БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра высшей математики

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Учебные материалы для студентов факультета прикладной математики и информатики

В пяти частях

Часть 3

ЛИНЕЙНЫЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

МИНСК
2014

УДК [514+512](075.8)
ББК 22.14+22.15я73-1
Р17

Рекомендовано советом
факультета прикладной математики и информатики
29 октября 2013 г., протокол № 2

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент *В. И. Чесалин*

Размыслович, Г. П.

Р17 Геометрия и алгебра : учебные материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 3. Линейные и билинейные отображения векторных пространств /Г. П. Размыслович. – Минск : БГУ, 2014. – 71 с.

Излагаются основные понятия отображений, линейных отображений и линейных преобразований векторных пространств, билинейные и квадратичные формы.

Предназначены для студентов факультета прикладной математики и информатики, механико-математического факультета, а также может представлять интерес и для студентов технических вузов, где преподается курс высшей математики.

УДК [514+512] (075.8)
ББК 22.14+22.15я73-1

Предисловие

Данное учебное издание является третьей частью цикла учебных пособий по курсу "Геометрия и алгебра" , читаемого для студентов ФПМИ БГУ и соответствует всем типовым программам этого курса для высших учебных заведений по специальностям: 1-31 03 03 "Прикладная математика" ; 1-31 03 04 "Информатика" ; 1-31 03 05 "Актуарная математика" ; 1-31 03 06-01 "Экономическая кибернетика ; 1-98 01 01-01 "Компьютерная безопасность" (утвержденны Министерством образования Республики Беларусь от 24.09.2008 г.), а также учебной программе Учреждения образования "Белорусский государственный университет"по учебной дисциплине "Геометрия и алгебра"для указанных выше специальностей (утвержденная 17.10.2013 г.).

Основу излагаемого материала составляют учебные пособия "Геометрия и алгебра"и "Сборник задач по геометрии и алгебре" (авторы: Размыслович Г.П., Феденя М.М., Ширяев В.М.).

Это пособие состоит из семи глав, содержащих теоретический материал, примеры решения задач и цикл задач для самостоятельного решения с ответами.

Отметим, что в данном издании используются следующие обозначения: ♦ — начало доказательства утверждения, ■ — конец доказательства, $\Rightarrow$ — необходимость или знак импликации ("следует"), $\Leftarrow$ — достаточность, $\Leftrightarrow$ — необходимость и достаточность, равносильность, $\exists$ — квантор существования ("существует"), $\forall$ — квантор общности ("для любого"), $\in$ — принадлежность, $\subset$ — включение множеств, $\times$ — декартово произведение множеств.

1. ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть X и Y — два произвольных непустых множества.

Определение 1.1. Соответствие, сопоставляющее каждому элементу из множества X единственный элемент из множества Y, называется *отображением множества* X в множество Y.

Обозначим отображение множества X в множество Y буквой f и, чтобы подчеркнуть, что f — это отображение X в Y, будем записывать

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{или} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Отображение f называют также *функцией*, заданной на множестве X со значениями во множестве Y. Термин функция чаще всего употребляют для отображений числовых множеств в числовые множества.

Определение 1.2. Элемент $y \in Y$, соответствующий элементу $x \in X$ при отображении f, называется *образом элемента* x и обозначается $f(x)$, а элемент x в этом случае называется *прообразом элемента* y.

В связи с этим для обозначения отображения употребляют также записи

$$x \longmapsto f(x) \quad \text{или} \quad y = f(x).$$

Возможно также употребление записи, при которой в явном виде указывается соответствие между элементами множеств X и Y:

$$\begin{aligned} f:\ & X \longrightarrow Y \\ & x \longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Определение 1.3. Два отображения $f : X \to Y$ и $\varphi : X \to Y$ называются равными, если результаты их действия одинаковы, т.е. для любого элемента $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = \varphi(x)$.

Равенство отображений f и φ обозначается $f = \varphi$.

Пусть $f : X \longrightarrow Y$, а y — некоторый фиксированный элемент из Y.

Определение 1.4. Множество (возможно, пустое) $\{x \in X \mid y = f(x)\}$ всех элементов из X, для которых y является образом при отображении f, называется *полным прообразом элемента* y при отображении f и обозначается $f^{-1}(y)$.

Множество X называют *множеством отправления или множеством определения отображения* f и обычно обозначают $D(f)$ или

$Domf$; подмножество Y^* множества Y называют *множеством прибытия или множеством значений отображения* f, если $Y^* = \{y \in \in Y \mid y = f(x),\ x \in X\}$, множество значений отображения f обычно обозначают $E(f)$.

Определение 1.5. *Прообразом подмножества* $Y' \subset Y$ называется множество всех $x \in X$, для которых $f(x) \in Y'$.

Прообраз подмножества Y' обозначается $f^{-1}(Y')$, т.е. $f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$.

Определение 1.6. *Образом подмножества* $X' \subset X$ называется множество всех значений отображения f на всех элементах множества X'.

Образ подмножества X' обозначается $f(X')$, т.е. $f(X') = = \{f(x) \mid x \in X'\}$.

Определение 1.7. *Композицией* двух отображений $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ называют отображение $h : X \longrightarrow Z$, определяемое соотношением $h(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$.

Композиция отображений обычно обозначается $g \circ f$. Очевидно, что композиция (как операция над отображениями) ассоциативна, т.е. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, поэтому при записи композиции нескольких подряд идущих отображений можно опускать скобки. В тех случаях, когда вместо термина отображение используют термин функция, композицию функций называют также *сложной функцией*.

Определение 1.8. Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется *инъективным* (*инъекцией*, *вложением*, *отображением в*), если оно переводит разные элементы в разные, т.е. если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Определение 1.9. Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется *сюръективным* (*сюръекцией*, *наложением*, *отображением на*), если множество его значений совпадает со множеством Y, т.е. если $f(X) = Y$.

Определение 1.10. Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется *биективным* (*биекцией*, *взаимно однозначным*), если оно одновременно и инъективно, и сюръективно.

Замечание 1.1. Если f — биекция, то существует *обратное* отображение f^{-1}, для которого $f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$. Заметим, что для биективного отображения f равенства $f^{-1}(f(x)) = x$ и $f(f^{-1}(y)) = y$ выполнены для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Примеры отображений

Пример 1.1. Рассмотрим четыре отображения:

$$1)\ f_1: \quad \begin{array}{l} R \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto f_1(x) = \sin x; \end{array} \qquad 2)\ f_2: \quad \begin{array}{l} [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow R, \\ x \longmapsto f_2(x) = \sin x; \end{array}$$

$$3)\ f_3: \quad \begin{array}{l} R \longrightarrow [-1, 1], \\ x \longmapsto f_3(x) = \sin x; \end{array} \qquad 4)\ f_4: \quad \begin{array}{l} [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1], \\ x \longmapsto f_4(x) = \sin x. \end{array}$$

Отображение f_1 не является ни инъективным, ни сюръективным, f_2 — иньективно, но не сюръективно, f_3 — сюръективно, но не инъективно, а отображение f_4 — биективно. Только для последнего отображения существует обратное отображение

$$f_4^{-1}: \quad \begin{array}{l} [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2], \\ x \longmapsto f_4^{-1}(x) = \arcsin x \end{array}$$

Пример 1.2. Отображение $f : R \times R \to \Pi$, которое каждой упорядоченной паре действительных чисел ставится в соответствие точка на плоскости. Это отображение является биективным отображением.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

2.1. Определение. Примеры

Пусть P — некоторое поле и V, V' — два векторных (линейных) пространства над полем P.

Определение 2.1. Отображение $f : V \to V'$ называется *линейным*, если для любых двух векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ и любого скаляра $\lambda \in P$ справедливы равенства:

1) $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2)$;

2) $f(\lambda \boldsymbol{x}_1) = \lambda f(\boldsymbol{x}_1)$.

Система условий 1), 2) равносильна, очевидно, условию, что

$$f(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{x}_2),$$

для любых векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ пространства V и любых скаляров $\lambda_1, \lambda_2 \in P$.

Примеры линейных отображений

Пример 2.1. Тождественное отображение $e : V \to V$ пространства V в себя, определяемое формулой $e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$.

Пример 2.2. Нулевое отображение $0 : V \to \{\mathbf{0}\}$, определяемое формулой $0(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.

Пример 2.3. В пространстве V_3 свободных векторов фиксируем какой-либо базис. Тогда любому вектору $\boldsymbol{x} \in V_3$ можно поставить в соответствие координатный столбец $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $X \in R_{3,1}$. И, следовательно, формулой $f(\boldsymbol{x}) = X$ определяется линейное отображение $f : V_3 \to R_{3,1}$.

Пример 2.4. Формулой $f(\boldsymbol{x}) = x_1 + ix_2$, $\boldsymbol{x} \in V_3$, $\boldsymbol{x} \to X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in R_{3,1}$, определяется линейное отображение пространства V_3 в пространство комплексных чисел над полем R.

2.2. Свойства линейных отображений

1°. Если $f : V \to V'$, $\varphi : V' \to V''$ – линейные отображения, то и отображение $\varphi \circ f : V \to V''$, определяемое формулой

$$(\varphi \circ f)(\boldsymbol{x}) = \varphi(f(\boldsymbol{x})),\ \forall \boldsymbol{x} \in V,$$

является линейным.

♦ Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, $\alpha, \beta \in P$. Тогда $(\varphi \circ f)(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \varphi(f(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})) = \varphi(\alpha f(\boldsymbol{a}) + \beta f(\boldsymbol{b})) = \alpha\varphi(f(\boldsymbol{a})) + \beta\varphi(f(\boldsymbol{b})) = \alpha(\varphi \circ f)(\boldsymbol{a}) + \beta(\varphi \circ f)(\boldsymbol{b})$. ■

2°. Пусть $V = V_n$ и V' – два векторных пространства над полем P и система векторов

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \tag{2.1}$$

– базис пространства V, а

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \tag{2.2}$$

– произвольная система векторов пространства V'. Тогда существует единственное линейное отображение $f : V \to V'$, такое что

$$f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i,\ i = \overline{1, n}. \tag{2.3}$$

♦ Пусть $\boldsymbol{x}$ – произвольный вектор пространства V_n. Тогда

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \tag{2.4}$$

где $x_i,\ i = \overline{1, n}$, – координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе (2.1). Определим отображение f формулой

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n. \tag{2.5}$$

Нетрудно видеть, что $f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i$. Покажем, что f — линейное отображение. Для этого, наряду с вектором $\boldsymbol{x}$ рассмотрим вектор $\boldsymbol{y} \in V$ и λ, μ — некоторые скаляры из поля P. Разложим вектор $\boldsymbol{y}$ по базису (2.1), получим

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n. \tag{2.6}$$

Тогда вектор $\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}$ имеет координаты $\lambda x_i + \mu y_i$, $i = \overline{1, n}$, и, значит,

$$f(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)\boldsymbol{a}_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i + \mu\sum_{i=1}^{n} y_i\boldsymbol{a}_i = \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\boldsymbol{y}).$$

Таким образом, f — линейное отображение.

Докажем единственность отображения f, определяемого формулой (2.5).

От противного. Пусть существует еще одно линейное отображение $\varphi : V \to V'$ — такое, что $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i$, $i = \overline{1, n}$. Учитывая, что вектор $\boldsymbol{x}$ имеет в базисе (2.1) координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеем

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i = f(\boldsymbol{x}),\ \forall\boldsymbol{x} \in V.$$

Поскольку это равенство выполняется для любого вектора $\boldsymbol{x} \in V$, то, на основании определения равенства отображений, следует, что $\varphi = f$. ■

3°. Если $f : V \to V'$ — линейное отображение, а $\mathbf{0}_V$, $\mathbf{0}_{V'}$ — нулевые векторы пространств V и V' соответственно, то

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_{V'}.$$

♦ $f(\mathbf{0}_V) = f(0 \cdot \boldsymbol{a}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}_{V'}, \forall\boldsymbol{a} \in V$. ■

4°. Если $f : V \to V'$ — линейное отображение и $\boldsymbol{a} \in V$, то

$$f(-\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a}).$$

♦ $f(-\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}) = f(-1)\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}) = f((-1)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}) = f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_{V'}$. Отсюда следует, что вектор $f(-\boldsymbol{a})$ является противоположным вектору $f(\boldsymbol{a})$, а, следовательно, $f(-\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$, ■

5°. Пусть $f : V \to V'$ — линейное отображение. Если

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) \tag{2.7}$$

— линейно зависимая система векторов пространства V, то линейно зависима и система векторов

$$(f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \ldots, f(\boldsymbol{a}_k)) \tag{2.8}$$

пространства V'. При этом сохраняются все линейные соотношения между векторами. Более точно, если

$$\boldsymbol{b} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k, \tag{2.9}$$

для некоторых скаляров $\alpha_i \in P$, $i = \overline{1,k}$, то

$$f(\boldsymbol{b}) = \alpha_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{a}_2) + \ldots + \alpha_k f(\boldsymbol{a}_k). \tag{2.10}$$

♦ Поскольку система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ линейно зависима, то существуют скаляры $\beta_i \in P$, $i = \overline{1,k}$, не все одновременно равные нулю, и такие, что выполняется равенство

$$\beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_k \boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}_V.$$

Отсюда

$$f(\beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_k \boldsymbol{a}_k) = f(\mathbf{0}_V) \Leftrightarrow$$
$$\beta_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \beta_2 f(\boldsymbol{a}_2) + \ldots + \beta_k f(\boldsymbol{a}_k) = \mathbf{0}_{V'}.$$

Следовательно, система векторов (2.8) линейно зависима.

Доказательство того, что из равенства (2.9) следует (2.10), производится аналогичным образом. ■

Замечание 2.1. Отметим, что если система векторов (2.7) линейно независима, то отсюда еще не следует, что и система (2.8) линейно независима.

6°. Если $f : V \to V'$ — линейное отображение и Q — подпространство пространства V, то $f(Q)$ — подпространство пространства V' и $\dim f(Q) \le \dim Q$. В частности, $f(V)$ — подпространство пространства V' и $\dim f(V) \le \dim V$.

♦ Пусть $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ произвольные векторы из множества $f(Q)$, и α, β произвольные скаляры из поля P. Так как $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in f(\boldsymbol{a})$, то найдутся векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in Q$ такие, что $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{d}$. Но тогда $f(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha f(\boldsymbol{a}) + \beta f(\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{d}$. Так как $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \in Q$, то $f(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{d} \in f(Q)$, откуда на основании критерия подпространства следует, что $f(Q)$ — подпространство пространства V'.

Пусть $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$ — базис подпространства Q, тогда $Q = L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$, а, следовательно, $f(Q) = L(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_k))$. Если система $(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_k))$ линейно независима, то $\dim f(Q) = k = \dim Q$, в противном случае $\dim f(Q) \le \dim Q$. ■

3. ИЗОМОРФИЗМ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим два векторных пространства V и V' над полем P.

Определение 3.1. Биективное линейное отображение пространства V в пространство V' называется *изоморфным отображением* пространства V в пространство V'.

Если такое изоморфное отображение существует, то говорят, что *пространство V изоморфно пространству V'*, и пишут $V \cong V'$.

Свойства изоморфизма.

1°. $V \cong V$;

2°. Если $V \cong V'$, то $V' \cong V$;

3°. Если $V \cong V'$ и $V' \cong V''$, то $V \cong V''$.

Из указанных свойств следует, что множество всех линейных пространств над одним и тем же полем P разбивается на классы изоморфных между собой пространств.

4°. При изоморфизме линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую систему векторов.

