§3 Оценка погрешности интерполяции на равномерной сетке

Лемма. На равномерной сетке узлов

$x_i = a + ih, i = 0,\ldots,n;$ $h = (b-a)/n$ для $\forall x \in [a,b]$

выполняется оценка

$$\prod_{i=0}^{n} \left| x - x_i \right| \le \frac{1}{4} h^{n+1} n! \qquad (1)$$

Доказательство. Зафиксируем x и выберем номер узла j такой, что $x_j \le x \le x_{j+1}$. Тогда выполняется оценка

(*Упражнение*) $$\left| x - x_j \right| \left| x - x_{j+1} \right| \le \frac{h^2}{4} \qquad (2)$$

Используя (2), находим

$$\prod_{i=0}^{n}\left|x-x_i\right| \le \frac{h^2}{4}\prod_{i=0}^{j-1}\left(x-x_i\right)\prod_{i=j+2}^{n}\left(x_i-x\right) \tag{3}$$

Усилим оценку (3)

$$\prod_{i=0}^{n}\left|x-x_i\right| \le \frac{h^2}{4}\prod_{i=0}^{j-1}\left(x_{j+1}-x_i\right)\prod_{i=j+2}^{n}\left(x_i-x_j\right) \tag{4}$$

Для равномерной сетки имеем

$$x_{j+1}-x_i=\left(j-i+1\right)h, \quad x_i-x_j=\left(i-j\right)h \tag{5}$$

Следовательно, выполняется оценка

$$\prod_{i=0}^{n}\left|x-x_i\right| \le \frac{h^2}{4} h^j h^{n-(j+2)+1} \prod_{i=0}^{j-1}(j-i+1) \prod_{i=j+2}^{n}(i-j) \\ \le \frac{1}{4} h^{n+1}(j+1)!(n-j)! \le \frac{1}{4} h^{n+1} n! \qquad (6)$$

(*Упражнение*) $(j+1)!(n-j)! \le n!$ при $0 \le j \le n-1$. □

<u>*Теорема*</u>. Пусть $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ и $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$. Если $P_n(x)$ интерполяционный полином степени не выше n, построенный на равномерной сетке узлов, то оценка погрешности имеет вид

$$\left|f(x)-P_n(x)\right| \le \frac{1}{4(n+1)} M h^{n+1} \qquad (7)$$

Доказательство следует из представления погрешности (§2, 13) и доказанной леммы. □