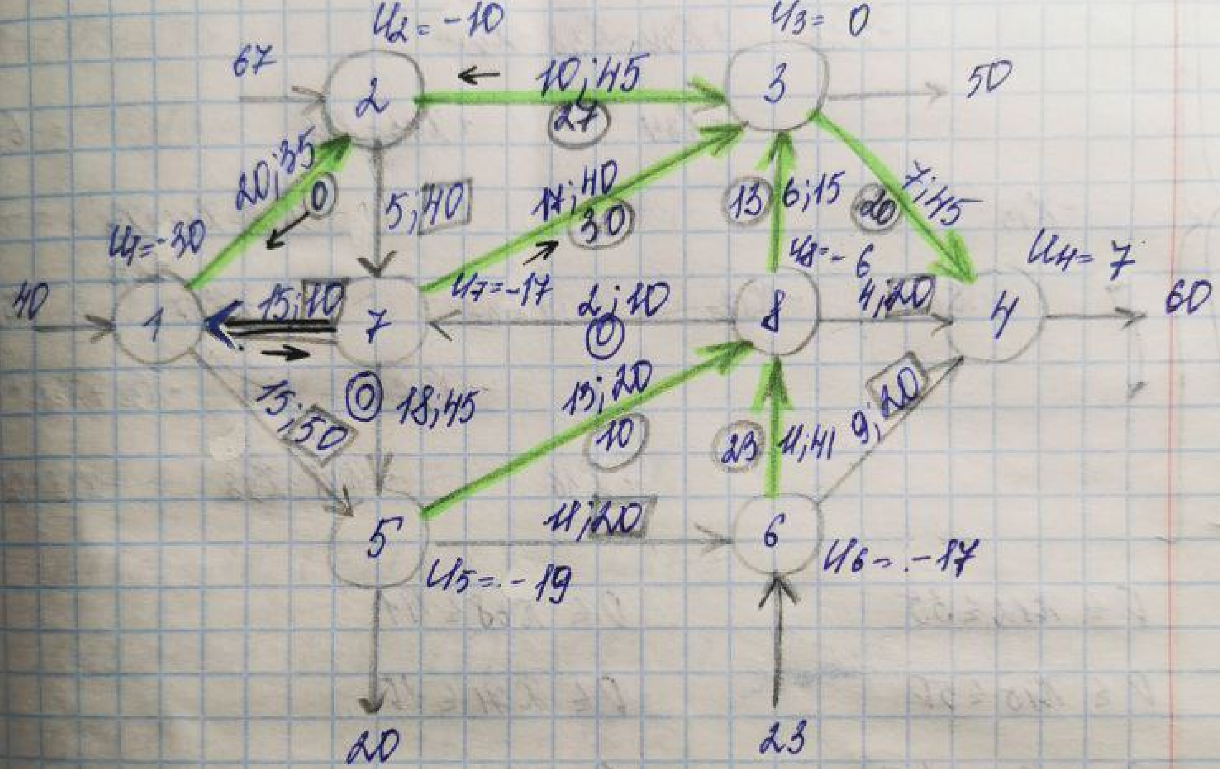
N 3.5 а-7, б-12

1)



1,2,6 - источники; 3,4,5 - стоки

7,8 - нейтральные узлы

Проверим условие баланса:

$$40+67+23=50+60+20$$

$$130=130 \Rightarrow \text{задача закрыта}$$

$$20x_{12}+15x_{15}+10x_{23}+5x_{27}+7x_{34}+9x_{46}+11x_{56}+$$
$$+13x_{58}+11x_{68}+15x_{71}+17x_{73}+18x_{75}+6x_{83}+$$
$$+4x_{84}+2x_{87}\to\min$$

$$
\begin{cases}
x_{12} + x_{15} - x_{17} = 40 \\
-x_{12} + x_{23} + x_{27} = 67 \\
-x_{23} + x_{34} - x_{38} - x_{37} = -50 \\
-x_{34} + x_{46} - x_{48} = -60 \\
-x_{15} + x_{58} - x_{57} + x_{56} = -20 \\
x_{17} - x_{27} + x_{37} + x_{57} - x_{78} = 0 \\
-x_{46} - x_{56} + x_{68} = 23 \\
+x_{38} + x_{48} - x_{58} - x_{68} + x_{78} = 0
\end{cases}
$$

$0 \le x_{12} \le 35$ $\quad$ $0 \le x_{68} \le 41$

$0 \le x_{15} \le 50$ $\quad$ $0 \le x_{71} \le 10$

$0 \le x_{23} \le 45$ $\quad$ $0 \le x_{73} \le 40$

$0 \le x_{27} \le 40$ $\quad$ $0 \le x_{75} \le 15$

$0 \le x_{34} \le 45$ $\quad$ $0 \le x_{83} \le 15$

$0 \le x_{46} \le 20$ $\quad$ $0 \le x_{84} \le 20$

$0 \le x_{56} \le 20$ $\quad$ $0 \le x_{87} \le 10$

$0 \le x_{58} \le 20$

2) Прямой метод потенциалов

$u_i - u_j = -l_{ij}$; $\Delta_{ij} = -l_{ij} - (u_i - u_j)$

Итерация 1.

$= 40$

$= 67$

$= -50$

$= -60$

$\ldots + x_{56} = -20$

$-x_{78} = 0$

$-x_{56} + x_{68} = 23$

$-x_{68} + x_{78} = 0$

$u_3 = 0, \quad u_2 = -10, \quad u_7 = -17, \quad u_8 = -6, \quad u_4 = 7$

$u_1 - u_2 = -20 \Rightarrow u_1 = -30$

$u_5 - u_8 = -13 \Rightarrow u_5 = -19$

$u_6 - u_8 = -11 \Rightarrow u_6 = -17$

$\Delta_{15} = -15 - (-30 + 19) = -4 \ (-)$

$\Delta_{56} = -11 - (-19 + 17) = -9 \ (-)$

$\Delta_{64} = -9 - (-17 - 7) = 15 \ (+)$

$\Delta_{84} = -4 - (-6 - 7) = 9 \ (+)$

$\Delta_{71} = -15 - (-17 + 30) = -28 \ (-)$

$\Delta_{87} = -2 - (-6 + 17) = -13 \ (-)$

$\Delta_{27} = -5 - (-10 + 17) = -12 \ (-)$

$\Delta_{75} = -18 - (-17 + 19) = -20 \ (-)$

Условие оптимальности не выполняется.

$(i_0, j_0) = (7,1)$

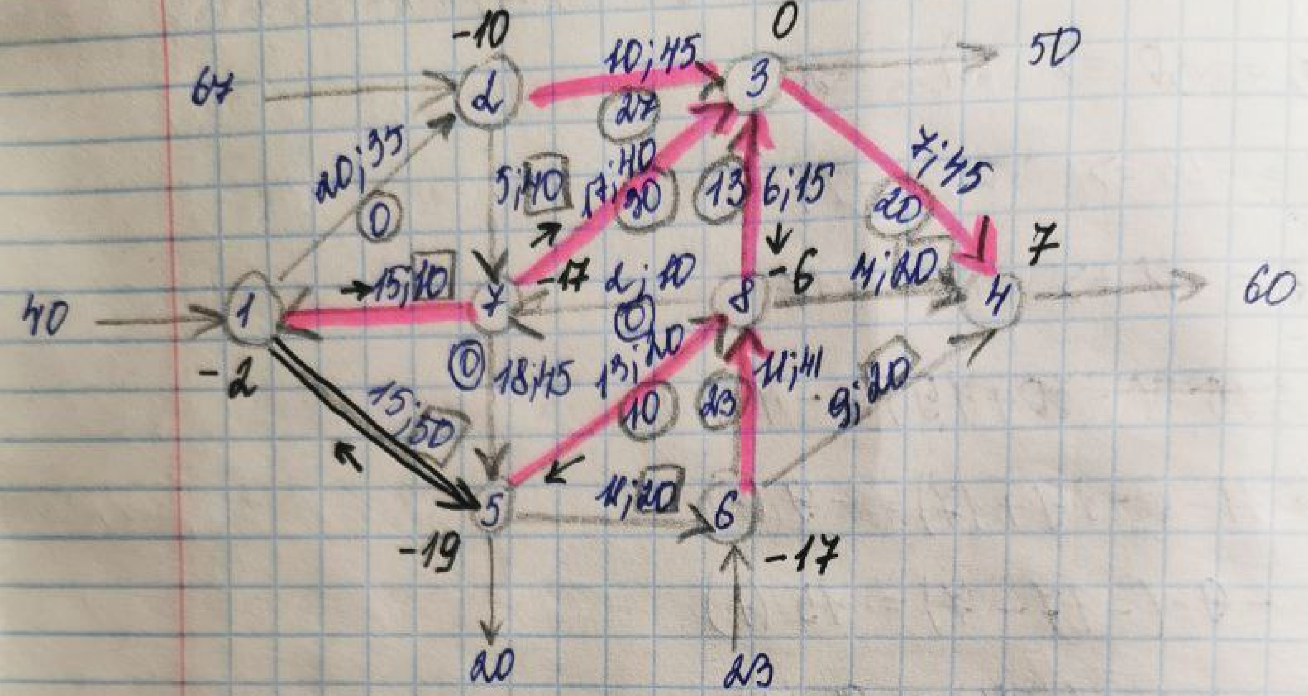
$\theta_{71} = 10 \qquad \theta_{23} = 27$

$\theta_{12} = 0 \qquad \theta_{37} = 10$

$\theta^0_{12} \Rightarrow (i_*, j_*) = (1,2)$ и x_{ij} сохраняются.

