ФПМИ, 3 курс, 9а группа
Крагель Алина Олеговна
ИСО
Исаченко Александр Николаевич
Лабораторная работа №5

1. Алгоритм Флойда применяется для решения задачи о нахождении для каждой пары вершин графа кратчайший путь. Ограничений на длины дуг не накладывается. Алгоритм обнаруживает контур отрицательной длины в графе.
   По окончанию применения алгоритма если k+1 = n и $d_{ii}^{k+1} \geq 0, i = \overline{1,n,}$ то матрица D_n даёт кратчайшие расстояния между парами вершин.
   Для условия задания 1 строим матрицы D^{k+1}, T^{k+1} по матрицам D^k, T^k:

$$\mathrm{D}^0 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 10 & 4 & 5 \\ 20 & 0 & 7 & 1 & \infty \\ 8 & \infty & 0 & -10 & -3 \\ \infty & 4 & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{T}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{D}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 10 & 4 & 5 \\ 20 & 0 & 7 & 1 & 25 \\ 8 & -7 & 0 & -10 & -3 \\ \infty & 4 & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{T}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{D}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -8 & -14 & 5 \\ 20 & 0 & 7 & 1 & 25 \\ 8 & -7 & 0 & -10 & -3 \\ 24 & 4 & 11 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{T}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

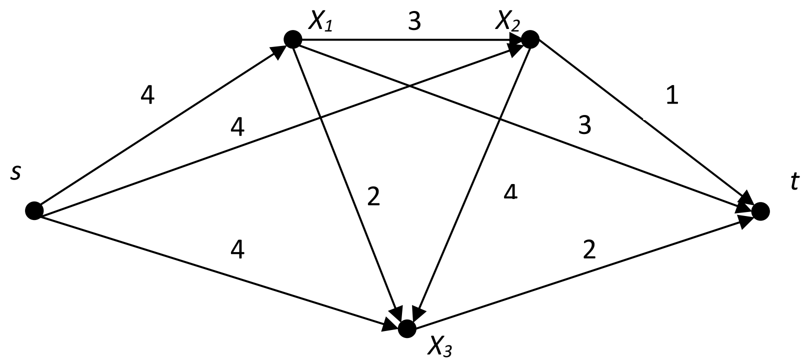
$$\mathrm{D}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -8 & -18 & -11 \\ 15 & 0 & 7 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & 0 & -10 & -3 \\ 19 & 4 & 11 & 0 & 6 \\ 22 & 7 & 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{T}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{D}^4 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -8 & -18 & -12 \\ 15 & 0 & 7 & -3 & 3 \\ 8 & -7 & 0 & -10 & -4 \\ 19 & 4 & 11 & 0 & 6 \\ 22 & 7 & 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{T}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{D}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & -8 & -18 & -12 \\ 15 & 0 & 7 & -3 & 3 \\ 8 & -7 & 0 & -10 & -4 \\ 19 & 4 & 11 & 0 & 6 \\ 22 & 7 & 14 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{T}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, после проведения 5 итераций алгоритма Флойда, получили матрицу D^5 с неотрицательными диагональными элементами, что дает нам право назвать матрицу D^5 корректной матрицей кратчайших расстояний между вершинами данного условием графа.

2. Алгоритм Форда-Фалкерсона для нахождения максимального потока начинает свою работу с произвольного начального потока в сети. Например, нулевого потока. Алгоритм на каждой итерации состоит из двух этапов: расстановка меток и увеличение потока. Изменение потоков на величину по дугам повторяется до тех пор, пока не будет достигнута вершина s. Стираем у вершин все метки и возвращаемся к этапу 1 с новым увеличенным потоком.

