1, 2 → 6

13 3, 4*

Vecteur 2ex①

+ Famille libre
+ Génératrice
+ Compléter base
+ Intersection et somme
+ Dépendance entre vecteur

ex 9-10 TD4

n③ tan(x) DL

DL 2ex① td 1-3

lim et équivalence

$$\dim E+F = \dim E + \dim F - \underbrace{\dim E \cap F}$$

Ex 9 TD4*

famille génératrice le sys d'équation

compléter en base R^4 à la fin

$$\frac{o(x)}{x} = 0$$

$$(a+b)^{x}$$

$$= \exp(x \ln(a+b))$$

relation dépendance

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

Formule de Taylor

Examen Partiel

20 Novembre 2021

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, téléphones portables et montres connectées.

Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée sur la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée.

***Exercice* 1 :** Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(1-\cos(x))\sqrt{1+x} - x\ln(1+x)}{\sin(x)-x}$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ pour $u_n = n^3\, \dfrac{\cos(\frac{1}{n})-1}{\sqrt{n^2+2n}}$

***Exercice* 2 :** On considère les vecteurs $u_1 = (-2;1;0), u_2 = (-1;1;0), u_3 = (-2;0;1)$, $u_4 = (1,-2,2)$.

On considère F le sous-espace engendré par u_1 et G le sous-espace engendré par u_2, u_3.

(1) Montrer que (u_1, u_2, u_3) forment un système libre de $\mathbb{R}^3$.

(2) Trouver une relation de dépendance linéaire entre les quatre vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4).

(3) Le vecteur u_4 appartient-il à F ? Appartient-il à G ?

(4) La famille $(u_1+u_2, u_2-u_3, u_3+u_1)$ est-elle libre ?

***Exercice* 3 :** On considère les vecteurs $u_1 = (0;4;1;0); u_2 = (-3;-3;0;1), v_1 = (-3;1;1;1)$, $v_2 = (6;2;-1;-2), v_3 = (3;11;2;-1)$

On considère $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0\}$, G le sous-espace engendré par u_1, u_2 et H le sous-espace engendré par v_1, v_2, v_3.

(1) Donner les dimensions de G et H.

(2) Donner une base de F puis sa dimension.

(3) Compléter la base trouvée de F en une base de $\mathbb{R}^4$.

(4) Donner un système d'équations de G.

(5) Montrer que $H \subset G$. A-t-on $H = G$?

***Exercice* 4 :** On considère les fonctions $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x} - \sqrt{x^2+x+1}$ et $g(x) = (1+x+x^2)^\alpha$ avec α un réel quelconque.

(1) Donner le développement limité de g en 0 à l'ordre 2.

(2) En déduire l'équation d'une droite asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

(3) Donner la position de la courbe de f par rapport à l'asymptote en $+\infty$.

Barème indicatif : Exercice 1 (1,5+1,5+1,5=4,5 points). Exercice 2 (1+1,5+1+1=4,5 points). Exercice 3 (2+1+1+2+1= 7 points). Exercice 4 (1+2+1=4 points)

Éléments de correction pour le partiel MI3

du 20/11/21

Ex 1.

(1) On a

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$2\sqrt{1+x} = 2 + x + o(x)$$

$$x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

et $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)\sqrt{1+x} - x\ln(1+x)}{\sin x - x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} + \frac{x^3}{2} - \cancel{x^2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\varepsilon_1(x)}{-\frac{1}{6}+\varepsilon_2(x)} = -6$$

car $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

(2) $\lim_{x\to\infty} \left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1}{y} - \frac{\ln(1+y)}{y^2}\right)$

On $\frac{\ln(1+y)}{y^2} = \frac{y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \varepsilon(y)$

avec $\lim_{y\to 0} \varepsilon(y) = 0$.

