Chapitre 3
Lois de la logique propositionnelle

Conséquence, Équivalence

fait le 08/02

Definition

Soient p et q des formules propositionnelles.

- On dit que q est une conséquence de p, et on écrit $p \models q$, si pour toute affectation v telle que $v \models p$ on a aussi que $v \models q$.

$\emptyset \models p$: p est valide

Conséquence, Équivalence

Definition

Soient p et q des formules propositionnelles.

- On dit que q est une conséquence de p, et on écrit $p \models q$, si pour toute affectation v telle que $v \models p$ on a aussi que $v \models q$.
- On dit que p et q sont équivalentes, et on écrit $p \models\!\dashv q$, si $p \models q$ et $q \models p$.

Conséquence, Équivalence

Definition

Soient p et q des formules propositionnelles.

- On dit que q est une conséquence de p, et on écrit $p \models q$, si pour toute affectation v telle que $v \models p$ on a aussi que $v \models q$.
- On dit que p et q sont équivalentes, et on écrit $p \models\!\!\!\dashv q$, si $p \models q$ et $q \models p$.

Donc, deux formules p et q sont équivalentes si et seulement si $[\![p]\!]v = [\![q]\!]v$ pour toute affectation v.

Conséquence d'une théorie

Definition

Soient $p \in$ une formule et $T \subseteq$ un ensemble de formules. On dit que p est une conséquence de T, noté $T \models p$, si pour toute affection v telle que $v \models q$ pour tout $q \in T$ on a aussi que $v \models p$.

On peut montrer que ...

1. Si $p \models q$ et $q \models r$ alors $p \models r$

On peut montrer que ...

1. Si $p \models q$ et $q \models r$ alors $p \models r$
2. $\{q\} \models p$ ssi $q \models p$

On peut montrer que ...

1. Si $p \models q$ et $q \models r$ alors $p \models r$
2. $\{q\} \models p$ ssi $q \models p$
3. $\{p_1, \ldots, p_n\} \models p$ ssi $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \models p$

On peut montrer que ...

$\{x, y, z\} \models x \wedge y$

$\{x, y\} \models x \wedge y$

$\{x\} \not\models x \wedge y$

1. Si $p \models q$ et $q \models r$ alors $p \models r$
2. $\{q\} \models p$ ssi $q \models p$
3. $\{p_1, \ldots, p_n\} \models p$ ssi $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \models p$
4. Si $T \models p$ et $T \subseteq S$ alors $S \models p$

Décider conséquence ou équivalence

- Tables de vérité.

Décider conséquence ou équivalence

- Tables de vérité.
- q est une conséquence de p si pour toute ligne de la table de vérité où il y a 1 dans la colonne de p il y aussi 1 dans la colonne de q;

Décider conséquence ou équivalence

- Tables de vérité.
- q est une conséquence de p si pour toute ligne de la table de vérité où il y a 1 dans la colonne de p il y aussi 1 dans la colonne de q;
- p et q sont équivalentes quand le contenu de la colonne de p est le même que le contenu de la colonne de q.

Exemple Conséquence

$x \wedge (\neg x \vee y) \models y$ car

x	y	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$x \wedge (\neg x \vee y)$	y
0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1

Exemple Équivalence

Les formules $\neg(x \wedge y)$ et $\neg x \vee \neg y$ sont équivalentes :

x	y	$x \wedge y$	$\neg(x \wedge y)$	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \vee \neg y$
0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

équivalence

Propriétés fondamentales des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition

On a les équivalences suivantes :

1. $x \wedge x \models\!\!\!\!\dashv x$ *(idempotence)*

Propriétés fondamentales des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition

On a les équivalences suivantes :

1. $x \wedge x \models\!\!\!\!\!\dashv x$ *(idempotence)*
2. $x \wedge y \models\!\!\!\!\!\dashv y \wedge x$ *(commutativité)*

Propriétés fondamentales des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition

On a les équivalences suivantes :

1. $x \wedge x \models\!\!\dashv x$ *(idempotence)*
2. $x \wedge y \models\!\!\dashv y \wedge x$ *(commutativité)*
3. $x \wedge (y \wedge z) \models\!\!\dashv (x \wedge y) \wedge z$ *(associativité)*

Propriétés fondamentales des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition

On a les équivalences suivantes :

1. $x \wedge x \models\mid x$ *(idempotence)*
2. $x \wedge y \models\mid y \wedge x$ *(commutativité)*
3. $x \wedge (y \wedge z) \models\mid (x \wedge y) \wedge z$ *(associativité)*
4. $x \vee x \models\mid x$
5. $x \vee y \models\mid y \vee x$
6. $x \vee (y \vee z) \models\mid (x \vee y) \vee z$

Propriétés fondamentales des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition

On a les équivalences suivantes :

