БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Лекции по курсу "Математический анализ – 4"

для студентов специальностей

"Компьютерная безопасность"

"Экономическая кибернетика"

"Актуарная математика"

"Прикладная криптография"

Лектор
кандидат физико-математических наук,
доцент
Васьковский М.М.

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Комплексные числа и функции **4**

2 Последовательности комплексных чисел **5**

3 Ряды комплексных чисел **6**

4 Кривые комплексной плоскости **6**

5 Области в C **7**

6 Элементарные ФКП **7**

7 Дифференцирование комплексных функций, критерий дифференцируемости **11**

8 Сопряжённые гармонические функции **14**

9 Геометрический смысл производной **15**

10 Интегрирование комплексных функций **16**

11 Интегральная теорема Коши и следствия из нее **17**

12 Первообразная для комплексных функций **18**

13 Интегральная формула Коши и следствия из нее **19**

14 Степенные ряды. Почленное дифференцирование степенных рядов **20**

15 Нули регулярной функции **22**

16 Теорема единственности **23**

17 Обратная функция **24**

18 Разложение функции в ряд Лорана **25**

19 Единственность разложения в ряд Лорана. Оценка коэффициентов ряда Лорана **27**

20 Классификация изолированных особых точек комплексных функций **28**

21 Основная теорема алгебры **31**

22 Вычет функции в конечной особой точке **32**

23 Основная теорема теории вычетов и следствия из неё **33**

24 Вычисление интегралов от рациональных функций с помощью вычетов **35**

25 Нахождение преобразования Фурье рациональной функции **37**

26 Интегралы Френеля **39**

27 Теорема о сходимости преобразования Лапласа **40**

28 Теорема о регулярности преобразования Лапласа **41**

29 Свойства преобразования Лапласа I **43**

30 Свойства преобразования Лапласа II **44**

31 Вычисление преобразования Лапласа от некоторых элементарных функций **45**

32 Формула Меллина **47**

33 Нахождение оригинала по изображению **48**

34 Применения преобразования Лапласа к решению уравнений **50**

35 Конформные отображения **52**

36 Свойства дробно-линейного отображения **54**

37 Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями **57**

38 Принцип аргумента **59**

39 Теорема Руше **61**

1 Комплексные числа и функции

Определение 1.1 *Комплексные числа определяются как пара чисел $x, y\ \in C$, если для этих пар понятия равенства, сложения и умножения определены следующим образом:*

1. Комплексные числа $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$ называются *равными*, если $x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$.
2. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ – *сложение*;

   $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ – умножение.

C – множество комплексных чисел.

$(0, 1) = i$ – мнимая единица.

Пары вида $(x, 0)$ отождествляются с *действительными числами*: $(x, 0) = x$.

$(x, 0) + (0, y) = \ x + iy$ – *алгебраическая запись* комплексного числа, где $x-$ *действительная часть* ($Re\ z_n$), $y-$ *мнимая часть* (Imz_n).

$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}-$ *модуль* комплексного числа (x, y) .

Если $z = x + iy$, то $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным для z.

Свойства модуля:

1. $|z| \geq 0; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 + 0i$
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Комплексные числа изображаются на так называемой комплексной плоскости. Ось, соответствующая в прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, называется действительной осью, а оси ординат - мнимой осью. Комплексному числу $z = a + bi$ будет однозначно соответствовать на комплексной плоскости точка $(a; b) : z = a + bi \Leftrightarrow (a; b)$. То есть на действительной оси откладывается действительная часть комплексного числа, а на мнимой - мнимая.

Тригонометрическая и экспоненциальная формы комплексного числа

Положение точки на плоскости можно задать не только декартовыми, но и полярными координатами.

$(r, \varphi)-$ запись комплексного числа в полярных координатах.

Определение 1.2 *$\varphi-$ угол между вектором и положительным направлением Ox. φ называют аргументом z.*

$$\varphi = Arg\ z$$

Для числа z = 0 аргумент не определяется.

Значение аргумента определяется с точностью до целого числа оборотов. Чтобы устранить эту неопределенность, договариваются, что аргумент считается принадлежащим промежутку $[-\pi; \pi]$ или $[0; 2\pi]$. Эта величина называется главным значением аргумента.

Таким образом

$$Argz = argz + 2\pi k, k \in Z$$

Из связи декартовых и полярных координат следует *тригонометрическая* форма записи комплексных чисел:

$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Из формулы выше получается следующее выражение:

$z = |z|(\cos \mathrm{Arg\ z} + i \sin \mathrm{Arg\ z})$.

Аргумент $\varphi = Arg\ z$ удовлетворяет отношению $tg\ \varphi = \frac{y}{x}$, но не все φ являются главным аргументом.

Поэтому

$$argz = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, x > 0 \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, x = 0, y \geq 0 \\ -\pi + arctg\frac{y}{x}, x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Перейдем к *экспоненциальной* форме.

Имеет место формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi$$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} = |z|e^{\text{ i argz}} -$ *экспоненциальная* форма комплексного числа.

В экспоненциальной форме легко производить умножение и деление комплексных чисел:

$z_1 z_2 = \ r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \ \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Из этих формул следует формула Муавра: $z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{i\varphi n} = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$

Рассмотрим уравнение $z^n = a$, где $a = r_0 e^{i\varphi_0}$

$(re^{i\varphi})^n = r_0 e^{i\varphi_0}$

$r^n e^{i\varphi n} = r_0 e^{i\varphi_0}$

$r^n = r_0 \Rightarrow r = \sqrt[n]{r_0}\ \varphi = \varphi_0 \Rightarrow \varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}$

Замечание 1.1 *Геометрически корни располагаются в вершинах правильного н-угольника.*

2 Последовательности комплексных чисел

Определение 2.1 (z_n) *– последовательность комплексных чисел. Число* $a \in C$ *– называется пределом последовательности* z_n*, если:*

$\forall\varepsilon > 0, \exists\nu(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \nu(\varepsilon) : |z_n - a| \leq \varepsilon$.

Другими словами $\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0$.

Последовательность, которая имеет конечный предел, называется *сходящейся.*

Каждой последовательности комплексных чисел соответствуют последовательности $(x_n), (y_n)$, где $x_n = Re\ z_n$, $y_n = Im\ z_n$.

Теорема 2.1 *Существование предела* $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ *равносильно существованию* $\lim_{n\to\infty} x_n$, $\lim_{n\to\infty} y_n$*, причем* $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n$.

Доказательство: Обозначим $a = \alpha + i\beta$

$\Rightarrow)$ $\lim_{n\to\infty} |z_n| = a \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon), \forall n \geq \delta(\varepsilon),\ |z_n - a| \leq \varepsilon \Longrightarrow \sqrt{|x_n - \alpha|^2 + |y_n - \beta|^2} \leq \varepsilon \Rightarrow$

$$\begin{matrix} |x_n-\alpha|\le\varepsilon \\ |y_n-\beta|\le\varepsilon \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \lim_{n\to\infty} x_n=\alpha \\ \lim_{n\to\infty} y_n=\beta \end{matrix}$$

$\Leftarrow$) $\begin{matrix} \lim_{n\to\infty} x_n=\alpha \\ \lim_{n\to\infty} y_n=\beta \end{matrix} \Rightarrow |z_n-a|\le|(x_n-\alpha)+i(y_n-\beta)|\le|(x_n-\alpha)|+|(y_n-\beta)|\le 2\varepsilon$

Из определения предела и доказанной теоремы следуют обычные свойства последовательностей комплексных чисел:

- Критерий Коши
- Арифметика пределов
- Если $\lim_{n\to\infty} z_n=a$, то $\lim_{n\to\infty}|z_n|=|a|$

3 Ряды комплексных чисел

Определение 3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *– числовой ряд с комплексными членами.*

Ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность (S_n) его частичных сумм $\sum_{k=1}^{n} z_k$. При этом предел S последовательности (S_n) называется суммой ряда. Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$ называется n-м остатком ряда..

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$, составленный из модулей z_n . Заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ – ряд с действительными положительными членами.

Критерий сходимости: Для сходимости ряда с комплексными членами необходимо и достаточно, чтобы сходились два ряда с действительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} x_n=\sum_{n=1}^{\infty} Re\ z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n=\sum_{n=1}^{\infty} Im\ z_n$.

Из определения ряда и критерия сходимости следуют обычные свойства рядов комплексных чисел, а также признаки сходимости:

- Критерий Коши
- Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} z_n=z_0$
- Признак Даламбера. Если $\lim_{n\to\infty}|\frac{z_{n+1}}{z_n}|=q<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно.
- Признак Коши. Если $\lim_{n\to\infty}\sqrt{|z_n|}=q<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно.

4 Кривые комплексной плоскости

На кривую в C можно смотреть как на кривую в R^2.

Пусть $\sigma:|\alpha;\beta|\to R^2$, тогда $z=\sigma(t)$, где $t\in|\alpha;\beta|-$ её векторно-параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x=\varrho(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$

Между C и R^2 можно установить взаимно-однозначное соответствие. Поэтому с точками на l будем иметь такое:

$z=x(t)+iy(t)=\varrho(t)+i\varphi(t)=\sigma(t)$

Определение 4.1 *Уравнение* $z = \sigma(t)$ *, где* $t \in |\alpha; \beta|$ *, называется параметрическим уравнением кривой* l *на комплексной плоскости.*

Кривая l считается ориентированной в направлении возрастания параметра t.
$\sigma(\alpha)-$ начало кривой, $\sigma(\beta)-$ конец кривой.

Определение 4.2 *Простая кривая – кривая без самопересечений.*

Определение 4.3 *Гладкая кривая – если функция* $\sigma(t)$ *– непрерывна, дифференцируема и* $\sigma'(t) \neq 0$ *во всех точках.*

Геометрический смысл $\sigma'(t)$ – вектор касательной $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$.
Поэтому угол между кривой и осью Оx в точке t_0 будет $\alpha = arg\sigma'(t)$.

Определение 4.4 *Контур – замкнутая кривая.*

5 Области в C

Определение 5.1 *Область – открытое связное множество.*

Определение 5.2 *Компакт – замкнутое ограниченное множество.*

Далее рассматриваем области, границы которых состоят из конечного числа кусочно-гладких кривых.

Определение 5.3 *Ориентацию* ∂D *границы области* D *считаем положительной, если при движении по границе область остается слева.*

6 Элементарные ФКП

1. **Линейная функция**

$$w = f(z) = az,\ a \in C$$

Эта функция непрерывна на C . Если $a \neq 0$, она однозначна и однолистна. Обратная функция $z = \frac{1}{a}\omega$ также является линейной.

Представим a, z в показательной форме:

$$a = |a|e^{i\alpha}, z = |z|e^{i\varphi},\ \omega = |a|e^{i\alpha}|z|e^{i\varphi} = |a||z|e^{i(\alpha+\varphi)}.$$

Таким образом

$$|\omega| = |a||z|, arg\omega = arg\alpha + argz.$$

Таким образом функция $\omega = az$ осуществляет растяжение (сжатие) в $|a|$ раз и поворот на угол $\alpha = arga$. Функция $\omega = az + b$ дополнительно сдвигает образ на вектор b.

2. **Степенная функция**

(a) $\omega = f(z) = \frac{1}{z}$ – непрерывна, однозначна и однолистна (биективна и обратима). Для изучения представим $\omega = \rho e^{i\psi},\ z = \tau e^{i\varphi}$:

$$\rho e^{i\psi} = \frac{1}{\tau e^{i\varphi}} = \frac{1}{\tau} e^{-i\varphi},$$

Таким образом

$$\rho = \frac{1}{\tau}, \psi = -\varphi.$$

Тогда

$$|\omega| = \frac{1}{|z|}, arg\omega = -argz.$$

Изучим с геометрической точки зрения:

- Для z ищем такое w , чтобы $|z||\omega| = 1$.

  Определение 6.1 *Такое преобразование называется инверсией относительно единичной окружности.*

- Зеркальное отображение (симметрия) относительно действительной оси.

При отображении $\omega = \frac{1}{z}$ внутренность круга переходит во внешность и наоборот. Лучи переходят в лучи, окружности отображаются в окружности.

(b) $\omega = z^n, n \in N$ – однозначная, но не однолистная, т.к. $z = \sqrt[n]{\omega}$ имеет n значений.

$$\omega = \rho e^{i\psi},\ z = \tau e^{i\varphi},$$
$$\rho e^{i\psi} = (\tau e^{i\varphi})^n = \tau^n e^{in\varphi}$$

Таким образом

$$\rho = \tau^n,\ \psi = n\varphi.$$

Тогда

$$|\omega| = |z|^n,\ arg\omega = argz * n.$$

(c) $\omega = \sqrt[n]{z}$ – обратная степенной. Например, вся плоскость с разрезом по действительной оси отображается в один из маленьких секторов.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\tau e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\tau} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}.$$

В какой именно сектор – зависит от числа k. Каждому $k \in [0, n-1]$ соответствует свой сектор.

$\omega = \sqrt[n]{z}$ – многозначна, однако можно выбрать n однозначных ветвей. Точки $z = 0, z = +\infty$ - точки ветвления.

3. **Экспонента**

$$\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x * e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), Re\omega = e^x \cos y, Im\omega = e^x \sin y$$

Свойство 6.1

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2},\ \forall z_1,\ z_2 \in C$$

Свойство 6.2 $e^{z+2\pi i} = [e^{2\pi i} = 1] = e^z,\ \forall z \in C$. *Таким образом,* e^z *- периодическая функция* 2π *. Следовательно,* $\omega = e^z$ *имеет бесконечно много областей неоднолистности. В точках* $\{z + 2k\pi i,\ k \in Z\}$ *она принимает одинаковые значения.*

Свойство 6.3 e^z *- непрерывна и однозначна в* C

Свойство 6.4 $|e^z| = e^x$, $Arge^z = y + 2\pi k$.

Выясним геометрический характер отображений. Таким образом любая горизонтальная полоса $2\pi i$ на z будет областью однолистности и отображается на всё C.

4. **Логарифм**

   $\omega = Lnz$ – обратна экспоненте. $z = \tau e^{i\varphi},\ \omega = u + iv$.

   Тогда
   $$z = e^{\omega}, \tau * e^{i\varphi} = e^{u+iv} = e^u * e^{iv}.$$

   Получим:
   $$e^u = \tau, u = \ln\tau, v = \varphi + 2\pi k, \text{ или: } u = \ln|z|, v = argz + 2\pi k.$$

   Таким образом
   $$Lnz = \ln|z| + i(argz + 2\pi k), k \in Z.$$

   Функция многозначная, выбор ветви определяется числом k.