Alors $\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1}{y} - \frac{\ln(1+y)}{y^2}\right) = \frac{1}{2} = \lim_{x\to +\infty}\left(x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

(3) Si $u_n = n^3\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ alors

$u_n = f(n)$ pour $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2x}}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\cos(y)-1}{y^3}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y - 1}{y^2\sqrt{1+2y}}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{-\frac{y^2}{2} + o(y^2)}{y^2(1+y+o(y))} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}+\varepsilon(y)}{1+y+o(y)} = -\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} u_n$$

Ex 2 On a $F = \mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Vect}((-2\,;1\,;0))$ et

$G = \mathrm{Vect}(u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(\,(-1\,;1\,;0)\,;(-2\,;0\,;1)\,)$

(1) Si on échelonne la matrice comportant les vecteurs u_1, u_2, u_3 en lignes on obtient

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3+2L_1]{L_2+2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3+2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Cela signifie que $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 3$ et que donc ces 3 vecteurs forment un système libre de $\mathbb{R}^3$.

(2) Si on rajoute une quatrième ligne u_4 à notre matrice et on suit les opérations subies par la 4-ème ligne avant de devenir nulle on trouve bien la relation entre u_1, u_2, u_3 et u_4 :

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} u_2 \\ u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_1} \begin{array}{c} -u_2 \\ u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 - L_1]{L_2+2L_1,\ L_3+2L_1} \begin{array}{c} -u_2 \\ u_1-2u_2 \\ u_3-2u_2 \\ u_4+u_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_2} \begin{array}{c} -u_2 \\ 2u_2-u_1 \\ u_3-2u_2 \\ u_4+u_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4+L_2]{L_3+2L_2}$$

$$\begin{array}{c} -u_2 \\ 2u_2-u_1 \\ u_3+2u_2-2u_1 \\ u_4+3u_2-u_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4-2L_3} \begin{array}{c} -u_2 \\ 2u_2-u_1 \\ u_3+2u_2-2u_1 \\ u_4-2u_3-u_2+3u_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $u_4 - 2u_3 - u_2 + 3u_1 = 0$ ou encore $u_4 = -3u_1 + u_2 + 2u_3$ ce qui se vérifie par un calcul direct.

3) On voit bien que $u_4 \notin F$ car u_4 n'est pas un multiple de u_1 (dans ce cas on aurait $-3u_1 + u_2 + 2u_3 = \lambda u_1 \iff (-3-\lambda)u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \iff \lambda = -3,\ 1 = 0,\ 2 = 0$ absurde) et aussi que $u_4 \notin G$ car u_4 n'est pas une combinaison linéaire de u_2 et u_3 seulement (dans ce cas on aurait $-3u_1 + u_2 + 2u_3 = a u_2 + b u_3 \iff -3 = 0,\ a = 1,\ b = 2$ absurde).

4) Puisque (u_1, u_2, u_3) est un système libre maximal, il forme une base de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées des vecteurs v_1, v_2, v_3 données dans cette base sont (écrits en lignes)

$$\begin{array}{c} v_1 = u_1 + u_2 \\ v_2 = u_2 - u_3 \\ v_3 = u_1 + u_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En échelonnant cette matrice en lignes on obtient rapidement

$$\xrightarrow{(L_3-L_1)} \begin{array}{c} \\ \\ v_3-v_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3+L_2} \begin{array}{c} \\ \\ v_3-v_1+v_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que $rg(u_1+u_2,\ u_2-u_3,\ u_3+u_1)=2$ donc que cette famille n'est pas libre.

En effet $v_3-v_1+v_2=0 \iff -(u_1+u_2)+(u_2-u_3)+(u_3+u_1)=0$.

Ex 3.

1) On a clairement $rg(u_1,u_2)=2$ car $\lambda u_1+\mu u_2=0$
$\iff -3\mu=0,\ 4\lambda-3\mu=0 \iff \lambda=\mu=0$.

Donc $\dim G=2$.

