Итерационный степенной метод

Итерационный степенной метод (называемый также степенным методом) предназначен для нахождения одного или нескольких собственных значений и соответствующих собственных векторов.

Пусть A – вещественная матрица порядка n. Мы рассмотрим степенной метод для случая диагонализируемых матриц (матриц простой структуры). Матрица заведомо диагонализируема в двух важных частных случаях: если она симметричная или если ее собственные значения различны. Диагонализируемая матрица имеет ровно n линейно независимых собственных векторов.

Случай 1: наибольшее по модулю собственное значение матрицы вещественное и простое

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Алгоритм степенного метода:

1) Выбрать произвольный начальный ненулевой вектор $y^{(0)}$. Положить $k=0$ (номер итерации).
2) Вычислить $y^{(k+1)} = Ay^{(k)}$. Найти $\lambda_i^{(k+1)} = \dfrac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$, $i=\overline{1,n}$, где $y_i^{(k+1)}$ и $y_i^{(k)}$, соответствующие координаты векторов $y^{(k+1)}$ и $y^{(k)}$.
3) Если $\Delta^{(k+1)} = \max\limits_{i=1,n} \left|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}\right| \leq \varepsilon$ ($\lambda_i^{(0)}$ можно задавать произвольно), процесс завершить. За приближенное собственное значение λ_1 можно взять значение $\lambda_i^{(k+1)}$ при любом $i = 1,\ldots,n$ или среднее арифметическое этих значений. Вектор $y^{(k+1)}$ приближенно представляет собой собственный вектор x_1, соответствующий собственному значению λ_1. Если $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, положить $k = k+1$ и перейти к п. 2.

Замечания:

1) Метод может использоваться и в случае, если *наибольшее по модулю собственное значение матрицы A является кратным*, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r$ и $|\lambda_1| > |\lambda_{r+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Для получения всех линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1 (должно быть r таких векторов), следует производить вычисления для разных $y^{(0)}$ до тех пор, пока не начнут получаться линейно зависимые векторы.

2) Слабым местом данного алгоритма является решение проблемы своевременного останова работы алгоритма. Этот шаг описан из рациональных соображений и не может гарантировать во всех случаях получения собственной пары $\{\lambda_1, x_1\}$ с наперед заданной точностью ε.

3) При неудачном выборе начального приближения $y^{(0)}$ предел отношения $\dfrac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$ может не существовать. В этом случае следует задать другое начальное приближение.

4) Если матрица A симметричная ($A = A^T$), то для нахождения λ_1 можно применять ***метод скалярных произведений***, т.е. вместо $\lambda_i^{(k+1)}$ в п. 2. вычислять

$$\lambda^{(k+1)} = \frac{\left(y^{(k+1)}, y^{(k)}\right)}{\left(y^{(k)}, y^{(k)}\right)},$$

причем сходимость будет более быстрая. Если $\Delta^{(k+1)} = \left|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right| \le \varepsilon$, то $\lambda_1 \approx \lambda^{(k+1)}$, $x_1 \approx y^{(k+1)}$.

5) Если $|\lambda_1| > 1$, то $\left\|y^{(k+1)}\right\| \to \infty$ при $k \to \infty$ и при вычислении на компьютере возможно переполнение. Если же $|\lambda_1| < 1$, то $\left\|y^{(k+1)}\right\| \to 0$ при $k \to \infty$ и возможно пропадание значащих цифр итерированных векторов. Поэтому на практике требуется производить нормировку итерированных векторов на каждой итерации или через некоторое фиксированное число итерационных шагов.

Алгоритм степенного метода с пошаговой нормировкой векторов:

1) Выбрать произвольный начальный ненулевой вектор $y^{(0)}$. Вычислить $\left\|y^{(0)}\right\|$ и вектор $\tilde{y}^{(0)} = \dfrac{y^{(0)}}{\left\|y^{(0)}\right\|}$. Положить $k = 0$.
2) Вычислить $y^{(k+1)} = A\tilde{y}^{(k)}$. Находим $\lambda_i^{(k+1)} = \dfrac{y_i^{(k+1)}}{\tilde{y}_i^{(k)}}$, $i = \overline{1,n}$. Вычисляем $\left\|y^{(k+1)}\right\|$ и $\tilde{y}^{(k+1)} = \dfrac{y^{(k+1)}}{\left\|y^{(k+1)}\right\|}$.
3) Если $\Delta^{(k+1)} = \max\limits_{i=1,n}\left|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}\right| \le \varepsilon$, процесс завершить. За приближенное собственное значение λ_1 можно взять значение $\lambda_i^{(k+1)}$ при любом $i = 1,\ldots,n$ или среднее арифметическое этих значений. Вектор $\tilde{y}^{(k+1)}$ приближенно представляет собой нормированный собственный вектор x_1, соответствующий собственному значению λ_1. Если $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, положить $k = k+1$ и перейти к п.2.

