

CURSO: ANÁLISIS MATEMÁTICO III

TEMA: COORDENADAS POLARES

ALDAIR ORBEGOZO

SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

En los problemas 1-6, grafique el punto con las coordenadas polares indicadas

1. $(3, \pi)$ 2. $(2, -\pi/2)$ 3. $(-\frac{1}{2}, \pi/2)$
 4. $(-1, \pi/6)$ 5. $(-4, -\pi/6)$ 6. $(\frac{2}{3}, 7\pi/4)$

En los problemas 7 a 12, encuentre coordenadas polares alternadas que satisfagan

- a) $r > 0, \theta < 0$ b) $r > 0, \theta > 2\pi$
 c) $r < 0, \theta > 0$ d) $r < 0, \theta < 0$

para cada punto con las coordenadas polares indicadas.

7. $(2, 3\pi/4)$ 8. $(5, \pi/2)$ 9. $(4, \pi/3)$
 10. $(3, \pi/4)$ 11. $(1, \pi/6)$ 12. $(3, 7\pi/6)$

En los problemas 13-18, determine las coordenadas rectangulares de cada punto con las coordenadas polares indicadas

13. $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$ 14. $(-1, \pi/4)$ 15. $(-6, \pi/3)$
 16. $(\sqrt{2}, 11\pi/6)$ 17. $(4, 5\pi/4)$ 18. $(-5, \pi/2)$

En los problemas 19-24, determine las coordenadas polares que satisfagan

- a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$ b) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$
 para cada punto con las coordenadas rectangulares indicadas.

19. $(-2, -2)$ 20. $(0, -4)$ 21. $(1, -\sqrt{3})$
 22. $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ 23. $(7, 0)$ 24. $(1, 2)$

En los problemas 25-30, dibuje la región sobre el plano que consiste en los puntos (r, θ) cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones indicada

25. $2 \leq r < 4, 0 \leq \theta \leq \pi$
 26. $2 < r \leq 4$
 27. $0 \leq r \leq 2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$
 28. $r \geq 0, \pi/4 < \theta < 3\pi/4$

$$29. -1 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$30. -2 \leq r < 4, \pi/3 \leq \theta \leq \pi$$

En los problemas 31-40, encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada.

$$31. y = 5$$

$$32. x + 1 = 0$$

$$33. y = 7x$$

$$34. 3x + 8y + 6 = 0$$

$$35. y^2 = -4x + 4$$

$$36. x^2 - 12y - 36 = 0$$

$$37. x^2 + y^2 = 36$$

$$38. x^2 - 12y = 1$$

$$39. x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$40. x^3 + y^3 - xy = 0$$

En los problemas 41-52, encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada.

$$41. r = 2\cos \theta$$

$$42. r \cos \theta = -4$$

$$43. r = 6\sin 2\theta$$

$$44. 2r = \tan \theta$$

$$45. r^2 = 4 \sin 2\theta$$

$$46. r^2 \cos 2\theta = 16$$

$$47. r + 5 \sin \theta = 0$$

$$48. r = 2 + \cos \theta$$

$$49. r = \frac{2}{1 + 3\cos \theta}$$

$$50. r(4 - \sin \theta) = 10$$

$$51. r = \frac{5}{3\cos \theta + 8\sin \theta}$$

$$52. r = 3 + 3 \sec \theta$$

53. ¿Cómo expresaría la distancia d entre dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) en términos de sus coordenadas polares?

54. Usted sabe cómo encontrar la ecuación rectangular de una recta que pasa por dos puntos con coordenadas rectangulares. ¿Cómo encontraría una ecuación polar de una recta que pasa por dos puntos con coordenadas polares

(r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) ? Aplique sus ideas encontrando una ecuación polar de la recta que pasa por $(3, 3\pi/4)$ y $(1, \pi/4)$. Determine las coordenadas polares de las intersecciones de la recta con los ejes x , y .

55. En coordenadas rectangulares las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función $y = f(x)$ se determinan a partir de las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. En la siguiente sección se graficarán las ecuaciones polares $r = f(\theta)$. ¿Cuál es la importancia de las soluciones de la ecuación $f(\theta) = 0$?

GRAFICA DE ECUACIONES POLARES

En los problemas 1-30, identifique por nombre la gráfica de la ecuación polar dada. Después trace la gráfica de la ecuación.

1. $r = 6$
2. $r = -1$
3. $\theta = \pi/3$
4. $\theta = 5\pi/6$
5. $r = 2\theta, \theta \leq 0$
6. $r = 3\theta, \theta \geq 0$
7. $r = 1 + \cos \theta$
8. $r = 5 - 5 \sin \theta$
9. $r = 2(1 + \sin \theta)$
10. $2r = 1 - \cos \theta$
11. $r = 1 - 2 \cos \theta$
12. $r = 2 + 4 \sin \theta$
13. $r = 4 - 3 \sin \theta$
14. $r = 3 + 2 \cos \theta$
15. $r = 4 + \cos \theta$
16. $r = 4 - 2 \cos \theta$
17. $r = \sin 2\theta$
18. $r = 3 \sin 4\theta$
19. $r = 3 \cos 3\theta$
20. $r = 2 \sin 3\theta$
21. $r = \cos 5\theta$
22. $r = 2 \sin 9\theta$
23. $r = 6 \cos \theta$
24. $r = -2 \cos \theta$
25. $r = -3 \sin \theta$
26. $r = 5 \sin \theta$
27. $r^2 = 4 \sin 2\theta$
28. $r^2 = 4 \cos 2\theta$
29. $r^2 = -25 \cos 2\theta$
30. $r^2 = -9 \sin 2\theta$

En los problemas 31 y 32, la gráfica de la ecuación dada es una espiral. Dibuje su gráfica

31. $r = 2^\theta, \theta \geq 0$ (logarítmica)
32. $r\theta = \pi, \theta > 0$ (hiperbólica)

En los problemas 33-38, encuentre una ecuación de la gráfica polar dada.

