18/20

CC3

**NOM :** BELMELLAT **PRENOM :** SAMI **Numéro d'étudiant :** 22116180

Utilisez uniquement les espaces encadrées prévues pour répondre. Rappel : Une des règles de transformations d'une formule en DNF est $(X \vee Y) \wedge Z \rightsquigarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$

**1** Mettre la formule $(((x \vee y) \wedge \neg\neg z) \wedge \neg(x \wedge y))$ en DNF et en CNF. Donner les différentes étapes.

DNF :

$(((x \vee y) \wedge \neg\neg z) \wedge \neg(x \wedge y)) \rightsquigarrow (((x \vee y) \wedge z) \wedge (\neg x \vee \neg y))$

$\rightsquigarrow (((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \wedge (\neg x \vee \neg y))$

$\rightsquigarrow (((x \wedge z) \wedge (\neg x \vee \neg y)) \vee ((y \wedge z) \wedge (\neg x \vee \neg y)))$

$\rightsquigarrow (((x \wedge z \wedge \neg x) \vee (x \wedge z \wedge \neg y)) \vee ((y \wedge z \wedge \neg x) \vee (y \wedge z \wedge \neg y)))$

$\rightsquigarrow (x \wedge z \wedge \neg y) \vee (y \wedge z \wedge \neg x)$

3

CNF :

$(((x \vee y) \wedge \neg\neg z) \wedge \neg(x \wedge y)) \rightsquigarrow (((x \vee y) \wedge z) \wedge (\neg x \vee \neg y))$

$\rightsquigarrow ((x \vee y) \wedge z \wedge (\neg x \vee \neg y))$

1

**2** On considère une formule propositionnelle $\varphi$ avec 3 variables qui est donnée par la table de vérité suivante :

| x | y | z | $\varphi$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Donner une formule en DNF pour $\varphi$.

$\varphi = (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

2

Donner une formule en DNF de taille minimale (avec le nombre minimal possible d'occurrences de litteraux) équivalente à $\varphi$. Indication : la taille minimale est 3.

0.5

$\varphi = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$ non

y

**5** Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les formules contenant uniquement les opérateurs $\{True, False, \oplus\}$ et soit $z \in \mathcal{V}$ une variable propositionnelle donnée. On considère les règles de transformation suivantes :

$$\begin{array}{rcl} True & \rightsquigarrow & (z \vee \neg z) \\ False & \rightsquigarrow & (z \wedge \neg z) \\ (X \oplus Y) & \rightsquigarrow & ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)) \end{array}$$

qu'on utilise pour transformer chaque formule de l'ensemble $\mathcal{F}$ en une formule du calcul propositionnel vu en cours (ne contenant aucune occurrence de $True$, $False$ et $\oplus$).

— Compléter les séquences de transformations suivantes :

2

| $p_1$ | | $p_2$ | | $p_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $(False \oplus x)$ | $\rightsquigarrow$ | $((z \wedge \neg z) \oplus x)$ | $\rightsquigarrow$ | $(((z \wedge \neg z) \wedge \neg x) \vee (\neg(z \wedge \neg z) \wedge x))$ |
| $(x \oplus True)$ | $\rightsquigarrow$ | $(x \oplus (z \vee \neg z))$ | $\rightsquigarrow$ | $((x \wedge \neg(z \vee \neg z)) \vee (\neg x \wedge (z \vee \neg z)))$ |

— On considère l'ensemble $\mathcal{G}$ de toutes les formules construites à partir d'un ensemble de variables $\mathcal{V}$ et des opérateurs $\{True, False, \neg, \vee, \wedge, \oplus\}$. On considère également la fonction $\Phi$ sur les formules de l'ensemble $\mathcal{G}$ :

$$\begin{array}{lcl} \Phi(x) & := & 0 \\ \Phi(True) & := & 1 \\ \Phi(False) & := & 1 \\ \Phi(\neg p) & := & \Phi(p) \\ \Phi(p \vee q) & := & \Phi(p) + \Phi(q) \\ \Phi(p \wedge q) & := & \Phi(p) + \Phi(q) \\ \Phi(p \oplus q) & := & 2 * \Phi(p) + 2 * \Phi(q) + 1 \end{array}$$

Pour chaque séquence de transformations $p_1, p_2, p_3$ du point 1 calculez $\Phi(p_1)$, $\Phi(p_2)$ et $\Phi(p_3)$ et vérifier que $\Phi(p_1) > \Phi(p_2) > \Phi(p_3)$.

