БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

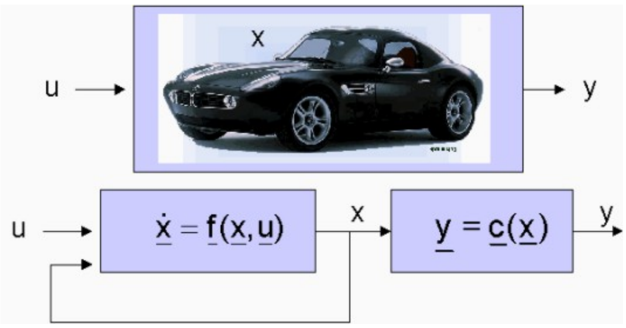
Кафедра математического обеспечения автоматизированных систем управления

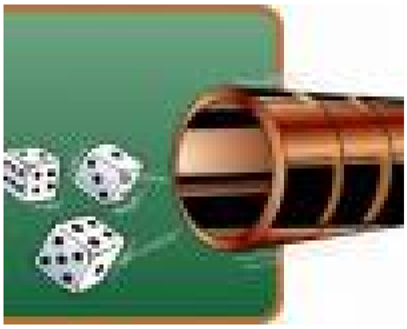
ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЗАДАЧАХ

(Часть I. Математические модели. Теория игр)

Учебно-методическое пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики

В трёх частях





МИНСК
2010

УДК 519.8 (075)
ББК 22.18
И85

Рекомендовано Учёным советом
факультета прикладной математики и информатики
4 мая 2010 г., протокол № 6

А в т о р ы – с о с т а в и т е л и:
А. Н. Исаченко, Л. Ф. Дробушевич

Исследование операций в задачах: Учеб.-метод. пособие для
И85 студентов факультета прикладной математики и информатики.
В 3 ч. Ч.1. Математические модели. Теория игр / Авт.-сост.: А. Н. Исаченко, Л. Ф. Дробушевич. – Мн.: БГУ , 2010. – 49 с.

Излагаются основные понятия, методика и методы исследования операций, касающиеся построения математических моделей и теории конечных игр. Даются задачи для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов факультета прикладной математики и информатики.

УДК 519.8(075)
ББК 22.18

Предмет «Исследование операций»

В широком смысле исследование операций (ИСО) – есть научный подход к решению задач организационного управления или научное обоснование задач принятия решений.

Сложность задач организационного управления обусловлена следующими причинами:

1) в организационных системах достаточно трудно определить и предусмотреть какие-либо случайные состояния;

2) практически невозможно провести предварительный эксперимент по поведению организационных систем;

3) при управлении, как правило, имеется много взаимосвязанных между собой факторов, влияющих на возможные варианты решений.

ИСО – прикладная математическая дисциплина, которая занимается вопросами количественного обоснования решений по управлению целенаправленными процессами (операциями) в сложных системах.

В данном определении принципиально важными являются три ключевых момента: объектом исследования является система, исследуются целенаправленные процессы, используются математические методы исследования. Понятие цели является главным при исследовании сложных систем. Цель определяет желаемое состояние системы или желаемый результат её поведения. При этом подчеркивается специфический, субъективный подход к выбору цели. По отношению к анализируемой операции всегда выделяется субъект, который преследует вполне определенную цель и стремится достичь ее с помощью своих решений. Понятие операции также связано с целью. Операция это любая целенаправленная совокупность действий.

Подчеркивая использование математических методов, **ИСО можно определить как построение, разработку и приложение математических моделей принятия оптимальных решений.**

Математический аппарат, предназначенный и разрабатываемый для целей решения задач ИСО, принято называть математическими методами ИСО. По своему характеру математические методы ИСО, в принципе не отличаются от математических методов любой другой математической дисциплины, имеющей содержательные приложения или хотя бы интерпретации.

Задачи ИСО, обладающие специфическими содержательными интерпретациями, проблематикой и терминологией, носят название моделей ИСО.

1. Построение математических моделей

Математическая модель – приближённое описание какого-либо класса объектов (явлений) внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Анализ математической модели позволяет проникать в сущность изучаемых явлений. **Математическое моделирование** – изучение объектов (явлений) с помощью математической модели.

1.1. Этапы математического моделирования

Выделяют следующие основные этапы построения моделей.

1. Постановка задачи и разработка концептуальной модели. Словесно описывается объект моделирования, цели его функционирования, среда, в которой он функционирует, выявляются отдельные элементы, возможные состояния, характеристики объекта и его элементов, определяются взаимосвязи между элементами, состояниями, характеристиками.

Такое предварительное, приближенное представление объекта исследования называется концептуальной моделью.

2. Построение модели. На основе содержательного описания объекта выполняются следующие действия:

- анализируется исходное множество характеристик объекта, и выделяются наиболее существенные из характеристик;
- определяются управляемые и неуправляемые параметры (переменные) и вводятся их символьные обозначения;
- составляется система ограничений, которым переменные должны удовлетворять;
- строится целевая функция.

В результате получаем математическую модель исследуемого объекта.

Следует иметь в виду, что от удачного выбора переменных зависит простота модели. При составлении ограничений нужно следить, чтобы в модель были включены все ограничительные условия, и в то же время не было бы ни одного лишнего или записанного в более жесткой форме, чем того требуют условия задачи Совокупность числовых значений переменных, удовлетворяющих ограничениям должна определять один из вариантов состояния объекта. Целевая функция должна отражать критерий выбора оптимального (или лучшего) варианта.

3. Выбор метода и алгоритма решения. Математическая модель классифицируется и проводится выбор математического аппарата и алгоритма для решения задачи. В зависимости от вида и структуры целевой функции и ограничений используют те или другие методы теории оптимальных решений.

4. Проверка адекватности и корректировка модели. Выясняется, удовлетворяет ли принятая модель критерию практики. То есть согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений. По результатам проверки модели на адекватность принимается решение о возможности ее практического использования или о проведении корректировки.

Возможны корректировки концептуальной модели, математической модели и соответственно метода решения.

Корректировка может потребовать проведения дополнительных исследований на объекте, наборе необходимых данных, уточнения набора переменных и структуры модели.

Можно выделить такие варианты корректировок математической модели: расширение набора внешних факторов, управляющих переменных и выходных характеристик модели; переход от линейных зависимостей и к нелинейным зависимостям или повышению степени нелинейности; расширение набора ограничений, или их комбинаций.

Корректировка может повторяться многократно до тех пор, пока не будет достигнуто удовлетворительное соответствие между выходными характеристиками объекта и модели.

5. Поиск решения на модели. После достижения удовлетворительного уровня адекватности модели применяют соответствующий метод или алгоритм для нахождения оптимального (или субоптимального) решения на математической модели. Это решение может принимать разные формы: аналитическую, численную, или алгоритмическую (в виде набора процедур, правил, и т.п.).

6. Реализация найденного решения на практике. Полученной на модели оптимальной стратегии управления необходимо предоставить соответствующую содержательную форму в виде инструкций и правил, что и как делать, которая была бы понятной для административного персонала данной организации и легкой для выполнения в производственных условиях.

Пример. Авиапредприятию необходимо определить, сколько стюардесс следует принять на работу в течение шести месяцев при условии, что каждая из них, прежде чем приступить к самостоятельным полетам, должна пройти предварительную подготовку.

Потребности в количестве часов летного времени задаются с января по июнь следующими величинами: 6500; 6600; 6600; 6500; 6400; 6400.

Подготовка стюардессы занимает один месяц, причем каждая стюардесса в течение срока, отведенного на её подготовку, должна набрать 50 часов лётного времени. После обучения стуардеса обязана отработать на авиапредприятии один месяц, после чего она считается опытной.

Каждая обученная стюардесса должна иметь налет 100 часов в месяц. При этом ни одну из них не снимают с работы. К началу января на авиапредприятии уже работает 60 опытных стюардесс. Установлено, что от 5% до 10% обученных стюардесс увольняются ежемесячно по собственному желанию. Причём число увольняющихся равномерно распределённая случайная величина. Зарплата опытной стюардессы 800 у.е. в месяц, а обучаемой – 400 у.е. в месяц.

Определить план приема стюардесс на работу при минимальных затратах для случая максимальной текучести кадров.

Решение. Управляемые переменные: x_i – количество стюардес, принимаемых на обучение в начале i-го месяца, $i=\overline{1,6}$. Неуправляемые переменные: y_j – количество опытных стюардес, увольняющихся к концу i-го месяца, $i=\overline{1,5}$.

Ограничения:

$x_i \geq 0$, $i=\overline{1,6}$, целые, y_j, $j=\overline{1,5}$, - целые.

$6000 + 50\,x_1 = 6500,$

$100(60 + x_1 - y_1) + 50\,x_2 = 6600,$

$100(60 + x_1 + x_2 - y_1 - y_2) + 50\,x_3 = 6600,$

$100(60 + x_1 + x_2 + x_3 - y_1 - y_2 - y_3) + 50\,x_4 = 6500,$

$100(60 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4) + 50\,x_5 = 6400,$

$100(60 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5) + 50\,x_6 = 6400,$

$3 \leq y_1 \leq 6,$

$0{,}05(60 + x_1 - y_1) \leq y_2 \leq 0{,}1(60 + x_1 - y_1),$

$0{,}05(60 + x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \leq y_3 \leq 0{,}1(60 + x_1 + x_2 - y_1 - y_2),$

$0{,}05(60 + x_1 + x_2 + x_3 - y_1 - y_2 - y_3) \leq y_4 \leq 0{,}1(60 + x_1 + x_2 + x_3 - y_1 - y_2 - y_3),$

$0{,}05(60 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4) \leq y_4 \leq 0{,}1(60 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 -$
$- y_1 - y_2 - y_3 - y_4).$

Целевая функция:

$800(360 + 5{,}5\,x_1 + 4{,}5\,x_2 + 3{,}5\,x_3 + 2{,}5\,x_4 + 1{,}5\,x_5 + 0{,}5\,x_6) - 800(5\,y_1 + 4\,y_2 +$
$+ 3\,y_3 + 2\,y_4 + y_5).$

Целевую функцию требуется минимизировать по переменным x_i, $i=\overline{1,6}$.

В случае максимальной текучести кадров ежемесячно будет увольняться около 10% опытных стюардес. Решая системы равенств, с учётом целочисленности переменных и ограничений для неконтролируемых переменных, получим: $x_1 = 10$, $y_1 = 6$, $x_2 = 4$, $y_2 = 7$, $x_3 = 10$, $y_3 = 6$, $x_4 = 0$, $y_4 = 6$, $x_5 = 10$, $y_5 = 5$, $x_6 = 0$. Затраты составят 312 000 у.е.

Задачи для самостоятельного решения

Для каждой практической ситуации, описанной ниже, построить математическую модель, то есть описать управляемые и неуправляемые параметры, построить систему ограничений и целевую функцию, классифицировать модель и указать метод решения задачи.

1. Из четырех видов металла (медь, цинк, свинец, никель) составляют три вида сплавов: обычный, специальный и для художественного литья. Цены единицы веса металлов соответственно 0,8 у.е., 0,6 у.е., 0,4 у.е. и 1 у.е., а единицы веса сплава − 2 у.е.., 3 у.е. и 4 у.е.

Сплав для художественного литья должен содержать не менее 6% никеля, не менее 50% меди и не более 30% свинца, специальный – не менее 4% никеля, не менее 70% меди, не менее 10% цинка и не более 20% свинца. В обычный сплав металлы входят без ограничений.

Производственная мощность предприятия позволяет выпускать не более 400 единиц веса обычного сплава, не более 700 единиц специального сплава и не более 100 единиц сплава для художественного литья.

Найти план, приносящий максимальную прибыль.

2. Для производства чугунного литья используется n различных шихтовых материалов (чугун, лом, форрофосфор и т.д.). Химический состав чугунного литья определяется содержанием в нем m химических элементов (кремний, марганец, фосфор и т.д.). Готовый чугун должен иметь строго определенный химический состав, задаваемый величинами H_j – процент содержания j-го шихтового материала. Заданы также цены C_i за единицу i-го шихтового материала.

Найти наиболее дешевый состав шихты.

3. На промыслах A_1 и A_2 добывается нефть, которая затем доставляется на заводы B_1 и B_2, работающие по различной технологии. На B_1 требуется выработать 5000 единиц нефтепродуктов, на B_2 – 5200 единицы. Затраты на добычу единицы нефти составляют на промысле A_1 5 единиц, на промысле A_2 – 4 единицы. Качество нефти различное.

Из единицы нефти промысла A_1 вырабатывается 3 единицы нефтепродуктов на заводе B_1 и 4 единицы на заводе B_2, из единицы нефти промысла A_2 – соответственно 5 и 3 единицы нефтепродуктов.

Общие затраты на нефтедобычу не должны превышать 1000. Нефть из A_1 в B_2 и из A_2 в B_1 проходит промежуточный пункт с пропускной способностью 10000 единиц. При этом отношение количеств пропущенной нефти с промыслов A_1 и A_2 определяется случайной величиной z, равномерно распределённой на отрезке [1/3, 2/3].

