

Ex 1

$$14x + 10y = 4$$

1, On calcule d'abord son $\text{pgcd}(14, 10)$

$$14 = 1 \times 10 + 4$$

$$10 = 2 \times 4 + 2$$

$$4 = 2 \times 2 + 0$$

$$\text{donc } \text{pgcd}(14, 10) = 2$$

On constate que $2 \mid 4$, l'équation admet des solutions

2, On cherche donc une solution particulière à l'équation $14x + 10y = 2$

On a

$$2 = 10 - 2 \times 4$$

$$2 = 10 - 2(14 - 1 \times 10)$$

$$2 = 10 - 2 \times 14 + 2 \times 10$$

$$2 = -2 \times 14 + 3 \times 10$$

On a $(x_0, y_0) = (-2, 3)$

3, On cherche une solution particulière à l'équation

$$14x + 10y = 4$$

$$14 \times (-2) \times 2 + 10 \times 3 \times 2 = 4$$

$$14 \times (-4) + 10 \times 6 = 4$$

$$(x_0, y_0) = (-4, 6)$$

4, soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, l'équation initiale est sous forme $ax + by = c$ avec $a = 14$ $b = 10$

$$a = \text{pgcd}(a, b) \times a'$$

$$b = \text{pgcd}(a, b) \times b'$$

$$14 = 2 \times a'$$

$$10 = 2 \times b'$$

$$a' = 7$$

$$b' = 5$$

L'ensemble des solutions particulières sont:

$$S = \{ [(-4) + 5k, 6 - 7k] \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Test $k=1$

$$-4 + 5 = 1$$

$$6 - 7 = -1$$

$$14 \times 1 + 10 \times (-1) = 4 \quad \checkmark$$

Ex3:

$$S: \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{8} \\ x \equiv 7 \pmod{22} \end{cases}$$

$$8 = 2^2 \times 2$$

$$22 = 11 \times 2$$

$$\text{pgcd}(8, 22) = 2$$

$$22 = 2 \times 8 + 6$$

$$8 = 1 \times 6 + 2$$

$$6 = 2 \times 3 \neq 0$$

$$\text{ppcm}(8, 22) =$$

Comme 2 divise $7 - 3 = 4$, le système admet solutions

On applique l'algo Euclide à $(8, 22)$

$$8u + 22v = 2$$

$$\text{avec } u = 3 \quad v = (-1)$$

$$u' = \frac{u}{\text{pgcd}(8, 22)} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$v' = \frac{v}{\text{pgcd}(8, 22)} = \frac{-1}{2} = -0.5$$

Solution particulière: $x = 6am' + 3an'$
 $= 7 \times 3 \times 4 + 3 \times (-1) \times 11$
 $= 84 - 33$
 $= 51$

Solution générales: $\{x = 51 + 88k, k \in \mathbb{Z}\}$

Ex 4

1. $4x \equiv 2 \pmod{18}$

$\text{pgcd}(4, 18) = 2$

$18 = 4 \times 4 + 2$

$4 = 2 \times 2 + 0$

On constate que $2 \mid 2$, l'équation admet donc des solutions et est équivalente à $2x \equiv 1 \pmod{9}$

On cherche l'inverse de 2 mod 9. On a:

$2 \times 5 \equiv 1 \pmod{9}$

Donc $2x \equiv 1 \pmod{9}$

$\Leftrightarrow 5 \times 2x \equiv 5 \pmod{9}$

$\Leftrightarrow x \equiv 5 \pmod{9}$

$S = \{5 + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2. $4x \equiv 1 \pmod{18}$

$\text{pgcd}(4, 18) = 2$

On constate que $2 \nmid 1$ donc l'équation admet pas de solution dans \mathbb{Z}

Ex 2:

$$1, \quad 211^{31415} \mod 53$$

$$211 = 3 \times 53 + 52$$

Donc $211 \equiv -1 \mod 53$ et alors

$$211^2 \equiv 1 \mod 53 \equiv 1 \mod 53$$

Or 31415 est impair, c'est à dire qu'il existe

$$k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 31415 = 2k + 1$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 211^{31415} &= 211^{2k+1} \\ &= (211^2)^k \cdot 211 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (211)^{31415} &\equiv (211^2)^k \cdot 211 \\ &\equiv 1^k \times (-1) \\ &\equiv -1 \\ &\equiv 52 \mod 53 \end{aligned}$$

Le reste est donc 52

$$2, \quad 2022^{1234567}$$

On voit que 2022 est pair donc

$$2022 \equiv 0 \mod 2$$

$$\Rightarrow 2022^{1234567} \equiv 0^{61} \equiv 0 \mod 2$$

Le chiffre unité en base deux de $2022^{1234567}$ est donc 0