сходится по признаку Лейбница. Если $\alpha \leq 0$ то ряд расходится, так как $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$.

Условие монотонности последовательности (a_n) в признаке Лейбница является существенным.

Пример 1.41. У знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$ последовательность (a_n) такова, что $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$, причем $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Однако этот ряд расходится, так как

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ сходится по признаку Лейбница ($\dfrac{\sqrt{n}}{n-1} \to 0$ монотонно), а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ расходится.

Замечание 1.10. Из признаков сравнения для положительных рядов следует, что положительные ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$, у которых $a_k \sim c \cdot b_k, c > 0$, при $k \to \infty$, оба сходятся или оба расходятся. Для знакопеременных рядов это не так.

Пример 1.42. Имеем $a_k = \left(\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k}\right) \sim \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = b_k$ при $k \to +\infty$. Однако, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ расходится, в то время как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ сходится.

Следующие два признака ориентированы на изучение числовых рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k. \tag{1.12}$$

Признак Дирихле. *Пусть*

1. *Последовательность частных сумм ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *ограничена, т.е. существует такое* M*, что* $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \leq M$ *при любом* n.

2. *Последовательность* (a_k) *монотонно стремится к* 0.

Тогда ряд (1.12) сходится.

Пример 1.43. Рассмотрим ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$. Пусть $(a_k) \downarrow 0$. Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = |\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx| = \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = |\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

то оба ряда сходятся при любом $x \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Если $x = 2\pi m$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, сходимость такого ряда нужно исследовать дополнительно. При $x = 2\pi m$ все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ равны нулю, ряд сходится.

Пример 1.44. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln^{100} k}{k} \sin\dfrac{k\pi}{4}$.

Используем признак Дирихле. Последовательность $a_k = \dfrac{\ln^{100} k}{k}$ является монотонной. Для доказательства этого рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\ln^{100} x}{x}$. Производная $f'(x) = \dfrac{100\ln^{99} x - \ln^{100} x}{x^2} < 0$, если $x > e^{100}$, т.е. f убывает на промежутке $(e^{100}, +\infty)$. Следовательно, и (a_k) убывает при $k > e^{100}$. Кроме того, $b_k = \dfrac{\ln^{100} k}{k} \to 0$ при $k \to \infty$. При любом $n \geq 1$ выполняется оценка $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{k\pi}{4}\right| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln^{100} k}{k} \sin\dfrac{k\pi}{4}$ сходится.

Пример 1.45. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}$. Представим ряд в виде

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos 2n}{2n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n}$ сходится по признаку Лейбница . Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos 2n}{2n}$ сходится по признаку Дирихле, так как последовательность $(1/2n)$ стремится к нулю убывая при $n \to \infty$, и при всех $m \geq 1$ имеем

$$\left|\sum_{n=1}^{m}(-1)^n \cos 2n\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} \cos \pi n \cos 2n\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} \cos(\pi+2)n\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\pi+2}{2}\right|}.$$

Таким образом, исходный ряд представлен в виде суммы двух сходящихся рядов, следовательно, сходится.

Признак Абеля. *Пусть*

1. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится.*

2. *Последовательность* (a_k) *монотонна и ограничена.*

Тогда ряд (1.12) сходится.

Пример 1.46. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1} \dfrac{8n+1}{2n+1} \cdot \dfrac{\sin n}{n}$ Применим признак Абеля. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$ сходится по признаку Дирихле, а последовательность $a_n = \dfrac{8n+1}{2n+1} = 4 - \dfrac{3}{2n+1}$ монотонна (возрастает) и ограничена $(0 \leq a_n \leq 4)$. Следовательно, исходный ряд сходится.

Пример 1.47. Изучим абсолютную и неабсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$. Так как $\left|\dfrac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{k^\alpha}$, то ряд сходится абсолютно при любом x, если $\alpha > 1$.

Если $0 < \alpha \leq 1$, то $\dfrac{1}{k^\alpha} \downarrow 0$ при $k \to \infty$, ряд сходится по признаку Дирихле. Используем неравенство $\dfrac{|\sin kx|}{k^\alpha} \geq \dfrac{\sin^2 kx}{k^\alpha} = \dfrac{1-\cos 2kx}{2k^\alpha}$. Положительный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1-\cos 2kx}{2k^\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k^\alpha} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2kx}{2k^\alpha}$ расходится, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k^\alpha}$ расходится при $\alpha \leq 1$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2kx}{2k^\alpha}$ сходится по признаку Дирихле при $\forall x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, расходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|\sin kx|}{k^\alpha}, x \neq \pi n$, т.е. исходный ряд сходится неабсолютно при $0 < \alpha \leq 1, x \neq \pi n$.

Если $x = \pi n$, то ряд сходится абсолютно при $\forall \alpha$, так как все члены ряда равны нулю.

Пусть $x \neq \pi n$. Последовательность $\sin kx \nrightarrow 0, k \to \infty$. Действительно, если предположить противное, то и $\sin(k+1)x \to 0$, т.е. $\sin kx \cos x + \cos kx \sin x \to 0 \Rightarrow \cos kx \to 0, k \to \infty$. Тогда оказывается, что $\sin kx \to 0$ и $\cos kx \to 0$ при $k \to \infty$, что невозможно, так как $\sin^2 kx + \cos^2 kx = 1$. Таким образом, $\sin kx \nrightarrow 0$ и, тем более $\dfrac{\sin kx}{x^\alpha} \nrightarrow 0$ при $\alpha \leq 0$. Ряд расходится.

Окончательно: ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$ сходится абсолютно при $x = \pi n$ и всех α, и при любом x, если $\alpha > 1$; ряд сходится неабсолютно при любом $x \neq \pi n$, если $0 < \alpha \leq 1$. В остальных случаях ряд расходится.

Аналогичным образом можно изучить ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{k^\alpha}$: при всех x ряд сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и неабсолютно при $0 < \alpha \leq 1$.

Критерий абсолютной сходимости. Пусть задан ряд (1.1). Обозначим $b_k = \dfrac{|a_k| + a_k}{2}$ и $c_k = \dfrac{|a_k| - a_k}{2}$, т.е.

$$b_k = \begin{cases} a_k, & \text{если} \quad a_k \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad a_k < 0, \end{cases} \qquad c_k = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a_k > 0 \\ -a_k, & \text{если} \quad a_k \leq 0. \end{cases}$$

Теорема 1.3. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся оба положительных ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$. При этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$.*

Условие неабсолютной сходимости. Так как $a_k = b_k - c_k$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$. Поэтому, если один из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, а другой расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема 1.4. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится неабсолютно, то оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходятся и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty, \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = +\infty$.*

2. ДЕЙСТВИЯ НАД РЯДАМИ

2.1. Группировка членов ряда

Пусть (k_n) – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, $k_1 = 1$. Обозначим

$$c_n = a_{k_n} + \ldots + a_{k_{n+1}-1}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = (a_1 + \ldots + a_{k_2-1}) + (a_{k_2} + \ldots + a_{k_3-1}) + \ldots$ называют *группировкой* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. С другой стороны, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ – разгруппировка ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.

