БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра высшей математики

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Учебные материалы для студентов факультета
прикладной математики и информатики

В пяти частях

Часть 4

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ МАТРИЦ.
ЕВКЛИДОВО И УНИТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВА

МИНСК
2014

УДК [514+512](075.8)
ББК 22.14+22.15я73-1
Р17

Рекомендовано советом
факультета прикладной математики и информатики
19 июня 2014 г., протокол № 9

Р е ц е н з е н т
кандидат физико-математических наук,
доцент *В. И. Чесалин*

Размыслович, Г. П.

Р17 Геометрия и алгебра : учеб. материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 4. Полиномиальные и нормальные формы матриц. Евклидово и унитарное пространства /Г. П. Размыслович. – Минск : БГУ, 2014. – 65 с.

Излагаются основные понятия λ-матриц, некоторых видов нормальных форм матриц, евклидового и унитарного пространств, а также изометрические и симметрические преобразования этих пространств.

Предназначены для студентов факультета прикладной математики и информатики, механико-математического факультета, а также может представлять интерес и для студентов технических вузов, где преподается курс высшей математики.

УДК [514+512] (075.8)
ББК 22.14+22.15я73-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное издание является четвертой частью цикла учебных пособий по курсу "Геометрия и алгебра" , читаемого для студентов ФПМИ БГУ и соответствует всем типовым программам этого курса для высших учебных заведений по специальностям: 1-31 03 03 "Прикладная математика" ; 1-31 03 04 "Информатика" ; 1-31 03 05 "Актуарная математика" ; 1-31 03 06-01 "Экономическая кибернетика ; 1-98 01 01-01 "Компьютерная безопасность" (утвержденны Министерством образования Республики Беларусь от 24.09.2008 г.), а также учебной программе Учреждения образования "Белорусский государственный университет"по учебной дисциплине "Геометрия и алгебра"для указанных выше специальностей (утвержденная 17.10.2013 г.).

Основу излагаемого материала составляют учебные пособия "Геометрия и алгебра"и "Сборник задач по геометрии и алгебре" (авторы: Размыслович Г.П., Феденя М.М., Ширяев В.М.).

Это пособие состоит из четырех глав, содержащих теоретический материал, примеры решения задач и цикл задач для самостоятельного решения с ответами.

Отметим, что в тексте используются следующие обозначения:
♦ — начало доказательства утверждения, ■ — конец доказательства, $\Rightarrow$ — необходимость или знак импликации ("следует"), $\Leftarrow$ — достаточность, $\Leftrightarrow$ — необходимость и достаточность, равносильность, $\exists$ — квантор существования ("существует"), $\forall$ — квантор общности ("для любого"), $\in$ — принадлежность.

1. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ (λ – МАТРИЦЫ)

1.1. Эквивалентные λ-матрицы. Канонические λ-матрицы

Пусть P — некоторое числовое поле.

Определение 1.1. *Полиномиальной матрицей* или λ-*матрицей* над кольцом $P[\lambda]$ называется $n \times n$- матрица $A(\lambda)$, элементы которой суть многочлены от λ, т.е. матрица вида

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \dots & f_{1n}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) & \dots & f_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda) & f_{n1}(\lambda) & \dots & f_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}, \; f_{ij}(\lambda) \in P[\lambda].$$

Элементарными преобразованиями строк (столбцов) λ-*матрицы* называют следующие две операции:
1) умножение какой-либо, например i-й, строки (столбца) на отличный от нуля элемент α из поля P;
2) прибавление к какой-либо, например i-й строке (столбцу) другой, например j-й строки (столбца), предварительно умноженной на произвольный многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$.

Так же, как и в проверяется, что операции 1) и 2) равносильны умножению λ-матрицы слева (справа) на $n \times n$- матрицы $T_{i,\alpha}, T_{i,j,f(\lambda)} (T_{i,\alpha}, T_{j,i,f(\lambda)})$ соответственно:

$$T_{i,\alpha} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & & (i) & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} & & & (i) & & (j) & & \end{array} \\
T_{i,j,f(\lambda)} = & \left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & \dots & f(\lambda) & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} & & & (i) & & (j) & & \end{array} \\
T_{j,i,f(\lambda)} = & \left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & f(\lambda) & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array},
\end{array}
$$

$$\det T_{i,\alpha} = \alpha \neq 0, \ \det T_{i,j,f(\lambda)} = \det T_{j,i,f(\lambda)} = 1.$$

Матрицы вида $T_{i,\alpha}$, $T_{i,j,f(\lambda)}$ называются *элементарными* λ*-матрицами*.

Если матрица $B(\lambda)$ получается из матрицы $A(\lambda)$ в результате применения к ней последовательной цепочки элементарных преобразований, то такие матрицы будут называться *эквивалентными* и это записывается $A(\lambda) \sim B(\lambda)$.

Ясно, исходя из определения, что перемена местами двух строк столбцов λ—матрицы является элементарным преобразованием.

Таким образом, множество λ-матриц одних и тех же размеров над кольцом $P[\lambda]$ разбивается на классы эквивалентных между собой матриц.

Очевидно, что:

1) $A(\lambda) \sim A(\lambda)$;

2) если $A(\lambda) \sim B(\lambda)$, то $B(\lambda) \sim A(\lambda)$;

3) если $A(\lambda) \sim B(\lambda)$ и $B(\lambda) \sim C(\lambda)$, то $A(\lambda) \sim C(\lambda)$.

Определение 1.2. λ-матрица $K(\lambda)$ n-го порядка над кольцом $P[\lambda]$ называется *канонической*, если существуют многочлены

$f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda) \in P[\lambda]$ такие, что:

1) $K(\lambda) = \mathrm{diag}(f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$ – диагональная матрица;

2) старший коэффициент каждого ненулевого многочлена из системы $(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$ равен единице;

3) $f_{i-1}(\lambda)|f_i(\lambda),\ \forall i,\ 2 \leq i \leq n$.

Диагональные элементы $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ канонической λ-матрицы $K(\lambda)$ называются ее *инвариантными множителями*.

Теорема 1.1. *Любая λ-матрица эквивалентна некоторой канонической λ-матрице.*

♦ Рассмотрим λ-матрицу $A(\lambda) = (a_{kl}) \in (P[\lambda])_{n,n}$. Доказательство существования канонической λ-матрицы, эквивалентной $A(\lambda)$, будем проводить индукцией по числу n. Если $A(\lambda)$ – нулевая матрица, то она сама является канонической. Далее предполагаем, что среди элементов матрицы $A(\lambda)$ есть ненулевые. Если $n = 1$, то $A(\lambda) \sim B(\lambda) = [\alpha^{-1}a_{11}(\lambda)]$, где α – старший коэффициент многочлена $a_{11}(\lambda)$. Очевидно, что $B(\lambda)$ – каноническая λ-матрица.

Пусть теперь $n > 1$. Среди λ-матриц, эквивалентных $A(\lambda)$, выберем такую матрицу $B(\lambda) = (b_{kl}(\lambda))$, что $b_{11}(\lambda)$ – ненулевой многочлен, имеющий старший коэффициент, равный единице, и наименьшую степень (которую будем обозначать m) среди ненулевых многочленов, являющихся элементами λ-матриц, эквивалентных матрице $A(\lambda)$.

Разделим с остатком многочлен $b_{j1}(\lambda)$ на $b_{11}(\lambda)$:

$$b_{j1}(\lambda) = b_{11}(\lambda)q_j(\lambda) + r_j(\lambda),\ j = \overline{2, n}, \tag{1.1}$$

где $q_j(\lambda),\ r_j(\lambda) \in P[\lambda]$;

$$\deg r_j(\lambda) < m. \tag{1.2}$$

Вычтем из j-й строки матрицы $B(\lambda)$ первую строку, умноженную на $q_j(\lambda)$. Тогда в соответствии с (1.1) получим матрицу $C(\lambda) = (c_{kl}(\lambda))$, эквивалентную матрице $A(\lambda)$ и имеющую элементы $c_{j1}(\lambda) = r_j(\lambda),\ j = \overline{2, n}$. Но из неравенства (1.2) и выбора матрицы $B(\lambda)$ следует, что $c_{j1}(\lambda) = r_j(\lambda) = 0(\lambda), 2 \leq j \leq n$. Отсюда получаем, что в первом столбце матрицы $B(\lambda)$ при помощи элементарных преобразований можно получить нули на всех местах, кроме первого. Аналогично получаем нули в первой строке на всех местах кроме первого. Таким образом, матрица $A(\lambda)$

эквивалентна некоторой матрице

$$D(\lambda) = \left[\begin{array}{c|ccc} b_{11}(\lambda) & 0(\lambda) & \dots & 0(\lambda) \\ \hline 0(\lambda) & & & \\ \vdots & & F(\lambda) & \\ 0(\lambda) & & & \end{array}\right],$$

где $F(\lambda) \in (P[\lambda])_{n-1,n-1}$. По предположению индукции матрица $F(\lambda)$ приводится элементарными преобразованиями к канонической λ-матрице. Пусть это будет матрица $\mathrm{diag}(h_1(\lambda), \dots, h_{n-1}(\lambda))$. Применяя соответствующие преобразования к матрице $D(\lambda)$, приходим к матрице

$$K(\lambda) = \mathrm{diag}(b_{11}(\lambda), h_1(\lambda), \dots, h_{n-1}(\lambda)).$$

Покажем, что $K(\lambda)$ – каноническая λ-матрица. Для этого достаточно убедиться, что многочлен $h_1(\lambda)$ делится на $b_{11}(\lambda)$. Если это не так, то $h_1(\lambda) = b_{11}(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$ для некоторых многочленов $q(\lambda)$, $r(\lambda) \in P[\lambda]$ таких, что $\deg u(\lambda) < m$ и $r(\lambda) \neq 0(\lambda)$. Но тогда, прибавив к первой строке матрицы $K(\lambda)$ ее вторую строку, а затем ко второму столбцу – первый, умноженный на $-q(\lambda)$, получим матрицу

$$\left[\begin{array}{c|ccc} b_{11}(\lambda) & r(\lambda) & \dots & 0(\lambda) \\ \hline 0(\lambda) & h_1(\lambda) & \dots & 0(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0(\lambda) & 0(\lambda) & \dots & h_{n-1}(\lambda) \end{array}\right],$$

эквивалентную матрице $A(\lambda)$ и имеющую ненулевой элемент $r(\lambda)$ степени, меньше m. Это противоречит выбору матрицы $B(\lambda)$. Следовательно, $K(\lambda)$ – каноническая λ-матрица, эквивалентная матрице $A(\lambda)$.■

Отсюда получаем один из методов построения λ–матрицы в каноническом виде эквивалентной данной.

Метод элементарных преобразований

Суть этого метода состоит в том, что исходная λ–матрица при помощи элементарных преобразований приводится к каноническому виду.

1.2. Система наибольших общих делителей миноров

Определение 1.3. *Рангом λ-матрицы* называется максимальный порядок отличных от нулевого многочлена ее миноров.

Каждый минор матрицы $A(\lambda)$ есть многочлен от λ. Пусть $d_m(\lambda)$ – наибольший общий делитель всех миноров m-го порядка матрицы $A(\lambda)$. Если матрица $A(\lambda)$ имеет ранг r и $r < n$, то $d_i(\lambda) \neq 0(\lambda)$, $i = \overline{1, r}$, а $d_j(\lambda) = 0(\lambda)$, $j = \overline{r+1, n}$.

Определение 1.4. Система многочленов $(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_n(\lambda))$ называется *системой наибольших общих делителей миноров матрицы* $A(\lambda)$.

Теорема 1.2. *Если одна λ-матрица получается из другой λ-матрицы посредством элементарных преобразований, то их системы наибольших общих делителей миноров совпадают.*

♦ Рассмотрим, например, элементарные преобразования строк матрицы $A(\lambda)$. Пусть i-я строка матрицы $A(\lambda)$ умножается на отличный от нуля скаляр $\alpha \in P$. Тогда миноры k-го порядка, в которые входят элементы i-й строки, умножаются на α, а другие миноры не изменяются. Но НОД системы многочленов не изменяется при умножении некоторых их них на отличный от нуля элемент α.

Обозначим через Θ множество всех миноров m-го порядка матрицы $A(\lambda)$, а через $d_m(\lambda)$ – их НОД. Пусть теперь к i-й строке этой матрицы прибавится j-я строка, умноженная на $g(\lambda) \in P[\lambda]$. Множество всех миноров m-го порядка полученной матрицы $\tilde{A}(\lambda)$ обозначим $\tilde{\Theta}$, а их НОД обозначим $\tilde{d}_m(\lambda)$. Ясно, что множество $\tilde{\Theta}$ отличается от множества Θ лишь теми минорами, которые содержат элементы i-й строки и не содержат элементов j-й строки. Рассмотрим один из таких миноров

$$\tilde{M}(\lambda) = \begin{vmatrix} f_{11}(\lambda) & \ldots & f_{1m}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{i1}(\lambda) + g(\lambda)f_{j1}(\lambda) & \ldots & f_{im}(\lambda) + g(\lambda)f_{jm}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{j-1,1}(\lambda) & \ldots & f_{j-1,m}(\lambda) \\ f_{j+1,1}(\lambda) & \ldots & f_{j+1,m}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{m+1,1}(\lambda) & \ldots & f_{m+1,m}(\lambda) \end{vmatrix}, 1 < i,\ j \leq m.$$

Тогда $\tilde{M}(\lambda) = M(\lambda) + g(\lambda)T(\lambda)$, где

$$M(\lambda) = \begin{vmatrix} f_{11}(\lambda) & \dots & f_{1m}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{i1}(\lambda) & \dots & f_{im}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{j-1,1}(\lambda) & \dots & f_{j-1,m}(\lambda) \\ f_{j+1,1}(\lambda) & \dots & f_{j+1,m}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{m+1,1}(\lambda) & \dots & f_{m+1,m}(\lambda) \end{vmatrix}, \quad T(\lambda) = \begin{vmatrix} f_{11}(\lambda) & \dots & f_{1m}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{j1}(\lambda) & \dots & f_{jm}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{j-1,1}(\lambda) & \dots & f_{j-1,m}(\lambda) \\ f_{j+1,1}(\lambda) & \dots & f_{j+1,m}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{m+1,1}(\lambda) & \dots & f_{m+1,m}(\lambda) \end{vmatrix},$$

причем $M(\lambda) \in \Theta$, а определитель $T(\lambda)$ может отличаться от соответствующего минора из множества Θ только лишь перестановкой строк. Так как $d_m(\lambda)|M(\lambda)$ и $d_m(\lambda)|T(\lambda)$, то $d_m(\lambda)|\tilde{M}(\lambda)$. Следовательно, $d_m(\lambda)$ является делителем любого минора из $\tilde{\Theta}$, и поэтому $d_m(\lambda)|\tilde{d}_m(\lambda)$. Обратно: прибавляя к i-й строке матрицы $\tilde{A}(\lambda)$ ее j-ю строку, умноженную на $-g(\lambda)$, получаем исходную матрицу $A(\lambda)$. Меняя местами в предыдущих рассуждениях матрицы $A(\lambda)$ и $\tilde{A}(\lambda)$, получаем $\tilde{d}_m(\lambda)|d_m(\lambda)$. Таким образом $d_m(\lambda) = \tilde{d}_m(\lambda)$.$\blacksquare$

Следствие 1.1. Системы наибольших общих делителей миноров эквивалентных матриц совпадают.

Следствие 1.2. Ранги эквивалентных матриц равны.

Пусть $A(\lambda)$ – произвольная λ-матрица, $(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda))$ – система НОД ее миноров, а $\mathrm{rank} A(\lambda) = r \leq n$. Пусть еще

$$K(\lambda) = \mathrm{diag}(f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda))$$

– каноническая матрица, эквивалентная матрице $A(\lambda)$. Так как элементарные преобразования λ-матрицы не изменяют ее ранга, то при $r < n$ имеем

$$f_{r+1}(\lambda) = f_{r+2}(\lambda) = \ldots = f_n(\lambda) = 0(\lambda).$$

На основании следствия 1.1 система НОД миноров матрицы $A(\lambda)$ совпадает с системой НОД миноров матрицы $K(\lambda)$. Следовательно, используя то, что каждый последующий инвариантный множитель делится на предыдущий, имеем

$$\begin{aligned} &d_1(\lambda) = f_1(\lambda), \\ &d_2(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &d_r(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda) \dots f_r(\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что инвариантные множители матрицы $K(\lambda)$ однозначно определяются системой многочленов $(d_1(\lambda), \ldots, d_n(\lambda))$:

$$\begin{aligned} &f_1(\lambda) = d_1(\lambda), \\ &f_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_r(\lambda) = \frac{d_r(\lambda)}{d_{r-1}(\lambda)}, \\ &f_{r+1}(\lambda) = f_{r+2}(\lambda) = \ldots = f_n(\lambda) = 0(\lambda), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где выражение $\dfrac{d_{i+1}(\lambda)}{d_i(\lambda)}$ означает частное от деления многочлена $d_{i+1}(\lambda)$ на многочлен $d_i(\lambda)$, $i = \overline{1, r-1}$. Из равенств (1.3) вытекает

Теорема 1.3. *Всякая λ-матрица эквивалентна только одной канонической λ-матрице.*

Если $K(\lambda)$ – каноническая λ-матрица, эквивалентная матрице $A(\lambda)$, то $K(\lambda)$ называется *канонической формой Смита*, или просто *канонической формой* матрицы $A(\lambda)$, а система инвариантных множителей матрицы $K(\lambda)$ – *системой инвариантных множителей* матрицы $A(\lambda)$.

