§1 Постановка задачи интерполирования

Рассмотрим простейшую задачу интерполирования на отрезке. Пусть $f(x)$ принадлежит некоторому классу функций $\mathbf{F}$ заданных на $[a,b]$.

Выберем систему линейно-независимых функций

$$\omega_i(x) \in \mathbf{F}, \quad x \in [a,b], i = 0,\ldots,n \tag{1}$$

и образуем линейную комбинацию

$$S_n(x) = \alpha_0\omega_0(x) + \ldots + \alpha_n\omega_n(x) \ . \tag{2}$$

Параметры $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ будем выбирать из условия

$$S_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0,\ldots,n. \tag{3}$$

Решив систему (3) относительно α_i получим функцию $S_n(x)$ интерполирующую $f(x)$ по известным значениям $f_i \equiv f(x_i)$. Точки x_i называются узлами интерполирования.

Чтобы система (3) имела единственное решение, ее определитель должен быть ненулевым

$$\begin{vmatrix} \omega_0(x_0) & \omega_1(x_0) & \ldots & \omega_n(x_0) \\ \ldots & & & \\ \omega_0(x_n) & \omega_1(x_n) & \ldots & \omega_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Определение. Система функций $\omega_i(x)$, $i = 0,\dots,n$ для которой выполняются условия (4) называется системой Чебышёва.

Второе условие, связанное с выбором $\omega_i(x)$, вытекает из требования полноты семейства $S_n(x)$ в $\mathbf{F}$:

$\forall f(x) \in \mathbf{F}$, $\forall \varepsilon > 0$ существуют n и такие коэффициенты $\alpha_0,\dots,\alpha_n$, что $\forall x \in [a,b]$ выполняется условие

$$\left| f\left(x - S_n(x)\right) \right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Отметим, что условие полноты не гарантирует сколь угодно точное приближение $f(x)$. Это связано с тем, что $S_n(x)$ зависит от выбора узлов x_i и условия (3).

Определение. Интерполирование функции $f(x)$ с помощью алгебраического многочлена называется алгебраическим интерполированием.

Положим $\omega_i(x) = x^i, i = 0,\ldots,n.$ тогда $S_n(x)$ будет полиномом степени n

$$P_n(x) \equiv S_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_1 x^n \tag{6}$$

При этом определитель Вандермонда (4) ненулевой, если все узлы x_i различные.

Полнота семейства алгебраических полиномов в классе непрерывных функций следует из теоремы Вейерштрасса: если $f(x) \in C[a,b]$,

то $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists P_n(x): \forall x \in [a,b] \;\; \left| f(x) - P_n(x) < \varepsilon \right|$.