6. Основные правила комбинаторики.

1. Группа состоит из 23 студентов, среди которых 5 отличников. Сколькими способами можно выбрать в группе команду из трех человек так, чтобы в нее вошли по крайней мере два отличника?
2. Найдите число 7-буквенных паролей, состоящих из символов алфавита $\{a, b, \ldots, z\}$, которые: (а) состоят из неповторяющихся букв; (б) состоят из неповторяющихся букв и буквы a и b не стоят рядом?
3. Сколько существует n-значных натуральных чисел ($n \geqslant 1$), которые: (а) делятся на 5; (б) читаются одинаково слева направо и справа налево?
4. Сколько существует натуральных чисел, меньших 10000, десятичная запись которых содержит по крайней мере одну цифру 1?
5. Сколько существует четырехзначных натуральных чисел, цифры которых не повторяются и принадлежат множеству $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$? Сколько из них четных чисел?
6. Сколько «слов», состоящих из k букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать?
7. Номер карточки состоит из последовательности трех букв из $\{a, b, \ldots, z\}$, которая следует за последовательностью из трех цифр из $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Сколько имеется номеров, если одновременное использование цифры «0» и буквы «o» запрещено?
8. Сколько имеется восьмизначных натуральных чисел, составленных из цифр $1, 2, 3, 4$, в которых цифры 3 и 4 встречаются ровно два раза каждая и которые делятся на 4?
9. Сколько существует n-значных натуральных чисел ($n \geqslant 1$), которые делятся на 4 и образованы с помощью цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$?
10. Пусть заданы непустые множества X и Y, $|X| = m$, $|Y| = n$. Сколько существует: (а) различных отображений $f\colon X \to Y$; (б) различных инъективных отображений $f\colon X \to Y$; (в) различных биективных отображений $f\colon X \to Y$?
11. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Сколько различных натуральных делителей имеет число $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$?
12. Сколько существует упорядоченных пар (a, b) натуральных чисел a и b, для которых $\text{НОК}(a, b) = 2^3 \cdot 5^7 \cdot 11^{13}$?
13. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Сколько существует упорядоченных пар (a, b) натуральных чисел a и b, для которых $\text{НОК}(a, b) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$?
14. Определите число: (а) бинарных матриц размерности $m \times n$; (б) бинарных матриц размерности $m \times n$, в которых строки попарно различны; (в) бинарных матриц размерности $m \times n$, у которых в каждой строке и каждом столбце содержится четное число единиц?
15. Определите число подмножеств n-элементного ($n \geqslant 1$) множества.

6. Основные правила комбинаторики.

1. Группа состоит из 23 студентов, среди которых 5 отличников. Сколькими способами можно выбрать в группе команду из трех человек так, чтобы в нее вошли по крайней мере два отличника?
2. Найдите число 7-буквенных паролей, состоящих из символов алфавита $\{a, b, \dots, z\}$, которые: (а) состоят из неповторяющихся букв; (б) состоят из неповторяющихся букв и буквы a и b не стоят рядом?
3. Сколько существует n-значных натуральных чисел ($n \geqslant 1$), которые: (а) делятся на 5; (б) читаются одинаково слева направо и справа налево?
4. Сколько существует натуральных чисел, меньших 10000, десятичная запись которых содержит по крайней мере одну цифру 1?
5. Сколько существует четырехзначных натуральных чисел, цифры которых не повторяются и принадлежат множеству $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$? Сколько из них четных чисел?
6. Сколько «слов», состоящих из k букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать?
7. Номер карточки состоит из последовательности трех букв из $\{a, b, \dots, z\}$, которая следует за последовательностью из трех цифр из $\{0, 1, \dots, 9\}$. Сколько имеется номеров, если одновременное использование цифры «0» и буквы «o» запрещено?
8. Сколько имеется восьмизначных натуральных чисел, составленных из цифр $1, 2, 3, 4$, в которых цифры 3 и 4 встречаются ровно два раза каждая и которые делятся на 4?
9. Сколько существует n-значных натуральных чисел ($n \geqslant 1$), которые делятся на 4 и образованы с помощью цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$?
10. Пусть заданы непустые множества X и Y, $|X| = m$, $|Y| = n$. Сколько существует: (а) различных отображений $f\colon X \to Y$; (б) различных инъективных отображений $f\colon X \to Y$; (в) различных биективных отображений $f\colon X \to Y$?
11. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_k$ – различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Сколько различных натуральных делителей имеет число $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$?
12. Сколько существует упорядоченных пар (a, b) натуральных чисел a и b, для которых $\text{НОК}(a, b) = 2^3 \cdot 5^7 \cdot 11^{13}$?
13. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_k$ – различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Сколько существует упорядоченных пар (a, b) натуральных чисел a и b, для которых $\text{НОК}(a, b) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$?
14. Определите число: (а) бинарных матриц размерности $m \times n$; (б) бинарных матриц размерности $m \times n$, в которых строки попарно различны; (в) бинарных матриц размерности $m \times n$, у которых в каждой строке и каждом столбце содержится четное число единиц?
15. Определите число подмножеств n-элементного ($n \geqslant 1$) множества.