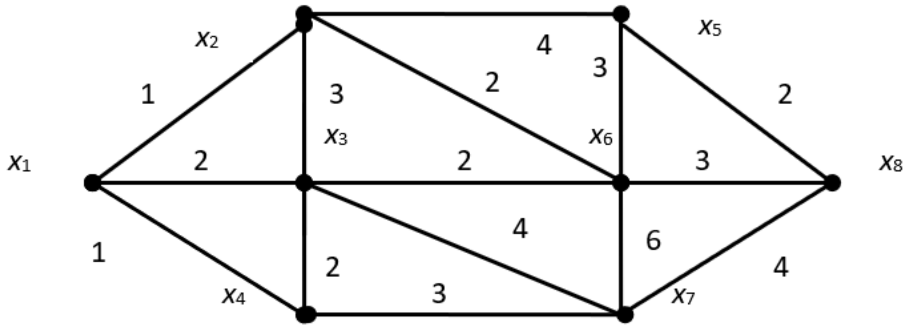


№	s	x_1	x_2	x_3	t	v
1.	$(-,\infty)$	$(S^+,4)$	$(S^+,4)$	$(S^+,4)$	$({x_1}^+,3)$	0 + 3
2.	$(-,\infty)$	$(S^+,1)$	$(S^+,4)$	$(S^+,4)$	$({x_2}^+,1)$	3 + 1
3.	$(-,\infty)$	$(S^+,1)$	$(S^+,3)$	$(S^+,4)$	$({x_3}^+,2)$	4 + 2
4.	$(-,\infty)$	$(S^+,1)$	$(S^+,3)$	$(S^+,2)$		6

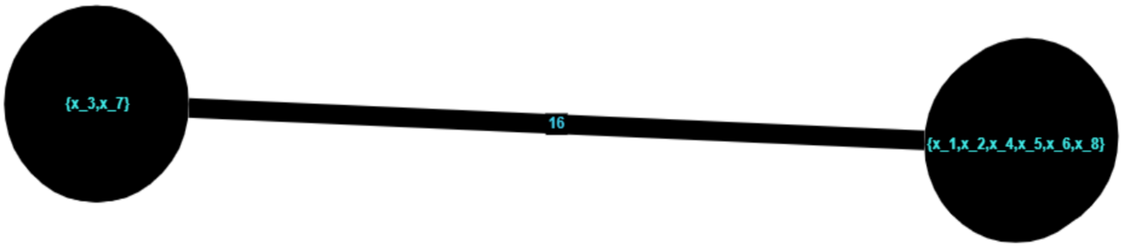
Таким образом из таблицы решений:

- максимальный поток $v_{max} = 6$;
- минимальный срез $S = \{s, x_1, x_2, x_3\}$, $\bar{S} = \{t\}$.

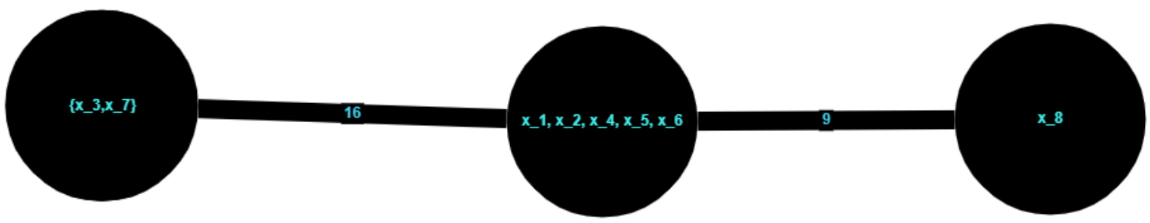
3. Алгоритм Гомори-Ху является более эффективным, ибо в нем задача о максимальном потоке решается n-1 раз, нежели при решении данной задачи алгоритмом Форда-Фалкерсона. Идея алгоритма Гомори-Ху состоит в итеративном построении максимального остовного дерева $G'' = (v, E'')$. Если требуется определить величину максимального потока между двумя произвольными узлами, надо в дереве найти путь, соединяющий эти два узла, и выбрать в этом пути дугу с минимальным весом. Вес этой дуги равен величине максимального потока между рассматриваемыми узлами.



Итерация 1. Возьмём $s = x_7$, $t = x_6$. Минимальный разрез, отделяющий x_7 от x_6, есть $\{\{x_3, x_7\}, \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_8\}\}$. Его пропускная способность равна $v(x_7, x_6) = 16$. По минимальному разрезу получим, что дерево на первой итерации состоит из двух множеств вершин: $\{x_3, x_7\}$, $\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_8\}$ и единственного ребра с весом равным 16.

