ТЕМА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ. НОРМА ОПЕРАТОРА

Пусть X и Y – нормированные векторные пространства и пусть множество $\mathscr{D}(A) \subseteq X$. Если каждому элементу $x \in \mathscr{D}(A)$ поставлен в соответствие определенный элемент $y \in Y$, то говорят, что задан оператор A и $y = Ax$. При этом множество $\mathscr{D}(A)$ называют *областью определения* оператора A. Множество

$$\mathscr{R}(A) = \{y \in Y : \exists x \in \mathscr{D}(A), y = Ax\} \subset Y$$

называют *областью значений* оператора A.

Определение 1. Оператор $A : X \to Y$ с областью определения $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ называют *линейным*, если:

1. Область определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A представляет собой линейное многообразие, т. е. если $x, y \in \mathscr{D}(A)$, то $\alpha x + \beta y \in \mathscr{D}(A)$ для всех скаляров $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$;
2. $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ для любых элементов $x, y \in \mathscr{D}(A)$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$.

Лемма 1. *Область значений всякого линейного оператора является линейным многообразием.*

Практически наиболее важны два случая задания линейных операторов:

1. $\mathscr{D}(A) = X$, т. е. оператор A задан всюду в нормированном пространстве X;
2. $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$, т. е. оператор A задан плотно в X.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие линейные операторы.

Определение 2. Линейный оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\|_X < \delta$, выполняется $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.

Можно привести определение непрерывного оператора в точке по Гейне.

Определение 3. Линейный оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой последовательности $(x^{(n)}) \subset X$ такой, что $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{X} x_0$, соответствующая последовательность значений $Ax^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{Y} Ax_0$.

Теорема 1. *Пусть X, Y – нормированные векторные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор. Тогда следующие свойства оператора A эквивалентны:*

1. *оператор A непрерывен в точке $x = \theta$;*
2. *оператор A непрерывен в любой точке пространства X;*
3. *оператор A равномерно непрерывен.*

Определение 4. Линейный оператор A называется *ограниченным,* если существует константа $c > 0$ такая, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство ограниченности $\|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X$. Ограниченный оператор переводит каждое ограниченное множество в X в ограниченное множество в Y.

Наименьшая из констант c в неравенстве ограниченности есть точная верхняя грань множества $\{\|Ax\|_Y \,:\, \|x\|_X = 1\}$, т. е.

$$\inf c = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Назовем *нормой линейного ограниченного оператора* наименьшую из констант ограниченности, т. е.

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Норма $\|A\|$ называется *достижимой*, если существует $x_0 \in X$, при котором справедливо равенство

$$\|Ax_0\|_Y = \|A\|\|x_0\|_X.$$

Теорема 2. *Пусть X, Y – нормированные векторные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор. Оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Множество тех $x \in X$, для которых $Ax = 0$, называется *ядром* линейного оператора и обозначается $KerA$.

Теорема 3. *Ядро линейного непрерывного оператора $A : X \to Y$ является подпространством пространства X.*

Теорема 4. *Множество значений $\mathscr{R}(A)$ линейного непрерывного оператора $A : X \to Y$ является линейным многообразием Y.*

Примеры линейных ограниченных операторов

1. Пусть $X = Y = C[a, b]$. Определим интегральный оператор, который каждой функции $x(t) \in C[a, b]$ ставит в соответствие функцию $y(t) \in C[a, b]$ по формуле

$$y(t) = Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s)\, \mathrm{d}s, \tag{1}$$

где $\mathcal{K}(t, s)$ – ядро интегрального оператора – функция, непрерывная по переменным t, s. Оператор A называется *интегральным оператором Фредгольма* с непрерывным ядром.

Теорема 5. *Формула (1) определяет линейный ограниченный оператор в пространстве $C[a, b]$ причем*

$$\|A\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\, \mathrm{d}s. \tag{2}$$

2. Пусть теперь в (1) функция $\mathcal{K}(t, s)$ измерима. Тогда при дополнительных на нее условиях при любой $x(t) \in C[a, b]$ формула (1) задает ограниченный оператор.

Теорема 6. *Пусть в (1) функция $\mathcal{K}(t, s)$ измерима и удовлетворяет условиям:*

1) $\exists c > 0$ такое, что $\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t, s)|\mathrm{d}s \leqslant c$ для всех $t \in [a, b]$;

2) для любого $t_1 \in [a, b]$ $\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t, s)|\mathrm{d}s \longrightarrow 0$ при $t_1 \to t$.

Тогда интегральный оператор (1) ограничен в пространстве $C[a, b]$.

3. Пусть $X = Y = L_2[a,b]$. Вновь рассмотрим оператор (1), но теперь будем предполагать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ интегрируемо с квадратом в прямоугольнике $[a,b]\times[a,b]$, т. е.

