Ex1 :

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{1+x^3} - \sin(x)}{x^3}$$

On a $\sqrt{1+x^3}$

$$= (1+x^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1+x)^{\alpha} \underset{0}{=} 1 + \alpha x + + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} x^3 + o(x^3$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Alors

$$\frac{x\sqrt{1+x^3} - \sin(x)}{x^3}$$

$$= \frac{x\left(1 + \frac{1}{2}x^3\right) + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{x + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{+\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^3}$$

$$= \left[\frac{+x^3}{6} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] \times \frac{1}{x^3}$$

$$= \frac{+1}{6} + \frac{x}{2} + o(x)$$

On a donc

$$\frac{1}{6} + \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Donc $\lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{1 + x^3 - \sin(x)}}{x^3} = \frac{1}{6}$

2) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} \right)$

$$\ln(1-x) \underset{0}{=} -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{} + \frac{1}{}$$

$$-x+\frac{x^2}{2} \qquad +o(x^2) \qquad x$$

$$= \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{1+\frac{x}{2}+o(x)}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+o(x^3)$$

$$1-(1+x)^{\alpha} = -\alpha x + o(x)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1-\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+o(x)$$

$$= \frac{1}{2}+o(\cancel{x}1)$$

$$= \frac{1}{2}+\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Donc $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$

Ex 2

1) $\frac{e^{\sin(x)} - 1}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} ?$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

$\sin(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

On peut poser $X = \sin(x)$

et on trouve

$e^{\sin(x)} - 1 \underset{0}{\sim} \sin(x)$

comme $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$

On a que $e^{\sin(x)} - 1 \underset{0}{\sim} x$

On sait aussi que

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

=> On a donc

$$\frac{e^{\sin(x)}-1}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$$

2) $$\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}} \underset{0}{\sim} ?$$

Or $$\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Donner sous forme

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

$$= \ln\left(\frac{1+2x-4}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \ln\left(1 - \frac{4x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

On a $\frac{4}{1+2x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

On peut ainsi utiliser

$$\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$$

avec $x = \frac{4x}{1+2x}$

On a donc

$$\ln\left(1 - \frac{2x}{\ldots}\right) \sim -\frac{4x}{\ldots}$$

$$\ln\left(\frac{\quad}{1+2x}\right) \underset{0}{\sim} \frac{\quad}{1+2x}$$

et

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{-4}{1+2x} \underset{0}{\sim} -4$$

Alors

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)}$$

$$= e^{-4}$$

$$\lim \left(\frac{1-2x}{\quad}\right)^{\frac{1}{x}} \quad -4$$

donc $\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right) \underset{0}{\sim} e$

Ex 3 :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{1+2x}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \frac{4x^2}{2} + o(x^2)$$

$$x\sqrt{1+4x^2} = x + 2x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1+2x} = 1-2x+o(x)$$

Par conséquent

$$\frac{x\sqrt{1+4x^2}}{1+2x} = \left(x+2x^3+o(x^3)\right)\left(1-2x+o(x)\right)$$

$$= x-2x^2+o(x^2) \leftarrow f(x)$$

$$= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

On en déduit que

$$f'(0)=1 \quad f''(0)=-4$$

la droite d'équation

$y=x$ est la tangente à C_f

en 0 et que

$$f(x)-y = -2x^2+o(x^2)$$

est du signe de $-2x^2$ au voisinage de 0.

$\Rightarrow$ C_f est en dessous de la tangente au voisinage de 0

2ème Sujet

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{1-x^2} - \sin(x)}{x^3}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

d'où

$$x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \varepsilon(x)$$

$$= \frac{-1}{3} + \varepsilon(x))$$

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

par conséquent

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{1-x^2} - \sin(x))}{x^3} = \frac{-1}{3}$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} = ?$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{} \left(\frac{1}{} \quad - 1 \right)$$

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-1+\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-1+1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}+o(x^2) = \frac{1}{2}+\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to} \varepsilon(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x^2}-\sin(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Ex 2

$$\frac{e^{2\sin(x)}-1}{\ldots} \underset{0}{\sim} ?$$

$\ln(1+x)$

$$e^{x}-1 \underset{0}{\sim} x$$

$$2\sin(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

On peut poser que $X = 2\sin(x)$ pour obtenir $e^{2\sin(x)}-1 \underset{0}{\sim} 2\sin(x)$

$$2\sin(x) \underset{0}{\sim} 2x$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2\sin(x)}-1}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{x} = 2$$

$$2) \left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2x}} \underset{0}{\sim} ?$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

$$\ln(e^x) = x$$

$$b^a = e^{a \times \ln(b)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)}$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

On a $\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$

$$= \ln\left(\frac{1+2x-4x}{1+2x}\right) = \ln\left(1 - \frac{4x}{1+2x}\right)$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{-4}{1+2x}$$

Alors $\frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$

$$\underset{0}{\sim} \frac{-4x}{1+2x} \times \frac{1}{2x} = \frac{-2}{1+2x} \underset{0}{\sim} -2$$

Donc $\lim\limits_{x \to} e^{\frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)} = e^{-2}$

$\Rightarrow \left(\frac{1-2}{1+2}\right)^{\frac{1}{2x}} \underset{0}{\sim} e^{-2}$