Введение

В математической статистике используются две модели статистических наблюдений.

Случайная выборка

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\},\ x_t \in \mathbb{R}^N,\ n \geq 1,$$

независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин с некоторой функцией распределения $F(X)$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Наблюдения проводятся над одним и тем же объектом, но в динамике, то есть объект меняет свои свойства. При этом под динамикой понимают необязательно изменения времени. Это может быть любая другая характеристика или параметр. Например, изменение координат. Адекватной математической моделью является *случайная функция*, определяемая на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbf{P})$ следующим образом:

$$x(t) = x(t, \omega),\ \omega \in \Omega,$$

где $t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m-$ значение параметра (необязательно время), $m \geq 1$, $x(t) \in \mathbb{R}^N-$ значение случайной функции при фиксированном значении параметра $t \in \Theta$. Проще говоря, $x(t)$ при любом t – случайный вектор, рапределение вероятностей которого может зависеть от t.

В зависимости от значения m и N используется следующая классификация случайных функций.

Классификация случайных функций

Размерность пространства наблюдений, N	Размерность пространства значений параметра, m	
	$m = 1$	$m > 1$
$N = 1$	*Случайный процесс* (Цена акций, показатель солнечной активности)	*Случайное поле* (Экран монитора в черно-белом режиме, $m = 2$)
$N > 1$	*Векторный случайный процесс* (Несколько отведений электрокардиограммы, обычно $N = 8$)	*Векторное случайное поле* (Радиационная карта местности с нескольким радиоизотопами, $m = 2$

В подавляющем большинстве прикладных задач приходится иметь дело со случайными величинами, изменяющимися во времени. Такие случайные величины являются функциями уже двух переменных: элементарных исходов $\omega \in \Omega$ и времени $t \in \mathbf{T}$. Их называют случайными процессами.

Чаще всего $t \in \mathbb{R}$, то есть множество значений параметра непрерывно, но иногда наблюдения проводятся в моменты

$$\ldots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{R}^1,$$

получаем

$$\ldots, x(t_{-1}), x(t_0), x(t_1), \ldots \in \mathbb{R}^N,$$

и пусть наблюдения проводятся с одинаковым шагом по времени

$$t_j - t_{j-1} = \Delta,\ j \in \mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z} = (0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – множество целых чисел. Поскольку шаг по времени Δ – постоянная величина, можно считать, что $\Delta = 1$, а в качестве времени использовать множество целых чисел $\mathbb{Z}$. В этом случае обозначают

$$x_t = x(t) \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{Z},$$

и называют $\{x_t, t \in Z\}$ временным рядом, а в теории вероятности – случайной последовательностью. Если $N = 1$ – просто временной ряд, $N > 1$ – векторный временной ряд. Очевидно так же что временной ряд это частный случай случайного процесса.

1. Введение в теорию случайных процессов

1.1. Случайные процессы и их основные характеристики

Рассмотрим частный случай случайной функции $x = x(t) = x(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$ $(N = 1)$. Пусть $t \in \mathbb{R}^1$ меняется непрерывно и, не ограничивая общности, его допустимые значения главная прямая или ее подмножества. Описанная выше функция по классификации из таблицы – случайный процесс. Определим основные понятия, связанные с случайными процессами. Как правило, при изучении случайных процессов аргумент ω не указывается, то есть обозначение случайного процесса символами $x(t)$ эквивалентно обозначению $x(\omega, t)$.

Пусть $t = t_0$, где $t_0 \in \mathbf{T}$ – некоторое фиксированное значение временного параметра. Тогда значение случайного процесса $x(\omega, t)$ в точке $t = t_0$

$$x(t_0) = x(\omega, t_0)$$

является случайной величиной (функцией элементарных исходов ω), определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. и называется *отсчетом случайного процесса* $x(\omega, t)$ в заданной точке $t_0 \in \mathbf{T}$.

Реализацией (*траекторией*) *случайного процесса* $x(\omega, t)$ называется числовая функция вещественной переменной

$$x(t) = x(\omega_0, t),$$

где $t \in \mathbf{T}$, а ω_0 – некоторый фиксированный элементарнный исход ($\omega_0 \in \Omega$).

Совокупность $\{x(\omega, t),\, t \in \mathbf{T},\, \omega \in \Omega\}$ всех возможных реализаций случайного процесса $x(\omega, t)$ называется *ансамблем реализаций*.

Рассмотрим случайный процесс

$$x = x(t) = x(\omega, t), t \in \mathbf{T},$$

положим $t = t_0$. Тогда случайная величина $x(t_0)$ (сечение процесса) имеет функцию распределения

$$F_{x(t_0)}(z) = \mathbf{P}\{x(t_0) < z\} = F_x(z, t_0). \qquad (1)$$

Для любого n и любых точек $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{T}$ набор случайных величин

$$\{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)\}$$

является n-мерной случайной величиной с n-мерной функцией распределения

$$\begin{aligned}
&F_{x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_n)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\
&= F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\
&= \mathbf{P}\{x(t_1) < z_1, x(t_2) < z_2, \ldots, x(t_n) < z_n\} = \\
&= \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} \{x(t_i) < z_i\}\right\}.
\end{aligned}$$

Определение. Семейство функций

$$\left\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}$$

называется *семейством конечномерных распределений* случайного процесса $x = x(t)$.

Определение. Семейство функций

$$\left\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}$$

называется *согласованным семейством конечномерных распределений*, если оно для любого n удовлетворяет свойствам функций распределения n-мерных случайных величин.

Теорема Колмогорова о согласованности. Если при любом n и любых

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{T}$$

семейство функций

$$\left\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n)\right\}$$

является согласованным, то существует вероятностное пространство $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и случайный процесс $x(\omega, t)$, определенный на этом вероятностном пространстве, для которого данное семейство будет семейством конечномерных распределений.

Существует несколько способов задания случайного процесса.

Аналитический способ задания случайного процесса:

$$x(t) = g\left(t, \eta_1, \ldots, \eta_k\right),$$

где $\eta_1, \ldots, \eta_k$ – набор случайных величин.

Рекуррентный способ задания случайного процесса:

$$x(t) = g\left(t, x(t-1), \ldots, x(t-k), \eta(t), \ldots, \eta(t-l)\right),$$

то есть значение случайного процесса в момент времени t определяется значениями случайного процесса $\xi(t)$ в предыдущие моменты времени и значениями некоторых случайных величин, не зависящих от случайного процесса $x(t)$. Такой способ задания случайного процесса используется в основном для случайных последовательностей.

Задание случайного процесса с *помощью конечномерных распределений.*

Основные характеристики случайных процессов

Математическим ожиданием случайного процесса $x(t) = x(\omega, t)$ называется функция

$$m_x(t) = \mathbf{E}\{x(t)\}, \tag{2}$$

равная в каждый фиксированный момент времени $t \in \mathbf{T}$ математическому ожиданию сечения. Случайный процесс

$$\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$$

называется *центрированным случайным процессом.*

Дисперсией случайного процесса $x(t) = x(\omega, t)$ называется функция

$$\mathbf{D}_x(t) = \mathbf{D}\{x(t)\} = \mathbf{E}\{(x(t) - m(t))^2\}, \qquad (3)$$

равная в каждый фиксированный момент времени $t \in \mathbf{T}$ дисперсии сечения.

Средним квадратическим отклонением случайного процесса $x(t) = x(\omega, t)$ называется функция

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\mathbf{D}_x(t)}, \, t \in \mathbf{T}.$$

Ковариационной функцией случайного процесса (автоковариацией) $x(t) = x(\omega, t)$ называется функция $\sigma_x(t_1, t_2)$ двух переменных $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$, которая при любых фиксированных значениях t_1 и t_2 равна ковариации сечений $x(t_1)$ и $x(t_2)$, то есть

$$\begin{aligned} \sigma_x(t_1, t_2) = \mathbf{Cov}\{x(t_1), x(t_2)\} = \\ = \mathbf{E}\{(x(t_1) - m_x(t_1))(x(t_2) - m_x(t_2))\}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Моментной функцией 2-го порядка для $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ называется смешанный начальный момент 2-го порядка отсчетов этого процесса

$$k_x(t_1,t_2)=\mathbf{E}\{x(t_1),x(t_2)\},t_1,t_2\in\mathbb{R}.$$

Между ковариационной функцией и моментной функцией существует связь:

$$\sigma_x(t_1,t_2)=k_x(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_x(t_2)$$

и

$$k_x(t_1,t_2)=\sigma_x(t_1,t_2)+m_x(t_1)m_x(t_2),\ t_1,t_2\in\mathbb{R}.$$

Корреляционной функцией случайного процесса (*автокорреляцией*) $x(t)=x(\omega,t)$ называется функция $\rho_x(t_1,t_2)$ двух переменных $t_1,t_2\in\mathbf{T}$, которая при любых фиксированных значениях t_1 и t_2 равна корреляции сечений $x(t_1)$ и $x(t_2)$, то есть

$$\rho_x(t_1,t_2)=\mathbf{Corr}\{x(t_1),x(t_2)\}=\frac{\mathbf{Cov}\{x(t_1),x(t_2)\}}{\sqrt{\mathbf{D}_x(t_1)\mathbf{D}_x(t_2)}}. \tag{5}$$

Свойства ковариационной и корреляционной функций случайного процесса

Пусть $\sigma_x(t_1, t_2)$ – ковариационная, а $\rho_x(t_1, t_2)$ – корреляционная функции случайного процесса $x(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ – некоторые неслучайные функции, заданные на множестве $\mathbf{T}$. Тогда для любых $t, t_1, t_2 \in \mathbf{T}$, имеют место свойства:

Свойство 1. $\sigma_x(t, t) = \mathbf{D}_x(t)$; $\rho_x(t, t) \equiv 1$.

Свойство 2. $\sigma_x(t_1, t_2) = \sigma_x(t_2, t_1)$; $\rho_x(t_1, t_2) = \rho_x(t_2, t_1)$.

Свойство 3. Для линейного преобразования $a(t)x(t)+b(t)$ случайного процесса справедливо:

$$\sigma_{ax+b}(t_1, t_2) = a(t_1)a(t_2)\sigma_x(t_1, t_2);$$

$$\rho_{ax+b}(t_1, t_2) = sign(a(t_1)a(t_2))\rho_x(t_1, t_2).$$

Свойство 4.

$$\sigma_x(t_1, t_2) \le \sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2);$$

$$\rho_x(t_1, t_2) \le 1.$$

Свойство 5. $\sigma_x(t_1, t_2)$ и $\rho_x(t_1, t_2)$ – неотрицательно определенные функции.

