TD n°12

Myhill-Nerode et Moore

On rappelle la définition suivante : si x, y et w sont des mots et que L est un langage, c'est-à-dire une partie de Σ^*, on dit que w sépare x et y par rapport à L si

$$xw \in L \quad \text{et} \quad yw \notin L \qquad \text{ou} \qquad xw \notin L \quad \text{et} \quad yw \in L\,.$$

Autrement dit, w sépare x et y par rapport à L si l'un des deux mots xw et yw est dans L tandis que l'autre n'y est pas.

Exercice 1 *Soit $\mathcal{L}_1$ le langage des mots u sur $\{a, b\}$ tels que $|u|_a$ est un multiple de 5. Les mots des paires suivantes, à gauche, ne sont pas $\sim_{\mathcal{L}_1}$-équivalents. Indiquer le(s) mot(s), à droite, qui les sépare(nt).*

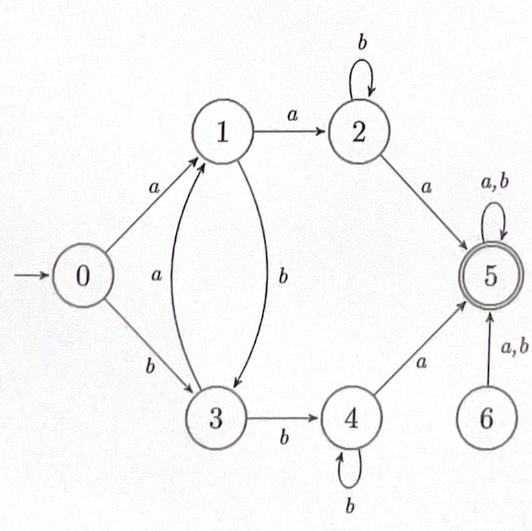
	• ba
$(aaababb, baabbaaa)$ •	• $bbabaaaabb$
(aaa, ε) •	• a
$(bab, baab)$ •	• $aaaba$
	• aba

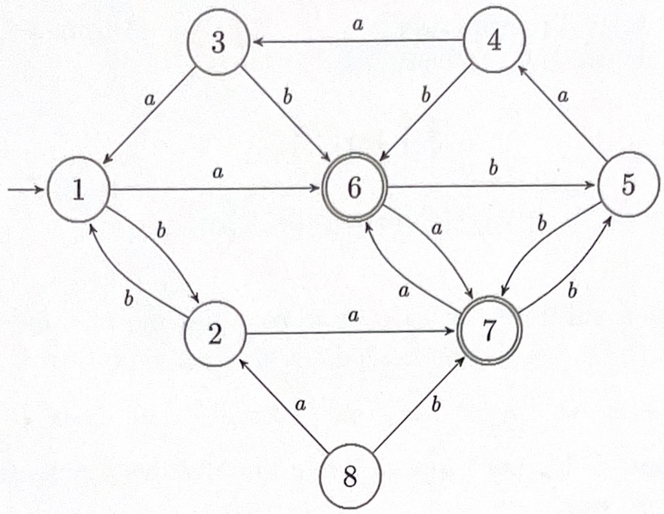
Exercice 2 *Soit $\mathcal{L}_4$ le langage des mots sur $\{a, b\}$ de longueur multiple de quatre, contenant en leur milieu un bloc d'occurrences de a de taille moitié moindre :*

$$\mathcal{L}_4 = \{ua^{2n}v \mid u, v \in \{a, b\}^n\}.$$

1. *Donner un mot permettant de séparer les mots b et bb.*
2. *Pour $i < j$, donner un mot permettant de séparer les mots b^i et b^j.*
3. *Combien la relation $\sim_{\mathcal{L}_4}$ a-t-elle de classes d'équivalence ?*
4. *Conclure avec le théorème de Myhill–Nerode.*

Exercice 3 *Pour les deux automates ci-dessous, minimisez avec l'algorithme de Moore.*





Exercice 4 *Soit* $\mathcal{L}_3$ *Soit le langage* $\mathcal{L}_3 = \{a^n b^n | 0 \leq n \leq 3\}$.

