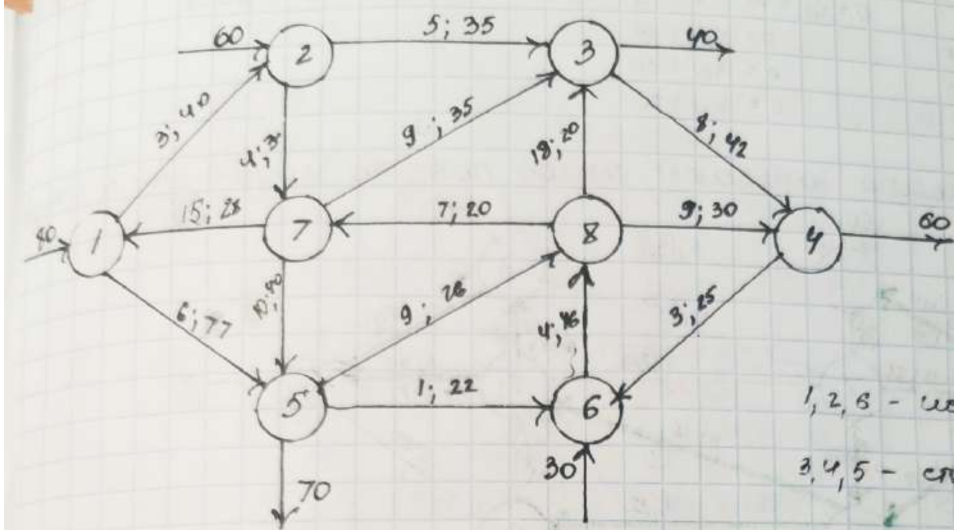
3.5(3.6)



1, 2, 6 – источники

3, 4, 5 – стоки

7, 8 – нейтральные узлы

① Условие общего баланса: $\sum_{i=1}^{6} a_i = 80+60-40-60+30-70=0.$

Условие выполняется, задача закрытая. Матем. модель:

$$3x_{12}+6x_{15}+5x_{23}+4x_{27}+8x_{34}+3x_{46}+x_{56}+9x_{58}+4x_{68}+9x_{73}+15x_{71}+10x_{75}+$$
$$+18x_{83}+9x_{84}+7x_{87}\to \min$$

$$\begin{cases}
+x_{12}+x_{15}-x_{71} = 80\\
-x_{12}+x_{23}+x_{27} = 60\\
-x_{23}+x_{34}-x_{73}-x_{83} = -40\\
-x_{34}+x_{46}-x_{84} = -60\\
-x_{15}+x_{56}-x_{75}+x_{58} = -70\\
-x_{46}-x_{56}+x_{68} = 30\\
+x_{71}-x_{27}+x_{73}+x_{75}-x_{87} = 0\\
+x_{83}+x_{84}-x_{58}-x_{68}+x_{87} = 0
\end{cases}$$

Ограничения: $x_{12} \le 40$ $\quad x_{23} \le 35$ $\quad x_{34} \le 42$ $\quad x_{56} \le 22$ $\quad x_{68} \le 46$

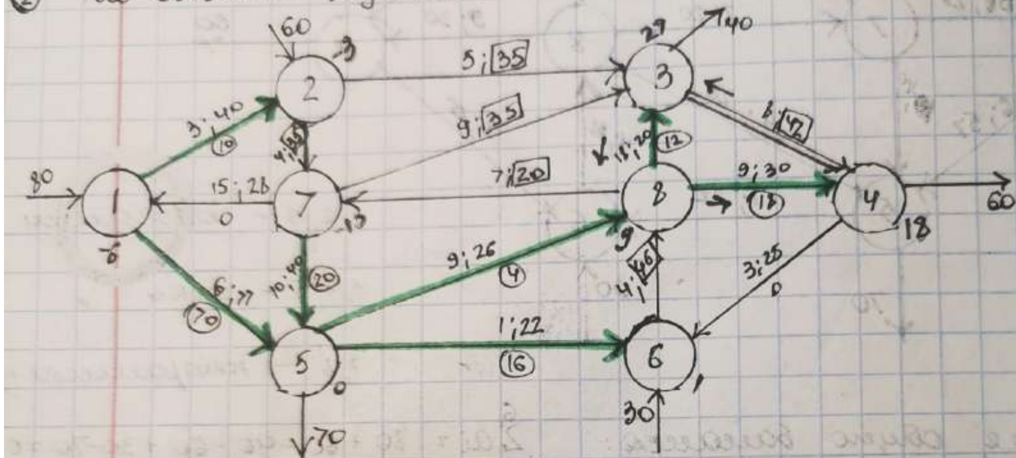
$x_{15} \le 7$ $\quad x_{27} \le 35$ $\quad x_{46} \le 25$ $\quad x_{58} \le 26$

$x_{71} \le 28$ $\quad x_{83} \le 20$

$x_{73} \le 35$ $\quad x_{84} \le 30$

$x_{75} \le 40$ $\quad x_{87} \le 20$

② Начальный допустимый сетевой поток по методу проб и ошибок.



Прямой метод потенциалов, итерация №1.

1) $u_5 = 0$, $\quad u_i - u_j = -c_{ij}$, $(i, j) \in U_Б$

2) $\Delta_{ij} = -c_{ij} - (u_i + u_j)$

$\Delta_{23} = -5 - (-3 + 27) = -29$ (-) $\qquad \Delta_{87} = -7 - (9 - 10) = -6$ (-)

$\Delta_{27} = -4 - (-3 - 10) = 9$ (+)

$\Delta_{34} = -6 - (27 + 18) = -53$ (-)

$\Delta_{46} = -3 - (18 + 30) = -51$ (+)

$\Delta_{68} = -4 - (30 + 9) = -43$ (-)

$\Delta_{71} = -15 - (-10 - 6) = 1$ (-)

$\Delta_{73} = -9 - (-10 + 27) = -26$ (-)

3) $(i_0, j_0) = (3, 4)$, тк $|\Delta_{i_0 j_0}| = \max|\Delta_{ij}|$

4) $j_* = i_0$, тк $x_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$

5) $\theta_{ij} = \begin{cases} d_{ij} - x_{ij}, & (i,j) \text{ прямая} \\ x_{ij}, & (i,j) \text{ обратная} \end{cases}$ $(i,j) \in$ циклу

$\theta_{34} = 42$, $\theta_{83} = 12$, $\theta_{84} = 12$

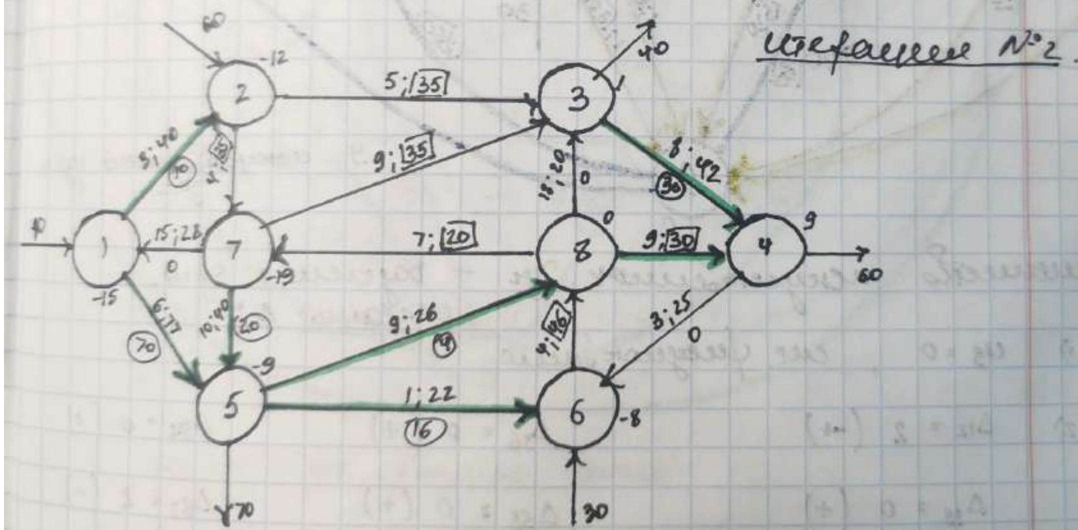
$\theta^0 = \theta_{83} = 12 \Rightarrow (i_*, j_*) = (8, 3)$

6) $x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta^0, & (i,j) \text{ прямая} \\ x_{ij} - \theta^0, & (i,j) \text{ обратная} \\ x_{ij} & (i,j) \text{ не из цикла} \end{cases}$

$x_{34} = 30$, $x_{83} = 0$, $x_{84} = 30$

$U_Б = \{(1,2), (1,5), (7,5), (5,8), (5,6), (3,4), (8,4)\}$

Итерация №2.