♦ Пусть

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) \tag{3.1}$$

— линейно независимая система векторов в пространстве V, а f — изоморфное отображение пространства V в пространство V'.

Покажем, что система векторов $(f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_k))$ линейно независима в пространстве V'.

От противного. Пусть $(f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_k))$ — линейно зависимая система векторов в пространстве V'. Тогда существуют $\alpha_i \in P$, $i = \overline{1, k}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 > 0$ и такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\boldsymbol{a}_i) = \mathbf{0}_{V'}$. Так как отображение f линейно, то из равенства $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\boldsymbol{a}_i) = \mathbf{0}_{V'}$ следует, что выполняется и равенство

$$f\Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i\Big) = \mathbf{0}_{V'}. \tag{3.2}$$

Учитывая, что f — биективное отображение, то для него существует обратное биективное отображение f^{-1} пространства V' в пространство V.

Применим f^{-1} к равенству (3.2). Имеем

$$f^{-1}(f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i)) = f^{-1}(\mathbf{0}_{V'}) \Leftrightarrow e(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i) = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}_V, \quad (3.3)$$

причем $\sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 > 0$. Из (3.3) следует, что система (3.1) линейно зависима. Противоречие.

Следовательно, система векторов $(f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_k))$ линейно независима в пространстве V'.■

Следствие 3.1. При изоморфизме базис переходит в базис.

Следствие 3.2. Размерности изоморфных пространств равны.

Теорема 3.1. (критерий изоморфизма векторных пространств). Два векторных пространства над одним и тем же полем P изоморфны тогда и только тогда, когда равны их размерности.

♦ Необходимость. Очевидным образом следует из следствия 3.2.

Достаточность. Пусть размерности пространств V и V' равны, т.е. $\dim V = \dim V' = n$ и система векторов

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \tag{3.4}$$

– базис пространства V, а система векторов

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) \tag{3.5}$$

– базис пространства V'.

Рассмотрим некоторый вектор $\boldsymbol{x} \in V$. Разложим его по базису (3.4)

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n,$$

где $x_i \in P, i = \overline{1, n}$.

Тогда на основании свойств линейных отображений векторных пространств, существует единственное линейное отображение $f : V \to V'$, определяемое формулой

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{e}'_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}'_n \tag{3.6}$$

и такое, что $f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}'_i, i = \overline{1, n}$.

Покажем, что отображение f, определяемое формулой (3.6), является изоморфным отображением. Докажем первоначально, что f – инъекция. Наряду с вектором $\boldsymbol{x} \in V$ рассмотрим вектор $\boldsymbol{y} \in V$ $(\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x})$ и разложим его по базису (3.4):

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n, \; y_i \in P, \; i = \overline{1, n}.$$

Так как $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$, то их координаты различны. А тогда из (3.6) следует, что $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{y})$.

Докажем, что f — сюръекция. Действительно, рассмотрим некоторый вектор $\boldsymbol{y}' \in V'$. Разложим $\boldsymbol{y}'$ по базису (3.5) имеем $\boldsymbol{y} = y_1'\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n'\boldsymbol{e}_n$

$$\boldsymbol{y}' = y_1'\boldsymbol{e}_1' + y_2'\boldsymbol{e}_2' + \ldots + y_n'\boldsymbol{e}_n',$$

где $y_i' \in P, i = \overline{1,n}$. Но тогда ясно, что вектор $y_1' = \boldsymbol{e}_1 + y_2'\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n'\boldsymbol{e}_n \in V$ причем $f(y_1'\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n'\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{y}'$. ■

Следствие 3.3. При фиксированном поле P и размерности n существует единственное n-мерное, с точностью до изоморфизма, векторное пространство над полем P. А именно, любое n-мерное векторное пространство над полем R изоморфно арифметическому пространству $R_{n,1}$ — столбцов длины n над полем R или арифметическому пространству $R_{1,n}$ — строк длины n над полем R. А всякое n-мерное векторное пространство над полем C изоморфно арифметическому пространству $C_{n,1}$ либо $C_{1,n}$ над полем C.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

4.1. Определение и примеры

Пусть P — некоторое поле и V — векторное пространство над полем P.

Определение 4.1. Линейное отображение f пространства V в себя, т.е. $f : V \to V$, называется *линейным преобразованием (линейным оператором, эндоморфизмом)* пространства V.

Примеры линейных преобразований.

Пример 4.1. Нулевое линейное отображение $0 : V \to V$, определяемое для каждого вектора $\boldsymbol{a}$ пространства V формулой $0(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

Пример 4.2. Пусть λ — некоторый скаляр из поля P. Определим образ каждого вектора $\boldsymbol{x}$ пространства V формулой $f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$. Тогда f — линейное преобразование пространства V, которое называется *оператором подобия*.

Отметим, что линейность отображения f следует из соотношений

$$f(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \lambda\alpha\boldsymbol{a} + \lambda\beta\boldsymbol{b} = \alpha f(\boldsymbol{a}) + \beta f(\boldsymbol{b}),\ \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V,\ \alpha, \beta \in P.$$

Пример 4.3. В пространстве V_3 геометрических векторов над полем R поворот всех векторов на угол α вокруг одной из осей, проектирование параллельно одной из осей являются линейными преобразованиями пространства V_3.

Пример 4.4. В пространстве $P[x]$ (пространство всех многочленов от переменной x над полем P) отображение $f : P[x] \to P[x]$, определяемое формулой $f(\varphi(x)) = \varphi'(x)$, $\varphi(x) \in P[x]$, является линейным преобразованием.

Пример 4.5. Рассмотрим $P_{n,n}$ – пространство квадратных матриц порядка n над полем P.

Отображение $f : P_{n,n} \to P_{n,n}$ определяемое формулой $f(A) = A^T$, является линейным преобразованием этого векторного пространства.

4.2. Матрица линейного преобразования

Пусть f – линейное преобразование пространства V_n, а

$$\mathbf{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \tag{4.1}$$

– базис этого пространства. Найдем образы базисных векторов системы (4.1) при отображении f, т.е.

$$f(\mathbf{E}) = (f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)), \tag{4.2}$$

и разложим их по базису (4.1). Имеем

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n, \\ f(\boldsymbol{e}_2) = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\boldsymbol{e}_n) = a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n,\ a_{ij} \in P,\ i,j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Составим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

столбцами которой служат координатные столбцы векторов системы (4.2) в базисе (4.1).

Определение 4.2. Матрица, составленная из координатных столбцов образов базисных векторов при линейном преобразовании f пространства V_n, записанных в том же базисе пространства, называется *матрицей линейного преобразования* f в рассматриваемом базисе пространства V_n.

Таким образом, каждому линейному преобразованию пространства V_n в заданном базисе соответствует некоторая квадратная матрица порядка n. Справедливо и обратное: всякой матрице порядка n над полем P при фиксированном базисе пространства V_n можно поставить в соответствие некоторое линейное преобразование этого пространства.

Пусть $\boldsymbol{x}$ – произвольный вектор пространства $V_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты этого вектора в базисе (4.1), т.е. имеет место разложение

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n,\ x_i \in P,\ i = \overline{1, n}, \tag{4.5}$$

а координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вектора $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ в том же базисе (4.1).

Тогда, с одной стороны, имеем

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n. \tag{4.6}$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered} \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \\ + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) = x_1(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n) + \\ + x_2(a_{12}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n) + \ldots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n) = \\ = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{e}_1 + \\ + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\boldsymbol{e}_2 + \\ + \ldots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)\boldsymbol{e}_n. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Сравнивая (4.6) и (4.7), получаем

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{4.8}$$

Соотношения (4.8) выражают зависимость между координатами образа и прообраза одного и того же вектора при линейном преобразовании f.

Отметим, что систему соотношений (4.8) можно записать в матричном виде

$$Y = AX, \tag{4.9}$$

где $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in P_{n,1}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in P_{n,1},\ X, Y \in P_{n,1}$ – координатные столбцы соответственно векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, в базисе (4.1), а A – матрица линейного преобразования f записанная в том же базисе (4.1).

Примеры матриц линейных преобразований

Пример 4.6. Нулевое линейное преобразование $0 : V_n \to V_n$, определяемое формулой $0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. Пусть $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ – некоторый базис V_n. Тогда $0(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{0}$, $\forall i = \overline{1,n}$. По свойствам векторных пространств $\boldsymbol{0} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{e}_n$. Следовательно, столбцами матрицы A нулевого линейного преобразования являются нулевые координатные столбцы $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Отсюда следует, что $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$, т.е. матрица нулевого линейного преобразования пространства V_n в любом базисе этого пространства является нулевой матрицей.

Пример 4.7. Тождественное преобразование $e : V_n \to V_n$, определяемое формулой $e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Нетрудно видеть, что $A = E_n$ – единичная матрица порядка n.

Пример 4.8. Линейное преобразование пространства V_n, определяемое формулой $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ называется оператором подобия. Матрица этого оператора имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda E_n.$$

4.3. Действия над линейными преобразованиями

Рассмотрим векторное пространство V_n над полем P. Обозначим множество всех линейных преобразований этого пространства символом $\mathrm{Hom}(V_n, V_n)$.

Пусть $f, \varphi \in \mathrm{Hom}(V_n, V_n)$.

Определение 4.3. Два линейных преобразования f и φ называются равными и это обозначается $f = \varphi$, если $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x} \in V_n$.

Пусть далее преобразование f имеет в базисе (4.1) матрицу $A = (a_{ij},\ i,j = \overline{1,n})$, а преобразование φ имеет матрицу $B = (b_{ij},\ i,j = \overline{1,n})$.

Теорема 4.1. Для того чтобы два линейных преобразования были равны, необходимо и достаточно, чтобы в заданном базисе были равны их матрицы.

⧫ Необходимость. Пусть $f = \varphi$. Тогда на основании равенства преобразований выполняется равенство $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x} \in V_n$. В частности, $f(\boldsymbol{e}_i) = \varphi(\boldsymbol{e}_i)$, т.е. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} \boldsymbol{e}_j = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ji} \boldsymbol{e}_j$, для любого i, $1 \le i \le n$.

Отсюда следует, что $\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ji}-b_{ji})\boldsymbol{e}_j=\mathbf{0}$. Так как система векторов (4.1) – базис, то $a_{ij}=b_{ij}$ для любых $i,j=\overline{1,n}$, т.е. $A=B$.

Достаточность. Следует из соотношения (4.7), которое записывается для $f(\boldsymbol{x})$ и $\varphi(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x}\in V_n$, и равенства матриц A и B.■

Определение 4.4. *Суммой двух линейных преобразований* f и $\varphi\in\mathrm{Hom}(V_n,V_n)$ называется отображение $\psi:V_n\to V_n$, определяемое формулой $\psi(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x}\in V_n$.

Сумма линейных преобразований f и φ обозначается $f+\varphi$.

Теорема 4.2. Сумма двух линейных преобразований f и φ есть линейное преобразование. Матрица суммы линейных преобразований в некотором базисе пространств V_n равна сумме матриц этих слагаемых, записанных в том же базисе.

♦ Докажем, что $f+\varphi\in\mathrm{Hom}(V_n,V_n)$. Пусть $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V_n$, $\alpha,\beta\in P$. Тогда

$$(f+\varphi)(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=f(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})+\varphi(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=\alpha f(\boldsymbol{a})+\beta f(\boldsymbol{b})+\alpha\varphi(\boldsymbol{a})+\beta\varphi(\boldsymbol{b})=$$

$$=\alpha(\varphi+f)(\boldsymbol{a})+\beta(\varphi+f)(\boldsymbol{b}).$$

Докажем вторую часть теоремы. Действительно, имеем

$$(f+\varphi)(\boldsymbol{e}_i)=f(\boldsymbol{e}_i)+\varphi(\boldsymbol{e}_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\boldsymbol{e}_j+\sum_{j=1}^{n}b_{ji}\boldsymbol{e}_j=\sum_{j=1}^{n}(a_{ji}+b_{ji})\boldsymbol{e}_j=\sum_{j=1}^{n}c_{ji}\boldsymbol{e}_j,$$

где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ и $c_{ij},\ i,j=\overline{1,n}$, – элементы матрицы $C=A+B$.■

Определение 4.5. *Произведением линейного преобразования* f *на скаляр* $\lambda\in P$ называется отображение $\psi:V_n\to V_n$, определяемое формулой

$$\psi(\boldsymbol{x})=\lambda\cdot f(\boldsymbol{x}),\ \forall\boldsymbol{x}\in V_n.$$

Это произведение обозначается λf.

Теорема 4.3. . Произведение линейного преобразования f на скаляр $\lambda\in P$ есть линейное преобразование. Матрицей этого преобразования является матрица λA, где A – матрица преобразования f в некотором базисе пространства V_n.

♦ Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.2. ■

Определение 4.6. *Произведением линейного преобразования* f *на линейное преобразование* φ называется отображение $\psi:V_n\to V_n$, определяемое формулой

$$\psi(\boldsymbol{x}) = f[\varphi(\boldsymbol{x})],\ \forall \boldsymbol{x} \in V_n.$$

Произведение преобразования f, на преобразование φ обозначается $f\varphi$ или $f \circ \varphi$.

Теорема 4.4. Произведение двух линейных преобразований является линейным преобразованием. Матрица произведения линейных преобразований в некотором базисе равна произведению матриц сомножителей записанных в том же базисе.

♦ Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.2. ■

Теорема 4.5. Множество всех линейных преобразований векторного пространства V над полем P образует n^2-мерное векторное пространство над полем P изоморфное пространству $P_{n,n}$ – квадратных матриц порядка n.

4.4. Связь между матрицами линейного преобразования, записанных в разных базисах пространства

Пусть f – линейное преобразование пространства V_n, а A и B – его матрицы соответственно в базисах

$$\mathbf{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n), \tag{4.10}$$

$$\mathbf{E}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n). \tag{4.11}$$

Как связаны между собой матрицы A и B, учитывая, что связь между базисами (4.10) и (4.11) предполагается заданной, т.е. задана матрица S – матрица перехода от базиса (4.10) к базису (4.11)?

Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ линейного пространства V_n имеет координатный столбец $X \in P_{n,1}$, в базисе (4.10) и координатный столбец $X' \in P_{n,1}$ в базисе (4.11). Пусть далее вектор $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, который является образом вектора $\boldsymbol{x}$ при отображении f, имеет координатный столбец $Y \in P_{n,1}$ в базисе (4.10), а в базисе (4.11) – $Y' \in P_{n,1}$.. Тогда, исходя из соотношения (4.9), имеем равенства

$$Y = AX, \tag{4.12}$$

$$Y' = BX'. \tag{4.13}$$

Далее, учитывая, что S — матрица перехода от базиса (4.10) к базису (4.11), имеем

$$X = SX', \tag{4.14}$$

$$Y = SY'. \tag{4.15}$$

Умножив равенство (4.14) слева на матрицу A, имеем$AX = ASX'$, и, учитывая (4.12) и (4.15), имеем $SY' = ASX'$.

$$Y' = (S^{-1}AS)X'.$$

Сравнивая последнее равенство с (4.13), имеем

$$B = S^{-1}AS. \tag{4.16}$$

Таким образом, если A и B — матрицы преобразования f в базисах (4.10) и (4.11) — соответственно и S — матрица перехода от базиса (4.10) к базису (4.11), то матрицы A и B связаны соотношением (4.16).

Верно и обратное. Пусть A — матрица линейного преобразования f в базисе (4.10), S — произвольная невырожденная матрица и матрица B такова, что $B = S^{-1}AS$, тогда если (4.11) — такой базис пространства V_n, что S — матрица перехода от (4.10) к (4.11), то матрица B — матрица преобразования f в базисе (4.11).

