СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – это математическая наука, которая изучает закономерности случайных явлений: случайных событий, случайных величин, случайных векторов, случайных процессов.

Понятие «вероятность» является одним из наиболее часто используемых понятий современной науки. Вероятность вошла в физику в процессе разработки молекулярно-кинетической теории, и приобрела еще большее значение в современной физике: квантовой механике, ядерной физике и в т. д. Многие разделы биологии используют вероятностные модели, особенно генетика, так как механизм наследственности описывется вероятностными моделями. Теория вероятностей является теоретической базой таких прикладных разделов современной науки, как теория надежности, теория массового обслуживания, теория финансов. Применение теориия вероятностей находит в следующих отраслях: в системах связи (выделение речевых сигналов из смеси их с помехой, автоматическое распознавание речи, дискретизация и квантование сигналов), в кибернетике (экспертные системы, распознавание образов, автоматизированные системы управления), в метеорологии (прогноз погоды, анализ изменений климата), в медицине (диагностика, прогнозирование эпидемической опасности). При помощи методов теории вероятностей и математической статистики решаются многие важные задачи в экономической теории и теории защиты информации. Разумеется, приведенный выше список далек от полноты.

Статистическую обработку данных применяли в древней Индии – землемеры практиковали усреднение нескольких результатов измерений.

Первый научный трактат, посвященный закономерностям результатов бросания нескольких игральных костей, датируется XII веком.

Мощный толчок развитию теории вероятностей дали карточные игры. Французское слово «le hazard» переводится как «случай». В современном виде теория вероятностей оформилась в XVII веке – этому способствовали карточные игры, а также развитие страхования и измерений.

Наибольший вклад в развитие теории вероятностей внесли следующие математики: Лаплас (анализ ошибок измерений), Гаусс (обоснование нормального закона); Бернулли (закон больших чисел – частота стремится к вероятности с увеличением количества опытов); Пуассон (обобщение закона больших чисел), Буняковский (первый учебник по теории вероятностей на русском языке); Чебышев (метод моментов); Марков (основы теории случайных процессов); Ляпунов (метод характеристических функций); Хинчин (исследование стационарных случайных процессов); Колмогоров (аксиоматическое построение теории вероятностей).

Основными задачами теории вероятностей являются: определение вероятностных закономерностей, которым подчиняются случайные явления; разработка методов построения математических моделей случайных явлений; исследование вероятностных свойств математических моделей изучаемых случайных явлений.

1 Случайные события и их вероятности

1.1 Случайные эксперименты

Любое изучаемое явление (событие, величину, процесс) можно представить как результат некоторого эксперимента (испытания, опыта), проводимого при комплексе определенных условий. При этом для любого эксперимента S комплекс условий U, при котором S происходит, влияет на результат – событие A:

$$A \in \{A_1, A_2, \ldots\},$$

где A_1, A_2, ... – некоторые исходы эксперимента S, наступление или ненаступление которых регистрируется в ходе проведения S. В зависимости от типа этого влияния эксперименты делятся на детерминированные и недетерминированные эксперименты.

Определение 1. Эксперимент S называют *детерминированным*, если комплекс условий U однозначно определяет результат. Эксперимент S называют *недетерминированным*, если комплекс условияй U неоднозначно определяет исход эксперимента.

Ниже приведены примеры детерминированных и недетерминированных экспериментов.

Пример 1. S_1: состояние дистилированной воды. Возможные исходы: $A_1 = \{$вода в жидком состоянии$\}$, $A_2 = \{$вода в твердом состоянии$\}$, $A_3 = \{$вода в газообразном состоянии$\}$. Определим условия $U = \{$ дистиллированная вода, объем 1 литр, $p = 760$ мм рт. ст. , $t = 20^0\, C\,\}$. Очевидно, что $U \Longrightarrow A_1$, но не A_2 и не A_3. Следовательно S_1 – детерминированный эксперимент.

Пример 2. S_2: $U = \{$над плоской поверхностью наудачу бросают симметричную монету$\}$; $A = \{$аверс (лицевая сторона монеты)$\}$. В этом эксперименте $U \Longrightarrow A$ или $\bar{A}$, где $\bar{A} = \{$реверс (обратная сторона монеты)$\}$.

Пример 3. S_3: $U = \{$экзаменатор перемешивает 40 экзаменационных билетов, студент наудачу извлекает 1 билет $\}$; $A = \{$номер извлеченного билета – четное число$\}$. В эксперименте S_3: $U \Longrightarrow A$ или $\bar{A}$, где $\bar{A} = \{$номер извлеченного билета – нечетное число$\}$.

Пример 4. S_4: $U = \{$15 мая 2010 года, 9.00 утра, БГУ, главный корпус, аудитория 521$\}$; $A = \{$ в аудитории находится 30 студенток $\}$. $U \Longrightarrow A$ или $\bar{A}$.

S_2, S_3, S_3 – недетерминированные эксперименты.

Важным классом недетерминированных экспериментов являются случайные эксперименты.

Определение 2. Недетерминированный эксперимент S называется *случайным экспериментом*, если при неизменных условиях U он может быть повторен неограниченное количество раз и при этом для него выполняется свойство статистической устойчивости частот.

Пусть эксперимент S осуществлен n раз при неизменном комплексе условий U.

Определение 3. *Абсолютной частотой события* A при n-кратном повторении в неизменных условиях U эксперимента S называется величина $m_n(A)$, равная числу наступлений A в серии этих повторений. *Относительной частотой события* A при n-кратном повторении в неизменных условиях U эксперимента S называется величина

$$\nu_n(A) = \frac{1}{n} \cdot m_n(A).$$

Очевидно, что $0 \le \nu_n(A) \le 1$.

Определение 4. Говорят что для эксперимента S выполняется *свойство статистической устойчивости частот*, если для любого события $A \in \{A_1, A_2, \ldots\}$, где A_1, A_2, … – всевозможные исходы S, при возрастании числа n повторений в неизменных условиях U эксперимента S, последовательность относительных частот $\nu_n(A)$ сходится к некоторому числу p_A ($p_A \in [0, 1]$):

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = p_A. \tag{1.1}$$

Число $\mathbf{P}(A) = p_A$ является *численной мерой степени объективной возможности наступления события* A и называется *вероятностью события* A.

1.2 Случайные события и соотношения между ними

Результатами случайного эксперимента являются случайные события. Приведем удобный и универсальный инструмент, который опирается на теорию множеств и позволяет описать все возможные исходы (события) случайного эксперимента.

Определение 1. События, составляющие множество простейших исходов случайного эксперимента S, называются *элементарными событиями*, если: все эти события различны; наступление одного из них исключает наступление всех остальных исходов; в ходе эксперимента S одно из элементарных событий неизбежно наступит.

В теории вероятностей элементарные события (исходы) случайного эксперимента S обозначаются, как правило, символами ω_1, ω_2, ...

Определение 2. Множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, составленное из всех элементарных исходов случайного эксперимента S, называется *пространством элементарных событий.*

Смысл введенных понятий выясним, рассматривая конкретные примеры.

Пример 1. Эксперимент состоит в подбрасывании наудачу симметричной монеты. Пространство элементарных событий: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где элементарные события определены следующим образом: ω_1 ={аверс (выпадение лицевой стороны монеты)}={Г}, ω_2 ={реверс (выпадение обратной стороны монеты)}={Ц}.

Пример 2. Эксперимент состоит в подбрасывании наудачу двух симметричных монет. Пространство элементарных событий: $\Omega = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}\}$, где элементарные события определены следующим образом: ω_{11} ={Г, Г}, ω_{12} ={ГЦ}, ω_{21} ={ЦГ}, ω_{22} ={ЦЦ}.

Определение 3. Любое объединение A некоторых элементарных событий из Ω называется *случайным событием.*

Таким образом, можно сказать, что случайное событие A является подмножеством пространства элементарных событий Ω, то есть $A \subset \Omega$, и наступает всякий раз, когда наступает какое-либо элементарное событие $\omega \in A\,(\omega \in \Omega)$. При этом говорят, что *элементарное событие ω благоприятствует* наступлению A.

Пример 3. Подбрасывается наудачу игральная кость. Пространство элементарных событий: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где элементарными событиями являются события: ω_i={на верхней грани выпадает i очков}, $i = 1, \ldots, 6$. Опишем случайные события: A={выпадение четного числа очков}, B={выпадение числа очков, кратного трем}, C={выпадение числа очков, меньшего пяти}.

Событие A наступает тогда, когда на верхней грани выпадет либо два, либо четыре, либо шесть очков, т.е.

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$$

и событию A благоприятствуют три исхода.

Аналогично можно записать,что $B = \{\omega_3, \omega_6\}$ и $C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Определение 4. Событие, которое обязательно происходит в эксперименте S называется *достоверным событием.* Событие, которое не может произойти в эксперименте S, называется *невозможным событием.*

Пространство элементарных событий Ω представляет собой множество всех элементарных событий. Так как хотя бы одно из элементарных событий происходит всегда, то, следовательно, и событие Ω происходит всегда. Поэтому достоверное событие обозначается символом Ω. Невозможное событие – событие, не содержащее ни одного элементарного события, и, поэтому, оно обозначается символом $\varnothing$.

Случайные события A и B *эквивалентны* (*тождественны*):

$$A = B,$$

если A наступает тогда и только тогда, когда наступает B, и наоборот. Говорят, что *событие A влечет за собой событие B*:

$$A \subset B,$$

если при каждом появлении A наступает и B. Если события A и B эквивалентны,то

$$A \subset B \;\text{ и }\; B \subset A.$$

Случайные события A и B *несовместны*, если появление одного из них исключает появление другого. События A и B – *совместны*, если они могут произойти одновременно в результате эксперимента. Случайное событие A является *противоположным* (*дополнением*) событию B:

$$A = \overline{B},$$

если A наступает тогда и только тогда, когда не наступает B.

В теории вероятностей для определения соотношений между событиями принята *вероятностная трактовка языка теории множеств.*

Пусть $A, B, C \subset \Omega$, где Ω – пространство элементарных событий некоторого случайного эксперимента.

Определение 5. Случайное событие C является *суммой событий* A и B:

$$C = A \cup B = A + B,$$

если C наступает тогда и только тогда, когда наступает A, или B, или оба эти события вместе.

Справедливы следующие соотношения:

1). $A + \Omega = \Omega$, 2). $A + \varnothing = A$,

3). $A + B = B + A$, 4). $A + A = A$, 5). $A + \overline{A} = \Omega$,

5). если $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$, то событие $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ наступает тогда и только тогда, когда произойдет хотя бы одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Определение 6. Случайное событие C является *произведением событий* A и B:

$$C = A \cap B = A \cdot B,$$

если C наступает при одновременном наступлении событий A и B.

Справедливы следующие соотношения:

1). $A \cdot \Omega = A$, 2). $A \cdot \varnothing = \varnothing$,

3). $A \cdot B = B \cdot A$, 4). $A \cdot A = A$, 5). $A \cdot \overline{A} = \varnothing$,

5). если $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$, то событие $C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ наступает тогда и только тогда, когда произойдут одновременно все события $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Кроме перечисленных выше свойств операции сложения и произведения удовлетворяют свойству *дистрибутивности*:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Определение 7. Случайное событие C является *разностью* случайных событий A и B:

$$C = A \backslash B,$$

если C наступает тогда и только тогда,когда наступает A и не наступает B.

Если $C = A \backslash B$, то $C = A \cdot \overline{B}$.

Определение 8. Случайное событие C является *симметричной разностью* событий A и B:

$$C = A \bigtriangleup B,$$

если C наступает тогда и только тогда, когда наступает только одно из событий либо A, либо B.

Определение 9. Случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ образуют *систему попарно несовместных событий*, если для любых $i \neq j \ \ (i, j = 1, \ldots, n)$:

$$A_i \cdot A_j = \varnothing.$$

Определение 10. Случайные события $H_1, H_2, \ldots, H_n \subset \Omega$ образуют *полную систему попарно несовместных событий*, если в результате эксперимента хотя бы одно из них непременно должно произойти и любые два из этих событий несовместны, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega,$$

$$H_i \cdot H_j = \varnothing$$

для любых $i \neq j \ \ (i, j = 1, \ldots, n)$.

При выполнении операций над случайными событиями часто оказывается полезным правило де Моргана, суть которого состоит в следующем.

Определение 11. Пусть случайное событие A является результатом применения к событиям $A_1, A_2, \ldots$ действий «$\cup$», «$\cap$», «$\subset$». Тогда для того, чтобы получить событие $\overline{A}$, достаточно все события поменять на противоположные $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots$, а действия поменять по схеме: «$\cup$» на «$\cap$», «$\cap$» на «$\cup$», «$\subset$» на «$\supset$».

Пример 4.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B},$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Пример 5. Продолжение примера 3. Наблюдаемый результат ξ – число очков на верхней грани. Введем в рассмотрение случайные события: $A = \{\xi$ кратно трем $\}$, $B = \{\xi$ нечетно $\}$, $C = \{\xi > 3\}$, $D = \{\xi < 7\}$, $E = \{\xi$ дробно $\}$, $F = \{0.5 < \xi < 1.5\}$.

Опишем состав и выясним смысл событий : $\overline{B}, \overline{C}, AB, A + B, A \backslash \overline{B}, E + D, EF$.

Пространство элементарных событий – $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где $\omega_i = \{\xi = i\}$, $i = \overline{1,6}$. Введенные в рассмотрение события представимы при помощи элементарных событий следующим образом: $A = \{\omega_3, \omega_6\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega$, $E = \varnothing$, $F = \{\omega_1\}$.

Очевидно: $A \subset D$, $B \subset D$, $C \subset D$, $F \subset D$, $F \subset B$.

Используя введенные обозначения, можем записать:

$$\overline{B} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{\xi\text{– четное число очков }\},\ \overline{C} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{\xi \leq 3\},\ AB = \{\omega_3\} = \{\xi = 3\},$$

$$A + B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\} = \{\xi\text{– или нечетное число, или кратно трем}\},$$

$$A \backslash \overline{B} = \{\omega_3\} = \{\xi = 3\} = AB, E + D = D = \Omega,\ EF = \varnothing.$$

Пример 6. Продолжение примера 5. Так как $A + B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$, то $\overline{A + B} = \{\omega_2, \omega_4\}$.

Определим $\overline{A + B}$ используя правило де Моргана:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B},$$

$$\overline{A} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}, \quad \overline{B} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},$$

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = \{\omega_2, \omega_4\}.$$

1.3 Простейшие вероятностные модели случайных экспериментов

Пусть Ω – пространство элементарных событий некоторого случайного эксперимента S. Структура множества Ω позволяет выделить три типа простейших вероятностных моделей: классическую, дискретную и геометрическую.

Классическая вероятностная модель

Определение 1. *Классическая вероятностная модель* – это математическая модель простейших случайных экспериментов, определяемая четырьмя аксиомами:

Аксиома A1. Пространство элементарных событий Ω случайного эксперимента S конечно, то есть: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}, \quad N < \infty$.

Аксиома A2. Каждому случайному событию $A \subset \Omega$ поставлено в соответствие такое число $p_A = \mathbf{P}(A)$, что:

$$0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1, \quad \mathbf{P}(\varnothing) = 0, \quad \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Число $p_A = \mathbf{P}(A)$ определяет степень возможности наступления события A и называется *вероятностью* этого события, а функция $\mathbf{P}(\cdot)$, заданная на подмножествах множества Ω, – *вероятностной функцией.*

Аксиома A3. Для любых несовместных событий $A, B \subset \Omega$ вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Аксиома A4. Все N элементарных событий равновероятны (равновозможны):

$$\mathbf{P}(\omega_1) = \mathbf{P}(\omega_2) = \ldots = \mathbf{P}(\omega_N) = p = const.$$

Следствие 1. Вероятности элементарных событий равны $\dfrac{1}{N}$:

$$\mathbf{P}(\omega_1) = \mathbf{P}(\omega_2) = \ldots = \mathbf{P}(\omega_N) = \frac{1}{N}. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно аксиомам A1 и A3

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i,$$

и

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Применяя аксиомы A3, A4 и A2 можно записать следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{N} \omega_i\right\} = \mathbf{P}\left\{\omega_i \cup \left(\bigcup_{i=2}^{N} \omega_i\right)\right\} = \mathbf{P}(\omega_1) + \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=2}^{N} \omega_i\right\} =$$
$$= \ldots = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(\omega_i) = N \cdot p = 1,$$

из которой следует

$$p = \frac{1}{N}.$$

■

Следствие 2. Для классической вероятностной модели случайного эксперимента, определяемой аксиомами А1-А4, с N элементарными исходами вероятность случайного события $A \subset \Omega$ определяется равенством

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}, \tag{1.3}$$

где $N(A)$ – число элементарных исходов, благоприятствующих событию А, а $N(\Omega)$– число всевозможных исходов эксперимента.

Доказательство. Пусть некоторому случайному событию $A \subset \Omega$ благоприятствуют M элементарных событий $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_M}$ $(0 \le M \le N)$, то есть

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_M}\} = \bigcup_{k=1}^{M} \omega_{i_k}, \tag{1.4}$$

где $\omega_{i_k} \in \Omega$ $(k = 1, 2, \ldots, M)$ и $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_M \le N$.

Используя аксиомы А3, А4 и соотношение (1.4) можно записать:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{k=1}^{M} \omega_{i_k}\Big\} = \sum_{k=1}^{M} \mathbf{P}(\omega_{i_k}) = \frac{M}{N}.$$

Так как $N(A) = M$,а $N(\Omega) = N$, то соотношение 1.3 доказано. ■

Следствие 3. Для любых попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_i\right).$$

Определение 2. Соотношение

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} -$$

классическое определение вероятности.

Для вычисления величин $N(A)$ и $N(\Omega)$ обычно используют правила комбинаторики.

Пример 1. На экзамене студент произвольно выбирает один из предложенных N билетов. Определим вероятость того, что он выбрал билет, номер которого – четное число.

Пространство элементарных событий: $\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, где $\omega_i = i$, $i = 1, \ldots, N$. Введем обозначение:

$$A = \{\text{номер выбранного билета – четное число}\}.$$

Тогда:

$$A = \left\{\omega_2, \omega_4, \ldots, \omega_{2(k-1)}, \omega_{2k}\right\}, \text{ где } k = \left[\frac{N}{2}\right]$$

и

$$N(A) = k,\ N(\Omega) = N = \begin{cases} 2k, & \text{если } N \text{ четное число,} \\ 2k+1, & \text{если } N \text{ – нечетное число.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\,(A) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } N = 2k, \\ \frac{k}{2k+1}, & \text{если } N = 2k+1. \end{cases}$$

Пример 2. В урне находятся K однотипных шаров, среди которых L красных и $K - L$ белых. Из урны наудачу извлекают одновременно $k\,(k \leq K)$ шаров. Определим вероятность того, что среди извлеченных шаров имеется l красных.

Обазначим через A_l случайное событие «среди извлеченных k шаров имеется l красных». Тогда

$$\mathbf{P}\,(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

где

$$N(\Omega) = \mathbf{C}_K^k,$$

а

$$N(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } l > \min\{L, k\}, \\ \mathbf{C}_L^l \cdot \mathbf{C}_{K-L}^{k-l}, & \text{если } l \leq \min\{L, k\}. \end{cases}$$

Дискретная вероятностная модель

Определение 3. *Дискретная вероятностная модель* случайных экспериментов – обобщение классической вероятностной модели для таких случайных экспериментов, пространство элементарных исходов которых – счетное множество, или элементарные события неравновероятны.

Дискретная вероятностная модель определена следующей системой аксиом.

Аксиома A′1. Пространство элементарных собятий Ω – счетное множество:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\}, N \leq \infty.$$

Аксиома A′2. Каждому случайному событию $A \subset \Omega$ поставлено в соответствие такое число $\mathbf{P}\ (A)$, что:

$$0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1,$$

$$\mathbf{P}(\varnothing) = 0, \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Аксиома A′3. Для любой последовательности $A_1, A_2, \ldots, \subset \Omega$ попарно несовместных случайных событий выполняется соотношение:

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Определение 4. Вероятности $p_i = \mathbf{P}(\omega_i), i = 1, \ldots, N$, называются *элементарными вероятностями.*

Следствие 4. Сумма всех элементарных вероятностей $p_i = \mathbf{P}(\omega_i), i = 1, \ldots, N$, $N \leq +\infty$, равна единице:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1. \tag{1.5}$$

Доказательство.

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{N} \omega_i\right\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(\omega_i) = \sum_{i=1}^{N} p_i.$$

■

Замечание. *Равенство* 1.5 *называется* условием нормировки.

Следствие 5. В рамках дискретной вероятностной модели, определяемой аксиомами *A′1 - A′3*, вероятность случайного события $A \subset \Omega$ равна сумме ряда, составленного из элементарных вероятностей тех элементарных событий, которые благоприятствуют A:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i. \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть случайному событию $A \subset \Omega$ благоприятствуют элементарные исходы $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_M}$ $(M \leq \infty)$. Тогда:

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_M}\} = \bigcup_{k=1}^{M} \omega_{i_k}. \tag{1.7}$$

Применив к (1.7) аксиому A′3 получаем:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{M} \mathbf{P}(\omega_{i_k}) = \sum_{k=1}^{M} p_{i_k} = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i.$$

■

Пример 3. Рассмотрим один рабочий день некоторого филиала Сбербанка. Статистической обработкой архивных данных установлено, что среднее число посетителей некоторого филиала данного банка равно $\lambda > 0$. Пространством элементарных исходов в этом случае является множество $\Omega = \{\omega_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$, а элементарными вероятностями величины

$$p_k = \mathbf{P}(\omega_k) = \frac{\lambda}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Геометрическая вероятностная модель

Определение 5. *Геометрическая вероятностная модель* – математическая модель случайного эксперимента, множество элементарных исходов которого *(*пространство элементарных событий Ω*)* является ограниченным подмножеством m-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$*:* прямой *(*m=1*)*, плоскости *(*m=2*)*, пространства *(*m=3*)* и т.д.

В геометрической вероятностной модели все элементарные исходы случайного эксперимента интерпретируются как выбор наудачу точки из множества Ω и предполагаются равновозможными. Под случайным событием понимается принадлежность выбранной точки заданному подмножетсву A множества Ω. Вероятность такого события определяется как отношение меры (площади, длины, объема) подмножества A к мере множества Ω.

Определение 6. Числовая функция $\mu = \mu(A)$, определенная на подмножествах $A \subseteq \Omega$ называется *мерой*, если выполняются следующие свойства:

– неотрицательность: $\mu(A) \geq 0$;

– ограниченность: $\mu(\Omega) < \infty$;

– монотонность: $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

– счетная аддитивность: для любых непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ выполняется соотношение

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i);$$

– $\mu(\varnothing) = 0$.

При $m = 1$ $\mu(A)$ – длина отрезка A, при $m = 2$ $\mu(A)$ – площадь плоской фигуры A, при $m = 3$ $\mu(A)$ – объем тела A и т.д. В пространстве $\mathbb{R}^m$ используется мера Лебега: $\mu(A) = mes_m(A)$.

Определение 7. В рамках геометрической вероятностной модели вероятность случайного события $A \subset \Omega$ (*геометрическая вероятность*) определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

1.4 Элементы комбинаторики

В теории вероятностей часто приходится иметь дело с задачами, в которых необходимо подсчитывать число возможных способов совершения каких-либо действий. Задачи такого типа называются комбинаторными, а раздел математики, занимающийся решением таких задач, – комбинаторикой.

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий расположения объектов в соответствии со специальными правилами и методы подсчета числа всех возможных способов, которыми эти расположения могут быть сделаны.

Сформулируем два универсальных правила, применяемых при решении комбинаторных задач.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами.

Пример 1. Из города A в город B ведет m различных путей, а из города B в город C – n путей. Несложно видеть, что число различных путей из города A в город C равно $m \times n$.

Правило суммы. Пусть требуется выполнить одно из каких-либо k действий, взаимно исключающих друг друга. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то выполнить одно из этих k действий можно $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$ способами.

Пример 2. В информационно-технологическом управлении банка работают три аналитика, десять программистов и двадцать инженеров. Для сверхурочной работы в праздничный день начальник управления должен выделить одного сотрудника. Очевидно, что начальник управления может отобрать одного аналитика $n_1 = 3$ способами, одного программиста – $n_2 = 10$ способами, а одного инженера – $n_3 = 20$ способами. Поскольку по условию задачи начальник управления может выделить любого из своих сотрудников, то согласно правилу суммы у него существует $n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 10 + 20 = 33$ различных способа выбрать сотрудника для сверхурочной работы.

Упорядоченные множества, перестановки

Множество называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n, где n – число элементов множества, так, что различным элементам соответствуют различные числа. Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (то есть могут быть получены из того же самого множества), называются перестановками этого множества.

Обозначим через P_n – число перестановок множества, содержащего n различных элементов. Тогда

$$P_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = n!.$$

Размещения из n элементов по k

Рассмотрим теперь упорядоченные подмножества основного множества Ω. Упорядоченные подмножества, содержащие k элементов, множества из n элементов называются размещениями из n элементов по k. Число размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 3. Найдем число телефонных номеров, состоящих из шести различных цифр:

$$A_{10}^6 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151\,200.$$

Размещения с повторениями из n элементов по k

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества Ω, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения. Число размещений с повторениями из n элементов по k равно

$$\hat{A}_n^k = n^k.$$

Пример 4. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Первое письмо имеет 2 альтернативы – либо его относит к адресату первый почтальон, либо второй. Для второго письма также есть 2 альтернативы и т.д., то есть $n = 2$, а $k = 10$. Следовательно, общее число способов распределений писем между двумя почтальонами равно

$$N = 2^{10} = 1024.$$

Сочетания из n элементов по k

Пусть Ω – основное множество, состоящее из n элементов. Произвольное (неупорядоченное) подмножество Ω, содержащее k элементов, называется сочетанием из n элементов по k.

Число всех сочетаний из n элементов по k равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 5. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Определим количество партий, которые должны быть сыграны в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия.

Так как каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, то количество партий в турнире представляет собой число сочетаний из 16 элементов по 2:

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!14!} = 120.$$

Сочетания с повторениями из n элементов по k

Сочетаниями с повторениями из n элементов по k называются подмножества множества Ω, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число различных сочетаний из n элементов по k с повторениями равно

$$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

Пример 6. Из трех элементов a, b, c можно составить такие сочетания по два элемента с повторениями:

$$aa, bb, cc, ab, ac, bc,$$

и их число равно

$$\hat{C}_3^2 = C_4^2 = 6.$$

Перестановки с повторениями

Пусть множество Ω состоит из n элементов, среди которых имеется только m различных элементов ($m \le n$). Тогда перестановками с повторениями из n элементов называются упорядоченные подмножества множества Ω, в которые первый элемент множества Ω входит n_1 раз, второй элемент – n_2 раз и так до m -го элемента, который входит n_m раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$. Число таких перестановок равно

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}.$$

Пример 7. Пусть имеется n букв: n_1 букв a_1, n_2 букв $a_2, \ldots, n_m$ букв a_m, $n_1 + \ldots + n_m = n$. Количество слов длины n, которые можно получить из такого набора символов равно $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m)$.

Пример 8. Найдем число различных слов, которые можно получить, переставляя буквы в слове «математика». Оно равно

$$P_{10}(3, 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{3!2!2!} = 151\,200.$$

Полиномиальная формула

Справедливо равенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1 \le 0, \ldots, k_m \le 0 \\ k_1 + \ldots + k_m = n}} P_n(k_1, \ldots, k_m) a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}.$$

Числа $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ называются полиномиальными коэффициентами.

1.5 Алгебра и σ-алгебра случайных событий

Алгебра случайных событий

Рассмотрим пространство элементарных исходов Ω некоторого случайного эксперимента.

Определение 1. Множество $\mathcal{F}$, элементами которого являются подмножества множества Ω (не обязательно все), называется *алгеброй случайных событий*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

Условие У1. Достоверное событие Ω принадлежит алгебре $\mathcal{F}$ подмножеств из Ω:

$$\Omega \in \mathcal{F};$$

Условие У2. Если случайное событие A принадлежит алгебре $\mathcal{F}$, то и противоположное ему событие $\overline{A}$ принадлежит $\mathcal{F}$:

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F};$$

Условие У3. Если случайные события A и B принадлежат алгебре $\mathcal{F}$, то и их сумма $A \cup B$ принадлежит $\mathcal{F}$:

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}.$$

Свойства алгебры случайных событий

Свойство С1. $\varnothing \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Согласно условию **У1** алгебры событий $\mathcal{F}$ $\quad \Omega \in \mathcal{F}$. Но $\overline{\Omega} = \varnothing$. Следовательно, учитывая **У2**, можем записать: $\varnothing \in \mathcal{F}$.

■

Свойство С2. Если $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$. Тогда, учитывая условия **У2** и **У3**, можно записать

$$\overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{F}, \text{ и } \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F}.$$

Следовательно,

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{F}.$$

Так как по правилу де Моргана

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B,$$

то

$$A \cap B \in \mathcal{F}.$$

■

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ – произвольный конечный набор событий из $\mathcal{F}$. Тогда из условия **У3** и свойства **С2** вытекают следующие два свойства алгебры $\mathcal{F}$.

Свойство С3.

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}.$$

Свойство С4.

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}.$$

Свойство С5. Алгебра $\mathcal{F}$ замкнута относительно конечного числа операций «$\bigcup$», «$\bigcap$» и «$^{-}$».

Доказательство. Операции «$\bigcup$», «$\bigcap$» и «$^{-}$», согласно определению и свойствам алгебры событий, не выводят результат за пределы алгебры $\mathcal{F}$.

■

Пример 1. Пусть

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}.$$

Тогда

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \omega_1, \omega_2, \omega_3, (\omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_3), (\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}$$

является алгеброй, порожденной множеством Ω, и $|F| = 2^3 = 8$.

Пример 2. Пусть случайный эксперимент S состоит в измерении некоторой величины ξ. Известно, что ξ может принимать значения из множества $X \subset \mathbb{R}$. Элементарные события можно записать в виде $\omega_x = \{\xi = x\}$, где x некоторое фиксированное число. Пространство элементарных событий – $\Omega = X$. В процессе измерений естественно предполагать возможность наблюдения события $\{a \leq \xi \leq b\}$, где a и b—произвольные числа ($a < b$). Алгеброй $\mathcal{F}$ событий, связанной с экспериментом S, являются конечные суммы полуинтервалов $[a, b)$.

σ-алгебра случайных событий

Пусть теперь пространство элементарных событий Ω – бесконечное множество.

Определение 2. Алгебра $\mathcal{F}$ подмножеств из Ω называется *σ-алгеброй*, если свойства **С3** и **С4** алгебры событий $\mathcal{F}$ выполняются в обобщенном виде для счетного множества случайных событий, то есть для любых $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ справедливо

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \text{ и } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Замечание. σ-алгебра $\mathcal{F}$ замкнута относительно конечного числа операций «$\bigcup$», «$\bigcap$» и «$^{-}$».

В том случае, когда множество Ω конечно понятия алгебры и σ-алгебры совпадают.

Определение 3. *Измеримым пространством* называется пара математических объектов $(\Omega, \mathcal{F})$, где Ω – пространство элементарных событий, $\mathcal{F}$ – алгебра или σ-алгебра подмножеств из Ω.

Пример 3. Пусть пространство элементарных событий Ω – дискретное множество (конечное либо счётное), $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ – алгебра или σ-алгебра всех подмножеств из Ω. Тогда пара $(\Omega, 2^{\Omega})$ – измеримое пространство.

Борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}$

Пусть множеством элементарных исходов Ω является числовая прямая $\mathbb{R}$.

Определение 4. *Базовой системой множеств* (*базовой системой интервалов*) на числовой прямой $\mathbb{R}$ называется бесконечная система интервалов

$$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, A_x = (-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Определение 5. *σ-алгеброй $\sigma(\mathcal{F}_0)$, порожденной некоторой системой множеств $\mathcal{F}_0$,* называется наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{F}_0$:

$$\sigma(\mathcal{F}_0) = \bigcap_{\alpha} \mathcal{F}_0^{\alpha},$$

где $\mathcal{F}_0^{\alpha}$ - σ-алгебра, содержащая $\mathcal{F}_0$.

Определение 6. *Борелевской σ-алгеброй на числовой прямой* $\mathbb{R}$, называется σ-алгебра, порожденная базовой системой интервалов $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, A_x = (-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$:

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F}_0).$$

Определение 7. *Борелевскими множествами* называются подмножества числовой прямой, которые принадлежат борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$.

С в о й с т в а б о р е л е в с к о й σ-а л г е б р ы

Свойство С1. Для любого $x \in \mathbb{R}$ одноточечное множество $\{x\}$ является борелевским множеством : $\{x\} \in \mathcal{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, множество $\{x\}$ можно представить следующим образом:

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big[x, x+\frac{1}{n}\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(A_{x+\frac{1}{n}} \backslash A_x\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(A_{x+\frac{1}{n}} \bigcap \overline{A_x}\Big).$$

По построению полученное выражение принадлежит $\mathcal{B}$.

■

Свойство С2. Борелевскими множествами являются произвольные числовые промежутки вида

$$(a, b), [a, b), (a, b], [a, b],$$

где $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Свойство С3. Множество рациональных чисел является борелевским: $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является счетной суммой одноточечных множеств $\{q_n\}$, т.е.

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\},$$

то,следовательно, $Q \in \mathcal{B}$.

■

Свойство С4. Множество иррациональных чисел является борелевским: $\overline{\mathbb{Q}} \in \mathcal{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно множество иррациональных чисел принадлежит $\mathcal{B}$ как дополнение к $\mathbb{Q}$.

$\blacksquare$

Свойство С5. В выборе базовой системы интервалов $\mathcal{F}_0$ имеется произвол:

$$\mathcal{B} = \sigma((a,b) : a,b \in \mathbb{R}) = \sigma([a,b) : a,b \in \mathbb{R}) = \sigma((a,b] : a,b \in \mathbb{R}) = \sigma([a,b] : a,b \in \mathbb{R}).$$

Таким образом, борелевская σ-алгебра достаточно богата, хотя беднее множества всех подмножеств числовой прямой.

Замечание. Существует обобщение измеримого пространства $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ на многомерный случай – измеримое пространство $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$.

В m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$ строится своя борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}^m$ по аналогичной схеме, в которой в качестве базовой системы $\mathcal{F}_0$ берется система параллелепипедов в $\mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{F}_0 = \{A_x = A_{x_1} \times A_{x_2} \times \ldots \times A_{x_m} : x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^m\}.$$

1.6 Аксиомы теории вероятностей. Вероятностное пространство

Определение 1. Пусть Ω – некоторое пространство элементарных событий, $\mathcal{F}$ – произвольная система подмножеств из Ω. Тогда числовая функция

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(A) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

называется *вероятностной мерой*, любое подмножество $A \in \mathcal{F}$ называется *случайным событием*, а число $\mathbf{P} = \mathbf{P}(A)$ – *вероятностью случайного события* A, если выполняются следующие аксиомы Колмогорова:

Аксиома АК1. $\mathcal{F}$ – алгебра подмножеств из Ω.

