БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-методическое пособие
для студентов факультета прикладной
математики и информатики

МИНСК
2011

УДК 517.382(072)(075.8)
ББК 22.161.1р.я73
Н 55

Авторы:
О. А. Кастрица, С. А. Мазаник
А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович

Рекомендовано ученым советом
факультета прикладной математики и информатики
14 декабря 2010 г., протокол № 3

Рецензент
кандидат физико-математических наук *Е. А. Барабанов*

Н 55 **Несобственные** интегралы: учеб.-метод. пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики / О. А. Кастрица, С. А. Мазаник, А. Ф. Наумович, Н. Ф Наумович – Минск: БГУ, 2011. – 51 с.

Пособие содержит необходимые теоретические сведения и основные приемы исследования сходимости и вычисления несобственных интегралов. Изложение материала иллюстрируется подробно разобранными примерами. В пособие включены упражнения для самостоятельного решения, снабженные ответами.

Пособие предназначено для студентов факультетов прикладной математики и информатики, оно также будет полезным для всех студентов, изучающих математический анализ в объеме университетского курса.

УДК 517.382(072)(075.8)
ББК 22.161.1р.я73

1. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Построение интеграла Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$ как предела интегральных сумм возможно, если:

1) промежуток интегрирования ограничен;

2) подынтегральная функция ограничена.

Нарушение хотя бы одного из этих условий для возможного присвоения интегралу числового значения требует привлечения новых конструкций, которые и приводят к так называемым несобственным интегралам.

1.1. Несобственный интеграл по неограниченному промежутку

1.1.1. Несобственный интеграл 1-го рода (НИ$-$1)

В этом разделе все функции предполагаются интегрируемыми по Риману на любом ограниченном промежутке из области определения.

Математическая конструкция $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ несобственного интеграла первого рода вводится следующим образом:

пусть функция f определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема по Риману на любом ограниченном промежутке $[a, A]$, $a, A \in \mathbb{R}$; пусть $\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$; предел

$$\lim_{A\to+\infty} \Phi(A) = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx \tag{1.1}$$

обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и называют *несобственным интегралом первого рода* (НИ$-$1). Если этот предел существует и конечен, то НИ$-$1 называют сходящимся, а функцию f называют интегрируемой (в несобственном смысле) на $[a, +\infty)$. В противном случае (т.е. когда предел (1.1) не существует или бесконечен) говорят, что НИ$-$1 расходится.

Таким образом,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx.$$

Пример 1.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} \left(\mathrm{arctg} x|_0^A\right) = \lim\limits_{A\to+\infty} \mathrm{arctg} A = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$, т.е. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Пример 1.2. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \bigl(\sin x|_0^A\bigr) = \lim\limits_{A\to+\infty} \sin A$. Так как этот предел не существует, то интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$ расходится.

Отметим, что по определению сходимость НИ-1 $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ означает:

$$\exists\, I \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, A_\varepsilon > a, \forall A \geq A_\varepsilon \Longrightarrow \left|\int\limits_a^A f(x)dx - I\right| \leq \varepsilon.$$

Если $f(x) \geq 0\ \forall\, x \in [a, +\infty)$, то $\int\limits_a^A f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции. Естественно считать $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$ площадью неограниченной криволинейной трапеции, заключенной между кривыми $x = a$, $y = f(x)$ и $y = 0$.

Несобственная двойная подстановка

По аналогии с операцией двойной подстановки $F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$ используют операцию $F(x)\big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$, понимая $F(+\infty)$ как $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Такую операцию называют также (несобственной) двойной подстановкой.

Результат несобственной двойной подстановки может дать число, ∞ или не существовать. В последних двух случаях интеграл расходится.

Пример 1.3. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ в зависимости от параметра α.

Решение. При $\alpha = 1$ интеграл расходится. Действительно,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\big|_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln 1 = +\infty.$$

Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда первообразной для $\dfrac{1}{x^\alpha}$ на $[1, +\infty)$ будет $\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$. Значит,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_1^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{при } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

Таким образом, $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Такой же результат имеет место для интеграла $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при любом $a > 0$ и используется как эталонный при исследовании НИ-1 от положительных функций.

Критерий Коши сходимости НИ−1

Теорема 1.1. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, A_\varepsilon,\ \forall\, A, B \geq A_\varepsilon \Longrightarrow \left|\int\limits_A^B f(x)dx\right| \leq \varepsilon.$$

Пример 1.4. С помощью критерия Коши доказать сходимость интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+\sin^2 x}\, dx.$$

Р е ш е н и е. Не ограничивая общности, считаем $B \geq A$. Имеем

$$\left|\int\limits_A^B \frac{\sin 2x}{x^2+\sin^2 x}\, dx\right| \leq \int\limits_A^B \frac{|\sin 2x|}{x^2+\sin^2 x} dx \leq \int\limits_A^B \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_A^B = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \leq \frac{1}{A}.$$

Обозначим $A_\varepsilon = \max\{1; 1/\varepsilon\}$. Из приведенных оценок следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $A_\varepsilon = \max\{1; 1/\varepsilon\}$ такое, что для любых $A, B \geq A_\varepsilon$ выполнено

$$\left|\int\limits_A^B \frac{\sin 2x}{x^2+\sin^2 x} dx\right| \leq \varepsilon,$$

что, согласно критерию Коши, и означает сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+\sin^2 x} dx$.

Критерий Гейне сходимости НИ−1

Теорема 1.2. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует $I \in \mathbb{R}$ такое, что для любой последовательности (A_n), $A_n \geq a$, $A_n \to +\infty$, выполняется

$$\int\limits_a^{A_n} f(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I.$$

Замечание 1.1. Последовательность $\int\limits_a^{A_n} f(x)dx$ является последовательностью частных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_{k-1}}^{A_k} f(x)dx$, $A_0 = a$. Поэтому $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx$ (при любом выборе последовательности (A_n), $A_0 = a, A_n \geq a, A_n \to +\infty$).

Замечание 1.2. Если существует последовательность (A_n), $A_n \geq a, A_n \to +\infty$, такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 1.5. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x dx$. Пусть $A_n = n\pi$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Построим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \sin x dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin x dx$. Так как

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin x dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-\cos x)\Big|_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty}((-1)^{n+1} - (-1)^n) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot 2,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \sin x dx$ расходится (n-ый член ряда не стремится к 0). Следовательно, расходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x dx$.

Замечание 1.3. Если $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \geq a$, то из существования последовательности (A_n), $A_n \geq a, A_n \to +\infty$, такой, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx$ сходится, следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Замечание 1.4. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не следует, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (но $\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx \to 0$ для любой последовательности (A_n), $A_n \geq a$, $A_n \to +\infty$).

Пример 1.6. Пусть $f(x) = \begin{cases} n, \text{ если } x \in \left[n; 1/n^3\right]; \\ 0, \text{ для остальных } x,\ x \geq 1. \end{cases}$

Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_n^{n+1/n^3} ndx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\dfrac{1}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Этот ряд сходится, следовательно, сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$, однако $f(x) \nrightarrow 0$ при $x \to +\infty$.

Пример 1.7. Пусть $f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x = n; \\ 0, & \text{если } x \neq n. \end{cases}$

Тогда $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = 0$, однако $f(x) \nrightarrow 0$, при $x \to \infty$.

Замечание 1.5. Если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c \neq 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, так как $\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$ для последовательности $(A_n) = (n)$ и, следовательно, расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx$.

Вычисление и преобразование НИ−1

Замена переменных. Пусть функция φ на промежутке $[\alpha, \beta)$ непрерывно дифференцируема, строго монотонна, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = +\infty$, тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1.2}$$

Замечание 1.6. β может быть числом или $\pm\infty$.

Пример 1.8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}dx = \left[x = \sqrt{t}, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}\right] = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$.

Замечание 1.7. Если $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ − риманов интеграл, то это значит, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ является числом, т.е. сходится.

Замечание 1.8. Может оказаться, что функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ не ограничена на $[\alpha, \beta)$. Такие интегралы будут рассмотрены позже.

Интегрирование по частям. Если функции u и v имеют непрерывные производные u' и v' на $[a, +\infty)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx \tag{1.3}$$

в предположении, что две из трех составляющих, входящих в эту формулу, существуют (существование третьей составляющей и равенство следуют).

Пример 1.9. Так как при $a > 0$ и $b \neq 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \left[u = e^{-ax}, du = -ae^{-ax}dx, dv = \cos bx dx, v = \frac{1}{b}\sin bx\right] =$$

$$= \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx\Big|_0^{+\infty} + \frac{a}{b}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx =$$

$$= \left[u = e^{-ax}, du = -ae^{-ax}dx, dv = \sin bx dx, v = -\frac{1}{b}\cos bx\right] =$$

$$= -\frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{a^2}{b^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx,$$

то

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Аналогично,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2},\ a > 0.$$

Замечание 1.9. Формулы (1.2) и (1.3) позволяют не только вычислять, но и исследовать сходимость НИ−1.

Свойства НИ−1

1. ***Линейность.*** Если сходятся интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, то при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ и

$$\int\limits_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx + \beta\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

В частности,

$$\int\limits_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx;$$

$$\int\limits_a^{+\infty} \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

2. ***Аддитивность.*** Пусть $b \geq a$. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$. При этом

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx.$$

3. ***Монотонность (интегрирование неравенств).*** Пусть функции f и g интегрируемы на $[a, +\infty)$ и $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx. \tag{1.4}$$

1.1.2. НИ−1 от положительных функций

Пусть $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a, +\infty)$. НИ−1 от таких функций называют НИ−1 от положительных функций. В этом случае функция $\Phi(A) = \int\limits_a^{A} f(x)dx$ возрастает.

Критерий сходимости НИ−1 от положительной функции

Теорема 1.3. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $f(x) \geq 0$, сходится тогда и только тогда, когда существует M такое, что $\int\limits_a^{A} f(x)dx \leq M$, $\forall A \geq a$.

Замечание 1.10. Если $f(x) \leq 0$ на промежутке $[a, +\infty)$, то исследование сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сводится к исследованию сходимости НИ−1 от положительной функции $\int\limits_a^{+\infty} (-f(x))dx$.

Признаки сравнения

Признак 1. Пусть $0 \le f(x) \le g(x) \ \ \forall x \in [c, +\infty),\ c \ge a$.

а) Если сходится интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx, \tag{1.5}$$

то сходится и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{1.6}$$

б) Если интеграл (1.6) расходится, то расходится и интеграл (1.5).

Пример 1.10. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 4x}{\sqrt[5]{x^6 + x^3 + 1}} dx$.

Решение. На промежутке $[1; +\infty)$ справедлива оценка $\frac{\sin^2 4x}{\sqrt[5]{x^6 + x^3 + 1}} \le \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}$. Так как $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{6/5}}$ сходится (см. пример 1.3, $\alpha = 6/5 > 1$), то по признаку 1 сходится и исходный интеграл.

Пример 1.11. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x + \cos^2 x} dx$.

Решение. Подынтегральная функция положительна для $x > 1$ и при достаточно больших x справедлива оценка $\frac{\ln x}{x + \cos^2 x} \ge \frac{1}{x}$. Поскольку $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится (см. пример 1.3, $\alpha = 1$), то по признаку 1 расходится и исходный интеграл.

Пример 1.12. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + \sin^2 x}$.

Решение. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + \sin^2 x} = \int\limits_0^{1} \frac{x^2 dx}{x^4 + \sin^2 x} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + \sin^2 x}.$$

Поскольку функция $\frac{x^2}{x^4 + \sin^2 x}$ непрерывна на $(0; 1]$, а

$$\lim_{x \to +0} \frac{x^2}{x^4 + \sin^2 x} = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x^2 + \dfrac{\sin^2 x}{x^2}} = 1,$$

то $\int\limits_0^{1} \frac{x^2 dx}{x^4 + \sin^2 x}$ является интегралом Римана. Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + \sin^2 x}$. Так как

$\dfrac{x^2}{x^4+\sin^2 x} \le \dfrac{1}{x^2}$, а $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходится, то согласно признаку 1 сходится и $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x^2dx}{x^4+\sin^2 x}$. Следовательно, по свойству аддитивности сходится и исходный интеграл.