1. $x \wedge x \models\!\!\!\!\dashv x$ *(idempotence)*
2. $x \wedge y \models\!\!\!\!\dashv y \wedge x$ *(commutativité)*
3. $x \wedge (y \wedge z) \models\!\!\!\!\dashv (x \wedge y) \wedge z$ *(associativité)*
4. $x \vee x \models\!\!\!\!\dashv x$
5. $x \vee y \models\!\!\!\!\dashv y \vee x$
6. $x \vee (y \vee z) \models\!\!\!\!\dashv (x \vee y) \vee z$
7. $\neg\neg x \models\!\!\!\!\dashv x$ *(double négation)*

Propriétés qui combinent des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition

On a les équivalences suivantes :

1. $(x \wedge y) \vee z \models\!\!\!\!\dashv (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ *(première loi de distributivité)*

Propriétés qui combinent des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition

On a les équivalences suivantes :

1. $(x \wedge y) \vee z \models\!\!\!\!\!\!= (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ *(première loi de distributivité)*
2. $(x \vee y) \wedge z \models\!\!\!\!\!\!= (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ *(seconde loi de distributivité)*

Propriétés qui combinent des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition

On a les équivalences suivantes :

1. $(x \wedge y) \vee z \models\!\!\mid (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ *(première loi de distributivité)*
2. $(x \vee y) \wedge z \models\!\!\mid (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ *(seconde loi de distributivité)*
3. $x \vee (y \wedge z) \models\!\!\mid (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
4. $x \wedge (y \vee z) \models\!\!\mid (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Propriétés qui combinent des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition

On a les équivalences suivantes :

1. $(x \wedge y) \vee z \models\mid (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ *(première loi de distributivité)*
2. $(x \vee y) \wedge z \models\mid (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ *(seconde loi de distributivité)*
3. $x \vee (y \wedge z) \models\mid (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
4. $x \wedge (y \vee z) \models\mid (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
5. $\neg(x \wedge y) \models\mid \neg x \vee \neg y$ *(première loi de De Morgan)*

Propriétés qui combinent des opérateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$

Proposition

On a les équivalences suivantes :

1. $(x \wedge y) \vee z \models\!\!\!\dashv (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ *(première loi de distributivité)*
2. $(x \vee y) \wedge z \models\!\!\!\dashv (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ *(seconde loi de distributivité)*
3. $x \vee (y \wedge z) \models\!\!\!\dashv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
4. $x \wedge (y \vee z) \models\!\!\!\dashv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
5. $\neg(x \wedge y) \models\!\!\!\dashv \neg x \vee \neg y$ *(première loi de De Morgan)*
6. $\neg(x \vee y) \models\!\!\!\dashv \neg x \wedge \neg y$ *(seconde loi de De Morgan)*

Comparer avec les opérateurs arithmétiques

Les opérateurs suivants, sont-ils idempotent, associatif, commutatif ?

- $+$, la somme de deux entiers

Comparer avec les opérateurs arithmétiques

Les opérateurs suivants, sont-ils idempotent, associatif, commutatif ?

- $+$, la somme de deux entiers
- $*$, la multiplication de deux entiers

Comparer avec les opérateurs arithmétiques

Les opérateurs suivants, sont-ils idempotent, associatif, commutatif ?

- $+$, la somme de deux entiers
- $*$, la multiplication de deux entiers
- la moyenne arithmétique entre deux entiers

associatif, commutatif

idempotent et commutatif

Comparer avec les opérateurs arithmétiques

Les opérateurs suivants, sont-ils idempotent, associatif, commutatif ?

- $+$, la somme de deux entiers
- $*$, la multiplication de deux entiers
- la moyenne arithmétique entre deux entiers

Quels sont distributifs par rapport aux quels ?

$(x+y)*z = x*z + y*z$: Vrai

$(x*y)+z = (x+z)*(x+y)$ Faux

Démonstration de $x \wedge x \models\!\!\mid x$

x	$x \wedge x$
0	0
1	1

Démonstration de $x \wedge y \models\mid y \wedge x$

x	y	$x \wedge y$	$y \wedge x$
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	1	1

Démonstration de $x \wedge (y \wedge z) \models\!\!\!\!\!\!=\!\!| (x \wedge y) \wedge z$

x	y	z	$y \wedge z$	$x \wedge (y \wedge z)$	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \wedge z$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Objectif

- Il est souvent pratique d'utiliser d'autres opérateurs booléens que les trois opérateurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ que nous avons considéré jusqu'à maintenant.

Objectif

- Il est souvent pratique d'utiliser d'autres opérateurs booléens que les trois opérateurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ que nous avons considéré jusqu'à maintenant.
- Ces opérateurs sont définis comme des abréviations.