Таким образом верна

Теорема 4.6. Две квадратные матрицы A и B n-го порядка являются матрицами некоторого линейного преобразования f пространства V_n тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица S n-го порядка такая, что выполняется равенство $B = S^{-1}AS$.

Следствие 4.1. Если линейное преобразование имеет в некотором базисе пространства невырожденную матрицу, то и в любом другом базисе этого пространства матрица этого преобразования является невырожденной.

4.5. Подобные матрицы

Определение 4.7. Говорят, что квадратная матрица $B \in P_{n,n}$ *подобна матрице* $A \in P_{n,n}$, если существует невырожденная матрица $S \in P_{n,n}$ такая, что

$$B = S^{-1}AS.$$

Матрица S в этом случае называется *трансформирующей матрицей*, т.е. матрицей, переводящей (трансформирующей) матрицу A в матрицу B.

Замечание 4.1. Исходя из теоремы 4.6 две матрицы A и B являются матрицами одного и того же линейного преобразования тогда и только тогда, когда они подобны.

Замечание 4.2. Существуют специальные методы построения трансформирующей матрицы S, переводящей матрицу A в матрицу B. Одним из самых простых является метод неопределенных коэффициентов. Суть этого метода состоит в решении матричного уравнения $SB = AS$ при условии, что элементы матрицы $S = (s_{ij},\ i, j = \overline{1, n})$ определяются после перемножения слева и справа соответствующих матриц и сравнения их друг с другом. В результате получаем систему n^2 линейных однородных уравнений относительно переменных s_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$. Отметим, что матрица S определяется неоднозначным образом [2].

Некоторые свойства подобия матриц

1°. Матрица A всегда подобна A.

♦ $A = E_n^{-1} A E_n$.■

2°. Если B подобна A, то и A подобна B.

♦ $B = S^{-1}AS \Leftrightarrow SBS^{-1} = (SS^{-1})A(SS^{-1}) \Leftrightarrow SBS^{-1} = E_nAE_n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A = SBS^{-1}$. Положим $S^{-1} = T$. Тогда $A = T^{-1}BT$.■

3°. Если A подобна B, B подобна C, то A подобна C.

♦ $A = S^{-1}BS$, $B = T^{-1}CT \Rightarrow A = S^{-1}T^{-1}CTS \Leftrightarrow A =$ $= (TS)^{-1}C(TS) \Leftrightarrow A = Q^{-1}CQ$, где $Q = TS$.■

4°. Единичная матрица E подобна лишь самой себе.

♦ $S^{-1}E_nS = E_n$ для любой невырожденной матрицы $S \in P_{n,n}$.■

5°. Скалярная матрица λE подобна лишь самой себе.

♦ $S^{-1}(\lambda E_n)S = \lambda S^{-1}E_nS = \lambda(S^{-1}S) = \lambda E_n$ для любой невырожденной матрицы $S \in P_{n,n}$.■

6°. Определители подобных матриц равны.

♦ Пусть матрица A подобна матрице B, т.е. найдется невырожденная матрица $S \in P_{n,n}$, такая что $A = S^{-1}BS$. Отсюда следует, что $\det A =$ $= \det(S^{-1}BS) \Leftrightarrow \det A = \det S^{-1}. \det B \cdot \det S$. Учитывая, что $\det S^{-1} =$ $= \dfrac{1}{\det S}$, имеем $\det A = \det B$.■

7°. Характеристические многочлены подобных матриц равны.

♦ Пусть $B = S^{-1}AS$. Тогда $\det(B - \lambda E_n) = \det(S^{-1}AS - \lambda E_n) =$ $= \det(S^{-1}AS - S^{-1}\lambda E_nS) = \det(S^{-1}(A - \lambda E_n)S) = \det(S^{-1}) \cdot \det(A -$ $- \lambda E_n) \cdot \det S = \dfrac{1}{\det S} \cdot \det(A - \lambda E_n) \cdot \det S = \det(A - \lambda E_n)$.■

4.6. Ранг и дефект линейного преобразования

Рассмотрим векторное пространство V_n и $f : V_n \to V_n$ — линейное преобразование этого пространства.

Множество $f(V_n)$ является подпространством пространства V_n (см. свойство 6° линейных отображений).

Определение 4.8. Размерность подпространства $f(V_n)$ называется *рангом линейного преобразования* и обозначается $\mathrm{rank} f$.

Теорема 4.7. Ранг линейного преобразования f пространства V_n равен рангу его матрицы, записанной в некотором базисе этого пространства.

♦ Если система $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — базис пространства V_n, то $V_n = L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Отсюда следует, что $f(V_n) = L(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) \Rightarrow \Rightarrow \dim f(V_n) = \mathrm{rank}(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) = \mathrm{rank} A$, где матрица A — матрица линейного преобразования f в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$.■

Следствие 4.2. Ранги подобных матриц равны.

♦ Доказательство следует из того, что эти матрицы являются матрицами одного и того же линейного преобразования, записанными в разных базисах пространства, и ранг каждой их них равен рангу этого преобразования. ■

Следствие 4.3. $f(V_n) = V_n \Leftrightarrow \mathrm{rank} f = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Определение 4.9. Если ранг преобразования f равен n, то линейный преобразование называется *невырожденным*или *неособенным,* если ранг преобразования f меньше n, то оно называется *вырожденным или особенным*.

Определение 4.10. Множество всех векторов $\boldsymbol{x} \in V_n$ таких, что $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, называется *ядром линейного преобразования* f.

Ядро линейного преобразования f обозначается $\mathrm{Ker} f$ или $f^{-1}(\mathbf{0})$.

Теорема 4.8. $\mathrm{Ker} f$ — подпространство пространства V_n.

♦ Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathrm{Ker} f$, $\alpha, \beta \in P$. Покажем, что $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \in \mathrm{Ker} f$. Действительно, имеем $f(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha f(\boldsymbol{a}) + \beta f(\boldsymbol{b}) = \mathbf{0}$. На основании определения подпространства векторного пространства множество $\mathrm{Ker} f$ является подпространством пространства V_n.■

Определение 4.11. Размерность ядра линейного преобразования f называется *дефектом преобразования* f и обозначается $\mathrm{def} f$.

Теорема 4.9. Сумма ранга и дефекта линейного преобразования f

векторного пространства V_n равна размерности этого пространства, т.е.

$$\mathrm{rank} f + \mathrm{def} f = \dim V_n.$$

♦ Пусть система векторов

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \tag{4.17}$$

— базис пространства V_n и матрица A является матрицей преобразования f в базисе (4.17). Обозначим через $X \in P_{n,1}$ координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$ (4.17), а в базисе (4.17) Y — координатный столбец вектора $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. Тогда

$$Y = AX. \tag{4.18}$$

Так как $\mathrm{Ker} f = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \tilde{V}_n, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$, то согласно (4.18) координатный столбец X любого вектора $\boldsymbol{x}$ ядра преобразования f удовлетворяет матричному уравнению

$$AX = O. \tag{4.19}$$

Уравнение (4.19) — однородное матричное уравнение. Подпространство решений этого уравнения (4.19) имеет размерность $n - \mathrm{rank} A$. Но, размерность этого подпространства равна $\dim \mathrm{Ker} f$. Отсюда следует, что $n - \mathrm{rank} A = \mathrm{def} f \Leftrightarrow \mathrm{rank} f + \mathrm{def} f = \dim V_n$.■

Следствие 4.4. $\mathrm{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{rank} f = n$.

4.7. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

Определение 4.12. Ненулевой вектор $\boldsymbol{u} \in V_n$ называется *собственным вектором* линейного преобразования f, если существует скаляр λ из поля P такой, что выполняется равенство

$$f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}.$$

Число λ называется *собственным значением (собственным числом)* преобразования f. Собственный вектор $\boldsymbol{u}$ и собственное значение λ называются *соответствующими друг другу*.

Множество всех собственных значений с учетом их кратности называется *спектром* этого преобразования f и обозначается $\mathrm{Spec} f$.

Примеры

Пример 4.9. Все ненулевые векторы из ядра $\mathrm{Ker} f$ — собственные векторы линейного преобразования f, соответствующие нулевому собственному значению.

Пример 4.10. При тождественном преобразовании все ненулевые векторы пространства — собственные с собственным значением, равным единице.

Пример 4.11. Если f — оператор подобия, определяемый формулой $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$, $\lambda \in$
$\in P$, то все ненулевые векторы пространства V_n — собственные векторы с собственным значением λ.

Свойства собственных векторов

1°. Каждому собственному вектору линейного преобразования соответствует единственное собственное значение.

♦ Пусть λ_1 и λ_2 — собственные значения, соответствующие собственному вектору $\boldsymbol{u}$ преобразования f. Тогда $f(\boldsymbol{u}) = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1,\ f(\boldsymbol{u}) = \lambda_2 \boldsymbol{u} \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda_1 \boldsymbol{u} = \lambda_2 \boldsymbol{u}$, или $(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Так как $\boldsymbol{u}$ — ненулевой вектор, то $\lambda_1 = \lambda_2$.■

Замечание 4.3. Отметим, что утверждение, обратное свойству 4.12, является неверным. Каждому собственному значению преобразования f соответствует бесконечное множество собственных векторов.

2°. Если $\boldsymbol{u}$ — собственный вектор линейного преобразования f с собственным значением λ и α — любой отличный от нуля элемент поля P, то $\alpha \boldsymbol{u}$ также собственный вектор преобразования f с собственным значением λ.

♦ Так как $f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$, то отсюда следует, что $f(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) = \alpha\lambda \boldsymbol{u} =$ $= \lambda(\alpha \boldsymbol{u})$.■

3°. Если $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ — собственные векторы линейного преобразования f с одним и тем же собственным значением λ, то $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ либо нулевой вектор, либо также собственный вектор этого преобразования с собственным значением λ.

♦ $f(\boldsymbol{u}_1) = \lambda \boldsymbol{u}_1$, $f(\boldsymbol{u}_2) = \lambda \boldsymbol{u}_2$. Пусть $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \neq \mathbf{0}$. Тогда $f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) =$ $= f(\boldsymbol{u}_1) + f(\boldsymbol{u}_2) = \lambda(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2)$.■

Следствие 4.5. Если $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ — собственные векторы линейного преобразования f с одним и тем же собственным значением λ, то любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов является собственным вектором этого преобразования с собственным значением λ.

4°. Собственные векторы линейного преобразования, соответствующие разным собственным значениям, линейно независимы.

♦ Пусть линейный преобразование f имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $i \neq j$. Обозначим через $\boldsymbol{u}_i$ собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_i. Покажем, что система векторов $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ линейно независима.

Воспользуемся методом математической индукции. Если $k = 1$, то утверждение очевидно (система, состоящая из одного ненулевого вектора, всегда линейно независима). Пусть утверждение верно для системы, состоящей из $k-1$ векторов. Докажем, что оно верно для системы, состоящей из k векторов.

От противного. Предположим, что система векторов $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ линейно зависима. Отсюда следует, что существуют скаляры $\alpha_i \in P$, $i = \overline{1, k}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_i| > 0$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}. \qquad (4.20)$$

Применим к равенству (4.20) преобразование f. Имеем

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{u}_i\right) = f(\boldsymbol{0}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{0}.$$

Поскольку $\boldsymbol{u}_i$ – собственный вектор преобразования f с соответствующим собственным значением λ_i, то выполняется равенство $f(\boldsymbol{u}_i) = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$. Но тогда

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}. \qquad (4.21)$$

Умножим равенство (4.20) на λ_k, (считаем, что $\lambda_k \neq 0$) и вычтем его из (4.21). Получим

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}. \qquad (4.22)$$

По предположению векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}$ линейно независимы, но тогда из (4.22) следует, что $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, для любого $i = \overline{1, k-1}$. Так как по условию все λ_i различны, то $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$, а следовательно, $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, k-1}$. Из (4.20) следует также, что $\alpha_k = 0$ ($\boldsymbol{u}_k$ – ненулевой вектор). Противоречие. ■

Следствие 4.6. Если линейное преобразование f линейного пространства V_n имеет n различных собственных значений, то в пространстве V_n существует базис, состоящий из собственных векторов преобразования f.

Определение 4.13. Линейное преобразование пространства V_n называется *оператором простой структуры (преобразованием простой структуры)*, если в пространстве V_n существует базис из собственных векторов этого преобразования.

Теорема 4.10. Линейное преобразование f пространства V_n является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда в некотором базисе этого пространства матрица преобразования f является диагональной.

♦ Необходимость. Пусть f — преобразование простой структуры пространства V_n. Тогда в пространстве V_n существует базис

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \tag{4.23}$$

из собственных векторов этого преобразования с соответствующими собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Найдем матрицу преобразования f в базисе (4.23). Для этого, исходя из определения матрицы линейного преобразования, разложим образы векторов базиса (4.23) при отображении f по базису (4.23). Имеем

$$\begin{gathered} f(\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1, \\ f(\boldsymbol{u}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{u}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\boldsymbol{u}_n) = \lambda_n \boldsymbol{u}_n. \end{gathered}$$

Но тогда матрица преобразования f имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

т.е. является диагональной.

Достаточность. Исходя из определений матрицы линейного преобразования собственного вектора и собственного значения ясно, что если в каком-либо базисе пространства V_n линейное преобразование f

имеет диагональную матрицу, то базисные векторы являются собственными векторами с соответствующими собственными значениями, расположенными на главной диагонали этой матрицы. ■

4.8. Характеристическая матрица. Характеристический многочлен

Как найти собственные векторы и собственные значения линейного преобразования (если они существуют)?

Пусть

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \tag{4.24}$$

— базис пространства V_n, а f — линейное преобразование в V_n, которое имеет в базисе (4.24) матрицу A. Обозначим через U координатный столбец собственного вектора $\boldsymbol{u}$ преобразования f в базисе (4.24). Тогда из равенства $f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ следует, что

$$AU = \lambda U, \tag{4.25}$$

или

$$(A - \lambda E_n)U = 0, \tag{4.26}$$

где E_n — единичная матрица.

Таким образом, координатный столбец U собственного вектора $\boldsymbol{u}$ и соответствующее ему собственное значение λ удовлетворяют матричному уравнению (4.25) или (4.26). Известно, что матричное уравнение (4.26) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda E_n) = 0, \tag{4.27}$$

т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.28}$$

Определение 4.14. Матрица $(A - \lambda E_n)$ называется *характеристической матрицей* линейного преобразования f (матрицы A).

Определение 4.15. Многочлен $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$ называется *характеристическим многочленом* преобразования f (характеристическим многочленом матрицы A).

Замечание 4.4. Иногда характеристическим многочленом называют многочлен $\varphi(\lambda) = \det(\lambda E_n - A)$.

Определение 4.16. Уравнение $\det(A - \lambda E_n) = 0$ называется *характеристическим уравнением* преобразования f (характеристическим уравнением матрицы A).

Корни характеристического уравнения над полем C (полем комплексных чисел) называются *характеристическими числами* преобразования f (матрицы A).

Замечание 4.5. Ясно, что любое собственное значение линейного преобразования f является характеристическим числом. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. не всякое характеристическое число является собственным значением. А именно: характеристическое число является собственным значением преобразования f пространства V_n, если оно принадлежит тому полю P (например,полю R или полю C), над каким из них рассматривается векторное пространство (вещественное или комплексное пространство), в котором действует преобразование f.

Свойства характеристического многочлена

1°. Характеристический многочлен полураспавшейся матрицы равен произведению характеристических многочленов ее диагональных клеток.