Пример 1.13. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln x dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. Для всех $x \ge 1$ справедлива оценка $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{x^2+1}} \le \dfrac{\ln x}{x^2}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, то существует $a > 1$, такое, что $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$ для всех $x \ge a$. Поэтому, для $x \ge a$ справедливо неравенство $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{x^2+1}} \le \dfrac{\ln x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^{3/2}}$. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{3/2}}$ сходится, следовательно, сходятся также интегралы $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x\sqrt{x^2+1}}dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln x dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Признак 2. Пусть $f(x) \ge 0,\ g(x) > 0\ \forall x \in [a, +\infty)$, и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l,\ 0 \le l \le +\infty.$$

а) Если $0 < l < +\infty$, то оба интеграла сходятся или оба расходятся.

б) Если $l = 0$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

в) Если $l = +\infty$, то из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 1.14. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_e^{+\infty} \dfrac{dx}{\ln x}$.

Решение. Рассмотрим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{\ln x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$$

Поскольку $\int\limits_e^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ расходится, то по признаку 2 расходится и интеграл $\int\limits_e^{+\infty} \dfrac{dx}{\ln x}$.

Пример 1.15. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Решение. Имеем
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0.$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится, следовательно, сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Пример 1.16. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{p-1}e^{-x}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{p+1}}{e^x}=0$ при любом p. Поскольку $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится, то при любом p сходится и $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

Степенной признак. Пусть неотрицательная функция $f(x)$ определена на $[a;+\infty)$, $a>0$, и $f(x)\sim\dfrac{c}{x^p}$ при $x\to+\infty,\ c>0$.

а) Если $p>1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

б) Если $p\le 1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Следствие 1.1. Если существует $p>1$ такое, что $f(x)=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$ при $x\to+\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ $(a>0)$ сходится.

Пример 1.17. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$.

Решение. Поскольку $x^4-x^2+1\neq 0$ для всех $x\ge 0$, то интеграл представляет собой НИ−1. Подынтегральная функция неотрицательна и $\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}\sim\dfrac{1}{x^2}$ при $x\to+\infty$. Так как $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$.

Отметим, что в результате использования эквивалентности при $x\to+\infty$ оказалось, что функция $\dfrac{1}{x^2}$ неограничена в окрестности точки $x=0$. Но, поскольку исходный интеграл в точке $x=0$ не имеет особенности, то представляя его в виде

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1} = \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1} + \int\limits_1^1 \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1}$ и учитывая, что $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1}$ является интегралом Римана, заключаем, что сходимость исходного интеграла определяется сходимостью интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

Пример 1.18. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x} dx$.

Решение. Так как $\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{2+x}$ при $x \to +0$, то интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x} dx$ является интегралом Римана. Поэтому исследуем сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x} dx$. Поскольку $\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\pi}{4}$ при $x \to +\infty$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x} dx$.

Пример 1.19. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x + \ln x}}$.

Решение. Поскольку $4x + \ln x = 4x\big(1 + \frac{\ln x}{4x}\big) \sim 4x$ при $x \to +\infty$, то $\frac{1}{\sqrt{4x + \ln x}} \sim \frac{1}{2x^{1/2}}$, $x \to +\infty$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ расходится, значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x + \ln x}}$ также является расходящимся.

Пример 1.20. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$.

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $\alpha > 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\alpha - \varepsilon > 1$ (такое ε всегда существует), и представим $\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}} \cdot \frac{\ln x}{x^\varepsilon}$. Поскольку $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$, то существует $a > 1$ такое, что $\frac{\ln x}{x^\varepsilon} \leq 1$ для $x \geq a$. Тогда при $x \geq a$ выполняется неравенство $\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}} \cdot \frac{\ln x}{x^\varepsilon} \leq \frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}$. Так как $\alpha - \varepsilon > 1$, то $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-\varepsilon}}$ сходится, значит по признаку сравнения сходится и $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$, а, следовательно, и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^\alpha}$.

2) $\alpha \leq 1$. Тогда $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} \geq \dfrac{1}{x^\alpha}$ для $x \geq e$, и из расходимости $\int\limits_e^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ следует расходимость $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} dx$.

Таким образом, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 1.21. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha \ln^p x} dx$, $a > 1$, в зависимости от параметров α и p.

Решение. Рассмотрим три случая:

1) $\alpha = 1$. В интеграле $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{1}{x \ln^p x} dx$ сделаем замену $\ln x = t$, $dx/x = dt$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{1}{x \ln^p x} dx = \int\limits_{\ln a}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^p}$, $\ln a > 0$, а этот интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

2) $\alpha > 1$. Покажем, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha \ln^p x} dx$ сходится при любом p. Действительно, при любом фиксированном $\alpha > 1$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\alpha - \varepsilon > 1$. Представим $\dfrac{1}{x^\alpha \ln^p x} = \dfrac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}} \cdot \dfrac{\ln^{-p} x}{x^\varepsilon}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^{-p} x}{x^\varepsilon} = 0$ при любом p, то существует $c > 1$ такое, что $\dfrac{\ln^{-p} x}{x^\varepsilon} \leq 1$ для $x \geq c$. Тогда при $x \geq c$ выполнено неравенство $\dfrac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}} \cdot \dfrac{\ln^{-p} x}{x^\varepsilon} \leq \dfrac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}$. Так как $\alpha - \varepsilon > 1$, то $\int\limits_c^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\alpha-\varepsilon}}$ сходится, значит, по признаку сравнения сходится и $\int\limits_c^{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha \ln^p x} dx$, а, следовательно, сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha \ln^p x} dx$ при любом $p \in \mathbb{R}$.

3) $\alpha < 1$. Покажем, что в этом случае интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha \ln^p x} dx$ расходится при любом p. Действительно, при любом фиксированном $\alpha < 1$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\alpha + \varepsilon < 1$. Представим $\dfrac{1}{x^\alpha \ln^p x} = \dfrac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}} \cdot \dfrac{x^\varepsilon}{\ln^p x}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\varepsilon}{\ln^p x} = +\infty$ при любом p, то существует $c > 1$ такое, что $\dfrac{x^\varepsilon}{\ln^p x} \geq 1$ для $x \geq c$. Тогда при $x \geq c$ выпол-

няется неравенство $\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}} \cdot \frac{x^{\varepsilon}}{\ln^p x} \geq \frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}$. Так как $\alpha + \varepsilon < 1$, то $\int\limits_c^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+\varepsilon}}$ расходится, значит, по признаку сравнения расходится и $\int\limits_c^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha} \ln^p x} dx$, а, следовательно, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha} \ln^p x} dx$ при любом $p \in \mathbb{R}$ является расходящимся.

Таким образом, при $a > 1$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^p x}$ сходится при $\alpha > 1$ и любом p; сходится при $\alpha = 1$ и $p > 1$; расходится при $\alpha < 1$ и любом p; расходится при $\alpha = 1$ и $p \leq 1$.

1.1.3. НИ−1 от произвольных функций

Признак Дирихле

Теорема 1.4. Пусть

а) функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$;

б) функция g имеет на $[a, +\infty)$ непрерывную производную и монотонно стремится к 0 при $x \to +\infty$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Пример 1.22. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}+1} dx$.

Решение. Воспользуемся признаком Дирихле. Положим $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$. При этом

1) функция $f(x) = \sin 2x$ непрерывна на $[0; +\infty)$;

2) $\left| \int\limits_0^A \sin 2x dx \right| = \left| -\frac{1}{2} \cos x \right|_0^A = \frac{1}{2} |1 - \cos A| \leq 1$ для $\forall A \geq 0$;

3) $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ − непрерывна, например, для $x \geq 1$, а так как $g'(x) < 0$ для $x \geq 1$, то $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, убывая. На основании признака Дирихле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}+1} dx$ сходится. Учитывая, что $\int\limits_0^{1} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}+1} dx$ представляет собой интеграл Римана, можно заключить, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}+1} dx$ сходится.

Признак Абеля

Теорема 1.5. Пусть

а) функция f непрерывна на $[a,+\infty)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

б) функция g имеет непрерывную производную, ограничена и монотонна на $[a,+\infty)$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Пример 1.23. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} \mathrm{arctg} x dx$.

Решение. Воспользуемся признаком Абеля. Положим $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}$, $g(x) = \mathrm{arctg} x$. Функция $f(x)$ непрерывна на $[1;+\infty)$, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} dx$ сходится по признаку Дирихле. Функция $g(x) = \mathrm{arctg} x$ имеет на $[1;+\infty)$ непрерывную производную $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ и монотонна (возрастает). Кроме того, $|g(x)| \leq \frac{\pi}{2}$. По признаку Абеля исходный интеграл сходится.

Абсолютная сходимость НИ−1

Как и ранее, предполагается, что $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,A] \subset [a,+\infty)$.

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называют абсолютно сходящимся, если сходится $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Теорема 1.6. Если $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называют неабсолютно (условно) сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Замечание 1.11. $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ является НИ−1 от положительной функции и может быть исследован с использованием отмеченных ранее признаков сходимости НИ−1 от положительных функций.

Пример 1.24. Исследовать интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ на абсолютную и неабсолютную сходимость.

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ представляет собой интеграл Римана. Рассматриваем далее $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ и исследуем его на абсолютную сходимость. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$. Так как справедливо $\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$, то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится. Исследуем сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$, применяя признак Дирихле. Функция $\cos 2x$ непрерывна на $[1; +\infty)$ и $\left|\int\limits_1^{A} \cos 2x dx\right| = \left|\frac{1}{2}\sin 2x\right|_1^A \leq 1$. Функция $g(x) = \frac{1}{x}$ непрерывно дифференцируема и монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Поэтому по признаку Дирихле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$ сходится. Один из интегралов расходится, другой сходится и их разность является расходящимся интегралом, т.е. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится. А тогда по признаку сравнения расходится и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$. Таким образом, исходный интеграл не является абсолютно сходящимся.

Исследуем его на сходимость. Здесь опять применим признак Дирихле: $\sin x$ непрерывна на $[1; +\infty)$ и $\left|\int\limits_1^{A} \sin x dx\right| \leq 2$, функция $\frac{1}{x}$ непрерывно дифференцируема и монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Следовательно, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится. Таким образом, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится неабсолютно.

Пример 1.25. Исследовать на абсолютную и неабсолютную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$.

Решение. 1) Если $\alpha > 1$, то $\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится и, следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится абсолютно;

2) если $0 < \alpha \le 1$, то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ – расходится.

Это показывается так же, как и в предыдущем примере:

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \ge \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}.$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha} dx$ сходится по признаку Дирихле. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$ расходится. Вместе с этим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится по признаку Дирихле и, следовательно, является неабсолютно сходящимся;

3) если $\alpha = 0$, то имеем $\int\limits_1^{+\infty} \sin x dx = -\cos x\Big|_1^{+\infty}$ – не существует, и $\int\limits_1^{+\infty} \sin x dx$ – расходится;

4) если $\alpha < 0$, то $\int\limits_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx =$ [по теореме о среднем для определенного интеграла, $\pi n \le \xi_n \le \pi(n+1)$] $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^\alpha} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \sin x dx =$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^\alpha} \Big[-\cos x\Big]_{\pi n}^{\pi(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - (-1)^{n+1}}{\xi_n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\xi_n^\alpha}.$$

Но $\frac{1}{\xi_n^\alpha} = \xi_n^{-\alpha} \ge (\pi n)^{-\alpha} \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, ряд расходится, значит, расходится и интеграл.

Подытоживая исследование, приходим к следующему ответу:
если $\alpha > 1$, то интеграл сходится абсолютно;
если $0 < \alpha \le 1$, то интеграл сходится неабсолютно;
если $\alpha \le 0$, то интеграл расходится.

Пример 1.26. Исследовать интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ на абсолютную и неабсолютную сходимость.