Objectif

- Il est souvent pratique d'utiliser d'autres opérateurs booléens que les trois opérateurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ que nous avons considéré jusqu'à maintenant.
- Ces opérateurs sont définis comme des abréviations.
- La définition de la syntaxe des formules reste donc inchangée, mais on autorise dans la suite pour l'écriture des formules les abréviations suivantes :

Opérateurs dérivés

Opérateur	Nom	Définition
$\rightarrow$	Implication	$x \rightarrow y \quad = \quad \neg x \vee y$
$\leftrightarrow$	Équivalence	$x \leftrightarrow y \quad = \quad (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$
$\top$	Constante vrai	$\top \quad = \quad x \vee \neg x$
$\bot$	Constante faux	$\bot \quad = \quad x \wedge \neg x$
$\oplus$	Ou exclusif	$x \oplus y \quad = \quad (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$
$\uparrow$	Nand	$\mathrm{x} \uparrow y \quad = \quad \neg(x \wedge y)$
$\downarrow$	Nor	$\mathrm{x} \downarrow y \quad = \quad \neg(x \vee y)$

Remarques

- « Nand » et « Nor » sont des noms anglais (contraction de Not-And et Not-Or)

Remarques

- « Nand » et « Nor » sont des noms anglais (contraction de Not-And et Not-Or)
- On dit parfois « xor » à la place de « Ou exclusif ».

Remarques

- « Nand » et « Nor » sont des noms anglais (contraction de Not-And et Not-Or)
- On dit parfois « xor » à la place de « Ou exclusif ».
- On pourrait aussi imaginer des opérateurs booléens avec plus que deux arguments.

Remarques

- « Nand » et « Nor » sont des noms anglais (contraction de Not-And et Not-Or)
- On dit parfois « xor » à la place de « Ou exclusif ».
- On pourrait aussi imaginer des opérateurs booléens avec plus que deux arguments.
- Par exemple,

$$\triangleright(x, y, z) =_{def} (x \oplus y) \rightarrow z$$

est une abréviation pour

$$\neg((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)) \vee z$$

Lois pour les nouveaux opérateurs

$\top \wedge p \models\!\!\!\!\dashv p$ $\top$ est l'élément neutre de la conjonction

Lois pour les nouveaux opérateurs

$\top \wedge p \models\mid p$	$\top$ est l'élément neutre de la conjonction
$\bot \vee p \models\mid p$	$\bot$ est l'élément neutre de la disjonction

Lois pour les nouveaux opérateurs

$\top \wedge p \mathrel{\models\!\dashv} p$	$\top$ est l'élément neutre de la conjonction
$\bot \vee p \mathrel{\models\!\dashv} p$	$\bot$ est l'élément neutre de la disjonction
$\bot \wedge p \mathrel{\models\!\dashv} \bot$	$\bot$ est l'élément nul de la conjonction
$\top \vee p \mathrel{\models\!\dashv} \top$	$\top$ est l'élément nul de la disjonction

Lois pour les nouveaux opérateurs

$\top \wedge p \models\!\!\!\!\dashv p$	$\top$ est l'élément neutre de la conjonction
$\bot \vee p \models\!\!\!\!\dashv p$	$\bot$ est l'élément neutre de la disjonction
$\bot \wedge p \models\!\!\!\!\dashv \bot$	$\bot$ est l'élément nul de la conjonction
$\top \vee p \models\!\!\!\!\dashv \top$	$\top$ est l'élément nul de la disjonction
$p \rightarrow q \models\!\!\!\!\dashv \neg q \rightarrow \neg p$	Loi de la contraposition

Lois pour les nouveaux opérateurs

$\top \wedge p \mathrel{\models\!\!\!\dashv} p$	$\top$ est l'élément neutre de la conjonction
$\bot \vee p \mathrel{\models\!\!\!\dashv} p$	$\bot$ est l'élément neutre de la disjonction
$\bot \wedge p \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \bot$	$\bot$ est l'élément nul de la conjonction
$\top \vee p \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \top$	$\top$ est l'élément nul de la disjonction
$p \rightarrow q \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg q \rightarrow \neg p$	Loi de la contraposition
$p \leftrightarrow q \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	
$p \leftrightarrow q \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg p \leftrightarrow \neg q$	
$p \rightarrow (q \rightarrow r) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (p \wedge q) \rightarrow r$	

Le théorème de déduction

Proposition

Les deux énoncés suivants sont équivalents pour toutes formules propositionnelles p et q :

1. $p \models q$
2. $\models p \to q$

Le théorème de déduction

Proposition

Les deux énoncés suivants sont équivalents pour toutes formules propositionnelles p et q :

1. $p \models q$
2. $\models p \rightarrow q$

- Attention, la proposition ne veut pas dire que « $p \models q$ » et « $p \rightarrow q$ » sont la même chose.

Le théorème de déduction

Proposition

Les deux énoncés suivants sont équivalents pour toutes formules propositionnelles p et q :

1. $p \models q$
2. $\models p \to q$

- Attention, la proposition ne veut pas dire que « $p \models q$ » et « $p \to q$ » sont la même chose.
- En fait les deux sont d'une nature différente : Le deuxième est une formule propositionnelle, tandis que le premier est un énoncé qui a comme sujet la relation entre deux formules propositionnelles.

