

$$ax + by = c$$

Exo 1

1. Calculer PGCD

→ d'équation a des solutions si :

$$\text{pgcd}(a, b) \mid c$$

2. Dans le cas où $\text{pgcd}(a, b) \mid c$,

On cherche d'abord la solution particulière à l'équation

$$ax + by = \text{pgcd}(a, b)$$

On note (x_0, y_0) la solution particulière

3. On pose k l'entier tel que $c = k \times \text{pgcd}(a, b)$. Une solution particulière de

$$ax + by = c$$

est alors $(x_1, y_1) = (k \times x_0, k \times y_0)$

4. Soient $a', b' \in \mathbb{Z}$ tq

$$a = \text{pgcd}(a, b) \times a'$$

$$b = \text{pgcd}(a, b) \times b'$$

Les solutions générales sont données par la formule :

$$S = \{ (x_1 + kb', y_1 - ka') \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

OU

$$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{bk}{\text{pgcd}(a,b)}, y_0 + \frac{ak}{\text{pgcd}(a,b)} \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exemple :

$$11x - 7y = 10$$

1^o $\text{pgcd}(11, 7) = 1$

Comme $1 \mid 10$, l'équation a des solutions

$$11 = 1 \times 7 + 4$$

$$7 = 1 \times 4 + 3$$

$$4 = 1 \times 3 + 1$$

$$3 = 3 \times 1 + 0$$



2^o On cherche la solution particulière à l'équation
 $11x - 7y = 1$

$$1 = 4 - (1 \times 3)$$

$$1 = 4 - (7 - 1 \times 4)$$

$$1 = 4 - 7 + 1 \times 4$$

$$1 = -7 + 2 \times 4$$

$$1 = -7 + 2(11 - 1 \times 7)$$

$$1 = -7 + 2 \times 11 - 2 \times 7$$

$$1 = 2 \times 11 - 3 \times 7$$



Une solution particulière est donc

$$(x_0, y_0) = (2, 3)$$



3, On cherche la solution particulière de l'équation

$$11x - 7y = 10 \text{ est donc:}$$

$$11 \times 2 \times 10 - 7 \times 3 \times 10 = 10$$

$$11 \times 20 - 7 \times 30 = 10$$

$$(x_0, y_0) = (20, 30)$$

$$\text{On a alors } 11x - 7y = 11x_0 - 7y_0$$

4, Solution générale:

$$\begin{aligned} S &= \{ (x_1 + kb', y_1 - ka') \} \\ &= \{ (20 - 7k, 30 - 11k) \mid k \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

$$k=1$$

$$20 - 7 = 13$$

$$11 \times 13 - 7 \times 19$$

$$30 - 11 = 19$$

$$143 - 133 = 10$$