Решение. Осуществим замену переменной

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \left[x = \sqrt{t},\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt\right] = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

В предыдущем примере установлено, что этот интеграл сходится неабсолютно. Следовательно, и исходный интеграл сходится неабсолютно.

1.1.4. Несобственные интегралы по произвольному неограниченному промежутку

Если функция f задана на $(-\infty, b]$ и интегрируема на любом отрезке $[B, b] \subset (-\infty, b]$, то НИ$-1$ $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ определяют следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{b} f(x)dx.$$

Интеграл сходится, если этот предел конечен.

Для таких интегралов справедливы аналоги теорем, сформулированных ранее для интегралов $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Если f задана на $(-\infty, +\infty)$, то НИ-1 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ понимают как сумму

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

при любом фиксированном $c \in \mathbb{R}$. Это означает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{c} f(x)dx + \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{c}^{A} f(x)dx.$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называют сходящимся, если сходятся оба интеграла $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$. Выбор c на сходимость интеграла не влияет.

Пример 1.27. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{2x^2 - 5x + 3}$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{2x^2 - 5x + 3} = \int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{(2x-3)(x-1)} = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\dfrac{2}{2x-3} - \dfrac{1}{x-1}\right)dx =$

$= \Big[\ln|2x-3| - \ln|x-1|\Big]_{-\infty}^{0} = \ln\left|\dfrac{2x-3}{x-1}\right|\Big|_{-\infty}^{0} = \ln 3 - \ln 2 = \ln 3/2.$

Пример 1.28. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{-2} \dfrac{\mathrm{arctg} x}{\sqrt[3]{x^3 - x^5}}dx$.

Решение. Имеем $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^3-x^5}} \sim \dfrac{-\pi/2}{-x^{5/3}}$ при $x \to -\infty$. Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{-2} \dfrac{dx}{x^{5/3}}$ сходится, то сходится и исходный интеграл.

1.2. Несобственный интеграл от неограниченной функции

1.2.1. Несобственный интеграл 2-го рода (НИ−2)

Пусть функция f определена на полуинтервале $[a,b)$ и не ограничена в любом интервале $(b-\eta, b),\ \eta > 0$. В этом случае точку b называют особой точкой функции. Будем предполагать, что существует окрестность точки b, в которой функция других особых точек не имеет, и что f интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b-\eta],\ \eta > 0$, т.е. существует

$$\Phi(\eta) = \int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx.$$

Предел

$$\lim_{\eta\to+0} \Phi(\eta) = \lim_{\eta\to+0} \int\limits_1^{b-\eta} f(x)dx \tag{1.7}$$

обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$ и называют несобственным интегралом 2-го рода (НИ-2). Если этот предел существует и конечен, то НИ-2 называют сходящимся, а функцию f называют интегрируемой на $[a,b)$. В противном случае (т.е. когда предел (1.7) не существует или бесконечен) говорят, что НИ-2 расходится.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to+0} \int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx = \lim_{c\to b-0} \int\limits_a^c f(x)dx.$$

Пример 1.29. Имеем $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1-x} = \lim\limits_{c\to1-0} \int\limits_0^c \dfrac{dx}{1-x} = \lim\limits_{c\to1-0} \left(-\ln(1-x)\Big|_0^c\right) = \lim\limits_{c\to1-0}(-\ln(1-c)) = +\infty.$

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 1.30. Имеем $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{c\to1-0} \int\limits_0^c \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{c\to1-0} \left(-2\sqrt{1-x}\Big|_0^c\right) =$
$= \lim\limits_{c\to1-0}\left(-2\sqrt{1-c}+2\right) = 2.$

Таким образом, НИ−2 сходится и равен 2.

Несобственная двойная подстановка

В примере 1.30 первообразная $F(x) = -2\sqrt{1-x}$ определена в особой точке и для вычисления НИ-2 можно использовать обычную двойную подстановку.

В случае, когда $F(x)$ не определена в точке b, используют несобственную двойную подстановку $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, понимая $F(b)$ как предел $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$. В случае, когда $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, несобственная двойная подстановка становится обычной двойной подстановкой.

Пример 1.31. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$

Пример 1.32. $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = -\sqrt{4-x^2}\Big|_0^2 = 2.$

Пример 1.33. Рассмотрим интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$. Если $p = 1$, то $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = -\ln(b-x)\Big|_a^b = -\ln(+0) + \ln(b-a) = +\infty$. Следовательно, интеграл расходится. Если $p \neq 1$, то

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{(b-x)^{p-1}}\Bigg|_a^b = \begin{cases} +\infty, & \text{если } p > 1, \\ \dfrac{1}{1-p}\cdot\dfrac{1}{(b-a)^{p-1}}, & \text{если } p < 1. \end{cases}$$

Таким образом, НИ-2 $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Сходимость $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx$ означает, что существует такое $I \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое c_ε, что для любого $c \in (c_\varepsilon, b)$ выполнено $\left|\displaystyle\int\limits_c^b f(x)dx\right| \leq \varepsilon$.

Критерий Коши

Теорема 1.7. Интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое c_ε, что для любых $c_1, c_2 \in (c_\varepsilon, b)$ выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| \leq \varepsilon.$$

Критерий Гейне

Теорема 1.8. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любой последовательности (x_n), $x_n \in [a, b)$, $x_0 = a$, $x_n \to b - 0$, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$.

Свойства НИ–2

Линейность. Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится и интеграл $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$, и имеет место равенство

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

В частности, $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx, \quad \int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx.$

Аддитивность. Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится и $a < c < b$, то сходится и интеграл $\int\limits_c^b f(x)dx$, и имеет место равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Монотонность (интегрирование неравенств). Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a; b)$, и сходятся интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

Различные случаи расположения особых точек

Если $f(x)$ определена на $(a, b]$, интегрируема на любом $[c, b] \subset (a, b]$ и имеет особую точку a, то полагают $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\nu \to +0} \int\limits_{a+\nu}^b f(x)dx$.

Если особыми точками являются точки a и b, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^d f(x)dx + \int\limits_d^b f(x)dx = \lim_{c_1 \to a+0} \int\limits_{c_1}^d f(x)dx + \lim_{c_2 \to b-0} \int\limits_d^{c_2} f(x)dx, \ \forall d \in (a, b).$$

Сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$ означает, что оба предела существуют и конечны. Выбор числа d на сходимость и величину интеграла не влияет.

Пример 1.34. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Решение. Точки $x = 0$ и $x = 2$ являются особыми.

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{\nu_1\to+0}\int\limits_{\nu_1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}+$$

$$+\lim_{\nu_2\to+0}\int\limits_1^{2-\nu_2} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \lim_{\nu_1\to+0}\arcsin(x-1)\Big|_{\nu_1}^1 + \lim_{\nu_2\to+0}\arcsin(x-1)\Big|_1^{2-\nu_2} =$$

$$= \lim_{\nu_1\to+0}\Big(-\arcsin(\nu_1-1)\Big) + \lim_{\nu_2\to+0}\arcsin(1-\nu_2) = \arcsin 1 + \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Таким образом, интеграл сходится и его значение равно π.

Пример 1.35. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$. Здесь особая точка $x = a$. При $p = 1$ имеем $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-a} = \ln(x-a)\Big|_a^b = +\infty$ и интеграл расходится. При $p \neq 1$ получаем $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \int\limits_a^b (x-a)^{-p}dx = \frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^b$. Если $p < 1$, то двойная подстановка приводит к числу, что означает сходимость интеграла. Если же $p > 1$, то на нижнем пределе подстановка приводит к $+\infty$, что означает расходимость интеграла.

Таким образом, интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

В частности, $\int\limits_0^c \frac{dx}{x^p}$, $c > 0$, сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$ (ср. с НИ–1, пример 1.3).

Рассматриваемые в этом примере интегралы служат эталоном при исследовании сходимости НИ–2.

Если особая точка c расположена внутри (a, b), то сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$

означает, что сходятся оба интеграла $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$. И тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Пример 1.36. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Поскольку $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ и каждый из интегралов сходится (эталонный интеграл, $p = \frac{1}{3} < 1$), то интеграл $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$также сходится.

Пример 1.37. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ расходится (эталонный интеграл, $p = 1$) следовательно, расходится и $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$.

Пример 1.38. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x \ln^2 x^2}$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x \ln^2 x^2} = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{x \ln^2 x^2} + \int\limits_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x \ln^2 x^2} = \lim_{\nu_1 \to +0} \frac{1}{4} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{-\nu_1} \frac{dx}{x \ln^2(-x)} + \lim_{\nu_2 \to +0} \frac{1}{4} \int\limits_{\nu_2}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x \ln^2 x} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\nu_1 \to +0} \left[-\frac{1}{\ln(-x)} \right]_{-\frac{1}{2}}^{-\nu_1} + \frac{1}{4} \lim_{\nu_2 \to +0} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_{-\nu_2}^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \lim_{\nu_1 \to +0} \left(-\frac{1}{\ln \nu_1} + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \lim_{\nu_2 \to +0} \left(-\frac{1}{\ln \frac{1}{4}} + \frac{1}{\ln \nu_2} \right) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{4} \frac{1}{\ln 4} = -\frac{1}{4 \ln 2} + \frac{1}{8 \ln 2} = -\frac{1}{8 \ln 2}.$$

Следовательно, интеграл сходится и равен $-\frac{1}{8 \ln 2}$.

Замечание 1.12. Свойства и методы изучения НИ-2 всех типов одни и те же. Далее мы будем изучать $\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой b, хотя для иллюстрации могут быть использованы НИ-2 любого типа.

Вычисление и преобразование НИ−2

Замена переменных. Пусть функция φ монотонна, непрерывно дифференцируема на промежутке с концами α и β, осуществляет биекцию этого промежутка на (a, b), и $\lim\limits_{t\to\alpha} \varphi(t) = a, \lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = b$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

При этом НИ−2 может преобразоваться в НИ−2, в НИ−1 и даже в интеграл Римана.

Например, замена $\dfrac{1}{b-x} = t$ преобразует $\int\limits_a^b f(x)dx$ в НИ−1 вида $\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} g(t)dt$.

Пример 1.39. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \dfrac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. $\int\limits_0^2 \dfrac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 \dfrac{x^2d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = [4 - x^2 = t] = -\dfrac{1}{2}\int\limits_4^0 \dfrac{(4-t)dt}{\sqrt{t}} =$

$= \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 (4t^{-1/2} - t^{1/2})dt = \dfrac{1}{2}\left(8t^{1/2} - \dfrac{2}{3}t^{3/2}\right)\Big|_0^4 = \dfrac{1}{2}\left(16 - \dfrac{16}{3}\right) = \dfrac{16}{3}.$

Пример 1.40. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{e^2} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Решение. $\int\limits_1^{e^2} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left[\ln x = t, \dfrac{dx}{x} = dt\right] = \int\limits_0^2 \dfrac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_0^2 = 2\sqrt{2}.$

Пример 1.41. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

Решение. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = [1 - x = t^2, \ x = 1 - t^2, \ dx = -2tdt] =$

$= -\int\limits_1^0 \dfrac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int\limits_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = 2\mathrm{arctg}t\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{2}.$

Пример 1.42. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int\limits_0^1 \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}} = [\sqrt{x} = t] = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\text{arcsin}t\Big|_0^1 = \pi.$

Пример 1.43. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$

Решение. $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{x\cdot|x|\cdot\sqrt{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}} = [|x| = -x, x < 0] =$

$$= -\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{1}{x} = t,\ -dx/x^2 = dt\right] = \int\limits_{-1}^{-3} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{-3} \frac{dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}} = \text{arcsin}\frac{t+1}{2}\Big|_{-1}^{-3} = \text{arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Интегрирование по частям. Если функции u, v имеют непрерывные производные u', v' на промежутке $[a;b)$, то

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_0^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$$

в предположении, что две из трех составляющих этой формулы существуют.