$U_Б = (U_Б \setminus (1,2)) \cup (7,1)$

Итерация 2:



$\Delta_{12} = -28\ (+)$ $\quad$ $\Delta_{56} = -9\ (-)$

$\Delta_{27} = -12\ (-)$ $\quad$ $\Delta_{64} = 15\ (+)$

$\Delta_{15} = -32\ (-)$ $\quad$ $\Delta_{87} = -13\ (+)$

$\Delta_{75} = -20\ (+)$ $\quad$ $\Delta_{84} = 9\ (+)$

$(i_0, j_0) = (1,5)$

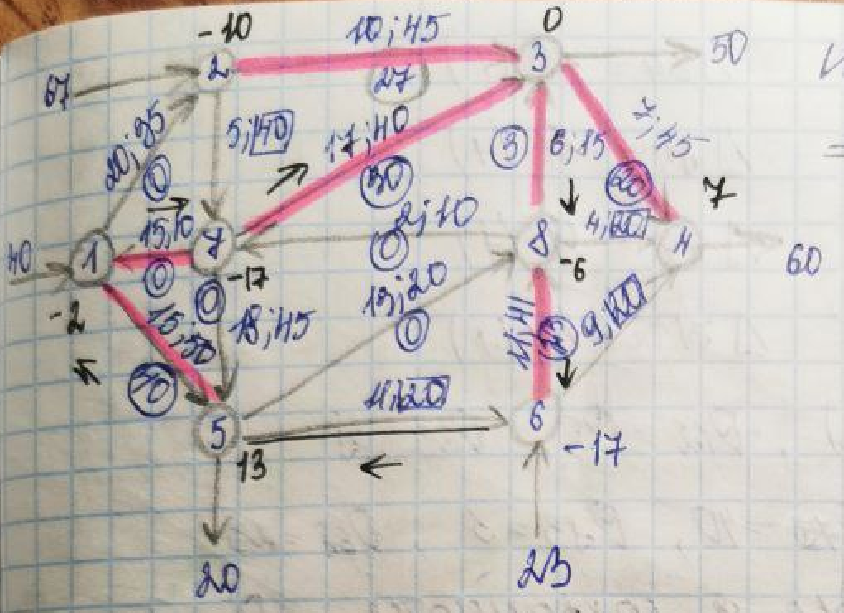
$\theta_{15} = 50,\ \theta_{71} - 10,\ \theta_{73} = 10,\ \theta_{83} = 13,\ \theta_{58} = 10$

$\theta^{\circ}_{58} = 10 \Rightarrow (i_*, j_*) = (5,8)$

$x_{15} = 40,\ x_{71} = 0,\ x_{73} = 40,\ x_{83} = 3,\ x_{58} = 0$

$U_5 = (U_5 \setminus (5,8)) \cup (1,5)$

Итерация 3:



$u_1 - u_5 = -15 \Rightarrow$

$\Rightarrow u_5 = 13$

$\Delta_{12} = -28(+)$, $\Delta_{27} = -12(-)$, $\Delta_{75} = 12(-)$, $\Delta_{58} = -22(+)$

$\Delta_{56} = -41(-)$, $\Delta_{64} = 15(+)$, $\Delta_{84} = 9(+)$, $\Delta_{87} = -13(+)$

$\cancel{\theta}$ $(i_0, j_0) = (5,6)$

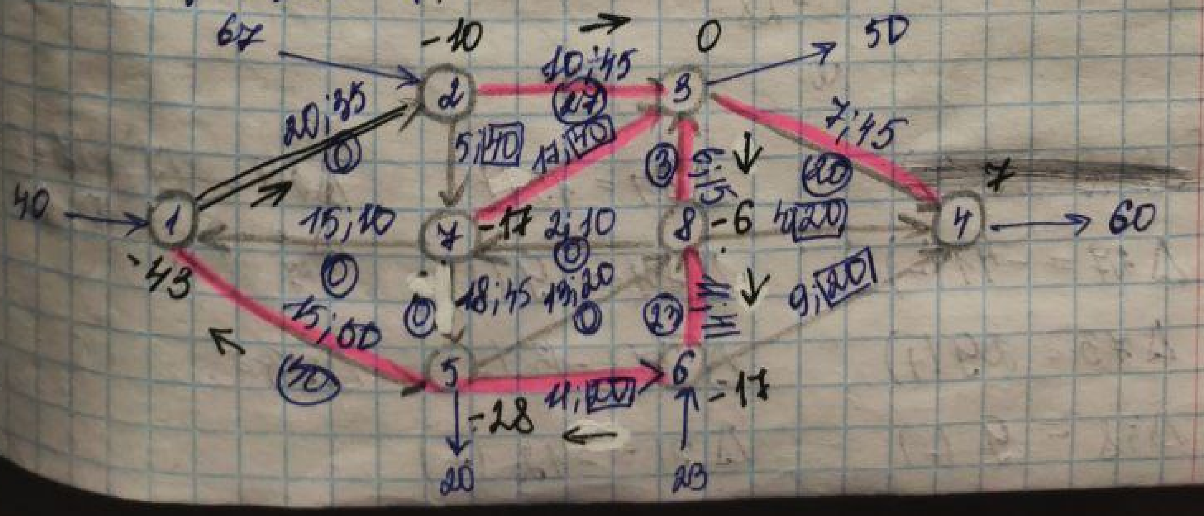
$\theta_{56} = 20$, $\theta_{15} = 40$, $\theta_{17} = 0$, $\theta_{73} = 10$, $\theta_{83} = 3$

$\theta_{68} = 23$, $\theta_{56} = 20$, $\theta_{15} = 40$

$\theta^0 = \theta_{71} = 0 \Rightarrow (i_*, j_*) = (7,1)$

$U_6 = (U_5 \mid (7,1)) \cup (5,6)$ все u сохраняются.

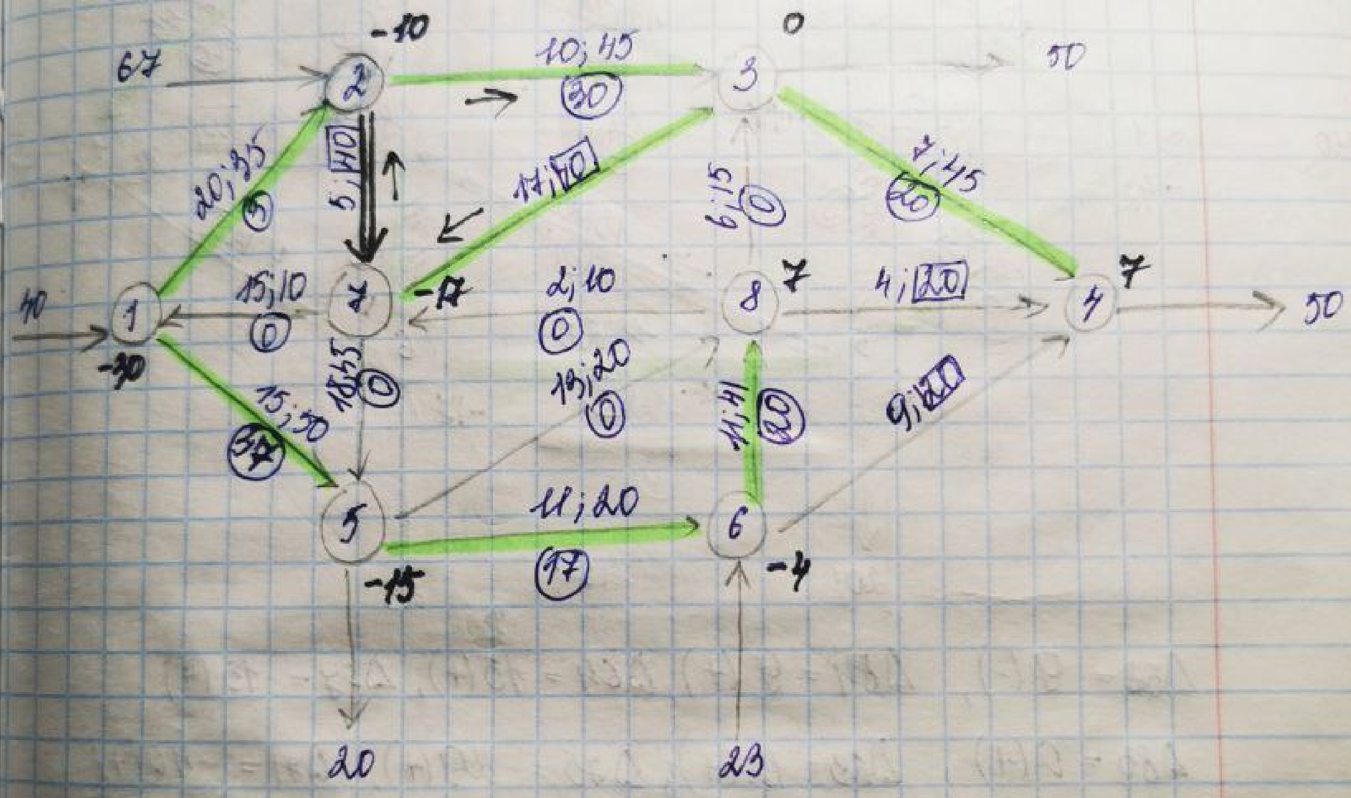
Итерация 4.



