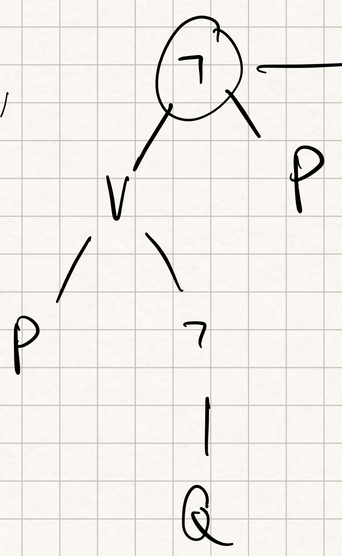
TD1 :

Exo1

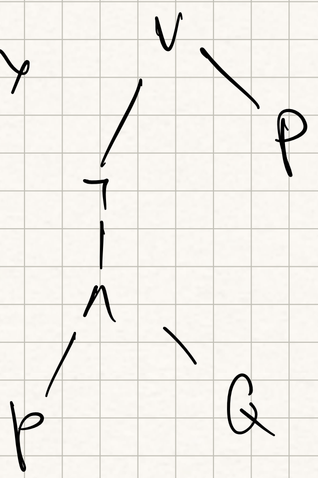
A,



Opérateur unaire

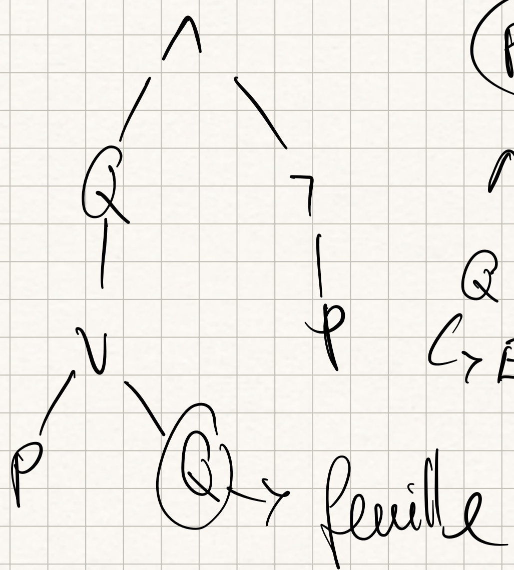
↳ agit sur une seul unité

B,



Oui $(\neg P \wedge Q) \vee P$

C,



$(P \vee Q) Q \quad \wedge \neg P$

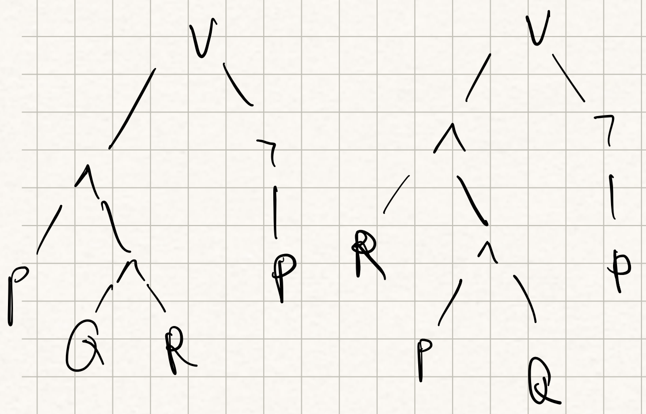
NON

Q est une proposition

↳ Elle doit être une feuille (Q)

Ex 2

A) $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P$



formule sans ambiguité

Valide : toute colonne vraie
Satisfiable : Au moins 1 vraie
falsifiable : Faux partout

Ex 4

a) $Q \vee \neg Q$

$\quad 1 \quad\quad 0$

Q

valide et satisfiable

b) $\neg(P \wedge \neg Q) = \neg P \vee Q$

$\quad 1 \quad \cancel{0} \quad\quad 0$

$\quad 0 \quad 1$

$\quad 0 \quad 0 \quad\quad 1$

satisfiable

c) $(P \Rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$

$(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$

$\quad 1 \quad 0 \quad\quad 1 \quad\quad 0$

$\quad 0 \vee 0 \quad \wedge \; 1 \quad\quad 1 \quad \rightarrow 0$ pas valide

$\quad 0 \quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0$

$(1 \vee 0) \wedge 1 \wedge 1 \quad \rightarrow 1$ pas satisfiable

Ex 5

$\neg P \vee Q$, $\neg\neg Q \vee \neg P$

1) $P \Rightarrow Q$, $\neg Q \Rightarrow \neg P$

A: équivalente

$\varphi \models \psi$ et $\psi \models \varphi$

P	Q	$\neg P \vee Q$	$Q \vee \neg P$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

2) $P \wedge (\neg Q \vee R)$, $(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$

P	Q	R	$\neg Q \vee R$	$P \wedge \neg Q$	$P \wedge \neg R$	S_1	S_2
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0

$\varphi \not\models \psi$

$\psi \models \varphi$

3) φ $P \Rightarrow Q$, $P \Rightarrow (Q \vee R)$

P	Q	R	S_1: $\neg P \vee Q$	$Q \vee R$	S_2
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$\varphi \models \psi$

$\psi \not\models \varphi$

$A \Rightarrow B$

$\neg A \vee B$

$A \Leftrightarrow B$

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

$p \downarrow q = \neg (p \vee q)$

$p \oplus q = (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$

TD 2

Forme Normale → NNF

FNConjonc   FNDisj

NNF ¬

$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ double négation

$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ Morgan

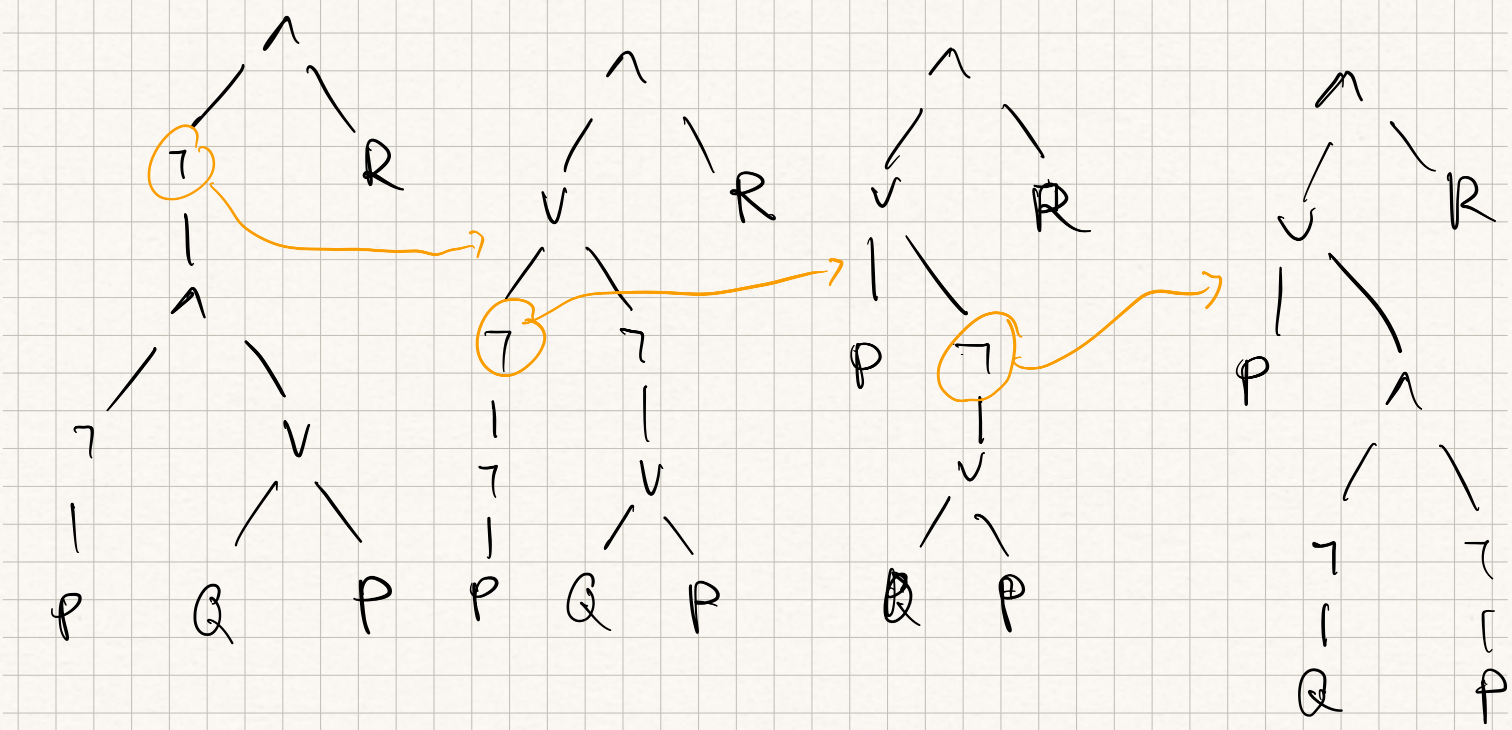
$nnf(\neg P) = \neg P$

$nnf(\neg\neg P) = nnf(\varphi)$

$nnf(\neg(\varphi \vee \psi)) = nnf(\neg\varphi) \vee nnf(\neg\psi)$

$nnf(\neg(\varphi \wedge \psi)) = nnf(\neg\varphi) \vee nnf(\neg\psi)$

Forme Normale



Forme normale Conjonctive $\vee$

$$cnf(\varphi \wedge \psi) = cnf(\varphi) \wedge cnf(\psi)$$

$$cnf(l) = l$$

$$cnf(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) = cnf(\varphi \vee \psi) \wedge cnf(\varphi \vee \psi')$$

$$cnf(\varphi \vee (\psi \vee \psi')) = cnf(\varphi \vee cnf(\psi \vee \psi'))$$

où φ n'est pas une conjonction

$$cnf(l \vee l') = l \vee l'$$

Forme normal Disjonctive $\wedge$

$$dnf(\varphi \vee \psi) = dnf(\varphi) \vee dnf(\psi)$$

$$dnf(l) = l$$

$$dnf(\varphi \wedge (\psi \vee \psi')) = dnf(\varphi \wedge \psi) \vee dnf(\varphi \wedge \psi)$$

$$dnf(\varphi \wedge (\psi \wedge \psi')) = dnf(\varphi \wedge dnf(\psi \wedge \psi'))$$

où φ n'est pas une disjonction

$$dnf(A \wedge (B \wedge B')) = A \wedge B \wedge \neg B'$$

$$dnf(B \wedge B') = B \wedge \neg B'$$

$$dnf(A \wedge (B \wedge B')) = dnf(A \wedge dnf(B \wedge B'))$$

$$dnf(l \wedge l') = l \wedge l'$$

Ex 3

$A \Leftrightarrow B$