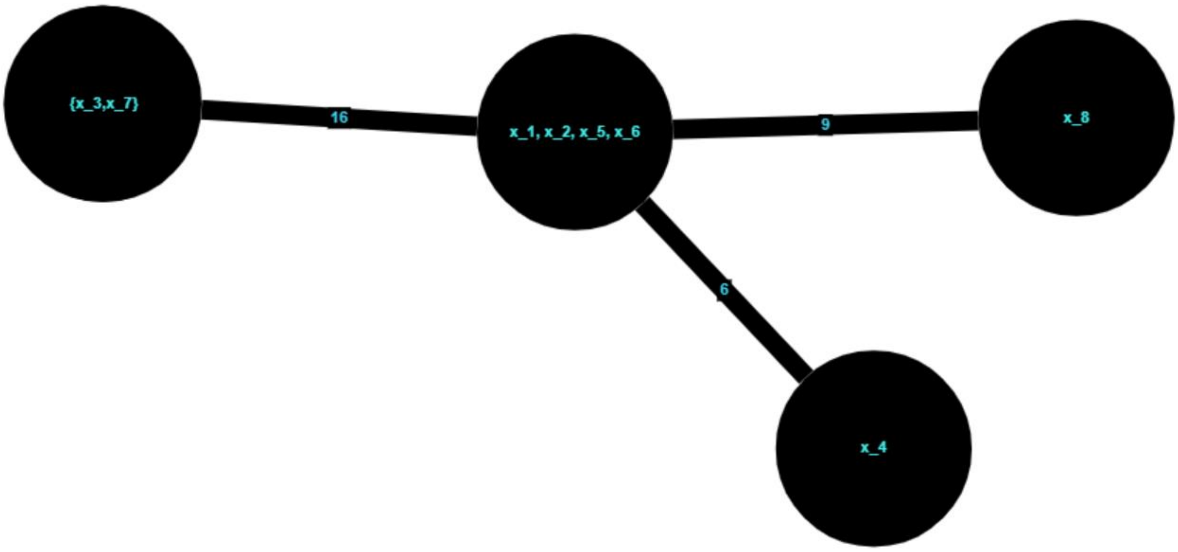


Итерация 2. $s = x_8$, $t = x_5$. Минимальный разрез, отделяющий x_8 от x_5, есть $\{\{x_8\}, \{\{x_3, x_7\}, \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6,\}\}$. Его пропускная способность равна $v(x_8, x_5) = 9$. По минимальному разрезу получим, что дерево на второй итерации состоит из трех множеств вершин: $\{x_3, x_7\}$, $\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}, \{x_8\}$ и добавленного ребра с весом равным 9.

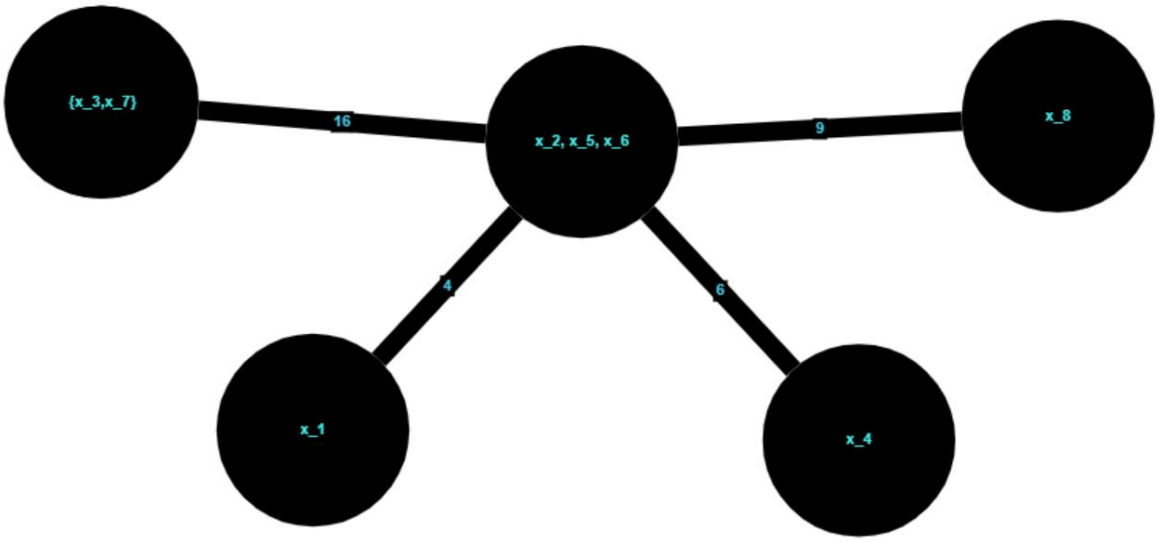


Итерация 3. s=x_4, t=x_5. Минимальный разрез, отделяющий *x4* от x_5, есть $\{\{x_4\}, \{x_1, x_2, x_5, x_6, \{x_8\}, \{x_3, x_7\}\}\}$. Его пропускная способность равна 6. дерево на второй итерации состоит из трех множеств вершин: $\{x_3, x_7\}$,