Le théorème de déduction

Proposition

Les deux énoncés suivants sont équivalents pour toutes formules propositionnelles p et q :

1. $p \models q$
2. $\models p \rightarrow q$

Proposition

Soit $T = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ un ensemble de formules et q une formule. Les deux énoncés suivants sont équivalents :

1. $T \models q$
2. $\models p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$

Listes d'opérateurs suffisants

- Ces abréviations sont utiles mais pas strictement nécessaires car on peut toujours les remplacer par leur définition.

Listes d'opérateurs suffisants

- Ces abréviations sont utiles mais pas strictement nécessaires car on peut toujours les remplacer par leur définition.
- On aurait pu définir la logique propositionnelle seulement avec les opérateurs $\neg$ et $\wedge$ car on peut exprimer $\vee$ par ces deux opérateurs :

$$\begin{array}{rcll} x \vee y & \models\mid & \neg\neg(x \vee y) & \text{Loi de la double négation} \\ & \models\mid & \neg(\neg x \wedge \neg y) & \text{Seconde loi de de Morgan} \end{array}$$

Listes d'opérateurs suffisants

- Ces abréviations sont utiles mais pas strictement nécessaires car on peut toujours les remplacer par leur définition.
- On aurait pu définir la logique propositionnelle seulement avec les opérateurs $\neg$ et $\wedge$ car on peut exprimer $\vee$ par ces deux opérateurs :

$$\begin{array}{rcll} x \vee y & \models\!\!\!\!\!\!\dashv & \neg\neg(x \vee y) & \text{Loi de la double négation} \\ & \models\!\!\!\!\!\!\dashv & \neg(\neg x \wedge \neg y) & \text{Seconde loi de de Morgan} \end{array}$$

- Autre possibilité : seulement $\neg$ et $\vee$.

Listes d'opérateurs suffisants

- Un autre choix possible est $\neg$ et $\rightarrow$ car on peut définir $x \vee y$ par $\neg x \rightarrow y$: $\neg x \rightarrow y$ est une abréviation pour $\neg\neg x \vee y$, ce qui est équivalent à $x \vee y$ par la loi de la double négation.

Listes d'opérateurs suffisants

- Un autre choix possible est $\neg$ et $\rightarrow$ car on peut définir $x \vee y$ par $\neg x \rightarrow y$: $\neg x \rightarrow y$ est une abréviation pour $\neg\neg x \vee y$, ce qui est équivalent à $x \vee y$ par la loi de la double négation.
- $\wedge$ et $\vee$ ne sont pas suffisantes (voir TD)

Listes d'opérateurs suffisants

- Un autre choix possible est $\neg$ et $\rightarrow$ car on peut définir $x \vee y$ par $\neg x \rightarrow y$: $\neg x \rightarrow y$ est une abréviation pour $\neg\neg x \vee y$, ce qui est équivalent à $x \vee y$ par la loi de la double négation.
- $\wedge$ et $\vee$ ne sont pas suffisantes (voir TD)
- On aurait pu définir toute la logique avec un seul opérateur ! (voir le TD)

Complétude Fonctionnelle

Est-ce que $\neg$, $\wedge$, $\vee$ sont suffisant pour exprimer tout ce qu'on peut souhaiter exprimer ?

Formellement

Un ensemble $\mathcal{S}$ de connecteurs est fonctionnellement complet si pour tout nombre naturel n, et pour toute fonction f

$$f: \underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n \text{ fois}} \to \{0,1\}$$

on peut trouver une formule propositionnelle p contenant uniquement les connecteurs de l'ensemble $\mathcal{S}$, telle que p réalise f et que $\mathcal{V}(p) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, c'est-à-dire t.q.

$$[\![p]\!][x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \ldots, b_n)$$

pour toutes les valeurs booléennes $b_1, \ldots, b_n \in \{0,1\}$.

Notre logique avec $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est fonctionnellement complète

- On peut représenter chaque choix des n arguments par une formule, par exemple le choix $c = (1, 0, 0, 1) \in \{0, 1\}^4$ est représenté par la formule $p_c = x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$.

Notre logique avec $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est fonctionnellement complète

- On peut représenter chaque choix des n arguments par une formule, par exemple le choix $c = (1, 0, 0, 1) \in \{0, 1\}^4$ est représenté par la formule $p_c = x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$.
- Cette formule est vraie dans une affectation v si et seulement si $v(x_1) = 1$, $v(x_2) = 0$, $v(x_3) = 0$, et $v(x_4) = 1$.

Notre logique avec $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est fonctionnellement complète

- On peut représenter chaque choix des n arguments par une formule, par exemple le choix $c = (1, 0, 0, 1) \in \{0, 1\}^4$ est représenté par la formule $p_c = x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$.
- Cette formule est vraie dans une affectation v si et seulement si $v(x_1) = 1$, $v(x_2) = 0$, $v(x_3) = 0$, et $v(x_4) = 1$.
- Construire la formule p comme la disjonction de toutes les formules p_c pour les n-uplets c pour lesquelles f donne le résultat 1.

