ТЕМА 4. СОПРЯЖЕННЫЕ, САМОСОПРЯЖЕННЫЕ, КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ и $A \in \mathscr{B}(X,Y)$, f – линейный ограниченный, определенный на пространстве Y.

Определение 1. *Сопряженным оператором* $A^* : Y^* \to X^*$ к линейному ограниченному оператору $A : X \to Y$ называется оператор, действующий по формуле

$$f(Ax) = A^* f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X, f \in Y^*. \tag{1.1}$$

Теорема 1. *Сопряженный оператор A^* является линейным ограниченным оператором из Y^* в X^* и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Свойство 1. $(A + B)^* = A^* + B^*; \quad (\alpha A)^* = \alpha A^*.$

Свойство 2. $\|A\| = \|A^*\|.$

Свойство 3. Пусть $X = Y$. Тогда $(AB)^* = B^* A^*; \quad I^* = I.$

Свойство 4. Если оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}, то и A^* также обратим, причем $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Теорема 2. *Пусть X, Y – банаховы пространства, оператор $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, $\mathscr{R}(A) \subset Y$ – множество его значений. Тогда замыкание $\mathscr{R}(A)$ совпадает с множеством таким $y \in Y$, что $f(y) = 0$ для всех функционалов $f \in Y^*$, удовлетворяющих условию $A^* f = 0$.*

Следствие 1. Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо при заданном y необходимо, а если $\mathscr{R}(A)$ замкнуто, то и достаточно, чтобы любой функционал, удовлетворяющий уравнению $A^* f = 0$, на заданном y обращался в нуль.

Следствие 2. Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо для любого $y \in Y$, необходимо, чтобы уравнение $A^* f = 0$ имело только нулевое решение.

Следствие 3. Уравнение $A^* f = 0$ имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда $\overline{\mathscr{R}(A)} = Y$.

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах

О п р е д е л е н и е 2. Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства. *Сопряженным оператором* к оператору $A : H_1 \to H_2$ называется оператор $A^* : H_2 \to H_1$ такой, что для любых $x \in H_1$, $y \in H_2$ выполняется равенство $(Ax,y)_{H_2} = (x, A^*y)_{H_1}$.

О п р е д е л е н и е 3. Линейный ограниченный оператор $A : H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т. е. справедливо тождество $(Ax,y)_H = (x,Ay)_H$ для всех $x,y \in H$. Линейный ограниченный оператор называется *унитарным*, если $A^* = A^{-1}$. Линейный ограниченный оператор называется *нормальным*, если $A^*A = AA^*$.

П р и м е р 1. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим оператор умножения на функцию, т. е.

$$Ax(t) = a(t)x(t).$$

Тогда

$$(Ax,y) = \int_0^1 Ax(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t = \int_0^1 a(t)x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t = \int_0^1 x(t)\overline{\overline{a(t)}y(t)}\mathrm{d}t.$$

Значит, $A^*y(t) = \overline{a(t)}y(t)$. Следовательно, если $a(t)$ – вещественнозначная функция, то $a(t) = \overline{a(t)}$ и оператор A самосопряженный. Если $|a(t)| = 1$ почти всюду, то $\frac{1}{a(t)} = \overline{a(t)}$ и оператор унитарный. Так как $a(t)\overline{a(t)} = \overline{a(t)}a(t)$, то оператор умножения на функцию нормальный.

Функция $\varphi(x,y) = (Ax,y)$ называется *билинейной формой*, порожденной оператором A. Билинейная форма линейна по первой переменной и антилинейна по второй. По аналогии, *квадратичной формой оператора* A будем называть числовую функцию $\varphi(x) = (Ax,x)$.

О п р е д е л е н и е 4. Оператор $A \in \mathscr{B}(H)$ называется *неотрицательным*, если порожденная им квадратичная форма неотрицательна, т. е. $(Ax,x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$. Неотрицательный оператор обозначается следующим образом: $A \geqslant 0$. Если $A - B \geqslant 0$, то говорят, что $A \geqslant B$.

Теорема 3. *Пусть A – самосопряженный оператор в H. Тогда*

1) квадратичная форма принимает только вещественные значения;

2) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} |(Ax,x)|$.

