Mathématiques discrètes
QCM n° 1

Durée : 15 minutes

Énoncé constitué de 5 questions. Pour chaque question, zéro, une ou plusieurs options peuvent être correctes. Colorier entièrement les cases de votre choix.

Nom :

Prénom :

Groupe :

Question 1 ♣ La relation d'ordre strict $(a < b)$ sur l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$ est-elle bien-fondée ?

- [ ] Oui
- [x] Non

$x_i = -i$ est une suite ∞ strict dec

Question 2 ♣ Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(n) = 2f(n-1) + f(n-2)$ quand $n \geq 2$. On souhaite montrer par récurrence que $2\sqrt{2}f(n) = (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n$.
Pour les cas de base, on a $(1+\sqrt{2})^0 - (1-\sqrt{2})^0 = 1 - 1 = 0$ et $(1+\sqrt{2})^1 - (1-\sqrt{2})^1 = 2\sqrt{2}$.
Pour l'hérédité, on a

$2\sqrt{2}f(n-1) = (1+\sqrt{2})^{n-1}_{n-2} - (1-\sqrt{2})^{n-1}_{n-2}$
$f(n-2) =$

$$2\sqrt{2}f(n) \overset{(A)}{=} 2\sqrt{2}(2f(n-1)+f(n-2)) \overset{(B)}{=} 2((1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1})+(1+\sqrt{2})^{n-2}-(1-\sqrt{2})^{n-2}$$

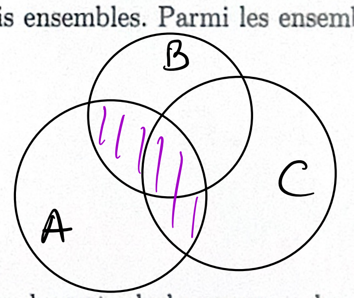
$$\overset{(C)}{=} (1+\sqrt{2})^{n-2}(2(1+\sqrt{2})+1) - (1-\sqrt{2})^{n-2}(2(1-\sqrt{2})+1) \overset{(D)}{=} (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n.$$

Dans quelle étape de la preuve utilise-t-on l'hypothèse de récurrence ?

- [ ] (A)
- [x] (B)
- [ ] (C)
- [ ] (D)

Question 3 ♣ Soient A, B, C trois ensembles. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont toujours égaux à $A \cap (B \cup C)$?

- [ ] $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
- [ ] $A \cap B \cap C$
- [x] $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
- [ ] $A \cup (B \cap C)$



Question 4 ♣ Soit M_n le nombre de mots de longueur n dans un alphabet de cardinalité 3. Quelle est la relation de récurrence satisfaite par la suite M_n ? $n \geq 0$

- [ ] $M_0 = 1$, $M_{n+1} = (M_n)^3$ pour $n \geq 1$.
- [ ] $M_0 = 1$, $M_{n+1} = nM_3$ pour $n \geq 1$.
- [x] $M_0 = 1$, $M_{n+1} = 3M_n$ pour $n \geq 1$.
- [ ] $M_0 = 0$, $M_{n+1} = 3M_n$ pour $n \geq 1$.

$M_0 = 1$

$M_{n+1} = 3M_n$

Question 5 ♣ Soit f une fonction $f : A \to B$. Que peut-on conclure sur les cardinaux de A et B ?

- [ ] $|A| = |B|$
- [x] Aucune de ces réponses
- [ ] $|A| \geq |B|$
- [ ] $|A| \leq |B|$
- [ ] $|A| = |B|$

$f : A \to B$
injec $|A| \leq |B|$
surj $|A| \geq |B|$
bijec $|A| = |B|$