Exemple

Soit f la fonction à trois arguments qui renvoie 1 si et seulement si un des ses arguments est 0 et deux de ses arguments sont 1. Autrement dit, f renvoie 1 exactement pour les arguments $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, et $(1, 1, 0)$.

Ce raisonnement se généralise à n'importe quelle fonction d'arité $n \geq 0$.

Exemple

Soit f la fonction à trois arguments qui renvoie 1 si et seulement si un des ses arguments est 0 et deux de ses arguments sont 1. Autrement dit, f renvoie 1 exactement pour les arguments $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, et $(1, 1, 0)$.

La formule correspondante est

$$(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)$$

Ce raisonnement se généralise à n'importe quelle fonction d'arité $n \geq 0$.

Complétude fonctionnelle

Intuition de la définition

Un ensemble d'opérateurs est fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne.

Complétude fonctionnelle

Intuition de la définition

Un ensemble d'opérateurs est fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne.

Exemples

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$ (permet d'exprimer $\vee$)

Complétude fonctionnelle

Intuition de la définition

Un ensemble d'opérateurs est fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne.

Exemples

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$ (permet d'exprimer $\vee$)
- $\{\neg, \vee\}$ (permet d'exprimer $\wedge$)

Complétude fonctionnelle

Intuition de la définition

Un ensemble d'opérateurs est fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne.

Exemples

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$ (permet d'exprimer $\vee$)
- $\{\neg, \vee\}$ (permet d'exprimer $\wedge$)
- $\{\neg, \rightarrow\}$ (permet d'exprimer $\vee$ et $\wedge$)

Complétude fonctionnelle

Intuition de la définition

Un ensemble d'opérateurs est fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne.

Exemples

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$ (permet d'exprimer $\vee$)
- $\{\neg, \vee\}$ (permet d'exprimer $\wedge$)
- $\{\neg, \rightarrow\}$ (permet d'exprimer $\vee$ et $\wedge$)
- $\{\uparrow\}$ (voir le TD)

Complétude fonctionnelle

Contre-exemples

- $\{\wedge, \vee\}$

Complétude fonctionnelle

Contre-exemples

- $\{\wedge, \vee\}$
- $\{\leftrightarrow\}$

Comment le prouver ?

Trouver une propriété P telle que

Complétude fonctionnelle

Contre-exemples

- $\{\wedge, \vee\}$
- $\{\leftrightarrow\}$

Comment le prouver ?

Trouver une propriété P telle que

- Toutes les fonctions booléennes construites avec le jeu d'opérateurs ont la propriété P (preuve par induction !)

Complétude fonctionnelle

Contre-exemples

- $\{\wedge, \vee\}$
- $\{\leftrightarrow\}$

Comment le prouver ?

Trouver une propriété P telle que

- Toutes les fonctions booléennes construites avec le jeu d'opérateurs ont la propriété P (preuve par induction !)
- Il existe une fonction booléene qui n'a pas la propriété P

Complétude fonctionnelle

Contre-exemples

- $\{\wedge, \vee\}$
- $\{\leftrightarrow\}$

Comment le prouver ?

Trouver une propriété P telle que

- Toutes les fonctions booléennes construites avec le jeu d'opérateurs ont la propriété P (preuve par induction !)
- Il existe une fonction booléene qui n'a pas la propriété P
- Voir le TD !

Objectif

- Généraliser les équivalences de la proposition à des formules quelconques.

Objectif

- Généraliser les équivalences de la proposition à des formules quelconques.
- Par exemple $p \land p \models\mid p$, $p \land q \models\mid q \land p$ pour toutes formules propositionnelles p et q.

Définition [Substitution]

Soit x une variable propositionnelle et p une formule propositionnelle. La fonction de substitution de x par p, notée $[x/p]: \rightarrow$, est définie par récurrence comme suit (l'application de cette fonction à un argument q est notée $q[x/p]$) :

Définition [Substitution]

Soit x une variable propositionnelle et p une formule propositionnelle. La fonction de substitution de x par p, notée $[x/p] : \ \rightarrow$, est définie par récurrence comme suit (l'application de cette fonction à un argument q est notée $q[x/p]$) :

1. $y[x/p] = \begin{cases} p & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y \end{cases}$

Définition [Substitution]

Soit x une variable propositionnelle et p une formule propositionnelle. La fonction de substitution de x par p, notée $[x/p]: \longrightarrow$, est définie par récurrence comme suit (l'application de cette fonction à un argument q est notée $q[x/p]$) :

1. $y[x/p] = \begin{cases} p & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y \end{cases}$
2. $(\neg q)[x/p] = \neg(q[x/p])$

Définition [Substitution]

