Examen final du 18 mai 2022

Durée : 2 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. **Tous les résultats devront être soigneusement justifiés.**

Exercice 1 (1+2+2 pts).

1. Calculer le PGCD de 51 et 21.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes

$$51x + 21y = 8 \qquad\qquad 51x + 21y = 12.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} x & \equiv 7 \mod 51 \\ 2x & \equiv 11 \mod 21. \end{cases}$$

Exercice 2 (2+1 pts).

1. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division par 124 de 5^n.
2. Quel est le chiffre des unités de 9^{12367} ?

Exercice 3 (1+1+2 pts).

1. Existe t-il un morphisme f du groupe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ tel que $f(\bar{1}) = \bar{2}$? tel que $f(\bar{1}) = \bar{3}$? Dans le(s) cas où f est un morphisme, dire s'il est surjectif et déterminer son noyau.
2. Soit p un nombre premier. Combien le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ a-t-il de générateurs ?
3. Déterminer les éléments du groupe $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times, \times)$ et calculer leurs ordres. Ce groupe est-est-il cyclique ?

Exercice 4 (1+1). Écrire la décomposition en cycles disjoints de la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

et calculer sa signature.

Exercice 5 (1+1+1+1 pts). On mélange dans un bol un sachet contenant 5 dragées rouges, 3 bleues et 1 verte, et un sachet contenant 1 rouge et 3 vertes. On tire 3 dragées au hasard, successivement et sans remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 dragées rouges ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 dragée bleue ?
3. Quelle est la probabilité que la seconde dragée soit bleue, sachant que la première est verte ?
4. Sachant que les trois dragées tirées sont vertes, quelle est la probabilité qu'elles viennent toutes du second sachet ?

Exercice 6 (2 pts). Soit G un groupe et $x \in G$ tel que $x^6 = 1$. On suppose qu'il existe un morphisme de groupe $f : G \to \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$, montrer que $x \in \ker f$.

Ex1:

1) $\text{pgcd}(51, 21) = 3$

$$51 = 2 \times 21 + 9$$
$$21 = 2 \times 9 + 3$$
$$9 = 3 \times 3 + 0$$

2) $51x + 21y = 8$

On constate que $\text{pgcd}(51,21) \mid 51x + 21y$ puisque $\text{pgcd}(51,21) \nmid 8$. On admet que l'équation n'admet pas de solution

$51x + 21y = 12$

On constate que $\text{pgcd}(51,21) \mid 51x + 21y$, puisque $\text{pgcd}(51,21) \mid 12$. On admetmet que l'équation admet des solutions:

On a :
$$3 = 21 - 2 \times 9$$
$$3 = 21 - 2 \times (51 - 2 \times 21)$$
$$3 = 21 - 2 \times 51 + 4 \times 21$$
$$3 = -2 \times 51 + 5 \times 21$$

$(x_0, y_0) = ((-2), 5)$

On cherche la solution particulière :
$$51x + 21y = 12$$
$$51 \times (-2) \times 4 + 21 \times 5 \times 5 = 12$$

$(x_0, y_0) = ((-8), 25)$

Soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, l'équation initiale est sous forme $ax + by = c$ avec $a = 55$ et $b = 21$

$a = \text{pgcd}(a,b) \times a'$ $b = \text{pgcd}(a,b) \times b'$

$51 = 3 \times a'$ $21 = 3 \times b'$

$a' = 17$ $b' = 7$

L'ensemble des solutions est :

$$S = \{[(-8) + 7k, 25 - 17k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

3) $$S = \begin{cases} x \equiv 7 \bmod 51 \\ 2x \equiv 11 \bmod 21 \end{cases}$$

On cherche à inverser $2x \equiv 11 \bmod 21$

On a $2x \equiv 1 \bmod 21$

$\Leftrightarrow 11 \times 2 \equiv 1 \bmod 21$

$\Leftrightarrow 11 \times 2x \equiv 11 \times 11 \bmod 21$

$\Leftrightarrow x \equiv 121 \bmod 21$

$\Leftrightarrow x \equiv 16 \bmod 21$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times \quad 5 \\ \hline 105 \end{array}$$

L'équation est équivalente à :

$$S : \begin{cases} x \equiv 7^{a} \bmod 51^{m} \\ x \equiv 16^{b} \bmod 21^{n} \end{cases}$$

$\text{pgcd}(51,21) = 3$

$\text{ppcm}(51,21) = 357$

On constate que $\text{pgcd}(51,21) \mid 16 - 7$, l'équation admet des solutions

On applique l'algo Euclide à $(51,21)$

$$51u + 21v = \text{pgcd}(51,21)$$

$$3 = 21 - 2 \times 9$$
$$3 = 21 - 2 \times (51 - 2 \times 21)$$
$$3 = 21 - 2 \times 51 + 4 \times 21$$
$$3 = -2 \times 51 + 5 \times 21$$

$(x_0, y_0) = ((-2), 5)$ 510

$u = -2 \qquad v = 5$

$$m' = \frac{m}{pgcd(a,b)} = \frac{51}{3} = 17$$

$$n' = \frac{n}{pgcd(a,b} = \frac{21}{3} = 7$$

Solution particulière : $x = bum' + avn'$

$= 16 \times (-2) \times 17 + 7 \times 5 \times 7$

$= -544 + 235$

$= -309$

$\Rightarrow$ Solution générale : $x \equiv -304 \mod 357k$

Ex2

1)

n	0	1	2	3	4	5
5^n mod 124	1	5	25	1	\	\

$$5^n \equiv \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \mod 124 \\ 5 & n \equiv 1 \mod 124 \\ 25 & n \equiv 2 \mod 124 \end{cases}$$

2) Chiffre unité 9^{12367}

$$9^1 = 9$$
$$9^2 = 81$$
$$9^3 = 729$$
$$9^4 = 6561$$

Donc on constate que si l'exposant est paire, chiffre unité est 1, si chiffre impair, chiffre unité est 9

Ici chiffre unité de 9^{12367} est 9

Ex4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (12)(34)(5786)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(12)\,\varepsilon(34)\,\varepsilon(5786)$$
$$= (-1)^{2-1}\,(-1)^{2-1}\,(-1)^{4-1}$$
$$= -1 \times (-1) \times (-1)^3$$
$$= -1$$

Ex5

Rouges :	6	: 1
Vertes :	4	: 2
Bleues :	3	: 3
Total :	13	

Tirage de 3 dragées Sans Remise

$$\Omega = \{\underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{\text{3 tirages}} \mid x_i \in \{1,2,\dots,13\},\ x_1 \neq x_j,\ \forall i \neq j\}$$

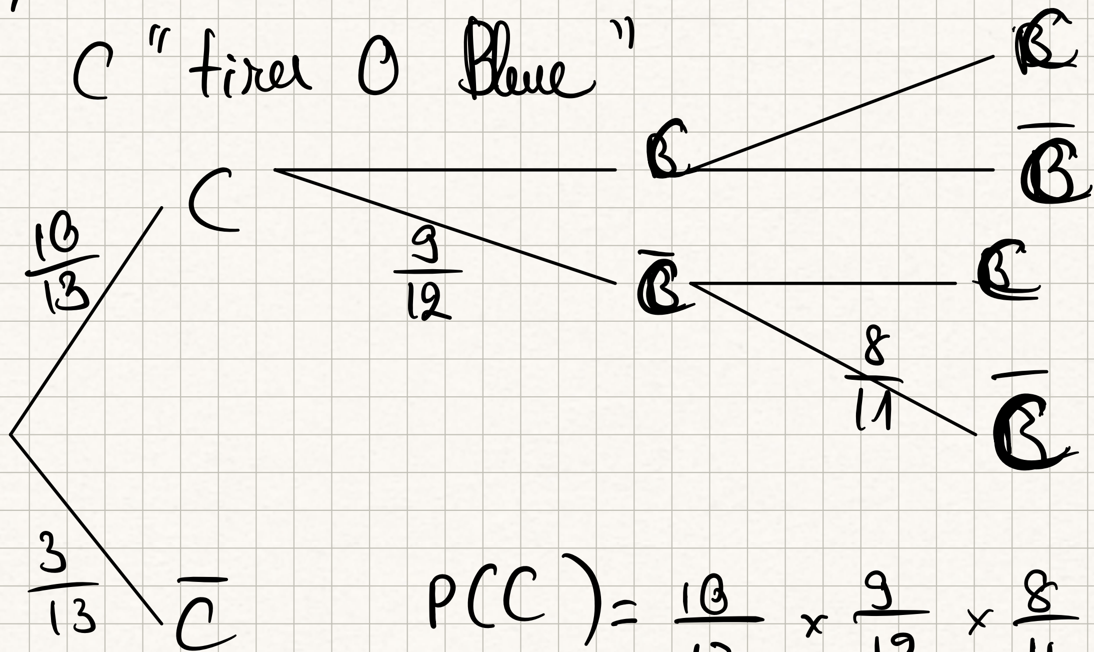
$|\Omega| = 13.12.11 = 256$ Nombre de combinaisons