Составить план добычи нефти при наименьших затратах, если затраты на транспортировку нефти из A_1 в B_1 составляют 2 единицы; из A_1 в B_2 – 3 единицы, из A_2 в B_2 – 4 единицы, из A_2 в B_1 – 3 единицы.

4. Автопредприятие некоторого города имеет следующие потребности в количестве водителей в различное время суток: с 2 до 6 часов – 20, с 6 до 10 – 50, с 10 до 14 – 35, с 14 до 18 – 40, с 18 до 22 – 50, с 22 до 2 – 30. Каждый водитель работает 8 часов без перерыва.

Составить служебное расписание, минимизирующее количество водителей, начинающих работать в 22 часа.

5. Авиапредприятию необходимо решить, какое количество топлива следует закупить у трех поставщиков, если имеют место следующие ограничения:

а) заправка самолетов осуществляется в четырех аэропортах;

б) нефтяные заводы имеют следующие возможности поставок: 2,5 млн.л., 5 млн.л., 6 млн. л.;

в) распределение топлива по аэропортам осуществляется в следующих количествах: 1 млн. л., 2 млн. л., 3 млн. л., 4 млн. л.

Составить модель оптимального прикрепления поставщиков, если стоимость доставки 1 л топлива задается следующей таблицей:

	1	2	3
1	12	9	10
2	10	11	14
3	8	11	13
4	11	13	9

6. В населенном пункте A имеется школа, которую посещают 720 учеников, живущие вне населенного пункта, что приводит к необходимости организации их доставки к школе на автобусах. Остановка B находится между A и C.

От остановки C в школу едут 420 учеников, от остановки B – 200 учеников. Кроме того, между C и B живет 60 учеников, а между A и B – 40 учеников.

Автопредприятие располагает автобусами на 35 и 50 мест. Установлены следующие расходы автопредприятия для каждого типа автобусов в зависимости от расстояния:

	35-местный	50-местный
BA	2	2,5
CA	2,5	3,5
CB	2,25	3

Необходимо определить, какого типа автобусы следует использовать на каждом отрезке с целью минимизации суммарных издержек.

7. Водопроводчик получил наряд на установку перекрытий на нескольких трубах, покрытых тяжелыми прямоугольными плитами. Он может установить механизмы перекрытия в любом месте трубы.

Для минимизации трудозатрат надо определить минимальное число плит, которое требуется поднять, чтобы установить по одному перекрытию на каждой трубе.

8. Пусть площадь, отведенная для выращивания сельскохозяйственных культур, состоит из m земельных участков На этих участках выращивается n сельскохозяйственных культур ($m > n$). Причём на участке выращивается только одна культура.

Затраты по возделыванию j-й культуры на i-м участке выражаются числом d_{ij}, причем возможны дополнительные расходы c_{ij}.

На каждом из участков можно применять удобрение только одного из z типов. Дополнительные расходы при использовании k-го удобрения на i-м участке в случае посадки j-й культуры равны b_{ijk}. Наконец, каждый из участков можно орошать. Стоимость орошения i-го участка равна q_i и не зависит от культуры.

Заданы: α_{ijk}^{00} – урожай j-й культуры на i-м участке с k-м удобрением без дополнительных затрат и без орошения;

α_{ijk}^{01} – то же с орошением без дополнительных затрат;

α_{ijk}^{10} – то же с дополнительными затратами без орошения;

α_{ijk}^{11} – то же с дополнительными затратами и с орошением.

Пусть также π_j – заданный средний суммарный урожай j-й культуры, а заданный объем соответствующей продукции - p_j. Распределить культуры по участкам с целью минимизации суммарных затрат.

9. Сельхозпредприятие имеется несколько земельных участков, качественно отличающихся друг от друга. Хозяйство возделывает несколько видов культур.

Необходимо определить, какую площадь каждого участка следует отвести под каждую культуру, чтобы получить запланированные объемы продукции при минимальных затратах.

Решить задачу, используя числовые данные, представленные в следующей таблице:

Земля	Площадь (га)	Культуры	Урожайность (ц/га)	Трудоемкость (дни/га)
лучшая	100	пшеница рожь овес	30 25 28	10 8 7
обыкновенная	200	пшеница рожь овес	20 20 26	10 8 7
худшая	неограни- чена	пшеница рожь овес	15 15 25	10 8 7

Плановые задания: пшеница – 5000 ц, рожь – 3500 ц, овес – 5000 ц.

10. Бригада рабочих, состоящая из четырех человек, получила задание на выполнение четырех видов работ. В силу неодинаковой профессиональной подготовленности на выполнение одной и той же работы разными рабочими затрачивается различное время, что отражено в матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Определить такое распределение работ между членами бригады, при котором затраты времени на выполнение всего задания были бы минимальны.

11. В мастерской имеется 4 станка, которые могут выполнять 3 операции. Каждую операцию единовременно может выполнять только один станок, и каждый станок можно загрузить выполнением только одной операции.

Матрица затрат времени при выполнении i-станком j-й операции имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 8 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 9 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

Определить наиболее рациональное распределение операций между станками, минимизирующее суммарные затраты времени.

12. В различных концах города находятся пять автохозяйств, которые должны выделить по одному грузовику и послать в пять различных сельхозпредприятий за овощами, поставляемыми пяти овощным базам.

Известно время, затрачиваемое автомобилями на дорогу до каждого предприятия, время, время на доставку их на базы и время, необходимое для погрузки овощей. Эти данные приведены в следующих таблицах:

	сельхозпредприятия				
машины	A	B	C	D	E
I	3	1	5	2	4
II	4	6	3	1	3
III	2	4	2	3	6
IV	5	3	1	4	2
V	1	7	3	2	5

	базы				
пред-тия	a	b	c	d	e
A	4	6	1	2	5
B	2	3	4	5	6
C	1	5	3	4	2
D	2	4	5	6	3
E	5	2	1	3	4

сельхозпредприятия	A	B	C	D	E
время погрузки	2	4	3	2	1

Требуется так организовать распределение транспорта, чтобы минимизировать затраты времени, связанные с его эксплуатацией.

13. Самолеты авиакомпании совершают рейсы между двумя городами A и B в обоих направлениях.

Если база экипажа находится в A (B) и экипаж прибывает в B (A) определенным рейсом, то он должен вернуться в A (B) одним из рейсом (возможно, на следующий день). Между полетами у экипажа должен быть отдых не менее часа.

Компания стремится выбрать обратный рейс так, чтобы минимизировать время нахождения экипажа в аэропорту, который не является базой экипажа.

При заданном расписании полетов требуется решить:

1) какие рейсы спарить (спаренный рейс – рейс в оба конца, выполняемый одним и тем же экипажем)?
2) где выбрать базу при заданных спаренных рейсах?

Расписание рейсов

Рейс	Вылет из А	Прибытие в В	Рейс	Вылет из В	Прибытие в А
1	7.30	9.00	2	7.00	10.00
3	8.15	9.15	4	7.45	10.45
5	14.00	15.30	6	11.00	14.00
7	17.45	19.15	8	18.00	21.00
9	19.00	20.30	10	19.30	22.30

14. Из пункта A в пункт B и обратно отправляются четыре поезда, согласно расписанию:

из A в B – 9.00, 12.00, 16.00, 20.00;

из B в A – 10.00, 15.00, 18.00, 22.00.

Время в пути для всех поездов одинаково и равно шести часам. Локомотивы, ведущие поезда, совершают в сутки два рейса: один из пункта, к которому локомотив прикреплен, и второй обратно с ближайшим очередным рейсом.

Найти оптимальное закрепление локомотивов за пунктами A и B, при котором достигается минимум суммарного времени простоя локомотивов.

15. Банк предоставляет набор услуг по кредитованию. Возможные типы банковских кредитов приведены в таблице. Безнадёжные долги считаются не возвратимыми, поэтому они дролжны вычитаться из возможного дохода.

Конкурентная борьба вынуждает банк не менее 40% портфеля кретитов помещать в сельскохозяйственные и коммерческие кредиты. Для содействия строительной индустрии банк планирует вложить в кредиты на покупку жилья не меньше, чем общая сумма кредитов физическим лицам и на покупку автомобилей. Банк поддерживает государственную политику, указывающую, что отношение безнадёжных долгов ко всей сумме кредитов не должно превышать 0,04.

Тип кредита	Ставка процента	Вероятность безнадёжных долгов
Кредиты физическим лицам	0,14	0,1
Кредиты на покупку автомобилей	0,13	0,07
Кредиты на покупку жилья	0,12	0,03
Сельскохозяйственные	0,125	0,05
Коммерческие	0,1	0,02

Сформировать портфель кредитов объёмом 12 млн. долларов, для получения максимальной чистой прибыли.

16. Планируя расходы на обучение ребёнка, семейная пара решила ежегодно откладывать определённые суммы в течение 10 лет, начиная с 8-летнего возраста ребёнка. По годам эти суммы запланированы следующим образом:

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сумма (долл.)	2000	2000	2500	2500	3000	3500	3500	4000	4000	5000

Семейная пара решила вложить деньги в: 1) страховой полис с 7,5% годовых; 2) шестилетние ценные бумаги с 7,9% годовых (текущая рыночная стоимость ценных бумаг равна 98% номинальной стоимости); 3) девятилетние ценные бумаги с доходностью 8,5% годовых (их текущая рыносная стоимость равна 1,02 от номинальной стоимости).

Определить оптимальный план вложения денег и ежегодные доходы.

17. Фирма собирает персональные компьютеры для заказчиков. На год, поквартально имеются заказы на 400, 700, 500 и 200 компьютеров соответственно. Фирма может собирать больше компьютеров, чем указано в заказах, но в таком случае приходится платить 100 у.е. за

хранение собранного компьютера в течение квартала. Увеличение производства в следующем квартале, по сравнению с предыдущим, приводит к необходимости набора дополнительных работников, что повышает себестоимость компьютера на 60 у.е. При уменьшении производства в следующем квартале, по сравнению с предыдущим, необходимо сокращать персонал, что также увеличивает себестоимость компьютера на 50 у.е.

Как организовать сборку компьютеров с наименьшими издержками, чтобы удовлетворить все заказы?

1.2. Многокритериальные задачи

Рассмотрим многокритериальные задачи. В задачах этого типа присутствуют ограничения, которым должны подчиняться переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$, и несколько критериев, например, *n*:

$$f_1(x) \to \max, \ldots, f_n(x) \to \max \qquad \text{(задача векторной оптимизации).}$$

Один из подходов к решению такого класса задач состоит в сведении к стандартным задачам с одним критерием. При этом варианты сведения многокритериальной задачи к стандартной задаче с одним критерием следующие:

1). *Линейная свертка.* Если все критерии измеряются в одной шкале, то строят обобщенный критерий вида:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x), \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i = 1, \ c_i \geq 0,$$

где c_i – веса соответствующих критериев. Как правило, веса подбираются экспериментально, они отражают представление оперирующей стороны о содержании выбранного компромисса.

2). *Использование контрольных показателей.* Пусть задана система контрольных нормативных показателей f_i^*, $i = \overline{1,n}$, относительно которых критерии $f_i(x)$ должны удовлетворять условию $f_i(x) \geq f_i^*$.

а) В некоторых случаях целевую функцию удобно представлять в виде

$$F(x) = \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

и искать *x*, который обеспечивает максимум функции $F(x)$. Смысл функции $F(x)$ означает выбор *x*, которые максимизируют отношение *i*-го реального значения критерия (в данном случае наихудшего) к его контрольному значению.

Если значения f_i^* жестко не заданы, то они могут быть установлены в результате экспертного опроса.

б) Предположим, что среди функций f_i, выделен основной критерий, например, $f_1(x)$. Тогда снова приходим к однокритериальной задаче: $f_1(x) \to \max$ при условии $f_i(x) \ge f_i^*$, $i = \overline{1,n}$.

3) Введение метрики в пространстве целевых функций.

Предположим мы решили систему однокритериальных задач:

$$f_i(x) \to \max \ \ i = \overline{1,n}.$$

и в каждой *i*-ой задаче нашли вектор $x = x^i$ – доставляющий максимум критерию $f_i(x)$: $f_i(x^i) = f_i^*$. Совокупность скалярных величин f_i^* в пространстве критериев определяет некоторую точку, называемую "абсолютным максимумом". Если все x^i различны, то точка $(f_1^*,...,f_n^*)$ недостижима в пространстве критериев.

Введем положительно определенную матрицу $R = (r_{ij})$. Тогда скалярная величина: $h(x) = \sqrt{\sum_{ij}(f_i(x) - f_i^*)r_{ij}(f_j(x) - f_j^*)}$ определяет некоторое расстояние от точки соответствующей вектору x до точки "абсолютного максимума". Частный случай, когда R – единичная матрица, то $h(x) = \sqrt{\sum_i (f_i(x) - f_i^*)^2}$ - Евклидово расстояние.

В качестве критерия можно выбрать:

$$h(x) \to \min.$$

Задачи для самостоятельного решения

Для каждой практической ситуации, описанной ниже, построить математическую модель в виде многокритериальной задачи. Свести при наличии данных к однокритериальной задаче.

