ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМОВ

1. Доказать, что в нормированном пространстве E открытый шар $B(0,r)$ – открытое множество.
2. Доказать, что для любых элементов $B(0,r)$ выполнено неравенство $\|x\| \le \max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}$.
3. Доказать, что алгебраическая сумма и объединение двух ограниченных множеств – ограниченное множество.
4. Пусть в пространстве со скалярным произведением H последовательности $x^{(n)}, y^{(n)} \in B[0,1]$ и $(x^{(n)}, y^{(n)}) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x^{(n)} - y^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$.
5. Пусть M и N – такие множества в гильбертовом пространстве H, что $M \subset N$. Доказать, что $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.
6. В гильбертовом пространстве l_2 рассмотрим последовательность элементов $x^{(n)} = \left\{1, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{1}{2^{in}}, \dots\right\}$. Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в пространстве l_2.
7. Пусть $A \subset E$ – замкнутое множество. Доказать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.
8. Доказать, что для того, чтобы элемент x был ортогонален подпространству $L \subset H$ необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство
9. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ множество $M^{\perp}$ является подпространством.
10. Пусть $A, B \subset E$ и $\overline{A} \subset \overline{B}$. Следует ли, что $A \subset B$? Ответ обоснуйте и приведите пример.
11. Доказать, что гильбертово пространство является строго нормированным.
12. Доказать, что ортогональная система без нулевого элемента линейно независима в гильбертовом пространстве.
13. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ в гильбертовом пространстве имеет место включение $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Привести пример строгого включения.
14. Пусть $M \subset E$ выпуклое множество и $\lambda \in \Re$ – некоторое число. Доказать, что множество $\lambda M = \{x \in E : x = \lambda y, y \in M\}$ – выпукло. Будет ли множе-

при $n \to \infty$.

. Пусть $M, N \subset H$ – подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что $M + N$ – подпространство в H.

...лых подмножеств пространства E векторным простран-

...амыкание выпуклого множества $M \subset E$ в нормированном век-
...пространстве E выпуклым множеством? Ответ обоснуйте.

Пусть $A, B \subset E$ – замкнутые множества и их пересечение $A \cap B$ пусто. Может ли расстояние $\rho(A,B) = 0$?

17. Пусть M и N – подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что – $M + N$ подпространство в H.
18. Пусть $M, N \subset H$ и $H = M + N$. Верно ли, что $N = M^{\perp}$?
19. Пусть $M, N \subset H$ такие, что любой $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = y + z,\ y \in M,\ z \in N$. Следует ли отсюда, что N и M – подпространства в H? Ответ обосновать.
20. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением выполнено равенство $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2$.
21. Доказать, что в унитарном пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$ для любых $\alpha, \beta \in C$.
22. Доказать, что в пространстве   нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.
23. Пусть $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}, (y^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset E$ – фундаментальные последовательности. Доказать, что числовая последовательность $\lambda^{(n)} = \|x^{(n)} - y^{(n)}\|$ сходится.
24. Доказать, что если $f: E \to W$ непрерывно, то $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ для любого $A \subset E$.
25. Пусть множество $A \subset E$ фиксировано. Доказать, что функция $f(x) = \rho(x, A)$ непрерывно отображает E в $\Re$.
26. Образует ли в пространстве $C[a,b]$ подпространство множество многочленов степени не выше чем n?
27. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Доказать, что множество $\{t \in \Re : f(t) < 1\}$ открыто на числовой прямой.
28. Пусть $A, B \subset E$ – произвольные множества в банаховом пространстве E. Доказать, что $\rho(A,B) = \rho(\overline{A}, \overline{B})$.
29. Доказать, что множество $A \subset E$ является ограниченным тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x^{(n)} \in A$ и любой последовательности $\lambda^{(n)} \in C, \lambda^{(n)} \to 0$, при $n \to \infty$ последовательность $\lambda^{(n)} x^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

. Пусть $M, N \subset H$ – подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что $M + N$ – подпространство в H.

1. E – НВП. Д-ть, что откр. шар $B(0,r)$ – откр. мн-во

$B(0,r)$ – открытый, $\Rightarrow$ $\nexists$ он не содержит гр. точки, $\Rightarrow$ всегда $\exists r_0>0 : \forall x_0 \in B(0,r)$:

$\exists B(x_0, r_0) \Rightarrow B(0,r)$ – откр. мн-во.

