5. Логика предикатов.

1. Для каждого из следующих высказываний найдите предикат (одноместный или многоместный), который обращается в данное высказывание при замене предметных переменных подходящими значениями из соответствующих областей:
   (а) «$3 + 4 = 7$»; (б) «3 делит 12»;
   (в) «$\mathrm{tg}(\pi/4) = 1$»; (г) «$(-1) + (-3) + 4 = 0$».

2. Определите, какие из следующих высказываний являются истинными, а какие ложными, если известно, что все переменные пробегают множество $\mathbb{R}$.
   (а) $\forall x\, \exists y\ (x + y = 7)$; (б) $\exists y\, \forall x\ (x + y = 7)$;
   (в) $\exists x\, \forall y\ (x + y = 7)$; (г) $\forall x\, \forall y\ (x + y = 7)$;
   (д) $(\exists x\, \forall y\ (x^2 + y^2 = 16)) \to (3 = 4)$; (е) $\forall x\ ((x^2 > x) \sim ((x > 1) \vee (x < 0))$;
   (ж) $\forall b\, \exists a\, \forall x\ (x^2 + ax + b > 0)$; (з) $\forall x\ (((x > 1) \vee (x < 2)) \sim (x = x))$;
   (и) $\exists b\, \exists a\, \exists x\ (x^2 + ax + b = 0)$; (к) $\exists a\, \forall b\, \exists x\ (x^2 + ax + b = 0)$.

3. Из предиката $D(x, y) =$ «x делит y» $(x, y \in \mathbb{N})$ с помощью кванторов постройте всевозможные высказывания и определите, какие из них истинны, а какие ложны.

4. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – такие одноместные предикаты, заданные над одним и тем же множеством M, что высказывание:
   (а) $\exists x\ (P(x) \to (\overline{P}(x) \vee \overline{\overline{Q}(x) \to P(x)}))$ истинно; докажите, что высказывание $\forall x\ P(x)$ ложно;
   (б) $\forall x\ ((\overline{Q}(x)\,\&\,P(x)) \to (P(x) \to Q(x))$ ложно; докажите, что высказывание $\exists x\ P(x)$ истинно, а высказывание $\forall x\ Q(x)$ ложно;
   (в) $\exists x\ (P(x)\,\&\,(P(x) \sim (Q(x) \vee \overline{P}(x))))$ истинно; докажите, что высказывание $\exists x\ (P(x)\,\&\,Q(x))$ также будет истинным;
   (г) $\forall x\ (\overline{P}(x) \to (P(x) \vee \overline{\overline{Q}(x) \to P(x)}))$ ложно; докажите, что высказывание $\forall x\ P(x)$ ложно, а высказывание $\exists x\ Q(x)$ истинно.

5. Придайте следующим формулам указанные интерпретации и определите истинностные значения получающихся высказываний:
   (а) $(\forall x\ \overline{P(x, x)})\,\&\,(\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((P(x, y)\,\&\,P(y, z)) \to P(x, z)))\,\&\,(\forall x\, \exists y\ P(x, y))$, $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, $P(x, y) =$ «$x < y$»;
   (б) предыдущая формула, $M = \mathbb{N}$, $P(x, y) =$ «$x < y$»;
   (в) $(\exists x\ P(x)) \to P(y)$, $M = \{2, 3\}$, $P(x) =$ «2 делит x», $y = 3$;
   (г) $(\forall x\ P(x)) \sim (\forall x\ Q(x))$, $M = \mathbb{N}$, $P(x) =$ «3 делит x», $Q(x) =$ «2 делит x».

6. Определите, какие из следующих формул выполнимы, а какие нет (т. е. являются тождественно ложными):
   (а) $\exists x\, \forall y\ (Q(x, y) \to (\forall z\ R(x, y, z)))$; (б) $\exists x\, \forall y\ (Q(x, x)\,\&\,\overline{Q(x, y)})$;
   (в) $(\forall x\, (P(x) \vee Q(x))) \to ((\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, (Q(x))))$; (г) $\forall x\, (P(x)\,\&\,\overline{P(x)})$.

7. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями логики предикатов:
   (а) $(\forall x\ (P(x)\,\&\,Q(x))) \sim ((\forall x\ P(x))\,\&\,(\forall x\ Q(x)))$; (б) $(\exists x\ P(x, x)) \to (\exists x\, \exists y\ P(x, y))$;
   (в) $(\forall x\ (P(x) \to Q)) \sim ((\exists x\ P(x)) \to Q)$; (г) $\exists x\ (P(y) \to P(x))$.

8. Докажите, что справедливы следующие равносильности:
   (а) $\forall x\ (P(x)\,\&\,Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x))\,\&\,(\forall x\ Q(x))$; (б) $\overline{\exists x\ P(x)} \equiv \forall x\ \overline{P(x)}$;
   (в) $\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \vee (\exists x\ Q(x))$; (г) $\overline{\forall x\ P(x)} \equiv \exists x\ \overline{P(x)}$.

5. Логика предикатов.

