Outils logiques
TD n° 5

Exercice 1 :
(Partiel 2009)

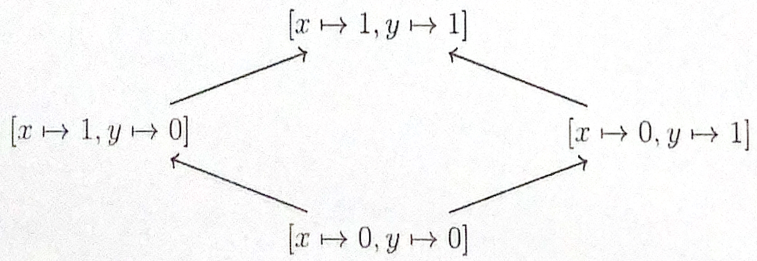
1. Montrer que $(((x \vee y) \to z) \to (x \vee y)) \models ((x \vee y) \vee z)$
2. Est-ce qu'on a que $((x \vee y) \vee z) \models\!\mid (((x \vee y) \to z) \to (x \vee y))$?
3. Écrire une formule équivalente à $(((x \vee y) \to z) \to (x \vee y))$ en utilisant seulement la négation et la conjonction.

Exercice 2 :
Soient q_1, q_2 deux formules telles que $q_1 \models\!\mid q_2$, $x_1 \ldots x_n$ des variables propositionnelles différentes, et $p_1 \ldots p_n$ des formules propositionnelles quelconques. Montrer que $q_1[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n] \models\!\mid q_2[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]$.

Exercice 3 :
En appliquant les théorèmes vus en cours montrer les équivalences suivantes :

1. $\neg((p \vee q) \wedge (r \to p)) \models\!\mid \neg(p \vee q) \vee \neg(r \to p)$.
2. $\neg(\neg(p \to q)) \wedge (\neg r \vee \neg s) \models\!\mid (p \to q) \wedge \neg(r \wedge s)$

Exercice 4 :
(Examen 2011)
Si σ_1 et σ_2 sont deux affectations données, on dit que σ_1 est plus petite que σ_2, et on écrit $\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$, si pour toute variable x du calcul propositionnel, $\sigma_1(x) \leqslant \sigma_2(x)$. Autrement dit, σ_1 est plus petite que σ_2 si σ_2 associe la valeur 1 à toutes les variables auxquelles σ_1 associe la valeur 1, et éventuellement à d'autres. Par exemple, $[x \mapsto 1, y \mapsto 0] \sqsubseteq [x \mapsto 1, y \mapsto 1]$, et $[x \mapsto 1, y \mapsto 1, z \mapsto 0] \sqsubseteq [x \mapsto 1, y \mapsto 1, z \mapsto 1]$, mais $[x \mapsto 1, y \mapsto 1] \not\sqsubseteq [x \mapsto 1, y \mapsto 0]$ (rappel : ces affectations associent la valeur 0 à toutes les variables qui n'apparaissent pas dans la liste).
Voici représentée graphiquement la relation $\sqsubseteq$ sur les 4 affectations différentes pour les variables x et y (un trait entre deux affectations signifie que la première, celle placée plus bas dans le dessin, est plus petite que la deuxième).



Une formule ϕ du calcul propositionnel est *monotone* si pour toute paire d'affectations σ_1, σ_2, si $\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$, alors la valeur de vérité $[\![\phi]\!]\sigma_1$ est plus petite que (ou égale à) la valeur de vérité $[\![\phi]\!]\sigma_2$. Autrement dit, ϕ est monotone si

$$\text{pour tout } \sigma_1, \sigma_2, \text{ si } \sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2 \text{ alors } [\![\phi]\!]\sigma_1 \leqslant [\![\phi]\!]\sigma_2$$

1. Représenter graphiquement la relation $\sqsubseteq$ sur les 8 affectations différentes pour les variables x, y et z, comme dans la figure ci-dessus.
2. Montrer que la formule $((x \vee y) \wedge z)$ est monotone (indication : dans le dessin du point précedent, écrire à côté de chaque affectation la valeur de verité de la formule relativement à l'affectation en question, et conclure.)
3. Montrer que la formule $((x \vee y) \wedge \neg z)$ n'est pas monotone.
4. Donnez un exemple, aussi simple que possible, de formule monotone de la forme $\neg\phi$.
5. Si ϕ est monotone, alors $\neg\phi$ est aussi monotone. Prouver cet énoncé, ou donner un contre-exemple.
6. On considère le calcul propositionnel *privé de la négation.* Formellement, soit $\overline{Form}$ le plus petit ensemble de chaînes de caractères tel que :
   - $V \subseteq \overline{Form}$
   - Si $\phi, \psi \in \overline{Form}$ alors $(\phi \wedge \psi) \in \overline{Form}$
   - Si $\phi, \psi \in \overline{Form}$ alors $(\phi \vee \psi) \in \overline{Form}$

   Les notions d'affectation, d'interprétation etc. pour les formules de $\overline{Form}$ sont les mêmes que celles définies pour les formules correspondantes de $Form$.