Аксиома АК2. $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1, A \in \mathcal{F}$.

Аксиома АК3 (Аксиома нормировки).

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Аксиома АК4 (Аксиома конечной аддитивности). Для любых несовместных случайных событий А, В выполняется:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Если Ω – бесконечное множество, то аксиома **АК1** и аксиома **АК4** обобщаются соответственно следующими аксиомами.

Аксиома АК5. $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств из Ω.

Аксиома АК6 (Аксиома счетной аддитивности). Для любой последовательности попарно несовместных случайных событий $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ справедливо равенство:

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Определение 2. *Вероятностным пространством* называется тройка математических объектов $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где Ω – пространство элементарных событий, $\mathcal{F}$ – алгебра или σ-алгебра подмножеств из Ω, $\mathbf{P}$ – вероятностная мера, определенная на $\mathcal{F}$.

В теории вероятностей есть еще один вариант расширения (обобщения) аксиом на случай бесконечного пространства элементарных событий Ω. Для описания этого варианта необходимо ввести понятия последовательностей случайных событий и их пределов.

Определение 3. Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ определена произвольная последовательность случайных событий $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Тогда случайные события

$$A^+ = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n ::= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \tag{1.8}$$

$$A^- = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n ::= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \tag{1.9}$$

называются соответственно *верхним* и *нижним пределами* последовательности случайных событий.

Согласно (1.8) случайное событие A^+ наступает тогда и только тогда, когда для любого $k \in \mathbb{N}$ наступает случайное событие

$$B_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

B_k наступает тогда и только тогда, когда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует хотя бы один номер $n_k \geq k$ такой, что наступает событие A_{n_k}, а это значит, что наступает бесконечно много случайных событий среди $A_1, A_2, \ldots$. Таким образом:

$$A^+ = \{\text{наступает бесконечно много случайных событий из множества } \{A_n\}\}. \quad (1.10)$$

Аналогично можно показать, что

$$A^- = \{\text{наступают все случайные события} \{A_n\} \text{ за исключением лишь их конечного числа}\}. \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) видно, что

$$A^- \subseteq A^+. \quad (1.12)$$

Определение 4. Если верхний и нижний пределы последовательности случайных событий совпадают:

$$A^- = A^+ = A \in \mathcal{F},$$

то случайное событие А называется *пределом последовательности случайных событий* $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n. \quad (1.13)$$

Определение 5. Последовательность случайных событий $\{A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots\}$ называется *монотонно убывающей* и обозначается $A_n \downarrow$, если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$. Последовательность случайных событий $\{A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots\}$ *называется монотонно возрастающей* и обозначается $A_n \uparrow$, если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$.

Теорема 1. Любая монотонная последовательность случайных событий $\{A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots\}$, имеет предел при $n \to \infty$, который равен

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \text{если} A_n \downarrow, \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{если} A_n \uparrow. \end{cases}$$

Доказательство. Вычислим нижний и верхний пределы и сравним их.

По формулам 1.8 и 1.9 с учетом монотонности $A_n \downarrow$ имеем:

$$A^+ = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Big) \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$A^- = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Big) \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

так как

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \equiv A_k$$

и

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Значит, $A^- = A^+ = A$. Аналогично исследуется случай $A_n \uparrow$.

■

Таким образом, в случае бесконечного пространства элементарных событий Ω наряду с вариантом расширения аксиом Колмогорова:

$$\text{K}=\{\textit{аксиомы}\ \ \mathbf{AK5}, \mathbf{AK2}, \mathbf{AK3}, \mathbf{AK6}\},$$

$$K = \{\textit{аксиомы}\ \mathbf{5}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{6}\},$$

существует еще один вариант:

$$\widetilde{K}=\{\textit{аксиомы}\ \ \mathbf{AK1}, \mathbf{AK2}, \mathbf{AK3}, \mathbf{AK4}, \mathbf{AK7}\},$$

$$\widetilde{K} = \{\textit{аксиомы}\ \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{7}\},$$

где дополнительная аксиома **AK7** сформулирована ниже.

Аксиома AK7 (Аксиома непрерывности меры). Для любой монотонно убывающей последовательности случайных событий $B_n \downarrow$, имеющей по теореме **??** предел $\lim B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, допускается предельный переход под знаком вероятностной меры:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} B_n) = \mathbf{P}(B).$$

Теорема 2. Если справедливы аксиомы **AK5**, **AK2**, **AK3**, то аксиома **AK6** равносильна паре аксиом **AK4** и **AK7**.

Доказательство. См. [1].

■

Следствие. Эквивалентны два варианта расширения аксиом: K $\Leftrightarrow \widetilde{K}$.

1.7 Свойства вероятностной меры

Вероятностная мера $\mathbf{P} = \mathbf{P}(A)$, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ (вероятность случайного события $A \subset \Omega$), обладает следующими свойствами.

Свойство С1. Для любого случайного события $A \in \mathcal{F}$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A). \tag{1.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим достоверное событие Ω на два несовместных события A и $\overline{A}$:

$$\Omega = A \cup \overline{A} \ \text{ и } \ A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Тогда по аксиоме конечной аддитивности:

$$\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}).$$

В силу аксиомы нормировки:

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Следовательно:

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

■

Свойство С2. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$\mathbf{P}(\varnothing) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из свойства **С1**, если положить $\Omega = A$.

■

Свойство С3 (Монотонность вероятностной меры). Если $A \subset B$, то

$$\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B). \tag{1.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим событие B на два несовместных события A и $B \setminus A$:

$$B = A \cup (B \setminus A).$$

Согласно аксиомам **АК2** и **АК4** можно записать:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus A) \geq \mathbf{P}(A) \Rightarrow \mathbf{P}(B) \geq \mathbf{P}(A).$$

■

Следствие. Если $A \subset B$, то

$$\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A).$$

Свойство С4 (Формула сложения вероятностей). Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – произвольное вероятностное пространство. Тогда для любых случайных событий $A, B \in \mathcal{F}$ справедлива формула сложения вероятностей:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B). \tag{1.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем разложения случайных событий $A \cup B$ и B на несовместные события:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)), \tag{1.17}$$

$$B = (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B). \tag{1.18}$$

Применим к (1.17) и (1.18) аксиому конечной аддитивности и получим:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus (A \cap B)), \tag{1.19}$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B \setminus (A \cap B)). \tag{1.20}$$

Почленно вычтем (1.20) из (1.19) и получим (1.16).

■

Следствие 1. Если случайные события A и B несовместны, то формула сложения вероятностей превращается в аксиому конечной аддитивности.

Следствие 2. Для любых случайных событий A и B выполняется неравенство:

$$\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Свойство C5 (Обобщенная формула сложения вероятностей). Пусть $N \geq 2$, тогда для любых случайных событий $A_1, A_2, ..., A_N \in \mathcal{F}$ справедливо следующее обобщение формулы (1.16):

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \mathbf{P}\Big(A_i \cap A_j\Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^{N} \mathbf{P}\Big(A_i \cap A_j \cap A_k\Big) - ... + (-1)^{N-1} \mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\Big). \tag{1.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение (1.21) доказывается методом математической индукции по N. Для $N = 2$ результат следует из (1.16).

■

Свойство C6. Для любой последовательности N $(2 \leq N \leq \infty)$ случайных событий $A_1, ..., A_N \in \mathcal{F}$ справедливо неравенство:

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i). \tag{1.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что случай $N = 2$ рассмотрен в следствии **??**. Построим вспомогательную последовательность случайных событий :

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2),\ ..., B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j,\ i = 1, \ldots, N. \tag{1.23}$$

Очевидно, что построенные события попарно несовместны,

$$B_i \subseteq A_i$$

и

$$\bigcup_{i=1}^{N} B_i = \bigcup_{i=1}^{N} A_i.$$

Тогда в силу аксиомы счетной аддитивности и монотонности вероятностной меры

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i). \tag{1.24}$$

■

Свойство С7 (Эквивалент аксиомы счетной аддитивности). Для любой монотонной возрастающей последовательности случайных событий $A_n \uparrow$, имеющей предел

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

допустим предельный переход под знаком вероятностной меры:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n). \tag{1.25}$$

Доказательство. Введем вспомогательную последовательность случайных событий $B_n = \overline{A_n}$. Очевидно, что $B_n \downarrow$, а тогда по теореме **??**

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Поэтому с учетом свойства **С1** и правила де Моргана имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} (1 - \mathbf{P}(B_n)) = 1 - \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} B_n) =$$

$$= 1 - \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\Big) = \ldots = \mathbf{P}\Big(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}}\Big) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n). \tag{1.26}$$

■

1.8 Условная вероятность и ее свойства

Нередко возникает необходимость вычислить вероятность интересующего нас события A в ситуации,когда известно, что произошло некоторое другое событие B. Это можно сделать используя условную вероятность.

Определение 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – произвольное вероятностное пространство, на котором определено некоторое случайное событие $B \in \mathcal{F}$ такое, что $\mathbf{P}(B) > 0$. Тогда *условной вероятностью случайного события A при условии события B* называется величина:

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}; \tag{1.27}$$

при этом вероятность $\mathbf{P}(A)$, изученная ранее, называется *безусловной вероятностью.*

Замечание. Символ «|» читается: «при условии» или «относительно».

Замечание. Так как вероятности положительны, $(A \cap B) \subseteq B$ и вероятностная мера монотонна, то

$$\mathbf{P}(A \mid B) \in [0, 1].$$

Рассмотрим серию n независимых случайных экспериментов $(n = 1, 2, ...)$ и представим результаты в виде таблицы

Случайное событие	A	B	$A \cap B$
Частота случайного события	$m_n(A)$	$m_n(B)$	$m_n(A \cap B)$
Относительная частота	$\nu_n(A) = \frac{1}{n} m_n(A)$	$\nu_n(B)$	$\nu_n(A \cap B)$

По свойству статистической устойчивости частот:

$$\nu_n(A) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(A), \;\; \nu_n(B) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(B), \;\; \nu_n(A \cap B) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(A \cap B).$$

Вычислим относительную частоту наступления события A при условии, что B наступило, и ее предел при $n \to \infty$ с учетом свойства статистической устойчивости и формулы (1.27):

$$\nu_n(A \mid B) = \frac{m_n(A \cap B)}{m_n(B)} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\nu_n(A \cap B)}{\nu_n(B)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A \mid B).$$

Таким образом,условная вероятность характеризует *относительную частоту наступления события A при условии события B* в бесконечной серии экспериментов.

Свойства условной вероятности

Свойство С1. При фиксированном случайном событии $B \in \mathcal{F} \quad (\mathbf{P}(B) > 0)$, числовая функция

$$\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \mid B),$$

где $A \in \mathcal{F}$, удовлетворяет всем аксиомам теории вероятностей.

Доказательство. Доказательство проводится непосредственной проверкой аксиом вероятности.

■

Следствие. $\mathbf{P}_B(A)$ – является некоторой вероятностной мерой.

Свойство C2. Если $B \subseteq A$, то $\mathbf{P}(A \mid B) = 1$.
Доказательство. Так как $B \subseteq A$, то $A \cap B = B$ и из (1.27) следует

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1.$$

■

Свойство C3. Если $A, B, C \in \mathcal{F}$, то

$$\mathbf{P}(A \cup B \mid C) = \mathbf{P}(A \mid C) + \mathbf{P}(B \mid C) - \mathbf{P}(A \cap B \mid C).$$

Доказательство. Используя (1.27) и формулу сложения вероятностей можем записать

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B \mid C) &= \frac{\mathbf{P}((A \cup B) \cap C)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\mathbf{P}((A \cap C) \cup (B \cap C))}{\mathbf{P}(C)} = \\ &= \frac{\mathbf{P}(A \cap C) + \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbf{P}(C)} = \\ &= \mathbf{P}(A \mid C) + \mathbf{P}(B \mid C) - \mathbf{P}(A \cap B \mid C).\end{aligned}$$

■

Следствие. Если $A \cap B = \varnothing$, то

$$\mathbf{P}(A \cup B \mid C) = \mathbf{P}(A \mid C) + \mathbf{P}(B \mid C). \tag{1.28}$$

Свойство C4.

$$\mathbf{P}(\overline{A} \mid B) = 1 - \mathbf{P}(A \mid B).$$

Доказательство. учитывая (1.28) имеем

$$1 = \mathbf{P}(\Omega \mid B) = \mathbf{P}(A \cup \overline{A} \mid B) = \mathbf{P}(A \mid B) + \mathbf{P}(\overline{A} \mid B).$$

Следовательно:

$$\mathbf{P}(\overline{A} \mid B) = 1 - \mathbf{P}(A \mid B).$$

■

Свойство C5 (Формула умножения вероятностей). Если $\mathbf{P}(B) > 0$, то справедлива формула:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A \mid B). \tag{1.29}$$

Доказательство. Формула получается из (1.27), если произвести умножение на $\mathbf{P}(B)$.

■

Следствие (Симметричная формула умножения вероятностей). Если $\mathbf{P}(A) > 0$ и $\mathbf{P}(B) > 0$, то справедлива формула:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A). \tag{1.30}$$

Свойство C6 (Обобщенная формула умножения вероятностей). Для любого конечного числа N и любых N случайных событий $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{F}$, таких что

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{N-1} A_i\Big) > 0,$$

справедлива формула:

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\Big) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{P}\Big(A_{i+1} \Big| \bigcap_{j=1}^{i} A_j\Big). \tag{1.31}$$

Доказательство. Требуемый результат можно получить, $N-1$ раз применив формулу (1.29), последовательно отделяя в произведении

$$\bigcap_{i=1}^{N-1} A_i$$

по одному событию.

■

Формула полной вероятности

Теорема 1. Пусть на произвольном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определена полная система случайных событий $\{H_i, i = 1, \ldots, N\}$. Тогда для любого случайного события $A \in \mathcal{F}$ его безусловная вероятность допускает разложение:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A \mid H_i). \tag{1.32}$$

Доказательство. Построим разложение события на несовместные события:

$$A = A \cap \Omega = A \bigcap \Big(\bigcup_{i=1}^{N} H_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{N} \Big(A \cap H_i\Big).$$

Преобразовав вероятность события с помощью формулы умножения вероятностей, мы получим:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\Big(A \cap H_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i).$$

■

Замечание. Формула полной вероятности допускает следующую более общую формулировку. Если случайное событие A может наступать лишь с одним из событий $G_1, \ldots, G_N \quad (N \leq +\infty)$, то справедлива формула

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(G_i)\mathbf{P}(A \mid G_i).$$

Формула Байеса

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы **??**. Тогда, если $A \in \mathcal{F}$ – такое случайное событие, что $\mathbf{P}(A) > 0$, то справедлива формула:

$$\mathbf{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{N} \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j)}, i = \overline{1, N}. \tag{1.33}$$

Доказательство. Воспользуемся симметричной формулой умножения вероятностей:

$$\mathbf{P}(A \cap H_i) = \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A \mid H_i) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(H_i \mid A),$$

Разрешив полученное уравнение относительно $\mathbf{P}(H_i \mid A)$ и применив формулу полной вероятности получаем:

$$\mathbf{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A \mid H_i)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{N} \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A \mid H_j)}.$$

■

Замечание. $\mathbf{P}(H_i)$ называется априорной вероятностью *(*от латинского «a priori», что означает «до опыта»*)*, так как она известна до проведения и наблюдения результатов эксперимента.

Замечание. $\mathbf{P}(H_i \mid A)$ называется апостериорной вероятностью *(*от латинского «a posterpriori», что означает «после опыта»*)*.

Замечание. Формула Байеса позволяет пересчитывать априорные вероятности в апостериорные:

$$\{\mathbf{P}(H_i)\} \to \{\mathbf{P}(H_i \mid A)\},$$

и в этом смысле формулу Байеса называют математической моделью обучения.

1.9 Независимые случайные события

Определение 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – произвольное вероятностное пространство. Любые события $A, B \in \mathcal{F}$ называются *независимыми случайными событиями* на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, если вероятность совместного наступления этих событий равна произведению их вероятностей:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B). \tag{1.34}$$

В противном случае – события A и B *зависимы*.

Свойства независимых случайных событий

Свойство C1. Если $\mathbf{P}(B) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A). \tag{1.35}$$

Доказательство. Пусть A и B – независимые случайные события. Тогда, согласно (1.27) и (1.34), имеем

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A).$$

Пусть для случайных событий A и B имеет место равенство (1.35). Тогда, используя равенство (1.27), можно записать соотношение

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \mid B) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B),$$

из которого следует независимость A и B.

■

Следствие. Если $\mathbf{P}(A) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B). \tag{1.36}$$

Замечание. Из свойства **C1** очевиден содержательный смысл определения независимых случайных событий: события A и B независимы, если наступление одного из этих событий не влияет на вероятность наступления другого.

Свойство C2 (Критерий независимости случайных событий). Равенство (1.35) может рассматриваться как критерий независимости случайных событий A и B.

Доказательство. Возможны два случая:

1 если $\mathbf{P}(B) > 0$, то согласно свойству **C**1, равенства (1.34) и (1.35) эквивалентны;

2 если $\mathbf{P}(B) = 0$ – тогда в (1.34) правая и левая части равны нулю:

$$A \cap B \subseteq B \Rightarrow \mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(B) = 0.$$

■

Свойство C3. Свойство независимости переносится на противоположные события, то есть, если A и B – независимые случайные события, то независимыми являются следующие пары событий: $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A и B – независимые случайные события. Проверим критерий (1.35) для пар событий $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\overline{A} \mid B) = 1 - \mathbf{P}(A \mid B) = 1 - \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\overline{A}),\\
&\mathbf{P}(\overline{B} \mid A) = 1 - \mathbf{P}(B \mid A) = 1 - \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\overline{B}),\\
&\mathbf{P}(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(A \mid \overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\overline{A}).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Из (1.37) следует независимость указанных пар событий.

■

Свойство C4. Пусть $A, B, C \in \mathcal{F}$ – любые случайные события, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, причем такие, что A и C – независимы, B и C – независимы, A и B – несовместны. Тогда события $A \cup B$ и C независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим критерий (1.35):

$$\mathbf{P}(A \cup B \mid C) = \mathbf{P}(A \mid C) + \mathbf{P}(B \mid C) - \mathbf{P}(A \cap B \mid C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 0 = \mathbf{P}(A \cup B).$$

■

Свойство C5. Пусть случайные события $A, B \in \mathcal{F}$ несовместны и $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$. Тогда события A и B не являются независимыми событиями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что A и B – независимые события. Значит, согласно (1.34), можно записать

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) > 0. \tag{1.38}$$

Однако, так как A и B – несовместные события, то

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0. \tag{1.39}$$

Следовательно, предположение о независимости событий ошибочно.

■

Определение 2. Случайные события $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ называются *независимыми в совокупности* на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, если для любых $m \in \{2, 3, ..., n\}$ и любых упорядоченных значений m индексов $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m \le n$ выполняется обобщение равенства *(*1.34*)*:

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{m} \mathbf{P}(A_{i_j}). \tag{1.40}$$

Если же *(*1.40*)* выполняется лишь для $m = 2$, то случайные события $A_1, ..., A_n$ называются *попарно независимыми*.

С в о й с т в а н е з а в и с и м ы х в с о в о к у п н о с т и с л у ч а й н ы х с о б ы т и й

Свойство C1. Из независимости в совокупности следует попарная независимость случайных событий. Обратное утверждение неверно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямое утверждение очевидно. Покажем, используя *контрпример Бернштейна*, что обратное утверждение неверно.

Над плоской поверхностью бросается симметрический тетраэдр, грани которого раскрашены следующим образом: одна – в красный, вторая – в синий, третья – в зеленый, четвертая имеет полоски всех трех цветов. Определим случайные события:

$A_1 = \{$на выпавшей грани есть красный цвет$\}$;
$A_2 = \{$на выпавшей грани есть синий цвет$\}$;
$A_3 = \{$на выпавшей грани есть зеленый цвет$\}$.

Проверим попарную независимость и независимость в совокупности этих событий. Так как:

$$\mathbf{P}(A_i) = 2/4 = 1/2,$$

$$\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = 1/4,$$

$$\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{P}(A_j),$$

то события A_1, A_2 и A_1 – попарно независимы. Однако:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_3) = 1/8.$$

Следовательно, A_1, A_2, A_3 – зависимы.

■

Свойство С2. Вероятность совместного осуществления случайных событий $A_1, A_2, ..., A_N$, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\Big) = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i). \tag{1.41}$$

Доказательство. Доказательство следует из определения независимости в совокупности.

■

Свойство С3. Если случайные события $A_1, A_2, ..., A_N$ независимы в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий вычисляется по обобщенной формуле сложения вероятностей:

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) = 1 - \prod_{i=1}^{N}\Big(1 - \mathbf{P}(A_i)\Big). \tag{1.42}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) &= 1 - \mathbf{P}\Big(\overline{\bigcup_{i=1}^{N} A_i}\Big) = 1 - \mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{N} \overline{A}_i\Big) = 1 - \prod_{i=1}^{N} \mathbf{P}(\overline{A}_i) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{N}\Big(1 - \mathbf{P}(A_i)\Big).\end{aligned} \tag{1.43}$$

■

1.10 Схема независимых испытаний

Схема независимых испытаний Бернулли

Предположим, случайный эксперимент S является составным и состоит из $n \geq 2$ независимых в совокупности случайных экспериментов (испытаний) $S_1, .., S_n$. Под независимостью в совокупности испытаний $S_1, .., S_n$ понимается независимость в совокупности любых событий, относящихся к разным экспериментам.

Определение 1. *Схемой независимых испытаний Бернулли* называется последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода – «успех» *(*наблюдается некоторое случайное событие A*)* и «неудача» *(*наблюдается событие $\overline{A}$*)*, при этом успех в каждом испытании происходит с одной и той же вероятностью $p = \mathbf{P}(A) \in (0,1)$, а неудача – с вероятностью $q = \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - p$.

В испытаниях схемы Бернулли, когда с одним испытанием можно связать только два взаимоисключающих события, независимость в совокупности означает, что при любом n независимы в совокупности случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$, где $A_i = \{$успех в i-м испытании$\}$, $i = 1, \ldots, n$, то есть

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i). \tag{1.44}$$

Распределение числа успехов в n испытаниях

Обозначим через ν_n число успехов, случившихся в n испытаниях схемы Бернулли. Эта (случайная) величина может принимать целые значения от нуля до n в зависимости от результатов испытаний. Например, если все n испытаний завершились неудачей, то величина ν_n равна нулю.

Теорема 1(Формула Бернулли). Пусть проводятся n испытаний Бернулли, в каждом из которых с вероятностью p возможно появление события A, то есть

$$p = \mathbf{P}(A),\ q = 1 - p = \mathbf{P}(\overline{A}).$$

Тогда, вероятность $\mathbf{P}_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно m раз определяется формулой:

$$\mathbf{P}_n(m) = \mathbf{P}\left\{\nu_n = m\right\} = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1.45}$$

Доказательство. Представим результат n испытаний набором символов a и $\bar{a}$ вида

$$(aa\bar{a} \ldots a\bar{a}a)$$

длиной n, где a означает, что в испытании появилось событие A, $\bar{a}$ – противоположное событие. Каждый из интересующих нас исходов n испытаний состоит из m букв a и $n - m$ букв $\bar{a}$. Это значит, что все такие исходы имеют одинаковую вероятность $p^n \cdot q^{n-m}$.

Разные наборы отличаются только размещением букв a и $\bar{a}$. Число таких комбинаций символов будет равно C_n^m. Следовательно,

$$\mathbf{P}_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

■

Следствие. Вероятность $\mathbf{P}_n\{k \le m \le l\}$ того, что в серии из n испытаний событие A будет наблюдаться не менее k, но не более l раз определяется равенством:

$$\mathbf{P}_n\{k \le m \le l\} = \sum_{i=k}^{l} \mathbf{P}_n(i). \tag{1.46}$$

Определение 2. Набор вероятностей

$$\mathbf{P}_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},\ m = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{1.47}$$

называется *биномиальным распределением вероятностей* и обозначается $Bi(n, p)$.

Номер первого успешного испытания

Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании и обозначим через τ номер первого успешного испытания. Величина τ может принимать любые значения из множества натуральных чисел. Событие $\{\tau = 5\}$ означает, что первые четыре испытания закончились неудачей, а в пятом испытании произошёл успех.

Теорема 2. Вероятность того, что в серии n испытаний Бернулли первый успех произойдет в испытании с номером k *(*$k = 0, 1, 2, \ldots, n$*)* равна

$$\mathbf{P}\{\tau = k\} = pq^{k-1}. \tag{1.48}$$

Доказательство. Так как первые $k - 1$ испытаний завершились неудачей, то равенство (1.48) очевидно.

■

Определение 3. Набор вероятностей

$$p_k = pq^{k-1}, \tag{1.49}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, называется *геометрическим распределением вероятностей* и обозначается $G(p)$.

Геометрическое распределение вероятностей обладает интересным свойством отсутствия последействия, означающим «нестарение» устройства, время жизни которого подчинено геометрическому распределению.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{P}\{\tau = k\} = pq^{k-1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любых неотрицательных целых n и k имеет место равенство:

$$\mathbf{P}\{\tau > n + k \mid \tau > n\} = \mathbf{P}\{\tau > k\}. \tag{1.50}$$

Доказательство. По определению условной вероятности и силу того, что событие $\{\tau > n + k\}$ влечёт событие $\{\tau > n\}$, имеем

$$\mathbf{P}\{\tau > n + k \mid \tau > n\} = \frac{\mathbf{P}\{\tau > n + k, \tau > n\}}{\mathbf{P}\{\tau > n\}} = \frac{\mathbf{P}\{\tau > n + k\}}{\mathbf{P}\{\tau > n\}}. \tag{1.51}$$

Найдём для целого $m \geq 0$ вероятность $\mathbf{P}\{\tau > m\}$. Событие $\{\tau > m\}$ означает, что в схеме Бернулли первые m испытаний завершились «неудачами», то есть его вероятность равна q^m. Возвращаясь к (1.51), получим

$$\mathbf{P}\{\tau > n+k \mid \tau > n\} = \frac{\mathbf{P}\{\tau > n+k\}}{\mathbf{P}\{\tau > n\}} = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k = \mathbf{P}\{\tau > k\}.$$

■

Замечание. Если считать величину τ временем безотказной работы некоторого устройства *(*измеряемым целым числом часов*)*, то равенству *(*1.50*)* можно придать следующий смысл: вероятность работающему в данный момент устройству проработать еще k часов не зависит от того, сколько уже работает устройство. Эта вероятность такая же, как для нового устройства.

Схема независимых испытаний с несколькими исходами

Пусть в каждом из $n \geq 2$ случайных экспериментов $S_1, .., S_n$, возможен один из m исходов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, причем $\mathbf{P}(A_j) = p_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$,

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1,$$

и эти вероятности не меняются от испытания к испытанию.

Обозначим через $\mathbf{P}_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ вероятность того, что в серии из n испытаний исход A_1 появился k_1 раз, исход A_2 появился k_2 раз,..., A_m появился k_m раз, причем

$$\sum_{j=1}^{m} k_j = n.$$

Теорема 4. Вероятность того, что в серии n независимых испытаний исход A_1 появится k_1 раз, исход A_2 появится k_2 раз,..., A_m появится k_m раз вычисляется по формуле:

$$\mathbf{P}_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}. \tag{1.52}$$

Предельные теоремы в схеме независимых испытаний

При вычислении вероятностей в условиях большого числа испытаний (значение n велико) пользуются асимптотическими (приближенными) формулами, которые вытекают из локальной теоремы Муавра-Лапласа , интегральной теоремы Муавра-Лапласа и предельной теоремы Пуассона.

Теорема 5(Локальная теорема Муавра-Лапласа). При большом числе испытаний n вероятности наступления события A в каждом испытании p, отличной от 0 и 1, и при выполнении условия $npq \leq 20$, вероятность $\mathbf{P}_n(m)$ того, что в N независимых испытаниях событие A наступит ровно m раз определяется приближенными равенством:

$$\mathbf{P}_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(t),$$

где

$$t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

$\phi(\cdot)$ – плотность распределения стандартного нормального закона:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t_2}{2}}.$$

Теорема 6 (Интегральная теорема Муавра-Лапласа). При большом числе испытаний n вероятности p наступления события A в каждом испытании, отличной от 0 и 1, и при выполнении условия $npq \leq 20$, вероятность $\mathbf{P}_n(a \leq m \leq b)$того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее, чем a, и не более, чем b раз, определяется приближенным равенством:

$$\mathbf{P}_n(a \leq m \leq b) \approx \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где

$$t_1 = \frac{a - np}{\sqrt{Npq}},\ t_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}},$$

$\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Замечание.

1 Значения функций $\phi(t)$ и $\Phi(t)$ приводятся в статистических таблицах.

2 При вычислениях необходимо учитывать свойства функций $\phi(t)$ и $\Phi(t)$.

Теорема 7 (Теорема Пуассона). При большом числе испытаний n, постоянно малой вероятности p наступления события A в каждом испытании и при выполнении условия $0.1 \leq Np \leq 10$, вероятность $\mathbf{P}_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно m раз определяется приближенным равенством:

$$\mathbf{P}_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda = np$.

2 Случайные величины и их распределения

2.1 Одномерные случайные величины

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Случайная величина – это величина, принимающая те или иные значения, в зависимости от случая. Примерами случайных величин могут быть число очков, выпадающих при однократном подбрасывании игральной кости, число бракованных среди взятых наугад n изделий, число попаданий в цель при n выстрелах и т. д. Таким образом, случайные величины являются математической моделью случайных экспериментов, в которых измеряются числовые величины, то есть в которых каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ставится в соответствие действительное число ξ:

$$\xi = \xi(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Определение случайной величины

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – некоторое произвольное вероятностное пространство. Введем в рассмотрение измеримое пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ – борелевская σ-алгебра на числовой прямой $\mathbb{R}$.

Определение 1. Числовая функция $\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *$\mathcal{F}$-измеримой функцией*, если прообраз $\xi^{-1}(B)$ любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}$ является случайным событием, то есть выполняется:

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} = \{\xi \in B\} \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Определение 2. $\mathcal{F}$-измеримая числовая функция $\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая (2.1), называется *случайной величиной*, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Теорема 1. Совокупность случайных событий

$$\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

является σ-алгеброй, причем $\mathcal{F}_\xi \subseteq \mathcal{F}$.

Доказательство. Проверим свойства, определяющие σ-алгебру.

Во-первых, так как $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, то $\Omega \in \mathcal{F}_\xi$.

Во-вторых, выберем произвольные борелевские множества $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ и построим случайные события:

$$A_1 = \xi^{-1}(B_1) \in \mathcal{F}_\xi, \quad A_2 = \xi^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}_\xi.$$

Из определения борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}$ имеем:

$$B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B},\ B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B},\ \overline{B_1} \in \mathcal{B},\ \overline{B_2} \in \mathcal{B}.$$

Отсюда следует:

$$A_1 \cup A_2 = \{\xi \in B_1\} \cup \{\xi \in B_2\} = \{\xi \in B_1 \cup B_2\} \in \mathcal{F}_\xi,$$
$$A_1 \cap A_2 = \{\xi \in B_1\} \cap \{\xi \in B_2\} = \{\xi \in B_1 \cap B_2\} \in \mathcal{F}_\xi,$$
$$\overline{A_i} = \overline{\{\xi \in B_i\}} = \{\xi \in \overline{B_i}\} \in \mathcal{F}_\xi, i = 1, 2, \ldots.$$

В-третьих, выберем произвольно множества $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$, тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B},\ A_i = \xi^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}_\xi,\ i = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \xi^{-1}(B_i) = \xi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \in \mathcal{F}_\xi.$$

Таким образом, $\mathcal{F}_\xi$ является σ-алгеброй.

Осталось показать, что $\mathcal{F}_\xi \subseteq \mathcal{F}$. Предположим противное: $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\xi$. Это значит, что $\mathcal{F}_\xi \backslash \mathcal{F} \neq \varnothing$ и найдется $B' \in \mathcal{B}$ такое, что

$$\xi^{-1}(B') \in F_\xi, \quad \xi^{-1}(B') \notin \mathcal{F}.$$

Последнее противоречит определению случайной величины ξ. Следовательно, $F_\xi \subseteq \mathcal{F}$.

■

Определение 3. σ - алгебра $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}$ называется *σ-алгеброй, порожденной случайной величиной ξ*.

Распределение вероятностей случайной величины

С помощью вероятностной меры $\mathbf{P}$ и используя случайную величину $\xi = \xi(\omega)$ построим числовую функцию $\mathbf{P}_\xi(B)$:

$$\mathbf{P}_\xi(B) ::= \mathbf{P}(\xi^{-1}(B)) = \mathbf{P}\{\xi \in B\}, B \in \mathcal{B}. \tag{2.2}$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет всем аксиомам Колмогорова и, следовательно, является вероятностной мерой.

Определение 4. Вероятностная мера $\mathbf{P}_\xi(B)$, определяемая равенством (2.2) называется *распределением вероятностей случайной величины $\xi = \xi(\omega)$*.

Определение 5. Вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbf{P}_\xi)$ называется *вероятностным пространством, порожденным случайной величиной ξ* (индуцированным случайной величиной ξ).

Замечание. Функция $\mathbf{P}_\xi(\cdot)$ определена на борелевских множествах $B \in \mathcal{B}$ и показывает, как распределена вероятность по этим множествам.

Замечание. Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$ была построена на основе базовой системы интервалов:

$$\mathcal{F}_o = \{\varnothing, A_x = (-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

В связи с этим *определение* случайной величины можно *упростить*.

Определение 6. Числовая функция $\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной, определенной на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, если для любого $x \in \mathbb{R}$ прообраз интервала $A_x = (-\infty, x)$ является случайным событием, то есть:

$$\xi^{-1}(A_x) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}.$$

Функция распределения вероятностей и ее свойства

Существует универсальный способ описать распределение любой случайной величины. Это можно сделать с помощью функции распределения.

Определение 7. Пусть $\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ – произвольная случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и имеющая распределение вероятностей

$$\mathbf{P}_\xi(B) = \mathbf{P}\{\xi \in B\},\ B \in \mathcal{B}.$$

Тогда действительная функция

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}_\xi(A_x) \tag{2.3}$$

называется функцией распределения случайной величины ξ.

Распределение вероятностей $\mathbf{P}_\xi(\cdot)$ однозначно определяет функцию распределения $F_\xi(\cdot)$. Обратное соответствие задаётся следующей теоремой.