   Определение 6.2 *Однозначную функцию при* $k = 0$ *называют главной ветвью логарифма* $\ln z$.

   $$\ln z = \ln|z| + iargz$$

   Свойство 6.5 $Lnz = \ln z + 2\pi ki$

   Свойство 6.6 $\ln 1 = 0, Ln1 = 2\pi ki$

   Свойство 6.7 $\ln i = i\frac{\pi}{2},\quad Lni = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$

   Действие с геометрической точки зрения обратны действию экспоненты.

5. **Тригонометрические и гиперболические функции**

   $$\omega = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \omega = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

   Свойство 6.8 $\sin, \cos$ *непрерывны по* C

Свойство 6.9 $\sin, \cos$ *принимают все комплексные значения, т.е.* $\sin z = a$ *и* $\cos z = a$ *имеют решения* $\forall a \in C$. *Следовательно,* $\sin, \cos$ *не ограничены комплексной плоскостью*

Свойство 6.10 *Все формулы элементарной тригонометрии имеют место и для комплексных значений. В частности,* $\sin, \cos$ *периодичны* 2π.

Свойство 6.11 $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$

$$\textit{откуда } Re \sin z = \sin z \operatorname{ch} y,\ Im \sin z = \cos x \operatorname{sh} y.$$

$$\textit{Аналогично } \cos z = \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} iy - i \sin x \operatorname{sh} y$$

Свойство 6.12

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \cos z = \operatorname{ch} iz,$$

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \cos iz = \operatorname{ch} z$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\ , \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

6. **Обратные тригонометрические функции**

$$\omega = Arc\ \sin z, \quad \sin \omega = z$$

Решим относительно w :

$$z = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}\ ,\ e^{i\omega} = \tau.$$

Получаем:

$$z = \frac{\tau - \frac{1}{\tau}}{2i}$$

Тогда

$$\tau^2 - 2i\tau z - 1 = 0$$

$$\tau_{1,2} = iz \pm \sqrt{1-z^2}, \quad e^{i\omega} = iz + \sqrt{1-z^2}$$

$$i\omega = \ln(iz + \sqrt{1-z^2}\ ), \omega = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$$

Аналогичным образом определяются $Arc\ \cos z = -iLn(z + i\sqrt{1-z^2})$

$$Arc\ tgz = \frac{1}{2i} Ln(\frac{1+iz}{1-iz})$$

$$\text{Arc ctg} z = -\frac{1}{2i} Ln(\frac{iz+1}{iz-1})$$

7 Дифференцирование комплексных функций, критерий дифференцируемости

Пусть функция определена и однозначна в окрестности $U(z_0)$ точки z_0. Зададим приращение Δz так, чтобы $z_0 + \Delta z \in U$. Составим приращение функции:

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

Определение 7.1 *Если приращение Δf можно представить*

$$\Delta f = C\Delta z + \alpha(\Delta z)|\Delta z|,$$

где

$$\alpha(\Delta z) \underset{\Delta z \to 0}{\to} 0,\ \alpha(0) = 0(\text{т.е.}\ \ \alpha(\Delta z)|\Delta z| = 0(\Delta z)),$$

тогда функция дифференцируема в точке z_0 *, а число C – производная функции в точке* z_0. $C = f^{'}(z_0) = \frac{df}{dz}$

Определение 7.2 *Выражение $f^{'}(z_0)dz = f^{'}(z_0)\Delta z$ называется дифференциалом в точке z_0.*

$$df = f^{'}(z_0)dz$$

Из определения производной вытекает, что её можно вычислить следующим образом:

$$f^{'}(z_0) = C = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Верно и обратное утверждение: если $\exists C = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \neq \infty$, то f дифференцируема в точке z_0 и $f^{'}(z_0) = C$. В этом случае $\frac{\Delta f}{\Delta z} = C + \alpha(\Delta z)$. Отсюда $\Delta f = C\Delta z + \alpha(\Delta z)|\Delta z|$.

Из определения дифференцируемости вытекает, что если она дифференцируема в точке z_0 , то она и непрерывна в ней.

Пример 7.1 $f(z) = C$.

$$f^{'}(z) = 0$$

Пример 7.2 $f(z) = z^2$. $\Delta f = (z + \Delta z)^2 - z^2 = z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2$,

$$f^{'}(z) = 2z$$

Пример 7.3 $f(z) = \overline{z}$.

$$\Delta f = \overline{z + \Delta z} - \overline{z} = \overline{\Delta z},$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = [z = x + iy] = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{((x + \Delta x) - i(y + \Delta y) - x + iy)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \left\{ \begin{array}{c} -1, \Delta x = 0, \Delta y \to 0, \\ 1, \Delta y = 0, \Delta x \to 0; \end{array} \right. ,$$

т.е. $\nexists \lim$. *Функция $f(z) = \overline{z}$ не дифференцируема ни в одной точке.*

Свойство 7.1 *Если f и g дифференцируемы, то* $f+g$, $f*g$, $\frac{f}{g}$ *также дифференцируемы и их производные имеют тот же вид.*

Свойство 7.2 *Если f и g дифференцируемы, то* $f \circ g$ *также дифференцируема, если она имеет смысл (определена там же, где f и g), причём* $(f \circ g\ )'(z) = f'(g(z)) * g'(z)$.

Свойство 7.3 *Если f дифференцируема, то и* f^{-1} *дифференцируема.*

Условия Коши-Римана-Даламбера-Эйлера (КРЭДа)

Производную можно вычислить по формуле $f^{'}(z_0) = \ = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$. Если этот lim $\exists$, то он не зависит от стремления z к нулю. Это накладывает на функцию комплексного переменного более сильные ограничения, чем над R. Например, если f над C обладает производной, то она обладает производной любого порядка.

Как уже было отмечено, непрерывность $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ равносильна непрерывности u и v в (x,y). Для дифференцирования подобное утверждение не имеет места: требование дифференцирования $f = u+iv$ накладывает дополнительные условия на частные производные функций u и v.

Теорема 7.1 (и сам критерий) $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, *заданная в окрестности точки* $z = x+iy$, *дифференцируема в ней тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. $u(x,y)$, $v(x,y)$ *дифференцируемы в (x,y)*
2. *В (x,y) выполняются условия КРЭДа:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

При выполнении условий теоремы $f^{'}(z)$ может быть представлена в одной из форм:

$$f^{'}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Доказательство.

Необходимость:

Пусть f дифференцируема в $z = x + iy$.

$\Delta f = f^{'}\Delta z + \alpha(\Delta z)|\Delta z| = \Delta u + i\Delta v, \quad f'(z) = A + iB,$

$\alpha(\Delta z)|\Delta z| = (\alpha_1(\Delta x,\ \Delta y)+i\alpha_2(\Delta x,\ \Delta y))\rho, \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. При этом $\alpha_1, \alpha_2 \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\to} 0$.

Получаем

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = (A+iB)(\Delta x + i\Delta y) + \rho(\alpha_1(\Delta x,\ \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x,\ \Delta y))$$

$$\begin{cases} \Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1\rho, \\ \Delta v = A\Delta y + B\Delta x + \alpha_2\rho; \end{cases}$$

Эти равенства и означают дифференцируемость f, а также дифференцируемость u и v. Отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial x} = A, A = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -B, \frac{\partial v}{\partial x} = B$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$$f'(z) = A + iB = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \dots$$

Достаточность:

Пусть u,v дифференцируема в (x,y), для них верны условия КРЭДа. Тогда

$$\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + \alpha_1(\Delta x,\ \Delta y)\rho, \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \alpha_2(\Delta x,\ \Delta y)\rho; \end{array}$$

$$\Delta u + i\Delta v = (\ \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\ )\Delta x + (-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\ )\Delta y + (\alpha_1 + i\alpha_2)\rho = \Delta f$$

$$\Delta f = (\ \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\ )(\Delta x + i\Delta y) + \alpha(\Delta z)\rho$$

Добились выполнения равенства

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пример 7.4 $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$

$$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - \textit{верно}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y - \textit{верно}$$

Условия КРЭДа выполняются, значит функция дифференцируема.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z$$

Пример 7.5 $f(z) = \overline{z} = x - iy$

$$u = x,\ v = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Условия КРЭДа не выполняются, значит $\nexists f'(z)$.

8 Сопряжённые гармонические функции

Нельзя просто взять две дифференцируемые функции так, чтобы они были действительными или комплексными частями друг друга. Тут нужны особые функции.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – дифференцируема, $z = x + iy$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Продифференцируем первое равенство по x, второе по y и сложим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

В других обозначениях $\Delta u = 0$, где Δ - оператор Лапласа.

Функции, которые дважды дифференцируемы непрерывно и удовлетворяют $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ называются гармоническими. Таким образом, действительная и мнимая части некоторой дифференцируемой $f(z) = u + iv$ являются гармоническими функциями.

Две гармонические функции u, v которые связаны условиями КРЭДа, называются сопряжёнными функциями.

Теорема 8.1 *$f(z) = u + iv$ дифференцируема в D тогда и только тогда, когда u, v – сопряжённые гармонические функции.*

Теорема 8.2 *Для любой $u(x, y)$ гармонической в односвязной D можно найти сопряжённую с ней гармоническую функцию с точностью до произвольной постоянной.*

Доказательство.

$u(x, y)$ – гармоническая в D, значит $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

$\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial u}{\partial x})$. Откуда, с учётом того, что Pdx+Qdy является полным дифференциалом, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Получаем $-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ – полный дифференциал некой $v(x, y)$. Знаем, что

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} (-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy) + C$$

Отсюда также верно, что $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Это и говорит о том, что u, v – гармонические и сопряжённые.

Пример 8.1 *Построить $f(z)$ гармонической, если Re $f(z) = -2xy + 2x + 3y + 1$,*
$f(1 + i) = 4 + i, u(x, y) = -2xy + 2x + 3y + 1$.

1. *$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2$ значит $v(x, y) = -y^2 + 2y + \varphi(x)$*
2. *$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Получим $-2x + 3 = -\varphi'(x)$, $\varphi(x) = x^2 - 3x + C$.*

Как итог: $v(x,\ y) = x^2 - y^2 - 3x + 2y + C$. Тогда

$$f(z) = u + iv = -2xy + 2x + 3y + 1 + i(x^2 - y^2 - 3x + 2y + C) =$$
$$= i(x^2 - y^2 + i2xy) + 2(x + iy) - 3i(x + iy) + 1 + iC =$$
$$= iz^2 + (2 - 3i)z + 1 + iC$$

Найдём C:

$$f(1 + i) = i(1 + i)^2 + (2 - 3i)(1 + i) + 1 + C = 4 + i$$

Отсюда C=2,

$$f(z) = \ iz^2 + (2 - 3i)z + 2i + 1.$$

9 Геометрический смысл производной

Пусть функция $w = f(z)$ - аналитическая в некоторой области $D \subset C$ и отображает область D плоскости z в область G плоскости w. Представим ее производную в точке $z_0 \in D$ в показательной форме:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha} \tag{9.1}$$

Тогда отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, переводит бесконечно малую окрестность точки $z_0 \in D$ в подобную окрестность в точке $w_0 = f(z_0) \in G$, **поворачивая её на угол α и растягивая в k раз**. Убедимся в этом. Из (14.1) следует

$$\Delta w = \Delta z \cdot k \cdot e^{i\alpha} + o(\Delta z), \Delta z \to 0$$

Рассмотрим главное слагаемое: $\Delta z \cdot k \cdot e^{i\alpha}$. Поскольку при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|\Delta w| \approx k|\Delta z|, arg|\Delta w| \approx arg|\Delta z| + \alpha$$

Таким образом, функция $f(z)$ растягивает окрестность точки z_0 в k раз и поворачивает ее на угол α, причем $k = |f'(z_0)|$, а $\alpha = arg(f'(z_0))$.

Пример 9.1 *Рассмотрим $f(z) = 2iz$. Её действительная и мнимая части функции $u(x, y) = -2y$ и $u(x, y) = 2x$. Легко убедиться, что на всей комплексной плоскости выполнены условия Коши–Римана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2$$

поэтому $f(z)$ аналитичная всюду на C. При этом ее производная равна:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Таким образом, эта функция поворачивает комплексную плоскость на угол $\frac{\pi}{2}$ и растягивает ее ровно в 2 раза.

Продолжим рассматривать нашу функцию. Возьмем некоторую кривую $L \in D$, которая отобразится в некоторую кривую $\widetilde{L} \subset w$, длина которой равна

$$l_{\widetilde{L}} = \int\limits_L |f'(z)| \cdot |dz|$$

Область $D \subset z$ при отображении $w = f(z)$ перейдет в область $\widetilde{D} \subset w$, причем площадь области $\widetilde{D}$ выражается по формуле

$$S_{\widetilde{D}} = \iint\limits_D |f'(z)|^2 dxdy$$

Таким образом $|f'(z)|^2$ равен коэффиценту искажения площади при отображении $w = f(z)$

10 Интегрирование комплексных функций

Определение 10.1 (Интеграл от ФКП) *Будем рассматривать функцию $f : C \to C$, определенную в некоторой области D, а l - гладкая или кусочно-гладкая кривая, лежащая в D, тогда интеграл от этой функции по кривой l вводится (так же, как и в действительной области) как предел последовательности интегральных сумм:*

$$\int\limits_l f(z)dz = \lim_{\max\limits_k |\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k)\Delta z_k), \tag{10.1}$$

где ξ_k - точка, выбранная на дуге Δl_k разбиения кривой, Δz_k - приращение аргумента функции на этом участке разбиения кривой, $|\Delta z_k|$ - длина хорды, соединяющей концы дуги Δl_k Кривая l разбивается произвольным образом на n частей $\Delta l_k,\ k = \overline{1, n}$. На кривой выбрано направление, т.е. указаны начальная и конечная точки.

