# Outils logiques
# TD n° 3

**Exercice 1 :**

Considérons les quatre formules suivantes :

$$p_1 = ((x \vee y) \wedge z)$$
$$p_2 = ((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z))$$
$$p_3 = ((\neg z \wedge \neg y) \vee (x \wedge y))$$
$$p_4 = (\neg(\neg x \vee y) \vee y)$$

1. Calculer l'interprétation de ces quatre formules par rapport à chacune des affectations ci-dessous :

$$v_1 = [x \mapsto 1, y \mapsto 1] \quad v_2 = [x \mapsto 1, z \mapsto 1] \quad v_3 = [y \mapsto 1, t \mapsto 1]$$

2. Dire lesquelles de ces quatres formules sont satisfaisables/falsifiables/valides/contradictoires.

**Exercice 2 :**

**(Preuve d'une proposition du cours)** Soit $p$ une formule propositionnelle et $v_1, v_2$ des affectations telles que $v_1(x) = v_2(x)$ pour toute variable $x \in \mathcal{V}(p)$. Montrer que $[\![p]\!]v_1 = [\![p]\!]v_2$.

**Exercice 3 :**

**(Partiel 2011)** On rappelle la définition de l'ensemble $\mathcal{V}(p)$ des variables d'une formule propositionnelle :

- $\mathcal{V}(x) = \{x\}$, pour $x \in V$.
- $\mathcal{V}(\neg p) = \mathcal{V}(p)$.
- $\mathcal{V}((p \wedge q)) = \mathcal{V}((p \vee q)) = \mathcal{V}(p) \cup \mathcal{V}(q)$.

Une *affectation finie* pour $p$ est une fonction de $\mathcal{V}(p)$ dans $\{0, 1\}$. Si $\mathcal{V}(p)$ a $n$ éléments, il existe $2^n$ affectations finies pour $p$. Par exemple, les 4 affectations finies pour la formule $\neg(x_1 \wedge x_2)$ sont données sous forme de tableau ci dessous :

| $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 1 | 1 |

Une formule $p$ qui vaut 1 par rapport à toutes ses affectations finies est une tautologie [1], et une formule qui vaut 0 par rapport à toutes ses affectations finies est une contradiction. Nous dirons qu'une formule est *instable* si elle vaut 1 par rapport à la moitié de ses affectations finies, et 0 par rapport à l'autre moitié [2].

1. Pour la précision, il faudrait dire que $p$ vaut 1 par rapport à toutes les extensions possibles de chacune de ses affectations finies.

2. Remarquer que le nombre d'affectation finies d'une formule est toujours pair.

1. Montrer que $((x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3))$ est instable.
2. Donner un exemple *aussi simple que possible* d'une formule instable.
3. Montrer que la négation d'une formule instable est instable.
4. Donner un exemple de deux formules instables dont la disjonction est une tautologie, et de deux formules instables dont la conjonction est une contradiction.

**Exercice 4 :**
**(partiel 2012)** Si $v$ est une affectation, $\overline{v}$ désigne l'affectation complémentaire de $v$, autrement dit :

$$\overline{v}(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; v(x) = 1 \\ 1 & si \;\; v(x) = 0 \end{cases}$$

Par exemple, le complémentaire de l'affectation qui envoie toutes les variables vers 0 est l'affectation qui envoie toutes les variables vers 1, et le complémentaire de l'affectation $[x \mapsto 1, y \mapsto 1]$ est l'affectation qui envoie $x$ et $y$ vers 0 et toutes les autres variables vers 1.
Nous dirons qu'une formule propositionnelle $p$ est *auto-duale* si, pour toute affectation $v$, $[\![p]\!]v = [\![p]\!]\overline{v}$. Par exemple, on voit facilement que si $x$ est une variable propositionnelle, alors la formule $x$ n'est pas auto-duale : pour le montrer, il suffit de considérer les affectations complémentaires $[x \mapsto 1]$ et $\overline{[x \mapsto 1]}$, et de remarquer que $[\![x]\!][x \mapsto 1] = 1$ et $[\![x]\!]\overline{[x \mapsto 1]} = 0$
Pour chaque formule de la liste suivante, dire s'il s'agit d'une formule auto-duale ou pas (justifier vos réponses[3]) :

1. $x \vee y$
2. $(x \vee \neg x)$
3. $\neg(\neg x \wedge y)$
4. $((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y))$

Pour chaque énoncé de la liste suivante, dire s'il est vrai, et dans ce cas donner une preuve, ou faux, et dans ce cas donner un contre-exemple :

1. Si $p$ est auto-duale, $\neg p$ l'est aussi.
2. Si $p$ est auto-duale et $q$ une formule quelconque, $(q \rightarrow p)$ est auto-duale.

3. Comprendre de quelle manière on peut déduire l'auto-dualité (ou la non auto-dualité) d'une formule à partir de sa table de vérité est la clef pour répondre correctement à cette série de questions.

