Division Euclidienne

Poser la division $731 : 34$

$$\begin{array}{r|l} 731 & 34 \\ \hline 51 & 21 \\ 17 & \end{array}$$

$731 = 34 \times 21 + 17$

15 multiple de 3 $\rightarrow 15 = k \ 3$

3 diviseur de 15

20 multiple de 3 ? Non

$20 = k \times 3 \qquad k = 6{,}66..$

$$\begin{array}{rl} & 9 \text{ multiple de } 3 \\ + & 15 \text{ multiple de } 3 \\ \hline & 24 \text{ multiple de } 3 \end{array}$$

$24 = 3 \times k + 3 \times k'$

$= 3 \times (k + k')$

Nombres pairs et impairs

Pair : $2k$

Impair : $2k+1$ $\quad$ k entier

Carré d'un nombre impair est impair

Nombres premiers

Possède exactement deux diviseurs qui sont lui même et 1

Tout nombre premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers

$$300 = \underbrace{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5}_{\text{Nombres premiers}}$$

Deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1

12 et 15 divisible par 3 : Non premiers entre eux !

15 : 1, 3, 5, 15

16 : 1, 2, 4, 8, 16

Ils sont premiers entre eux

Décomposer en produit de facteurs premiers

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
$\boxed{1}$ stop	

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

PGCD et PPCM

17640 et 411600

PGCD

17640	2
8820	2
4410	2
2205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
$\boxed{1}$	

$17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$

411600	2
205800	2
102900	2
51450	2
25725	3
8575	5
1715	5
343	7
49	7
7	7
$\boxed{1}$	

$411600 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7^3$

$17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$

$411600 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7^3$

$\text{PGCD} = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 5880$

$\text{PPCM} = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3 = 1\,234\,800$

Critère divisant 7 :

$228 : 7$

$22 - 2 \times 8 = 6$

donc 6 n'est pas divisible par 7, donc $228 \nmid 7$

Changement de base - Écriture en base N

Soit $N \geqslant 2$

$$n = i_0 + i_1 N + i_2 N^2 + \dots + i_k N^k$$

avec $0 \leq i_k, \dots, i_0 < N$ et $i_k \neq 0$

exemple :

$$213 = 2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Démonstration : On fait la division euclidienne de n par N

$$n = Nq_0 + r_0$$

On pose $i_0 = r_0$

→ Si $q_0 = 0$, c'est terminé

→ Sinon on fait la div euclidienne de q_0 par N

$$q_0 = Nq_1 + r_1$$

et on pose $i_1 = r_1$

$$n = N(Nq_1 + r_1) + r_0$$
$$= N^2 q_1 + Nr_1 + r_0$$

En binaire

On a : $213 = 106 \times 2 + 1$

$106 = 53 \times 2 + 0$

$53 = 26 \times 2 + 1$

$26 = 13 \times 2 + 0$

$13 = 6 \times 2 + 1$

$6 = 3 \times 2 + 0$

$3 = 1 \times 2 + 1$

$1 = 0 \times 2 + 1$

$$213 = (11010101)_2$$

Hexa	Déci	Binaire
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

Base 16

$$\begin{array}{r|l} 213 & 16 \\ \hline 5 & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 13 \\ \hline 48 \\ 16 \\ \hline 208 \end{array}$$

$213 = 13 \times 16 + 5$

$13 = 0 \times 16 + 13$

13 = D en Base 16

$213 = (D5)_{16}$

Division Euclidienne et Divisibilité et Décomposition en facteur

Ex 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Changement de base : 8, 9, 10, 11, 12

PPCM et PGCD : 13, 14, 15

Ex 1

1)

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$100 = 2^2 \times 5^2$

$a = 2^\alpha 5^\beta$ avec $0 \leq \alpha \leq 2$ 3 choix
$0 \leq \beta \leq 2$ 3 choix

$\alpha = 0$	$\beta = 0$	1
$\alpha = 0$	$\beta = 1$	5
$\alpha = 0$	$\beta = 2$	25
$\alpha = 1$	$\beta = 0$	2
$\alpha = 1$	$\beta = 1$	10
$\alpha = 1$	$\beta = 2$	50
$\alpha = 2$	$\beta = 0$	4
$\alpha = 2$	$\beta = 1$	20
$\alpha = 2$	$\beta = 2$	100

