БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра высшей математики

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Пособие для студентов
факультета прикладной математики и информатики

В пяти частях

Часть 2

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

МИНСК
2013

УДК [514+512](075.8)
ББК 22.14+22.15я73-1
Р17

Рекомендовано советом
факультета прикладной математики и информатики
24 сентября 2013 г., протокол № 1

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент *В. И. Чесалин*

Размыслович, Г. П.

Р17 Геометрия и алгебра: пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 2. Векторные пространства /Г.П.Размыслович. – Минск : БГУ, 2013. – 56 с.

В данной части пособия излагаются основы векторных пространств, подпространств и ранга матрицы.

Пособие предназначено для студентов факультетов прикладной математики и информатики, механико-математических факультетов, а также может представлять интерес и для студентов технических вузов, где преподается курс высшей математики.

УДК [514+512](075.8)
ББК 22.14+22.15я73-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое читателю учебное пособие содержит основы векторных пространств и подпространств, координат вектора, ранга матрицы и является второй частью (первая часть – "Матрицы, определители. Системы линейных уравнений") учебного пособия по курсу геометрия и алгебра, читаемого для студентов факультетов прикладной математики и информатики и соответствует всем типовым программам этого курса для высших учебных заведений по специальностям: 1-31 03 03 - прикладная математика; 1-31 03 04 - информатика; 1-31 03 05 - актуарная математика; 1-31 03 06-01 - экономическая кибернетика; 1-98 01 01-01 - компьютерная безопасность, утвержденным Министерством Образования РБ от 24.09.2008г.

Основу излагаемого материала составляют учебные пособия "Геометрия и алгебра"и "Сборник задач по геометрии и алгебре"(авторы: Размыслович Г.П., Феденя М.М., Ширяев В.М.).

Это пособие состоит из четырех глав, содержащих теоретический материал, иллюстративные примеры, приведены примеры решения задач и цикл задач для самостоятельного решения с ответами. По своему структурному построению оно несколько отличается от первой части.

В заключение отметим, что в данном издании, как и в предыдущем, используются обозначения: ⧫ – начало доказательства утверждения, ■ – конец доказательства.

1. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Определение. Примеры. Простейшие свойства

Пусть V – непустое множество, элементы которого будем называть векторами и обозначать $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$, а P – некоторое поле, элементы которого будем обозначать $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ и называть скалярами.

Определение 1.1. Множество V называется *векторным (линейным) пространством над полем* P, если выполняются следующие условия:

1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$;

2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}),\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$;

3) в множестве V существует вектор, который называется *нулевым*, обозначается $\mathbf{0}$, и такой, что $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in V$;

4) для каждого вектора $\boldsymbol{x} \in V$ существует вектор $\boldsymbol{y} \in V$ такой, что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Вектор $\boldsymbol{y}$ называется *противоположным вектору* $\boldsymbol{x}$ и обозначается $-\boldsymbol{x}$, т.е. $-\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;

5) для любого вектора $\boldsymbol{x}$ верно равенство $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, где 1 – единица поля P;

6) $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in P$;

7) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,\ \forall \alpha \in P$;

8) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in P$.

Примеры векторных пространств

Пример 1.1. Множество V_3 свободных геометрических векторов с их обычным сложением векторов и умножением векторов на действительные числа.

Пример 1.2. Множество $P_{m,n}$ всех матриц размеров $m \times n$ над полем P относительно операций сложения матриц и умножения матриц на элементы поля.

Если $m = 1$, то это пространство называется *арифметическим n-мерным векторным пространством строк длины n*, а если $n = 1$ – *арифметическим m-мерным векторным пространством столбцов длины m*.

Пример 1.3. Множество всех многочленов $P_n[x]$ степени не больше n над полем P, относительно операций сложения многочленов и умножения многочленов на скаляры из поля P.

Пример 1.4. Множество $C([a, b])$ всех вещественных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, относительно операций поаргументного сложения функций и умножения на действительные числа.

Пример 1.5. Множество функций вида $\{\alpha e^x + \beta \sin x + \gamma \cos x | \alpha, \beta, \gamma \in R\}$ относительно операций сложения функций и умножения функций на действительные числа.

Простейшие свойства векторных пространств

1°. В векторном пространстве V существует единственный нулевой вектор.

♦ Предположим, что в пространстве V существуют два нулевых вектора $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$. Тогда $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$, т.к. $\mathbf{0}_2$ – нулевой вектор. С другой стороны, $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$, так как $\mathbf{0}_1$ – нулевой вектор. Сравнивая эти равенства, получаем, что $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.■

2°. В векторном пространстве V для любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует единственный противоположный ему вектор $-\boldsymbol{a}$.

♦ Предположим, что для $\boldsymbol{a}$ существует два противоположных вектора $-\boldsymbol{a}_1$ и $-\boldsymbol{a}_2$. Рассмотрим следующую сумму векторов: $(-\boldsymbol{a}_1)+\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}_2)$. Тогда, с одной стороны, $(-\boldsymbol{a}_1) + \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}_2) = ((-\boldsymbol{a}_1) + \boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a}_2) = \mathbf{0} + (-\boldsymbol{a}_2) = -\boldsymbol{a}_2$. С другой стороны, $(-\boldsymbol{a}_1) + \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}_2) = (-\boldsymbol{a}_1)+(\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}_2)) = (-\boldsymbol{a}_1)+\mathbf{0} = -\boldsymbol{a}_1$. Сравнивая результаты, имеем $-\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_2$.■

3°. Для вектора $-\boldsymbol{a}$ противоположным является вектор $\boldsymbol{a}$.

4°. Произведение числа 0 на любой вектор $\boldsymbol{a} \in V$ есть нулевой вектор пространства V.

♦ $0\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = 0\boldsymbol{a} + ((\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a})) = (0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a}) = (0 + 1)\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 1\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.■

5°. Произведение $(-1)\boldsymbol{a}$ равно вектору $-\boldsymbol{a}$.

♦ $(-1)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = (-1 + 1)\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Поэтому вектор $(-1)\boldsymbol{a}$ противоположен вектору $\boldsymbol{a}$ и, следовательно, $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.■

6°. Произведение любого числа α на $\mathbf{0} \in V$ есть нулевой вектор пространства V.

♦ $\alpha\mathbf{0} = \alpha((\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a})) = \alpha(\boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{a}) = \alpha(1 + (-1))\boldsymbol{a} = \alpha(0\boldsymbol{a}) = 0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.■

7°. Если $\alpha\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ и $\alpha \neq 0$, то $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ или, если $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, то $\alpha = 0$.

♦ Пусть $\alpha \neq 0$. Умножим равенство $\alpha\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ на скаляр α^{-1}, получим $\alpha^{-1}(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha^{-1}\mathbf{0}$. Откуда следует, что $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

Пусть $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$. От противного предположим, что и $\alpha \neq 0$. Тогда, умножив равенство $\alpha\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ на скаляр α^{-1}, получим, что $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Противоречие.

Следовательно $\alpha = 0$.■

1.2. Эквивалентные системы векторов

В векторном пространстве V над полем P рассмотрим конечную систему (последовательность) векторов

$$G = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_k),\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. Вектор $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые скаляры из поля P, называется *линейной комбинацией векторов* системы (1.1) (системы G).

Пусть вектор $\boldsymbol{b} \in V$. Говорят, что вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через систему векторов (1.1) (является линейной комбинацией векторов системы (1.1)), если существуют скаляры $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ из поля P такие, что имеет место равенство

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_n \boldsymbol{a}_n.$$

Если в линейной комбинации $\alpha_i = 0,\ \forall i = \overline{1, k}$, то говорят, что она является *тривиальной*, в противном случае – *нетривиальной.*

Пусть M и N – две произвольные системы векторов векторного пространства V над полем P.

Определение 1.3.Говорят, что система M линейно выражается через систему N, если каждый вектор системы M можно представить в виде линейной комбинации векторов системы N с коэффициентом из поля P.

Ясно, что если в свою очередь система N линейно выражается через некоторую систему Q, то система M линейно выражается через Q, т.е. свойство линейной выражаемости транзитивно.

Определение 1.4.Если система M линейно выражается через систему N, а система N линейно выражается через систему M, то системы M и N называются эквивалентными и это обстоятельство обозначается $M \sim N$.

Из свойства транзитивности линейной выражаемости следует транзитивность эквивалентности системы, т.е. если система M эквивалентна системе N, а система N эквивалентна системе Q, то система M эквивалентна системе Q.

Следовательно, на множестве всех систем векторов пространства V установлено бинарное отношение эквивалентности.

Определение 1.5. Множество векторов вида $\{\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k | \alpha_i \in P\}$, т.е. множество всех линейных комбинаций векторов системы (1.1) с коэффициентами из поля P называется *линейной оболочкой* векторов системы (1.1) или линейной оболочкой порожденной системой (1.1). Линейная оболочка обозначается $L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_k)$ или LG.

Теорема 1.1(критерий эквивалентности систем). Две системы векторов эквивалентны тогда и только тогда, когда их линейные оболочки совпадают.

⧫ Очевидно, что если линейные оболочки двух систем совпадают, то каждый из векторов одной системы линейно выражается через векторы другой системы, т.е. системы эквивалентны. Пусть теперь заданы две любые эквивалентные системы. Рассмотрим любой вектор из линейной оболочки одной системы. По определению линейной оболочки он линейно выражается через векторы этой системы. Так как рассматриваемые системы векторов эквивалентны, то каждый вектор первой системы линейно выражается через векторы второй системы. Поэтому любой вектор из линейной оболочки первой системы обязательно принадлежит линейной оболочке второй системы. Верно и обратное: любой вектор из линейной оболочки второй системы обязательно принадлежит линейной оболочке векторов первой системы, а это значит, что линейные оболочки обеих систем совпадают. ■

1.3. Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 1.6. Конечная система векторов (1.1) (система G) называется *линейно зависимой*, если существуют скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ из поля P не все одновременно равные нулю ($\sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 > 0$), и такие, что верно равенство

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}. \tag{1.2}$$

Определение 1.7. Система векторов, не являющаяся линейно зависимой, называется *линейно независимой*.

Другими словами говоря, система (1.1) является линейно независимой, если равенство (1.2) выполняется тогда и только тогда, когда

$\alpha_i = 0, \forall i = \overline{0, k}$.

Теорема 1.2 Если система векторов (1.1) содержит нулевой вектор, то она является линейно зависимой.

♦ Без ограничения общности, пусть, например, вектор $\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0}$. Ясно, что верно равенство $\alpha_1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}$ для любого $\alpha_1 \in P$, $\alpha_1 \neq 0$. Отсюда, по определению линейной зависимости, следует, что система (1.1) линейно зависима.■

Теорема 1.3 Если какая-нибудь подсистема системы векторов (1.1) линейно зависима, то и вся система векторов (1.1) линейно зависима.

♦ Пусть для некоторого l, $1 \leq l < k$, подсистема $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l)$ линейно зависима. Тогда найдутся скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ из поля P такие, что имеет место равенство

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_l \boldsymbol{a}_l = \mathbf{0},$$

причем $\sum\limits_{i=1}^{l} |\alpha_i|^2 > 0$. Но тогда имеет место и равенство

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k = \mathbf{0},$$

где $\alpha_{l+1} = \alpha_{l+2} = \ldots = \alpha_k = 0$. Отсюда, на основании определения линейной зависимости векторов следует, что и вся система (1.1) линейно зависима. ■

Следствие 1.1.Если система (1.1) линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.

♦ От противного. Пусть некоторая подсистема исходной системы линейно зависима. Тогда, на основании теоремы 1.3, исходная система также линейно зависима. Противоречие. ■

Теорема 1.4 (критерий линейной зависимости векторов). Для того чтобы система, состоящая более чем из одного вектора, была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из векторов этой системы можно было представить в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы.

♦ Необходимость. Пусть система (1.1) линейно зависима, т.е. существуют скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ из поля P не все одновременно равные нулю, такие, что имеет место равенство

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}.$$

Без ограничения общности предположим, например, что $\alpha_1 \neq 0$. Но тогда

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_k,$$

т.е. вектор $\boldsymbol{a}_1$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

Достаточность. Пусть, например, вектор

$$\boldsymbol{a}_l = \beta_1\boldsymbol{a}_1 + \beta_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_{l-1}\boldsymbol{a}_{l-1} + \beta_{l+1}\boldsymbol{a}_{l+1} + \ldots + \beta_k\boldsymbol{a}_k,$$

$1 \le l \le k, \beta_i \in P, i = \overline{1,k}, l \ne i$. Тогда имеет место равенство $\beta_1\boldsymbol{a}_1 + \beta_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots - \boldsymbol{a}_l + \ldots + \beta_k\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}$, а это значит, на основании определения линейной зависимости, что система (1.1) линейно зависима. ■

Замечание 1.1.Можно говорить и о линейной зависимости и независимости бесконечной системы векторов. Бесконечная система векторов называется линейно независимой, если линейно независима каждая ее конечная подсистема, и линейно зависимой, если линейно зависима какая-либо ее конечная подсистема.

Пример 1.6. В пространстве V_3 геометрических векторов система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой, два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*, три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они *компланарны*, а система, состоящая из четырех и более векторов, в пространстве V_3 геометрических векторов всегда линейно зависима.