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t = M^2 < \infty. \tag{3}$$

Ядро, удовлетворяющее условию (3), называется ядром Гильберта – Шмидта.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ – измеримая функция и выполнено условие* (3)*. Тогда формула* (1) *определяет линейный ограниченный оператор в пространстве $L_2[a,b]$.*

Пусть X и Y – нормированные векторные пространства, A,B,C, ... – линейные ограниченные операторы из X в Y, множество которых обозначим через $\mathscr{B}(X,Y)$.

Теорема 8. *Множество $\mathscr{B}(X,Y)$ является нормированным пространством.*

В пространстве $\mathscr{B}(X,Y)$ определены два типа сходимости последовательности линейных ограниченных операторов.

Определение 5. Будем говорить, что последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{B}(X,Y)$ сходится *равномерно* к оператору $A\in\mathscr{B}(X,Y)$, если

$$\|A_n - A\| \to 0 \,\text{при}\, n\to\infty.$$

Теорема 9. *Для того, чтобы последовательность линейных ограниченных операторов $(A_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{B}(X,Y))$ сходилась к оператору A, равномерно необходимо и достаточно, чтобы $A_nx \rightrightarrows Ax$, при $n\to\infty$ равномерно по x в шаре $\|x\|\leqslant 1$.*

***Следствие** 1.* Пусть $A_n \rightrightarrows A$ равномерно при $n\to\infty$ и M – произвольное ограниченное множество в X. Тогда $A_nx \rightrightarrows Ax$ при $n\to\infty$ на множестве M.

Определение 6. Последовательность операторов $(A_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{B}(X,Y)$ сходится *сильно* к оператору A, если

$$\|A_nx - Ax\|_Y \to 0 \,\text{при}\, n\to\infty$$

при каждом фиксированном $x \in X$.

Теорема 10. *Если пространство Y банахово, то и пространство линейных ограниченных операторов $\mathscr{B}(X, Y)$ банахово.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Оператор $A : L_3[0,1] \to L_2[0,1]$ определяется формулой

$$Ax(t) = x(t^3).$$

Выясним, совпадает ли область задания оператора $\mathscr{D}(A) = \big\{x(t) \in L_3[0,1] \,:\, Ax(t) \in L_2[0,1]\big\}$ со всем пространством $L_3[0,1]$? Будет ли оператор линейным непрерывным, если $A : \mathscr{D}(A) \to L_2[0,1]$?

Решение. Пусть $x(t) \in L_3[0,1]$, т. е. $\int\limits_0^1 |x(t)|^3 \,\mathrm{d}t < +\infty$. Рассмотрим

$$\int\limits_0^1 |x(t^2)|^2 \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{1}{3\sqrt{\tau}}\,|x(\tau)|^2 \,\mathrm{d}\tau.$$

Функция $x(t) = t^{-1/6}$ принадлежит пространству $L_3[0,1]$, так как $\int\limits_0^1 |t^{-1/6}|^3 \,\mathrm{d}t < +\infty$, но $Ax(t) = t^{-1/2}$ не принадлежит пространству L_2[0,1], поскольку $\int\limits_0^1 |t^{-1/2}|^2 \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t^{-1} \,\mathrm{d}t \to +\infty$.

Рассмотрим теперь оператор A на области определения $\mathscr{D}(A)$. Оператор является линейным, поскольку

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2)(t) = \big(\alpha x_1(t^3) + \beta x_2(t^3)\big) = \alpha A x_1(t) + \beta A x_2(t).$$

Однако оператор не является непрерывным на области определения. Действительно, рассмотрим последовательность $x_n(t) \in \mathscr{D}(A)$

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = \sqrt[6]{n}, & 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 0, & 0 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

которая в пространстве $L_3[0,1]$ сходится к нулю.

$$\|x^{(n)}-0\|_{L_3[0,1]}=\Bigl(\int\limits_0^1|x^{(n)}(t)|^3\,\mathrm{d}t\Bigr)^{1/3}=\Bigl(\int\limits_0^{1/n}\Bigl(\sqrt[6]{n}\Bigr)^3\,\mathrm{d}t\Bigr)^{1/3}=$$

$$=\Bigl(\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\Bigr)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\to 0$$

при $n\to\infty$. Однако ее образ

$$Ax^{(n)}(t)=\begin{cases}\sqrt{n}, & 0\leqslant t\leqslant 1/n,\\ 0, & 1/n<t\leqslant 1,\end{cases}$$

принадлежащий пространству $L_2[0,1]$, к нулю не стремится, поскольку

$$\|Ax^{(n)}-0\|=\Bigl(\int\limits_0^1|Ax^{(n)}(t)|^2\,\mathrm{d}t\Bigr)^{1/2}=\Bigl(\int\limits_0^{1/n}\Bigl(\sqrt{n}\Bigr)^2\,\mathrm{d}t\Bigr)^{1/2}=1.$$

Таким образом, рассмотренная формула задает линейный оператор, который на области задания не является непрерывным.

