1 Базис решений линейной однородной стационарной системы

Рассмотрим систему

$$Dx = Ax,$$

где $x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)$ - n-векторы, являющиеся решениями системы. Составим из этих векторов матрицу:

$$X(t) = \left(x^{(1)}(t)^T, x^{(2)}(t)^T, ..., x^{(n)}(t)^T\right)$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. $\forall t \in R \ \ \det X(t) = X(s)e^{trA(t-s)}, \ s \in R, \ trA = a_{11} + ... + a_{nn}$

Доказательство. Докажем теорему для $n = 2$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) \\ \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix}$$

$$D(\det X(t)) = \begin{vmatrix} Dx_1^{(1)} & Dx_1^{(2)} \\ \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \\ Dx_2^{(1)} & Dx_2^{(2)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} & a_{11}x_1^{(2)} + a_{12}x_2^{(2)} \\ \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \\ a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} & a_{21}x_1^{(2)} + a_{22}x_2^{(2)} \end{vmatrix} =$$

$$= ... = (a_{11} + a_{12})(x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)})) = \operatorname{tr} A * \det X(t).$$

В итоге получили линейное ду, решая которое находим требуемое представление

$$\det X(t) = X(s)e^{\operatorname{tr} A(t-s)}.$$

В случае большей размерности доказательство проводится аналогично. ■

Таким образом доказан матричный аналог формулы Остроградского-Лиувилля, из которого вытекает следующее утверждение :

Если решения $x_1, ..., x_n$ *- линейно зависимы (ЛЗ), то* $\det X(t) \equiv 0 \ \forall t \in R$*, если же эти решения ЛНЗ и при некотором* s $\det(X(s)) \neq 0$*, то он отличен от нуля всех* s*.*

Определение. Если решения $x_1, ..., x_n$ ЛНЗ, то они образуют *фундаментальную систему решений*, а составленная из них (по столбцам) матрица $X(t)$ называется *фундаментальной матрицей.*

Если, кроме этого, для каждого решения выполняется условие:

$$x^{(j)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 - \text{j} - \text{я позиция} \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall j,$$

то фундаментальная матрица называется *нормированной при* $t = 0$, при этом ее определитель равен единице, т.е. $\det X(t) = 1$.

2 Метод Эйлера построения решения линейной однородной стационарной системы

Рассмотрим линейную стационарную систему:

$$Dx = Ax.$$

Пусть ν_k - собственные значения матрицы A кратности d_k $(k = 1, \dots m;\ d_1 + \dots + d_k = n$.

Базисное решение будем искать в следующем виде:

$$x_{\nu_k}(t) = e^{\nu_k t}(\alpha_0 + \alpha_1 t + ... + \alpha_{d_{k-1}} t^{d_{k-1}})$$

с некоторыми, пока неопределенными, постоянными векторными коэффициентами α_*.

Возьмем первое слагаемое

$$x_{\nu_k}^{(0)}(t) = e^{\nu_k t}\alpha_0.$$

Подставляя $x_{\nu_k}^{(0)}(t)$ в исходную систему, получим:

$$\nu_k e^{\nu_k t}\alpha_0 = Ae^{\nu_k t}\alpha_0 \;\Rightarrow\; (A - \nu_k E)\,\alpha_0 = 0,$$

т.е. α_0- собственный вектор матрицы A, отвечающий её собственному значению ν_k.

Далее возьмем первые два слагаемые, которые запишем в виде

$$x_{\nu_k}^{(1)}(t) = e^{\nu_k t}(\beta_0 + \beta_2 t).$$

Подставляя $x_{\nu_k}^{(1)}(t)$ в исходную систему, получаем равенства:

$$\nu_k e^{\nu_k t}(\beta_0 + \beta_2 t) + e^{\nu_k t}\beta_2 = Ae^{\nu_k t}(\beta_0 + \beta_2 t)$$

$$\nu_k(\beta_0 + \beta_2 t) + \beta_2 = A(\beta_0 + \beta_2 t),$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, находим

$$\begin{cases} t^0 : \nu_k\beta_0 + \beta_1 = A\beta_0 \\ t^1 : \nu_k\beta_1 = A\beta_1 \;\Rightarrow (A - \nu_k E)\,\beta_1 = 0 \;\Rightarrow \beta_1 = \alpha_0 \text{ - собственный вектор.} \end{cases}$$

Тогда $(A - \nu_k E)\beta_0 = \beta_1 = \alpha_0 \;\Rightarrow\; \beta_0$ - первый присоединённый вектор

Далее подобным образом находим остальные компоненты-слагаемые $x_{\nu_k}^{(i)}(t)$. Аналогично поступаем для нахождения базисных решений для остальных собственных значений.

В итоге, все найденные решения образуют базис.

