Outils logiques
TD n° 2

Exercice 1 :

(Induction sur les naturels) Prouver par induction sur les naturels que pour tout $n \geqslant 0$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}$$

Exercice 2 :

(Première induction sur les formules) Soit p une formule de la logique propositionnelle. On désigne par $\mathtt{N}(p)$ le nombre de variables de la formule p, en tenant compte des éventuelles répétitions. Par exemple :

$$\mathtt{N}((x_1 \vee x_2)) = \mathtt{N}((x_1 \wedge x_1)) = 2$$

Autrement dit, $\mathtt{N}(p)$ désigne le nombre d'*occurrences de variables* dans la formule p. Par ailleurs, on désigne par $\mathtt{A}(p)$ le nombre de parenthèses dans p. Par exemple

$$\mathtt{A}(x_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathtt{A}((x_1 \wedge x_1)) = 2$$

1. Donner des définitions récursives des fonctions $\mathtt{N}$ et $\mathtt{A}$.
2. Montrer par induction la propriété suivante :
   Propriété : toute formule propositionnelle $p \in Form$ vérifie $\mathtt{N}(p) - \mathtt{A}(p) \leqslant 1$.

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble de variables propositionnelles. On désigne par $|p|_($ le nombre de parenthèses ouvrantes, par $|p|_)$ le nombre de parenthèses fermantes et par $|p|_\neg$ le nombre de symboles de négation figurant dans une formule p (cf. cours). On appelera également $|p|$ la longueur de p.

1. Donner des définitions récursives des fonctions $|\_|_($, $|\_|_)$, $|\_|_\neg$ et $|\_|$.
2. Montrer par induction la propriété suivante :
   Propriété : toute formule propositionnelle $p \in Form$ vérifie $|p| = |p|_\neg + 2 \cdot |p|_(+ 2 \cdot |p|_) + 1$

Exercice 4 :

On définit, pour toute formule $p \in \mathsf{Form}$, les trois fonctions définies par :

- $|p|_{()}$ = le nombre de parenthèses dans p,
- $|p|_\wedge$ = le nombre de symboles « $\wedge$ » dans p,
- $|p|_\vee$ = le nombre de symboles « $\vee$ » dans p.

Par exemple, si p est la formule $((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg z))$ alors $|p|_{()} = 6$, $|p|_\wedge = 2$, et $|p|_\vee = 1$.

1. Donner des définitions récursives des trois fonctions ci-dessus.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathsf{Form}$ on a $|p|_{()} = 2(|p|_\wedge + |p|_\vee)$.

Preuves par induction

Théorème : Toute formule propositionnelle a le même nombre de parenthèses ouvrantes que fermantes

→ $|w|_($ dénote le nbre de ( ) ouvrantes de w

$|(x \wedge y)|_(= 1$

→ $|w|_)$ fermantes

$|(x \wedge y)|_) = 1$

Ex 1

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

Cas 1 $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 = \frac{0.(0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6}$$

Cas 2 : On suppose que $P(n)$ vrai et on montre $P(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \quad (\text{par def})$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

On doit vérifier que

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$ est égal à

$$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Ex 2

N: nbre de variable dans un formule

A: nbre de parenthèse total

1) On définit N par récurrence sur les formules de la logique propositionnelle

① $N(x) = 1$ pour $x \in V$

② $N(\neg p) = N(p)$

③ $N((p \wedge q)) = N(p) + N(q)$

④ $N((p \vee q)) = N(p) + N(q)$

① $A(x) = 0$

② $A(\neg p) = A(p)$

③ $A((p \wedge q)) = 2 + A(p) + A(q)$

④ $A((p \vee q)) = 2 + A(p) + A(q)$

<u>Propriété</u> : pour tout $p \in$ Form, on a

P : $N(p) - A(p) = 1$

On montre cette propriété par induction structurelle

① Si $x \in V$, il faut montrer que

$N(x) - A(x) \leq 1$

On a $N(x) = 1$ $A(x) = 0$

$N(x) - A(x) = 1 \leq 1$

② On suppose que $p \in$ Form et p satisfait P

On doit montrer que $\neg p$ satisfait aussi P

$N(\neg p) - A(\neg p) = N(p) - A(p)$ (par def)

$N(\neg p) - A(\neg p) = N(p) - A(p) \leq 1$

(par hyp)