Ensuite on échelonne
$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 11 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2+2L_1}$$

$$\begin{array}{c} \\ v_2+2v_1 \\ v_3+v_1 \end{array}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-3L_2} \begin{array}{c} \\ \\ v_3-3v_2-5v_1 \end{array}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que $rg(v_1,v_2,v_3)=2=\dim H$
(car $v_3=5v_1+3v_2\in Vect(v_1,v_2)$ donc $H=Vect(v_1,v_2)$).

2) On a $F=\left\{\begin{pmatrix} x \\ 2x+4z+3t \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle|\ x,z,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix} \middle|\ x,z,t\in\mathbb{R}\right\}$

$=Vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}}_{w_1};\underbrace{\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix}}_{w_2};\underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}}_{w_3}\right)$ et $rg(w_1,w_2,w_3)=3$ car les 3 lignes de la matrice échelonnée sont indépendantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-\frac{3}{4}L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Donc (w_1, w_2, w_3) est une base de F et $\dim F = 3$, ce qui est normal car il est donné par une équation (= une contrainte = un degré de liberté en moins) dans $\mathbb{R}^4$!

3) Le travail fait en 2) indique aussi que l'on peut compléter (w_1, w_2, w_3) avec $e_4 = (0; 0; 0; 1)$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$ car l'échelonnement de la matrice $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$ aboutit à une matrice triangulaire supérieure inversible $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Pour un système d'équations de G on peut échelonner

$$\begin{array}{c} u_2 \\ u_1 \\ u \end{array}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 + \frac{x}{3} L_1]{} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & y-x & z & t+\frac{x}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 - \frac{y-x}{4} L_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z - \frac{y-x}{4} & t + \frac{x}{3} \end{pmatrix}$$

. On sait que $u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ ssi la dernière ligne de cette matrice est nulle ssi

$4z - y + x = 3t + x = 0$ ce qui constitue un système d'équations pour G : $\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x + 3t = 0 \end{cases}$

(on vérifie par calcul direct que les coordonnées de u_1 et u_2 vérifient bien ces équations).

5) On voit que $v_1, v_2, v_3 \in G$ car leurs coordonnées vérifient le système définissant G. Alors $H \subset G$.

Par égalité des dimensions on a bien $H = G$.

Ex 4 :

1) $g(x) = (1+x+x^2)^{\alpha} \underset{0}{=} 1 + \alpha(x+x^2) + \alpha(\alpha-1)\frac{(x+x^2)^2}{2} + o(x^2)$

(car $(1+X)^{\alpha} = 1 + \alpha X + \alpha(\alpha-1)\frac{X^2}{2} + o(X^2)$ et pour $X = x+x^2$ on a bien $\lim_{x\to 0} X = 0$)

Alors le DL demandé est $g(x) \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \alpha x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

$\underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^2 + o(x^2)$.

2) En posant $y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0^+$ on a $f(x) = g(y) \underset{0^+}{=}$

$= \sqrt[3]{\frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}} - \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1} = \frac{\sqrt[3]{1+y+y^2} - \sqrt{1+y+y^2}}{y}$

On utilise alors la question 1 avec $\alpha = \frac{1}{3}$ pour le DL $\sqrt[3]{1+y+y^2}$ en 0 à l'ordre 2

$(1+y+y^2)^{\frac{1}{3}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{3}y + \frac{2}{9}y^2 + o(y^2)$ et avec $\alpha = \frac{1}{2}$ pour le DL de $\sqrt{1+y+y^2}$ en 0 à l'ordre 2

