Foujhali@irif.fr

TD 1. Logique propositionnelle, équivalence, et conséquence

Rappelons que l'on se munit d'un ensemble dénombrable $\mathcal{P}_0$ de propositions, et que l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles est défini par la syntaxe abstraite

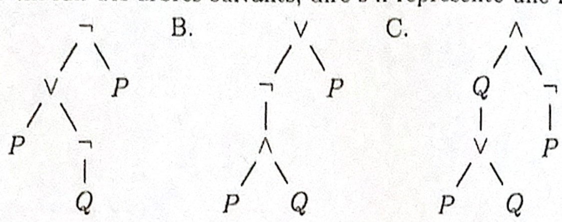
$$\varphi ::= P \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi$$

où $P \in \mathcal{P}_0$. La notation $\phi \Rightarrow \psi$ est une abréviation de $\neg\phi \vee \psi$, et $\phi \Leftrightarrow \psi$ est une abréviation de $(\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)$. Dans tout ce qui suit, P, Q, R dénotent des éléments de $\mathcal{P}_0$, et φ, ψ des éléments de $\mathcal{F}$.

Exercice 1. Syntaxe abstraite

Pour chacun des arbres suivants, dire s'il réprésente une formule propositionnelle. Justifier.

A. B. C.



Exercice 2. Syntaxe concrète

Pour chacun des cas ci-dessous, dire si l'expression dénote sans ambiguïté une formule propositionnelle, et le cas échéant, dessiner le ou les arbre(s) de syntaxe abstraite correspondant(s).

A. $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P$ B. $R \wedge \neg(P \vee Q \wedge \neg R)$

Exercice 3. Pièges des langues naturelles

Formaliser les énoncés suivants (écrits en langue naturelle) en logique propositionnelle. Notez qu'il y a parfois plusieurs réponses possibles, en fonction de votre interprétation de l'énoncé.

(a) « Le matin, il boit un café serré avec une tartine, ou parfois un thé. »

(b) « Si Paris est la capitale de la France, alors la Terre est ronde. »

(c) « Si Rome est la capitale de la France, alors la Terre est ronde. »

(d) « Si la Terre n'est pas ronde, je veux bien manger mon chapeau. »

Rappel. Une formule φ est *valide* si toute interprétation satisfait φ, et *satisfiable* s'il existe une interprétation qui satisfait φ.

Exercice 4. Validité et satisfiabilité

Pour chacune des formules propositionnelles φ suivantes, dire si la formule est valide et/ou satisfiable, et le cas échéant, donner une interprétation I telle que $[\![\varphi]\!]^I = 1$.

A. $Q \vee \neg Q$

B. $\neg(P \wedge \neg Q)$

C. $(P \Rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$

Rappel. Une formule ψ est une *conséquence* de φ si toute interprétation qui satisfait φ satisfait aussi ψ. On le note $\varphi \models \psi$. Pour des formules de la logique propositionnelle, $\varphi \models \psi$ si pour chaque ligne dans la table de vérité de φ qui contient la valeur 1 dans la colonne φ, la ligne correspondante dans la table pour ψ contient la valeur 1 dans la colonne ψ.
Deux formules φ et ψ sont *équivalentes* si $\varphi \models \psi$ et $\psi \models \varphi$. Pour des formules de la logique propositionnelle, cela veut dire que exactement les mêmes lignes contiennent la valeur 1 dans la colonne de φ que dans la colonne de ψ.

Exercice 5. Équivalences et conséquences logiques

Pour chaque couple de formules φ, ψ dans la liste suivante, écrire leur tables de vérité, et dire lequel des énoncés suivants est vrai :

A. les formules φ et ψ sont équivalentes,

B. $\varphi \models \psi$ et $\psi \not\models \varphi$,

C. $\varphi \not\models \psi$ et $\psi \models \varphi$,

D. $\varphi \not\models \psi$ et $\psi \not\models \varphi$.

1. $P \Rightarrow Q$, $\neg Q \Rightarrow \neg P$
2. $P \wedge (\neg Q \vee R)$, $(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$
3. $P \Rightarrow Q$, $P \Rightarrow (Q \vee R)$

Exercice 6. Combinaisons de formules valides et satisfiables

Soient φ et ψ deux formules propositionnelles.

(a) Montrer que φ et ψ sont valides si et seulement si la formule $\varphi \wedge \psi$ est valide.

(b) Si $\varphi \vee \psi$ est valide, est-ce qu'on peut en déduire que φ est valide ou ψ est valide ? Montrez ou donnez un contre-exemple.