$(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)$

$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)$

a) $nnf(\neg(P \lor \neg(Q \land \neg R)))$

$\overset{def}{=} nnf(\neg P \land \neg\neg(Q \land \neg R))$

$\overset{a}{=} nnf(\neg P) \land nnf(\neg\neg(Q \land \neg R))$

$= \neg P \land nnf(Q \land \neg R)$

$= \neg P \land Q \land \neg R$

$A \Rightarrow B$

$\neg A \lor B$

b) $nnf((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$\varphi = ((\neg P \lor Q) \Leftrightarrow (\neg\neg Q \lor \neg P)))$

$= [(\neg(\neg P \lor Q)) \lor (\neg\neg Q \lor \neg P)] \land [(\neg(\neg\neg Q \lor \neg P)) \lor (\neg P \lor Q)]$

$= nnf[(\neg(\neg P \lor Q)) \lor (\neg\neg Q \lor \neg P)] \land nnf[(\neg(\neg\neg Q \lor \neg P)) \lor (\neg P \lor Q)]$

$= (nnf(\neg(\neg P \lor Q)) \lor nnf(\neg\neg Q \lor \neg P) \land (nnf(\neg(\neg\neg Q \lor \neg P)) \lor nnf(\neg P \lor Q))$

$= [(nnf(\neg\neg P) \land nnf(Q)) \lor nnf(Q \lor \neg P)] \land (nnf(\neg\neg\neg Q) \land nnf(\neg\neg P) \lor nnf(\neg P) \lor nnf(Q))$

$= [nnf(P) \land nnf(Q) \lor nnf(Q) \lor nnf(\neg P)] \land [nnf(\neg Q) \land nnf(P) \lor nnf(\neg P) \lor nnf(Q)]$

$= [(P \land Q) \lor (Q \lor \neg P)] \land [(\neg Q \land P) \lor (\neg P \lor Q)]$

φ est satisfiable s'il existe I une interprétation telle que $I \models \varphi$

φ est valide si pour interprétation I, $I \models \varphi$
On note $\models \varphi$

$\top = P \vee \neg P$

$\bot = P \wedge \neg P$

$\varphi \Rightarrow \psi = \neg \varphi \vee \psi$

$\varphi \Leftrightarrow \psi = (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$

$= (\neg \varphi \vee \psi) \wedge (\neg \psi \vee \varphi)$

distributivité

$\varphi \wedge (\psi \vee \psi') = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi')$

$\varphi \vee (\psi \wedge \psi') = (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \psi')$

Implication

$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg \psi \Rightarrow \neg \varphi)$

curryfication $((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi') \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \psi'))$