$x_{12}=3$, $x_{23}=30$, $x_{38}=0$, $x_{68}=20$, $x_{56}=17$, $x_{15}=37$

$\theta^0 = \theta_{83} = 3$, $(i_*, j_*) = (8,3)$, $U_{Б'} = (U_Б \setminus (8,3)) \cup (1,2)$

Итерация 5



$u_2=-10$, $u_7=-17$, $u_4=7$, $u_1=-30$, $u_5=-15$

$u_6=-4$, $u_3=0$, $u_8=7$

$\Delta_{71}=-28\ (+)$, $\Delta_{75}=-16\ (+)$, $\Delta_{58}=9\ (-)$, $\Delta_{64}=2\ (+)$

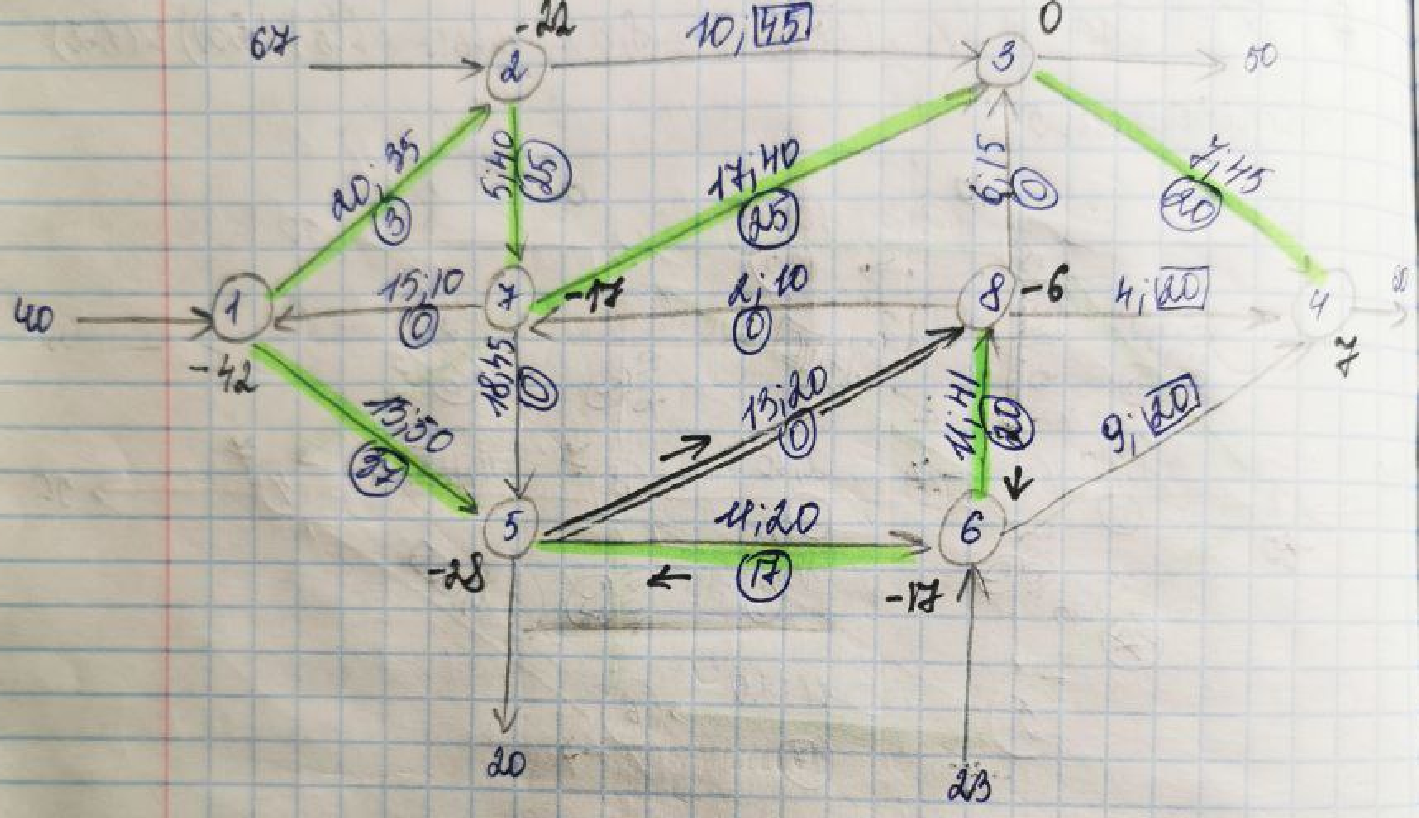
$\Delta_{84}=-4\ (-)$, $\Delta_{87}=-26\ (+)$, $\Delta_{83}=-13\ (+)$, $\Delta_{27}=-12\ (-)$

$(i_0, j_0) = (2,7)$

$\theta_{27}=40$, $\theta_{23}=15$, $\theta_{73}=40$; $(i_*, j_*) = (2,3) \Rightarrow$

$U_Б = (U_Б \setminus (2,3)) \cup (2,7)$; $x_{27}=25$, $x_{23}=45$, $x_{73}=25$

Итерация 6.



$\Delta_{58} = 9(-)$, $\Delta_{84} = 9(+)$, $\Delta_{64} = 15(+)$, $\Delta_{87} = -13(+)$

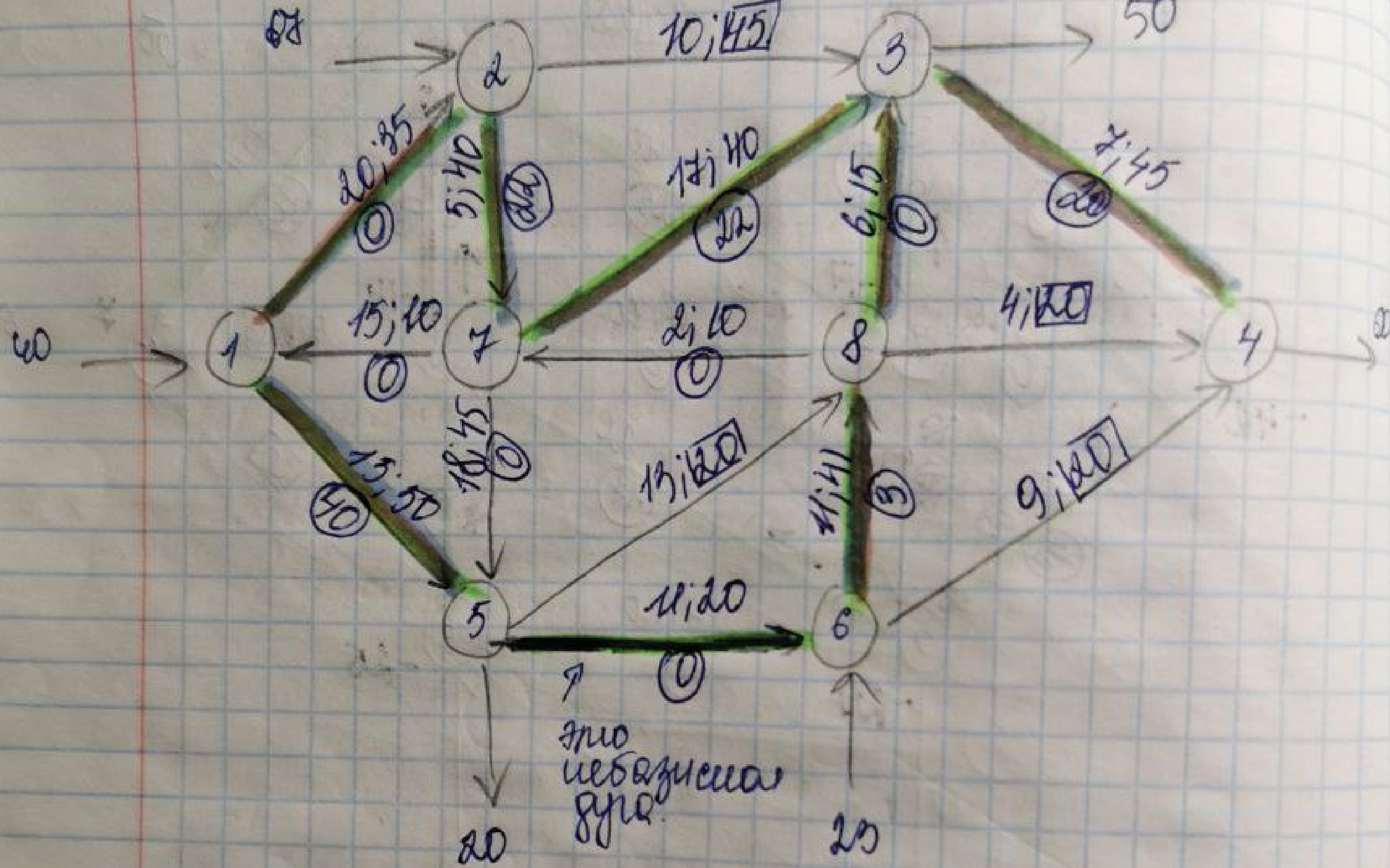
$\Delta_{83} = 0(+)$, $\Delta_{23} = 12(+)$, $\Delta_{75} = -29(+)$, $\Delta_{71} = -40(+)$

$(i_0, j_0) = (5,8)$

$\theta_{38} = 20$, $\theta_{68} = 20$, $\theta_{56} = 17$ $\Rightarrow (i_*, j_*) = (5,6)$

$x_{58} = 17$, $x_{68} = 3$, $x_{56} = 0$ $\Rightarrow U_5 = (U_5 \setminus (5,6)) \cup (5,8)$

Итерация 8.