Пример 1.44. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ du = \frac{dx}{x} & v = 2\sqrt{x} \end{bmatrix} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} =$

$$= -2\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\Big|_0^1 = -4.$$

Пример 1.45. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^0 \frac{x\text{arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Решение. Имеем $\int\limits_{-1}^0 \frac{x\text{arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{bmatrix} u = \text{arcsin}x & dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = -\sqrt{1-x^2} \end{bmatrix} =$

$$= -\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsin}x\Big|_{-1}^0 + \int\limits_{-1}^0 dx = 1.$$

1.2.2. НИ-2 от положительных функций

Пусть $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a, b)$. НИ-2 от таких функций называют НИ-2 от положительных функций. В этом случае функция $\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$ возрастает.

Критерий сходимости

Теорема 1.9. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, $f(x) \geq 0$, сходится тогда и только тогда, когда существует M такое, что $\int\limits_a^A f(x)dx \leq M, \forall A \in [a, b)$.

Замечание 1.13. Если $f(x) \leq 0$ на промежутке $[a, b)$, то исследование сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ сводится к исследованию сходимости НИ-2 от положительной функции $\int\limits_a^b (-f(x))dx$.

Признаки сравнения

Признак 1. Пусть $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b)$ и существует $c \in [a, b)$ такое, что $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [c, b)$. Тогда:

а) если сходится $\int\limits_a^b g(x)dx$, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$;

б) если расходится $\int\limits_a^b f(x)dx$, то расходится и $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Пример 1.46. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Так как на промежутке (0;1] выполняется неравенство $\frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}dx$.

Пример 1.47. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \operatorname{arctg} x}$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Для $x \in (0; 2]$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \operatorname{arctg} x} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится, и тогда по признаку 1 сходится и исходный интеграл.

Пример 1.48. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{1-x^2}}dx$.

Решение. Особая точка $x = 1$. Подынтегральная функция неотрицательна и допускает оценку $\frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{1-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{1-x} \cdot \sqrt[4]{1+x}} \le \frac{1}{(1-x)^{1/4}}$. Так как интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/4}}$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{1-x^2}}dx$.

Пример 1.49. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x^4}}dx$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Представим подынтегральную функцию в виде: $\frac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x^4}} = x^{1/10} \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x^{9/10}} \le [$ поскольку $\lim\limits_{x \to +0} x^{1/10} \cdot \ln^2 x = 0$, то существует такое a, $0 < a < 1$, что $x^{1/10} \cdot \ln^2 x \le 1$ для любых x, $0 < x \le a] \le \frac{1}{x^{9/10}}$. Так как $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^{9/10}}$ сходится, то сходится и $\int\limits_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x^4}}dx$.

Пример 1.50. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\ln^2 x}{x^2 - x}dx$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Точка $x = 1$ особой не является, так как $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{\ln^2 x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 1-0} \frac{(x-1)^2}{x^2 - x} = 0$. Разобьем интеграл на сумму двух интегралов $\int\limits_0^1 \frac{\ln^2 x}{x^2 - x}dx = \int\limits_0^{1/2} \frac{\ln^2 x}{x^2 - x}dx + \int\limits_{1/2}^1 \frac{\ln^2 x}{x^2 - x}dx$ и рассмотрим $\int\limits_0^{1/2} \frac{\ln^2 x}{x^2 - x}dx$. Поскольку $\frac{\ln^2 x}{x^2 - x} \ge \frac{1}{x(1-x)} \ge \frac{1}{x}$, а интеграл $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x}$ расходится, то расходится и $\int\limits_0^{1/2} \frac{\ln^2 x}{x^2 - x}dx$, а, значит, расходится и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln^2 x}{x^2 - x}dx$.

Признак 2. Пусть $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ при $x \in [a, b)$ и существует предел

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \ \ 0 \le l \le +\infty.$$

а) Если $0 < l < +\infty$, то оба интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или оба расходятся.

б) Если $l = 0$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$.

в) Если $l = +\infty$, то из расходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Пример 1.51. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^2 \dfrac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x}+\sin x}$.

Решение. Особая точка $x = 0$.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}+\sin x} : \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{x}(x^2+1)}{\sqrt{x}+\sin x} = 1$. Поскольку $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, то по признаку 2 сравнения сходится и исходный интеграл.

Пример 1.52. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{|\ln x|}{\sqrt[4]{x}}dx$.

Решение. Особая точка $x = 0$.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{|\ln x|}{\sqrt[4]{x}} : \dfrac{1}{x^{1/2}}\right) = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{x}|\ln x|}{\sqrt[4]{x}} = \lim\limits_{x\to+0}\sqrt[4]{x}|\ln x| = 0$. Интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, а тогда по признаку 2 сходится и $\int\limits_0^1 \dfrac{|\ln x|}{\sqrt[4]{x}}dx$.

Пример 1.53. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin^2 x}{x^3}dx$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Предел отношения $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^3} : \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2} = 1$. Интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x}$ расходится, и тогда по признаку 2 расходится и интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin^2 x}{x^3}dx$.

Пример 1.54. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln^2(1-x)}{1-x}dx$.

Решение. Особая точка $x = 1$. Так как $\lim\limits_{x\to1-0}\left(\dfrac{\ln^2(1-x)}{1-x} : \dfrac{1}{1-x}\right) = +\infty$, а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x}$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{1-x}dx$.

Степенной признак. Пусть $f(x) \sim \dfrac{c}{(b-x)^p}$ при $x \to b-0,\ c>0$. Если $p<1$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, если $p \geq 1$, то интеграл расходится.

Пример 1.55. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1-x^3}$.

Решение. Особая точка $x=1$. Подынтегральная функция неотрицательна и $\dfrac{1}{1-x^3} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{3(1-x)}$. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1-x^3}$ расходится ($p=1$).

Пример 1.56. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{x\sin\sqrt{x}}dx$.

Решение. Особая точка $x=0$. Подынтегральная функция сохраняет знак на $(0;1]$ и $\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{x\sin\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{5/6}}$. Следовательно, по степенному признаку исходный интеграл сходится ($p=\dfrac{5}{6}<1$).

Пример 1.57. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\ln x}$.

Решение. Особая точка $x=1$. Точка $x=0$ особой не является, так как существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{\ln x} = 0$. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\ln x} = \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\ln x} + \int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\ln x}$ и исследуем на сходимость, например, $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\ln x}$. Поскольку $\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{\ln(1+(x-1))} \sim \dfrac{1}{x-1}$ при $x \to 1+0$, то интеграл $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\ln x}$ расходится и, следовательно, расходится и интеграл $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\ln x}$.

Пример 1.58. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$.

Решение. Особые точки $x=0$ (при $p>0$) и $x=\dfrac{\pi}{2}$ (при $q>0$). Исследуем интеграл в окрестности каждой из точек.
$x=0:\ \dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x} \sim \dfrac{1}{x^p}$.При $p<1$ интеграл сходится, при $p\geq 1$ расходится.

$x=\dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}=\dfrac{1}{\sin^p x\sin^q(\frac{\pi}{2}-x)}\sim\dfrac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^q}$. При $q<1$ интеграл сходится, при $q\geq 1$ — расходится.

Объединяя полученные условия сходимости в точках 0 и $\dfrac{\pi}{2}$, приходим к ответу: если $p<1$, $q<1$, то интеграл сходится, для остальных p и q интеграл расходится.

Пример 1.59. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{x^\alpha dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. Особые точки $x=0$ и $x=1$.
$x=0$: $\dfrac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^4}}\sim x^\alpha=\dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ и при $-\alpha<1$, т. е. $\alpha>-1$, интеграл сходится, при $\alpha\leq-1$ интеграл расходится.
$x=1$: $\dfrac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^4}}=\dfrac{x^\alpha}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)(1-x)}}\sim\dfrac{1}{2(1-x)^{1/2}}$. Следовательно, интеграл сходится.

Таким образом, $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{x^\alpha dx}{\sqrt{1-x^4}}$ сходится при $\alpha>-1$ и расходится при $\alpha\leq-1$.

Пример 1.60. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{\ln x dx}{\sqrt{x(1-x)^3}}$.

Решение. Особые точки $x=0$ и $x=1$.
$x=0$: подынтегральная функция сохраняет знак на интервале $(0;1)$ и $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)^3}}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Поскольку $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}:\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)=-\lim_{x\to+0}\sqrt[4]{x}\ln x=0$, а интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{dx}{x^{3/4}}$ сходится, то по признаку 2 сходится и интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx$, а, значит, и интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.
$x=1$: $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)^3}}=\dfrac{\ln(1+(x-1))}{\sqrt{x}\cdot(1-x)^{3/2}}\sim\dfrac{x-1}{(1-x)^{3/2}}=-\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$.

Следовательно, интеграл сходится.

Пример 1.61. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1+x}}{\mathrm{ch}x-\cos x}dx$.

Решение. Особая точка $x=0$. Найдем эквивалентную при $x\to0$ функцию степенного вида для подынтегральной функции, для чего воспользуемся тейлоровскими разложениями

$$f(x)=\frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1+x}}{\mathrm{ch}x-\cos x}=\frac{(1+\alpha x+\frac{\alpha^2x^2}{2}+\ldots)-(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\ldots)}{(1+\frac{x^2}{2}+\ldots)-(1-\frac{x^2}{2}+\ldots)}\sim$$

$$\sim\frac{(\alpha-\frac{1}{2})x+\frac{1}{2}(\alpha^2-1)x^2}{x^2}.$$

Если $\alpha \neq \frac{1}{2}$, то $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{x}$ и, следовательно, интеграл расходится. Если же $\alpha = \frac{1}{2}$, то $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)$, т.е. подынтегральная функция имеет конечный предел, интеграл существует в смысле Римана и его можно назвать сходящимся. Таким образом, интеграл сходится, если $\alpha = \frac{1}{2}$, и расходится, если $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

1.2.3. НИ-2 от произвольных функций

Будем предполагать, что функция f определена на $[a, b)$ и имеет единственную особую точку b.

Признак Дирихле

Теорема 1.10. Пусть
а) функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, b)$;
б) функция g имеет непрерывную производную и монотонно стремится к 0 при $x \to b - 0$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Пример 1.62. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Для исследования сходимости воспользуемся признаком Дирихле. Положим $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$, $g(x) = x$. Тогда
1) $f(x)$ непрерывна на $(0; 1]$;
2) $\left|\int\limits_\eta^1 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx\right| = \left|-\int\limits_\eta^1 \sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|\cos\frac{1}{x}\Big|_\eta^1\right| = \left|\cos 1 - \cos\frac{1}{\eta}\right| \leq 2$ для любого $\eta \in (0; 1]$;
3) $g(x) = x$ непрерывно дифференцируема;
4) $g(x)$ монотонна;
5) $g(x) \to 0$ при $x \to +0$.

Все условия признака Дирихле выполнены, и, следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ сходится.

Признак Абеля

Теорема 1.11. Пусть

а) функция f непрерывна на $[a; b)$ и $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится;

б) функция g имеет непрерывную производную, ограничена и монотонна на $[a;b)$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Пример 1.63. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+1}\cos\frac{1}{x}dx$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Для исследования сходимости применим признак Абеля. Положим $f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Проверим условия признака:
1) $f(x)$ непрерывна на $(0;1]$;
2) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$ сходится на основании признака Дирихле. (Условия применимости признака Дирихле проверяются аналогично предыдущему примеру.)
3) Функция $g(x)$ имеет непрерывную производную $g'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$;
4) g монотонна (возрастает, так как $g'(x) > 0$ для $x \in (0;1]$);
5) g ограничена, $|g(x)| \leq 1$.

Исходный интеграл сходится по признаку Абеля.

Абсолютная сходимость НИ−2

Предполагается, что f интегрируема по Риману на любом $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$.

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называют абсолютно сходящимся, если сходится $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 1.12. Если $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называют неабсолютно (условно) сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Для исследования абсолютной сходимости, т.е. сходимости $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, можно использовать признаки сходимости интегралов от положительных функций.

Пример 1.64. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^2 \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

Решение. Особая точка $x = 2$. Поскольку $\left|\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}}$, а интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ сходится, то $\int\limits_1^2 \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ сходится абсолютно и, следовательно, сходится.

