Метод градиентного (наискорейшего) спуска

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений $Ax = f$, где A является матрицей порядка n, векторы x и f являются n-мерными векторами. Алгоритм метода градиентного спуска имеет вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(r^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left(Ar^{(k)}, r^{(k)}\right)} r^{(k)}, \quad k = 0,1,...$$

$$r^{(k)} = Ax^{(k)} - f,$$

где $x^{(0)}$ – начальное приближение к решению.

В качестве условия окончания итераций здесь удобно рассматривать $\left\|r^{(k)}\right\| = \left\|Ax^{(k)} - f\right\| \le \varepsilon$. Если это условие выполняется, то $x^{(k)}$ рассматривается в качестве приближенного решения, полученного с точностью ε.

Теорема: Если матрица A симметричная положительно определенная, то метод градиентного спуска сходится при любом начальном приближении.

Замечание: Линейную систему с любой невырожденной матрицей A можно привести к эквивалентной системе с симметричной положительно определенной матрицей. Для этого достаточно умножить обе части системы на матрицу A^T. В полученной таким образом системе $A^T Ax = A^T f$, матрица $A^T A$ обладает всеми нужными свойствами.

Пример: Исходя из начального приближения $x^{(0)} = f$, вычислить первую итерацию метода градиентного спуска для системы $Ax = f$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Решение

Матрица $A = A^T > 0$. Возьмем вектор $x^{(0)} = f = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 10 \end{pmatrix}^T$. Тогда

$r^{(0)} = Ax^0 - f = \begin{pmatrix} 7 & 35 & 30 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -1 & 9 & 10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & 26 & 20 \end{pmatrix}^T,$

$(r^{(0)}, r^{(0)}) = 1140$, $(Ar^{(0)}, r^{(0)}) = 4456$.

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{\left(r^{(0)}, r^{(0)}\right)}{\left(Ar^{(0)}, r^{(0)}\right)} r^{(0)} = \frac{1}{557} \begin{pmatrix} -1697 \\ 1308 \\ 2720 \end{pmatrix}.$$

Задача: Построить сходящийся алгоритм метода градиентного спуска для решения системы $Ax = f$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти с помощью построенного алгоритма $x^{(1)}$ и $r^{(1)}$. В качестве начального приближения взять $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.