Из вышеизложенного следует

Теорема 1.4 (первый критерий эквивалентности λ-матриц). Две λ-матрицы порядка n эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их системы инвариантных множителей.

Равенства (1.3) указывают еще один способ отыскания канонической λ-матрицы, эквивалентной данной λ-матрице. Этот способ называется методом НОД миноров.

Метод НОД-миноров

1) Находим систему НОД-миноров и ранг рассматриваемой матрицы $A(\lambda)$;

2) по формулам (1.3) находим систему инвариантных множителей;

3) по системе инвариантных множителей составляем каноническую форму $K(\lambda)$ исходной матрицы $A(\lambda)$.

1.3. Система элементарных делителей

Пусть $f(\lambda)$ – многочлен ненулевой степени над полем P, т.е. $f(\lambda) \in$ $\in P[\lambda]$, причем $P = R$ или $P = C$.

Известно, что многочлен $f(\lambda)$ можно представить в виде

$$f(\lambda) = a(\varphi_1(\lambda))^{k_1}(\varphi_2(\lambda))^{k_2}\dots(\varphi_s(\lambda))^{k_s},$$

где a – старший коэффициент многочлена $f(\lambda)$, а $\varphi_i(\lambda) \in P[\lambda]$ – неприводимые многочлены над полем P, причем $\varphi_i(\lambda) \neq \varphi_j(\lambda)$, если $i \neq j$.

Многочлены $(\varphi_i(\lambda))^{k_i}$, $i = \overline{1, s}$, называются *элементарными делителями многочлена* $f(\lambda)$.

Замечание 1.1. Отметим, что многочлен над полем R является неприводимым, если он имеет вид $x - \alpha$ или $x^2 + px + q$, где $\alpha, p, q \in R$, $p^2 - 4q < 0$. Многочлен над полем C является *неприводимым*, если он имеет вид $x - \beta$, где $\beta \in C$.

Рассмотрим непостоянные инвариантные множители данной λ-матрицы. Для каждого такого инвариантного множителя выпишем его систему элементарных делителей.

Определение 1.5. *Системой элементарных делителей* λ-матрицы называют объединение систем элементарных делителей всех ее непостоянных инвариантных множителей, при этом каждый элементарный делитель учитывается столько раз, во сколько систем элементарных делителей инвариантных множителей он входит.

Замечание 1.2. Система элементарных делителей существенно зависит от рассматриваемого поля P.

Замечание 1.3. Из первого критерия эквивалентности λ-матрицы следует, что если две λ-матрицы эквивалентны, то их системы элементарных делителей равны с точностью до перестановки их элементов. Но из того, что системы элементарных делителей λ-матриц равны, не следует эквивалентности λ-матриц.

Пример 1.1. Матрицы $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ имеют один и тот же элементарный делитель λ. Однако эти матрицы не являются эквивалентными, так как они имеют различные системы инвариантных множителей.

Теорема 1.5 (второй критерий эквивалентности λ-матриц). *Две λ-матрицы одного порядка над кольцом $P[\lambda]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их ранги и с точностью до перестановки элементов равны из системы элементарных делителей.*

♦ $\Rightarrow$. Доказательство следует из замечания 1.3 и следствия 1.2.

$\Leftarrow$. Покажем, что порядок матрицы $A(\lambda)$, ее ранг (обозначим из соответственно n и r) и система элементарных делителей

$$\begin{gathered}\big((\varphi_1(\lambda))^{\alpha_1}, (\varphi_1(\lambda))^{\alpha_2}, \ldots, (\varphi_1(\lambda))^{\alpha_\rho}, (\varphi_2(\lambda))^{\beta_1}, \ldots, (\varphi_2(\lambda))^{\beta_t}, \ldots, \\ (\varphi_s(\lambda))^{\gamma_1}, \ldots, (\varphi_s(\lambda))^{\nu_l}\big),\ \varphi_i(\lambda) \neq \varphi_j(\lambda),\ i \neq j,\end{gathered} \tag{1.4}$$

единственным образом определяют систему инвариантных множителей этой матрицы:

$$\big(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)\big).$$

Действительно, если $r < n$, то последние $n-r$ инвариантных множителя должны быть нулевыми, т.е.

$$f_{r+1}(\lambda) = f_{r+2}(\lambda) = \ldots = f_n(\lambda) = 0(\lambda). \tag{1.5}$$

Будем считать, что многочлены в системе (1.4) расположены так, что

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_\rho, \\ \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_l. \end{cases} \tag{1.6}$$

Пусть $m = \max\{\rho, t, \ldots, l\}$. (Очевидно, что $m \leq r$.) Перепишем неравенства (1.6) в виде

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_\rho \geq \ldots \geq \alpha_m, \\ \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_t \geq \ldots \geq \beta_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_l \geq \cdots \geq \gamma_m, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\alpha_{\rho+1} = \alpha_{\rho+2} = \ldots = \alpha_m = \beta_{t+1} = \ldots = \beta_m = \gamma_{l+1} = \ldots = \gamma_m = 0$.

Рассмотрим систему $(\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_s(\lambda))$ различных неприводимых многочленов, которые в соответствующих степенях образуют элементарные делители из системы (1.4). Так как ненулевой инвариантный множитель $f_r(\lambda)$ матрицы $A(\lambda)$ делится на все предыдущие инвариантные множители, то в его разложении на элементарные делители многочлен $\varphi_1(\lambda)$ должен входить в наибольшей степени, т.е. в степени α_1, многочлен $\varphi_2(\lambda)$ – в степени β_1 и т.д. Таким образом,

$$f_r(\lambda) = \big(\varphi_1(\lambda)\big)^{\alpha_1}\big(\varphi_2(\lambda)\big)^{\beta_1} \ldots \big(\varphi_s(\lambda)\big)^{\gamma_1}. \tag{1.8}$$

По такому же принципу из оставшихся элементарных делителей в системе (1.4) составляем инвариантный множитель $f_{r-1}(\lambda)$:

$$f_{r-1}(\lambda) = \big(\varphi_1(\lambda)\big)^{\alpha_2}\big(\varphi_2(\lambda)\big)^{\beta_2} \ldots \big(\varphi_s(\lambda)\big)^{\gamma_2} \tag{1.9}$$

и т.д. В силу неравенств (1.7) имеем

$$f_{r-m+1}(\lambda) = \big(\varphi_1(\lambda)\big)^{\alpha_m}\big(\varphi_2(\lambda)\big)^{\beta_m}\dots\big(\varphi_s(\lambda)\big)^{\gamma_m}, \tag{1.10}$$

причем $\big(\varphi_i(\lambda)\big)^0 = 1$. Если $m < r$, то

$$f_{r-m}(\lambda) = \dots = f_1(\lambda) = 1. \tag{1.11}$$

Итак, по заданным параметрам единственным образом построена системе инвариантных множителей (1.5), (1.8)–(1.11) матрицы $A(\lambda)$.

Следовательно, если две λ-матрицы имеют равные порядки, ранги и системы элементарных делителей, то системы инвариантных множителей этих матриц равны и, значит, эти матрицы эквивалентны.■

Теорема 1.6. *Система элементарных делителей диагональной λ-матрицы есть объединение систем элементарных делителей ее диагональных элементов. При этом каждый элементарный делитель учитывается столько раз, во сколько диагональных элементов он входит.*

♦ Доказательство приведем для матриц второго порядка. Рассмотрим над кольцом $P[\lambda]$ 2×2-матрицу $A(\lambda) = \mathrm{diag}\big(g_1(\lambda), g_2(\lambda)\big)$ и разложим многочлены $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ на элементарные делители:

$$\begin{aligned} g_1(\lambda) &= a_1\big(\varphi_1(\lambda)\big)^{\alpha_1}\dots\big(\varphi_i(\lambda)\big)^{\alpha_i}\dots\big(\varphi_s(\lambda)\big)^{\alpha_s},\\ g_2(\lambda) &= a_2\big(\varphi_1(\lambda)\big)^{\beta_1}\dots\big(\varphi_i(\lambda)\big)^{\beta_i}\dots\big(\varphi_s(\lambda)\big)^{\beta_s}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

В разложениях (1.12) считается, что если неприводимый многочлен $\varphi_i(\lambda)$ входит в разложение одного многочлена, скажем $g_1(\lambda)$, и не входит в разложение другого многочлена $g_2(\lambda)$, то $\beta_i = 0$.

Предположим, что для некоторого неприводимого многочлена $\varphi_j(\lambda)$, $1 \le j \le s$, входящего в разложения (1.12), $\alpha_j \ge \beta_j$. Образуем матрицу

$$B(\lambda) = \mathrm{diag}\Big(\big(\varphi_1(\lambda)\big)^{\alpha_1},\dots,\big((\varphi_j(\lambda)\big)^{\beta_j},\dots,\big((\varphi_s(\lambda)\big)^{\alpha_s},$$
$$\big((\varphi_1(\lambda)\big)^{\beta_1},\dots,\big((\varphi_j(\lambda)\big)^{\alpha_j},\dots,\big((\varphi_s(\lambda)\big)^{\beta_s}\Big).$$

Докажем, что матрица $A(\lambda)$ эквивалентна матрице $B(\lambda)$. Для этого достаточно показать, что система $\big(d_1(\lambda), d_2(\lambda)\big)$ НОД миноров матрицы

$A(\lambda)$ совпадает с системой $\left(\tilde{d}_1(\lambda), \tilde{d}_2(\lambda)\right)$ НОД миноров матрицы $B(\lambda)$. Действительно,

$$d_1(\lambda) = \left(\varphi_1(\lambda)\right)^{\gamma_1} \ldots \left(\varphi_s(\lambda)\right)^{\gamma_s} = \tilde{d}_1(\lambda),$$
$$d_2(\lambda) = \frac{1}{a_1 a_2} \det A(\lambda) = \frac{1}{a_1 a_2} \det B(\lambda) = \tilde{(}d)_2(\lambda),$$

где $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i = \overline{1, s}$. Таким образом, в разложениях диагональных элементов матрицы $A(\lambda)$ можно менять местами элементарные делители, являющиеся степенями одного и того же неприводимого многочлена, получая при этом диагональную матрицу, эквивалентную исходной.

Следовательно, матрицу $A(\lambda)$ можно элементарными преобразованиями привести к канонической матрице, имеющей ту же систему элементарных делителей, что и матрица $A(\lambda)$.

Итак, для матрицы второго порядка утверждение доказано.

Опираясь на доказанное, нетрудно провести доказательство теоремы и для матрицы произвольного порядка.■

1.4. Унимодулярные матрицы

Определение 1.6. λ-матрица называется *унимодулярной*, если ее определитель есть отличный от нуля элемент поля P.

Например, λ-матрица $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2+1 \\ \lambda^2-1 & \lambda^3 \end{bmatrix}$ унимодулярна, так как $\det A(\lambda)$=1.

Свойства унимодулярных матриц

1°. Матрица $A(\lambda)$ унимодулярна тогда и только тогда, когда все ее инвариантные множители равны единице, т.е. когда матрица $A(\lambda)$ эквивалентна единичной матрице.

♦ Пусть $\left(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)\right)$ — система инвариантных множителей матрицы $A(\lambda)$. Так как системы НОД миноров эквивалентных λ-матриц равны, то $\det A(\lambda)$ есть ненулевой элемент поля P тогда и только тогда, когда $d_n(\lambda) = 1$, т.е. когда определитель канонической матрицы, эквивалентной $A(\lambda)$, равен единице и, следовательно, $f_1(\lambda) f_2(\lambda) \ldots f_n(\lambda) = 1$. Последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $f_i(\lambda) = 1$, $i = \overline{1, n}$.■

2°. Для того чтобы λ-матрица n-го порядка была унимодулярной, необходимо и достаточно, чтобы для нее существовала обратная унимодулярная λ-матрица n-го порядка.

♦ Доказательство этого свойство следует из леммы 1.3[8] с использованием свойства многочленов нулевой степени иметь обратный многочлен в кольце многочленов.■

3°. Множество всех унимодулярных матриц n-го порядка образует группу относительно умножения.

♦Так как определитель произведения двух квадратных матриц матриц n-го порядка равен произведению их определителей, то произведение унимодулярных матриц является унимодулярной матрицей. Кроме того, единичная матрица есть унимодулярная матрица и для каждой унимодулярной матрицы обратная матрица унимодулярна.■

4°. λ-Матрица унимодулярна тогда и только тогда, когда она разлагается в произведение элементарных матриц.

♦ Пусть матрица $A(\lambda)$ унимодулярна. Тогда $A(\lambda) \sim E$, т.е. $A(\lambda)$ получается из единичной матрицы при помощи конечной цепочки элементарных преобразований. Применение одного элементарного преобразования равносильно умножению матрицы E слева или справа на элементарную матрицу. Следовательно, $A(\lambda)$ – произведение элементарных матриц.

Так как каждая элементарная матрица является унимодулярной, то их произведение также есть унимодулярная матрица.■

Теорема 1.7 (третий критерий эквивалентности матриц). *Матрицы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ n-го порядка над кольцом $P[\lambda]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда в кольце $P[\lambda]$ существуют такие унимодулярные матрицы $V(\lambda)$ и $U(\lambda)$ n-го порядка, что*

$$B(\lambda) = V(\lambda)A(\lambda)U(\lambda).$$

♦ Так как применение к λ-матрице элементарного преобразования равносильно умножению ее слева или справа на подходящую элементарную матрицу, то $B(\lambda) \sim A(\lambda)$ тогда и только тогда, когда существуют такие элементарные матрицы $V_1(\lambda), V_2(\lambda), \ldots, V_k(\lambda), U_1(\lambda), U_2(\lambda), \ldots, U_m(\lambda)$ n-го порядка, что

$B(\lambda) = V(\lambda)A(\lambda)U(\lambda)$, где

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= V_k(\lambda) \cdot \ldots \cdot V_2(\lambda) \cdot V_1(\lambda), \\ U(\lambda) &= U_1(\lambda) \cdot U_2(\lambda) \cdot \ldots \cdot U_m(\lambda) \end{aligned} \tag{1.13}$$

есть унимодулярные матрицы (в силу свойства 4° унимодулярных матриц).■

1.5. Критерий подобия матриц

Нетрудно видеть, что любую λ-матрицу $A(\lambda)$ n-го порядка над кольцом $P[\lambda]$ можно представить в виде

$$A(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0,$$

где A_i, $i = \overline{0, m}$, квадратные матрицы n-го порядка над полем P.

Выражение $A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + A_0$ называется *матричным многочленом* от λ n-го порядка, матрицы A_i – его *коэффициентами*, матрица $A_m\lambda^m$, $A_m \neq O_{n,n}$, – *старшим членом*, число m – его *степенью*. Если коэффициенты матричного многочлена суть нулевые матрицы, то будем считать, что его степень равна $-\infty$.

Таким образом, любая λ-матрица является матричным многочленом.

Верно и обратное: любой матричный многочлен является λ-матрицей.

Пример 1.2.

$$\begin{bmatrix} \lambda^3 - 1 & -4\lambda^2 + 3 \\ \lambda^2 + 6\lambda & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пусть F – некоторая заданная $n \times n$- матрица над полем P. Рассмотрим отображение

$$A(\lambda) \overset{F}{\mapsto} A(F) = \sum_{i=1}^{m} A_i F^i, \tag{1.14}$$

т.е. матричному многочлену $A(\lambda)$ поставим в соответствие постоянную квадратную матрицу $A(F)$ n-го порядка над полем P.

Заметим, что если для многочлена $f(\lambda) \in P[\lambda]$ можно записать $f(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_0 = \lambda^m a_m + \lambda^{m-1}a_{m-1} + \ldots + a_0$, то, вообще говоря, для матричных многочленов с матричными аргументами аналогичное равенство неверно, т.е.

$$\sum_{i=0}^{m} A_i F^i \neq \sum_{i=0}^{m} F^i A_i.$$

Поэтому для матричного многочлена $A(\lambda)$ при $\lambda = F$ его *правое значение* $A(F)$ определим формулой (1.14), а *левое значение* $\tilde{A}(F)$ – формулой

$$\tilde{A}(F) = \sum_{i=0}^{m} F^i A_i.$$

Читатель легко может проверить, что для любых матриц $A(\lambda)$, $B(\lambda) \in$ $\in (P[\lambda])_{n,n}$ верны следующие утверждения.

1°. Если $A(\lambda) = B(\lambda)$, то $A(F) = B(F), \forall F \in P_{n,n}$.

2°. $A(F) + B(F) = (A + B)(F), \forall F \in P_{n,n}$.

3°. В общем случае $A(F)B(F) \neq AB(F),\ F \in P_{n,n}$.

Пример 1.3. Пусть

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим правые значения $A(F)B(F)$ и $(AB)(F)$. Так как

$$A(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(AB)(\lambda) = A(\lambda)B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda,$$

то

$$A(F)B(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (AB)(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $A(F)B(F) \neq (AB)(F)$.

Аналогичные утверждения, указанные выше, верны и для левых значений $\tilde{A}(F),\ \tilde{B}(F)$.

Теорема 1.8 (критерий подобия матриц). *Две матрицы A и B одного и того же порядка над полем P подобны тогда и только тогда, когда их характеристические матрицы эквивалентны.*

♦ $\Rightarrow$. Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда над полем P существует невырожденная $n \times n$- матрица S такая, что

$$B = S^{-1}AS \Rightarrow B - \lambda E = S^{-1}AS - S^{-1}\lambda ES = S^{-1}(A - \lambda E)S.$$

На основании третьего критерия эквивалентности λ-матриц заключаем, что $B - \lambda E \sim A - \lambda E$.

