1 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. Системы нормальной формы

Несколько дифференциальных уравнений образуют систему,

Пример 1.

$$\begin{cases} D^2x_1 + D^2x_2 = 1 \quad & x_1(t) \\ D^2x_1 + D^2x_2 = 0 \quad & x_2(t) \end{cases} \quad \text{-не нормальная форма}$$

Если при этом выполняются следующие условия:

1) Старшая производная каждой искомой функции входит только в одно уравнени

2) Каждое кравнение рарешимо относительно старших производных

то такая система имеет нормальную форму.

$D^{m_1}x_1 = f_1(x_1, Dx_1, ..., D^{m_1-1}x-1, x_2, ..., x_n, ...)$

....

$D^{m_n}x_n = f_n(x_1, Dx_1, ..., D^{m_1-1}x_1, x_2, ..., x_n, Dx_n, ..., D^{m_n-1}x_n)$

Решением будет набор функций $x_1(t), ..., x_n(t)$, удовлетворяющих данной системе.

Система в нормальной форме с помощью соответстветственных замен переменнох сводится к системе уравнений 1 порядка.

Пример 2.

$$\begin{cases} D^2x_1 = f_1(t, x_1[y_1], Dx_1[y_2], x_2[y_3], Dx_2[y_4], D^2x_2[y_5]) \\ D^3x_2 = f_2(t, x_1, Dx_1, x_2, Dx_2, D^2x_2) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Dy_1 = y_2 \\ Dy_2 = f_1(t, y_1, ...) \\ Dy_3 = y_4 \\ Dy_4 = y_5 \\ Dy_5 = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_5) \end{cases}$$

Поэтому ограничимся изучением нормальных систем 1-го порядка

Линейные системы нормальной формы

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + f_1 \\ ... \\ Dx_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + f_n \end{cases} \qquad a_{ij}(t), f_i(t), t \in I$$

$x_1(t)...x_n(t)$

Определение 1. *Решением линейной системы будем называть семейство непрерывно дифференцируемых фунций, обращающих в тождество систему на I.*

Таким же образом можно рассматривать комплексно-значные системы

$$Dz_k = C_{k_1}z_1 + ... + C_{k_n}z_n + h_k \qquad k = \overline{1, n}$$

$z_k = x_k + iy_k$

Линейные системы можно записать в матричной форме:

$$Dx = A(t)x + f(t)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1, \\ ... \\ ..., \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij})_1^n \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ ... \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}$$

Производные и интегралы от векторов и матриц будем вычислять покомпонентно, например, если P(t)- матрица n*n, $P(t) = (p_{ij})m$,

то $D^m P = (D^m p_{ij}(t))_{n*n}$, $\int_s^t P(\tau)d\tau = (\int_s^t P(\tau)d\tau = (\int_s^t P_{ij}(\tau)d\tau)_{n*n}$
Если все a_{ij} - const, то система называется стационарной.

2 Линейные системы в нормальной форме

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = f_1, \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = f_2, \\ .... \\ Dx_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = f_n. \end{cases} \quad a_{ij} = a_{ij}(t),\ f_i = f_i(t),\ x_i = x_i(t)\ i,j = \overline{1,n}, \text{ определены на t} \in \text{I}$$

Определение 1. ***Решением системы*** *называется семейство функций $x_1(t),\ x_2(t), ..., x_n(t)$ непрерывно дифференцируемых на I, которые на этом интервале обращают каждое уравненение в тождество.*

Можно так же рассматривать системы в комплекснозначной форме:

$$Dz_k = C_{k1}z_1 + ... + C_{kn}z_n + h_k, \text{ где } k = \overline{1,n},\ z_k = x_k + iy_k$$

Достаточно часто линейные системы записывают в векторной(матричной) форме:

$$Dx = Ax + f, \text{ где } x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T,\ A = \{a_{ij}\},\ f = (f_1, f_2..., f_n)^T$$

Производные и интегралы от векторов и матриц будем вычислять покомпонентно. Например, если $P(t)$ -матрица размера $n \times n$, то:

$$D^k P(t) = D^k(p_{ij}(t)) \text{ и } \int_s^t P(\tau)d\tau = \int_s^t p_{ij}(\tau)d\tau,\ i,j = \overline{1,n}$$

В случае, когда берём функцию от матрицы $(E^A, \sqrt{A})$ - наши правила уже не будут работать.

