Examen final du 31 mai 2021

Durée : 2 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. **Tous les résultats devront être soigneusement justifiés.**

Exercice 1 (1+2+2 pts).

1. Calculer le PGCD de 145 et 55.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes
$$145x + 55y = 237 \qquad\qquad 145x + 55y = 25.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système
$$\begin{cases} x & \equiv 3 \mod 145 \\ 2x & \equiv 1 \mod 55. \end{cases}$$

Exercice 2 (2+1 pts).

1. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division par 5 de 2^n.
2. Calculer le reste dans la division par 11 de 10^{13}.

Exercice 3 (1+1+1 pts).

1. Déterminer les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.
2. Existe t-il un morphisme f du groupe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ tel que $f(\bar{1}) = \bar{1}$? tel que $f(\bar{1}) = \bar{2}$? Dans le(s) cas où f est un morphisme, dire s'il est injectif et/ou surjectif.
3. Le groupe $((\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times, \times)$ est-il cyclique ?

Exercice 4 (2+1). Écrire la décomposition en cycles disjoints de la permutation
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
et calculer sa signature.

Exercice 5 (1+1+1+1 pts). Un saladier contient 10 papillotes au chocolat noir et 7 papillotes au chocolat blanc. On en tire une poignée de 5 (c'est donc un tirage sans remise, sans ordre).

1. Compter le nombre de tirages qui contiennent exactement 2 papillotes au chocolat blanc.
2. Quelle est la probabilité de n'avoir que des papillotes au chocolat blanc ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une papillote au chocolat noir ?
4. On tire cette fois deux papillotes l'une après l'autre. Quelle est la probabilité que la seconde soit au chocolat noir ?

Exercice 6 (2 pts). Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'ordre pair et e son élément neutre. Montrer qu'il existe au moins un élément $x \neq e$ tel que $x^2 = e$.

Exercice 7 (bonus). Soient p, q deux nombres premiers consécutifs strictement plus grands que 3. Montrer que $N = p + q$ a au moins trois diviseurs propres (c'est-à-dire différents de 1 et N).

Ex 1

1) $\text{pgcd}(145, 55) = 5$

$145 = 2\times 55 + 35$
$55 = 1\times 35 + 20$
$35 = 1\times 20 + 15$
$20 = 1\times 15 + 5$
$15 = 3\times 5 + 0$

2) $145x + 55y = 237$

On constate que $\text{pgcd}(145, 55) \nmid 237$. L'équation n'admet pas de solution

$145x + 55y = 25$

On constate que $\text{pgcd}(145, 55) \mid 145x + 55y$

puisque $\text{pgcd}(145, 55) \mid 25$

l'équation admet donc des solutions :

On a $5 = 20 - 1\times 15$

$5 = 20 - 1\times(35 - 1\times 20)$

$5 = 20 - 1\times 35 + 1\times 20$

$5 = -1\times 35 + 2\times 20$

$5 = -1\times 35 + 2(55 - 1\times 35)$

$5 = -1\times 35 + 2\times 55 - 2\times 35$

$5 = 2\times 55 - 3\times 35$

$5 = 2\times 55 - 3(145 - 2\times 55)$

$5 = 2\times 55 - 3\times 145 + 6\times 55$

$5 = -3\times 145 + 8\times 55$

$145x + 55y$

5

145

$(x_0, y_0) = ((-3), 8)$

On cherche la solution générale :

$145 \times (-3) \times 5 + 55 \times 8 \times 5 = 5 \times 5$

$145 \times (-15) + 55 \times 40 = 25$

$(x_0, y_0) = ((-15), 40)$

Soit a' et $b' \in \mathbb{Z}$, l'équation initiale est sous forme $ax + by = c$ avec $a = 145$ $b = 55$

$a = \text{pgcd}(a, b) \times a'$ $\qquad$ $b = \text{pgcd}(a, b) \times b'$

$145 = 5 \times a'$ $\qquad$ $55 = 5 \times b'$

$a' = 29$ $\qquad$ $b' = 11$

L'ensemble des solutions ~~particulière~~ géné est :

$S = \{[(-15) + 11k, \; 40 - 29k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b $\qquad$ a

3x

$$S \begin{cases} x \equiv 3 \bmod 145 \\ 2x \equiv 1 \bmod 55 \end{cases}$$

$\text{pgcd}(145, 55) = 5$

$\text{ppcm}(145, 55) = 1595$

On cherche a inverse $2x \equiv 1 \bmod 55$

On a $2x \equiv 1 \bmod 55$

$\Leftrightarrow 2 \times 28 x \equiv 1 \bmod 55$

$\Leftrightarrow x \equiv 28 \bmod 55$

a' × pgcd

?