Пример 1. $Dx = Ax,\; A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\; \nu = 2,\; d = 3.$

Решение

$$dim(E - \nu A) = 1$$

Отсюда:

$$x_{\nu=2}^{(0)} = \alpha_0 e^{2t} \;\Rightarrow\; \alpha_0 = (1; 2; 1)^T$$

$$x^{(1)}_{\nu=2} = (\beta_0 + \beta_1 t)e^{2t} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \beta_1 = \alpha_0 = (1;2;1)^T \\ (A-2E)\beta_0 = \beta_1 \;\Rightarrow\; \beta_0 = (1;1;0)^T \end{cases}$$

Упражнение 1. Дорешать этот пример(найти $x^{(2)}_{\nu=2}$ и записать фундаментальную матрицу)

3 Метод вариации произвольных постоянных (правило Лагранжа). Решения неоднородной линейной системы

Этот метод применим, когда известно общее решение соответсвующей однородной системы:

$$Dx = Ax + \overrightarrow{f}(t)$$

Пусть $x_{\text{оо}(t)} = x(t)\overrightarrow{C}$, где $\overrightarrow{C}$ - произвольный вектор, $x(t)$ - решение однородной системы. Тогда $x_{\text{чн}(t)} = x(t)\overrightarrow{C}$, а $Dx_{\text{чн}(t)} = \dot{x}(t)C(t)+x(t)\dot{C}(t)$. Отсюда получим:

$$\dot{x}(t)C(t) + x(t)\dot{C}(t) = Ax(t)C(t) + f(t)$$

$$Ax(t)C(t) + x(t)\dot{C}(t) = Ax(t)C(t) + f(t)$$

$$x(t)\dot{C}(t) = f(t)$$

Так как $x(t)$ - фундаментальная матрица, то $\forall\ t\ \exists\ x^{-1}$.

$$\dot{C}(t) = x^{-1}(t)f(t)$$

$$C(t) = \int\limits_s^t x^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

Отсюда $x(t) = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}} = x(t)(C + \int\limits_s^t x^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau)$.

Замечание 1. *Если $x(t)$ выбрать в виде матрицы Коши, т.е $x(t) = e^{A(t-s)}$, то получим известную формулу.*

Пример 1. $Dx = Ax + f(t),\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix},\ \nu_1 = -2,\ \nu_2 = -1$

Решение

Построим базисное решение по Эйлеру:

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$x^{-1}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ 2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Отсюда $x_{\text{оо}} = x(t)C$, $x_{\text{чн}} = x(t)\tilde{C}$ тогда:

$$\tilde{C}(t) = \int\limits_s^t x^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} -e^t + 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Тогда $x(t) = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \left(C + \begin{pmatrix} -e^t + 1 \\ t \end{pmatrix} \right)$.

4 Устойчивость решений линейных стационарных систем

$Dx = Ax + f(t), t \in I = [s; +\infty), f-\text{непр}, x|_{t=s} = \xi \quad \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ x_i(t, \xi_1, ..., \xi_n)|_{t=s} = \xi_i \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$

Наряду с этим решением рассмотрим задачу с отклонением начальных данных:

$$x(t, \xi + \Delta\xi), x|_{t=s} = \xi + \Delta\xi$$

Определение 1. ***Отклонение решений*** $x(t, \xi)$ *и* $x(t, \xi + \Delta\xi)$ *назовем число* $\rho(t, \Delta\xi) =$
$= ||x(t, \xi + \Delta\xi) - x(t, \xi)||$

Ранее нами установлена следующая формула для решения задачи Коши:

$$x(t,\xi) = e^{A(t-s)}\xi + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

Аналогично:

$$x(t,\xi+\Delta\xi) = e^{A(t-s)}(\xi+\Delta\xi) + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

$$\rho(t+\Delta\xi) = ||e^{A(t-s)}(\xi+\Delta\xi)+\int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau - e^{A(t-s)}\xi - \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau|| = ||e^{A(t-s)}$$

Значит отклонение не зависит от f и ξ

Определение 2. ***Решение*** $x(t,\xi)$***-непрерывно зависящие от начальных значений на компакте*** $I_1 \subset I$, *если* $\forall \varepsilon \geq 0, \exists \delta \geq 0, \forall \Delta\xi, t \in I, ||\Delta\xi|| \leq \delta \Rightarrow ||\Delta\rho(t,\Delta\xi)|| \leq \varepsilon$

Покажем,что $x(t,\xi)$ непрерывно зависит от начальных значений на I_1:
$\rho(t,\Delta\xi) = ||e^{A(t-s)}\Delta\xi||, \exists M = M(I_1) \Rightarrow ||e^{A(t-s)}|| \leq M \quad \forall s \in I_1$
Выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, тогда, $||\Delta\xi|| \leq \delta \Rightarrow \rho(t,\Delta\xi) \leq \varepsilon \quad \forall t \in I_1$

Определение 3. ***Решение*** $x(t)$ ***называется устойчивам по Ляпунову***, *если оно непрерывно зависит от начальных значений на* $t \in I$

Определение 4. *Если решение устойчиво и при достаточно малых* $\Delta\xi$ $\rho(t,\Delta\xi) \to 0$, *то оно* ***асимптотически устойчиво***.