Пример 2. Покажем, что оператор $A:\ L_3[0,1]\to L_2[0,1]$,

$$Ax(t)=tx(t^2)$$

является линейным ограниченным и вычислим его норму.

Решение. По определению, оператор является линейным, если для любых $x(t),y(t)\in L_3[0,1]$, и любых $\alpha,\beta\in\mathcal{K}$ выполняется условие линейности

$$A(\alpha x+\beta y)(t)=t(\alpha x+\beta y)(t^2)=\alpha tx(t^2)+\beta ty(t^2)=\alpha Ax(t)+\beta Ay(t).$$

Следовательно, оператор A является линейным.

Покажем, что A является ограниченным оператором, т. е. $\exists c>0$, что $\|Ax\|_{L_2[0,1]}\leqslant c\|x\|_{L_3[0,1]}$ для всех $x(t)\in L_3[0,1]$.

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]}=\Bigl(\int\limits_0^1|Ax(t)|^2\mathrm{d}t\Bigr)^{1/2}=\Bigl(\int\limits_0^1|tx(t^2)|^2\,\mathrm{d}t\Bigr)^{1/2}=\begin{bmatrix}t^2=\tau,\\ \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}\tau}{2\sqrt{\tau}}\end{bmatrix}=$$

$$= \Big(\int_0^1 |\sqrt{\tau}x(\tau)|^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\mathrm{d}\tau\Big)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\int_0^1 \sqrt{\tau}\,|x(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\Big)^{1/2} \leqslant$$

(к данному интегралу применим неравенство Гельдера при $p = 3/2$, $q = 3$, получим)

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\int_0^1 \Big(|x(\tau)|^2\Big)^{3/2}\mathrm{d}\tau\Big)^{2/3} \cdot \Big(\int_0^1 |\sqrt{\tau}|^3\,\mathrm{d}\tau\Big)^{1/3}\Big]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\int_0^1 \tau^{3/2}\,\mathrm{d}\tau\Big)^{1/6}\Big(\int_0^1 |x(\tau)|^3\,\mathrm{d}\tau\Big)^{1/3} = c \cdot \|x\|_{L_3[0,1]},$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\int_0^1 \tau^{3/2}\,\mathrm{d}\tau\Big)^{1/6} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{2}{5}\Big)^{1/6}.$$

Мы показали, что A является линейным ограниченным оператором. Из определения нормы линейного оператора следует, что

$$\|A\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{5}\right)^{1/6}.$$

Покажем, что $\|A\| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{5}\right)^{1/6}$. По определению точной верхней грани $\|A\| \geqslant \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ для всех $x(t) \in L_3[0,1]$. Выберем в качестве функции $x(t)$ функцию $x_0(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0,1]$, поскольку именно для такой функции неравенство Гельдера, которое было использовано выше при проведении оценок, обратится в равенство. Тогда

$$\|Ax_0(t)\|_{L_2[0,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\int_0^1 \sqrt{t}\,|\sqrt{t}|^2\mathrm{d}t\Big)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\int_0^1 t^{3/2}\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2},$$

а

$$\|x_0\|_{L_3[0,1]} = \Big(\int_0^1 |\sqrt{t}|^3\,\mathrm{d}t\Big)^{1/3} = \Big(\int_0^1 t^{3/2}\,\mathrm{d}t\Big)^{1/3}.$$

Значит,

$$\|A\| \geqslant \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\displaystyle\int_0^1 t^{3/2}\mathrm{d}t\right)^{1/2}}{\left(\int_0^1 t^{3/2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1 t^{3/2}\mathrm{d}t\right)^{1/6} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{5}\right)^{1/6}.$$

Пример 3. Вычислим норму оператора $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, который действует по формуле

$$Ax(t) = tx(t^2).$$

Решение. Покажем, что оператор A ограничен. С этой целью оценим норму $\|Ax\|_{L_2[0,1]}$ для всех $x(t) \in L_2[0{,}1]$.