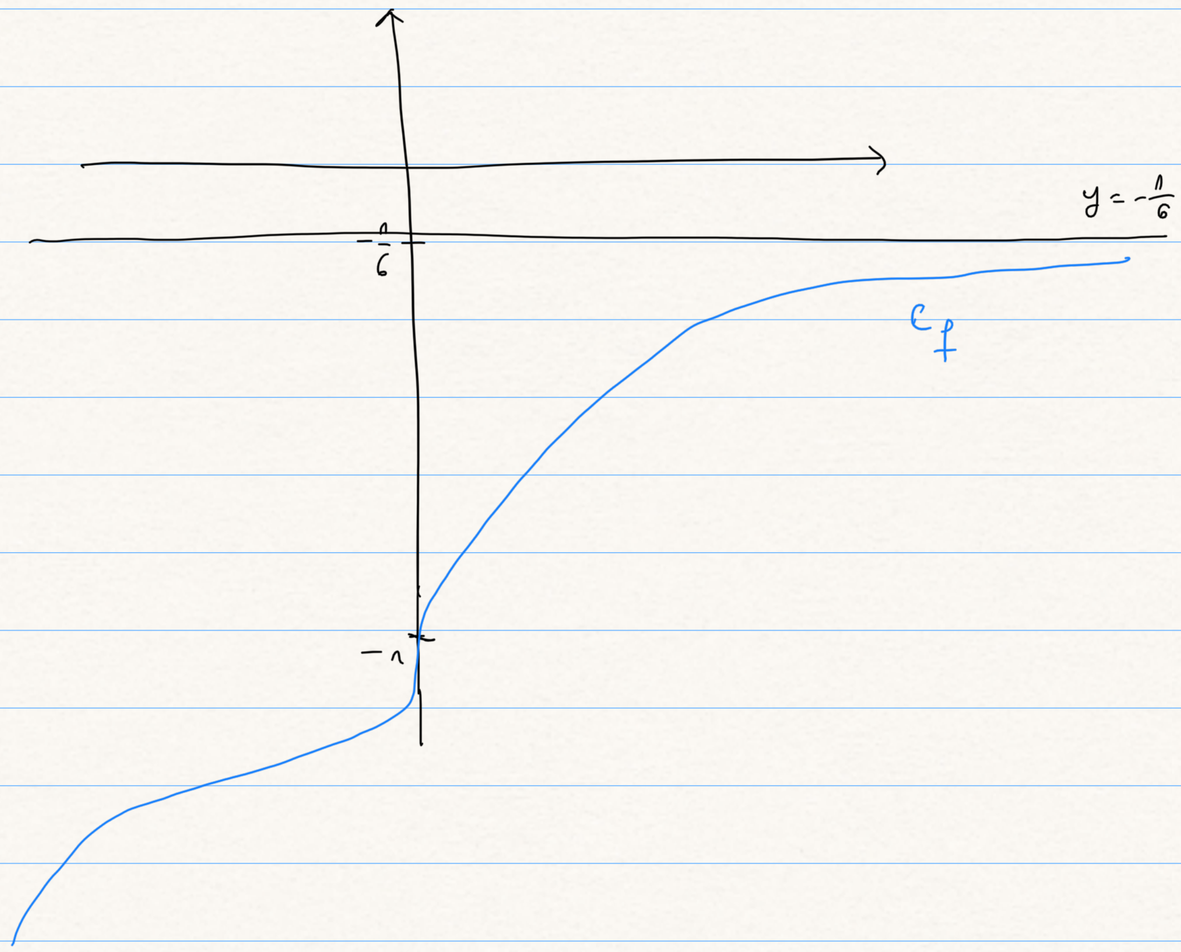
$(1+y+y^2)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + o(y^2)$ et on trouve

$$g(y) \underset{0^+}{=} \frac{\cancel{1} + \frac{1}{3}y + \frac{2}{9}y^2 - \cancel{1} - \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + o(y^2)}{y} = -\frac{1}{6} - \frac{11}{72}y + o(y)$$

soit $f(x) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{6} - \frac{11}{72}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Alors la droite $y = -\frac{1}{6}$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

3) On a $f(x) - y = -\frac{11}{72}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est du signe de $-\frac{11}{72}\frac{1}{x}$ en $+\infty$ donc la courbe de f est en dessous de l'asymptote en $+\infty$.



y = -1/6
-1/6
-1
C_f