Теорема 2. Для произвольного борелевского множества $B \in \mathcal{B}$ распределение вероятностей

$$\mathbf{P}_\xi(B) = \mathbf{P}\{\xi \in B\}$$

однозначно выражается через функцию распределения $F_\xi(\cdot)$. В частности для любых $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, справедливы соотношения:

$$\mathbf{P}\{\xi \geq x\} = 1 - F_\xi(x), \tag{2.4}$$

$$\mathbf{P}\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1), \tag{2.5}$$

$$\mathbf{P}\{\xi = x\} = F_\xi(x+0) - F_\xi(x). \tag{2.6}$$

Доказательство. Результат теоремы вытекает из свойств вероятностной меры $\mathbf{P}$ и из того факта, что борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$ построена на основе базовой системы интервалов:

$$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, A_x : x \in \mathbb{R}\}.$$

Доказательство проведем для каждого из утверждений (2.4) - (2.6) отдельно.

По свойствам вероятности из (2.3) для (2.4) имеем:

$$\mathbf{P}\{\xi \geq x\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi < x\} = 1 - F_\xi(x).$$

Теперь рассмотрим (2.5). Учитывая, что

$$[x_1, x_2) = A_{x_2} \backslash A_{x_1},$$

можно записать:

$$\mathbf{P}\{x_1 \le \xi < x_2\} = \mathbf{P}\{\xi \in A_{x_2} \backslash A_{x_1}\}.$$

Так как, случайное событие $\{\xi \in A_{x_2}\}$ можно представить в виде суммы двух несовместных событий

$$\{\xi \in A_{x_2}\} = \{\xi \in A_{x_1}\} \bigcup \{\xi \in A_{x_2} \backslash A_{x_1}\}$$

и

$$\mathbf{P}\{\xi \in A_{x_2}\} = \mathbf{P}\{\xi \in A_{x_1}\} + \mathbf{P}\{\xi \in A_{x_2} \backslash A_{x_1}\},$$

то

$$\mathbf{P}\{\xi \in A_{x_2} \backslash A_{x_1}\} = \mathbf{P}\{\xi \in A_{x_2}\} - \mathbf{P}\{\xi \in A_{x_1}\}.$$

Следовательно, используя формулу (2.3), можем записать равенство

$$\mathbf{P}\{\xi \in A_{x_2} \backslash A_{x_1}\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1),$$

из которого следует (2.5).

Обратимся к (2.6), используя аксиому непрерывности:

$$\mathbf{P}\{\xi = x\} = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{x \le \xi < x + \frac{1}{n}\Big\}\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{x \le \xi < x + \frac{1}{n}\Big\} = \lim_{n\to\infty} F_\xi\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - F_\xi(x) =$$
$$= F_\xi(x+0) - F_\xi(x).$$

■

Следствие. Распределение вероятностей $\mathbf{P}_\xi(B)$, $B \in \mathcal{B}$, и функция распределения $F_\xi(x), x \in \mathbb{R}$, находятся во взаимнооднозначном соответствии.

Свойства функции распределения

Свойство С1. Областью значений функции распределения $F_\xi(x)$ является отрезок $[0, 1]$, то есть

$$0 \le F_\xi(x) \le 1, x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Это свойство вытекает из формулы (2.3), согласно которой $F_\xi(x)$ – вероятность случайного события $\xi < x$, и свойств вероятностной меры.

■

Свойство С2. Функция распределения F_ξ – неубывающая функция, то есть для любых $x_1 < x_2$ справедливо неравенство

$$F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2).$$

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$. Согласно (2.5)

$$F_\xi(x_2) = F_\xi(x_1) + \mathbf{P}\{x_1 \le \xi < x_2\} \ge F_\xi(x_1).$$

Следовательно, F_ξ – неубывающая функция.

■

Свойство С3. Полное колебание функции распределения равно единице, то есть:

$$\omega(F_\xi) = 1,$$

при этом

$$F_\xi(+\infty) = 1, F_\xi(-\infty) = 0.$$

Доказательство. Вычислим $F_\xi(+\infty)$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – бесконечно возрастающая числовая последовательность:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Введем в рассмотрение последовательность несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$:

$$A_1 = \{\omega \ : \ \xi(\omega) < x_1\},$$
$$A_n = \{\omega \ : \ x_{n-1} < \xi(\omega) < x_n\}, \ n = 2, 3, \ldots.$$

Очевидно, что случайное событие $\{\omega \ : \ \xi(\omega) < x_n\}$ можно представить в виде суммы несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\{\omega \ : \ \xi(\omega) < x_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Используя последнее равенство и аксиому сложения можем записать

$$F_\xi(x_n) = \mathbf{P}\{\xi(\omega) < x_n\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_i\}.$$

Очевидно, что

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega.$$

Применив аксиому счетной аддитивности получим

$$F_\xi(+\infty) = \lim_{n\to+\infty} F_\xi(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_i\} = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}\{A_i\} =$$
$$= \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right\} = \mathbf{P}\{\Omega\} = 1.$$

Покажем, что $F_\xi(-\infty) = 0$. Выберем вспомогательную монотонную убывающую не ограниченную снизу числовую последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$$

и введем в рассмотрение последовательность случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$:

$$A_1 = \{\omega \ : \ \xi(\omega) < x_1\},$$
$$A_n = \{\omega \ : \ \xi(\omega) < x_n\}, \ n = 2, 3, \ldots.$$

Очевидно, что $A_n \subset A_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots,$

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

и

$$\lim_{n\to+\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \varnothing.$$

Поэтому, согласно аксиоме непрерывности вероятностной меры, имеем:

$$F_\xi(-\infty) = \lim_{n\to+\infty} F_\xi(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left\{A_n\right\} = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\lim_{n\to+\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\} = \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right\} = \mathbf{P}\left\{\varnothing\right\} = 0.$$

Таким образом, доказано, что

$$\omega(F_\xi) = F_\xi(+\infty) - F_\xi(-\infty) = 1.$$

■

Свойство C4. Функция распределения непрерывна слева в каждой точке области определения, то есть:

$$F_\xi(x - 0) = F_\xi(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Обозначим через A_n следующее событие:

$$A_n = \left\{\omega\ :\ x - \frac{1}{n} \le \xi(\omega) < x,\ x \in \mathbb{R}\right\},\ n = 1, 2, \dots.$$

Очевидно, что

$$A_{n+1} \subset A_n,\ n = 1, 2, \dots,$$

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

и, так как не существует элементарного события $\omega \in \Omega$ такого, что для любого $n = 1, 2, \dots,$ будет выполняться двойное неравенство

$$x - \frac{1}{n} \le \xi(\omega) < x,\ x \in \mathbb{R},$$

то

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \varnothing.$$

Следовательно, согласно аксиоме непрерывности вероятностной меры, имеем:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left\{A_n\right\} = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\} = \mathbf{P}\left\{\lim_{n\to+\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\} = \mathbf{P}\left\{\varnothing\right\} = 0. \tag{2.7}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}\left\{A_n\right\} = \mathbf{P}\left\{\omega\ :\ x - \frac{1}{n} \le \xi(\omega) < x\right\} = F_\xi\left(x\right) - F_\xi\left(x - \frac{1}{n}\right). \tag{2.8}$$

Таким образом, учитывая приведенные выше рассуждения, имеем:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left\{A_n\right\} = \lim_{n\to+\infty}\left(F_\xi\left(x\right) - F_\xi\left(x - \frac{1}{n}\right)\right) = F_\xi\left(x\right) - \lim_{n\to+\infty} F_\xi\left(x - \frac{1}{n}\right),$$

То есть

$$F_\xi\left(x - 0\right) = \lim_{n\to+\infty} F_\xi\left(x - \frac{1}{n}\right) = F_\xi\left(x\right).$$

■

Теорема 3. [?] Пусть $F(x), x \in \mathbb{R}$ – произвольная действительная функция, обладающая свойствами **C1** - **C4**. Тогда найдется такое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и на нем такая случайная величина $\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$, что ее функция распределения в точности совпадает с данной функцией $F_\xi(\cdot) = F(\cdot)$.

Следствие. Свойства **C1** - **C4** полностью характеризуют семейство функций распределения.

Всюду в дальнейшем по определению будем считать, что задать случайную величину – это значит задать ее функцию распределения или распределение вероятностей. Таким образом, каждая случайная величина ξ дает такое отображение:

$$\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

множества Ω в числовую прямую $\mathbb{R}$, которое порождает новое вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbf{P}_\xi)$. Поэтому в дальнейшем природа вероятностного пространства нас интересовать не будет.

2.2 Классификация случайных величин

Рассмотрим случайную величину $\xi = \xi(\omega)$, определенную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Математической моделью этой случайной величины является вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbf{P}_\xi)$, где $\mathbb{R}$ – числовая прямая, $\mathcal{B}$ – борелевская σ-алгебра, $\mathbf{P}_\xi(B), B \in \mathcal{B}$ – распределение вероятностей ξ.

Многообразие случайных величин и их распределений определяется многообразием их функций распределений. Существует следующая классификация функций распределения:

– дискретные функции распределения (дискретные распределения вероятностей, дискретные случайные величины);

– абсолютно непрерывные функции распределения (абсолютно непрерывные распределения вероятностей, абсолютно непрерывные случайные величины);

– сингулярные функции распределения (сингулярные распределения вероятностей, сингулярные случайные величины).

Определение 1. *Точкой роста* функции распределения $F_\xi(x)$ называется точка $z \in \mathbb{R}$ такая,что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$F_\xi(z+\varepsilon) - F_\xi(z-\varepsilon) > 0.$$

При этом множество $G(F_\xi) = \{z \ : \ F_\xi(z+\varepsilon) - F_\xi(z-\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0\} \subseteq \mathbb{R}$ называется *множеством всех точек роста.*

Определение 2. Если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (F_\xi(z+\varepsilon) - F_\xi(z-\varepsilon)) = F_\xi(z+0) - F_\xi(z) > 0,$$

то точка роста функции распределения $F_\xi(x)$ является *точкой разрыва.*

Если $z \in \mathbb{R}$ – точка разрыва функции распределения $F_\xi(x)$, то

$$\mathbf{P}\{\xi = z\} = \mathbf{P}\{z - \varepsilon \le \xi < z + \varepsilon\} > 0.$$

Дискретные случайные величины (распределения)

Определение 3. Принято говорить, что случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, имеет *дискретное распределение вероятностей*, если множество $\mathcal{X}$ всевозможных ее значений дискретно (конечно или счетно), то есть для любых элементарных событий $\omega \in \Omega$

$$\xi(\omega) \in \mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_M\},\ M \le +\infty,$$

причем $-\infty < x_1 < x_2 < ... < x_M < +\infty$, а элементарные вероятности положительны, то есть:

$$p_i = \mathbf{P}\{\xi = x_i\} > 0,\ i = 1, \ldots, M.$$

При этом случайная величина ξ называется *дискретной случайной величиной*, а ее функция распределения $F_\xi(x)$ – *дискретной функцией распределения.*

Дискретное распределение вероятностей удобно задавать в виде таблицы:

Значения x_i	x_1	...	x_M
Элементарные вероятности p_i	p_1	...	p_M

Элементарные вероятности $\{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ удовлетворяют *условию нормировки для дискретных случайных величин*:

$$\sum_{i=1}^{M} p_i = 1, \tag{2.9}$$

поскольку сумма в левой части равенства определяет вероятность достоверного события.

Функция распределения $F_\xi(x)$ дискретной случайной величины ξ, согласно определению 7 из параграфа 1, вычисляется по формуле:

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \sum_{i: x_i < x} \mathbf{P}\{\xi = x_i\} = \sum_{i: x_i < x} p_i, \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Из этого равенства видно, что дискретная функция распределения $F_\xi(x)$ имеет не более, чем счетное число точек роста $x_1, \dots, x_M$, $M \le +\infty$, которые также являются и точками разрыва.

Основные дискретные распределения вероятностей

1. *Вырожденное распределение* $I(c)$. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение в точке c,

$$\mathcal{L}(\xi) = I(c),$$

если ξ принимает лишь одно значение c, то есть

$$\mathbf{P}\{\xi = c\} = 1.$$

2. *Дискретное равномерное распределение* $DR(\mathcal{X})$. Случайная величина ξ имеет дискретное равномерное распределение на множестве $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n < +\infty$,

$$\mathcal{L}(\xi) = DR(\mathcal{X}),$$

если

$$\mathbf{P}\{\xi = x_k\} = \frac{1}{n}, \ k = 1, \dots, n.$$

. Таблица распределения случайной величины $\xi \sim DR(\mathcal{X})$ имеет вид:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

Данное распределение представляет собой распределение n равновероятных событий.

3. *Распределение Бернулли* $Bi(1, p)$. Случайная величина ξ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$,

$$\mathcal{L}(\xi) = Bi(1, p),$$

если ξ принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Случайная величина ξ с таким распределением равна числу «успехов» в одном испытании схемы Бернулли с вероятностью «успеха» p. Таблица распределения случайной величины $\xi \sim Bi(1, p)$ имеет вид:

x_i	0	1
p_i	q	p

4. *Биномиальное распределение* $Bi(n,p)$. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$,

$$\mathcal{L}(\xi) = Bi(n,p),$$

если ξ принимает значения из множества $\{0,1,\dots,n\}$ с вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \mathbf{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \mathbf{C}_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,\dots,n.$$

Случайная величина с таким распределением равна числу «успехов» в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью «успеха» p. Таблица распределения случайной величины $\xi \sim Bi(n,p)$ имеет вид:

x_i	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
p_i	q^n	pq^{n-1}	$\dots$	$\mathbf{C}_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

5. *Отрицательное биномиальное распределение* $\overline{Bi}(n,p)$. Случайная величина ξ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$,

$$\mathcal{L}(\xi) = \overline{Bi}(n,p),$$

если ξ принимает значения из множества $\{0,1,\dots\}$ с вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \mathbf{C}_{n+k-1}^{n-1} p^n (1-p)^k = \mathbf{C}_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k,\ k = 0,1,\dots.$$

Случайная величина с таким распределением равна числу «неуспехов» в испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p до появления n-го «успеха».

6. *Геометрическое распределение* $G(p)$. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0,1)$,

$$\mathcal{L}(\xi) = G(p),$$

если ξ принимает значения из множества $\{1,2,3,\dots\}$ вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1},\ k = 1,2,3,\dots.$$

Случайная величина с таким распределением равна номеру первого успешного испытания в схеме Бернулли. Таблица распределения случайной величины $\xi \sim G(p)$ имеет вид:

x_i	1	2	$\dots$	k	$\dots$
p_i	p	pq	$\dots$	pq^{k-1}	$\dots$

7. *Распределение Пуассона* $\Pi(\lambda)$. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$,

$$\mathcal{L}(\xi) = \Pi(\lambda),$$

если ξ принимает значения из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$ с вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Распределение Пуассона носит название закона редких событий, поскольку оно всегда появляется там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых с малой вероятностью происходит «редкое» событие. По закону Пуассона распределены, например, число вызовов, поступивших на телефонную станцию, число распавшихся нестабильных частиц и т. д. Таблица распределения случайной величины $\xi \sim \Pi(\lambda)$ имеет вид:

ξ	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
p_k	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\ldots$

8. *Гипергеометрическое распределение* $HG(D, N, n)$. Случайная величина ξ имеет гипергеометрическое распределение с параметрами $D, N, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}(\xi) = HG(D, N, n),$$

если ξ принимает значения из множества $\{0, 1, \ldots, n\}$ с вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{C_D^k\, C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Гипергеометрическое распределение в теории вероятностей моделирует количество удачных выборок без возвращения из конечного множества. Например, пусть имеется множество, состоящее из N элементов. Предположим, что D из них обладают некоторым свойством. Оставшиеся $N - D$ этим свойством не обладают. Случайным образом из общей совокупности выбирается группа из n элементов. Тогда ξ – случайная величина, равная количеству выбранных элементов, обладающих указанным свойством.

Абсолютно непрерывные случайные величины (распределения)

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определена случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, имеющая распределение вероятностей $\mathbf{P}_\xi(B)$, $B \in \mathcal{B}$ и функцию распределения $F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Определение 4. Функция распределения $F_\xi(x)\, x \in \mathbb{R}$, называется *абсолютно непрерывной функцией распределения вероятностей*, если существует неотрицательная интегрируемая функция $p_\xi(x) \geq 0$ такая, что справедливо следующее интегральное представление:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(y)\ dy, x \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

при этом распределение вероятностей $\mathbf{P}_\xi(B)$, $B \in \mathcal{B}$, называется *абсолютно непрерывным распределением вероятностей*, случайная величина ξ – *непрерывной случайной величиной*, а функция $p_\xi(\cdot)$ называется *плотностью распределения вероятностей*.

Свойство С1. В каждой точке непрерывности $p_\xi(x) = F'_\xi(x), x \in \mathbb{R}$.
Доказательство. Дифференцируя

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(y)\, dy,$$

получим требуемое равенство.

■

Свойство С2. Так как $F_\xi(x)$ – неубывающая функция, то $p_\xi(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Свойство С3 (Условие нормировки для непрерывных случайных величин).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(y)\, dy = 1. \tag{2.12}$$

Доказательство. Из интегрального представления (2.11) и свойств функции распределения имеем при $x \to \infty$:

$$F_\xi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(y)\, dy,$$

но $F_\xi(+\infty) = 1$.

■

Свойство С4. Для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}$ справедливо:

$$\mathbf{P}\{\xi \in B\} = \int_{B} p_\xi(y)\, dy, \tag{2.13}$$

и, в частности,

$$\mathbf{P}\{a \leq \xi < b\} = \int_{a}^{b} p_\xi(y)\, dy. \tag{2.14}$$

Доказательство. Так как борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$ построена на основе базовой системы интервалов

$$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, A_x = (-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\},$$

то для любого множества $B \in \mathcal{F}_0$ формула (2.13) верна, так как она превращается в представление (2.11).

Если множество $B \notin \mathcal{F}_0$, то это множество порождено объединениями базовых множеств. Следовательно, так как интеграл обладает свойством аддитивности, то (2.13) выполняется для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}$.

Проиллюстрируем эту схему доказательства на формуле (2.14), используя свойства функции распределения:

$$\mathbf{P}\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_{A_b \setminus A_a} p_\xi(y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{b} p_\xi(y)\, dy - \int_{-\infty}^{a} p_\xi(y)\, dy = \int_{a}^{b} p_\xi(y)\, dy.$$

■

Свойство С5. Каково бы ни было фиксированное значение $x \in \mathbb{R}$, для непрерывной случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ справедливо соотношение:

$$\mathbf{P}\{\xi = x\} = 0. \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция распределения $F_\xi(\cdot)$ непрерывна, то

$$\mathbf{P}\{\xi = x\} = F_\xi(x+0) - F_\xi(x) = 0.$$

■

Замечание. Это свойство приводит к парадоксу. Например, наудачу бросается точка на отрезок $[0,1]$. Одно из событий вида $\{\xi = x\}$ произойдет, но в то же время $\mathbf{P}\{\xi = x\} = 0$.

Свойство С6. В условиях свойства **С1** справедливо предельное соотношение:

$$p_\xi(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\mathbf{P}\{x \le \xi < x+\Delta\}}{\Delta}. \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойств функции распределения имеем:

$$p_\xi(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{F_\xi(x+\Delta) - F_\xi(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\mathbf{P}\{x \le \xi < x+\Delta\}}{\Delta}. \tag{2.17}$$

■

Замечание. Из соотношения (2.16) происходит название «плотность распределения». В физике плотность распределения массы на числовой прямой:

$$\rho = \frac{m}{V} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{m([x, x+\Delta[)}{\Delta},$$

то есть ρ – это масса, сосредоточенная на числовом промежутке $[x, x+\Delta)$ при $\Delta \to 0$. Аналогично в теории вероятностей: плотность распределения характеризует вероятность, сосредоточенную в отрезке $[x, x+\Delta[$ при $\Delta \to 0$.

О с н о в н ы е н е п р е р ы в н ы е р а с п р е д е л е н и я в е р о я т н о с т е й

1. *Р а в н о м е р н о е р а с п р е д е л е н и е* $U(a,b)$. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$,

$$\mathcal{L}(\xi) = U(a,b),$$

если ее плотность распределения постоянна на отрезке $[a,b]$ и равна нулю вне него:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a,b], \\ 0, & \text{если } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Случайная величина $\xi \sim U(a,b)$ имеет смысл координаты точки, выбранной наудачу на отрезке $[a,b]$. Функция распределения случайной величины ξ всюду непрерывна и имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \le b, \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Равномерное распределение реализует принцип геометрической вероятности при бросании точки на отрезок $[a, b]$.

2. *Одномерное нормальное (Гаусса) распределение* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Случайная величина ξ имеет нормальное (или гауссовское) распределение с параметрами μ и σ^2,

$$\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right),$$

где $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, если ξ имеет следующую плотность распределения:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ::= n\left(x|\mu, \sigma\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$. с параметрами $\mu = 0, \sigma = 1$ называется *стандартным нормальным распределением*. Плотность стандартного нормального распределения равна

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Используют специальное обозначение $\Phi(x)$ для функции распределения стандартного нормального распределения. Первообразная функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$ не может быть выражена через элементарные функции. Поэтому функцию $\Phi(x)$ (так же как и функцию распределения произвольного нормального распределения) можно записать лишь в виде интеграла:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Функция $\Phi(x)$ встречалась нам в интегральной теореме Муавра—Лапласа.

Замечание. Функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ табулированы, то есть их значения при различных действительных x вычислены.

Свойства нормального распределения

Свойство С1. Функция $\varphi(x)$ – четная:

$$\varphi(x) = \varphi(-x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Свойство С2. Для функции $\Phi(x)$ справедливы равенства:

$$\Phi(0) = 0,5,$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Доказательство. Величина $\Phi(0)$ равна площади, заключенной под графиком кривой Гаусса левее оси ординат. Из-за симметрии плотности относительно прямой $x = 0$ эта площадь равна половине всей площади под графиком плотности, то есть $0,5$.

■

Следствие. Если $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}(0, 1)$, то для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\left\{|\xi| < x\right\} = 1 - 2\Phi\left(-x\right).$$

Свойство С3. Пусть $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Тогда

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

и

$$\mathcal{L}\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right) = \mathcal{N}(0,1).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Функцию распределения $F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$ запишем в виде интеграла от плотности и сделаем в этом интеграле замену переменных

$$v = \frac{u-\mu}{\sigma},\ du = \sigma dv:$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}}dv = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Докажем второе свойство. Вычислим, используя первое равенство, функцию распределения случайной величины

$$\eta = \frac{\xi-\mu}{\sigma}:$$

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}\left\{\eta < x\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\xi-\mu}{\sigma} < x\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi < x\sigma + \mu\right\} =$$
$$= F_\xi(x\sigma+\mu) = \Phi\left(\frac{x\sigma+\mu-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(x)$$

Функция распределения случайной величины η равна $\Phi(x)$, поэтому η имеет стандартное нормальное распределение.

■

Следствие. Если $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, то

$$\mathbf{P}\left\{x_1 < \xi < x_2\right\} = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).$$

Свойство С4 (Правило трёх сигм). Если $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, то

$$\mathbf{P}\left\{|\xi-\mu| < 3\sigma\right\} = 0,9973.$$

Доказательство.

$$\mathbf{P}\left\{|\xi-\mu| < 3\sigma\right\} = \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right| < 3\right\}.$$

Так как $\mathcal{L}\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right) = \mathcal{N}(0,1)$, то

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right| < 3\right\} = 1 - 2\Phi(-3) = 1 - 2\cdot 0,00135 = 0,9973.$$

■

Важная нормального распределения объясняется тем, что оно обычно возникает в явлениях, подверженных действию большого числа малых случайных явлений. Так математическая теория выборочного метода в статистике для расчета некоторых показателей (ошибка выборки, доверительный интервал, связь между признаками) широко использует нормальное распределение.

3. *Показательное распределение* $E(\lambda)$. Случайная величина ξ имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda > 0$,

$$\mathcal{L}(\xi) = E(\lambda),$$

если ξ имеет следующие плотность и функцию распределения:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x \geq 0, \end{cases} \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Плотность показательного распределения равна нулю на отрицательной полуоси, поэтому вероятность события $\{\xi < 0\}$ нулевая – случайная величина с показательным распределением не может быть отрицательна. К тому же плотность отлична от нуля на всей положительной полуоси, поэтому случайная величина с показательным распределением может принимать сколь угодно большие положительные значения: для всякого x вероятность события $\{\xi > 0\}$ не равна нулю.

Показательное распределение обладает свойством отсутствия последействия.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{L}(\xi) = E(\lambda)$. Тогда для любых x, $y > 0$

$$\mathbf{P}\{\xi > x + y \mid \xi > x\} = \mathbf{P}\{\xi > x\}.$$

Доказательство. Заметим, что для любого $t > 0$

$$\mathbf{P}\{\xi > t\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi < t\} = 1 - F_\xi(t) = e^{-\lambda t}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{\xi > x + y \mid \xi > x\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi > x + y, \xi > x\}}{\mathbf{P}\{\xi > x\}} = \frac{\mathbf{P}\{\xi > x + y\}}{\mathbf{P}\{\xi > x\}} =$$
$$= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x)}} = e^{-\lambda y} = \mathbf{P}\{\xi > y\}.$$

■

4. *Распределение Коши* $C(a, \sigma)$. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с параметрами $a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$,

$$\mathcal{L}(\xi) = C(a, \sigma),$$

если ξ имеет плотность распределения:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x - a)^2}.$$

Плотность распределения Коши симметрична относительно прямой $x = a$ и похожа на плотность нормального распределения, но имеет более толстые «хвосты» на $\pm\infty$. Функция распределения случайной величины $\xi \sim C(a, \sigma)$ равна

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - a}{\sigma}\right).$$

Сингулярные случайные величины (распределения)

Определение 5. Точка $g \in \mathbb{R}$ называется *точкой роста* для функции $F_\xi(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ для приращения функции $F_\xi(x)$ выполняется неравенство:

$$F_\xi(g+\varepsilon) - F_\xi(g-\varepsilon) > 0.$$

При этом $G(F_\xi) = \{g\} \subseteq \mathbb{R}$ – *множество всех точек роста.*

Определение 6. Функция распределения $F_\xi(x)$ называется *сингулярной функцией распределения*, если она непрерывна, и в то же время множество множество точек роста имеет нулевую меру Лебега.

Примером сингулярной функции распределения может служить «*лестница Кантора*» [1].

Существует эквивалентное определение сингулярной функции распределения:

Определение 7. $F_\xi(\cdot)$ – непрерывна и существует борелевское множество (носитель) $S \in \mathcal{B}$ нулевой меры Лебега

$$\mu(S) = mes(S) = 0,$$

такое, что

$$\mathbf{P}\{\xi \in S\} = 1.$$

Классификация функций распределения

Класс функций распределения	Дискретные	Абсолютно непрерывные	Сингулярные
$F_\xi(\cdot)$	Нет	Да	Да
Мера Лебега $\mu(G(F_\xi))$	0	> 0	0

Теорема 2 (Лебега) Любая функция распределения $F(x)$ представима в виде линейной комбинации некоторой дискретной $F_D(x)$, некоторой абсолютно непрерывной $F_C(x)$ и некоторой сингулярной $F_S(x)$ функций распределения:

$$F(x) = p_1 \cdot F_D(x) + p_2 \cdot F_C(x) + p_3 \cdot F_S(x), x \in \mathbb{R}, \tag{2.18}$$

где $p_1, p_2, p_3 \in [0,1], p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Определение 8. *(*2.18*) – смесь функций распределения*, p_1, p_2, p_3 – коэффициенты этой смеси.

Следствие. Произведенная классификация функций распределения в три класса вместе с всевозможными их смесями является полной.

2.3 Многомерные случайные величины

В практических задачах приходится иметь дело не с одной, а с несколькими взаимосвязанными случайными величинами. Примером может служить набор экономических или производственных показателей, характеризующих некоторый процесс.

Определение многомерной случайной величины

Пусть на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены n случайных величин

$$\xi_i = \xi_i(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 1. Упорядоченные по индексу i n случайных величин

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^{\mathbf{T}} = \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))^{\mathbf{T}}$$

называются *n-мерной случайной величиной* или *случайным n-вектором* на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, а $\xi_i = \xi_i(\omega)$ называется *i-ой компонентой случайного вектора*, $i = 1, 2, \dots, n$.

Определение 2. Пусть m $(1 \leq m \leq n-1)$ – произвольное натуральное число; $i_1, i_2, \dots, i_m$ – произвольный набор m индексов $(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n)$. Тогда упорядоченный набор m компонент исходного случайного n-вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\xi' = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_m})^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^m$$

называется *случайным подвектором.*

Рассмотрим измеримое пространство $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$: $\mathbb{R}^n$ – евклидово n-мерное пространство, $\mathcal{B}^n$ – борелевская σ-алгебра, которая строится на основе базовой системы параллелпипедов:

$$\mathcal{F}_o = \{\varnothing, A_x = A_{x_1} \times A_{x_2} \times \dots \times A_{x_n} : x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^n\},$$

где $A_{x_i} = (-\infty, x_i), i = 1, 2, \dots, n$.

Так как $\xi_i = \xi_i(\omega)$ – $\mathcal{F}$-измеримая функция $(i = 1, 2, \dots, n)$, то и векторная функция $\xi = \xi(\omega)$ также $\mathcal{F}$-измерима, то есть $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}^n$.

Определение 3. *Распределением вероятностей случайного n-вектора*

$$\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}^n,$$

заданного на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называется вероятностная мера

$$\mathbf{P}_\xi(B) = \mathbf{P}\{\xi \in B\},$$

$B \in \mathcal{B}^n$, где $\mathcal{B}^n$ – борелевская σ-алгебра подмножеств из $\mathbb{R}^n$.

n-мерная функция распределения и ее свойства

Так же как и в одномерном случае универсальным способом задания многомерной случайной величины является задание ее функции распределения вероятностей.

Определение 4. Функция n действительных переменных

$$F_\xi(x) = F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x_1,\ldots,\xi_n < x_n\}, \tag{2.19}$$

где ξ, $x \in \mathbb{R}^n$, называется *n-мерной функцией распределения* или *совместной функцией распределения n случайных величин $\xi_1,\ldots,\xi_n$.*

Определение 5. m-мерная функция распределения $F_{\xi'}(x')$, подвектора $\xi' = (\xi_{i_1},\xi_{i_2},\ldots,\xi_{i_m})^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^m$ случайного n-вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ называется *m-мерной маргинальной (частной) функцией распределения*, где $x' = (x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m})^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^m$, а $i_1,i_2,\ldots,i_m$ – произвольный набор m индексов $(1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n)$.

Свойства n-мерной функции распределения

Свойство С1. Распределение вероятностей $\mathbf{P}_\xi(\cdot)$ случайного n-вектора ξ и n-мерная функция распределения $F_\xi(\cdot)$ находятся во взаимно однозначном соответствии.

Свойство С2. Для любого $x \in \mathbb{R}^n \quad F_\xi(x) \in [0,1]$.

Свойство С3. $F_\xi(x) = F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)$ – неубывающая функция по каждому своих аргументов.

Свойство С4. Справедливы предельные отношения:

$$\lim_{x_k\to-\infty} F_\xi(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) = 0, \quad \forall k = \overline{1,n},$$

$$\lim_{x_1\to\infty}\lim_{x_2\to\infty}\ldots\lim_{x_n\to\infty} F_\xi(x_1,\ldots,x_n) = 1.$$

Свойство С5. Функция распределения $F_\xi(x_1,\ldots,x_n)$ непрерывна слева по совокупности своих аргументов.

Доказательство свойств **С1 - С5** проводятся также как доказательство аналогичных свойств в одномерном случае при $n = 1$.

Свойство С6 (Свойство согласованности многомерных функций распределения). n-мерная и $(n-1)$-мерная функции распределения удовлетворяют следующему равенству:

$$\begin{aligned}\lim_{x_k\to\infty} &F_{\xi_1,\ldots,\xi_{k-1},\xi_k,\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) = \\ &=F_{\xi_1,\ldots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n),\end{aligned} \tag{2.20}$$

$k = 1,\ldots,n, x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$. Доказательство. В определении n-мерной функции распределения (2.19) устремим к $+\infty$ координату x_k и представим правую часть равенства (2.20) в виде:

$$\lim_{x_k\to\infty} F_{\xi_1,\ldots,\xi_{k-1},\xi_k,\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) = F_\xi(x)\mid_{x_k=\infty}=$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_1 < x_1,\ldots,\xi_{k-1} < x_{k-1},\xi_k < +\infty,\xi_{k+1} < x_{k+1},\ldots,\xi_n < x_n\}.$$

Так как событие $\{\xi_k < +\infty\}$ – достоверное, то удалив его из правой части последнего равенства и используя определение (2.19), получаем правую часть утверждения (2.20). ■

Свойство C7. Для того чтобы получить m-мерную маргинальную функцию распределения случайного вектора $\xi' = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_m})^T$ $F_{\xi'}(x')$ достаточно, используя равенство 2.20, устремить в исходной n-мерной функции распределения $F_\xi(x)$ к $+\infty$ все $(n-m)$ переменных, за исключением $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$.

Свойство C8. Пусть ξ – случайный n-вектор с n-мерной функцией распределения $F_\xi(x)$,

$$C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \in \mathbb{R}^n -$$

прямоугольный параллелепипед, где $a_k < b_k, k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим

$$\Delta_k F_\xi(x) = F_\xi(x) \mid_{x_k = b_k} - F_\xi(x) \mid_{x_k = a_k}$$

приращение функции $F_\xi(x)$ по k-й переменной на отрезке $[a_k, b_k], k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, вероятность попадания случайного вектора ξ в прямоугольный параллелепипед С равна n-кратному приращению функции распределения:

$$\mathbf{P}\{\xi \in C\} = \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$Q(C_1, \ldots, C_n) = \mathbf{P}(\xi \in C) = \mathbf{P}\{\xi_1 \in C_1, \ldots, \xi_n \in C_n\},$$

где $C_i = A_{b_i} \backslash A_{a_i}\, (i = 1, \ldots, n)\, , A_y = (-\infty, y)$. Тогда, учитывая свойства вероятности, можем записать цепочку равенств:

$$Q(C_1, \ldots, C_n) = Q(A_{b_1} \backslash A_{a_1}, C_2, \ldots, C_n) =$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_1 \in A_{b_1}, \xi_2 \in C_2, \xi_3 \in C_3, \ldots, \xi_n \in C_n\} - \mathbf{P}\{\xi_1 \in A_{a_1}, \xi_2 \in C_2, \ldots, \xi_n \in C_n\} =$$

$$= Q(A_{b_1}, C_2, \ldots, C_n) - Q(A_{a_1}, C_2, \ldots, C_n) = \Delta_1 Q(A_{x_1}, C_2, \ldots, C_n) = \ldots =$$

$$= \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n Q(A_{x_1}, \ldots, A_{x_n}) = \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n F_\xi(x) \geqslant 0.$$

■

Свойство C9. Справедливо обобщение теоремы Лебега о классификации функций распределения.