Теорема 2.1. *Если ряд сходится и имеет сумму S, то и любая его группировка сходится и имеет ту же сумму S.*

Из сходимости группировки ряда не следует, вообще говоря, сходимость самого ряда.

Пример 2.1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится, хотя его группировка $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$ сходится.

Но если каждая скобка c_n содержит слагаемые одного знака и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и ряды имеют одинаковые суммы. В частности, это верно, если ряд положительный, т.е. в положительных рядах группировка допустима.

Пример 2.2. Рассмотрим ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\ldots.$

Сгруппируем его члены:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)-\ldots = A_1 - A_2 + A_3 - \ldots =$$

$= \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}A_k$. При этом

$$A_k = \frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k} > \frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3} = A_{k+1},$$

т.е. (A_k) убывает. Так как $0 < A_k < 3 \cdot \dfrac{1}{3k-2} \to 0$ при $k \to \infty$, то $A_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} A_k$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд.

2.2. Перестановка членов ряда

Пусть $\varphi : k \mapsto k_n$ – биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, т.е. последовательность (k_n) – перестановка в $\mathbb{N}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ называют *перестановкой ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема 2.2. *Если ряд сходится абсолютно и имеет сумму S, то любая его перестановка сходится абсолютно и также имеет сумму S.*

В частности, любая перестановка положительного сходящегося ряда не меняет его сумму, перестановка положительного расходящегося ряда расходится.

Теорема 2.3. (Теорема Римана). *Если ряд сходится неабсолютно, то для любого A ($A \in \mathbb{R}$ или $A = \pm\infty$) существует ряд-перестановка, сумма которого равна A, а также перестановка, не имеющая суммы.*

2.3. Перемножение рядов

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Множество P всех произведений $a_n \cdot b_m, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$, счетное. Пронумеруем элементы этого множества каким-либо способом и обозначим их $c_1, c_2, \ldots$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ называют *произведением* рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Существует бесконечное множество произведений двух данных рядов. Все эти произведения являются перестановками одного какого-либо произведения.

Теорема 2.4. *Если какой-либо ряд-произведение сходится абсолютно, то и все произведения сходятся абсолютно и имеют одну и ту же сумму.*

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A, \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = B, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.5. (**Теорема Коши**) *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся абсолютно и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A, \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = B, A, B \in \mathbb{R}$, *то и любое их произведение сходится абсолютно и имеет сумму* AB.

Пример 2.3. Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{k-1}}$ сходятся абсолютно и их суммы соответственно равны $A = 1, B = \dfrac{3}{2}$. Поэтому произведение $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{1}{m(m+1)3^{n-1}} = 1 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Если какой-либо из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ не является абсолютно сходящимся, то сходимость и сумма рядов-произведений зависит от способа нумерации элементов множества P.

Пусть $\tilde{c}_k = a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \ldots + a_k b_1, k = 1, 2, \ldots$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k$ называют произведением рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ по методу Коши. Произведение по методу Коши может сходится и при условиях, менее жестких, чем в теореме Коши.

Теорема 2.6. (**Теорема Мертенса**). *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся и хотя бы один из них сходится абсолютно, то их произведение по методу Коши сходится и его сумма равна* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Пример 2.4. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + \ldots$ сходится абсолютно при $|x| < 1$ и имеет сумму $\dfrac{1}{1-x}$. Поэтому по методу Коши $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\right)^2 =$

$$= (1+x+x^2+\ldots)^2 = (1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots) = \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1.$$

Замечание 2.1. Произведение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k$ может сходиться даже и в случае, когда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходятся. Вместе с тем произведение сходящихся рядов может расходится.

Пример 2.5. Пусть

$$a_0 = 1, a_k = -\left(\frac{3}{2}\right)^k; b_0 = 1, b_k = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\left(2^k + \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ расходятся, т.к. $a_k \nrightarrow 0, b_k \nrightarrow 0$ при $k \to \infty$.

$\tilde{c}_k = a_0 b_{k-1} + a_1 b_{k-2} + \ldots + a_{k-1} b_0 = 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\left(2^{k-1} + \frac{1}{2^k}\right) -$
$- \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}\left(2^{k-2} + \frac{1}{2^{k-1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-4}\left(2^{k-3} + \frac{1}{2^{k-2}}\right) - \ldots -$
$-\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \cdot 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\Big(2^{k-1} - 2^{k-2} - 2^{k-3} - \ldots - 2 + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{k-2}} - \ldots -$
$- \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2}\Big) = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\Big(2^{k-1} - (2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 2 + 1) + \frac{1}{2^k} - \Big(\frac{1}{2^{k-1}} +$
$+ \frac{1}{2^{k-2}} + \ldots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\Big)\Big) = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\left(2^{k-1} - \frac{1 - 2^{k-1}}{1-2} + \frac{1}{2^k} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}}\right) =$
$= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\left(1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} - 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}}\right)$. Таким образом, $\tilde{c}_k > 0$ и $\tilde{c}_k = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}}\right) < \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} \cdot \frac{2}{2^{k-1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}$. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}$ сходится, следовательно, сходится (абсолютно!) и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k$.

Пример 2.6. Пусть $a_k = b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ сходится (неабсолютно). В этом случае

$\tilde{c}_1 = 1,\ \ \tilde{c}_2 = -\big(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1\big),\ \ \tilde{c}_3 = \big(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1\big), \ldots,$
$\tilde{c}_k = (-1)^{k+1}\big(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot 1\big), \ldots,$
причем $|\tilde{c}_k| \geq k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k}} = 1$, т.е. $\tilde{c}_k \nrightarrow 0$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k$ расходится.

Теорема 2.7. (**Теорема Абеля**). *Если сходятся три ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k$.

3. ПОВТОРНЫЕ И ДВОЙНЫЕ РЯДЫ

3.1. Сходимость двойного ряда

Рассмотрим матрицу с бесконечным множеством строк и столбцов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Сумму $S_{mn} = \sum\limits_{q=1}^{n} \sum\limits_{p=1}^{m} a_{pq}$ называют *прямоугольной суммой*, связанной с матрицей A.

Выражение

$$\sum_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq} \tag{3.1}$$

называют *двойным рядом*. Прямоугольные суммы – его частичные суммы.

Двойной ряд называют *сходящимся*, если существует такое число S, что $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = S$. Это означает, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, v_\varepsilon \quad \forall\, m \geq v_\varepsilon \;\; \forall\, n \geq v_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |S_{mn} - S| \leq \varepsilon.$$

Если конечный предел сумм S_{mn} не существует, то ряд (3.1) расходится.

Пример 3.1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{p,q=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^p 3^q}$. Прямоугольная сумма

$$S_{mn} = \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{2^p 3^q} = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{3^q} \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{2^p} = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Так как $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$, то ряд сходится и имеет сумму $S = \dfrac{1}{2}$.