18. Караван из *n* судов перевозит грузы из порта *A* в порт *B*, расстояние между которыми *d*. Скорость *i*-го судна может выбираться от v_i^1 до v_i^2 ($v_i^1 < v_i^2$). Зависимость расхода топлива *i*-го судна на единицу расстояния от скорости движения определяется формулой $p_i = p_i^1 + c_i\ (v_i - v_i^1)$, где p_i^1 – расход топлива при скорости v_i^1. Требуется выбрать скорости движения судов с целью минимизации времени перевозки грузов и расхода топлива, для случаев:

а) время прибытия каравана судов определяется временем прибытия последнего судна;

б) время прибытия каравана судов определяется временем прибытия первого судна;

в) время прибытия каравана судов определяется средним временем прибытия судов.

Рассмотреть случай, когда для каравана определено время перевозки грузов T, превышение которого не допустимо.

19. Две фирмы выпускают одинаковую номенклатуру из n изделий. Цена i-го изделия, складывающаяся на рынке, линейно убывает с ростом суммарного предложения: $c_i(v_i) = a_i - b_i (v_{1i} + v_{2i})$, где v_{1i} и v_{2i} объемы выпуска i-го изделия первой и второй фирмой соответственно. Пусть затраты первой и второй фирм на выпуск единицы i-го изделия равны d_{1i} и d_{2i} соответственно. Цель каждой из фирм состоит в максимизации своей прибыли. Составить математическую модель для поиска эффективных объёмов выпуска изделий фирмами.

Рассмотреть вариант задачи, когда:

а) фирмы входят в объединение, стремящееся максимизировать общую прибыль;

б) задан нормативный показатель для прибыли первой фирма равный P.

20. Имеется вычислительная сеть, имеющая топологию “звезда”, то есть множество $N=\{1, 2, ..., n\}$ параллельно работающих компьютеров, первый из которых выполняет роль концентратора. Имеется задание объёмом W единиц информации, которое необходимо выполнить на данных компьютерах. При этом концентратор помимо выполнения своей части задания, которая составляет не более 25% объёма задания, производит также обмен информацией между компьютерами. Производительность i-го компьютера составляет c_i единиц объёма информации в единицу времени по выполнению задания, формированию пересылаемой информации и обработке полученной информации. Между компьютерами должен происходить обмен информацией по каналам связи, через концентратор, но с условием сохранения баланса, то есть суммарный объём информации, передаваемой от компьютера другим компьютерам, должен быть равен суммарному объёму информации, получаемому компьютером. Оба суммарных объёма составляют 30% объёма информации задания, первоначально переданного компьютеру. Для концентратора объём обмена с компьютерами состоит из 30% процентов информации своей части задания и всей информации передаваемой между компьютерами. Скорость передачи по каналу $(1,j)$ равна v_{1j} единиц информации в

единицу времени. Пусть также задано множество $M \subseteq \{(1,j) \mid j \in N,\ j \neq 1\}$ "контролируемых" каналов связи. Требуется распределить задание между компьютерами, минимизирующее время выполнения задания и минимизирующее суммарный труфик по "контролируемым" каналам связи.

21. Задано n работ, подлежащих выполнению. Для выполнения работ можно привлечь $m \leq n$ исполнителей. Время выполнения i-ой работы j-ым исполнителем равно $t_{ij} > 0$, затраты на выполнение i-ой работы j-ым исполнителем соответственно $c_{ij} > 0$. Каждая работа может выполняться только одним исполнителем, соответственно каждый работник должен быть назначен хотя бы на выполнение одной работы. Требуется найти назначение исполнителей на работы которое:

а) минимизирует общие затраты и время выполнения работ;

б) минимизирует общие затраты и общее время выполнения работ;

в) минимизирует общие зартаты при заданном нормативном времени T выполнения всех работ.

1.3. Сужение неопределенности. Компромиссы Парето

Другой подход к решению многокритериальных задач заключается в попытке сократить множество исходных вариантов, т.е. исключить из неформального анализа те варианты решений, которые являются заведомо плохими.

Предположим, что сделан некоторый выбор x^*, и существует другой выбор $\bar{x}$ такой, что для всех критериев $f_i(x)$ имеет место неравенство:

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x^*),\ i = \overline{1,n}. \tag{1.1}$$

причем хотя бы одно из неравенств – строгое.

Очевидно, что выбор $\bar{x}$ предпочтительнее выбора x^*. Поэтому все вектора типа x^* удовлетворяющие (1.1) следует исключить из рассмотрения. Т.е. подвергать неформальному анализу нужно только те вектора x^*, для которых не существует $\bar{x}$ такого, что для всех критериев выполняется неравенство (1.1).

Вектор x^* называется *не улучшаемым вектором результатов* (*вектором Парето*), если из соотношения $f_i(\bar{x}) \geq f_i(x^*)$ для любых $i = \overline{1,n}$, следует, что $f_i(\bar{x}) = f_i(x^*)$, $i = \overline{1,n}$. Множество всех векторов Парето называют *множеством Парето*.

В теории принятия решений существует "принцип Парето": в качестве решения следует выбирать только тот вектор x, который принадлежит множеству Парето. В данном принципе не выделяется единственного решения, а только сужается множество альтернатив. Окончательный выбор остается за лицом, принимающим решение.

Пример. Найти множество Парето в многокритериальной задаче:

$f_1(x) \to \max$, $f_2(x) \to \max$,

где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$,

при условии $0 \le x \le 2$.

Решение. Построим графики функций $f_i(x), i = 1,2$ (рис. 1). На интервалах $[0,\ 1\text{-}1/\sqrt{3})$, $[1+1/\sqrt{3},\ 2)$ обе функции возрастают. Следовательно, любая точка указанных интервалов не может являться точкой Парето.

На интервале $[1\text{-}1/\sqrt{3},\ 1)$ функция $f_1(x) = x$ возрастает, функция $f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ убывает. Причём для любой точки $x \in [1\text{-}1/\sqrt{3},\ 1)$, если $y \in [0,\ 1\text{-}1/\sqrt{3})$, то $f_1(y) < f_1(x)$, если $y \in [1,\ 2]$, то $f_2(y) < f_2(x)$.

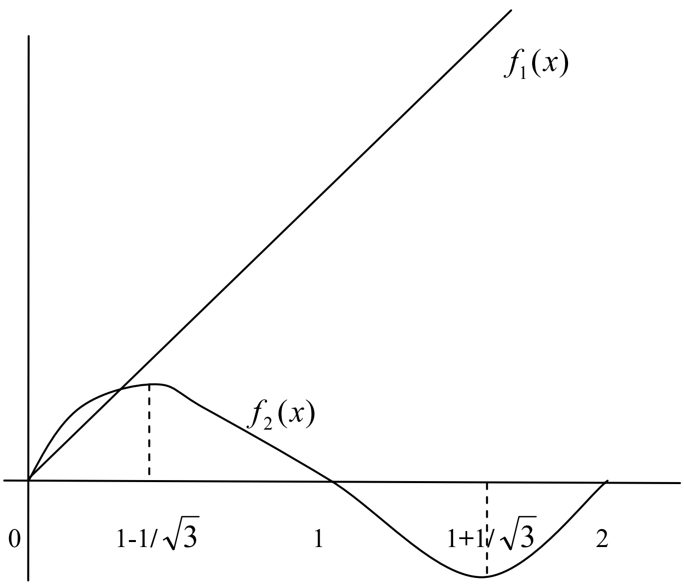


Рис.1.

Для любой точки $x \in$ [1, 1+1/$\sqrt{3}$) на интервале (1+1/$\sqrt{3}$, 2] найдётся точка y такая, что $f_2(x) = f_2(y)$ и $f_1(x) < f_1(y)$. Следовательно, любая точка интервала [1, 1+1/$\sqrt{3}$) не является точкой Парето.

Таким образом множеством Парето есть [1-1/$\sqrt{3}$, 1)$\cup$ {2}.

Задачи для самостоятельного решения

22. Найти множество Парето в следующих многокритериальных задачах:

a) $f_1(x) \to \max$, $f_2(x) \to \max$,

где $f_1(x) = a\,x + b(1-x)$, $f_2(x) = x^{\alpha}\,(1-x)^{\beta}$,

при условии $0 \le x \le 1$. Здесь a, b, α, β – положительные константы;

b) $f_1(x_1, x_2) \to \max$, $f_2(x_1, x_2) \to \max$,

где $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$,

при условии $0 \le x_i \le 1$, i=1,2.

c) $f_i(x_1, x_2, x_3) \to \max$, $i = \overline{1,3}$,

где $f_1(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_2,\ x_3\}$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1,\ x_3\}$, $f_1(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1,\ x_2\}$,

при условии $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_i \ge 0$, $i = 1,2,3$.

2. Теория игр

При решении некоторых практических задач приходится анализировать случаи, в которых сталкиваются интересы двух и более сторон, преследующих разные цели. При этом результат действий одной стороны зависит от образа действия другой. Такие ситуации называются конфликтными. Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой.

Формальное определение игры. Под конфликтом понимается явление, применительно к которому можно говорить, кто и как в этом явлении участвует, какие у него могут быть исходы и кто и как в этих исходах заинтересован. Поэтому для формального задания конфликта необходимо указать:

1) множество участвующих в нем действующих начал (называемых *коалициями действия*) K;

2) семейство множеств A = {A_i}, $i \in K$, *стратегий* каждой из коалиций действия;

3) множество ситуаций $X \subset \prod_{i \in I} A_i$;

4) множество U заинтересованных начал (*коалиции интересов*);

5) семейство бинарных отношений $\succ_U$ на X выражающих предпочтения между ситуациями для коалиций интересов.

Система $<K, A, X, U, \succ_U>$ называется *игрой*.

Обычно в теории игр, как коалиции действия, так и коалиции интересов принято атомизировать и считать как те, так и другие подмножествами некоторого множества I, элементы которого называют *игроками*.

Основной класс игр составляют *бескоалиционные игры*, в которых множество игроков I совпадает с множеством коалиций действий K и коалиций интересов U. Отношение предпочтения $\succ_i$ описывается функцией выигрыша $H_i : X \to R$, причем $x' \succ_i x''$ тогда и только тогда, когда $H_i(x') > H_i(x'')$. Если $I = \{1,2\}$ и $H_1(x) = -H_2(x)$ для всех $x \in X$, то игра Γ называется *антагонистической*. Всякая антагонистическая игра может быть задана в виде тройки $< A, B, H >$, где A и B – множества стратегий, соответственно первого и второго игроков, а H – функция выигрыша первого игрока. Каждую из стратегий игрока будем называть *чистой стратегией*.

2.1. Матричные игры. Разрешимость в чистых стратегиях

Начнём рассмотрение с простейших игр – матричных игр. Конечные антагонистические игры называются *матричными играми*. Величины $\underline{I} = \max\limits_i \min\limits_j H(i,j)$ и $\overline{I} = \min\limits_j \max\limits_i H(i,j)$ называются нижним и верхним значениями игры соответственно. Нижнее значение игры не может превосходить верхнее значение. Платёжную функцию $H(i,j)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, удобно записывать в виде матрицы с n строками и m столбцами, причём элементы матрицы $h_{ij} = H(i,j)$. Чтобы найти нижнее значение игры достаточно в каждой строке матрицы найти наименьший элемент $\alpha_i = \min\limits_j h_{ij}$ и выбрать строку, у которой этот элемент наибольший $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$. Чтобы найти верхнее значение игры, достаточно найти наибольший элемент в каждом столбце $\beta_j = \max\limits_i h_{ij}$ и выбрать столбец, у которого этот элемент наименьший во всех столбцах $\beta = \min\limits_j \beta_j$. В случае $\max\limits_i \min\limits_j H(i,j) = \min\limits_j \max\limits_i H(i,j)$, говорят, что игра имеет седловую точку. При этом пару стратегий i_0, j_0 называют решением игры, если $\max\limits_i \min\limits_j H(i,j) = \min\limits_j \max\limits_i H(i,j) = H(i_0, j_0)$, и говорят, что игра разрешима в чистых стратегиях.

Пример. Решить матричную игру с матрицей выйгрышей

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 4, \beta_1 = 4, \beta_2 = 5, \beta_3 = 8.$ Отсюда $\alpha = 4, \beta = 4.$ Игра разрешима в чистых стратегиях. Оптимальная стратегия первого игрока третья, второго – первая.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что матричная игра с матрицей $H=(h_{ij})_{nxm}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решения, если:

a) $h_{ij} = f(i) - g(j)$; b) $h_{ij} = f(i) + g(j)$;

c) $H = \begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \\ a\,d \\ c\,b \end{pmatrix}$, a, b, c, d – произвольные числа;

d) $H = \begin{pmatrix} a & e & a & e & a & e & a & e \\ b & f & b & f & f & b & f & b \\ c & g & g & c & c & g & g & c \end{pmatrix}$, a, b, c, e, f, g – произвольные числа;

e) $h_{ij} = \dfrac{a_i + b_j}{c_i + d_j}$, a_i , b_j – произвольные числа, c_i , d_j – положительные числа.

f) $n = m$ и для любых $i, j, k,\ 1 \le i, j, k \le m$, имеет место тождество $h_{ij}+h_{jk} + h_{ki}= 0$.