Если все a_{ij} постоянны, то линейная однородная система называется *постоянной (стационарной).*

3 Решение линейных неоднородных систем

Рассмотрим следующую систему:

$$Dz = Cz(t) + h(t), \text{ где } \mathrm{C} = \{\mathrm{C}_{ij}\},\ h = (h_1, h_2, ..., h_n)^T,\ z_k\Big|_{t=s} = \xi_k$$

Исследуем 4 случая для данной системы:

Случай 1 (диагональный)

$$C = diag(C_{11}, C_{22}, ..., C_{nn})$$

Отсюда $Dz_j = C_{jj}z_j + h_j,\ j = \overline{1,n} \Rightarrow z_j(t) = \xi_j e^{C_{jj}(t-s)} + \int\limits_s^t e^{C_{jj}(t-\tau)} h_j(\tau)d\tau$

Случай 2 (нижнетреугольный)

Теорема 1. *В нижнетреугольном случае начальная задача однозначно разрешима на интервале* $I\ \forall s \in I,\ \forall \xi_k \in C$

Доказательство. Выпишем уравнения системы:

$$\begin{cases} Dz_1 = C_{11}z_1 + h_1, \\ Dz_2 = C_{21}z_1 + C_{22}z_2 + h_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dz_n = C_{n1}z_1 + ... + C_{nn}z_n + h_n. \end{cases}$$

Будем решать их по принципу " сверху-вниз " , тогда:

$$z_1 = \xi_1 e^{C_{11}(t-s)} + \int\limits_s^t e^{C_{11}(t-\tau)} h_1(\tau)d\tau$$

$$Dz_2 = C_{21}z_1 + C_{22}z_2 + h_2$$

Обозначим $C_{21}z_1 + h_2 = \widetilde{h_2}$ и возьмем второе уравнений:

$$Dz_2 = C_{22}z_2 + \widetilde{h_2}$$

$$z_2 = \xi_2 e^{C_{22}(t-s)} + \int\limits_s^t e^{C_{22}(t-\tau)} \widetilde{h_2}(\tau)d\tau$$

При $n > 2$ продолжается этот процесс до того как не найдём решение системы. ■

Случай 3 (верхнетреугольный)

Теорема 2. *В верхнетреугольном случае начальная задача однозначно разрешима на интервале* $I\ \forall s \in I,\ \forall \xi_k \in C$

Доказательство. Выпишем уравнения системы и возьмем последние два из них:

$$\begin{cases} Dz_1 = C_{11}z_1 + ... + C_{1n}z_n + h_n, \\ .... \\ Dz_{n-1} = C_{n-1n-1}z_{n-1} + C_{n-1n}z_n + h_{n-1} \\ Dz_n = C_{nn}z_n + h_n. \end{cases}$$

Будем решать по принципу " снизу-вверх " ", тогда:

$$z_n = \xi_n e^{C_{nn}(t-s)} + \int_s^t e^{C_{nn}(t-\tau)} h_n(\tau) d\tau$$

$$Dz_{n-1} = C_{n-1n}z_{n-1} + C_{nn}z_n + h_{n-1}$$

Обозначим $C_{nn}z_n + h_{n-1} = \widetilde{h}_{n-1}$, тогда:

$$Dz_{n-1} = C_{n-1n}z_{n-1} + \widetilde{h}_{n-1}$$

$$z_{n-1} = \xi_{n-1} e^{C_{n-1n}(t-s)} + \int_s^t e^{C_{n-1n}(t-\tau)} \widetilde{h}_{n-1}(\tau) d\tau$$

При $n > 2$ идём далее, поднимаясь снизу-вверх, до того как не найдём решение системы. ■

Случай 4 (общий случай)