Soit x une variable propositionnelle et p une formule propositionnelle. La fonction de substitution de x par p, notée $[x/p]: \ \rightarrow$, est définie par récurrence comme suit (l'application de cette fonction à un argument q est notée $q[x/p]$) :

1. $y[x/p] = \begin{cases} p & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y \end{cases}$
2. $(\neg q)[x/p] = \neg(q[x/p])$
3. $(q_1 \wedge q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \wedge (q_2[x/p])$

Définition [Substitution]

Soit x une variable propositionnelle et p une formule propositionnelle. La fonction de substitution de x par p, notée $[x/p]: \ \rightarrow$, est définie par récurrence comme suit (l'application de cette fonction à un argument q est notée $q[x/p]$) :

1. $y[x/p] = \begin{cases} p & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y \end{cases}$
2. $(\neg q)[x/p] = \neg(q[x/p])$
3. $(q_1 \wedge q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \wedge (q_2[x/p])$
4. $(q_1 \vee q_2)[x/p] = (q_1[x/p]) \vee (q_2[x/p])$

Exemple Substitution

Soit

$$p = z \vee \neg y$$

Alors :

$$(x \wedge (\neg x \wedge y))[x/p] = (z \vee \neg y) \wedge (\neg(z \vee \neg y) \wedge y)$$

Substitution simultanée

Cette définition se généralise facilement à une substitution simultanée $q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]$ pour le cas où les $x_1, \ldots, x_n$ sont toutes des variables différentes.

Exemple Substitution Simultanée

Soient

$$\begin{aligned} p_1 &= (y_1 \wedge \neg y_2) \\ p_2 &= (z_1 \vee (z_2 \wedge z_3)) \end{aligned}$$

alors on a que

$$(x_1 \wedge x_2)[x_1/p_1, x_2/p_2] = (y_1 \wedge \neg y_2) \wedge (z_1 \vee (z_2 \wedge z_3))$$

Substitution vs. Substitution Simultanée

Attention, on n'a pas toujours que
$q[x_1/p_1, x_2/p_2] = (q[x_1/p_1])[x_2/p_2]$.

Substitution vs. Substitution Simultanée

Attention, on n'a pas toujours que
$q[x_1/p_1, x_2/p_2] = (q[x_1/p_1])[x_2/p_2]$.

Contre-exemple: $q = x_1$, $p_1 = (x_2 \wedge x_2)$, et $p_2 = (x_3 \vee x_3)$:

$$\begin{aligned}
x_1[x_1/(x_2 \wedge x_2), x_2/(x_3 \vee x_3)] &= (x_2 \wedge x_2) \\
(x_1[x_1/(x_2 \wedge x_2)])[x_2/(x_3 \vee x_3)] &= (x_2 \wedge x_2)[x_2/(x_3 \vee x_3)] \\
&= ((x_3 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_3))
\end{aligned}$$

Substitution dans les affectations

Definition

Soit v une affectation, x une variable propositionnelle, et $b \in \{0, 1\}$. Alors $v[x/b]$ est l'affectation définie comme suit :

$$v[x/b](y) = \begin{cases} b & \text{si } x = y \\ v(y) & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Substitution dans les affectations

Definition

Soit v une affectation, x une variable propositionnelle, et $b \in \{0, 1\}$. Alors $v[x/b]$ est l'affectation définie comme suit :

$$v[x/b](y) = \begin{cases} b & \text{si } x = y \\ v(y) & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Cette définition se généralise aussi à une substitution simultanée $v[x_1/b_1, \ldots, x_n/b_n]$ pour le cas où les $x_1, \ldots, x_n$ sont toutes des variables différentes.

Exemple

$$[x \mapsto 0, y \mapsto 1][y/0, z/1] = [x \mapsto 0, y \mapsto 0, z \mapsto 1]$$

Proposition sur les substitutions

Proposition

Pour toute formule q, variables différentes $x_1, \ldots, x_n$, formules $p_1, \ldots, p_n$, et affectation v on a que

$$[\![q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]]\!] v = [\![q]\!] (v[x_1/[\![p_1]\!] v, \ldots, x_n/[\![p_n]\!] v])$$

Proposition sur les substitutions

Proposition

Pour toute formule q, variables différentes $x_1, \ldots, x_n$, formules $p_1, \ldots, p_n$, et affectation v on a que

$$[\![q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]]\!]v = [\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v, \ldots, x_n/[\![p_n]\!]v])$$

En d'autres mots, on obtient le même résultat

1. quand on substitue les x_i par les p_i dans la formule q et puis évalue la formule ainsi obtenue par rapport à l'affectation v;
2. quand on évalue d'abord les formules p_i par rapport à l'affectation v, puis on met à jour dans l'affectation v les valeurs des variables x_i par l'interprétation des p_i, et on évalue la formule q originale par rapport à la nouvelle affectation.