Пусть в H задано подпространство $L \subset H$. Согласно теореме о разложении в прямую сумму гильбертова пространства имеем $H = L \oplus L^{\perp}$ или $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^{\perp}$. Тогда каждому элементу $x \in H$ можно поставить в соответствие единственный элемент $y \in L$ – проекцию элемента x на подпространство L. Тем самым определяется отображение или оператор, который называется *ортопроектором* и $y = Px$.

Свойство 5. Каждый проектор P является всюду определенным в H линейным оператором со значениями в H.

Свойство 6. $P \in \mathscr{B}(H)$, причем $\|P\| = 1$, если $L \neq \{0\}$.

Свойство 7. $P^2 = P$.

Свойство 8. $P = P^*$.

Свойство 9. Оператор проектирования положителен, т. е. $(Px,x) \geqslant 0$ для всех $x \neq 0$.

Свойство 10. $x \in L$ тогда и только тогда, когда $\|Px\| = \|x\|$.

Свойство 11. $(Px,x) \leqslant \|x\|^2$ для любого $x \in H$. $(Px,x) = \|x\|^2$ тогда и только тогда, когда $x \in L$.

Теорема 4. *Пусть A – самосопряженный оператор в H, причем $A^2 = A$; тогда A – проектор на некоторое подпространство $L \subset H$.*

Компактные операторы

Определение 5. Пусть X и Y – банаховы пространства. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если он отображает всякое ограниченное множество пространства X в предкомпактное множество пространства Y.

Совокупность всех компактных операторов, действующих из X в Y, обозначим символом $\mathcal{K}(X,Y)$.

О п р е д е л е н и е 6. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если для любой последовательности $(x_n) \subset B[0,r] \subset X$ последовательность образов (Ax_n) содержит фундаментальную подпоследовательность.

О п р е д е л е н и е 7. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если образ $A(B)$ любого шара $B[0,r] \subset X$ является вполне ограниченным в Y множеством.

П р и м е р 2. Пусть Y – конечномерное банахово пространство, $A : X \to Y$, $A \in \mathscr{B}(X,Y)$. Тогда, $A(B)$ – образ шара $B[0,r]$ пространства X будет ограниченным в Y множеством, и, следовательно, вполне ограниченным.

П р и м е р 3. Оператор $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ называется *оператором конечного ранга*, если $\dim \mathscr{R}(A) < \infty$, т. е. множество его значений есть конечномерное подпространство пространства Y. В этом случае $A(B)$ является ограниченным множеством в конечномерном пространстве, поэтому предкомпактным, т. е. $A \in \mathscr{K}(X,Y)$.

Таким образом, любой линейный ограниченный оператор конечного ранга компактен. Примером такого оператора служит интегральный оператор Фредгольма с вырожденным ядром, действующий в пространстве $C[a,b]$.

П р и м е р 4. Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.2}$$

как оператор, действующий из пространства $C[a,b]$ в пространство $C[a,b]$, ядро которого $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно по совокупности переменных. Покажем, что $A(B)$ предкомпактно в $C[a,b]$. По теореме Арцела-Асколи мы должны проверить условия равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности функций $y(t) = Ax(t) \subset A(B)$.

$$\|y\|_C = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |Ax(t)| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \Big|\int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)x(s)|\,\mathrm{d}s \cdot \|x\| \leqslant M(b-a), \text{где } M = \max_{a\leqslant t,s\leqslant b} |\mathcal{K}(t,s)|.$$

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leqslant \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)|\,\mathrm{d}s \cdot \|x\| \leqslant \varepsilon(b-a),$$

так как в силу равномерной непрерывности функции $\mathcal{K}(t,s)$ на компакте $[a,b]\times[a,b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t_1,t_2 \in [a,b] : |t_1 - t_2| < \delta$ следует, что

$$|\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)| < \varepsilon.$$

Таким образом, интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром компактен.

Пример 5. Тождественный оператор $I : X \to X$ является компактным тогда и только тогда, когда $\dim X < \infty$.

Теорема 5. *Пусть $A : X \to Y$ – компактный оператор. Тогда область его значений $\mathscr{R}(A) \subset Y$ сепарабельна.*

Теорема 6. *Пусть $A_1, A_2 \in \mathscr{K}(X,Y)$. Тогда операторы $A_1 + A_2$, αA_1, где α – произвольная постоянная, также компактны.*

Теорема 7. *Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность компактных операторов, действующих из X из Y, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к оператору A. Тогда $A \in \mathscr{K}(X,Y)$.*

Замечание 1. Если $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{K}(X,Y)$ – последовательность, сходящаяся в каждой точке $x \in X$, то предельный оператор A может оказаться не компактным.