$\Leftarrow$. Если $A - \lambda E \sim B - \lambda E$, то существуют такие унимодулярные матрицы $V(\lambda)$ и $U(\lambda)$, что

$$B - \lambda E = V(\lambda)(A - \lambda E)U(\lambda). \tag{1.15}$$

Для унимодулярной матрицы $V(\lambda)$ существует обратная унимодулярная матрица $S(\lambda)$, и в силу (1.15) имеем

$$S(\lambda)(B - \lambda E) = (A - \lambda E)U(\lambda). \tag{1.16}$$

Представим матрицы $S(\lambda)$ и $U(\lambda)$ в виде матричных многочленов:

$$S(\lambda) = \sum_{j=0}^{l} S_j \lambda^j, \quad U(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} U_i \lambda^i.$$

Заменив в равенстве (1.16) матрицы $S(\lambda)$ и $U(\lambda)$ их матричными многочленами, получим

$$\begin{gathered}\Big(\sum_{j=0}^{l} S_j \lambda^j\Big)(B - \lambda E) = (A - \lambda E)\Big(\sum_{i=0}^{k} U_i \lambda^i\Big) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^{l} S_j \lambda^j B - \sum_{j=0}^{l} S_j \lambda^{j+1} = A \sum_{i=0}^{k} U_i \lambda^i - \sum_{i=0}^{k} U_i \lambda^{i+1}.\end{gathered} \tag{1.17}$$

Так как из равенства матричных многочленов следует равенство их правых значений при $\lambda = B$, то из (1.17) имеем

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{l} S_j B^{j+1} - \sum_{j=0}^{l} S_j B^{j+1} = A \sum_{i=0}^{k} U_i B^i - \sum_{i=0}^{k} U_i B^{i+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow O = AU(B) - U(B)B \Rightarrow AU(B) = U(B)B \Rightarrow AS = SB,\end{gathered} \tag{1.18}$$

где

$$S = U(B). \tag{1.19}$$

Осталось доказать, что S — невырожденная матрица.

Пусть $D(\lambda) = \sum\limits_{\gamma=0}^{m} D_\gamma \lambda^\gamma$ — обратная матрица к матрице $U(\lambda)$. Тогда

$$E_n = D(\lambda)U(\lambda) = \Big(\sum_{\gamma=0}^{m} D_\gamma \lambda^\gamma\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k} U_i \lambda^i\Big) = \Big(\sum_{\gamma=0}^{m} D_\gamma \Big(\sum_{i=0}^{k} U_i \lambda^{\gamma+i}\Big)\Big).$$

Заменив в равенстве $E_n = \sum\limits_{\gamma=0}^{m}\sum\limits_{i=0}^{k} D_\gamma U_i \lambda^{i+\gamma}$ переменную λ на матрицу B, получим

$$E_n = \sum_{\gamma=0}^{m} D_\gamma \sum_{i=0}^{k} U_i B^{i+\gamma} = \sum_{\gamma=0}^{m} D_\gamma S B^\gamma = [SB^\gamma = A^\gamma S,\ \forall\gamma \in N] =$$
$$= \sum_{\gamma=0}^{m} D_\gamma A^\gamma S = D(A)S.$$

Таким образом, $E = D(A)S$, т.е. S — невырожденная матрица. ■

В приложениях часто требуется не только установить подобие матриц A и B, но и найти трансформирующую матрицу S. Как доказано выше, если A и B — подобные матрицы, то $B - \lambda E \sim A - \lambda E$ и, следовательно, $B - \lambda E$ и $A - \lambda E$ имеют одну и ту же каноническую форму $K(\lambda)$. В силу третьего критерия эквивалентности λ-матриц имеем

$$K(\lambda) = V^{(1)}(\lambda)(B - \lambda E)U^{(1}(\lambda) = V^{(2)}(\lambda)(A - \lambda E)U^{(2)}(\lambda), \qquad (1.20)$$

причем унимодулярные матрицы $V^{(i)}(\lambda)$, $U^{(i)}(\lambda)$, $i = 1, 2$, разлагаются в произведение элементарных матриц:

$$V^{(i)}(\lambda) = V_{k_i}^{(i)}(\lambda) \cdot V_{k_i-1}^{(i)}(\lambda) \cdot \ldots \cdot V_1^{(i)}(\lambda) = V_{k_i}^{(i)}(\lambda) \cdot V_{k_i-1}^{(i)}(\lambda) \cdot \ldots \cdot V_1^{(i)}(\lambda) \cdot E_n,$$
$$U^{(i)}(\lambda) = U_1^{(i)}(\lambda) \cdot U_2^{(i)}(\lambda) \cdot \ldots \cdot U_{m_i}^{(i)}(\lambda) = E_n \cdot U_1^{(i)}(\lambda) \cdot U_2^{(i)}(\lambda) \cdot \ldots \cdot U_{m_i}^{(i)}(\lambda).$$

Отсюда для определения матриц $V^{(i)}(\lambda)$ и $U^{(i)}(\lambda)$ требуется цепочки элементарных преобразований, переводящие матрицы $B - \lambda E$, $A - \lambda E$ к $K(\lambda)$, применить в том же порядке к единичной матрице.

Положив

$$V(\lambda) = \left(V^{(1)}(\lambda)\right)^{-1} \cdot V^{(2)}(\lambda), \quad U(\lambda) = U^{(2)}(\lambda) \cdot \left(U^{(1)}(\lambda)\right)^{-1},$$

из формулы (1.20) получим $B - \lambda E = V(\lambda)(A - \lambda E)U(\lambda)$. Наконец, для вычисления трансформирующей матрицы S воспользуемся формулой (1.19):

$$S = U(B).$$

1.6. Минимальный многочлен матрицы

Рассмотрим над полем P многочлен $f(\lambda)$ вида

$$f(\lambda) = \alpha_0\lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1}\lambda + \alpha_k, \quad \alpha_i \in P, \qquad (1.21)$$

и некоторую квадратную матрицу $A \in P_{n,n}$.

Определение 1.7. Многочлен $f(\lambda)$ над полем P называется *аннулирующим многочленом квадратной матрицы* A если

$$f(A) = 0, \tag{1.22}$$

т.е. $\alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} A + \alpha_k E_n = 0_{n,n}$.

Теорема 1.9 (теорема Гамильтона – Кели). *Характеристический многочлен матрицы является аннулирующим для нее.*

♦ Если $\Delta(\lambda)$ – характеристический многочлен матрицы $A \in P_{n,n}$, а $B(\lambda)$ – присоединенная матрица к матрице $A - \lambda E$, то в соответствии с равенствами (1.20) [см.], которые верны и для матриц над кольцом $P[\lambda]$, имеем

$$(A - \lambda E_n) B(\lambda) = B(\lambda)(A - \lambda E_n) = \Delta(\lambda) E_n. \tag{1.23}$$

Представив λ-матрицу $B(\lambda)$ в виде матричного многочлена и умножив его справа (слева) на матричный многочлен $(A - \lambda E_n)$, из равенства (1.23) после замены переменной λ матрицей A получаем $\Delta(A) = 0_{n,n}$.■

Из этой теоремы следует, что для любой квадратной матрицы A порядка n существует, по крайней мере, хотя бы один аннулирующий многочлен.

Определение 1.8. Аннулирующий многочлен матрицы A называется *минимальным многочленом матрицы* A, если его старший коэффициент равен единице и он является многочленом наименьшей степени среди ненулевых всех аннулирующих многочленов матрицы A.

Теорема 1.10. *Минимальный многочлен матрицы определен однозначно.*

♦ Пусть $m_1(\lambda), m_2(\lambda)$ – минимальные многочлены матрицы A. Положим $m(\lambda) = m_1(\lambda) - m_2(\lambda)$. Ясно, что $\deg m(\lambda) < \deg m_1(\lambda) = \deg m_2(\lambda)$. Так как $m(A) = 0$, то $m(\lambda)$ является аннулирующим многочленом матрицы A и, по определению минимального многочлена, $m(\lambda) = 0(\lambda)$, т.е. $m_1(\lambda) = m_2(\lambda)$.■

Теорема 1.11. *Любой аннулирующий многочлен матрицы делится на минимальный многочлен этой матрицы.*

♦ Пусть $f(\lambda)$ – произвольный анналирующий многочлен матрицы A, а $m(\lambda)$ – ее минимальный многочлен. Разделим с остатком многочлен $f(\lambda)$ на $m(\lambda)$:

$$f(\lambda) = m(\lambda) g(\lambda) + r(\lambda), \tag{1.24}$$

причем $\deg r(\lambda) < \deg m(\lambda)$. Заменяя в равенстве (1.24) λ матрицей A и учитывая, что $f(A) = m(A) = O_{n,n}$, получаем $r(A) = O_{n,n}$. Следовательно, $r(\lambda) = 0(\lambda)$ по определению минимального многочлена.■

Теорема 1.12 *Минимальные многочлены подобных матриц равны.*

♦ Пусть A и B – подобные матрицы, т.е. $B = S^{-1}AS$ для некоторой матрицы S, а $m_1(\lambda) = \lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1}\lambda + \alpha_k$, $m_2(\lambda) = \lambda^l + \beta_1\lambda^{l-1} + \ldots + \beta_{l-1}\lambda + \beta_l$ – минимальные многочлены матриц A иB соответственно. Тогда, с одной стороны,

$$\begin{gathered}O_{n,n} = m_2(B) = B^l + \beta_1 B^{l-1} + \ldots + \beta_{l-1}B + \beta_l E_n = \\ = [B^i = S^{-1}A^iS,\ \forall i \in N] = S^{-1}A^lS + \beta_1 S^{-1}A^{l-1}S + \ldots + \beta_{l-1}S^{-1}AS + \\ + \beta_l S^{-1}E_nS = S^{-1}(A^l + \beta_1 A^{l-1}S + \ldots + \beta_{l-1}A + \beta_l E_n)S \Rightarrow \\ \Rightarrow A^l + \beta_1 A^{l-1} + \ldots + \beta_{l-1}A + \beta_l E_n = O_{n,n}.\end{gathered}$$

Значит, $m_2(\lambda)$ является аннулирующим многочленом матрицы A и, следовательно, он делится на минимальный многочлен $m_1(\lambda)$, т.е. представим в виде

$$m_2(\lambda) = m_1(\lambda)g_1(\lambda). \tag{1.25}$$

С другой стороны, аналогичным образом можно показать, что $m_1(\lambda)$ – аннулирующий многочлен матрицы B и, значит,

$$m_1(\lambda) = m_2(\lambda)g_2(\lambda). \tag{1.26}$$

Учитывая, что старшие коэффициенты многочленов $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$равны единице, из равенств (1.25) и (1.26) имеем $m_1(\lambda) = m_2(\lambda)$.■

Рассмотрим над кольцом $P[\lambda]$ матричный многочлен порядка n :

$$A(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0. \tag{1.27}$$

Лемма 1.1. Пусть (1.27) – матричный многочлен, B – матрица порядка n над полем P, $B(\lambda) = B - E_n\lambda$. Тогда существуют матрицы $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ над кольцом $P[\lambda]$ такие, что

$$A(\lambda) = C(\lambda)B(\lambda) + A(B), \tag{1.28}$$

$$A(\lambda) = B(\lambda)D(\lambda) + \tilde{A}(B). \tag{1.29}$$

Матрицы $C(\lambda)$ и $D(\lambda)$ единственны.

♦ Докажем равенство (1.28). (Равенство (1.29) доказывается аналогично.) Умножим обе части равенства

$$B^j - E_n\lambda^j = (B^{j-1} + B^{j-2}\lambda + \ldots + B\lambda^{j-2} + E_n\lambda^{j-1})(B - E_n\lambda)$$

слева на матрицу A_j и сложим почленно полученные равенства при $j = \overline{1, m}$. Правая часть результирующего равенства будет иметь вид $C(\lambda)(B - E_n\lambda)$, где $C(\lambda)$ есть λ-матрица. Левая часть принимает вид

$$\sum_{j=1}^{m} A_j\lambda^j - \sum_{j=1}^{m} A_jB^j = \sum_{j=0}^{m} A_j\lambda^j - \sum_{j=0}^{m} A_jB^j = A(\lambda) - A(B).$$

Таким образом, имеем

$$A(\lambda) - A(B) = C(\lambda)(B - E_n\lambda),$$

т.е. равенство (1.28) выполняется.

Докажем теперь единственность матрицы $C(\lambda)$. Предположим от противного, что над кольцом $P[\lambda]$ существует другая матрица $\tilde{C}(\lambda)$ такая, что

$$A(\lambda) = \tilde{C}(\lambda)B(\lambda) + A(B). \tag{1.30}$$

Вычитая почленно (1.30) из (1.28), получаем

$$O_{n,n} = [C(\lambda) - \tilde{C}(\lambda)]B(\lambda). \tag{1.31}$$

Если бы $C(\lambda) - \tilde{C}(\lambda) \neq O_{n,n}$, то степень матричного многочлена в правой части равенства (1.31) равнялась бы сумме степеней матричных многочленов $B(\lambda)$ и $C(\lambda) - \tilde{C}(\lambda)$ и потому была бы больше единицы. Но в то же время левая часть – это матричный многочлен степени $-\infty$. Итак, имеем противоречие. Следовательно, $C(\lambda) = \tilde{C}(\lambda)$.■

Следствие 1.3. Для того чтобы для матричных многочленов $A(\lambda)$, $B - E_n\lambda$ существовал матричный многочлен $C(\lambda)$ (соответственно $D(\lambda)$) такой, что$A(\lambda) = C(\lambda)(B - E_n\lambda)$ (соответственно $A(\lambda) = (B - E_n\lambda)D(\lambda)$), необходимо и достаточно, чтобы $A(B) = O_{n,n}$ (соответственно $\hat{A}(B) = O_{n,n}$).

Матричные многочлены $C(\lambda)$ и $D(\lambda)$ единственны.

Теорема 1.13. *Минимальный многочлен матрицы равен последнему инвариантному множителю ее характеристической матрицы.*

♦ Обозначим через $d_{n-1}(\lambda)$ НОД всех миноров $(n-1)$-го порядка характеристической матрицы $A - \lambda E_n$ матрицы A, т.е. НОД всех элементов присоединенной матрицы $B(\lambda)$. Тогда

$$B(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)D(\lambda), \tag{1.32}$$

где $D(\lambda)$ – некоторая λ-матрица, НОД всех элементов которой равен единице. Из (1.23) и (1.32) находим

$$\Delta(\lambda)E_n = (A - \lambda E_n)D(\lambda)d_{n-1}(\lambda). \tag{1.33}$$

Так как

$$\frac{(-1)^n\Delta(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} = f_n(\lambda), \tag{1.34}$$

где $f_n(\lambda)$ – последний инвариантный множитель матрицы $A - \lambda E_n$, то равенство (1.33) эквивалентно равенству

$$f_n(\lambda)E_n = (-1)^n(A - \lambda E_n)D(\lambda), \tag{1.35}$$

откуда имеем $f_n(A) = O_{n,n}$. Таким образом, последний инвариантный множитель матрицы $A - \lambda E_n$ является аннулирующим многочленом матрицы A. Докажем, что это минимальный многочлен.

Обозначим через $m(\lambda)$ минимальный многочлен матрицы A. Тогда $f_n(\lambda)$ делится на $m(\lambda)$, т.е. существует многочлен $g(\lambda)$ такой, что выполняется равенство

$$f_n(\lambda) = m(\lambda)g(\lambda). \tag{1.36}$$

Поскольку $m(A)E_n = O_{n,n}$, то в силу следствия 1.3 матричный многочлен $m(\lambda)E_n$ можно представить в виде

$$m(\lambda)E_n = (A - \lambda E_n)\tilde{D}(\lambda). \tag{1.37}$$

Из равенств (1.36) и (1.37) имеем

$$f_n(\lambda)E_n = (A - \lambda E_n)\tilde{D}(\lambda)g(\lambda). \tag{1.38}$$

Используя (1.35), (1.38) и следствие 1.3, получаем

$$D(\lambda) = (-1)^n\tilde{D}(\lambda)g(\lambda).$$

Отсюда следует, что $g(\lambda)$ является общим делителем всех элементов λ-матрицы $D(\lambda)$. Но, как сказано выше, НОД всех элементов матрицы $D(\lambda)$ равен единице. Следовательно, $g(\lambda)$ есть элемент поля P. Так как старшие коэффициенты в многочленах $m(\lambda)$ и $f_n(\lambda)$ равны единице, то в (1.36) т.е. $f_n(\lambda) = m(\lambda)$.■

Учитывая, что инвариантный множитель $f_n(\lambda)$ матрицы A делится на каждый из инвариантных множителей $f_i(\lambda),\ i = \overline{1, n-1}$, и используя формулу

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda)\ldots f_n(\lambda) = (-1)^n\Delta(\lambda),$$

из теоремы 1.13 имеем следующее

Следствие 1.4. Всякий корень характеристического многочлена матрицы A является корнем ее минимального многочлена (возможно, другой кратности).

2. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ МАТРИЦ

2.1. Жорданова нормальная форма матрицы

В параграфе 4.4 [10] множество всех квадратных матриц одного и того же порядка над полем P было разбито на классы подобных матриц. Критерий подобия матриц доказан в пункте 1.5. Здесь рассмотрим следующую задачу: в классе подобных матриц выбрать матрицу, имеющую по возможности более простой вид. Частично эта задача была решена в теореме 4.10 [см.10]: для того чтобы $n \times n$ матрица A преобразования f векторного пространства V над полем P была подобна диагональной, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве V существовал базис из собственных векторов преобразования f. Но базис из собственных векторов существует не всегда. В этом случае, как уже указывалось, при $P = C$ в пространстве V для преобразования f существует жорданов базис. Выясним, какой вид будет иметь матрица линейного преобразования f в жордановом базисе.