Если выделить действительную и мнимую части функции $f(z)$ и записать ее в виде

$$f(z) = u + iv,\ u = Ref(z),\ v = Imf(z),\ u = u(x, y),\ v = v(x, y),$$

то интегральную сумму можно записать в виде двух слагаемых, которые будут являться интегральными суммами криволинейных интегралов второго рода от функций двух действительных переменных. Если $f(z)$ предположить непрерывной на l, то $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ будут также неприрывны на l, и, следовательно, будут существовать пределы соответствующих интегральных сумм. Поэтому, если функция $f(z)$ неприрывна на l, то предел в равенстве (14.1) существует, т.е. существует криволинейный интеграл от функции $f(z)$ по кривой l и имеет место формула:

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l (udx - vdy) + i \int\limits_l (udy + vdx) \tag{10.2}$$

Используя определение интеграла или формулу (10.2) и свойства криволинейных интегралов второго рода, нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств криволинейного интеграла от функций комплексного переменного (свойства, известные из действительного анализа):

1) Аддитивность

$$l = l_1 \cup l_2,\ \int\limits_l f(z)dz = \int\limits_{l_1} f(z)dz + \int\limits_{l_2} f(z)d$$

2) Линейность

$$\int\limits_l (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int\limits_l f(z)dz + \beta \int\limits_l g(z)d$$

3)

$$\int\limits_{l^-} f(z)dz = -\int\limits_{l^+} f(z)dz$$

4)

$$|\int\limits_l f(z)dz| \leq \int\limits_l |f(z)|dz$$

11 Интегральная теорема Коши и следствия из нее

Пример 11.1

$$l : \begin{cases} x = cost \\ y = sint \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

$$I = \int\limits_l z^2 dz, \;\; f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \Rightarrow u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

$$I = \int\limits_l (udx - vdy) + i\int\limits_l (udy + vdx) = \int\limits_l ((x^2-y^2)dx - 2xydy) + i\int\limits_l ((x^2-y^2)dy + 2xydx)$$

$$\int\limits_l ((x^2-y^2)dx - 2xydy) = \int\limits_l (Pdx + Qdy) = [P_y^{'} = -2y = Q_x^{'}] = 0$$

$$\int\limits_l ((x^2-y^2)dy + 2xydx) = \int\limits_l (Qdy + Pdx) = [P_y^{'} = 2x = Q_x^{'}] = 0$$

Исходя из последний двух строк:

$$I = \int\limits_l z^2 dz = 0$$

Теорема 11.1 (Интегральная теорема Коши) *Пусть $f(z)$ дифференцируемая в односвязной области D функция, тогда $\int f(z)dz$ по $\forall$ замкнутой кривой $l \subset D$ равен 0.*

$$\int\limits_f (z)dz = 0$$

Свойства (из интегральной теоремы Коши)

1) Пусть $f(z)$ дифференцируемая в односвязной области D функция, $z_0, z_1 \in C$ - начальная и конечная точки двух кривых $l_1, l_2 \subset D$, тогда:

$$\int\limits_{l_2} f(z)dz = \int\limits_{l_2} f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$

2) Пусть $f(z)$ диффериенцируема в односвязной области D, а l_1 - кривая, лежащая в D. l_2 - прямая, полученая из l_1 некоторой деформацией, причем l_2 не выходит из области D. Тогда:

$$\int\limits_{l_2} f(z)dz = \int\limits_{l_2} f(z)dz$$

3) Пусть D - ограниченная односвязная область. ∂D - ее граница (кусочно - гладкая кривая).Пусть $f(z)$ дифференцируема в области D и неприрывная в $\overline{D} = D \cup \partial D$, тогда:

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$$

4) Пусть D - многосвязная ограниченная область, ∂D состоит из замкнутой кусочно-неприрывной кривой l_0 и попарно непересекающихся кусочно-гладких прямых $l_1...l_n$, которые расположены внутри l_0 и пусть $f(z)$ дифференцируема в D и неприрывная в $\overline{D} = D \cup \partial D$, тогда:

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0,$$

где все кривые обходятся в положительном направлении.

12 Первообразная для комплексных функций

Пусть функция $f(z)$ задана в области D.

Определение 12.1 *Функцию $F(z)$, заданную в области D, назовём первообразной для функции $f(z)$, если для всех $z \in D$ выполняется равенство*

$$F'(z) = f(z)$$

Из теоремы Коши вытекает следующая теорема.

Теорема 12.1 *Пусть $f(z)$ непрерывно дифференцируемая в односвязной области D функция. Тогда в этой области существует первообразная $F(z)$ для функции $f(z)$.*

Доказательство. Функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема, а значит аналитическая в области D. Тогда интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, а зависит от начальной и конечной точек пути. Зафиксируем точку z_0, выбранную произвольным образом в области D и рассмотрим функцию

$$F'(z) = \int_L f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi, \tag{12.1}$$

где ξ - промежуточный аргумент, L - любая кривая, соединяющая точку z_0 с точкой z, и лежащая в области D. В силу следствия из теоремы Коши функция $F(z)$ однозначно определена.

Покажем, что функция $F(z)$, определённая формулой (1.2) и есть первообразная для функции $f(z)$.

Возьмём приращение Δz достаточно малым, чтобы $z+\Delta z \in D$. Так как интеграл не зависит от пути, то соединим точки z и $z + \Delta z$ отрезком прямой.

Найдём приращение функции $F(z)$, соответствующее Δz:

$$\Delta F = F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi$$

Оценим величину:

$$|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)| = |\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi - f(z)|$$

для чего запишем $f(z)$ в виде:

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi,$$

так как

$$\int_z^{z+\Delta z} d\xi = \Delta z,$$

тогда получим оценку модуля:

$$|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)| = |\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}(f(\xi)-f(z))d\xi| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\max_{\xi\in L}|f(\xi)-f(z)||\Delta z|$$

По условию теоремы функция $f(z)$ непрерывна, это означает, что при $\Delta z \to 0, f(\xi) \to f(z)$, то есть величина $\max_{\xi\in L}|f(\xi)-f(z)| \to 0$. А это и означает, что $F'(z) = f(z)$.
Отсюда следует и ещё один факт, что существует неопределённый интеграл от комплексной функции, как совокупность всех первообразных и обозначаемый $\int f(z)dz = F(z) + C$, где C - любая константа.

13 Интегральная формула Коши и следствия из нее

Лемма 13.1 *Рассмотрим окружность C_ρ с центром в точке $a \in C$ и радиусом $\rho > 0$. Тогда:*

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, n=1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}$$

Доказательство.

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{(z-a)^n}, z = a + \rho e^{i\phi}, \phi \in [0;2\pi]$$

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{(z-a)^n} = [z = a+\rho e^{i\phi}] = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho i e^{i\phi}d\phi}{\rho^n e^{in\phi}} = i\rho^{1-n}\int\limits_0^{2\pi} e^{it(1-n)}d\phi =$$

$$= i\rho^{1-n}\int\limits_0^{2\pi}(cos(1-n)\phi + isin(1-n)\phi)d\phi = \begin{cases} i\rho^{1-n}\int\limits_0^{2\pi} d\phi = 2pi, n=1 \\ i\rho^{1-n}\int\limits_0^{2\pi}(cos(1-n)\phi + isin(1-n)\phi)d\phi = 0, n\neq 1 \end{cases} \qquad \square$$

Теорема 13.1 (Интегральная формула Коши) *Пусть $f(z)$ дифференцируемая в односвязной области D фнукция, а l - замкнутая кусочно гладкая кривая, лежащая в D. Тогда:*

$$\int\limits_l \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

Доказательство.
Рассмотрим окружность C_ρ радиуса ρ, достаточно малым, чтобы $C_\rho \subset D$, и центром в точке z_0. В области, ограниченной контурами C_ρ и l подынтегральная функция не имеет

особенностей, и по интегральной теореме Коши интеграл от неё по границе этой области равен нулю. Это означает, что независимо от ρ имеем равенство:

$$\int\limits_{l} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int\limits_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

Оценим

$$|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} \frac{f(z)}{z-z_0}dz| = |\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{f(z_0)-f(z)}{z-z_0}dz| \le |\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{|f(z_0)-f(z)|}{|z-z_0|}|dz|$$

На окружности C_ρ: $|dz| = |\rho i e^{i\phi}| = \rho d\phi$. В следствии неприрывности функции $f(z)$: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall z \in C : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Из всего вышеперечисленного следует:

$$|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{|f(z_0)-f(z)|}{|z-z_0|}|dz| \le \frac{1}{2\pi i}\frac{\epsilon}{\rho}\int\limits_{C_\rho} |dz| = \frac{\epsilon}{2\pi\rho}\int\limits_{0}^{2\pi} \rho d\phi = \epsilon$$

В силу произвольности ϵ:

$$|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} \frac{f(z)}{z-z_0}dz| = 0,$$

следовательно:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} \frac{f(z)}{z-z_0}dz. \quad \square$$

Следствия из интегральной формулы Коши:
1) Если $f(z)$ - дифференцируема в односвязной области D и неприрывная в замыкании $\overline{D} = D \vee \partial D$, тогда:

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(z}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

2) Пусть $f(z)$ - дифференцируемая в односвязной области D функция, l - замкнутая кусочно гладкая кривая, лежащая в D, тогда:

$$\int\limits_{l} \frac{f(z}{z-z_0}dz = \begin{cases} 2\pi i, z_0 \textbf{ лежит внутри l} \\ 0, z_0 \textbf{ не лежит внутри l} \end{cases}$$

14 Степенные ряды. Почленное дифференцирование степенных рядов

Определение 14.1 *Степенным рядом называется ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, z_0 \in C, c_n \in C$$

При $c_0 = 0$ степенной ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{14.1}$$

Лемма 14.1 (Абеля) *Если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n < \infty,$$

тогда

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n < \infty, \forall z \in C, |z| < |z_0|$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ сходится равномерно } \forall z \in C, |z| \le r, r < |z_0|$$

Доказательство.
1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} |c_n z_0^n| = 0$$

$$\exists M > 0: \ |c_n z_0^n| \ \le M \ \forall n \ge 0$$

$$|c_n z^n| \le |c_n z_0^n||\frac{z}{z_0}|^n \le M|\frac{z}{z_0}|^n = M\alpha, 0 \le \alpha \le 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\alpha \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ сходится.}$$

2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, |z| \le r < |z_0|$$

$$|c_n z^n| \le M|\frac{z}{z_0}|^n \le M|\frac{r}{z_0}|^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M|\frac{r}{z_0}|^n \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ сходится равномерно.} \ \square$$

Определение 14.2 (Радиус сходимости степенного ряда) *Радиусом сходимости степенного ряда (14.1) называют величину*

$$R = sup\{r : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n < \infty, \forall z \in C, |z| < r\}$$

Радиус сходимости можно найти по:
1) Формула Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

2) Формула Коши:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

3) Формула Коши-Адамара:

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

Теорема 14.1 (о почленном дифференцировании рядов)

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *имеет производную в любой точке круга* $|z|<R$, *причем* $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^n$.

Иначе говоря, степенной ряд (14.1) внутри своего круга сходимости можно дифференцировать почленно, причём, у исходного ряда и продифференцированного ряда будет один и тот же радиус сходимости.

Доказательство.

Для доказательства покажем, что радиус сходимости при диффернецировании ряда (14.1) не уменьшается. Обозначим радус сходимости ряда (14.1) через $R = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$. *Рассмотрим ряд, полученный почленным дифференцированием:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^n.$$

Общий член этого ряда $(n+1)c_{n+1}z^n$ *запишем в виде* $a_n z^n$, *где* $a_n = (n+1)c_{n+1}$. *Радиус сходимости такого ряда найдем по формуле Коши-Адамара:*

$$\overline{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)|c_{n+1}|}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_{n+1}|}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

Значит $\overline{R} = R \Rightarrow$ *у исходного ряда и продифференцированного ряда будет один и тот же радиус сходимости.* $\square$

Следствие 14.1 *Сумма степенного ряда является бесконечно дифференцируемой внутри своего круга сходимости функцией.*

15 Нули регулярной функции

Точка $z = \alpha$ называется **нулём** регулярной функции $f(z)$, если $f(\alpha) = 0$.

f - регулярная функция в D, $\forall \alpha \in D, \alpha \neq \infty$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n, |z-\alpha| < \rho$, тогда $\alpha \in D$ - **нуль порядка** m для $f(z)$, если $f(\alpha) = ... = f^{(n-1)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha) \neq 0$, $c_0 = ... = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$.

$$f(z) = (z-\alpha)^m (c_m + c_{m+1}(z-\alpha) + ...) = (z-\alpha)^m g(z)$$

$$g(z) = (c_m + c_{m+1}(z-\alpha) + ...) \neq 0$$

Пусть $z = \infty$ - нуль функции $f(z)$. Так как функция регулярна в точке $z = \infty$:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

c_m - первый отличный от нуля коэффициент ряда, тогда:

$$f(z) = \frac{1}{z^m}(c_m + \frac{c_{m+1}}{z} + ...),$$

откуда

$$f(z) = z^{-m} g(z), g(\infty) = c_m \neq 0$$

Теорема 15.1 *(о нулях регулярной функции). Пусть функция $f(z)$ регулярна в точке α и $f(\alpha) = 0$. Тогда возможны 2 случая:*

$$1) \exists \rho_1 > 0, f(z) \neq 0, \forall z : 0 < |z-\alpha| < \rho_1;$$

$$2) \exists \rho_2 > 0, f(z) \equiv 0, \forall z : |z-\alpha| < \rho_2.$$

Доказательство. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n, |z-\alpha| < \rho$

$$1) c_i = 0, i = 1, ..., n \Rightarrow f(z) \equiv 0x, \forall z : |z-\alpha| < \rho;$$

$$2) \exists i_0 \geq 1, c_0 = c_1 = ... = c_{i_0-1} = 0, c_{i_0} \neq 0$$

$$f(z) = c_{i_0}(z-\alpha)^{i_0} + c_{i_0+1}(z-\alpha)^{i_0+1} + ... = (z-\alpha)^{i_0}(c_{i_0} + c_{i_0+1}(z-\alpha) + ...) = (z-\alpha)^{i_0} h(z),$$

где $h(z)$ - регулярная в точке α функция, $h(\alpha) \neq 0 \Rightarrow h(z) \neq 0, \forall z : |z-\alpha| < \rho$. Следовательно, нули регулярной функции изолированы. Теорема доказана.

16 Теорема единственности

Теорема 16.1 *(единственности). Пусть $f(z)$ регулярна в области D. $\exists z_n \in D, \forall n \in N$ такая что $f(z_n) = 0, \forall n \in N$.*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in D,$$

тогда $f(z) \equiv 0, \forall z \in D$.

Доказательство. Покажем что все коэффициенты ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ равны нулю. От противного.

$$\exists U, z_0 \in U, \forall z \in U, z \neq z_0 : f(z) \neq 0$$

Получим противоречие условию теоремы $\Rightarrow c_n = 0, \forall n \in N \Rightarrow$ ряд сходится в области $K : |z - z_0| < \rho_0 \Rightarrow f(z) \equiv 0$ в области K.
Покажем что $f(b) = 0$ для произвольной точки $b \in D$. Построим круги $K_0, K_1, ..., K_n$ с центрами в точках $\alpha = z_0, z_1, ..., z_n = b$ и радиусами ρ, которые выбираем так чтобы $|z_i - z_{i-1}| < \frac{\rho}{2}, i = 1, 2, ..., n$. Тогда $K_i \subset D$, центр K_{i+1} лежит внутри K_i, $i = 0, 1, ..., n-1$. $\rho_0 \geq \rho \Rightarrow K_i \subset K \Rightarrow f(z) \equiv 0 \forall z \in K_i$. Из этого следует, что $f(z) \equiv 0$ в окрестности $\forall z_i, i = 0, 1, ..., n \Rightarrow f(b) \equiv 0$. Теорема доказана.

