$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

$$= xe_1 + ye_2$$

$$xe_1 + ye_2 = 0$$

$$x(1,0) + y(0,1)$$

$$= (0,0)$$

$$(x,y) = (0,0)$$

$$\mathcal{C} = (e_1, e_2) \qquad \mathcal{B} = (e_2, e_1)$$

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1) = 2e_1 + 3e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = (2,3)_{\mathcal{C}}$$

Base $(2,3) = 3(0,1) + 2(1,0) = 3e_2 + 2e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = (3,2)_{\mathcal{B}}$

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$

Définition 13 : Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de E

Soit $u \in E$, si $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ alors

$(a_1, \dots, a_n)$ sont les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$

$\Updownarrow$

coefficients

Def 14 : soit f $E \to F$

f est dite linéaire si pour tous $(u, v) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$

2) $f(\lambda u) = f(u) \cdot \lambda$

Linéaire = morphisme

$f : E \to E$ linéaire = ENDOMORPHISME

f linéaire $E \to F$ bijective = Automorphisme

$f : E \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) linéaire forme linéaire

Exemple :

1) $0 : E \to F$

$\quad u \to 0_F$

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

lin

$(x, y, z) \longmapsto (x + y - 3z, -2x - y + z)$

3) $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$

$\quad P \longrightarrow P'$

$S : D^1(I) \longrightarrow \mathbb{R}^I$

$\quad f \longrightarrow f'$

Reflexes :

$$f(0_E) = F$$

$$f(u - v) = f(u) - f(v)$$

$$f(2u + v - 3w) = 2f(u) + f(v) - 3f(w)$$

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n)$$
$$= \lambda_1 f(u_1) + \dots \lambda_n f(u_n)$$

Def 15 :

E, F espace vectoriel $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n)$ base de F

Soit $f \; E \to F$ lin

$$f(e_1) = a_{1,1} \varepsilon_1 + a_{2,1} \varepsilon_2 + \dots a_{m,1} \varepsilon_m$$

$$f(e_2) = a_{1,} \varepsilon_1 + a_{2,2} \varepsilon_2 + \dots a_{m,2} \varepsilon$$

$$f(e_n) = a_{1,} \varepsilon_1 + a_{2,n} \varepsilon_2 + \dots a_{m,n} \varepsilon_m$$

Alors
$$M_{\mathcal{B},e}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \\ \varepsilon_m \end{array}$$

Ex :

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lin $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

une base de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) = 3e_1 + 6e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = 2e_1 \qquad\qquad - e_3 \end{cases}$$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y, z) \longrightarrow (x+y-z, -x+z)$ lin

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

$e_1 = (1, 0, 0)$ $e_2 = (0, 1, 0)$ $e_3 = (0, 0, 1)$

$\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$

$\varepsilon_1 = (1, 0)$ $\varepsilon_2 = (0, 1)$

$$\underset{B,\mathcal{E}}{M}(f) = \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{matrix} \end{array}$$

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-1)$$

$$= (1,0) - (0,1) = 1\mathcal{E}_1 + (-1)\mathcal{E}_2$$

$$= -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

$$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,0) = \mathcal{E}_1$$

Propriété 10

Soit $M_{B,\mathcal{E}}(f)$ $f: E \to F$ et $u = (x_1 \dots x_n)_B \in E$

Prop 12

$A = M_{B,C}(f)$ $B = M_{B,\mathcal{E}}(g)$

M