Пример 1.7. В арифметическом пространстве $P_{1,n}$ строк длины n над полем P система векторов $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, где $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$, линейно независима. В самом деле, пусть

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0},\ \alpha_i \in R,\ \forall i = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) равносильно равенству:

$$(\alpha_1, 0, \ldots, 0) + (0, \alpha_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Но тогда $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, откуда следует, что $\alpha_i = 0,\ \forall i = \overline{1,n}$.

Пример 1.8. Рассмотрим линейное пространство $P_{m,n}$ – матриц размеров $m \times n$ и в нем систему матриц $(\boldsymbol{e}_{11}, \ldots, \boldsymbol{e}_{1n}, \boldsymbol{e}_{21}, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m1} \ldots, \boldsymbol{e}_{mn})$,

где $\boldsymbol{e}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$ – матрица размеров $m \times n$, все элементы которой равны нулю, за исключением одного элемента, который равен единице и этот элемент располагается на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Можно показать, что система $(\boldsymbol{e}_{11}, \ldots, \boldsymbol{e}_{1n}, \boldsymbol{e}_{21}, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}, \ldots$
$\ldots, \boldsymbol{e}_{m1} \ldots, \boldsymbol{e}_{mn})$ линейно независима в пространстве $P_{m,n}$.

Пример 1.9.В пространстве $P_n[x]$ многочленов степени не больше n над полем P система многочленов $(1, x, \ldots, x^n)$ линейно независима.

1.4. Базис и ранг системы векторов

Определение 1.8. Пусть G – некоторая конечная система векторов векторного пространства V над полем P.

Подсистема G_1 системы G называется *базисом* системы G, если выполняются следующие два условия:

1) подсистема G_1 линейно независима;

2) система G линейно выражается через подсистему G_1.

Теорема 1.5. Любые два базиса конечной системы векторов векторного пространства V состоят из одинакового количества векторов.

⧫ Пусть система

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) \tag{1.4}$$

– базис конечной системы G, состоящий из минимального числа векторов, а система

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m) \tag{1.5}$$

– произвольный базис этой же системы. Требуется показать, что $m = k$.

От противного предположим, что $m > k$. Так как система (1.4) – базис системы G, то по определению базиса любой вектор системы G и, в частности, любой вектор системы (1.5) можно представить в виде линейной комбинации векторов (1.4). Это значит, что найдутся скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ такие, что

$$\boldsymbol{b}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k, \tag{1.6}$$

причем $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_k|^2 > 0$ (если бы все $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, k}$, то вектор $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{0}$, а тогда система векторов (1.5) была бы линейно зависима, противоречие).

Пусть для определенности $\alpha_1 \neq 0$. Тогда из (1.6) имеем

$$\boldsymbol{a}_1 = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_k \boldsymbol{a}_k, \tag{1.7}$$

т.е. вектор $\boldsymbol{a}_1$ линейно выражается через систему

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_k). \tag{1.8}$$

Покажем, что система векторов (1.8) является базисом системы G. Докажем первоначально, что система (1.8) линейно независима.

От противного. Пусть система (1.8) линейно зависима, т.е. найдутся скаляры $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ из поля P такие, что выполняется равенство

$$\gamma_1 \boldsymbol{b}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \gamma_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}, \tag{1.9}$$

причем $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \ldots + \gamma_k^2 > 0$.

Ясно, что $\gamma_1 \neq 0$ (если $\gamma_1 = 0$, то система $(\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ линейно зависима, следовательно, линейно зависима и система (1.4), противоречие). Разделим последнее равенство на γ_1 и подставим в (1.7) вместо $\boldsymbol{b}_1$ его выражение через $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Тогда получим, что $\boldsymbol{a}_1$ выражается через $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Снова противоречие. Следовательно, система (1.8) линейно независима. Далее покажем, что G выражается через (1.8). Нетрудно видеть, что системы (1.4) и (1.8) эквивалентны (в силу равенств (1.6) и (1.7)). Исходя из свойства транзитивности линейной выражаемости получаем, что система G выражается через систему (1.8). А это значит, что система (1.8) – базис для системы G.

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{b}_2$ и базис (1.8). Поступая, как и выше, можно показать, что система

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$$

– базис для системы G и т.д. Через k шагов мы получим, что система $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$ – базис для G. Но тогда векторы $\boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ линейно выражаются через систему $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$. Это противоречит тому, что система (1.5) – базис. Значит $m \not> k$.■

Определение 1.9. Число векторов в базисе системы G называется *рангом* этой системы и обозначается $\mathrm{rank}G$ либо $\mathrm{rang}G$

Определение 1.10. Подсистема G_1 системы G называется *максимальной линейно независимой*, если:

1) подсистема G_1 линейно независима;

2) присоединение к подсистеме G_1 любого вектора из системы G дает линейно зависимую систему.

Теорема 1.6. Подсистема G_1 системы G является максимальной линейно независимой тогда и только тогда, когда G_1 является базисом системы G.

♦ Доказательство следует из определения базиса системы векторов и определения максимальной линейно независимой системы.■

Алгоритм нахождения максимальной линейно независимой подсистемы ненулевой системы G

1. Удаляем из исходной системы векторов все нулевые векторы.

2. Помечаем первый ненулевой вектор.

3. Если получившаяся система полностью состоит из помеченных векторов, то процесс заканчиваем и все помеченные векторы образуют максимальную линейно независимую подсистему исходной системы, иначе переходим к следующему шагу.

4. Присоединяем к помеченным векторам первый непомеченный вектор рассматриваемой системы. Если получившаяся система векторов линейно независима, то помечаем этот вектор и переходим к шагу 3, иначе этот вектор удаляем из рассматриваемой системы и переходим к шагу 3.

Замечание 1.2.Указанный способ нахождения максимальной линейно независимой подсистемы системы G называется "снизу вверх". Есть и другие методы, например, "сверху вниз"(см. пример 4, раздел "Примеры решения задач").

Теорема 1.7. Ранги эквивалентных систем равны.

⧫ Пусть система векторов G эквивалентна системе векторов Q, $\mathrm{rank}G = r_1$, а $\mathrm{rank}Q = r_2$. И пусть далее подсистема G_1 – базис системы G, а подсистема Q_1 – базис системы Q. Образуем систему векторов $G \cup Q$. Система G ранга r_1 является базисом этой системы $G \cup Q$, так как G_1 линейно независима, G линейно выражается через G_1 и Q линейно выражается через G_1, в силу определения эквивалентности систем и свойства транзитивности эквивалентных систем. Итак, $\mathrm{rank}(G \cup Q) = r_1$. Аналогичным образом показывается, что Q_1 – базис системы векторов $G \cup Q$, т.е. $\mathrm{rank}(G \cup Q) = r_2$. Отсюда на основании теоремы 1.5 имеем $\mathrm{rank}G = \mathrm{rank}Q$. ■

1.5. Базис и размерность пространств

Определение 1.11. Система векторов векторного пространства V называется *базисом*, если она линейно независима и каждый вектор пространства V линейно выражается через нее.

Векторное пространство, имеющее конечный базис, называется *конечномерным.* Количество векторов в базисе конечномерного пространства V называется *размерностью* пространства V и обозначается $\dim V$. Если $\dim V = n$, то пространство V называется *n-мерным* и обозначается V_n.

Отметим, что векторное пространство, состоящее только из одного нулевого вектора (нулевое линейное пространство), также называется *конечномерным.*

Ненулевое векторное пространство называется *бесконечномерным*, если в нем нет базиса, состоящего из конечного числа векторов.

Замечание 1.3.В курсе линейной алгебры изучаются лишь конечномерные линейные пространства.

Отметим, исходя из теоремы 1.5, что любые два базиса конечномерного векторного пространства V состоят из одинакового количества векторов.

Пример 1.10.В векторном пространстве V_3 свободных геометрических векторов система векторов $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ образует базис, ибо эта система линейно независима и любой вектор этого пространства линейно выражается через векторы этой системы. Следовательно, размерность пространства V_3 равна 3, т.е. $\dim V_3 = 3$.

Пример 1.11. Рассмотрим арифметическое пространство $P_{1,n}$ строк длины n. Как показано в примере 1.7, система векторов

$$(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n), \tag{1.10}$$

где $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0),\ \forall i = \overline{1, n}$, линейно независима.

Покажем, что система (1.10) является базисом в пространстве $P_{1,n}$. Действительно, исходя из определения базиса, осталось показать, что любой вектор пространства $P_{1,n}$ представим в виде линейной комбинации векторов системы (1.10).

Действительно, пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – произвольная строка из $P_{1,n}$. Очевидно, что $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n(0, 0, \ldots, 0, 1) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$, $\alpha_i \in P$, $i = \overline{1, n}$. Итак, система (1.10) – базис пространства $P_{1,n}$ и $\dim P_{1,n} = n$.

Базис (1.10) называется *каноническим базисом арифметического пространства* $P_{1,n}$.

Пример 1.12. В векторном пространстве $P_{m,n}$ матриц размеров $m \times n$ система векторов (см. пример 1.8)

$$(\boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}, \ldots, \boldsymbol{e}_{1n}, \boldsymbol{e}_{21}, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{mn})$$

образует базис. Этот базис называется *каноническим базисом пространства* $P_{m,n}$. Таким образом, $\dim P_{m,n} = mn$.

Пример 1.13. Система многочленов $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ – *канонический базис векторного пространства* $P_n[x]$ – пространства многочленов с коэффициентами из поля P_n степени не больше n. Следовательно, $\dim P_n[x] = n + 1$.

Теорема 1.8. В векторном пространстве V_n любая линейно независимая система состоящая из n векторов является базисом.

⧫ Пусть

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \tag{1.11}$$

– базис пространства V_n, а

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n) \tag{1.12}$$

– произвольная линейно независимая система в V_n. Рассмотрим систему векторов

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n). \tag{1.13}$$

В системе (1.13) система (1.11) является базисом. Покажем, что и система (1.12) – базис для системы (1.13), а из этого, в силу свойства транзитивности линейной выражаемости, следует, что система (1.12) – базис пространства V_n. От противного, пусть система (1.12) не является базисом системы (1.13). Тогда среди векторов $\boldsymbol{a}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ найдется такой, который линейно не выражается через систему (1.12). Без ограничения общности пусть это будет вектор $\boldsymbol{a}_1$. Рассмотрим систему векторов

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n). \tag{1.14}$$

Покажем первоначально, что (1.14) линейно независима.

От противного. Пусть (1.14) линейно зависима, т.е. найдутся скаляры из поля P $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все одновременно равные нулю и такие, что выполняется равенство

$$\alpha_0 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n = \mathbf{0}.$$

Если $\alpha_0 \neq 0$, то из равенства следует, что вектор $\boldsymbol{a}_1$ выражается через систему (1.12). А это противоречит выбору вектора $\boldsymbol{a}_1$. Следовательно, $\alpha_0 = 0$, а тогда последнее равенство приобретает вид $\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n = \mathbf{0}$, причем $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2 > 0$. Но это противоречит тому, что (1.12) – линейно независимая система. Итак, система (1.14) – линейно независимая система векторов. Но, в силу теоремы 1.5, она не является базисом для системы (1.13). Следовательно, в этой системе существует вектор, который линейно не выражается через систему (1.14). Пусть это будет вектор $\boldsymbol{a}_2$. Рассмотрим систему

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n). \tag{1.15}$$

По аналогии с рассмотренным выше показывается, что (1.15) является линейно независимой и не является базисом для системы (1.13), и т.д. Через n шагов мы получим, что (1.13) является линейно независимой и, следовательно, является базисом для самой себя. Это значит, что для системы (1.13) есть два базиса, один из которых состоит из n векторов, а второй – из $2n$ векторов, а это противоречит теореме 1.5. ■

Теорема 1.9. Любая линейно независимая система векторов в пространстве V_n или является базисом, или может быть дополнена до базиса этого пространства.

⧫ Пусть $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ – линейно независимая система векторов в пространстве V_n. Тогда если:

1) $k = n$, то эта система векторов является базисом пространства V_n (см. теорему 1.8);

2) $k > n$ быть не может, так как любая подсистема линейно независимой системы линейно независима, а это значит, что подсистема $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ линейно независима и, следовательно, она образовывает базис пространства V_n. Но тогда векторы $\boldsymbol{a}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно выражаются через этот базис, а это противоречит линейной независимости исходной системы;

3) $k < n$. Тогда система $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ не является базисом пространства V_n, а это значит, что в V_n найдется вектор, который линейно через нее не выражается. Обозначим этот вектор через $\boldsymbol{a}_{k+1}$ и дополним исходную систему этим вектором. Если $k + 1 = n$, то полученная система является базисом пространства V_n. Если же $k + 1 < n$, то дополняем систему вектором $\boldsymbol{a}_{k+2}$, который через нее не выражается, и т.д. Через $n - k$ шагов мы получим линейно независимую систему, которая и будет базисом пространства V_n. ■

Определение 1.12. Система векторов линейного пространства V_n называется *максимальной линейно независимой*, если:

1) она линейно независима;

2) к ней нельзя добавить ни одного вектора из V_n, чтобы полученная система была линейно независимой.

Теорема 1.10. Система векторов пространства V_n является максимальной линейно независимой тогда и только тогда, когда является базисом этого пространства.

⧫ Доказательство непосредственно следует из определения максимальной линейной независимой системы векторов, определения базиса пространства и теоремы 1.6. ■

Из теоремы 1.9 следует метод дополнения некоторой системы векторов пространства V_n до базиса этого пространства.

Алгоритм построения базиса пространства V_n

Пусть в пространстве V_n уже имеется некоторая система

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k),\ 1 \leq k \leq n, \tag{1.16}$$

линейно независимых векторов. Тогда если:

1. $k = n$, то система (1.16) – базис пространства V_n;

2. $k < n$, то в пространстве V_n выберем вектор, который линейно не выражается через векторы системы (1.16) и присоединим его к этой системе. Теперь система состоит из $(k + 1)$-го вектора. Если $k + 1 = n$, то построенная система – базис пространства V_n. Если же $k+1 < n$, то к этой новой системе присоединим вектор, который через нее не выражается, и т.д. Через $n - k$ шагов построим базис пространства V_n.

2. ПОДПРОСТРАНСТВА

2.1. Определение. Критерий подпространства

Пусть V – векторное пространство над полем P, а M – непустое подмножество множества V, в котором определены операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры из поля P, такие же, как и в пространстве V.

Если относительно указанных операций (индуцированых операций) множество M само образует векторное пространство над полем P, то говорят, что M – подпространство пространства V.

Теорема 2.1. (критерий подпространства) Непустое подмножество M множества V является *подпространством* пространства V тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M$ вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in M$;

2) для любого вектора $\boldsymbol{a} \in M$ и любого скаляра α из поля P вектор $\alpha\boldsymbol{a} \in M$.

⧫ Необходимость. Доказательство очевидным образом следует из определений векторных пространства и подпространства над полем P.

Достаточность. Исходя из условия 1) теоремы на множестве M определена алгебраическая операция сложения векторов. Эта операция обладает свойствами коммутативности и ассоциативности ибо такими свойствами она обладает в пространстве V. В силу условия 2) для любого вектора $\boldsymbol{a} \in M$ вектор $(-\boldsymbol{a}) \in M$ ибо $-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a}$ и нулевой вектор также принадлежит M так как $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{a}$.

Таким образом условия 1) – 4) определения векторного пространства выполняются. Нетрудно проверить, что и остальные условия 5) – 8) этого определения также выполняются.■

Замечание 2.1.Исходя из теоремы 2.1, множество M является подпространством пространства V тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно линейных операций над векторами, определенных в пространстве V.

Отметим также, что условия 1), 2) равносильны условию $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \in M$, которое должно выполняться для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M$ и скаляров α и β из поля P.

Примеры подпространств

Пример 2.1.Линейное пространство V является своим же подпространством.

Пример 2.2. Множество $\{\mathbf{0}\}$, состоящее из нулевого вектора пространства V, является подпространством этого пространства. Оно называется *нулевым подпространством.*

Пример 2.3.Линейная оболочка любой системы G пространства V является подпространством пространства V.

2.2. Сумма и пересечение подпространств

Пусть

$$M_1, M_2, \ldots, M_k \tag{2.1}$$

конечная система подпространств пространства V над полем P.

Определение 2.1. Множество

$$M = \{\boldsymbol{m} | \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 + \ldots + \boldsymbol{m}_k, \boldsymbol{m}_i \in M, \forall i = \overline{1, k}\}$$

векторов пространства V называется суммой подпространств (2.1) пространства V и обозначается $\sum\limits_{i=1}^{k} M_i$.

Простейшие свойства суммы подпространств

1°. $\sum\limits_{i=1}^{s} M_i + \sum\limits_{i=s+1}^{k} M_i = \sum\limits_{i=1}^{k} M_i,\ 1 \leq s < k.$

2°. Для любого j, $1 \le j \le k$, подпространство $M_j \subseteq \sum\limits_{i=1}^{k} M_i$.

3°. Если $M_1 \subseteq M_2$, то $M_1 + M_2 = M_2$.

Определение 2.2. Пересечением подпространств (2.1) называется множество всех векторов пространства V одновременно входящих в каждое из этих пространств.

Пересечение подпространств обозначается $\bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$.

Теорема 2.2. Сумма и пересечение подпространств пространства V являются подпространствами пространства V.

⧫ Обозначим через S – сумму подпространств (2.1). Ясно, что $S \ne \emptyset$ ибо подпространство $M_i \in S$ для любого i, $1 \le i \le k$.

Рассмотрим два произвольных вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S$ и два произвольных скаляра $\alpha, \beta \in P$. Докажем, что $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \in S$, тогда на основании критерия подпространства множество S является подпространством пространства V. Действительно, так как $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S$, то на основании определения суммы подпространств, векторы $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b} = \sum\limits_{i=1}^{k} \boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i \in M_i$, $\forall i = \overline{1, k}$. Следовательно, $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \alpha \sum\limits_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i +$
$+\beta \sum\limits_{i=1}^{k} \boldsymbol{b}_i = \sum\limits_{i=1}^{k} (\alpha\boldsymbol{a}_i + \beta\boldsymbol{b}_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \boldsymbol{c}_i \in S$ ибо вектор $\boldsymbol{c}_i = \alpha\boldsymbol{a}_i + \beta\boldsymbol{b}_i \in M_i$, т.к. M_i – подпространство.

Для пересечения подпространств пространства (2.1) доказательство аналогично. ■

Теорема 2.3. Если M – подпространство пространства V_n над полем P, то M – конечно и $\dim M \le n$. При этом, $\dim M = n$ тогда и только тогда, когда $M = V_n$.

⧫ В векторном пространстве V_n над полем P нет линейно независимой системы векторов, состоящих более чем из n векторов. Тогда тем более в подпространстве M нет такой системы, а это значит, что $\dim M \le n$.

Если $\dim M = n$, то базис подпространства M состоит из n векторов и значит является базисом пространства V. Но тогда любой вектор из V принадлежит M и любой вектор из M принадлежит V. А это значит, что подпространство M совпадает с пространством V. ■

В векторном пространстве V над полем P наряду с подпространством M рассмотрим еще одно подпространство N и пусть $\dim M = k, \dim N = p$, а системы векторов

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k), \tag{2.2}$$

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_p) \tag{2.3}$$

– соответственно базисы этих подпространств. Тогда ясно, что $M = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$, $N = L(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_p)$ и, исходя из определения суммы подпространств, имеем

$$M + N = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_p). \tag{2.4}$$

Из соотношения (2.4) следует $\dim(M + N) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_p)$.

Теорема 2.4. Размерность суммы двух подпространств M и N пространства V равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения, т.е.

$$\dim(M + N) = \dim M + \dim N - \dim(M \cap N). \tag{2.5}$$

⧫ Если одно из подпространств M или N является нулевым, то утверждение верно.

Пусть M и N ненулевые подпространства, $D = M \cap N$, $C = M + N$ и система векторов

$$(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_l) \tag{2.6}$$

– базис подпространства D. Дополним систему (2.6)

$$(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_l, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_q), \tag{2.7}$$

– до базиса подпространства M $(l + q = \dim M)$, и до базиса

$$(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_l, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m), \tag{2.8}$$

– подпространства N $(l + m = \dim N)$.

Введем в рассмотрение систему векторов

$$(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_l, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_q, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m) \tag{2.9}$$

и докажем, что она является базисом подпространства $C = M + N$. Покажем первоначально, что система (2.9) линейно независима. Действительно, пусть

$$\begin{gathered} \alpha_1 \boldsymbol{d}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{d}_2 + \ldots + \alpha_l \boldsymbol{d}_l + \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \beta_q \boldsymbol{a}_q + \\ \gamma_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \gamma_m \boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{0}, \\ \alpha_i, \beta_i, \gamma_t \in P,\ \forall i = \overline{1, l},\ j = \overline{1, q},\ t = \overline{1, m}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Перепишем равенство (2.10) в виде

$$\alpha_1 \boldsymbol{d}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{d}_2 + \ldots + \alpha_l \boldsymbol{d}_l + \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_q \boldsymbol{a}_q = \\ = -\gamma_1 \boldsymbol{b}_1 - \gamma_2 \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \gamma_m \boldsymbol{b}_m. \tag{2.11}$$

В левой части равенства (2.11) есть вектор подпространства M, а в правой части – вектор подпространства N, который, если он отличен от нулевого, не принадлежит подпространству D. Следовательно, равенство (2.11) выполняется когда справа и слева есть нулевые векторы. Учитывая, что системы векторов (2.7) и $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ линейно независимы, получаем, что $\alpha_i = 0, \beta_j = 0, \gamma_t = 0, \forall i = \overline{1,l}, j = \overline{1,q}, t = \overline{1,m}$. А это значит, что система (2.9) линейно независима.

Пусть вектор $\boldsymbol{m} \in C$. Тогда он представим в виде $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$, где $\boldsymbol{m}_1 = = \alpha_1 \boldsymbol{d}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{d}_2 + \ldots + \alpha_l \boldsymbol{d}_l + \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \beta_q \boldsymbol{a}_q \in M$, $\boldsymbol{m}_2 = \gamma_1 \boldsymbol{d}_1 + \ldots + \gamma_l \boldsymbol{d}_l + \mu_1 \boldsymbol{b}_1 + + \ldots + \mu_m \boldsymbol{b}_m \in N$, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_q, \mu_t \in P$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{m}$ записывается в виде $\boldsymbol{m} = (\alpha_1 + \gamma_1)\boldsymbol{d}_1 + \ldots + (\alpha_l + \gamma_l)\boldsymbol{d}_l + \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \beta_q \boldsymbol{a}_q + \mu_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \mu_m \boldsymbol{b}_m$, т.е. вектор $\boldsymbol{m}$ является линейной комбинацией векторов системы (2.9). Итак, система (2.9) – базис подпространства C. ■

Пусть S – сумма подпространств (2.1).

Определение 2.3.Сумма S подпространств (2.1) называется прямой, если каждое подпространство $M_i, 1 \le i \le k$, пересекается с суммой остальных подпространств лишь по нулевому подпространству.

Прямая сумма подпространства (2.1) обозначается $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_k$ либо $M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} \ldots \dot{+} M_k$.

Теорема 2.5. (первый критерий прямой суммы подпространств). Для того чтобы сумма S подпространств (2.1) была прямой, необходимо и достаточно, чтобы из любого равенства вида

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{m}_i \in M_i, \tag{2.12}$$

следовали бы равенства

$$\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0},\ \forall i = \overline{1,k}. \tag{2.13}$$

♦ Необходимость. Пусть S – прямая сумма подпространств (2.1) и имеет место равенство (2.12). Перепишем это равенство в виде

$$-\boldsymbol{m}_j = \sum_{i=1, i \ne j}^{k} \boldsymbol{m}_i, \tag{2.14}$$

С одной стороны вектор $\boldsymbol{m}_j$ принадлежит подпространству M_j, с другой стороны, на основании равенства (2.14), вектор $\boldsymbol{m}_j$ принадлежит подпространству $\sum\limits_{i=1, i\neq j}^{k} M_i$. Учитывая, что S прямая сумма, на основании определения, получаем, что $\boldsymbol{m}_j = \boldsymbol{0}$, $1 \leq j \leq k$.

Достаточность. Пусть S – сумма подпространств (2.1) и из любого равенства (2.12) следуют равенства (2.13). Рассмотрим подпространство $M_j, 1 \leq j \leq k$, и обозначим через D – пересечение этого подпространства с суммой остальных подпространств, т. е. с суммой $\sum\limits_{i=1, i\neq j}^{k} M_i$. Тогда, если $\boldsymbol{m} \in D$, то

$$\boldsymbol{m} = \sum_{i=1, i\neq j}^{k} \boldsymbol{m}_i, \;\; \boldsymbol{m}_i \in M_i. \tag{2.15}$$

Равенство (2.15) перепишем в виде

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0}, \tag{2.16}$$

где $\boldsymbol{m}_j = -\boldsymbol{m}$. Учитывая, что из равенства (2.12) следуют равенства (2.13) получаем, что вектор $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$, а, следовательно, подпространство $D = \{\boldsymbol{0}\}$. Значит $S-$ прямая сумма подпространств (2.1). ■

Теорема 2.6. (второй критерий прямой суммы подпространств). Сумма S подпространства (2.1) является прямой тогда и только тогда, когда каждый вектор $\boldsymbol{m} \in S$ лишь единственным образом представляется в виде

$$\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_i \in M_i. \tag{2.17}$$

⧫ Необходимость. Пусть S – прямая сумма подпространств и вектор $\boldsymbol{m} \in S$ наряду с представлением (2.17) представим в виде

$$\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{m}'_i, \boldsymbol{m}'_i \in M_i. \tag{2.18}$$

Вычтем из равенства (2.17) равенство (2.18). Имеем

$$\boldsymbol{0} = \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{m}_i - \boldsymbol{m}'_i). \tag{2.19}$$

Так как вектор $\boldsymbol{m}_i - \boldsymbol{m}_i' \in M_i$, то из равенства (2.19) в силу теоремы 2.5 следует, что $\boldsymbol{m}_i - \boldsymbol{m}_i = \mathbf{0}$, т.е. $\boldsymbol{m}_i' = \boldsymbol{m}_i,\ 1 \leq i \leq k$.

