

1. Высказывания. Логические операции над высказываниями. Формулы.

1. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «Если ..., то ...»:
 - (а) Для того чтобы функция была дифференцируемой в некоторой точке, необходимо, чтобы она была непрерывной в этой точке;
 - (б) Необходимым свойством прямоугольника является равенство его диагоналей;
 - (в) Для делимости многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $x - a$ достаточно, чтобы число a было корнем этого многочлена;
 - (г) На 5 делятся те целые числа, которые оканчиваются цифрой 0 или цифрой 5;
 - (д) Две прямые на плоскости тогда параллельны, когда они перпендикулярны одной и той же прямой;
 - (е) Комплексные числа равны, только если равны соответственно их действительные и мнимые части;
 - (ж) Всякое квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет не более двух действительных корней;
 - (з) Из того, что четырехугольник — ромб, следует, что каждая из его диагоналей служит его осью симметрии;
 - (и) Четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого;
 - (к) Равенство треугольников есть достаточное условие их равновеликости;
 - (л) Для делимости произведения на некоторое число достаточно, чтобы по меньшей мере один из сомножителей делился на это число.
2. Пусть A , B и C обозначают соответственно следующие предложения: «Он читает комиксы.», «Он любит научную фантастику.», «Он студент-информатик.». Запишите в символической форме высказывание: «Если он читает комиксы, то он любит научную фантастику и если он не читает комиксы, то он — студент-информатик.» Запишите отрицание этого выражения и представьте его в виде формулы, которая содержит только операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, причем отрицания распространяются только на пропозиционные переменные.
3. Постройте таблицы истинности следующих формул:
 - (а) $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow (A \cdot B))$.
 - (б) $((A \sim B) \rightarrow \overline{C}) \cdot (A \vee C)$.
 - (в) $((\overline{(A \vee B) \cdot \overline{C}}) \rightarrow \overline{B}) \sim A$.
 - (г) $((\overline{A \cdot B}) \rightarrow (\overline{\overline{B \rightarrow A}})) \cdot ((A \vee B) \sim C)$.
4. Решите следующие логические уравнения:
 - (а) $(A \rightarrow C) \cdot ((\overline{(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)}) = \text{И.}$
 - (б) $((\overline{A \cdot B}) \sim C) \rightarrow (C \vee \overline{A}) = \text{Л.}$
 - (в) $(\overline{A \rightarrow \overline{B}}) \rightarrow ((\overline{A \vee (B \sim A)}) \rightarrow C) = \text{И.}$
 - (г) $((A \sim B) \cdot (\overline{A \sim C})) \rightarrow (\overline{A \sim (B \cdot D)}) = \text{Л.}$
5. Докажите следующие равносильности без использования таблиц истинности:
 - (а) $(A \cdot (B \vee \overline{C})) \vee \overline{A} \vee (B \cdot C) \vee (A \cdot \overline{C}) \equiv \overline{A} \vee B \vee \overline{C}$.
 - (б) $(((((A \rightarrow B) \rightarrow \overline{A}) \rightarrow \overline{B}) \rightarrow \overline{C}) \rightarrow C) \equiv C$.
 - (в) $((\overline{(A \cdot B) \rightarrow C}) \rightarrow (\overline{A \cdot C})) \rightarrow ((A \cdot B) \rightarrow (\overline{A \cdot (B \rightarrow C)})) \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$.
 - (г) $A \rightarrow ((A \cdot B) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \cdot C)) \equiv B \rightarrow (A \rightarrow C)$.
6. Найдите такую формулу Φ , что:
 - (а) $\models ((\Phi \cdot A) \rightarrow \overline{B}) \rightarrow ((B \rightarrow \overline{A}) \rightarrow \Phi)$;
 - (б) $\models (\Phi \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \sim (\Phi \rightarrow (A \rightarrow B))$;

- (в) $\models (\Phi \cdot (A \vee (B \rightarrow C))) \sim \Phi$;
 (г) $\models ((A \vee \Phi) \sim A) \sim (\overline{A} \rightarrow (B \vee \overline{C}))$.

7. Докажите следующие утверждения:

- (а) если $\models \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, $\models \overline{\mathbf{A}} \vee \mathbf{C}$, то $\models \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$;
 (б) если $\models \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, $\models \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, то $\models \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$;
 (в) если $\models \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, $\models \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$, $\models \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, то $\models \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$;
 (г) если $\models \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\models \mathbf{B} \sim \mathbf{C}$, то $\models \mathbf{D} \rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$.

8. Выясните, верны ли следующие логические следования:

- (а) $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{D} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$, $\mathbf{C} \vee \overline{\mathbf{B}} \models \mathbf{A} \rightarrow \overline{\mathbf{D}}$;
 (б) $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, $((\mathbf{A} \vee \mathbf{D}) \cdot \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{E}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C} \models ((\mathbf{A} \vee \mathbf{D}) \cdot \mathbf{B}) \rightarrow \overline{\mathbf{E}}$;
 (в) $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$, $(\mathbf{D} \vee \mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{F} \models \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{F}$;
 (г) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{C}$, $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{E}$, $\overline{\mathbf{F}} \rightarrow (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \models (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{F}$.

9. Выясните, верны ли следующие утверждения:

- (а) если $\Gamma \models \mathbf{A}$ и $\Gamma \models \mathbf{B}$, то $\Gamma \models \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$;
 (б) $\Gamma \models \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, \overline{\mathbf{A}} \models \mathbf{B}$;
 (в) если $\Gamma, \mathbf{A} \models \mathbf{B}$ и $\Gamma, \mathbf{A} \models \overline{\mathbf{B}}$, то $\Gamma \models \overline{\mathbf{A}}$;
 (г) $\Gamma \models \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \models (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{C}$.
 (Здесь Γ — конечное множество формул, возможно пустое.)