2. Найти решение матричной игры с матрицей $H = (h_{ij})_{nxm}$, если:

a) $H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; b) $H = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; c) $H = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; e) $H = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

2.2. Матричные игры. Смешанные стратегии. Сведение к задаче линейного программирования

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий. При этом матричная игра называется смешанным расширением игры в чистых стратегиях.

Таким образом, если первый игрок имеет n чистых стратегий A_1, A_2,..., A_n, то его смешанная стратегия есть вектор вероятностей p=(p_1, p_2 ,..., p_n), $p_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Аналогично, для второго игрока, имеющего m чистых стратегий B_1, B_2,...,B_m, смешанная стратегия есть вектор вероятностей q=(q_1, q_2, ..., q_m), $q_j \geq 0$, $j = \overline{1,m}$, $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$.

Если количество партий велико, то средний выигрыш первого игрока примерно равен математическому ожиданию выигрыша:

$$M(H,p,q) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} H(i,j)p_i q_j = \sum_{i=11}^{n}\sum_{j=1}^{m} h_{ij} p_i q_j .$$

Нижнее (верхнее) значение игры есть величина

$$M(H,\bar{p},\bar{q}) = \max_p \min_q \sum_{i=1}^{n}\sum_{j}^{m} H(i,j)p_i q_j = \underline{I}(\bar{p},\bar{q})$$

$$(M(H,\bar{\bar{p}},\bar{\bar{q}}) = \min_q \max_p \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} H(i,j)p_i q_j = \bar{I}(\bar{\bar{p}},\bar{\bar{q}})).$$

Оптимальными смешанными стратегиями первого и второго игроков называют векторы p^0, q^0, удовлетворяющие равенству

$$M(H,p^0,q^0) = \min_q \max_p M(H,p,q) = \max_p \min_q M(H,p,q).$$

Величину $I = M(H,p^0,q^0)$ называют значением (ценой) игры.

По **теореме фон Неймана** для матричной игры с любой матрицей выйгрышей H величины

$$\underline{I} = \max_p \min_q M(H,p,q), \ \bar{I} = \min_q \max_p M(H,p,q)$$

существуют и равны между собой. По существу теорема фон Неймана утверждает, что любая матричная игра разрешима в смешанных стратегиях.

Существует несколько методик поиска оптимальных стратегий. Первая из них - *сведение к задаче линейного программирования*. Для поиска оптимальной стратегии первого игрока решается следующая задача линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min, \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i \geq 1,\ j=\overline{1,m},\ x_i \geq 0,\ i=\overline{1,n}.$$

В результате решения этой задачи находятся значение игры $I = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i$ и оптимальная стратегия первого игрока $p_i^* = x_i I,\ i=\overline{1,n}$.

Для определения оптимальной стратегии второго игрока строится задача линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \to \max, \sum_{j=1}^{m} c_{ij} y_j \leq 1,\ i=\overline{1,n},\ y_j \geq 0,\ j=\overline{1,m}.$$

По найденному решению этой задачи определяется значение игры $I = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{m} y_j$ и оптимальная стратегия второго игрока $q_j^* = y_j I,\ j=\overline{1,m}$.

Заметим, что выше приведенные задачи являются двойственными задачами линейного программирования.

Пример. Пусть дана матричная игра с матрицей выйгрышей

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определим нижнее и верхнее значения игры: $\alpha = 3,\ \beta = 5.$ Так как значения не совпадают, то игра не разрешима в чистых стратегиях. Построим пару двойственных задач линейного программирования. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \to \min,$$
$$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 1,$$
$$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq 1,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 1,$$
$$6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1,$$
$$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,3}.$$

$$\sum_{j=1}^{4} y_j \to \max,$$
$$2y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 6y_4 \leq 1,$$
$$5y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 \leq 1,$$
$$5y_1 + 8y_2 + 3y_3 + 5y_4 \leq 1,$$
$$y_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}.$$

Решив полученную пару задач (например симплекс-методом) найдём оптимальные решения:

$$x_1 = \frac{9}{178},\ x_2 = \frac{19}{178},\ x_3 = \frac{13}{178};\ y_1 = \frac{20}{178},\ y_2 = \frac{3}{178},\ y_3 = \frac{18}{178},\ y_4 = 0.$$

Значение игры $I = \frac{178}{41}$. Соответственно оптимальные смешанные стратегии играков будут равны:

$$p_1 = \frac{9}{41},\ p_2 = \frac{19}{41},\ p_3 = \frac{13}{41};\ q_1 = \frac{20}{41},\ q_2 = \frac{3}{41},\ q_3 = \frac{18}{41},\ q_4 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

3. Построить пару двойственных задач линейного программирования для решения матричной игры с матрицей $H=(h_{ij})_{nxm}$, если:

a) $H = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; b) $H = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $H = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Каждый из двух игроков записывпает одно из чисел 0, 1, 2, не показывая написанного противнику. Затем первый игрок называет предполагаемую сумму записанных чисел, после чего второй игрок также называет предполагаемую сумму. Угадавший игрок получает 10 очков. Если же никто не угадал, то выигрыш каждого из игроков равен нулю. Определить число чистых стратегий каждого из игроков. Найти оптимальные смешанные стратегии и значение игры.

Рассмотреть вариант игры, когда игроки одновременно называют предполагаемую сумму.

5. Каждый из игроков имеет три фишки, которые может располагать в трёх позициях (в одной позиции можно расположить одну, две или три фишки). Фишка второго игрока “уничтожает” фишку противника, расположенную в той же позиции. Расстановка фишек производится в отсутствии информации о решении противника. Неуничтоженная фишка первого игрока “ прорывается” через соответствующую позицию. Составить и решить матрицную игру, считая выигрышем первого игрока

(соответственно проигрышем второго игрока) общее число “прорвавшихся” фишек.

6. Два игрока одновременно и независимо друг от друга показывают от одного до пяти пальцев. Если общее число указанных пальцев чётно, то сумму равную этому числу выигрывает первый игрок, если нечётно, то второй игрок. Определить чистые стратегии игроков. Найти смешанные стратегии и значение игры.

7. Каждый игрок имеет по три фишки с номерами 1, 2, 3. Игроки независимо друг от друга кладут от одной до трёх фишек на стол цифрами вниз. Затем фишки переворачиваются. Выигрывает первый игрок, если сумма цифр всех фишек делится на три. Второй игрок выигрывает, если сумма делится на четыре. Определить чистые стратегии играков. Найти смешанные стратегии и значение игры.

8. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры

$$p=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\ q=\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right),\ I=0{,}4\ ,$$

решением матричной игры с выигрышами

$$H=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}4\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8\end{pmatrix}.$$

9. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры

$$p=\left(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\ q=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\ I=4,$$

решением матричной игры с выигрышами

$$H=\begin{pmatrix}14 & -4 & 2\\ -4 & 8 & 8\\ 4 & 4 & 4\\ 2 & 8 & 2\end{pmatrix}.$$

2.3. Матричные игры. Графоаналитический метод

Графоаналитический метод применяется, когда один из игроков имеет в своём распоряжении две чистые стратегии.

Рассмотрим игру с платёжной матрицей H размера $2xm$. В этом случае каждой стратегии первого игрока p=(p_1, p_2), $p_1+p_2=1$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, отвечает точка (p_1, $1-p_1$) на отрезке [0,1]. Выберем на горизонтальной оси отрезок единичной длины и через его концы проведём вертикальные оси, соответствующие чистым стратегиям первого игрока. Ось, соответствующая чистой стратегии A_1, проходит через единичную точку горизонтальной оси, ось, соответствующая чистой стратегии A_2, проходит через нулевую точку.

Пусть второй игрок выбирает свою чистую стратегию B_j. Тогда выигрыш первого игрока зависит от p_1 и равен $p_1 h_{1j}$ + (1 - p_1) h_{2j}. Графически зависимость этого выигрыша от p_1 изображается отрезком прямой линии. Каждой чистой стратегии B_j второго игрока соответствует своя прямая. Графиком функции $\min\limits_j (h_{1j} p_1 + h_{2j}(1 - p_1))$ будет нижняя огибающая всех прямых, соответствующих стратегиям второго игрока. Этот график представляет собой ломанную, обращенную выпуклостью вверх. Наивысшая точка (точки) этой ломанной будет соответствовать тому значению, на котором достигается $\max\limits_p \min\limits_j (h_{1j} p_1 + h_{2j}(1 - p_1))$. Абсцисса этой точки определяет, таким образом, оптимальную стратегию первого игрока, а её ордината – значение игры (рис. 2).

Выберем чистые стратегии второго игрока, отвечающие этой точке. Их две, например B_{j_1}, B_{j_2}. Решаем систему

$I = h_{1j_1} p_1 + h_{2j_1}(1 - p_1)$,

$I = h_{1j_2} p_1 + h_{2j_2}(1 - p_1)$,

для определения значения игры и оптимальной смешанной стратегии первого игрока.

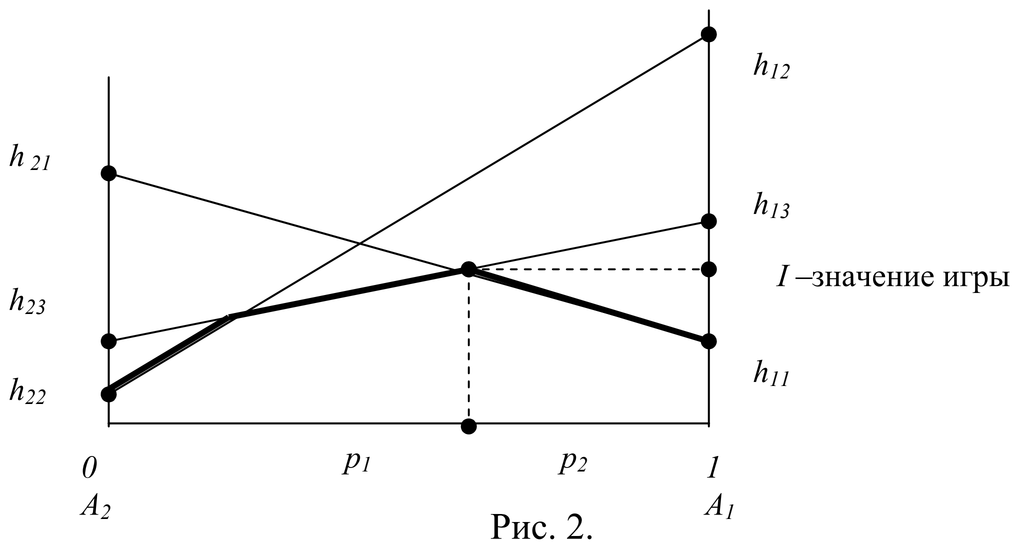


Рис. 2.

Пусть теперь платёжная матрица игры имеет размерность nx2. Тогда на отрезке [0,1] стратегии второго игрока q=(q_1, q_2), $q_1 + q_2 = 1$, $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, отвечает точка (q_1, 1-q_1). При рассмотрении чистой стратегии A_i первого игрока выигрыш второго игрока равен q_1 h_{i1} + (1 - q_1) h_{i2}.

Графиком функции $\max\limits_i (h_{i1}q_1 + h_{i2}(1-q_1))$ будет верхняя огибающая всех прямых, соответствующих стратегиям первого игрока. График представляет собой ломанную, обращенную выпуклостью вниз. Нижняя точка (точки) этой ломанной будет соответствовать тому значению, на котором достигается $\min\limits_q \max\limits_i (h_{i1}q_1 + h_{i2}(1-q_1))$. Абсцисса этой точки определяет оптимальную стратегию второго игрока, а её ордината – значение игры (рис. 3).

В ней пересекаются не менее двух прямых, из которых одна имеет положительный наклон, другая отрицательный. Если этой точке отвечают чистые стратегии A_{i_1}, A_{i_2} первого игрока, то решаем систему

$$I = h_{i_1 1}q_1 + h_{i_2 2}(1-q_1),$$
$$I = h_{i_2 1}q_1 + h_{i_2 2}(1-q_1),$$

для определения значения игры и оптимальной смешанной стратегии второго игрока.

Уменьшить размерность игры можно используя понятие *доминирования* стратегий. Чистая стратегия A_{i_1} первого игрока доминирует его чистую стратегию A_{i_2}, если $c_{i_1 j} \ge c_{i_2 j}$, $j = \overline{1,m}$. Чистая стратегия B_{j_1} второго игрока доминирует чистую стратегию B_{j_2}, если $c_{ij_1} \le c_{ij_2}$, $i = \overline{1,n}$. Если одна из стратегий игрока доминируется некоторой другой, то вероятность её применения можно положить равной нулю и тем самым вывести её из рассмотрения.