(c) Si φ et ψ sont satisfiables, que peut-on dire de $\varphi \vee \psi$ et de $\varphi \wedge \psi$?

Exercice 7. Syntaxe étendue

Soit la fonction booléenne « nor » $\downarrow$ à deux arguments définie par $0 \downarrow 0 = 1$ et $0 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 1 \downarrow 1 = 0$. On étend la syntaxe abstraite des formules propositionnelles en permettant d'utiliser ce nouvel opérateur. Soient φ et ψ des formules propositionnelles.

(a) Exprimer $\varphi \downarrow \psi$ de manière équivalente en utilisant uniquement les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

(b) Exprimer $\neg\varphi$ de manière équivalente en utilisant uniquement le connecteur $\downarrow$.

(c) Exprimer $\varphi \vee \psi$ de manière équivalente en utilisant uniquement le connecteur $\downarrow$.

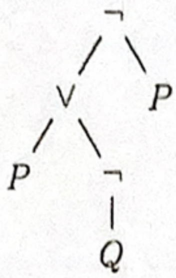
Exo1:

1)

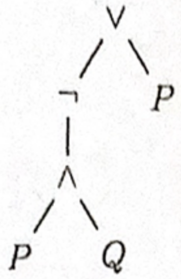
Exercice 1. Syntaxe abstraite

Pour chacun des arbres suivants, dire s'il réprésente une formule propositionnelle. Justifier.

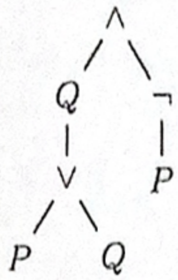
A.



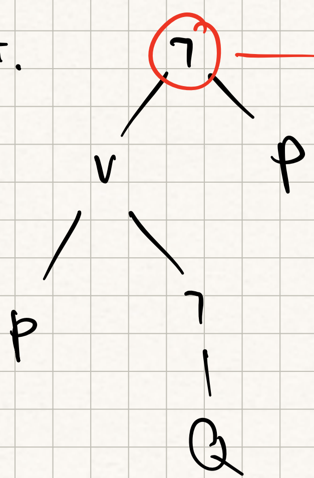
B.



C.



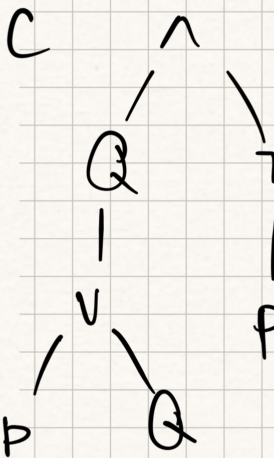
A.



Non. Le $\neg$ est unaire (unité 1)

B. $\neg(P \wedge Q) \vee P$ Oui

C



Non. Q est une proposition elle doit être une feuille

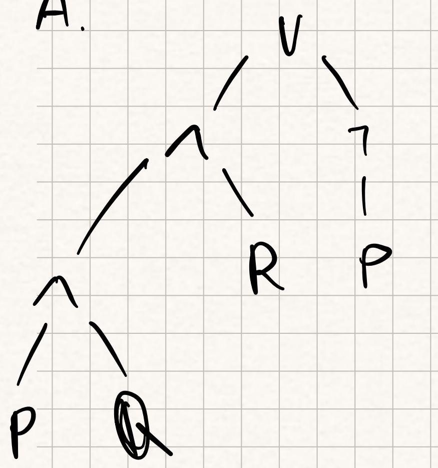
Ex2

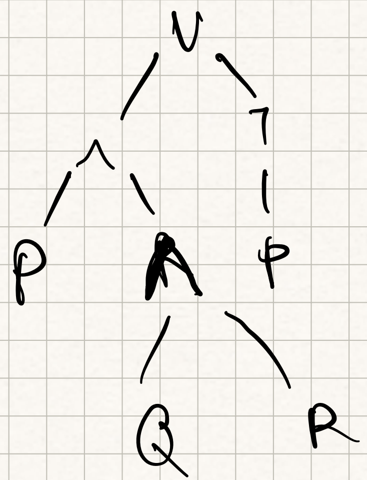
Exercice 2. Syntaxe concrète

Pour chacun des cas ci-dessous, dire si l'expression dénote sans ambiguïté une formule propositionnelle, et le cas échéant, dessiner le ou les arbre(s) de syntaxe abstraite correspondant(s).