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |Ax(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 t^2|x(t^2)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1 \sqrt{\tau}\,|x(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1 \sup_{0\leqslant\tau\leqslant 1}(\sqrt{\tau})\,|x(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1 |x(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\|x\|_{L_2[0,1]}.$$

Следовательно, $\|A\| \leqslant 1/\sqrt{2}$. С другой стороны, $\|A\| \geqslant \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ для всех $x(t) \in L_2[0,1]$. Выберем последовательность

$$x^{(n)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[1 - \dfrac{1}{n}, 1\right], \\ 0, & t \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right), \end{cases}$$

норма которой

$$\|x^{(n)}\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int_{1-1/n}^1 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Имеем,

$$\|Ax^{(n)}\|_{L_2[0,1]} = \Big(\int\limits_0^1 |Ax_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\int\limits_{1-1/n}^1 \sqrt{\tau}\,d\tau\Big)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3/2}\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}\left(1-1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{n^2}-O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n}} - O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Переходя к норме оператора, получим оценку

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - O\Big(\frac{1}{n}\Big) \leqslant \|A\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

из которой заключаем, что $\|A\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 4. Вычислим норму оператора $A: C[-2,0] \to C[-2,0]$, действующего по формуле

$$Ax(t) = (t^2+t-1)x(t).$$

Решение. Оператор A – это оператор умножения на непрерывную функцию $m(t) = t^2+t-1$. Его линейность очевидна, а ограниченность следует из оценки

$$\|Ax\|_{C[-2,0]} = \max_{-2\leqslant t\leqslant 0}|Ax(t)| = \max_{-2\leqslant t\leqslant 0}\big|(t^2+t-1)x(t)\big| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{-2\leqslant t\leqslant 0}|t^2+t-1| \max_{-2\leqslant t\leqslant 0}|x(t)| = \frac{5}{4}\|x\|_{C[-2,0]} = c\|x\|_{C[-2,0]}.$$

Норма является достижимой и достигается на функции $x_0(t) \equiv 1$.

Пример 5. Вычислить норму интегрального оператора Фредгольма $A: C[-1,2] \to C[-2,2]$, действующего по формуле

$$Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3(1+t)\,x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Р е ш е н и е. Интегральный оператор Фредгольма в пространстве непрерывных функций линеен. Это следует из линейности интеграла Римана. Покажем, что выполняется условие ограниченности, т. е. существует $c > 0$, что $\|Ax\|_{C[-2,2]} \leqslant c\|x\|_{C[-1,2]}$ для всех $x(t) \in C[-1,2]$.

Действительно,

$$\|Ax\|_{C[-2,2]} = \max_{-2\leqslant t\leqslant 2} |Ax(t)| = \max_{-2\leqslant t\leqslant 2} \left| \int\limits_{-1}^{1} s^3(1+t)x(s)\,\mathrm{d}s \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{-2\leqslant t\leqslant 2} |1+t| \int\limits_{-1}^{1} |s^3|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant 3 \int\limits_{-1}^{1} |s^3| \max_{-1\leqslant s\leqslant 1} |x(s)|\,\mathrm{d}s =$$

$$= 3 \max_{-1\leqslant s\leqslant 1} |x(s)|\, 2 \int\limits_{0}^{1} s^3\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{3}{2} \max_{-1\leqslant t\leqslant 2} |x(t)| = \frac{3}{2}\, \|x\|_{C[-1,2]}.$$

Значит, $\|A\| \leqslant 3/2$. Покажем, что $\|A\| \geqslant 3/2$. Заметим, что при любом фиксированном $t \in [-1,2]$ ядро $\mathcal{K}(t,s) = (1+t)s^3$ интегрального оператора по переменной $s \in [-1,1]$ меняет знак, поэтому построим последовательность $x^{(n)}(t)$ вида

$$x^{(n)}(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < -1/n, \\ nt, & -1/n \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1, & 1/n < t \leqslant 2, \end{cases}$$

с нормой $\|x^{(n)}\|_{C[-1,2]} = 1$. Тогда

$$\|A\| \geqslant \|Ax^{(n)}\|_{C[-2,2]} = \max_{-2\leqslant t\leqslant 2} |Ax^{(n)}(t)| =$$

$$= \max_{-2\leqslant t\leqslant 2} |1+t| \Bigg| \int\limits_{-1}^{-1/n} -s^3\,\mathrm{d}s + \int\limits_{-1/n}^{1/n} s^3 ns\,\mathrm{d}s + \int\limits_{1/n}^{1} s^3\,\mathrm{d}s \Bigg| =$$

$$= \max_{-2\leqslant t\leqslant 2} \left| (1+t)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^4} + \frac{2}{5n^4}\Big) \right| = \frac{3}{2} - O\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Следовательно, $\|A\| = 3/2$.