♦ Пусть матрица $A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline B & A_2 \end{array}\right]$ – полураспавшаяся матрица. Рассмотрим характеристическую матрицу $A - \lambda E_n$:

$$A - \lambda E_n = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda E' & O \\ \hline B & A_2 - \lambda E'' \end{array}\right],$$

где E', E'' – единичные матрицы соответствующих размерностей. По теореме Лапласа имеем $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = \det(A_1 - \lambda E') \det(A_2 - \lambda E'')$.■

2°. Характеристические многочлены подобных матриц равны.

♦ Пусть $B = S^{-1}AS$. Тогда $\det(B - \lambda E_n) = \det(S^{-1}AS - \lambda E_n) =$ $= \det(S^{-1}AS - S^{-1}\lambda E_n S) = \det(S^{-1}(A - \lambda E_n)S) = \det(S^{-1}) \cdot \det(A-$ $-\lambda E_n) \cdot \det S = \dfrac{1}{\det S} \cdot \det(A - \lambda E_n) \cdot \det S = \det(A - \lambda E_n)$.■

Следствие 4.7. Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса векторного пространства.

Исследуем характеристический многочлен

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n.$$

Нетрудно видеть, что $\alpha_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}A$, где $\mathrm{tr}A$ — след матрицы A, а

$$\alpha_n = \varphi(0) = \det A. \tag{4.29}$$

Из равенства (4.29) следует следующее утверждение.

Теорема 4.11. Линейное преобразование является невырожденным тогда и только тогда, когда его характеристический многочлен не имеет нулевых корней.

♦ $\mathrm{rank}A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(0) \neq 0$.■

4.9. Подпространство собственных векторов

Теорема 4.12. Множество всех собственных векторов линейного преобразования f пространства V_n, отвечающих собственному значению λ_0, вместе с нулевым вектором этого пространства образует линейное подпространство пространства V_n. Размерность этого подпространства равна $n - r$, где r — ранг матрицы $A - \lambda_0 E_n$.

♦ Доказательство следует из того, что ненулевые координатные столбцы собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_0, и координатный столбец нулевого вектора являются решениями однородного матричного уравнения $(A - \lambda_0 E)U = 0$.■

Подпространство собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0, обозначается L_{λ_0}.

Теорема 4.13. Пусть λ_0 есть k-кратное собственное значение преобразования f. Тогда соответствующее ему подпространство L_{λ_0} собственных векторов имеет размерность не больше k, т.е. $\dim L_{\lambda_0} \leq k$.

♦ Так как λ_0 является k-кратным собственным значением, то характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ линейного преобразования f можно представить в виде

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \psi(\lambda), \tag{4.30}$$

где $\psi(\lambda_0) \neq 0$.

Пусть данному собственному значению λ_0 соответствует $l (1 \leq l \leq n)$ линейно независимых собственных векторов $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l)$. Выберем новый базис пространства V_n. Дополним систему векторов $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l)$ до базиса пространства V_n, т.е. $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{e}_{l+1}, \boldsymbol{e}_{l+2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Найдем образы базисных векторов при линейном отображении f и разложим их по рассматриваемому базису. Имеем

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{u}_1) = \lambda_0 \boldsymbol{u}_1, \\ f(\boldsymbol{u}_2) = \lambda_0 \boldsymbol{u}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(\boldsymbol{u}_l) = \lambda_0 \boldsymbol{u}_l, \\ f(\boldsymbol{e}_{l+1}) = \sum\limits_{j=1}^{l} a_{j,l+1}\boldsymbol{u}_j + \sum\limits_{i=l+1}^{n} a_{i,l+1}\boldsymbol{e}_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(\boldsymbol{e}_n) = \sum\limits_{j=1}^{l} a_{jn}\boldsymbol{u}_j + \sum\limits_{i=l+1}^{n} a_{in}\boldsymbol{e}_i. \end{cases}$$

На основании свойства 4.16 для характеристических многочленов имеем

$$\varphi(\lambda) = \left|\begin{array}{cccc|c} \lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & C \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & \\ \hline & & & & \\ & & O & & D(\lambda) \end{array}\right|.$$

Вычислим определитель по теореме Лапласа:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^l |D(\lambda)| = (\lambda_0 - \lambda)^l q(\lambda),\ g(\lambda) \in P[\lambda]. \qquad (4.31)$$

Сравнивая (4.30) и (4.31), имеем $l \leq k$.■

Теорема 4.14. Линейное преобразование f n-мерного пространства V над полем P, является преобразованием простой структуры тогда и только тогда, когда каждое характеристическое число матрицы этого преобразования является собственным значением и любому его собственному значениюλ_i кратности k_i соответствует подпространство собственных векторов L_{λ_i} размерности k_i, т.е. $k_i = \dim L_{\lambda_i} = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_i E_n)$.

Алгоритм нахождения собственных векторов и собственных значений линейного преобразования f в векторном пространстве

1) Рассматриваем какой-либо базис пространства V_n и находим матрицу линейного преобразования f в этом базисе.

2) Составляем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E_n) = 0$ и вычисляем над полем C его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, т.е. характеристические числа.

3) Из всех корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ выбираем лишь те, которые принадлежат основному множеству, т. е. полю P, над которым рассматривается векторное пространство. Если это комплексное пространство, то все $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ суть собственные значения преобразования f. Если же пространство V_n является вещественным, то только вещественные корни будут собственными значениями преобразования f.

4) В системе (4.26) полагаем λ равным одному из собственных значений и находим ее ненулевые решения.

5) Найденные ненулевые решения уравнения являются координатными столбцами собственных векторов, соответствующих рассматриваемому собственному значению.

4.10. Присоединенные векторы и жорданов базис

Пусть f — линейное преобразование векторного пространства V_n над полем P, а $\boldsymbol{u}$ — собственный вектор этого преобразования, соответствующий собственному значению λ_0.

Система векторов $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ называется *присоединенной к собственному вектору* $\boldsymbol{u}$, если выполняются следующие равенства:

$$
\begin{gathered}
f(\boldsymbol{v}_1) = \lambda_0 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}, \\
f(\boldsymbol{v}_2) = \lambda_0 \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f(\boldsymbol{v}_k) = \lambda_0 \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_{k-1}.
\end{gathered}
$$

Вектор $\boldsymbol{v}_1$ называется *первым присоединенным вектором* к собственному вектору $\boldsymbol{u}$, вектор $\boldsymbol{v}_2$ — *вторым присоединенным вектором* к вектору $\boldsymbol{u}$ и т.д. Системы вида $(\boldsymbol{u}), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2), \ldots, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ называются *жордановыми цепочками* преобразования f с началом в собственном векторе $\boldsymbol{u}$.

Теорема 4.15. Любая жорданова цепочка линейного преобразования f векторного пространства V_n линейно независима в этом пространстве.

♦ Пусть система векторов

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) \tag{4.32}$$

— жорданова цепочка преобразования f с началом в собственном векторе $\boldsymbol{u}$, которое соответствует собственному значению λ_0. Докажем, что система (4.32) линейно независима.

От противного. Предположим, что система (4.32) линейно зависима, т.е. найдутся скаляры $\alpha_i \in P$, $i = \overline{0, k}$, $\sum\limits_{i=0}^{k} |\alpha_i| > 0$ и такие, что

$$\alpha_0 \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}. \tag{4.33}$$

Применяя к равенству (4.33) последовательно преобразования $(f - e\lambda_0), (f - e\lambda_0)^2, \ldots, (f - e\lambda_0)^k$, получим систему равенств

$$\begin{cases} \alpha_1 \boldsymbol{u} + \sum\limits_{i=2}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_{i-1} = \boldsymbol{0}, \\ \alpha_2 \boldsymbol{u} + \sum\limits_{i=3}^{k} \alpha_i \boldsymbol{v}_{i-2} = \boldsymbol{0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_k \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{4.34}$$

Рассмотрим систему (4.34). Учитывая, что $\boldsymbol{u}_k \neq \boldsymbol{0}$, из последнего равенства следует, что $\alpha_k = 0$, затем из предпоследнего равенства получаем, что $\alpha_{k-1} = 0$ и т.д. Из первого равенства имеем $\alpha_1 = 0$. Но тогда из (4.33) следует $\alpha_1 = 0$. Противоречие. ■

Теорема 4.16. Система векторов, состоящая из жордановых цепочек линейного преобразования, линейно независима тогда и только тогда, когда входящие в нее собственные векторы этого линейного оператора образуют линейно независимую систему.

Доказательство теоремы следует из свойств собственных векторов и теоремы 4.15.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — различные собственные значения преобразования f векторного пространства V_n над полем C с кратностями $k_1, k_2, \ldots, k_m \left(\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = n \right)$ соответственно. Согласно теореме 4.13 $\dim L_{\lambda_j} \leq k_j$ для каждого j, $1 \leq j \leq m$. Если $\dim L_{\lambda_j} = k_j$ для всех j, $1 \leq j \leq m$, то в пространстве V_n существует базис, состоящий из собственных векторов преобразования f, т.е. есть преобразование f является оператором простой структуры. Если же для некоторого λ_{j_0}, $1 \leq j_0 \leq m$, $\dim L_{\lambda_{j_0}} < k_{j_0}$, то в пространстве V_n не существует базиса, состоящего только из собственных векторов преобразования f.

В этом случае для каждого такого λ_{j_0}, $1 \leq j_0 \leq m$, следует рассмотреть подпространство $\operatorname{Ker}(f - \lambda_{j_0} eV)^{k_{j_0}}$, в котором можно выбрать базис, состоящий из жордановых цепочек преобразования f с началом в собственных векторах из подпространства $L_{\lambda_{j_0}}$, причем общее количество собственных и присоединенных векторов равно k_{j_0}. Построив для каждого собственного значения указанные системы векторов, можно из этих систем составить систему векторов длины n. Эта система будет линейно независимой и будет являться базисом пространства V_n. Такой базис, т.е. базис составленный из жордановых цепочек преобразования f, называется *жордановым базисом* пространства V для преобразования f.

Теорема 4.17. Для любого преобразования n-мерного векторного пространства V над полем C существует в этом пространстве жорданов базис.

4.11. Инвариантные подпространства

Пусть f — линейное преобразование векторного пространства V_n над полем P, а Q — подпространство пространства V_n.

Определение 4.17. Подпространство Q пространства V_n называется инвариантным относительно линейного преобразования f, если $f(Q) \subseteq Q$, т.е. $f(\boldsymbol{x}) \in Q, \forall x \in Q$.

Примеры

1. Нулевое подпространство и все пространство V_n является инвариантными подпространствами относительно любого линейного преобразования f пространства V_n.

2. Любое подпространство пространства V_n является инвариантным относительно оператора подобия.

3. Рассмотрим пространство V_3 геометрических векторов над полем R. И в этом пространстве рассмотрим линейное преобразование, которое заключается в повороте всех векторов пространства вокруг оси Oz. Тогда следующие подпространства пространства V_3 является инвариантными относительно этого линейного преобразования:

1) $\{\mathbf{O}_{V_3}\}$;

2) V_3;

2) множество всех векторов, коллинеарных вектору $\boldsymbol{k}$;

3) все векторы, принадлежащие плоскости Oxy или параллельных ей.

4. Рассмотрим векторное пространство $P[x]$ всех многочленов от переменной x над полем P и в качестве линейного преобразования этого пространства возьмем оператор дифференцирования. Тогда подпространство $P_n[x]$ являются инвариантным относительно этого преобразования.

Теорема 4.18. Для любого линейного преобразования f векторного пространства V_n ядро и образ этого преобразования является инвариантными относительно f подпространствами.

♦ Пусть $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_{V_n} \in \mathrm{Ker} f$. Следовательно, $\mathrm{Ker} f$ – инвариантное подпростроанство относительно f преобразования. Пусть теперь произвольный $\boldsymbol{x} \in V_n$. Ясно, что $f(f(\boldsymbol{x})) \in \mathrm{Im} f = f(V_n)$, а это значит, что $f(V_n)$ – инвариантно относительно f подпространство.■

Теорема 4.19. Сумма и пересечение конечного числа инвариантных относительно f подпространств пространства V_n являются инвариантными относительно f подпространствами.

♦ Пусть $(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ – конечная система инвариантных относительно f подпространств пространства V_n.

Обозначим через $M = \sum\limits_{i=1}^{k} M_i$. Исходя из определения суммы любой вектор $\boldsymbol{m} \in M$ представим в виде $\boldsymbol{m} = \sum\limits_{i=1}^{k} \boldsymbol{m}_i$, причем $\boldsymbol{m}_i \in M_i$, $i = \overline{1,k}$. Отсюда, $f(\boldsymbol{m}) = f\big(\sum\limits_{i=1}^{k} \boldsymbol{m}_i\big) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{m}_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \boldsymbol{m}'_i \in M$, так как вектор $\boldsymbol{m}' = f(\boldsymbol{m}_i) \in M_i$ ибо M_i – инвариантное относительно f подпространство.

Пусть $M^* = \bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$ и вектор $\boldsymbol{m} \in M^*$. Тогда вектор $f(\boldsymbol{m}) \in M^*$ для любого i, $1 \le i \le k$, и $f(\boldsymbol{m}_i) \in M_i$, так как M_i – инвариантное относительно преобразования f подпространство. Следовательно, $f(\boldsymbol{m}_i) \in M^*$, а это значит, что M^* – также инвариантное относительно f подпространство ■

Теорема 4.20. Если Q – инвариантно относительно линейного преобразования f подпространство пространства V_n, то Q является инвариантным относительно преобразования $\mu(f)$, где $\mu(f)$ – многочлен от преобразования f с коэффициентами из поля P, т.е. относительно многочлена

$$\mu(f) = d_m f^m + d_{m-1} f^{m-1} + \ldots + d_1 f + d_0 e,\ d_i \in P,\ i = \overline{0, m}.$$

♦ Так как Q является инвариантным относительно преобразования f подпространством, то для любого вектора $\boldsymbol{x} \in Q$ имеем $f(\boldsymbol{x}) \in Q$. Но тогда и $f^2(\boldsymbol{x}) = f(f(\boldsymbol{x})) \in Q$, а, следовательно, $f^2(\boldsymbol{x}) \in Q$/ Но, тогда $f^i(\boldsymbol{x}) \in Q$, для любого $i = \overline{0, m} \Rightarrow \mu(f)(\boldsymbol{x}) = d_m f^m(\boldsymbol{x}) + \ldots + d_1 f(\boldsymbol{x}) + d_0 \boldsymbol{x} \in Q$ Итак, Q инвариантное относительно линейного преобразования $\mu(f)$ подпространство.■

Если подпространство Q является инвариантным относительно преобразования $f \in \mathrm{Hom}(V_n, V_n)$, то можно определить некоторое преобразование $\psi : Q \to Q$, такое что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in Q$, верно равенство $f(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x})$. Это преобразование ψ называется сужением (ограничением) линейного преобразования f на подпространство Q и обозначается $f|_Q$, т.е. $f|_Q = \psi$.

Выясним, как сказывается на матрице линейное преобразование f наличие в пространстве V_n нетривиальных, т.е. отличных от $\{\mathbf{0}_V\}, V_n$ инвариантных относительно преобразования f подпространств.