35.

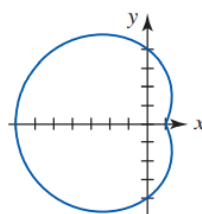


FIGURA 10.5.19 Gráfica del problema 35

36.

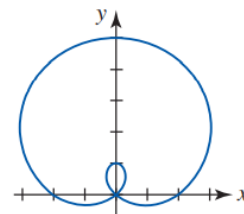


FIGURA 10.5.20 Gráfica del problema 36

37.

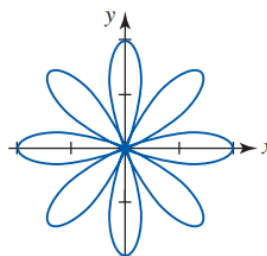


FIGURA 10.5.21 Gráfica del problema 37

38.

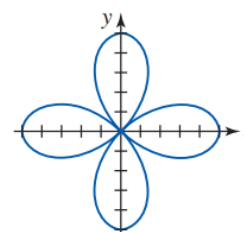


FIGURA 10.5.22 Gráfica del problema 38

CALCULO DE COORDENADAS POLARES

En los problemas 1-6, encuentre la pendiente de la recta tangente en el valor indicado de θ .

1. $r = \theta, \theta = \pi/2$
2. $r = 1/\theta, \theta = 3$
3. $r = 4 - 2 \sin \theta, \theta = 3\pi/4$
4. $r = 1 - \cos \theta, \theta = \pi/6$
5. $r = \sin \theta, \theta = \pi/6$
6. $r = 10 \cos \theta, \theta = \pi/4$

En los problemas 7 y 8, determine los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada en los cuales la recta tangente es horizontal y los puntos en los que la recta tangente es vertical.

7. $r = 2 + 2 \cos \theta$

8. $r = 1 - \sin \theta$

En los problemas 9 y 10, determine la ecuación rectangular de la recta tangente en el punto indicado.

9. $r = 4 \cos 3\theta$

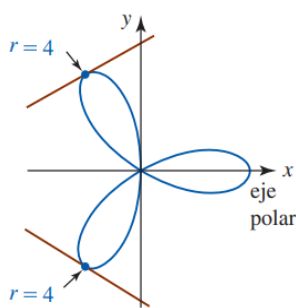


FIGURA 10.6.11 Gráfica del problema 9

10. $r = 1 + 2 \cos \theta$

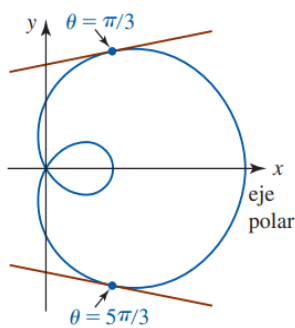


FIGURA 10.6.12 Gráfica del problema 10

En los problemas 11-16, encuentre la ecuación polar de cada recta tangente a la gráfica polar en el origen.

11. $r = -2 \sin \theta$

12. $r = 3 \cos \theta$

13. $r = 1 + \sqrt{2} \sin \theta$

14. $r = 1 - 2 \sin \theta$

15. $r = 2 \cos 5\theta$

16. $r = 2 \sin 2\theta$

En los problemas 17-24, encuentre el área de la región que está acotada por la gráfica de la ecuación polar que se indica.

17. $r = 2 \sin \theta$

18. $r = 10 \cos \theta$

19. $r = 4 + 4 \cos \theta$

20. $r = 1 - \sin \theta$

21. $r = 3 + 2 \sin \theta$

22. $r = 2 + \cos \theta$

23. $r = 3 \sin 2\theta$

24. $r = \cos 3\theta$

En los problemas 25-30, determine el área de la región que está acotada por la gráfica de una ecuación polar dada y los rayos indicados.

25. $r = 2\theta$, $\theta \geq 0$, $\theta = 0$, $\theta = 3\pi/2$

26. $r\theta = \pi$, $\theta > 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$

27. $r = e^\theta$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$

28. $r = 10e^{-\theta}$, $\theta = 1$, $\theta = 2$

29. $r = \tan \theta$, $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$

30. $r \sin \theta = 5$, $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/3$

En los problemas 31 y 32, la gráfica es de la ecuación polar $r = 1 + 2 \cos \theta$. Determine el área de la región sombreada

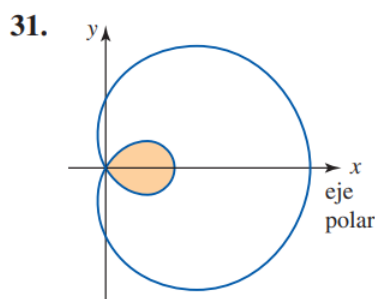


FIGURA 10.6.13 Región del problema 31

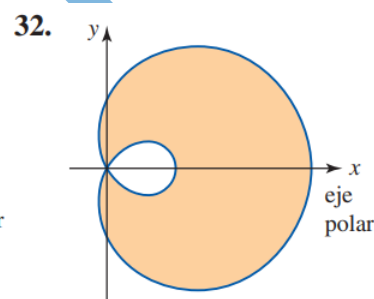


FIGURA 10.6.14 Región del problema 32

En los problemas 33-35, determine el área de la región descrita.

33. Fuera del círculo $r = 1$ y dentro de la curva de la rosa $r = 2 \cos 3\theta$

34. Comun a los interiores de los círculos $r = \cos \theta$ y $r = \sin \theta$

35. Dentro del círculo $r = 5 \sin \theta$ y fuera de la limacón $r = 3 - \sin \theta$