Алгоритм метода скалярных произведений с пошаговой нормировкой векторов:

1) Выбрать произвольный начальный ненулевой вектор $y^{(0)}$. Вычислить $\left\|y^{(0)}\right\|$ и вектор $\tilde{y}^{(0)} = \dfrac{y^{(0)}}{\left\|y^{(0)}\right\|}$. Положить $k = 0$.
2) Вычислить $y^{(k+1)} = A\tilde{y}^{(k)}$. Находим $\lambda^{(k+1)} = \dfrac{\left(y^{(k+1)}, \tilde{y}^{(k)}\right)}{\left(\tilde{y}^{(k)}, \tilde{y}^{(k)}\right)}$. Вычисляем $\left\|y^{(k+1)}\right\|$ и $\tilde{y}^{(k+1)} = \dfrac{y^{(k+1)}}{\left\|y^{(k+1)}\right\|}$.
3) Если $\Delta^{(k+1)} = \left|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right| \le \varepsilon$, процесс завершить. За приближенное собственное значение λ_1 можно взять значение $\lambda^{(k+1)}$. Вектор $\tilde{y}^{(k+1)}$ приближенно представляет собой нормированный собственный вектор x_1, соответствующий собственному значению λ_1. Если $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, положить $k = k+1$ и перейти к п.2.

Пример 1. С помощью итерационного степенного метода найти с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$ наибольшее по модулю собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -6\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}$$

Решение

Выберем начальный ненулевой вектор $y^{(0)}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. Положим $k=0$. Найдем:

$$y^{(1)}=Ay^{(0)}=\begin{pmatrix}-5\\ -2\\ -2\end{pmatrix},\ \lambda_1^{(1)}=\frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(0)}}=5,\ \lambda_2^{(1)}=\frac{y_2^{(1)}}{y_2^{(0)}}=-2,\ \lambda_3^{(1)}=\frac{y_3^{(1)}}{y_3^{(0)}}=-2.$$

$$k=1,\qquad y^{(2)}=Ay^{(1)}=\begin{pmatrix}-11\\ -3\\ -3\end{pmatrix},\qquad \lambda_1^{(2)}=\frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(1)}}=2.2,\qquad \lambda_2^{(2)}=\frac{y_2^{(2)}}{y_2^{(1)}}=1.5,\qquad \lambda_3^{(2)}=\frac{y_3^{(2)}}{y_3^{(1)}}=1.5,$$

$$\Delta^{(2)}=\max_{i=1,3}\left|\lambda_i^{(2)}-\lambda_i^{(1)}\right|=3.5>\varepsilon.$$

$$k=2,\qquad y^{(3)}=Ay^{(2)}=\begin{pmatrix}-27\\ -8\\ -8\end{pmatrix},\qquad \lambda_1^{(3)}=\frac{y_1^{(3)}}{y_1^{(2)}}=\frac{-27}{-11}\approx 2.455,\qquad \lambda_2^{(3)}=\frac{y_2^{(3)}}{y_2^{(2)}}=\frac{-8}{-3}\approx 2{,}667,$$

$$\lambda_3^{(3)}=\frac{y_3^{(3)}}{y_3^{(2)}}=\frac{-8}{-3}\approx 2.667,\ \Delta^{(3)}=1.167>\varepsilon.$$

$$k=3,\qquad y^{(4)}=Ay^{(3)}=\begin{pmatrix}-65\\ -19\\ -19\end{pmatrix},\qquad \lambda_1^{(4)}=\frac{y_1^{(4)}}{y_1^{(3)}}=\frac{-65}{-27}\approx 2.407,\qquad \lambda_2^{(4)}=\frac{y_2^{(4)}}{y_2^{(3)}}=\frac{-19}{-8}=2.375,$$

$$\lambda_3^{(4)}=\frac{y_3^{(4)}}{y_3^{(3)}}=\frac{-19}{-8}=2.375,\ \Delta^{(4)}=0.292>\varepsilon.$$

$$k=4,\qquad y^{(5)}=Ay^{(4)}=\begin{pmatrix}-157\\ -46\\ -46\end{pmatrix},\qquad \lambda_1^{(5)}=\frac{y_1^{(5)}}{y_1^{(4)}}=\frac{-157}{-65}\approx 2.415,\qquad \lambda_2^{(5)}=\frac{y_2^{(5)}}{y_2^{(4)}}=\frac{-46}{-19}\approx 2.421,$$

$$\lambda_3^{(5)}=\frac{y_3^{(5)}}{y_3^{(4)}}=\frac{-46}{-19}\approx 2.421,\ \Delta^{(5)}=0.046<\varepsilon.$$

$$\lambda_1\approx\frac{\lambda_1^{(5)}+\lambda_2^{(5)}+\lambda_3^{(5)}}{3}\approx 2.419,\ x_1\approx y^{(5)}=\begin{pmatrix}-157\\ -46\\ -46\end{pmatrix},\ \tilde{x}_1=\frac{x_1}{\|x_1\|_\infty}\approx\begin{pmatrix}3.413\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1\approx 2.42,\ \tilde{x}_1\approx\begin{pmatrix}3.41 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Случай 2: два наибольших по модулю собственных значения вещественны и противоположны по знаку

$$\lambda_1=-\lambda_2 \text{ и } |\lambda_1|>|\lambda_3|\ge\ldots\ge|\lambda_n|.$$

Замечание: Если заметна покоординатная сходимость отношений $\frac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}}$ ($\frac{y_i^{(k)}}{\tilde{y}_i^{(k-1)}}$ в реальных вычислениях) отдельно векторов для четных и нечетных k, то это указывает на наличие двух наибольших по модулю собственных значений, знаки которых различны.

