## §2 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Построим многочлен $P_n(x)$ степени $n$ такой, что

$$P_n(x_i) = f_i, i = 0,\ldots,n \qquad (1)$$

где $P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ использую метод Лагранжа. Идея метода состоит в использовании фундаментальных полиномов $L_j(x)$ обладающих свойством

$$L_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0,\ldots,n. \qquad (2)$$

Легко видеть, что $L_j(x)$ можно представить в виде произведения

$$L_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}. \quad . \qquad (3)$$

*Упражнение*. Доказать линейную независимость полиномов $L_j(x)$.

Многочлен $f_j L_j(x)$ принимает значение $f_j$ в точке $x_j$ и равен нулю в других узлах. Отсюда следует, что

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x) \qquad (4)$$

есть полином степени не выше $n$, проходящий через точки $(x_i, f_i), i = 0, \ldots n$.

Введем обозначение

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \qquad (5)$$

Тогда

$$L_j(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_j)\,\omega'(x_j)} \qquad (6)$$

И формулу (4) можно записать в виде

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\,\omega'(x_i)}. \qquad (7)$$

Очевидно, что погрешность интерполяционного полинома можно представить в виде

$$f(x)-P_n(x)=\omega(x)k(x), \tag{8}$$

где $k(x)$ некоторая функция. Для произвольной точки $x^*$ имеем

$$f(x^*)-P_n(x^*)-\omega(x^*)k(x^*)=0. \tag{9}$$

Введем функцию

$$\Phi(x)=f(x)-P_n(x)-\omega(x)k(x^*). \tag{10}$$

Если $f\in C^{(n+1)}$, то $\Phi(x)$ можно дифференцировать $n+1$

раз. Так как $P_n(x)$ имеет степень не выше $n$, $k\left(x^*\right)=const$, то

$$\Phi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-(n+1)!k(x^*). \qquad (11)$$

Поскольку $\Phi(x)$ обращается в ноль $n+2$ раза в точках $\left(x^*,x_0,\ldots,x_n\right)$, то по теореме Ролля $\Phi'(x)$ обращается в ноль по крайней мере $n+1$ раз в интервале, содержащем точки $\left(x^*,x_0,\ldots,x_n\right)$.

Продолжая применять эту теорему, находим, что $\Phi^{(n+1)}(x)$ обращается в ноль по крайней мере один раз.

Таким образом, в интервале значений $\left(x^*, x_0, \ldots, x_n\right)$ существует такая точка $\xi(x)$, что

$$f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right) = (n+1)!k\left(x^*\right) \tag{12}$$

Отсюда можно найти значение $k\left(x^*\right)$. Так как $x^*$ произвольная точка, то формулу (8) с учетом (12) можно записать в виде

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)}{(n+1)!}\omega(x) \tag{13}$$

*Замечание*. Погрешность многочленной интерполяции не обязательно убывает с ростом числа узлов $n$.