Взаимной ковариационной функцией случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется функция $\sigma_{xy}(t_1, t_2)$ двух переменных $t_1 \in \mathbf{T}_x$ и $t_2 \in \mathbf{T}_y$, которая при любых фиксированных значениях t_1 и t_2 равна ковариации сечений $x(t_1)$ и $y(t_2)$, то есть

$$\sigma_{xy}(t_1, t_2) = \mathbf{Cov}\{x(t_1), y(t_2)\}. \qquad (6)$$

Из определения взаимной ковариационной функции (6) вытекают формулы для вычисления:

$$\sigma_{xy}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{\overset{\circ}{x}(t_1)\,\overset{\circ}{y}(t_2)\}, \qquad (7)$$

$$\sigma_{xy}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{(x(t_1) - m_x(t_1))(y(t_2) - m_y(t_2))\}, \qquad (8)$$

$$\sigma_{xy}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{x(t_1)y(t_2)\} - m_x(t_1)m_y(t_2). \qquad (9)$$

Случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$, определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *некоррелированными случайными процессами*, если для любых значений $(t_1, t_2) \in \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y$

$$\sigma_{xy}(t_1, t_2) \equiv 0.$$

Свойства взаимной ковариационной функции

Для любых $(t_1, t_2) \in \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y$ имеют место следующие свойства:

Свойство 1. $\sigma_{xy}(t_1, t_2) = \sigma_{yx}(t_2, t_1)$.

Свойство 2. Для случайных процессов $a(t)x(t) + b(t)$ и $c(t)y(t) + d(t)$:

$$\sigma_{ax+b,cy+d}(t_1, t_2) = a(t_1)c(t_2)\sigma_{xy}(t_2, t_1).$$

Свойство 3. $|\sigma_{xy}(t_1, t_2)| \le \sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)$.

Свойство 4. Автоковариация случайного процесса $x(t) + y(t)$, $t \in \mathbf{T}$, вычисляется по формуле:

$$\sigma_{x+y}(t_1, t_2) = \sigma_x(t_1, t_2) + \sigma_y(t_1, t_2) +$$

$$+ \sigma_{xy}(t_1, t_2) + \sigma_{xy}(t_2, t_1)$$

для любых $(t_1, t_2) \in \mathbf{T}$.

Доказательство. Обозначим

$$\zeta \doteq x(t) + y(t).$$

Тогда:

$$\sigma_{x+y}(t_1, t_2) = \sigma_\zeta(t_1, t_2) =$$

$$= \mathbf{E}\{(\zeta(t_1) - m_\zeta(t_1))(\zeta(t_2) - m_\zeta(t_2))\} =$$

$$= \mathbf{E}\{\overset{\circ}{\zeta}(t_1)\overset{\circ}{\zeta}(t_2)\}.$$

Так как

$$\overset{\circ}{\zeta}(t) = \overset{\circ}{x}(t) + \overset{\circ}{y}(t),$$

то

$$\sigma_{x+y}(t_1, t_2) = \mathbf{E}\{(\overset{\circ}{x}(t_1) + \overset{\circ}{y}(t_1))(\overset{\circ}{x}(t_2) + \overset{\circ}{y}(t_2))\} =$$

$$= \mathbf{E}\{\overset{\circ}{x}(t_1)\overset{\circ}{x}(t_2)\} + \mathbf{E}\{\overset{\circ}{y}(t_1)\overset{\circ}{y}(t_2)\} +$$

$$+ \mathbf{E}\{\overset{\circ}{x}(t_1)\overset{\circ}{y}(t_2)\} + \mathbf{E}\{\overset{\circ}{x}(t_2)\overset{\circ}{y}(t_1)\} =$$

$$= \sigma_x(t_1, t_2) + \sigma_y(t_1, t_2) + \sigma_{xy}(t_1, t_2) + \sigma_{xy}(t_2, t_1).$$

$\square$

Взаимной корреляционной функцией случайных процессов $x(t)$ *и* $y(t)$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется функция двух переменных $t_1 \in \mathbf{T}_x$ и $t_2 \in \mathbf{T}_y$:

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{\sigma_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}. \tag{10}$$

Свойства взаимной корреляционной функции

Свойство 1. $\rho_{xy}(t_1, t_2) = \rho_{yx}(t_2, t_1)$.

Свойство 2. Для случайных процессов $a(t)x(t) + b(t)$ и $c(t)y(t) + d(t)$:

$$|\rho_{ax+b,cy+d}(t_1, t_2)| = |\rho_{xy}(t_2, t_1)|.$$

Свойство 3. $|\rho_{xy}(t_1, t_2)| \leq 1$.

1.2. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов

Понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости связаны с понятием предела функции, то есть с понятием сходимости. В теории вероятностей, рассматриваются различные виды сходимости: почти наверное, по вероятности, в среднем порядка r, по распределению. В теории случайных процессов обычно при определении указанных понятий используют сходимость в среднем квадратичном (хотя можно воспользоваться и другими).

Непрерывность случайных процессов

Непрерывность случайных процессов определяется по-разному, в зависимости от выбранного типа сходимости.

Случайный процесс $x(t)$, $t \in \mathbf{T}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *стохастически непрерывным* в точке t_0 $(t_0 \in \mathbf{T})$, если:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{P}\{|x(t) - x(t_0)| > \epsilon\} = 0.$$

Случайный процесс $x(t)$, $t \in \mathbf{T}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *непрерывным в среднем квадратичном* в точке t_0 $(t_0 \in \mathbf{T})$, если:

$$x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{\text{ср.кв.}} x(t_0).$$

Из непрерывности в среднем квадратичном случайного процесса $x(t)$ в точке t ($t \in \mathbf{T}$) согласно неравенству Чебышева:

$$\mathbf{P}\{|\zeta| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}\{\zeta^2\}}{\varepsilon^2},$$

где

$$\zeta = x(t+\Delta) - x(t),\ \varepsilon > 0,$$

следует стохастическая непрерывность $x(t)$ в этой же точке.

Теорема. Критерий непрерывности случайных процессов в среднем квадратичном. Для того, чтобы случайный процесс $x(t)$ был непрерывным в среднем квадратичном в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы его ковариационная функция $\sigma_x(t,u)$ была непрерывной в точке $t = u = t_0$.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из критерия сходимости в среднем квадратичном. Случайная последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходится в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}\{x_n x_m\} \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} C,$$

причем

$$C = \mathbf{E}\left\{x^2\right\}, \text{ если } x = \underset{n\to+\infty}{l.i.m.}\, x_n.$$

Справедливо также, что если

$$x = \underset{n\to+\infty}{l.i.m.}\, x_n,\ y = \underset{n\to+\infty}{l.i.m.}\, y_n,$$

то

$$\mathbf{E}\left\{x_n y_n\right\} \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} xy,$$

где $\{y_n,\, n = 1,\, 2,\, \ldots\}$ – случайная последовательность.

Необходимость. Пусть $x = \underset{n\to+\infty}{l.i.m.}\, x_n$. Тогда

$$k_x\left(t_0 + \Delta t, t_0 + \Delta u\right) = \mathbf{E}\left\{x\left(t_0 + \Delta t\right) x\left(t_0 + \Delta u\right)\right\}$$

Так как

$$\sigma_x(t_1, t_2) = k_x(t_1, t_2) - m_x(t_1) m_x(t_2),$$

то функция $\sigma_x\left(t, u\right)$ непрерывна в точке $t = u = t_0$.

Достаточность. Пусть функция $\sigma_x\left(t, u\right)$ непрерывна в точке $t = u = t_0$. Тогда

$$\mathbf{E}\left\{\left(x(t) - x(t_0)\right)^2\right\} =$$

$$= \sigma_x(t,t) - \sigma_x(t_0,t) - \sigma_x(t,t_0) + \sigma_x(t_0,t_0) \xrightarrow[t \to t_0]{} 0.$$

то есть случайный процесс $x(t)$ непрерывен в точке t_0.

■

Дифференцируемость случайных процессов

Случайный процесс $x(t)$, $t \in \mathbf{T}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *дифференцируемым в среднем квадратичном* в точке t_0 ($t_0 \in \mathbf{T}$), если существует конечный предел:

$$\underset{h \to 0}{l.i.m.} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} = x'(t_0).$$

Случайная функция $x'(t_0)$ *называется среднеквадратичной производной случайного процесса* $x(t_0)$ в точке t_0.

Теорема. Критерий дифференцируемости случайного процесса в среднем квадратичном. Для того, чтобы случайный процесс

$x(t)$ имел производную в среднем квадратичном в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала смешанная частная призводная второго порядка

$$\left.\frac{\partial^2 \sigma_x(t,u)}{\partial t \partial u}\right|_{t=u=t_0}.$$

Если функция $\sigma_x(t,u)$ имеет вторую производную

$$\frac{\partial^2 \sigma_x(t,u)}{\partial t \partial u}$$

в точках $t = u$, то она имеет вторую производную во всех точках, причем эта производная является ковариационной функцией случайного процесса $x'(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование производной в среднем квадратической смысле случайного процесса $x(t)$ в точке t_0 эквиваленто тому, что

$$\mathbf{E}\left\{\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}\cdot\frac{x(t_0+\Delta u)-x(t_0)}{\Delta u}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\Delta t \Delta u}\left(\sigma_x(t_0+\Delta t, t_0+\Delta u) - \sigma_x(t_0+\Delta t, t_0) - \right.$$
$$\left. -\sigma_x(t_0, t_0+\Delta u) + \sigma_x(t_0,t_0)\right) \xrightarrow[\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta u\to 0}]{} \mathbf{E}\left\{x'(t_0)\right\}^2 \qquad (11)$$

