Table de vérité

Exemple $P \oplus Q$

b_1	b_2	b_1 xor b_2
0	0	0
0	1	1 ←
1	0	1 ←
1	1	0

Sémantique pour I fixée

$$[\![.]\!]^I : \text{Formule} \to \mathbb{B}$$

Sémantique pour φ fixée (colonne)

$$[\![\varphi]\!] : \mathbb{B}^{\mathcal{I}_P(\varphi)} \to \mathbb{B}$$

$$\varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi_{b_1=0, b_2=1} \vee \varphi_{b_1=1, b_2=0}$$

$$\varphi_{0,1} \overset{\text{def}}{=} \neg P_1 \wedge P_2$$

$$\varphi_{1,0} \overset{\text{def}}{=} P_1 \wedge \neg P_2$$

Théorème de complétude fonctionnelle : Pour toute fonction booléenne $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ pour $n > 0$, il existe une formule propositionnelle φ avec $F_P(\varphi) = \{P_1, \dots, P_n\}$ telle que $f = [\![\varphi]\!]$

Démonstration Si $f(b_1, \dots, b_n) = 0$ alors φ def

$$P_1 \wedge \neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg P_n$$

Sinon φ def

$$\bigvee_{\substack{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^n \\ \text{tq } f(b_1, \dots, b_n) = 1}} \underbrace{\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \begin{cases} P_i & \text{si } b_i = 1 \\ \neg P_i & \text{si } b_i = 0 \end{cases}}_{\varphi_{(b_1 \dots b_n)} \text{ avec } [\![\varphi_{(b_1, \dots, b_n)}]\!]^I = 1 \text{ ssi } P_i^I = b_i \ \forall 1 \leq i \leq n}$$

Note : Cette formule est appelée la forme normale disjonctive complète

Notation : Si $[\![\varphi]\!]^I = 1$ alors on note $I \models \varphi$ et on dit que I satisfait φ

On a alors inductivement

$I \models p$ si p^I

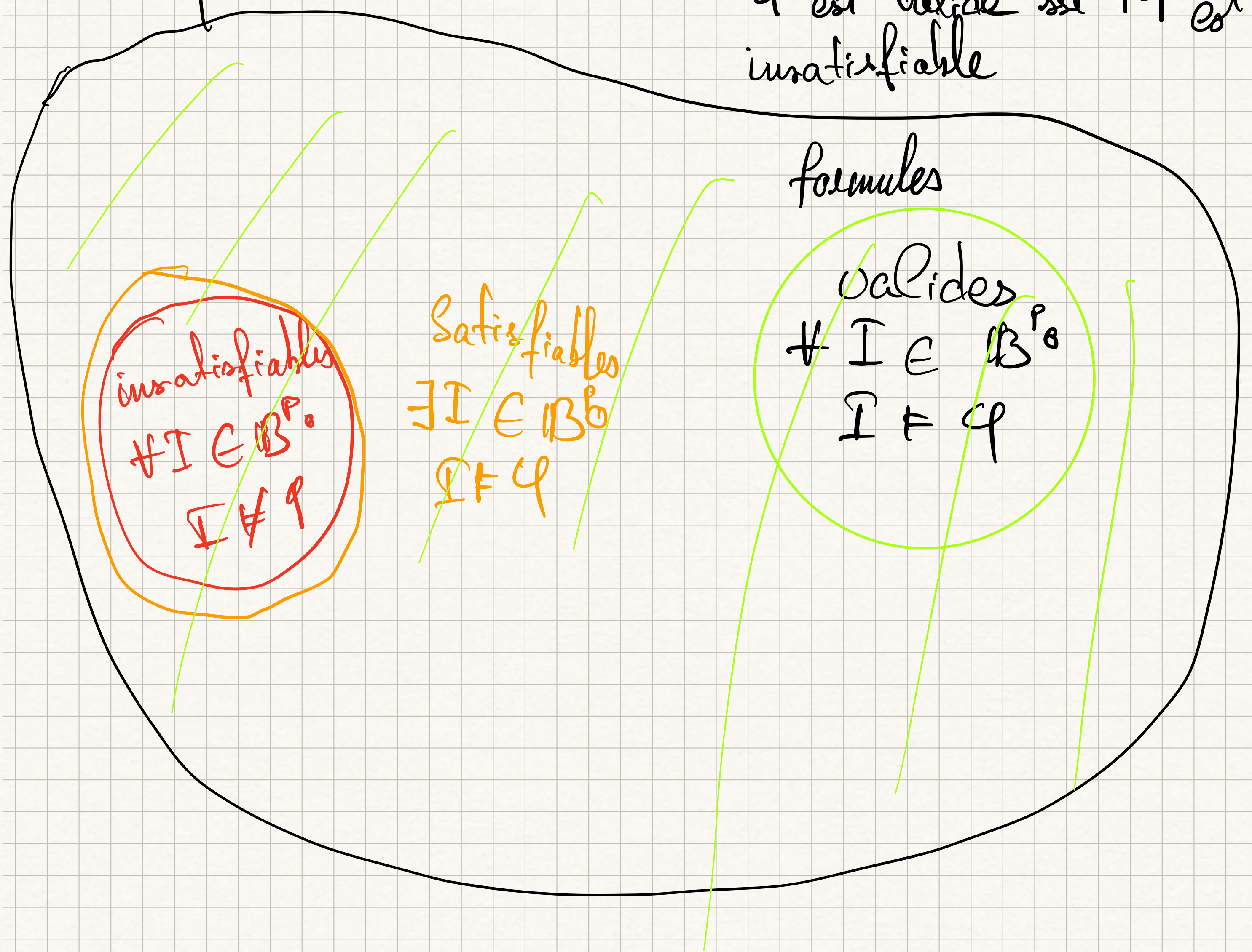
$I \models \neg\varphi$ si $I \not\models \varphi$