2.4 Классификация многомерных случайных величин

Рассмотрим два типичных случая: когда совместное распределение координат случайного вектора либо дискретно, либо абсолютно непрерывно.

Дискретные многомерные случайные величины

Определение 1. n-мерная случайная величина $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathbf{T}}$ является *дискретной случайной величиной (дискретным случайным вектором)*, если существует конечный или счётный набор n-мерных векторов

$$\{(a_1^{(i_1)}, a_2^{(i_2)}, \ldots, a_n^{(n_1)}) \in \mathbb{R}^n : i_1 = \overline{1, M_1}, i_2 = \overline{1, M_2}, \ldots, i_n = \overline{1, M_n}\}$$

($M_1 \leq \infty, M_2 \leq \infty, \ldots, M_n \leq \infty$ *)* таких, что

$$\sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \ldots \sum_{i_n=1}^{M_n} \mathbf{P}\{\xi_1 = a_1^{(i_1)}, \xi_2 = a_2^{(i_2)}, \ldots, \xi_n = a_n^{(i_n)}\} = 1.$$

Закон распределения вероятностей дискретного случайного n-вектора ξ полностью определяется заданными векторами

$$\{(a_1^{(i_1)}, a_2^{(i_2)}, \ldots, a_n^{(n_1)}) \in \mathbb{R}^n : i_1 = \overline{1, M_1}, i_2 = \overline{1, M_2}, \ldots, i_n = \overline{1, M_n}\}$$

и элементарными вероятностями

$$p_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \mathbf{P}\{\xi_1 = a_1^{(i_1)}, \xi_2 = a_2^{(i_2)}, \ldots, \xi_n = a_n^{(i_n)}\}$$

такими, что

$$\sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \ldots \sum_{i_n=1}^{M_n} p_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = 1.$$

Маргинальное распределение компоненты ξ_m случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathbf{T}}$ вычисляется при помощи совместного распределения по формуле

$$\mathbf{P}\{\xi_m = a_m^{(i_m)}\} = \sum_{i_1=1}^{M_1} \ldots \sum_{i_{m-1}=1}^{M_{m-1}} \sum_{i_{m+1}=1}^{M_{m+1}} \ldots \sum_{i_n=1}^{M_n} \mathbf{P}\{\xi_1 = a_1^{(i_1)}, \ldots, \xi_{m-1} = a_{m-1}^{(i_{m-1})}, \xi_m = a_m^{(i_m)},$$
$$\xi_{m+1} = a_{m+1}^{(i_{m+1})}, \ldots, \xi_n = a_n^{(i_n)}\},$$

где $1 \leq i_m \leq M_m$, $1 \leq m \leq n$.

Пример. Пусть шестигранная игральная кость подбрасывается два раза. Рассмотрим случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, где ξ_1 – число появлений шестёрки, ξ_2 – число появлений четной цифры.

Для описания закона распределения случайного вектора ξ следует определить множество его возможных значений $\{a_i^{(1)}, a_j^{(2)}\}$ и соответствующие этим значениям элементарные вероятности $\{p_{ij}, i, j = \overline{1, 6}\}$, где $p_{ij} = \mathbf{P}\{\xi_1 = a_i^{(1)}, \xi_2 = a_j^{(2)}\}, i, j = \overline{1, 6}$.

Результат удобно представить в виде таблицы

$a_i^{(1)} \backslash a_j^{(2)}$	0	1	2	$\mathbf{P}\{\xi_1 = a_i^{(1)}\}$
0	1/4	1/3	1/9	25/36
1	0	1/6	1/9	10/36
2	0	0	1/36	1/36
$\mathbf{P}\{\xi_2 = a_j^{(2)}\}$	1/4	1/2	1/4	1

В первом столбце этой таблицы указаны возможные значения случайной величины ξ_1, в первой строке – возможные значения случайной величины ξ_2, в последнем столбце и в последней строке приведены безусловные вероятности возможных значений ξ_1 и ξ_2, соответственно. В каждой клетке таблицы, стоящей на пересечении i-й строки и j-го столбца, указываются вероятности осуществления события $\{\xi_1 = a_i^{(1)}, \xi_2 = a_j^{(2)}\}$, то есть p_{ij}.

Основные дискретные многомерные распределения вероятностей

1. Полиномиальное распределение $Pol\,(N, n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathbf{T}}$ имеет *полиномиальное распределение*, с параметрами $N, n, p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\mathcal{L}\{\xi\} = Pol\,(N, n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\,,$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\; 0 < p_i < 1,\; i = 1, \ldots, k,$$

если

$$\mathbf{P}\,\{\xi = m\} = \mathbf{P}\,\{\xi_1 = m_1, \xi_2 = m_2, \ldots, \xi_n = m_n\} = \frac{N!}{m_1! m_2! \ldots m_n!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n}, \qquad (2.21)$$

$$m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^{\mathbf{T}},\; 0 \le m_i \le n,\; i = 1, \ldots, n,$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = N.$$

Полиномиальное распределение возникает в схеме независимых испытаний, когда в каждом из N испытаний возможны n несовместных исходов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с вероятностями:

$$\mathbf{P}\,(A_i) = p_i,\; i = 1, \ldots, n.$$

Случаная величина ξ_i – число наступлений события A_i при N повторениях случайного эксперимента $i = 1, \ldots, n$.

Пример. Симметричный игральный кубик подбрасывают 10 раз. Найти вероятность события, состоящего в том, что выпадут 2 шестерки и одна пятерка. В этом эксперименте проводится 10 испытаний, в которых естественно фиксировать три различных исхода: выпали шестерка, пятерка и другая цифра, вероятности которых равны и соответственно $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{4}{6}$. Тогда, вводя в рассмотрение случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\mathbf{T}}$, можем записать

$$\mathbf{P}\,\{\xi_1 = 2, \xi_2 = 1, \xi_3 = 7\} = \frac{10!}{2!1!7!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{4}{6}\right)^7 = \frac{5}{8} \left(\frac{2}{3}\right)^{10}.$$

Пример. В многозадочной операционной системе процесс может находиться в одном из нескольких состояний (готов, выполняется, прерван, ожидает и др.) Если предположить, что вероятность нахождения процесса с заданным приоритетом в одном из n состояний (например в состоянии i) есть постоянная величина p_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то вероятность того, что при проведении N испытаний процесс будет находиться в состояниях $S_1, \ldots, S_n$ соответственно $m_1, \ldots, m_n$ раз будет распределена по полиномиальному закону.

Действительно, рассмотрим один из возможных случаев, возникший в результате того, что процесс оказался в состояниях $S_1, \ldots, S_n$ соответственно $m_1, \ldots, m_n$ раз. Вероятность этого конкретного случая равна

$$p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{m_n}.$$

Однако процесс может оказаться в состояниях $S_1, \ldots, S_n$ соответственно $m_1, \ldots, m_n$ раз несколькими способами. Число таких конкретных способов будет равно

$$\frac{N!}{m_1! m_2! \ldots m_n!}.$$

Из этого следует, что вероятность возникновения любого из этих конкретных состояний, при которых процесс может оказаться в состояниях $S_1, \ldots, S_n$ соответственно $m_1, \ldots, m_n$ раз равна

$$\frac{N!}{m_1! m_2! \ldots m_n!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n},$$

то есть конечная формула совпадает с формулой (2.21).

Природа элементов множества $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ может быть самой разной. Так как для дальнейших рассуждений она не имеет существенного значения, введем в рассмотрение случайную величину η, полагая $\eta = i$, если в испытании наблюдалось событие A_i, $i = 1, \ldots, n$, с распределением вероятностей:

$$\mathbf{P}\{\eta = i\} = p_i, \ i = 1, \ldots, n. \tag{2.22}$$

2. Многомерное гипергеометрическое распределение $MultHG(K, M)$. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathbf{T}}$ имеет *многомерное гипергеометрическое распределение*, с параметрами $K, M \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}\{\xi\} = MultHG(K, M),$$

если

$$\mathbf{P}\{\xi = m\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = m_1, \xi_2 = m_2, \ldots, \xi_n = m_n\} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbf{C}_{k_i}^{m_i}}{\mathbf{C}_K^M}, \tag{2.23}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = K, \ \sum_{i=1}^{n} m_i = M.$$

Многомерное гипергеометрическое распределение возникает в задачах следующего вида. Пусть каждый из K элементов некоторого множества может обладать одним из n свойств, причем в рассматриваемом множестве k_i элементов обладают i-м свойством, $i = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = K.$$

Предположим, что из этого множества сучайным образом выбирают M элементов. Тогда вероятность того, что среди отобранных элементов имеется m_i элементов, обладающих i-м свойством, $i = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M,$$

определяется равенством (2.23).

Непрерывные многомерные случайные величины

Определение 2. n-мерная случайная величина $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathbf{T}}$ является *непрерывной случайной величиной*, если существует неотрицательная функция n действительных переменных $p_\xi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, такая, что для любых $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^n$ функцию распределения $F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в виде n-мерного интеграла:

$$F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} du_1 \int_{-\infty}^{x_2} du_2 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p_\xi(u_1, u_2, \ldots, u_n) du_n.$$

При этом функция $p_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *n-мерной плотностью распределения вероятностей* случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathbf{T}}$.

Свойства n-мерной плотности распределения вероятностей

Свойство С1. $p_\xi(x) = p_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Свойство С2 (Условие нормировки для многомерных плотностей).

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(x) dx = 1. \tag{2.24}$$

Свойство С3. Для любого $B \in \mathcal{B}^n$

$$\mathbf{P}\{\xi \in B\} = \int_B p_\xi(x) dx.$$

Свойство С4. Если $x \in \mathbb{R}^n$ – точка непрерывности функции плотности распределения вероятностей $p_\xi(x)$, то

$$p_\xi(x) = p_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}.$$

Свойство С5 (Условие согласованности для многомерных плотностей). n-мерная и $(n-1)$-мерная плотности распределения вероятностей удовлетворяют равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) dx_k = \tag{2.25}$$

$$= p_{\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \forall k = 1, \ldots, n.$

Определение 3. *m-мерной маргинальной плотностью распределения вероятностей* случайного подвектора

$$\xi' = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_m})^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^m$$

называется совместная плотность распределения вероятностей случайных величин $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m}$.

Проинтегрировав исходную n-мерную плотность распределения $p_\xi(x), x \in \mathbb{R}^n$, в бесконечных пределах $(n-k)$ раз по всем переменным, за исключением $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$, получаем, m-мерную маргинальную плотность $p_{\xi'}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$.

Пример. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2$ – двумерный случайный вектор с плотностью распределения вероятностей

$$p_\xi(x) = p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi b_1 b_2} \exp\Big\{-\Big[\frac{(x_1-a_1)^2}{2b_1^2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{2b_2^2}\Big]\Big\},$$

где $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$,$a = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Маргинальные плотности распределения вероятностей компонент ξ_1 и ξ_2 определяются по формулам:

$$p_{\xi_k}(x_k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) dx_k,$$

где $k = 1, 2$, и будут равны:

$$p_{\xi_1}(x_1) = \frac{1}{b_1\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2b_1^2}\Big\}$$

и

$$p_{\xi_2}(x_2) = \frac{1}{b_2\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{(x_2-a_2)^2}{2b_2^2}\Big\}.$$

Основные непрерывные многомерные распределения вероятностей

1. Равномерное распределение $MultU(\mathcal{B}^n)$. Пусть $\mathcal{B}^n$ – ограниченное борелевское множество в $\mathbb{R}^n$ и $mes\mathcal{B}^n$ – его n-мерная мера Лебега. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathbf{T}}$ имеет *равномерное распределение на множестве* $\mathcal{B}^n$:

$$\mathcal{L}\{\xi\} = MultU(\mathcal{B}^n),$$

если его плотность распределения вероятности равна

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{mes\mathcal{B}^n}, & \text{если } x \in \mathcal{B}^n, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathcal{B}^n. \end{cases}$$

2. n-мерное нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathbf{T}}$ имеет *n-мерное нормальное распределение вероятностей с параметрами* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}$ и $(n \times n)$-матрицей $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{i,j=1}^n$:

$$\mathcal{L}\{\xi\} = \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

если плотность распределения ξ существует и имеет вид:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathbf{T}}\Sigma^{-1}(x-\mu)\right) =:: n_n(x|\mu,\Sigma), x = (x_1,\ldots,x_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

где $\Sigma = \Sigma^T \succ 0$ – положительно определенная симметрическая матрица.

Для гауссовского случайного вектора все маргинальные распределения вероятностей являются гауссовскими. В частности, одномерное маргинальное распределение i-той компоненты имеет вид:

$$\mathcal{L}\left\{\xi_i\right\} = \mathcal{N}_1(a\mu_i, \sigma_{ii}), i = 1,\ldots,n.$$

2.5 Условные законы распределения случайных величин

На практике часто возникают задачи, для решения которых необходимо найти распределение вероятностей случайной величины ξ при условии, что некоторая другая случайная величина η приняла фиксированное значение y. Например:

– η – оценка, полученная на первом экзамене; ξ – оценка, полученная на втором экзамене. Необходимо выяснить, как влияет η на распределение вероятностей ξ.

– η – расход фирмы на рекламу в течение месяца; ξ – доход фирмы. Если затраты на рекламу составили $\eta = y$, то каким будем распределение дохода?

Рассмотрим $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^n$ – случайный вектор, $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^n$, $A_{x_i} = (-\infty, x_i)$, $i = \overline{1, n}$; $A_x = A_{x_1} \times \ldots \times A_{x_n} \in \mathbb{R}^n$; $\mathcal{B}^n$ – борелевскую σ-алгебру подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены случайный вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, имеющий функцию распределения $F_\xi(x) = F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$, и случайное событие $C \in \mathcal{F}$ такое, что $\mathbf{P}(C) > 0$. Тогда *условной функцией распределения случайного вектора ξ при условии наступления случайного события C* называется функция n действительных переменных:

$$F_\xi(x \mid C) = \mathbf{P}\{\xi \in A_x | C\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi \in A_x \cap C\}}{\mathbf{P}(C)}, \tag{2.26}$$

$x \in \mathbb{R}^n$. При этом $F_\xi(x)$ называется *безусловной функцией распределения.*

Определение 2. Пусть на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены случайный вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ и дискретный случайный вектор $\eta \in Y \subset \mathbb{R}^m$. Тогда если $\mathbf{P}\{\eta = y\} > 0$, где $y \in Y$, то *условной функцией распределения случайного вектора ξ при условии $\eta = y$* называется функция $n + m$ действительных переменных:

$$F_{\xi|\eta}(x \mid y) = \mathbf{P}\{\xi \in A_x \mid \eta = y\}, \tag{2.27}$$

$x \in \mathbb{R}^n, y \in Y \subset \mathbb{R}^m$.

Пусть теперь составной случайный вектор $(\xi, \eta)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^{n+m}$, где $\xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^m$ – случайные векторы, имеет абсолютно непрерывный закон распределения вероятностей с некоторой совместной плотностью распределения вероятностей $p_{\xi,\eta}(x, y)$, а

$$p_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}^n} p_{\xi,\eta}(x, y) dx -$$

маргинальная плотность распределения подвектора η. В этом случае воспользоваться определением (2.27) не представляется возможным, так как $\mathbf{P}\{\eta = y\} = 0$.

Введем в рассмотрение n-мерный ε-параллелепипед:

$$C_y(\varepsilon) ::= \{v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^m : y_j \leq v_j < y_j + \varepsilon, j = \overline{1, m}\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Определение 3. Пусть составной случайный вектор $(\xi, \eta)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^{n+m}$ имеет абсолютно непрерывное распределение вероятностей с непрерывной плотностью распределение

$p_{\xi,\eta}(x,y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Тогда если $p_\eta(y) > 0$, то *условной функцией распределения* называется функция $n+m$ действительных переменных, определяемая соотношением:

$$F_{\xi,\eta}(x \mid y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}\{\xi \in A_x \mid \eta \in C_y(\varepsilon)\}. \tag{2.28}$$

Покажем, что в указанных условиях предел в правой части (2.28) существует и, следовательно, определение корректно. По определению условной вероятности имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}\{\xi \in A_x \mid \eta \in C_y(\varepsilon)\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\displaystyle\int_{A_x} du \int_{C_y(\varepsilon)} p_{\xi,\eta}(u,v)dv}{\displaystyle\int_{C_y(v)} p_\eta(v)dv}. \tag{2.29}$$

Применим к интегралам по v в числителе и знаменателе теорему о среднем, обозначив: $v', v'' \in C_y(\varepsilon)$ - «промежуточные точки». С учетом этого и непрерывности $p_{\xi,\eta}(\cdot), p_\xi(\cdot)$ продолжим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}\{\xi \in A_x \mid \eta \in C_y(\varepsilon)\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\displaystyle\int_{A_x} p_{\xi,\eta}(u,v'')du \cdot \varepsilon^m}{p_\eta(v')\ \varepsilon^m} = \int_{A_x} \frac{p_{\xi,\eta}(u,v)}{p_\eta(y)}du =:: \int_{A_x} p_{\xi|\eta}(u \mid y)du, \tag{2.30}$$

где обозначено

$$p_{\xi|\eta}(x \mid y) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m. \tag{2.31}$$

Проведенный анализ позволяет сделать выводы:

– предел в (2.28) существует и, следовательно, определение корректно;

– из (2.30) видно: условная функция распределения $F_{\xi|\eta}(\cdot)$ представима в виде интеграла от неотрицательной функции $p_{\xi|\eta}(u \mid y) \geqslant 0$ по параллелепипеду A_x, а из этого следует, что эта условная функция распределения абсолютно непрерывна; функция (2.31) является условной плотностью распределения вероятностей.

Определение 4. Функция $n+m$ действительных переменных $p_{\xi|\eta}(x \mid y)$, определяемая равенством

$$p_{\xi|\eta}(x \mid y) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$$

называется *условной плотностью распределения вероятностей случайного вектора ξ при условии $\eta = y$*; при этом $p_\xi(x)$ – *безусловная плотность распределения вероятностей.*

Свойства условной плотности распределения вероятностей

Свойство С1. $p_{\xi|\eta}(x \mid y) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

Свойство С2 (Условие нормировки для условной плотности распределения вероятностей).

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_{\xi|\eta}(x \mid y)dx = 1, \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

Свойство C3. Для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}^{\setminus}$ справедлива формула:

$$\mathbf{P}\{\xi \in B \mid \eta = y\} = \int_B p_{\xi|\eta}(x \mid y)dx, y \in \mathbb{R}^m.$$

Свойство C4. Если x – точка непрерывности условной плотности распределения вероятностей $p_{\xi|\eta}(x \mid y)$, то справедливо следующее равенство:

$$p_{\xi|\eta}(x \mid y) = \frac{\partial^n F_{\xi|\eta}(x \mid y)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m.$$

Свойства **C1** - **C4** доказываются аналогично свойствам безусловной плотности распределения вероятностей

Свойство C5 (Симметричная формула умножения плотностей). Если $p_\xi(x) > 0$ и $p_\eta(y) > 0$, то:

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = p_\eta(y) \cdot p_{\xi|\eta}(x \mid y) = p_\xi(x) \cdot p_{\eta|\xi}(y \mid x).$$

Доказательство. Эта формула следует из соотношения (2.30). ■

Свойство C6 (Формула безусловной плотности распределения вероятностей).

$$p_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}^m} p_{\xi|\eta}(x \mid y)p_\eta(y)dy.$$

Доказательство. Эту формулу можно получить из свойства **C5** и свойства маргинальной плотности распределения вероятностей. ■

Свойство C7 (Формула Байеса для плотностей распределения вероятностей).

$$p_{\eta|\xi}(y \mid x) = \frac{p_{\xi|\eta}(x \mid y) \cdot p_\eta(y)}{\int_{\mathbb{R}^m} p_{\xi|\eta}(x \mid v)p_\eta(v)dv}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m.$$

Доказательство. Эту формулу можно получить из свойств **C5** и **C6**. ■

Пример. Продолжение примера 2.4.

Для случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^{\mathbf{T}}$ опишем условный закон распределения случайной величины ξ_1 при условии $\xi_2 = 2$.

Воспользуемся трактовкой свойства **C5** для дискретных случайных величин:

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = a_i^{(1)} \mid \xi_2 = 2\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = a_i^{(1)}, \xi_2 = 2\}}{\mathbf{P}\{\xi_2 = 2\}},$$

где $a_i^{(1)} \in \{0, 1, 2\}$. Таким обазом имеем:

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = 0 \mid \xi_2 = 2\} = \frac{1/9}{1/4} = 4/9,$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = 1 \mid \xi_2 = 2\} = \frac{1/9}{1/4} = 4/9,$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = 2 \mid \xi_2 = 2\} = \frac{1/36}{1/4} = 1/9.$$

Пример. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^2$ – двумерный гауссовский случайный вектор, $\mathcal{L}\{\xi\} = \mathcal{N}_2(a, B)$, где $a = (a_1, a_2)^{\mathbf{T}}$,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда условное распределение случайной величины ξ_1 при условии $\xi_2 = x_2$ – тоже гауссовское:

$$\mathcal{L}\{\xi_1 \mid \xi_2 = x_2\} = \mathcal{N}_1(a_{1 \mid 2}, b_{11 \mid 2}),$$

где

$$a_{1 \mid 2} = a_1 + \frac{b_{12}}{b_{22}}(x_2 - a_2),$$

$$b_{11 \mid 2} = b_{11} - \frac{b_{12}^2}{b_{22}}.$$

2.6 Независимость случайных величин

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, множества $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ – борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}$.

Определение 1. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми в совокупности* на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, если для любых борелевских множеств $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ случайные события $\{\xi_1 \in B_1\}, \ldots, \{\xi_1 \in B_n\} \in \mathcal{F}$ являются независимыми в совокупности, то есть

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\{\xi_n \in B_n\}. \tag{2.32}$$

Определение 2. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называются *попарно независимыми*, если случайные события $\{\xi_1 \in B_1\}, \ldots, \{\xi_n \in B_n\}$ попарно независимы для любых борелевских множеств $B_i, B_j \in \mathcal{B}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Очевидно, что независимые в совокупности случайные величины являются и попарно независимыми.

Теорема 1. Свойство независимости случайных величин сохраняется при борелевских функциональных преобразованиях. Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые в совокупности случайные величины, а $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ – некоторые определенные борелевские функции, $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_n$, полученные посредством функциональных преобразований $\eta_k = f_k(\xi_k(\omega))$, $k = \overline{1, n}$, и покажем,что они удовлетворяют равенству (2.32).

Пусть $B_1, \ldots, B_n \subset \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ – борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}$. Тогда в силу независимости случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ можно записать:

$$\mathbf{P}\{\eta_1 \in B_1, \ldots, \eta_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{f_1(\xi_1) \in B_1, \ldots, f_n(\xi_n) \in B_n\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_1 \in f_1^{-1}(B_1), \ldots, \xi_n \in f_n^{-1}(B_n)\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in f_1^{-1}(B_1)\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\{\xi_n \in f_n^{-1}(B_n)\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\eta_1 \in B_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\{\eta_n \in B_n\},$$

то есть, согласно определению (2.32), случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_n$ являются независимыми в совокупности. ■

Теорема 2 (общий критерий независимости случайных величин). Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ тогда и только тогда, когда их совместная n-мерная функция распределения совпадает с произведением n одномерных маргинальных функций распределения:

$$F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n), \tag{2.33}$$

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности. Тогда выполняется соотношение (2.32):

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\{\xi_n \in B_n\}$$

для любых борелевских множеств $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$. Выберем: $B_i = A_{x_i} = (-\infty, x_i), i = 1, \ldots, n$, тогда

$$\{\xi_i \in B_i\} = \{\xi_i < x_i\},$$

и левая часть равенства (2.32) будет равна левой части (2.33), и, следовательно, правые их части также равны.

Достаточность. Пусть выполняется (2.33). Тогда (2.32) вытекает из следующего:

– соотношение (2.32) выполняется для любого базового борелевского множества;

– любое борелевское множество $B \in \mathcal{B}$ порождается множествами из базовой системы $\mathcal{F}_0$ применением счетного числа объединений, пересечений и дополнений.

Проиллюстрируем это при $B_i = [a_i, b_i) = A_{b_i} \setminus A_{a_i}, i = 1, \ldots, n$. Обозначим через B прямоугольный параллелепипед:

$$B = B_1 \times \ldots \times B_n.$$

Тогда по свойствам n-мерной функции распределения вероятностей имеем с учетом (2.33):

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{\xi \in B\} =$$

$$= \triangle_1 \ldots \triangle_n F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (F_{\xi_i}(b_i) - F_{\xi_i}(a_i)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi_i \in B_i\}.$$

■

Следствие 1. *(Критерий независимости дискретных случайных величин).* Дискретные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ – дискретное множество) независимы в совокупности на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ тогда и только тогда, когда для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = x_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\{\xi_n = x_n\}.$$

Доказательство. Доказательство следует из определения функции распределения и соотношения (2.33). ■

Следствие 2. *(Критерий независимости непрерывных случайных величин).* Непрерывные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$ независимы в совокупности на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ тогда и только тогда, когда их совместная n-мерная плотность распределения вероятностей равна произведению n одномерных маргинальных плотностей распределения вероятностей:

$$p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot p_{\xi_n}(x_n) \tag{2.34}$$

для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Доказательство. Доказательство следует из определения плотности распределения вероятностей и соотношения (2.33). ■

Следствие 3. Случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда их условная плотность распределения вероятностей совпадает с безусловной:

$$p_{\xi|\eta}(x \mid y) = p_{\xi}(x) \tag{2.35}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Доказательство. Во-первых, из (2.34) имеем:

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = p_\xi(x) p_\eta(y).$$

А во-вторых:

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = p_\eta(y) \cdot p_{\xi|\eta}(x|y).$$

Справедлив и симметричный результат. ■

Следствие 4. Случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда условная функция распределения совпадает с безусловной функцией распределения:

$$F_{\xi|\eta}(x \mid y) = F_\xi(x)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Доказательство. Формула получается интегрированием соотношения (2.35). ■

2.7 Функциональные преобразования случайных величин

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определён случайный вектор

$$\xi = \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

имеющий функцию распределения

$$F_\xi(x) = F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{\xi \in A_x\}, \tag{2.36}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^n$, $A_x = A_{x_1} \times \ldots \times A_{x_n}$, $A_{x_j} = (-\infty, x_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – некоторое борелевское функциональное преобразование:

$$y = f(x), \tag{2.37}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_m)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1, \ldots, f_m)^{\mathbf{T}}$.

Определим закон распределения $\mathcal{L}\{\eta\}$ случайного вектора $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^m$, являющегося результатом следующего функционального преобразования:

$$\eta = f(\xi), \tag{2.38}$$

где $\eta_k = f_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $k = \overline{1, m}$, по заданным $F_\xi(\cdot)$ и $f(\cdot)$.

Согласно определению функция распределения $F_\eta(y)$ m-мерной случайной величины η вычисляется следующим образом:

$$F_\eta(y) = \mathbf{P}\{\eta \in A_y\} = \mathbf{P}\{f(\xi) \in A_y\} = \mathbf{P}\{\xi \in f^{-1}(A_y)\},$$

где $A_y = A_{y_1} \times \ldots \times A_{y_m}$, $A_{y_j} = (-\infty, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$, то есть справедлива общая формула:

$$F_\eta(y) = \mathbf{P}\{\xi \in f^{-1}(A_y)\}, y \in \mathbb{R}^m. \tag{2.39}$$

Если случайная величина ξ дискретна, то и функция от нее $\eta = f(\xi)$ также дискретная случайная величина.

Пример. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)^{\mathbf{T}}$ – дискретный случайный вектор, закон распределения которого приведён в таблице :

$\xi_1 \backslash \xi_2$	1	2	3	4
1	0.2	0.1	0.05	0.05
2	0	0.15	0.15	0.1
3	0	0	0.1	0.1

Найдём распределение случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Случайная величина η принимает значения из множества $\mathcal{Y} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Вычислим элементарные вероятности $p_k = \mathbf{P}\{\eta = y_k\}$, где $y_k \in \mathcal{Y}$, $k = \overline{1, 6}$:

$$\begin{aligned}
&p_1 = \mathbf{P}\{\eta = 2\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} = 0.2,\\
&p_2 = \mathbf{P}\{\eta = 3\} = \mathbf{P}\{\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 2\} \cup \{\xi_1 = 2, \xi_2 = 1\}\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 2\} +\\
&\quad + \mathbf{P}\{\xi_1 = 2, \xi_2 = 1\} = 0.1 + 0 = 0.1,\\
&p_3 = \mathbf{P}\{\eta = 4\} = \mathbf{P}\{\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 3\} \cup \{\xi_1 = 2, \xi_2 = 2\} \cup \{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\}\} =\\
&\quad = \mathbf{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 3\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = 2, \xi_2 = 2\} + \mathbf{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} =\\
&\quad = 0.05 + 0.15 + 0 = 0.2.
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляются значения: $p_4 = 0.2$, $p_5 = 0.2$, $p_6 = 0.1$.

Распределение вероятностей дискретной случайной величины η приведено в следующей таблице :

η	$y_1 = 2$	$y_2 = 3$	$y_3 = 4$	$y_4 = 5$	$y_5 = 6$	$y_6 = 7$
p	0.2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1

Функция распределения η определяется равенством:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \le 2, \\ 0.2 & \text{при } 2 < y \le 3, \\ 0.3 & \text{при } 3 < y \le 4, \\ 0.5 & \text{при } 4 < y \le 7, \\ 0.7 & \text{при } 5 < y \le 6, \\ 0.9 & \text{при } 6 < y \le 7, \\ 1 & \text{при } y > 7. \end{cases}$$

В формуле (2.39) $B = f^{-1}(A_y) \in \mathcal{B}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Поэтому вероятность $\mathbf{P}\{\xi \in B\}$, $B \in \mathcal{B}^n$ можно выразить через функцию распределения $F_\xi(\cdot)$. Однако, записать это выражение в общем виде невозможно. Рассмотрим *наиболее важные* частные случаи.

Предположим, что вектор ξ имеет абсолютно непрерывное распределение вероятностей с плотностью распределения вероятностей:

$$p_\xi(x) = \frac{\partial^n F_\xi(x)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n},$$

а преобразование (2.37) непрерывно дифференцируемо и существует матрица Якоби:

$$\mathcal{J}_f = \left(\frac{\partial f_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j} \right)_{(m \times n)}$$

Невырожденное функциональное преобразование

Пусть функциональное преобразование $f(\cdot)$, определенное в (2.38), обладает следующими свойствами:

– функции $f_1(\cdot)$, …, $f_2(\cdot)$ функционально независимы;

– $rank(\mathcal{J}_f) = m = n$;

–
$$|\mathcal{J}_f| = \frac{Df(x)}{Dx} \ne 0, \exists\ !\ x = f^{-1}(y), \frac{Df^{-1}(y)}{Dy} \ne 0. \tag{2.40}$$

Теорема 1. Пусть $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$ – случайный n-вектор с n-мерной непрерывной плотностью распределения вероятностей $p_\xi(x)$, а функциональное преобразование (2.38) – непрерывно дифференцируемо, невырождено, так что выполняется (2.40). Тогда случайный n-вектор $\eta = f(\xi) \in \mathbb{R}^n$ также имеет абсолютно непрерывное распределение вероятностей, и его плотность распределения вероятностей вычисляется по формуле:

$$p_\eta(y) = p_\xi(f^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{Df^{-1}(y)}{Dy} \right|, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.41}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся (2.39) и свойством многомерной плотности распределения вероятностей:

$$F_\eta(y) = \int_{f^{-1}(A_y)} p_\xi(x)\ dx.$$

Выполнив замену переменных $x = f^{-1}(z), z = f(x)$ в кратном интеграле получим:

$$F_\xi(y) = \int_{A_y} p_\xi(f^{-1}(z)) \cdot \left| \frac{Df^{-1}(z)}{Dz} \right|\ dz$$

и, используя обозначение

$$p_\eta(y) = p_\xi(f^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{Df^{-1}(y)}{Dy} \right|,$$

можем записать:

$$F_\xi(y) = \int_{A_y} p_\eta(z)\ dz.$$

Из последнего равенства следует:

- во-первых, так как подынтегральная функция $p_\eta(y)$ неотрицательна, то функция распределения $F_\eta(y)$ абсолютно непрерывна;

- во-вторых, подынтегральная функция $p_\eta(z)$ – плотность этого распределения вероятностей.

■

Следствие 1._(Случай линейного преобразования)._ Пусть ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p_\xi(x), x \in \mathbb{R}^1$, $y = a + bx$ – невырожденное линейное преобразование ($a \in \mathbb{R}, b \neq 0$). Тогда случайная величина $\eta = a + b\xi \in \mathbb{R}^1$ также является абсолютно непрерывной случайной величиной и имеет плотность распределения вероятностей

$$p_\eta(y) = \frac{1}{|b|} p_\xi \left(\frac{y-a}{b} \right), y \in \mathbb{R}. \qquad (2.42)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем $m = n = 1$ и применяем (2.41). ■

Следствие 2._(Линейное преобразование гауссовской случайной величины)._

Если в условиях следствия 2.7 ξ – гауссовская случайная величина с некоторым распределением $\mathcal{L}\{\xi\} = \mathcal{N}_1(\mu, D)$, то при линейном преобразовании гауссовость сохраняется: $\mathcal{L}\{\eta\} = \mathcal{N}_1(a + b\mu, b^2 D)$. Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно воспользоваться (2.42). ■

Следствие 3. Если функциональное преобразование таково, что обратная функция $x = f^{-1}(y)$ - неединственная, т.е. если уравнение $f(x) = y$ имеет $K > 1$ решений: $x = f^{-1}_{(1)}(y), \ldots, x = f^{-1}_{(K)}(y)$, то формула (2.41) обобщается следующим образом:

$$p_\eta(y) = \sum_{k=1}^{K} p_\xi(f^{-1}_{(k)}(y)) \left| \frac{Df^{-1}_{(k)}(y)}{Dy} \right|, y \in \mathbb{R}^n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство повторяет доказательство теоремы, только прообраз $f^{-1}(A_y)$ является суммой K прообразов. ■

Вырожденное функциональное преобразование

Пусть $rank(\mathcal{J}_f) = m < n$. При этом $f_1(x), \dots, f_m(x)$ – независимые функции и существуют $n-m$ вспомогательных функций $f_{m+1}(x), \dots, f_n(x)$, которые в совокупности дают систему n функционально независимых элементов.

