Université de Paris Cité
Licence L2 Info (S3) MI3

Algèbre et analyse élémentaires III
2022-2023

Contrôle 1

Durée : 1h30.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée sur la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1. 1. Déterminer la limite en 0 de la fonction :

$$\frac{\ln(1+2x^3)-(1-\cos(2x))\sin(x)}{x(\exp(x^2)-1)}.$$

2. Etudier la convergence de la suite :

$$u_n = \frac{n^3\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\sqrt{n^4+7n^2+1}}.$$

Exercice 2. Donner un équivalent en 0 pour chacune des fonctions suivantes :

$$(1)\ \frac{(1+x)\ln(1-x)+x}{x^2+x}, \quad (2)\ \frac{(e^x-1)\sin(x^2)-x^3}{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(\cos(x))$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.
2. Donner la valeur de $f'(0)$ et de $f''(0)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente en 0 ainsi que sa position par rapport à la courbe représentative de f.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty)$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}$.

1. Donner le développement asymptotique de f en $+\infty$.
2. En déduire l'existence d'une asymptote en $+\infty$, son équation, puis la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Barème indicatif : Exercice 1 (4 points : 2+2). Exercice 2 (4 points : 2+2). Exercice 3 (6 points : 2+2+2). Exercice 4 (4 points : 2+2). 2 points pour la rédaction.

Ex 1

$$\frac{\ln(1+2x^3) - (1-\cos(2x))\sin(x)}{x(e^{x^2}-1)}$$

On sait que

$$\ln(1+2x^3) = 2x^3$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{4x^2}{2}$$

$$1-\cos(2x) = 2x^2$$

$$\sin(x) = x$$

$$\Rightarrow (1-\cos(2x))\sin(x) = 2x^3$$

$$e^{x^2} - 1 = x^2$$

$$x(e^{x^2}-1) = x^3$$

$2x^3$ $\qquad$ $2x^3$

$$\lim \frac{\ln(1+2x^3) - (1-\cos(2x))\sin(x)}{x(e^{x^2}-1)} \quad x^3$$

$$(2x^3)^{-1}$$

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+2x^3) \times \frac{1 - [\overbrace{(1-\cos(2x))\sin(x)}^{2x^3} \underbrace{\ln(1+2x^3)^{-1}}_{(2x^3)^{-1}}]}{x(e^{x^2}-1)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3}{x^3} \times \left(1 - (2x^3) \times (2x^3)^{-1}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} 2 \times (1-1) = 0$$

2) $u_n = \dfrac{n^3 \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\sqrt{n^4 + 7n^2 + 1}}$

$$\sqrt{n^4 + 7n^2 + 1} = n^2 \sqrt{1 + \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^4}}$$

$$\sqrt{n^4 + 7n^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} n^2$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \quad \text{car} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

$U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^3 (2n)^{-1}}{n^2} \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{1}{2}$

U_n converge vers $\dfrac{1}{2}$

2) $u_n = \dfrac{n^3 \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\sqrt{n^4 + 7n^2 + 1}}$

$\sqrt{n^4 + 7n^2 + 1} = n^2 \sqrt{1 + \dfrac{7}{n^2} + \dfrac{1}{n^4}}$

$\sqrt{n^4 + 7n^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} n^2$

$\ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2n}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$

$U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^3 \times (2n)^{-1}}{n^2} \Leftrightarrow U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$

Ex2

1) $\dfrac{(1+x)\ln(1-x)+x}{x^2+x}$

$x^2+x \underset{0}{\sim} x$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$

$\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

$(1+x)\ln(1-x) = (1+x)\left(-x - \dfrac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$

$= -x - \dfrac{x^2}{2} - x^2 + o(x^2)$

$(1+x)\ln(1-x)+x = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^2}{2} + x + o(x^2)$

$= \dfrac{-3x^2}{2} + o(x^2)$

$\underset{0}{\sim} \dfrac{-3x^2}{2}$

donc $\dfrac{(1+x)\ln(1-x)+x}{x^2+x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{-3x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{-3x^4}{2}$

$$\lim \frac{(e^x-1)\sin(x^2)-x^3}{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$e^x-1 = x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$$

$$(e^x-1)\sin(x^2) = \left(x+\frac{x^2}{2}\right)x^2 + o(x^4)$$

$$= x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

$$(e^x-1)\sin(x^2)-x^3 = \frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

$$\cos(x)-1+\frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

$$\frac{(e^x-1)\sin(x^2)-x^3}{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{2}}{\frac{x^4}{24}} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{f'(x)}{1}x$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f''(x)}{2}x$$

$$o(x$$

Ex 3

$$f(x) = \ln(\cos(x))$$

$$\hookrightarrow \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4)\right)$$

$$= \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2}{2} + o(x^4)$$

$$= \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$= \frac{-x^2}{2} + \frac{(1-3)x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= \frac{-x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\cancel{x^4} \times \frac{f^{(4)}(x)}{4!} = -\frac{\cancel{x^4}}{12} \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{4!}{12}$$

2) Comparant les coef correspondants :

$f'(0) = 0$ Dans DL 4, coef de x $(\ln(\cos(x)))$

$\ln\left(\boxed{1 + \frac{-x^2}{2}}\right)$ DL 2 $\cos(x)$

$= \frac{-x^2}{2}$ $f''(0) = \frac{-x^2}{2}$

-1

$f''(0) = -1$ (le coef de x^2)

3) en 0, l'équation de la tangente est

$y = 0$

car $f(x) - 0 = \frac{-x^2}{2} + o(x^2)$

$f(x) - 0 \sim \frac{-x^2}{2} < 0$

$\Rightarrow$ au voisinage de 0, $f(x) - \cancel{0x} - \frac{x^2}{2} < 0$

La courbe représentative de f est en dessous de la tangente

Ex4 :

sur $[1, +\infty[$ $\quad f(x) = \sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}$

$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{2}{x}} + x\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

$$= x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{2}{x}} = \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1+x)^{\alpha}$$

$$= 1 + \frac{2}{x} \times \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}\left(\frac{2}{x}\right)^3$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} \times \left(\frac{2}{x}\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{5}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\sqrt{1-\frac{2}{x}} = \left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3} - \frac{5}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{5}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)$$

$$= 2x - \frac{1}{x} - \frac{5}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

2) $f(x)$ admet une asymptote en $+\infty$ et l'équation de l'asymptote est $y=2x$