Лабораторная работа №5

Экспертные оценки, ранговая корреляция и конкордация

Пусть в процессе системного анализа нам пришлось учитывать некоторую величину **U**, измерение которой возможно лишь по порядковой шкале **(Ord).** Например, нам приходится учитывать 10 целей функционирования системы и требуется выяснить их относительную значимость, удельные веса.

Если имеется группа лиц, компетентность которых в данной области не вызывает сомнений, то можно опросить каждого из *экспертов,* предложив им расположить цели по важности или “проранжировать” их. В простейшем случае можно не разрешать повторять ранги, хотя это не обязательно – повторение рангов всегда можно учесть.

Результаты экспертной оценки в нашем примере представим таблицей рангов целей:

Таблица5.1

Эксперты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
A	**3**	**5**	**1**	**8**	**7**	**10**	**9**	**2**	**4**	**6**	**55**
B	**5**	**1**	**2**	**6**	**8**	**9**	**10**	**3**	**4**	**7**	**55**
Сумма рангов	**8**	**6**	**3**	**14**	**15**	**19**	**19**	**5**	**8**	**13**	
Суммарный ранг	**4.5**	**3**	**1**	**7**	**8**	**9.5**	**9.5**	**2**	**4.5**	**6**	**55**

Итак, для каждой из целей $\mathbf{T_i}$мы можем найти сумму рангов, определенных экспертами, и затем суммарный или *результирующий* ранг цели $\mathbf{R_i}$. Суммарный ранг равный 1 присваивается той цели у которой сумма рангов является наименьшей. И так далее, по возрастанию. Если суммы рангов совпадают – назначается среднее значение.

Метод ранговой корреляции позволяет ответить на вопрос – насколько коррелированны, неслучайны ранжировки каждого из двух экспертов, а значит – насколько можно доверять результирующим рангам? Как обычно, выдвигаетсяосновная гипотеза– об отсутствии связи междуранжировками устанавливается вероятность справедливости этой гипотезы. Для этогоможно использовать два подхода: определение коэффициентов ранговой корреляции Спирмэна или Кендалла.

Более простым в реализации является первый – вычисляется значение коэффициента Спирмэна

$$\boldsymbol{R_s} = \mathbf{1} - \frac{6\bullet\sum(d_i)^2}{n\bullet(n^2-1)}; \qquad (5.1)$$

Где $\boldsymbol{d_i}=(R_A-R_B)$ определяются разностями рангов первой и второй ранжировок по $\boldsymbol{n}$ объектов в каждой.

Коэффициент корреляции Спирмена изменяется от -1 до +1. Равенство единице достигается при одинаковых ранжировках.Значение–1 имеет место при противоположных ранжировках. При равенстве коэффициента корреляции нулю ранжировки считаются линейно независимыми.

Значимость коэффициента Спирмена на основе t-критерия Стьюдента

По формуле

$$t_p = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

$$t_p > t_{kp} \quad (\alpha, k=n-2)$$

В нашем примере сумма квадратов разностей рангов составляет 35, а коэффициенткорреляцииСпирмэнаоколо0.8,чтодаетзначениевероятности гипотезы о полной независимости двух ранжировок всего лишь 0.004.

При необходимости можно воспользоваться услугами группы из ***m*** экспертов, установить результирующие ранги целей, но тогда возникнет вопрос о согласованности мнений этих экспертов или ***конкордации***.

Пусть у нас имеются ранжировки 4 экспертов по отношению к 6 факторам, которые определяют эффективность некоторой системы.

Таблица5.3

Факторы--> Эксперты	1	2	3	4	5	6	Сумма
A	**5**	**4**	**1**	**6**	**3**	**2**	**21**
B	**2**	**3**	**1**	**5**	**6**	**4**	**21**
C	**4**	**1**	**6**	**3**	**2**	**5**	**21**
D	**4**	**3**	**2**	**5**	**1**	**6**	**21**
Суммарангов Сум.ранг	**15** **4**	**11** **2**	**10** **1**	**19** **6**	**12** **3**	**17** **5**	**84**
Отклонение суммы от среднего	**+1** **1**	**-3** **9**	**-4** **16**	**+5** **25**	**-2** **4**	**+3** **9**	**0** **64**

Заметим, что полная сумма рангов составляет 84, что дает в среднем по 14 на фактор.

Для общего случая ***n***факторов и ***m***экспертов среднее значение суммы рангов для любого фактора определится выражением

$$\Delta = 0.5 \bullet m \bullet (n+1) \qquad (5.2)$$

Теперь можно оценить степень согласованности мнений экспертов по отношению к шести факторам. Для каждого из факторов наблюдается отклонение суммы рангов, указанных экспертами, от среднего значениятакой суммы. Поскольку сумма этих отклонений всегда равна нулю, для их усреднения разумно использовать квадраты значений.