Поскольку устойчивость одного решения равносильно устойчивости всех решений, то устойчивость решения отождествляют с устойчивостью системы

Следствие 1. *Линейная система устойчива* $\Leftrightarrow Rex_j \leq 0$, *причем, если = 0, то корни должны быть кратными*

Доказательство.

Доказательство основано на представлении базисных решений по методу Эйлера $x(t) = e^{\nu_n t}(\alpha_0 + \alpha_1 t + ... + \alpha_{\alpha_{n-1}} t^{\alpha_{n-1}})$ ■

5 Асимптотическая устойчивость

Следствие 1 (критерий асимптотической устойчивоси)**.**
$Dx = Ax + f(t)$- *асимптотически устойчива* $\Leftrightarrow Re\lambda_j < 0$

Следствие 2.
$det(A - \lambda E) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$-*характеристический многочлен* *и соответствующий ему гурвициан (det)* $\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots & & a_0 \end{vmatrix}$
Действительъные части корней характеристического многочлена < 0 $\Leftrightarrow$
главные
миноры > 0

Доказательство.
Без доказательства
■

Пример 1. Dx=Ax, A= $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$
det(A-λE) $= \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3$ - сложно искать корни
Составим гурвициан: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$ Re$\lambda_i < 0 \Rightarrow$ асимптотически устойчива

6 Фазовая плоскость линеных однородных систем двух уравнений

n=2, A $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$
$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$

Плоскость x_1Ox_2 назовем фазовой плоскостью уравнения, а $x_1(t), x_2(t)$ решения - фаовыми радикалами $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$

Заметим, что решение системы - точка покоя системы.

1) Составим характеристический многочлен матрицы коэффициентов.

$$|A-\nu E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\nu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22-\nu} \end{vmatrix} = (a_{11}-\nu)(a_{22}-\nu)-a_{21}a_{12} = \nu^2-\nu(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

$\sigma = trA, \quad D = |A|$

2)Построим вспомогательную матрицу В

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -D & \sigma \end{pmatrix} \quad |B-\nu E| = \begin{vmatrix} -\nu & 1 \\ -D & \sigma-\nu \end{vmatrix} = \nu^2-\nu\sigma+D$$

Вывод: характеристический многочлен А и В совпадают $\Rightarrow$подобие а)$A \neq \nu E$ $A \sim B$

$\exists$ Т, $det(T) \neq 0, \quad T^{-1}AT = B$ (в частности матрица $A \sim J_a$)

$x = Ty$

$$TPy = ATy \Rightarrow Dy = T^{-1}ATy \Rightarrow Dy = By$$

Исходная и полученная сиситемы эквивалентны.(фазовые графики совпадают с точностью до линейного преобразования)

Запишем систему в координатной форме:

$$\begin{cases} Dy_1 & = y_2 \\ Dy_2 & = -\Delta y_1 + \sigma y_2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = Dy_1 \Rightarrow Dy_2 = D^2 y_1$$

$$\begin{cases} y_2 & = Dy_1 \\ Dy_2 & = \Delta y_1 - \sigma Dy_1 = 0 \end{cases}$$

$\nu^2 - \sigma\nu + \Delta = 0$

Таким образом изучение траектории исходной системы сводится у изучению поведения фазового графика стационарного уравнения.

1)**Седло**

$$\nu_1, \nu_2 \in R, \quad \nu < 0, \nu_2 > 0$$

Рис. 1: Седло

2)**Бикритический узел**

$$\nu_1, \nu_2 \in R, \quad \nu_1 < 0, \nu_2 < 0, \;\; \nu_1 \neq \nu_2, \;\; \nu_1 < \nu_2$$

Рис. 2: Бикритический узел

3)**Монокритический узел**

$$\nu_1 = \nu_2 \quad \nu_1 \nu_2 > 0$$

Рис. 3: Монокритический узел

4)**Фокус**

$$\nu = \alpha \pm \beta i \quad \alpha \neq 0 \quad \alpha < 0, \quad \beta \neq 0$$

Рис. 4: Фокус

5)**Центр**

$$\alpha = 0 \quad \nu - \pm i\beta$$

Рис. 5: Центр

Пусть $A = \lambda E \Rightarrow \begin{cases} Dx_1 &= \lambda x_1 \\ Dx_2 &= \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= C_1 e^{\lambda t} \\ x_2 &= C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{C_2}{C_1} = C*$$

Если $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 \\ x_2 = C_2 \end{cases}$

Каждая точка фазовой плоскости является точкой покоя

a)$\lambda < 0$

b)$\lambda > 0$

Отметим, что a и b не встречаются в уравнениях

Пример 1. $Dx = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda E| = 0 => \lambda = \pm i$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Dy = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{cases} D^2 y_1 + 1 = 0 \\ Dy_1 = y_2 \end{cases}$$

Это центр

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda E| = \lambda^2 - 1 => \lambda = \pm 1 \quad \sigma = 0 \quad \Delta = -1$

$$x = Ty \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$