2) $\Delta_{23} = -5 - (-12 + 1) = 6$ (+)

$\Delta_{27} = -4 - (-12 - 19) = 27$ (+)

$\Delta_{46} = -3 - (9 + 8) = -20$ (+)

$\Delta_{68} = -4 - (-8 + 0) = 4$ (+)

$\Delta_{71} = -15 - (-19 + 15) = -11$ (+)

$\Delta_{73} = -9 - (-19 + 1) = 9$ (+)

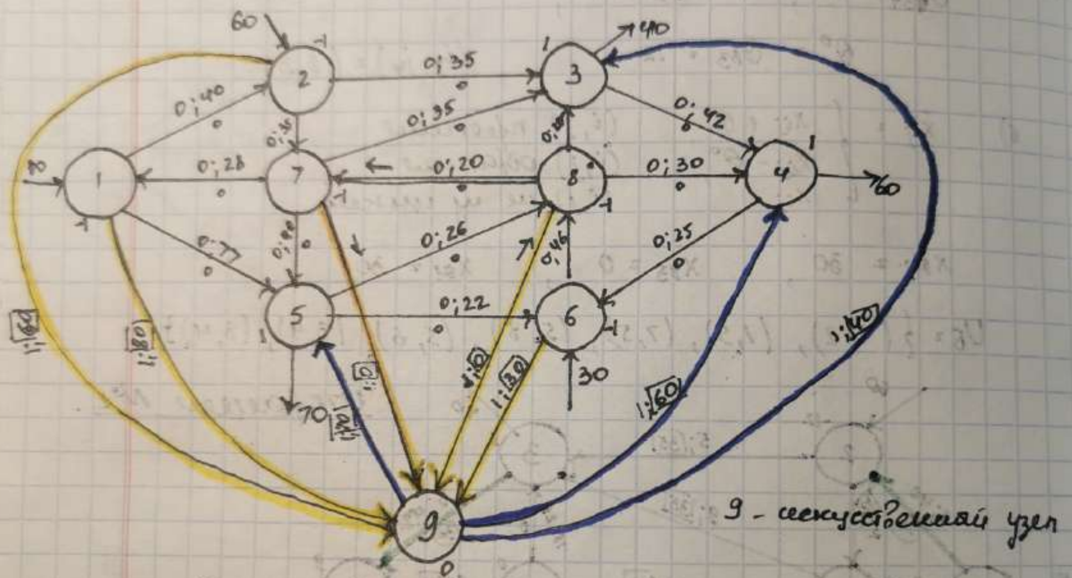
$\Delta_{87} = -7 - (0 - 19) = 12$ (+)

$\Delta_{83} = -18 - (0 + 1) = -19$ (+)

Условие оптимальности выполнено, оптимальный базисный сетевой поток построен; $\varphi_{min} = 1212$.

$U_Б = \{(1,2), (1,5), (5,6), (5,8), (7,5), (8,4); (3,4)\}$

③ Задача 1-ой фазы (≥ 2 итерации)



9 - искусственный узел

множество искусственных дуг — базисные дуги.

Итерация №1

1) $u_9 = 0$, см. рисунок выше

2) $\Delta_{12} = 2$ (−)

$\Delta_{15} = 0$ (+)

$\Delta_{23} = 0$ (+)

$\Delta_{27} = 2$ (−)

$\Delta_{34} = -2$ (+)

$\Delta_{46} = 0$ (+)

$\Delta_{56} = 0$ (+)

$\Delta_{58} = 0$ (+)

$\Delta_{68} = 2$ (−)

$\Delta_{71} = 2$ (−)

$\Delta_{73} = 0$ (+)

$\Delta_{83} = 0$ (+)

$\Delta_{84} = 0$ (+)

$\Delta_{87} = 2$ (−)

3) $(i_0, j_0) = (8, 7)$

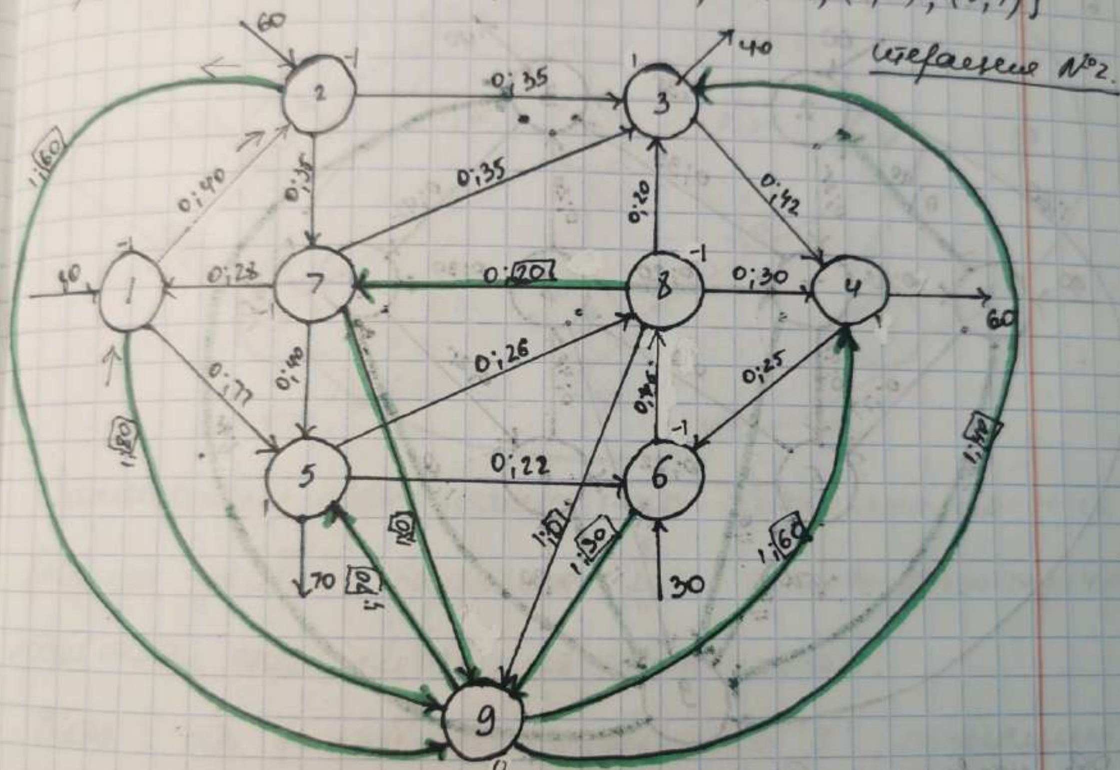
4) т.к. $x_{i_0 j_0} = 0$, $i_0 \to j_0$

5) $\theta_{87} = 20$ $\quad \theta_{79} = 0$ $\quad \theta_{89} = 0$

$\theta^0 = \theta_{89} = 0$ $\quad (i_*, j_*) = (8, 9)$

6) $U_Б = \{(1,9), (2,9), (9,3), (9,4), (9,5), (6,9), (7,9), (8,7)\}$

Итерация №2.