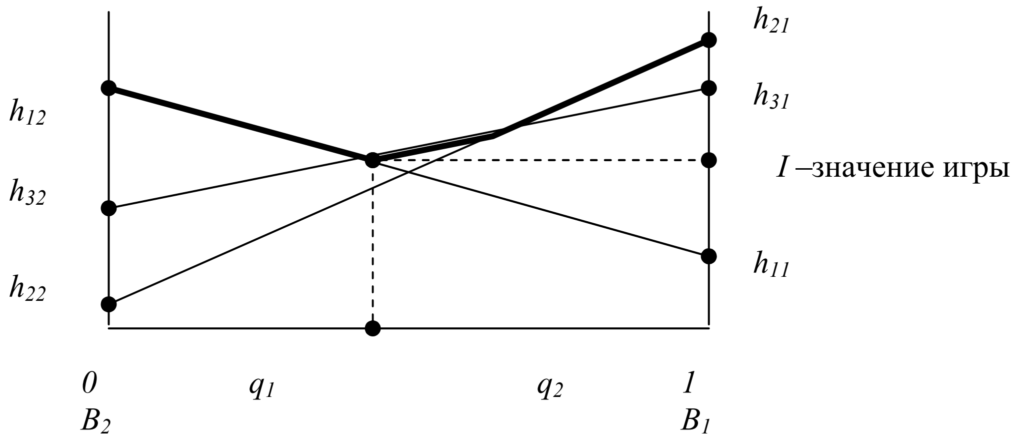


Рис. 3.

Пример. Пусть дана матричная игра с матрицей выйгрышей

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определим нижнее и верхнее значения игры: $\alpha = 1, \beta = 2.$ Игра не разрешима в чистых стратегиях.

Третья стратегия второго игрока доминирует первую стратегию. Следовательно можно положить $q_1 = 0$ и вывести первый столбец матрицы из рассмотрения. Далее получим, что третья стратегия первого игрока доминирует вторую. Следовательно $p_2 = 0.$ В результате получим матрицу

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Построим график (рис. 4). Соответствующая система уравнений имеет вид:

$p_1 + 2\,p_3 = I$, $2\,p_1$ - $p_3 = I$, $p_1 + p_3 = 1$.

Получим $p_1 = 0{,}75$, $p_3 = 0{,}25$. Таким образом оптимальная стратегия первого игрока имеет компоненты $p_1 = 0{,}75$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0{,}25$. Цена игры I=1,25.

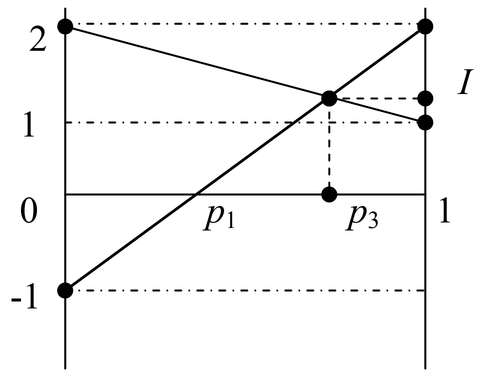


Рис. 4.

Аналогично получим оптимальную стратегию второго игрока: $q_1 = 0$, $q_2 = 0{,}75$, $q_3 = 0{,}25$.

Задачи для самостоятельного решения

10. Найти графоаналитическим методом решение матричной игры с матрицей $H = (h_{ij})_{nxm}$, если:

a) $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $H = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $H = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 2 & 0 & 9 & 2 \\ 7 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; d) $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

11. Показать, что:

a) если $h_{i-1,j}$ - 2 h_{ij} + $h_{i+1,j} \le 0$, $i = \overline{2, n-1}$, $j = \overline{1, m}$,то в игре с матрицей $H = (h_{ij})_{nxm}$ каждый игрок имеет оптимальную стратегию, в которой используется не более двух чистых стратегий;

b) если $h_{i-1,j}$ - 2 h_{ij} + $h_{i+1,j}$ ≥ 0, $i = \overline{2, n-1}$, $j = \overline{1, m}$, то в игре с матрицей $H=(h_{ij})_{nxm}$ первый игрок имеет оптимальную стратегию p, для которой $p_i = 0$, $i = \overline{2, n-1}$.

2.4. Матричные игры. Приближённый метод

Опишем один из самых простых приближённых методов решения матричной игры – *метод итераций* или *метод Брауна-Робинсона*. В методе игра повторяется заданное s количество раз. Каждую реализацию игры назовём партией. Игроки оперируют только чистыми стратегиями. В первой партии один из игроков, например, первый, выбирает произвольную чистую стратегию A_{i_1}. Противник отвечает лучшей для него чистой стратегией B_{j_1}. Далее выбор осуществляет первый игрок. И так далее. На каждом шаге метода игрок выбирает ту свою чистую стратегию, которая является оптимальной для него относительно смешанной стратегии противника, в которую все применённые до текущего момента чистые стратегии противника входят пропорционально частотам их применения. Таблично метод можно представить следующим образом.

В первом столбце дан номер партии игры, во втором – номер выбранной в партии чистой стратегии первого игрока. Далее идут столбцы, содержащие средний выигрыш за сыгранные партии, при тех стратегиях, которые применяли игроки в предыдущих партиях и при стратегиях $B_1,\ldots, B_m$ второго игрока в данной партии.

Следующий столбец содержит номер чистой стратегии, выбранной первым игроком. В последующих столбцах даётся средний выигрыш за соответствующее число партий при чистых стратегиях $A_1,\ldots, A_n$ первого игрока. В последующих трёх столбцах даны: $\underline{I}$ - оценка нижнего значения игры; $\overline{I}$ - оценка верхнего значения игры; I – оценка значения игры. В таблице j_r - номер стратегии второго игрока, соответствующего значению $\overline{I}$ в r-ой строке таблицы, $r=\overline{1,s}$. i_1, как уже указывалось, выбирается произвольно, а i_r - номер стратегии первого игрока, соответствующего значению $\overline{I}$ в r-ой строке таблицы, $r=\overline{2,s}$. Если несколько номеров чистых стратегий соответствуют одному значению, то выбирается произвольный из них.

k	**i**	**B₁**	**…**	**Bₘ**	**j**	**A₁**	**…**	**Aₙ**	$\underline{I}$	$\overline{I}$	**I**
1	i_1	$c_{i_1 1}$	…	$c_{i_1 m}$	j_1	$c_{1 j_1}$	…	$c_{n j_1}$	$\min\limits_j c_{i_1 j}$	$\max\limits_i c_{i j_1}$	$\frac{\underline{I}+\overline{I}}{2}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	i_r	$\frac{\sum_{z=1}^{r} c_{i_z 1}}{r}$	…	$\frac{\sum_{z=1}^{r} c_{i_z m}}{r}$	j_r	$\frac{\sum_{z=1}^{r} c_{1 j_z}}{r}$	…	$\frac{\sum_{z=1}^{r} c_{n j_z}}{r}$	$\min\limits_j \frac{\sum_{z=1}^{r} c_{i_z 1}}{r}$	$\max\limits_i \frac{\sum_{z=1}^{r} c_{i j_z}}{r}$	$\frac{\underline{I}+\overline{I}}{2}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
s	i_s	$\frac{\sum_{z=1}^{s} c_{i_z 1}}{s}$	…	$\frac{\sum_{z=1}^{s} c_{i_z m}}{s}$	j_s	$\frac{\sum_{z=1}^{s} c_{1 j_z}}{s}$	…	$\frac{\sum_{z=1}^{s} c_{n j_z}}{s}$	$\min\limits_j \frac{\sum_{z=1}^{s} c_{i_z 1}}{s}$	$\max\limits_i \frac{\sum_{z=1}^{s} c_{i j_z}}{s}$	$\frac{\underline{I}+\overline{I}}{2}$

В качестве оценок вероятностей в оптимальной стратегии игрока берётся частота применения им соответствующей чистой стратегии. В качестве оценки значения игры – последнее значение I.

Можно доказать сходимость метода итераций: при увеличении числа партий средний выигрыш на одну партию будет стремиться к цене игры, а частоты применения стратегий – к их вероятностям в оптимальных смешанных стратегиях.

Пример. Найдём приближённое решение матричной игры с матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

за пять ходов.

Решение. Нижнее значение игры равно 2, верхнее равно 3. Игра не разрешима в чистых стратегиях. Доминирования стратегий отсутствует. Таблица поиска приближённого решения имеет вид

k	**i**	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{B_3}$	**j**	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	$\underline{I}$	$\overline{I}$	I
1	1	$\underline{2}$	3	4	1	2	3	$\overline{4}$	1	4	2,5
2	3	3	2,5	$\underline{2}$	3	3	$\overline{3}$	2	2	3	2,5
3	2	3	$\underline{1{,}66}$	2,33	2	$\overline{3}$	2	2	1,66	3	2,33
4	1	2,75	$\underline{2}$	2,75	2	$\overline{3}$	1,5	2	2	3	2,5
5	1	2,6	$\underline{2{,}2}$	3	2	$\overline{2{,}6}$	1,2	2	2,2	2,4	2,3

В результате: $p_1 \approx 0{,}6$, $p_2 \approx 0{,}2$, $p_3 \approx 0{,}2$, $q_1 \approx 0{,}2$, $q_2 \approx 0{,}6$, $q_3 \approx 0{,}2$, $I \approx 2{,}3$.

Задачи для самостоятельного решения

12. Найти приближённое, с точностью до двух десятичных знаков, решение матричной игры с матрицей $H = (h_{ij})_{nxm}$, если:

a) $H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

c) $H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.5. Конечные бескоалиционные игры

Как уже указывалось выше бескоалиционную игру можно задать тройкой $\Gamma = < I,\ \{A_i\}_{i\in I},\ \{H_i\}_{i\in I} >$, где I – множество игроков, A_i – множество чистых стратегий i-го игрока, H_i – функция выигрыша i-го игрока, $i\in I$. Рассмотрим конечную бескоалиционную игру, считая $|I| = n$, $A_i = \{A_i^1,...,A_i^{k_i}\}$, $i\in I$. Предположим, что игроки оперируют только чистыми стратегиями. Значение функции выигрыша $H_i(j_1,\ldots,j_n)$ определяет выигрыш i-го игрока в ситуации $(A_1^{j_1},...,A_n^{j_n})$. Поскольку выигрыш игрока зависит от поведения всех остальных игроков, то при выборе своей стратегии он должен учитывать все возможные ситуации. Наихудшей для игрока является ситуация, при которой все остальные игроки стремятся минимизировать его выигрыш. В этом случае i-ый игрок может гарантировать себе величину выигрыша равную

$$\underline{I}(i) = \min_{j_1}...\min_{j_{i-1}}\max_{j_i}\min_{j_{i+1}}...\min_{j_n} H_i(j_1,...,j_n)\,.$$

Но стремление минимизировать выигрыш i-го игрока у участников может возникнуть, только если $H_i = -H_j$ для всех $j\neq i$, или $H_i = -\sum_{j\neq i} H_j$. В этих случаях игра для i-го игрока может быть сведена к антагонистическим играм. В остальных случаях i-му игроку придерживаться “максиминной” стратегии не целесообразно.

Основной принцип оптимальности в бескоалиционной игре базируется на понятии ситуации равновесия по Нэшу. Ситуация $(A_1^{j_1*},...,A_n^{j_n*}),\ A_i^{j_i*}\in A_i$, называется ситуацией равновесия, если для всех $i\in I$, $H_i(j_1^*,...,j_n^*) \geq H_i(j_1^*,...,j_{i-1}^*,j_i,j_{i+1}^*,...,j_n^*)$, для любой чистой стратегии $A_i^{j_i} \in A_i \setminus A_i^{j_i^*}$. Это означает что в нарушении ситуации равновесия не заинтересован ни один из игроков. Поэтому стратегию игрока, входящую в ситуацию равновесия можно считать оптимальной.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в игре участвуют два игрока. Функции выигрышей игроков определяются матрицами H_1 и H_2 соответственно

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2543 \\ 3542 \\ 4125 \end{pmatrix},\quad H_2 = \begin{pmatrix} 4443 \\ 1554 \\ 5215 \end{pmatrix}\,.$$

Легко убедиться, что существуют ситуации равновесия: $(A_1^1,A_2^2),(A_1^1,A_2^3),(A_1^2,A_2^2),(A_1^2,A_2^3),(A_1^3,A_2^1),(A_1^3,A_2^4)$.

Заметим, что ситуация равновесия может отсутствовать в чистых стратегиях. Например, для игры двух игроков с матрицами выигрышей соответственно

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \ H_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ситуации равновесия нет.

Под смешанной стратегией игрока будем понимать, как и раньше, вероятностное распределение на множестве его чистых стратегий. Т.е., если $A_i = \{A_i^1, ..., A_i^{k_i}\}$, то смешанная стратегия i-го игрока есть вектор $p_i = (p_i^1, ..., p_i^{k_i}),\ \sum_{j=1}^{k_i} p_i^j = 1,\ p_i^j \geq 0,\ j = \overline{1, k_i}$. Рассмотрим смешанное расширение игры. Если игроки применяют свои смешанные стратегии, то их ожидаемые выигрыши определяются как математические ожидания

$$M_i(p_1, ..., p_n) = \sum_{j_1=1}^{k_1} ... \sum_{j_n=1}^{k_n} H_i(j_1, ..., j_n) \prod_{s=1}^{n} p_s^{j_s},\ i = \overline{1, n.}.$$

Ситуацию $(p_1^*, ..., p_n^*)$, определяемую смешанными стратегиями игроков, назовём ситуацией равновесия, если для всех $i \in I$

$$M_i(p_1^*, ..., p_n^*) \geq M_i(p_1^*, ..., p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, ..., p_n^*),$$

для любой смешанной стратегии $p_i \neq p_i^*$.