Пусть система векторов

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k) \tag{4.35}$$

базис подпространства Q инвариантного относительно преобразования f. Дополним систему (4.35) до базиса пространства V_n :

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n). \tag{4.36}$$

Найдем матрицу преобразования f в базисе (4.36). Имеем

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = \alpha_{11}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_{k,1}\boldsymbol{e}_k + 0\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + 0\boldsymbol{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\boldsymbol{e}_k) = \alpha_{1,k}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_{k,k}\boldsymbol{e}_k + 0\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + 0\boldsymbol{e}_n \\ f(\boldsymbol{e}_{k+1}) = \alpha_{1,k+1}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_{k,k+1}\boldsymbol{e}_k + \alpha_{k+1,k+1}\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + \alpha_{n,k+1}\boldsymbol{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\boldsymbol{e}_n) = \alpha_{1n}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_{kn}\boldsymbol{e}_k + \alpha_{k+1,n}\boldsymbol{e}_{k+1} + \ldots + \alpha_{n,n}\boldsymbol{e}_n \end{cases}$$

Отсюда следует, что матрица A преобразования f в базисе 4.36 имеет вид

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} & \alpha_{k,k+1} & \dots & \alpha_{kn} \\ \hline 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \dots & \alpha_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,k+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{array}\right]$$

или

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B_{k,k} & C_{k,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & D_{n-k,n-k} \end{array}\right] \tag{4.37}$$

Матрица (4.37) называется полураспавшейся или верхней блочно-треугольной матрицей. Итак, если в пространстве V_n есть инвариантное относительно преобразования f подпространство, то в подходящем базисе пространства V_n матрица преобразования f является верхней блочно-треугольной матрицей.

Верно и обратное. Если в некотором базисе, например базисе (4.36), пространство V_n матрицы преобразования f является блочно-треугольной матрицей вида (4.37), то подпространство $Q = L(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k)$ будет инвариантным относительно f подпространством.

Таким образом верна теорема.

Теорема 4.21. Для того, чтобы векторное пространство V_n над полем P обладало нетривиальным инвариантным относительно f подпространством необходимо и достаточно чтобы в подходящем базисе пространства V_n матрица преобразования f была верхней блочно-треугольной.

Пусть V_n является прямой суммой двух инвариантных относительно преобразования f подпространств Q_1 и Q_2 т.е. $V_n = Q_1 \oplus Q_2$, $f(Q_1) \subseteq Q_1$, $f(Q_2) \subseteq Q_2$.

Пусть базис (4.36) пространства V_n является таковым, что подсистема (4.35) является базисом Q_1, а подсистема $(\boldsymbol{e}_{k+1} \dots \boldsymbol{e}_n)$ базис подпространства Q_2. Нетрудно видеть, что матрица преобразования f в этом базисе будет иметь вид

$$A_f = \left[\begin{array}{c|c} B_{k,k} & O_{k,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & D_{n-k,k} \end{array}\right] \tag{4.38}$$

Матрица вида (4.38) называется распавшейся или блочно-диагональной.

Теорема 4.22. Векторное пространство V_n над P является прямой суммой двух инвариантных относительно линейного преобразования f подпространств тогда и только тогда, когда в подходящем базисе этого пространства матрица преобразования f является блочно-диагональной.

Эту теорему можно распространить на сумму одномерных инвариантных относительно преобразования f подпространств.

Теорема 4.23. Пространство V_n над полем P является прямой суммой одномерных инвариантных относительно линейного преобразования f подпространств тогда и только тогда, когда в подходящем базисе пространства V_n матрица линейного преобразования f является диагональной.

5. БИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Пусть V_n – векторное пространство над полем P.

Определение 5.1. Отображение $f : V_n \times V_n \to P$, удовлетворяющее условиям:

1) $f(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + \alpha_2 f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$, для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in P$ и $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \in V_n$;

2) $f(\boldsymbol{x}, \beta_1 \boldsymbol{y}_1 + \beta_2 \boldsymbol{y}_2) = \beta_1 f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + \beta_2 f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$, для любых $\beta_1, \beta_2 \in P$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V_n$.

называется *билинейной функцией (билинейным отображением)* в пространстве V_n.

Замечание 5.1. Условия 1 и 2 означают, что функция f является линейным преобразованием пространства V_n по каждому векторному аргументу.

Пусть в пространстве V_n задан базис, например, базис (4.1), Рассмотрим два вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_n$ и разложим их по базису (4.1):

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e}_j,\ x_i, y_j \in P,\ i, j = \overline{1, n}.$$

Найдем образ векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ при отображении f. Имеем

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

т.е.

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j, \qquad (5.1)$$

где $a_{ij} = f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j),\ i,j=\overline{1,n}$.

Выражение, стоящее справа в равенстве (5.1), называется *билинейной формой* в пространстве V_n..

Таким образом, образ любой упорядоченной пары $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ векторов пространства V_n при билинейном отображении f представляет собой в некотором базисе билинейную форму. Верно и обратное. Поэтому при фиксированном базисе пространства V_n каждая билинейная функция f этого пространства отождествляется с соответствующей билинейной формой.

Положим, что $A{=}(a_{ij},i,j{=}\overline{1,n})$, $X{=}\begin{bmatrix} x_1\\ \dots\\ x_n\end{bmatrix}$, $Y{=}\begin{bmatrix} y_1\\ \dots\\ y_n\end{bmatrix}$.

Тогда равенство приобретает вид

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = X^TAY \qquad (5.2)$$

Матрица $A\in P_{nn}$ называется *матрицей билинейной формы* f или *матрицей билинейной функции* f пространства V_n в рассматриваемом базисе этого пространства.

Определение 5.2. Билинейная форма f пространства V_n над полем P называется симметрической, если для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_n$ верно равенство

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \qquad (5.3)$$

Теорема 5.1. Для того, чтобы билинейная форма f пространства V_n была симметрической, необходимо и достаточно, чтобы матрица этой формы была симметрической.

♦ Необходимость. Пусть f − симметрическая билинейная форма. Тогда для любых векторов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ пространства V_n выполняется равенство (5.3), но тогда верно и равенство $f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j){=}f(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i)\Leftrightarrow a_{ij}{=}a_{ji}\Leftrightarrow A{=}A^T$, т.е. A − симметрическая.

Достаточность. Пусть $A=A^T\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$, для любых $i,j=\overline{1,n}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = f(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i)$. Тогда для любых векторов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_n$ имеем $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}){=}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j{=}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)x_iy_j{=}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i)y_jx_i{=}f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$. Следовательно, f является симметрической билинейной формой. ■

Определение 5.3. Билинейная форма f пространства V_n над полем P называется кососимметрической, если для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_n$ верно равенство $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

Теорема 5.2. Для того, чтобы билинейная форма f пространства V_n была кососимметрической, необходимо и достаточно чтобы матрица этой формы была кососимметрической.

Теорема 5.3. Всякая билинейная форма f пространства V_n над полем P представляется в виде симметрической и кососимметрической форм пространства V_n.

♦ Доказательство следует из того, что любая квадратная матрица порядка n над полем P представляется в виде сумм симметрической и кососимметрической матриц и теорем 5.1 и 5.2.■

Пусть f – билинейная функция пространства V_n над полем P в базисе (4.1) представима в виде

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = X^T AY,$$

а в базисе

$$\mathbf{E'} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) - \tag{5.4}$$

в виде билинейной формы

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (X')^T BY'. \tag{5.5}$$

Как связаны между собой матрицы A и B, т.е. матрицы одной и той же билинейной функции f, записанных в разных базисах пространства?

Пусть S – матрица перехода от базиса (4.1) к базису (5.4). Тогда $X = SX'$, $Y = SY'$, а, следовательно $X^T AY = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (X')^T BY' \Leftrightarrow X^T AY = (X')^T BY' \Leftrightarrow (SX')^T A(SY') = (X')^T BY' \Leftrightarrow (X')^T (S^T AS)Y' = (X')^T BY'$. Откуда следует, что

$$B = S^T AS. \tag{5.6}$$

Так как ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей, то из равенства (5.6) следует, что $\mathrm{rank}B \leq \mathrm{rank}A$. Учитывая, что $A = (S^T)^{-1} BS^{-1}$ получаем, что и $\mathrm{rank}A \leq \mathrm{rank}B$.

Следовательно, $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

Определение 5.4. Рангом билинейной формы называется *ранг матрицы этой билинейной формы.*

Определение 5.5. *Рангом билинейной функции* пространства V_n называется ранг некоторой из ее матриц.

Ранг билинейной функции f, как и ранг билинейной формы f, отождествляемой с этой билинейной функцией, обозначается через $\mathrm{rank} f$.

6. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

6.1. Основные определения и понятия

Пусть P – некоторое числовое поле и

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

симметрическая билинейная форма над полем P. Положим $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Имеем

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{6.1}$$

где $a_{ij} \in P$, причем $a_{ij} = a_{ji},\ \forall i, j = \overline{1, n}$.

Определение 6.1. Симметрическая билинейная форма вида (6.1) называется *квадратичной формой* над полем P.

Учитывая, что (6.1) есть многочлен второй степени от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ квадратичная форма (6.1) обозначается через $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т.е.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,\ a_{ij} \in P,\ i, j = \overline{1, n} \tag{6.2}$$

или в матричном виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = X^T A X, \tag{6.3}$$

где $A = (a_{ij},\ i, j = \overline{1, n})$, $A = A^T$ – симметрическая $n \times n$ – матрица, а $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – столбец переменных.

Элементы a_{ij} называются *коэффициентами квадратичной формы f*.

Замечание 6.1. Если в указанном выше определении квадратичной формы поле P есть поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, то такая квадратичная форма называется *комплексной квадратичной формой*, если же $P = R$ – то действительной квадратичной формой.

Определение 6.2. Матрица A, составленная из коэффициентов квадратичной формы f, называется *матрицей квадратичной формы* f.

Определение 6.3. Ранг матрицы квадратичной формы f называется *рангом квадратичной формы* f и обозначается $\mathrm{rank} f$.

Определение 6.4. Говорят, что квадратичная форма f имеет *канонический вид*, если она содержит только квадраты переменных, т.е. имеет вид $f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$ или в матричном виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = X^T \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} X.$$

6.2. Эквивалентность квадратичных форм

Наряду с квадратичной формой (6.2) рассмотрим квадратичную форму

$$g(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_iy_j,\ b_{ij} \in P,\ b_{ij} = b_{ji},\ i,j = \overline{1,n}, \qquad (6.4)$$

или в матричном виде

$$g(y_1, \dots, y_n) = Y^T BY.$$

Пусть $S = (s_{ij},\ i,j = \overline{1,n})$ – невырожденная матрица над полем P..

Система выражений вида

$$\begin{cases} x_1 = s_{11}y_1 + \ldots + s_{1n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = s_{n1}y_1 + \ldots + s_{nn}y_n, \end{cases} \qquad (6.5)$$

или в матричной форме

$$X = SY, \qquad (6.6)$$

где $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, называется *невырожденным линейным преобразованием переменных с матрицей* S.

Если в квадратичную форму (6.2) вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ подставить их выражение через переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$, связанные соотношением (6.5), и мы перейдем от (6.2) к (6.4), то говорят, что квадратичная форма f невырожденным линейным преобразованием (6.5) переводится в квадратичную форму g .

Нетрудно видеть, что если существует невырожденное линейное преобразование переменных, переводящее квадратичную форму f в квадратичную форму g, то существует и невырожденное линейное преобразование переменных, переводящее квадратичную форму g в квадратичную форму f.

Определение 6.5. Две квадратичные формы f и g называются *эквивалентными* и это обстоятельство обозначается $f \sim g$, если существует невырожденное линейное преобразование переменных, переводящее одну квадратичную форму в другую.

Исходя из вышеизложенного ясно, что:

1) $f \sim f$;

2) если $f \sim g$, то $g \sim f$;

3) если $f \sim g$ и $g \sim \varphi$, то $f \sim \varphi$.

Более того, если $f \sim g$, то тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX =$ [используем преобразование $X = SY$] $= (SY)^T A(SY) = Y^T(S^T AS)Y = $ $= Y^T BY = g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

А это значит, что матрицы двух эквивалентных форм связаны соотношением $B = S^T AS$, из которого следует, что ранги эквивалентных форм равны, т.е.$\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} g$.

Теорема 6.1. Всякая квадратичная форма над полем P эквивалентна некоторой квадратичной форме в каноническом виде. Число квадратов в последней равно рангу исходной квадратичной формы.

♦ Используем метод математической индукции по числу переменных в квадратичной форме.

Квадратичная форма от одной переменной эквивалентна самой себе:

$$f(x_1) = a_{11}x_1^2 \sim a_{11}x_1^2.$$

Пусть утверждение верно для всех квадратичных форм, число переменных которых не больше $(n-1)$. Докажем, что оно верно для всех квадратичных форм от n переменных.

Для квадратичной формы (6.2) возможны следующие два случая:

1) среди коэффициентов a_{ii} при квадратичных переменных есть хотя бы один, отличный от нуля. Без ограничений общности предположим, что это a_{11} (в противном случае переменные можно перенумеровать). Перепишем форму (6.2) в виде

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n) + f_1(x_2, \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{6.7}$$

где $f_1(x_2 \ldots x_n)$ — квадратичная форма от $(n-1)$-й или меньшего числа переменных.

Выражение, стоящее в круглых скобках (6.7), преобразуем так, чтобы выделить полный квадрат по переменной x_1. Имеем

$$\begin{gathered} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n = \\ = a_{11}(x_1^2 + 2x_1\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\ + \frac{1}{a_{11}^2}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{11}^2}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2) = \\ = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \\ - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Тогда выражение (6.7) равносильно

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + f_2(x_2 \ldots x_n), \tag{6.9}$$

где $f_2(x_2 \ldots x_n) = f_1(x_2 \ldots x_n) - \dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2$.

Ясно, что $f_2(x_2 \ldots x_n)$, в свою очередь, является квадратичной формой от $(n-1)$-й или меньшего числа переменных. Следовательно, по индукционному предположению она эквивалентна некоторой квадратичной форме в каноническом виде, т.е. найдется невырожденное линейное преобразование переменных вида

$$\begin{cases} y_2 = b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n, \\ y_3 = b_{32}x_2 + \ldots + b_{3n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n, \end{cases} \tag{6.10}$$
$$b_{ij} \in P,\ i, j = \overline{2, n},$$

которое переводит квадратичную форму $f_2(x_2 \ldots x_n)$ к каноническому виду

$$\alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2,\ \alpha_i \in P,\ i = \overline{2, n}. \tag{6.11}$$

Но тогда рассмотрим линейное преобразование переменных вида

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = \qquad\qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \qquad\qquad b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n. \end{cases} \tag{6.12}$$

Это преобразование, с использованием равенства (6.9), приводит квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду

$$\frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2. \tag{6.13}$$

Итак, квадратичная форма f эквивалентна квадратичной форме в каноническом виде (6.13).

Заметим, что преобразование (6.12) является невырожденным, ибо его матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

является невырожденной;

2) все коэффициенты $a_{ii} (1 \le i \le n)$ при квадратичных переменных квадратичной формы (6.2) равны нулю. Но тогда существует коэффициент $a_{ij} \ne 0, i \ne j, 1 \le i, j \le n$. Рассмотрим следующее невырожденное линейное преобразование переменных:

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j, \\ x_j = y_i - y_j, \\ x_k = y_k,\ k = \overline{1, n},\ k \ne i,\ k \ne j. \end{cases} \tag{6.14}$$

Применим это линейное преобразование к квадратичной форме (6.2). Тогда квадратичная форма f эквивалентна квадратичной форме вида

$$\ldots + 2a_{ij}(y_i^2 - y_j^2) + \ldots$$

Последняя квадратичная форма уже содержит квадраты переменных, а следовательно, пришли к первому случаю. Итак, первая часть теоремы доказана.