L'équation est équivalente à :

$$S : \begin{cases} x \equiv \overset{a}{3} \bmod \overset{m}{145} \\ x \equiv \overset{b}{28} \bmod \overset{n}{55} \end{cases}$$

On constate que $\mathrm{pgcd}(145,55) \mid 28-3$, l'éq admet donc des solutions

On applique l'algo Euclide à $(145, 55)$

$$145u + 55v = 5$$

avec $u = (-3)$ $\quad v = 8$

$$m' = \frac{m}{\mathrm{pgcd}(a,b)} = \frac{145}{5} = 29$$

$$n' = \frac{n}{\mathrm{pgcd}(a,b)} = \frac{55}{5} = 11$$

Solution particulière : $x = bum' + avn'$

$$= 28 \times (-3) \times 29 + 3 \times 8 \times 11$$

$$= -2436 + 264$$

$$= -2172$$

Solution générale : $\{x = -2172 + 1595k, k \in \mathbb{Z}\}$

8 16 32

64

Ex2 :

1)

n	0	1	2	3	4	5	6
$2^n \bmod 5$	1	2	4	3	1	2	4

$$2^n \equiv \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \mod 5 \\ 2 & n \equiv 1 \mod 5 \\ 4 & n \equiv 2 \mod 5 \\ 3 & n \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

2) $10^{13} \mod 11$

On cherche d'abord $10 \mod 11$

$10 \equiv 10 \mod 11$

$\equiv -1 \mod 11$

Donc $10^{13} \equiv (-1)^{13} \mod 11 \equiv -1 \mod 11$

Ex 4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sigma = (125)(34)$

Signature $= \varepsilon((125))\,\varepsilon((34))$

$= (-1)^{3-1}(-1)^{2-1}$

$= -1$

Ex 5

$A = 10$ Noir

$B = 7$ Blanc

On tire 5 fois

1) Avec 5 tirage, il faut tirer :

2B parmi 7B : C_7^2 A = {Contenir 2 blanc

3N parmi 10N : C_{10}^3

$\Rightarrow p(A) = C_7^2 \times C_{10}^3$

2) Si B : " 5 Blancs "

On a $B = C_7^5$

pour Ω = " 5 blanc "

$\Rightarrow \Omega = C_{17}^5$

$\Rightarrow P(B) = \dfrac{C_7^5}{C_{17}^5}$

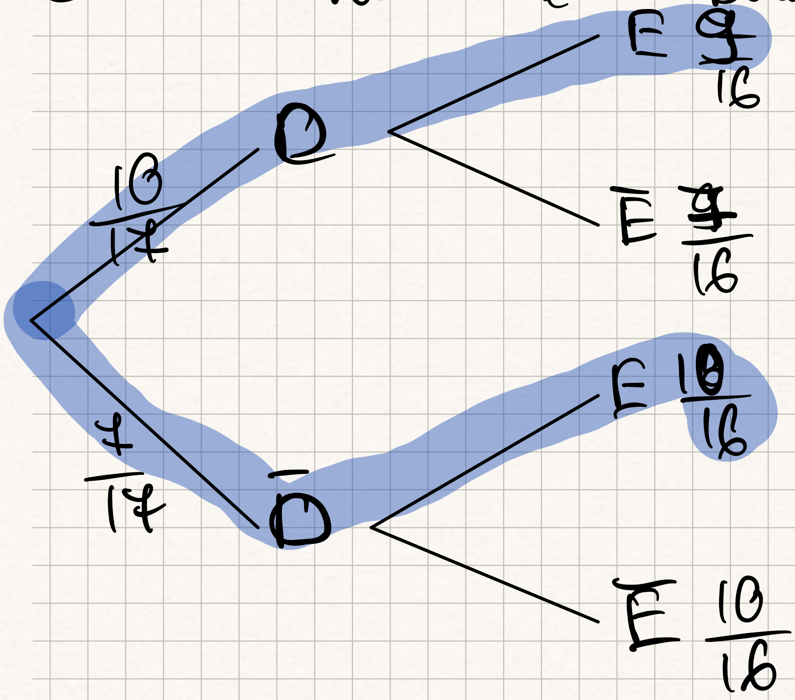
3) C = {" Au moins 1 choco noir "

$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{C_7^5}{C_{17}^5}$

4) D = " Noir au premier tirage "

E = " Noir au 2eme tirage "

On a 10 Noirs et 7 Blancs



$$P(E) = P(D \cap E) + P(\bar{D} \cap E)$$

$$= \frac{10}{17} \times \frac{9}{16} + \frac{7}{17} \times \frac{10}{16}$$

$$= \frac{10}{17}$$

Redo 2

Ex 1 :

