Examen final du 31 mai 2021

Durée : 2 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux. **Tous les résultats devront être soigneusement justifiés.**

Exercice 1 (1+2+2 pts).

1. Calculer le PGCD de 145 et 55.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes
$$145x + 55y = 237 \qquad\qquad 145x + 55y = 25.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système
$$\begin{cases} x & \equiv 3 \mod 145 \\ 2x & \equiv 1 \mod 55. \end{cases}$$

Exercice 2 (2+1 pts).

1. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division par 5 de 2^n.
2. Calculer le reste dans la division par 11 de 10^{13}.

Exercice 3 (1+1+1 pts).

1. Déterminer les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.
2. Existe t-il un morphisme f du groupe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ tel que $f(\bar{1}) = \bar{1}$? tel que $f(\bar{1}) = \bar{2}$? Dans le(s) cas où f est un morphisme, dire s'il est injectif et/ou surjectif.
3. Le groupe $((\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times, \times)$ est-il cyclique ?

Exercice 4 (2+1). Écrire la décomposition en cycles disjoints de la permutation
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
et calculer sa signature.

Exercice 5 (1+1+1+1 pts). Un saladier contient 10 papillotes au chocolat noir et 7 papillotes au chocolat blanc. On en tire une poignée de 5 (c'est donc un tirage sans remise, sans ordre).

1. Compter le nombre de tirages qui contiennent exactement 2 papillotes au chocolat blanc.
2. Quelle est la probabilité de n'avoir que des papillotes au chocolat blanc ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une papillote au chocolat noir ?
4. On tire cette fois deux papillotes l'une après l'autre. Quelle est la probabilité que la seconde soit au chocolat noir ?

Exercice 6 (2 pts). Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'ordre pair et e son élément neutre. Montrer qu'il existe au moins un élément $x \neq e$ tel que $x^2 = e$.

Exercice 7 (bonus). Soient p, q deux nombres premiers consécutifs strictement plus grands que 3. Montrer que $N = p + q$ a au moins trois diviseurs propres (c'est-à-dire différents de 1 et N).

Ex 1

1) Calcule pgcd 145 et 55

$\operatorname{pgcd}(145, 55) = 5$

$$\begin{aligned}
145 &= 2 \times 55 + 35 \\
55 &= 1 \times 35 + 20 \\
35 &= 1 \times 20 + 15 \\
20 &= 1 \times 15 + 5 \\
15 &= 3 \times 5 + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 55 \\ \times\ 2 \\ \hline 110 \\ 145 \end{array}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $145y + 55y = 237$

On a $\operatorname{pgcd}(145, 55) = 5$ puisque $5 \mid 145x + 55y$ et $5 \nmid 237$. L'équation $145x + 55y = 237$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

On constate que $5 \mid 25$

On cherche donc une solution particulière à l'équation $145x + 55y = 5$

On a

$$\begin{aligned}
5 &= 20 - 1 \times 15 \\
5 &= 20 - 1 \times (35 - 1 \times 20) \\
5 &= 20 - 1 \times 35 + 1 \times 20 \\
5 &= -1 \times 35 + 2 \times 20 \\
5 &= -1 \times 35 + 2(55 - 1 \times 35) \\
5 &= -1 \times 35 + 2 \times 55 - 2 \times 35 \\
5 &= 2 \times 55 - 3 \times 35 \\
5 &= 2 \times 55 - 3(145 - 2 \times 55)
\end{aligned}$$

$5 = 2 \times 55 - 3 \times 145 + 6 \times 55$

$5 = -3 \times 145 + 8 \times 55$

On a $(x_0, y_0) = (-3, 8)$ ✓

On cherche une solution particulière

$145x + 55y = 25$

$145(-3) \times 5 + 55 \times (8) \times 5 = 25$

$145 \times (-15) + 55 \times 40 = 25$

$(x_0, y_0) = (-15, 40)$ ✓

Soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, l'équation initiale est sous forme $ax + by = c$ avec $a = 145$, $b = 55$

$a = \text{pgcd}(a, b) \times a'$ $\qquad$ $b = \text{pgcd}(a, b) \times b'$

$145 = 5 \times a'$ $\qquad$ $55 = 5 \times b'$

$a' = 29$ $\qquad$ $b' = 11$

L'ensemble des solutions particulière sont :

$S = \{[(-15) + 11k, 40 - 29k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3)

$$S: \begin{cases} x \equiv 3 \mod 145 \\ 2x \equiv 1 \mod 55 \end{cases}$$

$\text{pgcd}(145, 55) = 5$ $\qquad$ $\text{ppcm}(145, 55) = 145 \times 55 : \text{pgcd}$