2. Д-ть, что $\forall x,y \in B(0,r) \Rightarrow \|x\| \le \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$

$$\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\} = \begin{cases} \|x+y\|, & \rho(x,y)=\|x-y\| < r \\ \|x-y\|, & \rho(x,y) > r \end{cases}$$

$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, по св-м $B(0,r)$ $\|x-0\| = \|x\| < r$

$\|x+y\| \le 2r$ $\qquad$ $\|y\| < r$

$\cancel{\|x\| = \|x+y-y\| \le \|x-y\| + \|y\| \le \|x-y\|}$

$\|x-y\| \le 2r$, $\|x\| \le \|x+y\|$
$\le \|x-y\|$. ⊠

3. Д-ть, что $A \oplus B$, $A \cup B$ – огр, if A, B – огр

1) $C = A \oplus B = \{c : c = a+b,\ a \in A, b \in B\}$

Мн-во огр, if его $d < +\infty$

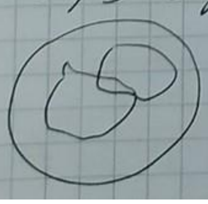
$d(C) = \sup\|c_1 - c_2\| = \sup\|a_1 + b_1 - a_2 - b_2\| \le$

$\le \underbrace{\sup\|a_1 - a_2\|}_{=d(A)<+\infty} + \underbrace{\sup\|b_1 - b_2\|}_{=d(B)<+\infty} < +\infty \Rightarrow C$ – огр

2) $C = A \cup B$. ~~III случая:~~ ~~[illegible]~~

Мн-во огр, когда $\exists B(r < +\infty) : C \subset B(r)$

A, B – огр $\Rightarrow \exists B_1(r_1 < +\infty), B_2(r_2 < +\infty) \Rightarrow \exists B_3(\cancel{r_3 \ge r_1 + r_2 < +}\ r_1 + r_2 \le r_3 < +\infty) : C \subset B_3$



⊠

4. $x^{(n)}, y^{(n)} \in B[0,1]$

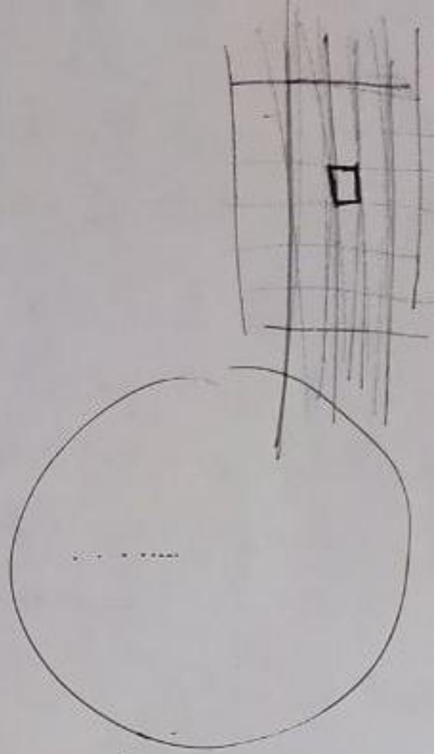
$(x^{(n)}, y^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Д-ть, $\|x^{(n)} - y^{(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\|x^{(n)} - y^{(n)}\|^2 = (x-y, x-y) =$

$= \underbrace{(x,x)}_{\to 1} - \underbrace{(y,x)}_{\to 1} - \underbrace{(x,y)}_{\to 1} + \underbrace{(y,y)}_{\to 1} =$

$\cancel{= \|x\|^2 - (y,x) - (x,y) + \|y\|^2}$



$\|x^{(n)} - x\| \to 0$

$\|y^{(n)} - y\| \to 0$, при чём $x = y = p$

$\|x^{(n)} - p\| \to 0$

$\|x^{(n)} + y^{(n)} - y^{(n)} - p\| \le \|x^{(n)} - y^{(n)}\| + \|y^{(n)} - p\|$

$\underbrace{\|x^{(n)} - y^{(n)}\|}_{\to 0} = \|x^{(n)} - p + p - y^{(n)}\| \le \underbrace{\|x^{(n)} - p\|}_{\to 0} + \underbrace{\|y^{(n)} - p\|}_{\to 0} \Rightarrow$

5/ $M \subset N$ в H-П, $M \subset N$. Д-ть $M^\perp \supset N^\perp$

$M + S = N$, $S \ne \varnothing$

$H \setminus (M + S) = H \setminus N$

$(H \setminus M) \setminus S = H \setminus N$

$\Rightarrow H \setminus M \supset H \setminus N$, т.е. $M^\perp \supset N^\perp$

7 $\Rightarrow$ A - замкнуто. От противного. Пусть $x \in E \setminus A$ - открыто и $\rho(x, A) = 0$. Т.к. $E \setminus A$ - открыто, то $\exists B(x, \varepsilon) \subset E \setminus A$ $\Rightarrow \rho(x, A) \geq \varepsilon$ (?!) $\Rightarrow x \notin E \setminus A \Rightarrow x \in A$.