1) $u_9 = 0$, см. рисунок выше

2) $\Delta_{12} = 2$ (−)

$\Delta_{15} = 0$ (+)

т.к. на Δ_{12} условие оптимальности не выполняется, и $|\Delta_{12}| = \max|\Delta_{ij}|$, то ↓

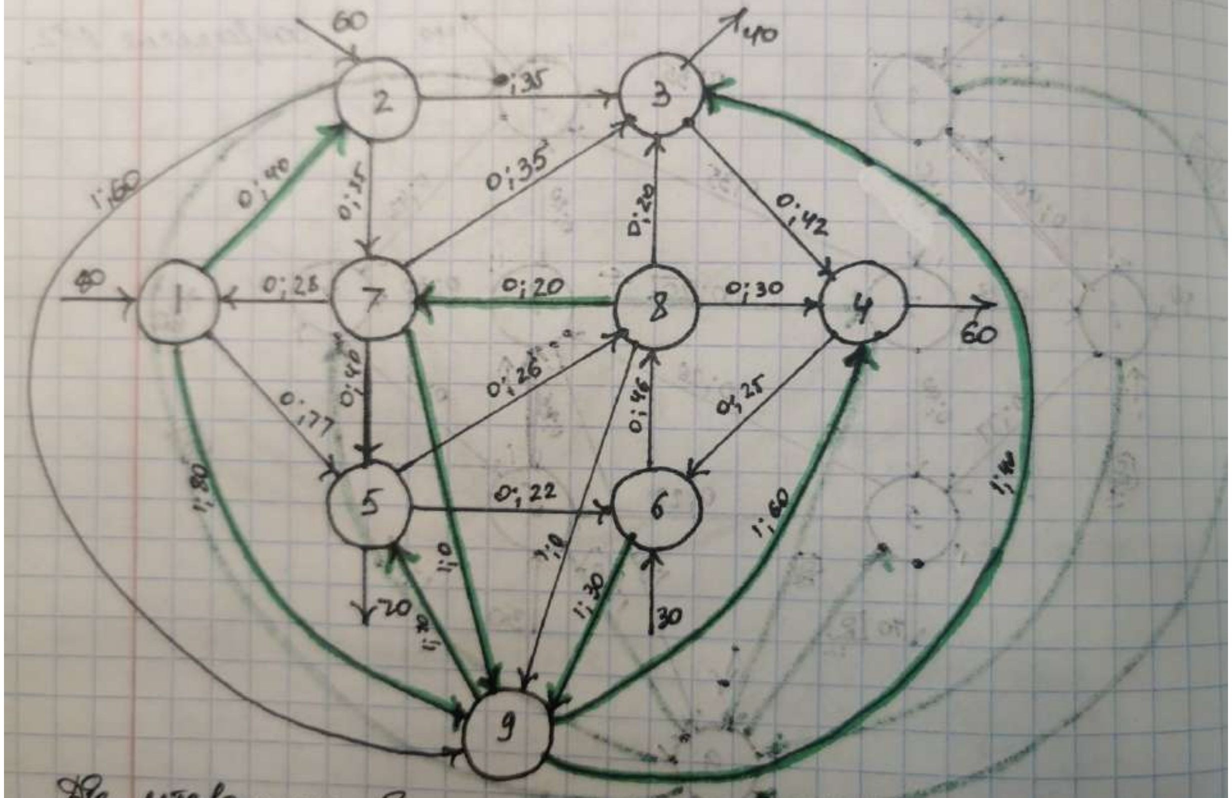
3) $(i_0, j_0) = (1, 2)$

4) $x_{i_0 j_0} = 0, \quad i_0 \to j_0$

5) $\Theta_{12} = 40, \quad \Theta_{29} = 0, \quad \Theta_{19} = 80$

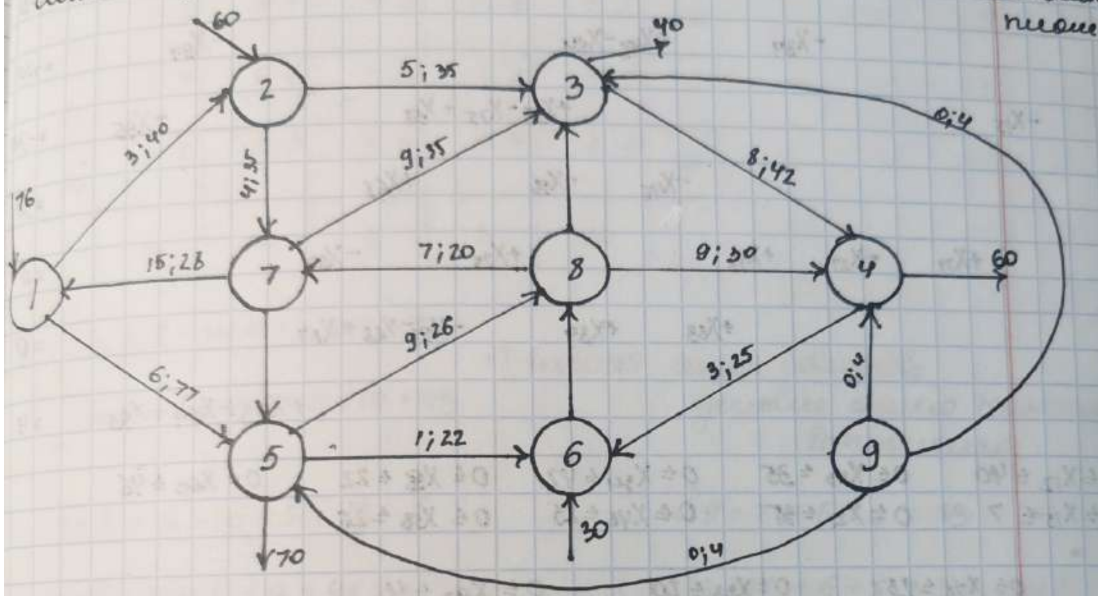
$\Theta^0 = \Theta_{29} = 0 \qquad (i_*, j_*) = (2, 9)$

6) $U_Б = \{(1,9), (1,2), (9,5), (7,9), (8,7), (6,9), (9,4), (9,3)\}$



Две итерации выполнены.

Вспомогательная для 3.5 задача, дерево сети, физический смысл дуговых потоков (вспомогательных)? оптимальный план.



Уменьшаем предложение 1-ого источника на 4 ед.

Проверим условие баланса: $\sum_{i=1}^{6} a_i = 76+60-40-60+30-70 = -4 \neq 0$, модель открытая, спрос превышает предложение.

Введём в сеть фиктивного поставщика '9', получим вспомогательные дуговые потоки x_{9i}, $i=\overline{3,5}$, физическим смыслом которых будет обозначение недостатка поставок i-ому потребителю, $i=\overline{3,5}$.

Математическая модель данной задачи будет иметь следующий вид:

$$
\begin{cases}
+x_{12} + x_{15} - x_{17} = 76 \\
-x_{12} + x_{23} + x_{27} = 60 \\
-x_{23} + x_{34} - x_{73} - x_{83} - x_{93} = -40 \\
-x_{34} + x_{46} - x_{84} - x_{94} = -60 \\
-x_{15} + x_{56} - x_{75} + x_{58} - x_{95} = -70 \\
-x_{46} - x_{56} + x_{68} = 30 \\
+x_{71} - x_{27} + x_{73} + x_{75} - x_{87} = 0 \\
+x_{83} + x_{84} - x_{58} - x_{68} + x_{87} = 0 \\
+x_{93} + x_{94} + x_{95} = 4
\end{cases}
$$

$0 \le x_{12} \le 40$ $\quad 0 \le x_{23} \le 35$ $\quad 0 \le x_{34} \le 42$ $\quad 0 \le x_{56} \le 22$ $\quad 0 \le x_{68} \le 46$

$0 \le x_{15} \le 7$ $\quad 0 \le x_{27} \le 35$ $\quad 0 \le x_{46} \le 25$ $\quad 0 \le x_{58} \le 26$

$0 \le x_{71} \le 28$ $\quad 0 \le x_{83} \le 20$ $\quad 0 \le x_{93} \le 4$

$0 \le x_{73} \le 35$ $\quad 0 \le x_{84} \le 30$ $\quad 0 \le x_{94} \le 4$

$0 \le x_{75} \le 40$ $\quad 0 \le x_{87} \le 20$ $\quad 0 \le x_{95} \le 4$

4.8

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9 4	8 6	6 8	10 10	5 2	8
A_2	7 3	15 4	4 3	6 9	9 5	24
A_3	5 4	6 6	6 13	5 2	10 1	7
A_4	8 2	5 3	7 4	4 10	8 9	10
	10	10	8	11	10	

① $\sum_{i=1}^{4} a_i = 8 + 24 + 7 + 10 = 49$

$\sum_{i=1}^{5} b_i = 10 + 10 + 8 + 11 + 10 = 49$

⇒ имеет место равенство, условие общего баланса выполнено.