Теорема 3. *В общем случае начальная задача однозначно разрешима на интервале* $I\ \forall s \in I,\ \forall \xi_k \in C$

Доказательство. Пусть имеем систему

$$Dz = Cz(t) + h(t),\ \text{где } \mathrm{C} = \{\mathrm{C}_{ij}\},\ h = (h_1, h_2, ..., h_n)^T$$

и J_C - Жорданова нормальная форма матрицы C:

$$J_C = diag(J_1, J_2, ..., J_k),\ \text{где } J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \lambda_m & 1 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}, m = \overline{1,k}.$$

Отсюда следует, что для J_C - справедлив верхнетреугольный случай.

Рассмотрим S_C - трансформирующая матрица, т.е $S_C^{-1}CS_C = J_C$ (Матрица S составлена из собственных и присоединенных векторов)

Введём замену переменных $W = S_C^{-1}z$, тогда $z = S_C W$, отсюда получим:

$$S_C DW = CS_C W + h, \quad W\Big|_{t=s} = S_C^{-1}\xi$$

$$DW = S_C^{-1}CS_C W + S_C^{-1}h$$

$$DW = J_C W + \widetilde{h}$$

$$z(t) = S_C \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ \dots \\ W_n(t) \end{pmatrix}$$

Упражнение 1. Провести доказательство для случая нижнетреугольной формы
Жордана ($J_{\text{С(н)}} = J^T_{C(\text{в})}$).

$\blacksquare$

Теорема 3 дает следующий алгоритм решения линейных стационарных систем:// с помощью приведения к ЖНФ необходимо найти транформирующую матрицу, преобразовать исходлную систему к системе с ЖНФ матрицей коэффициентов, решить ее и вернуться к исходным переменным.

4 Сведение линейной системы к совокупности стационарных уравнений n-го порядка

Рассмотрим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} Dx_1 = ax_1 + bx_2 \\ Dx_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

$b \neq 0$, так как если $b = 0$ то действует теорема из приедыдущей главы о нижнетреугольной матрице.

$$b \neq 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{b}Dx_1 - \frac{a_1}{b_1}x_1$$

Кроме этого продифференцируем первое уравнение:

$$D^2x_1 = aDx_1 + bDx_2 = aDx_1 + b(cx_1 + dx_2) = aDx_1 + b(cx_1 + d(\frac{1}{b}Dx_1 - \frac{a_1}{b_1}x_1))$$

$D^2x_1 - (a+d)Dx_1 + (bc - ad)x = 0 \Rightarrow$ найдём $x_1(t)$, а зная его, найдём $x_2(t)$.

Таким образом мы доказали следующее утверждение: *при $b \neq 0$ обе системы эквивалентны.*

Подобным образом можно решать и неоднородные системы.

.

5 Экспоненциальное представление решений линейных стационарных систем

Возьмём пространство R^n и зададим норму вектора и некоторые свойства:

$$\|x\| = \max \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0, x \in R^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$1)\ \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

$$2)\ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$3)\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

$$4)\ \|A^m\| \leq \|A\|^m$$

Рассмотрим матричный ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A^m$. Этот ряд сходится тогди и только тогда. когда сходится ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{ij}^m$. А тогда из сходимости главной мажоранты будет следовать сходимость матричного ряда.

Рассмотрим $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}A^m$, видим, что ряд совпадает с рядом Тейлора для экспоненты, тогда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}A^m = e^A$, отсюда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}A^m t^m = e^{At}$.

Пример 1. Рассмотрим следующие матрицы и экспоненты этих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,\ e^A = E + \frac{E}{1!} + \frac{E}{2!} + ... = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... & 0 \\ 0 & 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A}{2!} + ... = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В общем случае считать экспоненту матрицы гораздо сложнее.

Укажем некоторые свойства экспоненты матрицы.

Свойство 1. $D(e^{At}) = AD(e^{At})$

Доказательство.

$$D(e^{At}) = D(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m t^m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m m t^{m-1} = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m-1)} A^{m-1} t^{m-1} = Ae^{At}$$

■

Свойство 2. Если A и B коммутируют между собой, т.е перестановочны $(AB = BA)$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

В общем же случае $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Свойство 3. $e^{A+B} = e^A + e^B$ тогда и только тогда, когда матрицы A и B перестановочны.

