Transformations 2D

Julien BERNARD

Dead Pixels Society
Université de Franche-Comté

version 1

Coordonnées homogènes

Coordonnées homogènes

Un point A de coordonnées (x_A, y_A) a pour coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de transformation 2D

Une matrice de transformation 2D est une matrice 3×3 qui s'appliquent à des coordonnées homogènes. Par exemple, la matrice de l'identité est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation

Translation

La translation de vecteur $\overrightarrow{V} = (V_x, V_y)$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_x \\ 0 & 1 & V_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un point A est transformé en point B de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_B = x_A + V_x \\ y_B = y_A + V_y \end{cases}$$

Rotation

La rotation de centre O et d'angle α a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un point A est transformé en point B de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_B = x_A \cos\alpha - y_A \sin\alpha \\ y_B = x_A \sin\alpha + y_A \cos\alpha \end{cases}$$

Dilatation

Dilatation

La dilatation de centre O et de facteurs (S_x, S_y) a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un point A est transformé en point B de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_B = S_x \cdot x_A \\ y_B = S_y \cdot y_A \end{cases}$$

Combinaison de transformations

Combinaison de transformations

Pour combiner plusieurs transformations, on multiplie leurs matrices de transformation dans l'ordre inverse d'application des transformations.

Exemple (Rotation de centre $C = (x_C, y_C)$ et d'angle α)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_C \cdot (1-\cos\alpha) + y_C \cdot (1-\sin\alpha) \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_C \cdot (1-\cos\alpha) - x_C \cdot (1-\sin\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple (Dilatation de centre $C = (x_C, y_C)$ et de facteurs (S_x, S_y))

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & x_C \cdot (1-S_x) \\ 0 & S_y & y_C \cdot (1-S_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$