Exemple

Pour la formule $q = (x_1 \vee x_2)$, la valuation $v = [y \mapsto 0, z \mapsto 1]$ et les formules $p_1 = (y \vee z)$, $p_2 = (\neg y \wedge \neg z)$, d'une part on a

$$
\begin{aligned}
[\![q[x_1/p_1, x_2/p_2]]\!] v &= [\![(x_1 \vee x_2)[x_1/(y \vee z), x_2/(\neg y \wedge \neg z)]]\!] v \\
&= [\![((y \vee z) \vee (\neg y \wedge \neg z))]\!] v \\
&= [\![((y \vee z) \vee (\neg y \wedge \neg z))]\!] [y \mapsto 0, z \mapsto 1] = 1
\end{aligned}
$$

Exemple

Pour la formule $q = (x_1 \vee x_2)$, la valuation $v = [y \mapsto 0, z \mapsto 1]$ et les formules $p_1 = (y \vee z)$, $p_2 = (\neg y \wedge \neg z)$, d'une part on a

$$\begin{aligned}
[\![q[x_1/p_1, x_2/p_2]]\!]v &= [\![(x_1 \vee x_2)[x_1/(y \vee z), x_2/(\neg y \wedge \neg z)]]\!]v \\
&= [\![((y \vee z) \vee (\neg y \wedge \neg z))]\!]v \\
&= [\![((y \vee z) \vee (\neg y \wedge \neg z))]\!][y \mapsto 0, z \mapsto 1] = 1
\end{aligned}$$

D'autre part, on a d'abord

$$\begin{aligned}
[\![p_1]\!]v &= [\![(y \vee z)]\!][y \mapsto 0, z \mapsto 1] = 1 \\
[\![p_2]\!]v &= [\![(\neg y \wedge \neg z)]\!][y \mapsto 0, z \mapsto 1] = 0
\end{aligned}$$

Exemple

Pour la formule $q = (x_1 \vee x_2)$, la valuation $v = [y \mapsto 0, z \mapsto 1]$ et les formules $p_1 = (y \vee z)$, $p_2 = (\neg y \wedge \neg z)$, d'une part on a

$$\begin{aligned}
[\![q[x_1/p_1, x_2/p_2]]\!] v &= [\![(x_1 \vee x_2)[x_1/(y \vee z), x_2/(\neg y \wedge \neg z)]]\!] v \\
&= [\![((y \vee z) \vee (\neg y \wedge \neg z))]\!] v \\
&= [\![((y \vee z) \vee (\neg y \wedge \neg z))]\!] [y \mapsto 0, z \mapsto 1] = 1
\end{aligned}$$

D'autre part, on a d'abord

$$\begin{aligned}
[\![p_1]\!] v &= [\![(y \vee z)]\!] [y \mapsto 0, z \mapsto 1] = 1 \\
[\![p_2]\!] v &= [\![(\neg y \wedge \neg z)]\!] [y \mapsto 0, z \mapsto 1] = 0
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
[\![q]\!] (v[x_1/[\![p_1]\!] v, x_2/[\![p_2]\!] v]) &= [\![q]\!] (v[x_1/1, x_2/0]) \\
&= [\![(x_1 \vee x_2)]\!] [x_1 \mapsto 1, x_2 \mapsto 0] = 1
\end{aligned}$$

Proposition sur les substitutions

Proposition

Pour toute formule q, variables différentes $x_1, \ldots, x_n$, formules $p_1, \ldots, p_n$, et affectation v on a que

$$[\![q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]]\!]v = [\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v, \ldots, x_n/[\![p_n]\!]v])$$

La preuve (omise) se fait par induction structurelle.

Théorèmes sur les substitutions

Theorem

Soit q une tautologie, $x_1, \ldots, x_n$ des variables propositionnelles différentes, et $p_1, \ldots, p_n$ des formules propositionnelles. Alors

$$q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]$$

est aussi une tautologie.

Théorèmes sur les substitutions

Theorem

Soit q une tautologie, $x_1, \dots, x_n$ des variables propositionnelles différentes, et $p_1, \dots, p_n$ des formules propositionnelles. Alors

$$q[x_1/p_1, \dots, x_n/p_n]$$

est aussi une tautologie.

exemple :
$\neg(x \wedge y)$
$\models\mid \neg x \vee \neg y$

Theorem

Soient q_1, q_2 deux formules telles que $q_1 \models\mid q_2$, $x_1, \dots, x_n$ des variables propositionnelles différentes, et $p_1, \dots, p_n$ des formules propositionnelles. Alors

équivalent

$$q_1[x_1/p_1, \dots, x_n/p_n] \models\mid q_2[x_1/p_1, \dots, x_n/p_n]$$

Démonstration

Nous montrons le 1er théorème (la démonstration du 2eme théorème sera faite en TD).

Démonstration

Nous montrons le 1er théorème (la démonstration du 2eme théorème sera faite en TD).

- Nous devrons montrer que pour toute affectation v,

$$[\![q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]]\!]v = 1$$ toujours vrai

Démonstration

Nous montrons le 1er théorème (la démonstration du 2eme théorème sera faite en TD).