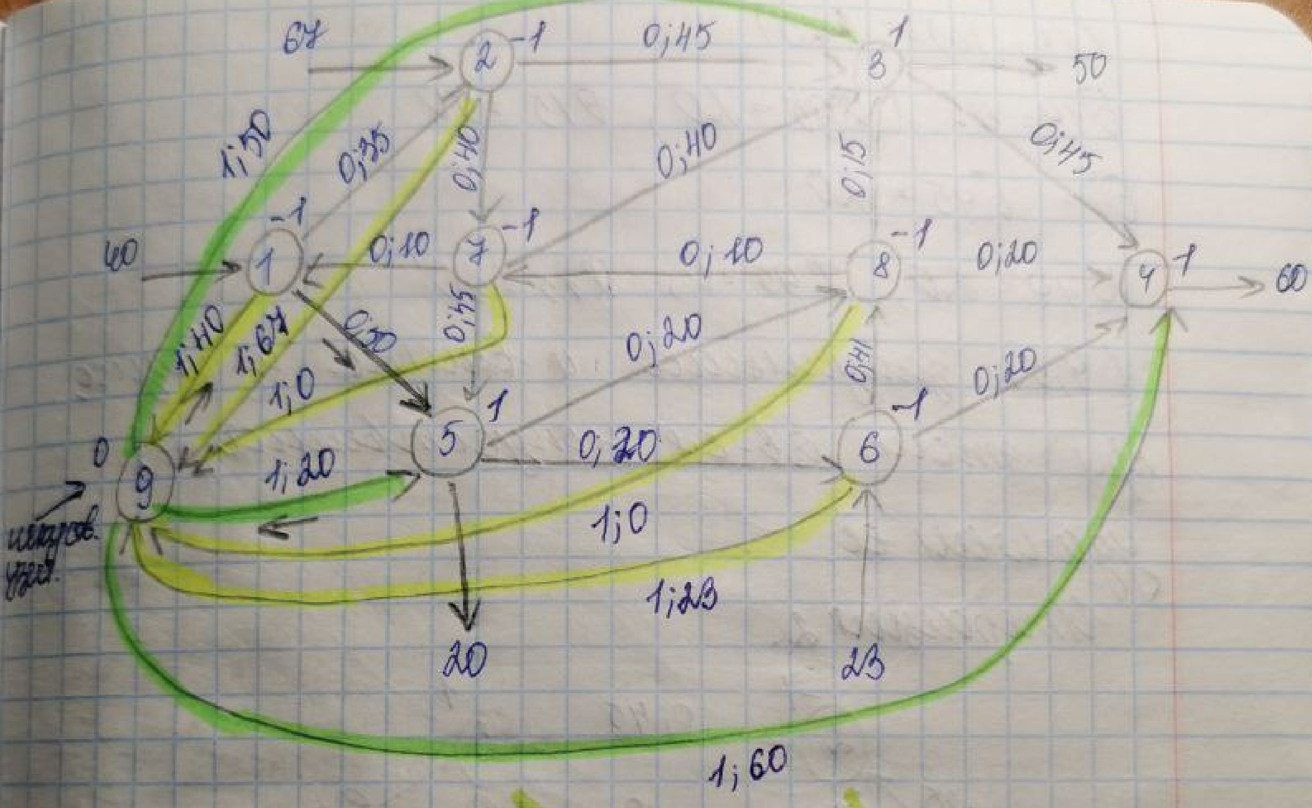
$\Delta_{71} = -40(+)$, $\Delta_{75} = -28(+)$, $\Delta_{56} = -9(+)$, $\Delta_{87} = -13(+)$

$\Delta_{64} = 3(+)$, $\Delta_{84} = 9(+)$, $\Delta_{23} = 12(+)$, $\Delta_{58} = 8(+)$

Условие оптимальности выполняется:

$U_Б = \{(1,2), (1,5), (2,7), (7,3), (8,3), (6,8), (3,4)\}$

3) Задача 1-й фазы



Итерация 1.

$u_9 = 0,\ u_1 = -1,\ u_2 = -1,\ u_3 = 1,\ u_4 = 1,\ u_5 = 1$

$u_6 = -1,\ u_7 = -1,\ u_8 = -1$

$\Delta_{12} = 0\ (+),\ \Delta_{23} = 2\ (-),\ \Delta_{34} = 0\ (+),\ \Delta_{71} = 0\ (+)$

$\Delta_{27} = 0\ (+),\ \Delta_{73} = 2\ (-),\ \Delta_{83} = 2\ (-),\ \Delta_{87} = 0\ (+)$

$\Delta_{87} = 0\ (+),\ \Delta_{84} = 2\ (-),\ \Delta_{15} = 2\ (-),\ \Delta_{75} = 2\ (-)$

$\Delta_{58} = -2\ (+),\ \Delta_{56} = -2\ (+),\ \Delta_{68} = 0\ (+)$

$(i_0, j_0) = \cancel{(1;5)}$

~~4) $\theta_{23} = 45,\ \theta_{28} = 50,\ \theta_{93} = 67$~~

~~$x_{23} =$~~

$(i_0, j_0) = (1,5)$

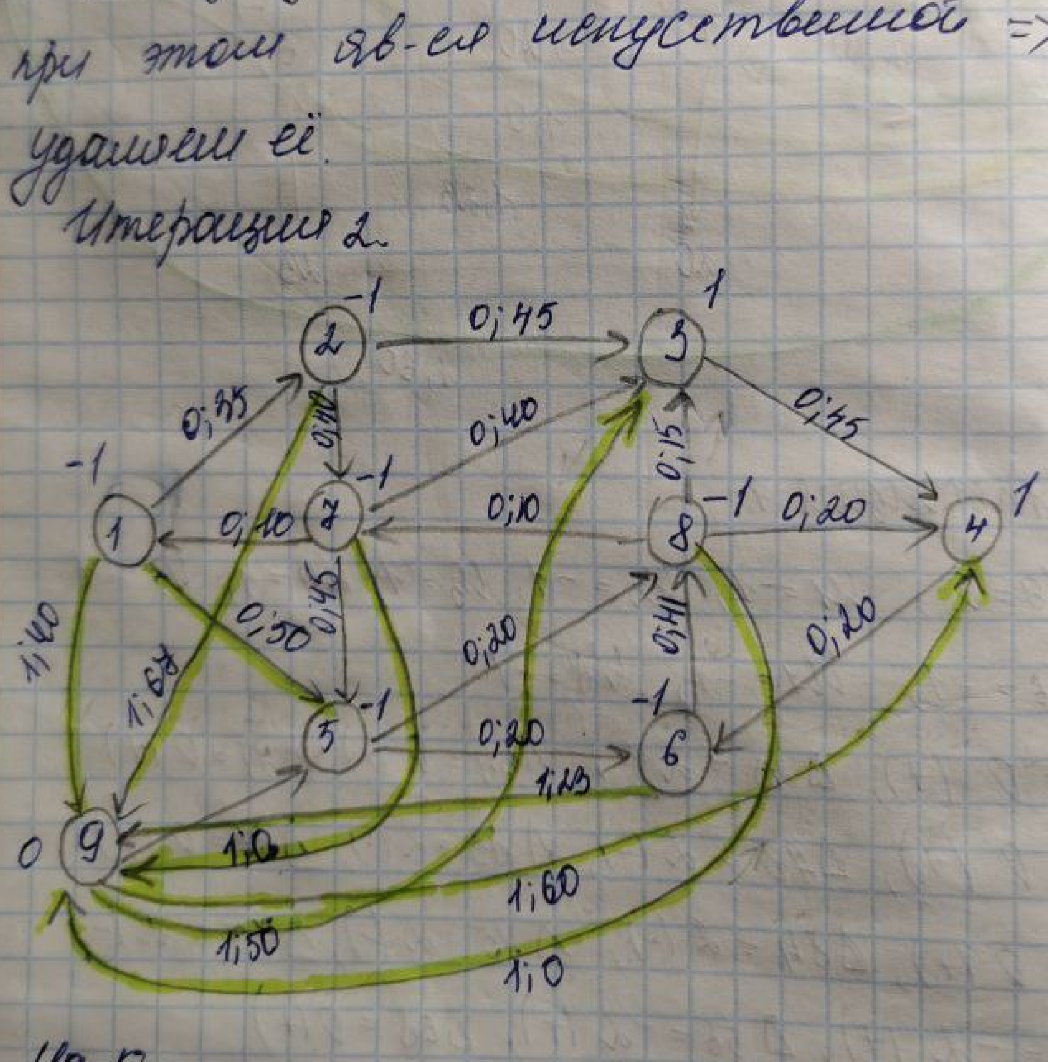
$\theta_{19} = 40$, $\theta_{95} = 20$, $\theta_{15} = 50$

$\theta^0 = \theta_{95} = 20$

$x_{19} = 20$, $x_{95} = 0$, $x_{15} = 30$

(9,5) занулилась и вышла из базиса, при этом яв-ся искусственной => удалим её.

Итерация 2.