Квадратная матрица m-го порядка вида

$$J_m(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

называется *клеткой Жордана* (или *жордановой клеткой*) и обозначается $J_m(\alpha)$.

Например,

$$J_1(3) = [3],\ J_2(-2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ J_3(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица клетки Жордана имеет вид

$$J_m(\alpha) - \lambda E_n = \begin{bmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha-\lambda \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Вычислим инвариантные множители матрицы (2.2). Найдем сначала систему $\big(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_m(\lambda)\big)$ наибольших общих делителей ее миноров. Очевидно, что

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, \dots, d_{m-1}(\lambda) = 1, d_m(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m.$$

Отсюда

$$f_1(\lambda) = 1, f_2(\lambda) = 1, \dots, f_{m-1}(\lambda) = 1, f_m(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m.$$

Таким образом, матрица (2.2) имеет лишь один непостоянный инвариантный множитель $f_m(\lambda) = (\lambda-\alpha)^m$ и, следовательно, $(\lambda-\alpha)^m$ – единственный элементарный делитель этой матрицы.

Итак доказана

Лемма 2.1. Характеристическая матрица клетки Жордана m-го порядка имеет лишь один элементарный делитель: $(\lambda-\alpha)^m$.

Блочно-диагональная матрица, у которой все диагональные блоки являются клетками Жордана, т.е. матрица вида

$$J = \operatorname{diag}\big(J_{m_1}(\alpha_1), J_{m_2}(\alpha_2), \dots, J_{m_s}(\alpha_s)\big), \tag{2.3}$$

называется *жордановой матрицей* (или *матрицей Жордана*).

Лемма 2.2. Система элементарных делителей характеристической матрицы жордановой матрицы есть объединение системы элементарных делителей характеристических матриц ее клеток Жордана.

♦ Характеристическая матрица жордановой матрицы (2.3) имеет вид

$$J-\lambda E_n = \operatorname{diag}\big(J_{m_1}(\alpha_1)-\lambda E_{m_1}, J_2(\alpha_2)-\lambda E_{m_2}, \dots, J_{m_s}(\alpha_s)-\lambda E_{m_s}\big). \tag{2.4}$$

При помощи элементарных преобразований каждый диагональный блок $J_{m_i}(\alpha_i) - \lambda E_{m_i}$ матрицы (2.4) приводим к каноническому виду $\operatorname{diag}\big(1, 1, \dots, (\lambda-\alpha_i)^{m_i}\big)$, а затем, применяя соответствующим образом эти преобразования ко всей матрице (2.4), получаем

$$J - \lambda E \sim \operatorname{diag}\big(1, \dots, (\lambda-\alpha_1)^{m_1}, 1, \dots, (\lambda-\alpha_2)^{m_2}, \dots, 1, \dots, (\lambda-\alpha_s)^{m_s}\big).$$

Отсюда, используя теорему 1.6, имеем систему $\big((\lambda-\alpha_1)^{m_1}, (\lambda-\alpha_2)^{m_2}, \ldots, (\lambda-\alpha_s)^{m_s}\big)$ элементарных делителей λ-матрицы (2.4).■

Замечание 2.1. Из леммы 2.2 следует, что набор клеток Жордана жордановой матрицы однозначно определяется системой элементарных делителей ее характеристической матрицы.

Теорема 2.1. Две жордановы матрицы одного порядка подобны тогда и только тогда, когда они различаются только лишь порядком расположения клеток Жордана на главной диагонали.

♦ Пусть J_1 и J_2 — две жордановы матрицы порядка n. Из критерия подобия матриц следует, что матрицы J_1 и J_2 подобны тогда и только тогда, когда $J_1-\lambda E_n \sim J_2-\lambda E_n$. Так как $\mathrm{rank}(J_1-\lambda E_n)=\mathrm{rank}(J_2-\lambda E_n)=n$, то для того чтобы матрицы $J_1-\lambda E_n,\ J_2-\lambda E_n$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их системы элементарных делителей получались друг из друга перестановкой элементов. На основании замечания 2.1 последнее будет выполняться, если наборы диагональных клеток Жордана матриц J_1 и J_2 совпадают.■

Теорема 2.2 (теорема Жордана). Любая квадратная матрица над полем C подобна некоторой жордановой матрице, причем жорданова матрица определяется однозначно с точностью до порядка расположения жордановых клеток на диагонали.

♦ Рассмотрим $n\times n$-матрицу A над полем C. Составим характеристическую матрицу $A-\lambda E_n$. Поскольку матрица $A-\lambda E_n$ рассматривается над кольцом $C[\lambda]$, то ее система элементарных делителей имеет вид

$$\big((\lambda-\alpha_1)^{m_1}, (\lambda-\alpha_2)^{m_2}, \ldots, (\lambda-\alpha_s)^{m_s}\big),\ \alpha_i\in C,\ i=\overline{1,s}, \qquad (2.5)$$

причем сумма $m_1+m_2+\ldots+m_s$ равна степени характеристического многочлена матрицы A, т.е. равна n. Пусть J — такая жорданова матрица, для которой система многочленов (2.5) является системой элементарных делителей ее характеристической матрицы. В силу того, что характеристические матрицы матриц A и J имеют одну и ту же систему элементарных делителей и $\mathrm{rank}(A-\lambda E_n)=\mathrm{rank}(J-\lambda E_n)=n$, то по второму критерию эквивалентности λ-матриц их характеристические матрицы эквивалентны, и, следовательно, по критерию подобия матриц матрица J подобна матрице A. Докажем, что жорданова матрица J, подобная матрице A единственна с точностью до порядка расположения клеток Жордана на диагонали. Пусть $\tilde{J}$ — другая жорданова матрица, подобная матрице A. Тогда матрицы J и $\tilde{J}$ подобны. Используя теорему 2.1 заключаем, что матрицы J и $\tilde{J}$ различаются только порядком расположения клеток на диагонали.■

Определение 2.1. Если A — некоторая квадратная матрица над полем P, а J — жорданова матрица, подобна матрице A, то матрицу J называют *жордановой нормальной формой* матрицы A.

Следствие 2.1. Для того чтобы квадратная матрица над полем C была подобна диагональной, необходимо и достаточно, чтобы элементарные делители ее характеристической матрицы были многочленами первой степени.

Из доказательства теоремы Жордана следует способ построения жордановой нормальной формы заданной матрицы A над полем C.

Первый метод построения жордановой нормальной формы матрицы

1) Составляем характеристическую матрицу $A - \lambda E_n$;

2) находим систему ее элементарных делителей;

3) по найденной системе элементарных делителей строим жорданову нормальную форму. Каждому элементарному делителю будет соответствовать клетка Жордана. Например, если матрица $A - \lambda E_n$ имеет элементарный делитель вида $(\lambda - \alpha_i)^{m_i}$, то ему соответствует клетка Жордана $J_{m_i}(\alpha_i)$.

Лемма 2.3. Если действительные $n \times n$ матрицы A и B, т.е. матрицы с действительными элементами, подобны над полем C, то матрицы A и B подобны и над полем R.

♦ Так как матрицы A и B подобны над полем C, то существует невырожденная матрица S над полем C такая, что $B = S^{-1}AS$ или $SB = AS$. Представим S в виде $S = S_1 + iS_2$, где S_1 и S_2 — вещественные матрицы. Тогда справедливы следующие равенства: $S_1B = AS_1,\ S_2B = AS_2$. Поэтому для любого $\lambda \in C$ имеет место соотношение

$$(S_1 + \lambda S_2)B = A(S_1 + \lambda S_2). \tag{2.6}$$

Отметим, что $\det(S_1 + \lambda S_2)$ есть многочлен от λ. Поэтому если $\det(S_1 + \lambda S_2) = 0$ для любого $\lambda \in C$, то этот многочлен нулевой. Но $\det(S_1 + iS_2) \neq 0$, следовательно, $\det(S_1 + \lambda S_2) = 0$ лишь для конечного числа значений $\lambda \in C$. Тогда существует такое действительное число μ, что $\det(S_1 + \mu S_2) \neq 0$. Поэтому из (2.6) следует, что вещественная матрица $S_1 + \mu S_2$ трансформирует матрицу A к матрице B.■

Следствие 2.2. Если все характеристические числа матрицы $A \in R_{n,n}$ являются действительными, то матрица A подобна над полем R некоторой жордановой матрице J.

Теперь, опираясь на теорему Жордана, докажем теорему о жордановом базисе (см. теорему 4.17 [10]).

Пусть f — некоторое линейное преобразование векторного пространства V над полем C, а A_f —его матрица в базисе G этого пространства. По теореме Жордана матрица A_f подобна над полем C жордановой матрице J, т.е. найдется невырожденная матрица S над полем C такая, что $J = S^{-1}AS$. Согласно результатов параграфа 4.4 [10] существует базис G' такой, что матрица J является матрицей оператора f в этом базисе, а S есть матрица перехода от G к G'. Докажем, что базис G' является жордановым. Действительно, пусть $G' = (\boldsymbol{g}'_1, \boldsymbol{g}'_2, \dots, \boldsymbol{g}'_n)$ и пусть

$$J = \operatorname{diag}\big(J_{m_1}(\alpha_1), J_{m_2}(\alpha_2), \dots, J_{m_s}(\alpha_s)\big),$$

$\sum\limits_{i=1}^{s} m_i = n,\ \alpha_i \in C,\ i = \overline{1, s}$. Так как J есть матрица оператора f в базисе G', то ее столбцы являются координатными столбцами образов базисных векторов из G' при отображении f. Отсюда получаем равенства

$$\begin{gathered} f(\boldsymbol{g}'_1) = \alpha_1 \boldsymbol{g}'_1, \\ f(\boldsymbol{g}'_2) = \boldsymbol{g}'_1 + \alpha_1 \boldsymbol{g}'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(\boldsymbol{g}'_{m_1}) = \boldsymbol{g}'_{m_1-1} + \alpha_1 \boldsymbol{g}'_{m_1}, \\ f(\boldsymbol{g}'_{m_1+1}) = \alpha_2 \boldsymbol{g}'_{m_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(\boldsymbol{g}'_n) = \boldsymbol{g}'_{n-1} + \alpha_s \boldsymbol{g}'_n. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Это и означает, что G' — жорданов базис.■

Замечание 2.2. Из доказательства теоремы о жордановом базисе следует, что если A_f есть матрица линейного преобразования f в базисе G, а матрица S трансформирует ее к жордановой матрице J, то столбцами матрицы S являются координатные столбцы жорданового базиса G' в базисе G.

Следствие 2.3. Из формул (2.7) следует, что диагональные элементы жордановой матрицы есть характеристические числа любой матрицы, подобной ей.

Замечание 2.3. Число клеток Жордана в жордановой нормальной форме матрицы A равно $\sum\limits_{i=1}^{s} \dim L_{\lambda_i}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — все попарно различные характеристические числа матрицы A. Это позволяет строить жорданову нормальную форму $n \times n$-матрицы A и трансформирующую матрицу S для случая $n \le 3$. При этом, используя замечание 2.2, матрицу S можно найти способом, более простым, чем способ, изложенный выше.

Второй метод построения жордановой нормальной формы матрицы

1) Составляем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E_n) = 0$ матрицы A;

2) вычисляем характеристические числа и их кратности;

3) для каждого характеристического числа λ_i кратности k_i находим линейно независимую систему из k_i координатных столбцов собственных и присоединенных векторов преобразования f с матрицей A, соответствующих этому характеристическому числу. Полученная система столбцов будет системой столбцов трансформирующей матрицы S, а матрица преобразования f в полученном жордановом базисе — жордановой нормальной формой J матрицы A.

2.2. Нормальная форма Фробениуса

Укажем еще одну нормальную форму матрицы $A \in P_{n,n}$ существующую над любым полем P.

Итак, пусть P — произвольное поле, а $g(\lambda) \in P[\lambda]$ — многочлен степени k ($k \ge 1$) над кольцом $P[\lambda]$ вида

$$g(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0,\ a_i \in P,\ i = \overline{0, k-1}.$$

Определение 2.2. Квадратная матрица F порядка k вида

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad (2.8)$$

называется клеткой Фробениуса, сопровождающей многочлен $g(\lambda)$.

Пример 2.1.

1) $g(\lambda) = \lambda - 1 \Rightarrow F = [1]$;

2) $g(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1 \Rightarrow F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $g(\lambda) = \lambda^3 \Rightarrow F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Лемма 2.4. Характеристическая матрица $F - \lambda E_k$ клетки Фробениуса F имеет следующую систему инвариантных множителей

$$\big(1, 1, , \ldots, 1, g(\lambda)\big), \tag{2.9}$$

или, другими словами говоря,

$$F - \lambda E_k \sim \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, g(\lambda)).$$

♦ Составляем характеристическую матрицу

$$F - \lambda E_k = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ldots & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{k-1} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Найдем систему $\big(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_k(\lambda)\big)$ – НОД-миноров. Очевидно, что $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \ldots = d_{k-1}(\lambda) = 1$. Вычислим $d_k(\lambda)$. Для этого найдем характеристический многочлен

$$\det(F - \lambda E_k) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ldots & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{k-1} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по последнему столбцу, имеем

$$\det(F - \lambda E_n) = (-a_0)(-1)^{k+1} \cdot 1 + (-a_1)(-1)^{k+2}(-\lambda) + (-a_2)(-1)^{k+3}(-\lambda)^2 +$$
$$+ \ldots + (-a_{k-2})(-1)^{k-1+k}(-\lambda)^{k-2} + (-a_{k-1} - \lambda)(-1)^{k+k}(-\lambda)^{k-1} =$$
$$= (-1)^k(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k) \Rightarrow d_k(\lambda) = g(\lambda).$$

Но тогда $f_1(\lambda) = \ldots = f_{k-1}(\lambda) = 1,\ f_k(\lambda) = g(\lambda)$.■

Пусть

$$\big(g_1(\lambda), g_2(\lambda), \ldots, g_m(\lambda)\big) \tag{2.10}$$

система многочленов над кольцом $P[\lambda]$, такие, что $\deg g_i = k_i \geq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$, и для любого $i,\ 1 \leq i \leq m - 1$, многочлен $g_i | g_{i+1}$, причем старший коэффициент каждого из них равен 1. Пусть, далее, F_i — клетка Фробениуса, сопровождающая многочлен $g_i(\lambda)$.

Определение 2.3. Блочно-диагональная матрица G вида

$$G = \operatorname{diag}(F_1, F_2, \dots, F_m)$$

называется матрицей Фробениуса, сопровождающая систему многочленов 2.10.

Лемма 2.5. Характеристическая матрица $G - \lambda E_n$ матрицы Фробениуса G имеет следующую систему инвариантных множителей

$$\big(1, 1, \dots, 1, g_1(\lambda), \dots, g_m(\lambda)\big). \tag{2.11}$$

♦ Рассмотрим характеристическую матрицу

$$G - \lambda E_n = \operatorname{diag}(F_1 - \lambda E_{k_1}, F_2 - \lambda E_{k_2}, \dots, F_m - \lambda E_{k_m}).$$

С помощью элементарных преобразований строк и столбцов приведем каждую из клеток $F_j - \lambda E_{k_i}$, $1 \leq i \leq m$, к канонической форме. На основании леммы 2.4 имеем $F_j - \lambda E_{k_i} \sim \deg(1, 1, \dots, 1, g_i(\lambda))$. Но элементарные преобразования каждой из клеток $F_i - \lambda E_{k_i}$ можно рассматривать как элементарные преобразования матрицы $F - \lambda E_n$, которые не затрагивают строк и столбцов, не проходящих через эту клетку. Поэтому матрица

$$G - \lambda E_n \sim \operatorname{diag}\big(1, 1, \dots, 1, g_1(\lambda), 1, 1, \dots, g_2(\lambda), \dots, 1, 1, \dots, 1, g_m(\lambda)\big).$$

Изменив в последней матрице порядок строк и столбцов, приведем ее к виду (2.11) ■

Теорема 2.3. Всякая матрица $A \in P_{n,n}$ подобна некоторой матрице Фробениуса, причем последняя определяется единственным образом.

♦ Приведем характеристическую матрицу $A - \lambda E_n$ к каноническому виду:

$$A - \lambda E_n \sim \operatorname{diag}\big(1, \dots, 1, f_l(\lambda), \dots, f_n(\lambda)\big),$$

где

$$\deg f_l \geq 1.$$

Так как $\sum\limits_{i=l}^{n} \deg f_i = n$ и $f_i | f_{i+1}$, $i = \overline{l, n-1}$, то по системе многочленов

$$\big(f_l(\lambda), \dots, f_n(\lambda)\big) \tag{2.12}$$

построим матрицу Фробениуса G порядка n, сопровождающую эту систему многочленов. Исходя из леммы 2.5, характеристическая матрица $G-\lambda E_n$ имеет своей системой инвариантных множителей систему многочленов

$$\big(1,\ldots,1,f_l(\lambda),\ldots,f_n(\lambda)\big),$$

а это значит, на основании 1-го критерия подобия λ-матриц, что $A-\lambda E_n \sim G-\lambda E_n$, а, следовательно на основании критерия подобия матрица G подобна A.

Докажем единственность матрицы Фробениуса подобной матрице $A \in P_{n,n}$.

От противного. Пусть G_1, G_2 — две матрицы Фробениуса подобные матрице A. Но тогда $G_1-\lambda E_n \sim A-\lambda E_n$ и $G_2-\lambda E_n \sim A-\lambda E_n \Rightarrow G_1-\lambda E_n$ и $G_2-\lambda E_n$, на основании 1-ого критерия эквивалентности λ-матриц, имеют одну и ту же систему инвариантных множителей. Но тогда G_1 и G_2 сопровождают одну и ту же систему многочленов и, следовательно, они совпадают.

