TD 2. Substitutions et formes normales dans la logique propositionnelle

Rappel : Si I est une interprétation, et τ est une substitution propositionnelle, alors $I\tau$ est l'interprétation qui associe à une proposition P la valeur $[\![\tau(P)]\!]^I$. Le *lemme de substitution propositionnelle* garantit que pour toute formule ϕ, $[\![\phi\tau]\!]^I = [\![\phi]\!]^{I\tau}$.

Exercice 1. Engendrer des équivalences par substitution

Soient φ et ψ deux formules propositionnelles équivalentes, et soit τ une substitution propositionnelle.

(a) Montrer que les formules $\varphi\tau$ et $\psi\tau$ sont équivalentes.

(b) En déduire que si φ et ψ sont deux formules propositionnelles, les formules $\neg(\varphi \vee \psi)$ et $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ sont équivalentes.

Exercice 2. Encore sur les substitutions

Considérons la formule $\varphi = (P \wedge Q) \vee R$, les substitutions $\tau_1 = [(S \vee Q)/P, \neg Q/R]$, $\tau_2 = [(Q \wedge P)/Q]$ et l'interprétation $I = [1/P, 0/Q, 0/R, 0/S]$.

(a) Calculer les formules $\varphi\tau_1$ et $\varphi\tau_2$.

(b) Calculer les interprétations $I\tau_1$ et $I\tau_2$.

(c) Vérifier que $[\![\varphi\tau_1]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau_1}$ et que $[\![\varphi\tau_2]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau_2}$.

(d) De quel énoncé les deux égalités du point précédent sont-elles des cas particuliers ?

Rappel : On rappelle que la mise en forme normale négative peut se faire avec l'algorithme suivant, défini par induction structurelle sur la syntaxe des formules :

$$\begin{aligned}
\mathrm{nnf}(P) &\overset{\text{def}}{=} P\,, & \mathrm{nnf}(\neg P) &\overset{\text{def}}{=} \neg P\,,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \vee \psi) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\psi)\,, & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\neg\psi)\,,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \wedge \psi) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\psi)\,, & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\neg\psi)\,,\\
& & \mathrm{nnf}(\neg\neg\varphi) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Une formule sous forme normale négative s'écrit donc dans la syntaxe ci-dessous :

(littéraux) $\ell ::= P \mid \neg P$

(formules) $\varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi$

À partir d'une formule sous cette forme, les deux algorithmes suivant permettent d'obtenir une formule équivalente sous forme normale conjonctive (pour cnf) et sous forme normale disjonctive (pour dnf) :

$$\mathrm{cnf}(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) = \mathrm{cnf}((\psi \wedge \psi') \vee \varphi) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi) \wedge \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi')\,.$$
$$\mathrm{dnf}(\varphi \wedge (\psi \vee \psi')) = \mathrm{dnf}((\psi \vee \psi') \wedge \varphi) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi) \vee \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi')\,.$$

Une formule sous forme normale conjonctive s'écrit $\bigwedge_{1\leq i\leq m} \bigvee_{1\leq j\leq n_i} \ell_{i,j}$ et une formule sous forme normale disjonctive s'écrit $\bigvee_{1\leq i\leq m} \bigwedge_{1\leq j\leq n_i} \ell_{i,j}$ où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux

Exercice 3. Forme normale négative

(a) Calculer $\mathrm{nnf}(\neg(P \vee \neg(Q \wedge \neg R)))$

(b) Calculer $\mathrm{nnf}((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$.

Exercice 4. Formes clausales

(a) Calculer $\mathrm{cnf}((P_1 \wedge Q_1) \vee (P_2 \wedge Q_2))$. Est-ce que la manière de calculer est unique ?

(b) Donner un algorithme pour vérifier si une formule cnf est valide.

(c) Calculer $\mathrm{dnf}((P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge Q)$.

(d) Donner un algorithme pour vérifier efficacement si une formule sous forme normale disjonctive est satisfiable.

Exercice 5. Tables de vérité et formes normales disjonctives complètes

Soit $\varphi = \neg(P \vee (Q \wedge R))$

(a) Écrire la table de vérité de φ et construire à partir de cette table une formule dnf ψ telle que ψ soit équivalente à φ.

(b) Calculer $\mathrm{dnf}(\mathrm{nnf}(\varphi))$ et vérifier que cette formule est équivalente à φ.

Rappel : On rappelle l'algorithme vu en cours qui permet de construire, pour une formule propositionnelle φ sous forme normale négative, une formule propositionnelle ψ sous forme 3-clausale conjonctive telle que φ et ψ sont équi-satisfiables.

Pour chaque sous-formule φ' de la formule φ, on introduit une proposition fraîche $Q_{\varphi'} \notin \mathrm{fp}(\varphi)$, mis à part les littéraux, pour lesquels on définit $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} P$ si $\varphi' = P$ et $Q_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \neg P$ si $\varphi' = \neg P$. On définit aussi pour chaque sous-formule non littérale φ' de φ une formule

$$\psi_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\varphi_1} \vee Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2 \,, \\ Q_{\varphi_1} \wedge Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \,. \end{cases}$$

La formule désirée est alors $\psi \stackrel{\text{def}}{=} Q_\varphi \wedge \bigwedge_{\varphi' \text{ sous-formule non littérale de } \varphi} (Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$.

Cette formule se transforme facilement en une forme 3-clausale conjonctive. La formule propositionnelle ψ est de *taille linéaire* en la taille de la formule propositionnelle φ.

Exercice 6. Forme clausale equi-satisfiable

(a) Calculer la forme normale négative de la *loi de* PEIRCE $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$.

(b) Appliquer à la formule obtenue au point précédent l'algorithme ci-dessus.

(c) Vérifier que la loi de PEIRCE est valide. Soit ψ la formule en forme 3-clausale conjonctive produite au point précédent. Donner une interprétation I_1 qui satisfait ψ et une interprétation I_2 qui la contredit.

Exercice 1. Engendrer des équivalences par substitution

Soient φ et ψ deux formules propositionnelles équivalentes, et soit τ une substitution propositionnelle.

(a) Montrer que les formules $\varphi\tau$ et $\psi\tau$ sont équivalentes.

(b) En déduire que si φ et ψ sont deux formules propositionnelles, les formules $\neg(\varphi \vee \psi)$ et $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ sont équivalentes.

a) Soit I une interprétation

On a $[\![\varphi]\!]^I = [\![\psi]\!]^I$

$[\![\varphi\tau]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau}$ (par le lemme de substitution) (1)

faux

$[\![\psi\tau]\!]^I = [\![\psi]\!]^{I\tau}$ (2)

Comme φ et ψ sont équivalentes, on $[\![\varphi]\!]^{I_2} = [\![\psi]\!]^{I_2}$ (3)

de (1), (2), (3) $[\![\varphi\tau]\!]^I = [\![\psi\tau]\!]^I$

b) $\neg(\varphi \vee \psi) \overset{?}{\Leftrightarrow} \neg\varphi \wedge \neg\psi$

On sait que pour toutes proposition P et Q

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ (De Morgan) (1)

On applique la substitution $\tau = [\varphi/P, \psi/Q]$ on obtient d'un côté $\neg(\varphi \vee \psi)$ et de l'autre côté $\neg\varphi$ et $\neg\psi$. ~~De~~ De (1) et la question (a) on déduit que

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Ex 2

Exercice 2. Encore sur les substitutions

Considérons la formule $\varphi = (P \wedge Q) \vee R$, les substitutions $\tau_1 = [(S \vee Q)/P, \neg Q/R]$, $\tau_2 = [(Q \wedge P)/Q]$ et l'interprétation $I = [1/P, 0/Q, 0/R, 0/S]$.

(a) Calculer les formules $\varphi\tau_1$ et $\varphi\tau_2$.

(b) Calculer les interprétations $I\tau_1$ et $I\tau_2$.

(c) Vérifier que $[\![\varphi\tau_1]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau_1}$ et que $[\![\varphi\tau_2]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau_2}$.

(d) De quel énoncé les deux égalités du point précédent sont-elles des cas particuliers ?

Rappel : On rappelle que la mise en forme normale négative peut se faire avec l'algorithme suivant, défini par induction structurelle sur la syntaxe des formules :

$$\mathrm{nnf}(P) \stackrel{\text{def}}{=} P\,, \qquad \mathrm{nnf}(\neg P) \stackrel{\text{def}}{=} \neg P\,,$$
$$\mathrm{nnf}(\varphi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\psi)\,, \qquad \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\neg\psi)\,,$$
$$\mathrm{nnf}(\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\psi)\,, \qquad \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\neg\psi)\,,$$
$$\mathrm{nnf}(\neg\neg\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi)\,.$$

Une formule sous forme normale négative s'écrit donc dans la syntaxe ci-dessous :

(littéraux) $\quad \ell ::= P \mid \neg P$

(formules) $\quad \varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi$

À partir d'une formule sous cette forme, les deux algorithmes suivant permettent d'obtenir une formule équivalente sous forme normale conjonctive (pour cnf) et sous forme normale disjonctive (pour dnf) :

$$\mathrm{cnf}(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) = \mathrm{cnf}((\psi \wedge \psi') \vee \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi) \wedge \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi')\,.$$
$$\mathrm{dnf}(\varphi \wedge (\psi \vee \psi')) = \mathrm{dnf}((\psi \vee \psi') \wedge \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi) \vee \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi')\,.$$

Une formule sous forme normale conjonctive s'écrit $\bigwedge_{1 \le i \le m} \bigvee_{1 \le j \le n_i} \ell_{i,j}$ et une formule sous forme normale disjonctive s'écrit $\bigvee_{1 \le i \le m} \bigwedge_{1 \le j \le n_i} \ell_{i,j}$ où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux

a) Calculer φ_{τ_1} et φ_{τ_2}

φ_{τ_1}

$\varphi = (P \wedge Q) \vee R$

$\tau_1 = [(S \vee Q)/P, \neg Q/R]$ $\qquad$ $\tau_2 = [(Q \wedge P)/Q]$

$\varphi_{\tau_1} = \tau_1(\varphi)$ $\qquad$ $\varphi_{\tau_2} = (P \wedge (Q \wedge P)) \vee R$

$\varphi_{\tau_1} = [\tau_1(P) \wedge \tau_1(Q)] \vee \tau_1(R)$

$= ((S \vee Q) \wedge Q) \vee \neg Q$

$0 \quad 0 \quad \wedge \neg 1$

Exercice 2. Encore sur les substitutions

b) Considérons la formule $\varphi = (P \wedge Q) \vee R$, les substitutions $\tau_1 = [(S \vee Q)/P, \neg Q/R]$, $\tau_2 = [(Q \wedge P)/Q]$ l'interprétation $I = [1/P, 0/Q, 0/R, 0/S]$.

(a) Calculer les formules $\varphi\tau_1$ et $\varphi\tau_2$.

(b) Calculer les interprétations $I\tau_1$ et $I\tau_2$.

(c) Vérifier que $[\![\varphi\tau_1]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau_1}$ et que $[\![\varphi\tau_2]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau_2}$.

(d) De quel énoncé les deux égalités du point précédent sont-elles des cas particuliers ?

$$I\tau_1 = [(S \vee Q)^I/P,\ Q^I/Q,\ (\neg Q)^I/R,\ S^I/S]$$

$$I\tau_1 = [0/P,\ 0/Q,\ 1/R,\ 0/S]$$

$$I\tau_2 = [P^I/P,\ (Q \wedge P)^I/Q,\ R^I/R,\ S^I/S]$$
$$= [1/P,\ 0/Q,\ 0,\ 0]$$
$$= I$$

c) $[\![\varphi\tau_1]\!]^I = [\![((S \vee Q) \wedge Q) \vee \neg Q]\!]^I$
$= 1$

$[\![\varphi]\!]^{I\tau_1} = [\![(P \wedge Q) \vee R]\!]^{I\tau_1}$
$= 1$

$$[\![\varphi\tau_1]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau_1}$$

$[\![\varphi\tau_2]\!]^I = [\![(P \wedge (Q \wedge P)) \vee R]\!]^I$
$= [\![(P \wedge Q) \vee R]\!]^I$
$= [\![\varphi]\!]^{I\tau_2}$ (comme $I\tau_2 = I$)
$= 0$

d) La lemme de substitution

$$A \Leftrightarrow B$$
$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$
$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

