

**ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА ПО
«ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ»
ЧАСТЬ 1**

1. **Случайный эксперимент и свойство статистической устойчивости.** Детерминированные и недетерминированные эксперименты. Случайный эксперимент. Свойство статистической устойчивости частот. Примеры.
2. **Случайные события и соотношения между ними.** Элементарные события. Пространство элементарных событий. Случайные события. Достоверное и невозможное событие. Операции над событиями.
3. **Классическая вероятностная модель.** Определение классической вероятностной модели. Аксиомы, описывающие классическую вероятностную модель. Вероятность случайного события для классической вероятностной модели.
4. **Дискретная вероятностная модель.** Определение дискретной вероятностной модели. Аксиомы, описывающие дискретную вероятностную модель. Вероятность случайного события для дискретной вероятностной модели.
5. **Геометрическая вероятностная модель.** Определение геометрической вероятностной модели. Вероятность случайного события для геометрической вероятностной модели.
6. **Алгебра случайных событий.** Определение алгебры случайных событий. Свойства алгебры случайных событий.
7. **σ -алгебра случайных событий.** Определение σ -алгебры случайных событий. Свойства σ -алгебры случайных событий.
8. **Борелевская σ -алгебра.** Базовая система множеств. Борелевская σ -алгебра на числовой прямой. Борелевскими множества и их свойства. Борелевская σ -алгебра в m -мерном пространстве \mathbb{R}^m .
9. **Аксиомы теории вероятностей. Вероятностное пространство.** Аксиомы Колмогорова. Обобщение аксиом на случай бесконечного пространства элементарных событий Ω . Вероятностное пространство.
10. **Второй вариант расширения аксиом теории вероятностей.** Последовательности случайных событий и их пределы. Аксиома непрерывности меры.
11. **Свойства вероятностной меры.** Вычисление вероятности противоположного события. Вероятность невозможного события. Монотонность вероятностной меры. Формулы сложения вероятностей. Эквивалент аксиомы непрерывности вероятностной меры.
12. **Условная вероятность и ее свойства.** Понятие и определение условной вероятности. Свойства условной вероятности. Формулы умножения вероятностей.
13. **Формула полной вероятности. Формула Байеса.**
14. **Независимые случайные события.** Определение и свойства независимых случайных событий. Критерий независимости случайных событий.

15. **Независимые в совокупности случайные события.** Определение и свойства независимых в совокупности случайных событий.
16. **Схема независимых испытаний Бернулли.** Определение схемы независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Номер первого успешного испытания. Схема независимых испытаний с несколькими исходами. Полиномиальная формула.
17. **Предельные теоремы в схеме независимых испытаний.** Определение схемы независимых испытаний с несколькими исходами. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.

ЧАСТЬ 2

1. **Понятие случайной величины. Распределение вероятностей. Функция распределения вероятностей.** Определение случайной величины. Теорема о σ -алгебре \mathcal{F}_ξ , порожденной случайной величиной ξ . Распределение вероятностей случайной величины.
2. **Функция распределения вероятностей и ее свойства.** Определение функции распределения. Теорема о взаимнооднозначном соответствии распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Свойства функции распределения вероятностей.
3. **Классификация случайных величин. Дискретные случайные величины и их распределения.** Классификация функций распределения и случайных величин. Дискретные случайные величины и дискретные функции распределения. Основные дискретные распределения вероятностей: вырожденное, дискретное равномерное, Бернулли, биномиальное, отрицательное биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассона.
4. **Классификация случайных величин. Абсолютно непрерывные случайные величины и их распределения.** Классификация функций распределения и случайных величин. Непрерывные случайные величины и непрерывные функции распределения. Основные непрерывные распределения вероятностей: равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, одномерное нормальное, показательное, Коши.
5. **Плотность распределения вероятностей и ее свойства.**
6. **Распределение Гаусса и его свойства.** Нормальное распределение. Стандартное нормальное распределение. Свойства нормального закона распределения.
7. **Классификация случайных величин. Сингулярные случайные величины.** Определение сингулярного распределения вероятностей. Лестница Кантора.
8. **Многомерные случайные величины.** Случайный n -вектор. Многомерная функция распределения и ее свойства.
9. **Классификация многомерных случайных величин. Дискретные многомерные случайные величины.** Распределение вероятностей дискретного случайного n -вектора. Маргинальные распределения компонент случайного вектора. Полиномиальное распределение.
10. **Классификация многомерных случайных величин. Непрерывные многомерные случайные величины.** Понятие непрерывного случайного вектора. Многомерная плотность распределения вероятностей и ее свойства.