Пример 6. Вычислить норму оператора $A: C[-1,1] \to L_2[0,1]$, который действует по формуле

$$Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} tsx(s)\,\mathrm{d}s - x(0).$$

Решение. Отметим, что указанный оператор как сумма двух линейных операторов является линейным. Перейдем к доказательству ограниченности оператора. По определению ограниченности мы должны оценить норму

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]} = \left(\int\limits_0^1 |Ax(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int\limits_0^1 \left|t\int\limits_{-1}^1 sx(s)\,\mathrm{d}s - x(0)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Оценим выражение, находящееся под знаком модуля

$$\left|t\int\limits_{-1}^1 sx(s)\,\mathrm{d}s - x(0)\right| \leqslant |t|\int\limits_{-1}^1 |s|\big|x(s)\big|\,\mathrm{d}s + \big|x(0)\big| \leqslant$$

$$\leqslant |t| \max_{-1\leqslant s\leqslant 1} |x(s)| \int\limits_{-1}^1 |s|\,\mathrm{d}s + \max_{-1\leqslant s\leqslant 1} |x(s)| \leqslant (|t|+1)\,\|x\|_{C[-1,1]}.$$

Полученную оценку подставим в выражение для нормы $\|Ax\|_{L_2[0,1]}$.

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]} \leqslant \left(\int\limits_0^1 \Big((|t|+1)\,\|x\|\Big)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int\limits_0^1 (t+1)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \|x\|_{C[-1,1]}.$$

Откуда следует, что $\|A\| \leqslant \left(\int\limits_0^1 (t+1)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$. Для доказательства неравенства в обратную сторону построим последовательность

$$x^{(n)}(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 2nt-1, & 0 < t < \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

с нормой $\|x^{(n)}\|_{C[-1,1]} = 1$. Тогда

$$\|A\| \geqslant \|Ax^{(n)}(t)\| =$$

$$= \left(\int\limits_0^1 \left| t\int\limits_{-1}^0 -s\,\mathrm{d}s + t\int\limits_0^{1/n} ts(2ns-1)\,\mathrm{d}s + t\int\limits_{1/n}^1 s\,\mathrm{d}s + 1\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \to$$

$$\to \left(\int\limits_0^1 (t+1)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} - O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)$$

при $n \to \infty$. Это означает, что

$$\|A\| = \left(\int\limits_0^1 (t+1)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{7}{3}}\,\|x\|_{C[-1,1]}.$$

Пример 7. В пространстве бесконечных числовых последовательностей ℓ_2 рассмотрим оператор A, действующий по формуле $Ax = (\alpha_1x_1, \alpha_2x_2, \ldots)$, где $\bigl(\alpha_i\bigr)_{i=1}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел. При каком условии на последовательность $\bigl(\alpha_i\bigr)_{i=1}^{\infty}$ $\mathscr{D}(A) = l_2$? Когда оператор A ограничен и чему равна норма оператора?

Решение. По определению области задания

$$\mathscr{D}(A) = \{x(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2 : Ax = (\alpha_1x_1, \ldots, \alpha_nx_n, \ldots) \in l_2\}.$$

$Ax \in l_2$, если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_ix_i|^2$ сходится для всех $x \in l_2$.

Возможны 2 случая:

1) Последовательность (α_n) ограничена, т. е. $\exists \sup\limits_n |\alpha_n| = C < +\infty$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_ix_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (\sup_i |\alpha_i|)^2 |x_i|^2 = C^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2.$$

Это означает, что $\mathscr{D}(A) = l_2$ и $\|A\| \leqslant C$.

2) Последовательность (α_n) неограниченна, т. е. $\sup\limits_n |\alpha_n| = +\infty$, тогда $\mathscr{D}(A) \subset l_2$.

Действительно, пусть $\alpha_n = n$. Рассмотрим несчетное множество M_α, где

$$M_\alpha = \left\{ x : x = \left(1, \frac{1}{2^{1+\alpha}}, \dots, \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \dots\right), 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2} \right\},$$

которое принадлежит пространству ℓ_2, но не принадлежит $\mathscr{D}(A)$, так как $A(M_\alpha) = \left\{ x : x = \left(1, \frac{1}{2^\alpha}, \dots, \frac{1}{n^\alpha}, \dots\right) \right\}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^\alpha}\right|^2 \to \infty$. Оператор неограничен на области задания. Рассмотрим последовательность $x^{(n)} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots)$, $\|x^{(n)}\| = 1$, для которой $\|Ax_n\| = |\alpha_n| < \infty$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|A\| = \sup \|Ax^{(n)}\| = \sup |\alpha_n| = \infty.$$

Покажем, что в первом случае $\|A\| = C$. По определению нормы оператора, $\|A\| \geqslant \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ для любого $x \in \ell_2$. Возьмем в качестве x элемент $x^{(n)}$, $\|x^{(n)}\| = 1$, тогда $\|A\| \geqslant |\,\alpha_n| \Rightarrow \|A\| = \sup\limits_n |\,\alpha_n|$.

