Ex 1

$$24x + 38y = 44$$

$\text{pgcd}(24, 38) = 2$ Comme $2 \mid 44$, l'équation admet des solutions

$$38 = 1 \times 24 + 14$$
$$24 = 1 \times 14 + 10$$
$$14 = 1 \times 10 + 4$$
$$10 = 2 \times 4 + 2$$
$$4 = 2 \times 2 + 0$$

On cherche d'abord la solution particulière à l'équation

$$24x + 38y = 2$$

$$2 = 10 - 2 \times 4$$
$$2 = 10 - 2(14 - 1 \times 10)$$
$$2 = 10 - 2 \times 14 + 2 \times 10$$
$$2 = -2 \times 14 + 3 \times 10$$
$$2 = -2 \times 14 + 3(24 - 1 \times 14)$$
$$2 = -2 \times 14 + 3 \times 24 - 3 \times 14$$
$$2 = 3 \times 24 - 5 \times 14$$
$$2 = 3 \times 24 - 5(38 - 1 \times 24)$$
$$2 = 3 \times 24 - 5 \times 38 + 5 \times 24$$
$$2 = -5 \times 38 + 8 \times 24$$

Une solution particulière donc :

$(x_0, y_0) = (8, -5)$

3) On cherche la solution particulière de l'équation

$$24x + 38y = 44$$

$$24 \times 8 \times 22 + 38 \times (-5) \times 22 = 44$$
$$24 \times 176 + 38 \times (-110) = 44$$
$$(x_1, y_1) = (176, (-110))$$

4) Soit $a', b' \in \mathbb{Z}, \in \mathbb{Z}$ tq

$a = pgcd(a,b) \times a'$ $b = pgcd(a,b) \times b'$

$24 = 2 \times a'$ $38 = 2 \times b'$

$a' = 12$ $b' = 14$

$$S = \{(176 + 14k, (-110) - 12k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Ex4 :

$$S : \begin{cases} x \equiv \overset{a}{5} \mod \overset{m}{12} \\ x \equiv \overset{b}{17} \mod 20^{\,n} \end{cases}$$

$pgcd(12, 20) = 4$ $ppcm(12, 20) = 60$

$20 = 1 \times 12 + 8$

$12 = 1 \times 8 + 4$

$8 = 2 \times 4 + 0$

Comme $4 \mid 17 - 5$, le système d'équation admet des solution

On applique l'algo Euclide à $(12, 20)$

$12u + 20v = pgcd(12, 20)$

$12u + 20v = 4$

avec $u = 2$ $v = (-1)$

$$m' = \frac{m}{pgcd(a,b)} = \frac{12}{4} = 3$$

$$n' = \frac{n}{pgcd(a,b)} = \frac{20}{4} = 5$$

Solution particulière : $x = bum' + avn'$
$= 17 \times 2 \times 3 + 5 \times (-1) \times 5$
$= 102 - 25$
$= 77$

Solution générale : $\{x = 77 + 60k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ex 5 :

1) $8x \equiv 4 \mod 12$

pgcd $(8, 12) = 4$

$12 = 1 \times 8 + 4$

$8 = 2 \times 4 + 0$ l'équation admet des solutions

On constate $4 \mid 12$, l'équation est équivalente à :

$2x \equiv 1 \mod 3$

On cherche donc l'inverse de 2 mod 3

$2 \times 2 \equiv 1 \mod 3$

Donc $2x \equiv 1 \mod 3$

$\Leftrightarrow 2 \times 2x \equiv 2 \mod 3$

$\Leftrightarrow 4x \equiv 2 \mod 3$

$\Leftrightarrow x \equiv 2 \mod 3$

$S = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2) $8x \equiv 3 \mod 12$

pgcd $(8, 12) = 4$

On vérifie si pgcd$(8, 12) \mid 12$, $4 \nmid 3$, donc l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$