При каждом $p = 1, 2, \dots$ из элементов p-й строки матрицы A можно составить ряд $\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{pq}$. Пусть все такие ряды сходятся и $\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{pq} = A_p$. Ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \tag{3.2}$$

называют *повторным рядом*. Аналогично, если $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{pq} = A'_q$, − сходящиеся ряды, $q = 1, 2, \ldots$, то можно рассматривать повторный ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} A'_q = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}. \tag{3.3}$$

Пример 3.2. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

В этом случае $A_p = 0, \forall p$, и повторный ряд (3.2) сходится, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} A_p = 0$.

Суммы рядов-столбцов $A'_1 = 1, A'_2 = -\dfrac{1}{2}, A_q = 0, q \geq 3$, повторный ряд (3.3) сходится, но его сумма $\sum\limits_{q=1}^{\infty} A'_q = 1 - \dfrac{1}{2} + 0 + \ldots + 0 + \ldots = \dfrac{1}{2}$.

Таким образом, повторные ряды могут иметь различные суммы. Более того, сходимость одного ряда не влечет сходимости другого.

Пример 3.3. Пусть задана последовательность $(a_n), a_n \to +0$. Рассмотрим матрицу

$$\begin{bmatrix} a_1 & -a_1 & a_1 & -a_1 & \ldots & (-1)^{n+1}a_1 & \ldots \\ -a_1 & a_1 & -a_1 & a_1 & \ldots & (-1)^{n}a_1 & \ldots \\ a_2 & -a_2 & a_2 & -a_2 & \ldots & (-1)^{n+1}a_2 & \ldots \\ -a_2 & a_2 & -a_2 & a_2 & \ldots & (-1)^{n}a_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & -a_m & a_m & -a_m & \ldots & (-1)^{n+1}a_m & \ldots \\ -a_m & a_m & -a_m & a_m & \ldots & (-1)^{n}a_m & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

Каждый ряд-строка $\pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_k$ расходится. Но двойной ряд, соответствующий этой матрице, сходится. Действительно, так как любые суммы $S_{2k,n} = 0, S_{m,2l} = 0, S_{2k+1,2p+1} = S_{2k+1,2p} + \big(S_{2k,2p+1} - S_{2k,2p}\big) + {} + a_{k+1} = 0 + (0 - 0) + a_{k+1} = a_{k+1}$, то $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = 0$, т.е. двойной ряд сходится.

Пример 3.4. Рассмотрим двойной ряд $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq}$ с элементами a_{pq} : $a_{2p-1,q} = \dfrac{1}{p}$, если $p(p-1) < q \le p^2$, $a_{2p-1,q} = -\dfrac{1}{p}$, если $p^2 < q \le p(p+1)$, $a_{2p-1,q} = 0$ для остальных q, $a_{2p,q} = -a_{2p-1,q}$. Соответствующая матрица имеет вид

$$\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p} & \frac{1}{p} & \dots & \frac{1}{p} & -\frac{1}{p} & -\frac{1}{p} & \dots & -\frac{1}{p} & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{p} & -\frac{1}{p} & \dots & -\frac{1}{p} & \frac{1}{p} & \frac{1}{p} & \dots & \frac{1}{p} & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{bmatrix}.$$

Суммы рядов-строк и рядов-столбцов равны нулю, поэтому оба повторных ряда сходятся.

Вместе с этим $S_{2p,(p+1)^2} = 0, S_{2p-1,p^2} = 1$. Поэтому $\lim\limits_{n,m\to\infty} S_{mn}$ не существует, двойной ряд расходится.

Таким образом, сходимость обоих повторных рядов не обеспечивает сходимости двойного ряда.

Пронумеровав каким-либо способом элементы матрицы A и обозначив их после этого $c_1, c_2, \dots$, можно рассмотреть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Если один из рядов (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) после замены его членов их абсолютными величинами сходится, то все четыре ряда сходятся и их суммы равны.*

Пример 3.5. Рассмотрим двойной ряд $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty}\dfrac{1}{(p+1)^{q+1}}$. Так как элементы ряда положительны, то его сходимость равносильна сходимости повторного ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\sum\limits_{q=1}^{\infty}\dfrac{1}{(p+1)^{q+1}}$. Исследуем этот ряд.

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^2+\left(\frac{1}{p+1}\right)^3+\ldots\right)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{p+1}\right)^2}{1-\frac{1}{p+1}}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p(p+1)}.$$

Этот ряд сходится. Его частная сумма $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}\to 1$ при $n\to\infty$.

Следовательно, $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty}\dfrac{1}{(p+1)^{q+1}}=1$.

Пример 3.6. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty}\dfrac{1}{(p+q)^{\alpha}}$. Построим для него ряд вида (3.4) следующим образом:

$$\frac{1}{(1+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(1+2)^{\alpha}}+\frac{1}{(2+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(1+3)^{\alpha}}+\frac{1}{(2+2)^{\alpha}}+\frac{1}{(3+1)^{\alpha}}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(1+k)^{\alpha}}+\frac{1}{(2+k-1)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}+\ldots=\frac{1}{(1+1)^{\alpha}}+\left(\frac{1}{(1+2)^{\alpha}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2+1)^{\alpha}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(1+k)^{\alpha}}+\frac{1}{(2+k-1)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{2}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{k}{(k+1)^{\alpha}}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)^{\alpha}}.$$

Этот ряд сходится, если $\alpha>2$, и расходится, если $\alpha\le 2$. Значит, и исходный двойной ряд сходится при $\alpha>2$ и расходится при $\alpha\le 2$.

3.2. Свойства двойных рядов

1. Необходимое условие сходимости. *Если ряд (3.1) сходится, то* $\lim\limits_{m\to\infty,n\to\infty}a_{mn}=0$, т.е.

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,v_{\varepsilon}\quad\forall\,m\ge v_{\varepsilon}\ \forall\,n\ge v_{\varepsilon}\quad\Longrightarrow\quad|a_{mn}|\le\varepsilon.$$

Но это не означает, что множество элементов матрицы A ограничено.

Пример 3.7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & n & \ldots \\ 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \ldots & -n & \ldots \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m & -m & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$

Здесь $S_{mn} = 1$, если $m \geq 2, n \geq 2$, значит, ряд $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq}$ сходится и его сумма равна 1.