③ Soient $p \in$ Form, $q \in$ Form qui satisfont P

On doit montrer que P est vrai aussi pour $(p \wedge q)$

$$N((p \wedge q)) - A((p \wedge q))$$
$$= N(p) + N(q) - (2 + A(p) + A(q))$$
$$= N(p) + N(q) - 2 - A(p) - A(q)$$
$$= \underbrace{N(p) - A(p)}_{\leq 1} + \underbrace{N(q) - A(q)}_{\leq 1} - 2$$

par hypothèses

$$\leq 0 \leq 1$$

$\vdash\!|$

④ le cas du $\vee$ est pareil

Ex 3

1. $|x|_C = 0$ si $x \in V$
2. $|\neg p|_C = |p|_C$
3. $|(p \wedge q)|_C = 1 + |p|_C + |q|_C$
4. $|(p \vee q)|_C = 1 + |p|_C + |q|_C$

Définition récursives de $|\_|_($, $|\_|_)$, $|\_|_\neg$, $|\_|$

1. $|x|_(= 0$, $|x|_) = 0$, $|x|_\neg = 0$
   et $|x| = 1$ →taille si $x \in V$

2. $|\neg p|_(= |p|_($ $\qquad$ $|\neg p|_\neg = 1 + |p|_\neg$ →0

   $|\neg p|_) = |p|_)$ $\qquad$ $|\neg p| = 1 + |p|$

3. $|(p \wedge q)|_(= 1 + |p|_(+ |q|_($

   $|(p \wedge q)|_) = 1 + |p|_) + |q|_)$

   $|(p \wedge q)|_\neg = |p|_\neg + |q|_\neg$

   $|(p \wedge q)| = 3 + |p| + |q|$

4. $|(p \vee q)|_(= 1 + |p|_(+ |q|_($

   $|(p \vee q)|_) = 1 + |p|_) + |q|_)$

   $|(p \vee q)|_\neg = |p|_\neg + |q|_\neg$

   $|(p \vee q)| = 3 + |p| + |q|$

2) Mq :

Propriété : toute formule prop, $p \in Form$ vérifie
$$|p| = |p|_{\neg} + 2|p|_{(} + 2|p|_{)} + 1$$

Exemple :
$$|(x \wedge y)| = 5$$
$$|(p \wedge q)| = 3 + |p| + |q|$$
$$|(x \wedge y)|_{\neg} + 2|(x \wedge y)|_{(} + 2|(x \wedge y)|_{)}$$
$$+ 1 = 5$$

Preuve par induction structurelle

① Soit $x \in V$

$|x|$
$$|x| = 1$$
$$|x|_{\neg} + 2|x|_{(} + 2|x|_{)} + 1 = 1 \text{ par def}$$

② Soit p une formule qui satisfait la propriété
On doit vérifier que la propriété est aussi vraie pour $\neg p$

$|\neg p|$
$$|\neg p| = 1 + |p| \text{ pour déf}$$
$$= \underbrace{1 + |p|_{\neg}} + 2|p|_{(} + 2|p|_{)} + 1 \text{ (par hyp)}$$
$$= |\neg p|_{\neg} + 2|\neg p|_{(} + 2|\neg p|_{)} + 1 \text{ (par def)}$$

La propriété est satisfaite

③ $|(p \wedge q)|$

Soient p, q deux formulent qui satisfont la propriété
On doit montrer que la propriété est aussi vraie pour $(p \wedge q)$
On doit vérifier que :

$$|(p \wedge q)| = |(p \wedge q)|_7 + 2|(p \wedge q)|_C + 2|(p \wedge q)|_) + 1$$

$$= (\text{par déf}) \ 3 + |p| + |q|$$

$$= (\text{par hyp}) \ 3 + |p|_7 + 2|p|_C + 2|p|_) + 1$$

$$+ \ |q|_7 + 2|q|_C + 2|p|_) + 1$$

$= (\text{par déf})$

$$|p|_7 + |q|_7 + 2(1 + |p|_C + |q|_)) + 2(1 + |p|_) + |q|_))$$

$=$

$$|p|_7 + |q|_7 + 2 + 2|p|_C + 2|q|_) + 2 + 2|p|_) + 2|q|_) + 1$$

Si γ pareil pour $\vee$