Ex 1 :

$$1124x + 1004y = 12$$

1) $pgcd(1124, 1004) = 4$

$$1124 = 1 \times 1004 + 120$$
$$1004 = 8 \times 120 + 44$$
$$120 = 2 \times 44 + 32$$
$$44 = 1 \times 32 + 12$$
$$32 = 2 \times 12 + 8$$
$$12 = 1 \times 8 + 4$$
$$8 = 2 \times 4 + 0$$

On vérifie si cet equation, on constate que $2 \mid 12$, l'équation admet ses solutions.

2) On cherche donc une solution particulière à l'équation

$$1124x + 1004 = 4$$

On a :

$$4 = 12 - 1 \times 8$$
$$4 = 12 - 1 \times (32 - 2 \times 12)$$
$$4 = 12 - 1 \times 32 + 2 \times 12$$
$$4 = -1 \times 32 + 3 \times 12$$
$$4 = -1 \times 32 + 3 \times (44 - 1 \times 32)$$
$$4 = -1 \times 32 + 3 \times 44 - 3 \times 32$$
$$4 = 3 \times 44 - 4 \times 32$$
$$4 = 3 \times 44 - 4(120 - 2 \times 44)$$
$$4 = 3 \times 44 - 4 \times 120 + 8 \times 44$$
$$4 = -4 \times 120 + 11 \times 44$$

$4 = -4 \times 120 + 11(1004 - 8 \times 120)$

$4 = -4 \times 120 + 11 \times 1004 - 88 \times 120$

$4 = 11 \times 1004 - 92 \times 120$

$4 = 11 \times 1004 - 92 \times (1124 - 1 \times 1004)$

$4 = 11 \times 1004 - 92 \times 1124 + 92 \times 1004$

$4 = -92 \times 1124 + 103 \times 1004$

Solution particulière

$(x_0, y_0) = (-92, 103)$

3) On cherche la solution particulière d'équation

$1124x + 1004y = 4$

$1124 \times (-92 \times 3) + 1004(103 \times 3) = 12$

$1124 \times (-276) + 1004(309) = 12$

$(x_0, y_0) = (-276, 309)$

4) soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, l'équation initiale est sous forme $ax + by = c$ avec $a = 1124$ $b = 1004$

$a = \text{pgcd}(a, b) \times a'$ $\qquad$ $b = \text{pgcd}(a, b) \times b'$

$1124 = 4 \times a'$ $\qquad$ $1004 = 4 \times b'$

$a' = 281$ $\qquad$ $b' = 251$

L'ensemble des solutions particulières sont :

$S : \{[(-276) + 251k, 309 - 281k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ex4 :

$$S : \begin{cases} x \equiv \overset{a}{1} \mod 10^{m} \\ 4x \equiv \overset{b}{9} \mod 15^{n} \end{cases}$$

On inverse le modulo $9 \mod 15$

On remarque que

$4 \times 4 = 16 \equiv 1 \mod$

Donc on inverse :

$4x \equiv 9 \mod 15$

$\Leftrightarrow 4 \times 4x \equiv 9 \times 4 \mod 15$

$16x \equiv 36 \mod 15$

$x \equiv 6 \mod 15$

Le système est donc équivalent à :

$$(S) \begin{cases} x \equiv \overset{a}{1} \, [10]^{m} \\ x \equiv \overset{b}{6} \mod 15^{n} \end{cases}$$

$\text{pgcd}(10, 15) = 5$ $\qquad$ ppcm $= 30$

$15 = 1 \times 10 + 5$

$10 = 2 \times 5 + 0$

Comme 5 divise $6 - 1 = 5$. Le système admet solution

On applique l'algo Euclide à $(10, 15)$

$\overset{m}{10}u + \overset{n}{15}v = 5$

avec $u = (-1)$ $\quad v = 1$

$$m' = \frac{m}{pgcd(a,b)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$n' = \frac{n}{pgcd(a,b)} = \frac{15}{5} = 3$$

Solution particulière $x = bum' + avn'$

$= 6 \times (-1) \times 2 + 1 \times 1 \times 3$

$= -9$

Solution générale $\{ x = -9 + 30k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Ex 5

1) $4x \equiv 2 \mod 18$

pgcd$(4, 18)$

$18 = 4 \times 4 + 2$

$4 = 2 \times 2 + 0$

On constate que $2 \mid 2$, l'équation admet donc des solutions et est équivalente à $2x \equiv 1 [9]$

On cherche l'inverse de $2 \mod 9$. On a :

$2 \times 5 \equiv 1 \mod 9$

Donc :

$2x \equiv 1 \mod 9$

$\Leftrightarrow 5 \times 2x \equiv 5 \mod 9$

$\Leftrightarrow 10x \equiv 5 \mod 9$

$\Leftrightarrow x \equiv 5 \mod 9$

$S = \{ 5 + 9k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

2) $6x \equiv 2 \mod 8$

$pgcd(6,8) = 2$

$8 = 1 \times 6 + 2$

$6 = 3 \times 2 + 0$

On remarque $pgcd(6,8) = 2$, donc l'équation est équivalente à :

$$3x \equiv 1 \mod 4$$

On cherche l'inverse de $3 \mod 4$. On a

$$3 \times 3 = 9 \equiv 1 \mod 4$$

Donc $3x \equiv 1 \mod 4$

$\Leftrightarrow 3 \times 3x \equiv 3 \mod 4$

$\Leftrightarrow 9x \equiv 3 \mod 4$

$\Leftrightarrow x \equiv 3 \mod 4$

$S = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$