Доказательство.

$$e^{A+B} = E + \frac{(A+B)}{1!} + \frac{(A+B)^2}{2!} + ... = E + A + B + \frac{A^2}{2!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{AB}{2!} + \frac{BA}{2!} =$$

$$= (E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + ...)(E + \frac{B}{1!} + \frac{B2}{2!} + ...) = e^A e^B$$

■

Свойство 4. $(e^A)^{-1} = e^{-A}, (e^{At})^{-1} = e^{-At}$

6 Правило Коши решения линейных стационарных систем

Рассмотрим ситему $Dx = Ax + f(x),\ t \in I,\ \bar{x}\big|_{t=s} = \bar{\xi}$

Теорема 1. *Начальная задача однозначно разрешима на I, причём её решение находится по следующей формуле:*

$$x = e^{A(t-s)}\xi + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

Доказательство. Предварительно заметим, что $e^{A(t-s)} = e^{At}e^{-As}$, так как $A \cdot (t-s) = (t-s) \cdot A$

Продифференцируем равенство $x = e^{A(t-s)}\xi + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$:

$$Dx = Ae^{A(t-s)}\xi + D(e^{At}\int\limits_s^t e^{-A\tau} f(\tau)d\tau) = Ae^{A(t-s)}\xi + Ae^{At}\int\limits_s^t e^{-A\tau} f(\tau)d\tau + e^{At}e^{-At}f(t) =$$

$$= Ae^{A(t-s)}\xi + A\int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau + f(t) = A(e^{A(t-s)}\xi + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau) + f(t) = Ax + f(t)$$

$$x\big|_{t=s} = \xi + \int\limits_s^s .... = \xi$$

■

Замечание 1. *Если в приведенной формуле заменить $\bar{\xi}$ на вектор $\bar{C}$, то получим общее решение.*

Полученная формула предсавляет собой *формулу Коши* решеения ЛС, при этом множитель $e^{A(t-s)}$ - *матрица Коши.*

Вычисление матричной экспоненты в общем случае представляет значительные трудности. Тем не менее в некоторых частных случаях можно получить удобные формулы. Рассмотрим их:

Формула 1. $diagA = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$

Тогда $e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + ... = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$ (см. предыдущий параграф)

Формула 2. Жорданова нормальная форма

Рассуждения проведём для одной клетки Жордана размерности d :

$$J_d(\nu) = \begin{pmatrix} \nu & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \nu & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = E_d(\nu) + F_d = \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \nu & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрицы E и F перестановочны. Для наглядности рассмотрим случай $n = 3$ и выпишем степени матрицы F_3:

$$F_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ясно, что в общем случае степени такой матрицы будут нулевые начиная с $n = d$. Отсюда:

$$e^{F_3 t} = E + \frac{F_3 t}{1!} + \frac{F_3^2 t}{2!} + 0 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично

$$e^{F_d t} = \begin{pmatrix} 1 & t & ... & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & ... & \frac{t^{d-2}}{(d-2)!} \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$e^{J_d t} = e^{E_d \nu t} e^{F_d t} = \begin{pmatrix} e^{\nu t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\nu t} & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & e^{\nu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & ... & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & ... & \frac{t^{d-2}}{(d-2)!} \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = e^{\nu t} e^{F_d t}$$

Теорема 2. *Пусть* $J_A = S^{-1}AS,\ J_A = diag[J_{d_1}(\nu_1), ..., J_{d_m}(\nu_m)]$, *тогда* $e^{At} = Se^{J_A t} S^{-1}$

Доказательство.

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m t^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (SJ_AS^{-1})^m t^m =$$

$$\{\text{здесь, в частности } \left[(SJ_AS^{-1})^2 = SJ_A^2 S^{-1}\right]\} =$$

$$= S\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} J_A^m t^m\right) S^{-1} = Se^{J_A t} S^{-1}.$$

■