2) $6000\,000 = 6 \times 1000\,000$

$= 2 \times 3 \times 10^6$

$= 2 \times 3 \times (2 \times 5)^6$

$= 2 \times 3 \times 2^6 \times 5^6$

$= 2^7 \times 3 \times 5^6$

Si a divise 6000 000

$a = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$

$0 \leq \alpha \leq 7$ 8

$0 \leq \beta \leq 1$ 2

$0 \leq \gamma \leq 6$ 7

Nombre de diviseurs de 6 000 000 :

$8 \times 2 \times 7 = 112$

3) $13! = 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$

$\times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 3^2$

$\times 2 \times 5 \times 11 \times 2^2 \times 3 \times 13$

$= 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$

$= 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^y 11^\delta 13^\varepsilon$

$0 \leq \alpha \leq 10$ 11

$0 \leq \beta \leq 5$ $\times$ 6

$0 \leq \gamma \leq 2$ $\times$ 3

$0 \leq y \leq 1$ $\times$ 2

$0 \leq \delta \leq 1$ $\times$ 2

$0 \leq \varepsilon \leq 1$ $\times$ 2

$= 1584$ div posi et 3168 pos et neg

Ex 2

On a n strictement compris entre 101 et 1001

donc $101 < n < 1001$

On a $105 : 7 = 15 \quad \in]101, \dots, 1001[$

$994 : 7 = 142 \in]101, \dots, 1001[$

et $n = 7k$ alors $7.15 \leq n = 7k \leq 7.142$

avec $15 \leq k \leq 142$

Puisque k peut prendre $142 - 14 = 128$ valeurs

Ex 3 →

$$\begin{cases} a - b = 538 \\ a = 13 \times b + 22 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b = a - 538 \\ b = 13 \times a + 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 538 - b \\ a = 13b + 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13b + 22 = 538 - b \\ a = 13b + 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12b = 516 \\ b = 43 \end{cases}$$

$a = 13 \times 43 + 22$

$= 581$

$$\begin{cases} b = a - 538 \\ 13a + 22 = a - 538 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12a = -560 \\ a = -560 : 12 \end{cases}$$

$= -46,666\dots$

Pas un entier

Ex4

Soit n impair (d'après l'énoncé) :
$\exists k \in \mathbb{N}$ tq $n = 2k + 1$

$n : 4 = ?$ reste ?

On a $2k+1 = 4q + r$ avec $0 \leq r < 4$

Comme $4q + r$ est impair, on exclut les cas où $r = 0$ ou $r = 2$, ce qui nous laisse les possibilités $r = 1$ ou $r = 3$
qui peuvent assurer toutes les 2, par exemple

$2k+1 = 5 = 4 \times 1 + 1$

ou

$2k+1 = 7 = 4 \times 1 + 3$

$\Rightarrow 2k+1 = 4k + 1$

$2k+1 = 4k + 3$

On a donc $(2k+1)^2 = (4q+1)^2$

$= 16q^2 + 8q + 1^2$

$= 8(2q^2 + q) + 1$

Ou bien $(2k+1)^2 = (4q+3)^2$

$= 16q^2 + 24q + 9$

$= 16q^2 + 24q + 8 + 1$

$= 8(2q^2 + 3q + 1) + 1$

Ce qui signifie exactement que le reste de la division euclidienne de $(2k+1)^2$ par 8 est toujours 1

Même façon pour 4 :

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 4k(k+1) + 1$$

On remarque que si k était pair,

$2l = k(k+1)$ est un entier pair en tant que produit de deux entiers consécutifs

---

2ème méthode

1) $ppcm(a,b) = \dfrac{|ab|}{pgcd(a,b)}$

Ex 2

1) Faux $a = 2$, $b = 3$

$u = -7$, $v = 7$

$2 \times (-7) + 3 \times (7) = 7$

et $pgcd(2,3) \neq 7$

2) faux $a = 25$, $b = 5$

$25 = a \mid 5$ $\quad b = 25$

$a \nmid 5$ et $a \nmid b$

3) Vrai : car 7 ~~est~~ premier

et p premier, $p \mid bc \Rightarrow p \mid b$ ou $p \mid c$

4) Vrai : $5 \mid 20$ et $20 \mid b^2 \Rightarrow 5 \mid b^2$

donc $5 \mid b$ (TD) donc $25 = 5^2 \mid b^2$

5) faux $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$

$2 \nmid 3$ et $3 \mid 6$ mais $2 \mid 6$