Ex 1

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{Dans } \mathbb{R}^4$$

$$\begin{array}{c} a_2 \\ a_1 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 6 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{L_2}{3}} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc on peut ajouter e_2 e_3

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

(a_1, a_2, e_2, e_3) ~~base~~ de $\mathbb{R}^4$

Ex2 :

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

R^4

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \xrightarrow[\begin{array}{l} L_5 \leftarrow L_5 + L_1 \\ L_6 \leftarrow L_6 + L_1 \end{array}]{} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

$$-3 - 2 \times 2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \xrightarrow[\begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2L_2 \\ L_6 \leftarrow L_6 - 2L_2 \end{array}]{} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \end{array}$$

$$L_3 \Leftrightarrow L_4 \xrightarrow{\qquad} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

$d_4 \leftarrow d$

2 2

2

Ex 3

Dans $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & -12 & -15 & -3 \\ 0 & -32 & -40 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{L_3}{-8}]{\frac{L_2}{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc dim = 2
les 2 vecteurs sont libres car ils sont pas colinéaires

Base $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ex 4

1_{φ} $\mathbb{R}^3$

$$E = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{Base} : \left(\underset{x}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{y}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}\right)$$

Dim = 2

$$x + y = 0$$

On peut ajouter e_1 ou e_2 pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

2) $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_3}\right)$

On constate que :

$v_1 + v_2 = v_3$

et (v_1, v_2) libre

donc (v_1, v_2) forment une base

Dim = 2

On peut ajouter e_1, e_2 ou e_3 pour compléter

2) Dans $\mathbb{R}^3$

$G = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v}\right) \longrightarrow x = 0$

Dim : 1
Base : v

équation $x = 0$

$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow a = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix}$

On peut ajouter en base de $\mathbb{R}^3$
e_1, e_2, e_3

e_1 $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$

4) $H = \mathrm{Vect}\left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \right)$

$\mathbb{R}^4$

Dim 3

Base $= (v_1, v_2, v_3)$

On constate que

$$v_3 - v_2 = v_1$$

v_3, v_2 sont libres, qui vont former une base dim 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ & & & \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - xL_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & y-2x & z-2x & t-2x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{y-2x}{5} L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & z-2x-\frac{2y-4x}{5} & t-2x-\frac{3y-6x}{5} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} z-2x-\dfrac{2y-4x}{5} = 0 \\ t-2x-\dfrac{3y-6x}{5} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5z - 10x - 2y + 4x = 0 \\ 5t - 10x - 3y + 6x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5z - 6x - 2y = 0 \\ 5t - 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

On peut ajouter :

$$e_3 \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \quad e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5) $R = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^4$

$v_1 \quad v_2$

Dans $\mathbb{R}^4$

Dim : 2

Base : (v_1, v_2)

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - tL_2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - yL_1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x+3y & 0 & z-2y & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a un système d'équations est

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ z - 2y = 0 \end{cases}$$

On peut compléter en ajoutant e_1 et e_2

Ex5

$E = \{(2x - y, x + y, -x + y), x, y \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \\ -x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

$$= x \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \in E$$

(v_1, v_2) est libre car ils sont pas colinéaire

Donc dim $E = 2$

Ils forment une Base (v_1, v_2)

2) $F = \{(x+2y,\ y-2x,\ y-x),\ x,y \in \mathbb{R}\}$

$a \in F$

$$a = \begin{pmatrix} x+2y \\ -2x+y \\ -x+y \end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \in E$$

On constate que v_1 et v_2 sont libre
dim $F = 2$

Donc Base (v_1, v_2)

2y $F = \{(x+2y, y-2x, y-x)\ x, y \in \mathbb{R}\}$

$a \in F$

$$a = \begin{pmatrix} x+2y \\ y-2x \\ y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On constate que (v_1, v_2) sont libres car ils sont pas colinéaire

Dim F = 2 donc (v_2, v_1) forment une base

Ex 6

Dans $\mathbb{R}^4$

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\overset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}, \overset{e_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right) \qquad \dim E_1 = 2$$

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\underset{f_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{f_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \right) \qquad \dim E_2 = 2$$

est ce que (e_1, e_2, f_1, f_2) forment une base de $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}$$
$$L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 1 & -6 \\ 0 & -13 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - \frac{13}{2}L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -13 & \frac{-15}{2} \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{13}{5} L_2 \longrightarrow \begin{array}{c} e_1 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array}$$

$$f_4 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

(V) est libre et génératrice donc

V est une base de $\mathbb{R}^4$

Alors $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^4$

E_1, E_2 sont supplémentaire