11. **Непрерывные многомерные случайные величины.** Понятие непрерывного случайного вектора. Основные многомерные законы распределения.
12. **Условные законы распределения случайных величин.** Условная функция распределения случайного вектора ξ при условии наступления случайного события C . Условная функция распределения случайного вектора ξ при условии $\eta = y$. Условная функция распределения случайного вектора ξ при условии η . Условная плотность распределения вероятностей случайного вектора ξ при условии η и ее свойства.
13. **Независимость случайных величин.** Независимые в совокупности и попарно независимые случайные величины. Теорема о борелевских преобразованиях независимых случайных величин. Общий критерий независимости случайных величин. Следствия критерия.
14. **Функциональные преобразования случайных величин.** Определение закона распределения случайного вектора, являющегося результатом функционального преобразования.
15. **Функциональные преобразования случайных величин. Невырожденное функциональное преобразование.** Теорема о плотности распределения случайного вектора, являющегося результатом невырожденного функционального преобразования. Следствия.
16. **Функциональные преобразования случайных величин. Вырожденное функциональное преобразование.** Вычисление плотности распределения случайного вектора, являющегося результатом вырожденного функционального преобразования. Формула свертки.

ЧАСТЬ 3

1. **Понятие математического ожидания и способы его вычисления.** Интеграл Лебега от случайной величины $\xi(\omega)$ по вероятностной мере P . Интеграл Лебега-Стилтьеса от функции $g(\cdot)$ по функции $F_\xi(\cdot)$. Определение математического ожидания. Вычисление математического ожидания дискретной случайной величины. Вычисление математического ожидания непрерывной случайной величины.
2. **Свойства математического ожидания случайной величины.** Восемь свойств (с доказательством).
3. **Неравенства для математических ожиданий. Часть 1.** Доказательство неравенства $|E\{\xi\}| \leq E\{|\xi|\}$. Неравенство Чебышева и следствия к нему (с доказательством). Неравенство Йенсена и следствия к нему (с доказательством).
4. **Неравенства для математических ожиданий. Часть 2.** Неравенство Ляпунова и следствие к нему (с доказательством). Неравенство Гельдера (с доказательством). Неравенство Коши-Буняковского (с доказательством). Неравенство Минковского.
5. **Дисперсия случайной величины и ее свойства.** Шесть свойств и следствия к ним (с доказательством).
6. **Условное математическое ожидание.** Условное математическое ожидание относительно случайного события. Теорема о соотношении между условным и безусловным математическими ожиданиями. Условное математическое ожидание относительно случайной величины.

7. **Свойства условного математического ожидания.** Пять свойств с доказательством.
8. **Моменты скалярных случайных величин и их свойства.** Определение начальных, абсолютных и центральных моментов k -го порядка. Свойства моментов скалярных случайных величин (с доказательством).
9. **Моменты многомерных случайных величин и их свойства.** Вектор математического ожидания. Смешанный центральный момент. Определение ковариации случайных величин. Ковариационная матрица. Свойства ковариации и ковариационной матрицы (с доказательством).
10. **Коэффициент корреляции, корреляционная матрица и их свойства.** Определение коэффициента корреляции и корреляционной матрицы. Свойства коэффициента корреляции и корреляционной матрицы и следствия к ним (с доказательством).
11. **Энтропия, количество информации по Шэннону и их свойства.**
12. **Характеристики формы и расположения.**
13. **Характеристическая функция.** Определение характеристической функции и ее свойства: ограниченность, комплексное сопряжение, линейные преобразования, равномерная непрерывность, связь с моментами (с доказательством).
14. **Теоремы обращения, единственности и Бохнера-Хинчина для характеристических функций (с доказательством).**
15. **Характеристические функции случайных векторов и их свойства.**