$9 + 8 + 6 + 10 + 5 = 38 > 8$

$7 + 15 + 4 + 6 + 9 = 41 > 24$

$5 + 6 + 6 + 5 + 10 = 32 > 7$

$8 + 5 + 7 + 4 + 8 = 32 > 10$

$9 + 7 + 5 + 8 = 29 > 10$

$8 + 15 + 6 + 5 = 34 > 10$

$6 + 4 + 6 + 7 = 23 > 8$

$10 + 6 + 5 + 4 = 25 > 11$

$5 + 9 + 10 + 8 = 32 > 10$

⇓

условие существования плана перевозок выполнено

Математическая модель.

$$4x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 10x_{14} + 2x_{15} + 3x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 9x_{24} + 5x_{25} + 4x_{31} + 6x_{32} + 13x_{33} + 2x_{34} + x_{35} + 2x_{41} + 3x_{42} + 4x_{43} + 10x_{44} + 9x_{45} \to \min$$

условия ниже

⇓

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 8 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 24 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 7 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 10 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 10 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 10 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 8 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 11 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 10
\end{cases}
$$

② Начальный базисный план по методу проб и ошибок.

Не менее двух итераций прямого метода потенциалов.

9	B_1 −4	B_2 −5	B_3 −8	B_4 −10	B_5 −2	
0 A_1	9 4 0 (+) 0	8 6 0 (+) −1	6 8 4	1 10 10 − 1	2 5 2 + 3	8 ~~7~~
1 A_2	7 3 2	15 4 10	$\boxed{4}$ 3 4 (+) 4	6 9 8	9 5 0 (+) −4	24
1 A_3	5 4 0 (+) −1	6 6 0 (+) −2	6 13 0 (+) −6	5 5 2 + 0 (−) 7	7 10 1 − 7	7
0 A_4	$\boxed{8}$ 2 8 (+) 2	5 3 0 (−) 2	7 4 0 (−) 4	4 10 2	8 9 0 (+) −7	10
	10	10	8	11	10	

Получение в клетках оте начального базисного плана.

Итерация №1.

1) $u_i + v_j = -c_{ij}$, $(i,j) \in U_Б$

$u_1 = 0$, см. табл.

2) $\Delta_{ij} = -c_{ij} - (u_i + v_j)$, $(i,j) \in U_Н$

3) Условие оптимальности нарушается на $(3,4), (4,2), (4,3)$

Условие оптимальности: $\begin{cases} \Delta_{ij} \le 0, & x_{ij} = 0 \\ \Delta_{ij} \ge 0, & x_{ij} = d_{ij} \end{cases}$ $(i,j) \in U_Н$

4) $|\Delta_{i_0 j_0}| = \max|\Delta_{ij}| = 7$

$(i_0, j_0) = (3,4)$ $\quad$ $+$, $x_{i_0 j_0} = 0$

$-$, $x_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$

5) $\theta_{ij} = \begin{cases} d_{ij} - x_{ij}, & (i,j) \to '+' \\ x_{ij}, & (i,j) \to '-' \end{cases}$ # имеет знак

$\theta^0 = \min\limits_{(i,j) \in цикл} \theta_{ij} = 1$

$(i_*, j_*) = (1,4)$

6) $\bar{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta^0, & (i,j) \to '+' \\ x_{ij} - \theta^0, & (i,j) \to '-' \\ x_{ij}, & (i,j) \text{ не из цикла} \end{cases}$ $(i,j) \in U$

$\bar{x}_{34} = 1$

$\bar{x}_{14} = 0$

$\bar{x}_{15} = 4$

$\bar{x}_{35} = 6$

Итерация №2

u \ v	B_1 6	B_2 5	B_3 −3	B_4 0	B_5 1	
−3 A_1	9 4 / 0 (+) −7	8 6 / 0 (+) −8	4 6 8 / − (4)	10 10 / 0 (+) −7	1 5 2 / + (4)	8
−9 A_2	7 3 / (2)	15 4 / (10)	$\boxed{4}$ 3 / 4 (+) 11	6 9 / (8)	9 5 / 0 (−) 3	24
−2 A_3	5 4 / 0 (+) 0	6 6 / 0 (+) −9	6 13 / 0 (+) −6	4 5 2 / + (1)	6 10 1 / − (6)	7
−10 A_4	$\boxed{8}$ 2 / 8 (+) 0	5 3 / 0 (+) 0	7 7 4 / + 0 (−) 9	2 4 10 / − (2)	8 9 / 0 (+) −2	10
	10	10	8	11	10	

1) $v_3 = 0$, # результаты вычислений в таблице.

2) формулы в итерации №1, вычисления выше

3) Условия оптимальности нарушаются на

$(2, 5)$, $(4, 3)$.

4) $(i_0, j_0) = (4, 3)$

5) $\theta^0 = 1$

$(i_*, j_*) = (1, 5)$

6) $\bar{x}_{43} = 1$

$\bar{x}_{44} = 1$

$\bar{x}_{34} = 2$

$\bar{x}_{35} = 5$

$\bar{x}_{15} = 5$

$\bar{x}_{13} = 3$

③

Результат после 2-ух итераций:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9 4 0	8 6 0	6 8 1	10 10 0	$\boxed{5}$ 2 5	8
A_2	7 3 2	15 4 10	$\boxed{14}$ 3 4	6 9 8	9 5 0	24
A_3	5 4 0	6 6 0	6 13 0	5 2 2	10 1 5	7
A_4	$\boxed{8}$ 2 8	5 3 0	7 4 1	4 10 1	8 9 0	10
	10	10	8	11	10	

③ Задача 1-ой фазы и 2 итерации метода потенциалов.

Добавим искусственный пункт производства A_{m+1}:

$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j$, #искусственная строка

и искусственного "потребителя" B_{n+1}:

$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i$, #искусственный столбец.

	-1 B_1	-1 B_2	-1 B_3	-1 B_4	-1 B_5	0 B_6	
-1 A_1	9 9 0 + 0 2	8 0 0 2	6 0 0 2	10 0 0 2	5 0 0 2	8 8 1 − 8	8
-1 A_2	7 0 0 2	15 0 0 2	4 0 0 2	6 0 0 2	9 0 0 2	24 1 24	24
-1 A_3	5 0 0 2	6 0 0 2	6 0 0 2	5 0 0 2	10 0 0 2	7 1 7	7
-1 A_4	8 0 0 2	5 0 0 2	7 0 0 2	4 0 0 2	8 0 0 2	10 1 10	10
0 A_5	10 10 1 − 10	10 1 10	8 1 8	11 1 11	10 1 10	49 49 0 + 0	49
	10	10	8	11	10	49	

Итерация №1

1) $u_i + v_j = -c_{ij}$ (см. табл.) $u_5 = v_6 = 0$

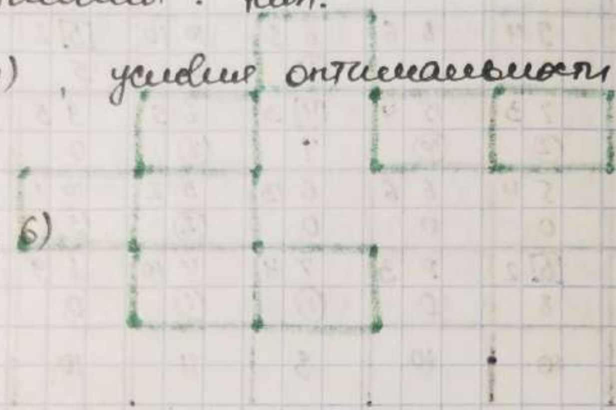
2) $\Delta_{ij} = -c_{ij} - (u_i + v_j)$

Оценки отмечены ? табл.