1. *Définir un automate déterministe* $\mathcal{M}_3$ *acceptant* $\mathcal{L}_3$.
2. *Décrire les classes d'équivalence de* $\sim_{\mathcal{M}_3}$ *par des expressions rationnelles.*
3. *Décrire les classes d'équivalence de* $\sim_{\mathcal{L}_3}$ *par des expressions rationnelles.*
4. *Comparer le nombre d'états de* $\mathcal{M}_3$ *et de* $\mathcal{M}_{\sim_{\mathcal{L}_3}}$.
5. *Rappeler comment montrer que* $\{a^n b^n | n \geq 0\}$ *est non-rationnel en utilisant le théorème de Myhill–Nerode.*

Exercice 5 *Soit* $\mathcal{L}_2$ *le langage des mots* u *sur* $\{a, b\}$ *vérifiant* $4|u|_a + 3|u|_b \equiv 4$ *mod* 5. *Lesquels des ensembles suivants donnent exactement un représentant pour chaque classe de* $\sim_{\mathcal{L}_2}$ *?*

- $\{bbb, aab, bbbb, aaaaa, \varepsilon\}$
- $\{b, bbb, abb, aabb, aaaaa, aaabbb\}$
- $\{bb, aa, abb, aabb, aaaabb\}$
- $\{aaa, aaaa, aabb, aaaab, aaaabb, \varepsilon\}$
- $\mathcal{L}_2$ *a une infinité de classes d'équivalence distinctes*
- *aucune des cinq propositions ci-dessus*

Algorithme de Moore

1. Enlever les états non accessible
2. Créer une partition initiale avec 2 classes :
   + Les acceptants
   + Les non acceptants
3. Tant que c'est possible, séparer les classes

Ex 3

	0	1	2	3	4	5	6
a	1	2	5	1	5	5	
b	3	3	2	4	4	5	

6 n'est pas accessible

{0, 1, 2, 3, 4}　　{5}

(a sépare 3 et 4)

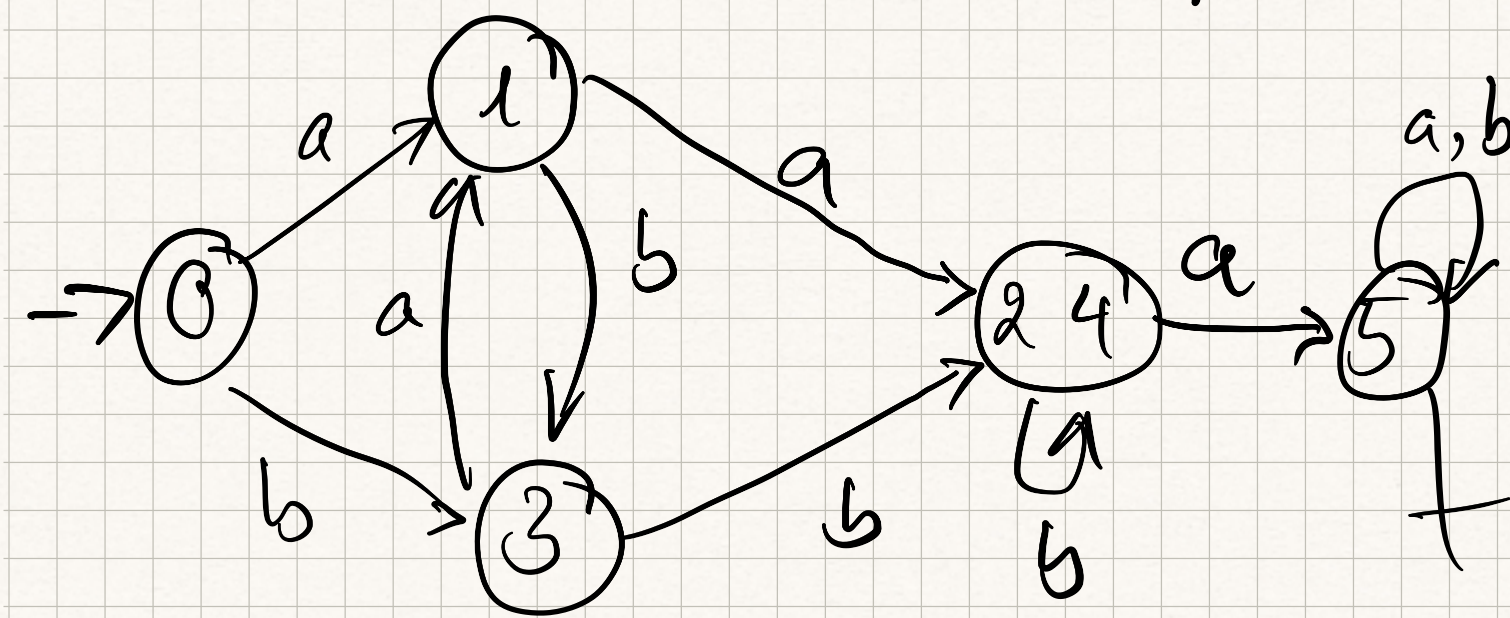
{0, 1, 3}　　{2, 4}　　{5}

(a sépare 1 et 3)