Ex 3

a) $nnf(\neg(P \vee \neg(Q \wedge \neg R)))$

$\overset{def}{=} \neg(P \vee \neg(Q \wedge \neg R))$

$\overset{def}{=} nnf\neg(P) \wedge nnf(\neg(\neg(Q \wedge \neg R)))$

$\overset{def}{=} nnf(\neg P) \wedge nnf(\neg\neg(Q \wedge \neg R))$

$\overset{def}{=} \neg P \wedge nnf(Q \wedge \neg R)$

$\overset{def}{=} \neg P \wedge nnf(Q) \wedge nnf(\neg R)$

$\overset{def}{=} \neg P \wedge Q \wedge \neg R$

b) $\varphi = nnf((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$\varphi = ((\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg\neg Q \vee \neg P))$

$\varphi = [(\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg\neg Q \vee \neg P)) \wedge (\neg(\neg\neg Q \vee \neg P) \vee (\neg P \vee Q))]$

$nnf\,\varphi = nnf(\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg\neg Q \vee \neg P)) \wedge nnf(\neg(\neg\neg Q \vee \neg P) \vee (\neg P \vee Q))$

$= (nnf(\neg(\neg P \vee Q)) \vee nnf(\neg\neg Q \vee \neg P)) \wedge (nnf(\neg(\neg\neg Q \vee \neg P)) \vee nnf(\neg P \vee Q))$

$= (nnf(\neg\neg P) \wedge nnf(\neg Q)) \vee (nnf(\neg\neg Q) \vee nnf(\neg P)) \wedge (nnf(\neg\neg\neg Q) \vee nnf(\neg\neg P)$
$\vee (nnf(\neg P) \vee nnf(Q)))$

$= ((P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \vee P) \vee (\neg P \vee Q))$

Ex 4

a) $\mathrm{cnf}((P_1 \wedge Q_1) \vee (P_2 \wedge Q_2))$

$= \mathrm{cnf}((P_1 \wedge Q_1) \vee P_2)) \wedge \mathrm{cnf}((P_1 \wedge Q_2) \vee Q_2))$

$= \mathrm{cnf}(P_2 \vee P_1) \wedge \mathrm{cnf}(Q_1 \vee P_2) \wedge \mathrm{cnf}(P_1 \vee Q_2) \wedge \mathrm{cnf}(Q_1 \vee Q_2)$

$= (P_2 \vee P_1) \wedge (P_2 \vee Q_1) \wedge (Q_2 \vee P_1) \wedge (Q_2 \vee Q_1)$

b) $\varphi_{\mathrm{cnf}} = \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \bigvee_{1 \leq j \leq n_i} l_{i,j}$

m : taille de clause

n_i : nbe de littéraux dans la clause i

φ_{cnf} est valide ssi pour chaque $1 \leq i \leq m$, il existe $1 \leq j, j' \leq n_i$ telque $l_{i,j} = P$ et $l_{i,j'} = \neg P$ avec P un proposition

c) $\mathrm{dnf}((P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \wedge Q)$

$= (P_1 \wedge Q) \vee (\neg P_2 \wedge Q) \vee (P_3 \wedge Q)$

d) $\varphi_{\mathrm{dnf}} = \bigvee_{1 \leq i \leq m} \bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} l_{i,j}$

φ_{dnf} est satisfiabilité ssi il existe $1 \leq i \leq m$ tq pour tout $1 \leq j, j' \leq n_i$ $l_{i,j} \neq \neg l_{i,j'}$

Ex5

$$\varphi = \neg(P \lor (Q \land R))$$

a)

P	Q	R	$Q \land R$	$P \lor (Q \land R)$	φ
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

$$\psi = (\neg P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R)$$

b) dnf(nnf(φ))

nnf(φ)

Exercice 6. Forme clausale equi-satisfiable

(a) Calculer la forme normale négative de la *loi de* PEIRCE $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$.