по критерию сходимости. Но левая часть (11) стремится к

$$\frac{\partial^2 \sigma_x(t_0, t_0)}{\partial t \partial u}.$$

Из свойств сходимости в среднем квадратичном получаем, что если существует

$$\frac{\partial^2 \sigma_x(t, u)}{\partial t \partial u}$$

в точках $t = u$, то для любых точек t_0, u_0 существуют производные в среднем квадратичном $x'(t_0)$ и $x'(u_0)$ и

$$\mathbf{E}\left\{\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \cdot \frac{x(u_0 + \Delta u) - x(u_0)}{\Delta u}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\Delta t \Delta u}\left(\sigma_x(t_0 + \Delta t, u_0 + \Delta u) - \sigma_x(t_0 + \Delta t, u_0) +\right.$$
$$\left.-\sigma_x(t_0, u_0 + \Delta u) + \sigma_x(t_0, u_0)\right) \xrightarrow[\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta u \to 0}]{}$$
$$\xrightarrow[\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta u \to 0}]{} \mathbf{E}\left\{x'(t_0) \cdot x'(u_0)\right\}. \tag{12}$$

Но левая часть (12) стремится к

$$\frac{\partial^2 \sigma_x(t_0, u_0)}{\partial t \partial u}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 \sigma_x(t_0, u_0)}{\partial t \partial u} = \mathbf{E}\left\{x'(t_0)\, x'(u_0)\right\} = \sigma_{x'(t)}(t_0, u_0).$$

■

Интегрируемость случайных процессов

Пусть $x(t)$ – случайный процесс, $\sigma_x(t, u)$ – ковариационная функция этого процесса, а $g(t)$ – некототорая неслучайная борелевская функция. Определим интегралы вида

$$I_1 = \int_a^b x(t) g(t)\, dt,$$

$$I_2 = \int_a^b g(t)\, dx(t),$$

где $[a, b]$ – конечный или бесконечный интервал.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Разобьем этот интервал точками $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ и определим:

$$\lambda_n = \max_k (t_k - t_{k-1}),$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} g(\overline{t_k}) x(\overline{t_k})(t_k - t_{k-1}),$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} g(\overline{t_k}) \left(x\left(t_k\right) - x\left(t_{k-1}\right)\right),$$

где $\overline{t_k} \in (t_{k-1} - t_k]$. Определим интегралы I_1 и I_2 как

$$I_1 = \underset{\lambda_n \to 0}{l.i.m.} S_1,\ I_2 = \underset{\lambda_n \to 0}{l.i.m.} S_2,$$

где пределы не зависят от разбиения отрезка $[a, b]$ и выбора точек $\overline{t_k}$.

Теорема. Интеграл I_1 существует тогда и только тогда, когда существует интеграл Римана

$$Q_1 = \int_a^b \int_a^b g(t) g(u) \sigma_x\left(t, u\right)\, dt\, du,$$

Интеграл I_2 существует тогда и только тогда, когда существует интеграл Римана-Стилтьеса

$$Q_2 = \int_a^b \int_a^b g(t) g(u) \sigma_x\left(t, u\right)\, d_{t,u}\left(\sigma_x\left(t, u\right)\right),$$

причем

$$Q_1 = \mathbf{E}\left\{I_1^2\right\},\ Q_2 = \mathbf{E}\left\{I_2^2\right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим иное разбиение $a = u_1 < u_2 < \ldots < u_m = b$ отрезка $[a, b]$ и определим:

$$\lambda_m = \max_k (u_k - u_{k-1}),$$

$$S_1^* = \sum_{l=1}^{m} g(\overline{u_l}) x(\overline{u_l})(u_l - u_{l-1}),$$

$$S_2^* = \sum_{l=1}^{m} g(\overline{u_l}) \left(x\left(u_l\right) - x\left(u_{l-1}\right)\right),$$

Тогда, по критерию сходимости в среднем квадратическом, интеграл I_1 существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\mathbf{E}\left\{S_1 S_1^*\right\} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} g(\overline{t_k}) g(\overline{u_l}) \sigma_x\left(\overline{t_k}, \overline{u_l}\right) \times$$
$$\times \left(t_k - t_{k-1}\right)(u_l - u_{l-1}), \text{ когда } \lambda_n, \lambda_m \to 0.$$

Но этот предел представляет Q_1 и $\mathbf{E}\left\{I_1^2\right\} = Q_1$.

Аналогично,

$$\mathbf{E}\left\{S_2 S_2^*\right\} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} g(\overline{t_k}) g(\overline{u_l}) \times$$

$$\times \left(\sigma_x \left(t_{k+1}, u_{l+1}\right) - \sigma_x \left(t_{k+1}, u_l\right) - \sigma_x \left(t_k, u_{l+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \sigma_x \left(t_k, u_l\right)\right) \xrightarrow[\substack{\lambda_n \to 0 \\ \lambda_m \to 0}]{} Q_2,$$

причем

$$\mathbf{E}\left\{I_2^2\right\} = Q_2.$$

■

Под интегралами по бесконечному промежутку понимается предел в среднем квадратичном по конечному промежутку, когда пределы интеграла стремятся к бесконечности.

Свойства производных и интегралов случайных процессов

Свойство 1. Так как определения производной и интеграла случайного процесса (случайной функции) полностью идентичны соответствующим определениям для неслучайных функций, то основные свойства производной и интеграла, а также правила дифференцирования и интегрирования остаются в силе. При использовани этих свойств и правил следует действовать так, как будто фиксируется элементарный исход $\omega \in \Omega$, а параметр $t \in \mathbf{T}$ – переменный.

Свойство 2. Математическое ожидание производной $x'(t)$ случайного процесса $x(t)$ равно производной от математического ожидания $x(t)$:

$$\mathbf{E}\{x'(t)\} = [m_x(t)]'.$$

Свойство 3. Математическое ожидание интеграла $\int\limits_0^t x(u)du$ случайного процесса $x(t)$ равно интегралу от математического ожидания $x(t)$:

$$\mathbf{E}\left\{\int\limits_0^t x(u)du\right\} = \int\limits_0^t m_x(u)du.$$

Свойство 4. Для ковариационной функции $\sigma_x(t_1, t_2)$ случайного процесса $x(t)$ справедливо равенство:

$$\sigma_\zeta(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 \sigma_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2},$$

где

$$\zeta(t) = x'(t).$$

Свойство 5.

$$\mathbf{D}\{x'(t)\} = \sigma_\zeta(t,t),$$

где

$$\zeta(t) = x'(t).$$

Свойство 6. Для ковариационной функции $\sigma_x(t_1, t_2)$ случайного процесса $x(t)$ справедливо равенство:

$$\sigma_\zeta(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1} du \int\limits_0^{t_2} \sigma_x(u, v) dv,$$

где

$$\zeta(t) = \int\limits_0^t x(u) du.$$

Свойство 7.

$$\mathbf{D}\left\{\int\limits_0^t x(u) du\right\} = \sigma_\zeta(t,t),$$

где

$$\zeta(t) = \int\limits_0^t x(u)du.$$

2. Стационарные случайные процессы

2.1. Стационарность случайных процессов в узком и широком смыслах

Определение. Случайный процесс

$$x(t) = x(\omega, t),$$

определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *стационарным в узком смысле случайным процессом*, если все его конечномерные распределения не зависят от сдвига, то есть для любых $\tau \in \mathbf{T}$ и $n \in \mathbb{N}$ для конечномерных функций распределения сечений

$$x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)$$

и

$$x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau), \ldots, x(t_n + \tau)$$

случайного процесса $x(t)$ выполняется равенство:

$$F_{x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_n)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) =$$

$$= F_{x(t_1+\tau),x(t_2+\tau),\ldots,x(t_n+\tau)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) =$$

$$= F_{1,\,2,\ldots,\,n}(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Определение. Случайный процесс $x(t) = x(\omega, t)$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *стационарным в широком смысле случайным процессом*, если для любых $t, t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ выполнены следующие три условия:

1) $\mathbf{E}\left\{| x(t) |^2\right\} < \infty$;
2) $m_x(t) = m,$ то есть все его средние значения не зависят от времени;
3) $\sigma_x(t_1, t_2) = \sigma_x(t_1 - t_2),$ то есть ковариационная функция зависит лишь от разности аргументов.

Теорема (связь стационарности в узком и широком смысле). Пусть случайный процесс $x(t), t \in \mathbf{T}$ является стационарным в узком смысле и имеет конечный момент $\mathbf{E}\left\{| x(t) |^2\right\} < \infty$, $t \in \mathbf{T}$, тогда этот случайный процесс стационарен в широком смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы, условие 1) стационарности в широком смысле выполнено. Покажем, что выполняются условия 2) и 3).

Вычислим математическое ожидание случайного процесса с учетом того, что он стационарен в узком смысле. Мы его можем вычислить так как математическое ожидание существует:

$$m(t_1) = \mathbf{E}\left\{x(t_1)\right\} = \int\limits_{\mathbb{R}} z dF_1(z, t_1),\ t_1 \in \mathbf{T},$$

где

$$F_1(z, t_1) = \mathbf{P}\left\{x(t_1) < z\right\}.$$

Так как $x(t)$ – стационарный в узком смысле случайный процесс, то полагая

$$n = 1,\ t_1 = t,\ \tau = -t,$$

можем записать:

$$F_1(z,\ t_1) = F_1(z,\ t + \tau) = F_1(z,\ 0).$$

Следовательно, математическое ожидание $m(t)$ не зависит от t:

$$m(t_1) = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_1(z, 0) = m.$$

Условие 3) проверяется аналогично:

$$\sigma_x(t_1, t_2) = \int\limits_{\mathbb{R}} (z_1 - m)(z_2 - m) dF_2(z_1,\ z_2,\ t_1,\ t_2) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} (z_1 - m) \cdot (z_2 - m) dF_2(z_1,\ z_2,\ t_1 - t_2, 0) =$$

$$= \sigma_x(t_1 - t_2).$$

■

Замечание. Из стационарности в широком смысле не следует стационарность в узком смысле. Единственный пример на практике, когда стационарный в широком и узком смысле эквивалентно это случайный Гауссовский процесс.

Гауссовский случайный процесс. Случайный процесс $x(t) = x(\omega, t)$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется *гауссовским случайным процессом*, если все его конечномерные распределения гауссовские, то есть для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $t_k \in \mathbf{T}\,(k = 0, 1, \ldots, n)$ случайный вектор

$$(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n))^{\mathbf{T}}$$

имеет n-мерное нормальное распределение.