Определение 2.4. Матрица Фробениуса G подобная матрице A называется *нормальной формой Фробениуса матрицы A*.

3. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

3.1. Определение. Примеры

Определение 3.1. Векторное пространство V_n над полем R называется *евклидовым пространством*, если любой паре $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ векторов этого пространства поставлено в соответствие действительное число, которое обозначается $\boldsymbol{ab} \in R$, называется *скалярным произведением*, и при этом выполняются аксиомы:
1) $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_n$;
2) для любой тройки векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_n$ имеет место равенство $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$;
3) для $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_n$ и $\forall \lambda \in R$ верно равенство $(\lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab})$;
4) для $\forall \boldsymbol{a} \in V_n$ $\boldsymbol{aa} \geq 0$, причем $\boldsymbol{aa} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Замечание 3.1. Иногда скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается $<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}>$ либо $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Примеры евклидовых пространств

Пример 3.1. Пространство V_3 свободных геометрических векторов является евклидовым пространством со скалярным произведением $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$.

Пример 3.2. Пространство $R_{1,n}$ строк длины n над полем R со скалярным произведением, определяемым формулой

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i. \tag{3.1}$$

Пример 3.3. Бесконечномерное векторное пространство $C([a, b])$ всех вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, со скалярным произведением, определяемым формулой

$$fg = \int_a^b (f(x)g(x))dx. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. Во всяком конечномерном действительном векторном пространстве может быть задано скалярное произведение, т.е. любое действительное векторное пространство можно превратить в евклидово.

♦ Пусть V_n – векторное пространство над полем R и

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \tag{3.3}$$

– его базис. Тогда каждый вектор пространства V_n единственным образом разлагается по векторам (3.3). Для произвольной пары $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторов пространства V_n положим

$$\boldsymbol{ab} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{3.4}$$

где

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i, \; \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{e}_i, \; x_i, y_i \in R, \; i = \overline{1, n}.$$

Покажем, что произведение, определяемое формулой (3.4), скалярное произведение. Действительно,

$$\boldsymbol{ba} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \boldsymbol{ab}.$$

Если

$$\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{n} z_i \boldsymbol{e}_i,$$

то

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)z_i = \sum_{i=1}^{n}x_iz_i + \sum_{i=1}^{n}y_iz_i = \boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}.$$

Далее, для $\lambda \in R$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)y_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}x_iy_i = \lambda(\boldsymbol{ab}).$$

Наконец,

$$\boldsymbol{aa} = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \geq 0;\ \boldsymbol{aa} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{0}.\blacksquare$$

Простейшие свойства скалярного произведения

1°. Для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ евклидова пространства V_n верно равенство

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ca}+\boldsymbol{cb}.$$

♦ Это следует из аксиом 1° и 2° скалярного произведения.■

2°. Для любого действительного числа λ и каждой пары $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторов евклидова пространства V_n

$$\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{ab}).$$

♦ Доказательство следует из аксиом 1° и 3°.■

3°. Для каждого вектора $\boldsymbol{a} \in V_n$ верны равенства

$$\mathbf{0}\boldsymbol{a} = (0\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = 0(\boldsymbol{aa}) = \mathbf{0}.$$

3.2. Длина вектора. Основные неравенства

Определение 3.2. Пусть $\boldsymbol{a}$ – произвольный вектор евклидова пространства. Число $\sqrt{\boldsymbol{aa}} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ называется *длиной* вектора $\boldsymbol{a}$ и обозначается $|\boldsymbol{a}|$.

Нетрудно видеть, что для длины вектора верны следующие свойства:

1°. $|\boldsymbol{a}| \geq 0$; $|\boldsymbol{a}| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0$;

2°. $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|, \forall\lambda \in R$.

Определение 3.3. *Углом между векторами* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ назовем любое действительное число φ, удовлетворяющее условию

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}. \tag{3.5}$$

Теорема 3.2 (неравенство Коши–Шварца–Буняковского).

Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ евклидова пространства верно неравенство

$$|\boldsymbol{ab}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|. \tag{3.6}$$

♦ Ясно, что $(\alpha\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = (\alpha\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\alpha\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha^2\boldsymbol{a}^2 + 2\alpha(\boldsymbol{ab}) + \boldsymbol{b}^2 \geq 0$ для любого $\alpha \in R$. Но для любого $\alpha \in R$ это неравенство выполняется, если его дискриминант меньше или равен 0, т.е. $(\boldsymbol{ab})^2 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{ab})^2 \leq \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 \Leftrightarrow (\boldsymbol{ab})^2 \leq \leq |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \Leftrightarrow |\boldsymbol{ab}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$■

Замечание 3.2. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы, то

$$|\boldsymbol{ab}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

Теорема 3.3 (неравенство треугольника). Длина суммы двух векторов евклидова пространства не превосходит суммы длин слагаемых, т.е.

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|,\ \forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in V_n.$$

♦ $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 \leq |\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 = (|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2 \Leftrightarrow |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$■

Следствие 3.1. Рассмотрим арифметическое евклидово пространство $R_{1,n}$ строк длины n, т.е. $R_{1,n} = \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\,|\alpha_i \in R\}$ со скалярным произведением определимым формулой (3.1).

Тогда в силу неравенства Коши-Шварца-Буняковского имеем, что

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2}. \tag{3.7}$$

Неравенство (3.7) верно для любых вещественных чисел $\alpha_i, \beta_i,\ i = \overline{1,n}$. Из неравенства треугольника следует

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2}. \tag{3.8}$$

Следствие 3.2. В пространстве $C([a,b])$ всех действительных функций действительного аргумента, непрерывных на отрезке $[a,b]$, скалярное произведение определим формулой (3.2).

Тогда, исходя их неравенства Коши-Шварца-Буняковского и неравенства треугольника, для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из $C([a,b])$ имеют место неравенства:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \tag{3.9}$$

и

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}. \tag{3.10}$$

3.3. Ортогональные векторы

Определение 3.4. Вектор $\boldsymbol{a}$ евклидова пространства V_n называется *ортогональным вектору* $\boldsymbol{b} \in V_n$, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\boldsymbol{ab} = 0$.

То обстоятельство, что вектор $\boldsymbol{a}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{b}$, записывается $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

Свойства ортогональных векторов

1°. Если $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$, и поэтому говорят о паре ортогональных векторов.

2°. $\mathbf{0} \perp \boldsymbol{a}$ для $\forall\, \boldsymbol{a} \in V_n$.

3°. Если вектор $\boldsymbol{a} \in V_n$ ортогонален любому вектору пространства V_n, то $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

♦ Действительно, если в равенстве $\boldsymbol{ab}=0$ положить $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{a}^2=0$. Следовательно, $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.■

4°. Если $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ —конечная система векторов евклидова пространства, а $\boldsymbol{b}$ — вектор этого пространства, ортогональный каждому $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leq i \leq k$, то вектор $\boldsymbol{b}$ ортогонален любой линейной комбинации векторов системы $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$.

■ Действительно,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i\right)\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}) = 0,\ \forall \alpha_i \in R,\ i = \overline{1,k},$$

так как $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b} = 0, \forall i = \overline{1,k}$.■

Теорема 3.4. Конечная система попарно ортогональных векторов евклидова пространства, не содержащая нулевого вектора, линейно независима.

♦ Пусть

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) \tag{3.11}$$

– конечная система попарно ортогональных векторов, т.е. $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = 0,\ i \neq j,\ \forall i, j = \overline{1,k}$. Если

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0},\ \alpha_i \in R,\ \forall i = \overline{1,k}, \tag{3.12}$$

то, умножив обе части равенства (3.12) скалярно на вектор $\boldsymbol{a}_i,\ 1 \leq i \leq k$, имеем $\alpha_i(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_i) = 0$.

Так как $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_i \neq 0$, то следовательно, $\alpha_i = 0$ для любого $i (1 \leq i \leq k)$. Отсюда следует, что система (3.11) линейно независима. ■

Определение 3.5. Система попарно ортогональных векторов называется *ортогональной системой векторов*.

Теорема 3.5. Пусть (3.11) – произвольная конечная система векторов евклидова пространства. Тогда в этом пространстве существует ортогональная система векторов

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k) \tag{3.13}$$

такая, что для любого i $(1 \leq i \leq k)$ системы

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_i), \tag{3.14}$$

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_i) \tag{3.15}$$

эквивалентны.

♦ Систему векторов (3.13) будем строить последовательно, применяя так называемый *процесс ортогонализации Грама-Шмидта*. Положим $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$. Далее воспользуемся методом математической индукции по числу векторов в системе. Предположим, что теорема справедлива для системы, состоящей из i векторов $(i < k)$, т.е. построена ортогональная система векторов (3.15), эквивалентная (3.14). Докажем справедливость теоремы для системы, состоящей из $(i+1)$-го вектора. Положим

$$\boldsymbol{b}_{i+1} = \boldsymbol{a}_{i+1} + \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \alpha_i \boldsymbol{b}_i, \tag{3.16}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ — неизвестные пока элементы из R. Нетрудно видеть, что системы векторов

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}) \tag{3.17}$$

и

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_{i+1}) \tag{3.18}$$

эквивалентны при любом наборе коэффициентов α_l, $l = \overline{1, i}$. В самом деле, система векторов (3.15) линейно выражается через систему (3.14), а вектор $\boldsymbol{b}_{i+1}$ — через систему (3.17). Значит, система (3.18) линейно выражается через (3.17). В свою очередь, система (3.14) линейно выражается через систему (3.15), а вектор $\boldsymbol{a}_{i+1}$ в силу равенства (3.16) линейно выражается через (3.18). Значит, (3.17) линейно выражается через (3.18). Следовательно, (3.17) эквивалентна (3.18).

Подберем коэффициенты α_l, $l = \overline{1, i}$, в равенстве (3.16) так, чтобы система векторов (3.18) была ортогональной. Равенство (3.16) умножаем скалярно на вектор $\boldsymbol{b}_s$, $1 \le s \le i$. Имеем

$$\boldsymbol{b}_{i+1}\boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{a}_{i+1}\boldsymbol{b}_s + \alpha_1(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_s) + \alpha_2(\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_s) + \ldots + \alpha_i(\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_s).$$

Так как (3.15) — ортогональная система векторов, то $\boldsymbol{b}_j\boldsymbol{b}_s = 0$, $\forall j = \overline{1, i}$, $j \ne s$. Тогда

$$\boldsymbol{b}_{i+1}\boldsymbol{b}_s = \boldsymbol{a}_{i+1}\boldsymbol{b}_s + \alpha_s(\boldsymbol{b}_s\boldsymbol{b}_s).$$

Число α_s выберем из равенства

$$\boldsymbol{a}_{i+1}\boldsymbol{b}_s + \alpha_s(\boldsymbol{b}_s\boldsymbol{b}_s) = 0. \tag{3.19}$$

Если $\boldsymbol{b}_s \ne \mathbf{0}$, то $\alpha_s = -\dfrac{\boldsymbol{a}_{i+1}\boldsymbol{b}_s}{\boldsymbol{b}_s\boldsymbol{b}_s}$. Если $\boldsymbol{b}_s = \mathbf{0}$, то (3.19) имеет место для любого α_s. Таким образом, $\boldsymbol{b}_{i+1}\boldsymbol{b}_s = 0$ и, следовательно, (3.18) — ортогональная система векторов. ■

Определение 3.6. Вектор $\boldsymbol{a} \in V_n$ называется *нормированным вектором*, если $|\boldsymbol{a}| = 1$.

Ясно, что если $\boldsymbol{a} \ne \mathbf{0}$, то вектор $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ является нормированным.

Определение 3.7. Базис

$$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n)$$

евклидова пространства V_n называется *ортонормированным базисом*, если его векторы попарно ортогональны и нормированы.

Следствия из теоремы 3.5

Следствие 3.3. В евклидовом пространстве V_n всегда существует ортонормированный базис.

Следствие 3.4. Если исходная система векторов (3.11) линейно независима, то и эквивалентная ей система векторов (3.13) линейно независима.

Следствие 3.5. Если система векторов (3.11) линейно зависима, то система (3.13) содержит хотя бы один нулевой вектор.

Алгоритм построения ортогональной системы векторов

Из доказательства теоремы 3.5 имеем метод построения ортогональной системы векторов по заданной системе векторов. Этот метод основан на процессе ортогонализации Грама-Шмидта.

3.4. Матрица Грама и матрица скалярного произведения

В пространстве V_n рассмотрим произвольную конечную систему векторов, например, систему (3.11).

По этой системе векторов составим матрицу

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_k \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k \end{bmatrix}.$$

Матрица *A называется матрицей Грама* системы векторов (3.11).

Определитель матрицы Г *называется определителем Грама* системы (3.11) и обозначается $\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$, т.е.

$$\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_k \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_k \end{vmatrix}. \quad (3.20)$$

Теорема 3.6. Если система векторов $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$ получена из системы векторов (3.11) процессом ортогонализации, то

$$\Gamma(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k) = \Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k).$$

♦ Исходя из процесса ортогонализации, имеем

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \\ &\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \alpha_{21}\boldsymbol{a}_1, \\ &\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \alpha_{31}\boldsymbol{a}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{a}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{a}_j + \alpha_{j1}\boldsymbol{a}_1 + \alpha_{j2}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_{j,j-1}\boldsymbol{a}_{j-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\boldsymbol{b}_k =]\boldsymbol{a}_k + \alpha_{k1}\boldsymbol{a}_1 + \alpha_{k2}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_{k,k-1}\boldsymbol{a}_{k-1}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Умножим j-ое равенство ($j > 1$) скалярно справа на вектор $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leq$ $\leq i \leq k$. Получим

$$\boldsymbol{b}_j\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_i + \alpha_{j1}(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_i) + \alpha_{j2}(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_i) + \ldots + \alpha_{j,j-1}(\boldsymbol{a}_{j-1}\boldsymbol{a}_i).$$

Из последнего равенства следует, что замена левого сомножителя $\boldsymbol{a}_j$ всюду в j-ой строке определителя (3.20) на сомножитель $\boldsymbol{b}_j$ равносильно прибавлено к этой строке подходящей линейной комбинации предыдущих строк, отчего определитель не изменяется. Аналогично, замена всюду в j-ом столбце правого сомножителя $\boldsymbol{a}_j$ сомножителем $\boldsymbol{b}_j$ равносильна прибавлению к этому столбцу некоторой комбинации предыдущих столбцов, отчего опять определитель не изменяется. Наконец, замена вектора $\boldsymbol{a}_1$ на вектор $\boldsymbol{b}_1$ несущественна, так как $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$.■

Следствие 3.6. Определитель Грама $\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ есть действительное неотрицательное число, равное нулю, тогда и только тогда, когда система векторов (3.11) линейно зависима.

♦ Из теоремы 3.6 следует, что

$$\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \Gamma(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \boldsymbol{b}_k\boldsymbol{b}_k \end{vmatrix} =$$
$$= |\boldsymbol{b}_1|^2 \cdot |\boldsymbol{b}_2|^2 \cdot \ldots \cdot |\boldsymbol{b}_k|^2 \geq 0.$$

Равенство нулю в последнем соотношении имеет место тогда и только тогда, когда в системе векторов (3.13) содержится нулевой вектор, т.е. тогда и только тогда, когда система векторов (3.11) линейно зависима.■

Пусть далее в пространстве V_n задан базис

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n), \tag{3.22}$$

а $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — некоторые векторы в V_n.

Разложим векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ по базису (3.22). Имеем

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e}_j,\ x_i, y_i \in R,\ \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Но тогда

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j) =$$
$$= [a_{ij} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = Y^T A X,$$

где $A = (a_{ij},\ i, j = \overline{1, n}) = (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j,\ i, j = \overline{1, n})$, а X, Y — координатные столбцы соответствующих векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в базисе (3.22).

Матрица A называется *матрицей скалярного произведения*.

Отметим некоторые свойства матрицы A — матрицы скалярного произведения:

1°. матрица A является матрицей Грамма системы базисных векторов (3.22);

2°. является симметрической, ибо $\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i,\ \forall i, j = \overline{1, n}$;

3°. все главные угловые миноры этой матрицы положительны, так как они являются определителями Грамма линейно независимых подсистем системы (3.22).

Верно и обратное. Можно показать, что если $A \in R_{n,n}$ является симметрической, все главные угловые миноры которой положительны, то в векторном пространстве V_n над полем R с базисом (3.22) можно задать скалярное произведение векторов, так чтобы матрица A была матрицей этого скалярного произведения в базисе (3.22).

Посмотрим, как изменится матрица скалярного произведения при замене базиса. Пусть A — матрица скалярного произведения в базисе (3.22), B — матрица скалярного произведения в базисе

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n). \tag{3.23}$$

И пусть S — матрица перехода от (3.22) к (3.23).