Достаточность. Так как каждый вектор $\boldsymbol{m} \in S$ лишь единственным образом представляется в виде (2.17), а для нулевого вектора таким представлением является $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \ldots + \mathbf{0}$, то из равенства (2.12) следуют равенства (2.13). Отсюда, на основании теоремы 2.5, сумма S – прямая. ■

Следствие 2.1. $\dim(M \oplus N) = \dim M + \dim N$.

3. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

3.1. Определение. Свойства координат

Пусть V_n – n-векторное пространство над полем P и система векторов

$$\mathbf{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \tag{3.1}$$

– базис этого пространства.

Пусть далее $\boldsymbol{x}$ – некоторый вектор из V_n. В силу теоремы 1.8 система векторов

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \tag{3.2}$$

– линейно зависима, т.е. найдутся скаляры $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ из поля P не все одновременно равные нулю и такие, что

$$\gamma_0 \boldsymbol{x} + \gamma_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \gamma_n \boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}.$$

Ясно, что $\gamma_0 \neq 0$, ибо в противном система (3.1) линейно зависима. Перепишем последнее равенство в виде

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n,\ x_i \in P,\ i = \overline{1, n}. \tag{3.3}$$

Определение 3.1. Представление вектора $\boldsymbol{x}$ в виде (3.3) называется *разложением вектора* $\boldsymbol{x}$ по базису (3.1), а коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в этом разложении – *координатами вектора* $\boldsymbol{x}$ в этом базисе.

Отметим, что разложение (3.3) вектора $\boldsymbol{x}$ по базису (3.1) (по базису $\mathbf{E}$) можно записать в векторном виде $\boldsymbol{x} = \mathbf{E}X$, где $X \in P_{n,1}$.

Определение 3.2. Столбец $X \in P_{n,1}$, составленный из координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\mathbf{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ пространства V_n, называется *координатным столбцом вектора* $\boldsymbol{x}$ в базисе $\mathbf{E}$.

Теорема 3.1. Координаты вектора в заданном базисе пространства определяются однозначным образом.

⧫ Пусть наряду с разложением (3.3) вектора $\boldsymbol{x}$ по базису (3.1) существует другое разложение этого вектора, т. е. вектор $\boldsymbol{x}$ представим в виде

$$\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n. \tag{3.4}$$

Вычитая из равенства (3.3) равенство (3.4), получаем

$$\boldsymbol{0} = (x_1 - y_1)\boldsymbol{e}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (x_n - y_n)\boldsymbol{e}_n. \tag{3.5}$$

Так как система векторов (3.1) – базис, то отсюда следует, что $x_i - y_i = 0$, т.е. $x_i = y_i,\ \forall i = \overline{1, n}$. ■

Свойства координат векторов

1°. Вектор является нулевым вектором пространства тогда и только тогда, когда все его координаты в любом базисе равны нулю.

⧫ Если все координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в некотором базисе, например в базисе (3.1), равны нулю, то ясно, что $\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + \ldots + 0\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$.

Обратно. Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Разложим этот вектор по базису $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Имеем $\boldsymbol{0} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$. Поскольку система векторов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ линейно независима, получаем $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. ■

2°. Два вектора пространства V_n равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в одном и том же базисе пространства V_n.

⧫ Доказательство производится на основании определения координат вектора и указанного выше свойства 3.1. ■

3°. Вектор $\boldsymbol{x}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ тогда и только тогда, когда каждая координата вектора $\boldsymbol{x}$ в некотором базисе пространства V_n является такой же линейной комбинацией соответствующих координат векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ в том же базисе пространства V_n.

⧫ Необходимость. Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$, т.е. имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \beta_1\boldsymbol{x}_1 + \beta_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \beta_r\boldsymbol{x}_r, \beta_i \in P, \forall i = \overline{1, r}. \tag{3.6}$$

И пусть в некотором базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ и вектор $\boldsymbol{x}$, в свою очередь, представимы в виде

$$\boldsymbol{x}_i = \gamma_{1i}\boldsymbol{e}_1 + \gamma_{2i}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \gamma_{ni}\boldsymbol{e}_n, \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{x} = \gamma_1 \boldsymbol{e}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \gamma_n \boldsymbol{e}_n i = \overline{1, r}. \qquad (3.8)$$

Подставим соотношения (3.7), (3.8) в (3.6). Получим $\gamma_1 \boldsymbol{e}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \gamma_n \boldsymbol{e}_n = \beta_1(\gamma_{11}\boldsymbol{e}_1 + \gamma_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \gamma_{n1}\boldsymbol{e}_n) + \ldots + \beta_r(\gamma_{1r}\boldsymbol{e}_1 + \gamma_{2r}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \gamma_{nr}\boldsymbol{e}_n)$. Отсюда следует, что $\mathbf{0} = (\beta_1\gamma_{11} + \beta_2\gamma_{12} + \ldots + \beta_r\gamma_{1r} - \gamma_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (\beta_1\gamma_{n1} + \beta_2\gamma_{n2} + \ldots + \beta_r\gamma_{nr} - \gamma_n)\boldsymbol{e}_n$. В силу линейной независимости системы векторов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ получаем, что

$$\begin{cases} \gamma_1 = \beta_1\gamma_{11} + \beta_2\gamma_{12} + \ldots + \beta_r\gamma_{1r}, \\ \gamma_2 = \beta_1\gamma_{21} + \beta_2\gamma_{22} + \ldots + \beta_r\gamma_{2r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_n = \beta_1\gamma_{n1} + \beta_2\gamma_{n2} + \ldots + \beta_r\gamma_{nr}. \end{cases} \qquad (3.9)$$

Достаточность. Пусть координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}_i$ $(1 \le i \le r)$ в некотором базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ связаны соотношениями (3.9). Требуется доказать, что выполняется равенство (3.6). Умножим первое равенство в (3.9) на вектор $\boldsymbol{e}_1$, второе – на вектор $\boldsymbol{e}_2$ и т.д., последнее – на вектор $\boldsymbol{e}_n$ и затем все эти равенства сложим. Получим $\gamma_1\boldsymbol{e}_1 + \gamma_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \gamma_n\boldsymbol{e}_n = (\beta_1\gamma_{11} + \beta_2\gamma_{12} + \ldots + \beta_r\gamma_{1r})\boldsymbol{e}_1 + (\beta_1\gamma_{21} + \beta_2\gamma_{22} + \ldots + \beta_r\gamma_{2r})\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (\beta_1\gamma_{n1} + \beta_2\gamma_{n2} + \ldots + \beta_r\gamma_{nr})\boldsymbol{e}_n$. Далее, используя (3.7), (3.8), имеем $\boldsymbol{x} = \beta_1\boldsymbol{x}_1 + \beta_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \beta_r\boldsymbol{x}_r$. ■

3.2. Преобразования координат

Пусть V_n – некоторое векторное пространство над полем P, а

$$\mathbf{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n), \qquad (3.10)$$

$$\mathbf{E}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n) \qquad (3.11)$$

– два его базиса. И пусть далее $\boldsymbol{x}$ – некоторый вектор пространства V_n, который в базисе (3.10) имеет координатный столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, а в базисе (3.11) – координатный столбец $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Как связаны между собой координатные столбцы X и X'? Чтобы установить эту зависимость, первоначально определим зависимость между базисами (3.10) и (3.11).

Разложим векторы базиса (3.11) по базису (3.10). Пусть

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \alpha_{11}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_{n1}\boldsymbol{e}_n, \\ \boldsymbol{e}'_2 = \alpha_{12}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_{n2}\boldsymbol{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{e}'_n = \alpha_{1n}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_{nn}\boldsymbol{e}_n, \end{cases} \tag{3.12}$$

где $\alpha_{ij} \in P$, $\forall i, j = \overline{1, n}$.

Обозначим через

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицу, составленную из координатных столбцов векторов базиса (3.11) в базисе (3.10). Тогда (3.12) можно записать в виде

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot S. \tag{3.13}$$

Определение 3.3. Матрица S, столбцами которой являются координатные столбцы векторов базиса $\mathbf{E}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ в базисе $\mathbf{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, называется *матрицей перехода* от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{E}'$.

Так как система (3.11) – базис, то матрица S является невырожденной, и следовательно, для нее существует обратная матрица S^{-1}. Тогда, умножив равенство (3.13) справа на матрицу S^{-1}, получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' \cdot S^{-1}. \tag{3.14}$$

Формула (3.14) дает выражение базиса (3.10) через базис (3.11). А это значит, что S^{-1} – матрица перехода от базиса (3.11) к базису (3.10).

Далее, с одной стороны, $\boldsymbol{x} = \mathbf{E}X$, а с другой стороны, $\boldsymbol{x} = \mathbf{E}X'$. Отсюда $\mathbf{E}X =$
$= \mathbf{E}X'$. В силу формулы (3.13), имеем $\mathbf{E}X = \mathbf{E}SX'$ или

$$\mathbf{E}(X - SX') = 0. \tag{3.15}$$

Из равенства (3.15) следует, что $X - SX'$ – координатный столбец нулевого вектора в базисе (3.10). Это значит, что этот столбец-нулевой, т.е. $X - SX' = 0$ или

$$X = SX' \tag{3.16}$$

или в координатном виде

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \ldots + \alpha_{1n}x_n', \\ x_2 = \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \ldots + \alpha_{2n}x_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1' + \alpha_{n2}x_2' + \ldots + \alpha_{nn}x_n'. \end{cases} \tag{3.17}$$

Формулы (3.16) или (3.17) выражают зависимость между координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в базисах (3.10) и (3.11), т.е. координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе (3.10) получается из координатного столбца в базисе (3.11) умножением слева на матрицу перехода от базиса (3.10) к базису (3.11). Из формулы (3.14) получается также выражение X' через X :

$$X' = S^{-1}X, \tag{3.18}$$

т.е. выражение координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе E' ("новом"базисе) через его координаты в базисе E ("старом"базисе).

4. РАНГ МАТРИЦЫ

4.1. Определение ранга матрицы

Рассмотрим над полем P $m \times n$ – матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Строки этой матрицы – векторы арифметического пространства $P_{1,n}$ строк длины n над полем P, и поэтому можно говорить об их линейной зависимости или независимости.

Определение 4.1. *Рангом матрицы* A называется ранг системы ее строк.

Ранг матрицы A обозначается $\mathrm{rank}A$ или $\mathrm{rang}A$.
Пример 4.1. $\mathrm{rank}O_{m,n} = 0$.
Пример 4.2. $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 1$.
Пример 4.3. $\mathrm{rank}E_n = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = n$.

4.2. Теорема о ранге матрицы и следствия из нее

Теорема 4.1 (теорема о ранге матрицы). Ранг матрицы равен наибольшему порядку отличных от нуля ее миноров.

⧫ Пусть наибольший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен r. Будем считать для определенности, что отличный от нуля минор R r-го порядка матрицы A расположен в левом верхнем углу:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \cline{1-4} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right).$$

Введем обозначения для строк матрицы A :

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{q}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ \boldsymbol{q}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{q}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}). \end{array}$$

Покажем, что первые r строк, т.е. система векторов $(\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_r)$, образуют базис всей системы строк $(\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_m)$.

Докажем первоначально, что строки $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_r$ линейно независимы.

Пусть

$$\alpha_1\boldsymbol{q}_1 + \alpha_2\boldsymbol{q}_2 + \dots + \alpha_r\boldsymbol{q}_r = \mathbf{0},\ \alpha_i \in P. \tag{4.2}$$

Равенство (4.2) равносильно системе равенств

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \ldots + \alpha_r a_{r1} = 0, \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_r a_{r2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 a_{1r} + \alpha_2 a_{2r} + \ldots + \alpha_r a_{rr} = 0, \end{array}\right\} \\ \alpha_1 a_{1,r+1} + \alpha_2 a_{2,r+1} + \ldots + \alpha_r a_{r,r+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \ldots + \alpha_r a_{rn} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первые r равенств, которые можно рассматривать как линейную однородную систему r уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Поскольку $R \neq 0$, то по правилу Крамера имеем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$, т.е. строки $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_r$ линейно независимы. Дальше требуется доказать, что все остальные строки линейно выражаются через систему $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_r)$. Действительно, если матрица A содержит r строк, то это утверждение очевидно.

Пусть $r < n$. Рассмотрим определитель

$$\Delta_{sj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sr} & a_{sj} \end{vmatrix}$$

$(r+1)$-го порядка, который получается из минора R, если приписать к нему строку $(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sr}, a_{sj})$ и столбец

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{rj} \\ a_{sj} \end{pmatrix}, \ r < s \leq m, \ j = \overline{1, n}.$$

Ясно, что

$$\Delta_{sj} = 0 \tag{4.3}$$

(ибо, если $j \leq r$, то Δ_{sj} содержит два одинаковых столбца; если же $j > r$, то $\Delta_{sj} = 0$, так как Δ_{sj} – минор $(r+1)$-го порядка, а наибольший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен r). Разложим определитель Δ_{sj} по элементам последнего столбца

$$0 = \Delta_{sj} = a_{1j}A_1^{(s)} + a_{2j}A_2^{(s)} + \ldots + a_{rj}A_r^{(s)} + a_{sj}R, \tag{4.4}$$

где $A_i^{(s)}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе Δ_{sj}, причем $A_i^{(s)}$ не зависит от "j а зависит от "s". Так как $R \neq 0$, то из (4.4) следует

$$a_{sj} = -\frac{1}{R}(a_{1j}A_1^{(s)} + a_{2j}A_2^{(s)} + \ldots + a_{rj}A_r^{(s)}),\ j = \overline{1,n}, \tag{4.5}$$

а следовательно

$$\boldsymbol{q}_s = -\frac{1}{R}(A_1^{(s)}\boldsymbol{q}_1 + A_2^{(s)}\boldsymbol{q}_2 + \ldots + A_2^{(s)}\boldsymbol{q}_r),\ r < s \leq m.$$

■

Следствия из теоремы о ранге матрицы

Следствие 4.1. $\mathrm{rank}A = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю.