Пример 1.65. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2+\sqrt{x}+x^2\cos\frac{1}{x}}dx$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2+\sqrt{x}+x^2\cos\frac{1}{x}}\right|dx$.
Для $x \in (0;1]$ справедлива оценка $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2+\sqrt{x}+x^2\cos\frac{1}{x}}\right| = \frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{\sqrt{x}+x^2(1+\cos\frac{1}{x})} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, а, значит, абсолютно сходится и исходный интеграл.

Пример 1.66. Исследовать на абсолютную и неабсолютную сходимость интеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{\cos\ln x}{x\ln x}dx$.

Решение. Особая точка $x = 0$. Исследуем сходимость интеграла с помощью признака Дирихле. Положим $f(x) = \frac{\cos\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ и проверим выполнение условий признака :
1) $f(x)$ непрерывна на $(0; 0,5]$;
2) $\left|\int\limits_\eta^{0,5} \frac{\cos\ln x}{x}dx\right| = \left|\int\limits_\eta^{0,5} \cos\ln x d(\ln x)\right| = \left|\sin(\ln x)\Big|_\eta^{0,5}\right| = |\sin\ln 0,5 - \sin\ln\eta| \leq 2$ для любого $\eta \in (0; 0,5]$;
3) $g(x)$ – непрерывно дифференцируема, $g'(x) = -\frac{1}{x\ln^2 x}$;
4) g монотонна на $[0; 0,5]$, так как $g'(x) < 0$;
5) $g(x) = \frac{1}{\ln x} \to 0$, при $x \to +0$.

Таким образом, исходный интеграл сходится, Исследуем теперь интеграл на абсолютную сходимость. Рассмотрим $\int\limits_0^{0,5} \left|\frac{\cos\ln x}{x\ln x}\right|dx$. Имеем

$$\left|\frac{\cos\ln x}{x\ln x}\right| \geq \frac{\cos^2\ln x}{x|\ln x|} = \frac{1-\cos(2\ln x)}{2x|\ln x|} = \frac{1}{2x|\ln x|} - \frac{\cos(2\ln x)}{2x|\ln x|}.$$

При этом $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x|\ln x|} = -\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\ln x} = -\int\limits_0^{0,5} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = -\ln|\ln x|\Big|_0^{0,5} = -\infty$, т.е. интеграл расходится. Интеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{\cos(2\ln x)}{x|\ln x|}dx = -\int\limits_0^{0,5} \frac{\cos(2\ln x)}{x\ln x}dx$ сходится по признаку Дирихле (проверка условий признака проводится аналогично тому, как это было сделано при исследовании сходимости исходного интеграла). Следовательно, $\int\limits_0^{0,5} \frac{\cos^2\ln x}{x|\ln x|}dx$

расходится, а тогда по признаку 1 расходится и $\int\limits_0^{0,5}\left|\frac{\cos\ln x}{x\ln x}\right|dx$. Таким образом, исходный интеграл сходится неабсолютно.

1.3. Несобственные интегралы смешанного типа.

Пусть функция f определена на $(a;+\infty)$ всюду, за исключением точек $a_1,\ldots,a_m$, $a_1<\ldots<a_m$, которые являются особыми точками. В этом случае, взяв произвольное $c>a_m$, определяют $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ как

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_a^{c} f(x)dx+\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx. \tag{1.8}$$

В этом соотношении интеграл $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$ является НИ-1, интеграл $\int\limits_a^{c} f(x)dx$ — НИ-2, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называют НИ *смешанного типа*.

Сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ означает сходимость обоих интегралов в правой части (1.8).

Замечание 1.14. При изучении НИ смешанного типа, ради однообразия, будем говорить, что $+\infty$ — особая точка подынтегральной функции f.

Пример 1.67. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет две особые точки $x=0$ и $x=+\infty$. Представим интеграл в виде суммы: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x}}=\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x}}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x}}$ и исследуем сходимость каждого из интегралов.

1) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x}}$. Особая точка $x=0$. Подынтегральная функция неотрицательна и $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5+x}}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x^{1/3}}$. По степенному признаку $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x}}$ сходится $(p=\frac{1}{3}<1)$.

2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x}}$. Особая точка $x=+\infty$, функция неотрицательна и $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5+x}}\underset{x\to +\infty}{\sim}\frac{1}{x^{5/3}}$.

Интеграл сходится $\left(p = \dfrac{5}{3} > 1\right)$. Сходимость обоих интегралов означает сходимость и исходного интеграла.

При исследовании сходимости несобственных интегралов рекомендуется оформлять решение следующим образом.

Пример 1.68. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+x}}$.

Решение. Особые точки $x = 0,\ x = +\infty$.

$x = 0 : \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5+x}} \sim \dfrac{1}{x^{1/3}}$ – интеграл сходится по степенному признаку для НИ-2.

$x = +\infty : \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5+x}} \sim \dfrac{1}{x^{5/3}}$ – интеграл сходится по степенному признаку для НИ-1.

Таким образом, исходный интеграл сходится.

Пример 1.69. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

Решение. Особые точки $x = 0$, $x = +\infty$.

$x = 0 : x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1} = \dfrac{1}{x^{1-p}}$. Интеграл сходится только при $1 - p < 1$, т.е. $p > 0$.

$x = +\infty : \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$ при любом p. Поскольку $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то по признаку 2 сходится и интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ при любых значениях p.

Следовательно, исходный интеграл сходится при $p > 0$.

Пример 1.70. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$.

Решение. Особые точки $x = 0$ и $x = +\infty$.

$x = 0 : \dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim \dfrac{x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$. Следовательно, при $\alpha - 1 < 1$, т.е. при $\alpha < 2$, интеграл сходится, а при $\alpha \geq 2$ – расходится.

$x = +\infty$: если $\alpha > 1$, то интеграл сходится, так как $\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \leq \dfrac{x^\varepsilon}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}$ при любом $\varepsilon > 0$ и можно выбрать такое $\varepsilon > 0$, что $\alpha - \varepsilon > 1$.

Если $\alpha \leq 1$, то интеграл расходится, так как $\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \geq \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Таким образом, интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$ сходится при $1 < \alpha < 2$ и расходится при остальных α.

Пример 1.71. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$.

Решение. Особые точки $x = 0$ и $x = +\infty$.

$x = 0 : \dfrac{1}{x^p+x^q} \sim \dfrac{1}{x^{\min\{p,q\}}}$. Условие сходимости $\min\{p, q\} < 1$.

$x=+\infty:\dfrac{1}{x^p+x^q}\sim\dfrac{1}{x^{\max\{p,q\}}}$. Условие сходимости $\max\{p,q\}>1$.

Таким образом, исходный интеграл сходится при выполнении условий $\min\{p,q\}<1<\max\{p,q\}$. При остальных соотношениях между p и q интеграл расходится.

Пример 1.72. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}2x}{x^\alpha(x^2+1)}dx$.

Решение. Особые точки $x=0$, $x=+\infty$.

$x=0:\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{x^\alpha(x^2+1)}\sim\dfrac{2x}{x^\alpha}=\dfrac{2}{x^{\alpha-1}}$. Условие сходимости $\alpha-1<1$, т.е. $\alpha<2$.

$x=+\infty:\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{x^\alpha(x^2+1)}\sim\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x^\alpha x^2}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{\alpha+2}}$. Условие сходимости $\alpha+2>1$, т.е. $\alpha>-1$.

Следовательно, исходный интеграл сходится при $-1<\alpha<2$ и расходится при остальных α.

Пример 1.73. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$.

Решение. Особые точки $x=0$, $x=1$, $x=+\infty$.

$x=1:\dfrac{1}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\sim\dfrac{1}{x-1}$. Интеграл $\displaystyle\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dx}{x-1}$ расходится. Следовательно, и исходный интеграл расходится.

Поведение интеграла в точках $x=0$ и $x=+\infty$ уже не будет влиять на ответ.

Пример 1.74. Исследовать интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ на абсолютную и неабсолютную сходимость.

Решение. Особые точки $x=0$ и $x=+\infty$.

$x=0$: в окрестности точки $x=0$ подынтегральная функция положительна и, так как $\dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}\sim\dfrac{x}{x\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, то интеграл сходится (абсолютно).

$x=+\infty:\left|\dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right|\le\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x^{3/2}}$. Интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ – сходится. По признаку сравнения $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right|dx$ также сходится.

Таким образом, исходный интеграл сходится абсолютно.

Пример 1.75. Исследовать интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\ln x}{\sqrt{x}}dx$ на абсолютную и неабсолютную сходимость.

Решение. Особые точки $x=0$ и $x=+\infty$. В точке $x=0$ интеграл сходится абсолютно вследствие оценки $\left|\dfrac{\sin\ln x}{\sqrt{x}}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, а интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ – сходится.

$x = +\infty$: рассмотрим $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\sin \ln x}{\sqrt{x}} dx$ и осуществим замену переменной, полагая $\ln x = t$, $x = e^t$, $dx = e^t dt$. Тогда

$$\int\limits_e^{+\infty} \frac{\sin \ln x}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{t/2}} e^t dt = \int\limits_1^{+\infty} e^{t/2} \sin t dt = \frac{\frac{1}{2}\sin t - \cos t}{1 + \frac{1}{4}} e^{t/2} \Bigg|_1^{+\infty}.$$

Предел $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\sin t - \cos t\right) e^{t/2}$ не существует, следовательно, $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\sin \ln x}{\sqrt{x}} dx$ расходится, поэтому и исходный интеграл является расходящимся.

1.4. Главное значение несобственных интегралов

1.4.1. Главное значение НИ−1

Предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$ называют *главным значением НИ-1* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и обозначают

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то он сходится и в смысле главного значения и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$

Пример 1.76. Вычислить $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{arctg} x}{x^2+4} dx.$

Решение. Имеем $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{arctg} x}{x^2+4} dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} \frac{x^2 \mathrm{arctg} x}{x^2+4} dx = 0$, так как подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны относительно точки $x = 0$.

Замечание 1.15. Если подынтегральная функция f в НИ−1 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ является нечетной, то $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0.$

Пример 1.77. Вычислить $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, $\beta \neq 0$.

Решение.

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = [x-\alpha = t] = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t+\alpha}{t^2+\beta^2}dt = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+\beta^2}dt +$$

$$+\alpha \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\beta^2} = 0 + \alpha \lim_{A\to+\infty} 2\int\limits_{0}^{A} \frac{dt}{t^2+\beta^2} = \frac{2}{\beta}\alpha \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{t}{\beta}\Big|_0^A =$$

$$= \frac{2\alpha}{\beta} \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{A}{\beta} = \frac{2\alpha}{\beta}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn}\beta = \frac{\pi\alpha}{|\beta|}.$$

Отметим, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ расходится, так как $\frac{x}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \sim \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$.

1.4.2. Главное значение НИ−2

Для несобственного интеграла второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$ с единственной особой точкой $c \in (a;b)$ определяют главное значение как предел $\lim\limits_{\eta\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\eta} f(x)dx + \int\limits_{c+\eta}^b f(x)dx\right)$.

Главное значение такого интеграла обозначают $v.p. \int\limits_a^b f(x)dx$.

Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, то его значение совпадает с его главным значением.

Пример 1.78. Вычислить $v.p. \int\limits_1^4 \frac{dx}{x-3}$.

Решение. Имеем

$$v.p. \int\limits_1^4 \frac{dx}{x-3} = \lim_{\eta\to+0}\left(\int\limits_1^{3-\eta} \frac{dx}{x-3} + \int\limits_{3+\eta}^4 \frac{dx}{x-3}\right) =$$

$$= \lim_{\eta\to+0}\left(\ln|x-3|\Big|_1^{3-\eta} + \ln|x-3|\Big|_{3+\eta}^4\right) = \lim_{\eta\to+0}(\ln\eta - \ln 2 + \ln 1 - \ln\eta) = -\ln 2.$$

Отметим, что $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x-3}$ расходится.