Введем расширенное функциональное преобразование $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Обозначим его: $\overline{y} = \overline{f}(x)$, где

$$\overline{y} = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^n, \overline{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x), f_{m+1}(x), \dots, f_n(x))^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^n.$$

и построим расширенный случайный вектор $\overline{\eta} = \overline{f}(\xi) = (\eta_1, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}, \dots, \eta_n)$. Вспомогательные функции выбираем так, чтобы составное преобразование удовлетворяло условиям (2.40). Тогда по теореме 2.7 имеем:

$$p_{\overline{\eta}}(\overline{y}) = p_\xi(\overline{f}^{-1}(\overline{y})) \cdot \left| \frac{D\overline{f}^{-1}(\overline{y})}{D\overline{y}} \right|, \overline{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.43}$$

Плотность распределения вероятностей подвектора η получим, используя свойство маргинальной плотности распределения вероятностей. Для этого проинтегрируем плотность (2.43) по всем вспомогательным переменным:

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\overline{\eta}}(\overline{y})\ dy_{m+1} \dots dy_n, y \in \mathbb{R}^m. \tag{2.44}$$

Замечание . В выборе вспомогательных функций $f_{m+1}(x), \dots, f_n(x)$ имеется произвол. Им следует пользоваться в целях упрощения процесса решения задачи.

Теорема 2 (формула свертки). Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^1$ – независимые случайные величины, имеющие плотности распределения вероятностей $p_{\xi_1}(x_1)$, $p_{\xi_2}(x_2)$. Тогда плотность распределения вероятностей суммы $\eta = \xi_1 + \xi_2$ определяется по формуле свертки:

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(y-z) p_{\xi_2}(z)\ dz =:: p_{\xi_1} * p_{\xi_2} = p_{\xi_2} * p_{\xi_1}.$$

Доказательство. Имеем вырожденное преобразование, в котором $n = 2, m = 1$. Построим расширенное функциональное преобразование: $y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_2$. Используя формулы (2.43), (2.44), учитывая независимость, и получаем доказываемое. ■

Следствие. Если в условии теоремы суммируются гауссовские случайные величины, то есть

$$\mathcal{L}\{\xi_i\} = \mathcal{N}(a_i, b_i), i = 1, 2,$$

то их сумма – гауссовская случайная величина:

$$\mathcal{L}\{\eta\} = \mathcal{N}(a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

3 Числовые характеристики случайных величин

Знание закона распределения случайной величины дает полную информацию о ее вероятностном поведении. Действительно, функция распределения позволяет определить какие значения может принимать случайная величина и с какими вероятностями. Вместе с тем при решении различных теоретических и прикладных задач, связанных со случайными явлениями, большую роль играют некоторые постоянные числа, получаемые по определенным правилам из функций распределения. Среди этих постоянных, используемых для получения общей количественной характеристики случайных величин, особенно важны математическое ожидание, дисперсия и моменты различных порядков.

3.1 Понятие математического ожидания и способы его вычисления

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определена произвольная случайная величина

$$\xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}.$$

Часто возникает необходимость в определении среднего значения наблюдаемого признака (случайной величины ξ). Математически вычисление среднего значания сводится к интегрированию по ω. При этом интеграл Римана в общем случае неприменим по следующим двум причинам:

– пространство элементарных событий Ω – некоторое абстрактное множество, в котором может не быть метрики;

– функция $\xi(\omega)$ может иметь счетное множество разрывов, и по Риману трудно строить интеграл от такой функции.

В 1902 году французский математик А.Лебег предложил новую конструкцию интеграла:

$$\mathbf{E}\{\xi\} = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega), \tag{3.1}$$

который в дальнейшем будем называть *интегралом Лебега от случайной величины* $\xi(\omega)$ по вероятностной мере $\mathbf{P}$.

Определение 3.1. *Значение* $\mathbf{E}\{\xi\} \in \mathbb{R}$ *интеграла Лебега, определенное в (3.1), называется* математическим ожиданием (средним значением) *случайной величины* ξ.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbf{P}_\xi)$, порожденное случайной величиной ξ. Случайные величины, определенные на этом пространстве, являются борелевскими функциями $g = g(x)$ действительной переменной $x \in \mathbb{R}$. Интеграл Лебега, определенный в (3.1). от функции $g(\cdot)$ по мере $\mathbf{P}_\xi(\cdot)$ принимает вид

$$\mathcal{I} = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\mathbf{P}_\xi(dx). \tag{3.2}$$

Мера $\mathbf{P}_\xi = \mathbf{P}_\xi(B)$ однозначно выражается через функцию распределения $F_\xi(x)$ и обладает характерным свойством:

$$\mathbf{P}_\xi([x, x + \Delta x)) = F_\xi(x + \Delta x) - F_\xi(x) = \Delta F_\xi(x), \Delta x \geq 0. \tag{3.3}$$

Определение 3.2. *Вероятностная мера $\mathbf{P}_\xi(\cdot)$, обладающая свойством (3.3) называется* Мерой Лебега-Стилтьеса, *а соответствующий интеграл $\mathcal{I}$ –* интегралом Лебега-Стилтьеса *от функции $g(\cdot)$ по функции $F_\xi(\cdot)$:*

$$\mathcal{I} = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dF_\xi(x).$$

Определение 3.3. *Математическим ожиданием случайной величины ξ, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и имеющей функцию распределения $F_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется следующий интеграл Лебега-Стилтьеса:*

$$\mathbf{E}\{\xi\} = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_\xi(x). \tag{3.4}$$

Иногда формулу (3.4) обобщают. Пусть $\eta = g(\xi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторое борелевское преобразование случайной величины ξ. Тогда

$$\mathbf{E}\{\eta\} = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dF_\xi(x). \tag{3.5}$$

Если $\xi \in \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}, N \leq \infty$ – дискретная случайная величина с дискретным распределением вероятностей

$$\mathbf{P}\{\xi = x_i\} = p_i, \ \sum_{i=1}^{N} p_i = 1,$$

то математическое ожидание вычисляется как сумма ряда:

$$\mathbf{E}\{g(\xi)\} = \sum_{i=1}^{N} g(x_i)p_i = \sum_{i=1}^{N} g(x_i)\mathbf{P}\{\xi = x_i\}. \tag{3.6}$$

Если $g = g(x)$ – непрерывная функция, случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x)$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |g(x)|p_\xi(x)dx < \infty,$$

то математическое ожидание вычисляется как интеграл Римана:

$$\mathbf{E}\{g(\xi)\} = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)p_\xi(x) \ dx. \tag{3.7}$$

3.2 Свойства математического ожидания случайной величины

Свойство С1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной, то есть если $c = const$, то $\mathbf{E}\{c\} = c$.

Доказательство. Постоянную величину c можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую с вероятностью 1 значение c. Тогда по определению получаем

$$\mathbf{E}\{c\} = c \cdot 1 = c.$$

□

Свойство С2. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и индикаторную функцию случайного события A, где $A \in \mathcal{F}$:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases} \tag{3.8}$$

Тогда справедлива следущая формула

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}\{I_A(\omega)\}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение дискретную случайную величину

$$\xi = \xi(\omega) = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{\xi = 1\} = \mathbf{P}\{\omega \in A\} = \mathbf{P}(A) \text{ и } \mathbf{P}\{\xi = 0\} = \mathbf{P}\{\omega \notin A\} = \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\{I_A(\omega)\} = \mathbf{E}\{\xi\} = 1 \cdot \mathbf{P}(A) + 0 \cdot (1 - \mathbf{P}(A)) = \mathbf{P}(A).$$

□

Свойство С3. Постоянную величину можно выносить за знак математического ожидания, то есть если ξ–случайная величина, а $c = const$, то

$$\mathbf{E}\{c\xi\} = c\mathbf{E}\{\xi\}.$$

Доказательство. Пусть ξ– дискретная случайная величина, имеющая распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = x_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда, полагая $g(x) = cx$, согласно формуле (3.6), получаем

$$\mathbf{E}\{c\xi\} = \sum_{k=1}^{\infty} (cx_k)p_k = c\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = c\mathbf{E}\{\xi\}.$$

Если ξ– непрерывная случайная величина с плотностью $p_\xi(x)$, то согласно формуле (3.7),

$$\mathbf{E}\{c\xi\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (cx)p_\xi(x)dx = c\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_\xi(x)dx = c\mathbf{E}\{\xi\}.$$

$\square$

Свойство С4. Математическое ожидание алгебраической суммы n случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ равно алгебраической сумме математических ожиданий этих случайных величин, т.е. если определены $\mathbf{E}\{\xi_1\}, \ldots, \mathbf{E}\{\xi_n\}$, то определено и $\mathbf{E}\{\xi_1 \pm \ldots \pm \xi_n\}$, причем

$$\mathbf{E}\{\xi_1 \pm \ldots \pm \xi_n\} = \mathbf{E}\{\xi_1\} \pm \ldots \pm \mathbf{E}\{\xi_n\}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Докажем соотношение (3.10) для дискретных случайных величин. Пусть $n = 2$, ξ_1 и ξ_2 – дискретные случайные величины, принимающие значения x_i и y_j соответственно с вероятностями $p_{i.}$ и $p_{.j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_{i.} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_{.j} = 1$

Обозначим $p_{ij} = \mathbf{P}\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\} \quad i, j = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что

$$p_{i.} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad p_{.j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

В соответствии с (3.6), полагая $g(x, y) = x \pm y$, имеем

$$\mathbf{E}\{\xi_1 \pm \xi_2\} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i \pm x_j)p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \pm \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{i.} \pm \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_{.j} = \mathbf{E}\{\xi_1\} \pm \mathbf{E}\{\xi_2\}. \tag{3.11}$$

Использую метод математической индукции, получаем требуемое утверждение.

Аналогично доказывается соотношение (3.10) для непрерывных случайных величин.

$\square$

Свойство С5. Математическое ожидание произведения n независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин, т.е. если $\xi_1, \ldots, \xi_n$– независимые случайные величины (имеющие математические ожидания), то

$$\mathbf{E}\{\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n\} = \mathbf{E}\{\xi_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}\{\xi_n\}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Докажем соотношение (3.12) для непрерывных случайных величин. Пусть $n = 2$, ξ_1 и ξ_2– независимые случайные величины; $p_{\xi_1}(x)$, $p_{\xi_2}(y)$, $p_{\xi_1,\xi_2}(x, y)$– плотности распределения ξ_1, ξ_2 и $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ соответственно. Так как ξ_1 и ξ_2 независимы, то

$$p_\xi(x, y) = p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y). \tag{3.13}$$

На основании (3.7) и (3.13) получаем

$$\mathbf{E}\{\xi_1\xi_2\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyp_\xi(x, y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyp_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi_1}(x) dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} y p_{\xi_2}(y) dy = \mathbf{E}\{\xi_1\}\mathbf{E}\{\xi_2\}.$$

Методом математической индукции доказывается требуемое утверждение.

Доказательство (3.12) для дискретных случайных величин проводится аналогично. □

Свойство С6. Если $\xi \geq \eta$, то $\mathbf{E}\{\xi\} \geq \mathbf{E}\{\eta\}$.

Доказательство. Введем в рассмотрение случайную величину $\zeta = \xi - \eta$. Очевидно, что $\zeta \geq 0$ и $\mathbf{E}\{\zeta\} \geq 0$. В силу (3.10) имеем $\mathbf{E}\{\xi - \eta\} = \mathbf{E}\{\xi\} - \mathbf{E}\{\eta\} \geq 0$ и $\mathbf{E}\{\xi\} \geq \mathbf{E}\{\eta\}$. □

Свойство С7 (Аддитивность). Справедливы следующие два утверждения:
1. если $\mathbf{E}\{\xi\} = +\infty$, либо $\mathbf{E}\{|\xi|\} < +\infty$, $\mathbf{E}\{\eta\} = +\infty$, то $\mathbf{E}\{\xi + \eta\} = +\infty$;
2. если $\mathbf{E}\{\xi\} = -\infty$, $\mathbf{E}\{\eta\} < +\infty$ либо $\mathbf{E}\{|\xi|\} < +\infty$, $\mathbf{E}\{\eta\} = -\infty$, то $\mathbf{E}\{\xi + \eta\} = -\infty$.

Свойство С8 (Теорема о монотонной сходимости). Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены случайные величины $\eta, \xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$. Тогда справедливы следующие два утверждения:
1. если $\xi_n \geq \eta$ для всех $n \geq 1$, $\mathbf{E}\{\eta\} > -\infty$ и $\xi_n \uparrow \xi$, то $\mathbf{E}\{\xi\}$ существует и $\mathbf{E}\{\xi_n\} \uparrow \mathbf{E}\{\xi\}$;
2. если $\xi_n \leq \eta$ для всех $n \geq 1$, $\mathbf{E}\{\eta\} < +\infty$ и $\xi_n \downarrow \xi$, то $\mathbf{E}\{\xi\}$ существует и $\mathbf{E}\{\xi_n\} \downarrow \mathbf{E}\{\xi\}$.

3.3 Дисперсия случайной величины и ее свойства

Пусть $\xi = \xi(\omega)$ – произвольная случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и имеющая функцию распределения $F_\xi(x)$.

Определение 3.4. Дисперсией $\mathbf{D}\{\xi\}$ *случайной величины* ξ *называется следующее математическое ожидание:*

$$\mathbf{D}\{\xi\} = \mathbf{E}\left\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}\{\xi\})^2 dF_\xi(x) \geq 0. \tag{3.14}$$

Квадратный корень из дисперсии

$$\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}\{\xi\}} \geq 0$$

называется среднеквадратическим*(*стандартным*)* отклонением *случайной величины* ξ.

Если $\xi \in \{a_1, \ldots, a_N\}$, $N \leq +\infty$ – дискретная случайная величина, то:

$$\mathbf{D}\{\xi\} = \sum_{i=1}^{N} (a_i - \mathbf{E}\{\xi\})^2 \, \mathbf{P}\{\xi = a_i\}.$$

Если ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения вероятностей

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x),$$

то:

$$\mathbf{D}\{\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}\{\xi\})^2 \, p_\xi(x) dx.$$

Дисперсия характеризует среднеквадратичное рассеяние (разброс) случайной величины относительно значения $\mathbf{E}\{\xi\}$.

Свойства дисперсии случайной величины

Свойство С1. Дисперсия любой случайной величины ξ неотрицательна, то есть:

$$\mathbf{D}\{\xi\} \geq 0.$$

Свойство С2. Имеет место следующая формула для вычисления дисперсии:

$$\mathbf{D}\{\xi\} = \mathbf{E}\left\{\xi^2\right\} - (\mathbf{E}\{\xi\})^2. \tag{3.15}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\{\xi\} &= \mathbf{E}\left\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^2\right\} = \mathbf{E}\left\{\xi^2 - 2\xi\mathbf{E}\{\xi\} + (\mathbf{E}\{\xi\})^2\right\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\xi^2\right\} - 2\mathbf{E}\{\xi\}\mathbf{E}\{\xi\} + (\mathbf{E}\{\xi\})^2 = \mathbf{E}\left\{\xi^2\right\} - (\mathbf{E}\{\xi\})^2.\end{aligned}$$

□

Свойство С3. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$\mathbf{D}\{\xi\} = 0 \Leftrightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} const = \mathbf{E}\{\xi\}.$$

Доказательство. Используя свойства математического ожидания, получим цепочку равенств:

$$\mathbf{D}\{\xi\} = \mathbf{E}\left\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^2\right\} = 0 \;\Leftrightarrow\; (\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^2 \overset{\text{п.н.}}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; \xi \overset{\text{п.н.}}{=} \mathbf{E}\{\xi\}.$$

□

Свойство C4. При линейном преобразовании случайной величины дисперсия изменяется следующим образом:

$$\mathbf{D}\{a\xi + b\} = a^2\mathbf{D}\{\xi\}$$

для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Доказательство. По формуле (3.14) имеем:

$$\mathbf{D}\{a\xi + b\} = \mathbf{E}\left\{(a\xi + b - \mathbf{E}\{a\xi + b\})^2\right\} = \mathbf{E}\left\{(a\xi + b - a\mathbf{E}\{\xi\} - b)^2\right\} =$$
$$= \mathbf{E}\left\{(a(\xi - \mathbf{E}\{\xi\}))^2\right\} = a^2\mathbf{E}\left\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^2\right\} = a^2\mathbf{D}\{\xi\}.$$

□

Свойство C5. Дисперсия суммы двух случайных величин ξ и η удовлетворяет следующему равенству:

$$\mathbf{D}\{\xi + \eta\} = \mathbf{D}\{\xi\} + \mathbf{D}\{\eta\} + 2\mathbf{E}\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})(\eta - \mathbf{E}\{\eta\})\}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Доказательство утверждения имеет вид следующей цепочки равенств:

$$\mathbf{D}\{\xi + \eta\} = \mathbf{E}\left\{(\xi + \eta - \mathbf{E}\{\xi + \eta\})^2\right\} = \mathbf{E}\left\{(\xi + \eta - \mathbf{E}\{\xi\} - \mathbf{E}\{\eta\})^2\right\} =$$
$$= \mathbf{E}\left\{((\xi - \mathbf{E}\{\xi\}) + (\eta - \mathbf{E}\{\eta\}))^2\right\} =$$
$$= \mathbf{D}\{\xi\} + \mathbf{D}\{\eta\} + 2\mathbf{E}\left\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})(\eta - \mathbf{E}\{\eta\})\right\}.$$

□

Следствие 3.1. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин ξ и η удовлетворяет следующему равенству:*

$$\mathbf{D}\{\xi + \eta\} = \mathbf{D}\{\xi\} + \mathbf{D}\{\eta\}. \tag{3.17}$$

Доказательство. Так как ξ и η – независимые случайные величины, то справедиво равенство:

$$\mathbf{E}\left\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})(\eta - \mathbf{E}\{\eta\})\right\} = \mathbf{E}\left\{\xi - \mathbf{E}\{\xi\}\right\}\mathbf{E}\left\{\eta - \mathbf{E}\{\eta\}\right\} =$$
$$= \left[\mathbf{E}\{\xi\} - \mathbf{E}\{\xi\}\right]\left[\mathbf{E}\{\eta\} - \mathbf{E}\{\eta\}\right] = 0,$$

из которого, согласно (3.16), следует (3.17). □

Упражнение. Пусть $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Показать, что $\mathbf{E}\{\xi\} = \mu$ и $\mathbf{D}\{\xi\} = \sigma^2$.

3.4 Неравенства для математических ожиданий

1. Если для случайной величины ξ существует математическое ожидание $\mathbf{E}\{\xi\}$, то

$$|\mathbf{E}\{\xi\}| \leq \mathbf{E}\{|\xi|\}. \tag{3.18}$$

Доказательство. Так как

$$-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|,$$

то по свойству **C2** и свойству **C5** математического ожидания имеем:

$$-\mathbf{E}\{|\xi|\} \leq \mathbf{E}\{\xi\} \leq \mathbf{E}\{|\xi|\},$$

что эквивалентно (3.18). □

2. Неравенство Чебышева. Если $y = g(x) \geq 0$ – неотрицательная неубывающая функция на $[0, \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ и любой случайной величины ξ, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, справедливо неравенство:

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}\{g(|\xi|)\}}{g(\varepsilon)}. \tag{3.19}$$

Доказательство. Непосредственной проверкой можно показать для любого $\omega \in \Omega$ справедливость неравенства:

$$g(|\xi|) \geq g(\varepsilon) \cdot \mathbf{E}\{\mathbb{I}_{\{|\xi| \geq \varepsilon\}}\} = g(\varepsilon)\mathbf{P}\{|\xi| \geq \varepsilon\}, \tag{3.20}$$

откуда следует (3.19). □

Следствие 3.2. *Если $\xi \geq 0$ – неотрицательная случайная величина, то для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}\{\xi\}}{\varepsilon}. \tag{3.21}$$

Доказательство. Достаточно положить $g(x) \equiv x$ в (3.19) и учесть, что $\xi \geq 0$. □

Следствие 3.3. *Для любой случайной величины ξ справедливы неравенства:*

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}\{|\xi|\}}{\varepsilon},$$

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}\{\xi^2\}}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Достаточно выбрать $g(x) \equiv x, g(x) \equiv x^2$ соответственно. □

Определение 3.5. *Принято говорить, что некоторое свойство выполнено на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$* $\mathbf{P}$-почти наверное, *если существует множество $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ нулевой меры $\mathbf{P}(\Omega_0) = 0$ такое, что это свойство выполнено для каждой точки $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$. Вместо слов «$\mathbf{P}$-почти наверное» часто говорят «$\mathbf{P}$-почти всюду» или просто «почти наверное» (п.н.), «почти всюду» (п.в.).*

Следствие 3.4. *Если $\xi \geq 0$ и $\mathbf{E}\{\xi\} = 0$, то $\xi \overset{п.н.}{=} 0$.*

Доказательство. В силу неравенства Чебышева (3.21) для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\mathbf{P}\{\xi \geq \varepsilon\} = 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon_n \downarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\xi > 0\} \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi \geq \varepsilon_n\} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\xi = 0\} = \mathbf{P}\{\xi \geq 0\} - \mathbf{P}\{\xi > 0\} = 1 - 0 = 1.$$

□

Следствие 3.5. *Если* $\mathbf{E}\{\xi^2\} = 0$, *то* $\xi \overset{п.н.}{=} 0$.

Следствие 3.6. *(Неравенство Чебышева относительно дисперсии) Для любой случайной величины* $\xi = \xi(\omega)$, *имеющей конечное математическое ожидание* $\mathbf{E}\{\xi\}$ *и дисперсию* $\mathbf{D}\{\xi\}$, *и любого* ε *справедливо неравенство:*

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\{\xi\}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{D}\{\xi\}}{\varepsilon^2}. \tag{3.22}$$

Доказательство. Из неравенства Чебышева относительно математического ожидания имеем:

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\{\xi\}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{E}\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^2\}}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{D}\{\xi\}}{\varepsilon^2}.$$

□

Следствие 3.7. *(Правило «3σ».) С вероятностью, не меньшей* $\dfrac{8}{9}$, *случайная величина* ξ *концентрируется в* 3σ*-окрестности своего математического ожидания, то есть в окрестности*

$$U = (\mathbf{E}\{\xi\} - 3\sigma,\ \mathbf{E}\{\xi\} + 3\sigma),$$

где $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\{\xi\}}$.

Доказательство. Используя (3.22), оценим вероятность противоположного события:

$$\mathbf{P}\{\xi \notin U\} \equiv \mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\{\xi\}| \geq 3\sigma\} \leq \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}.$$

□

3. Неравенство Йенсена. Для любой выпуклой функции $y = g(x)$ и любой случайной величины ξ с конечным математическим ожиданием $\mathbf{E}\{\xi\}$ справедливо неравенство:

$$\mathbf{E}\{g(\xi)\} \geq g(\mathbf{E}\{\xi\}). \tag{3.23}$$

Доказательство. Воспользуемся следующим свойством выпуклой функции:
для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ существует действительное число $G_0 = G(x_0)$, такое что

$$g(x) \geq g(x_0) + G_0 \cdot (x - x_0), x \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Положим в (3.24)

$$x_0 = \mathbf{E}\{\xi\},\ x = \xi(\omega)$$

и выполим усреднение левой и правой частей этого неравенства согласно свойствам математического ожидания:

$$\mathbf{E}\{g(\xi)\} \geq \mathbf{E}\{g(\mathbf{E}\{\xi\}) + G_0 \cdot (\xi - \mathbf{E}\{\xi\})\} = g(\mathbf{E}\{\xi\}) + G_0 \cdot \mathbf{E}\{\xi - \mathbf{E}\{\xi\}\} = g(\mathbf{E}\{\xi\}).$$

Здесь учтено, что

$$\mathbf{E}\{\xi - \mathbf{E}\{\xi\}\} = \mathbf{E}\{\xi\} - \mathbf{E}\{\xi\} = 0.$$

□

Следствие 3.8. *Для любого $r \geq 1$ справедливо неравенство:*

$$|\mathbf{E}\{\xi\}|^r \leq \mathbf{E}\{|\xi|^r\}.$$

Доказательство. Достаточно выбрать $g(x) = |x|^r$ в неравенстве (3.23). □

Следствие 3.9. *Справедливы неравенства:*

$$|\mathbf{E}\{\xi\}| \leq \mathbf{E}\{|\xi|\},$$

$$(\mathbf{E}\{\xi\})^2 \leq \mathbf{E}\{\xi^2\}.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться следствием 3.8 при $r = 1$ и $r = 2$. □

Следствие 3.10. *Если $y = g(x)$ – вогнутая функция, то в неравенстве (3.23) знак меняется на обратный.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть выпуклую функцию $\tilde{g}(x) = -g(x)$. □

4. Неравенство Ляпунова. Для любых положительных чисел $0 < s < t < +\infty$ справедливо неравенство:

$$(\mathbf{E}\{|\xi|^s\})^{1/s} \leq (\mathbf{E}\{|\xi|^t\})^{1/t}. \tag{3.25}$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 3.8. Для любой неотрицательной случайной величины $\eta \geq 0$ и любого $r \geq 1$ имеем:

$$(\mathbf{E}\eta)^r \leq \mathbf{E}\{\eta^r\}. \tag{3.26}$$

Положим в неравенстве (3.26) $r = \frac{t}{s} > 1$ и $\eta = |\xi|^s \geq 0$. Тогда (3.26) принимает вид:

$$\mathbf{E}\{|\xi|^s\}^{t/s} \leq \mathbf{E}\{|\xi|^t\}.$$

Возведем левую и правую части последнего неравенства в положительную степень $1/t > 0$ и получим (3.25). □

Следствие 3.11. *Справедлива следующая цепочка неравенств Ляпунова:*

$$\mathbf{E}\{|\xi|\} \leq \sqrt[2]{\mathbf{E}\{\xi^2\}} \leq \sqrt[3]{\mathbf{E}\{|\xi|^3\}} \leq \ldots .$$

5. Неравенство Гельдера. Для любых случайных величин ξ_1, ξ_2 и положительных констант $p_1, p_2 > 1$ таких, что

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1,$$

справедливо неравенство:

$$|\mathbf{E}\{\xi_1 \cdot \xi_2\}| \leq \mathbf{E}\{|\xi_1 \cdot \xi_2|\} \leq (\mathbf{E}\{|\xi^{p_1}|\})^{1/p_1} \cdot (\mathbf{E}\{|\xi^{p_2}|\})^{1/p_2}. \tag{3.27}$$

Доказательство. Из свойства (3.18) имеем

$$|\mathbf{E}\{\xi_1 \cdot \xi_2\}| \leq \mathbf{E}\{|\xi_1 \cdot \xi_2|\}.$$

Для любых $x_1, x_2 \geq 0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ справедливо известное из «Математического анализа» неравентсво:

$$x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2. \tag{3.28}$$

Выберем в (3.28) :

$$\lambda_i = \frac{1}{p_i},\ x_i = \frac{|\xi_i|^{p_i}}{\mathbf{E}\{|\xi_i|^{p_i}\}} \geq 0,\ \mathbf{E}\{x_i\} = 1,\ i = 1, 2.$$

Применяя операцию усреднения к левой и правой частям (**??**), получим:

$$\mathbf{E}\left\{\frac{|\xi_1\xi_2|}{(\mathbf{E}\{|\xi^{p_1}|\})^{1/p_1} \cdot (\mathbf{E}\{|\xi^{p_2}|\})^{1/p_2}}\right\} \leq \mathbf{E}\left\{\frac{1}{p_1}x_1 + \frac{1}{p_2}x_2\right\} = \frac{1}{p_1} \cdot 1 + \frac{1}{p_2} \cdot 1 = 1.$$

Домножая на знаменатель, получаем (3.27). □

6. Неравенство Коши-Буняковского (Шварца).

$$|\mathbf{E}\{\xi_1\xi_2\}| \leq \mathbf{E}\{|\xi_1\xi_2|\} \leq \sqrt{\mathbf{E}\{\xi_1^2\} \cdot \mathbf{E}\{\xi_2^2\}}.$$

Доказательство. Достаточно положить $p_1 = p_2 = 2$ в неравенстве Гельдера. □

7. Неравенство Минковского. Если для некоторого $p \geq 1$

$$\mathbf{E}\{|\xi|^p\} < \infty,\ \mathbf{E}\{|\eta|^p\} < \infty,$$

то

$$\mathbf{E}\{|\xi + \eta|^p\} < \infty$$

и

$$(\mathbf{E}\{|\xi + \eta|^p\})^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbf{E}\{|\xi|^p\})^{\frac{1}{p}} + (\mathbf{E}\{|\eta|^p\})^{\frac{1}{p}}. \tag{3.29}$$

Доказательство. Воспользуемся известным из «Математического анализа» неравенством:

$$|\xi + \eta|^p \leq 2^{p-1}(|\xi|^p + |\eta|^p).$$

Отсюда в силу свойств математического ожидания имеем:

$$\mathbf{E}\{|\xi + \eta|^p\} \leq 2^{p-1}(\mathbf{E}\{|\xi|^p\} + \mathbf{E}\{|\eta|^p\}) < +\infty.$$

Используя неравенство Гельдера (3.27) для

$$\xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta,$$

и

$$p_1 = p, p_2 = \frac{p}{p-1},$$

получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{|\xi+\eta|^p\} = \mathbf{E}\{|\xi+\eta||\xi+\eta|^{p-1}\} \leq \mathbf{E}\{|\xi||\xi+\eta|^{p-1}\} + \mathbf{E}\{|\eta||\xi+\eta|^{p-1}\} \leq \\ \leq (\mathbf{E}\{|\xi|^p\})^{\frac{1}{p}}(\mathbf{E}\{|\xi+\eta|^{\frac{p}{p-1}(p-1)}\})^{\frac{p-1}{p}} + (\mathbf{E}\{|\eta|^p\})^{\frac{1}{p}}(\mathbf{E}\{|\xi+\eta|^p\})^{\frac{p-1}{p}} = \\ = (\mathbf{E}\{|\xi+\eta|^p\})^{\frac{p-1}{p}}((\mathbf{E}\{|\xi|^p\})^{\frac{1}{p}} + (\mathbf{E}\{|\eta|^p\})^{\frac{1}{p}}).\end{aligned}$$

Деля левую и правую часть неравенства на

$$(\mathbf{E}\{|\xi+\eta|^p\})^{\frac{p-1}{p}},$$

получаем (3.29). □

3.5 Условное математическое ожидание и его свойства

На практике часто возникает необходимость усреднения случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ при условии наступления события B или при условии равенства некоторой другой случайной величины $\eta = y$. Для решения этой задачи используются понятия условного математического ожидания (УМО) относительно случайного события или условного математического ожидания относительно случайной величины

Условное математическое ожидание относительно случайного события

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены некоторая случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ и некоторое случайное событие $B \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(B) > 0$. Пусть далее:

– $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ ($x \in \mathbb{R}$);

– $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \mid B)$ – условная вероятностная мера ($A \in \mathcal{F}$);

– $F_\xi(x \mid B)$ – условная функция распределения ξ при условии наступления события B ($x \in \mathbb{R}$).

Определение 3.6. Условным математическим ожиданием (условным средним) случайной величины ξ при условии события B *называется величина интеграла Лебега (Лебега-Стилтьеса):*

$$\mathbf{E}\{\xi \mid B\} = \int_\Omega \xi(\omega)\mathbf{P}_B(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x \mid B); \tag{3.30}$$

при этом ранее введенное понятие математического ожидания

$$\mathbf{E}\{\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x) \tag{3.31}$$

называется безусловным математическим ожиданием.

Из (3.30) и (3.31) видно, что условное и безусловное математические ожидания отличаются лишь интегрирующей функцией. Поэтому формулы вычисления условного математического ожидания аналогичны формулам вычисления безусловного математического ожидания:

– если ξ – дискретная случайная величина, то

$$\mathbf{E}\{\xi \mid B\} = \sum_{i=1}^{N} a_i p_i = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{P}\{\xi = a_i \mid B\};$$

– если ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с условной плотностью распределения,

$$p_\xi(x \mid B) = F'_\xi(x \mid B),$$

то

$$\mathbf{E}\{\xi \mid B\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x \mid B) dx.$$

Теорема 3.1. *Пусть на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *определены случайная величина* $\xi = \xi(\omega)$, *имеющая математическое ожидание* $\mathbf{E}\{\xi\}$ *и некоторая полная система случайных событий*

$$\{H_i : i = 1, \dots, N\}, N \leq +\infty.$$

Тогда условное и безусловное математические ожидания связаны соотношением:

$$\mathbf{E}\{\xi\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{E}\{\xi \mid H_i\}. \tag{3.32}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}\{\xi < x \mid H_i\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(H_i) F_\xi(x \mid H_i).$$

Подставляя это выражение в (3.31), приходим к (3.32). □

Условное математическое ожидание относительно случайной величины

Пусть на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены некоторая случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ и некоторый случайный вектор $\eta = \eta(\omega) \in \mathbb{R}^n$. Пусть далее $F_{\xi \mid \eta}(x \mid y), x \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^n$ есть условная функция распределения случайной величины ξ при условии $\eta = y$.

Определение 3.7. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ при условии $\eta = y$, *называется величина интеграла Лебега-Стилтьеса:*

$$\mathbf{E}\{\xi \mid \eta = y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\xi \mid \eta}(x \mid y). \tag{3.33}$$

Определение 3.8. *Предположим, что* $g(y)$ *– борелевская функция*

$$g(y) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1,$$

определенная следующим образом:

$$g(y) = \mathbf{E}\{\xi \mid \eta = y\}, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.34}$$

Тогда условным математическим ожиданием $\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\}$ случайной величины ξ относительно η *называется случайная величина* $\alpha = \alpha(\omega), \omega \in \Omega$, *являющаяся суперпозицией функций* $g(\cdot)$ *и* $\eta(\cdot)$*:*

$$\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\} ::= \alpha(\omega) = g(\eta(\omega)), \omega \in \Omega.$$

Замечание 3.1. *В отличие от предыдущих определений условного математического ожидания величина* $\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\}$ *является случайной величиной.*

Свойство C1. Условные математические ожидания (3.30) и (3.33) обладают всеми свойствами безусловного математического ожидания.

Доказательство. Условное математическое ожидание представляет собой такой же функционал, как и безусловное математическое ожидание (3.31), отличается лишь видом интегрирующей функции. □

Свойство C2. Если случайные величины ξ и η независимы, то условное математическое ожидание совпадает с безусловным, то есть:

$$\mathbf{E}\{\xi \mid \eta = y\} = \mathbf{E}\{\xi\},\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Так как случайные величины ξ и η независимы, то

$$F_{\xi \mid \eta}(x \mid y) = F_\xi(x),$$

поэтому из (3.33) и (3.31) следует доказываемое. □

Свойство C3 (Формула полного математического ожидания). Справедливо соотношение:

$$\mathbf{E}\{\xi\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\}\}. \tag{3.35}$$

Доказательство. Пусть η – дискретная случайная величина, то есть:

$$\eta \in Y = \{y_1, \dots, y_N\},\ N \le +\infty.$$

Используя определение 3.34 и свойства математического ожидания можем записать:

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\}\} = \mathbf{E}\{g(\eta)\} = \sum_{i=1}^{N} g(y_i) \cdot \mathbf{P}\{\eta = y_i\}.$$

Построим полную систему случайных событий:

$$H_i = \{\eta = y_i\}, i = 1, \dots, N,$$

и, используя (3.34) и теорему 3.1, получим:

$$\sum_{i=1}^{N} g(y_i) \cdot \mathbf{P}\{\eta = y_i\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}\{\xi \mid \eta = y_i\} \cdot \mathbf{P}(H_i) = \mathbf{E}\{\xi\}.$$

□

Замечание 3.2. *Формула (3.35) представляет собой двухэтапное усреднение:*

$$\mathbf{E}\{\xi\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\}\},$$

то есть сначала осуществляется усреднение ξ при фиксированном значении η, а потом усреднение по всевозможным значениям η.