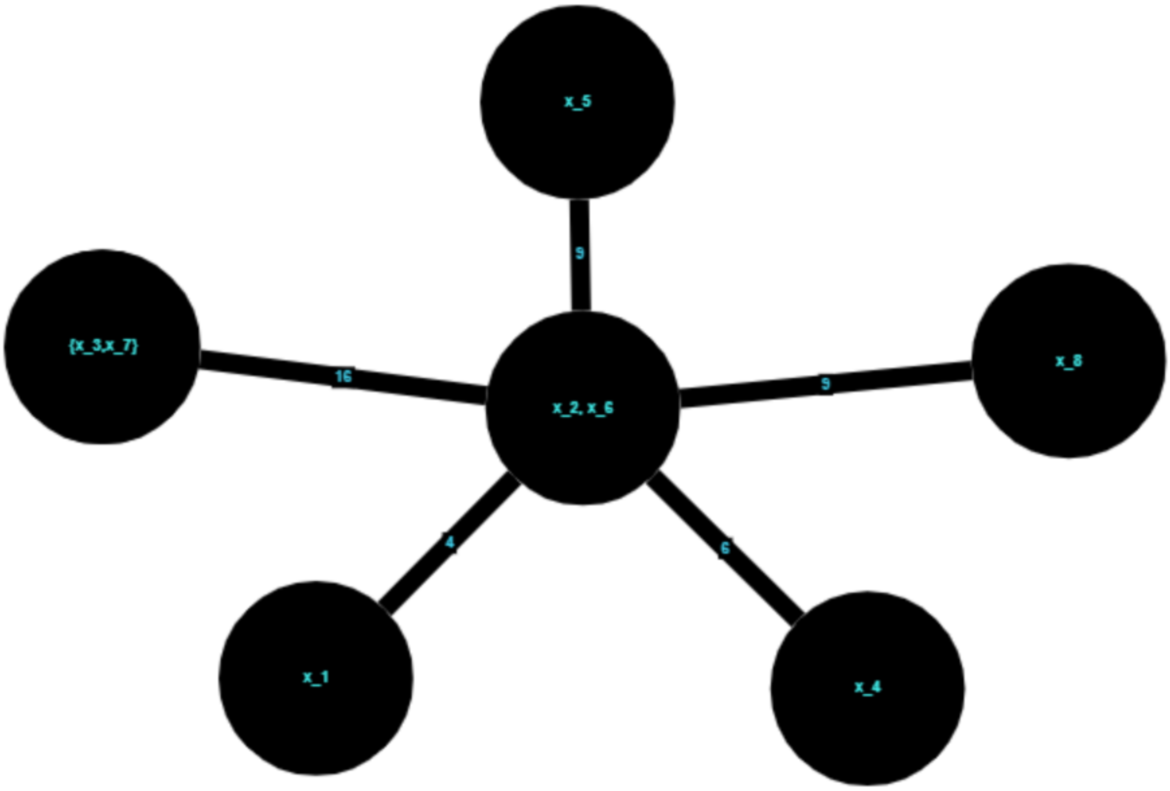
$\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}, \{x_8\}, \{x_4\}$ и добавленного ребра с весом равным 6.