Из определения следует, что если гауссовский случайный процесс задан n сечениями

$$x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n),$$

для которых известны математические ожидания

$$\mathbf{E}\{x(t_k)\} = a_k, k = 1, 2, \ldots, n,$$

и матрица ковариаций

$$K = \|K(t_i, t_j)\|, i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$K(t_i, t_j) = \sigma_x(t_i, t_j),$$

то для любого n плотность распределения случайного вектора

$$(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n))^{\mathbf{T}}$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} & p_{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\ & = p_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\ & = p_{1,2,\ldots,n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|K|}} \times \\ & \times \exp\Big\{-\frac{1}{2|K|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Big[(z_i - a_i) K_{ij} (z_j - a_j)\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

где $|K|$ – определитель матрицы K, K_{ij} – алгебраическое дополнение элемента $K(t_i, t_j)$ матрицы K.

Ковариационная и корреляционная функции стационарных случайных процессов и их свойства

Так как ковариационная $\sigma_x(t_1, t_2)$ и корреляционная функции $\rho_x(t_1, t_2)$ стационарного случайного процесса $x(t)$ зависят только от разности аргументов $t_1 - t_2$, то полагая $\tau = t_1 - t_2$, будем в дальнейшем обозначать их $\sigma_x(\tau)$ и $\rho_x(\tau)$ соответственно.

Свойство 1. Для любого $t \in \mathbf{T}$:

$$\mathbf{D}x(t) = \sigma_x(0),$$

$$\rho_x(0) = 1.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}x(t) = \mathbf{Cov}\{(x(t) - m)(x(t) - m)\} = \\ &= \sigma_x(t - t) = \sigma_x(0), \\ &\rho_x(0) = \frac{\sigma_x(0)}{\sqrt{\sigma_x(0) \cdot \sigma_x(0)}} = 1. \end{aligned} \tag{13}$$

■

Свойство 2. Для любого $\tau > 0$:

$$\sigma_x(\tau) = \sigma_x(-\tau),$$

$$\rho_x(\tau) = \rho_x(-\tau).$$

Доказательство.

$$\sigma_x(t_1, t_2) = \sigma_x(t_2, t_1) = \sigma_x(t_1 - t_2) = \\ = \sigma_x(t_2 - t_1),$$

то есть для любого $\tau \in \mathbb{R}$

$$\sigma_x(\tau) = \sigma_x(-\tau).$$

$$\rho_x(\tau) = \frac{\sigma_x(\tau)}{\sqrt{\sigma_x(\tau) \cdot \sigma_x(0)}} = \\ = \frac{\sigma_x(-\tau)}{\sqrt{\sigma_x(-\tau) \cdot \sigma_x(0)}} = \rho_x(-\tau).$$

■

Свойство 3. Для любого $\tau > 0$:

$$|\sigma_x(\tau)| \leq \sigma_x(0) = \mathbf{D}x,$$

$$|\rho_x(\tau)| = \rho_x(0) = 1.$$

Доказательство. В общем случае для ковариационной функции справедливо неравенство:

$$|\sigma_x(t_1, t_2)| \leq \sqrt{\sigma_x(t_1, t_1) \cdot \sigma_x(t_2, t_2)}.$$

Так как процесс стационарный, то

$$\sigma_x(t_1, t_2) = \sigma_x(t_2 - t_1) = \sigma_x(\tau),$$

$$\sigma_x(t_1, t_1) = \sigma_x(t_2, t_2) = \sigma_x(0),$$

то

$$|\sigma_x(\tau)| \le \sigma_x(0),$$

а

$$|\rho_x(\tau)| = \rho_x(0) = 1.$$

■

Дифференцирование и интегрирование стационарных случайных процессов

Теорема. Если $x(t)$ – стационарный случайный процесс, то его производная $x'(t)$ – также стационарный процесс с

$$\mathbf{E}\{x'(t)\} = 0,$$

и

$$\sigma_{x'}(\tau) = \frac{d^2\sigma_x(\tau)}{d\tau^2}.$$

Теорема. Если $x(t)$ – стационарный случайный процесс с $m_x \neq 0$, то

$$\int\limits_0^t x(u)du$$

не является стационарным случайным процессом. Если же $m_x = 0$, то указанный интеграл может оказаться как стационарным, так и нестационарным случайным процессом.

Замечание 1. Если стационарный случайный процесс $x(t)$ является гауссовским, то его n-я производная $x^{(n)}(t)$ – также стационарный гауссовский случайный процесс с

$$m_{x^{(n)}} = 0$$

и

$$\sigma_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{2n}\sigma_x(\tau)}{d\tau^{2n}}.$$

Замечание 2. Интеграл от стационарного гауссовского случайного процесса является также гауссовским случайным процессом.

2. 2. Спектральная плотность стационарного случайного процесса

Определение. *Спектральной плотностью* $f_x(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]$, стационарного случайного процесса $x(t), t \in \mathbf{T}$, имеющего ковариационную функцию $\sigma_x(\tau), \tau \in \mathbf{T}$, называется преобразование Фурье от ковариационной функции:

$$f_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \sigma_x(t) dt. \qquad (14)$$

Получим достаточное условие существования спектральной плотности:

$$|f_x(\lambda)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau} \sigma_x(\tau) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{i\lambda\tau} \right| |\sigma_x(\tau)| d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\sigma_x(\tau)| d\tau,$$

так как
$$\left|e^{i\lambda\tau}\right| = 1.$$
Таким образом, достаточным условием существования спектральной плотности является условие:
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\sigma_x(\tau)| d\tau < \infty. \qquad (15)$$

В свою очередь, необходимым условием сходимости интеграла в (15) является *условие затухания ковариационных функций*:
$$|\sigma_x(\tau)| \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0. \qquad (16)$$

Замечание. Отметим только , что (15) – достаточное условие существования спектральной плотности. Если (15) не выполняется, то это не значит, что не существует спектральной плотности.

Теорема (Винера - Хинчина). Пусть стационарный случайный процесс $x(t)$ имеет спектральную плотность
$$f_x(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Тогда она может быть вычислена из соотношения

$$f_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_x(\tau) \cos(\lambda\tau) d\tau, \tag{17}$$

а по ней может быть восстановлена его ковариационная функция обратным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} \sigma_x(\tau) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda\tau) f_x(\lambda) d\lambda = \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda\tau) f_x(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о (17) следует из формулы Эйлера

$$e^{i\lambda\tau} = \cos(\lambda\tau) + i\sin(\lambda\tau),$$

четности коварицонной функции $\sigma_x(\tau)$ и формулы (14).

(18) – просто обратное преобразование.

■

Замечание. Из теоремы следует, что при условии существования спектральной плотности имеет место взаимнооднозначное соответствие спектральной плотности и ковариационной функции:

$$F(\cdot) \Longleftrightarrow \sigma(\cdot).$$

Смысл коваиационной функции – ковариация двух отсчетов. Смысл спектральной плотности непонятен и теоретически это избыточная характеристика, у нее есть лишь одно теоретически необоснованное объяснение, ее используют для определения статистического периода, то есть периода по времени, через который свойства случайного процесса статистически поаторяются. Прежде, чем определить понятие статистического периода приведем свойства спектральной плотности, как прямого преборазования Фурье частной функции:

Свойство 1. $f_x(\lambda) > 0,\ \lambda \in [-\pi, \pi].$

Свойство 2. $f_x(\lambda) = f_x(-\lambda),\ \lambda \in [-\pi, \pi].$

Исходя из свойства 2 спектральную плотность достаточно определить на луче

$$f(\lambda),\ \lambda \in [0; +\infty).$$

Поясним, как определяется период. Находится глобальный максимум:

$$\lambda_0 = \arg \max_{\lambda \in [0, +\infty)} f(\lambda).$$

Так как

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

где T_0 – период, то

$$T_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

2.3. Эргодические по математическому ожиданию случайные процессы

Определение. Стационарный случайный процесс $x(t), t \in \mathbf{T}$, называется *эргодическим случайным процессом по отношению к некоторой функции* $g(t)$, если имеет равенство по вероятности:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} g(x(t))dt = \mathbf{E}\{g(x(t))\}.$$

Случайный процесс $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ называется *эргодическим по математическому ожиданию*, если выполняются условия:

1). Отсчеты случайного процесса $x(t)$ имеют конечный второй момент;

2). Математическое ожидание случайного процесса $x(t)$ не меняется

$$m_x(t) = \mathbf{E}\{x(t)\} = m \ \forall t \in \mathbb{R};$$

3). Временные средние

$$\overline{x}_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)dt$$

случайного процесса $x(t)$ подсчитанные по всей реализации сходятся в среднеквадратичном с ростом длины реализации к математическому ожиданию m:

$$\overline{x}_T \xrightarrow[T\to\infty]{L_2} m$$

или

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\{(\overline{x}_T - m)^2\} = 0.$$

Очевидно, что в условиях 1).-3). временное среднее $\overline{x}_T$ – состоятельная оценка для математического ожидания m по реализации $x(t),\ t \in [0;T],\ T > 0$:

$$\overline{x}_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbf{P}} m.$$

Если время меняется дискретно либо счетно, то есть имеем дело с временным рядом, то реализация длины приводит к

$$\overline{x}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t,$$

где интеграл заменен на сумму, условия 1). - 3). формируются аналогично и:

$$\overline{x}_T \xrightarrow[T\to\infty]{L_2} m,$$

$$\overline{x}_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbf{P}} m.$$

Теорема. Пусть случайный процесс

$$x = x(t),\ t \in \mathbb{R}$$

удовлетворяет условиям 1).- 2). и пусть

$$\sigma_x(t_1, t_2) = \mathbf{Cov}\{x(t_1, x(t_2)\}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} -$$

его ковариационная функция, тогда условие 3). эквивалентно следующему условию

$$\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \sigma(t_1,t_2)dt_1dt_2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \qquad (19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \sigma(t_1,t_2)dt_1dt_2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \iff$$

$$\iff \mathbf{E}\{(\overline{x}_T-m)^2\} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

Вычислим $\mathbf{E}\{(\overline{x}_T-m)^2\}$:

$$\mathbf{E}\{(\overline{x}_T-m)^2\} = \mathbf{E}\{(\overline{x}_T-m)\cdot(\overline{x}_T-m)\} =$$

$$= \mathbf{E}\left\{\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t_1)dt_1 - m\right)\cdot\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t_2)dt_2 - m\right)\right\} =$$

$$= \mathbf{E}\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T (x(t_1)-m)\,dt_1 \cdot \frac{1}{T}\int\limits_0^T (x(t_2)-m)\,dt_2\right\} =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \mathbf{E}\left\{(x(t_1)-m)\cdot(x(t_2)-m)\,dt_1dt_2\right\}$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

■

Следствие. Для того, чтобы выполнить 3) достаточно, чтоб ковариационная функция затухала с ростом расстояния отсчетов по времени

$$\sigma(t_1, t_2) \to 0 \text{ при } |t_1 - t_2| \to \infty.$$

2. 4. Статистическое оценивание характеристик стационарных случайных процессов

Постановка задачи непараметрического статистического оценивания характеристик стационарных временных рядов

Пусть наблюдается реализация

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$ стационарного в широком смысле временного ряда

$$\{x_t = xt,\, t = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\},$$

для которого определены характеристики:

математическое ожидание

$$\mu = \mathbf{E}\{x_t\}, \, t \in \mathbb{Z};$$

ковариационная функция

$$\sigma(\tau) = \mathbf{E}\left\{(x_t - \mu)\left(x_{t+\tau} - \mu\right)\right\},\ t, \tau \in \mathbb{Z};$$

спектральная плотность

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) \cos(\lambda\tau),\ \lambda \in [-\pi, \pi],$$

которая существует, если

$$\sum_{\tau=1}^{+\infty} |\sigma(\tau)| < +\infty, \qquad (20)$$

На практике обычно математическое ожидание и ковариационная функция неизвестны. Их оценки, а также оценка спектральной плотности, вычисляются по имеющейся реализации X.

2.4.1. Выборочное среднее стационарного временного ряда и его свойства

Определение. *Выборочным средним для временного ряда* $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, вычисленным по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, называется статистика

$$\overline{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t. \tag{21}$$

Теорема 1. Пусть $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, – стационарный временной ряд с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\left\{x_t\right\}, t \in \mathbb{Z}.$$

Тогда выборочное среднее (21) является несмещенной оценкой для μ, то есть

$$\mathbf{E}\{\overline{x}\} = \mu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Несмещенность оценки (21) следует из того, что

$$\mathbf{E}\{\overline{x}\} = \mathbf{E}\left\{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t\right\} = \frac{1}{T} T\mu = \mu.$$

■

Теорема 2. Пусть $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, – стационарный в широком смысле временной ряд с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\left\{x_t\right\}, t \in \mathbb{Z}.$$

Тогда для дисперсии выборочного среднего (21) справедливо соотношение:

$$\mathbf{D}\{\overline{x}\} = \frac{1}{T} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \sigma(\tau), \qquad (22)$$

где $\sigma(\tau)$ – ковариационная функция.

Доказательство. Для стационарного в широком смысле временного ряда существуют моменты первого и второго порядков. С учетом доказанной в теореме 1 несмещенности вычислим дисперсию $\overline{x}$:

$$\mathbf{D}\{\overline{x}\} = \mathbf{E}\left\{(\overline{x} - \mu)^2\right\} =$$

$$= \mathbf{E}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t_1=1}^{T}(x_{t_1} - \mu)\frac{1}{T}\sum_{t_2=1}^{T}(x_{t_2} - \mu)\right\} =$$

$$= \frac{1}{T^2}\sum_{t_1,t_2=1}^{T} \mathbf{E}\left\{\left(x_{t_1} - \mu\right)\left(x_{t_2} - \mu\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{T^2}\sum_{t_1,t_2=1}^{T} \sigma(t_1 - t_2) =$$

$$= \frac{1}{T^2}\left(T\sigma(0) + 2\sum_{\tau=1}^{T-1}\sigma(\tau)(T - \tau)\right).$$

Учтено, что значение ковариационной функции

$$\sigma\left(t_1 - t_2\right) = \sigma\left(t_2 - t_1\right), \; t_1 \neq t_2,$$

в ковариационной $(T \times T)$-матрице

$$\Sigma = (\sigma(t_1 - t_2))_{t_1, t_2 = 1}^{T}$$

встречается $2(T - |t_1 - t_2|)$ раз, а значение $\sigma(0)$ (при $t_1 = t_2$) – T раз. Далее, воспользовавшись симметричностью ковариационной функции, получаем соотношение (22). ■

Теорема 3. Если для стационарного в широком смысле временного ряда $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\{x_t\}, \, t \in \mathbb{Z}$$

выполняется условие (20), то выборочное среднее (21) является состоятельной в среднеквадратическом оценкой для μ:

$$\mathbf{E}\left\{(\overline{x} - \mu)^2\right\} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0,$$

и для его дисперсии справедливо асимптотическое соотношение:

$$\lim_{T \to +\infty} (T\mathbf{D}\{\overline{x}\}) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau). \qquad (23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как теперь ряд (20) сходится, тогда в силу несмещенности $\overline{x}$ для состоятельности в среднеквадратическом достаточно показать, что дисперсия

$$\mathbf{D}\{\overline{x}\} \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0.$$

Оценим $\mathbf{D}\{\overline{x}\}$ сверху, используя (22):

$$\mathbf{D}\{\overline{x}\} = |\mathbf{D}\{\overline{x}\}| \leq \frac{1}{T} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \left|1 - \frac{|\tau|}{T}\right| |\sigma(\tau)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{T} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} |\sigma(\tau)| \to 0,\ T \to +\infty.$$

Для доказательства (23) оценим разность:

$$\left| T\mathbf{D}\{\overline{x}\} - \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) \right| =$$

$$= \left| \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) - \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \sigma(\tau) \right| =$$

$$= \frac{2}{T} \left| T \sum_{\tau\geq T} \sigma(\tau) + \sum_{\tau=1}^{T-1} \tau\sigma(\tau) \right| =$$

$$= \frac{2}{T} \left| \sum_{\tau\geq 1} \sigma(\tau) + \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{\tau=s+1}^{+\infty} \sigma(\tau) \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{T} \left(\sum_{\tau\geq 1} |\sigma(\tau)| + \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{\tau=s+1}^{+\infty} |\sigma(\tau)| \right) \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0.$$

Справедливость последнего соотношения следует из сходимости ряда (20), в силу которой можно записать:

$$\exists M < +\infty : \ \sum_{\tau=l}^{+\infty} |\sigma(\tau)| < M, \ \forall l \geq 1;$$

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists T_\varepsilon : \quad \sum_{\tau=T}^{+\infty} |\sigma(\tau)| < \frac{\varepsilon}{4}, \ T > T_\varepsilon,$$

откуда $\forall T > T_\varepsilon$:

$$\frac{2}{T}\left(\sum_{\tau\geq 1} |\sigma(\tau)| + \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{\tau=s+1}^{+\infty} |\sigma(\tau)|\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\sum_{\tau\geq 1} |\sigma(\tau)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{T_\varepsilon-1} \sum_{\tau=s+1}^{+\infty} |\sigma(\tau)| + \sum_{s=T_\varepsilon}^{T-1} \sum_{\tau=s+1}^{+\infty} |\sigma(\tau)|\right) <$$

$$< 2\left(\frac{T_\varepsilon M}{T} + \frac{\varepsilon}{4}\right),$$

и при $T > \tilde{T}_\varepsilon$, $\tilde{T}_\varepsilon = \max\{T_\varepsilon, 4T_\varepsilon M/\varepsilon\}$:

$$\frac{2}{T}\left(\sum_{\tau\geq 1} |\sigma(\tau)| + \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{\tau=s+1}^{+\infty} |\sigma(\tau)|\right) < \varepsilon.$$

■

Теорема 4. В условиях теоремы 3 выборочное среднее (21) является состоятельной оценкой для математического ожидания μ:

$$\overline{x} \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu,\, T \to +\infty.$$

2.4.2. Выборочная ковариационная функция стационарного в широком смысле временного ряда и ее свойства

Рассмотрим стационарный в широком смысле временной ряд $\{x_t = x(t)\ :\ t \in \mathbb{Z}\}$. Для данного временного ряда существуют математическое ожидание

$$\mu = \mathbf{E}\left\{x_t\right\},\, t \in \mathbb{Z},$$

и ковариационная функция

$$\sigma(\tau) = \mathbf{E}\Big\{(x_t - \mu)\Big(x_{t+\tau} - \mu\Big)\Big\},\, t, \tau \in \mathbb{Z}.$$

Определение. *Выборочной ковариационной функцией* для временного ряда $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, вычисленной по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, *в случае известного математического ожидания* μ называется статистика:

$$c_\tau = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} (x_t - \mu)\Big(x_{t+\tau} - \mu\Big), \qquad (24)$$

где $c_{-\tau} = c_\tau$, $\tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Определение. *Выборочной ковариационной функцией* для временного ряда $x_t = x(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, вычисленной по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, *при неизвестном математическом ожидании* μ называется статистика:

$$c_\tau^* = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} (x_t - \overline{x}) \left(x_{t+\tau} - \overline{x} \right), \qquad (25)$$

где $c_{-\tau}^* = c_\tau^*$, $\tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, а $\overline{x}$ определено в (21).

Исследуем свойства выборочной ковариационной функции (24). Это можно сделать и в общем случае для всех стационарных в широком смысле временных рядов, однако достаточно простыми аналитическими характеристиками она обладает только для гауссовских временных рядов.

