ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. Конспект лекций

Е.С. Чеб

Белорусский государственный университет

2 февраля 2021 г.

Определение метрического пространства

Определение -2.1

Пусть X – произвольное непустое множество. Говорят, что на X задано *расстояние (метрика)*, *векторным (линейным) пространством* над полем P, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие единственное число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее аксиомам

1. $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x);$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$

Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*. Если множество $A \subset X$, то пара (A, ρ) образует подпространство метрического пространства X.

Пример -2.1

Пусть на не пустом множестве X метрика определена следующим образом

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Такое пространство называется метрическим пространством изолированных точек.

Примеры метрических пространств

Пример -2.2

Рассмотрим множество X всевозможных упорядоченных наборов из m вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Тогда для любых двух элементов x, y множества X расстояние между ними определим формулой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}. \tag{1}$$

Множество X с метрикой (1) порождает евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ с евклидовой геометрией. Евклидова геометрия изучается в школьном курсе.

Пример -2.3

На том же множестве всевозможных упорядоченных наборов из m вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определим метрику по формуле расстояние между ними определим формулой

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i|. \tag{2}$$

Метрика (2) называется *чебышевской или равномерной* метрикой, на $\mathbb{Z}^m$ ее еще называют *метрикой решетки или метрикой хода короля*.

Примеры метрических пространств

Пример -2.4

Теперь определим метрику таким образом

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i| \tag{3}$$

Метрика (3) называется *манхэттенской или метрикой городских кварталов*, ее еще называют *метрикой прямого угла*. Название манхэттенское расстояние получило от правил уличной планировки города Манхэттена. С этой метрикой связана манхэттенская геометрия, которая не зависит от отражения относительно оси координат, но зависит от вращения.

Пример -2.5

На множестве X расстояние можно определить формулой

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p},\ \ p\geq 1. \tag{4}$$

Примеры метрических пространств

Пример -2.6

На множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ определим расстояние следующим образом. Если $x, y \in \mathbb{Q}$ и $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$. Если $x \neq y$, то разность $x - y$ представима в виде
$$x - y = p^k \frac{m}{n},$$
где p – простое число, m, n, k – целые числа, причем m и n не делятся на p. Тогда
$$\rho(x, y) = \frac{1}{p^k}. \tag{5}$$
Такая метрика называется *p-адической*. Для такой метрики неравенство треугольника выполняется в более сильной форме, а именно
$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}.$$
Метрику, обладающую таким свойством, называют *неархимедовой*. p-адическая метрика является неархимедовой.

Применение метрических пространств

Метрические пространства играют основную роль в большинстве разделов математики. Рассмотрим некоторые из них.
Пусть A – некоторое множество, $A^\star$ – семейство всех конечных последовательностей элементов из A, допускающая пустую последовательность. Будем интерпретировать A как алфавит некоторого языка. Тогда элементы из A естественно называть *буквами*, а элементы из $A^\star$ – *словами*. *Редакторской операцией* на $A^\star$ называется преобразование слова, состоящее из исключения одной буквы, либо вставки буквы в слово, или в замене одной буквы на другую. Наименьшее число редакторских операций, необходимых для перехода от одного слова к другому, называется *расстоянием Левинштейна*. Расстояние Левинштейна определяет метрику на $A^\star$.

Применение метрических пространств

Рассмотрим задачу о передаче информации по коммуникациям. В компьютерной технике информация передается с помощью последовательности битов, принимающих два значения 0 или 1. Биты будем рассматривать в качестве букв. Рассмотрим всевозможные упорядоченные последовательности битов длины N. Обозначим это множество через I^N. Мощность этого множества 2^N. В этом множестве выделим подмножество A^N, состоящее из значащих слов. Множество A^N является метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$, при этом x_i, y_i принимают два значения 0 или 1. Данная метрика называется *расстоянием Хемминга.*
Расстояние Хемминга используется для построения кодов с исправлением ошибок.

Применение метрических пространств

В задачах кластерного анализа и классификации используется статистическое расстояние или *расстояние Махаланобиса*, с помощью которого определяется сходство образов и классов. Оно отличается от расстояния Евклида тем, что учитывает дисперсии переменных и определяется по формуле

$$d_M(A, B) = \sqrt{(x - y)^\top S^{-1}(x - y)},$$

где $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N)$ элементы пространства $\mathbb{R}^N$, S – матрица ковариации. Расстояние Махаланобиса можно определить как меру несходства двух случайных величин x и y из одного распределения вероятностей с матрицей ковариации S.