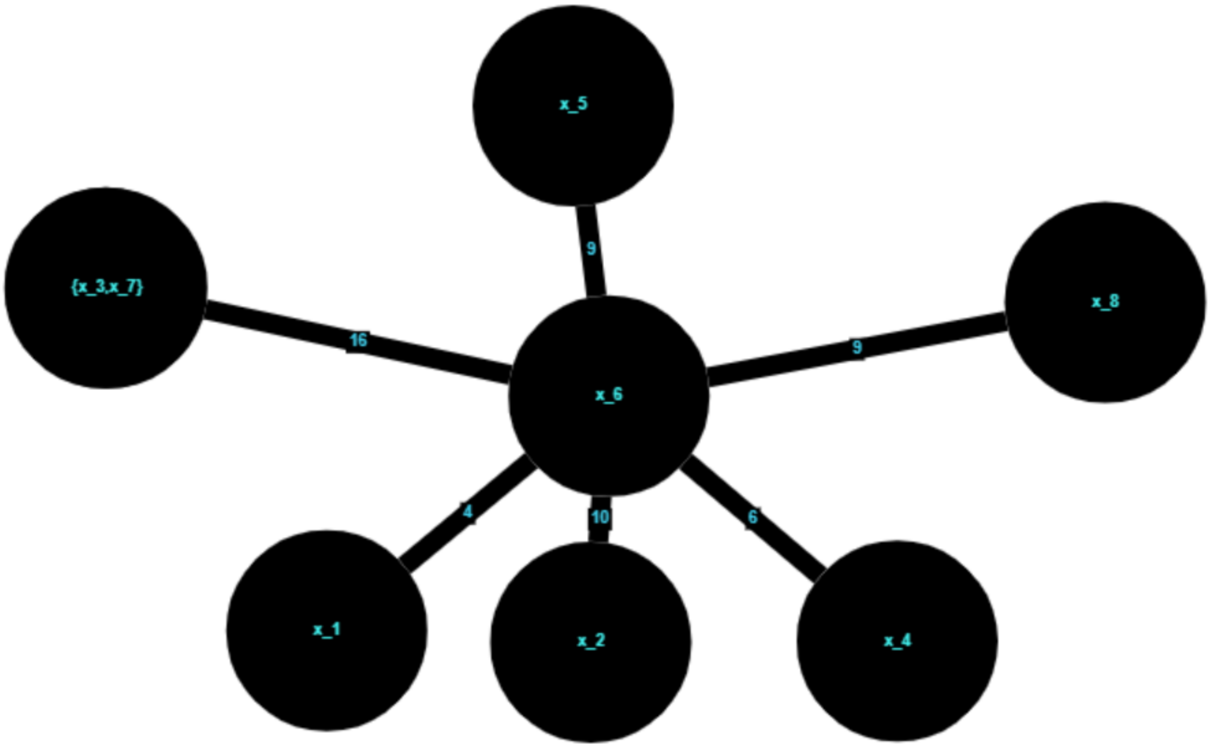
Итерация 4. $s=x_1$, $t=x_2$. Минимальный разрез:
$\{x_1\}, \{x_2, x_5, x_6, \{x_4\}, \{x_8\}, \{x_3, x_7\}\}\}$, пропускная способность равна 4. Добавим новую вершину и дугу.



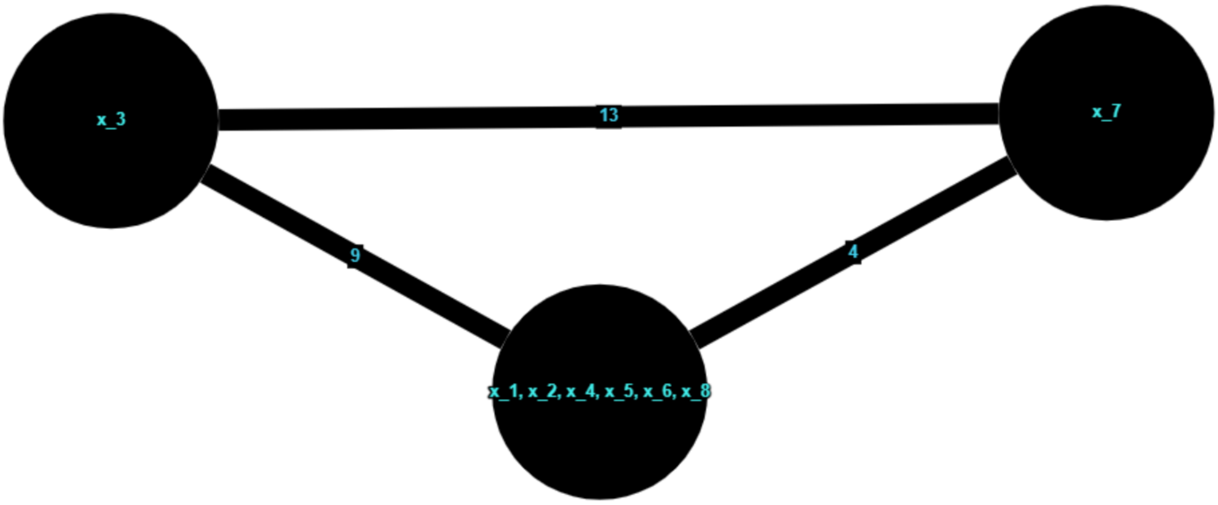
Итерация 5. $s=x_5$, $t=x_2$. Минимальный разрез:
$\{\{x_5\}, \{x_2, x_6, \{x_1\}, \{x_4\}, \{x_8\}, \{x_3, x_7\}\}\}$, пропускная способность равна 9.



Итерация 6. s=x_2, t=x_6. Минимальный разрез:
$\{\{x_2\},\{x_6,\{x_1\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_8\},\{x_3,x_7\}\}\}$, пропускная способность равна 10.



Итерация 7. Исходный граф:



s=x_3, t=x_7. Минимальный разрез $\{\{x_3\},\{\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_8\},x_7\}\}$. Новая вершина $\{x_3\}$, ребро веса 13 от изменённой вершины $\{x_7\}$: