Modélisation dans le cas général

- L'ensemble des variables propositionnelles est

$$\{[i,j] \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$$

- $$P_1 = \bigwedge_{1\le i\le n} \Big(\bigvee_{1\le j\le m} [i,j] \Big)$$

- $$P_2 = \bigwedge_{1\le i\le n} \bigwedge_{1\le j\le m} \bigwedge_{j<k\le m} (\neg[i,j] \vee \neg[i,k])$$

- $$P_3 = \bigwedge_{1\le i\le n} \bigwedge_{\substack{i<j\le n\\ A(i,j)=true}} \bigwedge_{1\le k\le m} (\neg[i,k] \vee \neg[j,k])$$

Au moins n parmi les variables de Y sont vraies

Cas $n = 1$ au moins 1 est vraie

$$y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_m$$

Cas $n = 2$

engendrer toutes les paires de deux variables différentes de Y, et exprimer le fait que au moins une de ces paires est entièrement colorée en rouge : au moins 2 sont vraies !

$$(y_1 \wedge y_2) \vee \ldots \vee (y_1 \wedge y_m) \vee (y_2 \wedge y_3) \vee \ldots \vee (y_2 \wedge y_m) \vee \ldots \vee (y_{m-1} \wedge y_m)$$

Plus précisément :

$$\bigvee_{\substack{i=1,\ldots,m-1\\ j=i+1,\ldots,m}} (y_i \wedge y_j)$$

Outils logiques
TD n° 8

Exercice 1 :

Ahmed, Béatrice, Chanda et Dong se trouvent dans un centre de vacances. Le centre offre les cours de sport suivants : Judo, Karaté, Musculation, et Natation. On demande de modéliser en logique propositionnelle le problème de chercher pour chacune des personnes un choix d'un ou de plusieurs cours de sport, sous des contraintes qui sont énumérées ci-dessous.

Utiliser pour votre modélisation des variables de la forme $[P, S]$ où P est une personne, et S un sport. Une telle variable est vraie si la personne P s'inscrit au cours de sport S. Pour chacune des contraintes suivantes donner une formule en forme conjonctive normale qui l'exprime :

1. Chacun doit s'inscrire à au moins un cours de sport.
2. Personne ne peut s'inscrire à tous les cours de sport.
3. Ahmed et Chanda ne sont pas inscrit dans le même cours.
4. Tout inscrit en Karaté doit également s'inscrire en Musculation.

Exercice 2 :

Alice, Bob, Cristina, Django, Elhame, Fonzy, Gilberthe et Hassan sont sur le départ pour aller jouer dans un festival avec leur groupe de rock. Ils ont à leur disposition quatre voitures. Chacune d'entre elles étant déjà bien chargée (instruments, etc), il ne reste que deux places par voiture.

Il doivent donc maintenant faire face au difficile problème consistant à décider qui va monter dans quelle voiture.

1. Modéliser le problème en logique propositionnelle de façon à ce que toute distribution des 8 personnes sur les 4 voitures corresponde à une solution de la formule, et inversement. Donner l'ensemble des variables propositionnelles, et expliquer brièvement la signification de ces variables. On note l'ensemble des personnes comme
$$P = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$
et l'ensemble des voitures comme $V = \{0, 1, 2, 3\}$.
2. Ajouter à la formule de la question précédente les contraintes suivantes :
   - Alice veut absolument monter dans la voiture numéro 1, où se trouve sa batterie.
   - Elhame et Bob sont inséparables et exigent de monter dans la même voiture.
   - Django et Fonzy se sont disputés et préfèrent monter dans des voitures différentes.
3. Ajouter à la formule de la question précédente les contraintes suivantes :
   - Fonzy (qui n'a pas le permis de conduire) ne veut monter que dans une voiture conduite par une fille (i.e., Alice, Cristina, Elhame, ou Gilberthe),
   - Fonzy et Elhame sont les deux seuls du groupe à ne pas avoir le permis de conduire.

1) A, B, C, D
J, K, M, N

$\bigwedge \bigvee [P, S]$ $\quad P \in \{A,B,C,D\}$ $\quad S \in \{J,K,M,N\}$

$$
\begin{aligned}
P_1 := \; & ([A,J] \vee [A,K] \vee [A,M] \vee [A,N]) \\
\wedge \; & ([B,J] \vee [B,K] \vee [B,M] \vee [B,N]) \\
\wedge \; & ([C,J] \vee [C,K] \vee [C,M] \vee [C,N]) \\
\wedge \; & ([D,J] \vee [D,K] \vee [D,M] \vee [D,N])
\end{aligned}
$$

2) $P_2 :=$

$$
\begin{aligned}
& [(\neg[A,X] \vee \neg[A,K] \vee \neg[A,M]) \wedge (\neg[A,X] \vee \neg[A,K] \\
& \vee \neg[A,N]) \wedge (\neg[A,K] \vee \neg[A,M] \vee \neg[A,N])] \wedge \\
& [(\neg[B,X] \vee \neg[B,K] \vee \neg[B,M]) \wedge (\neg[B,X] \vee \neg[B,K] \\
& \vee \neg[B,N]) \wedge (\neg[B,K] \vee \neg[B,M] \vee \neg[B,N])] \wedge \\
& [(\neg[C,X] \vee \neg[C,K] \vee \neg[C,M]) \wedge (\neg[C,X] \vee \neg[C,K] \\
& \vee \neg[C,N]) \wedge (\neg[C,K] \vee \neg[C,M] \vee \neg[C,N])] \wedge \\
& [(\neg[D,X] \vee \neg[D,K] \vee \neg[D,M]) \wedge (\neg[D,X] \vee \neg[D,K] \\
& \vee \neg[D,N]) \wedge (\neg[D,K] \vee \neg[D,M] \vee \neg[D,N])]
\end{aligned}
$$

$$(\neg[A,J] \vee \neg[A,K] \vee \neg[A,M] \vee \neg[A,N])$$
$$\wedge\ (\neg[B,J] \vee \neg[B,K] \vee \neg[B,M] \vee \neg[B,N])$$
$$\wedge\ (\neg[C,J] \vee \neg[C,K] \vee \neg[C,M] \vee \neg[C,N])$$
$$\wedge\ (\neg[D,J] \vee \neg[D,K] \vee \neg[D,M] \vee \neg[D,N])$$

$\bigwedge_{P \in \{A,B,C,D\}}$ $\bigvee_{S \in \{J,K,M,N\}}$ $\neg[x,y]$

3) $(\neg[A,J] \vee \neg[C,J])$
$\wedge\ (\neg[A,K] \vee \neg[C,K])$
$\wedge\ (\neg[A,M] \vee \neg[C,M])$
$\wedge\ (\neg[A,N] \vee \neg[C,N])$

$\bigwedge_{S \in \{J,K,M,N\}} (\neg[A,S] \vee \neg[C,S])$

4) $[A,K] \to [A,M]$
$(\neg[A,K] \vee [A,M])$
$\wedge\ (\neg[C,K] \vee [C,M])$
$\wedge\ (\neg[B,K] \vee [B,M])$
$\wedge\ (\neg[D,K] \vee [D,M])$

$\bigwedge_{P \in \{A,B,C,D\}} (\neg[P,K] \vee [P,M])$

Ex2

$P = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

$V = \{0, 1, 2, 3\}$

1)

Variables :

$P \times V = \{[A,0], [A,1], [A,2]\ [A,3],$
32 variables $[B,0], \dots \}$

Contraintes :

Chaque personne monte dans une voiture (au moins)

$$\bigwedge_{p \in P} \bigvee_{c \in V} [p, c]$$

Aucune personne monte dans 2 voiture :

$$\bigwedge_{p \in P} \bigwedge_{c_1 \in V} \bigwedge_{\substack{c_2 \in V \\ c_1 < c_2}} (\neg[p, c_1] \vee \neg[p, c_2])$$

$$(\neg[p, c_1] \vee \neg[p, c_2]) \wedge (\neg[p, c_1] \vee \neg[p, c_3]) \wedge$$

$(\neg[p, c_0] \vee \neg[p, c_2]) \wedge \ldots$

0 1   0 2   0 3   1 2   1 3   2 3

Il y a 2 (au moins) personnes dans chaque voiture

$$\bigwedge_{c \in V} \bigvee_{p_1 \in P} \bigvee_{\substack{p_2 \in P \\ p_1 < p_2}} ([p_1, c] \wedge [p_2, c])$$

2)

- Alice monte dans la voiture 1

$[A, 1]$

- $\bigvee_{C \in V} ([E, c] \wedge [B, C])$ ← pas en CNF

- $\bigwedge_{c \in V} \neg([D, c] \wedge [F, c])$

3)

- $\bigvee_{C \in V} [F, c] \wedge ([A, c] \vee [C, c] \vee [E, c] \vee [G, c])$

pas en CNF

$$- \bigwedge_{c \in V} \left(\neg [F, c] \vee \neg [E, c] \right)$$