Ex 1

$p_1 = ((x \vee y) \wedge z)$

$p_2 = ((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z))$

$p_3 = ((\neg z \wedge \neg y) \vee (x \wedge y))$

$p_4 = (\neg(\neg x \vee y) \vee y)$

$v_1 = [x \mapsto 1, y \mapsto 1]$

$v_2 = [x \mapsto 1, z \mapsto 1]$

$v_3 = [y \mapsto 1, t \mapsto 1]$

$[\![ p_1 ]\!] v_1 = [\![ ((x \vee y)) \wedge Z) ]\!]$
$= 0$

car $[\![ z ]\!] v_1 = 0$

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | Satis | falsi | valide | cont |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1 = ((x \vee y) \wedge z)$ | 0 | 1 | 0 | oui | oui | non | non |
| $p_2 = ((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z))$ | 0 | 0 | 0 | oui* | oui | non | non |
| $p_3 = ((\neg z \wedge \neg y) \vee (x \wedge y))$ | 1 | 0 | 0 | oui | oui | non | non |
| $p_4 = (\neg(\neg x \vee y) \vee y)$ | 1 | 1 | 1 | oui | oui* | non | non |

* pour l'affectation $v_4[\,]$ on a $[\![ p_2 ]\!]_{v_4} = 1$

* Pour $[\![ P_4 ]\!]_{v_4} = 0$

Ex2 : On reformule la définition de $[\![p]\!]_v$

On considère 3 fonctions

$$\text{Non} : \{0,1\} \to \{0,1\}$$
$$\text{ET} : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$
$$\text{OU} : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

définies selon la définition de la négation /conjonction /et disjonctive

On définit inductivement $[\![p]\!]_v$

$$[\![x]\!]_v = v(x)$$
$$[\![\neg p]\!]_v = \text{Non}([\![p]\!]_v)$$
$$[\![(p \wedge q)]\!]_v = \text{ET}([\![p]\!]_v, [\![q]\!]_v)$$
$$[\![(p \vee q)]\!]_v = \text{OU}([\![p]\!]_v, [\![q]\!]_v)$$

On prouve la prop par induction structurelle

① Soit $p = x$ $\quad [\![x]\!]_{v_1} = v_1(x) = v_2(x) = [\![x]\!]_{v_2}$

$$x \in \mathcal{V}(p)$$

Prop : Soit $p$ une formule prop et $v_1, v_2$ deux affectation telles que

$V_1(x) = V_2(x)$

pour $x \in \mathcal{V}(p)$. Alors, $[\![p]\!]_{v_1} = [\![p]\!]_{v_2}$

② $[\![\neg p]\!]_{v_1} = \text{Non}([\![p]\!]_{v_1})$

$= \text{Non}([\![p]\!]_{v_2})$

$= [\![\neg p]\!]_{v_2}$

③ $[\![(p \vee q)]\!]_{v_1} = \text{ET}([\![p]\!]_{v_1}, [\![q]\!]_{v_2})$

$= \text{ET}([\![p]\!]_{v_2}, [\![q]\!]_{v_2})$

$= [\![(p \wedge q)^{v_2}]\!]$

# Ex 3

1) $((x_1 \lor x_2) \land (\neg x_1 \lor x_3)) = F$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\neg x_1$ | $x_1 \lor x_2$ | $\neg x_1 \lor x_3$ | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 — |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 — |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 — |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 — |

4 affectation qui rendent la formule vrai
4 qui la rendent fausse

2) Donner un exemple aussi simple que possible d'une formule instable

ex $(x \lor \neg x)$ 1 0

instable instable

ex $(x \land \neg x)$

# Ex 4

$v = [x \mapsto 1]$ $\bar{v} = [\,]$

$[\![ x ]\!] v = 1$ $[\![ x \land \bar{x} ]\!] v = 0$

$[\![ x ]\!] \bar{v} = 0$ $[\![ x \land \bar{x} ]\!] v = 0$

1) $x \lor y$ Formule auto-duale

Pour des formules à 2 variables $\{x, y\}$

On a 4 affectations différents

$v_1 = [\,]$ correspond à $[x \mapsto 0, y \mapsto 0]$

$v_2 = [x \mapsto 1]$ correspond à $[x \mapsto 1, y \mapsto 0]$

$v_3 = [y \mapsto 1]$ ———— $[x \mapsto 0, y \mapsto 1]$

$v_4 = [x \mapsto 1, y \mapsto 1]$

$\overline{v_1} = v_4 \quad \overline{v_2} = v_3 \quad \overline{v_3} = v_2 \quad \overline{v_4} = v_1$

| | | | | auto-duale | pas auto-d | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x \vee y$ | $\wedge$ | $x \vee \neg x$ | $\neg(\neg x \wedge y)$ | $((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y))$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | $\boxed{1}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

pas auto duale

1. Si $p$ est auto-duale, $\neg p$ l'est aussi

2. Si $p$ est auto-duale et $q$ une formule quelconque $(q \to p)$ est auto-duale

$NON(0) = 1$
$NON(1) = 0$

1) Si on a

$$[\![p]\!]_v = [\![p]\!]_{\overline{v}}$$

$$[\![\neg p]\!]_v = NON([\![p]\!]_v) \text{ par def}$$

$$= NON([\![p]\!]_{\overline{v}})$$

$$= [\![\neg p]\!]_{\overline{v}} \text{ par def}$$

2) Faux : Contre exemple

On choisit

$p = (x \wedge \neg x)$ auto duale

$q = x$

| $x$ | $p$ | $q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

$$\boxed{\begin{array}{c} q \to p \\ 1 \\ 0 \end{array}}$$