В нашем случае сумма таких квадратов составит **S** = 64, а в общем случае эта сумма будет наибольшей только при полном совпадении мнений всех экспертов по отношению ко всем факторам:

$$\mathbf{S}_{max} = m^2(n^3 - n)/12 \qquad (5.3)$$

М. Кендаллом предложен показатель согласованности или ***Коэффициентконкордации***,определяемыйкак

$$K = \frac{S}{S_{max}} \qquad \frac{12 \bullet S}{m^2 \bullet (n^3 - n)} \qquad (5.4)$$

Значимость коэффициента конкордации проверяется на основе χ^2 −критерия Пирсона:

$$\chi_p^2 = \frac{12S}{m \cdot n(n-1)}$$

$\chi_p^2 = 6{,}4$, χ_{kp}^2=11,1 (a=0.05, k=n-1)

Расчетное значение χ_p^2*меньше* χ_{kp}^2*, что подтверждает незначимость коэффициентов конкордации и свидетельствует о слабой связи между рассматриваемыми признаками.*

В нашем примере значение коэффициента конкордациисоставляетоколо 0.229, что при четырех экспертах и шести факторах достаточно, чтобы с вероятностью не более 0.05 считать мнения экспертов несогласованными. Дело в том, что как раз ***случайность*** ранжировок, их некоррелированность просчитывается достаточно просто. Так для нашего примера указанная вероятность соответствует сумме квадратов отклонений S = 143.3, что намного больше 64.

В заключение вопроса об особенностях метода экспертных оценок в системном анализе отметим еще два обстоятельства.

- В первом примере мы получили результирующие ранги 10 целей функционирования некоторой системы. Как воспользоваться этой результирующей ранжировкой? Как перейти от ранговой (**Ord**) шкалы целей к шкале весовых коэффициентов – в диапазоне от 0 до 1?

Здесь обычно используются элементарные приемы нормирования. Если цель 3 имеет ранг 1, цель 8 имеет ранг 2 и т.д., а сумма рангов составляет 55, то весовой коэффициент для цели 3 будет наибольшим, и сумма весов всех10 целей составит 1.

Весцелипридетсяопределятькак

(11-1) / 55 для 3-й цели;

(11-2)/ 55для8-ойцелиит.д.

• При использовании групповой экспертной оценки можно не только выяснять мнение экспертов о показателях, необходимых для системного анализа. Очень часто в подобных ситуациях используют так называемый ***метод Дельфы*** (от легенды о дельфийском оракуле).

Опрос экспертов проводят в несколько этапов, как правило – анонимно. После очередного этапа от эксперта требуется не просто ранжировка, но и ее обоснование. Эти обоснования сообщаются всем экспертам перед очередным этапом без указания авторов обоснований.

Имеющийся опыт свидетельствует о возможностях существенно повысить представительность, обоснованность и, главное, достоверность суждений экспертов. В качестве “побочного эффекта” можно составить мнение о профессиональности каждого эксперта.

Варианты индивидуальных заданий

Определить коэффициент Спирмена и коэффициент конкордации по своему варианту.

1.

Эксперт	Альтернатива					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$Э_1$	10	6	9	2	4	6
$Э_2$	9	7	20	5	2	6

Эксперт	Проблема					
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$Э_1$	1	4	3	2	6	5
$Э_2$	2	1	3	4	5	6
$Э_3$	2	4	5	1	6	3
$Э_4$	1	3	4	2	6	5
$Э_5$	4	1	3	2	6	5

2.

Эксперт	Альтернатива				
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$Э_1$	2	1	4	3	5
$Э_2$	1	2	4	5	3

Признак	Эксперт									
	$Э_1$	$Э_2$	$Э_3$	$Э_4$	$Э_5$	$Э_6$	$Э_7$	$Э_8$	$Э_9$	$Э_{10}$
Шум	6	1	6	6	6	6	4	5	6	6
Цвет футеровки	4	5	4	5	5	3	5	6	4	5
Цвет пламени	2	2	2	3	3	2	1	1	1	2
Цвет дыма	1	4	3	2	2	4	3	3	3	3
Качество дыма	3	3	1	1	1	1	2	2	2	1
Искры	5	6	5	4	4	5	6	4	5	4

3.

Критерий	Эксперт			
	$Э_1$	$Э_2$	$Э_3$	$Э_4$
$У_1$	10	15	8	5
$У_2$	5	6	3	2

Эксперт	Банк				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$Э_1$	10	34	20	54	60
$Э_2$	87	53	23	70	56
$Э_3$	10	25	70	90	23
$Э_4$	27	80	98	24	11
$Э_5$	78	81	56	45	34

4.