Следствие 16.1 *Пусть $f(z)$ регулярна в области D, и $f(z) \equiv 0 \, \forall z \in E \subset D$. $\exists z_n \in E, \forall n \in N$:*

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \alpha \in D, \Rightarrow f(z) \equiv 0 \, \forall z \in D.$$

Доказательство. Так как $f(z_n) = 0$ и $z_n \in D, \forall n$ то $f(z) \equiv 0$ в D по теореме о единственности.

Следствие 16.2 *Пусть $f(z)$ регулярна в области D, D_1 - область, $D_1 \subset D$.
$f(z) \equiv 0$ в $D_1 \Rightarrow f(z) \equiv 0$ в D.*

Следствие 16.3 *Пусть $f(z)$ регулярна в области D, j - кривая в D.
$f(z) = 0$ в $j \Rightarrow f(z) \equiv 0$ в D.*

Следствие 16.4 *Пусть $f(z)$, $g(z)$ регулярны в области D.
$f(z_n) = g(z_n)$, $\forall n \in N \Rightarrow f(z) \equiv g(z)$ в области D.*

Доказательство. $h(z) = f(z) - g(z)$ регулярна в области D и $h(z) \equiv 0$, $\forall z \in E$, $E \subset D \Rightarrow h(z) \equiv 0$ в силу следствия 1. Поэтому $f(z) \equiv g(z)$, $z \in D$.

17 Обратная функция

$\omega = f(z)$, $f : D \subset C \to C$
E - образ $f(D)$. Определим обратную функцию $z = g(\omega) = f^{-1}(\omega)$, $w \in E$ Определим что нужно для биективности $f(z)$:

$$z = x + iy, \, \omega = f(z) = u(x, y) + i\vartheta(x, y)$$

Рассмотрим Якобиан этой системы:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2.$$

$f'(z) \neq 0$ в окрестности некоторой точки $\Rightarrow J \neq 0$ в некоторой окрестности $\Rightarrow$ система уравнений независима:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ \vartheta = \vartheta(x, y) \end{cases}$$

Эта система однозначно разрешима при $\forall u, \vartheta \Rightarrow \exists x = \widetilde{x}(u,\vartheta), y = \widetilde{y}(u,\vartheta)$ - обратная векторная функция к функции $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ \vartheta(x,y) \end{pmatrix}$.
Эти $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ задают обратную функцию к ω.

$$z = f^{-1}(\omega) = \widetilde{x}(u,\vartheta) + i\widetilde{y}(u,\vartheta)$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \neq 0 \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta f} \neq 0$$

$\Rightarrow \exists g'(\omega) \neq 0$ и конечная $\Rightarrow g(\omega)$ - дифференцируема.

18 Разложение функции в ряд Лорана

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, определенную на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z = 1$, $z = 2$. Функция $f(z)$ регулярна в кольце $1 < |z| < 2$, однако не может быть разложена в сходящийся ряд Тейлора по степеням z в этом кольце. Тем не менее,

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

Пусть $a \in \mathbb{C}$. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n}$$

называется **рядом Лорана**. Слагаемое $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ называется **правильной частью** ряда Лорана, слагаемое $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n}$ — **главной частью** ряда Лорана.

Если функция $f(z)$ регулярна в открытом круге радиуса ρ с центром в точе a, то функция $f(z)$ может быть представлена сходящимся рядом Тейлора по степеням $z - a$ в этом круге:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Но если функция $f(z)$ регулярна в кольце $r < |z-a| < R$, то, как показывает рассмотренный выше пример, не всегда возможно разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $z - a$ в этом кольце.

Следуюшая теорема показывает, что любую функцию, регулярную в кольце $r < |z-a| < R$ можно разложить в сходящийся ряд Лорана в этом кольце по целым степеням $z-a$. Также через C_ρ будем обозначать окружность $|z-a| = \rho$.

Теорема 18.1 *(о разложении в ряд Лорана). Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $r < |z-a| < R$, тогда для любого $R_0 \in (r, R)$ имеет место разложение в ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

Доказательство. Выберем произвольную точку z из кольца $r < |z-a| < R$, а также произвольное $R_0 \in (r, R)$ и зафиксируем эти значения. Подберем числа r_1, R_1 так, чтобы $r < r_1 < R_0 < R_1 < R$ и $r_1 < |z-a| < R_1$. Пусть D – замкнутая односвязная область с разрезом, полученная из кольца $r_1 < |\zeta - a| < R_1$. Применяя интегральную формулу Коши к $f(z)$ и области D, получим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{18.1}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Так как

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n,\ \zeta \in C_{R_1}, |z-a| < R_1,$$

то

$$\int\limits_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int\limits_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta. \tag{18.2}$$

В последнем равенстве почленное интегрирование ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}(z-a)^n$$

возможно в силу равномерной сходимости этого ряда по $\zeta \in C_{R_1}$ при фиксированном z. В свою очередь, равномерная сходимость этого ряда может быть доказана с помощью признака Вейерштрасса.

Теперь рассмотрим интеграл

$$-\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Так как

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a}{z-a}\right)^n,\ \zeta \in C_{r_1}, |z-a| > r_1,$$

то

$$-\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{k=-1}^{-\infty}(z-a)^k\int\limits_{C_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}d\zeta. \tag{18.3}$$

Объединяя соотношения (18.1), (18.2), (18.3), получим:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widetilde{c}_n(z-a)^n,$$

где

$$\widetilde{c}_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\ n \geq 0,$$

$$\widetilde{c}_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\ n < 0.$$

Так как функция $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ регулярна в замкнутых кольцах $r_1 \leq |\zeta-a| \leq R_0$, $R_0 \leq |\zeta-a| \leq R_1$, то согласно интегральной теореме Коши имеем:

$$\int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \int\limits_{C_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,$$

$$\int\limits_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \int\limits_{C_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta.$$

Эти соотношения завершают доказательство теоремы. □

19 Единственность разложения в ряд Лорана. Оценка коэффициентов ряда Лорана

Из теоремы предыдущего параграфа вытекает, что для функции $f(z)$, регулярной в кольце $r < |z-a| < R$ имеет место, как минимум, одно разложение в ряд Лорана. В этом параграфе докажем, что такое разложение всегда единственно.

Теорема 19.1 *(о единственности разложения в ряд Лорана). Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $r < |z-a| < R$, тогда разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ по степеням $z-a$ единственно.*

Доказательство. Предположим, что найдутся 2 различных разложения в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widetilde{c}_n(z-a)^n.$$

Возьмем число $R_0 \in (r, R)$ и произвольное $m \in \mathbb{Z}$. Имеем:

$$\int\limits_{C_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta = \int\limits_{C_{R_0}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(\zeta-a)^n}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta.$$

Так как интеграл $\int\limits_{C_{R_0}} \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^k}$ равен $2\pi i$ при $k=1$ и равен 0 для остальных целых k, то

$$\int\limits_{C_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta = 2\pi i c_m.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{C_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}} d\zeta = 2\pi i \widetilde{c}_m.$$

Таким образом, $c_m = \widetilde{c}_m$ для любых целых m. Теорема доказана. □

Следующая теорема дает оценку для модуля коэффициентов разложения в ряд Лорана.

Теорема 19.2 *(оценка Коши коэффициентов ряда Лорана). Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $r < |z-a| < R$, тогда для коэффициентов c_n разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-a$ имеет место оценка Коши*

$$|c_n| \leq \frac{M_{R_0}}{R_0^n} \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

где $M_{R_0} = \max\limits_{\zeta \in C_{R_0}} |f(\zeta)|$, $R_0 \in (r, R)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $R_0 \in (r, R)$ и целое n. Из теорем 18.1 и 19.1 вытекает, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

Отсюда имеем:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_{R_0}} \frac{|f(\zeta)|}{R_0^{n+1}} ds \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M_{R_0}}{R_0^{n+1}} 2\pi R_0.$$

Требуемое неравенство доказано. □

Замечание 19.1 *Теоремы 18.1, 19.1, 19.2 остаются в силе, если $r = 0$ или $R = \infty$.*

20 Классификация изолированных особых точек комплексных функций

Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности $0 < |z-a| < \rho$ точки $a \in \mathbb{C}$, но не является регулярной в самой точке a. В таком случае точка a называется изолированной особой точкой. Приведем классификацию изолированных особых точек.

Точка $z = a$ называется **устранимой особой точкой** функции $f(z)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z) = A$.

Точка $z = a$ называется **полюсом** функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

Точка $z = a$ называется **существенной особой точкой** функции $f(z)$, если не существует предела $\lim\limits_{z \to a} f(z)$.

Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце $0 < |z-a| < \rho$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n}. \tag{20.1}$$

Теорема 20.1 *(об устранимой особой точке). Пусть $z = a$ – изолированная особая точка функции $f(z)$. Точка $z = a$ является устранимой особой точкой тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана (20.1) нулевая.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Согласно теореме 19.2 для любых $R_0 \in (0, \rho)$, $n \in \mathbb{Z}$ имеем:

$$|c_n| \leq \frac{M_{R_0}}{R_0^n}.$$

Так как существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$, то функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки a, т.е. существуют ρ_1, $M_1 > 0$ такие, что $|f(z)| \leq M_1$ для любых z из кольца $0 < |z-a| < \rho_1$. Тогда для любых $R_0 \in (0, \rho_1)$ имеем:

$$|c_n| \leq \frac{M_1}{R_0^n}.$$

Пусть $n < 0$. Устремляя R_0 к нулю, заключаем, что $c_n = 0$. Теорема доказана. □

Теорема 20.2 *(о полюсе). Пусть $z = a$ – изолированная особая точка функции $f(z)$. Точка $z = a$ является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана (20.1) содержит лишь конечное число ненулевых членов.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть c_{-k} – последний ненулевой коэффициент главной части ряда Лорана. Имеем:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{k} c_{-n} \frac{1}{(z-a)^n} = \frac{1}{(z-a)^k} g(z),$$

где $g(z) = f(z)(z-a)^k$ – регулярная функция в кольце $0 < |z-a| < \rho$ и $\lim\limits_{z\to a} g(z) = c_{-k} \neq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Теперь докажем необходимость. Пусть $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, тогда $|f(z)| > 1$ в кольце $0 < |z-a| < \rho_1$ для некоторого $\rho_1 \in (0, \rho)$. Определим функцию $\tilde{h}(z)$ в круге $|z-a| < \rho_1$ следующим образом. Пусть

$$\tilde{h}(z) = \frac{1}{f(z)},\ 0 < |z-a| < \rho_1,$$

и $\tilde{h}(a) = 0$. Очевидно, что определенная таким образом функция $\tilde{h}$ является непрерывной в круге $|z-a| < \rho_1$, кроме того, интеграл по любой гладкой замкнутой кривой равен 0, т.к. функция $\tilde{h}(z)$ регулярна в кольце $0 < |z-a| < \rho_1$. Отсюда, согласно достаточному условию регулярности, функция $\tilde{h}(z)$ является регулярной в круге $|z-a| < \rho_1$. Так как $z = a$ – изолированный нуль функции $\tilde{h}(z)$, то существует регулярная в круге $|z-a| < \rho_1$ функция $g(z)$, $g(a) \neq 0$, и число $m \in \mathbb{N}$ такие, что $\tilde{h}(z) = (z-a)^m g(z)$.

Таким образом, имеем:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{g(z)}.$$

Т.к. функция $\frac{1}{g(z)}$ регулярна в некоторой окрестности точки a, то $g(z)$ в этой окрестности представима сходящимся рядом Тейлора по степеням $z-a$. Следовательно, все коэффициенты главной части ряда Лорана (20.1), начиная с c_{-m-1}, обращаются в нуль. Теорема доказана. $\square$

Следствие 20.1 *Из доказательства теоремы 20.2 вытекает, что точка $z=a$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда существуют числа $A \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$ такие, что*

$$f(z) \sim \frac{A}{(z-a)^m}, \ z \to a.$$

При этом число m называется порядком полюса, а коэффициент c_{-m} – последний ненулевой коэффициент главной части ряда Лорана (20.1). Очевидно, что $z=a$ является полюсом порядка m функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $z=a$ является нулем порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$.

Из теорем 20.1 и 20.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 20.3 *(о существенной особой точке). Пусть $z=a$ – изолированная особая точка функции $f(z)$. Точка $z=a$ является существенно особой точкой тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана (20.1) содержит бесконечное число ненулевых членов.*

Замечание 20.1 *Предположим, что функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho\}$ точки $a=\infty$. В этом случае говорят, что точка $a=\infty$ является изолированной (бесконечной) особой точкой. Аналогично определяются типы особых точек, как и в случае конечных изолированных особых точек. Функцию, регулярную в окрестности бесконечно удаленной точки, можно разложить в этой окрестности в сходящийся ряд Лорана по степеням z, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}.$$

При этом слагаемое $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ называется главной частью ряда Лорана, а слагаемое $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$ — правильной частью ряда Лорана. Для бесконечно удаленной точки остаются в силе теоремы 20.1, 20.2, 20.3, а следствие 20.1 можно сформулировать следующим образом: точка $z=\infty$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда существуют числа $A \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$f(z) \sim Az^m, \ z \to \infty.$$

Аналогично число m называется порядком полюса $z=\infty$. Очевидно, что $z=\infty$ – полюс порядка m функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $z=0$ – нуль порядка m функции $f(z)$.

Пример 20.1 *Найти изолированные особые точки функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ и указать их тип.*

Решение. Функция $f(z)$ имеет 2 изолированные особые точки: $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$. Т.к. $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, то $z_1 = 0$ – устранимая особая точка.

Рассмотрим разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечности:

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...$$

Т.к. главная часть содержит бесконечное число ненулевых слагаемых, то $z_2 = \infty$ – существенная особая точка.

Пример 20.2 *Определить порядок полюса $z = 0$ функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$.*

Решение. Т.к. $f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{\sin z}{z} \sim \frac{1}{z^2}$, $z \to 0$, то $z = 0$ – полюс порядка 2.

21 Основная теорема алгебры

Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется **целой**, если f регулярная во всех точках комплексной плоскости.

Теорема 21.1 *(теорема Лиувилля). Пусть функция $f(z)$ целая и существуют постоянные R_0, $L > 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такие, что $|f(z)| \leq L|z|^k$ для всех z, $|z| > R_0$. Тогда $f(z)$ – многочлен степени не выше k.*

Доказательство. Т.к. $f(z)$ регулярная, то она представима сходящимся рядом Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

В силу теоремы 19.2 и условия настоящей теоремы для любых $R > R_0$, $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$|c_n| \leq \frac{M_R}{R^n} \leq \frac{LR^k}{R^n} = LR^{k-n}.$$

Устремляя R к бесконечности, получим, что $c_n = 0$ при всех $n > k$. Что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 21.1 *Пусть функция $f(z)$ целая и существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$. Тогда $f(z)$ – постоянная.*

Действительно, из регулярности f и условия $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$ вытекает ограниченность функции f. Применяя теорему Лиувилля при $k = 0$ получаем требуемое.