Теорема 8. *Пусть $A, B \in \mathscr{B}(X)$. Если хотя бы один из операторов является компактным, то компактным будет и их произведение.*

Следствие 4. В бесконечномерном банаховом пространстве X компактный оператор A не может иметь ограниченного обратного.

Теорема 9. *Пусть* X,Y *– банаховы пространства,* $A \in \mathscr{K}(X,Y)$*. Тогда сопряженный оператор* $A^* \in \mathscr{K}(X^*,Y^*)$*.*

Теорема 10. *Пусть* H *– сепарабельное гильбертово пространство,* $A \in \mathscr{B}(H)$*. Для того, чтобы* $A \in \mathscr{K}(H)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал номер* $n = n(\varepsilon)$ *и такие линейные операторы* A_1 *и* A_2*:* A_1 *–* n*-мерный,* $\|A_2\| < \varepsilon$*, что*

$$A = A_1 + A_2. \tag{1.3}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 6. Пусть $X = Y = \ell_2$ над полем $\mathbb{C}$. Пусть $x \in \ell_2$ и

$$Ax = (\underbrace{0,\ldots,0,}\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots),$$

где $\left(\alpha_i\right)_{i=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность в $\mathbb{C}$. Построить сопряженный оператор.

Решение. Применяя теорему Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, получим

$$f(Ax) = (Ax,y)_{\ell_2} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \overline{y_{i+k}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \alpha_i \overline{y_{i+k}} = A^* f(x) = (x,z)_{\ell_2},$$

где $z = A^* y$ $z_i = \overline{\alpha_i} y_{i+k}$. Следовательно,

$$A^* y = (\overline{\alpha_1} y_{k+1}, \overline{\alpha_2} y_{k+2}, \ldots).$$

Здесь мы заменили пространство функционалов изоморфным ему пространством, а именно, пространством ℓ_2.

Пример 7. Рассмотрим в пространстве $L_2[a,b]$ интегральный оператор Фредгольма с ядром $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s < \infty. \tag{1.4}$$

Построить сопряженный оператор.

Р е ш е н и е. Поступим, как в предыдущем случае, заменим пространство $(L_2[a,b])^*$ на ему изоморфное $L_2[a,b]$. Получим

$$f(Ax) = (Ax,y)_{L_2[a,b]} = \int\limits_a^b Ax(t)y(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right)y(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_a^b x(s)\left(\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)y(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \int\limits_a^b x(s)z(s)\,\mathrm{d}s = (x,z) = A^*f(x),$$

где

$$z(t) = A^*y(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(s,t)y(s)\mathrm{d}s. \tag{1.5}$$

В цепочке равенств мы использовали теорему Фубини о перемене порядка интегрирования по t и s. Формула (1.5) говорит о том, что сопряженным к интегральному оператору Фредгольма является интегральный оператор с ядром $\mathcal{K}(s,t)$ – транспонированным к исходному $\mathcal{K}(t,s)$.

П р и м е р 8. В пространстве $L_2[0,1]$ построим сопряженный оператор к интегральному оператору Вольтерра с непрерывным ядром по переменным t и s

$$Ax(t) = \int\limits_0^t t^2 s x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Построить сопряженный оператор

Р е ш е н и е. По определению сопряженного оператора имеем

$$f(Ax) = (Ax,y)_{L_2[0,1]} = \int\limits_0^1 Ax(t)y(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t t^2 s x(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^1 x(s)\left(\int\limits_s^1 t^2 s y(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_t^1 s^2 t y(s)\mathrm{d}s\right)x(t)\mathrm{d}t = (x,A^*y).$$

Откуда

$$A^*y(t) = \int\limits_t^1 ts^2 y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Пример 9. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) - \int\limits_0^1 4t^2 s x(s)\mathrm{d}s = t - a.$$

Выясним, при каких значениях параметра a уравнение разрешимо.

Решение. Запишем сопряженное однородное уравнение

$$u(t) - \int\limits_0^1 4ts^2 u(s)\mathrm{d}s = 0.$$

Это уравнение с вырожденным ядром и его решением будет функция $u(t) = ct$, где c – произвольная постоянная. Таким образом, сопряженное однородное уравнение имеет одно линейно независимое решение $u(t) = t$. Условие разрешимости уравнения примет вид

$$\int\limits_0^1 (t-a)t\mathrm{d}t = 0.$$

Отсюда видим, что при $a = \frac{2}{3}$ условие разрешимости выполнено, а при $a \neq \frac{2}{3}$ условие не выполнено, и уравнение решения не имеет.