1) $PGCD(145, 55) = 5$

$145 = 2 \times 55 + 35$

$55 = 1 \times 35 + 20$

$35 = 1 \times 20 + 15$

$20 = 1 \times 15 + 5$

$15 = 3 \times 5 + 0$

2) $145x + 55y = 237$

On constate que $pgcd(145, 55) \nmid 237$, l'équation n'admet pas de solutions

$145x + 55y = 25$

On constate que $\mathrm{pgcd}(145, 55) \mid 25$, l'équation admet des solution

On cherche solution particulière :

$5 = 20 - 1 \times 15$

$5 = 20 - 1 \times (35 - 1 \times 20)$

$5 = 20 - 1 \times 35 + 1 \times 20$

$5 = -1 \times 35 + 2 \times 20$

$5 = -1 \times 35 + 2 \times (55 - 1 \times 35)$

$5 = -1 \times 35 + 2 \times 55 - 2 \times 35$

$5 = 2 \times 55 - 3 \times 35$

$5 = 2 \times 55 - 3 \times (145 - 2 \times 55)$

$5 = 2 \times 55 - 3 \times 145 + 6 \times 55$

$5 = -3 \times 145 + 8 \times 55$

$(x, y) = ((-3), 8)$

On a :

$145x + 55y = 25$

$145 \times (-3) \times 5 + 55 \times (8) \times 5 = 5 \times 5$

$145 \times (-15) + 55 \times 40 = 25$

$(x_0, y_0) = ((-15), 40)$

Soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, l'équation est sous forme

$ax + by = c$ avec $a = 145$ $b = 55$

$a = \mathrm{pgcd}(145, 55) \times a'$ $b = \mathrm{pgcd}(145, 55) \times b'$

$145 = 5 \times a'$ $55 = 5 \times b'$

$a' = 28$ $b' = 11$

$S = \{[(-15) + 11k, 40 - 28k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ex2

1)

n	0	1	2	3	4	5	6
$2^n[5]$	1	2	4	3	1	2	

$$2^n \equiv \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \mod 5 \\ 2 & n \equiv 1 \mod 5 \\ 4 & n \equiv 2 \mod 5 \\ 3 & n \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

2) 10^{13} [11]

On a $10 \equiv -1$ [11]

$\Leftrightarrow$ $10^{13} \equiv (-1)^{13}$ [11]

$10^{13} \equiv -1$ [11]

Ex4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sigma = (1\,2\,5)(3\,4)$

$\varepsilon = \varepsilon((1\,2\,5))\,\varepsilon((3\,4))$

$= (-1)^{3-1}(-1)^{2-1}$

$= -1^2 \times (-1) = -1$

Ex 5

10 papillotes choco Noir

7 papillotes au choco Blanc

On tire 5 fois

1) A : " Nbr de tirages qui contiennent 2 papillote blanc"

$P(A) = C_7^2 \times C_7^3$

2) B : " Tirer que choco blanc "

$B = C_7^5$

Ω = "5 Blanc" , $\Omega = C_{17}^5$

$$P(B) = \frac{C_7^5}{C_{17}^5}$$

3) C : " Tirer au moins 1 choco noir "

B = " 5 Choco blancs "