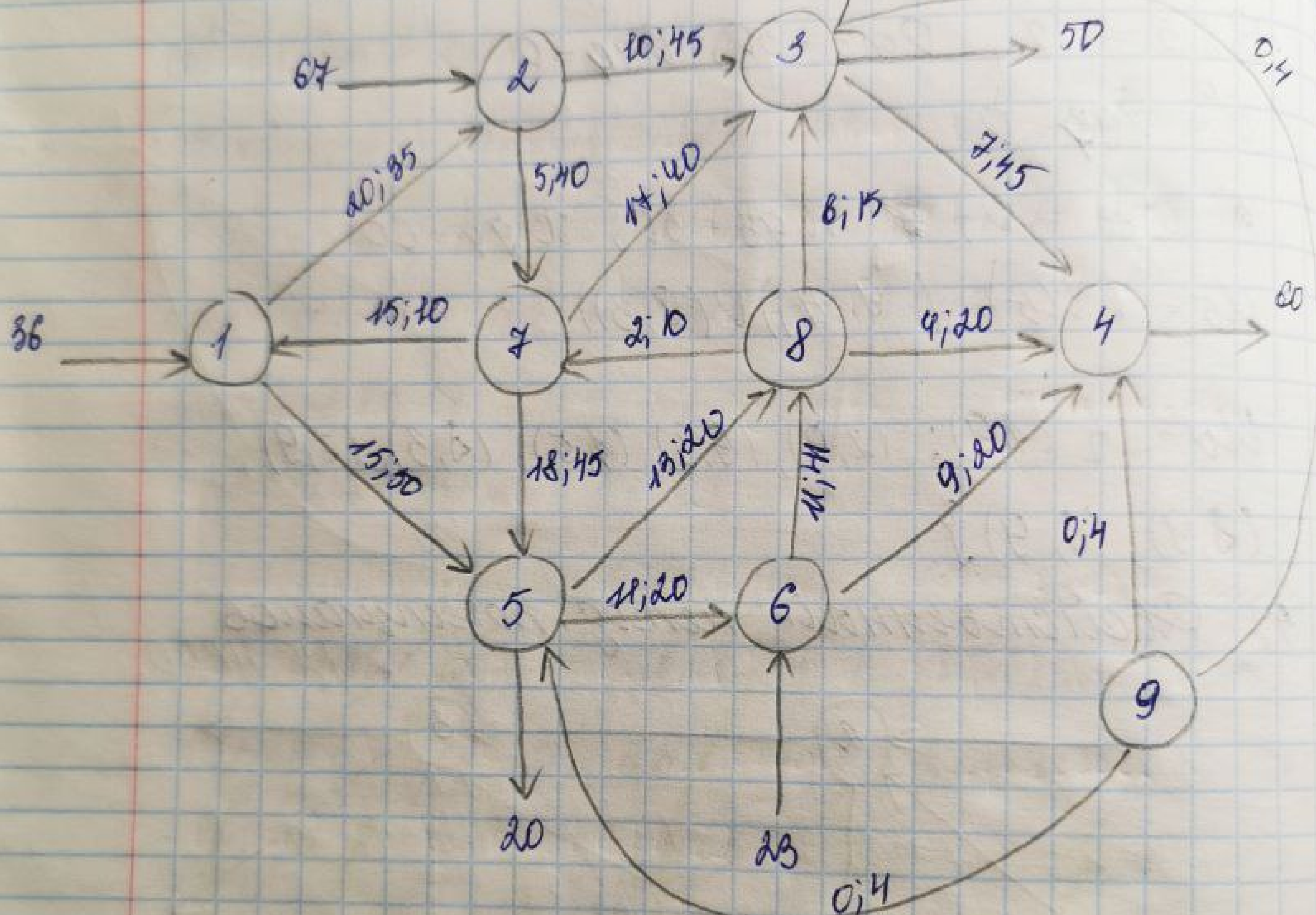


$u_9 = 0$

$\Delta_{56} = 0\ (+)$, $\Delta_{83} = 2\ (-)$, $\Delta_{95} = -2\ (+)$, $\Delta_{12} = 0\ (+)$

$\Delta_{23} = 2\ (+)$, $\Delta_{27} = 0\ (+)$, $\Delta_{34} = 0\ (+)$, $\Delta_{46} = -2\ (+)$

№3.6 (a-7, б-12)



Т.к. a_1 уменьшили на 4 ед., то условие баланса не выполняется, спрос превышает предложение. Поэтому вводим фиктивного поставщика 9.

Физический смысл вспомогательных дуговых потоков в оптимальном плане x^0:

поставок
x_{93} = недостаток 3-му потребителю

x_{94} = недостаток поставок 4-му потребителю

x_{95} = недостаток поставок 5-му потребителю

$20x_{12} + 15x_{15} + 10x_{23} + 5x_{27} + 7x_{34} + 9x_{46} + 11x_{56} +$

$+ 13x_{58} + 11x_{68} + 15x_{71} + 17x_{73} + 18x_{75} + 6x_{83} +$

$+ 4x_{84} + 2x_{87} \to min$

$$\begin{cases}
x_{12} + x_{15} - x_{17} = 36 \\
-x_{12} + x_{23} + x_{27} = 67 \\
-x_{23} + x_{34} - x_{38} - x_{37} - x_{93} = -50 \\
-x_{34} + x_{46} - x_{48} - x_{94} = -60 \\
-x_{15} + x_{58} - x_{57} + x_{56} - x_{95} = -20 \\
-x_{46} - x_{56} + x_{68} = -23 \\
x_{17} - x_{27} + x_{37} + x_{57} = 0 \\
x_{38} + x_{48} - x_{58} - x_{68} + x_{78} = 0 \\
x_{93} + x_{94} + x_{95} = 4
\end{cases}$$

$0 \le x_{12} \le 35$, $0 \le x_{15} \le 50$, $0 \le x_{23} \le 45$, $0 \le x_{27} \le 40$, $0 \le x_{34} \le 45$

$0 \le x_{46} \le 20$, $0 \le x_{56} \le 20$, $0 \le x_{58} \le 20$, $0 \le x_{68} \le 41$, $0 \le x_{71} \le 80$

$0 \le x_{73} \le 40$, $0 \le x_{75} \le 15$, $0 \le x_{83} \le 15$, $0 \le x_{84} \le 20$, $0 \le x_{87} \le 10$

$0 \le x_{93} \le 4$, $0 \le x_{94} \le 4$, $0 \le x_{95} \le 4$

№4.8 (4.1) а-11, б-12

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9 10	8 5	6 10	10 9	5 6	21
A_2	7 1	15 10	4 2	6 2	9 10	9
A_3	5 10	6 5	6 12	5 10	10 1	6
A_4	8 10	3 9	7 3	4 3	8 10	10
	6	6	10	12	12	

1) $\left.\begin{array}{l} 12+12+10+6+6=21+9+6+10 \\ 46=46 \end{array}\right\} \Rightarrow$ условие общего баланса выполнено

$\left.\begin{array}{l} 9+7+5+8=29>6 \\ 8+15+6+5=34>6 \\ 6+4+6+7=23>10 \\ 10+6+5+4=25>12 \\ 5+9+10+8=32>12 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Условие $\exists$ плана перевозок выполнено

$$10x_{11}+5x_{12}+10x_{13}+9x_{14}+6x_{15}+x_{21}+10x_{22}+2x_{23}+$$
$$+2x_{24}+10x_{25}+10x_{31}+5x_{32}+12x_{33}+10x_{34}+x_{35}+10x_{41}+$$
$$+9x_{42}+3x_{43}+3x_{44}+10x_{45}\to min$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=21 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=9 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=6 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=6 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=6 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=10 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=12 \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=12 \end{cases}$$

2

		3	−5	−10	−9	−6	
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
0	A_1	9 10 −13	8 5 6	4 6 10 − 4	10 9 8	2 5 6 + 3	21
−4	A_2	7 1 6	15 10 −1	4 4 2 + −12	6 2 −11	3 9 10 − 3	9
5	A_3	5 10 −18	6 5 −5	6 12 −7	5 10 −6	10 1 6	6
7	A_4	8 10 −14	5 9 −11	7 3 6	$\boxed{4}$ 3 −1	8 10 −11	10
		6	6	10	12	12	

$\Delta_{11}=-13(+)$, $\Delta_{22}=-1(+)$, $\Delta_{23}=12(-)$, $\Delta_{24}=11(-)$, $\Delta_{31}=-18(+)$

$\Delta_{32}=-5(+)$, $\Delta_{33}=-7(+)$, $\Delta_{34}=-6(+)$, $\Delta_{41}=-14(+)$, $\Delta_{42}=-11(+)$

$\Delta_{44}=-1(-)$, $\Delta_{45}=-11(+)$

$\Delta_{i_0j_0}=\Delta_{23}$, $\theta^0=\theta_{15}=2$

$x_{23}=2$, $x_{13}=2$, $x_{15}=5$, $x_{25}=1$

Итерация 2.

		-9	-5	-10	-9	-18	
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
0	A_1	9 10 -1	8 5 6	6 10 2	10 9 1	$\boxed{5}$ 6 12	21
8	A_2	7 1 6	15 10 -13	2 4 2 + 2	6 2 1 -1	9 10 − 1	9
17	A_3	5 10 -18	6 5 -17	6 12 -19	5 10 -18	10 1 6	6
7	A_4	8 10 -8	5 9 -11	6 7 3 − 6	$\boxed{4}$ 3 -1	8 8 10 + 1	10
		6	6	10	12	12	

$\Delta_{11} = -1(+)$, $\Delta_{15} = 12(+)$, $\Delta_{22} = -13(+)$, $\Delta_{24} = -1(+)$, $\Delta_{31} = -18$

$\Delta_{32} = -17(+)$, $\Delta_{33} = -19(+)$, $\Delta_{34} = -18(+)$, $\Delta_{41} = -8(+)$

$\Delta_{42} = -11(+)$, $\Delta_{44} = -1(-)$, $\Delta_{45} = 1(-)$

$\Delta_{i_0 j_0} = \Delta_{45} = 1$

$\theta^0 = \theta_{25} = 1$

$x_{23} = 3$, $x_{25} = 0$, $x_{45} = 1$, $x_{43} = 5$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9 10	8 5 6	6 10 2	10 9 8	$\boxed{5}$ 6	21
A_2	7 1 6	15 10	4 2 3	6 2	9 10	9
A_3	5 10	6 5	6 12	5 10	10 1 6	6
A_4	8 10	5 9	7 3 5	$\boxed{4}$ 3	8 10 1	10
	6	6	10	12	12	