Вторая часть теоремы следует из того, что ранги эквивалентных форм равны и, что ранг квадратичной формы в каноническом виде равен числу ненулевых коэффициентов при квадратах переменных. ■

Определение 6.6. Нахождение по данной квадратичной форме эквивалентной ей квадратичной формы в каноническом виде называется *приведением квадратичной формы к каноническому виду*.

Замечание 6.2. Для всякой квадратичной формы существует бесконечное множество эквивалентных ей квадратичных форм в каноническом виде. Однако все они имеют одно и то же число отличных от нуля коэффициентов при квадратах переменных, равное рангу исходной квадратичной формы.

6.3. Нормальный вид комплексных квадратичных форм

Пусть

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \; a_{ij} \in C, \; i, j = \overline{1, n}. \tag{6.15}$$

– квадратичная форма над полем комплексных чисел, а

$$b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_r y_r^2, \; b_i \in C, \; i = \overline{1, r}, \; r = \mathrm{rank} f \tag{6.16}$$

– квадратичная форма в каноническом виде эквивалентная (6.15).

К квадратичной форме (6.16) применим следующее невырожденное линейное комплексное преобразование переменных вида

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{b_1} y_1, \\ z_2 = \sqrt{b_2} y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_r = \sqrt{b_r} y_r, \\ z_{r+1} = y_{r+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = y_n. \end{cases} \tag{6.17}$$

Тогда квадратичная форма (6.16) эквивалентна квадратичной форме

$$z_1^2 + z_1^2 + \ldots + z_r^2.$$

Квадратичная форма в виде $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2$ называется нормальным видом квадратичной формы над полем комплексных чисел. Так как любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду, то справедлива следующая теорема

Теорема 6.2. Всякая комплексная квадратичная форма при помощи невырожденного комплексного линейного преобразования переменных может быть приведена к нормальному виду. Число квадратов в нормальном виде равно рангу исходной квадратичной формы.

Следствие 6.1. Для всякой комплексной симметрической матрицы A существует невырожденная комплексная матрица S такая, что

$$S^T A S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

причем, число единиц на главной диагонали в последней равно рангу матрицы A.

Теорема 6.3. (критерий эквивалентности комплексных квадратичных форм над полем). Две комплексные квадратичные формы от одного и того же числа переменных эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их ранги.

♦ Необходимость. Рассмотрим над полем C две квадратичные формы $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = X^T A X$, $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = Y^T B Y$, $A, B \in C_{n,n}$, $A = A^T$, $B = B^T$.

Пусть $f \sim g$, тогда существует невырожденное линейное преобразование $X = SY$ ($S \in C_{n,n}$, $\det S \neq 0$,), которое переводит квадратичную форму f в квадратичную форму g. Матрицы этих квадратичных форм связаны соотношением $B = S^T A S$, а это значит, что $\mathrm{rank} B = \mathrm{rank} A$. Откуда следует, что $\mathrm{rank} g = \mathrm{rank} f$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} g = r \le n$. Тогда на основании следствия 6.1 существуют матрицы $S_1, S_2 \in C_{n,n}$, $\det S_1 \neq 0$, $\det S_2 \neq 0$ такие, что $S_1^T A S_1 = \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O_{n-r,n-r} \end{array}\right] = S_2^T B S_2$. Откуда следует, что $S_1^T A S_1 = S_2^T B S_2 \Leftrightarrow B = (S_2^T)^{-1} S_1^T A S_1 S_2^{-1} \Leftrightarrow B = S^T A S$, где $S = S_1 S_2^{-1}$. Применив невырожденное комплексное преобразование $X = SY$ квадратичная форма f переводится в g, т.е. $f \sim g$.■

6.4. Нормальный вид действительных квадратичных форм

Пусть

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{6.18}$$

– действительная квадратичная форма, а

$$b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_l y_l^2 + b_{l+1} y_{l+1}^2 + \ldots + b_r y_r^2, \tag{6.19}$$

– ее канонический вид, где $r = \mathrm{rank} f$.

Определение 6.7. Канонический вид действительной квадратичной формы, каждый ненулевой коэффициент которого равен 1 или -1, называется *нормальным видом действительной квадратичной формы*.

Теорема 6.4. . Всякая действительная квадратичная форма при помощи действительного невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к нормальному виду. Число квадратов в нормальном виде равно рангу исходной квадратичной формы.

♦ Рассмотрим каноническую квадратичную форму (6.19) и, без ограничения общности, предположим, что коэффициенты $b_1 > 0, \ldots, b_l > 0$, а коэффициенты $b_{l+1} < 0, \ldots, b_r < 0$. Применим к этой квадратичной форме действительное невырожденное линейное преобразование переменных вида

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{b_1} y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_l = \sqrt{b_l} y_l, \\ z_{l+1} = \sqrt{-b_{l+1}} y_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_r = \sqrt{-b_r} y_r, \\ z_{r+1} = y_{r+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = y_n. \end{cases} \tag{6.20}$$

Тогда форма (6.19) эквивалентна квадратичной форме вида

$$z_1^2 + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \ldots - z_r^2 . \blacksquare \tag{6.21}$$

Теорема 6.5. (закон инерции действительных квадратичных форм). Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде действительной квадратичной формы определяются однозначным образом и не зависят от действительного невырожденного линейного преобразования переменных, переводящего исходную квадратичную форму к нормальному виду.

♦ Рассмотрим квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X$, которая при помощи невырожденного действительного линейного преобразования $Y = S_1 X \Leftrightarrow y_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \ldots + \alpha_{in}x_n$, $\alpha_{ij} \in R$, $i, j = \overline{1, n}$, приводится к нормальному виду

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \ldots - y_r^2, \tag{6.22}$$

а при помощи $Z = S_2 X$ – невырожденного линейного преобразования $z_i = \beta_{i1}x_1 + \beta_{i2}x_2 + \ldots + \beta_{in}x_n$, $\beta_{ij} \in R$, $i, j = \overline{1, n}$, – приводится к нормальному виду

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \ldots - z_r^2. \tag{6.23}$$

Требуется доказать, что $s = t$.

Пусть $s < t$, тогда рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{s1}x_1 + \alpha_{s2}x_2 + \ldots + \alpha_{sn}x_n = 0, \\ \beta_{t+1,1}x_1 + \beta_{t+1,2}x_2 + \ldots + \beta_{t+1,n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n1}x_1 + \beta_{n2}x_2 + \ldots + \beta_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{6.24}$$

Система (6.24) состоит из $n - t + s < n$ линейных уравнений. Значит, она имеет ненулевые решения. Пусть $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_i \in R$ – одно из таких ненулевых решений. Найдем значение исходной квадратичной формы на этом ненулевом решении.

С одной стороны, из (6.22), с учетом того, что $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ является решением системы (6.24) имеем

$$\begin{gathered} f(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \big(\sum_{i=1}^n \alpha_{1i}\gamma_i\big)^2 + \big(\sum_{i=1}^n \alpha_{2i}\gamma_i\big)^2 + \\ + \ldots + \big(\sum_{i=1}^n \alpha_{si}\gamma_i\big)^2 - \big(\sum_{i=1}^n \alpha_{s+1,i}\gamma_i\big)^2 - \ldots - \big(\sum_{i=1}^n \alpha_{ri}\gamma_i\big)^2 = \\ = -\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{s+1,i}\gamma_i\right)^2 - \ldots - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ri}\gamma_i\right)^2 \leq 0. \end{gathered} \tag{6.25}$$

С другой стороны, из (6.23) и (6.24) получаем

$$\begin{gathered} f(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \big(\sum_{i=1}^n \beta_{1i}\gamma_i\big)^2 + \big(\sum_{i=1}^n \beta_{2i}\gamma_i\big)^2 + \\ + \ldots + \big(\sum_{i=1}^n \beta_{ti}\gamma_i\big)^2 - \big(\sum_{i=1}^n \beta_{t+1,i}\gamma_i\big)^2 - \ldots - \big(\sum_{i=1}^n \beta_{ri}\gamma_i\big)^2 = \\ = \left(\sum_{i=1}^n \beta_{1i}\gamma_i\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^n \beta_{ti}\gamma_i\right)^2 \geq 0. \end{gathered} \tag{6.26}$$

Итак, из неравенств(6.25) и (6.26) имеем, что $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = 0$. Но тогда из соотношения (6.26) и системы (6.24) следует, что $S_2 \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = 0$, причем $\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \neq 0$. Учитывая, что $\det S_2 \neq 0$, получаем противоречие.

Значит, $s \not< t$. Аналогично доказывается, что $s \not> t$.■

Определение 6.8. Число положительных квадратов в нормальном виде действительной квадратичной формы называется *положительным индексом инерции*, а число отрицательных квадратов — *отрицательным индексом инерции*. Разность между положительным и отрицательным индексами инерции квадратичной формы называется *сигнатурой*.

Следствие 6.2. Для любой действительной симметрической матрицы A существует невырожденная действительная матрица S такая, что

$$S^T A S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

причем число 1, -1 на главной диагонали равно рангу матрицы A и не зависит от матрицы S.

Нетрудно видеть, что ранг и сигнатура действительной квадратичной формы однозначным образом определяют ее положительный и отрицательный индексы инерции. Верна следующая теорема.

Теорема 6.6. (критерий эквивалентности действительной квадратичной формы). Две действительные квадратичные формы от n переменных эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их ранги и сигнатуры.

♦ Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.3.■

6.5. Знакоопределенные квадратичные формы

Рассмотрим действительную квадратичную форму f в виде (6.2). Ясно, что $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Определение 6.9. Совокупность значений переменных $x_1, \dots, x_n$ называется *нулевой*, если $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Определение 6.10. Совокупность значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется *ненулевой*, если среди этих значений есть хотя бы одно, отличное от нуля, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$.

Определение 6.11. Действительная квадратичная форма f называется *положительно определенной*, если на любой ненулевой совокупности значений переменных $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ значение квадратичной формы больше нуля, т.е. $f(x_1^*, \ldots, x_n^*) > 0$, если $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 > 0$.

Определение 6.12. Действительная квадратичная форма f называется *отрицательно определенной*, если на любой ненулевой совокупности значений переменных $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ значение квадратичной формы меньше нуля, т.е. $f(x_1^*, \ldots, x_n^*) < 0$, если $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 > 0$.

Определение 6.13. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называется *знакоопределенным квадратичными формами.*

Теорема 6.7. Если некоторая действительная квадратичная форма является положительно определенной, то и любая ей эквивалентная квадратичная форма является положительно определенной.

♦ Рассмотрим две действительные квадратичные формы $f(x_1, \ldots, x_n) = X^T AX$, $g(y_1, \ldots, y_n) = Y^T BY$, $A, B \in \mathbb{R}_{n,n}$, $A = A^T$, $B = B^T$. Пусть $f \sim g$, причем f положительно определена. Так как $f \sim g$, то существует невырожденное линейное преобразование

$$\begin{cases} s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + \ldots + s_{1n}x_n = y_1, \\ s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + \ldots + s_{2n}x_n = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{n1}x_1 + s_{n2}x_2 + \ldots + s_{nn}x_n = y_n, \end{cases} \tag{6.27}$$

которое переводит квадратичную форму g в квадратичную форму f и наоборот.

От противного. Пусть квадратичная форма g не является положительно определенной. Это значит, что найдется ненулевая совокупность значений переменных $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$ таких, что $g(y_1^*, \ldots, y_n^*) \leq 0$. Но тогда, положив в соотношениях (6.27) $y_1 = y_1^*, y_2 = y_2^*, \ldots, y_n = y_n^*$, получим невырожденную неоднородную линейную систему уравнений, которая имеет единственное ненулевое решение $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Так как $g \sim f$, то $g(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, а это значит, что $f(x_1^*, \ldots, x_n^*) \leq 0$

на ненулевой совокупности переменных $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Противоречие. ■

Теорема 6.8. Если некоторая действительная квадратичная форма отрицательно определена, то и любая эквивалентная ей квадратичная форма отрицательно определена.

♦ Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.7. ■

Теорема 6.9. Нормальный вид положительно определенной квадратичной формы от n переменных содержит в точности n положительных квадратов, т.е. имеет вид

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2. \tag{6.28}$$

♦ Пусть положительно определенная квадратичная форма f от n переменных эквивалентна квадратичной форме в нормальном виде

$$\varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + \ldots + \varepsilon_n y_n^2. \tag{6.29}$$

Покажем, что $\varepsilon_i = 1,\ i = \overline{1, n}$.

От противного. Пусть существует индекс i^*, $1 \leq i^* \leq n$, такой, что либо $\varepsilon_{i*} = 0$, либо $\varepsilon_{i^*} = -1$. Тогда рассмотрим следующую совокупность переменных: $y_1 = 0, \ldots, y_2 = 0, \ldots, y_{i*} = -1, \ldots, y_n = 0$. Нетрудно видеть, что значение квадратичной формы (6.29) на этом наборе переменных меньше либо равно 0. Но тогда (6.29) не является положительно определенной. Однако (6.29) эквивалентна f, причем f положительно определенная. Противоречие с теоремой 6.7. ■

Теорема 6.10. Нормальный вид отрицательно определенной квадратичной формы от n переменных содержит в точности n отрицательных квадратов, т.е. имеет вид

$$-y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2. \tag{6.30}$$

Необходимые признаки положительно определенных квадратичных форм

1°. Если квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ является положительно определенной, то $a_{ii} > 0$ для любого $i = \overline{1, n}$.

♦ Так как квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ является положительно определенной, то на любой ненулевой совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$ она принимает положительные значения. В частности, $f(1, 0, \ldots, 0) = a_{11} > 0$, $f(0, 1, \ldots, 0) = a_{22} > 0, \ldots, f(0, \ldots, 1) = a_{nn} > 0$.■

Замечание 6.3. Утверждение, обратное 1°, вообще говоря, неверно.

Например, в квадратичной форме $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$, $a_{11} = a_{22} = 1$. Однако эта квадратичная форма не является положительно определенной, ибо на ненулевом наборе $x_1 = x_2 = 1$ имеем $f(1,1) = -8 < 0$.

2°. Определитель матрицы положительно определенной квадратичной формы больше нуля.

♦ $f(x_1, \dots, x_n) = X^T AX$ – положительно определенная квадратичная форма. Тогда существует $X = SY$ – невырожденное действительное преобразование переменных, переводящее эту квадратичную форму к нормальному виду, т.е. $f \sim g$, причем $g(y_1, \dots, y_n) = Y^T BY$ и $B = E_n$ – единичная матрица порядка n. Так как $B = S^T AS$, имеем $\det B = \det S^T \cdot \det A \cdot \det S \Leftrightarrow 1 = (\det S)^2 \cdot \det A$. Следовательно, $\det A > 0$. ■

3°. Ранг положительно определенных квадратичных форм от n переменных равен n.

♦ Доказательство следует из определения ранга квадратичной формы и признака 2° положительно определенной квадратичной формы. ■

Рассмотрим матрицу A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определение 6.14. Следующие миноры квадратной матрицы A называются *главными угловыми минорами*:

$$\Delta_1 = |a_{11}|; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \dots, \Delta_n = \det A.$$

Замечание 6.4. Все миноры матрицы A, симметричные относительно главной диагонали, называются главными минорами матрицы A. Так, например, если $n = 3$, имеем следующие главные миноры матрицы A :

$\Delta_{11} = |a_{11}|;\ \Delta_{12} = |a_{22}|;\ \Delta_{13} = |a_{33}|;$

$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\ \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta_{31} = \det A.$

Теорема 6.11. (Якоби). Если все главные угловые миноры матрицы квадратичной формы отличны от нуля, то такая квадратичная форма эквивалентна квадратичной форме в каноническом виде:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0}y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2, \text{ где } \Delta_0 = 1. \tag{6.31}$$

Теорема 6.12. (критерий Сильвестра для положительно определенных квадратичных форм). Для того чтобы действительная квадратичная форма была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры матрицы этой квадратичной формы были положительны.