Теорема 1. Пусть $x_t = x(t)\,, t \in \mathbb{Z}$, – стационарный гауссовский временной ряд с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\{x_t\}\,, t \in \mathbb{Z},$$

и ковариационной функцией

$$\sigma(\tau) = \mathbf{E}\Big\{(x_t - \mu)\Big(x_{t+\tau} - \mu\Big)\Big\},\ t, \tau \in \mathbb{Z}.$$

Тогда выборочная ковариационная функция c_τ из (24) является несмещенной оценкой для $\sigma(\tau)$, то есть:

$$\mathbf{E}\{c_\tau\} = \sigma(\tau),\ \tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы вычислим математическое ожидание статистики c_τ, определенной в (24):

$$\mathbf{E}\{c_\tau\} = \mathbf{E}\left\{\frac{1}{T-\tau}\sum_{t=1}^{T-\tau}(x_t - \mu)\Big(x_{t+\tau} - \mu\Big)\right\} =$$

$$= \frac{1}{T-\tau}(T-\tau)\mathbf{Cov}\{x_t, x_{t+\tau}\} = \sigma(\tau).$$

■

Теорема 2. Для выборочной ковариационной функции c_τ из (24), вычисленной по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, стационарного гауссовского временного ряда с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\{x_t\},\ t \in \mathbb{Z},$$

и ковариационной функцией

$$\sigma(\tau) = \mathbf{E}\left\{(x_t - \mu)\left(x_{t+\tau} - \mu\right)\right\},\ t, \tau \in \mathbb{Z},$$

справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{Cov}\left\{c_h, c_g\right\} = \frac{1}{T-h}\frac{1}{T-g}\times$$
$$\times \sum_{t_1=1}^{T-h}\sum_{t_2=1}^{T-g}\Big(\sigma\left(t_1 - t_2\right)\sigma\left(t_1 - t_2 + h - g\right) +$$
$$+ \sigma\left(t_1 - t_2 + h\right)\sigma\left(t_1 - t_2 - g\right)\Big), \tag{26}$$

$$\mathbf{D}\left\{c_h\right\} = \frac{1}{T-h}\sum_{\tau=-(T-h-1)}^{T-h-1}\left(1 - \frac{|\tau|}{T-h}\right)\times \tag{27}$$
$$\times\left(\sigma^2(\tau) + \sigma(\tau - h)\sigma(\tau + h)\right),$$

где $h, g \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Доказательство. Вычислим ковариацию

c_h и c_g, $h, g \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$:

$$\mathbf{Cov}\{c_h, c_g\} = \mathbf{E}\{c_h c_g\} - \mathbf{E}\{c_h\}\mathbf{E}\{c_g\} =$$

$$= \mathbf{E}\left\{\frac{1}{T-h}\sum_{t_1=1}^{T-h}\left(x_{t_1} - \mu\right)\left(x_{t_1+h} - \mu\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{T-g}\sum_{t_2=1}^{T-g}\left(x_{t_2} - \mu\right)\left(x_{t_2+g} - \mu\right)\right\} - \sigma(h)\sigma(g) =$$

$$= \frac{1}{T-h}\frac{1}{T-g}\times$$

$$\times\sum_{t_1=1}^{T-h}\sum_{t_2=1}^{T-g}\Big(\mathbf{E}\Big\{\left(x_{t_1} - \mu\right)\left(x_{t_1+h} - \mu\right)\times$$

$$\times\left(x_{t_2} - \mu\right)\left(x_{t_2+g} - \mu\right)\Big\} - \sigma(h)\sigma(g)\Big) =$$

$$= \frac{1}{T-h}\frac{1}{T-g}\sum_{t_1=1}^{T-h}\sum_{t_2=1}^{T-g}\Big(\sigma\left(t_1 - t_2\right)\sigma\left(t_1 - t_2 + h - g\right.$$

$$+\sigma\left(t_1 - t_2 + h\right)\sigma\left(t_1 - t_2 - g\right)\Big).$$

Выше использовано следующее известное свойство: пусть случайные величины x_1, x_2, x_3 и x_4 имеют совместное нормальное распределение, тогда

$$\mathbf{E}\left\{\left(x_1 - \mathbf{E}\left\{x_1\right\}\right)\left(x_2 - \mathbf{E}\left\{x_2\right\}\right)\left(x_3 - \mathbf{E}\left\{x_3\right\}\right)\left(x_4 - \mathbf{E}\right.\right.$$

$$= \mathbf{Cov}\{x_1, x_2\}\, \mathbf{Cov}\{x_3, x_4\} + \mathbf{Cov}\{x_1, x_3\}\, \mathbf{Cov}\{x_2, x$$

$$+ \mathbf{Cov}\{x_1, x_4\}\, \mathbf{Cov}\{x_2, x_3\}.$$

Положив в (26) $g = h$, получаем (27). ■

Теорема 3. Если сходится ряд (20), то выборочная ковариационная функция c_τ из (24), вычисленная по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, стационарного гауссовского временного ряда с математическим ожиданием

$$\mu = \mathbf{E}\{x_t\},\ t \in \mathbb{Z},$$

и ковариационной функцией

$$\sigma(\tau) = \mathbf{E}\Big\{(x_t - \mu)\Big(x_{t+\tau} - \mu\Big)\Big\},\ t, \tau \in \mathbb{Z},$$

является состоятельной в среднеквадратическом оценкой для $\sigma(\cdot)$, и для ее дисперсии справедливо асимптотическое соотношение:

$$\lim_{T \to +\infty} \left(T \mathbf{D}\{c_h\}\right) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \Big(\sigma^2(\tau) + \sigma(\tau - h)\sigma(\tau + h \tag{28}$$

где $h \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Поскольку выборочная ковариационная функция c_T из (24) является, в силу теоремы , несмещенной оценкой, то для доказательства состоятельности в среднеквадратическом достаточно показать, что дисперсия $\mathbf{D}\{c_h\}$ сходится к нулю при $T \to +\infty$.

Заметим, что сходимость ряда (20) влечет сходимость ряда

$$\sum_{\tau=1}^{+\infty} \Big(\sigma(\tau)\Big)^2 < +\infty.$$

Оценивая дисперсию сверху при помощи неравенства Коши – Шварца – Буняковского:

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_i^2 \sum_{j=1}^{N} b_j^2},$$

получаем

$$\mathbf{D}\{c_h\} \le \frac{1}{T-h} b \sum_{\tau=1}^{+\infty} \Big(\sigma(\tau)\Big)^2 \to 0,\ T \to +\infty,\ b = \mathrm{cons}$$

Доказательство соотношения (28) аналогично доказательству соотношения (23) из теоремы . ■

Замечание. Из теоремы (соотношение (27)) видно, что точность оценивания ковариационной функции $\sigma(h)$ «падает» с увеличением лага h. Это связано с уменьшением числа слагаемых в (24). Хуже всего, если значение h приближается к $T-1$.

Замечание. Для оценки (25) можно получить похожие результаты. В этом случае c_h^*, $h \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, будет асимптотически несмещенной и состоятельной.

Замечание. Для состоятельности в среднеквадратическом выборочных среднего и ковариационной функции требовалась сходимость ряда (20), необходимым (но не достаточным!) условием которой является:

$$\sigma(\tau) \to 0,\ \tau \to +\infty.$$

Иными словами, ковариационная функция $\sigma(\tau)$ (корреляционная функция $\rho(\tau) = \sigma(\tau)/\sigma(0)$)

«затухает» с ростом лага τ. Это условие используют на практике как эмпирическое правило для выявления временных рядов, подозрительных на стационарность. Для таких временных рядов выборочная ковариационная (корреляционная) функция должна «затухать».

2.4.3. Статистическое оценивание спектральной плотности

Пусть для стационарного в широком смысле временного ряда $x_t = x(t)]$, $t \in \mathbf{Z}$, существует спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Рассмотрим задачу оценивания спектральной плотности $f(\cdot)$ по реализации $X = \{x_1, \ldots, x_T\}$ длительности $T \geq 1$.

Введем вспомогательные статистики:

$$A(\lambda) = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu) \cos(\lambda t),$$

$$B(\lambda) = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu) \sin(\lambda t)$$

и

$$A^*(\lambda) = \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \overline{x})\cos(\lambda t),$$

$$B^*(\lambda) = \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \overline{x})\sin(\lambda t),$$

где $\overline{x}$ – выборочное среднее (21), $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Определение. *Спектрограммой* называется статистика, определенная по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, в случае известного математического ожидания μ равенством

$$R^2(\lambda) = A^2(\lambda) + B^2(\lambda), \qquad (29)$$

а в случае неизвестного математического ожидания μ равенством

$$R^{*^2}(\lambda) = A^{*^2}(\lambda) + B^{*^2}(\lambda), \qquad (30)$$

где $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Определение. *Выборочной спектральной плотностью* (*периодограммой*) для временного ряда $x_t = x(t)]$, $t \in \mathbf{Z}$,, вычисленной по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, называется статистика, определенная в случае известного математического ожидания μ равенством

$$I(\lambda) = \frac{T}{8\pi} R^2(\lambda), \tag{31}$$

а в случае неизвестного математического ожидания μ равенством

$$I^*(\lambda) = \frac{T}{8\pi} {R^*}^2(\lambda), \tag{32}$$

где $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Замечание. На практике $\lambda \in [-\pi, \pi]$ (аргумент спектральной плотности $f(\lambda)$) не может меняться непрерывно. Поэтому обычно рассматривают сетку:

$$\lambda = \frac{2\pi j}{T}, \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \pm \frac{T}{2},$$

в узлах которой выполняются равенства:

$$A(\lambda) = A^*(\lambda),\ B(\lambda) = B^*(\lambda),\ R^2(\lambda) = {R^*}^2(\lambda).$$

Замечание. Коэффициенты $A(\lambda)$, $A^*(\lambda)$, спектрограмма и выборочная спектральная плотность – четные функции, а коэффициенты $B(\lambda)$, $B^*(\lambda)$ – нечетные.

Теорема. Пусть $\tilde{c}_\tau$, $\tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ – специальным образом отнормированные значения выборочной ковариационной функции (24):

$$\tilde{c}_\tau = \tilde{c}_{-\tau} = \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) c_\tau.$$

Тогда для выборочной спектральной плотности справедливо представление

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \tilde{c}_\tau \cos(\lambda\tau),\ \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{33}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Получим выражение (33) для выборочной спектральной плотности:

$$I(\lambda) = \frac{T}{8\pi} R^2(\lambda) = \frac{T}{8\pi} \Big(A^2(\lambda) + B^2(\lambda)\Big) =$$

$$= \frac{T}{8\pi} \frac{4}{T^2} \left(\sum_{t_1=1}^{T} \sum_{t_2=1}^{T} \Big(x_{t_1} - \mu\Big) \Big(x_{t_2} - \mu\Big) \cos(\lambda t_1) \cos(\lambda\right.$$

$$\left. + \sum_{t_1=1}^{T} \sum_{t_2=1}^{T} \Big(x_{t_1} - \mu\Big) \Big(x_{t_2} - \mu\Big) \sin(\lambda t_1) \sin(\lambda t_2) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi T} \sum_{t_1=1}^{T} \sum_{t_2=1}^{T} \Big(x_{t_1} - \mu\Big) \Big(x_{t_2} - \mu\Big) \cos(\lambda (t_1 - t_2)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi T} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \sum_{t \in S_\tau} (x_t - \mu)\Big(x_{t+\tau} - \mu\Big) \cos(\lambda\tau),$$

где $S_\tau = \Big\{\{1, \ldots, T-\tau\}, \tau \geq 0;\ \{1-\tau, \ldots, T\}, \tau < 0\Big\}$.