③ Первая фаза

Итерация 1

	-1	-1	-1	-1	-1	0
-1	9 9 0 + 2	8 0 2	6 0 2	10 0 2	5 0 2	21 21 1 − 21
-1	7 0 2	15 0 2	4 0 2	6 0 2	9 0 2	9 1 9
-1	5 0 2	6 0 2	6 0 2	5 0 2	10 0 2	6 1 6
-1	8 0 2	5 0 2	7 0 2	4 0 2	8 0 2	10 1 10
0	6 6 1 − 6	6 1 6	10 1 10	12 1 12	12 1 12	46 46 0 + 0

$\Delta_{i_0 j_0} = \Delta_{11} = 2$, $\theta^0 = \theta_{51} = 6$

$x_{11} = 6$, $x_{16} = 15$, $x_{56} = 6$, $x_{51} = 0$

Итерация 2

	1	-1	-1	-1	-1	0
-1	9 0 6	8 0 2	6 0 2	10 0 2	5 0 2	21 1 15
-1	7 0 0	15 15 0 + 2	4 0 2	6 0 2	9 0 2	9 9 1 − 9
-1	5 0 0	6 0 2	6 0 2	5 0 2	10 0 2	6 1 6
-1	8 0 0	5 0 2	7 0 2	4 0 2	8 0 2	10 1 10
0		6 6 1 − 6	10 1 10	12 1 12	12 1 12	40 46 0 + 6

$\Delta_{i_0 j_0} = \Delta_{22} = 2$, $\theta^0 = \theta_{37} = 6$

$x_{22} = 6$, $x_{26} = 9$, $x_{56} = 12$, $x_{52} = 0$

9 0 6	8 0	6 0	10 0	5 0	21 1 15
7 0	15 0 6	4 0	6 0	9 0	9 1 3
5 0	6 0	6 0	5 0	10 0	6 1 6
1 0	5 0	7 0	4 0	8 0	10 1 10
		10 1 10	12 1 12	12 1 12	46 0 12

④ Увеличим предложение на 5 единиц

9 10 -26	8 5 -20	6 10 -7	10 9 -3	5 6 -15	5 0 -10	21
7 1 -30	$\boxed{15}$ 10	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{6}$ 2	$\boxed{9}$ 10	$\boxed{3}$ 0	9
5 10 -26	$\boxed{6}$ 5	$\boxed{6}$ 12	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{5}$ 0	6
8 10 -14	$\boxed{5}$ 9	$\boxed{7}$ 3	$\boxed{4}$ 3	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{5}$ 0	15
6	6	10	12	12	5	

Совокупное предложение > совокупного спроса

1-й столбец и строка — базисное множество клеток.

Физический смысл.

$\left.\begin{array}{l} x_{16} \\ x_{36} \\ x_{26} \\ x_{46} \end{array}\right\}$ нереализованная продукция для оптимального плана x^0.

⑤ Правило северо-западного угла.

10 (6)	5 (6)	10 (9)	9	6	~~21~~ ~~15~~ ~~9~~
1	10	2 (1)	2 (8)	10	~~9~~ ~~8~~
10	5	12	10 (4)	1 (2)	~~6~~ ~~2~~
10	9	3	5	10 (10)	~~10~~
~~6~~	~~6~~	~~10~~ ~~1~~	~~12~~ ~~1~~	~~12~~ ~~10~~	

Правило минимального элемента.

10	5 (6)	10 (9)	9	6 (6)	~~21~~ ~~15~~ ~~9~~
1 (6)	10	2	2 (3)	10	~~9~~ ~~3~~
10	5	12	10	1 (6)	~~6~~
10	9	3 (1)	3 (9)	10	~~10~~ ~~1~~
~~6~~	~~6~~	~~10~~ ~~9~~	~~12~~ ~~9~~	~~12~~ ~~6~~	

Правило двойного предпочтения.

10	5 (6)	10	9 (9)	6 (6)	~~21~~ ~~15~~ ~~9~~
1 (6)	10	2 (3)	2	10	~~9~~ ~~3~~
10	5	12	10	1 (6)	~~6~~
10	9	3 (7)	3 (3)	10	~~10~~ ~~3~~
~~6~~	~~6~~	~~10~~ ~~7~~	~~12~~ ~~9~~	~~12~~ ~~6~~	

№5.2 (без варианта)

$X \subset \mathbb{R}^n$ - выпуклое, A - матрица $m \times n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

а) $AX = \{z : z = Ax, x \in X\}$

$\forall x^1, x^2 \in X$ и $\lambda \in [0,1]$, точка $x^\lambda = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$

$\Rightarrow Ax^\lambda = A(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = \lambda Ax^1 + (1-\lambda)Ax^2 =$

$= \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 = z^\lambda$, $z^1 = Ax^1$, $z^2 = Ax^2$

$z^1, z^2 \in Ax \Rightarrow$ AX - выпукло по определению

б) $\alpha X = \{\alpha x : x \in X\}$

Используем определение выпуклого множества: $\alpha x^\lambda = \alpha(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = \alpha\lambda x^1 + (1-\lambda)\alpha x^2 \Rightarrow$ множество выпукло.

$x^1, x^2 \in \alpha X$ $\forall \lambda \in [0,1]$

№5.3 (без варианта)

$X_1 = \{x : x_1 = 0, 0 \le x_2 \le 1\}$

$X_2 = \{x : 0 \le x_1 \le 1, x_2 = 2\}$

Описать $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$

$X_1 + X_2 = \{x : x_1 + x_2;\ x_1 \in X_1;\ x_2 \in X_2\} =$

$= \{x : 0 \le x_1 \le 1,\ 2 \le x_2 \le 3\}$

$X_1 - X_2 = \{x : x_1 - x_2;\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\} =$

$= \{x : -1 \le x_1 \le 0;\ -2 \le x_2 \le -1\}$

№5.4 (без варианта)

Доказать выпуклость в R^2

1) $X = \{x : x_1^2 \le x_2\}$

2) $X = \{x : x_1 x_2 \ge 1,\ x_1 > 0\}$

3) $X = \{x : \sin x_1 \ge x_2,\ 0 \le x_1 \le \pi\}$

4) $X = \{x : e^{x_1} \le x_2\}$

1) $(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^2 = \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 y_1^2 +$
$+ 2\lambda(1-\lambda) x_1 y_1 \le \lambda^2 x_2 + (1-\lambda)^2 y_2 + 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_2 y_2}$
$\le \lambda^2 x_2 + (1-\lambda)^2 y_2 + \lambda(1-\lambda)(x_2 + y_2) = \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2$
$\forall \lambda \in [0;1] \Rightarrow$ множество выпукло

2) $\frac{\lambda}{x_1} + \frac{(1-\lambda)}{y_1} = \frac{\lambda y_1 + (1-\lambda) x_1}{x_1 y_1} \le x_2 y_2 \mid$
$(\lambda y_1 + (1-\lambda) x_1) \le \lambda x_1 + (1-\lambda) y_2 \quad \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow$
множество выпукло

3) $\sin(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1) \ge \lambda \sin x_1 + (1-\lambda) \sin y_1$
[$\sin(\alpha x + \beta y) = \sin \alpha x \cos \beta y + \sin \beta y \cos \alpha x \ge$
(т.к. $\cos \beta y$ и $\cos \alpha x \in [-1;1] \Rightarrow$) $\ge \sin \alpha x + \sin \beta y$
в нашем случае: $\sin \lambda x_1 + \sin(1-\lambda) y_1 \ge$
$\ge \lambda \sin x_1 + (1-\lambda) \sin y_1$, т.к. $\lambda \in [0;1]$] $\ge$
$\ge \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2 \Rightarrow \quad \forall \lambda \in [0;1]$. X - выпукла

4) $e^{(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)} = e^{\lambda x_1} \cdot e^{(1-\lambda)y_1} \le$

$\le \lambda e^{x_1} + (1-\lambda)e^{y_1} \le \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \Rightarrow$

$\forall \lambda \in [0;1]$ X - выпуклое

№5.20, вариант 17

$x^* = (3, 2, 1, 1)$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 9x_3 - 9x_4 \le 7 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \le 1 \\ 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 \le 5 \end{cases}$$

проверим, принадлежит ли x^* множеству?

$3 \cdot 2 + 2 \le 7$ (-)

$-3 - 2 + 3 - 1 \le 1$ (+)

$8 - 5 + 2 \le 9$ (+)

$6 - 6 + 2 + 9 \le 5$ (-)

$\Rightarrow$ $3x_1 + x_2 + 9x_3 - 9x_4 = \alpha$ $\quad 7 \le \alpha \le 8$

$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 = \beta$ $\quad 5 \le \beta \le 11$

при $\alpha = 7, \alpha = 8$ и $\beta = 5, \beta = 11$ будем иметь строгую отделимость

№5.21, вариант 17

$X = \{ x : \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{25} \leq 1 \}$ в точке

$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$

$x^* = (0; -\frac{12}{5}; 3)$

Проверим $x^* \in X$:

$0 + \frac{144}{25 \cdot 9} + \frac{9}{25} = \frac{144+81}{9 \cdot 25} = \frac{225}{225} = 1 \leq 1 \Rightarrow$

$x^* \in \partial X$.

$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_1 \\ \frac{2}{9} x_2 \\ \frac{2}{25} x_3 \end{pmatrix}$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 2/25 \end{pmatrix} > 0$

$f(x)$ строго выпукла.

