1) Distributivité :

$(x \wedge y) \vee z \;\dashv\vdash\; (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ 1ère loi

$(x \vee y) \wedge z \;\dashv\vdash\; (x \wedge z) \vee (y \vee z)$ 2ème loi

$x \vee (y \wedge z) \;\dashv\vdash\; (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$x \wedge (y \vee z) \;\dashv\vdash\; (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) De Morgan

$\neg(x \wedge y) \;\dashv\vdash\; \neg x \vee \neg y$ 1ère loi

$\neg(x \vee y) \;\dashv\vdash\; \neg x \wedge \neg y$ 2ème loi

Ex 3

1) Je serai heureux : x

J'étudie la logique : y

Si y, alors x $\quad y \Rightarrow x$

$x \Leftarrow y$ ou $y \Rightarrow x$

Ex2 : Induction

Soit p une formule

$N(p)$: nombre de variables de la formule p

$A(p)$: nombre de parenthèses dans p

1) $N(x) = 1$ pour $x \in V$

2) $N(\neg p) = N(p)$

3) $N((p \wedge q)) = N(p) + N(q) = 2$

4) $N((p \vee q)) = N(p) + N(q) = 2$

① $A(x) = 0$

② $A(\neg p) = A(p)$

③ $A((p \wedge q)) = 2 + A(p) + A(q)$

④ $A((p \vee q)) = 2 + A(p) + A(q)$

2) Pour tout $p \in$ Form, on a

$P : N(p) - A(p) = 1$

On montre cette propriété par induction structurelle

① Si $x \in V$, on montre que :

$$N(x) - A(x) \leq 1$$

On a alors

$$N(x) = 1 \qquad A(x) = 0$$

$$\underbrace{N(x)}_{1} - \underbrace{A(x)}_{0} = 1 \leq 1$$

② On suppose que $P \in$ Form et p satisfait P

On doit montrer que $\neg p$ satisfait aussi P

$N(\neg p) - A(\neg p) = N(p) - A(p)$ (par def)

$N(\neg p) - A(\neg p) = N(p) - A(p) \leq 1$

③ On suppose que $P \in$ Form et p satisfait P

On doit montrer que $\neg p$ satisfait aussi P

$$N((p \wedge q)) - A((p \wedge q))$$
$$= N(p) + N(q) - (2 + A(p) + A(q))$$
$$= N(p) + N(q) - 2 - A(p) - A(q)$$
$$= \underbrace{N(p) - A(p)}_{\leq 1} + \underbrace{N(q) - A(q)}_{\leq 1} - 2$$

$= \quad \leq 0 \quad$ donc $\quad \leq 1$

Controle Info 3

Ex 1

1) Distributivité :

$(x \wedge y) \vee z \models\!\mid (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ 1ère loi

$(x \vee y) \wedge z \models\!\mid (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ 2ème loi

$x \vee (y \wedge z) \models\!\mid (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$x \wedge (y \vee z) \models\!\mid (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) De Morgan

$\neg(x \wedge y) \models\!\mid \neg x \vee \neg y$ 1ère loi

$\neg(x \vee y) \models\!\mid \neg x \wedge \neg y$ 2ème loi

Ex 2

$x \to y = \neg x \vee y$

a) Correct

Car $(x \wedge \neg x)$ est contradiction

$(x \wedge \neg x) \longrightarrow \neg((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z))$

$= \underbrace{(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)}_{\text{tjrs vrai}} \vee \underbrace{(x \wedge \neg x)}_{\text{contradiction}}$

b) $\{x, \neg x, \neg y, \neg x \vee z\} \models x \wedge z$

$\{x, \neg y, \neg x \vee z\}$

$= x \wedge \neg y \wedge (\neg x \vee z) \models x \wedge z$

$x \wedge \neg y \wedge (\neg x \vee z)$

$\dashv\models (x \wedge \neg y \wedge \neg x) \vee (x \wedge \neg y \wedge z)$

$\dashv\models x \wedge \neg y \wedge z$

La seule valuation pour laquelle $x \wedge \neg y \wedge z$ est true est $u\,[x \to 1, y \to 0, z \to 1]$

Correct

$[\![x \wedge z]\!]_u = 1$

Alors $\{x, \neg y, \neg x \vee z\} \models x \wedge z$

c) Faux

Si q est falsifiable

$\exists u$ tq $[\![p]\!]_u = 1$ mais $[\![q]\!]_u = 0$