♦ Необходимость. Пусть квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, или в матричном виде $f(x_1, \ldots, x_n) = X^TAX$, положительно определена. Но тогда положительно определена и любая квадратичная форма вида $f_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij}x_ix_j$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$, которая является "сужением"исходной квадратичной формы от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ к квадратичной форме от k переменных $x_1, \ldots, x_k$. Исходя из признака положительной определенности квадратичной формы определитель матрицы квадратичной формы $f_k(x_1, \ldots, x_k)$ положителен, т.е.

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \ 1 \le k \le n.$$

Итак, все главные угловые миноры матрицы A исходной квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ положительны.

Достаточность. Пусть все главные угловые миноры матрицы A квадратичной формы положительны, т.е. $\Delta_k > 0$ для любого $k = \overline{1, n}$. Тогда на основании теоремы Якоби квадратичная форма f эквивалентна квадратичной форме в каноническом виде

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0}y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2. \tag{6.32}$$

Квадратичная форма (6.32) положительно определена, но тогда на основании теоремы 6.7 положительно определена и исходная квадратичная форма f. ■

Необходимые признаки отрицательно определенных квадратичных форм

Нетрудно видеть, что если квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ является положительно определенной, то квадратичная форма $-f(x_1, \ldots, x_n)$ является отрицательно определенной. Поэтому верны следующие признаки отрицательно определенных квадратичных форм:

1°. если квадратичная форма отрицательно определена, то все коэффициенты при квадратичных переменных в этой квадратичной форме отрицательны;

2°. если квадратичная форма от n переменных отрицательно определена, то определитель матрицы этой квадратичной формы положителен, если n — четное, и отрицателен, если n — нечетное;

3°. если квадратичная форма от n переменных является отрицательно определенной, то ее ранг равен n.

Теорема 6.13. (критерий Сильвестра для отрицательно определенных квадратичных форм). Для того чтобы вещественная квадратичная форма была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры матрицы этой квадратичной формы четного порядка были положительны, а нечетного — отрицательны.

6.6. Приведение действительной квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогональных преобразований

Рассмотрим действительную квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij} \in \mathbb{R},\ a_{ij} = a_{ji},\ \forall i, j = \overline{1, n} \tag{6.33}$$

или в матричном виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^TAX,\ A \in \mathbb{R}_{n,n},\ A = A^T.$$

Как известно, эта квадратичная форма эквивалентна квадратичной форме в каноническом виде

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2,\ b_{ii} \in \mathbb{R},\ \forall i = \overline{1, n},$$

или в матричном виде

$$g(y_1, \dots, y_n) = Y^T B Y = Y^T \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} Y.$$

Это значит, что найдется невырожденное линейное преобразование переменных $X = HY$, переводящее квадратичную форму f в квадратичную форму g. Но тогда матрицы A и B связаны соотношением

$$B = H^T A H,$$

причем матрица B – диагональная.

С другой стороны, матрицу A квадратичной формы можно рассматривать как матрицу некоторого симметрического преобразования f евклидова пространства V_n в некотором ортонормированном базисе

$$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \dots, \boldsymbol{i}_n) \tag{6.34}$$

этого пространства.

Как известно [6], в этом случае для оператора f существует ортонормированный базис

$$(\boldsymbol{i}'_1, \boldsymbol{i}'_2, \dots, \boldsymbol{i}'_n) \tag{6.35}$$

из собственных векторов оператора f.

А это значит, что если S- матрица перехода от базиса (6.34) к базису (6.35), то:

1) матрица $S^{-1}AS$ – матрица оператора f в новом ортонормированном базисе (6.35);

2) матрица $S^{-1}AS$ является диагональной, причем на главной диагонали стоят собственные значения оператора f;

3) учитывая, что базисы (6.34), (6.35) ортонормированы, то верно равенство $S^{-1} = S^T$, т.е. матрица S ортогональна.

Отсюда следует, что в качестве невырожденного линейного преобразования, переводящего квадратичную форму (6.33) к каноническому виду, можно рассматривать преобразование $X = SY$, где S - ортогональная матрица, т.е. матрица некоторого ортогонального преобразования евклидова пространства V_n. Итак, верна следующая теорема.

Теорема 6.14. Любая вещественная квадратичная форма f с помощью ортогонального преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду, причем коэффициенты при квадратах переменных в каноническом виде суть собственные значения матрицы квадратичной формы f.

Алгоритм приведения квадратичной формы от n переменных каноническому виду с помощью ортогональных преобразований

1. Выписываем матрицу A квадратичной формы.

2. Решаем характеристическое уравнение, т.е. находим собственные значения матрицы A. Это будут коэффициенты при квадратах переменных в каноническом виде.

3. Находим n линейно независимых собственных векторов (базис евклидова пространства V_n, состоящий из собственных векторов некоторого симметрического оператора f, имеющего в некотором ортонормированном базисе этого пространства своей матрицей матрицу A).

4. Строим ортонормированный базис.

5. Составляем матрицу искомого ортогонального преобразования.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Показать, что преобразование f пространства V_3, действующее по правилу $f(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]]$, $\forall \boldsymbol{x} \in V_3$, где $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, является линейным, и найти его матрицу в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

Решение. Используя свойства векторного произведения, получаем $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}]] = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}]] = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]] + [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}]] = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ из V_3, а также $f(\alpha\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}, [\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]] = [\boldsymbol{a}, \alpha[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]] = \alpha[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]] = \alpha f(\boldsymbol{x})$ для любого $\alpha \in R$ и $\boldsymbol{x} \in V_3$. Итак, преобразование f линейно. Для нахождения матрицы A необходимо вычислить векторы $f(\boldsymbol{i}), f(\boldsymbol{j}), f(\boldsymbol{k})$. Сначала найдем координаты вектора $f(\boldsymbol{i}) = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}]]$. Поскольку

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},$$

постольку

$$f(\boldsymbol{i}) = [\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Аналогично, $f(\boldsymbol{j}) = -4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $f(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$. Поэтому имеем

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Пусть линейный оператор f пространства многочленов степени не больше 2 имеет в базисе $G = (1, x, x^2)$ матрицу

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

а оператор g в базисе $H = (1, x - 1, (x - 1)^2)$ — матрицу

$$B_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицы линейных операторов $f \circ g, f + g, 5f$ в базисе H.

Решение. Обозначим искомые матрицы через $B_{f\circ g}, B_{f+g}, B_{5f}$. Сначала найдем матрицу B_f оператора f в базисе H, а затем воспользуемся тем, что согласно теоремам 4.2, 4.3, 4.4 матрицы $B_{f\circ g} = B_f B_g$, $B_{f+g} = B_f + B_g$, $B_{5f} = 5B_f$. Для нахождения матрицы B_f ищем матрицу перехода S от базиса G к базису H, для чего выражаем векторы базиса H через векторы базиса $G : 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$, $x - 1 = -1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2$, $(x-1)^2 = 1\cdot 1 - 2\cdot x + 1\cdot x^2$. Располагая полученные координаты в столбцы, образуем матрицу S :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как $B_f = S^{-1}A_fS$ (см. формулу (4.16)), то матрицу B_f можно найти, решив матричное уравнение $SB_f = A_fS$. В силу того, что

$$A_fS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

составляем расширенную матрицу для вышеуказанного уравнения и решаем его методом Гаусса:

$$[S|A_fS] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно,

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, вычисляем искомые матрицы

$$B_{f\circ g} = B_fB_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{f+g} = B_f + B_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{5f} = 5B_f = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Пусть f — линейное преобразование пространства V_3 (пространства свободных геометрических векторов) — имеет в ортонормированном базисе $G = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ своей матрицей матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу B этого преобразования в базисе $H = (\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$.

Решение. Для нахождения матрицы B первоначально найдем матрицу S перехода от базиса G к базису H :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что $B = S^{-1}AS$, перепишем это соотношение в виде

$$SB = AS.$$

В результате имеем матричное уравнение относительно неизвестной матрицы B. Вычисляем матрицу AS и решаем затем это матричное уравнение, привлекая метод Гаусса:

$$AS = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & -6 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 0 & 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно,

$$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Найти собственные векторы линейного преобразования f векторного пространства $R_{3,1}$, заданного в некотором базисе этого пространства матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение данного преобразования имеет вид

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729 = 0.$$

Вычисляем характеристические числа и их кратности: $\lambda_1 = 9$, $k_1 = 2$; $\lambda_2 = -9$, $k_2 = 1$. Так как характеристические числа являются действительными, то они являются собственными значениями этого оператора.

Чтобы найти координатные столбцы базиса подпространства L_{λ_1} — подпространства собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1, полагаем в уравнении $(A - \lambda E_3)U = 0$ λ равным 9. Имеем

$$\begin{bmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решая это матричное уравнение, находим столбцы $U_1 = [1,\ -2,\ 0]^T$, $U_2 = [0,\ -2,\ 1]^T$, которые являются координатными столбцами базиса подпространства L_{λ_1}. Но тогда $L_{\lambda_1} = L(U_1, U_2)$. Другими словами говоря, любой вектор $\alpha U_1 + \beta U_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha - 2\beta \\ \beta \end{bmatrix}$, где α и β — произвольные действительные числа и такие, что $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, является собственным вектором преобразования f, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = 9$.

Аналогично находим координатный столбец $U_3 = [2,\ 1,\ 2]^T$ базиса подпространства L_{λ_2}.А это значит, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_2 = -9$, имеет вид $U_3 = \begin{bmatrix} 2\gamma \\ \gamma \\ 2\gamma \end{bmatrix}$, $\gamma \in R, \gamma \neq 0$.

Пример 5. Доказать, что преобразование $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_2, 2x_1+ +x_2 + x_3)$ пространства $R_{1,3}$ линейно, и найти его матрицу в каноническом базисе $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ этого пространства.

Решение. Исходное преобразование запишем в виде $f(X) = XB$, где $X = (x_1, x_2, x_3)$ и

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда, используя дистрибутивность умножения матриц относительно сложения, для любых двух матриц-строк $X, Y \in R_{1,3}$ имеем $f(X+Y) = (X+Y)B = XB + YB = = f(X) + f(Y)$. Аналогично для любого $\alpha \in R$ и $X \in R_{1,3}$ получаем $f(\alpha X) = (\alpha X)B = = \alpha(XB) = \alpha f(X)$. Далее, так как $f(1,0,0) = (1,0,2)$, $f(0,1,0) = (1,2,1)$, $f(0,0,1) = = (0,0,1)$, то матрица A оператора f в каноническом базисе $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ пространства $R_{1,3}$ имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B^T.$$

Пример 6. Найти матрицу и ранг следующей квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Решение. Исходя из определения квадратичной формы, матрица этой формы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Так как ранг матрицы A равен 3, то и ранг исходной квадратичной формы равен 3.

Пример 7. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_2 + +4x_1x_3 - 6x_2x_3$ к каноническому виду и найти соответствующее невырожденное линейное преобразование переменных.

Решение. Так как среди коэффициентов a_{ii}, $1 \leq i \leq 3$, есть отличные от нуля, например, $a_{11} = 2 \neq 0$, то выделим полный квадрат по переменной x_1 :
$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3) + 7x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_2x_3 = 2(x_1^2 - 2x_1(2x_2 - x_3) + +(2x_2 - x_3)^2) - 2(2x_2 - x_3)^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_2x_3 = 2(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (-x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2)$.

Далее в квадратичной форме $-x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$ выделим полный квадрат по переменной x_2. В результате имеем

$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 + 3x_3^2$.

Применим преобразование переменных

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 = & x_1 - 2x_2 + x_3, \\ y_2 = & x_2 - x_3, \\ y_3 = & x_3, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = & y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = & y_2 + y_3, \\ x_3 = & y_3, \end{array} \right.$$

которое является невырожденным и переводит исходную квадратичную форму к каноническому виду $2y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2$.

Пример 8. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_2x_3$.

Решение. Так как все коэффициенты a_{ii}, $1 \leq i \leq 3$, при квадратах переменных равны нулю, то первоначально применим невырожденное линейное преобразование вида

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

В результате имеем, что квадратичная форма f эквивалентна квадратичной форме $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_3 + 2y_2y_3$.

Так как в этой квадратичной форме коэффициент при y_1^2 отличен от нуля, то выделим в ней полный квадрат по переменной y_1, а затем по переменной y_2 :

$$g(y_1, y_2, y_3) = (y_1 - y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2.$$

Применив преобразование

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3, \\ z_2 = y_2 - y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

получим канонический вид исходной квадратичной формы $z_1^2 - z_2^2$.

Пример 9. Найти нормальный вид следующей квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 18x_2x_3$.

Решение. Приведем первоначально исходную квадратичную форму к каноническому виду. Для этого выделим полный квадрат по переменной x_1, затем по переменной x_2 и т.д. Применив невырожденное линейное преобразование вида $\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3, \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ приходим к каноническому виду $y_1^2 - 6y_2^2 - \dfrac{1}{2}y_3^2$.

В свою очередь, применяя к последней квадратичной форме невырожденное линейное преобразование вида $\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = \sqrt{6}y_2, \\ z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3, \end{cases}$ приходим к нормальному виду исходной квадратичной формы: $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$.

Пример 10. Выяснить, являются ли эквивалентными следующие квадратичные формы

$f_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

$f_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 2x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_2x_3$.

Решение. Приведем обе квадратичные формы к нормальному виду (см. пример 9). Имеем $f_1 \sim z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, $f_2 \sim u_1^2 - u_2^2 - u_3^2$. Так как нормальный вид первой квадратичной формы содержит три положительных квадрата, то ранг этой квадратичной формы равен 3 и сигнатура также равна 3. В то же время, нормальный вид второй квадратичной формы содержит один положительный и два отрицательных квадрата, а это значит, что ранг этой квадратичной формы также равен 3, но сигнатура равна

-1. На основании критерия эквивалентности действительных квадратичных форм заключаем, что квадратичная форма f_1 не является эквивалентной квадратичной форме f_2.

Пример 11. При каких значениях λ квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$ является положительно определенной?

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы f : $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{bmatrix}$. В соответствии с критерием Сильвестра потребуем, чтобы все главные угловые миноры этой матрицы были положительны:

$$\Delta_1 = 4 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - 52 > 0.$$

Следовательно, форма f положительно определена лишь при $\lambda > \dfrac{52}{3}$.

Пример 12. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Решение. В соответствии с алгоритмом приведения квадратичной формы от n переменных каноническому виду с помощью ортогональных преобразований, выписываем матрицу исходной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

и решаем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E_3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 0$ имеют соответственно кратности $k_1 = 2$, $k_2 = 1$. Они являются собственными значениями матрицы A и являются коэффициентами при квадратах переменных в каноническом виде исходной квадратичной формы f, т.е. $f \sim 6y_1^2 + 6y_2^2$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям. Координаты (u_1, u_2, u_3) собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_1 = 6$ кратности $k_1 = 2$, определим из системы уравнений вида (4.26), заменяя в ней λ на λ_1. В результате имеем систему, состоящую из одного уравнения $u_1 + 2u_2 + u_3 = 0$. Находим координатные столбцы $U_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ базисных собственных векторов подпространства L_{λ_1} – подпространства собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1. Отметим, что $L_{\lambda_1} = L(U_1, U_2)$ и $\dim L_{\lambda_1} = 2$.