Существование решения в конечной бескоалиционной игре гарантирует **теорема Нэша**. Она утверждает, что любая конечная бескоалиционная игра n игроков имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Сам поиск решения можно осуществлять, используя следующий критерий для ситуации равновесия.

Ситуация в смешанных стратегиях $(p_1^*, ..., p_n^*)$ является ситуацией равновесия тогда и только тогда, когда для любого игрока $i \in I$ и любой его чистой стратегии A_i^j, $1 \leq j \leq k_i$, выполняется неравенство

$$M_i(p_1^*, ..., p_n^*) \geq M_i(p_1^*, ..., p_{i-1}^*, e_i^j, p_{i+1}^*, ..., p_n^*) \ .$$

То есть для поиска ситуации равновесия необходимо составить систему неравенств относительно векторов вероятностей $p_i = (p_i^1, ..., p_i^{k_i}),\ i \in I,\ j = \overline{1, k_i}$:

$$M_i(p_1,...,p_n) \ge M_i(p_1,...,p_{i-1},e_i^j,p_{i+1},...,p_n)\ ,\ i\in I,\ j=\overline{1,k_i},$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} p_i^j = 1,\ p_i^j \ge 0,\ i\in I,\ j=\overline{1,k_i}\ .$$

Количество неравенств в системе можно сократить, если знать какие чистые стратегии игрока, входят в ситуацию равновесия с неотрицательной вероятностью. В частности известно, что если стратегия p_i* игрока $i \in I$ входит в ситуацию равновесия p* и для его чистой стратегии A_i^j, $1 \le j \le k_i$, имеет место строгое неравенство $M_i(p_1^*,...,p_n^*) > M_i(p_1^*,...,p_{i-1}^*,e_i^j,p_{i+1}^*,...,p_n^*)$, то $p_i^j{*} = 0$. Откуда следует, что для всякой чистой стратегии A_i^j такой, что $p_i^j{*} > 0$ в ситуации равновесия p*, имеет место равенство $M_i(p_1^*,...,p_n^*) = M_i(p_1^*,...,p_{i-1}^*,e_i^j,p_{i+1}^*,...,p_n^*)$.

Пример. Решить биматричную игру (конечную бескоалиционную игру двух играков) с матрицами выигрышей

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ H_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

Решение. Для удобства обозначим стратегию первого игрока через (x, 1-x), стратегию второго игрока через (y, 1-y). **С**оставим систему неравенств относительно векторов вероятностей:

$2y + 3(1\text{-}y) \le 2xy + 3x(1\text{-}y) + 4(1\text{-}x)y + (1\text{-}x)(1\text{-}y)$
$4y + (1\text{-}y) \le 2xy + 3x(1\text{-}y) + 4(1\text{-}x)y + (1\text{-}x)(1\text{-}y)$
$4x + 3(1\text{-}x) \le 4xy + 2x(1\text{-}y) + 3(1\text{-}x)y + 5(1\text{-}x)(1\text{-}y)$
$2x + 5(1\text{-}x) \le 4xy + 2x(1\text{-}y) + 3(1\text{-}x)y + 5(1\text{-}x)(1\text{-}y)$
$x \ge 0, y \ge 0$.

После простого приведения каждого из неравенств система примет вид:

$-4(1\text{-}x)y + 2(1\text{-}x) \le 0$
$4xy - 2x \le 0$
$4(1\text{-}y)x - 2(1\text{-}y) \le 0$
$-4xy + 2y \le 0$
$x \ge 0, y \ge 0$.

Сложив первое и третье неравенства, получим $x \le y$. Сложив второе и четвёртое неравенства, получим $x \ge y$. Отсюда $x = y$.

Складывая первое и четвёртое неравенства, имеем $x \ge 1\text{-}y$. Складывая второе и третье неравенства, имеем $x \le 1\text{-}y$. Что влечёт $x \le 1\text{-}y$. Следовательно, $x = 1\text{-}y$.

Окончательно $x = 0{,}5$, $y = 0{,}5$.

Таким образом ситуацию равновесия образует пара смешанных стратегий: первого игрока (0,5 , 0,5), второго игрока (0,5 , 0,5).

Задачи для самостоятельного решения

13. Две радиостанции могут работать на трёх частотах. Каждая из радиостанций независимо от другой выбирает одну рабочую частоту. Если радиостанции работают на одной частоте, каждая из них теряет половину своей радиоаудитории. Описать биматричную игру и найти все ситуации равновесия.

14. Найти множество всех ситуаций равновесия в биматричных играх с матрицами выигрышей:

a) $H_1 = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

b) $H_1 = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $H_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

15. В биматричной игре найти хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6. Конечные позиционные игры

Позиционная игра это игра, имеющая характер развёртывающегося в дискретном времени процесса на древовидно упорядоченном множестве (называемом также деревом). *Конечной позиционной игрой* называется система $\Gamma = < I, X, \Re, \{P_x\}_{x \in X_0}, \{\Re_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} >$, где: 1) I – множество игроков ($|I| = n$); 2) X – конечное ориентированное дерево, вершины которого называются позициями, а корень – начальной позицией. Для позиций естественно определяется отношение следования; позиции, непосредственно следующие за данной позицией $x \in X$, называются альтернативами x; позиции, не имеющие альтернатив, называются окончательными, а ведущие в них пути из корня – партиями; множество окончательных позиций обозначим X^* ; 3) $\Re$ - разбиение множества $X \backslash X^*$ на n+1 множеств очерёдности X_0 , X_1 ,…, X_n. В позициях из X_i , $i > 0$, ход осуществляется игроком i, в позициях из X_0 – случайно; 4) P_x – вероятностные распределения на множествах альтернатив каждой позиции $x \in X_0$; 5) $\Re_i = \{U_1^i, U_2^i, ..., U_{m_i}^i\}$ - разбиение каждого X_i, $i > 0$. Предполагается, что все позиции x из данного подмножества U_k^i имеют одинаковое число альтернатив и никакие две из них не следуют друг за другом; множества U_k^i называются информационными. Между альтернативами всех позиций одного информационного множества установлено однозначное соответствие, и каждый его класс называется альтернативой самого информационного множества; 6) H_i – функция, ставящая в соответствие каждой окончательной позиции выигрыш в нем игрока i.

Чистой стратегией игрока i в позиционной игре является функция, ставящая в соответствие каждому информационному множеству U_k^i некоторую его альтернативу. Набор n чистых стратегий всех игроков составляют ситуацию. Процесс игры в условиях сложившейся ситуации можно понимать как случайное блуждание по множеству позиций от начальной позиции к окончательной, причём в каждой позиции игрок, множеству очерёдности которого принадлежит эта позиция, знает лишь содержащее её информационное множество и выбирает альтернативу в соответствии со своей стратегией. В позициях из X_0 выбор альтернативы случаен. Это случайное блуждание определяет вероятностное распределение на множестве окончательных позиций. В позиционной игре выигрыш каждого игрока определяется складывающейся ситуацией, т.е. выбором стратегий всеми игроками. Поэтому такие игры относятся к числу бескоалиционных игр. Принимая за выигрыш игрока математическое ожидание его выигрыша на окончательных позициях, получим бескоалиционную игру в нормальной форме, т.е. для каждой совокупности n чистых стратегий всех игроков указывается возможный выигрыш каждого игрока.

Дерево позиционной игры обычно размечают: вершине приписывают метку, совпадающую с индексом множества очерёдности, которому принадлежит соответствующая вершине позиция; дуге – обозначение альтернативы, в которую ведёт дуга. Т.е. метка вершины указывает номер игрока, делающего очередной ход в игре, метка дуги указывает реализуемую в результате хода альтернативу. На дугах, выходящих из вершин с пометкой 0, кроме пометок альтернатив, ставятся также вероятности осуществления соответствующей альтернативы.

Позиционная игра называется игрой с полной информацией, если информационные множества игроков состоят каждое из одной позиции.

Любая конечная позиционная игра с полной информацией имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях.

Пример 1. Игра состоит из трех ходов, которые делают два игрока. Первый ход делает первый игрок: он выбирает число x из множества $\{1,2\}$.

Второй ход делает второй игрок: он, зная, какое число x выбрано первым игроком, выбирает число y так же из множества $\{1,2\}$.

Третий ход делает первый игрок: зная, что он сделал на первом ходе и что сделал второй игрок, игрок выбирает z из $\{1,2\}$. Игра заканчивается и происходит распределение выигрышей по значению $H_1(x, y, z) =(-1)^{x+y}z$, $H_2(x, y, z) = x + y - z$.

Решение. Дерево игры представлено на рисунке 5. Каждая позиция игрока является его информационным множеством. Поэтому получаем игру с полной информацией. Рассмотрим сначала все чистые стратегии второго игрока. У него две возможности выбора из $\{1,2\}$, кроме того, выбирая свой ход, он может учитывать или не учитывать информации о том, что сделано первым игроком, какое x выбрано на предыдущем ходе, т.е. у него 4 стратегии: 1-я – выбирать $y = 1$, не взирая на значение x; 2-я – выбирать $y = 2$, не взирая на значение x; 3-я – выбирать $y = x$; 4-я – выбирать $y \neq x$.

Чистая стратегия первого игрока должна учитывать результаты сделанных ранее ходов. При каждом выборе на 1-м ходе может быть два варианта на 2-м ходе, т.е. 4 варианта, и при каждом из этих вариантов может быть сделано два выбора, т.е. всего 8 возможных стратегий. Обозначим стратегию первого игрока через (i, i_1, i_2), где

i – выбор игрока на первом ходе;

i_1 – выбор игрока на третьем ходе, если второй игрок выбрал 1;

i_2 – выбор игрока на третьем ходе, если второй игрок выбрал 2.

Функции выигрышей игроков можно задать следующими матрицами:

H_1:

	1	2	3	4
(1,1,1)	1	-1	1	-1*
(1,1,2)	1	-2	1	-2
(1,2,1)	2	-1	2	-1*
(1,2,2)	2	-2	2	-2
(2,1,1)	-1	1	1	-1*
(2,1,2)	-1	2	2	-1*
(2,2,1)	-2	1	1	-2
(2,2,2)	-2	2	2	-2

H_2:

	1	2	3	4
(1,1,1)	1	2	1	2
(1,1,2)	1	1	1	1
(1,2,1)	0	2	0	2
(1,2,2)	0	1	0	1
(2,1,1)	2	3	3	2
(2,1,2)	2*	2	2	2*
(2,2,1)	1	3	3	1
(2,2,2)	1	2	2	1

Матрица выигрышей первого игрока имеет четыре седловые точки, матрица выигрышей второго игрока – две седловые точки (отмечены *). Пары чистых стратегий игроков ((1,1,1), 4), ((1,2,1), 4), ((2,1,2), 4), определяют ситуации равновесия в исходной позиционной игре.

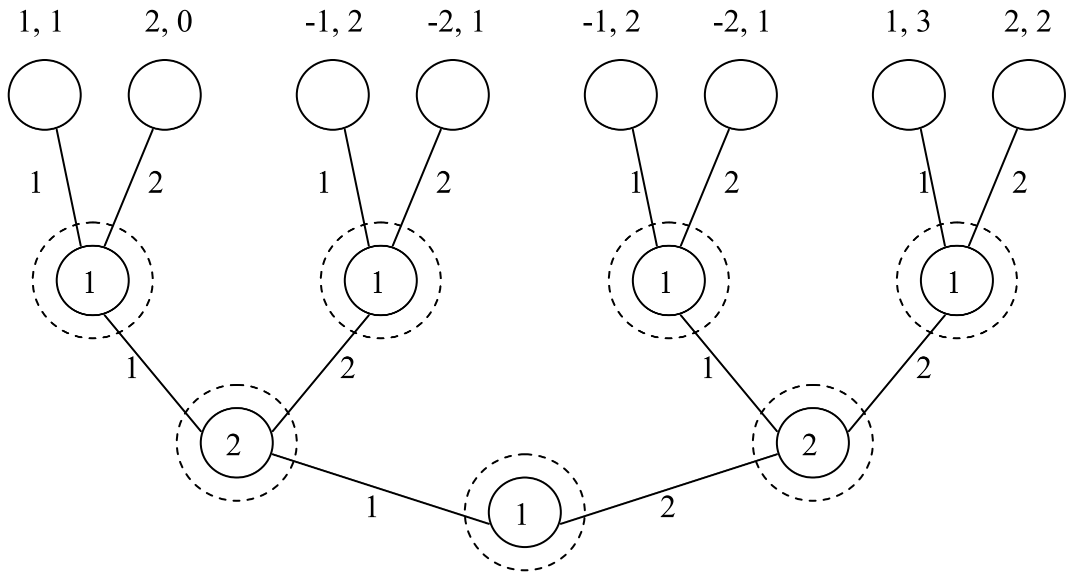


Рис. 5.

Пример 2. Первый ход производится случайно: выбирается $x = 1$ с вероятностью 0,5 или $x = 2$ с вероятностью 0,5.