Пример 10. Выяснить, является ли компактным оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, если

$$Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}}\mathrm{d}s.$$

Решение. Оператор A задан не на всем пространстве $C[0,1]$. Действительно, если рассмотреть функцию $x(t) \equiv 1, \forall t \in [0,1]$, то $Ax(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{|t-s|}$ и интеграл является расходящимся. Оператор A поэтому не является ограниченным и, следовательно, компактным как отображение из $C[0,1]$ в $C[0,1]$.

Пример 11. Выяснить, является ли компактным оператор

а) $A : C[0,1] \to C[0,1]$; б) $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующий по формуле

$$Ax(t) = \int_0^1 x\left(s^2\right) \mathrm{d}s.$$

Решение. а). Оператор A является линейным ограниченным ($\|A\| = 1$) оператором конечного ранга, следовательно, A – компактным оператор.

б). Исследуем оператор A в пространстве $L_2[0,1]$.

$$\int_0^1 x(s^2)\mathrm{d}s = \left[\begin{array}{l} s^2 = t \\ 2s\mathrm{d}s = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int\limits_0^1 \frac{x(t)}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Покажем, что оператор A неограничен. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \frac{t^{1/2n-1/2}}{\sqrt{n}}$, $t \in [0,1]$, из пространства $L_2[0,1]$. Имеем

$$\int_0^1 \frac{x_n(t)}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{1/n-1}}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{n} \Rightarrow \|Ax_n\| = \sqrt{n},\ \forall n \in N.$$

Оператор A неограничен и поэтому A не является компактным.

Пример 12. Будет ли компактным оператор дифференцирования $Ax(t) = x'(t)$, если он действует из $C^{(2)}[0,1]$ в $C[0,1]$.

Решение. Покажем, что A компактный оператор. Пусть $M \subset C^{(2)}[0,1]$ – произвольное ограниченное множество, т. е. $\exists \beta > 0$, что

$$\forall x(t) \in M \Rightarrow \|x\|_{C^2[0,1]} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x'(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x''(t)| \leqslant \beta,$$

тогда $\max\limits_t |x'(t)| \leqslant \beta$ и $\max\limits_t |x''(t)| \leqslant \beta$, $\forall x \in M$.

Рассмотрим множество $A(M) = \{x'(t) | x(t) \in M\}$. Тогда каждая функция из $A(M)$ непрерывно дифференцируема и как показано выше $A(M)$ равномерно ограничено. Докажем, что $A(M)$ равностепенно непрерывно. Пусть $\varepsilon > 0$ задано, выберем $\delta = \varepsilon/\beta$. Тогда для $\forall t_1,t_2 \in [0,1]$, удовлетворяющих неравенству $|t_1 - t_2| < \delta$, имеем

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| = |x''(\tau)| \cdot |t_1 - t_2| < \beta\delta \leqslant \varepsilon\,(\tau \in [t_1,t_2] \subset [0,1]).$$

По теореме Арцела множество $A(M)$ предкомпактно, поэтому оператор A компактен.

Пример 13. Рассмотрим оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$, определенный с помощью формулы

$$Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2,$$

где $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ – заданная числовая последовательность. Какой должна быть эта последовательность, чтобы оператор A был компактным?

Решение. Мы показывали ранее, что оператор A является ограниченным тогда и только тогда, когда последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, т. е. $\exists L > 0$, что $|\alpha_i| \leqslant L, \forall i$. Докажем, что оператор A является компактным тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и пусть $M \subset l_2$ ограничено, т. е. $\exists \beta > 0$, что

$$\|x\|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \leqslant \beta, \ \forall x \in M.$$

В этом случае оператор A ограничен, т. е. он отображает ограниченное множество $M \subset \ell_2$ в ограниченное множество $A(M) \subset \ell_2$.. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ следует, что

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\beta}.$$

Поэтому для $\forall x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ имеем

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |Ax_i|^2 = \sum_{j=n_0}^{\infty} \alpha_i^2 x_i^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta^2} \sum_{j=n_0}^{\infty} x_i^2 \leqslant \varepsilon,$$