Цель	Мероприятие				
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
$У_1$	5	3	1	2	4
$У_2$	5	4	2	1	3

Эксперт	Модем					
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$Э_1$	1	2	3	4	6	5
$Э_2$	2	3	4	5	6	1
$Э_3$	3	1	2	6	5	4
$Э_4$	2	3	4	5	6	1
$Э_5$	1	2	5	6	4	3
$Э_6$	2	1	4	6	5	3

5.

Критерий	Фактор				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	4	3	3	2	5
y_2	3	2	1	5	4

Эксперт	Марка автомобиля						
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
$Э_1$	3	4	1	6	8	9	3
$Э_2$	2	5	7	6	9	1	4
$Э_3$	1	3	7	3	7	4	5
$Э_4$	2	7	9	3	5	7	2
$Э_5$	7	4	9	2	1	5	7
$Э_6$	3	6	4	7	1	3	7
$Э_7$	6	2	4	1	9	1	10

6.

Эксперт	Марка пива				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Э_1$	15	13	14	12	15
$Э_2$	12	15	14	16	15
$Э_3$	15	14	13	12	13
$Э_4$	10	12	17	10	15

Цель	Мероприятие						
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
$Ц_1$	20	15	8	10	2	4	7
$Ц_2$	15	10	6	12	1	3	6

7.

Социологический центр	Радиостанция														
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
$Ц_1$	8	14	15	7	3	1	2	4	6	5	12	13	10	11	9
$Ц_2$	7	3	1	2	4	6	5	12	13	10	11	9	14	15	8
$Ц_3$	3	1	2	4	6	5	12	13	10	11	9	7	14	8	15

$Э_j/Z_i$	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
$Э_1$	0,3	0,37	0,23	0,1
$Э_2$	0,15	0,35	0,23	0,27

8.

$Э_j/Z_i$	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
$Э_1$	0,2	0,24	0,16	0,4
$Э_2$	0,4	0,25	0,1	0,25

Критерий	Банк				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Э_1$	17	15	16	14	17
$Э_2$	14	17	16	18	17
$Э_3$	17	16	15	14	15
$Э_4$	12	14	19	12	17

9.

Критерий	Банк				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Э_1$	5	4	4	3	6
$Э_2$	4	3	2	6	5

Критерий	Марка автомобиля				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Э_1$	16	14	15	13	16
$Э_2$	13	16	15	17	16
$Э_3$	16	15	14	13	14
$Э_4$	11	13	18	11	16

10.

Критерий	Мероприятие						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$Э_1$	21	16	9	11	3	5	8
$Э_2$	16	11	7	13	2	4	7

Критерий			
	x_1	x_2	x_3
$Э_1$	10	7	9
$Э_2$	3	4	5
$Э_3$	8	6	10
$Э_4$	4	2	7

11.

	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3	Эксперт 4
Фактор 1	4	2	6	6
Фактор 2	8	4	10	3
Фактор 3	4	2	4	1

Критерий	Мероприятие						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$Э_1$	24	19	12	14	6	8	11
$Э_2$	19	14	10	16	5	7	10

12.

Эксперт	Банк				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$Э_1$	10	34	20	54	60
$Э_2$	87	53	23	70	56
$Э_3$	10	25	70	90	23
$Э_4$	27	80	98	24	11
$Э_5$	78	81	56	45	34

Эксперт	Альтернатива				
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$Э_1$	2	1	4	3	5
$Э_2$	1	2	4	5	3

Приложения для определения значимости

Таблица 1П

Проверка статистической значимости корреляционной связи с помощью рангового коэффициента корреляции Спирмена

Квантили распределения Стьюдента $t_{\nu,\alpha}$

ν	Уровни значимости α				ν	Уровни значимости α			
	0,20	0,10	0,05	0,01		0,20	0,10	0,05	0,01
1	3,08	6,31	12,71	63,66	8	1,40	1,86	2,31	3,36
2	1,89	2,92	4,30	9,93	9	1,38	1,83	2,26	3,25
3	1,64	2,35	3,18	5,84	10	1,37	1,81	2,23	3,17
4	1,53	2,13	2,78	4,60	15	1,34	1,75	2,13	2,95
5	1,48	2,02	2,57	4,03	20	1,33	1,73	2,09	2,85
6	1,44	1,94	2,45	3,71	30	1,31	1,70	2,04	2,75
7	1,42	1,90	2,37	3,50	40	1,30	1,68	2,02	2,70

Таблица 2П
Проверка статистической значимости выборочной величины конкордации*W*.

Распределение Пирсона (k=n-1)

k	$P(\chi^2 > \chi^2) = \alpha$						
	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	9,04	12	14,1	16	18,5	20,3	24,3
8	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22	26,1
9	11,4	14,7	16,9	19	21,7	23,6	27,9
10	12,5	16	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	14,8	18,5	21	23,3	26,2	28,3	32,9
13	16	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1