$\{0, 3\}$ $\{1\}$ $\{2, 4\}$ $\{5\}$

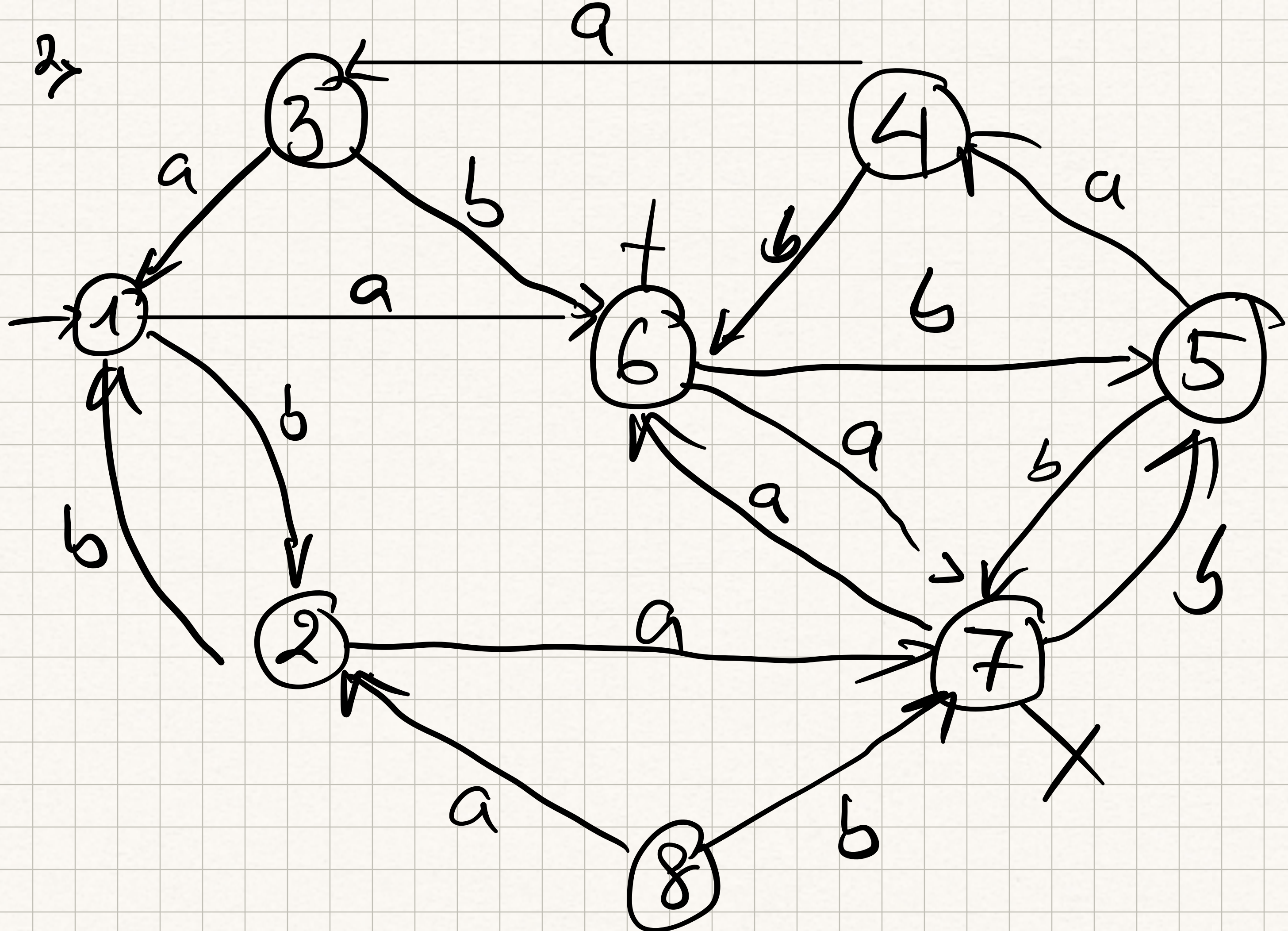
(b sépare 0 et 3)