3) $(i_0, j_0) = (1, 1)$, условие оптимальности нарушено.

4)

5) $\theta^0 = 8$



$(i_*, j_*) = (1, 6)$

6) $\bar{X}_{11} = 8$

$\bar{X}_{16} = 0$

$\bar{X}_{51} = 2$

$\bar{X}_{56} = 8$

Итерация №2

	-1 B_1	-1 B_2	-1 B_3	-1 B_4	-1 B_5	0 B_6	
-1 A_1	9 0 8	8 0 0 0	6 0 0 0	10 0 0 0	5 0 0 0	X	8
-1 A_2	7 0 0 2	15 15 0 + 0 2	4 0 0 2	6 0 0 2	9 0 0 2	24 24 1 − 24	24
-1 A_3	5 0 0 2	6 0 0 2	6 0 0 2	5 0 0 2	10 0 0 2	7 1 7	7
-1 A_4	8 0 0 2	5 0 0 2	7 0 0 2	4 0 0 2	8 0 0 2	10 1 10	10
0 A_5	10 1 2	10 10 1 − 10	8 1 8	11 1 11	10 1 10	41 48 0 + 8	48
	10	10	8	11	10	48	

1) $u_5 = v_6 = 0$, см. табл.

2) Вычисляются оценки ? табл.

3)-4) $(i_0, j_0) = (2,2)$

5) $\theta^0 = 10$

$(i_*, j_*) = (5,2)$

6) $\bar{x}_{22} = 10$

$\bar{x}_{26} = 4$

$\bar{x}_{52} = 0$

$\bar{x}_{56} = 18$

Результат после 2-ух итераций:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	9 0 8	8 0 0	6 0 0	10 0 0	5 0 0	╳	8
A_2	7 0 0	15 0 10	4 0 0	6 0 0	9 0 0	24 1 4	24
A_3	5 0 0	6 0 0	6 0 0	5 0 0	10 0 0	7 1 7	7
A_4	8 0 0	5 0 0	7 0 0	4 0 0	8 0 0	10 1 10	10
A_5	10 1 2	╳	8 1 8	11 1 11	10 1 18	43 0 8	43
	10	10	8	11	10	43	

④ Увеличим предложение на 5 ед(A_5).

Построим вспомогательную задачу для решения исходной задачи.

Построим базисное мн-во клеток.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	9 4 (64)	6 6 (-16)	6 8 (-9)	10 10 (-4)	5 2 (-17)	5 0 (-10)	8
A_2	7 3 (-15)	$\boxed{15}$ 4	$\boxed{4}$ 3	$\boxed{16}$ 9	$\boxed{9}$ 5	$\boxed{5}$ 0	24
A_3	5 4 (-25)	$\boxed{6}$ 6	$\boxed{6}$ 13	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{5}$ 0	7
A_4	8 2 (-14)	$\boxed{5}$ 3	$\boxed{7}$ 4	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{8}$ 9	$\boxed{5}$ 0	15
	10	10	8	11	10	5	

Базисное кол-во клеток выбираем произвольно, в данном случае - 1-ый столбец и 1-ая строка. Переменные x_{i6}, $i=\overline{1,4}$ - нереализованная продукция для оптимального плана x^0.

5) Удалить верхние ограничения на перевозки. Построить начальный план перевозок по правилам:

- северо-западного угла:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4 (8)	6	8	10	2	~~8~~
A_2	3 (2)	4 (10)	3 (8)	9 (4)	5	24 ~~22~~ ~~12~~ ~~4~~
A_3	4	6	13	2 (7)	1	~~7~~
A_4	2	3	4	10 (0)	9 (10)	10
	10	10	8	11	10	

◦ минимального элемента:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	6	8	10 5	2 3	8 5
A_2	3	4 10	3 8	9 6	5	24 16 8
A_3	4	6	13	2	1 7	7
A_4	2 10	3	4	10	9	10
	10	10	8	11 6	10 3	

◦ двойного предпочтения:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	6	8	10 5	2 3	8 5
A_2	3	4 10	3 8	9 6	5	24 16 8
A_3	4	6	13	2	1 7	7
A_4	2 10	3	4	10	9	10
	10	10	8	11 5	10 3	

5.2

$X \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое мн-во;

A – матрица $m \times n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Показать выпуклость мн-в.

а) $AX = \{z : z = Ax,\ x \in X\}$

$z_1, z_2 \in AX$; $\quad z_1 = Ax_1, \quad z_2 = Ax_2$

$\alpha \in [0, 1]$

$z_1 = Ax_1, \quad z_2 = Ax_2$

Тогда: $\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2 = \alpha A x_1 + (1-\alpha) A x_2 =$

$= A(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) = A x_3$; где $x_3 \in X$, т.к. X выпукло,

$\Rightarrow A x_3 \in AX$, $\Rightarrow AX$ выпукло.

б) $\alpha X = \{\alpha x : x \in X\}$

$x_1, x_2 \in X$

$\alpha \in [0, 1]$

$\alpha^* \cdot \alpha x_1 + (1-\alpha^*) \cdot \alpha x_2 = \alpha(\alpha^* x_1 + (1-\alpha^*) x_2) = \alpha x_3$,

где $x_3 \in X$ в силу выпуклости X,

$\Rightarrow \alpha x_3 \in \alpha X$, $\Rightarrow \alpha X$ выпукло.

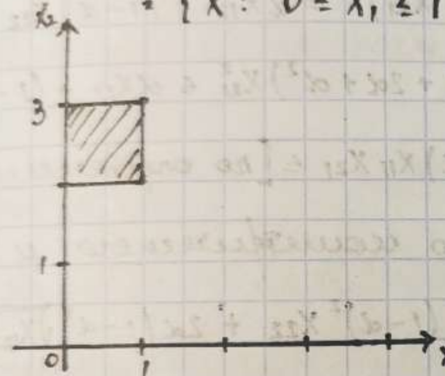
5.3

$X_1 = \{x : x_1 = 0,\ 0 \le x_2 \le 1\}$

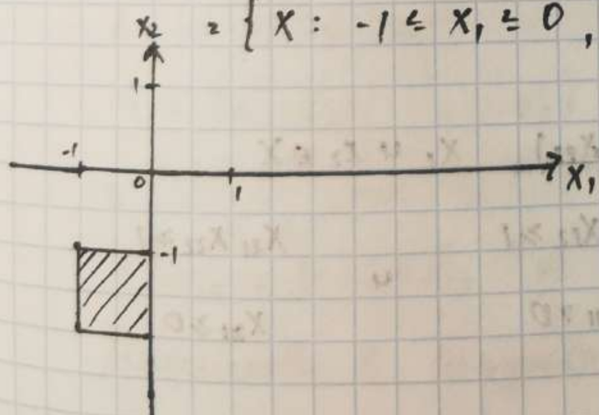
$X_2 = \{x : 0 \le x_1 \le 1,\ x_2 = 2\}$

Описать мн-ва $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$.

$$X_1 + X_2 = \{x : x_1 + x_2\ ;\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\} =$$
$$= \{x : 0 \le x_1 \le 1,\ 2 \le x_2 \le 3\}$$



$$X_1 - X_2 = \{x : x = x_1 - x_2\ ;\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\} =$$
$$= \{x : -1 \le x_1 \le 0,\ -2 \le x_2 \le -1\}$$



Доказать выпуклость множеств в $\mathbb{R}^2$

- $X = \{x : x_1^2 \le x_2\}$

$x_1 = (x_{11}, x_{12})$, $x_2 = (x_{21}, x_{22})$, x_1 и $x_2 \in X$

В силу принадлежности к X: $x_{11}^2 \le x_{12}$, $x_{21}^2 \le x_{22}$

Докажем: $(\alpha x_{11} + (1-\alpha) x_{21})^2 \le \alpha x_{12} + (1-\alpha) x_{22}$, $\alpha \in [0;1]$

$\alpha^2 x_{11}^2 + 2\alpha(1-\alpha) x_{11} x_{21} + (1 - 2\alpha + \alpha^2) x_{21}^2 \le \alpha x_{12} + (1-\alpha) x_{22}$

$\alpha^2 x_{11}^2 + (1-\alpha)^2 x_{21}^2 + 2\alpha(1-\alpha) x_{11} x_{21} \le$ [по определению мн-ва и связи среднего геометрического и арифметического] $\le \alpha^2 x_{12} + (1-\alpha)^2 x_{22} + 2\alpha(1-\alpha)\sqrt{x_{12} y_{12}} \le$

$\le \alpha^2 x_{12} + (1-\alpha)^2 x_{22} + \alpha(1-\alpha)(x_{12} + x_{22}) = \alpha x_{12} + (1-\alpha) x_{22} \in X$

Множество X выпукло.