(b) Appliquer à la formule obtenue au point précédent l'algorithme ci-dessus.

(c) Vérifier que la loi de PEIRCE est valide. Soit ψ la formule en forme 3-clausale conjonctive produite au point précédent. Donner une interprétation I_1 qui satisfait ψ et une interprétation I_2 qui la contredit.

Ex 6

équi-satisfiable :

$$\varphi \overset{def}{=} ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$$
$$= \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee P) \vee P$$

$$nnf(\varphi) = nnf(\neg(\neg(\neg p \vee Q) \vee p)) \vee nnf(P)$$
$$= (nnf(\neg\neg(\neg p \vee Q)) \wedge nnf(\neg P)) \vee P$$
$$= ((nnf(\neg p \vee Q) \wedge nnf(\neg P)) \vee P$$
$$= ((nnf(\neg P) \vee nnf(Q)) \wedge \neg P)) \vee P$$
$$= (\overbrace{(\overbrace{\neg P \vee Q}^{Q_{\varphi_2}}) \wedge \neg P}^{Q_{\varphi_1}}) \vee P$$

φ associé à Q_φ

Rappel : On rappelle l'algorithme vu en cours qui permet de construire, pour une formule propositionnelle φ sous forme normale négative, une formule propositionnelle ψ sous forme 3-clausale conjonctive telle que φ et ψ sont équi-satisfiables.

Pour chaque sous-formule φ' de la formule φ, on introduit une proposition fraîche $Q_{\varphi'} \notin \text{fp}(\varphi)$, mis à part les littéraux, pour lesquels on définit $Q_{\varphi'} \overset{\text{def}}{=} P$ si $\varphi' = P$ et $Q_{\varphi'} \overset{\text{def}}{=} \neg P$ si $\varphi' = \neg P$. On définit aussi pour chaque sous-formule non littérale φ' de φ une formule

$$\psi_{\varphi'} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\varphi_1} \vee Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2 \,, \\ Q_{\varphi_1} \wedge Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \,. \end{cases}$$

La formule désirée est alors $\psi \overset{\text{def}}{=} Q_\varphi \wedge \bigwedge_{\varphi' \text{ sous-formule non littérale de } \varphi} (Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$.
Cette formule se transforme facilement en une forme 3-clausale conjonctive. La formule propositionnelle ψ est de *taille linéaire* en la taille de la formule propositionnelle φ.

b) $\psi = Q_\varphi \wedge (Q_\varphi \Rightarrow (Q_{\varphi_1} \vee P)) \wedge (Q_{\varphi_1} \Rightarrow (Q_{\varphi_2} \wedge \neg P))$
$\wedge\ (Q_{\varphi_2} \Rightarrow (\neg P \vee Q))$

$$(\overbrace{(\overbrace{\neg P \vee Q}^{Q_{\varphi_2}}) \wedge \neg P}^{Q_{\varphi_1}}) \vee P$$

φ associé à Q_φ

La forme 3 clausale de ψ

$$= \{\{Q_\varphi\}, \{\neg Q_\varphi, Q_\varphi, P\}, \{\neg Q_{\varphi_1}, Q_{\varphi_2}\}, \{\neg Q_{\varphi_1}, \neg\neg P\}, \{\neg Q_{\varphi_2}, \neg P, Q\}\}$$

(c) Vérifier que la loi de PEIRCE est valide. Soit ψ la formule en forme 3-clausale conjonctive produite au point précédent. Donner une interprétation I_1 qui satisfait ψ et une interprétation I_2 qui la contredit.

c) φ est valide

ψ est satisfiable p. ex $I = [1/Q_\varphi, 1/Q_{\varphi_1}, 1/Q_{\varphi_2}, 0/P, 1/Q]$

mais n'est pas valide p. ex I tq $Q_\varphi^I = 0$