2. Линейность. *Если ряды* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq}$ *и* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} b_{pq}$ *сходятся, то сходится и ряд* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} (\alpha a_{pq} + \beta b_{pq}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *При этом*

$$\sum_{p=1,q=1}^{\infty} (\alpha a_{pq} + \beta b_{pq}) = \alpha \sum_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq} + \beta \sum_{p=1,q=1}^{\infty} b_{pq}.$$

3. Критерий Коши сходимости двойного ряда. *Ряд* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq}$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, v_\varepsilon \ \forall\, n, m, n', m' \geq v_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |S_{mn} - S_{m'n'}| \leq \varepsilon.$$

4. Критерий сходимости положительного двойного ряда. *Пусть* $a_{pq} \geq 0, \forall\, p, q$. *Ряд* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq}$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\exists\, M \ \forall\, m \ \forall\, n \quad \Longrightarrow \quad S_{mn} \leq M.$$

5. Признак сравнения. *Пусть* $0 \leq a_{pq} \leq b_{pq}, \forall\, p, q$. *Если ряд* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} b_{pq}$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq}$. *Если ряд* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq}$ *расходится, то расходится и ряд* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} b_{pq}$.

6. Произведение рядов. *Пусть* $a_{pq} = b_p c_q, \ \ p, q = 1, 2, \ldots$. *Если ряды* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p$ *и* $\sum\limits_{q=1}^{\infty} c_q$ *сходятся, то двойной ряд* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq}$ *сходится и* $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} a_{pq} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p \cdot \sum\limits_{q=1}^{\infty} c_q$.

Замечание 3.1. В этом случае произведение двух рядов представлено в виде двойного ряда. Такое произведение не равносильно произведению рядов по методу Коши.

Пример 3.8. Двойной ряд $\sum\limits_{p=1,q=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{p+q}}{\sqrt{pq}}$ сходится, так как это произведение двух сходящихся рядов $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{p}}$ и $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{q+1}}{\sqrt{q}}$. Но произведение этих рядов по методу Коши расходится, см. пример 2.6.

Пример 3.9. Изучим сходимость ряда $\sum\limits_{k=1,l=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha + l^\beta}$:

а) если $\alpha \leq 2$ и $\beta \leq 2$; б) если $\alpha > 2$ и $\beta > 2$.

а) Пусть $\alpha = 2$ и $\beta = 2$. В сумме $S_{m-1} = \dfrac{1}{1^2 + (m-1)^2} +$ $+ \dfrac{1}{2^2 + (m-2)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(m-1)^2 + 1^2}$ наименьшими слагаемыми являются первое и последнее: $\dfrac{1}{1^2 + (m-1)^2} = \dfrac{1}{(m-1)^2 + 1^2}$. Для доказательства исследуем на экстремум функцию $u = x^2 + y^2$ при условиях: $x + y = m, 1 \leq x \leq m - 1, 1 \leq y \leq m - 1$. Последовательно вычисляем: $y = m - x, u = x^2 + (m - x)^2, u' = 4x - 2m$. В точке $x = \dfrac{m}{2}$ функция имеет условный локальный минимум. Максимальное значение функция $u = x^2 + y^2$ принимает в точках $(1; m-1)$ и $(m-1; 1)$. Поэтому $\dfrac{1}{x^2 + y^2} \geq \dfrac{1}{(m-1)^2 + 1^2}$. Отсюда следует, что $S_{m-1} \geq \dfrac{m-1}{(m-1)^2 + 1}$. Члены ряда вида (3.4), соответствующего исследуемому ряду, можно расположить и сгруппировать так, что получим

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} = \frac{1}{1^2+1^2} + \frac{1}{1^2+2^2} + \frac{1}{2^2+1^2} + \frac{1}{1^2+3^2} + \frac{1}{2^2+2^2} + \frac{1}{3^2+1^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1^2+(m-1)^2} + \frac{1}{2^2+(m-2)^2} + \ldots + \frac{1}{(m-1)^2+1^2} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1^2+1^2} + \left(\frac{1}{1^2+2^2} + \frac{1}{2^2+1^2}\right) + \left(\frac{1}{1^2+3^2} + \frac{1}{2^2+2^2} + \frac{1}{3^2+1^2}\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{1^2+(m-1)^2} + \frac{1}{2^2+(m-2)^2} + \ldots + \frac{1}{(m-1)^2+1^2}\right) + \ldots \geq$$

$$\geq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m-1}{(m-1)^2+1}.$$

Так как $\dfrac{m-1}{(m-1)^2+1} \sim \dfrac{1}{m}$ при $m \to \infty$, то последний ряд расходится. Следовательно, расходится и ряд $\sum\limits_{\forall k,l}^{\infty} a_{kl}$, а значит, и исходный двойной ряд $\sum\limits_{k=1,l=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+l^2}$.

Если $\alpha < 2$ и $\beta < 2$, то $\dfrac{1}{k^\alpha + l^\beta} > \dfrac{1}{k^2+l^2}$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1,l=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha + l^\beta}$ расходится.

Замечание 3.2. Так как для прямоугольной суммы выполняется неравенство

$$S_{nn} \geq n^2 \cdot \frac{1}{n^\alpha + n^\beta} \geq \frac{n^2}{n^\gamma + n^\gamma} = \frac{n^{2-\gamma}}{2},$$

где $\gamma = \max\{\alpha, \beta\} < 2$, то $S_{nn} \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому не существует конечного предела сумм S_{nm} при $n \to \infty$ и $m \to \infty$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1,l=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha + l^\beta}$ расходится.

б) Пусть $\alpha > 2$ и $\beta > 2$. Используем неравенство $\dfrac{1}{k^\alpha + l^\alpha} \leq \dfrac{1}{k^{\alpha/2} l^{\beta/2}}$. Для ряда $\sum\limits_{k=1,l=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha/2} l^{\beta/2}}$ прямоугольная сумма $\sigma_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{\alpha/2}} \sum\limits_{l=1}^{m} \dfrac{1}{l^{\beta/2}}$ имеет конечный предел при $n \to \infty$ и $m \to \infty$, так как ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha/2}}$ и $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \dfrac{1}{l^{\beta/2}}$ сходятся. Поэтому двойной ряд $\sum\limits_{k=1,l=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha/2} \cdot l^{\beta/2}}$ сходится, а следовательно, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1,l=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha + l^\beta}$.

4. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

4.1. Сходимость бесконечного произведения

Пусть задана числовая последовательность (a_n). Построим последовательность

$$P_1 = a_1,\ \ P_2 = a_1 a_2,\ \ P_3 = a_1 a_2 a_3,\ \ \ldots,\ \ P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k,\ \ \ldots .$$

Последовательность (P_n) удобно изучать, записывая ее в виде выражения

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{4.1}$$

называемого *бесконечным произведением* (коротко — произведением).

Произведение (4.1) называют *сходящимся*, если существует конечный ненулевой предел $P = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k$. Число P называют значением произведения (4.1) и записывают

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = P.$$

Если же этот предел не существует или равен 0, или ∞, то произведение *расходится*.

Произведения $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ называют *частичными произведениями*.

Пример 4.1. Найдем значение произведения $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. Составим частичное произведение $P_{n-1} = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} =$
$= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} = \frac{n+1}{2n}$.
Поскольку $\lim_{n\to\infty} P_{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$, то произведение сходится и его значение равно $1/2$.

Пример 4.2. Исследуем произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Частичное произведение

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n} = (n+1)\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, произведение расходится.