$\{0\}$ $\{3\}$ $\{1\}$ $\{2, 4\}$ $\{5\}$



Ex 3

2)



	1	2	3	4	5	6	7	8
a	6	7	1	3	4	7	6	
b	2	1	6	6	7	5	5	

8 n'est pas accessible

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\{6, 7\}$

(a sépare 2 et 3)

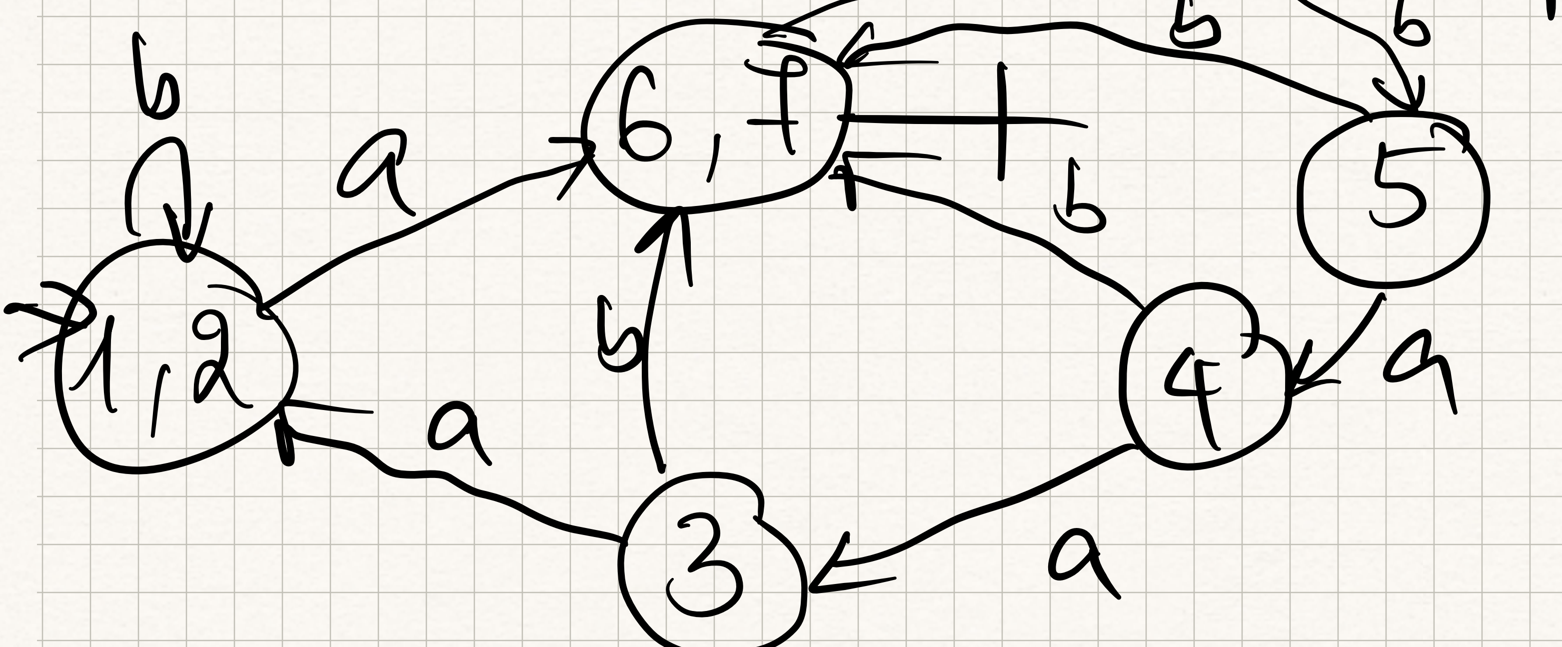
$\{1, 2\}$ $\{3, 4, 5\}$ $\{6, 7\}$

(a sépare 3 et 4)