1. Для каждого из следующих высказываний найдите предикат (одноместный или многоместный), который обращается в данное высказывание при замене предметных переменных подходящими значениями из соответствующих областей:
   (а) «$3 + 4 = 7$»; (б) «3 делит 12»;
   (в) «$\mathrm{tg}(\pi/4) = 1$»; (г) «$(-1) + (-3) + 4 = 0$».

2. Определите, какие из следующих высказываний являются истинными, а какие ложными, если известно, что все переменные пробегают множество $\mathbb{R}$.
   (а) $\forall x\, \exists y\ (x + y = 7)$;
   (б) $\exists y\, \forall x\ (x + y = 7)$;
   (в) $\exists x\, \forall y\ (x + y = 7)$;
   (г) $\forall x\, \forall y\ (x + y = 7)$;
   (д) $(\exists x\, \forall y\ (x^2 + y^2 = 16)) \to (3 = 4)$;
   (е) $\forall x\ ((x^2 > x) \sim ((x > 1) \vee (x < 0))$;
   (ж) $\forall b\, \exists a\, \forall x\ (x^2 + ax + b > 0)$;
   (з) $\forall x\ (((x > 1) \vee (x < 2)) \sim (x = x))$;
   (и) $\exists b\, \exists a\, \exists x\ (x^2 + ax + b = 0)$;
   (к) $\exists a\, \forall b\, \exists x\ (x^2 + ax + b = 0)$.

3. Из предиката $D(x, y) =$ «x делит y» $(x, y \in \mathbb{N})$ с помощью кванторов постройте всевозможные высказывания и определите, какие из них истинны, а какие ложны.

4. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – такие одноместные предикаты, заданные над одним и тем же множеством M, что высказывание:
   (а) $\exists x\ (P(x) \to (\overline{P}(x) \vee \overline{\overline{Q}(x) \to P(x)}))$ истинно; докажите, что высказывание $\forall x\ P(x)$ ложно;
   (б) $\forall x\ ((\overline{Q}(x)\,\&\,P(x)) \to (P(x) \to Q(x))$ ложно; докажите, что высказывание $\exists x\ P(x)$ истинно, а высказывание $\forall x\ Q(x)$ ложно;
   (в) $\exists x\ (P(x)\,\&\,(P(x) \sim (Q(x) \vee \overline{P}(x))))$ истинно; докажите, что высказывание $\exists x\ (P(x)\,\&\,Q(x))$ также будет истинным;
   (г) $\forall x\ (\overline{P}(x) \to (P(x) \vee \overline{\overline{Q}(x) \to P(x)}))$ ложно; докажите, что высказывание $\forall x\ P(x)$ ложно, а высказывание $\exists x\ Q(x)$ истинно.

5. Придайте следующим формулам указанные интерпретации и определите истинностные значения получающихся высказываний:
   (а) $(\forall x\ \overline{P(x,x)})\,\&\,(\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((P(x,y)\,\&\,P(y,z)) \to P(x,z)))\,\&\,(\forall x\, \exists y\ P(x,y))$, $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, $P(x, y) =$ «$x < y$»;
   (б) предыдущая формула, $M = \mathbb{N}$, $P(x, y) =$ «$x < y$»;
   (в) $(\exists x\ P(x)) \to P(y)$, $M = \{2, 3\}$, $P(x) =$ «2 делит x», $y = 3$;
   (г) $(\forall x\ P(x)) \sim (\forall x\ Q(x))$, $M = \mathbb{N}$, $P(x) =$ «3 делит x», $Q(x) =$ «2 делит x».

6. Определите, какие из следующих формул выполнимы, а какие нет (т. е. являются тождественно ложными):
   (а) $\exists x\, \forall y\ (Q(x,y) \to (\forall z\ R(x,y,z)))$;
   (б) $\exists x\, \forall y\ (Q(x,x)\,\&\,\overline{Q(x,y)})$;
   (в) $(\forall x\,(P(x) \vee Q(x))) \to ((\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\,(Q(x))))$;
   (г) $\forall x\,(P(x)\,\&\,\overline{P(x)})$.

7. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями логики предикатов:
   (а) $(\forall x\ (P(x)\,\&\,Q(x))) \sim ((\forall x\ P(x))\,\&\,(\forall x\ Q(x)))$;
   (б) $(\exists x\ P(x,x)) \to (\exists x\, \exists y\ P(x,y))$;
   (в) $(\forall x\ (P(x) \to Q)) \sim ((\exists x\ P(x)) \to Q)$;
   (г) $\exists x\ (P(y) \to P(x))$.

8. Докажите, что справедливы следующие равносильности:
   (а) $\forall x\ (P(x)\,\&\,Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x))\,\&\,(\forall x\ Q(x))$;
   (б) $\overline{\exists x\ P(x)} \equiv \forall x\ \overline{P(x)}$;
   (в) $\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \vee (\exists x\ Q(x))$;
   (г) $\overline{\forall x\ P(x)} \equiv \exists x\ \overline{P(x)}$.