т. е. согласно критерию предкомпактности в ℓ_2 множество $A(M)$ предкомпактно. Пусть теперь A компактный оператор, тогда он ограничен и, следовательно, последовательность $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ также ограничена. Рассмотрим для каждого $n \in N$ вектор $l_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, ldots) \neq 0, Al_n = \alpha_n l_n$. Следовательно, все числа α_n являются собственными значениями компактного оператора A. Поэтому, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Задание 1. Найти сопряженный оператор A^* к оператору A : $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующему по следующим формулам:

1.1. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} tx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^3} t^2 sx(s)\mathrm{d}s;$

1.2. $Ax(t) = \begin{cases} x(t),\ 0 \le t \le \lambda\ , \\ 0, \lambda < t \leqslant 1, \end{cases}$

1.3. $Ax(t) = x(t^\alpha) - 2\sin tx(t);$

1.4. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^3} \cos ts^4 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^2}^{t^3} \sin tsx(s)\mathrm{d}s;$

1.5. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} sx\left(s^{1/4}\right)\mathrm{d}s + \int\limits_0^{t^4} \sin t\sqrt{s}x(s)\mathrm{d}s;$

1.6. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} \ln t + 1s^5 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^2}^{t} (t+1)sx(s)\mathrm{d}s;$

1.7. $Ax(t) = \int\limits_0^{1-t} ts^3 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^3} t^4 s^3 x(s)\mathrm{d}s;$

1.8. $Ax(t) = \int\limits_t^{1} e^s x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^2} t^5 \cos sx(s)\mathrm{d}s;$

1.9. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} ts^2 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^3}^{t^2} t^2 sx(s)\mathrm{d}s;$

1.10. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^4} ts^5 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^2}^{t} (t+1)^2 sx(s)\mathrm{d}s;$

1.11. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} tsx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^3}^{t^2} t^2 s^3 x(s)\mathrm{d}s;$

1.12. $Ax(t) = \int\limits_{t^3}^{1} t^2 x\left(\sqrt[3]{s}\right)\mathrm{d}s + \int\limits_0^{t^2} tsx(s)\mathrm{d}s;$

1.13. $Ax(t) = \int\limits_t^{t^2} e^t x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^3} \sin t\sqrt{s}x(s)\mathrm{d}s;$

1.14. $Ax(t) = \int\limits_t^{1} tx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{1} \cos tsx(s)\mathrm{d}s;$

1.15. $Ax(t) = \int\limits_t^{t^2} tx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{1} \sin ts^2 x(s)\mathrm{d}s.$

Задание 2. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A : \ell_2 \to \ell_2$, действующему по следующим формулам. Будет ли A самосопряженным?

2.1. $Ax = (x_2, x_3, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.2. $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.3. $Ax = (0{,}0{,}\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)\,, \alpha_i \in \mathbb{C},\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.4. $Ax = (x_1, \ldots, x_n{,}0, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.5. $Ax = \Big(\underbrace{0, \ldots ,0}_{n-1}, x_1, \ldots\Big),\ x = (x_1{,}x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.6. $Ax = (\alpha_n x_n{,}\alpha_{n+1} x_{n+1}, \ldots)\,, \alpha_i \in \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.7. $Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3, x_4, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.8. $Ax = (x_3{,}x_1, x_2, x_4, x_5, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.9. $Ax = (-x_1, x_2, -x_3{,}x_4, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.10. $Ax = (0, 0, x_3 + x_4, x_4 - x_3, x_5, x_6, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.11. $Ax = (0, 0, x_1, x_2, \ldots)\,, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.12. $Ax = (x_2 + x_1, x_1 - x_2, x_4{,}x_3, x_5, x_6, \ldots)\,, x = (x_1{,}x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.13. $Ax = (x_1, 0, x_2{,}0, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2;$
2.14. $Ax = (x_2, 0, x_3, 0, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2.$
2.15. $Ax = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots)\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2.$

Задание 3. Являются ли компактными следующие операторы как отображение E в E ?