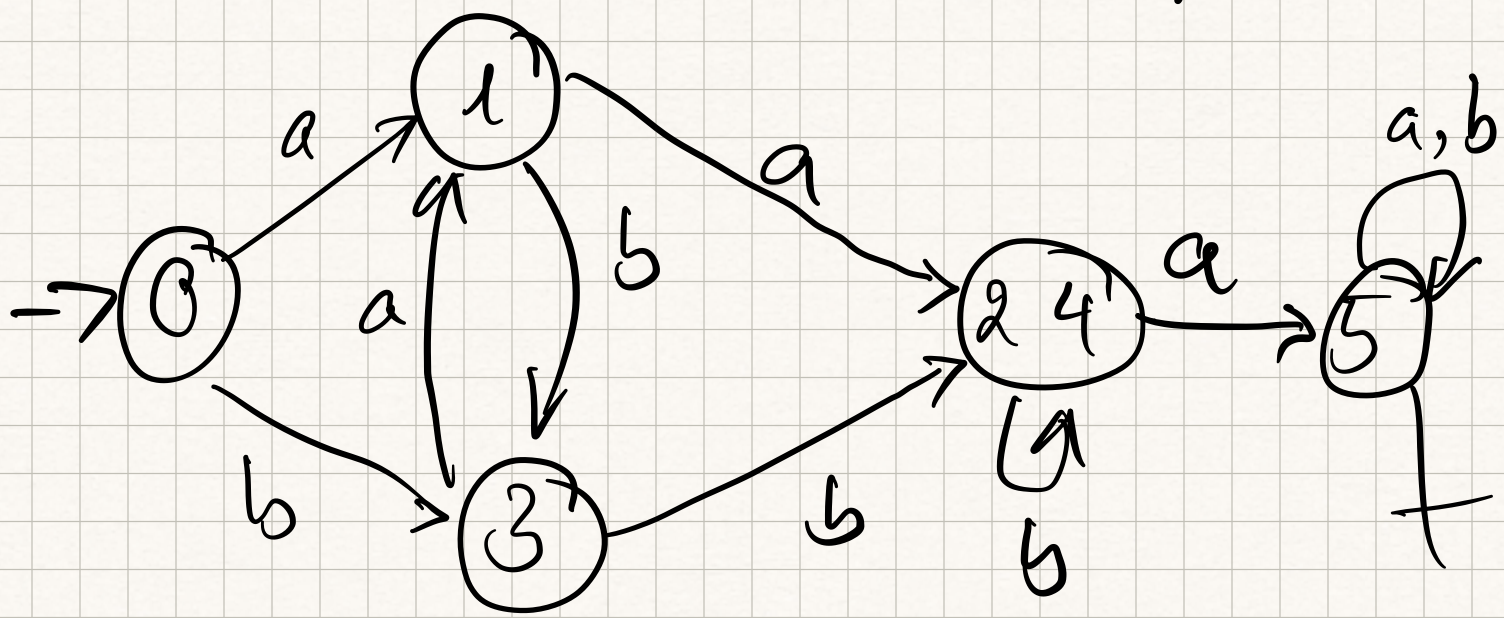
$\{1, 2\}$ $\{3\}$ $\{4, 5\}$ $\{6, 7\}$

(a sépare 4 et 5)

$\{1, 2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$ $\{5\}$ $\{6, 7\}$



{0} {3} {1} {2, 4} {5}



Ex2 : Myhill-Nerode

4 5
aaababbaaa

3 0
(aaa, ε)