Теорема 21.2 *(основная теорема алгебры). Любой многочлен $P(z)$ с комплексными коэффициентами степени не ниже первой имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $P(z)$ – комплексный многочлен, для которого $\deg(P) \geq 1$, и $P(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. В таком случае функция $g(z) = \frac{1}{P(z)}$ является целой и $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$. Согласно следствию из теоремы Лиувилля получаем, что $g(z)$ – постоянная, что противоречит условию $\deg(P) \geq 1$. Теорема доказана.

Следствие 21.2 *Любой комплексный многочлен $P(z)$ степени $n \geq 1$ имеет в точности n комплексных корней с учетом их кратности.*

Доказательство вытекает из теоремы 21.2 и теоремы Безу.

22 Вычет функции в конечной особой точке

Пусть $z = a \in \mathbb{C}$ – изолированная особая точка функции $w = f(z)$. Тогда при некотором $\rho > 0$ функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z - a| < \rho$ и, следовательно раскладывается в этом кольце в сходящийся ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

а $R_0 \in (0, \rho)$.

Коэффициент c_{-1} разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана называется **вычетом** функции $f(z)$ в точке a и обозначается $\operatorname*{res}_a f(z)$.

Из определения вычета и теоремы 18.1 вытекает, что

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R_0}} f(\zeta) d\zeta.$$

Отсюда и из интегральной теоремы Коши получаем, что для любой замкнутой гладкой кривой γ, лежащей в кольце $0 < |z - a| < \rho$ и содержащей внутри себя точку $z = a$, выполняется:

$$\int\limits_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname*{res}_a f(z).$$

Теорема 22.1 *Вычет функции $f(z)$ в устранимой особой точке $z = a$ равен 0.*

Доказательство. Очевидным образом вытекает из определения вычета и теоремы 20.1. □

Теорема 22.2 *Пусть $z = a$ – полюс порядка m функции $f(z)$, тогда*

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} ((z-a)^m f(z))^{(m-1)}.$$

Доказательство. Так как $z = a$ – полюс порядка m, то в некоторой проколотой окрестности точки $z = a$ имеем:

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots,$$

где $c_{-m} \neq 0$. Отсюда получаем

$$((z-a)^m f(z))^{(m-1)} = (m-1)! c_{-1} + \frac{m!}{1!} c_0 (z-a) + \frac{(m+1)!}{2!} c_1 (z-a)^2 + \ldots,$$

откуда и вытекает требуемое утверждение. □

Предположим, что функция $w = f(z)$ регулярна в некоторой окрестности бесконечности $\rho < |z| < \infty$. Тогда имеем:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \tag{22.1}$$

для любых z, $\rho < |z| < \infty$. **Вычетом функции** $w = f(z)$ **в точке** $z = \infty$ называется величина $-c_{-1}$ (обозначается $\operatorname*{res}_{\infty} f(z)$), где c_{-1} – коэффициент ряда Лорана (22.1). Согласно замечанию 19.1 имеем:

$$\int_{C_{R_0}^-} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z),$$

где $R_0 > \rho$.

23 Основная теорема теории вычетов и следствия из неё

Теорема 23.1 *Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной односвязной области D за исключением конечного числа особых точек z_j, $j = 1, \ldots, k$, лежащих внутри некоторой замкнутой гладкой кривой $\gamma \subset D$ (и не существует точек z_j, принадлежащих γ). Тогда*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f(z).$$

Доказательство. Около каждой особой точки z_j опишем окружность достаточно малого радиуса C_{ρ_j} так, чтобы окружности попарно не пересекались и лежали внутри кривой γ. Рассмотрим односвязную область с разрезами D_1, полученную из области, ограниченной кривой γ, удалением кругов с границами C_{ρ_j}. На основании интегральной теоремы Коши, примененной к области D_1 получим:

$$\int_{\partial D_1} f(z) dz = 0,$$

откуда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{C_{\rho_j}} f(z) dz = 2\pi \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f(z).$$

Теорема доказана. □

Следствие 23.1 *Пусть функция $f(z)$ регулярна в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ за исключением конечного числа изолированных особых точек z_j, $j = 1, \ldots, k$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Доказательство. Возьмем число ρ такое, что все конечные особые точки z_j лежат внутри круга с границей C_ρ. Тогда

$$\int\limits_{C_\rho} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f(z).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{C_\rho^-} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z).$$

Из этих двух равенств получаем требуемое.

Следствие 23.2 *(без доказательства). Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек z_j, $j = 1, \ldots, k$. Предположим, что функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{D}$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f(z).$$

Следствие 23.3 *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек z_j, $j = 1, \ldots, k$. Предположим, что граница D – это закмнутая гладкая кривая γ, $f(z)$ непрерывна в $\overline{D}$ и $z = \infty \in D$, $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности бесконечности. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) \right).$$

Доказательство. По условию следствия функция $f(z)$ регулярна в области $\rho_1 < |z| < \infty$ для некоторого $\rho_1 > 0$. Возьмем $\rho > \rho_1$ и рассмотрим область D_1, ограниченную C_ρ и $\gamma = \partial D$. Применяя следствие 23.2 к области D_1, получим

$$\int\limits_{C_\rho \cup \gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f(z).$$

Поскольку

$$\int\limits_{C_\rho} f(z)dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z),$$

то получаем

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{C_\rho \cup \gamma} f(z)dz - \int\limits_{C_\rho} f(z)dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) \right),$$

что и требовалось доказать. □

24 Вычисление интегралов от рациональных функций с помощью вычетов

Рассмотрим интеграл вида
$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx,$$
где $R(u,v)$ – рациональная функция двух переменных.

Сделаем замену переменных $z = e^{ix}$, получим:
$$I = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}dz = \int_{|z|=1} R_1(z)dz,$$
где $R_1(z)$ – рациональная функция одной переменной.

В силу теоремы 23.1 имеем:
$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} R_1(z),$$
где сумма вычетов берется по всем особым точкам функции $R_1(z)$ из круга $|z| < 1$.

Рассмотрим интеграл вида
$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx,$$
где $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ – рациональная функция такая, что: 1) $\deg(P) + 2 \le \deg(Q)$; 2) $Q(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Отметим, что интеграл J сходится тогда и только тогда, когда выполняются условия 1) и 2).

В дальнейшем через $C_r^{1/2}$ будем обозначать полуокружность $|z| = r$, $\mathrm{Im}(z) \ge 0$.

Лемма 24.1 *Пусть интеграл J сходится, тогда*
$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r^{1/2}} R(z)dz = 0.$$

Доказательство. Так как $\deg(P) + 2 \le \deg(Q)$, то существует постоянная M такая, что для всех достаточно больших $r > 0$ выполнено неравенство
$$|R(z)| \le \frac{M}{r^2}, z \in C_r^{1/2}.$$
Отсюда получаем оценку
$$\left|\int_{C_r^{1/2}} R(z)dz\right| \le \int_{C_r^{1/2}} |R(z)|dS \le \frac{M}{r^2}\pi r,$$
что доказывает утверждение леммы. $\square$

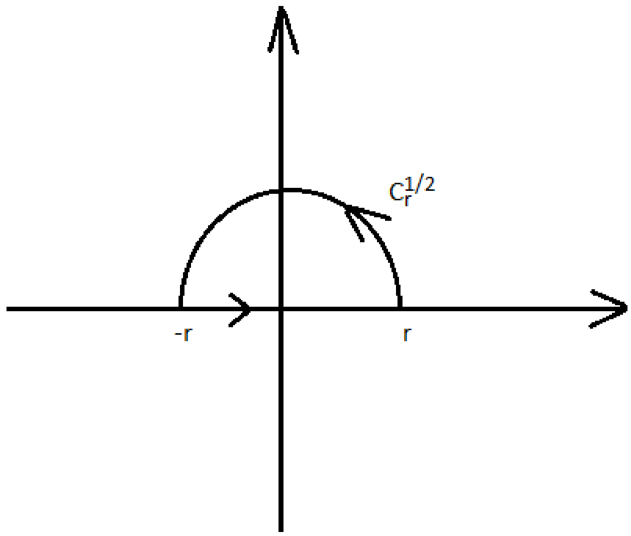

Рис. 1: К вычислению интеграла J

Вернемся к вычислению интеграла J. Возьмем достаточно большое $r > 0$. Пусть $\gamma_1 = [-r, r]$, $\gamma = C_r^{1/2} \cup \gamma_1$. Тогда согласно теореме 23.1 имеем:

$$\int\limits_{\gamma} R(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} R(z), \tag{24.1}$$

где сумма берется по всем особым точкам z_j функции $R(z)$, лежащим внутри кривой γ.

Из леммы 24.1 и равенства (24.1) получаем, что

$$J = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} R(z),$$

где сумма берется по всем конечным особым точкам z_j функции $R(z)$, лежащим в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(z) > 0$.

Пример 24.1 *Вычислим интеграл*

$$I_n = \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^n},$$

где n – натуральное число.

Решение. Все конечные особые точки подынтегральной функции $R(z)$ лежат на единичной окружности $|z| = 1$. Имеем:

$$I_n = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_j} R(z).$$

Согласно следствию 23.1 получаем:

$$I_n = -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} R(z).$$

Так как для всех достаточно больших z выполняется

$$R(z) = \frac{1}{z^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^{nj}},$$

то $I_n = -2\pi i$ при $n = 1$ и $I_n = 0$ при $n > 1$.

25 Нахождение преобразования Фурье рациональной функции

Пусть $R(x)$ – действительная рациональная функция. Обозначим через $F(\alpha)$ преобразование Фурье функции $R(x)$, т.е.

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)dx,\ \ \alpha > 0.$$

Лемма 25.1 *Пусть функция $g(z)$ непрерывна на множестве $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, $|z| \geq R_0 > 0$. Если*

$$M(r) := \sup_{z \in C_r^{1/2}} |g(z)| \underset{r\to\infty}{\to} 0,$$

то для любого $\alpha > 0$ имеет место сходимость

$$\int_{C_r^{1/2}} e^{i\alpha z} g(z)dz \underset{r\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство. Из вогнутости функции $\sin x$ при $x \in [0, \pi/2]$ получаем неравенство

$$\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi,\ \ \varphi \in [0, \pi/2]. \tag{25.1}$$

Используя это неравенство получаем:

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}| = e^{-\alpha r\sin\varphi} \leq e^{-\alpha r\frac{2}{\pi}\varphi},$$

где $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, $\mathrm{Re}(z) \geq 0$.

Таким образом, имеем

$$\left|\int_{C_r^{1/2}} e^{i\alpha z} g(z)dz\right| \leq \int_{C_r^{1/2}} M(r)e^{-\alpha r\sin\varphi}dS = M(r)\int_0^{\pi} e^{-\alpha r\sin\varphi} r d\varphi = 2M(r)r\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r\sin\varphi}d\varphi \leq$$

$$\leq 2M(r)r\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi = 2M(r)r\left(-\frac{\pi}{2r\alpha}\right)e^{-\alpha r\frac{2}{\pi}\varphi}\Big|_0^{\pi/2} \underset{r\to\infty}{\to} 0,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теперь вернемся к вычислению преобразования Фурье от рациональной функции. Пусть

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Используя признак Дирихле сходимости НИЗОП, а также критерий Коши расходимости НИЗОП, можно доказать, что преобразование Фурье $F(\alpha)$ сходится тогда и только тогда, когда выполняются следующие 2 условия: 1) $\deg(P) + 1 \leq \deg(Q)$; 2) $Q(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Возьмем достаточно большое $r > 0$. Пусть $\gamma_1 = [-r, r]$, $\gamma = C_r^{1/2} \cup \gamma_1$. Для любого достаточно большого r все конечные особые точки функции $R(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, попадают внутрь области, ограниченной кривой γ. Используя теорему 23.1, получаем:

$$\int\limits_{\gamma} e^{i\alpha z} R(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j}(e^{i\alpha z} R(z)), \tag{25.2}$$

где сумма берется по всем конечным особым точкам функции $R(z)$, лежащим в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(z) > 0$.

Так как существует постоянная M такая, что для всех достаточно больших r выполняется неравенство

$$|R(z)| \leq \frac{M}{r}, z \in C_r^{1/2},$$

то из соотношения (25.2) и леммы 25.1 получаем:

$$F(\alpha) = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j}(e^{i\alpha z} R(z)).$$

Замечание 25.1 *Если* $\alpha < 0$, *то аналогичными рассуждениями можно показать, что*

$$F(\alpha) = -2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{res}_{z_j}(e^{i\alpha z} R(z)),$$

где сумма берется по всем особым точкам функции $R(z)$, *лежащим в нижней полуплоскости* $\mathrm{Im}(z) < 0$.

Замечание 25.2 *Если* $\alpha > 0$, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos(\alpha x) dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j}(e^{i\alpha z} R(z))\right),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin(\alpha x) dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j}(e^{i\alpha z} R(z))\right),$$

где суммы берутся по всем особым точкам функции $R(z)$, *лежащим в нижней полуплоскости* $\mathrm{Im}(z) > 0$.

26 Интегралы Френеля

Интегралы

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx, \quad \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$$

называются **интегралами Френеля**.

Возьмем произвольное $r > 0$ и рассмотрим замкнутую кривую γ, состоящую из объединения:

1) отрезка $[0, r]$ действительной оси;

2) восьмой части окружности $|z| = r$, $arg(z) \in [0, \pi/4]$, обозначаемой $C_r^{1/8}$;

3) отрезка луча $te^{\frac{\pi}{4}i}$, проходимого от точки $t_0 = re^{\frac{\pi}{4}i}$ до точки $t_1 = 0$, обозначаемого l.

