Ex 1

$$14x + 10y = 4$$

1) On calcule d'abord son $pgcd(14, 10)$

$14 = 1 \times 10 + 4$
$10 = 2 \times 4 + 2$ donc $pgcd(14, 10) = 2$
$4 = 2 \times 2 + 0$

On constate que $2 \mid 4$, l'équation admet des solutions

2) On cherche donc une solution particulière à l'équation

$14x + 10y = 2$

On a

$2 = 10 - 2 \times 4$
$2 = 10 - 2(14 - 1 \times 10)$
$2 = 10 - 2 \times 14 + 2 \times 10$
$2 = -2 \times 14 + 3 \times 10$

On a $(x_0, y_0) = (-2, 3)$

3) On cherche une solution particulière à l'équation

$14x + 10y = 4$
$14 \times (-2) \times 2 + 10 \times 3 \times 2 = 4$
$14 \times (-4) + 10 \times 6 = 4$
$(x_0, y_0) = ((-4), 6)$

4) soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, l'équation initiale est sous forme $ax + by = c$ avec $a = 14$ $b = 10$

$a = pgcd(a, b) \times a'$ $b = pgcd(a, b) \times b'$
$14 = 2 \times a'$ $10 = 2 \times b'$
$a' = 7$ $b' = 5$

L'ensemble des solutions particulière sont:

$S = \{[(-4) + 5k, 6 - 7k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Test $k = 1$

$-4 + 5 = 1$

$6 - 7 = -1$

$14 \times 1 + 10 \times (-1) = 4$ ✓

Ex3:

$$S : \begin{cases} x \equiv \overset{a}{3} \mod \overset{m}{8} \\ x \equiv \overset{b}{7} \mod \overset{n}{22} \end{cases}$$

$8 = 2^2 \times 2$

$22 = 11 \times 2$

$pgcd(8,22) = 2$

$22 = 2 \times 8 + 6$

$8 = 1 \times 6 + 2$

$6 = 2 \times 3 + 0$

$ppcm(8, 22) =$

Comme 2 divise $7 - 3 = 4$. Le système admet solutions

On applique l'algo Euclide à $(8,22)$

$8u + 22v = 2$

avec $u = 3$ $v = (-1)$

$$m' = \frac{m}{pgcd(8,22)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$n' = \frac{n}{pgcd(8,22)} = \frac{22}{2} = 11$$

Solution particulière : $x = bum' + aon'$
$$= 7 \times 3 \times 4 + 3 \times (-1) \times 11$$
$$= 84 - 33$$
$$= 51$$

Solution générales : $\{x = 51 + 88k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Ex 4

1) $4x \equiv 2 \mod 18$

$\mathrm{pgcd}(4, 18) = 2$

$18 = 4 \times 4 + 2$

$4 = 2 \times 2 + 0$

On constate que $2 \mid 2$, l'équation admet donc des solutions et est équivalente à $2x \equiv 1 [9]$

On cherche l'inverse de 2 mod 9. On a :

$$2 \times 5 \equiv 1 \mod 9$$

Donc $2x \equiv 1 \mod 9$

$\Leftrightarrow 5 \times 2x \equiv 5 \mod 9$

$\Leftrightarrow x \equiv 5 \mod 9$

$S = \{5 + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2) $4x \equiv 1 \mod 18$

$\mathrm{pgcd}(4, 18) = 2$

On constate que $2 \nmid 1$ donc l'équation admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

Ex 2 :

1) $211^{31415} \mod 53$

$211 = 3 \times 53 + 52$

Donc $211 \equiv -1 \mod 53$ et alors

$211^2 \equiv 1 \mod 53 \equiv 1 \mod 53$

Or 31415 est impair, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $314415 = 2k+1$

Ainsi

$$211^{31415} = 211^{2k+1}$$
$$= (211^2)^k \, 211$$

$$\Rightarrow (211)^{31415} \equiv (211^2)^k \, 211$$
$$\equiv 1^k \times (-1)$$
$$\equiv -1$$
$$\equiv 52 \mod 53$$

Le reste est donc 52

2) $2022^{1234567}$

On voit que 2022 est pair donc

$2022 \equiv 0 \mod 2$

$\Rightarrow 2022^{1234567} \equiv 0^{61} \equiv 0 \mod 2$

Le chiffre unité en base deux de $2022^{1234567}$ est donc 0