ТЕМА. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с параметром λ, записанное в виде

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \tag{1.1}$$

где функция $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывна на $[a,b] \times [a,b]$ и $x(t), y(t) \in C[a,b]$. Будем считать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ вырождено, т. е.

$$\mathcal{K}(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)b_i(s), \tag{1.2}$$

где функции $a_i(t)$, $b_i(s)$ –линейно независимы на отрезке $[a,b]$. Подставим (1.2) в (1.1), получим

$$x(t) - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int\limits_a^b b_i(s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t).$$

Обозначим через $C_i = \int\limits_a^b b_i(s)x(s)\,\mathrm{d}s$. Тогда решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$x(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(t) + y(t). \tag{1.3}$$

Если C_i в (1.3) определятся однозначно, то решение уравнения (1.1) будет единственным.

Подставим (1.3) в (1.1), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(C_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i \int\limits_a^b a_i(s)b_j(s)\,\mathrm{d}s - \int\limits_a^b y(s)b_j(s)\,\mathrm{d}s \Big) a_j(t) = 0.$$

Учитывая линейную независимость функций $a_j(t)$, $(j = \overline{1,n})$, последнее соотношение примет вид

$$C_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} d_{ij} C_i = y_j, \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.4}$$

где

$$d_{ij} = \int\limits_a^b a_i(s) b_j(s) \,\mathrm{d}s, \quad y_j = \int\limits_a^b y(s) b_j(s) \,\mathrm{d}s, \; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, разрешимость интегрального уравнения Фредгольма (1.1) с параметром λ, при условии вырожденности ядра равносильна, разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (1.4).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Решить интегральное уравнения Фредгольма с параметром $\lambda \in \mathbb{R}$

$$x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(t \cos s + s^2 \sin t + \sin s \cos t\big) x(s) \,\mathrm{d}s = t.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x(t) = \lambda t \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos s x(s) \,\mathrm{d}s + \lambda \sin t \int\limits_{-\pi}^{\pi} s^2 x(s) \,\mathrm{d}s + \lambda \cos t \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin s x(s) \,\mathrm{d}s + t.$$

Обозначим через

$$C_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos s x(s) \,\mathrm{d}s, \; C_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} s^2 x(s) \,\mathrm{d}s, \; C_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin s x(s) \,\mathrm{d}s.$$

Тогда решение уравнения примет вид

$$x(t) = \lambda t C_1 + \lambda \sin t C_2 + \lambda \cos t C_3 + t.$$

Составим систему для определения неизвестных постоянных C_i, $i = 1, 2, 3$.

$$C_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos s\Big(\lambda s C_1 + \lambda \sin s C_2 + \lambda \cos s C_3 + s\Big)\,\mathrm{d}s,$$

$$C_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} s^2\Big(\lambda s C_1 + \lambda \sin s C_2 + \lambda \cos s C_3 + s\Big)\,\mathrm{d}s,$$

$$C_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin s\Big(\lambda s C_1 + \lambda \sin s C_2 + \lambda \cos s C_3 + s\Big)\,\mathrm{d}s.$$

После вычисления интегралов, получим систему вида

$$\begin{cases} C_1 - \lambda\pi C_3 = 0, \\ C_2 + 4\lambda\pi C_3 = 0, \\ -2\lambda\pi C_1 - \lambda\pi C_2 + C_3 = 2\pi. \end{cases}$$

Вычислим определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & -\pi\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\pi^2\lambda^2 \neq 0.$$

Поскольку определитель системы не равен нулю, то она имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера.

$$C_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1 + 2\pi^2\lambda^2},\ C_2 = -\frac{8\lambda\pi^2}{1 + 2\pi^2\lambda^2},\ C_3 = \frac{2\pi}{1 + 2\pi^2\lambda^2}.$$

Таким образом, исходное интегральное уравнение имеет единственное решение

$$x(t) = \frac{2\lambda\pi}{1 + 2\pi^2\lambda^2}\Big(\lambda\pi t - 4\lambda t \sin t + \cos t\Big) + t.$$

Задача 2. Решить интегральное уравнения Фредгольма с параметром λ над полем вещественных чисел

$$x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{1} e^t s x(s)\,\mathrm{d}s = e^{-t}.$$

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде

$$x(t) = \lambda e^t \int\limits_0^1 s x(s)\,\mathrm{d}s + e^{-t}.$$

Обозначим через

$$C_1 = \int\limits_0^1 s x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Тогда решение уравнения примет вид

$$x(t) = \lambda e^t C_1 + e^{-t}.$$

Составим уравнение для определения неизвестной постоянной C_1.

$$C_1 = \int\limits_0^1 s\big(\lambda e^s C_1 + e^{-s}\big)\,\mathrm{d}s,$$

или, после вычисления интеграла,

$$C_1(1-\lambda) = 1 - \frac{2}{e}.$$

Из полученного уравнения заключаем, что если $\lambda \neq 1$, то C_1 определяется единственным образом: $C_1 = \dfrac{e-2}{e(1-\lambda)}$. Следовательно,

$$x(t) = \frac{\lambda(e-2)e^t}{e(1-\lambda)} + e^{-t}.$$

Заметим, что при $\lambda = 1$ уравнение решения не имеет.

