Итерационный метод вращений (метод Якоби) решения полной проблемы собственных значений

Вычисление всех собственных значений и собственных векторов вещественной симметричной матрицы можно свести к отысканию такой ортогональной матрицы T, для которой произведение

$$\Lambda = T^{-1}AT = T^T AT$$

представляет диагональную матрицу. Диагональные элементы матрицы Λ будут искомыми собственными значениями, а столбцы матрицы T – столбцами координат собственных векторов, соответствующих этим собственным значениям. При приближенном вычислении матриц Λ и T строят последовательности матриц

$$A_0 = A, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots \quad A_k, \quad \ldots \quad \to \Lambda,$$

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots \quad T_k, \quad \ldots \quad \to T$$

по формулам

$$A_{k+1} = T_{ij}^T A_k T_{ij}, \quad T_{k+1} = T_k T_{ij},$$

где T_{ij} – матрица простых вращений. На k-м шаге принимают $\Lambda \approx A_k$, $T \approx T_k$.

Матрицу T_{ij} строят следующим образом. В матрице A_k выбирают наибольший по модулю недиагональный элемент $a_{ij}^{(k)}$ (***оптимальный элемент***) и строят матрицу вращения

$$T_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\varphi & \cdots & -\sin\varphi & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & \sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-я строка} \\ \\ j\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad i\text{-й} \qquad\quad j\text{-й} & \end{array}.$$

Т.к. необходимо обратить в нуль элемент $a_{ij}^{(k+1)}$ матрицы A_{k+1}, то $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ нужно вычислять по формулам

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)}, \ \sin\varphi = \mathrm{sign}\mu\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)},$$

где

$$\mu = tg2\varphi = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}, \quad a_{ii}^{(k)} \neq a_{jj}^{(k)}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Если $a_{ii}^{(k)} = a_{jj}^{(k)}$, то $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

При вычислении элементов матрицы $A_{k+1} = T_{ij}^T A_k T_{ij}$, которая будет отличаться от матрицы A_k только элементами i-го и j-го столбцов и i-й и j-й строк, удобно пользоваться формулами:

$$a_{ml}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ml}^{(k)} & m, l \neq i, j; \\ a_{mi}^{(k)} \cos\varphi + a_{mj}^{(k)} \sin\varphi, & m = i, l \neq i, j \text{ или } l = i, m \neq i, j; \\ -a_{mi}^{(k)} \sin\varphi + a_{mj}^{(k)} \sin\varphi, & m = j, l \neq i, j \text{ или } l = j, m \neq i, j; \\ a_{ii}^{(k)} \cos^2\varphi + 2a_{ij}^{(k)} \sin\varphi\cos\varphi + a_{jj}^{(k)} \sin^2\varphi, & m = l = i; \\ a_{ii}^{(k)} \sin^2\varphi - 2a_{ij}^{(k)} \sin\varphi\cos\varphi + a_{jj}^{(k)} \cos^2\varphi, & m = l = j; \\ 0, & m = i, l = j \text{ или } m = j, l = i. \end{cases}$$

Можно показать, что при каждом вращении увеличивается сумма квадратов диагональных элементов, соответственно уменьшается сумма квадратов недиагональных элементов матрицы, откуда и следует сходимость к диагональной матрице. Элементы, которые однажды обратились в нуль, при последующих шагах снова могут стать ненулевыми.

Пример. Методом вращений найти собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

К данной симметричной матрице будем применять итерационный метод вращений. Условимся, что оптимальный элемент a_{ij} будем брать в наддиагональной части матрицы A, и все вычисления будем проводить точно (т.е. рассматриваем идеальный процесс).

1-я итерация. Выбираем оптимальный элемент $a_{12} = -3$ (максимальный по модулю в условленной части матрицы). Следовательно, фиксируем индексы $i = 1$, $j = 2$. Вычисляем

$$\mu = tg 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-6}{1-1} \to -\infty.$$

Такое значение $\mu = tg 2\varphi$ указывает на то, что угол $2\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\varphi = -\frac{\pi}{4},\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$T_{12} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее будем находить элементы матрицы $A_1 = T_{12}^T A T_{12}$. Матрица $B = AT_{12}$ отличается от матрицы A только элементами 1-го и 2-го столбцов. Матрица $A_1 = T_{12}^T B$ отличается от матрицы B только строками с номерами 1 и 2. Находим:

$$A_1 = T_{12}^T A T_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & -1 \\ -\frac{4}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица A подобна матрице A_1.

2-я итерация. Выбираем в матрице A_1 оптимальный элемент $a_{13}^{(1)} = -\sqrt{2}$ (максимальный по модулю в наддиагональной части матрицы). Фиксируем индексы $i = 1$, $j = 3$.

Вычисляем

$$\mu = tg 2\varphi = \frac{2a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)} - a_{33}^{(1)}} = \frac{-2\sqrt{2}}{4-5} = 2\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+8}}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\sin\varphi = \mathrm{sign}\mu \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+8}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$T_{13} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

Найдем элементы матрицы A_2:

$$A_2 = T_{13}^T A_1 T_{13} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{6}{\sqrt{3}} \\ 0 & -2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уже после второй итерации (это не норма, а, будем считать, везение) получена диагональная матрица

$$\Lambda = A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

подобная исходной матрице A, в силу чего можно утверждать, что собственными значениями матрицы A являются числа

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 6.$$

Найдем матрицу T:

$$T = T_{12}T_{13} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

Она имеет своими столбцами собственные векторы матрицы A, т.е. векторы

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

образуют собственные пары с числами $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 6$, соответственно.

Ответ: Собственные значения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 6$ и соответствующие им собственные векторы $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$.

Задача. Методом вращений найти собственные значения и соответствующие собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$