Если последовательность (a_n) содержит нулевые элементы, то произведение (4.1) расходится. В дальнейшем считаем $a_n \neq 0,\ \forall n$.

Пусть произведение (4.1) сходится. Тогда $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1$ при $n\to\infty$. Получаем

Необходимое условие сходимости бесконечного произведения:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Отсюда следует, что $a_n > 0$, начиная с некоторого номера.

Пример 4.3. Произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ расходится, так как $\frac{1}{n^2} \to 0$ при $n \to \infty$, не выполнено необходимое условие сходимости.

Пример 4.4. Произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ расходится, так как

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

При этом n-ый член произведения $\frac{n}{n+1} \to 1, n \to \infty$.

Бесконечное произведение $\prod\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ называют *остаточным произведением* (коротко – остатком) произведения (4.1). Так как при всех $n > m$ выполнено $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = \prod\limits_{k=1}^{m} a_k \cdot \prod\limits_{k=m+1}^{n} a_k$, то

1) *если произведение сходится, то сходится и любой его остаток;*

2) *если сходится какой-либо остаток произведения, то сходится и само произведение.*

4.2. Признаки сходимости бесконечных произведений

Теорема 4.1. *Произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln a_k$. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S, S \in \mathbb{R}$, *то* $P = \prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k = e^S$.

Пример 4.5. Исследуем бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n(n+1)}}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln e^{\frac{1}{n(n+1)}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Ряд сходится так как $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится.

Найдем сумму ряда:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

Следовательно, сумма ряда $S = 1$. Поэтому сходится и произведение и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n(n+1)}} = e$.

Пример 4.6. Исследуем сходимость произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n+2}{n+3}}$. Сходимость произведения равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \sqrt[3]{\dfrac{n+2}{n+3}}$. Так как $\ln \sqrt[3]{\dfrac{n+2}{n+3}} = \dfrac{1}{3} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+3}\right) \sim -\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{n+3} \sim -\dfrac{1}{3n}$, то ряд расходится. Следовательно, бесконечное произведение также расходится.

В ряде случаев удобно изучать бесконечное произведение (4.1), записывая его в виде $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k)$. Тогда необходимое условие сходимости запишется в виде: $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$.

Теорема 4.2. *Пусть (α_k) – знакопостоянная последовательность. Произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$.*

Пример 4.7. Исследуем произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

Сходимость произведения равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Следовательно, и произведение сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \le 1$.

Пример 4.8. Исследуем сходимость произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{x^{2n}}{2^n}\right)$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n}$. Это геометрический ряд и он сходится, если $\dfrac{x^2}{2} < 1$, т.е. для $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Для остальных x ряд расходится. Поэтому и произведение сходится, если $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, и расходится, если $x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

Теорема 4.3. *Если сходятся оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$, то произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k)$ сходится. Если же один из этих рядов сходится,* *а другой расходится, то произведение расходится.*

Пример 4.9. Исследуем произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}$ – сходится (по признаку Лейбница). Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ – сходится, как обобщенный гармонический. Следовательно, сходится и произведение.

Пример 4.10. Рассмотрим произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ – сходится (признак Лейбница). Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ – расходится (гармонический). Значит, и произведение расходится.

В случае, когда оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2$ расходятся, произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k)$ может оказаться сходящимся.

Пример 4.11. Исследуем сходимость произведения $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+\alpha_n)$, где

$$\alpha_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & \text{если} \quad n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{если} \quad n = 2k. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = -\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\ldots-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}-\ldots = [\text{ сгруппируем члены ряда }] =$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

Ряд расходится, как сумма расходящегося и сходящего рядов.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$. Поскольку $\alpha_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{k}$, то ряд расходится.

Полученные результаты не позволяют сделать выводы о сходимости или расходимости произведения.

Обозначим

$$\beta_k = (1+\alpha_{2k-1})(1+\alpha_{2k}) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right) =$$
$$= 1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2} = 1-\frac{1}{k^2}.$$

Произведение $\prod\limits_{k=2}^{\infty} \beta_k = \prod\limits_{k=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$ сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$. Поэтому сходится и произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+\alpha_n)$, поскольку всякое его частичное произведение либо равно некоторому частичному произведению произведения $\prod\limits_{k=2}^{\infty}\beta_k$, либо отличается от него множителем $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$, который стремится к 1, когда $k \to +\infty$. Таким образом, произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+\alpha_n)$ сходится, хотя ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ расходятся.

Произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k)$ называют *абсолютно сходящимся*, если сходится $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+|\alpha_k|)$. Если же $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k)$ сходится, а $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+|\alpha_k|)$ расходится, то говорят, что произведение *сходится неабсолютно*.

Пример 4.12. Исследуем произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha \ln(n+1)}\right)$ на абсолютную и неабсолютную сходимость.

Если $\alpha < 0$, то n-й член произведения не стремится к 1 при $n\to\infty$, следовательно, не выполнено необходимое условие сходимости, и произведение расходится.

Пусть $\alpha \geq 0$. Рассмотрим произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha \ln(n+1)}\right|\right)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n+1)}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 \leq \alpha < 1$. Поэтому при $\alpha > 1$ произведение сходится абсолютно.

При $0 \le \alpha \le 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}\ln(n+1)}$ сходится на основании признака Лейбница. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2\alpha}\ln^2(n+1)}$ сходится, если $2\alpha \ge 1$, т.е. при $\alpha \ge \dfrac{1}{2}$, и расходится, если $0 \le \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Таким образом, исходное произведение сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится неабсолютно при $\dfrac{1}{2} \le \alpha \le 1$ и расходится при $\alpha < \dfrac{1}{2}$.

4.3. Действия с бесконечными произведениями

1. *Если* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся, то сходится и произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. *При этом* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

2. *Пусть* $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \ne 0$. *Произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{\gamma}$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. *При этом* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{\gamma} = \big(\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k\big)^{\gamma}$.

Пример 4.13. Исследуем сходимость произведения $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$. При $p=0$ произведение сходится. Если $p \ne 0$, то его сходимость равносильна сходимости произведения $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2+1} = \prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n^2+1}\right)$, которое сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2}{n^2+1}$. Таким образом, исходное произведение сходится при любых $p \in \mathbb{R}$.

5. УПРАЖНЕНИЯ

I. Вычислить суммы рядов.

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2^{k-1}}+\dfrac{(-1)^{k-1}}{2\cdot 3^{k-1}}\right)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+\cos\pi n}{3^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3^{n-1}}+\dfrac{(-1)^n}{3\cdot 2^n}\right)$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n+(-1)^n3^n}{5^n}$.

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n+(-1)^{n-2}}{6^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5\cdot(-1)^{n+1}6^{n-1}-4^{n+1}}{12^n}$.

