Ex 1 :

$$1124x + 1004y = 12$$

$\text{pgcd}(1124, 1004) = 4$

$$\begin{aligned}
1124 &= 1 \times 1004 + 120 \\
1004 &= 8 \times 120 + 44 \\
120 &= 2 \times 44 + 32 \\
44 &= 1 \times 32 + 12 \\
32 &= 2 \times 12 + 8 \\
12 &= 1 \times 8 + 4 \\
8 &= 2 \times 4 + 0
\end{aligned}$$

Comme $4 \mid 12$, l'équation a des solutions

On cherche d'abord la solution particulière à l'équation

$$1124x + 1004y = 4$$

$$\begin{aligned}
4 &= 12 - 1 \times 8 \\
4 &= 12 - (32 - 2 \times 12) \\
4 &= 12 - 32 + 2 \times 12 \\
4 &= -32 + 3 \times 12 \\
4 &= -32 + 3(44 - 1 \times 32) \\
4 &= -32 + 3 \times 44 - 3 \times 32 \\
4 &= 3 \times 44 - 4 \times 32 \\
4 &= 3 \times 44 - 4(120 - 2 \times 44) \\
4 &= 3 \times 44 - 4 \times 120 + 8 \times 44 \\
4 &= -4 \times 120 + 11 \times 44
\end{aligned}$$

$4 = -4 \times 120 + 11(1004 - 8 \times 120)$
$4 = -4 \times 120 + 11 \times 1004 - 88 \times 120$
$4 = 11 \times 1004 - 92 \times 120$
$4 = 11 \times 1004 - 92(1124 - 1 \times 1004)$
$4 = 11 \times 1004 - 92 \times 1124 + 92 \times 1004$
$4 = -92 \times 1124 + 103 \times 1004$

Une solution particulière est donc
$(x_0, y_0) = (-92, 103)$

3) On cherche la solution particulière d'équation
$1124x - 1004y = 12$

$1124 \times (-92) \times 3 - 1004 \times 103 \times 3 = 12$
$1124 \times (-276) - 1004 \times 309 = 12$
Donc $(x_1, y_1) = (-276, 309)$

4) Soient $a', b' \in \mathbb{Z}$ tq
$a = \text{pgcd}(a,b)a'$
$b = \text{pgcd}(a,b)b'$

$1124 = 4 \times a'$ $\quad$ $1004 = 4 \times b'$
$a' = 281$ $\quad$ $b' = 251$

$S = \{(-276 + 251k, 309 - 281k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Test $k = 1$
$-276 + 251 = -25$ $\quad$ $1124 \times (-25) = -28100$
$309 - 281 = 28$ $\quad$ $1004 \times 28 = 28112$

Ex 4

$$S : \begin{cases} x \equiv \overset{a}{1} \mod \overset{m}{10} \\ 4x \equiv \overset{b}{9} \mod \overset{n}{15} \end{cases}$$

On inverse tout d'abord 4 modulo 15

On remarque que $4 \times 4 = 16 \equiv 1 \mod 15$

Donc $4x \equiv 9 \mod 15 \iff 4 \times 4x \equiv 9 \times 4 \ [15]$

$\iff 16x \equiv 36 \ [15]$

$\iff x \equiv 6 \ [15]$

Le système est donc équivalent à :

$$(S) \begin{cases} x \equiv \overset{a}{1} \ [\overset{m}{10}] \\ x \equiv \overset{b}{6} \ [\overset{n}{15}] \end{cases}$$

$\text{pgcd}(10, 15) = 5$ $\qquad$ $\text{ppcm}(10, 15) = 30$

$15 = 1 \times 10 + 5$

$10 = 2 \times 5 + 0$

On applique l'algo Euclide à $(10, 15)$

$10u + 15v = \text{pgcd}(10, 15)$

$10u + 15v = 5$

avec $u = (-1)$ $\quad$ $v = 1$

$$m' = \frac{m}{\text{pgcd}(10, 15)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$n' = \frac{n}{pgcd(10,15)} = \frac{15}{5} = 3$$

Solution particulière : $x = bum' + avn'$
$$= 6 \times (-1) \times 2 + 1 \times 1 \times 3$$
$$= -12 + 3$$
$$= -9$$

Solution générale :
$$\{x = -9 + 30k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Ex 5

1) $2x \equiv 4 \mod 17$

$pgcd(2, 17) = 1$. On remarque 2 et 17 sont premier entre eux. Cet équation admet des solutions

x est l'inverse de 2 mod 17 si
$$2x \equiv 1 \mod [17]$$

On cherche l'inverse 2 mod 17
$$2 \times 9 \equiv 1 \mod 17$$

Donc $2x \equiv 4 \mod 17$

$\Leftrightarrow 9 \times 2x \equiv 9 \times 4 \mod 17$

$\Leftrightarrow x \equiv 36 \mod 17$

$\Leftrightarrow x \equiv 2 \mod 17$

$S = \{17k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) $6x \equiv 2 \mod 8$

pgcd $(6, 8) = 2$

$8 = 1 \times 6 + 2$

$6 = 3 \times 2 + 0$

On remarque que pgcd $(6,8) = 2$, l'équation est équivalente à :

$$3x \equiv 1 \mod 4$$

On cherche l'inverse de 3 mod 4 On a

$$3 \times 3 = 9 \equiv 1 \mod 4$$

Donc $3x \equiv 1 \mod 4$

$\iff 3 \times 3x \equiv 3 \mod 4$

$\iff x \equiv 3 \mod 4$

$S = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ex 3

1) Trouver la division par 47 du nombre $2020^{12\ldots 9}$

$2020^{123\ldots 9} \mod 47$?

La division euclidienne de 2020 par 47 donne :

$$2020 = 47 \times 42 + 46$$

Donc $2020 \equiv -1 \mod 47$ et alors

$$2020^2 \equiv (-1)^2 \mod 47 \equiv 1 \mod 47$$

Or 123456789 est impaire, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $123456789 = 2k+1$

Ainsi :

$$2020^{123456789} = 2020^{2k+1} = (2020^2)^k \, 2020$$

$$\Rightarrow 2020^{123456789} \equiv (2020^2)^k \, 2020$$
$$\equiv 1^k \times (-1)$$
$$\equiv -1$$
$$\equiv 46 \mod 47$$

Le reste dans la division euclidienne par 47 de $2020^{123456789}$ est donc 46

2) chiffre unités dans l'écriture en base 2 de $4567541324 7^{61}$

On voit que 45675413247 est impair donc

$$45675413247 \equiv 1 \mod 2$$

$$\Rightarrow 45675413247^{61} \equiv 1^{61} \equiv 1 \mod 2$$

Le chiffre des unités en base deux 45675413247 est donc 1