Алгоритм степенного метода без нормировки:

1) Выбрать произвольный начальный ненулевой вектор $y^{(0)}$. Положить $k=0$.
2) Вычислить $y^{(2k+1)} = Ay^{(2k)}$, $y^{(2k+2)} = Ay^{(2k+1)}$. Найти $\lambda_i^{(k+1)} = \sqrt{\frac{y_i^{(2k+2)}}{y_i^{(2k)}}}$, $i=\overline{1,n}$.
3) Если $\Delta^{(k+1)} = \max\limits_{i=1,n}\left|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}\right| \le \varepsilon$, процесс завершить. За приближенное собственное значение λ_1 можно взять значение $\lambda_i^{(k+1)}$ при любом $i=1,\ldots,n$ или среднее арифметическое этих значений, а $\lambda_2 = -\lambda_1$. Комбинацию $y^{(2k+1)} + \lambda_1 y^{(2k)}$ можно взять за собственный вектор x_1, соответствующий собственному значению λ_1, а комбинацию $y^{(2k+1)} - \lambda_1 y^{(2k)}$ можно взять за собственный вектор x_2, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = -\lambda_1$. Если $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, положить $k=k+1$ и перейти к п.2.

Пример 2. С помощью итерационного степенного метода найти с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$ наибольшее по модулю собственное значение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -6 & -2 & 12 \\ -9 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Выберем вектор $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Положим $k=0$.

Найдем: $y^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $y^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} -14 \\ -44 \\ -14 \end{pmatrix}$.

$k=1$, $y^{(3)} = Ay^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -62 \end{pmatrix}$, $y^{(4)} = Ay^{(3)} = \begin{pmatrix} -254 \\ -764 \\ -254 \end{pmatrix}$, $\lambda_i^{(2)} = \sqrt{\frac{y_i^{(4)}}{y_i^{(2)}}}, i=1,2,3:$ $\lambda_1^{(2)} \approx 4.259,$ $\lambda_2^{(2)} \approx 4.167$, $\lambda_3^{(2)} \approx 4.259$.

$k=2$, $y^{(5)} = Ay^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1022 \end{pmatrix}$, $y^{(6)} = Ay^{(5)} = \begin{pmatrix} -4094 \\ -12284 \\ -4094 \end{pmatrix}$, $\lambda_i^{(3)} = \sqrt{\frac{y_i^{(6)}}{y_i^{(4)}}}, i=1,2,3:$ $\lambda_1^{(3)} \approx 4.015,$ $\lambda_2^{(3)} \approx 4.010$, $\lambda_3^{(3)} \approx 4.015$, $\Delta^{(3)} = \max\limits_{i=1,3}\left|\lambda_i^{(3)} - \lambda_i^{(2)}\right| = 0.244 > \varepsilon$.

$k = 3$, $\quad y^{(7)} = Ay^{(6)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -16382 \end{pmatrix}$, $\quad y^{(8)} = Ay^{(7)} = \begin{pmatrix} -65534 \\ -196604 \\ -65534 \end{pmatrix}$, $\quad \lambda_i^{(4)} = \sqrt{\dfrac{y_i^{(8)}}{y_i^{(6)}}}, i = 1,2,3:$

$\lambda_1^{(4)} \approx 4.0009,\ \lambda_2^{(4)} \approx 4.0006,\ \lambda_3^{(4)} \approx 4.0009,\ \Delta^{(4)} = \max\limits_{i=1,3} \left| \lambda_i^{(4)} - \lambda_i^{(3)} \right| = 0.0141 < \varepsilon$.

$\lambda_1 \approx \dfrac{\lambda_1^{(4)} + \lambda_2^{(4)} + \lambda_3^{(4)}}{3} \approx 4.0008,\ \lambda_2 = -\lambda_1 \approx -4.0008.$

Ответ: $\lambda_1 \approx 4.0008,\ \lambda_2 \approx -4.0008$.

Замечание: Характерным признаком случая, когда два наибольших по модулю собственных значения образуют комплексно-сопряженную пару, является колебательный характер последовательности приближений. Этот случай здесь не рассматривается.

Задача. С помощью итерационного степенного метода и метода скалярных произведений найти с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$ наибольшее по модулю собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве начального вектора взять $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.