2. УПРАЖНЕНИЯ

I. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

1. $\int\limits_0^1 x^\alpha \ln x dx$. 2. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\sin 2x dx$. 3. $\int\limits_{2/\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} dx$. 4. $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

5. $\int\limits_1^2 \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} dx$. 6. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$. 7. $\int\limits_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$. 8. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

9. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx,\ a>0$. 10. $\int\limits_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3} dx$. 11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$.

12. $\int\limits_0^{+\infty} x^{-3/2}(1+x) dx$. 13. $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$. 14. $\int\limits_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$. 15. $\int\limits_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$.

16. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)} dx$. 17. $\int\limits_0^1 x\ln x dx$. 18. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx$. 19. $\int\limits_1^e \frac{1}{x\ln^{3/4} x} dx$.

20. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$. 21. $\int\limits_2^4 \frac{1}{\sqrt{6x-x^2-8}} dx$. 22. $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 23. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+4} dx$.

24. $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+x^4} dx$. 25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+11} dx$. 26. $\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}} dx$. 27. $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$.

28. $\int\limits_0^{+\infty} (3x+2)e^{-2x} dx$. 29. $\int\limits_0^2 \frac{1}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}} dx$. 30. $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{2x+3}{x^2+1} dx$. 31. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg} x}{x^2} dx$.

32. $\int\limits_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx$. 33. $\int\limits_{-0{,}5}^{-0{,}25} \frac{1}{x\sqrt{2x+1}} dx$. 34. $\int\limits_0^{+\infty} x2^{-x} dx$. 35. $\int\limits_{-1}^0 e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^3} dx$.

36. $\int\limits_1^5 \frac{2x+3}{\sqrt{x-1}} dx$. 37. $\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+x} dx$. 38. $\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-2x^2} dx$. 39. $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} dx$.

40. $\int\limits_{-4}^0 e^{\frac{2}{x}}\frac{1}{x^3} dx$. 41. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}(1-x)}{x^2-2x+2} dx$. 42. $\int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-x-2} dx$. 43. $\int\limits_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$.

44. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{(2x+3)^2} dx$. 45. $\int\limits_3^5 \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-9}} dx$. 46. $\int\limits_0^1 (3x^2+8x-3)\ln x dx$.

47. $\int\limits_{3/2}^{5/2} \frac{1}{x\sqrt{25-4x^2}} dx$. 48. $\int\limits_0^{+\infty} (2x^2-3)e^{-2x+3} dx$. 49. $\int\limits_{e^{-1/2}}^{e^{3/2}} \frac{1}{x\sqrt{2\ln x+1}} dx$.

50. $\int\limits_{1}^{5} \frac{1}{2x+\sqrt{x-1}-2}dx$. 51. $\int\limits_{\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$. 52. $\int\limits_{0}^{3} \frac{1}{(1+x)\sqrt{3-x}}dx$.

53. $\int\limits_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2\ln x)}{x(1+4\ln^2 x)}dx$. 54. $\int\limits_{0}^{+\infty} (2x+x^3)e^{-4x^2}dx$. 55. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx$.

56. $\int\limits_{1/2}^{2} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ln 2x}}dx$. 57. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2x^2-4x+3}dx$. 58. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}dx$. 59. $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}dx$.

II. Решить задачи.

1. Вычислить площадь, заключенную между кривой $y = e^{-2x}$ и осями координат (для $x \geq 0$).

2. Вычислить площадь, заключенную между кривой $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее асимптотой.

3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной линиями $x^3y = 4$, $y = 0$, $x = 4$ $(x \geq 4)$.

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох неограниченной криволинейной трапеции, заключенной между кривой $y = xe^{-x/2}$ и ее асимптотой.

5. Найти площадь фигуры, образованной линиями $y = xe^{-x^2}$, $y = 0$, $(x \geq 0)$.

6. Найти объем тела, полученного при вращении кривой $y = \dfrac{|x|}{1+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

7. Линия $y^2 = 2exe^{-2x}$ вращается вокруг своей асимптоты. Найти объем полученного тела.

8. Найти объем тела, которое получается при вращении вокруг оси Оу фигуры, ограниченной линиями $y = x^2e^{-x^2}$, $y = 0$.

9. Фигура, ограниченная линией $y = e^{-x^2}$ и ее асимптотой, вращается вокруг оси ординат. Найти объем получающегося тела.

10. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох бесконечной дуги кривой $y = e^{-x}$ для $x \geq 0$.

11. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $xy^2 = 8 - 4x$ и ее асимптотой.

12. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении кривой $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

13. Найти площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$, $x \in [1; +\infty)$ и прямыми $x = 1$, $y = 0$.

14. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $(4-x)y^2 = x^3$ и ее асимптотой.

15. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = xe^{-3x^2}$, $x \geq 0$, и осью Ox.

16. Найти площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = x\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

17. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $(x+1)y^2 = x^2$ и ее асимптотой.

18. Найти площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^5+1}$, $x \in [0;+\infty)$, и осью Ox.

19. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении кривой $y = \dfrac{4}{4+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

III. Исследовать сходимость интегралов.

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1}dx$. 2. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{\pi^2-16x^2}\cdot\sqrt{\sin x}}dx$. 3. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$. 4. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$.

5. $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{1-x^2}dx$. 6. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$. 7. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+2\sqrt[5]{x^4})}{e^x-1}dx$. 8. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^3}dx$.

9. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$. 10. $\displaystyle\int\limits_0^1 \ln(1-x)dx$. 11. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x\operatorname{sh}2x}}dx$. 12. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}dx$.

13. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}dx$. 14. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$. 15. $\displaystyle\int\limits_0^5 \frac{\sin\frac{2}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$. 16. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x^2}-1}dx$.

17. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg}x)^2 dx$. 18. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$. 19. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}dx$. 20. $\displaystyle\int\limits_0^3 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^2})}{e^{\operatorname{tg}x}-1}dx$.

21. $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}dx$. 22. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\operatorname{sh}x}{e^{x^2}-\cos x}dx$. 23. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}dx$. 24. $\displaystyle\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}}dx$.

25. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt[6]{x}-\sin\sqrt{2x}}dx$. 26. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\frac{x+x^3}{2}}{x\ln^2(1+\sqrt[3]{x})}dx$. 27. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}-\cos x}{\sin x - x}dx$.

28. $\displaystyle\int\limits_0^{1/3} \frac{\arcsin(2x+x^2)}{x^2\ln^2(1+x^2)}dx$. 29. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x+\operatorname{sh}x}{e^{x^2}-\cos x}dx$. 30. $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{\sin(1-x^2)}{(1-x^2)^2+\sqrt[3]{1-x^2}}dx$.

31. $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{|x|^{3/2}}{xe^x-\sin x}dx$. 32. $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin^{3/2}2x}{\sqrt{x^4+x^2\operatorname{sh}^3 4x}}dx$. 33. $\displaystyle\int\limits_0^{0{,}25} \frac{\arcsin(x^2+\sqrt{x})}{\sqrt{x\ln(1+x)}}dx$.

34. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \frac{e^{-2x}-\cos 2x}{x^{3/2}\sin 2x}dx$.

IV. Исследовать сходимость интегралов.

1. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx$. 2. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+x+1}dx$. 3. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}dx$. 4. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$.

5. $\int\limits_{1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$. 6. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{(2+\sin x)}{\sqrt{x+1)(x+2)(2x+1)}}dx$. 7. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+\cos^2 x}dx$.

8. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$. 9. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 x+\mathrm{arctg}2x}{x\sqrt[5]{1+x^4}}dx$. 10. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{2x+3}dx$. 11. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}dx$.

12. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$. 13. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{2x^2+\sqrt{(2+x)^3}}{3x^2+\sqrt[5]{x^9}+1}dx$. 14. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{5+3\cos x}{e^{\sqrt[10]{x}}-1}dx$. 15. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x+\ln x}{x\sqrt{x^2+1}}dx$.

16. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}dx$. 17. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$. 18. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$. 19. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{2x^3-1}}dx$.

20. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{4-\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$. 21. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt[3]{x}}dx$. 22. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x\ln x}{\sqrt{x^6+1}}dx$. 23. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^6+6x^2+2}}dx$.

24. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$. 25. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(x^3+9)\cos\sqrt{x}}{x^5+3x^3+3x+1}dx$. 26. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$.

27. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x+1}\,\mathrm{arctg}(x^2+2)}{1+2\sqrt{x}+x^2}dx$. 28. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2+3x+2}dx$. 29. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\sin^2 x^2}{\sqrt[3]{x^8+8}}dx$.

30. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2+2x+2}}dx$. 31. $\int\limits_{0}^{+\infty}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}-e^{-\frac{4}{x^2}}\right)dx$. 32. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\cos^2 2x}dx$.

33. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x\arccos\frac{1}{x^2}}{\sqrt[6]{x^{13}+2x^7+4x+1}}dx$. 34. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+3x+7}}{\sqrt[4]{x^3+8x+17}}dx$. 35. $\int\limits_{4}^{+\infty}\frac{(3x^2+2)\left(\mathrm{tg}\frac{1}{x}\right)^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$.

36. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}dx$. 37. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}+x\,\mathrm{arctg}x}{x\sqrt{x}+4}dx$. 38. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{arctg}\frac{x}{x^2+1}}{x^2+2x+8}dx$.

39. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt[5]{x^2-1}}dx$. 40. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{3x+\ln 5x}}dx$. 41. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x+4}dx$.

42. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin^2(x^2+2)}{\sqrt[3]{x^5+x^3+15}}dx$. 43. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x+1}}dx$.

44. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{(x+1)}{x\sqrt{x+1}+\sin^2(2\sqrt{x}+1)}dx$. 45. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{2+\ln^2 x}{x\sqrt{2+x^2}}dx$. 46. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx$.

47. $\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+\sin^2 3x}dx$. 48. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{2x+3}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x+x^3\sqrt{x}}}dx$.

49. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}+3\cos x}dx$. 50. $\int\limits_4^{+\infty} \frac{2x^3+\sqrt{(x^3+1)^3}}{3x^5+\sqrt[3]{(x^2+1)^4}}dx$.

V. Исследовать сходимость интегралов.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}x}{\sqrt[3]{x^5-x^3}}dx$. 2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}x}{x^2}dx$. 3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$. 4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sin^2 x}dx$.

5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x^5}}dx$. 6. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{5-x^2}dx$. 7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}dx$. 8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}-1}dx$.

9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{3+2\sin x}{x+2\mathrm{sh}x}dx$. 10. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(x+1)}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$. 11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{3-\sin 3x}{x^2+\sqrt{x}}dx$. 12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x\mathrm{sh}x}}dx$.

13. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{arctg}\frac{x}{2+x^2}dx$. 14. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt[5]{2x+3}}dx$. 15. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx$.

16. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x\sqrt[3]{x^2-4}}dx$. 17. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}dx$. 18. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(x^3+4)\cos^2\sqrt{x^3+4}}{x^4\sqrt{x}-x^2\sqrt{x}}dx$.

19. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2+1}}dx$. 20. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2-1}dx$. 21. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}(x^2+x-2)}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x^2-1)}}dx$.

22. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)\sqrt[7]{x^2+x-2}}dx$. 23. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^3-1}}dx$. 24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+\mathrm{arctg}x}{\sqrt{x}+x^2}dx$.

VI. Исследовать сходимость интегралов.

1. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha x\cos^\beta x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$. 2. $\int\limits_0^{1} \frac{x^p}{\sqrt{1-x^4}}dx$. 3. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}(1-\cos x)}{x^\alpha\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$. 4. $\int\limits_0^{1} x^\alpha(1-x^2)^\beta dx$.

5. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x(1-\cos x)}{\ln^\alpha(1+x)\sqrt[3]{1-x^4}}dx$. 6. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos x)^2}{(\sin x)^\alpha}dx$. 7. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^p x\cos^q x}dx$.

8. $\int\limits_0^{1} \frac{x\sin^p x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 9. $\int\limits_0^{1} \frac{(\mathrm{tg}x)^\alpha}{\sqrt{1-x^4}}dx$. 10. $\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha \ln(2+x)dx$.