Следствие 4.2. Для матрицы $A \neq O_{m,n}$ размеров $m \times n$ имеет место неравенство $1 \leq \mathrm{rank}A \leq \min\{m, n\}$.

Следствие 4.3. Для квадратной матрицы A n-го порядка $\mathrm{rank}A = n$ тогда и только тогда, когда матрица невырожденная.

Следствие 4.4. Ранг матрицы не изменяется при ее транспонировании.

Следствие 4.5. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов.

Отметим, что при доказательстве теоремы о ранге не использовалось равенство нулю всех миноров матрицы, порядки которых больше r. Использовано только равенство нулю всех миноров $(r+1)$-го порядка, которые окаймляют этот отличный от нуля минор r-го порядка, т.е. содержат его целиком внутри себя. Уже из равенства нулю только этих миноров следует, что r – ранг матрицы.

Отсюда имеем один из методов вычисления ранга матрицы. Этот метод называется *метод окаймления миноров.*

Метод окаймления миноров

Суть метода окаймления миноров состоит в следующем: при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор R r-го порядка, отличный от нуля, то нужно вычислять лишь те миноры

$(r+1)$-го порядка, которые окаймляют минор R. Если они все равны нулю, то ранг матрицы A равен r.

Если же среди них есть хотя бы один отличный от нуля, то переходим к минорам $(r+2)$-го порядка, которые окаймляют этот отличный от нуля минор $(r+1)$-го порядка. Если все они равны нулю, то $\mathrm{rank} A = r+1$. В противном случае переходим к следующему шагу.

Определение 4.2. Любой отличный от нуля минор R порядка $r = \mathrm{rank} A$ называется *базисным* минором матрицы A.

4.3. Элементарные преобразования матрицы и ее ранг

Теорема 4.2. Если матрица B получена из матрицы A при помощи элементарных преобразований, то $\mathrm{rank} B = \mathrm{rank} A$.

⧫ Так как ранг матрицы не изменяется при транспонировании, то достаточно рассмотреть лишь элементарные преобразования строк. Пусть

$$(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_m) \tag{4.6}$$

– система строк матрицы A, и матрица B получена из A при помощи первого элементарного преобразования, т.е. какая-нибудь строка, например первая, умножается на α ($\alpha \in P$, $\alpha \neq 0$):

$$(\alpha \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_m). \tag{4.7}$$

Очевидно, что система (4.6) эквивалентна системе (4.7), и следовательно, на основании теоремы 1.7 ранги их равны, а это значит, что $\mathrm{rank} B = \mathrm{rank} A$.

Пусть $\beta \in P$ и матрица B получена при помощи второго элементарного преобразования. Например, матрица B получена из матрицы A путем прибавления к первой строке второй, умноженной на элемент β, т.е. матрица B имеет систему строк

$$(\boldsymbol{q}_1 + \beta \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_m). \tag{4.8}$$

Ясно, что система (4.8) линейно выражается через систему (4.6). Но и система (4.6) линейно выражается через систему (4.8), так как $\boldsymbol{q}_1 = (\boldsymbol{q}_1 + \beta \boldsymbol{q}_2) - \beta \boldsymbol{q}_2$. Таким образом, система (4.8) эквивалентна системе

(4.6), а следовательно, ранг системы (4.6) равен рангу системы (4.8), т.е. $\mathrm{rank} B = \mathrm{rank} A$.■

Теорема 4.3. Любую матрицу A ранга r можно элементарными преобразованиями привести к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

где число 1 в последней повторяется r раз.

⧫ Если $A = O_{m,n}$, то A имеет вид (4.9) и ее ранг равен нулю. Пусть $A \neq O_{m,n}$. Переставим строки и столбцы этой матрицы так, чтобы в левом верхнем углу оказался не равный нулю элемент. Итак, $a_{11} \neq 0$. Умножим первую строку на a_{11}^{-1} и применим к строкам и столбцам достаточно очевидные элементарные преобразования. В результате получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

и т.д.

Через конечное число шагов мы придем к матрице вида (4.9). Ранг этой матрицы равен числу содержащихся в ней единиц. Так как ранг не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы, то число единиц в матрице (4.9) равно r. ■

Из теоремы 4.2 и 4.3 следует еще один метод вычисления ранга матрицы, который называется *методом элементарных преобразований.*

Метод элементарных преобразований для нахождения ранга матрицы

Суть этого способа состоит в следующем: при помощи элементарных преобразований исходная матрица A приводится к виду (4.9). Число единиц в последней равно рангу матрицы A.

4.4. Линейная зависимость, независимость векторов и ранг матрицы

Рассмотрим следующую задачу: в некотором фиксированном базисе векторного пространства V_n заданы координатные столбцы $X_1, X_2, \ldots, X_m$ векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$. Определить, является ли система $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ указанных векторов линейно зависимой или нет. Из свойства 3.1 координат векторов следует, что наличие линейной зависимости между векторами равносильно такой же линейной зависимости между их координатными столбцами. Поэтому векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы столбцы $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Пусть

$$X_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, \ i = \overline{1, m}. \tag{4.10}$$

Составим матрицу, столбцами которой служат координатные столбцы (4.10) векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее ранг. Если:

1) $\mathrm{rank} A = m$, тогда векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ линейно независимы;

2) $\mathrm{rank} A < m$, в этом случае выделяем какой-нибудь базисный минор и векторы, координатные столбцы которых входят в этот базисный минор, будут линейно независимыми. Они образуют максимальную независимую подсистему системы $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$, т.е. образуют базис этой системы векторов.

Следствие 4.6.Для того чтобы n векторов линейного пространства V_n были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы, составленной из координатных столбцов этих векторов, был отличен от нуля.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Показать, что множество $C[a,b]$ вещественных непрерывных функций на отрезке $[a,b], a,b \in R, a < b$, образует векторное пространство над полем R. В качестве сложения векторов берется поаргументное сложение функций, а в качестве умножения скаляра на вектор – умножение вещественного числа на функцию, т.е. для любых функций $f, g \in C[a,b]$ и для любых $x \in R, \alpha \in R$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Решение. Проверка аксиом линейного пространства сводится к проверке соответствующих соотношений для значений функций при каждом значении аргумента, которые выполняются в силу свойств вещественных чисел. Например, дистрибутивность умножения числа на функцию относительно сложения функций сводится к проверке выполнения равенства для каждого $x : (\alpha(f+g))(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$. Левая и правая части этого равенства по определению вышеуказанных операций на множестве $C[a,b]$ есть число $\alpha f(x) + \alpha g(x)$.

Пример 2. Проверить, является ли система векторов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ пространства $R_{1,3}$, где $\boldsymbol{e}_1 = (-2,-1,3), \boldsymbol{e}_2 = (5,3,-8), \boldsymbol{e}_3 = (1,-1,1)$ линейно независимой.

Решение. Равенство $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$ равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 8\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Записав эту систему в матричном виде и совершив элементарные преобразования, получим

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ линейно независимы.

Пример 3. Найти какой-либо базис и ранг системы векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$, если $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,0,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,1,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_5 = (0,1,2,3)$.

Решение. Для получения базиса системы применим способ нахождения максимальной линейно независимой подсистемы. Так как рассматриваемая система не содержит нулевых векторов, то помечаем вектор $\boldsymbol{a}_1$. Присоединяем к нему вектор $\boldsymbol{a}_2$ и проверяем их линейную независимость, составляя равенство $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$, которое равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ -\alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ линейно независимы. Помечаем вектор $\boldsymbol{a}_2$ и присоединяем к помеченным векторам вектор $\boldsymbol{a}_3$. Проверяем линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Равенство $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевые решения, например $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = -1$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы. Удаляем из системы вектор $\boldsymbol{a}_3$ и переходим к рассмотрению вектора $\boldsymbol{a}_4$. Исследуем линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$, т.е. систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 + 3\alpha_4 = 0, \\ -\alpha_1 + 4\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Из нее следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$. Помечаем вектор $\boldsymbol{a}_4$ и присоединяем к помеченным векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$, вектор $\boldsymbol{a}_5$. Проверяем линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$. Из равенства $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_4\boldsymbol{a}_4 + \alpha_5\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0}$ имеем

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0, \\ + \alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5 = 0, \\ +\alpha_2 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 = 0, \\ -\alpha_1 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 = 0. \end{cases}$$

Последняя система уравнений имеет ненулевое решение $\alpha_1 = \alpha_4 = -1$, $\alpha_2 = \alpha_5 = 1$. Поэтому система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ линейно зависимая. Удаляем из исходной системы вектор $\boldsymbol{a}_5$. Таким образом, в системе остались только три помеченных вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$, которые образуют базис исходной системы векторов. Ранг этой системы равен 3.

Пример 4. Найти какой-либо базис и ранг системы векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$, если $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$,
$\boldsymbol{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$.

Решение. Для получения базиса системы применим первый способ (**снизу вверх**) нахождения максимальной линейно независимой подсистемы. Так как рассматриваемая система не содержит нулевых векторов, то помечаем вектор $\boldsymbol{a}_1$. Присоединяем к нему вектор $\boldsymbol{a}_2$ и проверяем их линейную независимость, составляя равенство $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$, которое равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ -\alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ линейно независимы. Помечаем вектор $\boldsymbol{a}_3$ и присоединяем к помеченным векторам вектор $\boldsymbol{a}_3$. Проверяем линейную зависимость векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Равенство $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \qquad\ \ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \qquad\ \ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 \qquad + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевые решения, например $\alpha_1 = \alpha_3 = 1, \alpha_2 = -1$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы. Удаляем из исходной системы вектор $\boldsymbol{a}_3$ и переходим к рассмотрению вектора $\boldsymbol{a}_4$. Исследуем линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$, т.е. систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0, \\ \qquad\ \ \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0, \\ \qquad\ \ \alpha_2 + 3\alpha_4 = 0, \\ -\alpha_1 \qquad + 4\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Из нее следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$. Помечаем вектор $\boldsymbol{a}_4$ и присоединяем к помеченным векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ вектор $\boldsymbol{a}_5$. Проверяем линейную зависимость векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$. Из равенства $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_4\boldsymbol{a}_4 + \alpha_5\boldsymbol{a}_5 = \mathbf{0}$ имеем

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ \alpha_4 \qquad\quad = 0, \\ \qquad + \ \alpha_2 + \ \alpha_4 + \ \alpha_5 = 0, \\ \qquad +\alpha_2 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 = 0, \\ -\alpha_1 \qquad + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 = 0. \end{cases}$$

Последняя система уравнений имеет ненулевое решение $\alpha_1 = \alpha_4 = -1, \alpha_2 = \alpha_5 = 1$. Поэтому система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ линейно зависима. Удаляем из исходной системы вектор $\boldsymbol{a}_5$. Таким образом, в системе остались только три помеченных вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$, которые образуют базис исходной системы векторов. Ранг этой системы равен 3.

Применим теперь второй способ (**сверху вниз**) нахождения максимальной линейно независимой подсистемы. Рассмотрим все линейные комбинации исходной системы $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ и приравняем их к нулю:

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 + \alpha_4\boldsymbol{a}_4 + \alpha_5\boldsymbol{a}_5 = \mathbf{0}.$$

Сравнивая координаты обеих частей этого равенства, приходим к однородной системе линейных уравнений с матрицей

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Решая эту систему, получаем общее решение в виде $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (\beta_3 - \beta_5, -\beta_3 + \beta_5, \beta_3, \beta_5)$, где β_3, β_5 – свободные переменные. Фиксируем первую линейную форму α_1 и приравниваем ее к нулю: $\alpha_1 = \beta_3 - \beta_5 = 0$. Тогда $\beta_3 = \beta_5$. В общем решении заменяем β_3 на β_5 и удаляем первую линейную форму. В результате имеем новую последовательность линейных форм $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (0, 0, \beta_5, 0, \beta_5)$. Далее рассматриваем линейную форму $\alpha_3 = \beta_5$, приравниваем ее к нулю, исключаем из последовательности линейных форм. В результате получаем нулевую последовательность форм $(\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5) = (0, 0, 0)$. Процесс заканчивается, и векторы $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ образуют базис исходной системы. Отметим, что если бы сначала мы зафиксировали форму α_3, а потом α_5, то пришли бы к базису $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4)$, который был найден первым способом. Отметим также, что любой базис исходной системы имеет три вектора и содержит вектор $\boldsymbol{a}_4$, поскольку форма α_4 нулевая и, значит, вектор $\boldsymbol{a}_4$ не может линейно выражаться через остальные векторы этой системы.

Пример 5. Показать, что система векторов $H = (x^2 + 1, x - 1)$ векторного пространства $R[x]$ является базисом системы $G = (x^2 + x, x^2 + 1, 3x^3 - 2x - 5, x - 1)$.