Учитывая, что мощность множества S_τ равна $T - |\tau|$, получаем требуемое. ■

Следствие. Выборочная ковариационная функция и выборочная спектральная плотность связаны соотношением

$$\tilde{c}_\tau = \tilde{c}_{-\tau} = \int_{-\pi}^{\pi} I(\lambda) \cos(\lambda\tau) d\lambda, \qquad (34)$$

$\tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.

Доказательство. Справедливость соотношения (34) очевидна и следует из взаимосвязи прямого и обратного преобразований Фурье. ■

Замечание. В случае неизвестного математического ожидания μ результаты аналогичны.

Теорема. Пусть $\{x_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ – стационарный гауссовский временной ряд, имеющий непрерывную спектральную плотность $f(\lambda)$. Тогда выборочная спектральная плотность $I(\lambda)$, определенная в (33), является асимптотически несмещенной, то есть:

$$\mathbf{E}\{I(\lambda)\} \to f(\lambda),\ \lambda \in [-\pi, \pi],\ T \to +\infty, \qquad (35)$$

но несостоятельной оценкой $f(\lambda)$:

$$\mathbf{E}\left\{(I(\lambda) - f(\lambda))^2\right\} \to \begin{cases} 2f^2(\lambda), & \lambda = 0, \pm\pi, \\ f^2(\lambda), & \lambda \neq 0, \pm\pi, \end{cases} \qquad T \to \qquad (36)$$

где $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Доказательство теоремы можно найти в книге «Статистический анализ временных рядов» (Т. Андерсон. М. : Мир, 1976). ■

Из теоремы следует, что выборочная спектральная плотность $I(\lambda)$ для практики неприемлема как оценка спектральной плотности $f(\lambda)$ в силу своей несостоятельности. Чтобы улучшить оценку спектральной плотности, используют так называемую сглаженную спектральную плотность.

Определение. *Сглаженной спектральной плотностью* (*взвешенной спектральной плотностью, сглаженной периодограммой*) называется статистика, определенная по реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 1$, равенством

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \tilde{\omega}_\tau \tilde{c}_\tau \cos(\lambda\tau),\ \lambda \in [-\pi, \pi], \tag{37}$$

где $\tilde{\omega}_\tau$ – специальным образом подобранные веса.

Из определения спектральной плотности:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau) \cos(\lambda\tau),\ \lambda \in [-\pi, \pi],$$

видно, что можно было сразу записать сглаженную (взвешенную) оценку спектральной плотности в виде

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \omega_\tau c_\tau \cos(\lambda\tau),\ \lambda \in [-\pi, \pi],$$

где веса $\{\omega_\tau\}$ связаны с весами $\{\tilde{\omega}_\tau\}$ соотношением

$$\omega_\tau = \tilde{\omega}_\tau \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right).$$

На практике часто используются следующие способы задания весов:

1. При

$$\tilde{\omega}_\tau = 1 \text{ для любого } \tau \in \{0, 1, \ldots, T-1\},$$

   $\widehat{f}(\lambda) = I(\lambda)$ – обычная выборочная спектральная плотность;

2. «Усеченная» выборочная спектральная плотность ($k < T$ – параметр «усечения»):

$$\tilde{\omega}_\tau = \begin{cases} 1, & |\tau| \le k, \\ 0, & |\tau| > k; \end{cases}$$

3. Семейство оценок Парзена ($q = 1;\ 2; \ldots$):

$$\tilde{\omega}_\tau = \begin{cases} 1 - (\frac{\tau}{k})^q, & |\tau| \le k, \\ 0, & |\tau| > k. \end{cases}$$

   В частности, при $q = 1$ имеем оценку Бартлетта, а при $q = 2$ – собственно оценку Парзена.

Для асимптотической несмещенности и состоятельности взвешенной оценки спектральной плотности на практике требуется непрерывность спектральной плотности и выполнение асимптотики

$$T \to +\infty,\ k = k(T) \to +\infty,\ \frac{k}{T} \to 0.$$

3. Статистический анализ однородных цепей Маркова

3.1 Однородные цепи Маркова. Основные понятия и свойства. Условия стационарности

На практике для описания зависимости в последовательности событий (состояний) часто используется однородная цепь Маркова, являющаяся дискретным временным рядом.

Определение. Временной ряд $x_1, \ldots, x_T, x_{T+1}, \ldots$ $\mathcal{S}$, где $\mathcal{S} = \{1, \ldots, L\}$, называется однородной цепью Маркова с пространством состояний $\mathcal{S}$, образованным из $L \geq 2$ состояний, если выполняется так называемое марковское свойство:

$$\mathbf{P}\{x_{t+1} = d_{t+1} | x_t = d_t, x_{t-1} = d_{t-1}, \ldots, x_1 = d_1\} =$$

$$= \mathbf{P}\{x_{t+1} = d_{t+1} | x_t = d_t\} = p_{d_t, d_{t+1}},$$

$$\forall d_t, d_{t+1}, \ldots \in \mathcal{S},\ \forall t = 1, \ldots, T, \ldots . \qquad (38)$$

Для того чтобы однозначно определить однородную цепь Маркова, необходимо задать две вероятностные характеристики:

1) *начальное распределение вероятностей*:

$$\pi_i^{(1)} = \mathbf{P}\{x_1 = i\},\ i \in \mathcal{S}; \quad \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^{(1)} = 1; \quad (39)$$

2) *матрицу вероятностей одношаговых переходов*:

$$P = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}, \quad p_{ij} = \mathbf{P}\{x_{t+1} = j | x_t = i\};$$

$$(40)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} = 1, \quad i \in \mathcal{S}.$$

Распределение вероятностей реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 2$ однородной цепи Маркова (38)–(40) однозначно определяется через

$$\pi^{(1)} = (\pi_i^{(1)})_{i \in \mathcal{S}}$$

и

$$P = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}} :$$

$$
\begin{aligned}
&P_T(d_1, \ldots, d_T) = \mathbf{P}\{x_1 = d_1, \ldots, x_T = d_T\} = \\
&= \mathbf{P}\{x_1 = d_1\} \times \\
&\times \prod_{t=1}^{T-1} \mathbf{P}\{x_{t+1} = d_{t+1} | x_t = d_t, \ldots, x_1 = d_1\} = \\
&= \pi_{d_1}^{(1)} \prod_{t=1}^{T-1} p_{d_t, d_{t+1}}, \quad d_1, \ldots, d_T \in \mathcal{S}.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Цепь Маркова характеризуется также своим *текущим распределением вероятностей* (в момент времени t):

$$
\pi_i^{(t)} = \mathbf{P}\{x_t = i\}, \; i \in \mathcal{S}, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \ldots . \tag{42}
$$

Теорема. В условиях модели (38)–(40) текущее распределение вероятностей (42) может быть найдено из соотношения

$$
\pi^{(t)} = (P^{\mathbf{T}})^{t-1} \pi^{(1)} = (P^{t-1})^{\mathbf{T}} \pi^{(1)}, \tag{43}
$$

где

$$
\pi^{(t)} = (\pi_1^{(t)}, \ldots, \pi_L^{(t)})^{\mathbf{T}},
$$

$t = 1, 2, \ldots, T, \ldots$, а

$$
\pi^{(1)} = \pi^{(t)}|_{t=1} \text{ –}
$$

начальное распределение вероятностей.

Доказательство. Вычислим $\pi_i^{(t)}$, $i \in \mathcal{S}$, через предыдущее:

$$\pi_i^{(t)} = \mathbf{P}\{x_t = i\} =$$

$$= \sum_{j \in \mathcal{S}} \mathbf{P}\{x_{t-1} = j\}\mathbf{P}\{x_t = i | x_{t-1} = j\} =$$

$$= \sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j^{(t-1)} p_{ji},$$

или в матричном виде:

$$\pi^{(t)} = P^{\mathbf{T}} \pi^{(t-1)} = (P^{\mathbf{T}})^2 \pi^{(t-2)} = (P^{\mathbf{T}})^{t-1} \pi^{(1)}.$$

■

Замечание. Матрица

$$P^t = \underbrace{P \cdot \ldots \cdot P}_{t}$$

имеет самостоятельный смысл: ее (i, j)-й элемент – вероятность перехода однородной цепи Маркова из i-го состояния в j-е за t шагов.

Определение. Распределение вероятностей

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_L)^{\mathbf{T}}$$

называется стационарным распределением для однородной цепи Маркова (38)–(40), если выполняется

$$\begin{cases} P^{\mathbf{T}}\pi = \pi; \\ \sum\limits_{i\in\mathcal{S}} \pi_i = 1. \end{cases} \tag{44}$$

Теорема. Пусть для однородной цепи Маркова (38)–(40) начальное распределение вероятностей $\pi^{(1)}$ совпадает со стационарным из (44):

$$\pi^{(1)} = \pi.$$

Тогда данная цепь Маркова является стационарной, и текущее распределение вероятностей в любой момент времени совпадает со стационарным:

$$\pi^{(t)} = \pi,\ t = 1, 2, \ldots, T, \ldots\,. \tag{45}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.Подставим в (43)

$$\pi^{(1)} = \pi$$

и воспользуемся соотношением (44):

$$\pi^{(t)} = (P^{\mathbf{T}})^{t-1}\pi = (P^{\mathbf{T}})^{t-2}P^{\mathbf{T}}\pi = (P^{\mathbf{T}})^{t-2}\pi = \pi.$$

■

Замечание. Если в условиях теоремы начальное распределение $\pi^{(1)}$ не совпадает со стационарным распределением (44), то при некоторых, весьма общих, ограничениях на матрицу вероятностей одношаговых переходов

$$P = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$$

для текущего распределения (42) выполняется:

$$\pi_i^{(t)} \to \pi_i,\ t \to +\infty, \quad i \in \mathcal{S}.$$

3.2 Метод максимального правдоподобия для оценивания матрицы вероятностей одношаговых переходов и стационарного распределения вероятностей

Пусть имеется реализация

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 2$ однородной цепи Маркова (38)–(40). Ставится задача оценить матрицу вероятностей одношаговых переходов P и стационарное распределение π. Распределение вероятностей $\pi^{(1)}$ начального состояния оценить невозможно, поскольку оно встречается один раз и для него невозможно «набрать статистику». Для построения оценок $\widehat{P}$, $\widehat{\pi}$ по реализации X воспользуемся методом максимального правдоподобия, основываясь на распределении вероятностей для X из (41).