Второй ход делает первый игрок. Зная, какое число x выбрано, он выбирает число y из $\{1,2\}$.

Третий ход делает второй игрок: не зная x, но зная y, он выбирает число z из $\{1,2\}$.

Выигрыши игроков определяются так же как в первом примере: $H_1(x, y, z) = (-1)^{x+y}z$, $H_2(x, y, z) = x + y - z$.

Решение. Дерево игры будет иметь вид, представленный на рисунке 6.

Первый игрок имеет два информационных множества, каждое из которых состоит из одной позиции. Второй игрок имеет также два информационных множества, но каждое из них содержит две позиции.

Определим, стратегии первого игрока: 1-я – выбирать $y = 1$ независимо от выбора x; 2-я – выбирать $y = 2$ независимо от выбора x; 3-я – выбирать $y = x$; 4-я – выбирать $y \neq x$.

Стратегии второго игрока: 1-я – выбирать $z = 1$ независимо от y; 2-я – выбирать $z = 2$ независимо от y; 3-я – выбирать $z = y$; 4-я – выбирать $z \neq y$.

Как считать выигрыши игроков. Пусть, например, первый игрок применяет стратегию 1, а второй игрок – 4-ю. Надо различать тогда два случая: а) $x = 1$; б) $x = 2$. Если $x = 1$, первый игрок выбирает $y = 1$ и тогда второй игрок выбирает $z = 2$ выигрыш $H_1 = 2$, $H_2 = 0$.

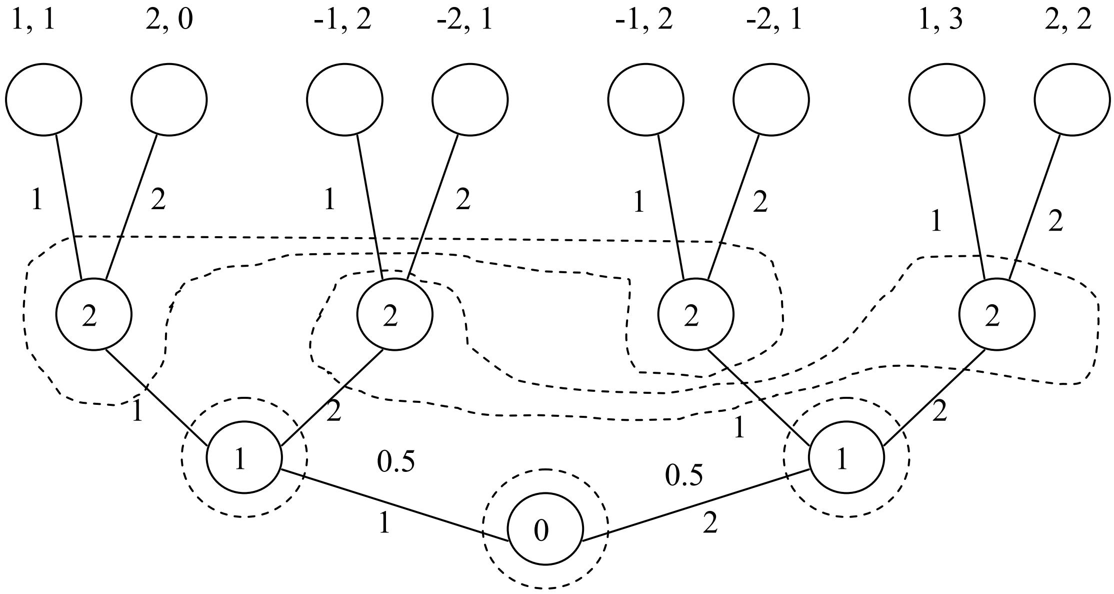


Рис. 6.

Если $x = 2$, первый игрок выбирает $y = 1$, а второй – $z = 2$, и получаем выигрыш $H_1 = -2$, $H_2 = 1$.

Поскольку x выбирается случайно, то средний выигрыш первого игрока будет равен $2 \cdot 0.5 - 2 \cdot 0.5 = 0$, средний выигрыш второго игрока равен $0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0.5$ Матрицы выигрышей будут иметь вид:

H_1:

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	1*	2	1.5	1.5
4	-1	-2	-1.5	-1.5

H_2:

	1	2	3	4
1	1.5	0.5	1.5	0.5
2	2.5	1.5*	2.5	1.5*
3	2	1	1.5	1.5
4	2	1	1.5	1.5

В данной игре матрица выигрышей первого игрока имеет одну седловую точку, матрица выигрышей второго игрока – две седловые точки (отмечены *). Игра имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях, определяемую парой чистых стратегий (3,1).

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 16 – 19 представить игру в виде дерева с узлами-позициями, указать стратегии, информационные множества игроков и матрицы ожидаемых выйгрышей.

16. Первый игрок выбирает число x из множества $\{1, 2\}$. Затем случайный механизм выбирает число y из множества $\{1, 2\}$. С вероятностью 0,2 число 1 и с вероятностью 0,8 число 2. В игру вступает второй игрок. Зная выбранные x и y, он выбирает z из множества $\{1, 2\}$. После трёх ходов первый игрок выигрывает $H(x, y, z) = (-1)^{x+z}\, y$, что является проигрышем второго игрока.

17. Первый игрок выбирает число x из множества $\{1, 2\}$. Затем второй игрок, не зная x выбирает число y из множества $\{1, 2\}$. Далее случайный механизм выбирает число z из множества $\{1, 2\}$. Причём с вероятностью $0 < \alpha < 1$ выбирается 1 и с вероятностью $(1- \alpha)$ число 2. После того, как выбраны x, y, z первый игроки выигрывают соответственно $H_1(x, y, z) = (-1)^{x+z}\, y$ и $H_2(x, y, z) = x + z - y$.

18. (Упрощенный вариант покера). В игре участвуют два игрока P_1, P_2. В начале игры каждый игрок делает единичную ставку на “кон”. Колода карт, содержащая m картинок и n карт без картинок, тасуется, и одна из карт сдаётся первому игроку. Посмотрев на свою карту, игрок может спасовать или поставить некоторую сумму a. Если игрок P_1 пасует, игра на этом прекращается: игрок выигрывает единицу, если у него картинка, и проигрывает, если у него карта без картинки. Если игрок увеличивает ставку, то второй игрок, не зная карты первого игрока, должен решить: пасовать ему или поднимать ставку? Если второй игрок пасует, первый игрок выигывает ставку (единицу). Если P_2 поднимает ставку, то карты открываются и первый игрок выигрывает $(1+a)$, если у него картинка, и проигрывает $(1+a)$ при карте без картинки.

19. Игрок P_1 передвигает фишки с ноликами, игрок P_2 – фишку с крестиком. Правом снятия фишек обладает только игрок P_2. Ходы и снятие фишки делаются по правилам шашек. Если фишка игрока P_1 достигает линии d, она становится дамкой. Партия заканчивается выйгрышем игрока P_2, если он довёл фишку до линии a, и выйгрышем игрока P_1, если фишка игрока P_2 не достигла линии a и P_2 не может сделать ход.

	1	2	3	4
a	0		0	
b				
c	0			
d		*		

Рассмотреть случаи, когда игру начинает игрок P_1, и когда начинает P_2, и случай, когда в начальной позиции фишка игрока P_2 стоит в поле d4.

2.7. Кооперативные игры

Рассмотрим конечную бескоалиционную игру $\Gamma = < I, \{A_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} >$. Любое непустое подмножество $S \subset I$ называем коалицией интересов или просто коалицией. Образовав коалицию, множество игроков S действует как один игрок против остальных игроков с целью увеличения своего выигрыша. Множество чистых стратегий коалиции S будет декартово произведение множеств чистых стратегий играков коалиции $A_S = \prod_{i \in S} A_i$.

Выигрыш коалиции есть сумма выигрышей игроков из S, т.е. $H_S = \sum_{i \in S} H_i$.

Наибольший гарантированный выигрыш для коалиции S может быть получен из наихудшей для коалиции ситуации, когда оставшиеся игроки образуют коалицию $I \setminus S$ с множеством чистых стратегий $A_{I|S} = \prod_{i \in I|S} A_i$ и функцией выигрышей равной $-H_S$. То есть в антоганистической игре $\Gamma_S = < A_S, A_{I \setminus S}, H_S >$ двух игроков, первый из которых – коалиция S, второй - коалиция $I \setminus S$. В силу теоремы фон Неймана игра Γ_S имеет решение. Обозначим значение игры (выигрыш первого игрока) через $v_\Gamma (S)$. Очевидно, что для исходной бескоалиционной игры Γ значение $v_\Gamma (S)$ зависит только от коалиции S. То есть $v_\Gamma (S)$ является функцией коалиций. Укажем свойства этой функции.

1) *Персональность* $v_Г$ ($\varnothing$) = 0, коалиция, не содержащая ни одного игрока, ничего не выигрывает.

2) *Супераддитивность*

$$v_Г(S \cup T) \geq v_Г(S) + v_Г(T) \ \forall \ S, T \subset I \, , S \cap T = \varnothing \, ,$$

то есть общий выигрыш коалиции не меньше суммарного выигрыша всех участников коалиции.

3) *Дополнительность*. Бескоалиционную игру $Г=< I, \ \{A_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}>$ называют игрой с постаянной суммой, если

$$\sum_{i \in I} H_i(j_1, j_2,..., j_n) = c = \text{const}$$

для всех ситуаций в чистых стратегиях $(A_1^{j_1},..., A_n^{j_n})$, $A_i^{j_i} \in A_i, i \in I.$ Для игры с постаянной суммой имеет место равенство

$$v_Г(I) = v_Г(S) + v_Г(I \setminus S) \ \forall \ S \subset I.$$

Любую функцию, заданную на всех подмножествах конечного множества игроков I и удовлетворяющую свойствам персональности и супераддитивности, называют *характеристической функцией*. Известно, что если для конечного множества игроков I задана характеристическая функция $v(S)$, $S \subseteq I$, то существует бескоалиционная игра $Г = < I, \ \{A_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}>$, у которой функция $v_Г(S)$, $S \subseteq I$, совпадает с функцией $v(S)$, $S \subseteq I$. При этом, если характеристическая функция обладает свойством дополнительности, то существует бескоалиционная игра с постоянной суммой, для которой $v_Г(S) = v\,(S)$, $S \subseteq I$.

Таким образом исследование игр, в которых возможно образование коалиций, эквивалентно исследованию характеристичеких функций, заданных на 2^I. Поэтому *коперативной игрой* называется пара $<I\,, v>$, где I – конечное множество играков, v – характеристическая функция, сопостовляющая каждой коалиции $S \subseteq I$ некоторую числовую оценку $v(S)$. Кооперативная игра называется *существенной*, если имеет место неравенство

$$\sum_{i \in I} v(i) < v(I)\,.$$

Если это неравенство нарушается, то игра называется *несущественной*.

В бескоалиционной игре выигрыш каждого игрока определяется ситуацией, определяемой действиями игроков. В кооперативной игре реч идёт о выигрыше коалиции, который необходимо распределить между игроками. В силу супераддитивности наибольший выигрыш $v(I)$ будет иметь коалиция всех играков.

Дележом кооперативной игры в условиях характеристической функции v называют вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющий условию *индивидуальной рациональности*

$$\alpha_i \geq v(i),\ i \in I,$$

означающему, что каждый игрок, участвуя в коалиции обеспечивает себе выигрыш не меньший, чем выигрыш при индивидуальном действии, и условию *коллективной рациональности*

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = v(I)\ ,$$

означающему, что игроки должны реализовать максимально возможный выигрыш.

Непосредственно из определения дележа следует, что вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots ,\alpha_n)$ является дележом в кооперативной игре $(I\ , v)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i = v(i) + \gamma_i\ ,\ i \in I\ ,$$

где $\gamma_i \geq 0,\ i \in I\ ,\ \sum_{i \in I} \gamma_i = v(I) - \sum_{i \in I} v(i)$.

Справедливы следующие свойства:

1) в несущественной игре имеется только один делёж

$$(v(1), v(2),\ldots, v(n));$$

2) в существенной игре более чем с одним игроком множество дележей бесконечно.

Для формализации понятия оптимального решения в кооперативной игре на множестве всех дележей можно ввести отношение предпочтения, с дальнейшим объявлением решением того дележа или того множества дележей, которое является предпочтительнее остальных.

Эксцессом дележа α для коалиции S в условиях характеристической функции v называется разность $e_v(\alpha, S) = v(S) - \alpha(S)$. Здесь $v(S) = \sum_{i \in S} v(i),\ \alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha(i)$. Эксцесс можно понимать как степень неудовлетворённости коалиции S дележом α в условиях v. Дележи с неотрицательными эксцессами можно считать осуществимыми. Делёж α называется *эффективным* для коалиции S в условиях характеристической функции v, если $e_v(\alpha, S) > 0$. Неэффективность дележа для коалиции означает невозможность его изменения коалицией в лучшую для себя сторону. Делёж не являющийся эффективным ни для какой коалиции (*абсолютно неэффективный*), может квалифицироваться как оптимальный.

Введём на множестве дележей кооперативной игры $<I, v>$ отношение предпочтения.