11. $\int\limits_0^{1} \frac{\mathrm{arctg}(x^2+x^4)}{x\ln^\alpha(1+x)}dx$. 12. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin^3 x(1-\cos^2 x^2)}{\ln^\alpha(1+x)\sqrt[4]{1-x^4}}dx$. 13. $\int\limits_1^{2} \frac{\mathrm{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^\alpha}dx$.

14. $\int\limits_0^{1} \frac{e^{2x}-(1+x)^\alpha}{2\sin x-\sin 2x}dx$. 15. $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^\alpha x\mathrm{ctg}^\beta x dx$. 16. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 2x-e^{-4x^2}}{x^\alpha\mathrm{tg}x}dx$.

17. $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^{-5/3}}{\mathrm{arctg}^\alpha(x-x^3)}dx$. 18. $\int\limits_0^\pi \frac{(1-\cos x^2)^\alpha}{1-e^{-x^2/2}}dx$. 19. $\int\limits_0^1 e^{\frac{\alpha}{x}}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}dx$.

20. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx$. 21. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\sin^{2-\alpha}x}{\sqrt[3]{x-x^3}}dx$. 22. $\int\limits_0^2 \frac{(e^{\sin x}-1)^\beta}{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}dx$. 23. $\int\limits_0^1 \frac{(1-x^2)^\alpha}{\sqrt[5]{1-x^8}}dx$.

24. $\int\limits_0^1 \frac{(e^{2x}-(1+x)^2)x^\alpha}{\mathrm{ch}2x-\cos 2x}dx$. 25. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{tg}^\alpha x}{\cos^{2\alpha}x}dx$. 26. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^p x\cos^q x}{\mathrm{tg}^2 x(e^{x^2}-1)}dx$.

27. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\dfrac{x}{x^2+1}}{(e^{\sin x}-1)^\alpha}dx$. 28. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}^3(x-1)}{(x\sqrt{x}-x^2)^\alpha}dx$. 29. $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{2\alpha^2}x\,\mathrm{ctg}^\alpha x\,dx$.

30. $\int\limits_0^\pi \frac{\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2}{(\sin^2 x)^p}dx$. 31. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 3x-e^{-9x^2}}{x^\alpha\sin x}dx$. 32. $\int\limits_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^{-3/2}}{(\mathrm{arctg}(x-x^3)^2)^\alpha}dx$.

33. $\int\limits_0^\pi x\sin^\alpha x\,dx$. 34. $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{arctg}(3x-x^2)}{(4x-x^3)^\alpha}dx$. 35. $\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{\cos 2x-e^{-2x^2}}{x^\alpha\sin x^2}dx$.

36. $\int\limits_0^\pi \frac{(\pi^2-x^2)^{-3/2}}{\sin^\alpha x}dx$. 37. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{(\sin 2x)^\beta(e^{2x^2}-1)}{\sqrt{1-\cos 2x}}dx$. 38. $\int\limits_2^3 \frac{(3-x)^\alpha}{(x-2)^{3\alpha}}\ln^{2\alpha}(4-x)dx$.

VII. Исследовать сходимость интегралов.

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{17\alpha+2}}{\sqrt{|x^2-4|}}dx$. 2. $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha\ln^\beta x\,dx$. 3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}2x}{x^{\alpha^2-1}}dx$. 4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha+2}{|x-1|^\beta}dx$, $\alpha\geq 0$.

5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x^\alpha+x^\beta)}dx$. 6. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha}}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}dx$. 7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+x)\mathrm{arctg}x}{x^{2\alpha+1}}dx$.

8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2+1}dx$. 9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\beta}{(x+x^{13})^\alpha}dx$. 10. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\beta(x^\alpha+4)}{(x+1)^5}dx$ $(\alpha\geq 0)$.

11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x^{10}+1)^\beta}dx$. 12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\sqrt{\mathrm{arctg}x^3}}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$. 13. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x^3+x)^\beta}dx$.

14. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)\mathrm{arctg}x}{x^\alpha}dx$. 15. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{|2-x^2|}}dx$. 16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}(x-1)^3}{\sqrt[5]{(x-1)^{6\alpha}}\cdot x^\beta}dx$.

17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^\alpha}{1+|x|^\beta}dx$, $\beta\geq 0$. 18. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(1+x+x^2)^\beta}{x^\alpha}dx$. 19. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+10}}{1-x^2+2\sqrt{|1-x|}}dx$.

20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^\alpha \mathrm{arctg} x}{1+x}dx$. 21. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^\alpha e^{\beta x}dx$. 22. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{|\ln x|^\beta}{(x+1)^\alpha}dx$. 23. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{3\alpha-5}}{|x-3|^\beta}dx$. 24. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{arctg}\frac{x}{2+x}dx$. 25. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^p(x^\alpha+2)}{(x+4)^8}dx$, $\alpha > 0$. 26. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}^\alpha x}{(x^2+2)(e^x-1)^\beta}dx$.

27. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(\sqrt[4]{x}+x^4)^\beta}dx$. 28. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{-2}\left(\mathrm{arctg}\frac{x^3}{1+x^2}\right)^\alpha dx$. 29. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\arcsin\frac{x}{1+x}}{(x+\sqrt{x})^\beta(e^x-1-x)}dx$.

30. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x^{20}+20)^\beta}dx$. 31. $\int\limits_{-3/2}^{+\infty} \frac{(x+3)}{x^2(2x+3)^\alpha}dx$. 32. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(\sqrt[3]{x+1}-1)^\beta \sin^\beta \frac{x}{x+1}}dx$.

33. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+x^2)^{2\alpha+3}}dx$. 34. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{arctg} x^2}{x^{2\alpha}(1+x^{\alpha^2})}dx$. 35. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^\alpha \frac{x^6+4}{\sqrt[6]{|x^6-1|}}dx$.

36. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx$. 37. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x}+x^3)^\alpha}{x^{3\alpha+2}}dx$. 38. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x^2+x^5)^\beta}dx$. 39. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(2x^2+3x+7)^\beta}dx$.

40. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{arctg}\frac{x(1+x^2)}{x+2}dx$. 41. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(1+x^{\alpha^2})}{x^{2\alpha+3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{x^2+2x+2}dx$. 42. $\int\limits_{-3}^{+\infty} \frac{(2x+1)}{x^3(x+3)^\alpha}dx$.

43. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x}}{(\sqrt[5]{1+x}-1)^\alpha \sin^{2\alpha}\frac{x}{x+2}}dx$. 44. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{13\alpha-4}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}}dx$. 45. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\beta\sqrt[3]{\mathrm{arctg} x^3}}{\sqrt{1+x^4}}dx$.

46. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha^2}+1}{x^2+1}\mathrm{arctg}\frac{x^2}{x^4+1}dx$. 47. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{2\alpha+3}}{(x^3+3x^2+1)^{\alpha+\beta}}dx$. 48. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\left(\mathrm{arctg}\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^{2\alpha}}{(x^2-1)^{3\alpha}(x+2)}dx$.

49. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x}\sin^\alpha\frac{x^2}{x^2+1}}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)^\alpha}dx$. 50. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt[3]{x^4+x^2}}{x^{2\alpha}(x^2+\sqrt[6]{x^9+1}\Big)}dx$. 51. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x-1}}dx$.

52. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(2x+3x^2+4x^3)^{\alpha^2+1}}{\sqrt{x^{14}+2x^5}}dx$. 53. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x+\mathrm{arctg}2x}{x^\alpha+x^2}dx$. 54. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{2\alpha}(1+3x+x^2)^{\beta-1}}{(\sqrt{x}+x^2)^5}dx$.

55. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{\mathrm{sh} x}}dx$.

VIII. Исследовать на абсолютную и неабсолютную сходимость интегралы.

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x}dx$. 2. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^4}}dx$. 3. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2\sin x+3\cos x}{x^2+\sqrt[4]{x}}dx$. 4. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}\sin x}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx$.

5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^{5/4}}dx$. 6. $\int\limits_0^{+\infty} x\cos(e^x)dx$. 7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{1+x^2}dx$. 8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2-5\cos 2x}{x^5+\sqrt[3]{x}}dx$.

9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x}\cos x dx$. 10. $\int\limits_{\pi/4}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{\sqrt{x+x^3}}dx$. 11. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^{10} dx$. 12. $\int\limits_0^{+\infty} x^2\sin(e^x)dx$.

13. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}\sqrt{|x^2-4|}}dx$. 14. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\cos 2x}{x+3}dx$. 15. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^{18}}{x^4}dx$. 16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin \frac{2}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2+\cos x^2}{x^2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$. 18. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}dx$. 19. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos^2 x}{\sqrt[4]{x}}dx$.

20. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(x-1)\sin 2x}{x^2-4x+5}dx$. 21. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{3-7\cos 4x}{x^{8/5}+x^{5/8}}dx$. 22. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{x^2+x\ln x}dx$.

23. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x^2+1}+1}dx$. 24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{4\sin x-3\cos x}{x^{3/2}+x^{2/3}}dx$. 25. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\sin 3x}{x^2+1}dx$.

26. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x}{x^3+3}\sin x^3 dx$. 27. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos 6x}{x^2+2x+2}dx$. 28. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x\ln^2 x}dx$. 29. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x+e^x)}{x+e^x}dx$.

30. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 8x}{\sqrt{x^3+x^5}}dx$. 31. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x+\sin\frac{1}{x-1}}{x\sqrt{x^2-1}}dx$. 32. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(2+3x)}{\sqrt{x}+\ln(1+x)}dx$.

33. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\left(\sin x+\cos\frac{1}{x}\right)dx$. 34. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^3-1}}dx$. 35. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

36. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x\sqrt{x}+x^2}dx$. 37. $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{\sin 6x}{\sqrt{2x^2+3}+x}dx$. 38. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\cos(3x+1)}{x\ln^{3/2}x}dx$. 39. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\cos 5x}{\sqrt{x^4+4}}dx$.

40. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 4x+x\cos 4x}{\sqrt{x+x^3}}dx$. 41. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x\cos x\ln x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x+1}}dx$. 42. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^3+x^2)}{1+x-e^x}dx$.

43. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 10x}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^7}}dx$. 44. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}dx$. 45. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\sin x+2\cos x)}{\sqrt{(x-1)^3+(x-2)^2}}dx$.

46. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\ln(1+2x+3x^2)}{x^2-1}dx$. 47. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x+x^3}dx$. 48. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\cos 2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

49. $\int\limits_0^{+\infty} e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}+x^2}dx$. 50. $\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{\cos x}{x\sqrt{x}+1}dx$.

3. ОТВЕТЫ

I. 1. $-\dfrac{1}{(\alpha+1)^2}$ для $\alpha > -1$, расходится для $\alpha \le -1$. **2.** $\dfrac{1}{4}$. **3.** 1. **4.** 2. **5.** $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{3}{4}$. **6.** $\dfrac{\pi}{2}$. **7.** $\dfrac{256}{15}$. **8.** 1. **9.** $\dfrac{a}{a^2+b^2}$. **10.** Расходится. **11.** $\dfrac{1}{2}$. **12.** Расходится. **13.** $\dfrac{21}{4}$. **14.** $2\sqrt{2}$. **15.** $\dfrac{8}{3}$. **16.** $1-\ln 2$. **17.** $-\dfrac{1}{4}$. **18.** $\dfrac{1}{3}$. **19.** 4. **20.** π. **21.** π. **22.** 1. **23.** $\dfrac{\pi}{8}$. **24.** Расходится. **25.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. **26.** $\dfrac{\pi}{3}$. **27.** $-\dfrac{\pi}{6}$. **28.** $\dfrac{7}{4}$. **29.** Расходится. **30.** Расходится. **31.** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2$. **32.** $\dfrac{\pi}{2}$. **33.** $2\ln(\sqrt{2}-1)$. **34.** $\dfrac{1}{\ln^2 2}$. **35.** $-\dfrac{2}{e}$. **36.** $\dfrac{92}{3}$. **37.** $2\ln 3$. **38.** $\dfrac{1}{8}$. **39.** $\dfrac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\left((\sqrt{2}+1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}\right)$. **40.** $-\dfrac{3}{8}e^{-1/2}$. **41.** $-\dfrac{\pi^2}{8}$. **42.** $\dfrac{2}{3}\ln 2$. **43.** 16. **44.** $\dfrac{1}{2}$. **45.** $12+4\ln 3$. **46.** $\dfrac{2}{3}$. **47.** $\dfrac{1}{5}\ln 3$. **48.** $-e^3$. **49.** 2. **50.** $\ln 5$. **51.** $\dfrac{\pi}{6}$. **52.** $\ln(2+\sqrt{3})$. **53.** $\dfrac{3\pi^2}{64}$. **54.** $\dfrac{9}{32}$. **55.** $2\ln(1+\sqrt{2})$. **56.** $\dfrac{5}{4}(\ln 4)^{4/5}$. **57.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. **58.** -4. **59.** $\dfrac{39}{2}$.

