

Example 9: Base

$$1, \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \left(\underbrace{(1, 0, 0)}_{e_1}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{e_2}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{e_3} \right)$$

Base

$$B = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$(x, y, z) = x'(1, 0, 0) + y'(0, 1, 0) + z'(0, 0, 1)$$

$$= (x', 0, 0) + (0, y', 0) + (0, 0, z')$$

$$(x, y, z) = (x', y', z') \rightarrow \begin{matrix} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{matrix}$$

$$(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} B$$

$$B' = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$$

$B' = (e_2, e_1, e_3)$

$$(x, y, z) = x l_1 + y l_2 + z l_3$$

$$= \overset{1^{\text{er}}}{x} B' + \overset{2^{\text{de}}}{y} B' + \overset{3^{\text{e}}}{z} B'$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} B'$$

2^o $\mathbb{R}_3[x] = \{ \text{poly de degré} \leq 3 \text{ à coeff dans } \mathbb{R} \}$

$$P = ax^3 + bx^2 + cx + d \cdot 1$$

$B = (1, x, x^2, x^3)$ base canonique

Prop 3: B est une base ssi B est

générateur et libre

Def: Soit E un e.v, (espace vectoriel)

$\dim(E) = \sup \{ n \in \mathbb{N}; \text{il existe famille} \}$
libre de n vecteur de E

$$\left\{ u_i \right\}_{i \neq 0} \quad \lambda_i \cdot u_i = 0 \quad \text{Si } \lambda_i \neq 0$$

$$+ \lambda_p u_p = 0$$

alors $\lambda_i = 0 \dots$

$$\lambda_p = 0$$

Exemple 10

$$1, \dim \{0\} = 0$$

$$2, \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$3, \dim K_3[X] = 4$$

$$4, \dim K_n[X] = n+1$$

$$5, \dim K[X] = +\infty$$

$$6, \dim M_n(K) = n^2$$

$$7 \rightarrow \dim D_3[\mathbb{R}] = 3$$

$$8 \rightarrow \dim T_n[\mathbb{R}] = ?$$

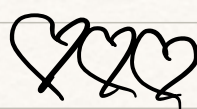
$$\text{Def 9: } \underline{\text{rang}} \text{ de } (U_i)_{i \in I} \\ = \dim(\text{Vect}(U_i)_{i \in I})$$

Def 10: On dit que S génère S' si tout vecteur de S' est combinaison linéaire de vecteur de S

Prop 4: Si S génère S' et S' génère S'' alors S génère S''

Corollaire 3: Si S est un système générateur de E et si S génère S'

alors S' est un système générateur de E

Lemme 5 : Fundamental 

Si E admet un système générateur de p vecteur alors toute famille libre contient au plus p vecteur

Autrement:

Si E contient p vecteur libre alors tout système générateur contient au moins p vecteur

Prop 5: Soit E ev de dim n

(u_1, \dots, u_n) base de E si

(u_1, \dots, u_n) libre

si (u_1, \dots, u_n) générateur

Prop 6 : $\dim(E) = n$ si toute base contient n vecteur

Autrement dit (u_1, \dots, u_n)

$$((1, 0, -1), (2, 0, -2))$$

liée $\xrightarrow{\times 2}$

prop 7: Si $\dim(E)$ finie et
 F est sous e. vectoriel de E
 alors $\dim(F) \leq \dim E$

Def 11:

F, G , s.e. vectoriels de E
 $F + G = \{u + v, u \in F \text{ et } v \in G\}$

Def 12:

\mathcal{O}_n dit que la somme de F
 et G est directe
 si $F \cap G = \{0\}$

Notation $F \oplus G$

Théorème :

$H = F \oplus G$ est en somme directe
ssi $\forall w \in H$

$$\exists! \quad u \in F, v \in G \\ w = u + v$$

Prop 9 :

$$\dim(F_1 + F_2) \leq \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) \\ = 0$$

Corollaire 4 :

F_1 et F_2 en somme directe
ssi $\dim(F_1 + F_2) \\ = \dim F_1 + \dim F_2$

Corollaire 5 : $\text{supp}(e_1, \dots, e_p)$

base de F_2 , $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$
def2 F_1 et F_2 sont en somme
directe si $(e_1, \dots, e_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$
base de $F_1 \oplus F_2$