- $X = \{x : x_1 x_2 \ge 1,\ x_1 > 0\}$

$x_1 = (x_{11}, x_{12})$, $x_2 = (x_{21}, x_{22})$, x_1 и $x_2 \in X$

Следовательно: $x_{11} x_{12} \ge 1$, $x_{11} > 0$ и $x_{21} x_{22} \ge 1$, $x_{21} \ge 0$

$\alpha \in [0, 1]$.

$(\alpha x_{11} + (1-\alpha) x_{21})(\alpha x_{12} + (1-\alpha) x_{22}) =$

$= \alpha^2 x_{11} x_{12} + \alpha(1-\alpha) x_{11} x_{22} + \alpha(1-\alpha) x_{12} x_{21} + (1-\alpha)^2 x_{21} x_{22} \ge$

[по определению множества] $\ge \alpha^2 + \alpha(1-\alpha)(x_{11} x_{22} + x_{12} x_{21}) + (1-\alpha)^2 \ge$

$\geq$ [все та же связь геометрического и арифметического среднего] $\geq \alpha^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sqrt{x_{11}x_{12}x_{21}x_{22}} + (1-\alpha)^2 \geq \alpha^2 + 2\alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2 = 1,$

$\Rightarrow \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X \Rightarrow$ Множество X выпукло.

- $X = \{x : \sin x_1 \geq x_2,\ 0 \leq x_1 \leq \pi\}$

$x_1 = (x_{11}, x_{12}) \qquad x_2 = (x_{21}, x_{22}), \quad x_1$ и $x_2 \in X$

В силу определения X: $\sin x_{11} \geq x_{12}$ и $\sin x_{21} \geq x_{22}$

$0 \leq x_{11} \leq \pi \qquad 0 \leq x_{21} \leq \pi$

$\alpha \in [0,1]$

$\sin(\alpha x_{11} + (1-\alpha)x_{21}) \geq \alpha \sin x_{11} + (1-\alpha)\sin x_{21} \geq$ [по определению множества] $\geq \alpha x_{12} + (1-\alpha)x_{22} \Rightarrow \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X, \Rightarrow$

Множество X выпукло.

- $X = \{x : e^{x_1} \leq x_2\}$

$x_1 = (x_{11}, x_{21}) \qquad x_2 = (x_{21}, x_{22}), \quad x_1$ и $x_2 \in X$

$e^{\alpha x_{11} + (1-\alpha)x_{21}} = e^{\alpha x_{11}} e^{(1-\alpha)x_{21}} \leq \alpha e^{x_{11}} + (1-\alpha)e^{x_{21}} \leq$

$\leq \alpha x_{12} + (1-\alpha)x_{22} \Rightarrow \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X \Rightarrow$

Множество X выпукло.

c. 6.16

$f = x_1^2 + x_2^2 + 6 \to min$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 7 \le 0 \\ x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$g_1(x) = -x_1 + 3x_2 - 7 \le 0$

$g_2(x) = x_1 + x_2 \le 0$

Удостоверимся, что полученная задача – задача ВП:

$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$ $\Rightarrow f$ выпукла

$g_1(x)$, $g_2(x)$ линейны, $\Rightarrow$ выпуклы. $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ - выпукло (пересечение полупространств)

Имеем задачу ВП.

Функция Лагранжа:

$F(x, \lambda, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + 6 + \lambda_1(-x_1 + 3x_2 - 7) + \lambda_2(x_1 + x_2)$, $x \in Q$, $\lambda \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 - \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2x_2 + 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \lambda \geq 0 \\ \lambda_1(-x_1 + 3x_2 - 7) = 0 & x \in Q \\ \lambda_2(x_1 + x_2) = 0 & g_i(x) \le 0,\ i = 1, 2 \end{cases}$$

Рассмотрим условие дополняющей нежесткости:

а) ограничение пассивно (<0) б) ограничение активно ($=0$)

- $g_1 < 0$, $g_2 = 0$ # g_1 пассивно, g_2 активно

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ 2x_1 - \lambda_2 = 0 \\ -2x_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Наблюдаем линейную зависимость, следовательно решения нет.

- $g_1 = 0$, $g_2 < 0$ # g_1 активно, g_2 пассивно

$\lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda_1 = 0 \\ 2x_2 + 3\lambda_1 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 7 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3x_2 - 7 \\ 6x_2 - 14 - \lambda_1 = 0 \\ 2x_2 + 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \qquad \lambda_1 = -1.4$$

Противоречие с условием неотрицательности.

- $g_1 < 0$, $g_2 < 0$ # g_1 и g_2 пассивны

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$

$x^* = (0, 0)$

$g_1(x^*) = -7 < 0$

$g_2(x^*) = 0$

$\Rightarrow$ $x^* = x^0$, x^* - оптимальный план

$f(x^0) = 6$, $x^* = (0, 0)$

5.20

Записать уравнение гиперплоскости, строго отделяющей точку $x^* = (3; 2; 1; 1)$ от множества X, к-рое задается системой:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 9x_4 \le 7 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 \le 1 \\ 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 \le 5 \end{cases}$$

Проверим, принадлежит ли x^* множеству X:

$$\begin{cases} 3\cdot 3 + 2 - 1 - 9\cdot 1 = 1 \le 7 \quad (+) \\ -3 - 2 + 3\cdot 1 - 4\cdot 1 = -6 \le 1 \quad (+) \\ 4\cdot 2 - 5\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5 \le 9 \quad (+) \\ 2\cdot 3 - 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 9\cdot 1 = 11 \le 5 \quad (-) \end{cases}$$

Уравнение гиперплоскости, строго отделяющей точку x^* от множества X:

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 = \alpha \qquad 0 \le \alpha \le 6$$

Записать уравнение гиперплоскости, опорной к мн-ву

$X = \{x: \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{25} \le 1\}$ в точке $x^* = (\frac{6}{5}, -\frac{12}{5}, 0)$. Если

$x^* \notin X$, записать уравнение отделяющей гиперплоск.

Проверим, принадлежит ли x^* мн-ву X:

$$f(x^*) = \frac{1}{4}\cdot\frac{36}{25} + \frac{1}{9}\cdot\frac{144}{25} = 1, \Rightarrow x^* \in \partial X.$$

Определим выпуклость $f(x)$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} x_1/2 \\ 2x_2/9 \\ 2x_3/25 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 2/25 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Delta_1 = 1/2 > 0 \\ \Delta_2 = 1/9 > 0 \\ \Delta_3 = 2/225 > 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow f(x)$ строго выпукла, $\Rightarrow X$ строго выпукло.