1 2
bab, baab

ba 1

bbabaaabb 5

a 1

aaaba 4

aba 2

un mot z sépare les u et v

ssi

$$(u.z \in \mathcal{L} \text{ et } vz \notin \mathcal{L})$$

ou

$$(uz \in \mathcal{L} \text{ et } vz \notin \mathcal{L})$$

Ex2

$$\mathcal{L}_4 = \{u a^{2n} v \mid u, v \in \{a,b\}^n\}$$

1) $baab \in \mathcal{L}_4$

$bbaab \notin \mathcal{L}_4$

donc aab sépare b et bb

2) Soit i, j $i<j$

$a^{2i} b^i$ sépare b^i et b^j

En effet $b^j a^{2i} b^i \in \mathcal{L}_4$

mais $b^j a^{2i} b^i \notin L_4$

3) $\sim_{L_4}$ a une infinité de classe d'équivalence

Soit $w = \{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

w est de cardinal infini

$\forall w_1, w_2 \in w, w_1 \neq w_2$

$\exists i, j$ tels que $w_1 = b^i$ $w_2 = b^j$

$i \neq j$

Si $i < j$ $a_2 b^i$ les sépare

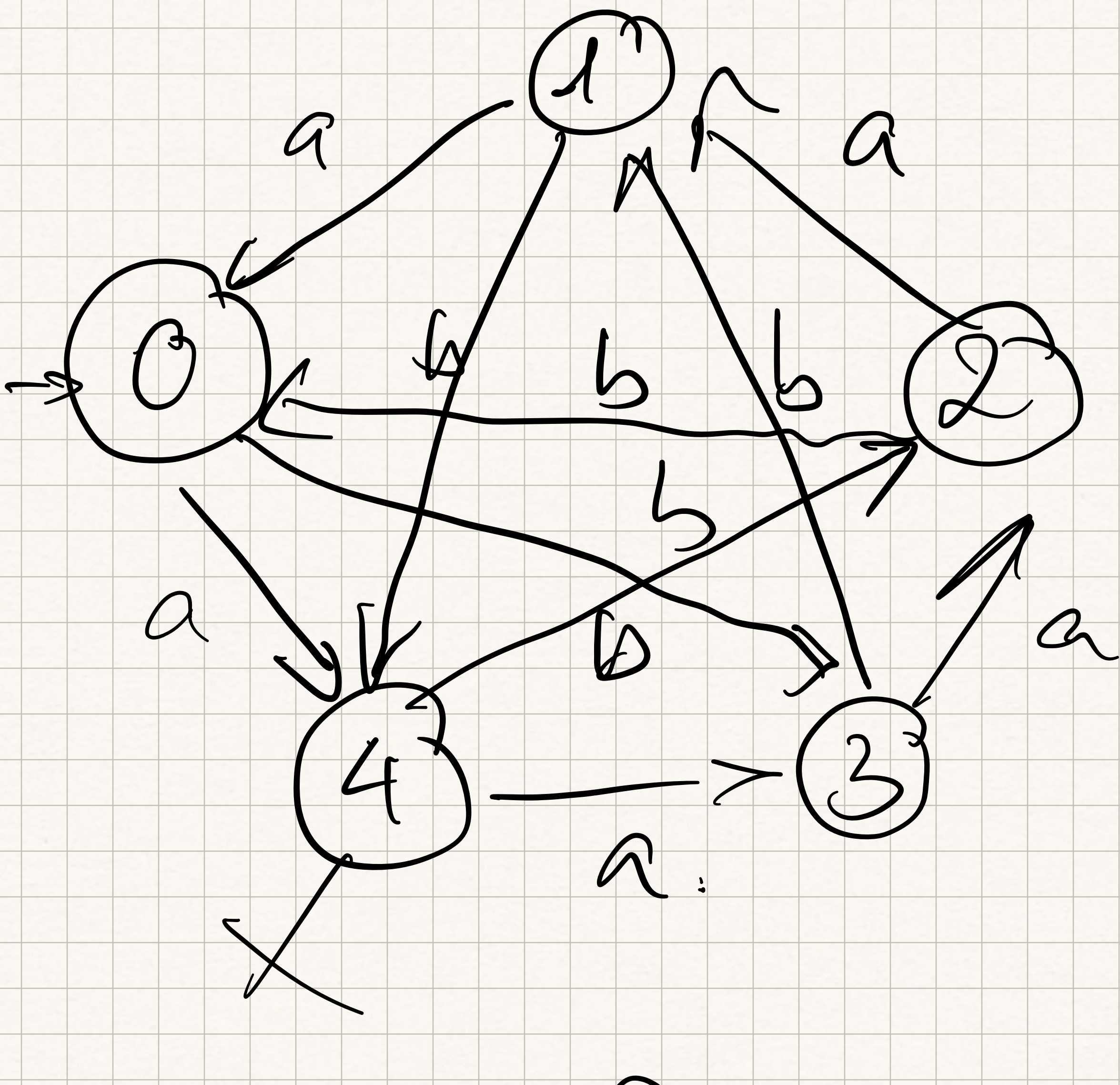
Si $j < i$ $a_2 b^j$ les sépare

Donc $w_1 \not\sim_{L_4} w_2$

$\Rightarrow \sim_{L_4}$ a une infinité de classe d'équiv

4) D'après le théorème de MN
L_4 n'est pas rationnel

Ex5



1) aaaaa ∈ L car $4 \times 5 = 0 \bmod 5$
2) Trop de class

$3 \cdot x$