Ex1

1) $\lim_{x \to 0} \frac{2(1-\cos(x))\sqrt{1+x} - x(\ln(1+x))}{\sin(x) - x}$

DL

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$2(1-\cos(x)) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^3)$$

$$2(1-\cos(x))\sqrt{1+x}$$
$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right)$$

$$= x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\sin(x) - x = \frac{-x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\lim_{0} \frac{2(1-\cos(x))\sqrt{1+x} - x\ln(1+x)}{\sin(x) + x}$$

$$= \lim_{0} \frac{x^2 - \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}}{-\frac{x^3}{6}}$$

$$= \lim_{0} \frac{+\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2}}{\frac{-x^3}{6}} = \lim_{0} \frac{\frac{2x^3}{2}}{\frac{-x^3}{6}} = -6$$

$-$

2) $\lim\limits_{+\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x - \frac{1}{2} + o(x)$$

$$\lim_{0} x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{0} x - \left(x - \frac{1}{2} + o(x)\right)$$

$$= \lim_{0} x - x + \frac{1}{2} + o(x)$$

$$= \frac{1}{2}$$

3) $\lim_{+\infty} n^3 \dfrac{\cos(\frac{1}{n})-1}{\sqrt{n^2+2n}}$

$= \lim_{+\infty} n^3 \dfrac{\cos(\frac{1}{n})-1}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$

$= \lim_{+\infty} n^2 \dfrac{\cos(\frac{1}{n})-1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$

$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$

$\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{24n^4} + o(x^5)$

$\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 = \dfrac{-1}{2n^2} + \dfrac{1}{24n^4} + o(x^5)$

$\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$

$$\sqrt{1+\frac{2}{n}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(x^2)$$
$$= 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{+\infty} n^3 \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\sqrt{n^2 - 2n}}$$

$$= \lim_{+\infty} n^3 \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{n\sqrt{1 - \frac{2}{n}}}$$

$$= \lim_{+\infty} n^2 \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\sqrt{1 - \frac{2}{n}}}$$

$$= \lim_{+\infty} n^2 \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\sqrt{1 - \frac{2}{n}}}$$ on pose $y = n$

$$= \lim_{y \to 0^+} , \frac{\cos(y) - 1}{\sqrt{1 - y}}$$

$$= \lim_{y \to 0^+} y^2 \frac{-\frac{1}{2y^2} + o\left(\frac{1}{2y^2}\right)}{1 + \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right)}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

Ex4

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x} - \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$g(x) = (1 + x + x^2)^\alpha$$

1)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$$

$$(1+x+x^2)^\alpha = 1 + \alpha(x+x^2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(x+x^2)^\alpha + o(x^2)$$

$$= 1 + \alpha x + \alpha x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(x+x^2)^\alpha + o(x^2)$$

2)

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x} - \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$= x\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} - x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x\left[\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

$$\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3x} + \frac{2}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x)=x\left[\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= x\left(1+\frac{1}{3x}+\frac{2}{9x^2}-1-\frac{1}{2x}-\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= x\left(\frac{2}{6x}-\frac{3}{6x}+\frac{-11}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{6}-\frac{11}{72x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Alors la droite asymptote à la courbe de f en $+\infty$ est $y = \frac{-1}{6}$

3) On $f(x) - y$

$$= \frac{-11}{72} x + o\left(\frac{1}{x}\right)$$ qui est de signe de $\frac{-11}{72} x$ en $+\infty$ donc la courbe de f est en dessous de l'asymptote en $+\infty$

Ex 2 :

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mq (u_1, u_2, u_3) forment un système libre $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_2 \\ u_1 \\ u_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_2 \\ u_1 \\ u_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \\ u_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \\ u_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \\ u_3 \end{array}$$

dim = 3 , on constate ainsi que les 3 vecteurs sont libres et donc les 3 forment une système libre de $\mathbb{R}^3$

2) $\begin{array}{c|c} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$ Si on rajoute ligne u_4 à notre matrice et on suit les opérations par la 4eme ligne jusqu'à la 4 deviennent nulle

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} u_2 \\ u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 \times (-1)} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -u_2 \\ u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -u_2 \\ u_1 - 2u_2 \\ u_3 - 2u_2 \\ u_4 + u_2 \end{matrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -u_2 \\ 2u_2 - u_1 \\ u_3 - 2u_2 \\ u_4 + u_2 \end{array}$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_2]{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -u_2 \\ 2u_2 - u_1 \\ u_3 - 2u_2 + 2(2u_2 - u_1) \\ u_4 + u_2 + 2u_2 - u_1 \end{array}$$

$L_3 = u_3 + 2u_2 - 2u_1$

$L_4 = u_4 + 3u_2 - u_1$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -u_2 \\ 2u_2 - u_1 \\ u_3 + 2u_2 - 2u_1 \\ u_4 + 3u_2 - u_1 - 2(u_3 + 2u_2 - 2u_1) \end{array}$$

$$L_4 = u_4 + 3u_2 - u_1 - (2u_3 + 4u_2 - 2u_1)$$

$$= u_4 + 3u_2 - u_1 - 2u_3 - 4u_2 + 4u_1$$

$$= u_4 - 2u_3 - u_2 + 3u_1$$

Donc $u_4 - 2u_3 - u_2 + 3u_1 = 0$

$\Leftrightarrow u_4 = 2u + u_2 - 3u_1$ ce qui vérifie

par un calcul direct

3) $u_4 \in F$?

$u_4 \in G$?

On voit bien que $u_4 \notin F$ car u_4 n'est pas un multiple de u_1

$u_4 \in F$?

Dans ce cas on aurait

$-3u_1 + u_2 + 2u_3 = \lambda u_1$

$\Leftrightarrow (-3 - \lambda) u_1 + u_2 + 2u = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = -3,\ 1 = 0,\ 2 = 0$ absurde)

$u_4 \notin G$ car u_4 n'est pas une combinaison linéaire de u_2 et u_3 seulement

Dans ce cas on aurait :

$-3u_1 + u_2 + 2u_3 = au_2 + ku_3$

$\Leftrightarrow -3 = 0,\ a = 1,\ k = 2$ absurde

4) Puisque (u_1, u_2, u_3) est un système libre maximal, il forme une base de $\mathbb{R}^3$

Les coordonnées des vecteurs v_1, v_2, v_3 données dans cette base sont :

$$v_1 = u_1 + u_2$$

$$v_2 = u_2 - u_3$$

$$v_3 = u_3 + u_1$$