Опорной гиперплоскостью к X в x^* будет касательная к границе:

$$\partial X = \{x: f(x) = 1\} \text{ в } x^*, \Rightarrow \frac{\partial f'(x^*)}{\partial x}(x - x^*) = 0; \quad \frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{8}{15}, 0\right)$$

$$\left(\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}, 0\right)\begin{pmatrix} x_1 + 6/5 \\ x_2 - 12/5 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{3}{5}x_1 + \frac{18}{25} - \frac{8}{5}x_2 + \frac{96}{25} = 0$$

$$\frac{3}{5}x_1 - \frac{8}{5}x_2 + \frac{114}{25} = 0$$

$$3x_1 - 8x_2 + \frac{114}{5} = 0$$

5.23

Записать уравнение гиперплоскости, разделяющей множества $X_1 = \{x : x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0\}$, $X_2 = \{x : x_2 \leq \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - \frac{9}{2}} + \frac{1}{2},\ x_1 < \frac{9}{2}\}$

Проверим расположение мн-в относительно друг друга.

$$x_2 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{4}\frac{1}{x_1 - 9/2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1 + 2(x_1 - 9/2)}{4(x_1 - 9/2)} \Leftrightarrow$$

$$4x_1 - 18 = x_1(1 + 2x_1 - 9) \Leftrightarrow 4x_1 - 18 = x_1 + 2x_1^2 - 9x_1 \Leftrightarrow$$

$$2x_1^2 - 12x_1 + 18 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 6x_1 + 9 = 0.$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1/3.$$

Множества X_1 и X_2 касаются в точке $x^* = (3; 1/3)$

Разделяющая гиперплоскость – касательная к графику функции $x_2 = \frac{1}{x_1}$ в точке x^*.

$$\left.\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right|_{x = x^*} = \left.-\frac{1}{x_1^2}\right|_{x = x^*} = -\frac{1}{9}$$

$$x_2 = -\frac{1}{9}x_1 + b, \qquad \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}\cdot 3 + b \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

Уравнение разделяющей X_1 и X_2 гиперплоскости:

$$\boxed{\frac{1}{9}x_1 + x_2 - \frac{2}{3} = 0}$$

5.26

Исследовать, является ли f выпуклой (вогнутой) на заданном множестве X, или указать точки из X, в окрестности к-рых f ни выпукла, ни вогнута.

$$f(x) = 5x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 4x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3 + 1; \quad X = \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 10x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 10 > 0$

$\Delta_2 = 9 > 0$ $\Rightarrow$ f строго выпукла.

$\Delta_3 = 36 > 0$

8.6

Найти точки локального безусловного минимума (максимума).

$f(x) = x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 - x_2)^2$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 4x_1 + 4x_2 = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12x_2^2 - 4 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2^3 - 4x_2 + 4x_1 = 0$

Стационарные точки:

$x_1 = (0, 0), \quad x_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad x_3 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

- $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x = x_1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta_1 < 0, \ \Delta_2 = 0$, $\Rightarrow$ неопределенно

- $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x = x_2} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0$, $\Rightarrow$ x_2 – точка локального минимума

- $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x = x_3} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0$, $\Rightarrow$ x_3 – точка локального минимума

9.6

Решить задачу нелинейного программирования и, если возможно, проиллюстрировать решение графически.

$f(x) = x_1 x_2 \to extr$

$x_1^2 + 4x_2^2 \ge 4$ $\qquad$ $-x_1^2 - 4x_2^2 + 4 \le 0$

1) $g(x) = -x_1^2 - 4x_2^2 + 4$, нелинейна,

2) $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $g(x)$ не является выпуклой.

3) $\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -8x_2 \end{pmatrix}$ линейно независимы с нулевым вектором.

Условие регулярности выполнено.

Запишем ф-цию Лагранжа:

$$F(x, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(-x_1^2 - 4x_2^2 + 4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 - 8\lambda x_2 = 0 \\ \lambda(-x_1^2 - 4x_2^2 + 4) = 0 \end{cases}$$

1) $g < 0$, $\lambda = 0$

$x^* = (0, 0)$,

Однако $g(x^*) > 0$

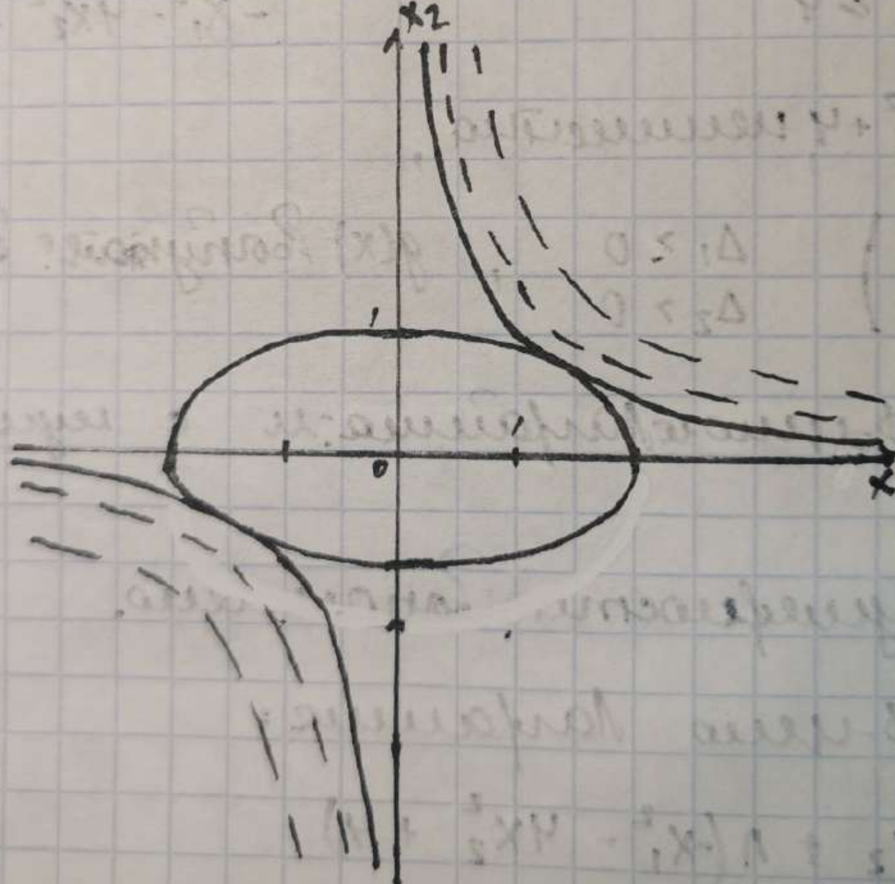
Точка не рассматривается далее.

2) $g = 0$

$$\begin{cases} x_2 - \lambda x_1 = 0 \\ x_1 - 8\lambda x_2 = 0 \\ -x_1^2 - 4x_2^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$x_1^*: \; x_1 = -\sqrt{2}, \; x_2 = -\sqrt{2}/2, \; \lambda = 1/4$

$x_2^*: \; x_1 = \sqrt{2}, \; x_2 = \sqrt{2}/2, \; \lambda = 1/4$



x_1^* – т. min

x_2^* – т. max

Решить задачу о рюкзаке.

$c = 55$

i	1	2	3	4	5
c_i	18	35	11	27	12
p_i	6	14	4	4	3

Математическая модель:

$$f(x) = 6x_1 + 14x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 \to \min$$

$$18x_1 + 35x_2 + 11x_3 + 27x_4 + 12x_5 \geq 55$$

$$x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1,5}$$

p_i/c_i	$1/3$	$2/5$	$4/11$	$4/27$	$1/4$
после загрузки	3	5	4	1	2

$$\xi(x) = \min(6x_1 + 14x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5)$$

$$18x_1 + 35x_2 + 11x_3 + 27x_4 + 12x_5 \geq 55$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1,5}$$