- Nous devrons montrer que pour toute affectation v,

$$[\![q[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v = 1$$ toujours vraie

- Or, d'après proposition sur les substitutions :

$$[\![q[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v = [\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![p_n]\!]v])$$

Démonstration

Nous montrons le 1er théorème (la démonstration du 2eme théorème sera faite en TD).

- Nous devrons montrer que pour toute affectation v,

$$[\![q[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v = 1$$ toujours vraie

- Or, d'après proposition sur les substitutions :

$$[\![q[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v = [\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![p_n]\!]v])$$

- Puisque q est une tautologie,

$$[\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![p_n]\!]v]) = 1$$

puisque $[\![q]\!]v' = 1$ pour toute affectation v'.

Application du 2eme théorème

Theorem

On a les équivalences suivantes pour toutes les formules p, q, r :

$p \wedge p \models\mid p$	*Loi d'idempotence de la conjonction*
$p \wedge q \models\mid q \wedge p$	*Loi de commutativité de la conjonction*
$p \wedge (q \wedge r) \models\mid (p \wedge q) \wedge r$	*Loi d'associativité de la conjonction*
$p \vee p \models\mid p$	*Loi d'idempotence de la disjonction*
$p \vee q \models\mid q \vee p$	*Loi de commutativité de la disjonction*
$p \vee (q \vee r) \models\mid (p \vee q) \vee r$	*Loi d'associativité de la disjonction*
$\neg\neg p \models\mid p$	*Loi de la double négation*

Des autres lois intéressantes

Le théorème suivant donne des lois qui mettent plusieurs opérateurs logiques en relation :

Theorem

On a les équivalences suivantes pour toutes les formules p, q, r :

$(p \wedge q) \vee r \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (p \vee r) \wedge (q \vee r)$	*Première loi de distributivité*
$(p \vee q) \wedge r \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	*Seconde loi de distributivité*
$\neg(p \wedge q) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg p \vee \neg q$	*Première loi de De Morgan*
$\neg(p \vee q) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg p \wedge \neg q$	*Seconde loi de De Morgan*

Objectif

- Au-dessus : substituer dans des équivalences préalablement établies des variables par des formules quelconques.

Objectif

- Au-dessus : substituer dans des équivalences préalablement établies des variables par des formules quelconques.
- Deuxième méthode : On part d'une équivalence préalablement établie $p \mathrel{\models\!\!\!\dashv} q$ et on construit une nouvelle équivalence en remplaçant dans une formule quelconque une variable, disons x, une fois par p et une fois par q.

Theorem

Soient $p_1 \models\mid q_1, \ldots, p_n \models\mid q_n$*,* p *une formule, et* $x_1, \ldots, x_n \subseteq \mathcal{V}(p)$ *des variables différentes. Alors*

$$p[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n] \models\mid p[x_1/q_1, \ldots, x_n/q_n]$$

Démonstration

Il faut montrer que pour toute affectation v on a que

$$[\![p[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v = [\![p[x_1/q_1,\ldots,x_n/q_n]]\!]v$$

Puisque $p_i \models\!\!\!\models q_i$ pour tout i on a aussi que $[\![p_i]\!]v = [\![q_i]\!]v$ pour tout i.
On obtient la chaîne d'égalités suivante :

Démonstration (suite)

$$\begin{array}{lll} & [\![p[x_1/p_1,\ldots,x_n/p_n]]\!]v & \\ = & [\![p]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![p_n]\!]v]) & \text{proposition sur les substitutions} \\ = & [\![p]\!](v[x_1/[\![q_1]\!]v,\ldots,x_n/[\![q_n]\!]v]) & \text{car } [\![p_i]\!]v = [\![q_i]\!]v \text{ pour tout } i \\ = & [\![p[x_1/q_1,\ldots,x_n/q_n]]\!]v & \text{proposition sur les substitutions} \end{array}$$

Exemple

Nous savons par les lois de De Morgan, que

$$\underbrace{\neg(y_1 \wedge y_2)}_{p_1} \quad \models\!\!\!\!\!\!\dashv \quad \underbrace{\neg y_1 \vee \neg y_2}_{q_1}$$

$$\underbrace{\neg(z_1 \vee z_2)}_{p_2} \quad \models\!\!\!\!\!\!\dashv \quad \underbrace{\neg z_1 \wedge \neg z_2}_{q_2}$$

Avec la formule $p = (\neg x_1 \wedge x_2)$ on obtient la nouvelle équivalence suivante :

$$\underbrace{\neg\neg(y_1 \wedge y_2) \wedge \neg(z_1 \vee z_2)}_{p[x_1/p_1, x_2/p_2]} \quad \models\!\!\!\!\!\!\dashv \quad \underbrace{\neg(\neg y_1 \vee \neg y_2) \wedge (\neg z_1 \wedge \neg z_2)}_{p[x_1/q_1, x_2/q_2]}$$