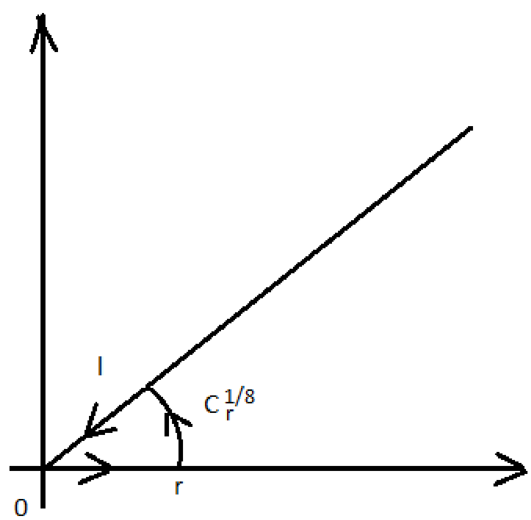

Рис. 2: К вычислению интегралов Френеля

С одной стороны,

$$\int_\gamma e^{iz^2} dz = 0. \tag{26.1}$$

С другой стороны,

$$\int_\gamma e^{iz^2} dz = \int_0^r e^{ix^2} dx + \int_{C_r^{1/8}} e^{iz^2} dz + \int_l e^{iz^2} dz = I_1 + I_2 + I_3. \tag{26.2}$$

Для любого $z \in C_r^{1/8}$, с учетом оценки (25.1), имеем:

$$|e^{iz^2}| = |e^{ir^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)}| = e^{-r^2 \sin 2\varphi} \leq e^{-r^2 \frac{4\varphi}{\pi}}.$$

Отсюда получаем

$$|I_2| \leq \int\limits_{C_r^{1/8}} e^{-r^2 \frac{4\varphi}{\pi}} dS = \int\limits_0^{\pi/4} e^{-r^2 \frac{4\varphi}{\pi}} r d\varphi = r\left(-\frac{\pi}{4r^2}\right) e^{-r^2 \frac{4\varphi}{\pi}} \Bigg|_0^{\pi/4} \underset{r\to\infty}{\to} 0. \tag{26.3}$$

Преобразуем интеграл I_3 :

$$I_3 = -\int\limits_0^r e^{i(te^{i\pi/4})^2} e^{i\pi/4} dt = -e^{i\pi/4} \int\limits_0^r e^{-t^2} dt. \tag{26.4}$$

Так как

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то из соотношений (26.1), (26.2), (26.3), (26.4) получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx + i \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = e^{\frac{\pi}{4} i} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Откуда находим

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

27 Теорема о сходимости преобразования Лапласа

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Функция $f(t)$ называется **оригиналом**, если выполняются условия:

1) $f(t) = 0$ для любых $t < 0$;

2) $f(t)$ непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$;

3) существуют постоянные M, a такие, что $|f(t)| \leq Me^{at}$ для любых $t \geq 0$.

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом, показателем роста функции $f(t)$ называется величина

$$\alpha = \inf\{a \in \mathbb{R} | \exists M : |f(t)| \leq Me^{at} \ \forall t \geq 0\}.$$

Если функция $f(t)$ определена лишь на промежутке $[0, +\infty)$, то будем её автоматически доопределять нулевым значением при отрицательных t. Аналогично будем поступать, если $f(t)$ принимает ненулевые значения при $t < 0$.

Пример 27.1 *Степенная функция* $f(t) = t^n$, $n \geq 1$, *(после её переопределения при* $t < 0$*) является оригиналом с показателем роста* $\alpha = 0$. *В то же время функции* t^{-1}, e^{t^2}, $sign(t-1)$ *не являются оригиналами.*

Пусть задана функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. **Преобразованием Лапласа** функции f называется следующий интеграл, зависящий от параметра:

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \ p \in \mathbb{C}.$$

Если функция $f(t)$ – оригинал, то её преобразование Лапласа $F(p)$ называют **изображением** функции $f(t)$ и пишут

$$f(t) \risingdotseq F(p)$$

или

$$F(p) \fallingdotseq f(t).$$

Теорема 27.1 *Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста α. Тогда преобразование Лапласа $F(p)$ сходится в области* $\mathrm{Re}(p) > \alpha$ *и для любого $a > \alpha$ сходится равномерно в области* $\mathrm{Re}(p) \geq a$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $p = p_1 + ip_2$, p_1, $p_2 \in \mathbb{R}$, $p_1 > \alpha$. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $p_1 - \varepsilon > \alpha$. Тогда имеем:

$$|e^{-pt} f(t)| \leq M e^{-p_1 t} e^{(\alpha+\varepsilon)t} = M e^{(\alpha+\varepsilon-p_1)t}.$$

Из признака сравнения и конечности интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{(\alpha+\varepsilon-p_1)t} dt$$

вытекает сходимость $F(p)$ при данном p.

Пусть теперь $\mathrm{Re}(p) = p_1 \geq a > \alpha$. Тогда имеем

$$|e^{-pt} f(t)| \leq M e^{-at} e^{(\alpha+\varepsilon)t} = M e^{(\alpha+\varepsilon-a)t}.$$

Полагая $\varepsilon = \frac{a-\alpha}{4}$, получим

$$|e^{-pt} f(t)| \leq M e^{-\frac{3}{4}(a-\alpha)t}.$$

Отсюда и из признака Вейерштрасса вытекает равномерная сходимость $F(p)$ при $\mathrm{Re}(p) \geq a$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 27.1 $F(p) \underset{\mathrm{Re}(p)\to+\infty}{\to} 0$.

28 Теорема о регулярности преобразования Лапласа

Пусть D – область, γ – некоторая кусочно-гладкая кривая на комплексной плоскости. Для некоторой комплексной функции $g(\zeta, z)$, определенной в точках $(\zeta, z) \in \gamma \times D$, рассмотрим функцию

$$G(z) = \int\limits_\gamma g(\zeta, z) d\zeta, \ z \in D. \tag{28.1}$$

Теорема 28.1 *Пусть кривая γ конечная, функция $g(\zeta, z)$ непрерывна по $\zeta \in \gamma$ при каждом фиксированном $z \in D$ и регулярна по $z \in D$ при каждом фиксированном $\zeta \in \gamma$. Тогда функция $G(z)$, определенная соотношением (28.1), регулярна в области D и выполняется равенство*

$$G'(z) = \int\limits_{\gamma} g'_z(\zeta, z)d\zeta, \ \ z \in D.$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $z_1 \in D$, а также замкнутую гладкую кривую γ_1, лежащую в D и содержащую внутри себя точку z_1. Тогда имеем:

$$\int\limits_{\gamma_1} G(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} dz \int\limits_{\gamma} g(\zeta, z)d\zeta = \int\limits_{\gamma} d\zeta \int\limits_{\gamma_1} g(\zeta, z)dz = \int\limits_{\gamma} 0d\zeta = 0.$$

Так как кривая γ_1 выбрана произвольно, то согласно достаточному условию регулярности функция $G(z)$ регулярна на точке z_1.

Пусть γ_1 – произвольная окружность $|z-a| = r$, лежащая в области D. Тогда для любых $z \in D$, $|z - a| < r$, имеем:

$$G'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{G(t)}{(t-z)^2}dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{(t-z)^2}\int\limits_{\gamma} g(\zeta, t)d\zeta dt =$$

$$= \int\limits_{\gamma} d\zeta\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{g(\zeta, t)}{(t-z)^2}dt\right) = \int\limits_{\gamma} g'_z(\zeta, z)d\zeta.$$

Теорема доказана. □

Следствие 28.1 *Пусть функция $g(\zeta, z)$ непрерывна по $\zeta \in \gamma$ при каждом фиксированном $z \in D$ и регулярна по $z \in D$ при каждом фиксированном $\zeta \in \gamma$, а интеграл $\int\limits_{\gamma} g(\zeta, z)d\zeta$ сходится равномерно по z в каждой ограниченной замкнутой подобласти D_1 области D. Тогда функция $G(z)$, определенная соотношением (28.1), регулярна в области D и выполняется равенство*

$$G'(z) = \int\limits_{\gamma} g'_z(\zeta, z)d\zeta, \ \ z \in D.$$

Теорема 28.2 *Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста α. Тогда преобразование Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$ регулярно в области* $\mathrm{Re}(p) > \alpha$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $G(p, t) = e^{-pt}f(t)$, $p \in \mathbb{C}$, $t \in [0, +\infty)$. Так как функция $G(p, t)$ регулярна по p, непрерывна по t, а интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} G(p, t)dt$$

сходится равномерно в области $\mathrm{Re}(p) \geq a$ при любом $a > \alpha$, то выполнены условия следствия 28.1, и следовательно, функция

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} G(p,t)dt$$

регулярна в области $\mathrm{Re}(p) > \alpha$. Теорема доказана. $\square$

29 Свойства преобразования Лапласа I

Свойство 29.1 *(линейность). Пусть $f(t)$, $g(t)$ являются оригиналами с показателями роста α, β соответственно. Тогда*

$$af(t) + bg(t) \risingdotseq aF(p) + bG(p),\ \mathrm{Re}(p) > \max\{\alpha, \beta\},$$

где $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$.

Доказательство вытекает из линейности НИЗОП.

Свойство 29.2 *(подобие). Пусть $f(t)$ – оригинал с показателем роста α, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда для любого $a > 0$ справедливо*

$$f(at) \risingdotseq \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\ \mathrm{Re}(p) > \alpha.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)dt = \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-py/a} f(y)dy = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right). \square$$

Свойство 29.3 *(изображение производной). Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогда*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0).$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = e^{-pt}f(t)\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = pF(p) - f(0). \square$$

Следствие 29.1 *Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогда*

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n\left(F(p) - \frac{f(0)}{p} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right).$$

Свойство 29.4 *(изображение интеграла). Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогда*

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\int\limits_0^t f(\tau)d\tau dt = \int\limits_0^{+\infty} d\tau \int\limits_\tau^{+\infty} e^{-pt}f(\tau)dt = \frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau = \frac{F(p)}{p}. \ \square$$

Свойство 29.5 *(изображение свертки). Пусть $f_1(t)$, $f_2(t)$ – оригиналы с показателями роста α_1, α_2. Обозначим через $\varphi(t)$ свертку функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, т.е.*

$$\varphi(t) = (f_1 * f_2)(t) := \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau,\ t \geq 0.$$

Тогда $\varphi(t)$ является оригиналом с показателем роста $\alpha \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, и справедливо

$$\varphi(t) \risingdotseq F_1(p)F_2(p),\ \mathrm{Re}(p) > \alpha,$$

где $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$.

Доказательство. Так как при любом $\varepsilon > 0$ найдется $M > 0$ такое, что

$$|\varphi(t)| \leq \int\limits_0^t Me^{(\alpha+\varepsilon)\tau}Me^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)}d\tau = M^2te^{(\alpha+\varepsilon)t},$$

то показатель роста $\varphi(t)$ не превосходит α. Непрерывность функции $t \to \varphi(t)$ вытекает из непрерывности функций f_1, f_2 и теоремы о непрерывности ИЗОП.

Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\varphi(t)dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau dt = \int\limits_0^{+\infty} d\tau \int\limits_\tau^{+\infty} e^{-pt}f_1(\tau)f_2(t-\tau)dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau \int\limits_0^{+\infty} e^{-py}f_2(y)dy = F_1(p)F_2(p). \ \square$$

30 Свойства преобразования Лапласа II

Свойство 30.1 *(дифференцирование изображения). Пусть $F(p) \fallingdotseq f(t)$. Тогда*

$$F'(p) \fallingdotseq -tf(t).$$

Доказательство. Имеем

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt.$$

Согласно следствию 28.1 получаем

$$F'(p) = \int\limits_0^{+\infty} (-t)e^{-pt}f(t)dt \fallingdotseq -tf(t). \ \square$$

Следствие 30.1 *Пусть $F(p) \fallingdotseq f(t)$. Тогда*

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t).$$

Свойство 30.2 *(интегрирование изображения). Пусть $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал с показателем роста α. Тогда*

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty} F(\theta)d\theta,$$

где $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Доказательство. Пусть $I(p) \fallingdotseq \frac{f(t)}{t}$. По свойству 30.1 имеем:

$$I'(p) \fallingdotseq -t\frac{f(t)}{t} = -f(t) \risingdotseq -F(p).$$

Так как согласно следствию 27.1 $I(p) \to 0$ при $\text{Re}(p) \to +\infty$, то получаем:

$$\int\limits_p^{+\infty} F(\theta)d\theta = -\int\limits_p^{+\infty} I'(\theta)d\theta = -I(\theta)\Big|_p^{+\infty} = I(p). \ \square$$

Свойство 30.3 *(смещение). Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда*

$$e^{at}f(t) \risingdotseq F(p-a).$$

Доказательство очевидным образом вытекает из определения преобразования Лапласа.

Свойство 30.4 *(запаздывание). Пусть $f(t)$ – оригинал, $\tau > 0$. Тогда*

$$f_\tau(t) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p),$$

где $f(t) \risingdotseq F(p)$, $f_\tau(t) = f(t-\tau)$ при $t \geq \tau$, $f_\tau(t) = 0$ при $t < \tau$.

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} f_\tau(t)e^{-pt}dt = \int\limits_\tau^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} f(y)e^{-(y+\tau)p}dy = e^{-p\tau}F(p). \ \square$$

31 Вычисление преобразования Лапласа от некоторых элементарных функций

Вычислим преобразование Лапласа от некоторых элементарных функций.

1) Пусть $f(t) = 1(t)$ – единичная функция Хевисайда, т.е. $1(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $1(t) = 0$ при $t < 0$. Тогда

$$F(p) = \frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}, \ \text{Re}(p) > 0.$$

2) Пусть $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$. По свойству 30.3 имеем

$$F(p) = \frac{1}{p-a}, \ \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(a).$$

3) Пусть $f(t) = t^{\nu}$, $\nu \geq 0$. Тогда

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\nu} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{\nu+1}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-y} y^{\nu} dy = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \ \mathrm{Re}(p) > 0.$$

В частности, при $\nu = n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \tag{31.1}$$

что вытекает также и из следствия 30.1.

4) Пусть $f(t) = \sin \omega t$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t} \risingdotseq \frac{1}{2i} \frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{2i} \frac{1}{p + i\omega} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Аналогичными рассуждениями получаем

$$\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$\mathrm{sh}\, \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2};$$

$$\mathrm{ch}\, \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

5) Пусть $f(t) = t^n e^{at}$. Тогда, применяя соотношение (31.1) и свойство смещения 30.3, получаем

$$f(t) \risingdotseq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Аналогично, на основании свойства 30.3, получаем

$$e^{at} \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2};$$

$$e^{at} \cos \omega t \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}.$$

6) Применяя свойство дифференцирования изображения 30.1, получаем:

$$t \sin \omega t \risingdotseq -\frac{d}{dp} \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2};$$

$$t \cos \omega t \risingdotseq -\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

7) Применяя свойство интегрирования изображения 30.2, получаем:

$$\frac{\sin \omega t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty} \frac{\omega}{\theta^2+\omega^2} d\theta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}.$$

8) Применяя свойство интегрирования оригинала 29.4, находим

$$\operatorname{si}\, t := \int\limits_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}\right).$$

32 Формула Меллина

Теорема 32.1 *Пусть $f(t)$ – оригинал с показателем роста α, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Предположим, что функция $f(t)$ кусочно дифференцируемая. Тогда для любого $x > \alpha$ имеем:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $x > \alpha$ и определим функцию

$$\varphi(t) = e^{-xt} f(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Функция $\varphi(t)$ является непрерывной на $[0, +\infty)$, абсолютно интегрируемой и кусочно дифференцируемой. Кроме того,

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau.$$

Отсюда и из определения функции φ получаем:

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{i\lambda(t-\tau)} e^{-x\tau} f(\tau) d\tau.$$

Далее

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} e^{xt} d\lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau(x+i\lambda)} f(\tau) d\tau.$$

Полагая $p = x + i\lambda$, получаем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x+i\lambda) e^{t(x+i\lambda)} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) e^{tp} dp,$$

что и требовалось доказать. $\square$

33 Нахождение оригинала по изображению

1) *Нахождение оригинала с помощью свойств преобразования Лапласа.*

Пример 33.1

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)} = \frac{1/4}{p^2} + \frac{-1/4}{p^2+4} \risingdotseq \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

2) *Нахождение оригинала с помощью вычетов.*

Пусть $f(t)$ – оригинал с показателем роста α, а $F(p) \risingdotseq f(t)$, $\mathrm{Re}(p) > \alpha$. Предположим, что $F(p)$ имеет аналитическое продолжение на $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа особых точек, а также регулярна в бесконечно удаленной точке.