Решение. H есть подсистема системы G. Надо доказать ее линейную независимость. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ и $\alpha_1(x^2 + 1) + \alpha_2(x - 1) = 0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем равенства $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Следовательно, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ и система H линейно независима. Осталось показать, что G линейно выражается через систему H. Это следует из равенств $x^2+x = 1\cdot(x^2+1)+1\cdot(x-1), x^2+1 = 1(x^2+1)+0(x-1), 3x^2-2x+5 = 3(x^2+1)-2(x-1)$, $x - 1 = 0(x^2 + 1) + 1 \cdot (x - 1)$.

Пример 6. Показать, что система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, где $\boldsymbol{a}_1 = (1, 4, 0, 1), \boldsymbol{a}_2 = (2, 5, 1, 0)$, линейно независима в пространстве $R_{1,4}$ и дополнить ее до базиса всего пространства.

Решение. Нетрудно видеть, что система $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ линейно независима, так как из равенства $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$, следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Так как число векторов в системе меньше размерности пространства, то система $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ не образует базис этого пространства. Присоединим к системе $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ вектор, который принадлежит пространству $R_{1,4}$ и линейно не выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. Чтобы найти этот вектор, достаточно, например, сложить векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ и изменить один из элементов вектора суммы (к первому элементу добавим 1). Имеем вектор $\boldsymbol{a}_3 = (2, 9, 1, 1)$. Присоединим его к исходной системе, т.е. имеем систему $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. Легко проверить, что эта система линейно независима в пространстве $R_{1,4}$. Так как число векторов в ней меньше размерности пространства, то она опять не является базисом. Присоединим к ней вектор, который линейно через нее не выражается. Например, вектор $\boldsymbol{a}_4 = (4, 19, 2, 2)$. Имеем систему векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$. Поскольку число векторов в этой системе совпадает с размерностью пространства и эта система линейно независима, то она образует базис пространства $R_{1,4}$.

Пример 7. Показать, что векторы $\boldsymbol{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (3, 2, -5)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, -1, 1)$ образуют базис трехмерного пространства $R_{1,3}$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (6, 2, -7)$ в этом базисе.

Решение. Покажем, что система векторов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ линейно независима. Равенство $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0}$ равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Записав эту систему в матричном виде и совершив элементарные преобразования строк, получим

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ линейно независимы, поэтому они образуют базис трехмерного пространства. Найдем координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, т.е. коэффициенты разложения

$$\boldsymbol{x} = \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta_2 \boldsymbol{e}_2 + \beta_3 \boldsymbol{e}_3.$$

Последнее равенство равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\beta_1 + 3\beta_2 + \alpha_3 = \ 6, \\ \beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3 = \ 2, \\ -3\beta_1 - 5\beta_2 + \beta_3 = -7. \end{cases}$$

Записав эту систему в матричном виде и использовав элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получим

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Отсюда $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Таким образом, справедливо разложение $\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{e}_1 +$ $+1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, т.е. $[1, 1, 1]^T$ – координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

Пример 8. Показать, что множество $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\}$ является подпространством векторного пространства квадратных матриц $R_{2,2}$ над полем R. Найти базис и размерность этого подпространства. Указать координаты вектора $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4c & 7 \end{bmatrix}$ в найденном базисе.

Решение. На основании критерия подпространств множество M замкнуто относительно сложения матриц и умножения матриц на вещественное число:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ -c_1 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a_1 & c + c_1 \\ -(c + c_1) & b + b_1 \end{bmatrix} \in M,$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha c \\ -(\alpha c) & \alpha b \end{bmatrix} \in M, \forall \alpha \in R,$$

т.е. множество M векторное подпространство.

Найдем его базис. Справедливо разложение

$$\begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{E}' \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

где $\tilde{E}' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$. Система $\tilde{E}'$ линейно независима, так как из равенства

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

следует $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ -\gamma & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, т.е. $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Значит, система $\tilde{E}'$ базис и $\dim M = 3$. Но тогда координатный столбец вектора $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ в найденном базисе равен $[5, 7, -4]^T$.

Пример 9. Найти базисы суммы и пересечения подпространств $L_1 = \{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda \boldsymbol{a}_3 | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R\}$ и $L_2 = \{\mu_1 \boldsymbol{b}_1 + \mu_2 \boldsymbol{b}_2 + \mu_3 \boldsymbol{b}_3 | \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R\}$, если $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 3, 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 1, -3)$.

Решение. Найдем вначале базисы подпространств L_1 и L_2. Имеем

$$\dim L_1 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 2, \dim L_2 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 2.$$

Базисные миноры $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ и $\Delta_1' = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ матриц, столбцами которых являются координаты векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ соответственно, расположены в первом и втором столбцах каждой из них, поэтому базисом L_1 является подсистема $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, базисом L_2 – подсистема $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$. Найдем базис $L_1 + L_2$. Его построение сводится к вычислению ранга матрицы, столбцами которой служат координаты векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ т.е. ранга матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Так как $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$, то ранг матрицы равен 3, т.е. $\dim(L_1 + L_2) = 3$. Тогда система $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ – максимальная линейно независимая подсистема системы $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, и является, следовательно, базисом подпространства $L_1 + L_2$. Имеем $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 4 - 3 = 1$, а значит, базис $L_1 \cap L_2$ состоит из одного вектора. Вектор $\boldsymbol{b}_2$ разлагается по базису $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ подпространства $L_1 + L_2$: $\boldsymbol{b}_2 = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \beta_1 \boldsymbol{b}_1$, или в координатной форме $(1, 2, 2) = \alpha_1(1, 2, 1) + \alpha_2(1, 1, -1) + \beta_1(2, 3, -1)$. Решаем систему линейных уравнений

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Отсюда $\beta_1 = -1; \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 2$, т.е. $\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1$. Значит, вектор $\boldsymbol{c}_1 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = (3, 5, 1)$ составляет базис подпространства $L_1 \cap L_2$.

Пример 10. В пространстве V_3 найти матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2)$.

Решение. Имеем разложения $\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_3 = 1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + (-2) \cdot \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2 = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + (-1) \cdot \boldsymbol{e}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{e}_3$. Тогда матрица перехода имеет вид

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 11. Дана матрица $S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ к базису $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$.

Решение. Из формулы $X = SX'$ имеем $X' = S^{-1}X$. Так как

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

то координатный столбец X' вектора $\boldsymbol{a}$ в новом базисе равен

$$X' = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, справедливо разложение $\boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{e}'_1 - 1 \cdot \boldsymbol{e}'_2$.

Пример 12. Найти базис и ранг системы векторов $K = (2x^2+1, -3x+1, -3x^3+2x^2+3x, 2x^3)$ пространства многочленов степени, не большей 3, над полем R.

Решение. Известно, что в вышеуказанном пространстве многочленов степени ≤ 3 система $G = (1, x, x^2, x^3)$ является каноническим базисом. Найдем матрицу S перехода от системы G к системе K :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найдем ранг этой матрицы применяя к этой матрице элементарные преобразования столбцов. Имеем

$$S \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

т.е. приходим к тому, что ранг этой матрицы равен 3 и последние три ее столбца составляют базис системы столбцов. Поэтому $\mathrm{rank}K = 3$ и система $(-3x+1, -3x^3+2x^2+3x, 2x^3)$ является базисом системы K.

Пример 13. Показать, что система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ пространства $R_{1,4}$ линейно независима, и дополнить ее до базиса всего пространства, если $\boldsymbol{a}_1 = (1, 18, 40, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 0, 1)$.

Решение. Система $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ линейно независима, так как эти строки не пропорциональны. Далее составляем матрицу $A \in R_{4,4}$, включая $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ в качестве первых строк, такую, что $\det A \neq 0$. В качестве матрицы A например, можно взять матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 40 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы используем то обстоятельство, что согласно следствию из теоремы о ранге матрицы система строк квадратной матрицы линейно независима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю, а также то, что в n-мерном пространстве линейно независимая система длины n является базисом.

Таким образом, система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$, где $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 0), \boldsymbol{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$, линейно независима и образует базис пространства $R_{1,4}$.

Пример 14. Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ имеет координатный столбец $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Требуется найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$, где $\boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}'_2 = 6\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}'_3 = 5\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$.

Решение. Найдем матрицу перехода S от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$.

Исходя из формулы (3.12), имеем

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Но тогда искомые координаты находим по формуле (3.18). А именно координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ имеет вид

$$X' = S^{-1}X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{24} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{24} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 15. Методом окаймления миноров вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Решение. Среди миноров первого порядка есть отличный от нуля, например $\Delta_1 = |1|$. Среди окаймляющих его миноров второго порядка есть отличный от нуля, например $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$. Среди миноров, окаймляющих минор Δ_2, есть ненулевой минор третьего порядка, например

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как единственным минором, окаймляющим минор Δ_3, является определитель матрицы A, причем равный нулю, то $\mathrm{rank}A = 3$.

Пример 16. При помощи элементарных преобразований вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 & 10 \\ 75 & 94 & 53 & 132 & 30 \\ 75 & 94 & 54 & 134 & 30 \\ 25 & 32 & 20 & 48 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решение. Прибавив ко второй строке первую, умноженную на -3, к третьей – первую, умноженную на -3, к четвертой – первую, умноженную на -1, получим

$$A \sim \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Прибавив к четвертой строке третью, умноженную на -1, а затем к третьей – вторую строку, умноженную на -1, к первой – вторую, умноженную на -31, получим

$$A \sim \begin{bmatrix} 25 & 0 & -45 & -50 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Прибавив ко второй стоке третью, умноженную на -2, к первой – третью, умноженную на 45, и удалив из последней матрицы нулевую (четвертую) строку, получим

$$A \sim \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Умножив первую строку на $\dfrac{1}{25}$, получим частично мономиальную матрицу

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что последняя матрица эквивалентна матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ранг которой равен 3. Следовательно, $\mathrm{rank}A = 3$.

Пример 17. Выяснить, является ли система векторов $(x+4, 3x^2-1, 2x^2+4x)$ линейно зависимой в пространстве $R_2[x]$ всех многочленов степени не больше 2.

Решение. Составим матрицу, столбцами которой служат координатные столбцы векторов рассмотренной системы в каноническом базисе $(1, x, x^2)$ этого пространства. Имеем

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вычислим ранг матрицы A. Используя метод окаймления миноров, получаем, что $\mathrm{rank}A = 3$. Отсюда следует, что координатные столбцы векторов системы линейно независимы, а следовательно, линейно независима и исходная система многочленов в пространстве $R_2[x]$.

ЗАДАЧИ

1. Определить, являются ли следующие множества с заданными на них операциями векторными пространствами:

1) множество всех целых чисел с операцией сложения целых чисел и умножения комплексного числа (скаляра) на целое число;

2) множество многочленов над полем R степени $\leq n$;

3) множество всех многочленов над полем C, среди корней каждого из которых имеются числа 1,2,3,4,5;

4) множество $C_{m,n}$ всех комплексных матриц размеров $m \times n$ с операциями сложения матриц и умножения вещественного числа на матрицу.

2. Найти линейную комбинацию $2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 7\boldsymbol{a}_3$ векторов $\boldsymbol{a}_1 = (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 1, 2)$ арифметического пространства $R_{1,3}$.

3. Найти линейные комбинации $2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - 3\boldsymbol{a}_4$ векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$, если:

$$\begin{array}{llll} 1) & \boldsymbol{a}_1 = (1,0,1,0), & 2) & \boldsymbol{a}_1 = (2,1,3,4), \\ & \boldsymbol{a}_2 = (1,1,2,1), & & \boldsymbol{a}_2 = (1,1,1,1), \\ & \boldsymbol{a}_3 = (0,0,1,1), & & \boldsymbol{a}_3 = (1,0,1,0), \\ & \boldsymbol{a}_4 = (0,1,1,1); & & \boldsymbol{a}_4 = (-1,1,-1,1). \end{array}$$

4. Найти все значения λ, при которых вектор $\boldsymbol{b} = (7, 9, \lambda)$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, если:

$$\begin{array}{llll} 1) & \boldsymbol{a}_1 = (5,10,13), & 2) & \boldsymbol{a}_1 = (11,6,4), \\ & \boldsymbol{a}_2 = (4,-1,9), & & \boldsymbol{a}_2 = (6,5,-2), \\ & \boldsymbol{a}_3 = (1,-6,7); & & \boldsymbol{a}_3 = (5,1,6). \end{array}$$

5. Проверить являются ли эквивалентными системы векторов G, H :

1) $G = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3), H = (\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3)$, где $\boldsymbol{g}_1 = (1, 0, 0)$; $\boldsymbol{g}_2 = (0, 1, 0)$; $\boldsymbol{g}_3 = (0, 0, 1)$; $\boldsymbol{h}_1 = (0, 0, 1)$; $\boldsymbol{h}_2 = (0, 1, 1)$; $\boldsymbol{h}_3 = (1, 1, 1)$;

2) $G = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3), H = (\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3, \boldsymbol{h}_4)$, где $\boldsymbol{g}_1 = (1, 1, 1)$; $\boldsymbol{g}_2 = (1, 0, -1)$; $\boldsymbol{g}_3 = (1, 3, 5)$; $\boldsymbol{h}_1 = (1, 2, 3)$; $\boldsymbol{h}_2 = (0, 1, 2)$; $\boldsymbol{h}_3 = (3, 4, 5)$; $\boldsymbol{h}_4 = (4, 6, 8)$.