   Montrer par induction *sur les éléments de l'ensemble* $\overline{Form}$ que toutes les formules de ce calcul restreint sont monotones.

$x \vee \neg x$ est une tautologie

$(x \vee \neg x)[x/(y \vee y)]$ $\qquad$ $[x/(y \vee y)]$

$= ((y \vee y) \vee \neg (y \vee y))$ $\qquad$ substitue

Soit substitue

$$p = z \vee \neg y$$

$$(x \wedge (\neg x \wedge y))[x/p] = (z \vee \neg y) \wedge (\neg (x \vee \neg y) \wedge y)$$

Tautologie : Proposition vraie quelle que soit la valeur de vérité de ses composants

$\neg(x \wedge y) \models\mid \neg x \vee \neg y$

$[x/(z \wedge y),\ y/(x \wedge z)]$

$\neg[(z \wedge y) \wedge (x \wedge z)]$

$\models\mid \neg(z \wedge y) \vee \neg(x \wedge z)$

$\neg(p \wedge q) \models\mid \neg p \vee \neg q$

pour n'importe quelle formules $p \vee q$

$p \wedge p \models\mid p$	Loi d'idempotence de la conjonction
$p \wedge q \models\mid q \wedge p$	Loi de commutativité de la conjonction
$p \wedge (q \wedge r) \models\mid (p \wedge q) \wedge r$	Loi d'associativité de la conjonction
$p \vee p \models\mid p$	Loi d'idempotence de la disjonction
$p \vee q \models\mid q \vee p$	Loi de commutativité de la disjonction
$p \vee (q \vee r) \models\mid (p \vee q) \vee r$	Loi d'associativité de la disjonction
$\neg\neg p \models\mid p$	Loi de la double négation

$\neg(x_1 \wedge x_2) \models\mid (\neg x_1 \vee \neg x_2)$

$x_1 \to x_2 \models\mid \neg(x_1 \wedge \neg x_2)$

$x \wedge y \models\mid x \wedge y$

$\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \to x_2) \models\mid (\neg x_1 \vee \neg x_2)$
$\wedge \neg(x_1 \wedge \neg x_2)$

Nous savons par les lois de De Morgan, que

$$\underbrace{\neg(y_1 \land y_2)}_{p_1} \;\models\!\dashv\; \underbrace{\neg y_1 \lor \neg y_2}_{q_1}$$

$$\underbrace{\neg(z_1 \lor z_2)}_{p_2} \;\models\!\dashv\; \underbrace{\neg z_1 \land \neg z_2}_{q_2}$$

Avec la formule $p = (\neg x_1 \land x_2)$ on obtient la nouvelle équivalence suivante :

$$\underbrace{\neg\neg(y_1 \land y_2) \land \neg(z_1 \lor z_2)}_{p[x_1/p_1, x_2/p_2]} \;\models\!\dashv\; \underbrace{\neg(\neg y_1 \lor \neg y_2) \land (\neg z_1 \land \neg z_2)}_{p[x_1/q_1, x_2/q_2]}$$

Ex 1 :

1) Table de vérité

2) On regarde la table de vérité de la question 1 (même formule)

$(((x \lor y) \to z) \to (x \lor y)) \models\!\dashv x \lor y \models\!\dashv \neg(\neg x \land \neg y)$

$(p \to q) \to p$

$(\neg p \lor q) \to p$

$\neg(\neg p \lor q) \lor p$

$(p \land \neg q) \lor p$

Ex2

Il faut montrer

$$[\![q_1 [x_1/p_1, \dots x_n/p_n]]\!]_v$$
$$= [\![p_2 [x_1/p_1, \dots, x_n/p_n]\!]_v$$

pour tout affection v

$$[\![q_1 [x_1/p_1, \dots, x_n/p_n]]\!]_v$$
$$= [\![q_1]\!] v([x_1/[\![p_1]\!]_v, \dots, X_n/[\![p_n]\!]_v)$$

et $[\![q_2 [x_1/p_1, \dots, X_n/P_n]]\!]_v$

$$= [\![q_2]\!] v([x_1/[\![p_1]\!]v, \dots, X_n/[\![p_n]\!]v])$$

$=$ car $q_1 \dashv\vdash q_2$

Ex 3

1) $\neg((p \vee q) \wedge (r \rightarrow p)) \dashv\vdash \neg(p \vee q) \vee \neg(r \rightarrow p)$