$\Leftarrow$ $x \in A$ $\quad \rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\| = \|x - x\| = 0$.

10 $\quad A, B \in E, \ \overline{A} \subset \overline{B} \overset{?}{\Rightarrow} A \subset B$

$A \subset B \Leftrightarrow E \setminus A \supseteq E \setminus B$ $\quad$ (?)

$A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B} \Rightarrow$ не следует

N11 пр-во строго нормированное, если $\forall x, y \in X$ уд-их условию $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, найдется $\lambda \in \mathbb{R}$, $y = \lambda x$.

Т.к ГП - НВП, то для него выполняется $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \Rightarrow$ вып-ся $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$..

Т.к ГП - векторное пр-во, то любой элемент можно выразить через другой (?) $\Rightarrow$

ГП - строго нормировано.

12. Допустим, что система линейно зависима, т.е сущ. такой набор α_i, $\Sigma \alpha_i \neq 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0 = S$$

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ \|\varphi_i\|^2, & j = i \end{cases}$$

$$(S, \varphi_j) = \alpha_j \underbrace{\|\varphi_j\|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ ?!$$

13. $M^{\perp} = \{z \in H, z \perp M\}$, $\forall\, m \in M^{T}$ $(z, m) = 0$ и $(m, z) = 0$

$\Rightarrow z \in (M^{T})^{T}$

Отсюда следует, что $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$

14. $M \subset E$ - выпуклое, $\lambda \in \mathbb{R}$. Д-ть, что

$\lambda M = \{x \in E : x = \lambda y, y \in M\}$ - выпукло

$M = \{m \in E : \forall m_1, m_2 \Rightarrow \alpha m_1 + (1-\alpha) m_2 \in M\}$ - опр. выпуклости, $\alpha \in [0, 1]$

λM: $m_\lambda = \lambda m$

$\lambda m_1 \cdot \alpha + \lambda m_2 \cdot (1-\alpha) = \lambda(\alpha m_1 + (1-\alpha) m_2) = \lambda m \in \lambda M \Rightarrow$ ☒.

16/ A, B - замкн., $A \cap B = \varnothing$

$\rho(A, B) \overset{?}{=} 0$

$\rho(A, B) = \inf \rho(a, b)$, $a \in A, b \in B$.

Пусть $\rho(a, b) = 0$, $\Rightarrow a = b$, но $A \cap B = \varnothing$ $-?!$

17/ M, N - подпр-ва H - ГП, $M \perp N$. Д-ть, что $M + N$ подпр-во H

$X = M + N = \{x : x = m + n, m \in M, n \in N\}$

M, N - подпр-ва H, $\Rightarrow \alpha m_1 + \beta m_2 \in M$

$\alpha n_1 + \beta n_2 \in N$

X - подпр-во, if $\forall x_1, x_2 \in X \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in X$

$\alpha m_1 + \alpha n_1 + \beta m_2 + \beta n_2 = \underbrace{(\alpha m_1 + \beta m_2)}_{\in M} + \underbrace{(\beta n_1 + \beta n_2)}_{\in N} =$

$= m + n \in X \Rightarrow X$ явл. подпр-м в H

18. $M, N \subset H$, $H = M + N$. Верно ли, что $N = M^{\perp}$

$H = M + M^{\perp} = M + N^{\perp} \Rightarrow N = M^{\perp}$ ☒.