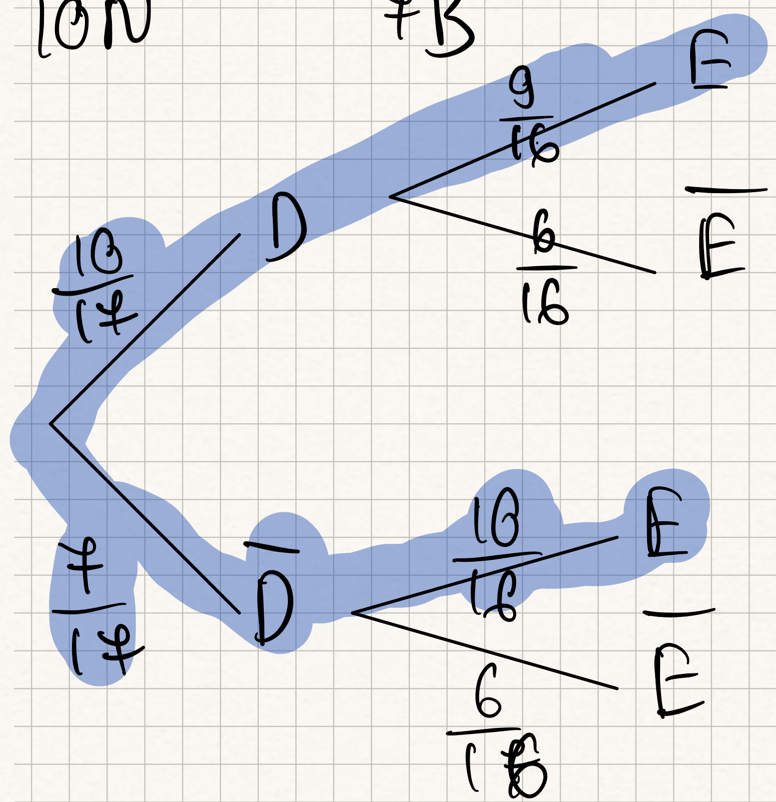
$C = \overline{B}$

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{C_7^5}{C_{17}^5}$$

4) D = "Noir en premier"

E = "Noir en 2eme"

10N 7B



$P(E) = P(D \cap E)$
$+ P(\bar{D} \cap E)$

$= \frac{10}{17} \times \frac{9}{16} + \frac{7}{17} \times \frac{10}{16}$

$= \frac{10}{17}$

Ex 1

1) Calculer le PGCD de 145 et 55

PGCD(145, 55) = 5

$145 = 2 \times 55 + 35$

$55 = 1 \times 35 + 20$

$35 = 1 \times 20 + 15$

$20 = 1 \times 15 + 5$

$15 = 3 \times 5 + 0$

2) $145x + 55y = 237$

On constate que $5 \mid 145x + 55y$ et $5 \nmid 237$ donc l'équation admet pas de solution

$145x + 55y = 25$

On constate que $5 \mid 145x + 55y$ et $5 \mid 25$ donc l'équation admet des solution

On a :

$$5 = 20 - 1\times 15$$
$$5 = 20 - 1\times(35 - 1\times 20)$$
$$5 = 20 - 1\times 35 + 1\times 20$$
$$5 = -1\times 35 + 2\times 20$$
$$5 = -1\times 35 + 2\times(55 - 1\times 35)$$
$$5 = -1\times 35 + 2\times 55 - 2\times 35$$
$$5 = +2\times 55 - 3\times 35$$
$$5 = +2\times 55 - 3(145 - 2\times 55)$$
$$5 = 2\times 55 - 3\times 145 + 6\times 55$$
$$5 = -3\times 145 + 8\times 55$$

$(x, y) = ((-3), 8)$

Dans $145x + 55y = 25$

On a :

$$145\times(-3)\times 5 + 55\times 8\times 5 = 5\times 5$$
$$145\times(-15) + 55\times 40 = 25$$

Sol parti $(x_0, y_0) = ((-15), 40)$

Soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, l'équation initiale est sous forme $ax + by = c$, avec $a = 145$ $b = 55$

$a = pgcd(a,b) \times a'$ $\qquad$ $b = pgcd(a,b) \times b'$

$145 = 5 \times a'$ $\qquad$ $55 = 5 \times b'$

$a' = 29$ $\qquad$ $b' = 11$

Solution générale : $S = \{[(-15) + 11k, 40 - 29k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3)

$$S : \begin{cases} x \equiv 3 \mod 145 \\ 2x \equiv 1 \mod 55 \end{cases}$$

On cherche à inverser $2x \equiv 1 \mod 55$

On a $2 \times 28 \equiv 1 \mod 55$

$\Leftrightarrow 28 \times 2x \equiv 1 \times 28 \mod 55$

$\Leftrightarrow x \equiv 28 \mod 55$

Notre système est équivalent à :

$$S' = \begin{cases} x \equiv \overset{a}{3} \mod 145^{m} \\ x \equiv \overset{b}{28} \mod 55^{n} \end{cases}$$

$pgcd(145, 55) = 5$ $\qquad$ $ppcm(145, 55) = 1595$

On constate que $pgcd(145, 55) \mid 28 - 3$, le système admet de solution

On applique l'algo Euclide à $(145, 55)$

$145x + 55y = 5$

avec

avec $u = (-3)$ $\quad$ $v = 8$

$$m' = \frac{m}{\text{pgcd}(145,55)} = \frac{145}{5} = 29$$

$$n' = \frac{n}{\text{pgcd}(145,55)} = \frac{55}{5} = 11$$

Solution particulière : $x = bum' + avn'$

$= 28 \times (-3) \times 29 + 3 \times 8 \times 11$

$= -2172$

Solution générale : $\{x = -2172 + 1595k, k \in \mathbb{Z}\}$

Ex 2

1)

n	0	1	2	3	4	5	6
$2^n \bmod 5$	1	2	4	3	1	2	4

$$2^n \equiv \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \bmod 5 \\ 2 & n \equiv 1 \bmod 5 \\ 4 & n \equiv 2 \bmod 5 \\ 3 & n \equiv 3 \bmod 5 \end{cases}$$