Тогда $X = SX'$, $Y = SY'$, X, Y – координатные столбцы векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ в базисе (3.22), а X', Y' – координатные столбцы векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ в базисе (3.23). Следовательно,

$$\boldsymbol{xy} = Y^T AX = (SY')^T A(SX') = Y'^T(S^T AS)X' = Y'^T BX' = \boldsymbol{xy}.$$

Откуда получаем связь между матрицами скалярного произведения, записанными в разных базисах евклидова пространства V_n. А именно:

$$B = S^T AS. \tag{3.24}$$

Замечание 3.3. Если рассматриваемый базис является ортонормированным, то матрица скалярного произведения в этом базисе является единичной и поэтому

$$\boldsymbol{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = Y^T X.$$

3.5. Ортогональные матрицы и их свойства

Пусть

$$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n) \tag{3.25}$$

и

$$(\boldsymbol{i}'_1, \boldsymbol{i}'_2, \ldots, \boldsymbol{i}'_n) \tag{3.26}$$

– два ортонормированных базиса евклидова пространства V_n, а S – матрица перехода от базиса (3.25) к базису (3.26). Так как оба базиса ортонормированы, то матрица скалярного произведения в каждом из них единичная. Поэтому $E_n = S^T E_n S \Rightarrow E_n = S^T S$. Таким образом, матрица S перехода от одного ортонормированного базиса евклидова пространства V_n к другому ортонормированному базису удовлетворяет условию

$$E_n = S^T S \text{ или } S^{-1} = S^T. \tag{3.27}$$

Обратно, если (3.25) – ортонормированный базис, а матрица перехода S от базиса (3.25) к базису (3.26) удовлетворяет условию (3.27), то, очевидно, и система векторов (3.26) – ортонормированный базис, так как скалярное произведение имеет в ней матрицу $S^T E_n S = S^T S = E_n$.

Определение 3.8. Действительная матрица S, удовлетворяющая условию $S^T S = E_n$, называется *ортогональной*.

Пример 3.4. Матрица $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ является ортогональной.

Теорема 3.7 . Любые два ортонормированных базиса евклидова пространства связаны ортогональной матрицей перехода. Если дан ортонормированный базис, а другой базис связан с ним ортогональной матрицей перехода, то и этот базис является ортонормированным.

Свойства ортогональных матриц

1°. Множество всех ортогональных матриц n-го порядка образует группу относительно умножения матриц.

♦ Пусть A и B — ортогональные матрицы n-го порядка. Рассмотрим их произведение AB. Тогда

$$(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

Значит, (AB) — ортогональная матрица.

Единичная матрица является ортогональной.

Пусть A — ортогональная матрица. Покажем, что A^{-1} — ортогональная матрица. Действительно,

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1}A^{-1} = (AA^T)^{-1} = E_n^{-1} = E_n. \blacksquare$$

2°. Матрица $A = (a_{ij})$ ортогональна тогда и только тогда, когда имеют место следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk},\ \forall j, k = \overline{1, n},$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk},\ \forall j, k = \overline{1, n},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

Следствие 3.7. Матрица A является ортогональной тогда и только тогда, когда система столбцов (строк) матрицы A образует ортонормированный базис арифметического пространства $R_{n,1}(R_{1,n})$.

♦ Доказательство следует из равенства $A^T A = E_n$.■

3.6. Изометрические преобразования

Определение 3.9. Линейное преобразование f евклидова пространства называется *изометрическим*, если оно не изменяет скалярного произведения, т.е. для любой пары $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ векторов этого пространства имеет место равенство

$$f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}. \tag{3.28}$$

Теорема 3.8. Линейное преобразование евклидова пространства является изометрическим тогда и только тогда, когда оно сохраняет длины векторов.

♦ $\Rightarrow$. Положим в равенстве (3.28) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Имеем

$$f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 \Leftrightarrow |f(\boldsymbol{x})|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 \Leftrightarrow |f(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|.$$

$\Leftarrow$. Так как преобразование f сохраняет длины векторов, то для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ имеем:

$$\begin{gathered}|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \Leftrightarrow |f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \\ = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow (f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}))(f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f^2(\boldsymbol{x}) + 2f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{y}) + f^2(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^2 \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}. \blacksquare\end{gathered}$$

Следствие 3.8. Изометрическое преобразование евклидова пространства сохраняет углы между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} = \frac{f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{y})}{|f(\boldsymbol{x})||f(\boldsymbol{y})|}.$$

Теорема 3.9. Матрица изометрического преобразования евклидова пространства в любом ортонормированном базисе этого пространства является ортогональной. Если в каком-либо ортонормированном базисе евклидова пространства матрица линейного преобразования является ортогональной, то это преобразование – изометрическое.

♦ Пусть $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ – изометрическое преобразование, т.е. $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in V_n$ выполняется равенство $f(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{z}$, а система

$$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n) \tag{3.29}$$

– ортонормированный базис V_n. Обозначим через A матрицу линейного преобразования f в базисе (3.29), а через Y, X – соответственно координатные столбцы векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$ в базисе (3.29). Так как f – линейное преобразование, то тогда $Y = AX$.

Рассмотрим

$$\boldsymbol{x}^2 = X^T E_n X,\ \boldsymbol{y}^2 = Y^T E_n Y.$$

Так как преобразование изометрическое, то выполнено условие
$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{y}^2 \Leftrightarrow X^T E_n X = Y^T E_n Y \Leftrightarrow X^T E_n X = (AX)^T E_n (AX) \Leftrightarrow X^T E_n X = = X^T (A^T E_n A) X \Leftrightarrow E_n = A^T E_n A \Leftrightarrow A^T A = E_n$.

Отсюда следует, что матрица A является ортогональной.

Вторая часть теоремы доказывается, если приведенные выше выкладки провести в обратном порядке и использовать теорему 3.8. ■

Замечание 3.4. Исходя из теоремы 3.9 изометрическое преобразование евклидова пространства называют также *ортогональным*.

Следствие 3.9. Определитель матрицы ортогонального преобразования в любом ортонормированном базисе равен ± 1.

♦ Так как $A^T A = E_n$, то отсюда $\det A^T \cdot \det A = 1$. Учитывая, что $\det A^T = \det A$, имеем $(\det A)^2 = 1 \Leftrightarrow \det A = \pm 1$.■

Теорема 3.10. Если λ — собственное значение ортогонального преобразования f, то $\lambda = \pm 1$.

♦ Так как λ — собственное значение преобразования f, то $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} \in V_n$, $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор. Рассмотрим скалярный квадрат образа вектора $\boldsymbol{x}$. Имеем $f^2(\boldsymbol{x}) = (\lambda \boldsymbol{x})(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda^2 \boldsymbol{x}^2$. Учитывая, что f — ортогональное преобразование, в силу равенства (3.28) получаем

$$\lambda^2 \boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^2 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1. ■$$

Теорема 3.11. Ортогональное преобразование евклидова пространства является невырожденным.

♦ Так как в любом ортонормированном базисе определитель матрицы ортогонального преобразования равен ± 1, то это преобразование является невырожденным. ■

Следствие 3.10. Для изометрического преобразования f пространства V_n

$$\mathrm{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}.$$

3.7. Симметрические преобразования

Определение 3.10. Линейное преобразование f евклидова пространства V_n называется *симметрическим (самосопряженным)*, если для любых двух векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_n$ выполняется равенство

$$f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} f(\boldsymbol{y}). \quad (3.30)$$

Примеры симметрических преобразований

Пример 3.5. Тождественное преобразование $e : V_n \to V_n$, определяемое формулой $e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Пример 3.6. Нулевое преобразование $0 : V_n \to V_n$, определяемое формулой $0(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.

Пример 3.7. Преобразование $f : V_n \to V_n$, определяемое формулой $f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$.

Действительно, $f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = (-\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}f(\boldsymbol{y})$.

Теорема 3.12. Линейное преобразование f евклидова пространства является симметрическим тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе является симметрической.

♦ $\Rightarrow$. Пусть

$$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n) \tag{3.31}$$

— некоторый ортонормированный базис евклидова пространства V_n. Обозначим через A, X, Y — соответственно матрицу линейного преобразования f, координатные столбцы векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_n$. Так как f — симметрическое преобразование, то для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ выполняется равенство (3.30). Учитывая, что $\boldsymbol{xy} = Y^T E_n X$, из (3.30) имеем:

$$Y^T(AX) = (AY)^T X \Leftrightarrow Y^T AX = Y^T A^T X \Leftrightarrow Y^T(A - A^T)X = O.$$

Из того, что последнее равенство выполняется для любых X и Y, следует, что $A = A^T$.

$\Leftarrow$. $A = A^T \Rightarrow A - A^T = O \Rightarrow Y^T(A - A^T)X = O \Rightarrow Y^T AX = Y^T A^T X \Rightarrow Y^T(AX) = (AY)^T X \Rightarrow$ (3.30) выполняется. ■

Теорема 3.13. Все характеристические числа действительной симметрической матрицы A действительны.

♦ Пусть матрица A является матрицей некоторого симметрического преобразования f, записанной в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства V_n и λ — корень характеристического уравнения этой матрицы, т.е. характеристическое число преобразования f. Рассмотрим собственный вектор $\boldsymbol{x}$ преобразования f с характеристическим числом λ. Тогда имеет место равенство $AX = \lambda X$, где X — координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$. Найдем произведение $X^T A\bar{X}$ двумя способами.

С одной стороны, учитывая, что A — действительная матрица, имеем

$$X^T A\bar{X} = X^T \bar{A}\bar{X} = X^T(\bar{A X}) = X^T(\bar{\lambda X}) = X^T \bar{\lambda}\bar{X} = \bar{\lambda}X^T\bar{X}.$$

С другой стороны, так как $A = A^T$, получаем

$$X^T A\bar{X} = X^T A^T \bar{X} = (AX)^T\bar{X} = (\lambda X)^T\bar{X} = \lambda X^T\bar{X}.$$

Таким образом, $\bar{\lambda}(X^T\bar{X}) = \lambda(X^T\bar{X}) \Leftrightarrow (\bar{\lambda} - \lambda)(X^T\bar{X}) = 0$. Но, $X^T\bar{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\bar{x}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$, ибо $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор, а следовательно, столбец X является ненулевым. Тогда имеем $\bar{\lambda} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$, т.е. λ — вещественное число. ■

Теорема 3.14. Любая вещественная симметрическая матрица A подобна диагональной матрице.

♦ Пусть J — жорданова матрица, подобная симметрической матрице A, и пусть она содержит клетку Жордана порядка выше первого. Например, содержит клетку $J_2(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, т.е. матрица J имеет вид

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{array}\right).$$

Матрицу A можно рассматривать как матрицу некоторого симметрического преобразования f евклидова пространства V_n, записанную в некотором ортонормированном базисе этого пространства V_n, а матрицу J — как матрицу этого же преобразования f, записанную в жордановом базисе $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{a}_1) = \lambda_1\boldsymbol{a}_1, \\ &f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_1 + \lambda_1\boldsymbol{a}_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Умножим скалярно первое равенство справа на вектор $\boldsymbol{a}_2$, а второе равенство — слева на $\boldsymbol{a}_1$. Имеем

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_2 = \lambda_1\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2, \\ &\boldsymbol{a}_1 f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_1^2 + \lambda_1\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1^2 + \lambda_1\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2.$$

Поскольку f — симметрическое преобразование, то выполняется равенство $f(\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 f(\boldsymbol{a}_2))$, а тогда из последнего равенства следует, что $\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0}$. А это противоречит тому, что $\boldsymbol{a}_1$ — базисный вектор. ■

Следствие 3.11. Для любого симметрического преобразования евклидова пространства существует базис, состоящий из собственных векторов этого преобразования.

Теорема 3.15. Для любого симметрического преобразования f евклидова пространства V_n существует ортонормированный базис из собственных векторов этого преобразования.

♦ На основании следствия 3.11 для преобразования f существует базис из собственных векторов:

$$(\boldsymbol{u}_{11}, \boldsymbol{u}_{12}, \ldots, \boldsymbol{u}_{1k_1},\ \boldsymbol{u}_{21}, \boldsymbol{u}_{22}, \ldots, \boldsymbol{u}_{2k_2},\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_{s1}, \boldsymbol{u}_{s2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{sk_s}),$$

где подсистема векторов $(\boldsymbol{u}_{i1}, \boldsymbol{u}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{ik_i})$ – базис подпространства L_{λ_i} собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_i кратности k_i, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $i \neq j$, $k_1 + \ldots + k_s = n$.

Рассмотрим подпространство $L_{\lambda_i} = L(\boldsymbol{u}_{i1}, \boldsymbol{u}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{ik_i})$, $1 \leq i \leq s$. Любой вектор из подпространства L_{λ_i} является собственным вектором преобразования f с тем же собственным значением λ_i. По системе векторов $\boldsymbol{u}_{i1}, \boldsymbol{u}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{ik_i}$ посредством процесса ортогонализации построим ортогональную систему векторов $\boldsymbol{v}_{i1}, \boldsymbol{v}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{ik_i}$. Как следует из процесса ортогонализации, каждый вектор $\boldsymbol{v}_{ij}$, $j = \overline{1, k_i}$, получается как некоторая линейная комбинация векторов $\boldsymbol{u}_{ij}$. Следовательно, $\boldsymbol{v}_{ij}$ также является собственным вектором преобразования f, соответствующим собственному значению λ_i, т.е. $\boldsymbol{v}_{ij} \in L_{\lambda_i}$. Таким образом, мы имеем новый базис из собственных векторов

$$(\boldsymbol{v}_{11}, \boldsymbol{v}_{12}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1k_1},\ \boldsymbol{v}_{21}, \boldsymbol{v}_{22}, \ldots, \boldsymbol{v}_{2k_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{s1}, \boldsymbol{v}_{s2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{sk_s}). \tag{3.32}$$

Покажем, что любой вектор $\boldsymbol{v}_{i\beta} \in L_{\lambda_i}$, $1 \leq \beta \leq k_i$, ортогонален любому вектору $\boldsymbol{v}_{j\gamma} \in L_{\lambda_j}$, $1 \leq \gamma \leq k_j$, т.е. что $\boldsymbol{v}_{i\beta}\boldsymbol{v}_{j\gamma} = 0$. Так как $f(\boldsymbol{v}_{i\beta}) = \lambda_i \boldsymbol{v}_{i\beta}$, $f(\boldsymbol{v}_{j\gamma}) = \lambda_j \boldsymbol{v}_{j\gamma}$, то $f(\boldsymbol{v}_{i\beta})\boldsymbol{v}_{j\gamma} = \lambda_i \boldsymbol{v}_{i\beta}\boldsymbol{v}_{j\gamma}$ и $\boldsymbol{v}_{i\beta} f(\boldsymbol{v}_{j\gamma}) = \lambda_j \boldsymbol{v}_{i\beta}\boldsymbol{v}_{j\gamma}$. Отсюда следует, что $\lambda_i \boldsymbol{v}_{i\beta}\boldsymbol{v}_{j\gamma} = \lambda_j \boldsymbol{v}_{i\beta}\boldsymbol{v}_{j\gamma}$. Итак, $(\lambda_i - \lambda_j)\boldsymbol{v}_{i\beta}\boldsymbol{v}_{j\gamma} = 0$. Учитывая, что $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, имеем $\boldsymbol{v}_{i\beta}\boldsymbol{v}_{j\gamma} = 0$.

Нормируя векторы из системы (3.32), получаем доказательство теоремы. ■

4. УНИТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

4.1. Определение и свойства скалярного произведения

Унитарное пространство определяется аналогично евклидову пространству. Рассмотрим векторное пространство V_n над полем C.

Определение 4.1. Векторное пространство V_n над полем C называется *унитарным*, если каждой паре векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ этого пространства ставится в соответствие комплексное число $\boldsymbol{ab}$, которое называется *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, и при этом выполняются аксиомы:
1) $\boldsymbol{ab} = \overline{\boldsymbol{ba}}$, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_n$, где $\overline{\boldsymbol{ba}}$ – комплексное число, сопряженное с $\boldsymbol{ba}$;
2) для любой тройки векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ пространства V_n верно равенство $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$;
3) для любой пары $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторов пространства V_n и каждого $\lambda \in C$, $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab})$;
4) для любого $\boldsymbol{a} \in V_n$ произведение $\boldsymbol{aa}$ есть действительное число, причем $\boldsymbol{aa} \geq 0$. Кроме того, $\boldsymbol{aa} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Теорема 4.1. Во всяком конечномерном векторном пространстве над полем C может быть задано скалярное произведение.

♦ Доказательство проводится по аналогии с теоремой 3.1. Пусть V_n – комплексное векторное пространство, а система векторов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ – его базис. Если $\boldsymbol{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{e}_i$, $x_i, y_i \in C$, $\forall i = \overline{1,n}$, то положим

$$\boldsymbol{ab} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i.$$

Можно проверить, что аксиомы 1) - 4) определения унитарного пространства выполняются. ■

Свойства скалярного произведения в унитарном пространстве

1°. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_n$;
2°. $\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b}) = \bar{\lambda}\boldsymbol{ab}$, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_n$, $\forall \lambda \in C$;
♦ $\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b}) = \overline{(\lambda\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}} = \bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{ba}} = \bar{\lambda}(\boldsymbol{ab})$.■
3°. $\boldsymbol{0a} = \boldsymbol{a0} = 0$.

4.2. Основные положения и утверждения в унитарных пространствах

Определение 4.2. Длиной вектора $\boldsymbol{a}$ унитарного пространства называется неотрицательной действительное $|\boldsymbol{a}|$, определяемое формулой $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$.

В унитарном пространстве, как и в евклидовом, выполняется неравенство Коши-Шварца-Буняковского и неравенство треугольника.

Пусть $A \in C_{n,n}$. Через A^* обозначим матрицу, которая получается, если матрицу A транспонировать и затем каждый ее элемент заменить комплексно сопряженным числом. Если A — вещественная матрица, то

$$A^* = A^T.$$

Если же матрица A такова, что

$$A^* = A,$$

то *матрица A называется эрмитовой.*

В унитарном пространстве, по аналогии с евклидовым пространством, вводится понятие матрицы скалярного произведения, которая обладает следующими свойствами:

1) это матрица Грама системы базисных векторов;

2) является эрмитовой;

3) все главные миноры этой матрицы есть положительные действительные числа.

Далее, если матрица скалярного произведения в базисе

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \tag{4.1}$$

унитарного пространства V_n, а B — матрица скалярного произведения в базисе

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n), \tag{4.2}$$

то $B = S^*AS$, где S — матрица перехода от базиса (4.1) к базису (4.2).