Свойство C4. Для любой ограниченной борелевской функции $h(\cdot)$ справедливо равенство:

$$\mathbf{E}\{h(\eta)\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\}\} = \mathbf{E}\{h(\eta)\xi\}. \tag{3.36}$$

Доказательство. Пусть η – дискретная случайная величина и

$$\eta \in Y = \{y_1, \ldots, y_N\},\ N \leq +\infty.$$

Воспользуемся схемой доказательства свойства **C**3:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{h(\eta)\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\}\} &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\{\eta = y_i\}\mathbf{E}\{h(\eta)\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\} \mid \eta = y_i\} = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\{\eta = y_i\}h(y_i)\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\} \mid \eta = y_i\} = \\ &= \sum_{i-1}^{N} \mathbf{P}\{\eta = y_i\}h(y_i)\mathbf{E}\{\xi \mid \eta = y_i\}.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{E}\{h(\eta)\xi\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\{\eta = y_i\}\mathbf{E}\{h(\eta)\xi \mid \eta = y_i\} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\{\eta = y_i\}h(y_i)\mathbf{E}\{\xi \mid \eta = y_i\}.$$

Из совпадения этих выражений получаем (3.36).

Рассмотрим теперь случай абсолютно непрерывного распределения вероятностей (ξ, η) с совместной плотностью $p_{\xi,\eta}(x, y)$ и условной плотностью $p_{\xi \mid \eta}(x \mid y)$. Аналогично построению условной функции распределения, получаем:

$$\mathbf{E}\{\xi \mid \eta = y\} = \int x p_{\xi \mid \eta}(x \mid y) dx.$$

Поэтому имеем цепочку равенств, доказывающую (3.36):

$$\mathbf{E}\{h(\eta)\xi\} = \int\int h(y) x p_{\xi,\eta}(x, y) dx dy = \int\int h(y) x p_{\xi \mid \eta}(x \mid y) p_\eta(y) dx dy =$$

$$= \int \mathbf{E}\{\xi \mid \eta = y\} h(y) p_\eta(y) dy = \mathbf{E}\{h(\eta)\mathbf{E}\{\xi \mid \eta\}\}.$$

□

Свойство C5. Пусть на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ и случайный вектор $\eta = \eta(\omega) \in \mathbb{R}^N$. Тогда для борелевской функции $\psi(y)$:

$$z = \psi(y) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$$

справедливо равенство:

$$\mathbf{E}\{\psi(\eta) \cdot \xi \mid \eta\} \overset{\text{п.н.}}{=} \psi(\eta) \cdot \mathbf{E}\{\xi \mid \eta\}.$$

Доказательство. Сравнение значений левой и правой частей этого соотношения при всевозможных фиксированных $\eta = y$ и даст требуемый результат. □

Свойство С6 (Соотношение Вальда). Пусть на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены:

– последовательность одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с конечным математическим ожиданием $\mathbf{E}\{\xi_1\}$;

– не зависящая от всех $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\}$ неотрицательная целочисленная случайная величина $\eta = \eta(\omega) \geq 0$ с конечным математическим ожиданием $\mathbf{E}\{\eta\}$;

– сумма случайного числа случайных величин

$$S_\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\eta,$$

где η – случайный номер $(S_0 = 0)$.

Тогда справедливо следующее соотношение Вальда:

$$\mathbf{E}\{S_\eta\} = \mathbf{E}\{\eta\} \cdot \mathbf{E}\{\xi_1\}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой полного математического ожидания:

$$\mathbf{E}\{S_\eta\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{S_\eta \mid \eta\}\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta = i\} \cdot \mathbf{E}\{\xi_1 + \ldots + \xi_\eta \mid \eta = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta = i\} \cdot \mathbf{E}\{\xi_1 + \ldots + \xi_i\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbf{P}\{\eta = i\} \cdot \mathbf{E}\{\xi_1\} = \mathbf{E}\{\eta\} \cdot \mathbf{E}\{\xi_1\}.$$

□

3.6 Моменты скалярных случайных величин и их свойства

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определена случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, имеющая функцию распределения $F_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется величина μ_k, которая определяется равенством:

$$\mu_k = \mathbf{E}\left\{\xi^k\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF_\xi(x), \tag{3.37}$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Величина $\mathbf{E}\left\{|\xi|^k\right\}$ называется *абсолютным начальным моментом k-го порядка* случайной величины ξ, $k \in \mathbb{N}$.

Случайная величина $\overset{\circ}{\xi} = \xi(\overset{\circ}{\omega}) ::= \xi - \mathbf{E}\{\xi\}$ называется *центрированной случайной величиной.*

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется величина ν_k, которая определяется равенством:

$$\begin{aligned} \nu_k = \mathbf{E}\left\{\overset{\circ}{\xi}{}^k\right\} = \mathbf{E}\left\{(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^k\right\} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^k \, dF_\xi(x), \end{aligned} \tag{3.38}$$

где $k \in \mathbb{N}$. При этом $\mathbf{E}\left\{|\overset{\circ}{\xi}|^k\right\}$ – *абсолютный центральный момент k-го порядка* случайной величины ξ.

Свойства моментов скалярных случайных величин

Свойство С1. Для любой случайной величины ξ справедливо:

$$\mu_1 = \mathbf{E}\{\xi\}, \; \nu_1 = 0.$$

Свойство С2. Если для некоторого $t > 0$ ограничен момент порядка t, то для любого s, $0 < s < t$, ограничены моменты низших порядков s.

Доказательство. Доказать самостоятельно, используя неравенство Ляпунова. □

Свойство С3. Если $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то справедливо равенство:

$$\nu_k = \begin{cases} 0, & \text{при нечетном } k, \\ \sigma^k (k-1)!!, & \text{при четном } k. \end{cases}$$

Свойство С4. Справедливы следующие соотношения:

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{C}_\mathbf{k}^\mathbf{j} \nu_j (\mu_1)^{k-j},$$

$$\nu_k = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{C}_\mathbf{k}^\mathbf{j} \mu_j (-\mu_1)^{k-j}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство.

$$\mu_k = \mathbf{E}\left\{\xi^k\right\} = \mathbf{E}\left\{(\xi - \mu_1 + \mu_1)^k\right\} = \mathbf{E}\left\{\left(\overset{\circ}{\xi} + \mu_1\right)^k\right\} = \mathbf{E}\left\{\sum_{j=0}^{k} \mathbf{C}_\mathbf{k}^\mathbf{j} \left(\overset{\circ}{\xi}\right)^j (\mu_1)^{k-j}\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \mathbf{C}_\mathbf{k}^\mathbf{j} (\nu_1)^{k-j}\, \mathbf{E}\left\{\left(\overset{\circ}{\xi}\right)^j\right\} = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{C}_\mathbf{k}^\mathbf{j} (\mu_1)^{k-j}\, \nu_j.$$

Второе равенство доказывается аналогично. Доказать самостоятельно. □

Следствие 3.12. *Справедливы равенства:*

$$\mu_2 = \nu_2 + \mu_1^2 = \mathbf{E}\left\{\left(\overset{\circ}{\xi}\right)^2\right\} + \mathbf{E}^2\left\{\xi\right\},$$

$$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \mathbf{E}\left\{\xi^2\right\} - \mathbf{E}^2\left\{\xi\right\}.$$

Свойство С5. Если выполняется критерий Карлемана, то есть если расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[2k]{\nu_{2k}}} = +\infty,$$

то начальные моменты $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \ldots\}$ однозначно определяют функцию распределения $F_\xi(\cdot)$.

3.7 Моменты многомерных случайных величин

Рассмотрим случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^N$, определеный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Обозначим через m_i математическое ожидание компоненты ξ_i вектора ξ:

$$m_i = \mathbf{E}\{\xi_i\},\ i = 1, 2, \ldots, N,$$

а через

$$m = (m_1, \ldots, m_N)^{\mathbf{T}} = \mathbf{E}\{\xi\} \in \mathbb{R}^N -$$

вектор математического ожидания.

Определение 3.9. *Пусть $k_1, \ldots, k_N$ – неотрицательные целые числа, задающие разбиение числа $k \in \mathbb{N}$, то есть $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_N$. Тогда* центральным смешанным моментом порядка k *называется величина*

$$\mu_{k_1,\ldots,k_N} = \mathbf{E}\{(\xi_1 - m_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\xi_N - m_N)^{k_N}\}.$$

Определение 3.10. Ковариацией *случайных величин ξ_i, ξ_j называется центральный смешанный момент второго порядка:*

$$\sigma_{ij} = \mathbf{cov}\{\xi_i, \xi_j\} = \mathbf{E}\{(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)\},\ i, j = 1, \ldots, N. \tag{3.39}$$

При этом $(N \times N)$-матрица Σ :

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^N = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \ldots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$$

называется ковариационной матрицей *случайного вектора ξ.*

Если $\xi \in \{a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\}$ – дискретный случайный вектор, то

$$\sigma_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (a_i^{(l)} - m_i)(a_j^{(l)} - m_j)\mathbf{P}\{\xi_i = a_i^{(l)}, \xi_j = a_j^{(l)}\}.$$

Если ξ имеет абсолютно непрерывную плотность распределения, то:

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) p_{\xi_i,\xi_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j, \tag{3.40}$$

где $i \neq j$, а $p_{\xi_i,\xi_j}(x_i, x_j)$ – совместная плотность распределения случайных величин ξ_i, ξ_j.

Свойства ковариации и ковариационной матрицы

Свойство С1. Для практических вычислений ковариации удобна следующая формула:

$$\sigma_{ij} = \mathbf{E}\{\xi_i \cdot \xi_j\} - \mathbf{E}\{\xi_i\} \cdot \mathbf{E}\{\xi_j\}, i, j = 1, \ldots, N. \tag{3.41}$$

Доказательство. По определению

$$\sigma_{ij} = \mathbf{cov}\{\xi_i, \xi_j\} = \mathbf{E}\{(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)\} = \mathbf{E}\{\xi_i\xi_j - m_i\xi_j - m_j\xi_i + m_i m_j\} =$$
$$= \mathbf{E}\{\xi_i\xi_j\} - m_i\mathbf{E}\{\xi_j\} - m_j\mathbf{E}\{\xi_i\} + m_i m_j = \mathbf{E}\{\xi_i\xi_j\} - 2m_i m_j + m_i m_j =$$
$$= \mathbf{E}\{\xi_i\xi_j\} - m_i m_j = \mathbf{E}\{\xi_i \cdot \xi_j\} - \mathbf{E}\{\xi_i\} \cdot \mathbf{E}\{\xi_j\}.$$

□

Свойство C2. Справедливы матричные формулы:

$$\Sigma = \mathbf{E}\{(\xi - \mathbf{E}\xi) \cdot (\xi - \mathbf{E}\xi)^{\mathbf{T}}\},$$

$$\Sigma = \mathbf{E}\{\xi \cdot \xi^{\mathbf{T}}\} - \mathbf{E}\{\xi\} \cdot (\mathbf{E}\{\xi\})^{\mathbf{T}}.$$

Доказательство. Из (3.39), (3.41) и матричных правил получим матрицу под знаком **E**, а вследствие покомпонентного действия **E** получаем доказываемое. □

Свойство C3. Ковариация и ковариационная матрица – объекты симметричные, то есть:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji},\ \Sigma = \Sigma^{\mathbf{T}}.$$

Свойство C4. Диагональные элементы ковариационной матрицы являются дисперсиями:

$$\sigma_{ii} = \mathbf{E}\{(\xi_i - \mathbf{E}_{\xi_i})^2\} = \mathbf{D}\{\xi_i\},\ i = 1, \ldots, N.$$

Свойство C5. Внедиагональные элементы ковариационной матрицы ограничены:

$$|\sigma_{ij}| \leq \sqrt{\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj}},\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Из неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$|\sigma_{ij}| = |\mathbf{E}\{\overset{\circ}{\xi}_i \cdot \overset{\circ}{\xi}_j\}| \leq \sqrt{\mathbf{E}\{(\overset{\circ}{\xi}_i)^2\} \cdot \mathbf{E}\{(\overset{\circ}{\xi}_j)^2\}} = \sqrt{\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj}}.$$

□

Свойство C6. Любая ковариационная матрица есть матрица неотрицательно определенная, то есть для любого $u \in \mathbb{R}^n$ квадратичная форма

$$Q(u) = u^{\mathbf{T}} \sum u$$

удовлетворяет неравенству

$$Q(u) =\geq 0.$$

Доказательство. В силу свойства **C**2 имеем:

$$Q(u) = u^{\mathbf{T}}\mathbf{E}\{\overset{\circ}{\xi} \cdot (\overset{\circ}{\xi})^{\mathbf{T}}\}u = \mathbf{E}\{(u^{\mathbf{T}}\ \overset{\circ}{\xi})^2\} \geq 0.$$

□

Свойство C7. Если ξ_i и ξ_j независимы, то их ковариация равна нулю:

$$\sigma_{ij} = \mathbf{cov}\{\xi_i, \xi_j\} = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся мультипликативным свойством математического ожидания:

$$\sigma_{ij} = \mathbf{E}\{\overset{\circ}{\xi}_i \cdot \overset{\circ}{\xi}_j\} = \mathbf{E}\{\overset{\circ}{\xi}_i\} \cdot \mathbf{E}\{\overset{\circ}{\xi}_j\} = 0 \cdot 0 = 0.$$

□

Свойство C8. Если ξ – гауссовский случайный вектор с распределением:

$$\mathcal{L}\{\xi\} = \mathcal{N}_N(a, B),$$

то его ковариационная матрица

$$\Sigma = B.$$

Доказательство. Доказательство проводится непосредственным вычислением элементов

$$\{\sigma_{ij},\, i, j = 1, 2, \ldots, N\}$$

ковариационной матрицы Σ пользуясь формулой (3.40). □

Определение 3.11. Коэффициентом корреляции *случайных величин ξ_i, ξ_j называется их нормированная ковариация:*

$$\rho_{ij} = Corr\{\xi_i, \xi_j\} = \frac{\mathbf{cov}(\xi_i, \xi_j)}{\sqrt{\mathbf{D}\{\xi_i\}\mathbf{D}\{\xi_j\}}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}},\ i, j = 1, \ldots, N. \tag{3.42}$$

При этом иногда $(N \times N)$-матрица $\mathcal{P} = (\rho_{ij})_{i,j}^N$ называется корреляционной матрицей.

Свойства коэффициента корреляции

Свойство C1. Коэффициент корреляции есть величина симметричная:

$$\rho_{ij} = \rho_{ji},\ i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Свойство C2. Коэффициент корреляции – ограниченная величина:

$$-1 \le \rho_{ij} \le +1,\ i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Доказательство. По свойству **C**5 ковариации:

$$|\sigma_{ij}| \le \sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}},\ i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Следовательно из (3.42) следует доказываемое. □

Свойство C3. Диагональные элементы корреляционной матрицы равны единице:

$$\rho_{ii} = 1, i = 1, \ldots, N.$$

Свойство C4. Если случайные величины ξ_i и ξ_j независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю:

$$\rho_{ij} = 0.$$

Доказательство. Результат следует из соответствующего свойства ковариации. □

Определение 3.12. *Случайные величины* $\xi_i, \xi_j, i \neq j$, *для которых*

$$\rho_{ij} = 0,$$

называются некоррелированными.

Следствие 3.13. *Если случайные величины* ξ_i, ξ_j *независимы, то они некоррелированные. Обратное, вообще говоря, неверно.*

Доказательство. Первое утверждение следует из свойства **C**4.

Второе утверждение доказывается контрпримером. Пусть $N = 2$,

$$\mathcal{L}\{\xi_1\} = \mathcal{N}(0,1),\ \xi_2 = \xi_1^2.$$

Очевидно, что случайные величины ξ_1, ξ_2 – зависимы. Покажем, что они некоррелированы. Для этого вычислим $\mathbf{Corr}\{\xi_i, \xi_j\}$.

$$\mathbf{Corr}\{\xi_1, \xi_2\} = \mathbf{Corr}\{\xi_1, \xi_1^2\} = \frac{\mathbf{Cov}(\xi_1, \xi_1^2)}{\sqrt{\mathbf{D}\{\xi_1\}\mathbf{D}\{\xi_1^2\}}}. \tag{3.43}$$

Так как $\mathcal{L}\{\xi_1\} = \mathcal{N}(0,1)$, то

$$\mathbf{E}\{\xi_1\} = 0,\ \mathbf{D}\{\xi_1\} = 1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\{\xi_2\} = \mathbf{E}\{\xi_1^2\} = \mathbf{D}\{\xi_1\} + (\mathbf{E}\{\xi_1\})^2 = 1 + 0 = 1$$

и

$$\mathbf{Cov}(\xi_1, \xi_1^2) = \mathbf{E}\left\{(\xi_1 - \mathbf{E}\{\xi_1\})\left(\xi_1^2 - \mathbf{E}\{\xi_1^2\}\right)\right\} = \mathbf{E}\left\{\xi_1 \cdot \left(\xi_1^2 - 1\right)\right\} = \mathbf{E}\left\{\xi_1^3 - \xi_1\right\} = 0.$$

Таким образом, согласно формуле (3.43),

$$\mathbf{Corr}\{\xi_1, \xi_2\} = 0,$$

то есть случайные величины ξ_i, ξ_j некоррелированны. □

Свойство C5. Если

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 -$$

гауссовский случайный вектор с нормальным распределением $\mathcal{N}_2(a, B)$, то понятия независимости и некоррелированности случайных величин ξ_1, ξ_2 совпадают.

Доказательство. Из свойств ковариационной матрицы имеем:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = B.$$

С другой стороны из критерия независимости гауссовских случайных величин имеем: $B = diag\{b_{11}, b_{22}\}$, или:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\sigma_{12} = 0$, что равносильно независимости ξ_1 и ξ_2. □

Свойство C6. Коэффициент корреляции принимает свои экстремальные значения $\rho_{ij} = \pm 1$ тогда и только тогда, когда случайные величины ξ_i и ξ_j связаны почти наверное линейной зависимостью:

$$\xi_j \overset{\text{п.н.}}{=} a + b\xi_i,$$

где a, b - постоянные.

Доказательство. Введем в рассмотрение так называемые нормированные случайные величины:

$$\xi_k^* = \frac{\overset{\circ}{\xi}_k}{\sqrt{\sigma_{kk}}} = \frac{\xi_k - \mathbf{E}\{\xi_k\}}{\sqrt{\sigma_{kk}}}, k \in \{i, j\}.$$

Тогда по построению для $k \in \{i, j\}$:

$$\mathbf{E}\{\xi_k^*\} = \mathbf{E}\left\{\frac{\xi_k - \mathbf{E}\{\xi_k\}}{\sqrt{\sigma_{kk}}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{kk}}}\mathbf{E}\left\{\xi_k - \mathbf{E}\{\xi_k\}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{kk}}}\left(\mathbf{E}\left\{\xi_k\right\} - \mathbf{E}\{\xi_k\}\right) = 0,$$

$$\mathbf{D}\{\xi_k^*\} = \mathbf{D}\left\{\frac{\xi_k - \mathbf{E}\{\xi_k\}}{\sqrt{\sigma_{kk}}}\right\} = \frac{1}{\sigma_{kk}}\mathbf{D}\left\{\xi_k - \mathbf{E}\{\xi_k\}\right\} = \frac{1}{\sigma_{kk}}\mathbf{D}\left\{\xi_k\right\} = 1.$$

С помощью этих нормированных случайных величин построим ещё одну величину:

$$\eta = \xi_j^* - \rho_{ij}\xi_i^*.$$

Очевидно, что по построению: $\mathbf{E}\{\eta\} = 0$. Вычислим $\mathbf{E}\{\eta^2\}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\eta^2\} &= \mathbf{E}\left\{\left(\xi_j^* - \rho_{ij}\xi_i^*\right)^2\right\} = \mathbf{E}\left\{\left(\xi_j^*\right)^2 - 2\rho_{ij}\xi_j^*\xi_i^* + \left(\rho_{ij}\xi_i^*\right)^2\right\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\left(\xi_j^*\right)^2\right\} - 2\rho_{ij}\mathbf{E}\left\{\xi_j^*\xi_i^*\right\} + \left(\rho_{ij}\right)^2\mathbf{E}\left\{\left(\xi_i^*\right)^2\right\} = \\ &= \left[\mathbf{E}\left\{\left(\xi_k^*\right)^2\right\} = \mathbf{D}\left\{\xi_k\right\} = 1,\ k \in \{i, j\}\right] = \\ &= 1 - 2\rho_{ij}\mathbf{E}\left\{\xi_j^*\xi_i^*\right\} + \left(\rho_{ij}\right)^2.\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left\{\xi_j^*\xi_i^*\right\} &= \mathbf{E}\left\{\frac{\xi_j - \mathbf{E}\{\xi_j\}}{\sqrt{\sigma_{jj}}} \cdot \frac{\xi_i - \mathbf{E}\{\xi_i\}}{\sqrt{\sigma_{ii}}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{jj}\sigma_{ii}}}\mathbf{E}\left\{\left(\xi_j - \mathbf{E}\{\xi_j\}\right) \cdot \left(\xi_j - \mathbf{E}\{\xi_j\}\right)\right\} = \\ &= \frac{\mathbf{Cov}\left\{\xi_j, \xi_i\right\}}{\sqrt{\sigma_{jj}\sigma_{ii}}} = \rho_{ij}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Подстановкой (3.45) в (3.44) получаем

$$\mathbf{E}\{\eta^2\} = 1 - 2\rho_{ij}\rho_{ij} + \left(\rho_{ij}\right)^2 = 1 - \left(\rho_{ij}\right)^2.$$

Учитывая последнее равенство приходим к следующему:

$$|\rho_{ij}| = 1 \Leftrightarrow \mathbf{E}\{\eta^2\} = 0 \Leftrightarrow \eta \overset{\text{п.н.}}{=} 0 \Leftrightarrow \xi_j^* \overset{\text{п.н.}}{=} \rho_{ij}\xi_i^*.$$

Так как согласно условию $\rho_{ij} = \pm 1$, то

$$\xi_j^* \overset{\text{п.н.}}{=} \pm\xi_i^*, \Leftrightarrow \frac{\xi_j - m_j}{\sqrt{\sigma_{jj}}} \overset{\text{п.н.}}{=} \pm\frac{\xi_i - m_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} \Leftrightarrow \xi_j \overset{\text{п.н.}}{=} a + b\xi_i,$$

где

$$a = m_j \mp \sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{\sigma_{ii}}}m_i, \quad b = \pm\sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{\sigma_{ii}}}$$

□

Следствие 3.14. *Коэффициент корреляции ρ_{ij} есть мера линейной зависимости случайных величин. И чем больше $|\rho_{ij}|$, тем сильнее эта зависимость.*

Свойство C7. Справедлива следующая формула для дисперсии суммы случайных величин:

$$\mathbf{D}\{\xi_1 + \xi_2\} = \mathbf{D}\{\xi_1\} + \mathbf{D}\{\xi_2\} + 2\rho_{12}\sqrt{\mathbf{D}\{\xi_1\}\mathbf{D}\{\xi_2\}}.$$

Доказательство. По (3.42) имеем:

$$\mathbf{D}\{\xi_1 + \xi_2\} = \mathbf{E}\{(\overset{\circ}{\xi}_1 + \overset{\circ}{\xi}_2)^2\} = \mathbf{E}\{(\overset{\circ}{\xi}_1)^2\} + \mathbf{E}\{(\overset{\circ}{\xi}_2)^2\} + 2\mathbf{E}\{\overset{\circ}{\xi}_1 \cdot \overset{\circ}{\xi}_2\}.$$

□

Следствие 3.15. *Если случайные величины ξ_1, ξ_2 – некоррелированные (или независимые), то дисперсия суммы равна сумме дисперсий величин.*

Доказательство. В свойстве **C7** положим: $\rho_{12} = 0$ и получим требуемое. □

3.8 Энтропия, количество информации по Шэннону и их свойства

Энтропия и ее свойства

В курсе теории вероятностей до сих пор мы находили вероятности случайных событий. Теперь обратим внимание на неопределенность связанных с этими событиями опытов. Интуитивно ясно, что степень неопределенности (неожиданности) при подбрасывании монеты или игрального кубика различна. Для практики важно уметь численно оценивать степень неопределенности самых разнообразных опытов, чтобы иметь возможность сравнивать их с этой стороны.

Пусть $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$ – случайный n-вектор, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Определение 3.13. Энтропией $H\{\xi\}$ случайного вектора ξ *называется теоретико-информационная мера степени неопределенности этой случайной величины, которая определяется равенством:*

$$H\{\xi\} = \mathbf{E}\{-ln\, p_\xi(\xi)\}. \tag{3.46}$$

В физике это мера беспорядка (неопределенности): чем больше неопределенность, тем больше энтропия.

Если $\xi \in \mathbb{R}^n$ – непрерывный случайный вектор, имеющий плотность распределения вероятностей $p_\xi(x), x \in \mathbb{R}^n$, то

$$H\{\xi\} = -\int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(x) ln\, p_\xi(x) dx. \tag{3.47}$$

Если $\xi \in \{a_1, \ldots, a_N\}$ – дискретный случайный вектор, то

$$H\{\xi\} = -\sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}\{\xi = a_k\} \cdot ln\mathbf{P}\{\xi = a_k\}. \tag{3.48}$$

Свойства энтропии

Свойство С1. Энтропия составного случайного вектора:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \ldots \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

не превосходит суммы энтропий каждого из подвекторов:

$$H\{\xi, \eta\} \leq H\{\xi\} + H\{\eta\}. \tag{3.49}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Йенсена (3.23)и вычислим разность между правой и левой частями (3.49) с учетом определения (3.46). Получим:

$$H\{\xi\} + H\{\eta\} - H\{\xi,\eta\} = \mathbf{E}\left\{-\ln \frac{p_\xi(\xi)p_\eta(\eta)}{p_{\xi,\eta}(\xi,\eta)}\right\}.$$

Функция $z = -\ln(y)$ выпуклая, и по неравенству Йенсена:

$$\mathbf{E}\left\{-\ln \frac{p_\xi(\xi)p_\eta(\eta)}{p_{\xi,\eta}(\xi,\eta)}\right\} \geq -\ln \mathbf{E}\left\{\frac{p_\xi(\xi)p_\eta(\eta)}{p_{\xi,\eta}(\xi,\eta)}\right\} =$$

$$= -\ln \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^m} p_{\xi,\eta}(x,y)\frac{p_\xi(x)p_\eta(y)}{p_{\xi,\eta}(x,y)}dxdy = -\ln 1 = 0.$$

□

Свойство С2. Если ξ и η – независимые случайные векторы, то

$$H\{\xi,\eta\} = H\{\xi\} + H\{\eta\}.$$

Доказательство. По критерию независимости имеем

$$p_{\xi,\eta}(\xi,\eta) = p_\xi(\xi)\cdot p_\eta(\eta)$$

в доказательстве свойства **С1**, и тогда получим точное равенство. □

Количество информации по Шэннону и ее свойства

Определение 3.14. Количеством информации по Шэннону*, содержащейся в случайном векторе ξ о случайном векторе η, называется величина*

$$I\{\xi,\eta\} = H\{\xi\} + H\{\eta\} - H\{\xi,\eta\}.$$

Свойства количества информации по Шэннону

Свойство С1.

$$I\{\xi,\eta\} \geq 0.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться свойством **С1** энтропии. □

Свойство С2. $I\{\xi,\eta\}$ – симметричный функционал, то есть:

$$I\{\xi,\eta\} = I\{\eta,\xi\}.$$

Свойство С3. Если ξ,η – независимы, то каждая из них несет нулевую информацию о другой случайной величине, то есть

$$I\{\xi,\eta\} = 0.$$

Доказательство. Достаточно применить свойство **С2** энтропии. □

3.9 Характеристики формы и расположения

Мода случайной величины

Определение 3.15. *Пусть* ξ *– непрерывная случайная величина с плотностью распределения* $p_\xi(x)$. *Тогда точка* M, *в которой* $p_\xi(x)$ *достигает максимума называется* модой распределения вероятностей*:*

$$M = arg\ \max_x p_\xi(x).$$

Определение 3.16. *Пусть* $\xi \in \{a_1, \ldots, a_N\}$ *– дискретная случайная величина и* $\mathbf{P}\{\xi = a_i\} = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. *Тогда* модой *называется то значение* M *случайной величины* ξ, *для которой*

$$\mathbf{P}\{\xi = M\} = arg\ \max_i\ p_i.$$

Квантиль уровня p

Определение 3.17. *Пусть* ξ *– случайная величина с функцией распределения* $F(x), 0 \leq p \leq 1$. *Тогда наименьший корень уравнения*

$$F(z) = p$$

обозначается $z_p = F^{-1}(p)$ *и называется* квантилью уровня p.

Определение 3.18. *Квантиль уровня* $p = 1/2$ $(z_{0.5} = m)$ *называется* медианой распределения вероятностей.

Для медианы характерно свойство:

$$\mathbf{P}\{\xi < m\} = \mathbf{P}\{\xi \geq m\} = 1/2.$$

Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Определение 3.19. *Пусть случайная величина* ξ *имеет конечные моменты до четвертого включительно. Тогда величина*

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^3}{\sqrt{(\mathbf{D}\{\xi\})^3}},$$

называется коэффициентом асимметрии*, а величина*

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\{\xi\})^4}{(\mathbf{D}\{\xi\})^2} - 3 \quad -$$

коэффициентом эксцесса *ее распределения.*

Эти величины характеризуют степень отличия функции распределения $F(x)$ случайной величины ξ от функции распределения $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения, для которого коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю.

3.10 Характеристическая функция и ее свойства

Определение 3.20. *Пусть*

$$\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R} -$$

произвольная случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *и имеющая функцию распределения*

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}, x \in \mathbb{R}.$$

Тогда характеристической функцией *случайной величины* ξ *называется комплекснозначная функция действительной переменной* t*, задаваемая соотношением:*

$$f_\xi(t) = \mathbf{E}\{e^{it\xi}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x), t \in \mathbb{R}, f_\xi(t) \in \mathbb{C}. \tag{3.50}$$

В соотношении (3.50): i – мнимая единица, интеграл в правой части – интеграл Лебега-Стилтьеса, а математическое ожидание $\mathbf{E}\{e^{it\xi}\}$ вычисляется с помощью формулы Эйлера:

$$\mathbf{E}\{e^{it\xi}\} = \mathbf{E}\{\cos(t\xi)\} + i\mathbf{E}\{\sin(t\xi)\}. \tag{3.51}$$

Для практических вычислений удобны формулы:

$$f_\xi(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{ita_k} \cdot \mathbf{P}\{\xi = a_k\}, \tag{3.52}$$

если $\xi \in \{a_1, \ldots, a_N\}$ – дискретная случайная величина, $N \leq +\infty$ и

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_\xi(x) dx, \tag{3.53}$$

если ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения вероятностей

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x).$$

Замечание 3.3. *Из формулы* (*3.53*) *видно, что* $f_\xi(t)$ *– преобразование Фурье от плотности распределения вероятностей.*

Свойства характеристической функции

Свойство С1. Характеристическая функция $f_\xi(t)$ ограничена, а именно: для любого $t \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|f_\xi(t)| \leq 1, \tag{3.54}$$

причем $f_\xi(0) = 1$.

Доказательство. Положив $t = 0$ в (3.50) получим

$$f_\xi(0) = \mathbf{E}\{e^{i\cdot 0}\} = 1.$$

Для доказательства (3.54) оценим левую часть этого неравенства. По свойству математического ожидания имеем:

$$|\mathbf{E}\{e^{it\xi}\}| \leq \mathbf{E}\{|e^{it\xi}|\} = 1.$$

□

Следствие 3.16. *Характеристическая функция существует для любой случайной величины.*

Свойство С2. При комплексном сопряжении характеристическая функция изменяется следующим образом:

$$\overline{f_\xi(t)} = f_\xi(-t) = f_{-\xi}(t), \tag{3.55}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Согласно формулам (3.50) и (3.51), имеем:

$$\overline{f_\xi(t)} = \mathbf{E}\{e^{-it\xi}\} \equiv \mathbf{E}\{e^{i(-t)\xi}\} \equiv \mathbf{E}\{e^{it(-\xi)}\}.$$

□

Следствие 3.17. *Если характеристическая функция действительна, то она четна.*

Доказательство. Мнимая часть $f_\xi(t)$ равна нулю, следовательно, согласно (3.55)

$$\overline{f_\xi(t)} = f_\xi(t) = f_\xi(-t).$$

□

Свойство С3. При линейном преобразовании $\eta = a + b\xi$, где a и b любые постоянные, характеристическая функция изменяется следующим образом:

$$f_{a+b\xi}(t) = e^{ita} f_\xi(bt). \tag{3.56}$$

Доказательство. Из (3.50) и свойств математического ожидания имеем:

$$f_{a+b\xi}(t) = \mathbf{E}\{e^{it(a+b\xi)}\} = \mathbf{E}\{e^{ita} \cdot e^{i(bt)\xi}\} = e^{ita} f_\xi(bt).$$

□

Свойство С4. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые в совокупности случайные величины, определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Характеристическая функция суммы этих случайных величин $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ равна произведению их характеристических функций:

$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(t), t \in \mathbb{R}. \tag{3.57}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (3.50) и свойством мультипликативности математического ожидания. Имеем:

$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \mathbf{E}\{e^{it(\xi_1+\ldots+\xi_n)}\} \equiv \mathbf{E}\Big\{\prod_{k=1}^{n} e^{it\xi_k}\Big\}.$$

Так как все сомножители (случайные величины $e^{it\xi_1}, \ldots, e^{it\xi_n}$) независимы в совокупности,

$$\mathbf{E}\Big\{\prod_{k=1}^{n} e^{it\xi_k}\Big\} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\{e^{it\xi_k}\}$$

и, следовательно, так как

$$f_{\xi_k}(t) = \mathbf{E}\{e^{it\xi_k}\}, k = 1, 2, \ldots, n,$$

справедливо равенство (3.57). □

Следствие 3.18. *Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые в совокупности и одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией $f_\xi(t)$, то*

$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = (f_\xi(t))^n, t \in \mathbb{R}. \tag{3.58}$$

Свойство C5. Характеристическая функция равномерно непрерывна на всей числовой прямой, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|f_\xi(t+\delta) - f_\xi(t)| \leq \varepsilon, \tag{3.59}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Выберем произвольно $\varepsilon > 0, t \in \mathbb{R}$, и, пока произвольные, $\delta > 0, x^* > 0$. Можем записать следующую цепочку неравенств:

$$|f_\xi(t+\delta) - f_\xi(t)| = \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}(e^{i\delta x} - 1)dF_\xi(x)\Big| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| \cdot |e^{i\delta x} - 1|dF_\xi(x) =$$

$$= \int_{|x|<x^\star} |e^{i\delta x} - 1|dF_\xi(x) + \int_{|x|\geq\leq x^\star} |e^{i\delta x} - 1|dF_\xi(x)$$
$$\leq I(\delta, x^\star) + 2\mathbf{P}\{|\xi| \geq x^\star\}.$$

Так как

$$2\mathbf{P}\{|\xi| \geq x^\star\} = 2(1 - F_{|\xi|}(x^\star))$$

и

$$F_{|\xi|}(+\infty) = 1,$$

то найдется $x^\star = x^\star(\varepsilon)$ такое, что:

$$2(1 - F_{|\xi|}(x^\star)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

При фиксированном $x^\star$ и $\delta \to 0$:

$$I(\delta, x^\star) \to 0.$$

Следовательно, найдется $\delta = \delta_1(\varepsilon, x^\star(\varepsilon)) =:: \delta(\varepsilon)$:

$$I(\delta, x^\star) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

В результате получаем неравенство (3.59). □

Свойство С6 (Связь характеристической функции с моментами). Пусть для некоторого натурального $k \in \mathbb{N}$ существует ограниченный начальный момент k-го порядка $\nu_k = \mathbf{E}\{\xi^k\}$. Тогда характеристическая функция $f_\xi(t)$ непрерывно дифференцируема k раз, причем выполняется следующее соотношение:

$$f_\xi^{(k)}(0) = i^k \cdot \nu_k. \tag{3.60}$$

Доказательство. Так как начальный момент k-го порядка $\nu_k = \mathbf{E}\{\xi^k\}$ – ограниченная величина, то

$$\mathbf{E}\{|\xi|^k\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k dF_\xi(x) < +\infty. \tag{3.61}$$

Поэтому из неравенства Ляпунова следует, что $\mathbf{E}|\xi|^r < \infty$ при $r < k$.