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2^{n+2}}-\dfrac{2}{3^{n+3}}\right)$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot 4^{n-1}+2(-1)^n3^{n+1}}{6^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+(-1)^n3^n}{4^{2n-1}}$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2+(-1)^n)x^n}{4^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+3)}$.

13. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-4}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2(n+2)^2}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{36n^2-24n-5}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2+4n-3}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{49n^2+7n-12}$.

20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{25n^2-95n+84}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(4n^2-1)^2}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}}$.

25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(n+2)}$.

26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$.

28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{2}{n^2+n}\right)$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{2^n}\cos\dfrac{3}{2^n}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

II. Исследовать сходимость ряда, используя признак Коши:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1} \cdot n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(2+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}{n \cdot 2^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{n+3} \cdot n^n}{(3n+1)^n(n+2)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \dfrac{\pi(2n+1)}{2(\pi n+3)}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^{n(n+5)}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2\sqrt{n}+3}{2\sqrt{n}+4}\right)^{n^{3/2}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+4}{n+5}\right)^{-n^2} \dfrac{3^n}{10^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+1}{3n+2} \cdot \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n^2} 4^{-n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(5+(-1)^n\right)^n}{n^2 \cdot 4^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(3(-1)^n+4\right)^n(2n-1)^{2n}}{(2n+1)^{2n}}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi^n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

III. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{3^n(n+1)!}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+2)!}{3^n \cdot n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{3^n n!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{2^n(n+1)!}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n(n+2)!}{n^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2^n+1)(2n)!}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^3 5^n}{(3n)!}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+3)(2n-1)!!}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{n}{2^{n+1}}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-2)!!}{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)} \cdot \left(\dfrac{7}{4}\right)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}$.

IV. Исследовать сходимость ряда, используя признак Раабе:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \dfrac{1}{n^2}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 n^2$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})\ldots(1+\sqrt{n+1})}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot \ldots \cdot (5n-3)}{9\cdot 14\cdot 19\cdot \ldots \cdot (5n+4)}\cdot\frac{1}{n}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!}{16^n\big((2n)!\big)^2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n+3)}\left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{n}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n!2^{n+1}\cdot n^2}$.

V. Исследовать сходимость ряда, применяя признак Гаусса:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot\sqrt{n}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+n\right)}{n\cdot n!}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n+2)}{(2n+3)!!}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cdot n!}{3(3+1)\ldots(3+n)}$. 6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n\cdot n!}$.

VI. Исследовать сходимость рядов, используя замену эквивалентными:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{10n+13}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n\sqrt{n+2}+1}{n\sqrt{n+2}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}\right)\sin\frac{1}{n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n-1}{n^2+1}}\operatorname{arctg}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-1\right)$.

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-4}\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{2}{n}}{\sqrt[n]{2}-1}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{n^2+1}}\operatorname{arctg}\frac{2n+1}{\sqrt[3]{3n+5}}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\arcsin\frac{\sqrt[5]{n}+2}{n+3}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n^2+2n+1}\cdot\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\operatorname{ch}\frac{2}{\sqrt{n}}-1}$. 12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^{2n}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{4n+3}\ln\operatorname{ch}\frac{2}{n}$. 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\big(\ln(n^2+1)-\ln n\big)$.

VII. Применяя теорему сравнения (признак сравнения), исследовать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n+\cos n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2(-1)^n+4^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sin \frac{1}{n^2}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n + \cos^2(2n+3)}{n^2+n+3}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2\cos^2 \frac{2\pi n}{3})e^n}{n^2 2n}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + \sin n}{n^2+2\ln n}$.

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sin(2\sqrt{n})}{n^2+3n\cos n+2}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5+4\cos(n\sqrt{2}+1)}{n^2-n\sin n+3\sin^2 n}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{2n^2+1}{3n+2}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-\frac{1}{4}}}$.

VIII. Используя интегральный признак (используя, при необходимости, и признак сравнения), исследовать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+20)\sqrt{\ln(n+1)}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+3)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n^3+1)}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)\ln^{3/2} n}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+2}{5n^3+7}\frac{3\ln n+4}{\ln^2 n+3\ln n+2}$.

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}+1}{n\sqrt{n}+4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln n}}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3n^3+2}\cdot\frac{!}{\sqrt{4+\ln n}}$.

IX. Применяя различные признаки, исследовать сходимость знакопостоянных рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+3}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,05(n^2+1)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{2n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n^2+4}\right)$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+n}{2^n+n^3}$. 6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3n)}{(n+1)!}\arcsin\frac{\pi}{2^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)}{n}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n+3}\cdot\left(\frac{5n+2}{5n+3}\right)^{2n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{3^n}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+7}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+9)}{2^n+n^4}$. 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot\ldots\cdot n^2}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+3)}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 11\cdot 21\cdot\ldots\cdot(10n-9)}{(2n-1)!}$. 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n2^n}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n-2)}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2\right), a > 0$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^2 n + 3}{2n+3}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n\ln n}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2+3n)}{7\cdot 10\cdot 13\cdot \ldots \cdot (7+3n)}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt[4]{n+4}}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\right)$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8\cdot 9\cdot \ldots \cdot (7+n)}{n!\cdot n^{10}}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\dfrac{1}{n}\right)$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot \ldots \cdot (3n-2)\cdot 2\cdot \ldots \cdot (3n+2)}{9^n n!(n+1)!}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n\sin\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n\sqrt{3}}\right)$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1\cdot \ldots \cdot (5n-4)}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\ln\dfrac{2n+1}{2n-1}$.

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{\sqrt{n^2-n}}{n}\right)$.

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{(4n-2)!!}$.

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2\ln n}$.

35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n + 2\sin(2n+3)}{n\sqrt{n}+1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+2)!}{\pi^n (n!)^2}$.

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{n-\ln n}$.

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}\left(\dfrac{3n^2+4}{2n^2+3}\right)^n$.

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{4n+1}}{(3n+2)^2\ln^2(2n+3)}$.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{n} - \ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\right)$.

42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\dfrac{\cos\frac{1}{n!}}{\sqrt[3]{n^4+4}}$.

43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\ln\dfrac{\sqrt{2n+1}+3}{\sqrt{2n+1}}$.

44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{5n^2+2}{3n-1}}$.

45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3}{(5n^2+9)\ln(n+2)}$.

46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{12\cdot \ldots \cdot (7n+5)}{(2n-1)!!}\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$.

47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n + \sin 2^n}{2^n + \cos n}$.

48. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\ln(3+2\ln n)}{\ln^3 n\sqrt[6]{n^6+3n^3+5}}$.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\left(e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\dfrac{1}{n}\right)^2}$.

50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! + 3n^2 + 5}{3^n + 4\ln n + 5n!}$.

51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!!(4n+1)}{(2n+3)!!}$.

52. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{2\ln n+1}{2\ln n+3}\right)^{n\ln 2n}$.

53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\sqrt[4]{n^2+2n+3}-\sqrt{n}}$.

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)!!}{(n+1)!}\sin\dfrac{3}{n2^n+3}$.