Опорная гиперплоскость к X в x^* - касательная плоскость к границе $\partial x = \{ x : f(x) = 1 \} \Rightarrow$

$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} (x - x^*) = 0$

$(0, -\frac{8}{15}, \frac{6}{25}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{12}{5} \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} = 0$

$-\frac{8}{15} x_2 - \frac{8 \cdot 4}{25} + \frac{6}{25} x_3 - \frac{18}{25} = 0$

$-\frac{8}{15} x_2 + \frac{6}{25} x_3 - 2 = 0$, $-40 x_2 + 18 x_3 - 150 = 0$

Ответ: ~~$40x_2 + 18x_3 = 150$~~

$$-20x_2 + 9x_3 = 75$$

№5.23 (вариант 17)

$X_1 = \{x: x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0\}$

$X_2 = \{x: x_2 \leq \frac{1}{9(x_1 - \frac{1}{3})} + \frac{16}{3},\ x_1 < \frac{1}{3}\}$

Записать уравнение гиперплоскости, разделяющей множества.

$x_2 = \frac{1}{x_1}$, $\quad x_2 = \frac{1}{9x_1 - 3} + \frac{16}{3}$

Проверим, пересекаются ли X_1 и X_2.

$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{9x_1 - 3} + \frac{16}{3} \quad \Big| \cdot 3(3x_1 - 1) \cdot x_1$

$3(3x_1 - 1) = x_1 + 16x_1(3x_1 - 1)$

~~$9x_1 - 3 - 3 - 48x_1^2 + 16 = 0$~~

~~$-48x_1^2 + 9x_1 + 10 = 0$~~

$9x_1 - 3 - x_1 - 48x_1^2 + 16x_1 = 0$

$-48x_1^2 + 24x_1 - 3 = 0$

$16x_1^2 - 8x_1 + 1 = 0$

$(4x_1 - 1)^2 = 0$

$x_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_2 = 4$; т. $(\frac{1}{4}; 4)$

$f(x_1) = \frac{1}{x_1}$, $f'(x_1) = -\frac{1}{x_1^2}$, $f'(\frac{1}{4}) = -16$

$y = kx + b$

$x_2 = -16x_1 + b$, $4 = -16 \cdot \frac{1}{4} = b \Rightarrow b = 8$

Ответ: $16x_1 + x_2 = 8$

N5.26 (вариант 17)

$f(x) = -\frac{1}{2} x_1^7 + \frac{1}{2} x_3^4 + 2x_2 x_3 + 11x_1 + 6$, $X = \{x \in R^3 : x \le 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} x_1^6 + 11 \\ 2x_3 \\ 2x_3^3 + 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -21x_1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6x_3^2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -21x_1^5$

$\Delta_2 = 0$

$\Delta_3 = -21x_1^5 \cdot (-2) = 42x_1^5$

При $x_1 = 0$, $\forall x_2 x_3$ $f(x)$ выпукла

При $x_1 \neq 0$, $\forall x_2 x_3$ $f(x)$ выпукла

N6.36 (а-1, б-1)

$f = x_1^2 + x_2^2 + 6$

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 12 \le 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 24 \le 0 \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 6 \to min$

$$\begin{cases} \cancel{5x_1}\ 2x_1 - 6x_2 - 12 \le 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 24 \le 0 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow$$

$f(x)$ выпуклая

$Q = \{x \in R^2 : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$ - выпукло пересечение полупространств.

$g_1(x) = 2x_1 - 6x_2 - 12 \le 0$ } линейны => усл. Слейтера не проверяем.
$g_2(x) = 3x_1 + 8x_2 - 24 \le 0$

Ф. Лагранжа

$F(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 6 + \lambda_1(2x_1 - 6x_2 - 12) +$

$+ \lambda_2(3x_1 + 8x_2 - 24), \quad x \in Q, \ \lambda \ge 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 + \lambda_1(2) + \lambda_2(3) \\ 2x_2 + \lambda_1(-6) + \lambda_2(8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_1(2x_1 - 6x_2 - 12) = 0 \\ \lambda_2(3x_1 + 8x_2 - 24) = 0 \\ \lambda \ge 0, \quad x \in Q = \{x \in R^2 : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\} \end{cases}$$

1. Пусть $g_1 < 0$ (пассивна)
$g_2 = 0$ (активна)

$\lambda_1 = 0,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2x_2 + 8\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2(3x_1 + 8x_2 - 24) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{72}{73} \\ x_2 = \frac{192}{73} \\ \lambda_2 = -\frac{48}{73} < 0 \end{cases}$$

$\left(\frac{72}{73}, \frac{192}{73}\right)$ не стационарная точка.

2. $g_1 = 0, \ g_2 < 0$

$\lambda_2 = 0, \ \lambda_1 = -\frac{3}{5}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 = 0 \\ 2x_2 - 6\lambda_1 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 - 12 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} \\ x_2 = -\frac{9}{5} \\ \lambda_1 = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$\left(\frac{3}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ – не стационарная точка.

3. $g_1 < 0, \ g_2 < 0$

$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = (0; 0) \text{ – стационарная.}$$

Ответ: $x = (0; 0)$

№8.6 (вариант 17)

$f(x) = x_1 x_2^2 \cdot (1 - x_1 - x_2)$

$f(x) = x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^3$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2^2 - 2x_1 x_2^2 - x_2^3 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 x_2 - 2x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 = 0$

$$\begin{cases} x_2^2 - 2x_1 x_2^2 - x_2^3 = 0 \\ 2x_1 x_2 - 2x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$(0;1)$ - точка A

$(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ - точка B

$(0;0)$ - точка C

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -2x_2^2 & 2x_2 - 4x_1 x_2 - 3x_2^2 \\ 2x_2 - 4x_1 x_2 - 3x_2^2 & 2x_1 - 2x_1^2 - 6x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2}\Big|_A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{matrix}$$

т.А не является точкой локального экстремума.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_B = \begin{pmatrix} -1/2 & -5\,1/8 \\ -5\,1/8 & -\frac{123}{16} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{matrix}$$

т.В не явл. точкой локального экстремума

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{matrix}$$

т.С не является экстремумом.

Для ф-ии $f(x)$ не выполняется необх. и дост. условие выпуклости, экстремумов нет.

№9.6 (вариант 17)

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & h(x) \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5 & g(x) \end{cases}$$

$X: \{x \in R^3 : x_1 - x_2 + 2x_3 - 5 \leq 0, x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0\}$

так как ограничения $g(x)$, $h(x)$ линейны, то условие регулярности выполняется.

$$F(x, \lambda, \mu) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + \lambda(x_1 - x_2 + 2x_3 - 5) +$$
$$+ \mu(x_1 + x_2 + x_3 - 3), \quad x \in X, \quad \lambda \geq 0, \ \mu \in R$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = -2x_1 + \lambda + \mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_2 - \lambda + \mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = -2x_3 + 2\lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda(x_1 - x_2 + 2x_3 - 5) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

1) $g(x) < 0$, $\lambda = 0$

$\mu = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $\lambda = 0$

$g(x) = 1 - 1 + 2 - 5 = -3 < 0$ (выполняется)

2) $g(x) = 0$

$\lambda = \frac{9}{7}$, $\mu = \frac{8}{7}$, $x_1 = \frac{17}{14}$, $x_2 = -\frac{1}{14}$, $x_3 = \frac{13}{7}$

Достаточное условие оптимальности второго порядка:

$\frac{\partial h'(x^*)}{\partial x} l = 0$, $l' \frac{F(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x^2} l > 0 \ (<0) \ \forall l$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

$$(l_1, l_2, l_3) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2l_1 \\ -2l_2 \\ -2l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} =$$