$I \models \varphi \wedge \psi$ si $I \models \varphi$ et $I \models \psi$

$I \models \varphi \vee \psi$ si $I \models \varphi$ si $I \models \psi$

Satisfiable et validité

φ est valide ssi $\neg\varphi$ est insatisfiable



Expérience logique

Def φ est une conséquence logique de S un ensemble de formules notés $S \models \varphi$ si pour interprétation I, si $\underbrace{\forall \psi \in S . I \models \psi}_{I \models S}$ alors $I \models \varphi$

Quand $S = \{\psi\}$ on note directement $\psi \models \varphi$

Exemple $\psi \models \varphi$

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Prop φ est valide ssi c'est une conséquence logique de l'ensemble vide

Démonstration : $\emptyset \models \varphi$

ssi $\forall I$, si $I \models \emptyset$ alors $I \models \varphi$

ssi $\forall I, I \models \varphi$

ssi φ est valide

Prop $\psi \models \varphi$ ssi $[\![\psi]\!]^I \leq [\![\varphi]\!]^I \; \forall I$

Rappel $\psi \Rightarrow \varphi$ est la formule $(\neg\psi) \vee \varphi$

Lemme de déduction : Soit S un ensemble de formules et φ, ψ deux formules. Alors $S \cup \{\psi\} \models$ ssi

$S \models \psi \Rightarrow \varphi$

En particulier, pour $S = \emptyset$: $\psi \models \varphi$ ssi la formule $\psi \Rightarrow \varphi$ est valide

Démonstration $S \cup \{\psi\} \models \varphi$

ssi $\forall I$, ssi $I \models S \cup \{\psi\}$, alors $I \models \varphi$

ssi $\forall I$, si $I \models S$ et $I \models \psi$, alors $I \models \varphi$

ssi $\forall I$, si $I \models S$ alors si $I \models \psi$ alors $I \models \varphi$

ssi $\forall I$, si $I \models S$ alors $I \models \psi \Rightarrow \varphi$

ssi $S \models \psi \Rightarrow \varphi$

Equivalence logique

Def φ est logiquement équivalente à ψ

si $\forall I$, $I \models \varphi$ ssi $I \models \psi$

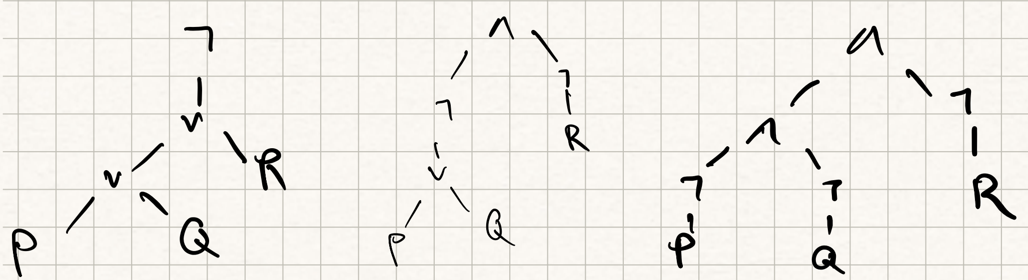
ssi $[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$