2021

2) 10^{13} [11]

On sait que $10 \equiv -1 [11]$

$\Leftrightarrow 10^{13} \equiv (-1)^{13} [11]$

$\Leftrightarrow 10^{13} \equiv -1 [-11]$

Ex 4

2022

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (1\,2)(3\,4)(5\,7\,8\,6)$$

$$\varepsilon = \varepsilon((1\,2))\,\varepsilon((3\,4))\,\varepsilon((5\,7\,8\,6))$$
$$= (-1)^{2-1}(-1)^{2-1}(-1)^{4-1}$$
$$= (-1)(-1)(-1)^3 = (-1)$$

Ex 5

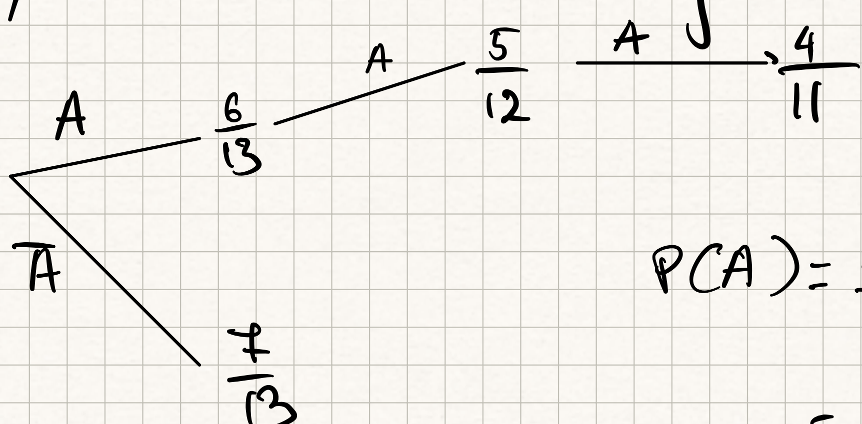
Sachet 1 $\begin{cases} 5R \\ 3B \\ 1V \end{cases}$ Sachet 2 $\begin{cases} 1R \\ 3V \end{cases}$