II. 1. $\dfrac{1}{2}$. 2. 2. 3. 2π. 4. 2π. 5. $\dfrac{1}{2}$. **6.** $\dfrac{\pi^2}{2}$. **7.** $\dfrac{\pi e}{2}$. **8.** π. **9.** π. **10.** $\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. **11.** 4π. **12.** $\dfrac{\pi^2}{2}$. **13.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$. **14.** 12π. **15.** $\dfrac{1}{6}$. **16.** 2. **17.** $\dfrac{8}{3}$. **18.** $\dfrac{\pi}{5}$. **19.** π^2.

III. 1. Сходится. **2.** Сходится. **3.** Сходится. **4.** Сходится. **5.** Расходится. **6.** Сходится. **7.** Сходится. **8.** Расходится. **9.** Сходится. **10.** Сходится. **11.** Сходится. **12.** Сходится. **13.** Сходится. **14.** Сходится. **15.** Сходится. **16.** Расходится. **17.** Расходится. **18.** Расходится. **19.** Сходится. **20.** Сходится. **21.** Расходится. **22.** Расходится. **23.** Сходится. **24.** Сходится. **25.** Сходится. **26.** Сходится. **27.** Расходится. **28.** Расходится. **29.** Расходится. **30.** Сходится. **31.** Сходится. **32.** Расходится. **33.** Сходится. **34.** Расходится.

IV. 1. Сходится. **2.** Расходится. **3.** Сходится. **4.** Расходится. **5.** Сходится. **6.** Сходится. **7.** Расходится. **8.** Расходится. **9.** Сходится. **10.** Расходится. **11.** Сходится. **12.** Сходится. **13.** Расходится. **14.** Сходится. **15.** Расходится. **16.** Сходится. **17.** Сходится. **18.** Расходится. **19.** Расходится. **20.**Сходится. **21.** Сходится. **22.** Сходится. **23.** Расходится. **24.** Расходится. **25.** Сходится. **26.** Сходится. **27.** Сходится. **28.** Сходится. **29.** Сходится. **30.** Расходится. **31.** Сходится. **32.** Расходится. **33.** Сходится. **34.** Расходится. **35.** Сходится. **36.** Сходится. **37.** Расходится. **38.** Сходится. **39.** Сходится. **40.** Расходится. **41.** Расходится. **42.** Сходится. **43.** Сходится. **44.** Расходится. **45.** Сходится. **46.** Расходится. **47.** Расходится. **48.** Сходится. **49.** Расходится. **50.** Расходится.

V. 1. Сходится. **2.** Расходится. **3.** Сходится. **4.** Расходится. **5.** Расходится. **6.** Расходится. **7.** Сходится. **8.** Расходится. **9.** Расходится. **10.** Сходится. **11.** Сходится. **12.** Сходится. **13.** Сходится. **14.** Расходится. **15.** Расходится. **16.** Сходится. **17.** Сходится. **18.** Расходится. **19.** Расходится. **20.** Расходится. **21.** Сходится. **22.** Расходится.

23. Сходится. **24.** Расходится.

VI. 1. Сходится при $\alpha > 0,\ \beta > -1$. **2.** Сходится при $p > -1$. **3.** Сходится при $\alpha < \frac{7}{2}$. **4.** Сходится при $\alpha > -1,\ \beta > -1$. **5.** Сходится при $\alpha < 5$. **6.** Сходится при $\alpha < 5$. **7.** Сходится при $p < 1,\ q < 1$. **8.** Сходится при $p > -2$. **9.** Сходится при $\alpha > -1$. **10.** Сходится при $-2 < \alpha < 1$. **11.** Сходится при $\alpha < 2$. **12.** Сходится при $\alpha < 8$. **13.** Сходится при $\alpha < 2$. **14.** Расходится при всех α. **15.** Сходится при $|\alpha - \beta| < 1$. **16.** Сходится при $\alpha < 4$. **17.** Сходится при $\alpha < -\frac{2}{3}$. **18.** Сходится при $\alpha > \frac{1}{4}$. **19.** Сходится при $\alpha \leq 0$. **20.** Сходится при $\alpha < 3,\ \beta < 1$. **21.** Сходится при $\alpha < \frac{14}{3}$. **22.** Сходится при $\beta > -\frac{2}{5}$. **23.** Сходится при $\alpha > -\frac{4}{5}$. **24.** Сходится при $\alpha > -1$. **25.** Сходится при $-1 < \alpha < \frac{1}{3}$. **26.** Сходится при $p > 3,\ q > -3$. **27.** Сходится при $\alpha < 2$. **28.** Сходится при $\alpha < \frac{2}{3}$. **29.** Сходится при $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$. **30.** Сходится при $p < \frac{1}{2}$. **31.** Сходится при $\alpha < 4$. **32.** Сходится при $\alpha < -\frac{1}{4}$. **33.** Сходится при $\alpha > -1$. **34.** Сходится при $\alpha < 1$. **35.** Сходится при $\alpha < 3$. **36.** Сходится при $\alpha < -\frac{1}{2}$. **37.** Сходится при $\beta > -1$. **38.** Сходится при $-\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{3}$.

VII. 1. Сходится при $-\frac{3}{17} < \alpha < -\frac{2}{17}$. **2.** Сходится при $\alpha < -1,\ \beta > -1$. **3.** Сходится при $\sqrt{2} < |\alpha| < \sqrt{3}$. **4.** Расходится при всех α, β. **5.** Сходится при $\min\{\alpha, \beta\} < 1$, $\max\{\alpha, \beta\} > 0$. **6.** Сходится при $|\alpha| < \frac{1}{2}$. **7.** Расходится при всех α. **8.** Сходится при $|\alpha| < 1$. **9.** Сходится при $\alpha - \beta < 1,\ 13\alpha - \beta > 1$. **10.** Сходится при $\beta > -1,\ \alpha + \beta < 4$. **11.** Сходится при $\alpha > -1,\ 10\beta - \alpha > 1$. **12.** Сходится при $-\frac{5}{2} < \alpha < \frac{1}{3}$. **13.** Сходится при $\beta - \alpha < 1,\ 3\beta - \alpha > 1$. **14.** Расходится при всех α. **15.** Сходится при $-1 < \alpha < 0$. **16.** Сходится при $\beta < 1,\ \alpha < \frac{10}{3},\ 6\alpha + 5\beta > 5$. **17.** Сходится при $\alpha > -1,\ \beta - \alpha > 1$. **18.** Сходится при $\alpha < 1,\ \alpha - 2\beta < 1$. **19.** Сходится при $-11 < \alpha < -9$. **20.** Расходится (в точке $x = -1$). **21.** Сходится при $\alpha > -1,\ \beta < 0$. **22.** Сходится при $\beta > -1,\ \alpha > 1$. **23.** Сходится при $\alpha > \frac{4}{3},\ \beta < 1,\ \beta - 3\alpha > -4$. **24.** Сходится при $1 < \alpha < 2$. **25.** Сходится при $p > -1,\ p + \alpha < 7$. **26.** Сходится при $\beta - \alpha < 1,\ \beta \geq 0$. **27.** Сходится при $\frac{\beta}{4} - \alpha < 1,\ 4\beta - \alpha > 1$. **28.** Сходится при $\alpha > \frac{1}{3}$. **29.** Сходится при $\beta < 0$. **30.** Сходится при $\alpha > -1,\ 20\beta - \alpha > 1$. **31.** Расходится (в точке $x = 0$). **32.** Сходится при $\alpha < 0,\ \beta < \frac{1}{2}$. **33.** Расходится при всех α. **34.** Сходится при $\alpha \in (-\infty, -3) \cup (1; \frac{5}{2})$. **35.** Расходится при всех α. **36.** Сходится при $\alpha > -1$. **37.** Сходится при $\alpha < -\frac{3}{8}$. **38.** Сходится при $2\beta - \alpha < 1,\ 5\beta - \alpha > 1$. **39.** Сходится при $\alpha > -1,\ 2\beta - \alpha > 1$. **40.** Сходится при $1 < \alpha < 2$. **41.** Сходится при $-1 < \alpha < -0{,}5$. **42.** Расходится при всех α. **43.** Сходится при $\alpha < \frac{1}{3},\ \alpha \neq 0$. **44.** Сходится при $\frac{10}{39} < \alpha < \frac{4}{13}$. **45.** Сходится при $-2 < \beta < 1$. **46.** Сходится при $|\alpha| < \sqrt{3}$. **47.** Сходится при $\alpha > -2,\ \alpha + 3\beta > 4$.

48. Сходится при $0 < \alpha < 1$. **49.** Сходится при $\alpha \neq 0$. **50.** Сходится при $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{5}{6}$.
51. Сходится при $\alpha < 0$. **52.** Сходится при $\frac{1}{\sqrt{2}} < |\alpha| < 1$. **53.** Расходится при всех α.
54. Сходится при $\alpha > \frac{3}{4}$, $\alpha + \beta < \frac{11}{2}$. 55. Сходится при $\alpha > -\frac{1}{2}$.

VIII. 1. Сходится неабсолютно. **2.** Сходится абсолютно. **3.** Сходится абсолютно. **4.** Сходится неабсолютно. **5.** Сходится абсолютно. **6.** Сходится неабсолютно. **7.** Сходится абсолютно. **8.** Сходится абсолютно. **9.** Сходится неабсолютно. **10.** Сходится абсолютно. **11.** Сходится неабсолютно. **12.** Сходится неабсолютно. **13.** Сходится абсолютно. **14.** Сходится неабсолютно. **15.** Сходится абсолютно. **16.** Сходится абсолютно. **17.** Сходится абсолютно. **18.** Сходится абсолютно. **19.** Сходится неабсолютно. **20.** Сходится неабсолютно. **21.** Сходится абсолютно. **22.** Сходится абсолютно. **23.** Сходится неабсолютно. **24.** Сходится абсолютно. **25.** Сходится абсолютно. **26.** Сходится абсолютно. **27.** Сходится неабсолютно. **28.** Сходится абсолютно. **29.** Сходится абсолютно. **30.** Сходится абсолютно. **31.** Сходится абсолютно. **32.** Сходится неабсолютно. **33.** Сходится абсолютно. **34.** Сходится абсолютно. **35.** Сходится неабсолютно. **36.** Сходится абсолютно. **37.** Сходится неабсолютно. **38.** Сходится абсолютно. **39.** Сходится неабсолютно. **40.** Сходится неабсолютно. **41.** Сходится абсолютно. **42.** Сходится абсолютно. **43.** Сходится абсолютно. **44.** Сходится неабсолютно. **45.** Сходится абсолютно. **46.** Расходится. **47.** Сходится абсолютно. **48.** Сходится неабсолютно. **49.** Сходится абсолютно. **50.** Сходится абсолютно.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Кастрица Олег Адамович
Мазаник Сергей Алексеевич
Наумович Адольф Федорович
Наумович Нил Федорович

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-методическое пособие
для студентов факультета
прикладной математики и информатики

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *О. А. Кастрица*

Подписано в печать 04.02.2011. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,16
Тираж 50 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/04994425 от 08.04.2009
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.