ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. Конспект лекций

Е.С. Чеб

Белорусский государственный университет

3 февраля 2021 г.

Определение векторного пространства

Пусть P – поле действительных или комплексных чисел (поле скаляров).

Определение -2.1

Непустое множество E называется *векторным (линейным) пространством* над полем P, если для любых двух его элементов x и y определена их сумма $x+y$ – элемент того же множества и для любого $x \in E$ и любого $\alpha \in P$ определено произведение αx, являющееся элементом множества E, причем эти операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $x+y=y+x$;
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3. в E существует элемент θ такой, что для любого $x \in E$ справедливо равенство $x+\theta=x$;
4. для каждого $x \in E$ существует элемент $-x \in E$, что выполняется равенство $x+(-x)=\theta$;
5. $\alpha \cdot (\beta x)=(\alpha\beta)\cdot x$;
6. $1\cdot x=x, 0\cdot x=\theta$;
7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
8. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Размерность векторных пространств

Определение -2.2

Векторное пространство называют *m-мерным*, если в нем существует m линейно независимых векторов, а всякие $m+1$ векторов линейно зависимы. Набор этих линейно независимы векторов называется *базисом* векторного пространства E, а m – его *размерностью*. Размерность пространства обозначается символом $\dim E$.

Определение -2.3

Векторное пространство E называется *бесконечномерным*, если для каждого натурального m в E существует m линейно независимых векторов.

Определение -2.4

Векторные пространства E и E^* называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое согласовано с операциями в E и E^* соответственно.

Теорема -2.1

Все конечномерные векторные пространства изоморфны между собой.

Бесконечномерное векторное пространство не изоморфно никакому конечномерному.

Определение нормированного пространств

Определение -2.5

Векторное пространство E называется *нормированным векторным пространством*, если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствии неотрицательное число $\|x\| \in \mathbb{R}$ (норма x) так, что выполнены следующие аксиомы:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ в том и только том случае, когда $x = \theta$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \alpha \in P$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \qquad (1)$$

Метрика ρ называется *инвариантной относительно сдвига*, если выполняется равенство

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y);$$

положительно однородной, если

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y).$$

В нормированном пространстве формула $\rho(x, y) = \|x - y\|$ задает инвариантную относительно сдвига положительно однородную метрику.

Примеры нормированных пространств

Пример -2.1

Пространство $\mathbb{R}^m$: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$,

$$\|x\|_c = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2}; \ \|x\|_k = \max_{1\le i\le m} |x_i|; \ \|x\|_0 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|; \ \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}, p \ge 1 \tag{2}$$

Пример -2.2

$C[a, b]$:

$$\|x\|_c = \max_{a\le t\le b} |x(t)|. \tag{3}$$

Пример -2.3

$C^{(n)}[a, b]$:

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a\le t\le b} |x^{(k)}(t)|. \tag{4}$$

Примеры нормированных пространств

Пример -2.4

$\mathscr{L}_p\,[a, b]$:

$$\|x\|_p = \Big(\int\limits_a^b |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}, \quad p \geq 1. \tag{5}$$

Пример -2.5

m, $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$

$$\|x\| = \sup_i |x_i|. \tag{6}$$

Пример -2.6

m, $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{1/p}, p \geq 1. \tag{7}$$

Свойства нормы

Лемма -2.1

Пусть E – нормированное векторное пространство. Тогда для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ выполняется обобщенное неравенство треугольника

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|.$$

Лемма -2.2

Пусть E – нормированное векторное пространство. Тогда для любых элементов $x, y \in E$ справедливо обратное неравенство треугольника

$$\|x - y\| \geq \Big| \|x\| - \|y\| \Big|.$$

Эквивалентность норм

E – НВП, нормы: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$.

Определение -2.6

Говорят, что *норма* $\|\cdot\|_1$ *подчинена* $\|\cdot\|_2$, если существует $\alpha > 0$ такое, что для любого $x \in E$ $\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$.

Очевидно, что $\|x\|_p = (\int\limits_a^b |x(t)|^p \,\mathrm{d}t)^{1/p}$ подчинена $\|x\|_c = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ в пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций.
Две нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *эквивалентны*, если существуют $\alpha, \beta > 0$ такие, что для всех $x \in E$ выполняется $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Теорема -2.2 ((об эквивалентных нормах))

Во всяком конечномерном нормированном векторном пространстве все нормы эквивалентны.