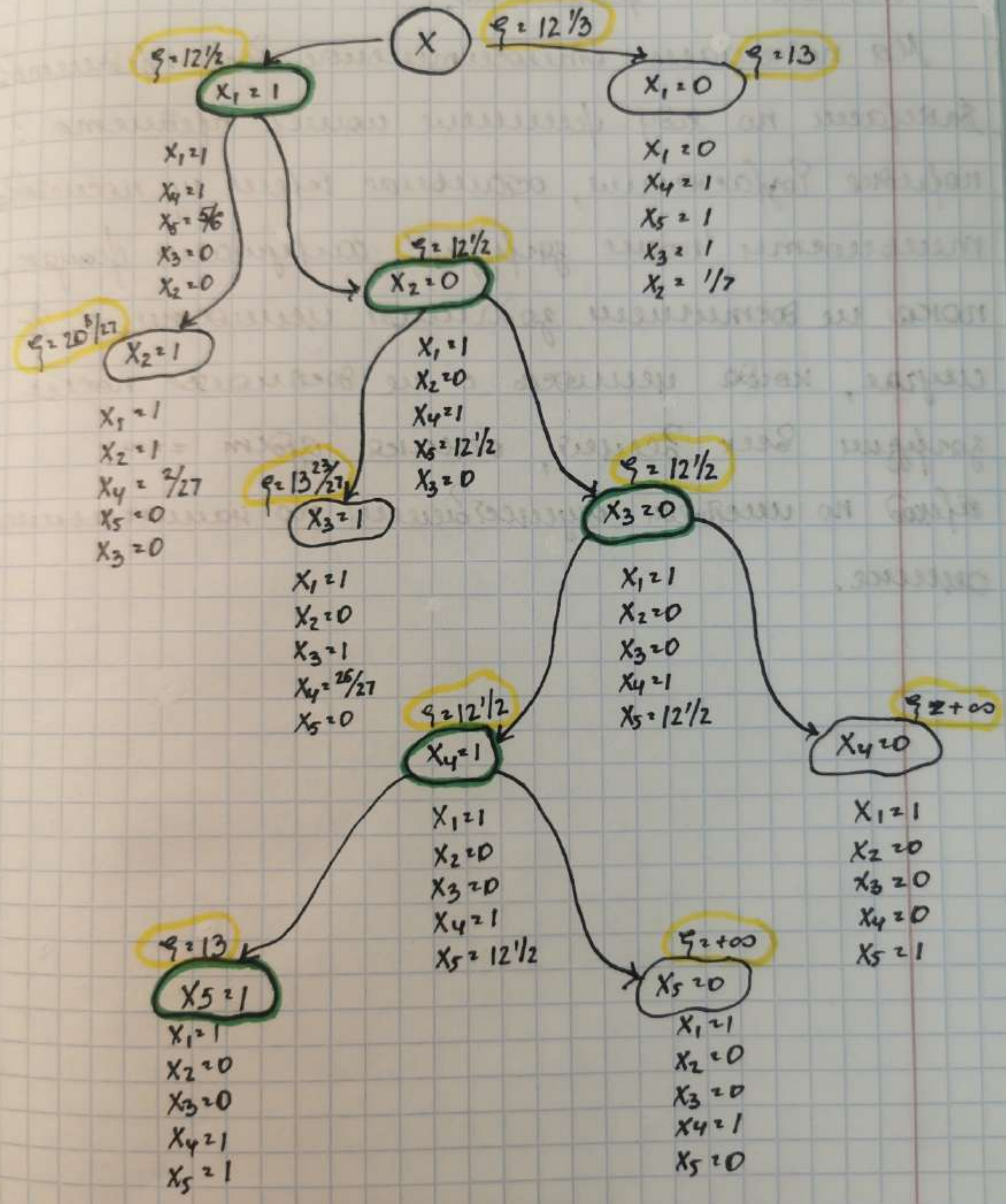
x_4: $c_4 = 27 < 55$

x_5: $c_5 = 12 < 28$

x_1: $c_1 = 18 > 16$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_4 = 1 \\ x_5 = 1 \\ x_1 = 16/18 = 8/9 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}$$

Оценка $\varphi(X) = 5\frac{1}{3} + 4 + 3 = 12\frac{1}{3}$



Оптимальный план $x^* = (1, 0, 0, 1, 1)$, $\varphi = 13$.

ближение к решению.

Мы подсчитали относительные веса предметов. Выбираем по ходу решения номер предмета в порядке возрастания, остальные берем из последовательности 'после загрузки'. Загружаем рюкзак, пока не достигнем заданной ценности c. В случае, когда ценность c не достигается после загрузки всех вещей, оценка будет $+\infty$. Переход по ветвям осуществляем по наименьшей оценке.

Найти оптимальное распределение ресурсов между ТП и максимальную прибыль в задачах. Найти решение задачи при указанных данных.

$n = 3$ $\quad c = 6$

x	0	1	2	3	4	5	6
f_1	0	3	7	10	15	20	25
f_2	0	6	8	10	13	17	24
f_3	0	4	8	10	14	17	23

Уравнение Беллмана: $B_{k+1}(y) = \max\limits_{0 \le z \le y} \left(f_{k+1}(z) + B_k(y-z) \right)$

y	0	1	2	3	4	5	6
$B_1(y)$	0	3	7	10	15	20	25
$B_2(y)$	0	6	9	13	16	21	26
$x_2^0(y)$	0	1	1	1	1	1	1
$B_3(y)$	0	6	10	14	17	21	26
$x_3^0(y)$	0	0	1	2	1,2	0,2	0

Максимально возможная прибыль $B_3(6) = 26$ д.е.

Тогда оптимальное распределение ресурсов:

$x_3^0 = x_3^0(6) = 0$

$x_2^0 = x_2^0(6-0) = 1$

$x_1^0 = 6 - 1 - 0 = 5$

а) на том же ресурсе, но меньшем числе П

$n = 2$

$X_2^0 = X_2^0(6) = 1$

$X_1^0 = 6 - 1 = 5$

б) уменьшенном ресурсе, но том же количестве П

$c = 5$

$X_3^0 = X_3^0(5) = 2$	либо	$X_3^0 = X_3^0(5) = 0$
$X_2^0 = X_2^0(5-2) = 1$		$X_2^0 = X_2^0(5-0) = 1$
$X_1^0 = 5-2-1 = 2$		$X_1^0 = 5-1-0 = 4$

в) уменьшенных ресурсе и количестве П

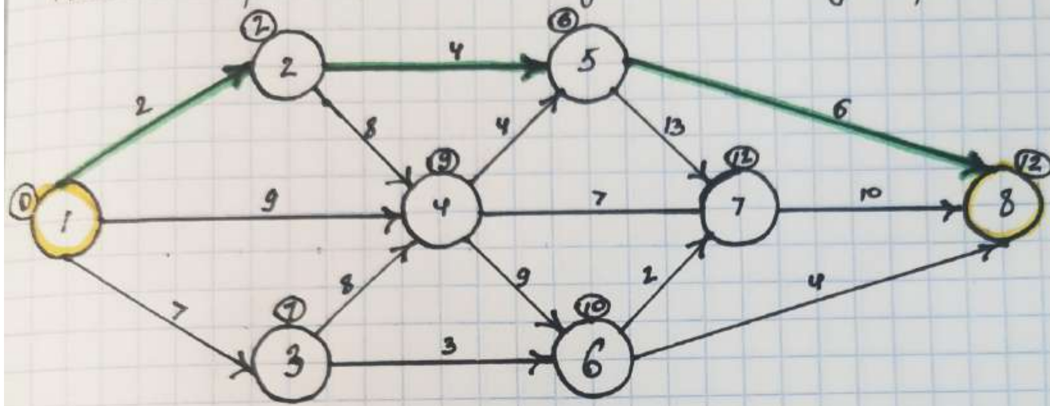
$n = 2$, $c = 5$

$X_2^0 = X_2^0(5) = 1$

$X_1^0 = 5 - 1 = 4$

14.2

Найти кратчайший путь между городами 1 и 8.



На 1-ой итерации $I^1 = \{1\}$, $B_1 = 0$, $\omega(I^1) = \{2, 3, 4\}$.

Подсчитываем для $\omega(I^1)$ временную метку узла:

$$B'_s = \min_{i \in I^1 \cap I^-_s} (C_{is} + B_i), \quad s \in \omega(I^1).$$

Выбираем далее min из подсчитанных меток, делаем минимальную постоянной. И так далее.

Результаты вычислений метод на рисунке.

Как и путь.

Длина кратчайшего пути 12.