Totale : 13

Tirer 3 au hasard. Sucessivement

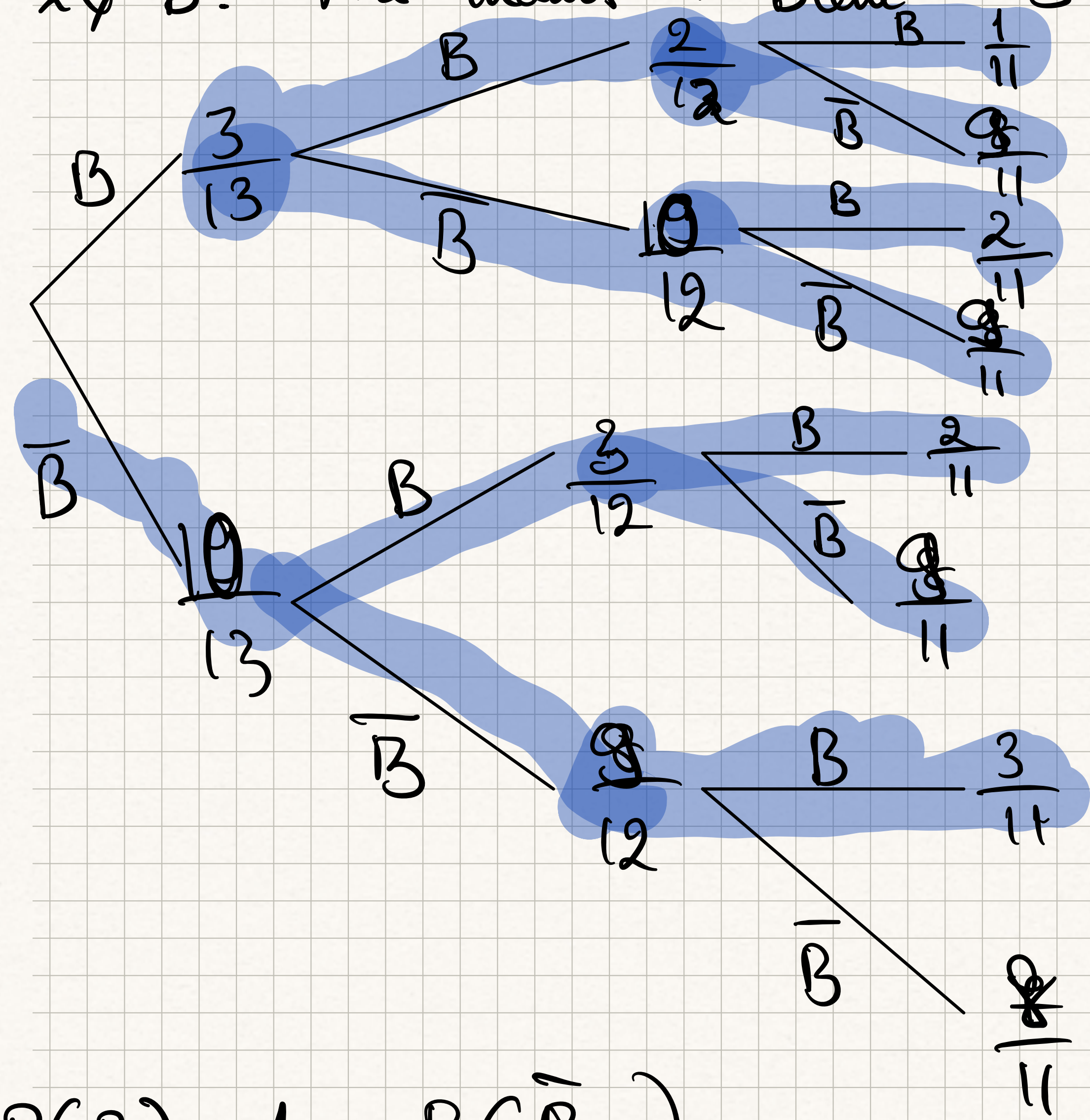
$\Omega = 13 \times 12 \times 11$

1) A : " Tirer 3 Rouges "



$$P(A) = \frac{6}{13} \times \frac{5}{12} \times \frac{4}{11}$$
$$= \frac{10}{143}$$

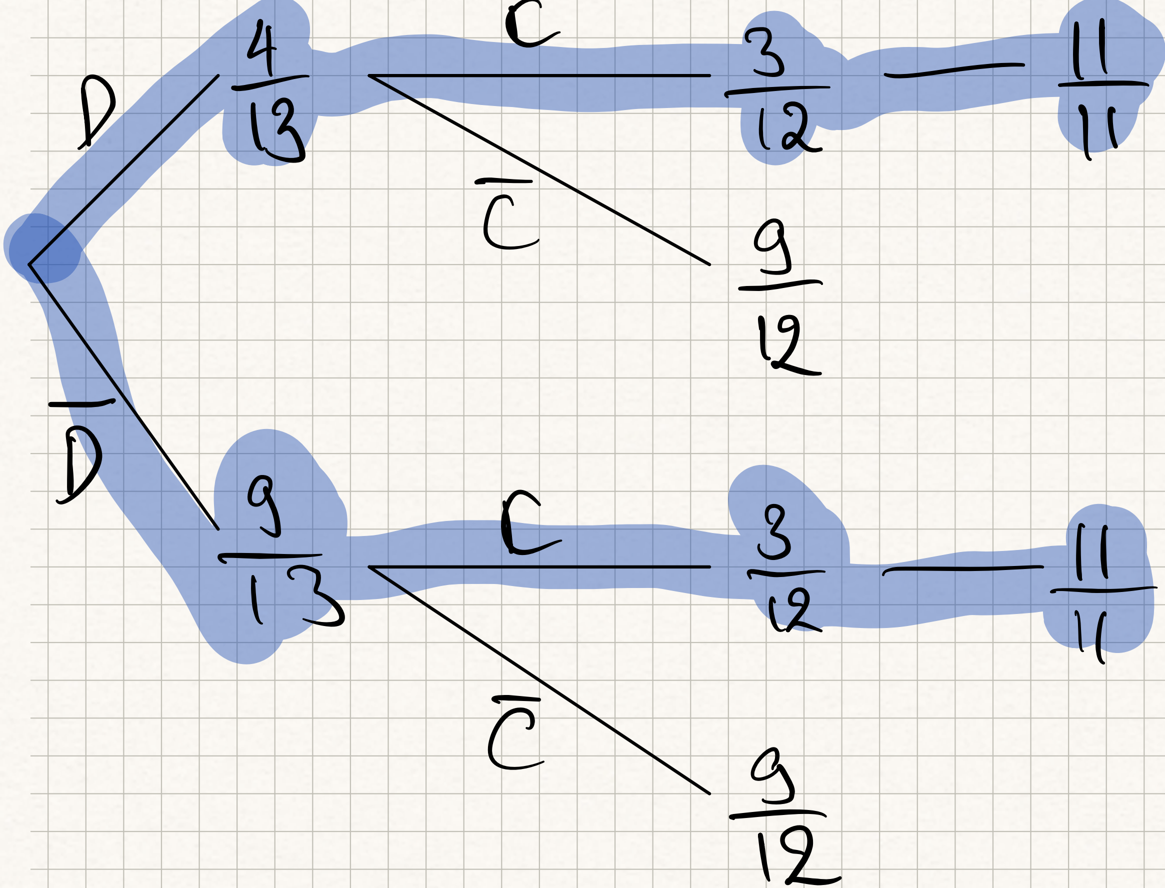
2) B : "Au moins 1 Bleue" 3 fois



$P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$= 1 - \frac{10}{13} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} = 1 - \frac{60}{143} = \frac{83}{143}$