Так как в любом ортонормированном базисе унитарного пространства V_n матрица скалярного произведения является единичной, то из равенства $B = S^*AS$ получаем равенство $S^*S = E_n$. Следовательно, любые два ортонормированных базиса унитарного пространства связаны матрицей перехода S, которая удовлетворяет условию

$$S^*S = E_n. \tag{4.3}$$

Верно и обратное. Если один из базисов унитарного пространства является ортонормированным, а другой с ним связан матрицей перехода, удовлетворяющей равенству (4.3), то и другой базис этого пространства является ортонормированным.

Определение 4.3. Матрица $S \in C_{n,n}$, удовлетворяющая условию $S^*S = E_n$, называется *унитарной*.

Замечание 4.1. Отметим, что унитарные матрицы обладают теми же свойствами, что и ортогональные матрицы в евклидовом пространстве.

Теорема 4.2. Любые два ортонормированных базиса унитарного пространства связаны унитарной матрицей перехода. Если дан ортонормированный базис, а другой с ним связан унитарной матрицей перехода, то и второй базис является ортонормированным.

Теорема 4.3. Линейное преобразование f унитарного пространства является изометрическим (симметрическим) тогда и только тогда, когда в любом ортонормированном базисе этого пространства матрица преобразования является унитарной (эрмитовой).

Замечание 4.2. Доказательство всех утверждений в унитарном пространстве, изложенных выше, аналогичны доказательствам соответствующих утверждений в евклидовом пространстве [см., например, 6].

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Методом элементарных преобразований привести матрицу

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

к канонической форме.

Решение. Прибавив ко второй строке матрицы $A(\lambda)$ ее первую строку, умноженную на $-(\lambda + 1)$, получим

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 \\ (\lambda + 1)(2 - \lambda^2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, прибавив к первому столбцу полученной матрицы ее второй столбец, умноженный на $-(\lambda - 1)$, и поменяв местами столбцы, получим в результате каноническую матрицу

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 0 & \lambda + 1 \\ (\lambda + 1)(2 - \lambda^2) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2) \end{bmatrix}.$$

Пример 2. При помощи элементарных преобразований привести матрицу

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 5 \end{bmatrix}$$

к канонической λ-матрице.

Решение. $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda + 5 & \lambda + 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 5 & \lambda + 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & \lambda + 5 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{\lambda+5}{5} \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \sim$
$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{\lambda+5}{5} \\ 0 & -\frac{\lambda+5}{5}\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda^2+5\lambda}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 5\lambda \end{bmatrix}.$

Таким образом, исходная матрица $A(\lambda)$ эквивалентна канонической матрице $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 5\lambda \end{bmatrix}$.

Пример 3. Методом НОД-миноров λ-матриц найти каноническую форму матрицы

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda + 1)^2 & \lambda + 3 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda + 1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Решение. Сначала находим наибольший общий делитель миноров первого порядка: $(\lambda+1)^2, \lambda+3, \lambda(\lambda+1)$ и λ. Очевидно, $d_1(\lambda) = 1$. Далее вычисляем наибольший общий делитель миноров второго порядка: $\lambda(\lambda + 1)^3, \lambda(\lambda + 1)^2, \lambda(\lambda + 3), \lambda^2(\lambda + 1)$. Получаем $d_2(\lambda) = \lambda$. И, наконец, $d_3(\lambda) = \det A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^3$. Теперь, пользуясь формулами, находим инвариантные множители матрицы $A(\lambda) : f_1(\lambda) = d_1(\lambda) = 1$, $f_2(\lambda) = \dfrac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = \lambda$, $f_3(\lambda) = \dfrac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1)^3$. Поэтому $A(\lambda) \sim \operatorname{diag}\big(1, \lambda, \lambda(\lambda + 1)^3\big)$.

Пример 4. Найти каноническую форму матрицы

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda - 1 & 0 \\ \lambda + 2 & \lambda - 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Нетрудно видеть, что $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = 1$, $d_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 1)$. Значит, система инвариантных множителей матрицы $A(\lambda)$ такова:

$$f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = 1,\ f_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 1).$$

Следовательно,

$$A(\lambda) \sim K(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 1) \end{bmatrix}.$$

Пример 5. Пусть

$$f_1(\lambda) = \lambda + 2,\ f_2(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 2)$$

– непостоянные инвариантные множители матрицы $A(\lambda)$. Выписать системы элементарных делителей матрицы $A(\lambda)$ над полями R и C.

Решение. Над полем R матрица $A(\lambda)$ имеет следующую систему элементарных делителей:

$$(\lambda + 2,\ \lambda + 2,\ \lambda - \sqrt{2},\ \lambda + \sqrt{2},\ \lambda^2 + 2).$$

Над полем C комплексных чисел матрица $A(\lambda)$ имеет следующую систему элементарных делителей:

$$(\lambda + 2,\ \lambda + 2,\ \lambda - \sqrt{2},\ \lambda + \sqrt{2},\ \lambda - i\sqrt{2},\ \lambda + i\sqrt{2}).$$

Пример 6. Построить систему инвариантных множителей 7×7-матрицы $A(\lambda)$ ранга 5, которая имеет следующую систему элементарных делителей:

$$(\lambda,\ \lambda,\ \lambda^2,\ (\lambda + 2)^2,\ (\lambda - 3)^2,\ (\lambda - 3)^3).$$

Решение. Поскольку ранг $r = 5$ меньше порядка $n = 7$, то полагаем $f_6(\lambda) = f_7(\lambda) = 0(\lambda)$. Следуя доказательству теоремы 1.5, строим остальные инвариантные множители матрицы А(λ):

$$f_5(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 2)^2(\lambda - 3)^3,\ f_4(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)^2,\ f_3(\lambda),\ f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1.$$

Пример 7. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

построить жорданову нормальную форму.

Решение. Для построения жордановой матрицы, подобной матрице A, воспользуемся **первым методом построения жордановой нормальной формы матриц** (см. стр.27).

Характеристическая матрица матрицы A имеет вид

$$A - \lambda E_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4 - \lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Найдем систему элементарных делителей матрицы $A - \lambda E_3$. Для этого вычислим систему $\big(d_1(\lambda), d_2(\lambda), d_3(\lambda)\big)$ НОД ее миноров: $\big(1, \lambda - 2, (\lambda - 2)^3\big)$. Тогда система $\big(f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)\big)$ инвариантных множителей матрицы $A - \lambda E_3$ имеет вид $\big(1, \lambda - 2, (\lambda - 2)^2\big)$. Отсюда получаем систему $\big(\lambda - 2, (\lambda - 2)^2\big)$ элементарных делителей. Элементарному делителю $\lambda - 2$ соответствует клетка Жордана $J_1(2)$, а элементарному делителю $(\lambda - 2)^2$ – клетка Жордана $J_2(2)$.

Таким образом,

$$A \sim J = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \text{ либо } A \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Пример 8. Для матрицы A, рассмотренной в примере 7, построить жорданову нормальную форму J и трансформирующую матрицу S.

Решение. Воспользуемся **вторым методом построения жордановой нормальной формы заданной матрицы** (см. стр.29).

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$. Вычислим характеристические числа матрицы $A: \lambda_1 = 2,\ k_1 = 3$. Находим координатные столбцы собственных векторов, соответствующих характеристическому числу $\lambda_1 = 2$. Для этого решим однородную систему линейных уравнений с матрицей

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как ранг этой матрицы равен единице, то отсюда следует, что $\dim L_{\lambda_1} = 2$, а столбцы $X_1 = [1, 2, 1]^T, X_2 = [0, 0, 1]^T$ являются координатными столбцами базиса подпространства L_{λ_1}. Базис подпространства L_{λ_1} выбран таким образом, что для одного из его векторов существует присоединенный вектор. Вектором, для которого существует присоединенный, является вектор с координатным столбцом X_1. Координатный столбец X_3 присоединенного вектора находится из системы уравнений с расширенной матрицей

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Итак, жорданов базис состоит из векторов с координатными столбцами X_1, X_3, X_2. Составляем трансформирующую матрицу

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя замечание 2.3, заключаем, что жорданова нормальная форма матрицы A имеет две клетки Жордана: $J_2(2), J_1(2)$. Таким образом,

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Пример 9. Выяснить, подобны ли между собой матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

В случае положительного ответа найти трансформирующую матрицу.

Решение. Приведем характеристическую матрицу $A - \lambda E_3$ к канонической форме с помощью элементарных преобразований: $A-\lambda E_3 \sim K(\lambda) = \mathrm{diag}\big(1, \lambda-2, (\lambda-2)(\lambda-1)\big)$. Применив цепочку элементарных преобразований переводящих матрицу $A - \lambda E_3$ к матрице $K(\lambda)$ в том же порядке к единичным матрицам найдем матрицы $V^{(2)}(\lambda)$, $U^{(2)}(\lambda)$

$$V^{(2)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\lambda+4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U^{(2)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -\lambda+2 \end{bmatrix}.$$

такие, что $K(\lambda) = V^{(2)}(\lambda)(A - \lambda E_3)U^{(2)}(\lambda)$.

Проведя аналогичные вычисления для характеристической матрицы $B - \lambda E_3$, получим $K(\lambda) = \mathrm{diag}\big(1, (\lambda-2), (\lambda-2)(\lambda-1)\big) = V^{(1)}(\lambda)(B - \lambda E_3)U^{(1)}(\lambda)$, где

$$V^{(1)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -\lambda-2 \end{bmatrix}, \quad U^{(1)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda-1 & -\lambda+2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как $A - \lambda E_3 \sim B - \lambda E_3$, то матрицы A и B подобны. Займемся нахождением трансформирующей матрицы S.

Исходя из теории, трансформирующая матрица S такая, что $B = S^{-1}AS$, находится по формуле (1.19), а именно $S = U(B)$, где $U(\lambda) = U^{(2)}(\lambda) \cdot \big(U^{(1)}(\lambda)\big)^{-1}$. Найдем $U(\lambda)$. Имеем

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda+2 & -\lambda+2 \end{bmatrix}.$$

Представим $U(\lambda)$в виде матричного многочлена

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Но тогда,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}B + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

Пример 10. Найти матрицу скалярного произведения в базисе $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ евклидова пространства $R_{1,3}$, если в каноническом базисе этого пространства вектор $\boldsymbol{a}_1 = (1, 3, 0)$, вектор $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0)$, а вектор $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1)$.

Решение. Так как матрица скалярного произведения в каноническом базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, где $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$, является единичной, то исходя из формулы (3.24) матрица скалярного произведения в базисе $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ имеет вид

$$B = S^T S,$$

где S — это матрица перехода от канонического базиса к базису $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. Поскольку

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то окончательно имеем

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Пример 11. Посредством процесса ортогонализации по системе векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, где $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -3, 1, -3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 0, 3, -1)$, построить ортогональную систему векторов $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$.

Решение. Исходя из процесса ортогонализации полагаем $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$, т.е. $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$. Затем вектор $\boldsymbol{b}_2$ ищем в виде $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \alpha_{11}\boldsymbol{b}_1$, где α_{11} — некоторый элемент из поля R.

Для этого умножим последнее равенство скалярно на вектор $\boldsymbol{b}_1$. Учитывая, что вектор $\boldsymbol{b}_1$ должен быть ортогональным вектору $\boldsymbol{b}_2$, имеем соотношение для определения элемента α_{11} :

$$0 = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 + \alpha_{11}\boldsymbol{b}_1^2 \Leftrightarrow 0 = -4 + \alpha_{11} \cdot 4 \Rightarrow \alpha_{11} = 1.$$

Но тогда вектор $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_1 = (2, -2, 2, -2)$.

Найдем вектор $\boldsymbol{b}_3$. Для этого полагаем, что $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \alpha_{21}\boldsymbol{b}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{b}_2$, где α_{21}, α_{22} — пока неизвестные элементы из R. Для их определения умножим это равенство скалярно на вектор $\boldsymbol{b}_1$, а затем на вектор $\boldsymbol{b}_2$. В результате имеем систему уравнений относительно неизвестных α_{21}, α_{22} :

$$\begin{cases} 0 = 6 + \alpha_{21} \cdot 4, \\ 0 = 16 + \alpha_{22} \cdot 16. \end{cases}$$

Откуда находим $\alpha_{21} = -\dfrac{3}{2}$, $\alpha_{22} = -1$. Но тогда вектор $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$, т.е. $\boldsymbol{b}_3 = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2})$.

Итак, система векторов $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$, где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= (1, 1, 1, 1), \\ \boldsymbol{b}_2 &= (2, -2, 2, -2,), \\ \boldsymbol{b}_3 &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \end{aligned}$$

является ортогональной.

ЗАДАЧИ

1. Путем элементарных преобразований привести следующие λ-матрицы к каноническому виду:

1) $\begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} \lambda^2-4 & \lambda+2 \\ \lambda+2 & \lambda^2+4\lambda+4 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & \lambda^2-4 & \lambda \\ 5\lambda-6 & 5\lambda^2-12 & \lambda^2+4\lambda \\ \lambda+2 & \lambda^2+4 & \lambda^2 \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+6\lambda+3 \\ \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+3\lambda+2 & 3\lambda^2+9\lambda+6 \end{bmatrix}$.

2. При помощи наибольших общих делителей миноров привести следующие λ-матрицы к каноническому виду:

1) $\begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

3. Найти инвариантные множители следующих $\lambda-$матриц:

1) $\begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda^2 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^3-\lambda-1 & 2\lambda^2-2\lambda \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 3\lambda^2+8\lambda+2 & 2\lambda+1 & \lambda^2+4\lambda \\ 4\lambda^2+11\lambda+2 & 3\lambda+1 & \lambda^2+5\lambda \\ \lambda^2+3\lambda-2 & \lambda-1 & \lambda \end{bmatrix}$.

4. Найти каноническую форму матрицы $A(\lambda)$, если известны ее элементарные делители, ранг r и порядок n :

1) $\lambda-3,\ (\lambda-3)^2,\ (\lambda-3)^3,\ \lambda+2,\ (\lambda+2)^3,\ r=n=4$;

2) $\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ \lambda+3,\ (\lambda+3)^3,\ r=4,\ n=5$;

3) $\lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ \lambda-5,\ (\lambda-5)^3,\ r=3,\ n=4$.

5. Найти элементарные делители следующих λ-матриц:

1) $\begin{bmatrix} \lambda^3+\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ 2\lambda^3+4\lambda^2+\lambda & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 3\lambda^3-9\lambda^2+7\lambda & 2\lambda^2-3\lambda & 3\lambda^3-7\lambda^2+3\lambda \\ 2\lambda^3-6\lambda^2+4\lambda & \lambda^2-2\lambda & 2\lambda^3-5\lambda^2+2\lambda \\ 5\lambda^3-15\lambda^2+11\lambda & 3\lambda^2-5\lambda & 5\lambda^3-12\lambda^2+5\lambda \end{bmatrix}$.

6. Найти элементарные делители следующих λ-матриц над полями R, C :

1) $\begin{bmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \\ 3 & \lambda^2+1 & 3 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2\lambda-2 & \lambda+1 & 2\lambda-3 \\ \lambda-2 & 1 & \lambda-2 \\ \lambda^4-2\lambda^2+2\lambda-5 & \lambda+1 & \lambda^4-2\lambda^2+2\lambda-6 \end{bmatrix}$.

7. Найти унимодулярные λ-матрицы $V(\lambda)$ и $U(\lambda)$ такие, что $K(\lambda)=V(\lambda)A(\lambda)U(\lambda)$, где $K(\lambda)$ – каноническая форма матрицы

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda+4 & \lambda^2+2\lambda+4 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+\lambda+2 \end{bmatrix}.$$

8. Выяснить, эквивалентны ли между собой матрицы:

1) $A(\lambda)=\begin{bmatrix} 3\lambda+4 & \lambda+1 & 4\lambda+3 \\ -\lambda^2-2\lambda & \lambda & -\lambda^2-\lambda \\ \lambda^2+3\lambda+4 & \lambda+1 & \lambda^2+4\lambda+3 \end{bmatrix}$, $B(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda-1 & \lambda^2+1 \\ 2\lambda+2 & 2\lambda-1 & \lambda^2+1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

2) $A(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & \lambda+2\\ 1 & 3\lambda-1 & \lambda+2\\ 2 & 5\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda+4\end{bmatrix}, \quad B(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ \lambda+1 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}.$

9. Для данных матриц $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ найти унимодулярные λ-матрицы $V(\lambda)$ и $U(\lambda)$ такие, что $B(\lambda)=V(\lambda)A(\lambda)U(\lambda)$:

1) $A(\lambda)=\begin{bmatrix}2\lambda^2+3\lambda+2 & 3\lambda^2+4\lambda+2\\ 2\lambda^2+5\lambda+2 & 3\lambda^2+7\lambda+2\end{bmatrix},$

$B(\lambda)=\begin{bmatrix}3\lambda^3+9\lambda^2+16\lambda+12 & 3\lambda^3+9\lambda^2+13\lambda+6\\ 2\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+8 & 2\lambda^3-10\lambda^2+9\lambda+4\end{bmatrix};$

2) $A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2-\lambda-1 & \lambda & \lambda^2-2\lambda-1\\ \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^2 & \lambda^3-2\lambda^2-\lambda+1\\ \lambda^3-2\lambda^2+2 & \lambda^2-\lambda & \lambda^3-3\lambda^2+\lambda+2\end{bmatrix},$

$B(\lambda)=\begin{bmatrix}4\lambda-1 & 2\lambda & 2\lambda^2-6\lambda+1\\ 10\lambda-8 & 5\lambda & 5\lambda^2-15\lambda+8\\ 4\lambda^2-15\lambda+3 & 2\lambda^2-7\lambda & 2\lambda^3-13\lambda^2+22\lambda-3\end{bmatrix}.$

10. Доказать, что если хотя бы одна из матриц A, B невырождена, то матрицы AB и BA подобны.