Так как

$$\frac{f_\xi(t+h) - f_\xi(t)}{h} = \mathbf{E}\Big\{e^{it\xi}\Big(\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\Big)\Big\}$$

и при $h \to 0$ имеет место

$$\frac{e^{ih\xi}-1}{h} \to i\xi,$$

то из неравенства

$$\Big|e^{it\xi}\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\Big| \leq |\xi|$$

и теоремы Лебега о сходимости мажорируемой последовательности имеем:

$$\mathbf{E}\Big\{e^{it\xi}\Big(\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\Big)\Big\} \xrightarrow[h\to 0]{} \mathbf{E}\Big\{i\xi e^{it\xi}\Big\}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{f_\xi(t+h) - f_\xi(t)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'_\xi(t) = i\mathbf{E}\left\{\xi e^{it\xi}\right\},$$

что совпадает с (3.60) при $k = 1$.

Существование производных $f^{(r)}(t), 1 < r \leq k$, и справедливость равенства (3.60) устанавливаются по индукции.

Проведенное доказательство обосновывает формальное дифференцирование интегрального соотношения (3.50) k раз по параметру t:

$$f_\xi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx} dF_\xi(x), t \in \mathbb{R}. \tag{3.62}$$

Непрерывность функции $f_\xi^{(k)}(t)$ доказывается как в свойстве **С5**. □

Следствие 3.19. *Справедлива следующая удобная формула для вычисления начального момента k-того порядка:*

$$\nu_k = \frac{1}{i^k} f_\xi^{(k)}(0), k \in \mathbb{N}. \tag{3.63}$$

Следствие 3.20. *Если конечен момент ν_k, то в окрестности точки $t = 0$ характеристическая функция допускает следующее разложение в виде степенного ряда:*

$$f_\xi(t) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{(it)^j}{j!} \cdot \nu_j + o(|t|^k).$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться формулой Тейлора и формулой (3.60). □

Свойство C7 (Теорема обращения для характеристической функции).

Теорема 3.2. *Пусть $\xi = \xi(\omega)$ – произвольная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, имеющая некоторую функцию распределения $F_\xi(x)$ и характеристическую функцию $f_\xi(t)$. Пусть $C(F_\xi) \subseteq \mathbb{R}$ – множество точек непрерывности функции распределения $F_\xi(\cdot)$ и $x_1, x_2 \in C(F_\xi), x_1 < x_2$. Тогда справедлива следующая формула обращения:*

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f_\xi(t)\ dt. \tag{3.64}$$

Доказательство. Из определения характеристической функции $f_\xi(t)$ имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
Q(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{\mathbf{T}} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f_\xi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{\mathbf{T}} \Big(\frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x) \Big) dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-T}^{\mathbf{T}} \frac{e^{i(x-x_1)t} - e^{i(x-x_2)t}}{it} \Big) dF_\xi(x) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-T}^{\mathbf{T}} \frac{\sin t(x-x_1) - \sin t(x-x_2)}{t} dt \Big) dF_\xi(x) = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{0}^{\mathbf{T}} \frac{\sin t(x-x_1) - \sin t(x-x_2)}{t} dt \Big) dF_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{T(x-x_2)}^{T(x-x_1)} \frac{\sin u}{u} du \Big) dF_\xi(x).
\end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{\mathbf{T}} \frac{sin\ u}{u} du = \pi,$$

то

$$\psi(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T(x-x_2)}^{T(x-x_1)} \frac{sin\ u}{u} du = \begin{cases} 0, x < x_1 \vee x > x_2, \\ \frac{1}{2}, x = x_1 \vee x = x_2, \\ 1, x_1 < x < x_2. \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$\lim_{T \to \infty} Q(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dF_\xi(x) = \mathbf{E}\{\psi(\xi)\} = \frac{1}{2}\mathbf{P}\{\xi = x_1\} + \frac{1}{2}\mathbf{P}\{\xi = x_2\} + \mathbf{P}\{x_1 < \xi < x_2\}.$$

Поскольку x_1, x_2 – точки непрерывности функции $F_\xi(x)$, то

$$\mathbf{P}\{\xi = x_1\} = 0,\ \mathbf{P}\{\xi = x_2\} = 0$$

и

$$\lim_{T\to\infty} Q(T) = \mathbf{P}\{x_1 < \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1).$$

$\square$

Формула (3.64) обратна к (3.50). Действительно в (3.50) приращению $dF_\xi(\cdot)$ ставится в соответствие характеристическая функция $f_\xi(\cdot)$, а в (3.64) функции $f_\xi(\cdot)$ ставится в соответствие приращение $\Delta F_\xi(\cdot)$.

Свойство С8 (Теорема единственности для характеристической функции).

Теорема 3.3. *Функция распределения $F_\xi(\cdot)$ и характеристическая функция $f_\xi(\cdot)$ находятся во взаимно однозначном соответствии:*

$$F_\xi(\cdot) \Leftrightarrow f_\xi(\cdot).$$

Доказательство. 1 Пусть задана функция распределения $F_\xi(\cdot)$. Тогда характеристическая функция однозначно определяется формулой (3.50).

2 Пусть задана $f_\xi(\cdot)$. Тогда воспользуемся формулой обращения (3.64) и разобьем область определения $D(F_\xi)$ функции распределения $F_\xi(\cdot)$ на два непересекающихся подмножества:

$$D(F_\xi) = C(F_\xi) \cup C_0(F_\xi),$$

где $C(F_\xi)$ – множество точек непрерывности функции распределения, $C_0(F_\xi)$ – множество точек разрыва. Рассмотрим два случая:

– Пусть $y \in C(F_\xi)$ (y – точка непрерывности). В (3.64) устремим $x \to -\infty$, тогда $F_\xi(-\infty) = 0$. По (3.64) имеем:

$$F_\xi(y) = \lim_{x\to-\infty} \lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} f_\xi(t)dt. \tag{3.65}$$

Таким образом функция распределения восстанавливается на $C(F_\xi)$.

– При $z \in C_0(F_\xi)$ воспользуемся свойством непрерывности слева:

$$F_\xi(z) = F_\xi(z - 0).$$

Тем самым восстановим функцию распределения всюду.

$\square$

Замечание 3.4. *Справедливо взаимнооднозначное соответствие:*

$$\mathbf{P}_\xi(\cdot) \Leftrightarrow F_\xi(\cdot) \Leftrightarrow f_\xi(\cdot).$$

Следствие 3.21. *Если случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ имеет абсолютно непрерывное распределение вероятностей с некоторой плотностью распределения $p_\xi(x), x \in \mathbb{R}$, то плотность распределения вероятностей $p_\xi(\cdot)$ и характеристическая функция $f_\xi(\cdot)$ находятся во взаимно однозначном соответствии, и это взаимно однозначное соответствие задается парой преобразования Фурье:*

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_\xi(x)dx =:: \mathit{\Phi}\{p_\xi(\cdot)\}, t \in \mathbb{R}. \tag{3.66}$$

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f_\xi(t)dt =:: \varPhi^{-1}\{f_\xi(\cdot)\}, x \in \mathbb{R}. \tag{3.67}$$

Доказательство. Соотношение (3.66) – это фактически (3.53), а (3.67) получается дифференцированием (3.65). □

Свойство С9 (Теорема Бохнера-Хинчина). Пусть $f(t), t \in \mathbb{R}$, – произвольная комплекснозначная непрерывная ограниченная функция, такая, что $f(0) = 1$. Для того, чтобы функция $f(t)$ являлась характеристической функцией некоторой случайной величины, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была неотрицательно определенной, то есть для любых $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ была неотрицательной следующая квадратичная форма:

$$Q = \sum_{j,k=1}^{n} f(t_j - t_k)\lambda_j \cdot \overline{\lambda_k} \geq 0. \tag{3.68}$$

Доказательство. Необходимость. Покажем, что выполняется (3.68). Пусть $f(t) = \mathbf{E}\{e^{it\xi}\}$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Подставим в правую часть (3.68) это выражение и проведем эквивалентные преобразования, используя свойства математического ожидания:

$$Q = \sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{E}\{e^{i(t_j - t_k)\xi}\}\lambda_j \cdot \overline{\lambda_k} = \mathbf{E}\Big\{\sum_{j=1}^{n} e^{it_j\xi}\lambda_j \cdot \overline{\sum_{k=1}^{n} e^{it_k\xi}\lambda_k}\Big\} = \mathbf{E}\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{n} e^{it_j\xi}\lambda_j\Big|^2\Big\} \geq 0.$$

Достаточность. Провести самостоятельно. □

Свойство С10 (Свойство Марцинкевича). Пусть для некоторой случайной величины ξ характеристическая функция имеет вид:

$$f_\xi(t) = e^{P_m(t)}, t \in \mathbb{R},$$

где $P_m(t)$ – некоторый многочлен степени m от переменной t. Тогда необходимо, чтобы $m \leq 2$.

Кумулянтная функция. Производящая функция

Определение 3.21. Кумулянтной функцией (семиинвариантной функцией) *случайной величины ξ называется функция*

$$\varphi_\xi(t) = ln f_\xi(t).$$

Определение 3.22. *Пусть ξ – некоторая неотрицательная целочисленная случайная величина $\xi \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ с некоторым дискретным распределением вероятностей:*

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}, k \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Производящей функцией *случайной величины ξ называется комплекснозначная функция комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$, определенная в круге $|z| \leq 1$ в виде функционального ряда следующим образом:*

$$g(z) = \mathbf{E}\{z^\xi\} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \cdot p_k.$$

Производящая функция и характеристическая функция связаны соотношением:

$$f_\xi(t) = g(e^{it}), t \in \mathbb{R}.$$

4 Случайные последовательности

4.1 Определение случайной последовательности и видов сходимости случайных последовательностей

Случайной последовательностью $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\}$, *определенной на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где $\xi_k = \xi_k(\omega) \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, $k = 1, 2, \ldots$, называется счетное параметрическое семейство случайных величин

$$\xi_1 = \xi_1(\omega), \xi_2 = \xi_2(\omega), \ldots,$$

заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$; при этом параметр $k \in \mathbb{N}$ этого семейства пробегает все множество натуральных чисел.

Под реализацией случайной последовательности $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\}$ понимают конкретные числовые значения, которые случайные величины рассматриваемой последовательности принимают в конкретном эксперименте, то есть реализация случайной последовательности — обычная числовая последовательность.

При изучении последовательностей случайных величин, как и при изучении детерминированных последовательностей, главным вопросом является вопрос о сходимости. Однако нельзя свести понятие сходимости случайных последовательностей к сходимости числовой последовательности, так как каждая случайная последовательность имеет бесконечно много реализаций. В теории вероятностей существует четыре основных вида сходимости.

1. Сходимость по распределению. Пусть $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ — некоторая случайная последовательность, определенная на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\{F_{\xi_1}(x), F_{\xi_2}(x), \ldots\}$, $x \in \mathbb{R}$ — последовательность соответствующих функций распределения, $\xi = \xi(\omega)$ — некоторая случайная величина, которая может быть определена и на другом вероятностном пространстве, а $F_\xi(x), x \in \mathbb{R}$ — соответствующая этой случайной величине функция распределения. Обозначим через $C(F_\xi) \subseteq \mathbb{R}$ множество точек непрерывности функции $F_\xi(\cdot)$. Принято говорить, что *случайная последовательность* $\{\xi_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ при $k \to \infty$ *сходится к случайной величине* ξ *по распределению* (*Distribution*):

$$\xi_k \xrightarrow{D} \xi,$$

если для любого $x \in C(F_\xi)$ имеет место сходимость последовательности функций распределения $\{F_{\xi_k}(x), k = 1, 2, \ldots\}$ к функции распределения $F_\xi(x)$, то есть если выполняется соотношение:

$$\lim_{k\to\infty} F_{\xi_k}(x) = F_\xi(x),\ x \in C(F_\xi). \tag{4.1}$$

Пример 4.1. *Рассмотрим последовательность гауссовских случайных величин* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$*:*

$$\mathcal{L}\{\xi_k\} = \mathcal{N}(\mu + \frac{1}{k}b, \sigma),\ k = 1, 2, \ldots.$$

При $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} F_{\xi_k}(x) = F_\xi(x),$$

где $F_\xi(x)$ *— функция распределения случайной величины* ξ*, распределенной по закону* $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$*, то есть при* $k \to \infty$

$$\xi_k \xrightarrow{D} \xi, \ \ \textit{где}\ \ \mathcal{L}\{\xi\} = \mathcal{N}(\mu,\sigma),$$

2. Сходимость по вероятности. Пусть на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены случайная последовательность $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\}$ и случайная величина ξ. Говорят, что *случайная последовательность* $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\}$ *при* $k \to \infty$ *сходится к случайной величине* ξ *по вероятности* (*Probability*):

$$\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi,$$

если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} = 0. \tag{4.2}$$

Пример 4.2. *Для случайная последовательность* $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\}$*, элементы которой определены равенствами*

$$\xi_k = \xi + \frac{1}{k}\eta, k = 1, 2, \ldots,$$

где η *— нукоторая ограниченная случайная величина (*$|\eta| < \infty$*), справедлива при* $k \to \infty$ *сходимость*

$$\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi.$$

Сходимость по вероятности является характеристикой одной случайной величины ξ_k с бесконечно большим номером $k \to \infty$ и ее значения с вероятностью, стремящейся к 1, как угодно мало отличаются от значений предельной случайной величины ξ.

3. Сходимость в среднем порядка r. Пусть на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определена случайная последовательность $\{\xi_k = \xi_k(\omega), k = 1, 2, \ldots\}$ и случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, $r \in \mathbb{N}$ — произвольное фиксированное натуральное число. Говорят, что *случайная последовательность* $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\}$ *при* $k \to \infty$ *сходится к случайной величине* ξ *в среднем порядка* r:

$$\xi_k \xrightarrow{L_r} \xi,$$

если ограничены абсолютные моменты порядка r:

$$\mathbf{E}\{|\xi_k|^r\} < +\infty, \quad \mathbf{E}\{|\xi|^r\} < +\infty,$$

и выполняется предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\{|\xi_k - \xi|^r\} = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)|^r \mathbf{P}(d\omega) = 0. \tag{4.3}$$

Если $r = 2$, то L_2-сходимость называется *сходимостью в среднем квадратичном* и обозначается:

$$\xi_k \xrightarrow{\text{ср.кв.}} \xi \ \ \text{либо}\ \ l.i.m.\xi_k = \xi \quad (\underline{\text{l}}\text{imit } \underline{\text{i}}\text{n the } \underline{\text{m}}\text{ean}).$$

4. Сходимость почти наверное. Пусть на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены случайная последовательность $\{\xi_k = \xi_k(\omega), k = 1, 2, \dots\}$ и случайная величина $\xi = \xi(\omega)$. Принято говорить, что случайная последовательность $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots\}$ при $k \to \infty$ *сходится к случайной величине* ξ *почти наверное* (*почти всюду, с вероятностью 1*):

$$\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi, \text{ либо } \xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}=1} \xi, \text{ либо } \xi_k \longrightarrow \xi (\text{P - п.в.}),$$

если выполняется предельное соотношение:

$$\mathbf{P}\{\omega : \lim_{k\to\infty} \xi_k(\omega) = \xi(\omega)\} = 1. \tag{4.4}$$

Сходимость «почти наверное» является характеристикой всей случайной последовательности $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots\}$ и по смыслу наиболее приближен к понятию обычной сходимости числовой последовательности. Сходимость

$$\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$$

означает, что любая конкретная реализация случайной последовательности $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots\}$ сходится в обычном числовом смысле к некоторому пределу, то есть обычному числу, и множество этих пределов образует допустимых значений случайной величины ξ.

В ситуации, когда заранее известно, что

$$\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$$

и требуется оценить $\mathbf{E}\{\xi^r\}$, пользуются сходимостью в среднем порядка r.

4.2 Сходимость почти наверное. Закон $0 \vee 1$ Бореля

Критерий сходимости почти наверное

Для произвольного $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение вспомогательную последовательность случайных событий:

$$A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, что если $\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то существует номер $k^* = k^*(\varepsilon, \omega)$ такой, что для любого $k \geq k^*$ будет справедливо

$$|\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon.$$

Теорема 4.1 (Об эквивалентных определениях сходимости почти наверное)**.** *Пусть на одном и том же вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *определены случайная последовательность*

$$\{\xi_1, \xi_2, \ldots\},$$

случайная величина ξ *и последовательность случайных событий*

$$A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\},$$

где ε *— произвольное положительное число. Тогда справедлива следующая цепочка эквивалентных определений сходимости почти наверное:*

$$\begin{gathered}\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n^\varepsilon\Big) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(\overline{\lim_{k\to\infty}}\, A_k^\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{n \geq k} |\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Доказательство. Обозначим через Ω_0 область несходимости почти наверное случайной последовательности $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ к случайной величине ξ:

$$\Omega_0 = \left\{\omega : \lim_{k\to\infty} \xi_k(\omega) \neq \xi(\omega)\right\}.$$

Следовательно, если $\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то $\mathbf{P}(\Omega_0) = 0$, и,согласно определению сходимости почти наверное, справедливы импликации:

$$\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \mathbf{P}(\Omega_0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(\Omega \backslash \Omega_0) = 1,$$

где

$$\{\Omega \backslash \Omega_0\} = \left\{\omega : \lim_{k\to\infty} \xi_k(\omega) = \xi(\omega)\right\}.$$

Так как $\overline{A_k^\varepsilon} = \{\omega : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \leq \varepsilon\}$, то очевидно, что

$$\{\Omega \backslash \Omega_0\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \overline{A_n^\varepsilon}$$

или

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n^\varepsilon \subseteq \Omega_0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n^{\varepsilon}\right\} \le \mathbf{P}\left\{\Omega_0\right\} = 0$$

и

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} \overline{A_n^{\varepsilon}}\right\} = 0.$$

Таким образом,

$$\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n^{\varepsilon}\Big) = 0.$$

Так как

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n^{\varepsilon} = \varlimsup_{k\to\infty} A_k^{\varepsilon},$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\varlimsup_{k\to\infty} A_k^{\varepsilon}\right\} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n^{\varepsilon}\Big) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(\varlimsup_{k\to\infty} A_k^{\varepsilon}) = 0.$$

Для доказательства импликации

$$\mathbf{P}(\varlimsup_{k\to\infty} A_k^{\varepsilon}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{n\ge k}|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0$$

введем вспомогательную последовательность монотонно убывающую последовательность случайных событий:

$$B_k^{\varepsilon} = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n^{\varepsilon},\ k = 1, 2, \ldots,$$

для которой существует предел

$$\lim_{k\to\infty} B_k^{\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^{\varepsilon},$$

и воспользуемся аксиомой непрерывности вероятностной меры:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(B_k^{\varepsilon}) = \mathbf{P}(\lim_{k\to\infty} B_k^{\varepsilon}) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n^{\varepsilon}\Big) = \mathbf{P}(\varlimsup_{k\to\infty} A_k^{\varepsilon}) = 0.$$

Так как по построению

$$B_k^{\varepsilon} \equiv \{\omega : \sup_{n\ge k}|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\},$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{n\ge k}|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\varlimsup_{k\to\infty} A_k^{\varepsilon}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{n\ge k}|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

$\square$

Следствие 4.1. *Если для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} < +\infty,$$

то $\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Доказательство. В силу последнего утверждения теоремы 4.1 и свойства (1.22) вероятностной меры имеем:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{n\geq k} |\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

Здесь учтено, что остаток сходящегося ряда стремится к нулю. □

Теорема 4.2 (Критерий Коши сходимости почти наверное)**.** *Для того, чтобы случайная последовательность $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ сходилась почти наверное, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной (последовательностью Коши) в смысле сходимости почти наверное, то есть для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{m,n\geq k} |\xi_m - \xi_n| > \varepsilon\} = 0.$$

Доказательство. Результат этой теоремы вытекает из критерия Коши сходимости числовой последовательности и схемы доказательства теоремы 4.1. □

Достаточные признаки сходимости почти наверное

Теорема 4.3 (Первый достаточный признак сходимости почти наверное)**.** *Если при произвольном $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 наступает лишь конечное число случайных событий среди*

$$A_k = \{\omega : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}, k \in \mathbb{N},$$

то имеет место сходимость почти наверное, то есть

$$\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi.$$

Доказательство. Рассмотрим предельное случайное событие

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \{\text{наступает бесконечно много случайных событий среди}\{A_k\}\}.$$

Тогда, так как, согласно условию теоремы, при произвольном $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 наступает лишь конечное число случайных событий среди

$$A_k = \{\omega : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}, k \in \mathbb{N},$$

то

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k\} = 0.$$

Таким образом. из теоремы 4.1 следует, что

$$\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi.$$

□

Лемма 1 (Лемма Бореля - Кантелли). *Пусть на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *определена произвольная последовательность случайных событий*

$$A_k \in \mathcal{F}, k = 1, 2, \ldots$$

и предельное случайное событие

$$A = \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Тогда справедливы следующие два утверждения:

– *если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n),$$

то $\mathbf{P}(A) = 0$;

– *если этот ряд расходится, и вдобавок события* $\{A_k, k = 1, 2, \ldots\}$ *независимы в совокупности, то*

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

Доказательство. Докажем п е р в о е утверждение. Для любого $k \in \mathbb{N}$

$$A \subseteq \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Следовательно:

$$\mathbf{P}(A) \le \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \tag{4.6}$$

так как правая часть (4.6) — остаток сходящегося ряда и выбором k эта сумма может быть сделана сколь угодно малой, то есть $\mathbf{P}(A) = 0$.

Перейдем к доказательству в т о р о г о утверждения. Поскольку

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{F},$$

то

$$\overline{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \overline{A}_n \in \mathcal{F},$$

и

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \overline{A}_n\right\} \ge 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=k}^{\infty} \overline{A_n}\Big) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=k}^{\infty} \Big(1 - \mathbf{P}(A_n)\Big).$$

Далее, используя справедливое при $x \in [0, 1]$ неравенство

$$\ln(1 - x) \le -x,$$

получаем

$$\ln\left(1 - \mathbf{P}(A_n)\right) \le -\mathbf{P}(A_n),$$

откуда
$$1 - \mathbf{P}(A_n) \le e^{-\mathbf{P}(A_n)}$$
и
$$\prod_{n=k}^{\infty}\Big(1 - \mathbf{P}(A_n)\Big) \le e^{-\sum_{n=k}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)}.$$
Так как
$$\sum_{n=k}^{\infty}\mathbf{P}(A_n) \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty,$$
то
$$\prod_{n=k}^{\infty}\Big(1 - \mathbf{P}(A_n)\Big) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$
Поэтому
$$\mathbf{P}(A) \ge 1,$$
что означает
$$\mathbf{P}(A) = 1.$$
□

Следствие 4.2. (Закон $0 \vee 1$ Бореля). *Пусть на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *определена произвольная последовательность независимых в совокупности случайных событий* $\{A_k, k = 1, 2, \ldots\}$ *и предельное случайное событие*
$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n =$$
$$= \{\textit{наступает бесконечно много случайных событий среди}\{A_k, k = 1, 2, \ldots\}\}.$$
Тогда $\mathbf{P}(A) = 0 \vee 1$ *в зависимости от того сходится или расходится ряд, составленный из вероятностей этих событий.*

Теорема 4.4 (Второй достаточный признак сходимости почти наверное)**.** *Для того, чтобы случайная последовательность* $\{\xi_k = \xi_k(\omega), k = 1, 2, \ldots\}$ *на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *имела предел в смысле почти наверное, достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная числовая последовательность* $\{\varepsilon_k : \varepsilon_k \ge 0, k = 1, 2, \ldots\}$, *что имеет место сходимость двух рядов*
$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k < +\infty,$$
$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{|\xi_{k+1} - \xi_k| > \varepsilon_k\} < +\infty.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательную последовательность случайных событий:
$$A_k = \{\omega : |\xi_{k+1} - \xi_k| > \varepsilon_k\},\ k = 1, 2, \ldots,$$

и введем предельное событие:
$$A = \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$
Воспользуемся первым утверждением леммы Бореля-Кантелли. В силу условий теоремы, ряд S_2 сходится, следовательно

$$\mathbf{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbf{P}(\overline{A}) = 1.$$

Для произвольного $\omega \in \overline{A}$ $(\mathbf{P}(\overline{A}) = 1)$ запишем тождество

$$\xi_k \equiv \xi_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (\xi_{n+1} - \xi_n). \tag{4.7}$$

Для любого элементарного события ω, благоприятствующего случайному событию $\overline{A_n}$ ($\omega \in \overline{A}$), существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \geq N$ наступает $\overline{A_n}$, то есть

$$|\xi_{n+1} - \xi_n| \leq \varepsilon_n.$$

По условию доказываемой теоремы ряд S_1 сходится, то есть в правой части (4.7) члены ряда мажорируются элементами сходящегося ряда, следовательно, ряд справа сходится, то есть существует предел при $k \to \infty$. Значит, существует предел левой части (4.7). Таким образом, для любого $\omega \in \overline{A}$ $(\mathbf{P}(\overline{A}) = 1)$ существует

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k(\omega).$$

Иначе говоря, предел существует на множестве меры 1. Следовательно, согласно определению сходимости почти наверное, случайная последовательность $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\}$ сходится почти наверное. $\square$

4.3 Сходимость по вероятности

Соотношение между сходимостью по вероятности и сходимостью почти наверное

Теорема 4.5. *Из сходимости почти наверное вытекает сходимость по вероятности.*

Доказательство. Пусть $\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. Покажем, что в этом случае для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

Действительно:

$$\mathbf{P}\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} \le \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\ge k}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}\Big\}\ \forall\varepsilon > 0.$$

Однако, согласно теореме об эквивалентных определениях сходимости почти наверное для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\ge k}\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}\Big\} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{n\ge k}|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

Следовательно:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} = 0,$$

что и означает:

$$\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi.$$

□

Критерий Коши сходимости по вероятности

Лемма 2. *Для любых случайных величин ξ, η, ζ, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:*

$$\mathbf{P}\{|\xi - \eta| > \varepsilon\} \le \mathbf{P}\Big\{|\xi - \zeta| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} + \mathbf{P}\Big\{|\zeta - \eta| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Так как

$$|\xi - \zeta| \equiv |(\xi - \zeta) + (\zeta - \eta)| \le |\xi - \zeta| + |\zeta - \eta|,$$

то имеем следующее соотношение между случайными событиями:

$$\Big\{|\xi - \zeta| \le \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\bigcap\Big\{|\zeta - \eta| \le \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \subseteq \Big\{|\xi - \eta| \le \varepsilon\Big\}.$$

Переходя к противоположным событиям, по правилу де Моргана имеем:

$$\Big\{|\xi - \eta| > \varepsilon\Big\} \subseteq \Big\{|\xi - \zeta| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\bigcup\Big\{|\zeta - \eta| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}.$$

Из последнего неравенства, учитывая свойства вероятностной меры, получаем:

$$\mathbf{P}\Big\{|\xi - \eta| > \varepsilon\Big\} \le \mathbf{P}\Big\{\Big\{|\xi - \zeta| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\bigcup\Big\{|\zeta - \eta| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big\} \le \mathbf{P}\Big\{|\xi - \zeta| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} + \mathbf{P}\Big\{|\zeta - \eta| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}.$$

□

Теорема 4.6 (Критерий Коши сходимости по вероятности)**.** *Для того, чтобы случайная последовательность* $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\}$*, имела предел по вероятности на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной (последовательностью Коши) по вероятности, то есть для любого* $\varepsilon > 0$*:*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{P}\{|\xi_m - \xi_n| > \varepsilon\} = 0. \tag{4.9}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$. По определению это означает, что для любого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} = 0. \tag{4.10}$$

Согласно лемме 4.8 справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{|\xi_m - \xi_n| > \varepsilon\} \le \mathbf{P}\Big\{|\xi_m - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} + \mathbf{P}\Big\{|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}.$$

Так как $\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$, то

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}\{|\xi_m - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\} = 0 \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{P}\{|\xi_m - \xi_n| > \varepsilon\} = 0.$$

Достаточность. Пусть выполняется (4.9), которое означает также, что для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon_2)$ такое, что для любых $m, n \ge N$

$$\mathbf{P}\{|\xi_m - \xi_n| > \varepsilon_1\} \le \varepsilon_2. \tag{4.11}$$

Построим монотонно возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}$ следующим реккурентным образом (k = 2, 3, ...):

$$\begin{aligned} &n_1 = 1, \\ &n_k = \min\Big(n : n > n_{k-1}, \forall m, l \ge n \ \mathbf{P}\{|\xi_m - \xi_l| > \frac{1}{k^2}\} \le \frac{1}{k^2}\Big). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Такая последовательность $\{n_k, k = 1, 2, \ldots\}$ существует, так как выполняется (4.11).

С помощью натуральных чисел (индексов) $\{n_k, k = 1, 2, \ldots\}$ построим вспомогательную случайную подпоследовательность $\{\xi_{n_k}, k = 1, 2, \ldots\}$ последовательности $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\}$. В силу (4.12) для любого $k \in \mathbb{N}$ для $\{\xi_{n_k}, k = 1, 2, \ldots\}$ выполняется свойство:

$$\mathbf{P}\Big\{|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > \frac{1}{k^2}\Big\} \le \frac{1}{k^2}. \tag{4.13}$$

Выбирем в (4.13)

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k^2}, k = 1, 2, \ldots$$

и применим к подпоследовательности $\{\xi_{n_k}, k = 1, 2, \ldots\}$ второй достаточный признак сходимости почти наверное. Имеем:

$$\begin{aligned} &S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty, \\ &S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_{k+1} - \xi_k| > \varepsilon_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_{k+1} - \xi_k| > \frac{1}{k^2}\} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Следовательно, так как ряды S_1 и S_2 сходятся, то

$$\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi.$$

Тогда по теореме 4.5 имеем:

$$\xi_{n_k} \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi. \tag{4.15}$$

Теперь из (4.15), леммы 2 и (4.11) находим для любого $\varepsilon > 0$ при $n, n_k \to \infty$:

$$\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \le \mathbf{P}\Big\{|\xi_n - \xi_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} + \mathbf{P}\Big\{|\xi_{n_k} - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \to 0,$$

что согласно (4.10) и означает, что

$$\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi.$$

□

Теоремы о сходимости по вероятности

Теорема 4.7 (О единственности предела)**.** *Если $\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ и $\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$, то $\xi \overset{п.н.}{=} \eta$, так что $\mathbf{P}\{\xi \ne \eta\} = 0$.*

Доказательство. Используя лемму 2 для любого $\varepsilon > 0$ можно записать неравенство:

$$\mathbf{P}\{|\xi - \eta| > \varepsilon\} \le \mathbf{P}\Big\{|\xi - \xi_k| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} + \mathbf{P}\Big\{|\eta - \xi_k| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}.$$

Так как $\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ и $\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$, то

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\mathbf{P}\Big\{|\xi - \xi_k| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} + \mathbf{P}\Big\{|\eta - \xi_k| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big) = 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi - \eta| > \varepsilon\} = 0.$$

С другой стороны, в силу аксиомы непрерывности

$$\mathbf{P}\{\xi \ne \eta\} = \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big\{|\xi - \eta| > \frac{1}{k}\Big\}\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\overline{\lim_{k\to\infty}}\Big\{\omega : |\xi - \eta| > \frac{1}{k}\Big\}\Big\} = \lim_{k\to\infty}\mathbf{P}\Big\{|\xi - \eta| > \frac{1}{k}\Big\} = 0.$$

□

Теорема 4.8. *Из всякой случайной последовательности*

$$\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\},$$

сходящейся на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ по вероятности, можно выделить подпоследовательность

$$\{\xi_{n_k}, k = 1, 2, \ldots\},$$

сходящуюся почти наверное.