3) C : "2nde Bleue"
D : "1ère Verte"



$$P(C|D) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)}$$

$$P(C|D) = \left(\frac{4}{13} \times \frac{3}{12} \times \frac{11}{11}\right) + \left(\frac{9}{13} \times \frac{3}{12} \times \frac{11}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

A = {La première soit verte} 4

B = {La 2nde soit bleue} 3

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Tirer 3 fois $|\Omega| = 13, 12, 11$ Comme si on avait 13 parts de pizza, puis 12 puis 11. On a X nbr de façons dont on peut manger

$$P(B \cap A) = \frac{4 \times 3 \times 11}{|\Omega|}$$

$$= \frac{4}{13} \times \frac{3}{12} \times \frac{11}{11} = \frac{1}{13}$$

→ 4 vertes premier coup
3 bleues 2ème coup
et 11 dragées restantes $= \frac{4}{13} \times \frac{3}{12} \times \frac{11}{11}$

$$P(A) = \frac{4 \times 12 \times 11}{|\Omega|} = \frac{4}{13}$$

$= \frac{4}{13} \times \frac{12}{12} \times \frac{11}{11}$ → 4 vertes 1er coup
12 possibilités et puis 11 possibilités

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{13}}{\frac{4}{13}} = \frac{1}{4}$$

2022

4) E : " Vert vertes "

F : " 2ème sachet "

$$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

$$P(E\cap F) = \frac{3}{13}\times\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}$$

$$P(F) = \frac{4}{13}\times\frac{3}{12}\times\frac{2}{11} = \frac{24}{121}$$

$$P(E|F) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Ex 1

1) $PGCD(51, 21) = 3$

$51 = 2\times 21 + 9$
$21 = 3\times 9 + 3$
$9 = 3\times 3 + 0$

2) $51x + 21y = 8$

On constate que $pgcd(51,21) \mid 51x + 21y$ et $pgcd(51,21) \nmid 8$. L'équation admet pas de solution

$51x + 21y = 12$

On constate que $pgcd(51,21) | 51x + 21y$ et $pgcd(51,21) | 12$

On cherche sa solution particulière avec pgcd

$3 = 21 - 2\times 9$

$3 = 21 - 2(51 - 2\times 21)$

$3 = 21 - 2\times 51 + 4\times 21$

$3 = -2\times 51 + 5\times 21$

$(x,y) = ((-2), 5)$

On a : $51x + 21y = 3$

$51\times(-2)\times 4 + 21\times(5)\times 4 = 3\times 4$

$51\times(-8) + 21\times 20 = 12$

Solution particulière : $(x_0, y_0) = ((-8), 20)$

Soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, on voit notre équation est sous forme $ax + by = C$

$a = pgcd(a,b)\times a'$ $\quad$ $b = pgcd(a,b)\times b'$

$51 = 3\times a'$ $\quad$ $21 = 3\times b'$

$a' = 17$ $\quad$ $b' = 7$

Solution générale :

$S = \{[(-8) + 7k, 20 - 17k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3) $S \begin{cases} x \equiv 7 \mod 51 \\ 2x \equiv 11 \mod 21 \end{cases}$

On cherche à inverser $2x \equiv 11 \mod 21$

On a $2 \times 11 \equiv 1 \mod 21$

$$11 \times 2x \equiv 11 \times 11 \mod 21$$
$$22x \equiv 121 \mod 21$$
$$x \equiv 16 \mod 21$$

On obtient un nouveau système

$$S' \begin{cases} x \equiv \overset{a}{7} \mod \overset{m}{51} \\ x \equiv \overset{b}{16} \mod \overset{n}{21} \end{cases}$$