11. Выяснить подобны ли между собой следующие матрицы:

1) $A=\begin{bmatrix}10 & 4 & 3\\ -1 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ -3 & 4 & -3\\ 1 & 1 & 9\end{bmatrix};$

2) $A=\begin{bmatrix}1 & 6 & -15\\ 1 & 0 & -5\\ 1 & 2 & -7\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}0 & -4 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}.$

12. Написать нормальную форму Жордана матрицы A, если даны инвариантные множители $f_i(\lambda),\ i=\overline{1,n}$, ее характеристической матрицы:

1) $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=f_3(\lambda)=f_4(\lambda)=1,\ f_5(\lambda)=\lambda^2-9,\ f_6(\lambda)=(\lambda^2-9)^2;$

2) $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=f_3(\lambda)=1,\ f_4(\lambda)=\lambda+2,\ f_5(\lambda)=(\lambda^2-4)^2.$

3) $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=f_3(\lambda)=1,\ f_4(\lambda)=f_5(\lambda)=\lambda+1,\ f_6=(\lambda+1)^3(\lambda-5);$

4) $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=1,\ f_3(\lambda)=\lambda-1,\ f_4(\lambda)=\lambda^2-1.$

13. Найти жорданову нормальную форму следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}0 & -2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

14. Найти нормальную форму Фробениуса для матрицы A, если:

1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}9 & -6 & -2\\ 18 & -12 & -3\\ 18 & -9 & -6\end{bmatrix}$.

15. Найти минимальные многочлены следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix}3 & 5 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}3 & 1 & -3\\ -7 & -2 & 9\\ -2 & -1 & 4\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4 & -2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

16. Пусть $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ — квадратные матрицы порядка n над полем R. Показать, что формула $\langle A, B\rangle = \sum\limits_{j=1,k=1}^{n,n} a_{jk}b_{jk}$ определяет скалярное произведение в векторном пространстве матриц $R_{n,n}$.

17. Пусть $a, b \in R$, $a < b$, $\rho(x) \in C[a, b]$. Показать, что отображение

$$(f, g) \mapsto \int\limits_a^b \rho^2(x)f(x)g(x)dx$$

определяет скалярное произведение в векторном пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

18. Доказать, что скалярное произведение в $R_{1,3}$ можно ввести по формуле: если $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{y} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, то $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 10\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + {}$ $+\alpha_3\beta_3$.

19. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ — произвольные векторы из $R_{1,2}$. Какая из следующих формул определяет скалярное умножение:

1) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$;

2) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = kx_1y_1 + lx_2y_2,\ k \neq 0,\ l \neq 0$;

3) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_1$;

4) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + y_2x_1 + x_2y_2$.

20.Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — ортонормированный базис евклидова пространства. Найти выражение для скалярного произведения векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ через их координаты:

1) в базисе $(\lambda_1\boldsymbol{e}_1, \lambda_2\boldsymbol{e}_2, \ldots, \lambda_n\boldsymbol{e}_n)$, где $\lambda, \ldots, \lambda_n$ — ненулевые скаляры;

2) в базисе $(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$.

21. Углом между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в евклидовом пространстве V называется *число* $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ такое, что $0 \leq (\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) \leq \pi$ и $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}) = \dfrac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$. Найти углы между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в арифметическом евклидовом пространстве $R_{1,4}$, если:

1) $\boldsymbol{a} = (1, 1, -1, -1),\ \boldsymbol{b} = (1, -1, 1, 1)$;

2) $\boldsymbol{a} = (-1, -2, -1, -2),\ \boldsymbol{b} = (1, -2, 1, -2)$.

22. Доказать, что система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ в евклидовом пространстве $R_{1,3}$ составляет ортонормированный базис, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),\ \boldsymbol{a}_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ \boldsymbol{a}_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \boldsymbol{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \boldsymbol{a}_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\Big)$.

23. Проверить, что система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ в унитарном пространстве $C_{1,3}$ составляет ортонормированный базис, где $\boldsymbol{a}_1 = \left(\frac{4+3i}{9}, \frac{4}{9}i, \frac{-6-2i}{9}\right)$, $\boldsymbol{a}_2 = \left(\frac{4}{9}i, \frac{4-3i}{9}, \frac{-2-6i}{9}\right)$, $\boldsymbol{a}_3 = \left(\frac{6+2i}{9}, \frac{-2-6i}{9}, \frac{1}{9}\right)$.

24. Применить процесс ортогонализации к следующим системам векторов:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1),\ \boldsymbol{a}_2 = (1, -3, 1, -3),\ \boldsymbol{a}_3 = (4, 0, 3, -1)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 2, 0),\ \boldsymbol{a}_2 = (1, 3, 1, 5),\ \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0, 0)$.

25. Построить ортонормированный базис линейной оболочки следующих систем векторов:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -2, -5, 16),\ \boldsymbol{a}_2 = (3, 11, -6, -22),\ \boldsymbol{a}_3 = (-3, -6, -2, 4),$
$\boldsymbol{a}_4 = (3, 6, 11, -7);$

2) $\boldsymbol{a}_1 = (3, 0, 0, -2),\ \boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 2, 4),\ \boldsymbol{a}_3 = (3, -6, 0, -13),\ \boldsymbol{a}_4 = (-1, 4, 2, 9).$

26. Показать, что следующие системы векторов ортогональны, дополнить их до ортонормированных базисов:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, -1, -1),\ \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1, 1);$

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, -1, 3),\ \boldsymbol{a}_2 = (1, -3, 1, -1).$

27. Найти ортогональную проекцию вектора $\boldsymbol{x}$ и его ортогональную составляющую относительно подпространства L евклидова пространства $R_{1,4}$, если:

1) $\boldsymbol{x} = (14, -6, -3, -7),\ L = L(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3),\ \boldsymbol{y}_1 = (-3, 7, 0, 6),\ \boldsymbol{y}_2 = (1, 3, 4, 2),$
$\boldsymbol{y}_3 = (2, -2, 2, -2);$

2) $\boldsymbol{x} = (66, -32, 42, 24),\ L = L(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3),\ \boldsymbol{y}_1 = (10, 5, , -6, -8),$
$\boldsymbol{y}_2 = (-5, -3, 4, 2), \boldsymbol{y}_3 = (-3, -4, 1, 1);$

3) $\boldsymbol{x} = (2, -5, 4, 3),\ L = L(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3),\ \boldsymbol{y}_1 = (1, 3, 5, 3),\ \boldsymbol{y}_2 = (1, 3, -3, -5),$
$\boldsymbol{y}_3 = (1, -5, -3, 3).$

28. Найти ортонормированный базис в пространстве $R_{1,3}$ состоящий из собственных векторов и матрицу в этом базисе линейного преобразования, которое имеет в каноническом базисе матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

29. Симметрическое преобразование f унитарного пространства $C_{1,3}$ задано в каноническом базисе матрицей A. Найти ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов преобразования f, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -i & 0 \\ i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & i & 0 \\ -i & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

30. Симметрическое преобразование f евклидова пространства $R_{1,3}$ задано в каноническом базисе матрицей A. Найти ортонормированный базис пространства $R_{1,3}$ состоящий из собственных векторов этого преобразования f, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

31. В унитарном пространстве $C_{1,3}$ линейное преобразование f переводит систему векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ в систему $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$. Будет ли f симметрическим, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 2),\ \boldsymbol{a}_2 = (2, 1, -2),\ \boldsymbol{a}_3 = (2, -2, 1),$
$\boldsymbol{b}_1 = (3 - 2i, 6 + i, 8),\ \boldsymbol{b}_2 = (6 - i, 3 + 2i, -8),\ \boldsymbol{b}_3 = (6 + 2i, -6 + 2i, 4);$

2) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 1),\ \boldsymbol{a}_2 = (7, 9, 5),\ \boldsymbol{a}_3 = (3, 4, 3),$
$\boldsymbol{b}_1 = (2 + 2i, 6 - i, 0),\ \boldsymbol{b}_2 = (7 + 4i, 18 - 2i, 3i),\ \boldsymbol{b}_3 = (3 + i, 8, 2i);$

3) $\boldsymbol{a}_1 = (3, 2, 3),\ \boldsymbol{a}_2 = (-4, -3, -5),\ \boldsymbol{a}_3 = (5, 1, -1),$
$\boldsymbol{b}_1 = (3 - i, 2, 6 - i),\ \boldsymbol{b}_2 = (-4 + 2i, -3 - i, -5 - i),\ \boldsymbol{b}_3 = (5 + 2i, 1 - 6i, -2 + 4i)$?

32. В евклидовом пространстве $R_{1,3}$ линейное преобразование f переводит систему векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ в систему $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$. Будет ли f симметрическим, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 1),\ \boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1),\ \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0),\ \boldsymbol{b}_1 = (2, 3, 1),\ \boldsymbol{b}_2 = (-1, 0, 3),$
$\boldsymbol{b}_3 = (-5, 1, 4);$

2) $\boldsymbol{a}_1 = (-2,3,1),\ \boldsymbol{a}_2 = (3,6,2),\ \boldsymbol{a}_3 = (1,2,1),\ \boldsymbol{b}_1 = (-6,9,3),\ \boldsymbol{b}_2 = (2,11,33),$ $\boldsymbol{b}_3 = (1,4,5)$?

33. Линейное преобразование f евклидова арифметического пространства $R_{1,4}$ переводит систему векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ в систему $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$. Будет ли f симметрическим, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (2,2,2,2),\ \boldsymbol{a}_2 = (2,0,2,2),\ \boldsymbol{a}_3 = (2,2,2,0),\ \boldsymbol{a}_4 = (2,2,0,2),$
$\boldsymbol{b}_1 = (4,0,0,0),\ \boldsymbol{b}_2 = (3,-1,1,1),\ \boldsymbol{b}_3 = (3,1,1,-1),\ \boldsymbol{b}_4 = (3,1,-1,1);$

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,0,0),\ \boldsymbol{a}_2 = (0,1,1,0),\ \boldsymbol{a}_3 = (0,0,1,1),\ \boldsymbol{a}_4 = (0,0,0,1),$
$\boldsymbol{b}_1 = (1,1,0,0),\ \boldsymbol{b}_2 = (0,-1,1,0),\ \boldsymbol{b}_3 = (0,0,1,-1),\ \boldsymbol{b}_4 = (0,0,0,-1)$?

34. Показать, что матрица A ортогональна:

1) $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $A = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

35. Показать, что матрица

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4i & -4+3i & 2+6i \\ 4+3i & 4i & -6-2i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{bmatrix}$$

является унитарной.

ОТВЕТЫ

1. 1) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}\lambda+2 & 0\\ 0 & \lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-10\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^2-\lambda-2\end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2(\lambda+2)^2\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda^2-1) & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2-1)\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}$.

3. 1) $(\lambda-1, \lambda^2-1)$; 2) $(1, \lambda, \lambda^3+2\lambda^2)$.

4. 1) $\operatorname{diag}\big(1, \lambda-3, (\lambda-3)^2(\lambda+2), (\lambda-3)^3(\lambda+2)^2\big)$; 2) $\operatorname{diag}\big(1, \lambda, \lambda^2(\lambda+3), \lambda^3(\lambda+3)^3, 0\big)$;
3) $\operatorname{diag}\big(1, (\lambda+1)(\lambda-5), (\lambda+1)^2(\lambda-5)^3, 0\big)$.

5. 1) $\big((\lambda, \lambda, \dfrac{\lambda+2}{3}\big)$; 2) $(\lambda, \lambda, \lambda-2)$.

6. Над полем R : 1) $(\lambda^2+1, \lambda-\sqrt{3}, \lambda+\sqrt{3})$; 2) $(\lambda, \lambda, \lambda-1, \lambda^2+1)$;
Над полем C : 1) $(\lambda-i, \lambda+i, \lambda-\sqrt{3}, \lambda+\sqrt{3})$; 2) $(\lambda, \lambda, \lambda-1, \lambda-i, \lambda+i)$.

7. $V(\lambda) = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -2 & \lambda-4\end{bmatrix}$, $U(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda+1 & -\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-1\\ -\lambda & \frac{1}{2}\lambda^2+1\end{bmatrix}$.

8. 1) Эквивалентны; 2) неэквивалентны.

9. 1) $V(\lambda) = \begin{bmatrix}-3\lambda^2+3\lambda+14 & 3\lambda^2-3\lambda-2\\ -2\lambda^2+2\lambda+9 & 2\lambda^2-2\lambda-1\end{bmatrix}$, $U(\lambda) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$;

2) $V(\lambda) = \begin{bmatrix}12\lambda-43 & 1 & -12\\ 12\lambda^2-5\lambda+40 & \lambda-1 & -12\lambda+11\\ 12\lambda^2-55\lambda+42 & \lambda-1 & -12\lambda+12\end{bmatrix}$,

$U(\lambda) = \begin{bmatrix}2\lambda^2-2\lambda+1 & 2\lambda & 2\lambda^2-4\lambda+2\\ -4\lambda^2+5\lambda-3 & 1-4\lambda & -4\lambda^2+8\lambda-3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

11. 1) Не подобны; 2) подобны.

12. 1) $\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$; 4) таких инвариантных множителей у матрицы вида $A-\lambda E$ четвертого порядка не может быть.

13. 1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

14. 1) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; 2) $F = \left[\begin{array}{c|cc} -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$.

15. 1) $\lambda^3 - \lambda^2 + 1$; 2) $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$; 3) $(\lambda - 1)^3$.

19. 1) Определяет; 2) определяет, если $k > 0$ и $l > 0$; 3) не определяет; 4) определяет.

21. 1) $(\hat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \dfrac{2\pi}{3}$; 2) $(\hat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \arccos\dfrac{3}{5}$.

24. 1) $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \boldsymbol{b}_2 = (2, -2, 2, -2), \boldsymbol{b}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$;

2) $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2, 2, 0), \boldsymbol{b}_2 = (0, 1, -1, 5), \boldsymbol{b}_3 = \left(\frac{18}{27}, \frac{8}{27}, -\frac{17}{27}, -\frac{5}{27}\right)$.

27. 1) $\boldsymbol{b} = (5, -9, 2, -8), \boldsymbol{c} = (9, 3, -5, 1)$;

2) $\boldsymbol{b} = (2, -2, -1, -5), \boldsymbol{c} = (64, -30, 43, 29)$;

3) $\boldsymbol{b} = (0, -3, 2, 5), \boldsymbol{c} = (2, -2, 2, -2)$.

28. $\boldsymbol{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \boldsymbol{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \boldsymbol{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, — искомый базис; $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

29. 1) $\boldsymbol{v}_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \boldsymbol{v}_2 = (0, 0, 1), \boldsymbol{v}_3 = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ — искомый базис;

2) $\boldsymbol{v}_1 = \left(-\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{28 - 2\sqrt{7}}}\big(i(2 - \sqrt{7}), 3, 1 + \sqrt{7}\big)$,

$\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{28 + 2\sqrt{7}}}\big(i(2 + \sqrt{7}), 3, 1 - \sqrt{7}\big)$ — искомый базис.

30. 1) $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0), \boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}(4, 2, 5), \boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{3}(2, 1, -2)$;

2) $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{3}(2, 1, -2), \boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}(4, 2, 5)$;

3) $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1), \boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -1)$.

31. 1) Да; 2) нет; 3) нет.

32. 1) Да; 2) нет.

33. 1) Да; 2) нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. М.: Наука, 1967. 575 с.

2. *Деменчук, А. К.* Матричный анализ в примерах и задачах / А. К. Деменчук, Б. Б. Комраков, Г. П. Размыслович, В. М. Ширяев. Минск: БГУ, 2008. 158с.

3. *Ильин, В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. М.: Наука, 1981. 294 с.

4. *Милованов, М. В.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. I / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. Минск: Выш. шк., 1976. 544 с.

5. *Милованов, М. В.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. II / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. Минск: Выш. шк. 1984. 302 с.

6. *Размыслович, Г. П.* Геометрия и алгебра / Г. П. Размыслович, М. М. Феденя, В. М. Ширяев. Минск: Университетское , 1987. 350 с.

7. *Размыслович, Г. П.* Сборник задач по геометрии и алгебре. / Г. П. Размыслович, М. М. Феденя, В. М. Ширяев. Минск: Университетское, 1999. 384 с.

8. *Размыслович, Г. П.* Геометрия и алгебра: в 5 ч. Ч.1: Матрицы и определители. Системы линейных уравнений / Г. П. Размыслович. Минск: БГУ, 2010. 73 с.

9. *Размыслович, Г. П.* Геометрия и алгебра: в 5 ч. Ч.2: Векторные пространства / Г. П. Размыслович. Минск: БГУ, 2013. 56 с.

10. *Размыслович, Г. П.* Геометрия и алгебра: в 5 ч. Ч.3: Линейные и билинейные отображения векторных пространств / Г. П. Размыслович. Минск: БГУ, 2014. 71 с.

11. *Проскуряков, И. В.* Сборник задач по линейной алгебре /И. В. Проскуряков. М.: Наука, 1978. 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Размыслович Георгий Прокофьевич

Геометрия и алгебра

Учебные материалы для студентов
факультета прикладной математики и информатики

В пяти частях

Часть 4

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ МАТРИЦ. ЕВКЛИДОВО И УНИТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *Г. П. Размыслович*

Подписано в печать 22.09.2014. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,1.
Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Пр. Независимости, 4. 220030, Минск.