2

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| $(False \oplus x)$ | 3 | 1 | 0 |
| $(x \oplus True)$ | 3 | 1 | 0 |

vérifié $\varphi(p_1) > \varphi(p_2) > \varphi(p_3)$
vérifié $\varphi(p_1) > \varphi(p_2) > \varphi(p_3)$

$\varphi(p_1) = \varphi(False \oplus x) = 2\varphi(false) + 2\varphi(x) + 1$
$= 2 \times 1 + 0 + 1 = 3$

$\varphi(p_2) = \varphi((z \wedge \neg z) \oplus x) = 2\varphi((z \wedge \neg z)) + \varphi(x) + 1$
$= 2(\varphi(z) + \varphi(\neg z)) + \cancel{\varphi(x)} + 1$
$= 2(\cancel{\varphi(z)}) + 1 = 1$

$\varphi(p_2) = \varphi(((z \wedge \neg z) \wedge \neg x) \vee (\neg(z \wedge \neg z) \wedge x)) = \varphi((z \wedge \neg z) \wedge \neg x) + \varphi(\neg(z \wedge \neg z) \wedge x)$
$= \varphi(z \wedge \neg z) + \varphi(\neg x) + \varphi(\neg(z \wedge \neg z)) + \varphi(x)$
$= \cancel{\varphi(z)} + \cancel{\varphi(\neg z)} + \cancel{\varphi(\neg x)} + \varphi(\cancel{z \wedge \neg z}) + \cancel{\varphi(x)} = 0$

$\varphi(p_1) = \varphi(x \oplus True) = 2\varphi(\cancel{True}) + 2\cancel{\varphi(x)} + 1 = 3$

$\varphi(p_2) = \varphi(x \oplus (z \vee \neg z)) = 2\varphi(x) + 2\varphi(z \vee \neg z) + 1 = 2\cancel{\varphi(z)} + 2\cancel{\varphi(\neg z)} + 1 = 1$

$\varphi(p_3) = \varphi((x \wedge \neg(z \vee \neg z)) \vee (\neg x \wedge (z \vee \neg z))) = \varphi(x \wedge \neg(z \vee \neg z)) + \varphi(\neg x \wedge (z \vee \neg z))$
$= \cancel{\varphi(x)} + \varphi(\neg(z \vee \neg z)) + \varphi(\neg x) + \varphi(z \vee \neg z)$
$= \varphi(z \vee \neg z) + \varphi(x) + \varphi(z) + \varphi(\neg z)$
$= \varphi(z) + \cancel{\varphi(\neg z)} + \cancel{\varphi(z)} = 0$

**3** Est-ce que la formule

$$p = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (y \vee \neg z) \wedge u \wedge (\neg u \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (u \vee z)$$

est satisfaisable ? Pour répondre à la question appliquer l'algorithme DPLL. Le cas échéant donner une affectation des variables qui satisfait la formule.

- $u$ est unitaire $p[u/1] = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (y \vee \neg z) \wedge (\neg y \vee \neg z)$
- $z$ est de polarité négative $p[u/1, z/0] = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee y)$
- on choisit $x = 1$, $p[u/1, z/0, x/1] = y$.
- $y$ est unitaire : $p[u/1, z/0, x/1, y/1] = 1$

donc $p$ est satisfaisable pour $v = [z \mapsto 0]$

et ...

1.5

**4** Est-ce que la formule

$$p = (x \vee y \vee u \vee w) \wedge (y \vee \neg u \vee w) \wedge (x \vee \neg u \vee \neg w) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg z \vee \neg x) \wedge z \wedge (x \vee u \vee \neg w)$$

est satisfaisable ? Pour répondre à la question appliquer l'algorithme DPLL. Le cas échéant donner une affectation des variables qui satisfait la formule.

- $z$ est unitaire : $p[z/1] = (x \vee y \vee u \vee w) \wedge (y \vee \neg u \vee w) \wedge (x \vee \neg u \vee \neg w) \wedge (x \vee \neg y) \wedge \neg x \wedge (x \vee u \vee \neg w)$
- $\neg x$ est unitaire $p[z/1, x/0] = (y \vee u \vee w) \wedge (y \vee \neg u \vee w) \wedge (\neg u \vee \neg w) \wedge \neg y \wedge (u \vee \neg w)$
- $\neg y$ est unitaire $p[z/1, x/0, y/0] = (u \vee w) \wedge (\neg u \vee w) \wedge (\neg u \vee \neg w) \wedge (u \vee \neg w)$
- on choisit $u = 1$ $p[z/1, x/0, y/0, u/1] = w \wedge \neg w = \perp$ (pas satisfaisable)
- on choisit $u = 0$ $p[z/1, x/0, y/0, u/0] = w \wedge \neg w = \perp$ (pas satisfaisable)
- on choisit $w = 1$ $p[z/1, x/0, y/0, w/1] = \neg u \wedge u = \perp$ (pas satisfaisable)
- on choisit $w = 0$ $p[z/1, x/0, y/0, w/0] = u \wedge \neg u = \perp$ (pas satisfaisable)

plus de choix possible : donc $p$ n'est pas satisfaisable

3

Montrer par induction structurelle sur les formules de $\mathcal{G}$ que : $p \rightsquigarrow q$ implique $\Phi(p) > \Phi(q)$. Les cas symétriques et similaires peuvent être traités très brièvement.
Comment conclure que toute séquence de transformations à partir d'une formule quelconque de l'ensemble G est de longueur finie ?