Лемма 33.1 *Пусть $x > \alpha$, $R_0 > 0$, а функция $F(p)$ непрерывна в области*

$$\{p \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(p) \le x, |p| \ge R_0\}.$$

Предположим, что

$$M(R) := \sup_{p \in C_R^{1/2}} |F(p)| \underset{R\to\infty}{\to} 0,$$

где $C_R^{1/2}$ – полуокружность $\{p \in \mathbb{C} : |p - x| = R, \mathrm{Re}(p) \le x\}$. Тогда для любого $t > 0$ имеем:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^{1/2}} F(p)e^{pt}dp = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\left|\int\limits_{C_R^{1/2}} F(p)e^{pt}dp\right| \le \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} M(R)|e^{(x+Re^{i\varphi})t}|Rd\varphi =$$

$$= M(R)Re^{xt}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt\cos\varphi}d\varphi = 2M(R)Re^{xt}\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-Rt\sin\varphi}d\varphi \le$$

$$\le 2M(R)Re^{xt}\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-Rt\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi = 2M(R)Re^{xt}\left(-\frac{\pi}{2Rt}\right)e^{-Rt\frac{2}{\pi}\varphi}\Big|_0^{\pi/2} \underset{R\to\infty}{\to} 0. \ \square$$

Найдется такое $R > 0$, что все особые точки функции $F(p)e^{pt}$ лежат внутри области ограниченной кривой $\gamma = C_R^{1/2} \cup l$, где $l = \{p \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(p) = x, |\mathrm{Im}(p)| \le R\}$.

Согласно основной теореме теории вычетов имеем:

$$\int\limits_{\gamma} F(p)e^{pt}dp = 2\pi i \sum_k \operatorname*{res}_{p_k}(F(p)e^{pt}).$$

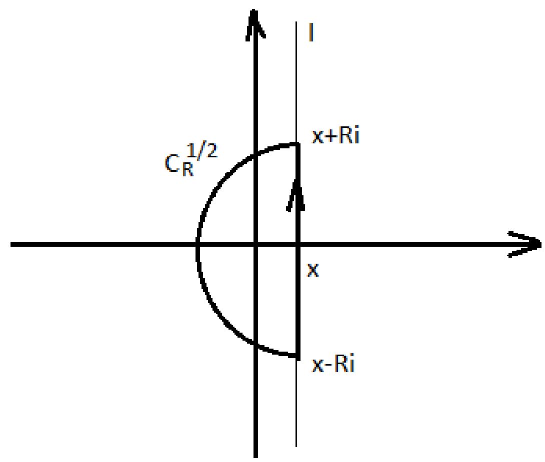

Рис. 3: К доказательству леммы 33.1

Т.к. функция $F(p)$ регулярна в точке $p = \infty$ и согласно следствию 27.1 $F(p) \underset{\mathrm{Re}(p)\to+\infty}{\to} 0$, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Устремляя R к бесконечности, используя теорему 32.1 и лемму 33.1, получаем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \sum_k \mathop{\mathrm{res}}_{p_k}(F(p)e^{pt}).$$

3) *Нахождение оригинала с помощью рядов.*

Пусть $f(t)$ – оригинал с показателем роста α, а $F(p) \risingdotseq f(t)$, $\mathrm{Re}(p) > \alpha$. Предположим, что $F(p)$ имеет аналитическое продолжение на $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа особых точек, а также регулярна в точке $p = \infty$.

Разложим функцию $F(p)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности:

$$F(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n p^n.$$

Так как $\lim\limits_{\mathrm{Re}(p)\to+\infty} F(p) = 0$ и $F(p)$ регулярна в точке $p = \infty$, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$. Следовательно, $p = \infty$ является устранимой особой точкой функции $F(p)$. Отсюда получаем, что $c_n = 0$ при $n \geq 1$. То есть

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{p^k},$$

где $b_k = c_{-k}$.

Существуют постоянные M, R_0 такие, что $|F(p)| \leq M$ для любых $p \in \mathbb{C}$, $|p| \geq R_0$.

Имеем
$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|p|=R_0} \frac{F(p)}{p^{k+1}} dp, \ |b_k| \le \frac{M}{R_0^k}.$$

Таким образом, следующий ряд
$$f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} t^n$$

сходится при всех $t \in \mathbb{R}$. Докажем, что $f(t) \risingdotseq F(p)$. Действительно,
$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-pt}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} \frac{n!}{p^{n+1}} = F(p).$$

34 Применения преобразования Лапласа к решению уравнений

1) *Применение к решению стационарных линейных уравнений.*

Пример 34.1 *Найдем решение задачи Коши*
$$D^2 x + x = e^t, \ x(0) = 0, \ Dx(0) = 1.$$

Решение. Пусть $x(t)$ – решение задачи Коши, $x(t) \risingdotseq F(p)$. Используя свойство 29.3, имеем:
$$Dx \risingdotseq pF(p) - x(0) = pF(p);$$
$$D^2 x \risingdotseq p^2 F(p) - px(0) - Dx(0) = p^2 F(p) - 1.$$

Так как $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$, то
$$p^2 F(p) - 1 + F(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Отсюда
$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p-1)} = \frac{1/2}{p-1} + \frac{-p/2 + 1/2}{p^2+1} \fallingdotseq \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t = x(t).$$

2) *Применение к решению интегральных уравнений Вольтерры.*

Пример 34.2 *Найдем решение интегрального уравнения*
$$x(t) = \sin t + \int\limits_0^t (t - \tau) x(\tau) d\tau.$$

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq F(p)$. Согласно свойству 29.5 имеем:

$$\int\limits_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau = t * x(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}F(p).$$

Таким образом,

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2}F(p).$$

Отсюда получаем

$$F(p) = \frac{p^2}{p^4-1} = \frac{1/2}{p^2+1} + \frac{1/2}{p^2-1} \fallingdotseq \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\operatorname{sh} t = x(t).$$

3) *Применение к решению систем стационарных линейных уравнений.*

Пример 34.3 *Найдем решение задачи Коши*

$$Dx = -y,\ Dy = 2x + 2y,\ x(0) = y(0) = 1.$$

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда имеем:

$$pX(p) - 1 = -Y(p),$$

$$pY(p) - 1 = 2X(p) + 2Y(p).$$

Отсюда находим

$$X(p) = \frac{p-3}{p^2-2p+2} \fallingdotseq e^t\cos t - 2e^t\sin t;$$

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2-2p+2} \fallingdotseq e^t\cos t + 3e^t\sin t.$$

4) *Применение к решению уравнений в частных производных.*

Пример 34.4 *Найдем решение смешанной задачи для волнового уравнения*

$$u_{xx}(t,x) - \frac{1}{a^2}u_{tt}(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{l},\ u_t(x,0) = 0,\ x \in [0,l].$$

Решение. Пусть $u(t,x)$ – решение смешанной задачи,

$$F(p,x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}u(x,t)dt \fallingdotseq u(t,x).$$

Имеем

$$u_t(t,x) \risingdotseq pF(p,x) - \sin\frac{\pi x}{l},$$

$$u_{tt}(t,x) \risingdotseq p^2F(p,x) - p\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Дифференцируя под знаком несобственного инеграла, получаем

$$u_x(t,x) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}u_x(t,x)dt = \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}u(t,x)dt = F_x(p,x).$$

Аналогично

$$u_{xx}(t,x) \risingdotseq F_{xx}(p,x).$$

Таким образом, получаем:

$$F_{xx}(p,x) - \frac{1}{a^2}\left(p^2F(p,x) - p\sin\frac{\pi x}{l}\right) = 0.$$

Используя граничные условия $u(0,t) = u(l,t) = 0$, находим, что $F(p,0) = F(p,l) = 0$.

Находя решение $F(p,x)$ граничной задачи для ОДУ второго порядка, получаем

$$F(p,x) = \frac{l^2p}{a^2\pi^2 + l^2p^2}\sin\frac{\pi x}{l} \fallingdotseq \cos\frac{a\pi x}{l}\sin\frac{\pi x}{l} = u(t,x).$$

5) *Применение к решению уравнений с запаздыванием.*

Пример 34.5 *Найдем решение уравнения с запаздыванием*

$$Dx(t) = x(t-1) + 1, \;\; x(0) = 0.$$

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда

$$Dx(t) \risingdotseq pF(p),$$

$$x(t-1) \risingdotseq e^{-p}F(p).$$

Таким образом,

$$F(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{p - e^{-p}} = \frac{1}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^n} \fallingdotseq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n)^{n+1}}{(n+1)!}1(t-n),$$

где $1(t)$ – единичная функция Хевисайда.

35 Конформные отображения

Пусть D и G – области в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Говорят, что взаимно однозначное отображение $f : D \to G$ является **конформным**, если f регулярно в D за исключением не более чем одной точки, которая может быть простым полюсом.

Теорема 35.1 *(Теорема Римана). Пусть D – односвязная область, граница которой состоит более чем из одной точки. Тогда существует конформное отображение f области D на единичный круг $G = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$. Для любых $z_0 \in D$, $w_0 \in G$, $\alpha \in \mathbb{R}$ существует единственное конформное отображение $f : D \to G$ с условиями: $f(z_0) = w_0$, $\arg f'(z_0) = \alpha$.*

Лемма 35.1 *Пусть функция f регулярна в точке z_0,*

$$w_0 = f(z_0),\ f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0,\ f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Тогда существуют проколотые окрестности U_{z_0}, V_{w_0} точек z_0, w_0, такие, что для любого $w \in V_{w_0}$ уравнение $w = f(z)$ имеет не менее n решений, лежащих в окрестности U_{z_0}.

Доказательство. Имеем

$$w(z) := f(z) - w_0 = (z - z_0)^n g(z),$$

где $g(z)$ – регулярная в точке z_0 функция, $g(z_0) \neq 0$.

Уравнение $w = f(z)$ эквивалентно уравнению $(z - z_0)^n g(z) = w - w_0$. Обозначим через $g_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$, регулярные ветви функции $\sqrt[n]{g(z)}$.

Рассмотрим функцию $\zeta(z) = (z - z_0)g_1(z)$. Так как $\zeta'(z_0) = h_1(z_0) \neq 0$, то существуют окрестности U_{z_0}, W_{ζ_0} точек z_0, $\zeta_0 = 0$ такие, что функция $\zeta(z)$ биективно отображает окрестность U_{z_0} в окрестность W_{ζ_0}. Существует единственная обратная функция $h : W_{\zeta_0} \to U_{z_0}$, которая является регулярной и биективной.

Имеем:

$$\zeta \equiv (h(\zeta) - z_0)g_1(h(\zeta)),\ \zeta \in W_{\zeta_0}.$$

Обозначим через $\eta_i(w)$ – регулярные ветви многозначной функции $f(h(\sqrt[n]{w - w_0}))$, определенные в такой окрестности V_{w_0} точки w_0, что образы окрестности V_{w_0} при действии регулярных ветвей $\zeta_i(w)$ многозначного отображения $\sqrt[n]{w - w_0}$ принадлежат окрестности W_{ζ_0}.

Таким образом, имеем:

$$\zeta_i(w) \equiv (h(\zeta_i(w)) - z_0)g_1(h(\zeta_i(w))),\ w \in V_{w_0}.$$

Далее

$$w \equiv w_0 + (\zeta_i(w))^n \equiv w_0 + (h(\zeta_i(w)) - z_0)g_1(h(\zeta_i(w)))^n \equiv w_0 + f(h(\zeta_i(w))),\ w \in V_{w_0}.$$

Таким образом, в качестве решений уравнения $w = f(z)$ можно взять $z_i = h(\zeta_i(w))$. Поскольку функция h биективная в W_{ζ_0}, а $\zeta_i(w) \neq \zeta_j(w)$ для любых $i \neq j$, $w \in V_{w_0} \setminus \{w_0\}$, то $z_i(w) \neq z_j(w)$ для любых $i \neq j$, $w \in V_{w_0} \setminus \{w_0\}$. Лемма доказана. □

Следствие 35.1 *Пусть f – конформное отображение областей D, G. Если $f(z)$ регулярна в точке $z_0 \in D$, то $f'(z_0) \neq 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f'(z_0) = 0$. Согласно лемме 35.1 существуют окрестности точек z_0, $w_0 = f(z_0)$, в которых функциональное уравнение $w = f(z)$ имеет по крайней мере 2 различных решения, что противоречит биективности отображения f. □

Свойство 35.1 *Конформное отображение сохраняет углы между кривыми в точках их пересечения.*

Свойство 35.2 *Если $f(z)$ конформное в области D, то линейное растяжение в точке $z_0 \in D$ одинаково для всех кривых, проходящих через точку z_0, и равно $|f'(z_0)|$.*

Доказательство этих двух свойств вытекает из геометрического смысла аргумента и модуля производной.

Свойство 35.3 *Отображение, обратное к конформному, также является конформным.*

Свойство 35.4 *Суперпозиция двух конформных отображений является конформным отображением.*

Доказательство этих двух свойств вытекает из определения конформного отображения, свойств обратных и сложных функций.

36 Свойства дробно-линейного отображения

Рассмотрим дробно-линейное отображнение

$$w = \frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc \neq 0,$$

действующее из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Очевидно, что дробно-линейное отображение является конформным отображением из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Общее уравнение окружности в декартовых координатах имеет вид

$$l(x^2+y^2)+Dx+Cy+F=0,\ l\neq 0.$$

Прямую

$$Dx+Cy+F=0$$

можно рассматривать как предельный случай окружности, когда радиус стремится к бесконечности. В дальнейшем прямые мы будем также относить к окружностям.

Свойство 36.1 *Образом окружности при дробно-линейном отображении является окружность.*

Доказательство. Если $c=0$, то имеем линейное отображение

$$w = az+b,$$

которое можно представить в виде композиции трех преобразований:

1) растяжение плоскости с коэффициентом $|a|$, т.е. $w_1 = |a|z$;

2) поворот плоскости на угол $\arg a$, т.е. $w_2 = e^{i\arg a}w_1$;

3) параллельный перенос на вектор b, т.е. $w = w_2 + b$.

Очевидно, что каждое из этих преобразований переводит окружность в окружность.