On a $\neg(x \wedge y) \dashv\vdash \neg x \vee \neg y$

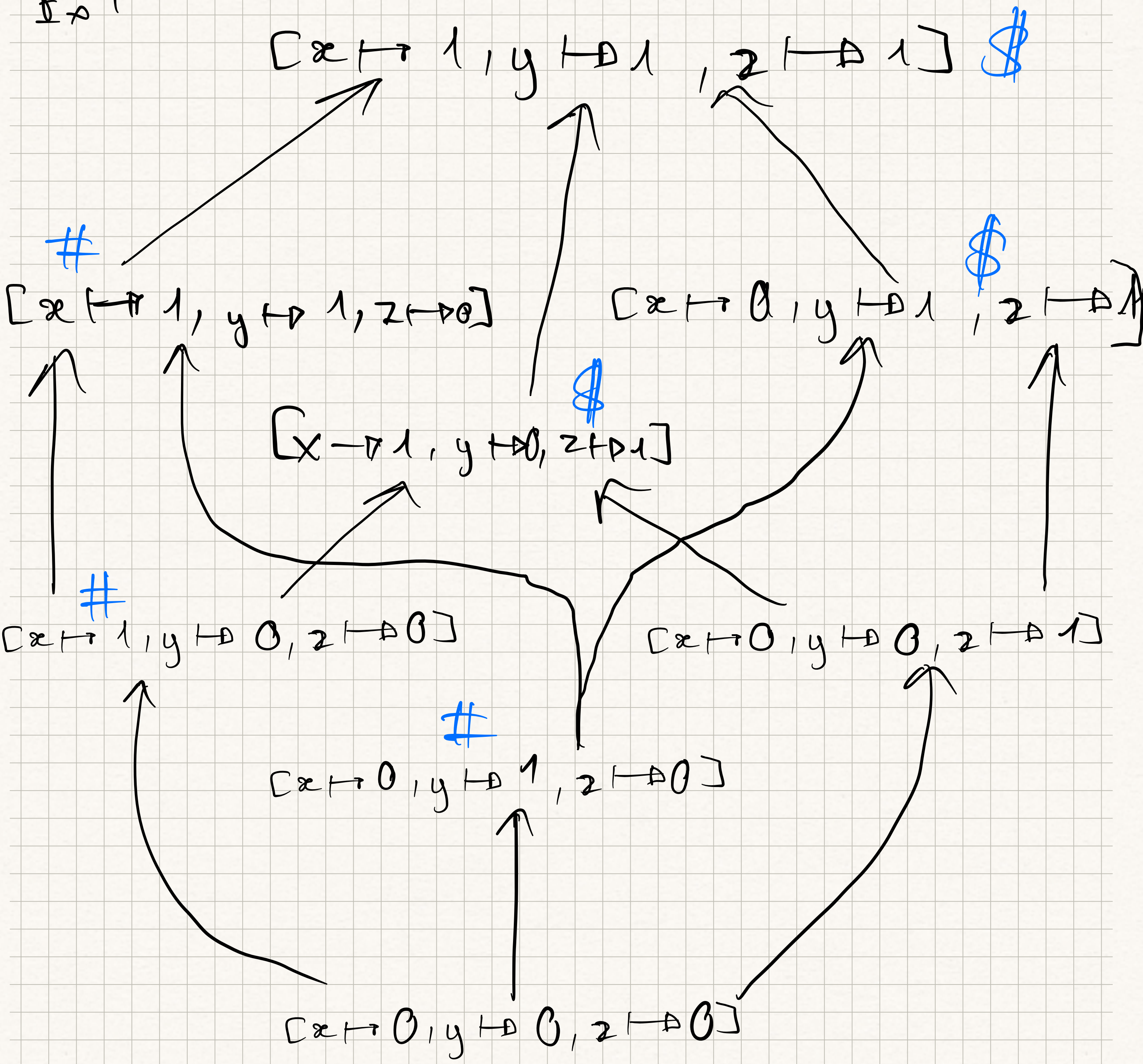
2) $\neg(\neg(p \rightarrow q)) \wedge (\neg r \vee \neg s) \dashv\vdash (p \rightarrow q) \wedge \neg(r \wedge s)$

On a $\neg(\neg(p \rightarrow q)) \dashv\vdash p \rightarrow q$

et $\neg r \vee \neg s \dashv\vdash \neg(r \wedge s)$

ensuite on part de $x \wedge y$ et on substitue

Ex 4



$ si p satisfait

$q = (x \vee y) \wedge \neg z$ #

$p = (x \vee y) \wedge z$: monotone (vrai partout)

08/03

IV. Formes Normales

Formules : $p, p \wedge p, p \wedge p \wedge p, \ldots$

Une formule est en forme normale de négation si :