$= 1595$

Inverse modulo rappel :

$$4x \equiv 9 \mod 15$$

$$4 \times 4 = 16 \equiv 1 \mod 15$$

Donc $4x \equiv 9 \mod 15 \Leftrightarrow 4 \times 4x \equiv 4 \times 9 \mod 15$

$$16x \equiv 36 \mod 15$$

$$\Leftrightarrow \quad x \equiv 6 \mod 15$$

$$2x \equiv 1 \mod 55$$

$$2 \times 28 = 56 \equiv 1 \mod 55$$

Donc $2x \equiv 1 \mod 55 \Leftrightarrow 28 \times 2x \equiv 28 \times 1 \mod 55$

$$\Leftrightarrow \quad 56x \equiv 28 \mod 55$$

$$\Leftrightarrow \quad x \equiv 28 \mod 55$$

Le système est donc équivalent à :

$$S : \begin{cases} x \equiv \overset{a}{3} \mod 145^{m} \\ x \equiv \overset{b}{28} \mod 55^{n} \end{cases}$$

Comme $\operatorname{pgcd}(145, 55) = 5$ divise $28 - 3 = 25$. Le système admet solutions

On applique l'algo Euclide à $(145, 55)$

$$145u + 55v = 5$$

avec $u = -3 \quad v = 8$

$$m' = \frac{m}{\operatorname{pgcd}(145, 5)} = \frac{145}{5} = 29$$

$$n' = \frac{n}{} = \frac{55}{5} = 11$$

pgcd (145, 5)

Solution particulière : $x = bum' + avn'$

$$= 28 \times (-3) \times 29 + 3 \times 8 \times 11$$
$$= -2436 + 264$$
$$= -2172$$

Solution générale : $\{x = -2172 + 1595k, k \in \mathbb{Z}\}$

Ex 2

2) $10^{13} \bmod 11$

$$10 \equiv -1 [11] \Leftrightarrow 10^{13} \equiv (-1)^{13} [11]$$
$$\Leftrightarrow 10^{13} \equiv -1 [11]$$
$$\Leftrightarrow 10^{13} \equiv 10 [11]$$

1) le reste de la division par 5 de 2^n

On a $2^0 \equiv 1 [5]$

$2^1 \equiv 2 [5]$

$2^2 \equiv -1 [5]$

$2^3 \equiv -2 [5]$

$2^4 \equiv 1 [5]$

Donc $2^{4k} \equiv (2^4)^k \equiv 1 [5]$

1)

n	0	1	2	3	4	5
$2^n \bmod 5$	1	2	4	1	3 ou -2	1

Réponse

$$2^n \equiv \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \bmod 5 \\ 2 & n \equiv 1 \bmod 5 \\ 4 & n \equiv 2 \bmod 5 \\ 3 & n \equiv 3 \bmod 5 \end{cases}$$

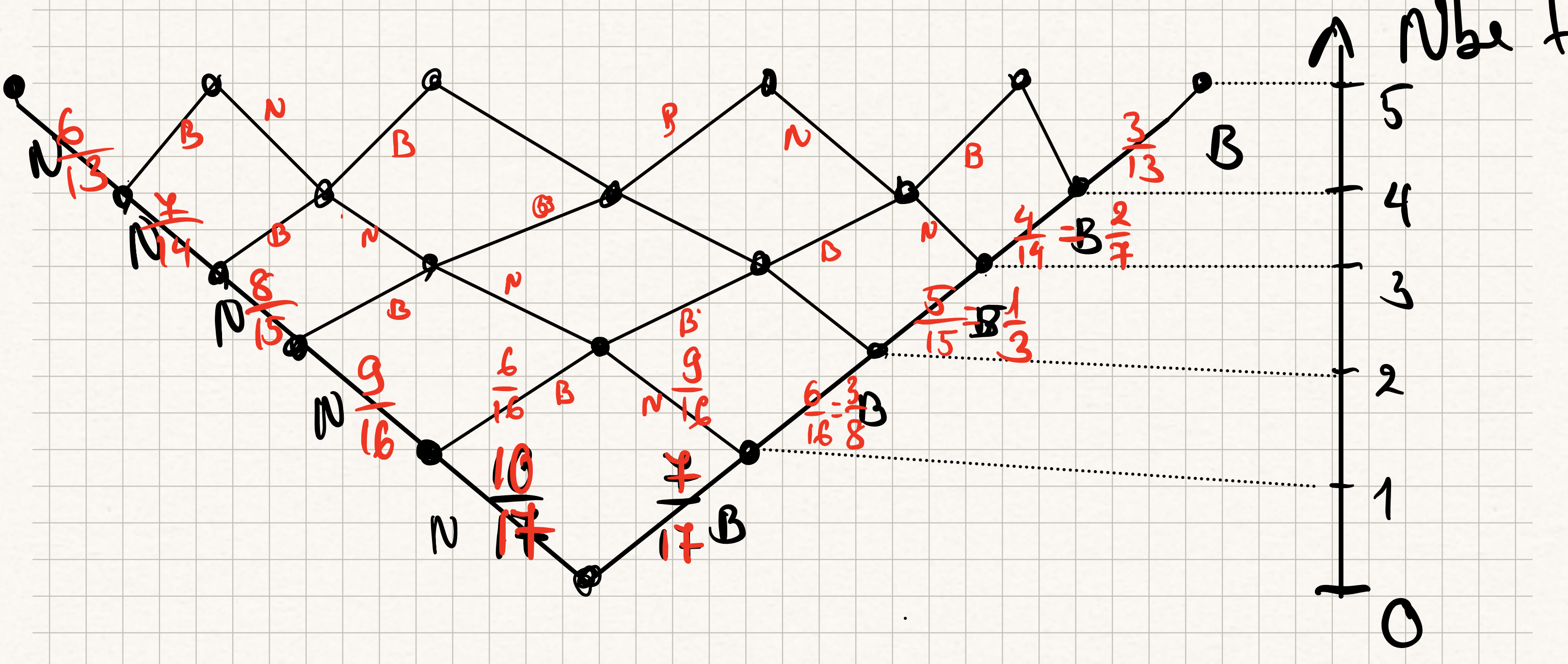
Ex 4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (1\,2\,5)(3\,4)$$