ЗАДАНИЯ

Задание 1. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода над полем вещественных чисел

1.1. $x(t) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \Big[t - \frac{1}{2}(3s^2-1) + \frac{1}{2}s(3t^2-1)\Big] x(s)\,\mathrm{d}s = 1;$

1.2. $x(t) + \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int\limits_0^1 \big[\sin \pi t - \sin \pi s\big] x(s)\,\mathrm{d}s = 2t - 1;$

1.3. $x(t) - 2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos(t-s) x(s)\,\mathrm{d}s = t;$

1.4. $x(t) + 3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin(t-2s) x(s)\,\mathrm{d}s = 2;$

1.5. $x(t) + 2 \int\limits_0^1 \big(3ts - 1\big) x(s)\,\mathrm{d}s = t^2;$

1.6. $x(t) - \int\limits_0^1 \big(e^t s + te^s\big)(s)\,\mathrm{d}s = e^t;$

1.7. $x(t) - \int\limits_0^1 \big(3t + 2s\big) x(s)\,\mathrm{d}s = 8t^2 - 5t;$

1.8. $x(t) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \Big(\sin(3t - s) + \sin t\Big) x(s)\,\mathrm{d}s = 3\pi \cos 2t;$

1.9. $x(t) - 2 \int\limits_0^1 \Big(\sin 2\pi(t-s) - 2\Big) x(s)\,\mathrm{d}s = 5t;$

1.10. $x(t) - \int\limits_0^1 \Big(\dfrac{3}{2}ts + t^2(s-1)\Big) x(s)\,\mathrm{d}s = 0;$

1.11. $x(t) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s) x(s)\,\mathrm{d}s = t;$

1.12. $x(t) - 3 \int\limits_0^1 \big(t^2 s^2 - 4ts + 1\big) x(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi^2 \cos 2\pi t;$

1.13. $x(t) - 3 \int\limits_0^1 \big(t - \sqrt{s}\big) x(s)\,\mathrm{d}s = \dfrac{5}{3}t + \sqrt{t} - \dfrac{1}{6};$

1.14. $x(t) - \int\limits_0^1 \big(1 + 2ts\big) x(s)\,\mathrm{d}s = -\dfrac{1}{6}(t+3);$

1.15. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 \big(5ts^3 + 4t^2 s + 3ts\big) x(s)\,\mathrm{d}s = t;$

1.16. $x(t) - \int\limits_0^{\pi} \big(\cos^2 t + \cos 2s + \cos 3t \cos^3 s\big) x(s)\,\mathrm{d}s = 0;$

1.17. $x(t) - \int\limits_0^{\pi} \cos^2(s-t)x(s)\,\mathrm{d}s = \sin 2t;$

1.18. $x(t) - \int\limits_{-1}^{1} \big(\frac{3}{2}ts + t^2(s-1)\big)x(s)\,\mathrm{d}s = t^3;$

1.19. $x(t) - \int\limits_{-1}^{1} \big(1-t^2\big)\big(1-\dfrac{3}{2}s\big)x(s)\,\mathrm{d}s = t^2 - t;$

1.20. $x(t) - \int\limits_{-1}^{0} \big(1+t\big)\big(1-s\big)x(s)\,\mathrm{d}s = e^t + t;$

1.21. $x(t) - \int\limits_0^{2\pi} \sin(t-2s)x(s)\,\mathrm{d}s = \cos t + t;$

1.22. $x(t) - \int\limits_0^{2\pi} \sin(t+s)x(s)\,\mathrm{d}s = t^3 + t;$

1.23. $x(t) - 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(1+\cos(t-s)\big)x(s)\,\mathrm{d}s = \sin t + \cos t + \cos 2t;$

1.24. $x(t) - 2\int\limits_0^{2\pi} \sin(t-2s)x(s)\,\mathrm{d}s = \cos t + t;$

1.25. $x(t) - \int\limits_0^{\pi} \sin t \cos s e^{t+s} x(s)\,\mathrm{d}s = t^2;$

1.26. $x(t) - 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(1+\cos(t-s)\big)x(s)\,\mathrm{d}s = t;$

1.27. $x(t) - \int\limits_{-1}^{1} \big(5ts^3 + 4t^2 s + 3ts\big)x(s)\,\mathrm{d}s = t^2 + e^t;$

1.28. $x(t) - 3\int\limits_0^{2\pi} \sin(t-2s)x(s)\,\mathrm{d}s = \sin t + t^2.$