1. Elle ne contient que les opérateurs $\{\wedge, \vee, \neg\}$

2. L'opérateur $\neg$ ne s'applique qu'à des variables propositionnelles

Exemple : $((\neg x \wedge \neg y) \wedge z)$

$((\neg x \vee y) \wedge (\neg z \vee x))$

Contre exemple : $\neg(x \wedge y)$

$\neg\neg y$

$x \to y$

Exemple : (Transformations)

$\neg\neg(x_1 \wedge x_2) \longrightarrow (x_1 \wedge x_2)$

$(x_1 \vee \neg\neg x_2) \longrightarrow (x_1 \vee x_2)$

$\neg(x \wedge (y \vee \neg z))$

se transforme en :

$(\neg x \vee \neg(y \vee \neg z))$

se transforme en :

$(\neg x \vee (\neg y \wedge \neg\neg z))$

se transforme en

$(\neg x \vee (\neg y \wedge z))$

Terminaison :

Si on avait une seule règle :

$\neg\neg X \longrightarrow X$

- Chaque application de cette règle enlève deux occurrences du symbole $\neg$.
- Si la formule de départ a n occurrences de $\neg$, alors l'algorithme de transformation termine après au plus $\frac{n}{2}$ étapes.

La deuxième règle

$\neg(X \wedge Y) \longrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$

- Si $p = (p_1 \wedge p_2)$ alors plusieurs possibilités pour appliquer une règle peuvent exister, cela dépend de p_1 et de p_2.
- Chaque transformation se fait soit sur p_1 soit sur p_2, il n'est pas possible d'appliquer une règle à la racine de p car toute règle commence sur le symbole $\neg$.
- Nous considérons le cas où p_1 est transformé en q_1.
- Hypothèse d'induction : $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

Hypothèse d'induction : $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{array}{lll} & \phi((p_1 \wedge p_2)) & \\ = & \phi(p_1) + \phi(p_2) & \text{par définition de } \phi \\ > & \phi(q_1) + \phi(p_2) & \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ = & \phi((q_1 \wedge p_2)) & \text{par définition de } \phi \end{array}$$

$p = \neg p_1$. Sous-cas 1 : transformation de p_1 en q_1.
Hypothèse d'induction : $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{array}{lll} & \phi(\neg p_1) & \\ = & (\phi(p_1))^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \\ > & (\phi(q_1))^2 + 1 & \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ & & \text{et } \phi(q_1) \geq 1 \\ = & \phi(\neg q_1) & \text{par définition de } \phi \end{array}$$

$p = \neg p_1$. Sous-cas 1 : transformation de p_1 en q_1.
Hypothèse d'induction : $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{array}{lll} & \phi(\neg p_1) & \\ = & (\phi(p_1))^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \\ > & (\phi(q_1))^2 + 1 & \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ & & \text{et } \phi(q_1) \geq 1 \\ = & \phi(\neg q_1) & \text{par définition de } \phi \end{array}$$

Démonstration : le cas d'une négation (II)

Première règle appliquée à la racine : $p = \neg\neg p_2$ est transformé en p_2.

$$\begin{array}{lll} & \phi(\neg\neg p_2) & \\ = & (\phi(\neg p_2))^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \\ = & ((\phi(p_2))^2 + 1)^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \end{array}$$

$$\phi(p_2)$$

Démonstration : le cas d'une négation (III)

Application de la deuxième règle à la racine : $p = \neg(p_2 \wedge p_3)$ est transformé en $(\neg p_2 \vee \neg p_3)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \phi(\neg(p_2 \wedge p_3)) & \\
= & \phi((p_2 \wedge p_3))^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \\
= & (\phi(p_2) + \phi(p_3))^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \\
= & (\phi(p_2))^2 + 2\phi(p_2)\phi(p_3) + (\phi(p_3))^2 + 1 & \\
> & (\phi(p_2))^2 + 1 + (\phi(p_3))^2 + 1 & \text{car } \phi(p_2) \geq 1 \\
 & & \text{et } \phi(p_3) \geq 1 \\
= & \phi(\neg p_2) + \phi(\neg p_3) & \text{par définition de } \phi \\
 & \phi((\neg p_2 \vee \neg p_3)) &
\end{array}
$$

Théorème

Theorem

Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme normale de négation.

Démonstration : Donné p, on lui applique des règles de transformation tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Chaque étape transforme une formule dans une formule équivalente.
3. Si aucune règle de transformation ne s'applique alors la formule est en forme normale de négation.

Démonstration de (3): Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation

Supposons qu'aucune règle ne s'applique à p, et que p contient une sous-formule $\neg q$.

- q ne peut pas être une négation (sinon : règle (1) s'applique)
- q ne peut pas être une conjonction (sinon : règle (2) s'applique)
- q ne peut pas être une disjonction (sinon : règle (3) s'applique)

Donc, q doit être une variable.