6. Описать линейные оболочки следующих систем векторов пространства $R_{1,4}$:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 1), \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0, 0), \boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (-1, 0, 0, 1), \boldsymbol{a}_2 = (-1, 0, 1, 0), \boldsymbol{a}_3 = (-1, 1, 0, 0)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 0), \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0, 0), \boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 0, 1)$.

7. Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2, 1)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 3, 2, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 6, 9, 0)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 4, 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 10, 16)$;

4) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 4, 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 10, 16 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$;

5) $\boldsymbol{a}_1 = (i, 1 - i, 1, 2 + i)$, $\boldsymbol{a}_2 = (i - 1, 2, 1 + i, 1 + 3i)$.

8. Выяснить, является ли линейно независимой каждая из систем векторов в пространстве матриц $R_{n,m}$:

$$1)\ \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right);$$

$$2)\ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

9. Доказать, что следующие системы функций линейно независимы:

а) $(x, \cos x, \sin x)$;
б) $(x^2, e^x, \cos x)$;
в) $(\ln|x|, \sin x, e^{-x})$.

10. Показать, что указанные системы векторов линейно независимы в соответствующем пространстве:

1) $(x+4, 3x^2-1, 2x^2+4x)$ в пространстве многочленов над полем R;

2) $((y, x, 2), (y-x, 6, 4)), x \in \mathrm{R}, x \neq 3, y \neq -3$ в пространстве $R_{1,3}$;

3) $(1, e^x, \mathrm{sh}x))$ в пространстве вещественных непрерывных функций;

4) $(\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$ в пространстве вещественных непрерывных функций;

5) $(1+i, i)$ в пространстве C над полем R;

6) $(f(x), g(x))$ в пространстве вещественных функций на отрезке [1,4], где

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & x \in [1,2], \\ 0, & x \in (2,4], \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [1,2], \\ x+5, & x \in (2,4]; \end{cases}$$

11. Проверить, является ли линейно независимой каждая из систем векторов в пространстве $C(-\infty, +\infty)$:

1)$(2x+1, x^2+3)$;
2)$(x+2, (x+2)^2, (x+2)^3)$;
3)$(2, x+2, x^2+x+4)$;
4)(e^x, e^{-x});
5)$(e^x, \mathrm{ch}x, e^{-x})$;
6)$(1, \sin 2x, \sin 3x)$;
7)$(\sin^3 x, \cos^3 x)$;
8)$(1, \ln|x|, \ln|2x|)$;
9)$(2, \cos^2 x, \cos 2x, \mathrm{ch}x)$;
10)$(\sin x, \sin 3x, \sin^3 x)$;
11)$(\cos x, \cos 3x, \cos^3 x, \sin^3 x)$;
12)$(3^x, 4^x, 12^x)$;
13)$(\sin x, \sin(x+2), \cos x, \cos(x+2))$;
14)$(\pi, \mathrm{arctg}x, \mathrm{arcctg}x)$.

12. Показать, что системы векторов линейно зависимы, и найти их линейные комбинации, равные нулю, с ненулевыми наборами коэффициентов:

1) $(2x-4, 2x^2+x, x^2-x+3)$ в пространстве многочленов над полем R;

2) $1, \cos x, \cos 2x, \cos 4x, \cos^4 x)$ в пространстве вещественных непрерывных функций;

3) $(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x, e^x)$ в пространстве вещественных непрерывных функций;

4) $(1, \cos^2 x, \cos 2x, e^x))$ в пространстве $C[0,1]$ вещественных непрерывных функций, определенных на отрезке $[0,1]$;

5) $(2-i, 1-2i, 7-8i)$ в пространстве C над полем R;

6) $\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\right)$ в пространстве матриц $R_{2,2}$.

13. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы в пространстве V_3 геометрических векторов над полем R, а вектор $\boldsymbol{a}_3$ не выражается линейно через векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$, то векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны.

14. Пусть $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ –линейно независимая система векторов. Будет ли система $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$ – линейно независимой?

15. Найти какой-либо базис системы векторов

$$\begin{array}{llll} 1) & (-1,4,-3,-2), & 2) & (-3,1,5,2), \\ & (3,-7,5,3), & & (-2,3,4,1), \\ & (3,-2,1,0), & & (1,-5,-3,0), \\ & (-4,1,0,1), & & (-1,2,3,4). \end{array}$$

16. Найти все базисы системы векторов

$$\begin{array}{llllll} 1) & (1,2,3,0,-1), & 2) & (1,2,3,0,-1), & 3) & (1,2,2,-1), \\ & (0,1,1,1,0), & & (-1,-1,-2,1,0), & & (2,3,2,5), \\ & (1,3,4,1,-1); & & (3,7,10,1,-3); & & (-1,4,3,-1); \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 4) & (1,2,3), & 5) & (1+i,1-i,2+i), \\ & (2,3,4), & & (i,1,2), \\ & (-3,-2,-3), & & (-i+1,-1-i,3-2i), \\ & (4,3,4), & & (4,-4i,10+2i). \\ & (2,2,2), & & \end{array}$$

17. Найти ранг системы векторов в пространстве $R_{1,3}$

$$(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(10,11,12).$$

18. Найти какой-либо базис и ранг систем векторов:
1) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,4), \boldsymbol{a}_2=(-1,0,1), \boldsymbol{a}_3=(0,2,3), \boldsymbol{a}_4=(5,2,0)$;
2) $\boldsymbol{a}_1=(2,3,-4,1), \boldsymbol{a}_2=(-6,4,-10,16), \boldsymbol{a}_3=(1,2,3,-4)$,
$\boldsymbol{a}_4=(12,-5,-26,9), \boldsymbol{a}_5=(4,6,-8,2)$;
3) $\boldsymbol{a}_1=(1,4,7,10), \boldsymbol{a}_2=(1,2,3,4), \boldsymbol{a}_3=(2,5,8,11)$;
4) $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,0,0), \boldsymbol{a}_2=(0,1,-1,0), \boldsymbol{a}_3=(0,0,1,-1), \boldsymbol{a}_4=(-1,0,0,1)$;
5) $(3x^2+2x+1, 4x^2+3x+2, 3x^2+2x+3, x^2+x+1, 4x^2+3x+4)$;
6) $(x^3+2x^2+3x+4, 2x^3+3x^2+4x+5, 3x^3+4x^2+5x+6, 4x^3+5x^2+6x+7, x^3+x^2+x+1)$;
7) $(x^3+2x^2+3x-4, 3x^3-4x^2+x+2, 2x^3-5x^2+8x-3, 2x^3+3x^2-4x+1$,
$5x^3+26x^2-9x-12)$.

19. Доказать, что все векторы из $R_{1,n}$ вида $(\alpha+\beta,\beta,0,\ldots,0,\alpha)$, где $\alpha,\beta\in R$ образуют векторное пространство над R.. Найти базис и размерность этого пространства.

20. Доказать, что множество C комплексных чисел образует векторное пространство над полем вещественных чисел. Найти базис и размерность этого пространства.

21. Доказать, что все матрицы вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, где α, β – вещественные числа образуют векторное пространство над полем вещественных чисел. Найти базис и размерность этого пространства.

22. Доказать, что множество функций вида $\{ax + b\sin x + d\cos x | a, b, d \in R\}$ образует векторное пространство и найти его базис и размерность.

23. Выяснить, какова размерность каждого из векторных пространств, и найти какой-либо базис:

1) векторное пространство $V_1(\Delta)$ векторов, параллельных данной прямой Δ;

2) векторное пространство $V_2(\Pi)$ векторов параллельных данной плоскости Π;

3) векторное пространство всех $m \times n$-матриц с комплексными элементами над полем R;

4) векторное пространство бесконечных последовательностей вещественных чисел $(a_n)_{n=1}^{\infty}, a_n \in R$, удовлетворяющих условию $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \in N$.

24. В пространстве $R_{1,4}$ найти два различных базиса, имеющих общие векторы $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 0, 1, 1)$.

25. Доказать, что следующие системы векторов образуют подпространство соответствующего векторного пространства и найти из базис и размерность:

1) все векторы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $R_{1,n} (n \geq 2)$, у которых $x_1 = x_2$;

2) все векторы из $R_{1,n}$ удовлетворяющие условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;

3) все векторы из $R_{1,n} (n \geq 2)$ удовлетворяющие условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, $2x_1 + x_2 = 0$;

4) линейная оболочка системы векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$, если

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 0), \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 1, 1),$$

$$\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 1, 1), \boldsymbol{a}_4 = (2, 1, 1, 0);$$

5) все верхние треугольные матрицы второго порядка с комплексными элементами над полем R;

6) все многочлены степени не большей 10 имеющих среди своих корней числа 1,3,5.

26. Является ли подпространством соответствующего векторного пространства над полем R каждое из следующих множеств векторов:

1) все векторы плоскости, одинаково направленные с осью Ox;

2) все векторы из пространства $R_{1,n}$, сумма компонент каждого из которых равна π;

3) все симметрические матрицы порядка n над полем R;

4) множество всех многочленов $f(x) \in R[x]$, удовлетворяющих условиям $f(0) = f(1) = 0$;

5) множество всех многочленов $f(x) \in R[x]$, удовлетворяющих условию $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(100) = 0$;

6) множество всех дифференцируемых функций в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b], a < b, a, b \in R$;

7) множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$ в пространстве действительных функций, определенных на отрезке $[a, b], a < b, a, b \in R$

(операции – поаргументное сложение функций и умножение вещественного числа на функцию);

8) множество функций $\{ae^x + be^{-x} + c\,\mathrm{ch}x | a, b, c \in R\}$ в пространстве бесконечно дифференцируемых действительных функций;

9) множество матриц вида $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix}$, $a, b, c \in R$, в пространстве матриц $R_{2,2}$.

27. Найти размерность s суммы и размерность d пересечения подпространств $L_1 = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $L_2 = L(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ арифметического векторного пространства строк $R_{1,4}$, где $\boldsymbol{a}_1 = (2, 2, 2, 2)$; $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 1, -1, 1)$; $\boldsymbol{a}_3 = (2, 6, 2, 6)$; $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2, 0, 2)$; $\boldsymbol{b}_2 = (1, 2, 1, 2)$; $\boldsymbol{b}_3 = (6, 2, 6, 2)$.

28. Пусть $L_1 = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ – линейная оболочка системы векторов $(\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2)$, а $L_2 = L(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ – линейная оболочка системы векторов $(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$. Найдите $\dim(L_1 \cap L_2)$,, если

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{a}_1 = (2, 4, 8, -4, 7), & \boldsymbol{a}_3 = (3, 5, 2, -2, 4), \\ \boldsymbol{a}_2 = (2, -2, -1, 3, 1), & \boldsymbol{a}_4 = (7, 7, 9, -3, 12). \end{array}$$

29. Найти какие-либо базисы суммы и пересечения пространств
$L_1 = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $L_2 = L(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ арифметического векторного пространства строк $R_{1,n}$, где $n = 3$ или $n = 4$, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 2, 5)$,
$\boldsymbol{b}_1 = (0, -3, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (4, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-3, 0, -2)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 3, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-2, 1, 1, 3)$,
$\boldsymbol{b}_1 = (3, 1, 4, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-6, -2, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (5, 3, 0, 1)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (0, 0, -1, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 2, 2, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0, 0)$,
$\boldsymbol{b}_1 = (0, -2, 0, -2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 1, 2, 0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2, 1, 2, 1)$.

30. Проверить, что сумма линейных оболочек систем векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), (\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3)$ прямая и совпадает с $R_{1,4}$, если:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 11, 5), & \boldsymbol{b}_1 = (2, 1, 3, 2), \\ \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 5, 2), & \boldsymbol{b}_2 = (1, 1, 3, 4), \\ \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 1, 1), & \boldsymbol{b}_3 = (5, 2, 6, 2). \end{array}$$

31. Найти координаты вектора $-5 + 4i$ в базисе $(-1 + 2i, 2 - i)$ векторного пространства C комплексных чисел над полем R.

32. В базисе $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ векторного пространства симметрических матриц второго порядка над полем R найти координаты вектора $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$.

33. Найти координаты многочлена $2x^3 - x^2 + 3x + 9$ в базисе $(x^3, x^3 + x^2, x^3 + x^2 + x, x^3 + x^2 + x + 1)$.

34. Показать, что система многочленов $(1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3)$ образуют базис векторного пространства $R_3[x]$ многочленов степени не больше 3 над полем R. Найти в этом базисе координаты многочлена $x^3 - 2x + 1$.

35. Проверить, что система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ образует базис пространства $R_{3,1}$ и найти разложение вектора $\boldsymbol{b}$ по этому базису:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 2, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, -1, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 5, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 7, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 9, 4)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1, 1)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 15, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 7, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (8, 9, 4)$, $\boldsymbol{b} = (8, -14, 1)$.