A. $(P \land Q \land R) \lor \neg P$ B. $R \land \neg(P \lor Q \land \neg R)$

A.





formule sans ambiguïté (sémantique)

On obtient tjrs les même valeurs de vérité

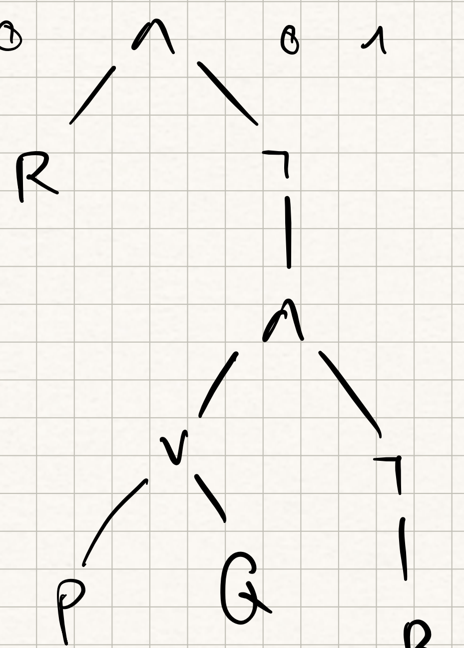
$((P \land Q) \land R) \lor \neg P$ $(P \land (Q \land R) \lor \neg P$

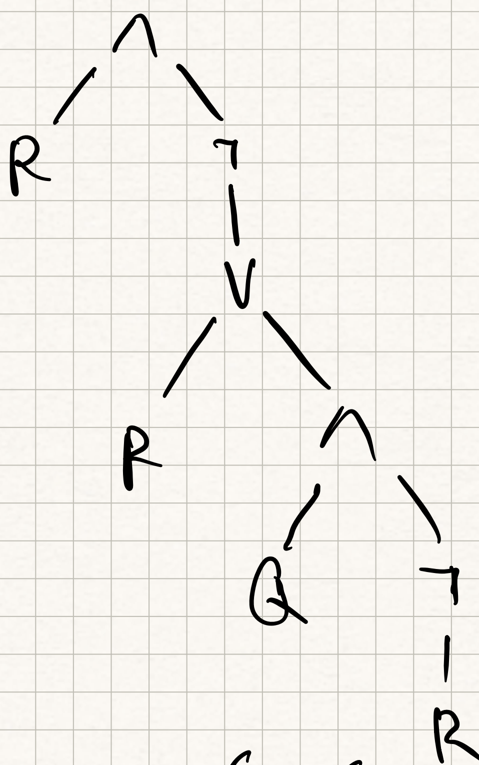
B. $R \land \neg(P \lor Q \land \neg R)$

0 1 0 0

1

0 0 1 0





$R \land \neg((P \lor Q) \land \neg R)$

$I = \{1/P,\ 0/Q,\ 1/R\}$

$R \land \neg(P \lor (Q \land \neg R))$

1 1 0 1

$[\![\varphi_1]\!]^I = 0$ $\qquad$ $[\![\varphi_2]\!]^I = 1$

$\Rightarrow$ On a bien une ambiguïté.

Ex 3

a) P : il boit un café serré

Q : avec une tartine

R : boit un thé

$(P \land Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land R)$ sens exclusif

$(P \land Q) \lor (Q \land R)$ sens ou inclusif

$(P \land Q \land \neg R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R)$ "avec une tartine se rapporte uniquement au café"

sens ou exclusif

$(P \land Q) \lor (\neg Q \land R)$ "avec une tartine se rapporte au café ou au thé"

sens ou inclusif

b) P : P est capitale de la France

Q : La terre est ronde

$P \Rightarrow Q$ $\qquad$ $P \Rightarrow Q \overset{def}{=} \neg P \lor Q$

c) P: Rome est capitale de la France

Q: La terre est ronde

$P \Rightarrow Q$

d) P: Terre est ronde

Q: je veux bien

$\neg P \Rightarrow Q$

Ex 4

A. $Q \vee \neg Q$ $\quad [\![\varphi]\!]^I = 1$

Q	$\neg Q$	
1	0	= 1
0	1	= 1

valide et satisfiable

B $\neg(P \wedge \neg Q)$ $\quad [\![\varphi]\!]^I = 1$

P	Q	
0	1	
0	0	= 1 ✓
1	0	= 0

Satisfiable $I = [\![0/P, 1/Q]\!]$

Non valide $I = [1/P, 0/Q]$

pas valide mais satisfiable

C $(P \Rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$

$(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$

1 0 1 0

$0 \vee 0 \wedge 1 \wedge 1 = 0$ $I = [\![1/P, 0/Q]\!]$ pas satisfiable

pour toute interprétation I tq $P^I = 0$ ou $Q^I = 1$ on $[\![\varphi]\!]^I = 0$

pour I tq $P^I = 1$ et $Q^I = 0$ $[\![\varphi]\!]^I = (\text{not } [\![P]\!]^I \text{ or } [\![0]\!]^I \text{ and } [\![P]\!]^I \text{ and not } [\![Q]\!]^I = 0$

