Exemple 9 : Base

1) $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z),\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$R = ((\underbrace{1,0,0}_{(e_1}) ; (\underbrace{0,1,0}_{e_2}) ; (\underbrace{0,0,1}_{e_3)}))$

Base

$B = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$(x, y, z) = x'(1,0,0) + y'(0,1,0) + z'(0,0,1)$

$= (x', 0, 0) + (0, y', 0) + (0, 0, z')$

$(x, y, z) = (x', y', z') \rightarrow x' = x$
$y' = y$
$z' = z$

$(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$

$B' = ((0,1,0), (1,0,0), (0,0,1))$

$B' = (e_2, e_1, e_3)$

$$(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

$= 2^{nd}\ B'$ $\quad$ 1^{er} de B' $\quad$ $3^e\ B'$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}_{B'}$$

2) $\mathbb{R}_3[x] = \{$ poly de degré ≤ 3 à coeff dans $\mathbb{R} \}$

$$P = ax^3 + bx^2 + cx + d.1$$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ base canonique

Prop 3: $\mathcal{B}$ est une base ssi $\mathcal{B}$ est générateur et libre

Def : Soit E un e.v, (espace vectoriel)

$\dim(E) = \sup \{ n \in \mathbb{N} ;$ il existe famille libre de n vecteur de $E \}$

$\{u \neq 0\}$ $\quad \lambda . u = 0$ $\quad$ Si $\lambda_1 u_1 +$
$\neq 0$

$+ \lambda_p u_p = 0$
alors $\lambda_1 = 0 \ldots$

$\lambda_p = 0$

Exemple 10

1) $\dim \{0\} = 0$

2) $\dim \mathbb{R}^n = n$

3) $\dim K_3[X] = 4$

4) $\dim K_n[X] = n+1$

5) $\dim K[X] = +\infty$

6) $\dim M_n[K] = n^2$

7) $\dim D_3[\mathbb{R}] = 3$

8) $\dim T_n[\mathbb{R}] = ?$

Déf 9 : rang de $(u_i)_{i \in I}$

$= \dim(\mathrm{Vect}(u_i)_{i \in I})$

Déf 10 : On dit que S génère S' si tout vecteur de S' est combinaison linéaire de vecteur de S

Prop 4 : Si S génère S' et S' génère S'' alors S génère S''

Corollaire 3 : Si S est un système générateur de E et si S génère S' alors S' est un système générateur de E

Lemme 5 : Fondamental

Si E admet un système générateur de p vecteur alors toute famille libre contient au plus p vecteur

Autrement :

Si E contient p vecteur libre alors tout système générateur contient au moins p vecteur

Prop 5 : Soit E ev de dim n

$(u_1, \ldots, u_n)$ base de E ssi

$(u_1, \ldots, u_n)$ libre

ssi $(u_1, \ldots, u_n)$ générateur

Prop 6 : $\dim(E) = n$ ssi toute base contient n vecteur

$((1,0,-1),(2,0,-2))$ $\times 2$
liée

prop 7 : Si dim(E) finie et
F est sous e. vectoriel de E
alors $\dim(F) \leq \dim E$

Déf 11 :
F, G, s.e. vectoriels de E
$F + G = \{u + v,\ u \in F \text{ et } v \in G\}$

Déf 12 :
On dit que la somme de F et G est directe
si $F \cap G = \{0\}$

Notation $F \oplus G$

Théorème :

$H = F \oplus G$ est en somme directe

ssi $\forall w \in H$

$\exists !\ u \in F,\ v \in G,$
$w = u + v$

Prop 9 :

$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \underbrace{\dim(F_1 \cap F_2)}_{= 0}$

Corollaire 4 :

F_1 et F_2 en somme directe

ssi $\dim(F_1 + F_2)$

$= \dim F_1 + \dim F_2$

Corollaire 5 : $\mathrm{sopp}(e_1, \dots, e_p)$

base de F_2 , $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$

def2

F_1 et F_2 sont en somme directe ssi $(e_1, \dots, e_p \; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ base de $F_1 + F_2$