Делёж *α доминирует* делёж *β по коалиции S*, если выполняются следующие два условия:

1) *реализуемость* доминирующего дележа для коалиции S:

$$\alpha(S) \le v(S);$$

2) *предпочтительность* доминирующего дележа:

$$\alpha_i > \beta_i \ \forall \ i \in S.$$

Делёж *α доминирует* делёж *β*, если существует такая коалиция S, по которой делёж α доминируется дележом β.

Множество недоминируемых дележей в кооперативной игре $<I, v>$, называется её *c-ядром*.

Для того, чтобы делёж α принадлежал c-ядру кооперативной игры $<I, v>$, необходимо и достаточно, чтобы он был абсолютно неэффективен, то есть чтобы выполнялись неравенства $e_v(\alpha, S) \le 0$.

Во всякой существенной игре со свойством дополнительности c-ядро пусто.

Решением по Нейману-Моргенштерну (*Н-М-решением*) кооперативной игры называется множество дележей L, обладающее свойствами:

1) *внутренняя устойчивость*: никакие два дележа из L не доминируют друг друга:

2) *внешняя устойчивость*: если делёж $\beta \notin L$, то найдётся делёж $\alpha \in L$, который доминирует β.

Между c-ядром и её *Н-М*-решением имеется простая связь: если в кооперативной игре существуют c-ядро и *Н-М*-решение, то c-ядро содержится в *Н-М*-решении.

Н-М-решение существенной кооперативной игры содержит более одного дележа.

С целью систематизации исследования кооперативных игр вводится понятие стратегически эквивалентных игр. Кооперативная игра $<I, v>$ *стратегически эквивалентна* игре $<I, v'>$, если найдутся такое $k > 0$ и c_i, $i \in I$, что имеют место равенства:

$$v'(S) = k\, v(S) + \sum_{i \in S} c_i \ , \ \forall\, S \subset I.$$

Отношение стратегической эквивалентности является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Поэтому множество всех кооперативные игры единственным образом распадается на попарно непересекающиеся классы стратегически эквивалентных игр.

Кооперативная игра <I , v> имеет (*0-1*)*-редуцированную форму*, если для характеристической функции выполняются равенства $v(i) = 0$, $i \in I$, $v(I) = 1$.

Кооперативная игра называется *нулевой*, если все значения её характеристической функции равны нулю.

Известно, что каждая существенная кооперативная игра стратегически эквивалентна обной и только одной игре в 0-1-редуцированной форме, а каждая несущественная игра стратегически эквивалентна нулевой. Отсюда следует, что свойства кооперативных игр можно изучать, ограничившись играми в (0,1)-редуцированной форме.

Приведём примеры поиска параметров кооперативных игр.

Пример. Директор клуба может за выступление на вечере заплатить 100 у.е. трио, включающее певца, пианиста и ударника. Дуэт пианиста и певца он оценивает в 80 у.е., ударника и пианиста - в 65 у.е., певца и ударника – в 50 у.е., одного пианиста – в 30 у.е. и , наконец, одного певца – в 20 у.е.

Необходимо задать характерестическую функцию игры, найти c-ядро, (0-1)-редуцированную игру стратегически эквивалентную полученной кооперативной игре.

Решение. Пусть певец, пианист и ударник, соответственно первый, второй и третий игроки. Тогда $I = \{1,2,3\}$, а характерестическая функция v принимает значения: $v(\varnothing) = 0$, $v(1) = 20$, $v(2) = 30$, $v(3) = 0$, $v(1,2) = 80$, $v(1,3) = 50$, $v(2,3) = 65$, $v(1,2,3) = 100$.

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ принадлежит c-ядру тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$\alpha_1 \geq 20$, $\alpha_2 \geq 30$, $\alpha_3 \geq 0$,

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 80$, $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 50$, $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 65$,

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100$.

Выразив α_3 через α_1, α_2 , получим, что c-ядро представляет из себя выпуклую оболочку трёх дележей (30, 50, 20), (35, 45, 20), (35, 50, 15).

Возьмём в качестве коэффициентов для получения (0-1)-редуцированной формы, величины, вычисляемые по следующим формулам:

$$k = \frac{1}{v(I) - \sum_{i \in I} v(i)} > 0\ ,\ c_i = -\frac{v(i)}{v(I) - \sum_{i \in I} v(i)}\ ,\ i \in I\ ,\ v'(S) = k\,v(S) + \sum_{i \in S} c_i\ .$$

Для нашего примера получим: $k = 0{,}02$, $c_1 = -0{,}4$, $c_2 = -0{,}6$, $c_3 = 0$.

Характеристическая функция (0-1)-редуцированной формы примет вид: $v'(\varnothing) = 0$, $v'(1) = 0$, $v'(2) = 0$, $v'(3) = 0$, $v'(1,2) = 0{,}6$, $v'(1,3) = 0{,}6$, $v'(2,3) = 0{,}7$, $v'(1,2,3) = 1$.

c-ядро (0-1)-редуцированной формы представляет из себя выпуклую оболочку трёх дележей (0,2; 0,4; 0,4), (0,3; 0,3; 0,4), (0,3; 0,4; 0,3).

Пример. Для игры $<I , v>$ трёх лиц с характерестической функцией:

$v(\varnothing) = 0$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$,

$v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1$,

найти какое-либо *Н-М*-решение.

Решение. Отметим, что данная игра находится в (0,1)-редуцированной форме. Поэтому дележём будет являться любой вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, удовлетворяющий условиям:

$\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Отметим также, что в этой игре отсутствует доминирование по коалициям из одного игрока и по коалиции всех трёх игроков. То есть доминирование возможно только по коалициям из двух игроков.

Рассмотрим дележи L_{1c} , у которых первый игрок получает один и тот же выигрыш, равный c. Возьмём два произвольных дележа из L_{1c} : $\alpha=(c, \alpha_2, 1- c - \alpha_2)$, $\beta = (c, \beta_2, 1- c - \beta_2)$. Доминирование по коалициям {1,2}, {1,3} невозможны из-за равенства первых компонент дележей. Доминирование по коалиции {2,3} невожможно, так как если $\alpha_2 > \beta_2$, то $1- c - \alpha_2 < 1- c - \beta_2$. Поэтому множество дележей L_{1c} внутренне устойчиво.

Укажем достаточные условия внешней устойчивости L_{1c} . Пусть делёж $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \notin L_{1c}$. Тогда, либо $\gamma_1 > c$, либо $\gamma_1 < c$. В первом случае $\gamma_1 = c + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Делёж $\alpha=(c, \gamma_2 + \varepsilon /2, \gamma_3 + \varepsilon /2)$ принадлежит L_{1c} и доминирует γ по коалиции {2,3}. Во втором случае получим, что выполняются одно или оба из неравенств:

$\gamma_2 \leq ½$, $\gamma_3 \leq ½$.

При это, если $c \in [0, ½]$, то при $\gamma_2 \leq ½$, делёж $\alpha=(c, 1- c , 0)$ доминирует делёж γ по коалиции {1,2}. При $\gamma_3 \leq ½$, делёж $\alpha=(c, 0 , 1- c)$ доминирует делёж γ по коалиции {1,3}.

Следовательно, условие $c \in [0, ½]$ является достаточным для внешней устойчивости L_{1c} .

Таким образом, получаем, что множество L_{1c} является *Н-М*-решением рассматриваемой игры.

Аналогично получим, что множества L_{2c} , L_{3c} являются *Н-М*-решениями.

Задачи для самостоятельного решения

20. Построить характеристическую функцию для следующей игры. Каждый из игроков выбирает число из множества {1, 2} и получает выигрыш согласно следующему правилу:

$H_1(1,1,1) = 1$, $H_2(1,1,1) = 1$, $H_3(1,1,1) = -2$,
$H_1(1,1,2) = -1$, $H_2(1,1,2) = -1$, $H_3(1,1,2) = 2$,
$H_1(1,2,1) = 1$, $H_2(1,2,1) = 1$, $H_3(1,2,1) = -2$,
$H_1(1,2,2) = -1$, $H_2(1,2,2) = -1$, $H_3(1,2,2) = 2$,
$H_1(2,1,1) = -1$, $H_2(2,1,1) = -1$, $H_3(2,1,1) = 2$,
$H_1(2,1,2) = 1$, $H_2(2,1,2) = 1$, $H_3(2,1,2) = -2$,
$H_1(2,2,1) = -1$, $H_2(2,2,1) = -1$, $H_3(2,2,1) = 2$,
$H_1(2,2,2) = 1$, $H_2(2,2,2) = 1$, $H_3(2,2,1) = -2$.

21. Найти характеристическую функцию игры в 0-1-редуцированной форме для игры со следующей характеристической функцией:
$v(\varnothing) = 0$, $v(1) = -1$, $v(2) = -2$, $v(3) = -2$, $v(4) = 0$,
$v(1,2) = v(1,3) = v(1,4) = v(2,3) = v(2,4) = v(3,4) = 0$,
$v(1,2,3) = 0$, $v(1,2,4) = 2$, $v(1,3,4) = 2$, $v(2,3,4) = 1$, $v(1,2,3,4) = 0$.

22. Найти *c*-ядро в следующих кооперативных играх $<I, v>$ трёх лиц:

а) $v(I) = 9$, $v(2,3) = 7$, $v(1,3) = v(1,2) = 4$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$;

b) $v(I) = 8$, $v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = 6$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$.

с) $v(I) = v(1,3) = v(2,3) = 6$, $v(S) = 0$ для остальных коалиций S.

22. Игра, называемая «один лишний», проводится следующим образом: каждый из трёх игроков выбирает число из множества $\{1,2\}$. После этого распределяются выигрыши по следующему правилу: если все игроки выбрали одинаковые числа, то ничья, никто из игроков не выигрывает. Если два игрока выбрали одинаковые значения, а третий выбрал число отличное от этого значения, то он проигрывает две единицы, а противники выигрывают по единице.

Найти характеристическую функцию этой игры.

23. Пусть характеристическая функция игры пяти игроков задана следующим образом:
$v(\varnothing) = 0$, $v(i) = -1 \ \forall\ i \in I$, $v(S) = 0 \ \forall\ S \subset I$, $|S| = 2$,
$v(S) = 0 \ \forall\ S \subset I$, $|S| = 3$, $v(S) = 1 \ \forall\ S \subset I$, $|S| = 4$,
$v(I) = 0$.
Покажите, что каждый из двух дележей $\alpha = (-0{,}1;\ -0{,}1;\ -0{,}2;\ -0{,}2;\ 0{,}6)$,
$\beta = (-0{,}2;\ -0{,}2;\ -0{,}1;\ -0{,}1;\ 0{,}6)$ предпочтительнее другого.

24. Найти *Н-М*-решение игры трёх игроков с характеристической функцией:
$v(\varnothing) = 0$, $v(1) = -4$, $v(2) = -3$, $v(3) = -8$,
$v(1,2) = 8$, $v(1,3) = 3$, $v(2,3) = 4$, $v(1,2,3) = 0$.

25. Доказать, что в кооперативной игре трёх лиц <I , v> неравенство $v\,(1,2) + v\,(1,3) + v\,(2,3) \leq 2v(1,2,3)$ является необходимым и достаточным условием непустоты ядра.

26. Пусть c-ядро имеет непустое пересечение со всеми гранями α_i=$v(i)$, $i \in I$. Показать, что в этом случае c-ядро является единственным *Н-М*-решением.

ЛИТЕРАТУРА

Крушевский, А.В. Теория игр / А.В. Крушевский. Киев.: Издательское объединение «Вища школа», 1977. 216 с.

Моисеев, Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. М.: Наука, 1981. 488 с.

Воробьёв, Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н.Н. Воробьёв. М.: Наука, 1985. 272 с.

Морозов, В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях / В.В. Морозов, А.Г. Сухарев, В.В. Фёдоров. М.: Высш. шк., 1986. 287 с.

Давыдов, Э.Г. Исследование операций: Учебн. пособие для студентов вузов / Э.Г. Давыдов. М.: Высш. шк., 1990. 383 с.

Петросян, Л.А. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. 304 с.

Бахтин, В.И. Исследование операций: Курс лекций / В.И. Бахтин, А.П. Коваленок, А.В. Лебедев, Ю.В. Лысенко. Мн.: БГУ, 2003. 199 с.

Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание / Хемди А. Таха. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с.

Морозов, В.В. Исследование операций / В.В. Морозов, А.А. Васин, П.С. Краснощёков. М.: Academia, 2008. 464 с.

Костевич, Л.С. Исследование операций. Теория игр : учеб. пособие / Л.С. Костевич, А.А. Лапко. 2-е изд., прераб. и доп. Минск: Выш. шк., 2008. 368 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики

В трёх частях

Часть 1. Математические модели. Теория игр

А в т о р ы – с о с т а в и т е л и
Исаченко Александр Николаевич
Дробушевич Любовь Фёдоровна

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *А. Н. Исаченко*

Подптсано в печать .06.2010. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л.___. Уч.-изд. л. ____. Тираж 50 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
Лицензия на осуществление издательской деятельности
№ 02330/0056804 от 02.03.2004.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск

Отпечатано с оригинал-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
(Пр. Независимости, 4, 220030, Минск)