et $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1\,2\,5))\,\varepsilon((3\,4))$
$= (-1)^{3-1}(-1)^{2-1} = (-1)^2 \times (-1)^1$
$= -1$

Ex 5



1) Tirer exactement 2 boules blanc avec 5 tirage
Il faut tirer donc 2B et 3N
On utilise le coef binomiaux $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

2B parmi 7B : C_7^2

3N parmi 10N : C_{10}^3

Donc il y a $C_7^2 \cdot C_{10}^3$

2) Probabilité de retirer que des choco Blanc

Si A : "5 blancs"

On a $A = C_7^5$

pour Ω : "5 blanc", $\Omega = C_{17}^5$

$$P(A) = \frac{C_7^5}{C_{17}^5}$$

3) la probabilité d'avoir au moins 1 choco noir

Si B = "au 1 choco noir"

A = "5 blancs"

$$B = \overline{A}$$

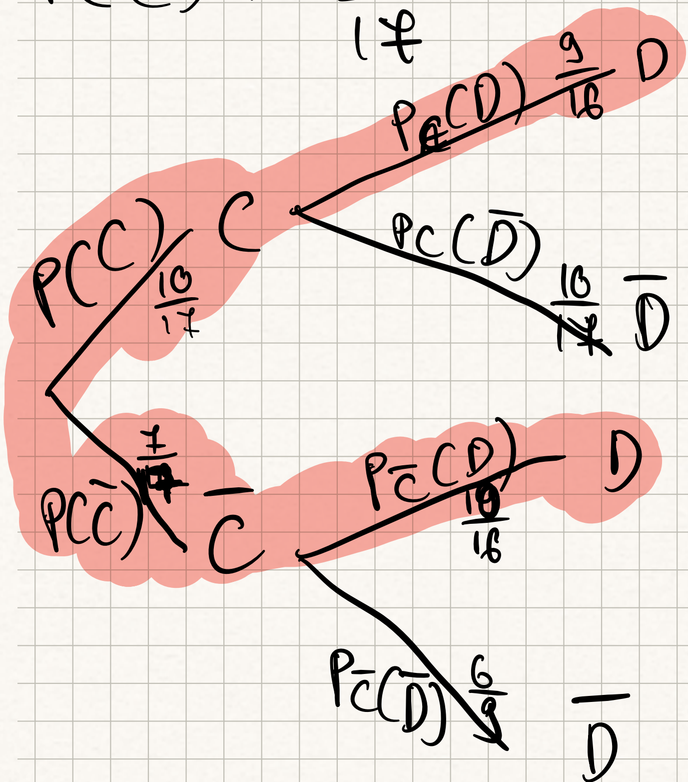
$$P(B) = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{C_7^5}{C_{17}^5}$$

4) $C =$ " Noir au premier tirage "

$D =$ " Noir au deuxième tirage

On a 10 noir et 7 Blancs

$P(C) = \frac{10}{17}$



$$P(D) = P(C \cap D) + P(\overline{C} \cap D)$$

$$= \frac{10}{17} \times \frac{9}{16} + \frac{7}{10} \times \frac{10}{16}$$

$$= \frac{10}{17}$$

$$= P(C)$$

Ex 3

1) On a $\langle \bar{k} \rangle = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ssi $pgcd(k,6) = 1$
les générateurs de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont $\bar{1}$ et $\bar{5}$

2)