Доказательство. По критерию Коши сходимости по вероятности для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{P}\{|\xi_m - \xi_n| > \varepsilon\} = 0.$$

Воспользуемся этим свойством и построим последовательность отбираемых номеров $\{n_k, k = 1, 2, \ldots\}$ следующим реккурентным способом:

$$\begin{aligned} &n_1 = 1, \\ &n_k = \min\Big\{n : n > n_{k-1}, \forall r, s > n, \mathbf{P}\Big\{|\xi_r - \xi_s| > \frac{1}{2^k}\Big\} < \frac{1}{2^k}\Big\}, \; k = 2, 3, \ldots. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Для исследования сходимости $\{\xi_{n_k}, k = 1, 2, \ldots\}$ воспользуемся вторым достаточным признаком сходимости почти наверное. Полагая:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2^k},$$

получаем сходящиеся ряды S_1 и S_2:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty, \\ S_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big\{|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| > \frac{1}{2^k}\Big\} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Следовательно, второй достаточный признак выполняется, а из этого вытекает сходимость почти наверное подпоследовательности $\{\xi_{n_k}, k = 1, 2, \ldots\}$. □

Теорема 4.9. *Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены $N \ge 1$ случайных последовательностей, сходящихся при $k \to \infty$ по вероятности к константам:*

$$\xi_k^{(1)} \xrightarrow{\mathbf{P}} a_1, \xi_k^{(2)} \xrightarrow{\mathbf{P}} a_2, \ldots, \xi_k^{(N)} \xrightarrow{\mathbf{P}} a_N. \tag{4.18}$$

Если функция

$$g(x_1, \ldots, x_N) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$$

непрерывна в точке $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, то при $k \to \infty$

$$\eta_k = g(\xi_k^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(N)}) \xrightarrow{\mathbf{P}} g(a_1, \ldots, a_N). \tag{4.19}$$

Доказательство. Непрерывность функции $g(\cdot)$ в точке $(a_1, \ldots, a_N)$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое

$$\delta = \delta(\varepsilon, a_1, \ldots, a_N) > 0,$$

что как только

$$|x_i - a_i| \le \delta, i = 1, \ldots, N,$$

так

$$|g(x_1, \ldots, x_N) - g(a_1, \ldots, a_N)| \le \varepsilon.$$

Отсюда следует соотношение между событиями:

$$\bigcap_{i=1}^{N} \{|\xi_k^{(i)} - a_i| \le \delta\} \subset \{|g(\xi_k^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(N)}) - g(a_1, \ldots, a_N)| \le \varepsilon\}.$$

Переходя к противоположным событиям, по правилу де Моргана имеем:

$$\{|g(\xi_k^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(N)}) - g(a_1, \ldots, a_N)| > \varepsilon\} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \Big\{ |\xi_k^{(i)} - a_i| > \delta \Big\}. \tag{4.20}$$

Учитывая (1.22) из (4.18) и (4.20) заключаем:

$$\mathbf{P}\{|g(\xi_k^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(N)}) - g(a_1, \ldots, a_N)| > \varepsilon\} \le \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\{|\xi_k^{(i)} - a_i| > \delta\} \to 0$$

при $k \to \infty$, что означает (4.19). $\square$

Теорема 4.10 (О функциональном преобразовании сходящихся по вероятности последовательностей)**.** *Пусть на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *определены случайные величины* $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(N)}$ *и* $N \ge 1$ *сходящихся по вероятности случайных последовательностей при* $k \to \infty$*:*

$$\xi_k^{(1)} \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi^{(1)}, \xi_k^{(2)} \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(N)} \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi^{(N)}.$$

Если функция

$$g(x_1, \ldots, x_N) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$$

равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^N$*, то*

$$\eta_k = g(\xi_k^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(N)}) \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(N)}).$$

Доказательство. По определению равномерной непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что, если

$$|x_i - y_i| \le \delta, i = 1, \ldots, N$$

то

$$|g(x_1, \ldots, x_N) - g(y_1, \ldots, y_N)| \le \varepsilon.$$

Далее доказательство осуществляется как в теореме 4.9, полагая $x_i = \xi_k^{(i)}, y_i = \xi^{(i)}, i = 1, \ldots, N$. $\square$

Замечание 4.1. *Справедливы аналоги теорем 4.9 и 4.10, в которых вместо сходимости по вероятности рассматривается сходимость почти наверное.*

4.4 Сходимость в среднем

Критерий Коши сходимости в среднем порядка r

Теорема 4.11 (Критерий Коши сходимости в среднем порядка r)**.** *Для того, чтобы случайная последовательность* $\{\xi_k = \xi_k(\omega), k = 1, 2, \ldots\}$ *на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *сходилась в среднем порядка* r*, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной (последовательностью Коши) в смысле* L_r*-сходимости, то есть чтобы*

$$\mathbf{E}\{|\xi_k|^r\} < \infty, k = 1, 2, \ldots \tag{4.21}$$

и

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}\{|\xi_m - \xi_n|^r\} = 0. \tag{4.22}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\xi_k \xrightarrow{L_r} \xi.$$

По определению L_r-сходимости это означает, что:

$$\mathbf{E}\{|\xi_k|^r\} < \infty, k = 1, 2, \ldots, \tag{4.23}$$

$$\mathbf{E}\{|\xi|^r\} < \infty \tag{4.24}$$

и при $k \to \infty$

$$\mathbf{E}\{|\xi_k - \xi|^r\} \to 0. \tag{4.25}$$

Тогда, полагая в неравенстве Минковского (3.29):

$$\mathbf{E}\{|\eta + \zeta|^r\} \le \left(\left(\mathbf{E}\{|\eta|^r\}\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\mathbf{E}\{|\zeta|^r\}\right)^{\frac{1}{r}}\right)^r,$$

$\eta = \xi_m - \xi$ и $\zeta = \xi - \xi_n$, получаем :

$$\mathbf{E}\{|\xi_m - \xi_n|^r\} \le \left(\left(\mathbf{E}\{|\xi_m - \xi|^r\}\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\mathbf{E}\{|\xi_n - \xi|^r\}\right)^{\frac{1}{r}}\right)^r \to 0,$$

при $m, n \to \infty$, то есть выполняется (4.22).

*Достаточность.*Достаточность доказывается сложнее. Схема доказательства аналогична схеме доказательства теоремы 4.8. □

Теоремы о сходимости в среднем порядка r

Теорема 4.12. *Если* $q < r$*, то из сходимости в серднем порядка* r *вытекает сходимость в серднем порядка низшего порядка* q*.*

Доказательство. По условию теоремы, выполняется (4.25). В силу неравенства Ляпунова,

$$\left(\mathbf{E}\{|\xi_k|^q\}\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\mathbf{E}\{|\xi_k|^r\}\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\Big(\mathbf{E}\{|\xi_k-\xi|^q\}\Big)^{\frac{1}{q}} \le \Big(\mathbf{E}\{|\xi_k-\xi|^r\}\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Поэтому имеем:

$$\mathbf{E}\{|\xi_k|^q\} < \infty, n = 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{E}\{|\xi_k-\xi|^q\} \to 0$$

при $k \to \infty$. Это означает, что $\xi_k \xrightarrow{L_q} \xi$. □

Теорема 4.13. *Из сходимости в среднем порядка r вытекает сходимость по вероятности.*

Доказательство. По условию теоремы, выполняется (4.25). В силу неравенства Чебышева для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi_k-\xi| > \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^r}\mathbf{E}\{|\xi_k-\xi|^r\} \to 0$$

при $k \to \infty$. По определению $\mathbf{P}$-сходимости, это означает, что $\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$. □

Теорема 4.14. *Если*

$$\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$$

и существует постоянная $C > 0$ такая, что $|\xi_k| \le C$ почти наверное, то есть $\mathbf{P}\{|\xi_k| \le C\} = 1$ для $k = 1, 2, \dots,$ то для любого $r \ge 1$

$$\xi_k \xrightarrow{L_r} \xi.$$

Доказательство. Покажем *ограниченность почти наверное* предельной случайной величины ξ:

$$\mathbf{P}\{|\xi| \le C\} = 1.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу условий теоремы имеем:

$$\mathbf{P}\{|\xi| > C+\varepsilon\} =$$

$$= \mathbf{P}(\{|\xi| > C+\varepsilon\}\bigcap\{|\xi_k-\xi| > \varepsilon\}) + \mathbf{P}(\{|\xi| > C+\varepsilon\}\bigcap\{|\xi_k-\xi| \le \varepsilon\}) \le$$

$$\le \mathbf{P}\{|\xi_k-\xi| > \varepsilon\} + \mathbf{P}\{|\xi_k| > C\} =$$

$$= \mathbf{P}\{|\xi_k-\xi| > \varepsilon\} \to 0$$

при $k \to \infty$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi| > C+\varepsilon\} = 0.$$

Тогда из аксиомы непрерывности вероятностной меры имеем:

$$\mathbf{P}\{\xi| > C\} = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\Big\{|\xi| > C + \frac{1}{k}\Big\}\Big) =$$

$$= \mathbf{P}\Big(\lim_{k\to\infty}\Big\{|\xi| > C + \frac{1}{k}\Big\}\Big) = \lim_{k\to\infty}\mathbf{P}\Big\{|\xi| > C + \frac{1}{k}\Big\} = 0.$$

Таким образом, $|\xi| \le C$ почти наверное.

Определим вспомогательную последовательность случайных событий

$$A_k = \{|\xi_k - \xi| > \delta\}$$

для некоторого произвольного $\delta > 0$. Тогда по свойствам математического ожидания с учетом доказанного выше имеем:

$$\mathbf{E}\{|\xi_k - \xi|^r\} \equiv$$

$$\equiv \mathbf{E}\{|\xi_k - \xi|^r I_{\overline{A}_k} + |\xi_k - \xi|^r I_{A_k}\} = \mathbf{E}\{|\xi_k - \xi|^r I_{\overline{A}_k}\} + \mathbf{E}\{|\xi_k - \xi|^r I_{A_k}\} \leq$$

$$\leq \delta^r + +(2C)^r \cdot \mathbf{P}\{|\xi_k - \xi| > \delta\} \to \delta^r.$$

Отсюда, в силу произвола при выборе $\delta > 0$, следует, что

$$\mathbf{E}\{|\xi_k - \xi|^r\} \to 0,$$

что влечет

$$\xi_k \xrightarrow{L_r} \xi.$$

□

Теорема 4.15. *Если*

$$\xi_k \xrightarrow{L_r} \xi,$$

то для любого целого $q, 1 \leq q \leq r$, при $k \to \infty$ имеет место сходимость последовательности начальных моментов q-го порядка:

$$\mathbf{E}\{\xi_k^q\} \to \mathbf{E}\{\xi^q\}. \tag{4.26}$$

Доказательство. Докажем утверждение (4.26) при $q = r$.

Обозначим:

$$\eta_k = \xi_k - \xi.$$

Так как, согласно условиям теоремы

$$\xi_k \xrightarrow{L_r} \xi,$$

то

$$\mathbf{E}\{|\eta_k|^r\} \to 0.$$

Тогда по свойствам математического ожидания имеем:

$$|\mathbf{E}\{\xi_k^r\} - \mathbf{E}\{\xi^r\}| = |\mathbf{E}\{\xi_k^r - \xi^r\}| = |\mathbf{E}\{(\xi + \eta_k)^r - \xi^r\}| \equiv$$

$$\equiv \Big|\mathbf{E}\Big\{\sum_{i=1}^{r} C_r^i \xi^{r-i} \eta_k^i\Big\}\Big| \leq \sum_{i=1}^{r} C_r^i \mathbf{E}\{|\xi|^{r-i}|\eta_k|^i\}. \tag{4.27}$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера (3.27) выбирая в последней сумме

$$p_1 = \frac{r}{r-i} > 1,\ p_2 = \frac{r}{i} > 1:$$

$$\mathbf{E}\{|\xi|^{r-i}|\eta_k|^i\} \leq (\mathbf{E}\{|\xi|^r\})^{\frac{r-i}{r}} (\mathbf{E}\{|\eta_k|^r\})^{\frac{i}{r}}.$$

Подставляя эту оценку в (4.27), получим:

$$|\mathbf{E}\{\xi_k^r\} - \mathbf{E}\{\xi^r\}| \leq \sum_{i=1}^{r} C_r^i (\mathbf{E}\{|\xi|^r\})^{\frac{r-i}{r}} (\mathbf{E}\{\eta_k|^r\})^{\frac{i}{r}} \to 0.$$

Так как, согласно теореме 4.12, при $1 \leq q \leq r$:

$$\xi_k \stackrel{L_q}{\to} \xi,$$

то утверждение (4.26) для $1 \leq q < r$ доказывается также, как и для $q = r$. □

Теоремы о сходимости в среднем квадратичном

Лемма 3 (О сходимости в среднем квадратичном)**.** *Пусть на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *определены две случайные последовательности, сходящиеся при* $m \to \infty$ *и* $n \to \infty$ *в среднем квадратичном:*

$$\xi_m \stackrel{ср.кв.}{\longrightarrow} \xi, \tag{4.28}$$

$$\eta_n \stackrel{ср.кв.}{\longrightarrow} \eta. \tag{4.29}$$

Тогда существует

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}\{\xi_m \cdot \eta_n\} = \mathbf{E}\{\xi \cdot \eta\}. \tag{4.30}$$

Доказательство. По определению среднеквадратичной сходимости из (4.28) и (4.29) имеем:

$$\mathbf{E}\{\xi_m^2\} < +\infty,\ \mathbf{E}\{\xi^2\} < +\infty,\ \mathbf{E}\{|\xi_m - \xi|^2\} \to 0$$

при $m \to \infty$ и

$$\mathbf{E}\{\eta_n^2\} < +\infty,\ \mathbf{E}\{\eta^2\} < +\infty,\ \mathbf{E}\{|\eta_n - \eta|^2\} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Покажем, что математическое ожидание в левой части равенства (4.30) существует. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$\mathbf{E}\{|\xi_m \eta_n|\} \leq \sqrt{\mathbf{E}\{\xi_m^2\} \cdot \mathbf{E}\{\eta_n^2\}} < +\infty.$$

Аналогично доказывается существование математического ожидания и в правой части (4.30).

Оценим разность между левой и правой частями (4.30). Имеем:

$$|\mathbf{E}\{\xi_m \eta_n - \xi\eta\}| \equiv |\mathbf{E}\{(\xi_m - \xi)(\eta_n - \eta) + (\xi_m - \xi)\eta + (\eta_n - \eta)\xi\}| \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\{|(\xi_m - \xi)(\eta_n - \eta)|\} + \mathbf{E}\{|(\xi_m - \xi)\eta|\} + \mathbf{E}\{|(\eta_n - \eta)\xi|\} \leq$$

$$\leq \sqrt{\mathbf{E}\{(\xi_m - \xi)^2\}\mathbf{E}\{(\eta_n - \eta)^2\}} + \sqrt{\mathbf{E}\{(\xi_m - \xi)^2\}\mathbf{E}\{\eta^2\}} + \sqrt{\mathbf{E}\{(\eta_n - \eta)^2\}\mathbf{E}\{\xi^2\}} \to 0$$

при $m, n \to \infty$. □

Теорема 4.16 (Критерий сходимости в среднем квадратичном)**.** *Для того, чтобы случайная последовательность* $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots\}$ *на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *имела предел в среднем квадратичном необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел:*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}\{\xi_m \xi_n\} = A < +\infty. \tag{4.31}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\xi_k \overset{\text{ср.кв.}}{\longrightarrow} \xi$. Воспользуемся леммой 3, в которой положим $\eta_n \equiv \xi_n$. Тогда

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}\{\xi_m \xi_n\} = \mathbf{E}\{\xi \cdot \xi\} = A < +\infty.$$

Достаточность. Пусть выполняется (4.31), тогда проверим выполнение критерия Коши:

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{E}\{(\xi_m - \xi_n)^2\} = \lim_{m,n\to\infty} \Big(\mathbf{E}\{\xi_m\xi_m\} - 2\mathbf{E}\{\xi_m\xi_n\} + \mathbf{E}\{\xi_n\xi_n\}\Big) = A - 2A + A = 0.$$

Отсюда следует, что критерий Коши выполняется и, значит, последовательность сходится в среднем квадратичном. □

Теорема 4.17. *Пусть*

$$\xi_k \overset{\text{ср.кв.}}{\longrightarrow} \xi,$$

причем настолько быстро, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\{(\xi_k - \xi)^2\} < +\infty, \tag{4.32}$$

тогда

$$\xi_k \overset{\text{п.н.}}{\longrightarrow} \xi.$$

Доказательство. Построим вспомогательную последовательность случайных событий

$$A_k = \{(|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}, \text{ для любого } \varepsilon > 0,$$

где ε зафиксировано. Воспользуемся неравенством Чебышева относительно математического ожидания:

$$\mathbf{P}(A_k) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}\{|\xi_k - \xi|^2\},$$

и исследуем сходимость ряда с учетом (4.32):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\{(\xi_k - \xi)^2\} < +\infty.$$

Тогда по лемме Бореля-Кантелли

$$\mathbf{P}(\overline{\lim}_{k\to\infty} A_k) = 0,$$

и, следовательно, имеет место сходимость почти наверное. □

4.5 Сходимость последовательностей функций распределения и характеристических функций

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определена случайная последовательность $\{\xi_n = \xi_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$, и определены соответствующие последовательности функций распределения $\{F_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$, $x \in \mathbb{R}$, и характеристических функций $\{f_n(t), n = 1, 2, \ldots\}$, $t \in \mathbb{R}$, где:

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{\xi_n < x\}, x \in \mathbb{R}, \tag{4.33}$$

и

$$f_n(t) = \mathbf{E}\{e^{it\xi}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_n(x), t \in \mathbb{R}. \tag{4.34}$$

Сходимость последовательностей функций распределения

Пусть $F(x), x \in \mathbb{R}$ — некоторая неубывающая ограниченная функция, $0 \leq F(x) \leq 1$, а $C(F) \subseteq \mathbb{R}$ — множество точек непрерывности функции F.

Определение 4.1. *Принято говорить, что последовательность функций распределения $\{F_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$, $x \in \mathbb{R}$,* слабо сходится *к некоторой неубывающей ограниченной функции $F(x), x \in \mathbb{R}$, при $n \to \infty$:*

$$F_n(\cdot) \Rightarrow F(\cdot), \tag{4.35}$$

если имеет место поточечная сходимость последовательности функций распределения на множестве $C(F)$, то есть если для любого $x \in C(F)$ выполняется предельное соотношение:

$$F_n(x) \to F(x). \tag{4.36}$$

Замечание 4.2. *Предельная функция $F(\cdot)$ — не обязательно функция распределения, так как ее колебание*

$$\omega(F) = \sup F(x) - \inf F(x) \in [0, 1]$$

может оказаться меньше единицы.

Замечание 4.3. *Если $\omega(F) = 1$, то предельная функция $F(\cdot)$ — функция распределения некоторой случайной величины ξ и тогда соотношение (4.35) эквивалентно сходимости по распределению случайной последовательности $\{\xi_n = \xi_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ к ξ:*

$$\xi_n \xrightarrow{D} \xi.$$

Теорема 4.18 (Критерий слабой сходимости последовательности функций распределения)**.** *Для того, чтобы последовательность функций распределения $\{F_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$, $x \in \mathbb{R}$, слабо сходилась к некоторой неубывающей ограниченной функции $F(x), x \in \mathbb{R}$:*

$$F_n(\cdot) \Rightarrow F(\cdot),$$

необходимо и достаточно, чтобы имела место поточечная сходимость последовательности функций распределения $\{F_n(\cdot)\}$ на некотором всюду плотном в $\mathbb{R}$ множестве $Z \subseteq \mathbb{R}$, то есть для любого $z \in Z$ при $n \to \infty$:

$$F_n(z) \to F(z). \tag{4.37}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$F_n(\cdot) \Rightarrow F(\cdot).$$

Найдем такое всюду плотное множество $Z \subset \mathbb{R}$, для которого выполняется (4.37).

Выберем: $Z ::= C(F)$. Так как $F(\cdot)$ неубывающая ограниченная функция, то множество точек ее разрыва $C_0(F)$ не более чем счетно. Тогда множество $C(F) = \mathbb{R} \backslash C_0(F)$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Достаточность. Пусть выполняется (4.37). В силу свойств всюду плотного множества Z подберем числовые последовательности

$$z_1 \uparrow x, \ z_2 \downarrow x, \ z_1, z_2 \in Z, \ z_1 \leq x \leq z_2, \ x \in C(F). \tag{4.38}$$

В силу свойства функции распределения из (4.38) имеем:

$$F_n(z_1) \leq F_n(x) \leq F_n(z_2).$$

Устремляя $n \to \infty$, в силу (4.37) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z_1) = F(z_1) \leq \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} F_n(z_2) = F(z_2).$$

Устремим теперь: $z_1 \uparrow x, z_2 \downarrow x$. Так как x — точка непрерывности функции $F(\cdot)$, то

$$\varliminf_{n\to\infty} F_n(x) = \varlimsup_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

что означает выполнение (4.36). □

Теорема непрерывности для характеристических функций

Лемма 4 (Первая теорема Хелли)**.** *Из всякой последовательности функций распределения* $\{F_n(x), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ *можно выделить подпоследовательность* $\{F_{n_k}(x), x \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots\}$, *слабо сходящуюся к некоторой неубывающей ограниченной функции* $F(x), x \in \mathbb{R}$*:*

$$F_{n_k}(\cdot) \Rightarrow F(\cdot).$$

Доказательство. Для доказательства следует воспользоваться леммой Больцано-Вейерштрасса. □

Лемма 5 (Вторая теорема Хелли)**.** *Пусть некоторая последовательность функций распределения* $\{F_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$, $x \in \mathbb{R}$, *слабо сходится к некоторой неубывающей ограниченной функции* $F(x), x \in \mathbb{R}$*:*

$$F_n(\cdot) \Rightarrow F(\cdot),$$

причем предельная функция $F(\cdot)$ *является некоторой функцией распределения (то есть* $\omega(F) = 1$*). Пусть далее* $y = g(x)$ *— некоторая непрерывная ограниченная функция:*

$$|g(x)| \leq M < +\infty.$$

Тогда имеет место сходимость последовательности интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x)$$

при $n \to \infty$.

Доказательство. На первом этапе доказывается сходимость последовательности интегралов на конечном промежутке $[a, b]$. На этом промежутке для подынтегральной функции $g(x)$ строится аппроксимирующая функция $g_\varepsilon(x)$:

$$\sup_{a \le x \le b} |g_\varepsilon(x) - g(x)| \le \varepsilon,$$

для которой показывается, что при $n \to \infty$

$$\int_a^b g_\varepsilon(x) dF_n(x) \to \int_a^b g_\varepsilon(x) dF(x).$$

На втором этапе используются свойства функции распределения: $F(a) \to 0$ при $a \to -\infty, 1 - F(b) \to 0$ при $b \to +\infty$. □

Теорема 4.19 (Теорема непрерывности для характеристический функций)**.** *Пусть на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *определена последовательность случайных величин* $\{\xi_n = \xi_n(\omega), n = 1, 2, \ldots\}$, *определены соответствующие последовательности функций распределения* $\{F_n(x), n = 1, 2, \ldots\}, x \in \mathbb{R}$, *и характеристических функций* $\{f_n(t), n = 1, 2, \ldots\}, t \in \mathbb{R}$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливы следующие два утверждения:*

1 *если последовательность функций распределения слабо сходится к некоторой функции распределения* $F(\cdot)$*:*

$$F_n(\cdot) \Rightarrow F(\cdot),$$

то имеет место поточечная сходимость последовательности характеристических функций:

$$f_n(t) \to f(t), t \in \mathbb{R},$$

причем

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) -$$

характеристическая функция, соответствующая предельной функции распределения $F(\cdot)$*;*

2 *если имеет место поточечная сходимость последовательности характеристических функций:*

$$f_n(t) \to f(t), t \in \mathbb{R},$$

причем предельная функция $f(t)$ *непрерывна в точке* $t = 0$*, то имеет место слабая сходимость последовательности функций распределения:*

$$F_n(\cdot) \Rightarrow F(\cdot);$$

при этом $F(\cdot)$ *— функция распределения, которой соответствует характеристическая функция* $f(t)$*.*

Доказательство. 1 Введем в рассмотрение функцию $g(x) = e^{itx}$ (t — фиксированное). Эта функция ограничена, т. к.

$$|g(x)| = 1,$$

и непрерывна. Следовательно, согласно второй теореме Хелли имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x),$$

то есть

$$f_n(t) \to f(t), t \in \mathbb{R},$$

при $n \to \infty$.

2 Из первой теоремы Хелли следует, что существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что подпоследовательность $\{F_{n_k}\}$ будет слабо сходиться к некоторой непрерывной слева и неубывающей функции F. Покажем, что эта функция F — функция распределения. Для этого требуется доказать, что

$$F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$$

или

$$\omega(F) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Предположим противное:

$$F(+\infty) - F(-\infty) = \delta < 1.$$

Так как для всех n $f_n(0) = 1$, то и $f(0) = 1$.

Из непрерывности $f(t)$ в точке $t = 0$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\tau > 0$, такое что

$$\left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) dt \right| \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $f_{n_k}(t) \to f(t), t \in \mathbb{R}$, то существует n_0, что $|f_{n_k}(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $n_k \geq n_0$. Тогда

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f_{n_k}(t) dt \right| + \left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} (f_(t) - f_{n_k}(t)) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f_{n_k}(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда при $n_k \geq n_0$

$$\left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f_{n_k}(t) dt \right| \geq 1 - \varepsilon. \tag{4.39}$$

Используя неравенства

$$\left| \frac{\sin \tau x}{\tau x} \right| \leq 1,$$

$$|\sin \tau x| \leq 1,$$

получаем

$$\left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f_{n_k}(t) dt \right| = \left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \int e^{itx} dF_{n_k}(x) dt \right| =$$

$$= \left| \int \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dF_{n_k}(x) dt \right| = \left| \int \frac{\sin \tau x}{\tau x} dF_{n_k}(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{-X \le x < X} \frac{\sin \tau x}{\tau x} dF_{n_k}(x) \right| + \left| \int_{x \ge X, x < -X} \frac{\sin \tau x}{\tau x} dF_{n_k}(x) \right| \le$$

$$\le F_{n_k}(X) - F_{n_k}(-X) + \frac{1}{\tau X}.$$

Выберем X и $-X$ точками непрерывности функции F. Тогда при $n_k \to \infty$

$$F_{n_k}(X) \to F(X) \quad \text{и} \quad F_{n_k}(-X) \to F(-X)$$

и, следовательно, по предположению

$$F_{n_k}(X) - F_{n_k}(-X) \to F(X) - F(-X) \le \delta.$$

Отсюда получаем, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует номер $n_1 = n_1(\varepsilon, X)$, такой что при $n_k \ge n_1$

$$F_{n_k}(X) - F_{n_k}(-X) \le \delta + \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Выберем X из условия

$$\frac{1}{\tau X} \le \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Тогда при $n \ge \max(n_0, n_1)$

$$\left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f_{n_k}(t) dt \right| \le \delta + \varepsilon_1. \tag{4.40}$$

Из (4.39) и (4.40) получаем неравенство

$$1 - \varepsilon \le \delta + \varepsilon_1,$$

верное при всех $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, что невозможно. Получили противоречие. Таким образом, функция F — функция распределения.

Так как

$$f_{n_k}(t) \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

по второй теореме Хелли и

$$f_{n_k}(t) \to f(t),$$

следовательно,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x).$$

Это означает, что f — характеристическая функция, соответствующая функции распределения F.

Покажем, что

$$F_n \Rightarrow F.$$

Допустим противное:

$$F_n \not\Rightarrow F.$$

Тогда будет существовать последовательность $\{n_k^*\}$ такая, что

$$F_{n_k^*} \Rightarrow F^*,$$

где $F^* \neq F$ и F^* — функция распределения. По второй теореме Хелли получаем

$$f_{n_k^*}(t) \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF^*(x) \neq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) = f(t).$$

Получили противоречие, так как при $n_k^* \to \infty$

$$f_{n_k^*}(t) \to f(t).$$

$\square$

4.6 Соотношения между видами сходимости случайных последовательностей

Справедлива схема соотношений между видами сходимости случайных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi & & \\ & & & & \Downarrow & & \\ \xi_k \xrightarrow{L_r} \xi & \Longrightarrow & \xi_k \xrightarrow{L_q} \xi & \Longrightarrow & \xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi & \Longrightarrow & \xi_k \xrightarrow{D} \xi \end{array}$$

Утверждение

$$\xi_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \quad \Longrightarrow \quad \xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$$

вытекает из теоремы 4.5.

Утверждение

$$\xi_k \xrightarrow{L_r} \xi \quad \Longrightarrow \quad \xi_k \xrightarrow{L_q} \xi$$

доказано в теореме 4.12.

Докажем, что

$$\xi_k \xrightarrow{L_q} \xi \quad \Longrightarrow \quad \xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi.$$

Действительно, так как $\xi_k \xrightarrow{L_q} \xi$, то $\mathbf{E}\{|\xi_k - \xi|^q\} \to 0$. В силу неравенства Чебышева для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^q}\mathbf{E}\{|\xi_k - \xi|^q\} \to 0$$

при $k \to \infty$. По определению $\mathbf{P}$-сходимости, это означает, что $\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$.

Докажем, что

$$\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi \quad \Longrightarrow \quad \xi_k \xrightarrow{D} \xi.$$

Для доказательства этого утверждения полезной будет следующая лемма.

Лемма 6. *Для любых случайных событий $A, B \in \mathcal{F}$ справедливо неравенство:*

$$\mathbf{P}(A \cap B) \ge \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(\overline{B}).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой сложения вероятностей:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + 1 - \mathbf{P}(\overline{B}) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Отсюда имеем:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(\overline{B}) + (1 - \mathbf{P}(A \cup B)) \ge \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(\overline{B}).$$

□

Пусть $\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$. Введем для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ последовательность случайных событий

$$A_k = \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} \in \mathcal{F}.$$

По определению имеем:

$$\mathbf{P}(A_k) \to 0 \tag{4.41}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Согласно определению D-сходимости необходимо доказать, что для произвольной точки непрерывности $x \in C(F_\xi)$ имеет место сходимость при $k \to \infty$:

$$F_{\xi_k}(x) \to F_\xi(x). \tag{4.42}$$

Так как

$$A_k \supseteq \{\xi_k < x\} \cap \{\xi \geq x + \varepsilon\},$$

и

$$A_k \supseteq \{\xi_k \geq x\} \cap \{\xi < x - \varepsilon\},$$

то, воспользовавшись свойствами вероятности и леммой 6, приходим к неравенствам:

$$\mathbf{P}(A_k) \geq \mathbf{P}(A \cap B) \geq \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(\overline{B}) = F_{\xi_k}(x) - F_\xi(x + \varepsilon),$$

$$\mathbf{P}(A_k) \geq \mathbf{P}(B \cap A) \geq F_\xi(x - \varepsilon) - F_{\xi_k}(x),$$

разрешив каждое из которых относительно $F_{\xi_k}(x)$ получаем:

$$F_\xi(x - \varepsilon) - \mathbf{P}(A_k) \leq F_{\xi_k}(x) \leq F_\xi(x + \varepsilon) + \mathbf{P}(A_k).$$

Выберем здесь $x \in C(F_\xi)$, $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ и воспользуемся (4.41). Тогда, так как

$$\mathbf{P}(A_k) \to 0,$$

$\varepsilon \to 0$, x — точка непрерывности фунции распределения $F_\xi(\cdot)$, то, следовательно, существует предел:

$$\lim_{n \to \infty} F_{\xi_k}(x),$$

причем выполняется (4.42).

Приведенная схема соотношений между видами сходимости случайных последовательностей является полной, то есть *без дополнительных условий отсутствуют какие-то другие соотношения.*

Пример 4.3. *Рассмотрим вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*, где* $\Omega = [0, 1], \mathcal{F} = \mathcal{B}[0, 1]$ *— борелевская* σ*-алгебра подмножеств из* $\Omega, \mathbf{P}(\cdot) = mes(\cdot)$ *— мера Лебега,*

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} n^\alpha, 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0, \frac{1}{n} < \omega \leq 1, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ *— некоторый параметр. Очевидно, что*

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \to 0\} = 1,$$

поэтому

$$\xi_n \xrightarrow{п.н.} 0.$$

Вычислим $\mathbf{E}\{\xi_n^r\}$*:*

$$\mathbf{E}\{\xi_n^r\} = n^{\alpha r}\frac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{n}) = n^{\alpha r - 1}.$$

Если $\alpha < \frac{1}{r}$, *то*

$$\xi_n \xrightarrow{L_r} 0.$$

Если $\alpha \geq \frac{1}{r}$, *то* L_r *— сходимость отсутствует, то есть из сходимости почти наверное не следует* L_r*-сходимость.*

Пример 4.4. *Пусть* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *— независимые, одинаково распределенные случайные величины, имеющие стандартную нормальную функцию распределения* $\Phi(x), x \in \mathbb{R}$. *Так как*

$$F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x) = \Phi(x),$$

то очевидно, что имеет место сходимость по распределению:

$$\xi_n \xrightarrow{D} \xi.$$

В то же время, так как

$$\L\{\xi_1 - \xi\} = \mathcal{N}(0, 2),$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = \mathbf{P}\{|\xi_1 - \xi| > \varepsilon\} = 2\Phi(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}) \nrightarrow 0$$

при $n \to \infty$, *то есть сходимость по вероятности отсутствует.*

Таким образом, в данном примере из сходимости по распределению не следует сходимость по вероятности.

Замечание 4.4. *Если случайные величины* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *с вероятностью 1 являются константами, то для последовательности* $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ *все виды сходимости эквивалентны.*

Теорема 4.20. *Если*

$$\xi_n \xrightarrow{D} C,$$

где C *— некоторая константа, то*

$$\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} C,$$

то есть в случае сходимости к константе виды сходимости по распределению и по вероятности эквивалентны.

Доказательство. По условию теоремы при $n \to \infty$

$$F_{\xi_n}(x) = \mathbf{P}\{\xi_n < x\} \to F(x) = \begin{cases} 0, x \leq C, \\ 1, x > C. \end{cases} \tag{4.43}$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и с учетом (4.43) исследуем $\mathbf{P}\{|\xi_n - C| > \varepsilon\}$:

$$\mathbf{P}\{|\xi_n - C| > \varepsilon\} = 1 - \mathbf{P}\{C - \varepsilon \leq \xi_n \leq C + \varepsilon\} =$$

$$= 1 - (F_{\xi_n}(C + \varepsilon) - F_{\xi_n}(C - \varepsilon)) \to 1 - (F(C + 0) - F(C - 0)) = 1 - 1 = 0$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} C$. $\square$

Теорема 4.21. *Если случайная последовательность* $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ *сходится в смысле каких-нибудь двух из трех видов сходимости: по вероятности, почти наверное, в среднем порядка* r*, то предельные случайные величины с вероятностью 1 совпадают.*

Доказательство. Пусть
$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi, \ \xi_n \xrightarrow{L_r} \eta.$$

Тогда из теоремы **??** следует:
$$\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi, \ \xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta.$$

Из теоремы о единственности предела последовательности, сходящейся по вероятности следует:
$$\mathbf{P}\{\xi = \eta\} = 1.$$

□

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1998.

[2] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Мн: Высш. шк. 2000.

[3] Гнеденко Б. В. Курс Теории вероятностей. М.: Наука, 1996.

[4] Малинковский Ю. В. Теория вероятностей. Минск: РИВШ, 2019.

[5] Маталыцкий М. А. Вероятность и случайные процессы. Гродно: ГрГу, 2005.

[6] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. М.: Мир, 1994.

[7] **Харин Ю. С., Зуев Н. М. Теория вероятностей. Минск: БГУ, 2004.**

[8] **Харин Ю. С., Зуев Н. М., Жук Е. Е. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика. Минск: БГУ, 2011.**

[9] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.