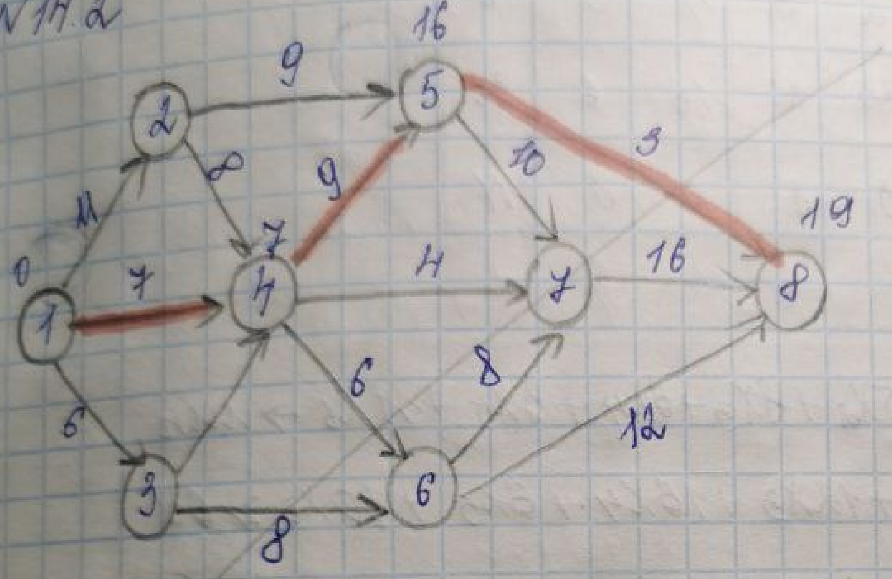
$$= -2l_1^2 - 2l_2^2 - 2l_3^2 < 0$$

Необходимое условие верно $\forall l$ =>

т. (1,1,1) и есть x^0

Ответ: $x^0 = (1,1,1)$, $f(x^0) = -3$

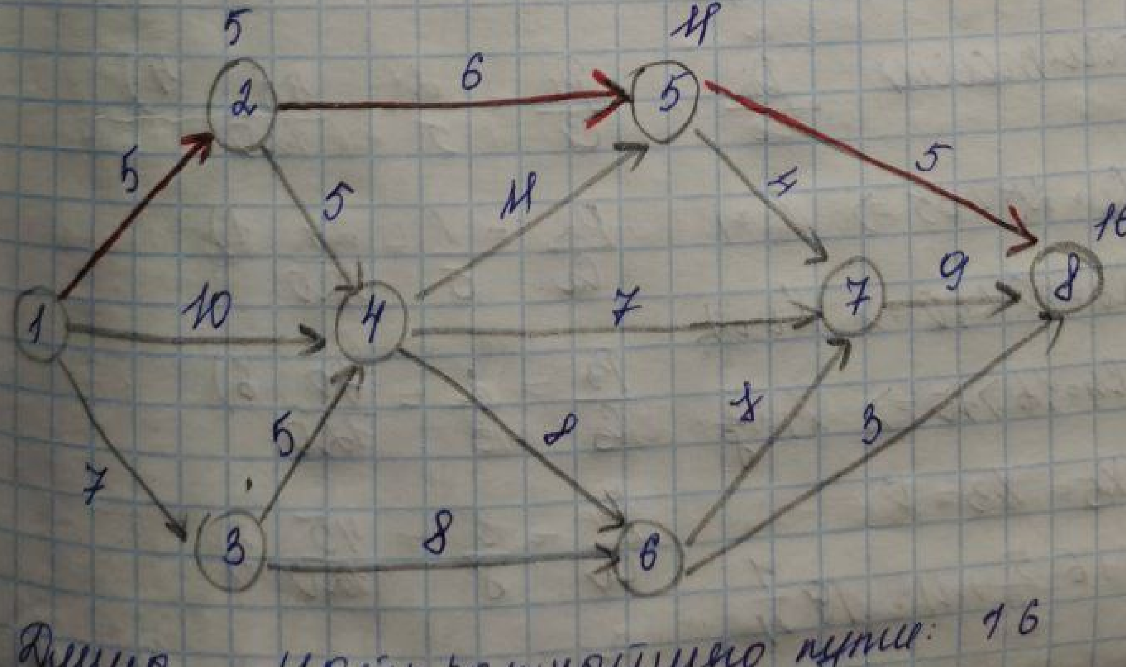
№14.2



Длина наикратчайшего пути: 19

($x_{14} \to x_{45} \to x_{58}$)

№14.2 (вариант 17.)



Длина наикратчайшего пути: 16

($x_{12} \to x_{25} \to x_{58}$)

№10.3 (вариант 17)

$C = 65$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	10	25	12	16	6	30
p_i	4	5	8	6	3	11
	4	1	6	3	5	2

$f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 11x_6 \to \min$

$10x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 16x_4 + 6x_5 + 30x_6 \geq 65$

$x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1,6}$

$\xi(x) = \min(4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 11x_6)$

Расширяем ограничение:

$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1,6}$

Посчитаем $\frac{p_i}{c_i}$: $\frac{p_1}{c_1} = \frac{2}{5} = \frac{48}{120}$ 4)

$\frac{p_2}{c_2} = \frac{1}{5} = \frac{24}{120}$ 1)

$\frac{p_3}{c_3} = \frac{2}{3} = \frac{80}{120}$ 6)

$\frac{p_4}{c_4} = \frac{3}{8} = \frac{45}{120}$ 3)

$\frac{p_5}{c_5} = \frac{1}{2} = \frac{60}{120}$ 5) $\frac{p_6}{c_6} = \frac{44}{120}$ 2)

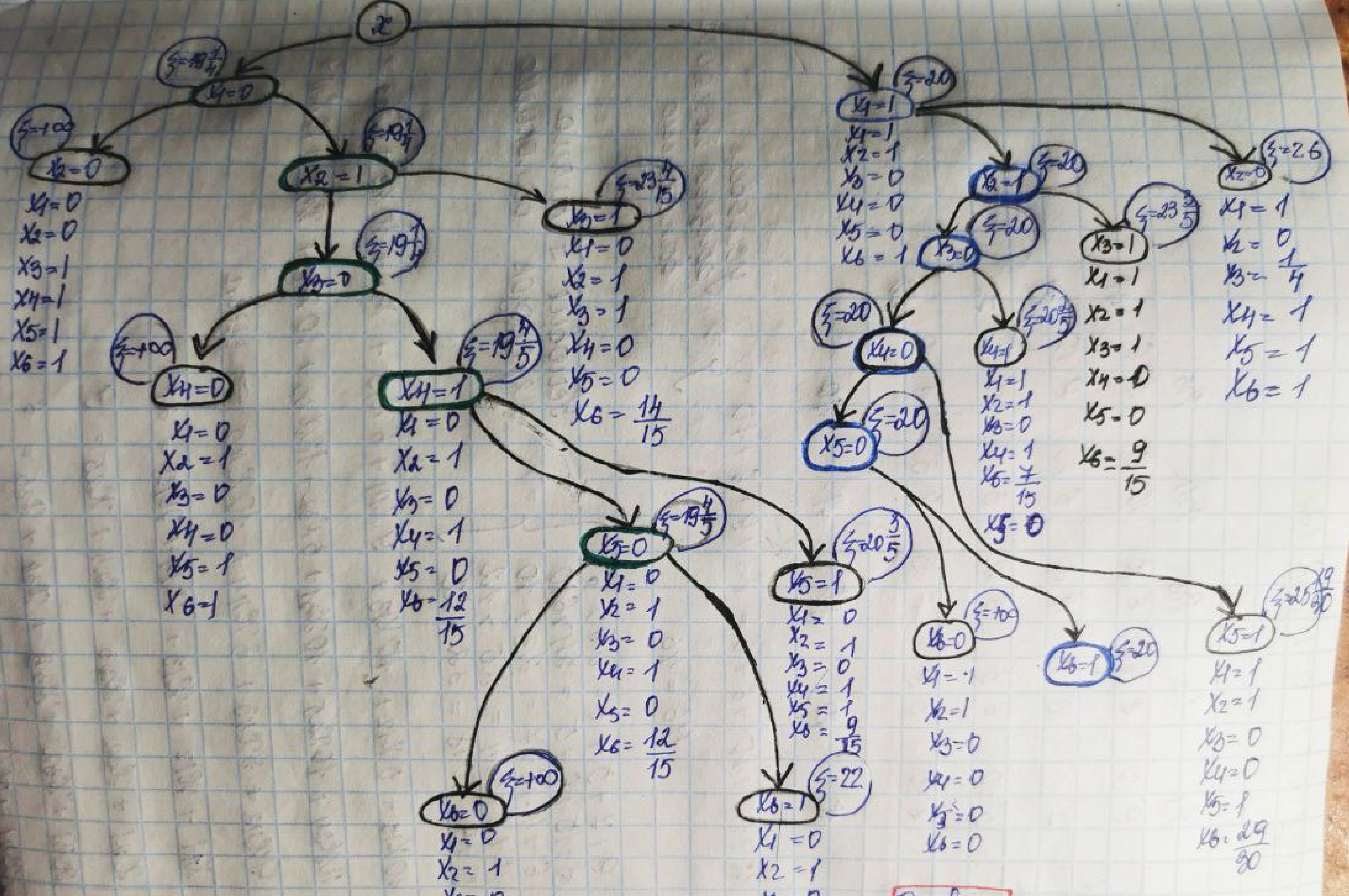
x_2: $c_2 = 25 < 65 \Rightarrow x_2 = 1$

x_6: $c_6 = 30 < 40 \Rightarrow x_6 = 1$

x_4: $c_4 = 16 > 10 \Rightarrow x_4 = \frac{5}{8}$

$x_1 = x_5 = x_3 = 0$

$\xi = 5 + 6 \cdot \frac{5}{8} + 11 = 19\frac{1}{4}$



Ответ: план

$X^*(1,1,0,0,0,1)$

при оценке $\xi=20$

№14.1 (вариант 17)

x	0	2	4	6	8	10
f_1	0	6	9	12	15	18
f_2	0	4	8	12	16	19
f_3	0	4	7	10	13	15

$n=3$
$c=10$

Уравнение Беллмана:

$$B_{k+1}(y) = \max_{0 \le z \le y} \left(f_{k+1}(z) + B_k(y-z) \right)$$

y	0	2	4	6	8	10
$B_1(y)$	0	6	9	12	15	18
$B_2(y)$ / $x_2(y)$	0/0	6/0	10/2	14/4	18/6	22/8
$B_3(y)$ / $x_3(y)$	0/0	6/0	10/0,2	14/0,2	18/0,2	22/0,2

Максимально возм. прибыль:

$B_3(10) = 22$

Оптимальное распределение ресурсов:

$x_3^0 = x_3^0(10) = 0$ или $x_3^0 = x_3^0(10) = 2$

$x_2^0 = x_2^0(10-0) = 8$ $\quad$ $x_2^0 = x_2^0(10-2) = 6$

$x_1^0 = 10-8-0 = 2$ $\quad$ $x_1^0 = 10-2-6 = 2$

а) $n = 2$

$x_2^0 = x_2^0(10) = 8$

$x_1^0 = 10 - 8 = 2$

б) $c = 8$

$x_3^0 = x_3^0(8) = 0$ или $x_3^0 = x_3^0(8) = 2$

$x_2^0 = x_2^0(8-0) = 6$ $x_2^0 = x_2^0(8-2) = 4$

$x_1^0 = 8 - 0 - 6 = 2$ $x_1^0 = 8 - 2 - 4 = 2$

в) $n = 2,\ c = 8$

$x_2^0 = x_2^0(8) = 6$

$x_1^0 = 8 - 6 = 2$