On constate que $pgcd(51, 21) \mid 16 - 7$, ce système admet des solutions

On applique l'algo Euclide à $(51, 21)$

$$51u \times 21v = 3$$
$$u = (-2) \quad \text{et} \quad v = 5$$

$$m' = \frac{m}{pgcd(a,b)} = \frac{51}{3} = 17$$

$$n' = \frac{n}{pgcd(a,b)} = \frac{21}{3} = 7$$

$$ppcm(51, 2) = \frac{51 \times 21}{3} = 357$$

Solution particulière : $x = bum' + avn'$

$$= 16 \times (-2) \times 17 + 7 \times 5 \times 7$$
$$= -544 + 245$$
$$= -299$$

Solution générale : $\{x = -299 + 357k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Ex2

1)

n	0	1	2	3	4	5	6
$5^n [124]$	1	5	25	1	5	25	\

$$5^n \equiv \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \mod 124 \\ 5 & n \equiv 1 \mod 124 \\ 25 & n \equiv 2 \mod 124 \end{cases}$$

2) 9^{12367}

$9^0 = 1$
$9^1 = 9$
$9^2 = 81$
$9^3 = 729$

Chiffres unités $\{1, 9\}$

Donc on constate que si l'exposant est paire, chiffre unité est 1, si c'était impaire, chiffre unité est 9

Ici l'exposant est impair donc chiffre unité est 9

Ex 5 2021

$\begin{cases} \text{Blanc } 7 \text{ choco} \\ \text{Noir } 10 \text{ choco} \end{cases}$

Sans remise

Sans ordre

1) $C_7^2 \cdot C_{10}^3$

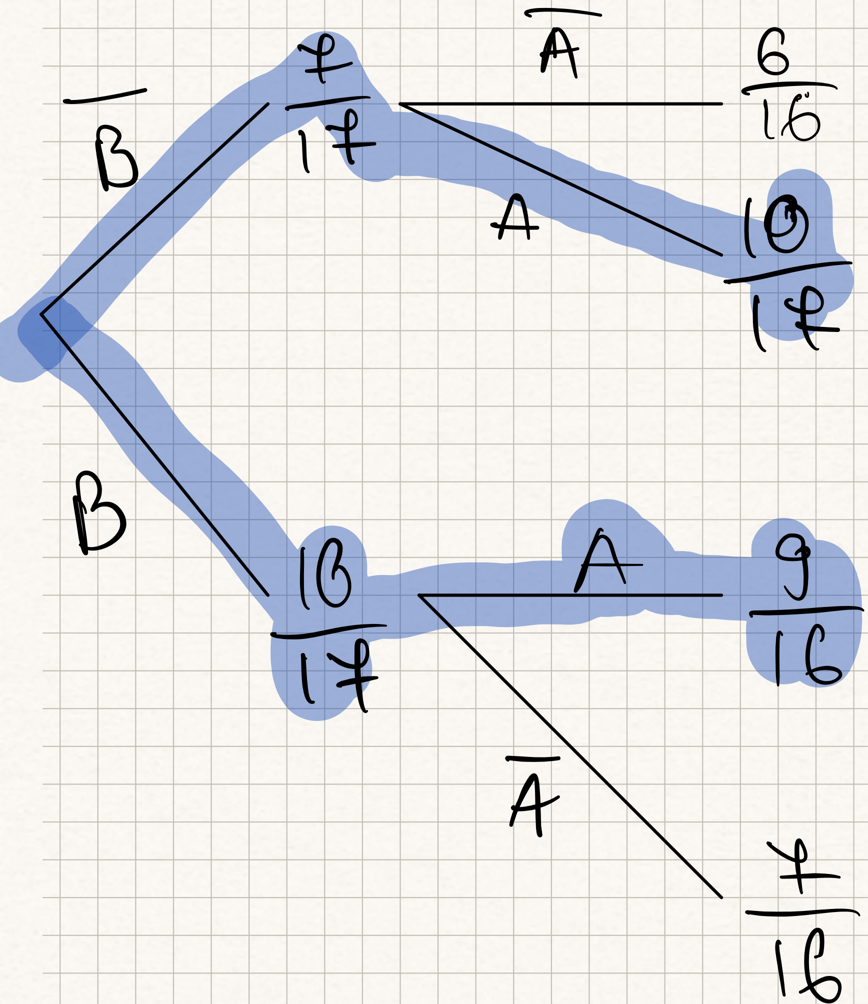
2B parmi 7B : C_7^2

3N parmi 10N : C_{10}^3

2) $\dfrac{C_7^5}{C_{17}^5}$

3) $1 - \dfrac{C_7^5}{C_7^5}$

4) A : "2nde soit choco noir"
B : "1ere soit choco noir"



$$P(A) = P(B \cap A) + P(\overline{B} \cap A)$$

$$= \frac{7}{17} \times \frac{10}{17} + \frac{10}{17} \times \frac{9}{16}$$

$$= \frac{10}{17}$$

$$= P(A)$$