19. ~~Пусть~~ $M, N \subset H$: $\forall x \in H$ $x = y + z$, $y \in M$, $z \in N$. $\overset{?}{\Rightarrow}$ N, M - подпр-ва

H - ГП, $\Rightarrow$ справедливо разложение

$x = y + z$, $y \in M \subset H$, $z \in M^{\perp} = N \subset H$ $\Rightarrow$ они явл подпр-ми ☒

(20) Д-ть, что $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{x+y}{2}\|^2$ (*)

$$\|z-x\|^2 = (z-x, z-x) = (z,z) - 2(z,x) + (x,x)$$

$$\|z-y\|^2 = (z-y, z-y) = (z,z) - 2(z,y) + (y,y)$$

$$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = (x,x) - 2(x,y) + (y,y)$$

$$\|z - \frac{x+y}{2}\|^2 = (z - \frac{x+y}{2}, z - \frac{x+y}{2}) =$$

$$= (z, z - \frac{x+y}{2}) + (-\frac{x+y}{2}, z - \frac{x+y}{2}) =$$

$$= (z,z) - (z, \frac{x+y}{2}) - (\frac{x+y}{2}, z) + (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}) =$$

$$= (z,z) - \frac{1}{2}(z,x) - \frac{1}{2}(z,y) - \frac{1}{2}(x,z) - \frac{1}{2}(y,z) + \frac{1}{4}(x+y, x+y) =$$

$$= (z,z) - (z,x) - (z,y) + \frac{1}{4}(x,x) + \frac{1}{4}(y,x) + \frac{1}{4}(x,y) + \frac{1}{4}(y,y) =$$

$$= (z,z) - (z,x) - (z,y) + \frac{1}{4}(x,x) + \frac{1}{4}(y,y) + \frac{1}{2}(x,y)$$

$$(*): \cancel{(z,z)} - \cancel{2(z,x)} + \cancel{(x,x)} + \cancel{(z,z)} - \cancel{2(z,y)} + \cancel{(y,y)} = \cancel{\tfrac{1}{2}(x,x)} - \cancel{(x,y)} + \cancel{\tfrac{1}{2}(y,y)} +$$

$$+ \cancel{2(z,z)} - \cancel{2(z,x)} - \cancel{2(z,y)} + \cancel{\tfrac{1}{2}(x,x)} + \cancel{\tfrac{1}{2}(y,y)} + \cancel{(x,y)}$$

Всё сократилось, $\Rightarrow$ (*) - верно ☒

21) Д-ть, что в унитарном пр-ве $x \perp y \Leftrightarrow \|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$

$\Rightarrow$ $\|\alpha x + \beta y\|^2 = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \ldots = \alpha^2 (x,x) + \underbrace{\alpha\beta(y,x) + \alpha\beta(x,y)}_{\Rightarrow\, = 0} + \beta^2 (y,y)$

$\Leftarrow$ $(\alpha x, \alpha x) + (\beta y, \beta y) = \alpha^2 (x,x) + \beta^2 (y,y)$

(22) Для каких порожд. скал. произв.: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Пример для [redacted] $C[0; \pi/2]$

[redacted] $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$

$\Rightarrow \|x\|^2 = \|y\|^2 = 1$, а $\|x+y\| = \sqrt{2}$

$\|x-y\| = 1$

[redacted] равенство параллелограмма:

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 3 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$

// Доказательство в учебнике Колмогорова:

для произвольных a и b берите на $C[a,b]$

$x(t) = \dfrac{\cos \pi t}{2(b-a)}$, $y(t) = \dfrac{\sin \pi t}{2(b-a)}$

// Для L берите [redacted] $x(t) = 1$, $y(t) = \sin t$

это для $L[0; 2\pi]$

26/ образует ли в $C[a,b]$ подпр-во мн-во мн-нов $\deg \le n$

$P = \{P_k(x) : k = \deg P \le n\}$

$\forall x, y$ P явл подпр-м $L \Leftrightarrow \alpha x + \beta y \in P$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$x(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$

$y(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$

$\Big\}\ \alpha x + \beta y = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \ldots + \alpha a_n t^n + \beta b_0 + \beta b_1 t + \ldots + \beta b_n t^n =$

$= (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1) t + \ldots + (\alpha a_n + \beta b_n) t^n \in P$, $\Rightarrow P$ обр подпр-во.

(27) $A = \{t : f(t) < 1\}$.

$t_0 \in A$ т.е. $f(t_0) < 1$. Из непрерывн. f следует, что

$\forall t \in A$ $f(t) < 1$ $\forall \varepsilon$: $|f(t) - f(t_0)| \le \varepsilon$, $\exists \delta(\varepsilon)$: $|t - t_0| < \delta$

т.е. $t \in B(t_0, \delta)$ $\Rightarrow$ следует ~~замкнутость~~ открытость A.