Пример 8. Исследовать на сходимость последовательность операторов A_n, действующих в пространстве $C[0,1]$, если

$$A_n x(t) = n \int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Решение. Заметим, что если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $F(t)$, что $F'(t) = x(t)$, то

$$n \int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{F(t+1/n) - F(t)}{1/n} \underset{n\to\infty}{\to} F'(t) = x(t).$$

Следовательно, последовательность A_n сильно сходится к тождественному оператору, т. е. $\|A_n x - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ при $\forall x(t) \in C[0,1]$. Покажем, что равномерной сходимости нет, т. е. $\|A_n - I\|$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. Выберем последовательность $x_n(t) = t^{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ с нормой $\|x_n\| = 1$.

Тогда

$$\|A_n x^{(n)} - x^{(n)}\| = \max_{0\le t\le 1}\left| n\int\limits_t^{t+1/n} \tau^{n-1}\,\mathrm{d}\tau - t^{n-1}\right| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\tau^n\Big|_t^{t+1/n} - t^{n-1}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n(n-1)}{2n^2}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t^{n-2}| \geqslant \frac{1}{4}.$$

Имеем, $\|A_n - I\| \geqslant \|A_n x^{(n)} - x^{(n)}\| \geqslant \dfrac{1}{4}$. А это и означает, что равномерная сходимость отсутствует.

Задание 1. Доказать, что оператор умножения на непрерывную функцию, действующий в пространстве $X = C[a,b]$ является линейным ограниченным, найти его норму.

1.1. $Ax(t) = (5 - |t+8|)\,x(t), \quad t \in [-10, 10];$

1.2. $Ax(t) = \big(t - \sqrt{t-2}\big)\,x(t), \quad t \in [2, 8];$

1.3. $Ax(t) = \big(t^2 - 2t + 3\big)\,x(t), \quad t \in [1, 5];$

1.4. $Ax(t) = \big(-t^2 - 4t + 1\big)\,x(t), \quad t \in [-3, 0];$

1.5. $Ax(t) = \dfrac{2}{5 + |3t-2|}\,x(t), \quad t \in [-1/3, 1/3];$

1.6. $Ax(t) = \dfrac{2}{t^2 - 2t + 2}\,x(t), \quad t \in [-1, 5];$

1.7. $Ax(t) = \dfrac{2t}{t^2 + 1}\,x(t), \quad t \in [-2, 4];$

1.8. $Ax(t) = \dfrac{t}{4t^2 + 9}\,x(t), \quad t \in [-8, 15];$

1.9. $Ax(t) = \big(t^2 + 6t + 11\big)\,x(t), \quad t \in [-4, 2];$

1.10. $Ax(t) = \big(-t^2 + 2t + 2\big)\,x(t), \quad t \in [-1, 2];$

1.11. $Ax(t) = \dfrac{4t + 31}{t + 7}\,x(t), \quad t \in [-6, 10];$

1.12. $Ax(t) = \big(t^3 - 3t\big)\,x(t), \quad t \in [1, 5];$

1.13. $Ax(t) = \big(12t - t^3\big)\,x(t), \quad t \in [2, 4];$

1.14. $Ax(t) = \dfrac{4}{2 - t}\,x(t), \quad t \in [3, 6];$

1.15. $Ax(t) = \dfrac{t^3+8}{t+2}\,x(t), \quad t \in [3,5].$

Задание 2. Доказать, что оператор замены переменной в пространстве $X = L_p[a,b]$ является линейным ограниченным и найти его норму.

2.1. $X = L_2[0,1], \quad Ax(t) = (t^5 - t^8)x(t^3);$

2.2. $X = L_3[-1,1], \quad Ax(t) = t^2 x(t^3);$

2.3. $X = L_3[0,1], \quad Ax(t) = \sqrt{t}x(\sqrt[4]{t});$

2.4. $X = L_{3/2}[0,1], \quad Ax(t) = tx(\sqrt{t});$

2.5. $X = L_1[-1,1], \quad Ax(t) = (t^2 - 2t)x(\sqrt[3]{t});$

2.6. $X = L_2[-1,1], \quad Ax(t) = (t^2 + t)x(t^3)\ ;$

2.7. $X = L_1[-1,1], \quad Ax(t) = \big((t-1)^2 + t\big)\, x(\sqrt[3]{t});$

2.8. $X = L_2[-1,0], \quad Ax(t) = t^2(t-1)x(t^3);$

2.9. $X = L_3[0,1], \quad Ax(t) = tx(t^4);$

2.10. $X = L_{5/3}[-1,2], \quad Ax(t) = (t - 3t^2)x(\sqrt[3]{t});$

2.11. $X = L_{7/2}[0,1], \quad Ax(t) = (t^2 - t)x(\sqrt{t});$

2.12. $X = L_5[-1,1], \quad Ax(t) = (t^2 - t)x(t^5);$

2.13. $X = L_3[0,1], \quad Ax(t) = (t^3 - t)x(t^3);$

2.14. $X = L_{9/2}[-1,1], \quad Ax(t) = (t^3 - t^6)x(t^3);$

2.15. $X = L_{3/2}[-1,1], \quad Ax(t) = (t^5 - t^{10})x(\sqrt[5]{t}).$

Задание 3. Доказать, что интегральный оператор с вырожденным ядром является линейным и ограниченным оператором, если $A : C[a,b] \to C[\alpha,\beta]$. Вычислить норму оператора.