55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{2n}{2n+3}\right)^{3n-1}$.

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3\ln n+2}{3\ln n+4}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{3}{n^2+4}$.

X. Найти все значения параметра, при которых ряд сходится:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{(x-2)^{2n}}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}x^{2n+2}}{(4n-3)^2}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\ln x|^n}{n^2+2n+3}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+4}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{2n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^{2n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x^2+1)^n}{n^2\cdot 10^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2n^2+3}\left(\dfrac{4x+3}{4x+5}\right)^{2n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3n+2}\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right)^{2n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}\ln\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2+2}\right), \alpha>0$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{n+\alpha}}, \alpha>0$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n}\ln^\alpha\dfrac{2n+1}{2n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\sqrt[10]{\dfrac{n-1}{n+1}}\right)^\alpha$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{n^\alpha}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^\alpha\ln\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}$.

XI. Применяя признак Лейбница, доказать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n\sqrt{n}+4}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(n-2)}{n^2-n+1}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4+1}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n^2+n)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2-\ln n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\ln(2n+1)}{3+\sqrt{n}}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos\pi n}{n^2+\ln n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{2n+1}{n^2+2}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(n+2)}{n\ln n+2\ln 2}$.

XII. Применяя признаки Абеля или Дирихле, установить сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin\frac{\pi n}{8}}{n^2+2n+5}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}\cdot\dfrac{2n-3}{4n+5}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos\frac{3\pi n}{5}}{n+5\ln n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\dfrac{n^2+2n+3}{2n^2+4n+5}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n+3}\cdot\dfrac{\operatorname{arctg}(2n+3)}{2\ln n+3}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin 2n}{n^2+\ln n^2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{2n+1}\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2n+\cos 3n}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+5)}{(3n+4)\sqrt[5]{n+1}}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}}{\ln^2(3n+2)}$.

XIII. Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{2\pi n}{17}}{n^{0,01}+0,01}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{0,1}+\ln^2(2n+1)}\left(3-\dfrac{7}{n+2}\right)$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}\operatorname{arctg}\dfrac{2n-1}{2n+1}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\sin 5n+5\cos 3n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\ln n}{1+n}\sin\dfrac{\pi n}{4}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+\sqrt{n})}\left(3-\dfrac{2}{(n+\sqrt{n})^2}\right)$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2+3)}{(n+3)(2^n+3)}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos\frac{2}{n}}{\sqrt[n]{n+\ln n}}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{\sqrt{n}+2}\cdot\dfrac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2+\ln n)}{4+\ln^2 n}$.

XIV. Исследовать ряды на абсолютную и неабсолютную сходимость:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\frac{2}{n}}{n+\sqrt{n}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n^2+\sin n)}{2^n+\sin n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}\left(\dfrac{2+5n^2}{2+7n^2}\right)$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin 2n}{n\ln^2 n+5}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot (2n)!!}{n! + \operatorname{arctg} n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln(n+2)}{n+3}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2^n+1)}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{n+3}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+4} \cdot \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$.

9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln^2 n} \cdot \dfrac{n}{n+3}$.

10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln^2 n} \cdot \dfrac{n}{n^2+1}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2n}{\sqrt[100]{n}+1}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n^2+1)\ln^2(n^2+1)}$.

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n - \sqrt[3]{n}}$.

14. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4 + \sqrt[n]{\ln\ln n}}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n^2+n+1)}{n(\ln^3(3n+1)+3)}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \dfrac{2+(-1)^n}{n^2+n+1}$.

17. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\ln n]}}{\sqrt{n}} \ln \dfrac{n+1}{n-1}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} \cos \dfrac{1}{n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n^2 \cdot 2^n}{2n+3^n}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \dfrac{\pi n}{6}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg} \dfrac{\sin n}{n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n \cdot n!}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{n + 2\sin n}{n^3 + 2\cos n}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n \cdot 2^n$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)} \left(1 - \cos \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n \cdot \ln^2 n}{\sqrt{n}+2}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-5)^n + 3^n}{5^n (n+3)}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos^2 2n}{\sqrt{n}}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n} \ln^{24} n$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \sin^2 2n}{\sqrt[5]{n+2}}$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n!}{(2n-1)!!}$.

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{4n+3}}$.

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n + 3^n}{(n^3+n^4)(-4)^n}$.

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{n+2}{3n+2}\right)^n 3^n$.

35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$.

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{n\pi}{6}}{\ln^4(2n+1)}$.

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 6n}{2n + \sqrt{n}}$.

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) \sin \dfrac{\pi}{4n}$.

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\sqrt{n}+1\right) \operatorname{tg} \dfrac{5+\sqrt{n}}{n}$.

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n^2+n+3)}{n^2(\ln n + 3)}$.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(2n+1)}{(2n^2+1)\ln^2(2n+3)}$.

42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n\ln n + (-1)^n}{3n+2(-1)^n}$.

43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2n}{\sqrt{n}}\left(-1+\dfrac{3}{n+3}\right)$.

44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\cos^2 4n}{\sqrt{n}+1}$.

45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\sin n + \cos\left(\pi n + \frac{1}{n+1}\right)}{\sqrt{n}+n\sqrt[3]{n}}$.

46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(1-e^{\frac{\sqrt{n}}{\operatorname{sh} n}}\right)$.

47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n^2+1)\cos 2n}{2n^2+n+3}\ln\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n+3}$.

48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n+2}\cdot\dfrac{3n+5}{5n+3}$.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+\operatorname{arctg} n^2}\cdot\left(n+\dfrac{3n}{n^2+2n}\right)$.

50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\dfrac{2^n\cdot n^2\cdot n!}{(2n+3)!!}$.

51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{\ln^2 n+1}{n\ln n}$.

52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\dfrac{3^n(n+1)!}{(2n+1)!!}$.

53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 4n}{n+\ln 8n}$.

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\sin n}{\sqrt{2n+3}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}-1\right)$.

55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n}$.

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\dfrac{\operatorname{arcctg} n}{n}$.

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)\sin\dfrac{1}{n}$.

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{\pi(n^2+1)}{n}$.

59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\cos^2 2n}{\sqrt{n+1}}$.

60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$.

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{ne^{2nx}}$.

64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^n$.

65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)^2\ln^n(x+1)}$.

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x^2-1)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}$.

67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2+n+1}e^{-(x-2)n}$.

68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt[5]{n^4}+1}\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)^{n+1}$.

69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)^x$.

70. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin 2n\ln^x n}{n+1}$.

XV. Найти значения бесконечных произведений (при условии их сходимости):

1. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$.

3. $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n^2+n-6}{n^2+n-2}$.

4. $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2^n}\right)$.

5. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)$.

6. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\dfrac{x}{2^n}$.

7. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{2n-1}$. 8. $\prod\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n^2-4}{n^2-1}$. 9. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{2}{3n+n^2}\right)$.
10. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(-1)^n}{n}}$.