Ex 5

a ⊨ b : b est une conséquence de a si toute interprétation qui satisfait a satisfait b aussi

1) $P \Rightarrow Q$, $\neg Q \Rightarrow \neg P$

$\neg P \vee Q$, $Q \vee \neg P$

P	Q	¬P	¬Q		S1	S2
0	0	1	1	1		1
0	1	1	0	1		1
1	0	0	1	0		0
1	1	0	0	1		1

$\varphi \models \psi$ et $\psi \models \varphi$: A

2) $P \wedge (\neg Q \vee R)$, $(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$

P	Q	R	¬Q	¬R	¬Q ∨ R	S1	P ∧ ¬Q	P ∧ ¬R	S2
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1

1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0

$\varphi \not\models \psi$ et $\psi \not\models \varphi$

3) $P \Rightarrow Q$, $P \Rightarrow (Q \vee R)$ $\quad$ $\neg P \vee Q$, $\neg P \vee (Q \vee R)$

P	Q	R	$\neg P$	S_1	$Q \vee R$	S_2
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

$\psi \not\models \varphi$

B : $\underset{S_1}{\varphi} \models \underset{S_2}{\psi}$, $\underset{S_2}{\psi} \not\models \underset{S_1}{\varphi}$

Ex 6

a) démonstration

sens ($\Rightarrow$)

φ et ψ sont valides. Pour toute interprétation I

On a $[\![\varphi]\!]^I = 1$ et $[\![\psi]\!]^I = 1$

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!]^I = [\![\varphi]\!]^I \text{ and } [\![\psi]\!]^I = 1 \text{ and } 1 = 1$$

sens ($\Leftarrow$) $\varphi \wedge \psi$ est valide alors pour toute inter I on a $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^I = 1$

alors $[\![\varphi]\!]^I$ and $[\![\psi]\!]^I = 1$ donc, comme le seul cas où a and $b = 1$ est $a = 1$ et $b = 1$

On déduit $[\![\varphi]\!]^I = [\![\psi]\!]^I = 1$

b) C'est faux

Contre exemple :

$P \vee \neg P$ est valide

mais ni P ni $\neg P$ est valide

c) φ et ψ sont satisfiables

$\varphi \vee \psi$ est satisfiable. Il suffit de prendre une interprétation I qui satisfait φ ou ψ

$\varphi \wedge \psi$ n'est pas forcément satisfiable

$P \wedge \neg P$ non satisfiable alors que P est satisfiable et $\neg P$ aussi

Ex 7

Exercice 7. Syntaxe étendue

Soit la fonction booléenne « nor » $\downarrow$ à deux arguments définie par $0{\downarrow}0 = 1$ et $0{\downarrow}1 = 1{\downarrow}0 = 1{\downarrow}1 = 0$. On étend la syntaxe abstraite des formules propositionnelles en permettant d'utiliser ce nouvel opérateur. Soient φ et ψ des formules propositionnelles.

(a) Exprimer $\varphi \downarrow \psi$ de manière équivalente en utilisant uniquement les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

(b) Exprimer $\neg\varphi$ de manière équivalente en utilisant uniquement le connecteur $\downarrow$.

(c) Exprimer $\varphi \vee \psi$ de manière équivalente en utilisant uniquement le connecteur $\downarrow$.

$0 \downarrow 0 = 1$

$0 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 1 \downarrow 1 = 0$

φ	ψ	$\varphi \downarrow \psi$ $\to$ nor
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	

a) $\varphi \downarrow \psi \iff \neg\varphi \wedge \neg\psi$

$\iff \neg(\varphi \vee \psi)$

règle 1

b)

$$\neg\varphi \Leftrightarrow \neg(\varphi \vee \varphi)$$ | règle 2

$$\Leftrightarrow \varphi \downarrow \varphi$$

c)

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg(\varphi \vee \psi))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\varphi \downarrow \psi)$$ règle 1

$$\Leftrightarrow (\varphi \downarrow \psi) \downarrow (\varphi \downarrow \psi)$$