3.1. $A : C[-1,1] \to C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (\ln(t+5) + t)s\,x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.2. $A : C[-2,2] \to C[3,5], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} t(s+1)\,x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.3. $A : C[-1,1] \to C[-1,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/3}^{1/3} \big(t^2 + t - 5\big)\, s\,x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.4. $A : C[-1,2] \to C[-2,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (t^3 + t - 2)s^3\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.5. $A : C[-2,1] \to C[1,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-2}^{1} te^{t+s} s\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.6. $A : C[-1,1] \to C[0,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3 \ln(1+t)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.7. $A : C[-1,1] \to C[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(t^3 - t - 1)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.8. $A : C[0,1] \to C[-1,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} \left(s - \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right) x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.9. $A : C[-1,1] \to C[0,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} \left(s - \frac{1}{2}\right) t^2\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.10. $A : C[-\pi,\pi] \to C[0,\pi], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{\pi} \sin s \sin t\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.11. $A : C[-2,2] \to C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} (s-1)(t^2+2)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.12. $A : C[-1,2] \to C[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3(t^3 - t)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.13. $A : C[-1,2] \to C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3 \ln(1+t)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.14. $A : C[-1,1] \to C[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(1-t)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.15. $A : C[-1,3] \to C[-2,0], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - |t| + 2)s^5\, x(s)\,\mathrm{d}s.$

Задание 4. Вычислить норму оператора $A : L_p[a,b] \to L_q[\alpha,\beta]$.

4.1.] $A : L_3[0,1] \to L_{3/2}[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} s(1+t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.2. $A : L_4[-1,1] \to L_{5/2}[-1,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^2 t^3 x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.3. $A : L_3[0,1] \to L_1[-1,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^{1/2} ts^2 x(s^{3/2})\,\mathrm{d}s;$

4.4. $A : L_3[-1,1] \to L_2[-1,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (1+t)(1+s)^3 x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.5. $A : L_4[0,1] \to L_1[-1,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^{1/2} t^2 s^2 x(s^{5/2})\,\mathrm{d}s;$

4.6. $A : L_{5/3}[0,1] \to L_1[0,2], \quad Ax(t) = \int\limits_0^{1} st^{-1/3} x(\sqrt{s})\,\mathrm{d}s;$

4.7. $A : L_3[-1,1] \to L_1[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(t-1)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.8. $A : L_2[0,1] \to L_1[-1,2], \quad Ax(t) = \int\limits_0^{1} (s-1/2)\, x(s) ds;$

4.9. $A : L_3[-1,1] \to L_{3/2}[0,2], \quad Ax(t) = \int\limits_0^{1} t^2 s^3 x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.10. $A : L_2[0,2\pi] \to L_1[0,\pi], \quad Ax(t) = \int\limits_0^{\pi} t\sin(s)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.11. $A : L_3[0,2] \to L_{5/2}[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^{1} t^{3/2} s^3 x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.12. $A : L_2[-1,2] \to L_1[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3(1-t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.13. $A : L_3[-1,2] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3 \ln(1+t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.14. $A : L_3[-1,1] \to L_1[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(1-t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.15. $A : L_4[-1,3] \to L_2[-2,0], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (1-t)s^5 x(s)\,\mathrm{d}s.$

Задание 5. Вычислить норму оператора $A : C[a,b] \to L_p[0,1]$.