XVI. Исследовать сходимость бесконечных произведений:

1. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^3+3n+5}{2n^3+3}$. 2. $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n+4}{n+2}}$. 3. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{n+1}{n^2+1}$.
4. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{4n^2+n+3}}$. 5. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{n+1}}$. 6. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$.
7. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{a}{n}}}{1+\frac{a}{n}}, a>0$. 8. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{a^n}{3^n}\right)$. 9. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\mathrm{tg}\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right), \alpha>0$.
10. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+\sin 2n}{n}$.

XVII. Исследовать абсолютную и неабсолютную сходимость бесконечных произведений:

1. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{\cos 2n}{n}\right)$. 2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}\ln^2(n+1)}\right)$.
3. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n^2+1)^{\alpha}}\right)$. 4. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^n}{\ln^5 n}\right)$.
5. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-(-1)^n}$. 6. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^n\ln^2 n}{n}\right)$.
7. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^n\cos^2 n}{n\ln n}\right)$. 8. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^n\mathrm{arctg} n}{\sqrt{n}}\right)$.
9. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}\right)$. 10. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{\sin n+\cos n}{n^2+1}\right)$.

XVIII. Доказать сходимость двойных рядов:

1. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4+m^6}$. 2. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+m}}{nm}$.
3. $\sum\limits_{m,n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(4+n)^m}$. 4. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(4n-1)^{2m}}$.
5. $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(m+n)}{n^2m+5n}$.

6. ОТВЕТЫ

I. 1. 51/8. 2. 7/4. 3. 26/9. 4. 55/24. 5. 20/7. 6. -5/3. 7. 25/18. 8. -1/2. 9. -8/133. 10. $(48+4x)/(16-x^2)$, $|x|<4$. 11. 1/2. 12. 11/18. 13. 25/48. 14. 1. 15. 5/16. 16. 1/3. 17. 1/6. 18. 1/3. 19. 1/28. 20. -1/35. 21. 1/4. 22. 1/60. 23. 1/8. 24. 1. 25. 1. 26. $-\ln 2$. 27. $\ln 2$. 28. $-\ln 3$. 29. $\sin 2/2$. 30. $1-\sqrt{2}$.

II. 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 ряд сходится; 2, 3, 10, 12 ряд расходится.

III. 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ряд сходится; 2, 5, 12 ряд расходится.

IV. 1, 3, 5, 7, 8 ряд сходится; 2, 4, 6 ряд расходится.

V. 6 ряд сходится; $1-5$ ряд расходится.

VI. 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13 ряд сходится; 1, 5, 8, 9, 14 ряд расходится.

VII. 2, 3, 4, 6, 9, 10 ряд сходится; 1, 5, 7, 8 ряд расходится.

VIII. 4, 5, ряд сходится; $1-3$, $6-8$ ряд расходится.

IX. 9, 13, 14, 16, 17, $19-26$, 28, $31-34$, 36, $40-42$, 44, $47-49$, 52, 54, 56 ряд сходится; $1-8$, $10-12$, 15, 18, 27, 29, 30, 35, $37-39$, 43, 45, 46, 50, 51, 53, 55 ряд расходится.

X. 1. $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. 2. $x\in[-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2]$. 3. $x\in[e^{-1};e]$. 4. $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. 5. $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. 6. $x\in[-3;3]$. 7. $x\in(1;3)$. 8. $x\in[2;3]$. 9. $x\in[-1;+\infty)$. 10. $x\in(-3/2;1/4)$. 11. $\alpha>1$. 12. $\alpha>0$. 13. $\alpha\in(-1;+\infty)$. 14. $\alpha>1$. 15. $\alpha>0$. 16. $\alpha<1$.

XIII. $1-7$, 9, 10 ряд сходится; 8 ряд расходится.

XIV. 1, 2, 4, 7, 10, $15-17$, 19,21, 23, 25, 29, 31, 33, 35, 41, $45-47$, 54, 56, 57 ряд сходится абсолютно; 3, 6, 8, 9, 11, 13,18, 20, 22, 26, 27, 28, 30, 32, $36-38$, 40, 43, 44, 48, 49, 51, 53, 55, 58, 59 ряд сходится неабсолютно; 5, 12, 14, 24, 34,39, 42, 50, 52, 60 ряд расходится. 61. Ряд сходится абсолютно при $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, сходится неабсолютно при $x=-1$, расходится при $x=1$. 62. $x\neq-1$. Ряд сходится абсолютно при $x>0$, сходится неабсолютно при $x=0$, расходится при $x<0$. 63. Ряд сходится абсолютно при $x>0$, сходится неабсолютно при $x=0$, расходится при $x<0$. 64. $x\neq1$. Ряд сходится абсолютно при $x\in(-2/7;2/11)$, расходится при $x \in \mathbb{R} \setminus (-2/7; 2/11)$. 65. $x > -1$, $x \neq 0$. Ряд сходится абсолютно при $x \in (-1; -1 + e^{-1}) \cup (e - 1; +\infty)$, сходится неабсолютно при $x = -1 + e^{-1}$, расходится при $x \in (-1 + e^{-1}; 0) \cup (0; e - 1]$. 66. Ряд сходится абсолютно при $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, сходится неабсолютно при $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, расходится при $x \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. 67. Ряд сходится абсолютно при $x > 2$, сходится неабсолютно при $x = 2$, расходится при $x < 2$. 68. Ряд сходится абсолютно при $x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$, расходится при $|x| \geq \sqrt{2}$, $x = 0$. 69. Ряд сходится абсолютно при $x > 1/2$, сходится неабсолютно при $x \in (0; 1/2]$, расходится при $x \leq 0$. 70. Ряд сходится абсолютно при $x < -1$, сходится неабсолютно при $x \geq -1$.

XV. 1. 1/2. 2. 2/3. 3. 1/5. 4. 3/2. 5. $\pi/4$. 6. $\operatorname{sh} x/x$ при $x \neq 0$; при $x = 0$ произведение расходится. 7. Произведение расходится. 8. 1/4. 9. 3. 10. $1/2^{\ln 2}$.

XVI. 1, 3, 5 − 7, 10 произведение сходится; 2, 4 произведение расходится. 8. Произведение сходится при $|a| < 3$ и расходится при $|a| \geq 3$. 9. Произведение сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$.

XVII. 1, 2, 6, 7, 9 произведение сходится неабсолютно; 10 произведение сходится абсолютно; 4, 5, 8 произведение расходится. 3. Произведение сходится абсолютно при $\alpha > 1/2$, сходится неабсолютно при $1/4 < \alpha \leq 1/2$, расходится при $\alpha \leq 1/4$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Кастрица Олег Адамович
Мазаник Сергей Алексеевич
Наумович Адольф Федорович
Наумович Нил Федорович

Числовые ряды

Пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *О. А. Кастрица*

Подписано к печати 12.10.2012. Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,26. Уч.-изд. л. 2,62.
Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
ЛИ №02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4, 22030, Минск.