Если $c \neq 0$, то имеем:

$$w = a_2 + \frac{b_2}{z+c_2}.$$

Отсюда получаем, что дробно-линейное отображение представимо в виде композиции параллельного переноса, растяжения, поворота плоскости, а также отображения $w = \frac{1}{z}$.

Таким образом, достаточно проверить, что образом окружности при отображении $w = \frac{1}{z}$ является окружность.

Рассмотрим общее уравнение окружности в декартовых координатах:

$$l(x^2+y^2)+Dx+Cy+F=0.$$

Так как

$$x^2+y^2=z\overline{z},\ x=\frac{z+\overline{z}}{2},\ y=\frac{z-\overline{z}}{2i},$$

то уравнение окружности примет вид

$$lz\overline{z}+z\overline{k}+\overline{z}k+F=0,$$

где $k=\frac{D+Ci}{2}$.

Образом данной окружности при действии отображения $w=\frac{1}{z}$ является кривая

$$l\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}}+\frac{1}{w}\overline{k}+\frac{1}{\overline{w}}k+F=0.$$

Отсюда получаем уравнение

$$l+\overline{k}\overline{w}+kw+Fw\overline{w}=0,$$

которое задает окружность на $\mathbb{C}$. □

Свойство 36.2 *При действии дробно-линейного отображения точки, симметричные относительно окружности, переходят в точки, симметричные относительно окружности.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную окружность Γ. Докажем, что точки z_1, z_1^* симметричны относительно Γ тогда и только тогда, когда для любой окурности γ, проходящей через точки z_1, z_1^* угол между окружностями Γ, γ равен $\frac{\pi}{2}$.

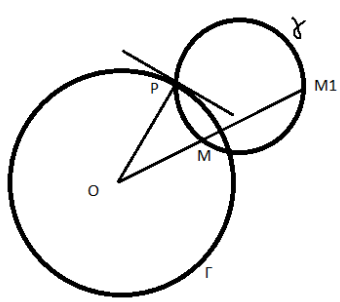

Рис. 4: К доказательству свойства 36.2

Пусть O – центр окружности Γ, $z_1=M$, $z_1^*=M_1$, R – радиус окружности Γ. Условие симметричности точек z_1, z_1^* относительно Γ может быть записано следующим образом:

$$OM\cdot OM_1=R^2.$$

Пусть P – одна из точек пересечения окружностей Γ и γ. Поскольку радиус, проведенный в точку касания прямой с окружностью, перпендикулярен данной касательной, то условие ортогональности окружностей Γ, γ в точке P равносильно тому, что радиус OP окружности Γ лежит на касательной к окружности γ. В свою очередь, в силу теоремы о касательной и секущей, условие того, что OP касается окружности γ может быть записано следующим образом:

$$OM \cdot OM_1 = OP^2.$$

Требуемое утверждение доказано.

Теперь вернемся к доказательству свойства. Так как дробно-линейное отображение является конформным, в конформное отображение сохраняет углы между кривыми в точках их пересечения, то требуемый факт вытекает из доказанного утверждения. □

Свойство 36.3 *Для любых точек z_i, $w_i \in \overline{\mathbb{C}}$, $i = 1, 2, 3$, $z_i \neq z_j$, $w_i \neq w_j$ при $i \neq j$, существует единственное дробно-линейное отображение $w = f(z)$ такое, что $w_i = f(z_i)$ для любых $i = 1, 2, 3$.*

Доказательство. Докажем единственность. Предположим, что существуют 2 различных дробно-линейных отображения $f(z)$, $g(z)$ такие, что $f(z_i) = g(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$. Уравнение $f(z) = g(z)$ равносильно некоторому квадратному уравнению

$$lz^2 + kz + e = 0.$$

Согласно предположению это уравнение имеет 3 различных корня z_i. Таким образом, $l = k = e = 0$. Откуда получаем, что $f(z) \equiv g(z)$.

Докажем существование требуемого дробно-линейного отображения. Непосредственной проверкой можно убедиться, что отображение, определяемое соотношением

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \tag{36.1}$$

удовлетворяет условиям $w(z_i) = w_i$. Если $z_i = \infty$, то в формуле (36.1) разности, содержащие z_i, заменяют на 1. Аналогично, если $w_j = \infty$, то в формуле (36.1) разности, содержащие w_j, заменяют на 1. □

Пример 36.1 *Найти конформное отображение $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ такое, что $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = \infty$.*

Решение. Воспользуемся свойством 36.3, положим $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$:

$$w = A\frac{z - z_1}{z - z_2}, A \in \mathbb{C}.$$

Пример 36.2 *Найти конформное отображение f верхней полуплоскости* $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ *на единичный круг $|w| \leq 1$ такое, что $f(z_1) = 0$.*

Решение. Точка $\overline{z_1}$ симметрична точке z_1 относительно прямой $\mathrm{Im}(z) = 0$. Согласно свойству 36.2 получаем $f(\overline{z_1}) = \infty$. Используя пример 36.1, находим

$$w = A\frac{z - z_1}{z - \overline{z_1}}.$$

Т.к. граница области переходит в границу, то

$$z = x \in \mathbb{R} \mapsto w,\ |w| = 1.$$

Отсюда имеем

$$1 = |A|\frac{|x - z_1|}{|x - \overline{z_1}|} = |A|,$$

т.е. $A = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Окончательно получаем

$$w = e^{i\varphi}\frac{z - z_1}{z - \overline{z_1}}.$$

Пример 36.3 *Найти конформное отображение f единичного круга $|z| \leq 1$ на единичный круг $|w| \leq 1$ такое, что $f(z_1) = 0$.*

Решение. Т.к. точки z_1 и $\frac{1}{\overline{z_1}}$ симметричны относительно окружности $|z| = 1$, то $f(\frac{1}{\overline{z_1}}) = \infty$ согласно свойству 36.2. Используя пример 36.1, находим

$$w = A\frac{z - z_1}{z - \frac{1}{\overline{z_1}}} = A_1\frac{z - z_1}{1 - z\overline{z_1}}.$$

Полагая $z = e^{i\varphi}$, находим:

$$1 = |A_1|\left|\frac{e^{i\varphi} - z_1}{1 - \overline{z_1}e^{i\varphi}}\right| = |A_1|\frac{1}{|e^{i\varphi}|}\left|\frac{e^{i\varphi} - z_1}{e^{-i\varphi} - \overline{z_1}}\right| = |A_1|.$$

Окончательно получаем

$$w = e^{i\psi}\frac{z - z_1}{1 - z\overline{z_1}},\ \psi \in \mathbb{R}.$$

37 Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями

Функция Жуковского

$$w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

Функция Жуковского допускает декомпозицию

$$w = S_3(S_2(S_1(z))),$$

где

$$S_3(z) = \frac{1 + z}{1 - z},\ S_2(z) = z^2,\ S_3(z) = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Найдем образы окружностей и лучей при действии функции Жуковского.

1) Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Имеем:

$$w = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})\cos\varphi + i\frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})\sin\varphi.$$

Переходя к декартовым координатам $w = (u, v)$, получаем:

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(\rho+\frac{1}{\rho})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(\rho-\frac{1}{\rho})^2} = 1,\ \rho \neq 1,$$

и

$$w = \cos\varphi,\ \rho = 1.$$

В частности, функция Жуковского конформно отображает единичный круг $|z| < 1$ на всю расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезом по отрезку действительной оси $[-1, 1]$.

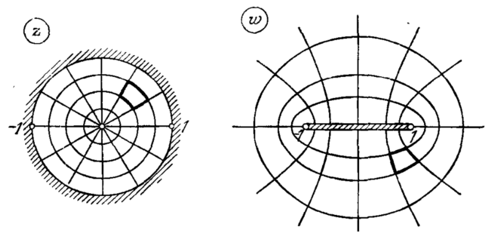

Рис. 5: Функция Жуковского на единичном круге

2) Пусть $z = te^{i\varphi}$, $t \geq 0$. Тогда

$$w = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})\cos\varphi + i\frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})\sin\varphi.$$

Полагая $t = e^y$, получаем:

$$u(y) = \operatorname{ch} y \cos\varphi,\ v(y) = \operatorname{sh} y \sin\varphi.$$

Отсюда

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1.$$

Функция e^z

Функция $w = e^z$ переводит горизонтальные прямые

$$z = t + ai,\ t \in \mathbb{R}$$

в лучи, выходящие из начала координат:

$$w = e^t(\cos a + i\sin a),$$

т.е.

$$v = u \cdot \operatorname{tg} a.$$

В частности, функция $w = e^z$ конформно отображает полосу $0 < \operatorname{Im}(z) < 2\pi$ на всю комплексную плоскость с разрезом по лучу действительной оси $t \in [0, +\infty)$.

Тригонометрические и гиперболические функции

Гиперболический косинус

$$w = \operatorname{ch} z$$

является композицией функций $w_1 = e^z$, $w_2 = \frac{1}{2}(w_1 + \frac{1}{w_1})$.

Косинус

$$w = \cos z$$

является композицией функций $w_1 = iz$, $w_2 = \operatorname{ch} w_1$.

Синус

$$w = \sin z$$

является композицией функций $w_1 = \frac{\pi}{2} - z$, $w_2 = \cos w_1$.

Гиперболический синус

$$w = \operatorname{sh} z$$

является композицией функций $w_1 = -iz$, $w_2 = i \sin w_1$.

38 Принцип аргумента

Теорема 38.1 *Пусть функция $f(z) \not\equiv 0$ регулярна в области G за исключением конечного числа полюсов, $D \subset G$ – ограниченная односвязная подобласть, $\Gamma = \partial D$, на Γ нет нулей и полюсов функции $f(z)$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

где N – число нулей, P – число полюсов функции $f(z)$ в области D с учетом их кратности.

Доказательство. Функция $f(z)$ имеет в области D конечное число полюсов. В противном случае существовала бы в области G предельная точка полюсов, т.е. неизолированная особая точка.

Докажем, что функция $f(z)$ имеет конечное число нулей в области D. Предположим, что существует бесконечная последовательность различных нулей $z_k \in D$, $k \in \mathbb{N}$. Так как $\overline{D}$ – компакт, то существует подпоследовательность z_{k_i}, сходящаяся к некоторому $a \in \overline{D} \subset G$. Тогда по теореме единственности $f(z) \equiv 0$, что противоречит условию теоремы.

Пусть z_0 – нуль порядка n функции $f(z)$, тогда

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

где $g(z)$ – регулярная, $g(z_0) \neq 0$.

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Пусть z_1 – полюс порядка p функции $f(z)$, тогда

$$f(z) = (z - z_1)^{-p} h(z),$$

где $h(z)$ – регулярная, $h(z_1) \neq 0$.

Имеем
$$F(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{p}{z-z_1}+\frac{h'(z)}{h(z)}.$$
Опишем около каждого из нулей и полюсов окружности C_j достаточно малого радиуса (так, чтобы круги попарно не пересекались).

Имеем:
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\sum_j\int\limits_{C_j}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_r n_r-\sum_l p_l=N-P.$$
Теорема доказана. □

Обозначим через $\Delta_\Gamma \arg z$ изменение аргумента z при перемещении из точки z_0 в точку z_1 по кривой Γ.

А через $\Delta_\Gamma \arg f(z)$ обозначим изменение аргумента $w=f(z)$ при движении точки образа кривой γ при отображении f.

Теорема 38.2 *(Принцип аргумента). Пусть функция $f(z)$, области D, G, кривая Γ удовлетворяют условиям теоремы 38.1. Тогда*
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z)=N-P.$$
Доказательство. По теореме 38.1 имеем:
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P.$$
Существует окрестность U_Γ кривой Γ такая, что $f(z)\neq 0$ для любого $z\in U_\Gamma$. Рассмотрим в U_Γ регулярную ветвь функции $\ln f(z)$.

Имеем
$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\ln f(z))'dz=\frac{1}{2\pi i}\Delta_\Gamma \ln f(z)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}(\Delta_\Gamma \ln|f(z)|+i\Delta_\Gamma \arg f(z))=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z).$$
Теорема доказана. □

Следствие 38.1 *Если функция $f(z)$ не имеет полюсов, то*
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z)=N.$$
Следствие 38.2 *Если функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ регулярны в области G, N – число нулей функции $f_1(z)f_2(z)$, то*
$$\frac{1}{2\pi}(\Delta_\Gamma \arg f_1(z)+\Delta_\Gamma \arg f_2(z))=N.$$
Замечание 38.1 *Пусть Γ_1 – образ замкнутой кривой Γ при отображении $w=f(z)$. Изменение аргумента функции $f(z)$ на контуре Γ определяется числом полных оборотов, которые совершает вектор w при движении точки w по замкнутому контуру Γ_1. Если вектор w не делает ни одного полного оборота вокруг точки $w=0$, то $\Delta_\Gamma \arg f(z)=0$.*

39 Теорема Руше

Теорема 39.1 *(Теорема Руше). Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в области G, $D \subset G$ – ограниченная односвязная подобласть, $\Gamma = \partial D$, Γ не содержит нулей функции $f(z)$, $|f(z)| > |g(z)|$ для любых $z \in \Gamma$. Тогда функции $f(z)$ и $F(z) = f(z) + g(z)$ имеют одинаковое количество нулей в области D.*

Доказательство. Так как $|f(z)| > |g(z)|$ для любых $z \in \Gamma$, то $F(z)$ не содержит нулей на Γ. Пусть N_F – количество нулей функции $F(z)$ в области D. Согласно следствию 38.1 имеем:

$$N_F = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Докажем, что

$$\Delta_\Gamma \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0. \tag{39.1}$$

Положим

$$w(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}.$$

Согласно замечанию 38.1 достаточно доказать, что $w(\Gamma)$ не содержит внутри себя начало координат. Пусть $z = z(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, – уравнение кривой Γ. Так как

$$\left|1 + \frac{g(z(t))}{f(z(t))} - 1\right| = \left|\frac{g(z(t))}{f(z(t))}\right| < 1$$

для любых $t \in [t_0, t_1]$, то $w(\Gamma)$ лежит внутри круга $|z - 1| < 1$ и, следовательно, не содержит внутри себя начало координат.

Таким образом, из следствия 38.2 и соотношения (39.1) получаем:

$$N_F = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z) = N_f,$$

где N_f – число нулей функции f в области D. Теорема доказана. □

Теорема 39.2 *(следствие из основной теоремы алгебры). Любой многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней.*

Доказательство. Положим

$$F(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0,$$

$$f(z) = z^n,$$

$$g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Так как

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| \to 0,\ z \to \infty,$$

то существует $R > 0$ такое, что

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$$

для любого z, $|z| = R$.

Кроме того, существует $R_1 \geq R$ такое, что вне круга $|z| \leq R_1$ нет нулей функции $F(z)$.

Таким образом, по теореме 39.1 имеем

$$N_F = n_f = n,$$

что и требовалось доказать. $\square$