Montrer que $\underbrace{\forall p \in \mathcal{G} \text{ que } p \rightsquigarrow q \Rightarrow \varphi(p) > \varphi(q)}_{\circledast}$

⊛ Cas 1 : $p = x$ : aucune transformation n'est possible donc ⊛ est vérifié.

• Cas 2 : $p = \text{True}$ selon la règle 1 $p = \text{True} \rightsquigarrow q = z \vee \neg z$.

$\varphi(p) = \varphi(\text{True}) = 1 > \varphi(q) = \varphi(z \vee \neg z) = \varphi(z) + \varphi(\neg z) = \varphi(z) = 0 \Leftrightarrow \varphi(p) > \varphi(q)$

• Cas 3 : $p = \text{False}$ selon la règle 2 $p = \text{False} \rightsquigarrow q = z \wedge \neg z$

$\varphi(p) = \varphi(\text{False}) = 1 > \varphi(q) = \varphi(z \wedge \neg z) = \varphi(z) + \varphi(\neg z) = \varphi(z) = 0 \Leftrightarrow \varphi(p) > \varphi(q)$

• Cas 3 : $p \in \mathcal{G}$, $p = \neg p_1$, supposons que $p_1$ satisfait ⊛ $p = \neg p_1 \rightsquigarrow q = \neg q_1$ avec $p_1 \rightsquigarrow q_1$

$\varphi(p) = \varphi(\neg p_1) = \varphi(p_1) \underset{hyp}{>} \varphi(q_1) = \varphi(\neg q_1) = \varphi(q)$ donc $\varphi(p) > \varphi(q)$

• Cas 4 : $p \in \mathcal{G}$, $p = (p_1 \wedge p_2)$ : Soit $p_1 \rightsquigarrow q_1$ ou bien $p_2 \rightsquigarrow q_2$
mais les deux cas sont similaires.
donc supposons que $p_1 \rightsquigarrow q_1$ donc $p = (p_1 \wedge p_2) \rightsquigarrow q = (q_1 \wedge p_2)$ et $\varphi(p_1) > \varphi(q_1)$

$\varphi(p) = \varphi(p_1 \wedge p_2) = \varphi(p_1) + \varphi(p_2)$ par hyp $\varphi(p_1) > \varphi(q_1)$

$\varphi(q) = \varphi(q_1 \wedge p_2) = \varphi(q_1) + \varphi(p_2)$ $\varphi(p_1) + \varphi(p_2) > \varphi(q_1) + \varphi(q_2)$

$\varphi(p) > \varphi(q)$

• Cas 5 : $p \in \mathcal{G}$, $p = p_1 \vee p_2$ similaire au cas 4.

• Cas 6 : $p \in \mathcal{G}$, $p = p_1 \oplus p_2$ : Soit :
- $p_1 \rightsquigarrow q_1$
- $p_2 \rightsquigarrow q_2$ } similaires
- on applique la règle 3

- $p_1 \rightsquigarrow q_1$, supposons que $p_1$ vérifie ⊛ $p = p_1 \oplus p_2 \rightsquigarrow q = q_1 \oplus p_2$

$\varphi(p) = \varphi(p_1 \oplus p_2) = 2\varphi(p_1) + 2\varphi(p_2) + 1$ par hyp $\varphi(p_1) > \varphi(q_1)$

$\varphi(q) = \varphi(q_1 \oplus p_2) = 2\varphi(q_1) + 2\varphi(p_2) + 1$ donc $\varphi(p) > \varphi(q)$

4

Très bien

- on applique la règle 3. $p = (p_1 \oplus p_2) \rightsquigarrow q = (p_1 \wedge \neg q_1) \vee (\neg p_1 \wedge q_1)$

$\varphi(p) = \varphi(p_1 \oplus p_2) = 2\varphi(p_1) + 2\varphi(p_2) + 1$

$\varphi(q) = \varphi((p_1 \wedge \neg q_1) \vee (\neg p_1 \wedge q_1)) = \varphi(p_1 \wedge \neg q_1) + \varphi(\neg p_2 \wedge q_1)$
$= \varphi(p_1) + \varphi(\neg q_1) + \varphi(\neg p_2) + \varphi(q_1)$
$= 2\varphi(p_1) + 2\varphi(p_2)$

Donc $\varphi(p) > \varphi(q)$

Alors $\forall p \in \mathcal{G}$, $p \rightsquigarrow q$ Alors $\varphi(p) > \varphi(q)$ et vu que $\varphi(p) \geq 0$ donc la transformation se finit
Alors la longueur de la formule finale est finie