ssi la formule $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est valide

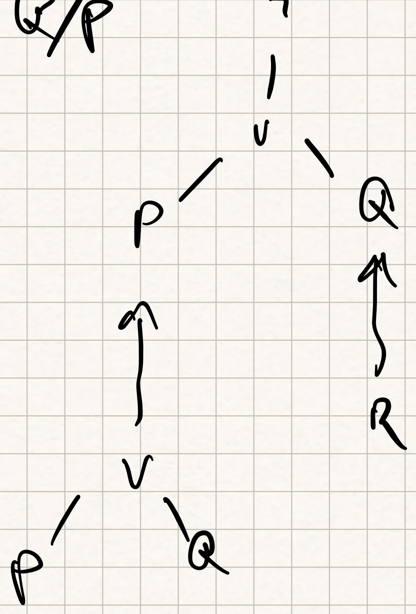
c à d $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$

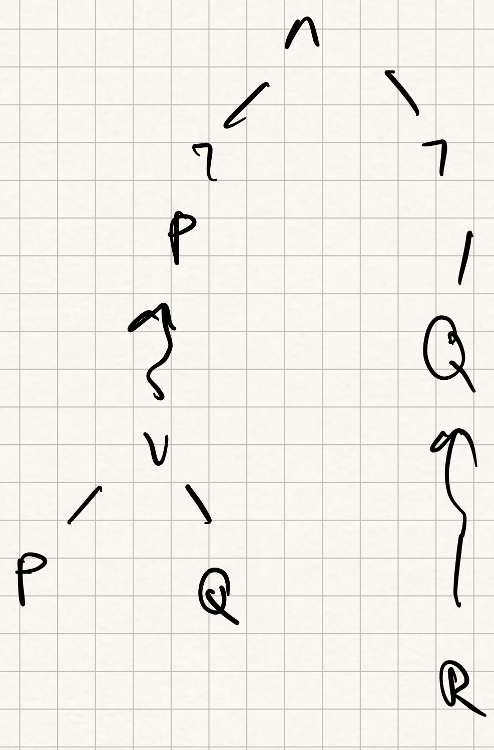
Ex

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1



$P \vee Q / P$





Def : Une substitution propositionnelle τ est une fonction qui associe à chaque $P \in \mathcal{P}_0$ une formule propositionnelle et telle que $\mathrm{dom}\, \tau \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathcal{P}_0 \mid \tau(P) \neq P\}$ est fini

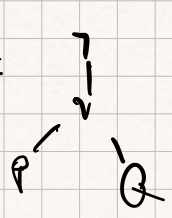
Notation $[\varphi_1/P_1, \dots \varphi_n/P_n]$ la substitution $\tau : P_i \mapsto \varphi_i$

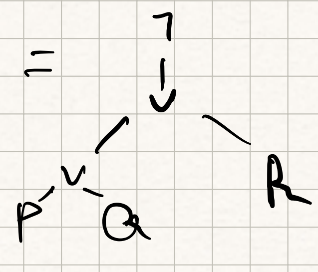
Ex $[P \vee Q/P, R/Q]$

Def : Par induction sur φ, pour une substitution prop. τ :

$$P_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \tau(P)$$
$$(\neg\varphi)_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\varphi_\tau)$$
$$(\varphi \vee \psi)_\tau \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_\tau) \vee (\psi_\tau)$$
$$(\varphi \wedge \psi)_\tau \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_\tau) \wedge (\psi_\tau)$$

Ex

$\varphi =$ 

$\varphi_\tau =$ 

Lemme de substitution Soit φ une formule propositionnelle
I une interprétation, et τ une substitution prop Alors

$$[\![\varphi\tau]\!]^{I} = [\![\varphi]\!]^{I\tau}$$

où $p^{I\tau} \overset{def}{=} [\![\tau(p)]\!]^{I}$ pour tout $P \in \mathcal{P}_0$

Démonstration par induction sur φ.

cas P : $[\![P_\tau]\!]^{I} = [\![\tau(P)]\!]^{I} = P^{I\tau} = [\![P]\!]^{I\tau}$

cas $\neg\varphi$: $[\![(\neg\varphi)\tau]\!]^{I} \overset{=}{=} [\![\neg(\varphi\tau)]\!]^{I}$

$= \text{not} ([\![\varphi_\tau]\!]^{I}) \overset{ih}{=} \text{not} ([\![\varphi]\!]^{I\tau}) = [\![\neg\varphi]\!]^{I\tau}$