IX, Lemme d'étoile

un langage $L \subseteq \Sigma^*$ a la propriété d'itérations si il existe $N \geqslant 1$ tel que tout $u \in L$ avec tout $|u| \geqslant N$

il existe $x, y, z \in \Sigma^*$ avec

$u = xyz$, $|xy| \leqslant N$, $|y| \geqslant 1$

tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$: xy^k

Tout langage rationnel a la propriété d'itération

Idée de la preuve
Soit A un automate avec $\mathcal{L}(A) = L$

N est le nombre d'états de l'automate

$u \in L, |u| \geq N$

Execution de l'automates A sur $u = u_1$

u_n, $n \geq N$

Symboles : U_1 U_2 U_n

états : q_0 q_1 $\underbrace{q_2 \quad q_i}_{=}$ q_{n-1} q_n

initial acceptant

Il y a forcément 2 états qui sont égaux

L'automate accepte également

xy^kz pour tout $k \in \mathbb{N}$

Utiliser le lemme d'itération pour montrer qu'un langage n'est pas rationnel il faut montrer que le langage n'a pas la propriété d'itération

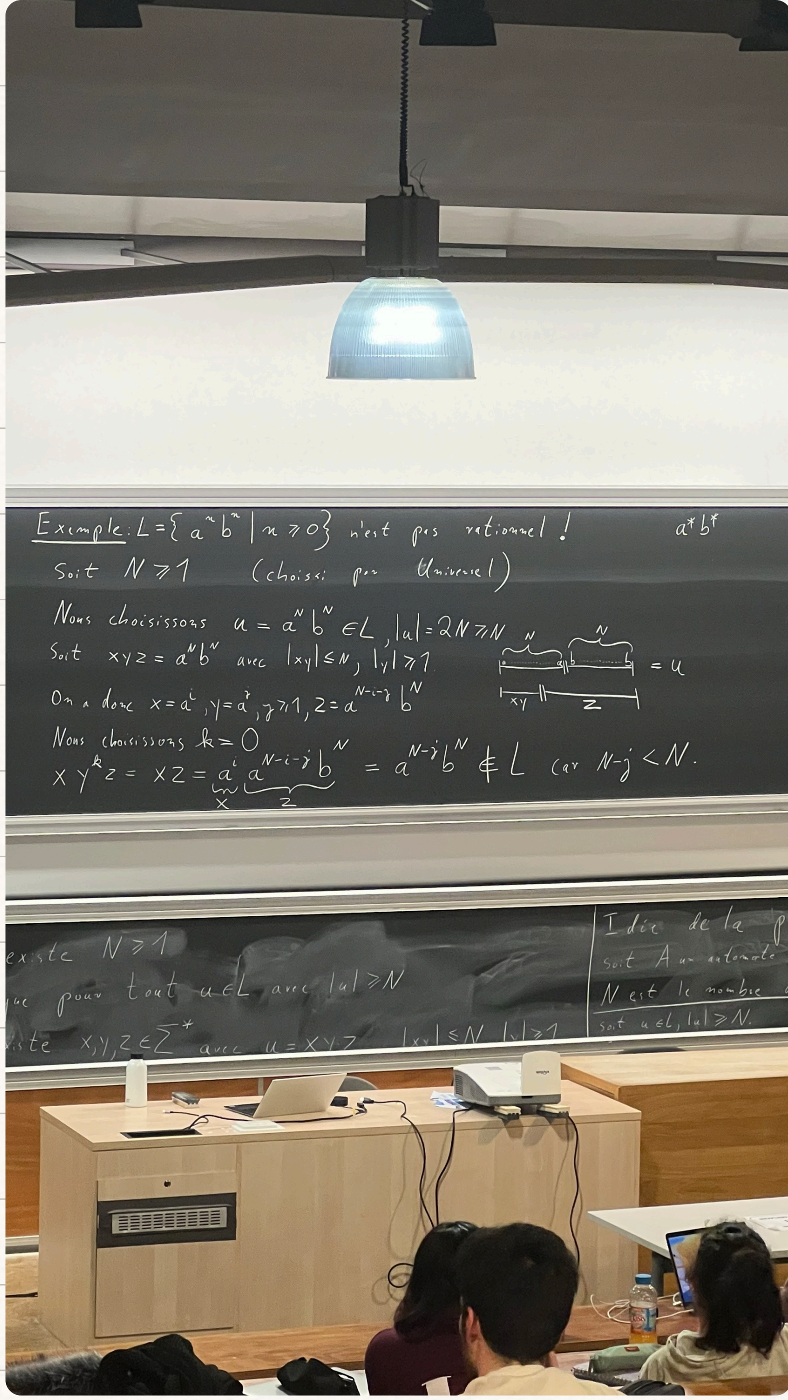
pour tout $N \geq 1$

existe $u \in L$ avec $|u| \geq N$

tel que pour tout x, y, z avec

$u = xyz$, $|xy| \leq N$, $|y| \geq 1$

existe $k \in \mathbb{N}$ avec $xy^kz \notin L$



Exemple : $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ n'est pas rationnel !
$a^* b^*$
Soit $N \geq 1$ (choisi par Universel)
Nous choisissons $u = a^N b^N \in L$, $|u| = 2N \geq N$
Soit $xyz = a^N b^N$ avec $|xy| \leq N$, $|y| \geq 1$
$= u$
xy
z
On a donc $x = a^i$, $y = a^j$, $j \geq 1$, $z = a^{N-i-j} b^N$
Nous choisissons $k = 0$
$x y^k z = xz = \underbrace{a^i}_{x} \underbrace{a^{N-i-j} b^N}_{z} = a^{N-j} b^N \notin L$ car $N-j < N$.
existe $N \geq 1$
que pour tout $u \in L$ avec $|u| \geq N$
iste $x, y, z \in \Sigma^*$ avec $u = xyz$
Idée de la
Soit A un automate
N est le nombre
Soit $u \in L$, $|u| \geq N$.