1 ЛАБА, ФАиИУ, 13 ВАРИАНТ

1. *ИУФ:*

Задание 1. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода над полем вещественных чисел

$$1.13.\ x(t) - 3\int_0^1 (t - \sqrt{s})x(s)\,\mathrm{d}s = \frac{5}{3}t + \sqrt{t} - \frac{1}{6};$$

2. *ИУВ:*

Задание 1. Решить интегральное уравнение Вольтерра

$$1.13.\ x(t) - \int_0^t \left(2e^{2(t-s)} - 3e^{3(t-s)}\right)x(s)\,\mathrm{d}s = 5;$$

3. *ТЕМА 1:*

Задание 2. Вычислить расстояние между функциями $x(t)$ и $y(t)$ в пространствах а) $C[a,b]$, $C^{(1)}[a,b]$, б) $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$.

$$2.13.\ \text{а)}\ x(t) = 3 - t, \quad y(t) = \frac{2}{t+2}, \quad t \in [-1, 4],$$

$$\text{б)}\ x(t) = \sqrt{\frac{t+2}{t-2}}, \quad y(t) = \sqrt{\frac{t-2}{t+2}}, \quad t \in [4, 6];$$

4. *ТЕМА 2:*

Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентным в нормированном пространстве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,$ функций.

$$2.13.\ \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\,\mathrm{d}t \text{ и } \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2};$$

5. – 6. *ТЕМА 3:*

Задание 1. Найти предел последовательности $x^{(n)}$ в нормированном пространстве $C[a,b]$, $C^{(1)}[a,b]$, $CL_1[a,b]$, если он существует.

$$1.13.\ x^{(n)}(t) = \frac{nt}{\sqrt{n^2+1}}, \quad t \in [0, 1];$$

Задание 2. Найти наименьшее целое значение $p \geqslant 1$, при котором $x^{(n)} \in \ell_p$ и вычислить предел последовательности $x^{(n)}$ в этом пространств ℓ_p. Если последовательность $x^{(n)} \in m$, то найти также предел в m, если он существует.

2.13. $x^{(n)} = \left(\frac{n^3}{1+n^3}, \frac{n^3}{1+4n^3}, \ldots, \frac{n^3}{1+i^2n^3}, \ldots \right)$;

7. *ТЕМА 4:*

Определить, является ли множество выпуклым в пространстве $C[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций.

1.13. $A = \left\{ x(t) \in C^{(1)}[0,1] \ : \max\limits_{i} |x'(t)| \leqslant 1 \right\}$;

8. *ТЕМА 6:*

Задание 2. Выяснить, является ли отображение $f : E \to F$ непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица.

2.13. $E = \ell_2,\ F = \mathbb{C},\quad f(x) = x_1^2 + x_2 + x_3$;

9. *ТЕМА 7:*

В гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ найти проекцию функции $x_0(t)$ на подпространство $L \subset L_2[-1,1]$.

5.13. $x_0(t) = t, L = \{x(t) : \int\limits_{-1}^{1} \sin \pi t x(t)\,\mathrm{d}t = 0, \int\limits_{0}^{1} (t-1)x(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$;

10. *ТЕМА 8:*

Задание 3. В гильбертовых пространствах $L_2[-1,1]$, $L_2[0,1]$, $L_2[-\pi,\pi]$ и $L_2[0,\pi]$ приблизить функцию $x(t)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ тригонометрическим многочленом

3.13. $x(t) = t + t^4$;