5.1. $Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} tsx(s)\,\mathrm{d}s - x(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 2;$

5.2. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} ts^2x(s)\,\mathrm{d}s + x(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 2;$

5.3. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} t^2sx(s)\,\mathrm{d}s + tx(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3;$

5.4. $Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} (t+1)sx(s)\,\mathrm{d}s - tx(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3;$

5.5. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1/2} t^2sx(s)\,\mathrm{d}s - t^2x(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 1;$

5.6. $Ax(t) = \int\limits_{-1/4}^{1/4} tsx(s)\,\mathrm{d}s + tx(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 1;$

5.7. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} \big(t^2+1\big)\, sx(s)\,\mathrm{d}s + tx(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 1;$

5.8. $Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} (t+1)\, sx(s)\,\mathrm{d}s - tx(1), \quad x(t) \in C[0,1], \quad p = 3;$

5.9. $Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} (t-1)\, s^3x(s)\,\mathrm{d}s + t^2x(1), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 1;$

5.10. $Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} (t+1)\,(s-1)\,x(s)\,\mathrm{d}s - t^2x(1), \; x(t) \in C[0,1], \; p = 1;$

5.11. $Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} (\ln t + 1)\, sx(s)\,\mathrm{d}s - tx(1), \quad x(t) \in C[0,1], \quad p = 3;$

5.12. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3(1-t)x(s)\,\mathrm{d}s + tx(0) \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3/2;$

5.13. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3\ln(1+t)x(s)\,\mathrm{d}s + tx(1) \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3/2;$

5.14. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s(1-t^2)x(s)\,\mathrm{d}s - tx(1), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3;$

5.15. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (s-1)(t+2)x(s)\,\mathrm{d}s - tx(1), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3.$

Задание 6. Вычислить норму оператора $A : \ell_p \to \ell_q$.

6.1. $A : \ell_6 \to \ell_6, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{3}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{4}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt{k+2}}, \ldots\right);$

6.2. $A : \ell_5 \to \ell_5, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{5}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{5^2}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt{5^k}}, \ldots\right);$

6.3. $A : \ell_7 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{3}, \dfrac{x_2}{3^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{3^k}, \ldots\right);$

6.4. $A : \ell_{5/2} \to \ell_2, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{1}, \dfrac{x_2}{2}, \ldots, \dfrac{x_k}{k}, \ldots\right);$

6.5. $A : \ell_5 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{5}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{5^2}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt{5^k}}, \ldots\right);$

6.6. $A : \ell_{7/2} \to \ell_2, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{4}, \dfrac{x_2}{4^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{4^k}, \ldots\right);$

6.7. $A : \ell_4 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt[3]{3}}, \dfrac{x_2}{\sqrt[3]{4}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt[3]{k+2}}, \ldots\right);$

6.8. $A : \ell_5 \to \ell_5, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt[3]{7}}, \dfrac{x_2}{\sqrt[3]{7^2}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt[3]{7^k}}, \ldots\right);$

6.9. $A : \ell_{7/3} \to \ell_2, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{6}, \dfrac{x_2}{6^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{6^k}, \ldots\right);$

6.10. $A : \ell_3 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{2}, \dfrac{2\,x_2}{2^2}, \ldots, \dfrac{k\,x_k}{2^k}, \ldots\right);$

6.11. $A : \ell_{9/2} \to \ell_4, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt[4]{5}}, \dfrac{x_2}{\sqrt[4]{5^2}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt[4]{5^k}}, \ldots\right);$

6.12. $A : \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = \left(\dfrac{\sin 1\,x_1}{3}, \dfrac{\sin 2\,x_2}{3^2}, \ldots, \dfrac{\sin k\,x_k}{3^k}, \ldots\right);$

6.13. $A : \ell_{3/2} \to \ell_{3/2}, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{3}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{4}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt{k+2}}, \ldots\right);$

6.14. $A : \ell_2 \to \ell_1, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{2}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{2^2}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt{2^k}}, \ldots\right);$

6.15. $A : \ell_7 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{9}, \dfrac{x_2}{9^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{9^k}, \ldots\right).$

Задание 7. Исследовать на сходимость следующие последовательности линейных ограниченных операторов.

7.1. В пространстве ℓ_2 для элемента $x\,(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2$ определим последовательности операторов

$$A_n x = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \ldots, \frac{x_k}{n}, \ldots\right), B_n x = \Bigl(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\Bigr).$$

7.2. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^t e^s x(s)\,\mathrm{d}s$ и последовательность операторов

$$A_n x(t) = \int\limits_0^t \left(\sum_{k=0}^n \frac{s^k}{k!}\right) x(s)\,\mathrm{d}s \ n \in \mathbb{N}.$$

Сходится ли последовательности A_n к A? Каков характер сходимости?

7.3. Рассмотрим $A : \ \ C[0,1] \to C[0,1], \ Ax(t) = \int\limits_0^1 \sin(st)\ x(s)\,\mathrm{d}s$ и последовательность операторов $A_n, \quad B_n \, : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$A_n x(t) = \int\limits_0^t \left(\sum_{k=0}^n \frac{(ts)^k}{k!}\right) x(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$B_n x(t) = \int\limits_{\varepsilon_n}^{1-\varepsilon_n} \sin(st) x(s)\,\mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\varepsilon_n > 0, \ \varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Сходятся ли последовательности A_n, B_n к A? Каков характер сходимости?