1) Probabilité de tirer 3 rouges

$$P(3R) = \frac{6}{13} \times \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{10}{143}$$

2) B "tirer au moins une bleue"

C "tirer 0 Bleue"



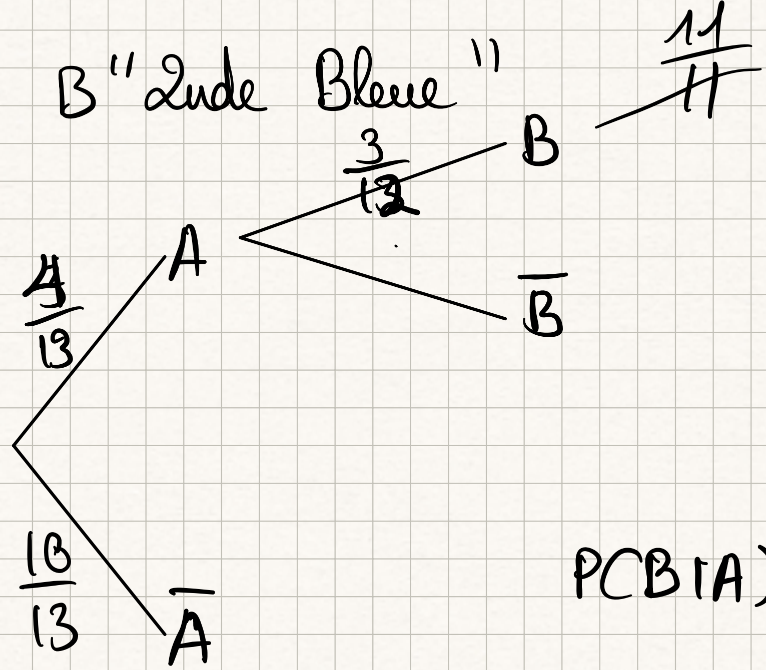
$$P(C) = \frac{10}{13} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{11}$$

$$= \frac{60}{143}$$

$$P(\text{Au moins 1 Bleue}) = 1 - \frac{60}{143} = \frac{83}{143}$$

3) A "Première verte"

B "2nde Bleue"



$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(B\cap A) = \frac{4}{13} \times \frac{3}{12} \times \frac{11}{11}$$

$$P(A) = \frac{4}{13} \times \frac{12}{12} \times \frac{11}{11}$$

$$P(B|A) = \frac{\frac{4}{13} \times \frac{3}{12} \times \frac{11}{11}}{\frac{4}{13} \times \frac{12}{12} \times \frac{11}{11}}$$

$$= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

4) A = {les 3 dragées sont vertes}

B = {Elles viennent du 2ème sachet}

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Sachet 2 : 3 vertes

$P(A\cap B) = \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{11}$ ← 3 vertes dans 2nd sachet

$P(A) = \frac{4}{13} \times \frac{3}{12} \times \frac{2}{11}$ ← Probabilités vertes totale