36. В арифметическом векторном пространстве $R_{1,n}$, заданы векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{x}$. Показать, что $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ есть базис пространства $R_{1,n}$, и найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе, если:

1) $\boldsymbol{e}_1 = (3, 9, 4), \boldsymbol{e}_2 = (1, 5, 3), \boldsymbol{e}_3 = (2, 7, 3), \boldsymbol{x} = (2, 1, 1)$;
2) $\boldsymbol{e}_1 = (-1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (2, -3), 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2$;
3) $\boldsymbol{e}_1 = (1, -1, 1), \boldsymbol{e}_2 = (2, 1, -3), \boldsymbol{e}_3 = (3, 2, -5), \boldsymbol{x} = (6, 2, -7)$;
4) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 2, 1, 1), \boldsymbol{e}_2 = (2, 3, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (4, 2, -1, -6)$,
$\boldsymbol{e}_4 = (3, 1, 1, -2), \boldsymbol{x} = (0, 0, 2, 7)$.

37. Найти матрицы перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$ к базисам:
1) $(\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$;
2) $(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_4 - \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3)$;
3) $(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4)$.

38. В n-мерном векторном пространстве V задан базис $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$. Найдите матрицу перехода от заданного базиса к базисам:
1) $(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_{n-1}, \ldots, \boldsymbol{e}_1)$;
2) $\left(\boldsymbol{e}_1, \dfrac{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2}{2}, \ldots, \dfrac{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \boldsymbol{e}_n}{2}\right)$,
3) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, где $\boldsymbol{a}_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_k$;

Проверьте, что данные системы образуют базисы.

39. Проверьте, что системы векторов $\boldsymbol{e}_1 = (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-1, -1, 6)$, $\boldsymbol{e}_3 = (7, 0, 3)$ и $\boldsymbol{f}_1 = (3, 4, 1), \boldsymbol{f}_2 = (0, 1, -6)$, $\boldsymbol{f}_3 = (-2, 5, 5)$ - базисы пространства $R_{1,3}$. Найти матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$.

40. Записать матрицу перехода от базиса

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

к базису

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

в пространстве матриц $R_{2,2}$.

41. В пространстве квадратных матриц второго порядка найдите матрицу перехода от базиса $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ к базису

$\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right)$. Проверьте, что данные системы образуют базисы.

42. В пространстве многочленов степени ≤ 2 над полем R найти матрицы перехода от базиса $(1, x, x^2)$ к базисам:
1) $(1, x+1, (x+1)^2)$; 2) $(1+x^2, 1-x^2, 1+2x)$.

43. В пространстве многочленов степени не выше второй с действительными коэффициентами найдите матрицу перехода от базиса (x^2, x^2+x, x^2+x+1) к базисам:

$$1)\ (x^2, x, 1); 2)(2x^2-3, x^2+4x, 5x+2).$$

Проверьте, что данные системы образуют базисы.

44. Найти матрицу перехода от базиса $(\sin x, \cos x)$ к базису $(\cos x, -\sin x)$ в пространстве функций вида $a \sin x + b \cos x, a, b \in R$.

45. Записать матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ к базису $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ и найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в этих базисах, если $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}'_1 = 5\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}'_2 = -5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}$.

46. Дана матрица перехода $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{e}'_3$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и координаты вектора $\boldsymbol{e}_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$.

47. Доказать, что ранг блочно-диагональной матрицы равен сумме рангов ее диагональных блоков.

48. Найдите ранг матрицы и выделите базисный минор:

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 3\alpha \end{bmatrix}; 2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 0 & 16 \end{bmatrix};$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 16 & 112 \\ 3 & 9 & 11 & -8 & -5 \end{bmatrix}; \quad 4) \begin{bmatrix} 4 & 9 & 6 & 15 \\ 8 & 3 & 11 & 2 \\ 20 & 30 & 29 & 47 \end{bmatrix}.$$

49. Найти ранг матриц методом окаймления миноров:

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -6 & -3 & -2 \end{bmatrix}; 2) \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & 7 & 14 \end{bmatrix};$$

$$3) \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 6 & 1 & 2 \\ -9 & -2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}; 4) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 12 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & -11 & 16 \end{bmatrix};$$

50. Вычислите ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$1)\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & -1 & 2 & 6 \\ -5 & 3 & 2 & 0 & -4 & 3 & 5 \\ 8 & -5 & 3 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 7 & -5 & 19 & 1 & -10 & 9 & 28 \\ 11 & 12 & -15 & 8 & 17 & -20 & -35 \end{bmatrix};\quad 2)\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$3)\ \begin{bmatrix} 18 & -5 & 2 & 3 & 28 & -13 \\ 25 & -15 & 8 & 7 & 42 & -67 \\ 542 & -155 & 78 & 77 & 532 & -627 \end{bmatrix}.$$

51. Используя метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы, найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки системы $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ векторов арифметического пространства строк $R_{1,5}$, где $\boldsymbol{a}_1 = (37, -27, 4, 21, 2)$; $\boldsymbol{a}_2=(73, -51, 13, 42, 15)$; $\boldsymbol{a}_3=(7, -5, 1, 4, 1)$; $\boldsymbol{a}_4=(76, -52, 16, 44, 18)$.

52. Найти ранг матриц в зависимости от значений параметров:

$$1)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda^2 & 4 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix};\ 2)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & \lambda & 3 \\ 5 & -\lambda & -1 & 7 \\ 1 & 6 & 10 & 2 \end{bmatrix};\ 3)\ \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & \beta & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2\beta & 4 \end{bmatrix};$$

$$4)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 4 \\ 1-\lambda & 1 & 5 & 6 \\ -4 & \lambda & 3 & 2 \end{bmatrix};\ 5)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & \alpha & 0 \\ & \alpha & 4 & -1 \end{bmatrix};\ 6)\ \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1+\alpha & 4 \\ 7 & 3 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

53. Доказать, что

а) ранг разности двух матриц не превосходит суммы их рангов;

б) ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.

54. Как может измениться ранг матрицы, если

а) изменить один из ее элементов;

б) изменить два ее элемента, стоящих в одной строке матрицы;

в) изменить два ее элемента, стоящих в разных строках и разных столбцах матрицы?

ОТВЕТЫ

1. 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) да.

2. (10,-8,-17).

3. 1) $(-\alpha, -4\alpha - 4\beta, -4\alpha - 3\beta, -3\alpha - 3\beta)$;

2) $(3\alpha + 5\beta, -2\alpha - 3\beta, 5\alpha + 6\beta, 4\alpha)$.

4. 1) Для любого λ; 2) $\lambda = -10$.

5. 1) Да; 2) да.

6. 1) $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha)$; 2) векторы вида $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$;

3) $(\alpha, \beta, 0, \gamma)$.

7. 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да.

8. 1) Да; 2) да.

10. 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) да; 7) да; 8) нет; 9) нет; 10) нет; 11) нет; 12) да; 13) нет; 14) нет.

12. $3\boldsymbol{f}_1 - 2\boldsymbol{f}_2 + 4\boldsymbol{f}_3 = \mathbf{0}$; 2) $-3\boldsymbol{f}_1 - 4\boldsymbol{f}_3 - \boldsymbol{f}_4 + 8\boldsymbol{f}_5 = \mathbf{0}$; 3) $\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_3 = \mathbf{0}$;

4) $-\boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_3 = \mathbf{0}$; 5) $2\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_3 = \mathbf{0}$; 6) $\boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_4 = \mathbf{0}$.

14 Нет.

15. 1)$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$; 2) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4)$.

16. 1) Любая подсистема из двух векторов; 2) любая подсистема из двух векторов; 3) вся система векторов линейно независима; 4) любая подсистема длины 3, кроме $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5), (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$; 5) любая подсистема из двух векторов , за исключением подсистемы $(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$.

17. 2.

18. 1) $3, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$; 2) $3, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5)$; 3) $2, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$; 4) $3, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$;

5) $3, (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$; 6) $2, (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$; 7) $3, (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_4)$.

19. $2, \big((1, 0, 0, \ldots, 0, 1), (1, 1, 0, \ldots, 0, 0)\big)$.

20. $2, (1, i)$.

21. $2, \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$.

22 $3, (1, \sin x, \cos x)$.

23. 1) 1, любой ненулевой вектор, параллельный прямой Δ;

2) 2, любые два неколлинеарных вектора параллельных плоскости Π;

3) $2mn, (\boldsymbol{e}_{\alpha\beta}, i\boldsymbol{e}_{\alpha\beta}), 1 \le \alpha \le m, 1 \le \beta \le n$;

4) $2, \big((1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots), (1, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots 0\big)$.

24. Например, базис $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$ и базис $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}'_3, \boldsymbol{e}'_4)$, где $\boldsymbol{e}_3 = (1, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{e}_4 = (2, 0, 1, 0), \boldsymbol{e}'_3 = (0, 1, 1, 0), \boldsymbol{e}'_4 = (0, 0, 0, 1)$.

25. 1) $n - 1, \big((1, 1, 0, \ldots, 0, 1), (0, 0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)\big)$;

2) $n - 1, \big(1, 0, \ldots, 0, -1), (0, 1, 0, \ldots, 0, -1), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1, -1)\big)$;

3) $n - 2, \big((1, -2, 0, \ldots, 0, 1), (0, 0, 1, \ldots, -1), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1, -1)\big)$;

4) 4, система линейно независима;

5) $6, \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \right)$.

6) $8, \big((x-1)(x-3)(x-5), (x-1)(x-3)(x-5)x, \ldots, (x-1)(x-3)(x-5)x^7\big)$.

26.) Нет; 2) нет; 3) да; 4) да; 5) да; 6) да; 7) да; 8) да; 9) да.

27. $s = 3, d = 2$.

28. 1.

29. 1) Базис $L_1 + L_2$, например, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2)$; базис $L_1 \cap L_2$, например, $(7, 5, 3)$;

2) базис $L_1 + L_2$, например, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)$, базис $L_1 \cap L_2$, например, $\big((3, 2, 4, 0), (-1, 1, 0, 2)\big)$;

3) базис $L_1 + L_2$, например, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)$, базис $L_1 \cap L_2$, например, $\big((1, 2, 2, 1,), (2, 2, 2, 2)\big)$.

31. $[1, -2]^T$.

32. $[3, 8, -2]^T$.

33. $[-3, -4, -6, 9]^T$

34. $[0, 1, 3, 1]^T$.

35. 1) $\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}_2 + \dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}_3$; 2) $\boldsymbol{b} = -5\boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$; 3) $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$.

36. 1) $[4, 0, -5]^T$; 2) $\big[\dfrac{4}{3}, -1\big]^T$; 3) $[1, 1, 1]^T$; 4) $[67, -51, 11, -3]^T$.

37. 1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

38. 1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

39. $\begin{bmatrix} 178 & 3 & 266 \\ -4 & -1 & -5 \\ -51 & -1 & -77 \end{bmatrix}$.

40. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

41. $\begin{bmatrix} -6 & -2 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & -5 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

42. 1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

43. 1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

44. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

45. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{5}(2\boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_2)$.

46. $\boldsymbol{e}'_3(0, -1, 2)$; $\boldsymbol{e}_2(-2, 4, 1)$.

48. 1) 2, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}$; 2) 2, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 3) 2, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$; 4) 2, $\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$.

49. 1) 3; 2) 3; 3) 4; 4) 3.

50. 1) 4; 2) 3; 3) 3.

51. $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$.

52. 1) $r = 1$ при $|\lambda| = 2, r = 2$ при $|\lambda| \neq 2, r = 3$ не может быть ни при каком λ;

2) $r = 2$ при $\lambda = 3, r = 3$ при $\lambda \neq 3$;

3) $r = 2$ при $\lambda = 1, \beta = \dfrac{1}{2}, r = 3$ при $\lambda \neq 1$ и при любом β, а также при $\beta \neq \dfrac{1}{2}$ и при любом λ;

4) $r = 3$ при $|\lambda| = 3, r = 4$ при $|\lambda| \neq 3$;

5) $r = 3$ при $|\alpha| = 3, r = 4$ при $|\alpha| \neq 3$;

6) $r = 3$ при любом α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер, М.: Наука, 1967., 575 с.

2. *Ильин, В.А.* Линейная алгебра / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк, М: Наука, 1981., 294 с

3. *Милованов, М.В.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. I / М.В.Милованов , Р.И.Тышкевич , А.С.Феденко - Минск, Выш. школа, 1976., 544 с.

4. *Милованов, М.В.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. II / М.В.Милованов , Р.И.Тышкевич , А.С.Феденко - Минск, Выш. школа, 1984., 302 с.

5. *Размыслович, Г.П.* Геометрия и алгебра / Г.П.Размыслович , М.М.Феденя , В.М.Ширяев - Минск, "Университетское 1987., 350 с.

6. *Размыслович, Г.П.* Сборник задач по геометрии и алгебре. / Г.П.Размыслович , М.М.Феденя , В.М.Ширяев - Минск, "Университетское 1999., 384 с

7. *Размыслович, Г.П.* Геометрия и алгебра. В 5-ти частях. Часть 1. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений / Г.П.Размыслович, Минск, БГУ, 2010., 73 с.

8. *Проскуряков, И.В.* Сборник задач по линейной алгебре /И.В.Проскуряков, М.: Наука, 1978., 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Размыслович Георгий Прокофьевич

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

**Пособие для студентов
факультета прикладной математики и информатики**

В пяти частях

Часть 2

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *Г. П. Размыслович*

Подписано в печать 15.10.2013. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 3,14. Уч.-изд. л. 2,85.
Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.