Théorème de Myhill-Nerode

L est rationnel $\Leftrightarrow$ $\sim_L$ est d'indice infini

Étape : 1) Trouver W, un ensemble infini de mot
2) Montrer que $\forall w_1, w_2 \in W$ $w_1 \neq w_2$

$w_1 \not\sim_L w_2$

Exercice :

Montrer que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel avec le théorème Myhill

On pose $W = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

W est infini

De plus $\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 \neq w_2$

$\exists i, j$ tel que $w_1 = a^i \quad w_2 = a^j$ et $i \neq j$

Montrons que $w_1 \not\sim_L w_2$

En effet, b^i les sépare

$a^i b^i \in L$ mais $a^j b^i \notin L$

Donc, il $\sim_L$ est d'indice infini

Donc, d'après le théorème de Myhill-Nerode

L n'est pas rationnel

$L_2 = \{ b^n a b^n a \mid n \in \mathbb{N} \}$

On pose $W = \{ b^i \mid i \in \mathbb{N} \}$

W est infini

De plus, $\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 \neq w_2$

$\exists i, j \quad w_1 = b^i \quad w_2 = b^j \quad i \neq j$

Montrons que $w_1 \not\sim_{L_2} w_2$

En effet, ab^ia les sépare

$b^i a b^i a \in L_2$ mais $b^j a b^i a \notin L_2$

Donc $\sim_{L_2}$ est d'indice infini

Donc, d'après le théorème de Myhill-Nérode

L_2 n'est pas rationnel

$L_3 = \{a^n b^m \mid n \leq m\}$

On pose $W = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

W est infini

De plus, $\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 \neq w_2$

$\exists\, i, j \quad w_1 = a^i \qquad w_2 = a^j \quad i \neq j$

Montrer que $w_1 \not\sim_L w_2$

Si $i > j$ alors, b^j les sépare

$a^i b^j \notin L_3$, mais $a^j b^j \in L_3$

Si $j < i$, alors, b^i les sépare

$a^i b^i \in L_3$ mais $a^j b^i \notin L_3$

Donc $\sim_{L_3}$ est d'indices infini

Donc, d'après le théorème