Déterminant d'une matrice d'une application linéaire

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

départ

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (+)(-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-)\,3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (+)\,0 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= -1 \times (-2) - 3 \times 2 + 0 = -4$

Théorème : il existe une unique application déterminant $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui vérifie :

(1) $\det(I) = 1$

(2) $\det(\_, \alpha c + \alpha' c', \_)$
$= \alpha \det(\_, c, \_) + \alpha'(\_, c', \_)$

(3) $\det(\_, c, c, \_) = 0$

Rq : $\det(\_, 0, \_) = 0$

Prop :

1) $\det(\_, C_j, \_, C_i)$
$= -\det(\_, C_i, \_, C_j, \_)$

2) $\det(\_, C, \_ C, \_) = 0$

3) $\det(\_, \lambda C, \_)$
$= \lambda \det(\_, C, \_)$

A) $\det(\_\_, C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j, \_\_)$
$= \det(\_\_, C_i, \_\_)$

Prop : Les propriétés énoncées restent vraies si on remplace "colonne" par ligne"

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_4$$

Prop : A inversible ssi $\det(A) \neq 0$

Def $A = (a_{ij})$

$^tA = (a_{ji})$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Prop : $\det({}^tA) = \det(A)$

$\det(M.N) = \det(M).\det(N)$

Rq $\det(MN) = \det(NM)$

Corollaire :

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

Prop $\det E = n$

$(v_1 \ldots v_n)$ base de E ssi

$\det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ ♡

$$\det(\underbrace{P^{-1}A}_{M}\underbrace{P}_{N}) = \det(P \cdot P^{-1}A)$$

$$= \det(I \cdot A) = \det(A)$$

Déf $\det(u) \underset{def}{=} \det(M_B(u))$ indépendant de la base B

$\square$ $B \xrightarrow{P} B'$ $\quad M_{B'}(u) = P^{-1}M_B(u)P$

$$\det(M_{B'}(u)) = \det(P^{-1}M_B(u)P)$$

$$= \det(M_B(u))$$

Prop :

1) $\det(v \circ u) = \det(v) \cdot \det(u)$

2) u bijectif ssi $\det(u) \neq 0$

Valeurs Propres - Vecteurs Propres

Déf : soit $\lambda \in \underbrace{Sp_{\mathbb{K}}(u)}_{\lambda \text{ val prop}}$

On appelle espace propre associé à λ le sev $E_\lambda = \{x ; u(x) = \lambda x\}$

Prop : λ un valeur propre de u ssi

$(u - \lambda Id_E)$ n'est pas bijective

ssi $\det(u - \lambda I_E) = 0$

Def $\lambda \longrightarrow \det(u - \lambda I)$:
polynôme caractéristique de u noté χ_u

Exemple :

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_u = \det(u - \lambda R)$$

$$= \left| M_B(a) - \lambda R \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\chi_u = (2-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda)$$