Введем следующие обозначения:

$$n_{ij} = \sum_{t=1}^{T-1} \delta_{x_t,i}\delta_{x_{t+1},j} - \tag{46}$$

число одношаговых переходов из состояния i в состояние j ($i, j \in \mathcal{S}$), встретившихся в реализации $X = \{x_1, \ldots, x_T\}$ длительности $T \geq 2$;

$$\begin{gathered} n_i = \sum_{j \in \mathcal{S}} n_{ij}, \\ \tilde{n}_i = \sum_{t=1}^{T} \delta_{x_t,i}, \\ \tilde{n}_i = n_i + \delta_{x_T,i},\ i \in \mathcal{S}. \end{gathered} \tag{47}$$

Теорема. Пусть для реализации

$$X = \{x_1, \ldots, x_T\}$$

длительности $T \geq 2$ однородной цепи Маркова (38)–(40) выполняется условие:

$$n_i > 0,\ i \in \mathcal{S}.$$

Тогда оценка максимального правдоподобия (МП-оценка) матрицы вероятностей одношаговых переходов задается соотношением

$$\widehat{P} = (\widehat{p}_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}, \quad \widehat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}. \tag{48}$$

Доказательство. С учетом (41) построим логарифмическую функцию правдоподобия по $X = \{x_1, \ldots, x_T\}$ длительности $T \geq 2$:

$$l_T(X; P) = \ln\Bigl(\pi^{(1)}_{x_1} \prod_{t=1}^{T-1} p_{x_t, x_{t+1}}\Bigr) =$$

$$= \ln \pi^{(1)}_{x_1} + \sum_{t=1}^{T-1} \ln p_{x_t, x_{t+1}} = \ln \pi^{(1)}_{x_1} + \sum_{i,j \in \mathcal{S}} n_{ij} \ln p_{ij},$$

где статистики $n_{ij} = n_{ij}(X)$, $i, j \in \mathcal{S}$, определены в (46).

Согласно (40), элементы матрицы вероятностей одношаговых переходов должны удовлетворять условию нормировки, а сама экстремальная задача по построению МП-оценки будет иметь вид

$$\begin{cases} l_T(X;P) = \ln \pi^{(1)}_{x_1} + \sum\limits_{i,j\in\mathcal{S}} n_{ij} \ln p_{ij} \to \max\limits_{\{p_{ij}\}_{i,j\in\mathcal{S}}}; \\ \sum\limits_{j\in\mathcal{S}} p_{ij} = 1, \quad i \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

Задача (49) распадается на $L \geq 2$ отдельных задач ($i \in \mathcal{S}$):

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in\mathcal{S}} n_{ij} \ln p_{ij} \to \max\limits_{\{p_{ij}\}_{j\in\mathcal{S}}}; \\ \sum\limits_{j\in\mathcal{S}} p_{ij} = 1. \end{cases}$$

Решим каждую задачу по отдельности. Для i-й задачи запишем функцию Лагранжа:

$$l^{(i)}_T(X;\{p_{ij}\}_{j\in\mathcal{S}},\lambda_i) = \sum_{j\in\mathcal{S}} n_{ij} \ln p_{ij} + \lambda_i \Big(\sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij} - 1 \Big), \tag{50}$$

где λ_i – множитель Лагранжа.

Необходимым условием максимума функции Лагранжа (50) является равенство первых производных нулю, где производные вычисляются по переменным $\{p_{ij}\}_{j\in\mathcal{S}}$ и множителю λ_i:

$$\frac{\partial}{\partial p_{ij}} l^{(i)}_T(X;\{p_{ij}\}_{j\in\mathcal{S}},\lambda_i) = \frac{n_{ij}}{p_{ij}} + \lambda_i = 0, \quad j \in \mathcal{S};$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} l_T^{(i)}(X; \{p_{ij}\}_{j \in \mathcal{S}}, \lambda_i) = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} - 1 = 0.$$

Из первых L уравнений найдем

$$p_{ij} = -\frac{n_{ij}}{\lambda_i}, \quad j \in \mathcal{S},$$

и подставим в последнее уравнение:

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} \left(-\frac{n_{ij}}{\lambda_i} \right) - 1 = 0,$$

откуда с учетом обозначений (47)

$$\lambda_i = -\sum_{j \in \mathcal{S}} n_{ij} = -n_i,$$

и окончательно имеем $\widehat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$, что совпадает с (48). ■

Чтобы оценить стационарное распределение вероятностей $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_L)^{\mathbf{T}}$, согласно подстановочному принципу и определению (44), достаточно решить следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} \widehat{P}^{\mathbf{T}} \widehat{\pi} = \widehat{\pi}; \\ \sum\limits_{i \in \mathcal{S}} \widehat{\pi}_i = 1, \quad \widehat{\pi} = (\widehat{\pi}_1, \ldots, \widehat{\pi}_L)^{\mathbf{T}}, \end{cases} \tag{51}$$

где $\widehat{P} = (\widehat{p}_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$ – МП-оценка матрицы вероятностей одношаговых переходов из (48).

Оценку $\widehat{\pi} = (\widehat{\pi}_1, \ldots, \widehat{\pi}_L)^{\mathbf{T}}$, определяемую (51), также иногда называют МП-оценкой, однако это неверно.

Для оценивания стационарного распределения вероятностей интуитивно можно предложить и другой метод, построив оценку

$$\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_L)^{\mathbf{T}}; \quad \tilde{\pi}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \delta_{x_t,i} = \frac{\tilde{n}_i}{T}, \quad i \in \mathcal{S}. \tag{52}$$

Если начальное распределение совпадает со стационарным, то из теоремы (соотношение (45)) следует, что

$$\mathbf{E}\{\tilde{\pi}_i\} = \pi_i, \quad i \in \mathcal{S}.$$

Иначе, исходя из замечания к теореме , можно считать, что

$$\mathbf{E}\{\tilde{\pi}_i\} \to \pi_i,\ T \to +\infty, \quad i \in \mathcal{S}.$$

Однако оценка (52) также не является МП-оценкой в традиционном смысле, поскольку даже при $\pi^{(1)} = \pi$, когда цепь Маркова стационарна: $\pi^{(t)} = \pi$, ее отсчеты $\{x_t\}_{t=1}^T$, вообще говоря, зависимы между собой, а оценка (52) является МП-оценкой вероятностей состояний лишь для схемы независимых испытаний.

3.3 Проверка гипотез о цепи Маркова

По реализации ВР $X = \{x_1, \ldots, x_T\}$ длительности $T \geq 2$ на практике часто необходимо выяснить, зависимы или независимы отсчеты $\{x_t\}_{t=1}^T$.

В условиях модели (38)–(40) это приводит к задаче проверки следующих гипотез:

$$\begin{array}{lcl} H_0 & : & p_{ij} = \pi_j, \quad i, j \in \mathcal{S}, \\ H_1 & : & \exists i, j \in \mathcal{S} : \; p_{ij} \neq \pi_j, \end{array} \tag{53}$$

Гипотеза H_0 означает, что вероятность перехода в j-е состояние ($j \in \mathcal{S}$) не зависит от предыдущего состояния:

$$\mathbf{P}\{x_{t+1} = j | x_t = i\} = \pi_j, \; \forall i \in \mathcal{S},$$

то есть исследуемая однородная цепь Маркова является схемой независимых испытаний.

Проверка гипотез H_0, H_1 основана на следующем критерии, который использует МП-оценку (46)–(48) для матрицы вероятностей одношаговых переходов, полученную в теореме :

$$\begin{cases} H_0 & : \ \gamma_T \leq \Delta, \\ H_1 & : \ \gamma_T > \Delta, \end{cases} \tag{54}$$

где статистика критерия γ_T является обобщением χ^2-статистики:

$$\gamma_T = \sum_{i,j \in \mathcal{S}} \frac{(n_{ij} - n_i n_j / T)^2}{n_i n_j / T}.$$

Определим порог критерия Δ. Используя теорему и свойства МП-оценок, можно показать, что в условиях H_0 статистика γ_T имеет при $T \to +\infty$ χ^2-распределение с

$$(L^2 - L) - (L - 1) = (L - 1)^2$$

степенями свободы. Зададим уровень значимости

$$\alpha = \mathbf{P}\{H_1 | H_0\} \in (0, 1).$$

Тогда

$$\Delta = F^{-1}_{\chi^2_{(L-1)^2}}(1 - \alpha) -$$

квантиль уровня $1 - \alpha$ от χ^2-распределения с $(L - 1)^2$ степенью свободы.

Для однородной цепи Маркова решаются и другие задачи по проверке гипотез. Статистики критериев для решения таких задач, как и в задаче проверки на независимость, являются обобщениями χ^2-статистики.

Например, пусть проверяются гипотезы о том, что матрица вероятностей одношаговых переходов

$$P = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$$

совпадает с наперед заданной матрицей

$$P^o = (p^o_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}} :$$

$$\begin{array}{lcl} H_0 & : & P = P^o, \\ H_1 & : & P \neq P^o \; (\exists i, j \in \mathcal{S} : \; p_{ij} \neq p^o_{ij}). \end{array} \qquad (55)$$

Тогда H_0 принимается, если

$$\gamma_T = \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{S} \\ p^o_{ij} \neq 0}} \frac{(n_{ij} - n_i p^o_{ij})^2}{n_i p^o_{ij}} \leq \Delta,$$

$\Delta = F^{-1}_{\chi^2_{m-L}}(1-\alpha)$ – порог критерия, определяемый по уровню значимости

$$\alpha = \mathbf{P}\{H_1 | H_0\} \in (0, 1)$$

через квантиль χ^2-распределения с

$$m - L$$

степенями свободы, где

$$m = L^2 - \sum_{i,j \in \mathcal{S}} \delta_{p^o_{ij},0} \text{ –}$$

число ненулевых вероятностей одношаговых переходов в гипотетической $(L \times L)$-матрице $P^o = (p^o_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$.