Probabilité

La probabilité d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime "La chance qu'a un évènement de se produire

$$P(A) = \frac{\text{Nbr d'issues favorables à } A}{\text{Nbr d'issues total}}$$

Un dé 1 -> 6 :

Obtenir pair : 2 4 6

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Evènement Contraire

On lance un dé à 6 faces

Soit E l'évènement : "La face du dessus est supérieure ou égale à 2" (2, 3, 4, 5, 6)

L'évènement contraire de E est : "La face du dessus est 1" (forcément 1)

On appelle $\bar{E}$

$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Univers et Tribus :

Une tribu est définie sur un univers
Univers : tous les possibles (Ω)

Tribus : $\mathcal{P}$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ← Dé

Evènement : A : " faire un chiffre pair "
B : " faire un chiffre impair "

$\mathcal{P} = \{ \underset{A}{\{2, 4, 6\}}, \underset{B}{\{1, 3, 5\}}, \underset{A \cup B}{\Omega}, \underset{A \cap B}{\emptyset} \}$

$\mathcal{P}$ est une tribu sur $\underline{\Omega}$ ssi

- $\Omega \in \mathcal{P}$
- Si $A \in \mathcal{P}$, ${}^cA$ (complémentaire de A) $\in \mathcal{P} = B$

Tout ce qui est dans Ω mais pas dans A
~~Ici~~ C'est B

${}^cB = A$, ${}^c\Omega = \emptyset$, ${}^c\emptyset = \Omega$

=> Stabilité par passage au complémentaire

- Si $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{P}$ alors $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{P}$ (Leur Union est dans P)

=> Stable par union dénombrable

Tribu $\mathcal{B} = \{ \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \Omega, \emptyset, \{3,4,5,6\}, \{1,2,5,6\}, \{1,2,3,4\} \}$

${}^c\{1,2\} = \{3,4,5,6\}$ ${}^c\{5,6\} = \{1,2,3,4\}$
${}^c\{3,4\} = \{1,2,5,6\}$

$\mathcal{C} = \{ \{1\}, \{2\}, \dots \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \dots \{5,6\}$
$\dots, \{1,2,3\}, \dots \{4,5,6\}, \{1,2,3,4\}, \dots$
$\{1,2,3,4,5\}, \dots, \Omega, \varnothing \}$

Formule

1) $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

2) $P(A) = P(A | B) \to$ P(A) sachant que P(B) déjà produit

3) $P(B) = P(B|A)$

Exemple : $\{1, 2, \dots, 12\}$

A : " On tire un nbr pair "
B : " On tire un multiple de 3 "
On a :

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

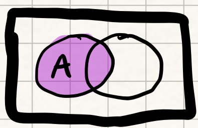
$B = \{3, 6, 9, 12\}$

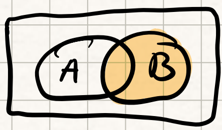
On a : C = $A \cap B$ = Un nombre pair et 1 multiple de 3
$= \{6, 12\}$

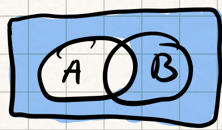
$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

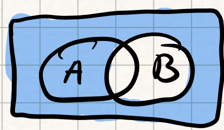
$P(C) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

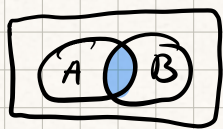
Formules :

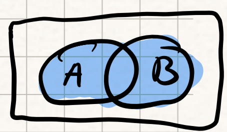
$P(A)$ 

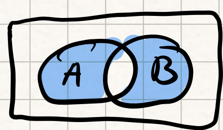
$P(B)$ 

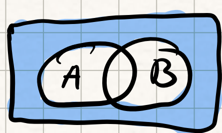
× $P(A') = 1 - P(A) = P(B)$ 

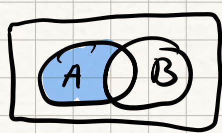
× $P(B') = 1 - P(B) = P(A)$ 

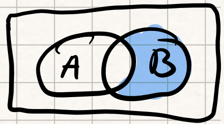
× $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ 

× $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 

× $P(A \Delta B) = P((A \cup B) \setminus (A \cap B))$
$= P(A) + P(B) - 2 * P(A \cap B)$ 

× $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$ 

× $P(A \cap B') = P(A) \times (1 - P(B))$ 

$\times\ P(B \cap A') = (1 - P(A)) \times P(B)$ 

$\times\ P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Coefficients binomiaux

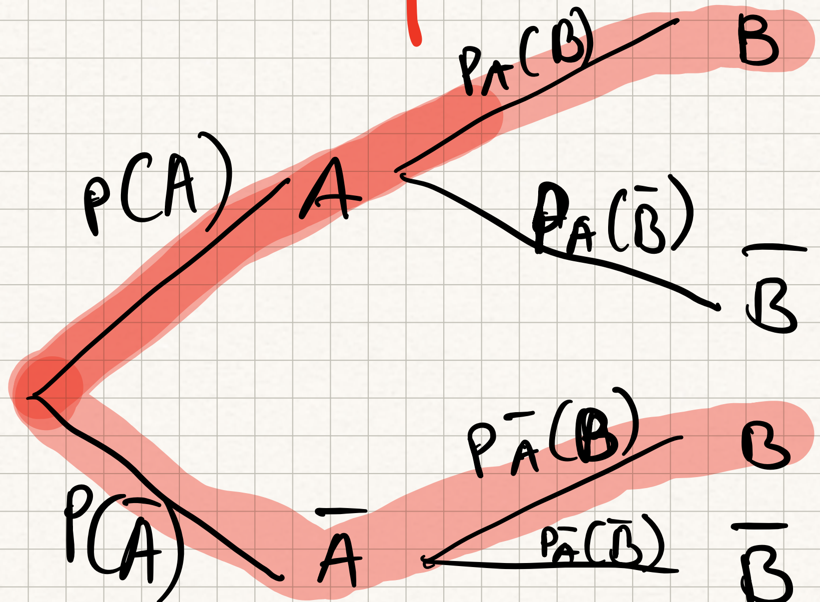
$$C_n^k = C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$C(n,k)$

Par exemple : On veut tirer 2 pièce noires parmi 7 noire :

$$C_7^2 \quad \text{ou} \quad C(7,2)$$

formule probabilité totale :



$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Il est important de remarquer que la formule des probabilités totales se traduit par la somme des probabilités des chemins conduisant à un évènement donné

Groupe

Générateur : modulo

par exemple : $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$: $\bar{1}$ et $\bar{5}$

liste des éléments $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

-> $1+1=2$, $1+2=3$, $1+3=4$, $1+4=5$, $1+5=0$

-> $5+5=4 \pmod 6$, $5+4=3$, $5+3=2$, $5+2=1$

$5+1=0$

=> $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$: $\bar{1}, \bar{5}$

$\langle \bar{k} \rangle = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ssi $\mathrm{pgcd}(k,6)=1$