Координаты (u_1, u_1, u_3) собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_2 = 0$ кратности $k_2 = 1$, определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} 5u_1 - 2u_2 - u_3 = 0, \\ -2u_1 + 2u_2 - 2u_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем $U_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ — координатный столбец базисного собственного вектора подпространства L_{λ_2}, а это значит, что $L_{\lambda_2} = L(U_3)$ и $\dim L_{\lambda_2} = 1$.

Итак, (U_1, U_2, U_3) — базис из собственных векторов. Строим ортонормированный базис из собственных векторов. Для этого в каждом из подпространств L_{λ_1} и L_{λ_2} строим свой собственный ортонормированный базис из собственных векторов.

Рассмотрим подпространство L_{λ_1}. Используя процесс ортогонализации, по системе векторов U_1, U_2 находим первоначально ортогональный базис: $V_1 = U_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$V_2 = U_2 - \dfrac{2}{5}V_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$. Пронормировав векторы V_1 и V_2, получим

$$V_1' = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_2' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

В подпространстве L_{λ_2} производим лишь нормировку вектора U_3 :

$$V_3' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Из координатных столбцов V_1', V_2', V_3' составляем теперь матрицу S искомого ортонормированного преобразования, переводящего данную квадратичную форму к каноническому виду $6y_1^2 + 6y_2^2$:

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Само искомое преобразование имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = & -\frac{2}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_2 = & \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{30}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_3 = & \frac{5}{\sqrt{30}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3. \end{cases}$$

Пример 13. Пусть линейный оператор в некотором базисе трехмерного векторного пространства V над полем C задан матрицей

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Построить в этом пространстве жорданов базис для оператора φ.

Решение. Находим собственные значения и координатные столбцы базисов пространств собственных векторов данного оператора. Так, $\lambda_1 = -1$ является трехкратным собственным значением, которому соответствуют два координатных столбца вектора базиса подпространства L_{λ_1} :

$$X_1 = [-1, 1, 0]^T, \ X_2 = [1, 1, 2]^T.$$

Поскольку $\dim L_{\lambda_1} = 2 < 3$, то в подпространстве L_{λ_1} существует базис, для одного из векторов которого можно построить присоединенный вектор. Таким вектором является собственный вектор соответствующий координатному столбцу X_2. Координатный столбец Y присоединенного вектора определяется из матричного уравнения

$$(A_\varphi - \lambda_1 E_3)Y = X_2,$$

или

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Отсюда $Y = [0, 2, 1]^T$. Итак, жорданов базис состоит из векторов, которые в исходном базисе имеют координатные столбцы X_1, X_2, Y.

ЗАДАЧИ

1. Выяснить, являются ли следующие отображения φ пространства V_3 (пространства геометрических векторов) в соответствующее векторное пространство линейным, если вектор $\boldsymbol{x}$ означает произвольный вектор пространства V_3 с координатами x_1, x_2, x_3 в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ правой прямоугольной декартовой системы координат и φ определяется как:

1. $\varphi : V_3 \to R,\ \varphi(x) = \boldsymbol{xa},\ \boldsymbol{a} \in V_3$;
2. $\varphi : V_3 \to V_3,\ \varphi(\boldsymbol{x}) = x_2\boldsymbol{i} + (x_1 + 2x_2)\boldsymbol{j} - 3x_3\boldsymbol{k}$;
3. $\varphi : V_3 \to V_3,\ \varphi(x) = x_3^2\boldsymbol{i} + (x_1 + x_2)\boldsymbol{j}$.

2. Показать, что интегральный оператор Фредгольма, который заданную функцию $x(t) \in C([a,b])$ отображает в функцию $y(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$, где $K(t,s)$ — фиксированная непрерывная на $[a,b] \times [a,b]$ функция двух переменных (ядро оператора Фредгольма), является линейным преобразованием пространства непрерывных функций $C([a,b])$ на отрезке $[a,b],\ a, b \in R,\ a < b$.

3. Доказать, что ортогональное проектирование пространства V_3 на координатную плоскость Oxy есть линейное преобразование, и найти его матрицу в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ данной декартовой прямоугольной системы координат.

4. Показать, что дифференцирование является линейным преобразованием пространства многочленов степени $\leq n$ над полем R и найти его матрицы в базисах:

1. $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$;
2. $\left(1, x - a, \dfrac{(x-a)^2}{2!}, \ldots, \dfrac{(x-a)^n}{n!}\right)$, где a — действительной число.

5. Найти матрицу линейного преобразования $\varphi : R_{1,3} \mapsto R_{1,3}$, переводящего систему векторов $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$ в систему $(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3)$, в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

1. $\boldsymbol{g}_1 = (1,2,3), \boldsymbol{g}_2 = (0,2,3), \boldsymbol{g}_3 = (0,1,2), \boldsymbol{h}_1 = (0,9,10), \boldsymbol{h}_2 = (-1,12,8),$ $\boldsymbol{h}_3 = (0,8,5)$;
2. $\boldsymbol{g}_1 = (2,0,1), \boldsymbol{g}_2 = (0,-1,2), \boldsymbol{g}_3 = (2,1,3), \boldsymbol{h}_1 = (3,-1,2), \boldsymbol{h}_2 = (1,-3,1),$ $\boldsymbol{h}_3 = (6,-2,1)$.

6. Найти матрицу преобразования f в V_3, для которого $\ker f = V_2(\pi)$, $\mathrm{Im} f = V_1(\Delta)$, где π — плоскость с уравнением $x - 2y + z = 0$, а Δ — прямая с уравнением $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{2}$.

7. Найти матрицу линейного преобразования f пространства $R_{1,3}$, если $\ker f = L(\boldsymbol{a}_1)$, $\mathrm{Im} f = L(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, где $\boldsymbol{a}_1 = (13,2,7)$; $\boldsymbol{b}_1 = (1,5,-5)$; $\boldsymbol{b}_2 = (-4,-7,-6)$.

8. Найти матрицу оператора дифференцирования линейного пространства функций вида $\alpha e^{at}\cos bt + \beta e^{at}\sin bt$, где $\alpha, \beta, a, b \in R$ (a и b фиксированы) в базисе $(e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt)$.

9. Найти базис ядро линейного преобразования f пространства $R_{3,1}$, если это преобразование задано матрицей A :

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{bmatrix};\ 2. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix};\ 3. A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 4 & -10 & 6 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Дана матрица A линейного преобразования f векторного пространства U_n в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Найти матрицу этого преобразования в базисе $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}'_1 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2;$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2;$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ U_3 = R_2[t],\ \boldsymbol{e}_1 = 1, \boldsymbol{e}_2 = t,\ \boldsymbol{e}_3 = t^2,\ \boldsymbol{e}'_1 = t^2 - t + 1,$
$\boldsymbol{e}'_2 = 2t^2 - 1,\ \boldsymbol{e}'_3 = t.$

11. Показать, что отображение $X \mapsto AXB$ пространства матриц $R_{2,2}$ в пространство матриц $R_{2,3}$ является линейным, и найти его матрицу в канонических базисах, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Линейное преобразование φ в базисе $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, где $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1), \boldsymbol{a}_2 = (1, 2)$, имеет матрицу $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, где $\boldsymbol{b}_1 = (2, -1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-1, 1)$, – матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Найти матрицу преобразования $\varphi \circ \psi$ в базисе $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$.

13. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в каноническом базисе пространства $R_{3,1}$ матрицей A :

$$1.\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix};\ 2.\ A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix};\ 3.\ A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

14. Существует ли базис, в котором линейное преобразование с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

векторного пространства $R_{4,1}$ имеет диагональную матрицу? Если да, то найти этот базис и эту матрицу.

15. Выписать матрицу билинейной формы:

1. $\Phi(X, Y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_1y_3 - 4x_2y_2 + x_2y_3 + 5x_3y_1 + 3x_2y_1 + x_3y_2;$
2. $\Phi(X, Y) = 5x_1y_2 + 7x_1y_3 - 2x_2y_2 + x_2y_3 + 5x_2y_1 + 7x_3y_1 + x_3y_2 + 5x_3y_3.$

16. Найти билинейную форму, если известна ее матрица:

$$1.\ A_\Phi = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix};\ 2.\ A_\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

17. Составить квадратичную форму, ассоциированную с данной билинейной формой:

1. $\Phi(X,Y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 4x_1y_3 - 3x_2y_1 + x_2y_3 + 4x_3y_1 + x_3y_2 - 2x_3y_3$;
2. $\Phi(X,Y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2 - 3x_2y_3 - 2x_3y_1 - 3x_3y_2$.

18. Найти билинейную форму, с которой ассоциирована данная квадратичная форма:

1. $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
2. $f(x_1,x_2,x_3) = 7x_1^2 + 5x_1x_2 - 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3$.

19. Привести следующие квадратичные формы к каноническому виду посредством невырожденного линейного преобразования переменных:

1. $x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3$;
2. $3x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_2x_3$;
3. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
4. $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$;
5. $3x_1^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3$;
6. $x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3$.

20. Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм:

1. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
2. $x_1x_2 + x_2x_3$;
3. $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

21. Для данных квадратичных форм f и g найти невырожденное линейное преобразование, переводящее форму f в форму g :

1. $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 12x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 12x_2x_3$,
$g = 2y_1^2 + 9y_2^2 + 3y_3^2 + 8y_1y_2 - 4y_1y_3 - 10y_2y_3$;
2. $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$,
$g = 3y_1^2 + y_2^2 + \dfrac{1}{4}y_3^2 + 6y_1y_2 + 3y_1y_3 + 5y_2y_3$;

22. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

1. $x_1^2 + 4x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_3$;
2. $3x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;
3. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

23. Привести к каноническому виду ортогональным преобразованием квадратичные формы:

1. $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
2. $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
3. $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

ОТВЕТЫ

1. 1) Да; 2) да; 3) нет.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. 1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. 1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

9. 1) Базис ядра: $\left(\begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}\right)$, базис образа: $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$;

2) базис ядра: $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ базис образа: $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$;

3) базис ядра: $\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$, базис образа: $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

10. 1) $\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 12 \\ 0 & 12 & 0 & 16 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}$.

13. 1) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2$, столбец $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_1}; столбец $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_2};

2) $\lambda_1 = 0,\ k_1 = 2,\ \lambda_2 = 12,\ k_2 = 1$, столбцы $\left(\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ – базис L_{λ_1}; столбец $\begin{bmatrix}3\\-3\\1\end{bmatrix}$ – базис L_{λ_2};

3) $\lambda_1 = 1,\ k_1 = 1$, столбец $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ – базис L_{λ_1}.

14. Да, система $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, (\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, (\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, (\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right)$ – базис, а матрица имеет вид $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$.

15. 1) $\begin{bmatrix}2&3&5\\3&-4&1\\5&1&0\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}0&5&7\\5&-2&1\\7&1&5\end{bmatrix}$.

16. 1) $2x_1y_1 - x_1y_2 + 4x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_3 + 4x_3y_1 + 5x_3y_2 - x_3y_3$;
2) $-x_1y_1 + 3x_1y_3 + 2x_2y_2 + 7x_2y_3 + 3x_3y_1 + 7x_3y_2$.

17. 1) $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$;
2) $x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3$.

18. 1) $2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 - 3x_3y_3 - 3x_2y_3 + x_3y_1 - 3x_3y_2$;
2) $7x_1y_1 + \frac{5}{2}x_1y_2 - 3x_1y_3 + \frac{5}{2}x_2y_1 - 2x_2y_2 + 4x_2y_3 - 3x_3y_1 + 4x_3y_2$.

19. 1) $y_1^2 - y_2^2,\ x_1 = y_1 + 2y_3 - 3y_2,\ x_2 = y_3,\ x_3 = y_2$;
2) $3y_1^2 - 2y_2^2 - 3y_3^2,\ x_1 = y_1,\ x_2 = y_2 - y_3,\ x_3 = y_3$;
3) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2,\ x_1 = y_1 - y_2 - y_3,\ x_2 = y_1 + y_2 - y_3,\ x_3 = y_3$;
4) $2y_1^2 + 3y_2^2,\ x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_2 + y_3,\ x_3 = y_3$;
5) $3y_1^2 - \frac{4}{3}y_2^2 + 2y_3^2,\ x_1 = \frac{2}{3}y_2 + y_1,\ x_2 = y_2 + \frac{3}{2}y_3,\ x_3 = y_3$;
6) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,\ x_1 = y_1 - y_2 - y_3,\ x_2 = 2y_2 + 2y_3,\ x_3 = y_3$.

20. 1) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2,\ x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_3,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_3,\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_3$;
2) $y_1^2 - y_2^2,\ x_1 = y_1 - y_2 - y_3,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_3 = y_3$;
3) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2,\ x_1 = \frac{1}{2}y_3,\ x_2 = \frac{3}{2\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{2}y_3,\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{2\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{2}y_3$.

21. 1) $x_1 = y_1 + 3y_2 - 2y_3,\ x_2 = y_2 - 3y_3,\ x_3 = y_3$; 2) $x_1 = y_1 + y_3,\ x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3,\ x_3 = y_3$.

22. 1) $\lambda > 1$; 2) требуемых значений λ не существует; 3) $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$.

23. 1) $4x_1'^2 + x_2'^2 - 2x_3'^2,\ x_1' = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3,\ x_2' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,\ x_3' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$;
2) $2x_1'^2 - x_2'^2 + 5x_3'^2,\ x_1' = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,\ x_2' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3,\ x_3' = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$.

3) $7x_1'^2+4x_2'^2+x_3'^2$, $x_1' = \dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{2}{3}x_2-\dfrac{2}{3}x_3$, $x_2' = \dfrac{2}{3}x_1+\dfrac{1}{3}x_2+\dfrac{2}{3}x_3$, $x_3' = -\dfrac{2}{3}x_1+\dfrac{2}{3}x_2+\dfrac{1}{3}x_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер М.: Наука, 1967. 575 с.

2. *Деменчук, А. К.* Матричный анализ в примерах и задачах / А. К. Деменчук, Б. Б. Комраков, Г. П. Размыслович, В. М. Ширяев. Минск: БГУ, 2008. 158с.

3. *Ильин, В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. М.: Наука 1981., 294 с

4. *Милованов, М. В.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. I / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. Минск: Выш. шк., 1976. 544 с.

5. *Милованов, М. В.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. II / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. Минск: Выш. шк. 1984. 302 с.

6. *Размыслович, Г. П.* Геометрия и алгебра / Г. П. Размыслович, М. М. Феденя, В. М. Ширяев. Минск: "Университетское" , 1987. 350 с.

7. *Размыслович, Г. П.* Сборник задач по геометрии и алгебре. / Г. П. Размыслович, М. М. Феденя, В. М. Ширяев. Минск: "Университетское" , 1999. 384 с

8. *Размыслович, Г. П.* Геометрия и алгебра: в 5 ч. Ч.1: Матрицы и определители. Системы линейных уравнений / Г. П. Размыслович. Минск: БГУ, 2010. 73 с.

9. *Размыслович, Г.П.* Геометрия и алгебра: в 5 ч. Ч.2: Векторные пространства / Г. П. Размыслович. Минск: БГУ, 2013. 56 с.

10. *Проскуряков, И. В.* Сборник задач по линейной алгебре /И. В. Проскуряков. М.: Наука, 1978. 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Размыслович Георгий Прокофьевич

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Учебные материалы для студентов факультета прикладной математики и информатики

В пяти частях

Часть 3

ЛИНЕЙНЫЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *Г. П. Размыслович*

Подписано в печать 26.05.2014. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 3,2.
Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
Свидетельство государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/270 от 03.04.2014
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.