3.1. $E = C[0{,}1], \quad Ax(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2 x(1);$
3.2. $E = C[0{,}1], \quad Ax(t) = x\left(t^2\right);$
3.3. $E = C[-1{,}1], \quad Ax(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t));$
3.4. $E = C[0{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^t \tau x(\tau)\mathrm{d}\tau;$
3.5. $E = C[0{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{ts}\tau x(s)\mathrm{d}s;$
3.6. $E = L_2[0{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^t \tau x(\tau)\mathrm{d}\tau;$
3.7. $E = L_2[0{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)\mathrm{d}s}{|t-s|^{\alpha}};$
3.8. $E = L_2[0{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x\left(\sqrt{s}\right)}{s^{5/4}}\mathrm{d}s;$
3.9. $E = L_2[0{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{\sin(t-s)}\mathrm{d}s;$

3.10. $E=C[0,1],\quad Ax(t)=\int\limits_0^1(s\sin t+s^2\cos t)x(s)\mathrm{d}s;$

3.11. $E=L_2[0,1],\quad Ax(t)=\int\limits_0^1\dfrac{x(s)}{s-1/2}\mathrm{d}s;$

3.12. $E=C[0,1],\quad Ax(t)=\int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s^\gamma)\mathrm{d}s,\ \gamma>0;$

3.13. $E=L_2[0,1],\quad Ax(t)=\int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s^\gamma)\mathrm{d}s,\ \gamma>0;$

3.14. $E=C[0,1],\quad Ax(t)=\int\limits_0^1 tsx(s)\mathrm{d}s+\sin tx(1).$

3.15. $E=C[0,1],\quad Ax(t)=\int\limits_0^1 tsx(s)\mathrm{d}s+\cos tx(0).$

Задание 4. С помощью сопряженного оператора найти необходимые условия разрешимости уравнения $Ax=y$, если $A:\ell_2\to\ell_2$

4.1 $Ax=(x_1-3x_2,3x_2-x_1,x_3-2x_4,x_4-2x_3,x_5,x_6,\ldots)$;
4.2 $Ax=(x_1+x_2,3x_2-x_1,x_3-2x_2,x_4-2x_3,x_5,x_6,\ldots)$;
4.3 $Ax=(x_1-3x_2,3x_2-x_1,x_3-2x_4,x_4-2x_3,x_5,x_6,\ldots)$;
4.4 $Ax=(x_1-x_3,x_2-x_1,x_3-2x_4,x_4-5x_1,x_5,x_6,\ldots)$;
4.5 $Ax=(x_1-x_2+x_3,3x_2-x_1,x_2-x_3-x_4,x_4-x_2,x_5,x_6,\ldots)$;
4.6 $Ax=(x_1-x_2,3x_2-x_1-x_3,x_3-2x_4,x_4-2x_1,x_5,x_6,\ldots)$;
4.7 $Ax=(x_1-x_2+x_3,3x_2-x_1-x_3,x_3-x_4,x_4-2x_2,x_5,x_6,\ldots)$;
4.8 $Ax=(x_1-x_2+x_4,3x_2-x_1-x_4,x_3-x_4,x_4-2x_3,x_5,x_6,\ldots)$;
4.9 $Ax=(x_1+x_2+x_3,3x_2-x_1,x_3-2x_4,x_4-2x_3,x_5,x_6,\ldots)$;
4.10 $Ax=(x_1-x_2,x_2-x_1,x_3-x_2-2x_4,x_4-2x_3,x_5,x_6,\ldots)$;
4.11 $Ax=(x_1+2x_2,3x_2+5x_1,x_1-x_3-2x_4,x_4-2x_3,x_5,x_6,\ldots)$;
4.12 $Ax=(x_1+x_2,x_2+x_1,x_3-x_4,x_4-x_3,x_5,x_6,\ldots)$;
4.13 $Ax=(x_1-x_2,x_2-x_1,x_3-x_2-x_4,x_4-x_3,x_5,x_6,\ldots)$;
4.14 $Ax=(x_1,3x_2-x_1,x_4-x_3-x_2,x_4-2x_3,x_5,x_6,\ldots)$.
4.15 $Ax=(x_2,3x_2-2x_1,x_4-x_3-2x_2,x_4-2x_3,x_5,x_6,\ldots)$.

Задание 5.

5.1. В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим подпространство $L=\{x=(x_1,x_2)|x_1-3x_2=0\}$ и определим на нем линейный ограниченный функционал вида $f_0(x)=x_2$. Продолжить функционал f_0 на все пространство с сохранением нормы. Рассмотреть случай, когда в пространстве $\mathbb{R}^2$ задана сферическая, кубическая либо октаэдрическая нормы. Что можно сказать о продолжении?