Université de Paris
Licence L2 Informatique

UFR de Mathématiques
2022-2023

Feuille d'exercices 5

***Exercice* 1 :** Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) = e_1 + 6e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_3 \end{cases}$$

Donner sa matrice dans la base canonique. Déterminer une base pour $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$, préciser leurs dimension et donner un système d'équations pour $\mathrm{Im} f$.

***Exercice* 2 :** On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{R}_3[X]$, $u(p)$ soit le polynôme $x \mapsto p(x+1) - p(x)$.

(1) Montrer que u est une application linéaire.

(2) Donner sa matrice dans la base canonique.

(3) Déterminer une base pour $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$, préciser leurs dimension et donner un système d'équations pour $\mathrm{Im} u$.

***Exercice* 3 :** Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(x,y,z,t) = (2x + y + 4z, x + y + 3z + t, 3x + 2y + 7z + t, x - y - z - 3t)\,.$$

(1) Donner sa matrice dans la base canonique.

(2) Déterminer une base pour $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$, préciser leurs dimension et donner un système d'équations pour $\mathrm{Im} f$.

***Exercice* 4 :**

On considère $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P - XP'$.

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) Donner sa matrice dans dans la base canonique de $R_3[X]$.

(3) Déterminer son noyau et son image.

***Exercice* 5 :**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y) = (x+y, x-y, x+y).$$

Déterminer le noyau de f, son image. f est-elle injective ? surjective ?

***Exercice* 6 :** On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z).$$

(1) Donner sa matrice dans la base canonique.

(2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(3) Déterminer une base de $\ker(f)$.

(4) L'application f est-elle injective ? surjective ?

***Exercice* 7 :** On considère l'application $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-3x - y + z,\ 8x + 3y - 2z,\ -4x - y + 2z).$$

(1) Donner sa matrice dans la base canonique.

(2) Déterminer une base du noyau de f et sa dimension.

(3) L'application f est-elle injective ?

(4) Donner le rang de f. L'application f est-elle surjective ?

(5) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

***Exercice* 8 :** Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3\ ,\ u(e_2) = 3e_2\ ,\ u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

(1) Donner sa matrice dans la base canonique.
(2) Déterminer une base de ker u. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
(3) Déterminer une base de Im u. Quel est le rang de u ?
(4) Montrer que $E = \ker\ u \bigoplus \mathrm{Im}\ u$.

***Exercice* 9 :** Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

***Exercice* 10 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A. Calculer l'image par f du vecteur $(2, -1)$.
(2) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice A. Calculer l'image par f du polynôme $p(x) = 3x + 4$.

***Exercice* 11 :** On considère un espace vectoriel réel E de dimension 3 . Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E . Soit l l'application linéaire dont la matrice dans cette base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer le noyau et l'image de l . Calculer le rang de l .
(2) Calculer la matrice de l^2 et montrer que $l^2 - 3l = 0$.

***Exercice* 12 :** On considère l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ représenté, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

(1) Discuter suivant le paramètre a, le rang de f_a.
(2) Déterminer le noyau et l'image de f_a.

***Exercice* 13 :** On considère un espace vectoriel réel E de dimension 3 . Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E . Soit l l'application linéaire dont la matrice dans cette base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment un système libre dans E . Écrire dans cette nouvelle base la matrice de l'application l .

***Exercice* 14 :** Dans $\mathbb{R}^4$ on considère la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) et la suite

$$(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4).$$

(1) Montrer que cette dernière suite est une base de $\mathbb{R}^4$. Écrire les matrices de passage de la base canonique à cette nouvelle base et de cette nouvelle base à la base canonique.
(2) Soit $v = (1, -1, 3, -2)$. Calculer les coordonnées de v dans la nouvelle base.
(3) Calculer le vecteur w dont les coordonnées, dans la nouvelle base, sont : $-2, 0, 4, 1$.

$f : E \longrightarrow F$

f est linéaire si

$\forall\, x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \underbrace{f(x+\lambda y)}_{\in E} = \underbrace{f(x) + \lambda f(y)}_{\in F}$

$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\, x \in E\} \subset F$ sev

$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} \subseteq E$ sev

Ex 1

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f : (e_1) = e_1 + 2e_2$

$f(e_2) = e_1 + 6e_2 + 2e_3$

$f(e_3) = e_1 - e_3$

Ex 1

$$e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$e_1 + 2e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2$$

$$f(e_2) = e_1 + 6e_2 + 2e_3$$

$$f(e_3) = e_1 - e_3$$

$$\hookrightarrow M = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Base de Im f

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

⚠ Colonnes

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & x\\ 2 & 6 & 0 & y\\ 0 & 2 & -1 & z\end{pmatrix} \xleftarrow[\substack{C_2 - C_3\\ C_4 - xC_3}]{C_1 - C_3} \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 6 & 0 & y\\ 1 & 3 & -1 & z+x\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_4 - (z+x)C_1} \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & y-2z-2x\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Donc une base de Im f

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Equation:
$2x - y + 2z = 0$

$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 2$

$\dim \operatorname{Ker} f = \underbrace{3}_{\dim \mathbb{R}^3} - 2 = 1$

$$Mu = 0^{+}$$

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 6y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xleftarrow{L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 - 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$u \in \operatorname{Ker} f$

$$u = \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ex2 :

$$\mathbb{R}^3[X] = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg P \leq 3\}$$

$[\lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0 \in \mathbb{R}_3[X]]$

Base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$

$(1, x, x^2, x^3)$ dimension 4

$$D : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$$

$$x^3 \mapsto 3x^2$$

$$x \mapsto 0$$

Ex2

$$u : \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \mathbb{R}_3[X]$$
$$P \longrightarrow P(x+1) - P(X)$$

1) Montrer que u est linéaire

On prend $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$u(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(x+1) - (P + \lambda Q)(x)$$
$$= P(x+1) + \lambda Q(x+1) - P(x) - \lambda Q(x)$$
$$= P(x+1) - P(x) + \lambda[Q(x+1) - Q(x)]$$
$$= u(P) + \lambda u(Q)$$

2) Donner la matrice de u dans $(1, x, x^2, x^3)$

$$\begin{cases} u(1) = 1 - 1 = 0 \\ u(x) = (x+1) - x = 1 \\ u(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 \\ u(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = (x+1)(x^2+2x+1) - x^3 \\ \qquad = 3x^2 + 3x + 1 \end{cases}$$

=> Matrice :

$$\begin{array}{c} \\ u(1) \\ u(x) \\ u(x^2) \\ u(x^3) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2x+1 & 3x^2+3x+1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$rg\, M_u = 3$

$u = 3$

$\dim \operatorname{Ker} u = 1$

Théorème rang

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}_3[X]}_{4} = \underbrace{\dim \operatorname{Im} u}_{3} + \underbrace{\dim \operatorname{Ker} u}_{1}$$

Base de Im u $(1, X, X^2)$

$t = 0$

Base de Ker u (1)

Ex 3

$f(x,y,z,t) = (2x+y+4z,\ x+y+3z+t,\ 3x+2y+7z+t,\ x-y-z-3t)$

$$f\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2x+y+4z \\ x+y+3z+t \\ 3x+2y+7z+t \\ x-y-z-3t \end{pmatrix}$$

avec $x = 1$
$y = z = t = 0$

$\hookrightarrow x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4$

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Mf\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & x \\ 1 & 1 & 3 & 1 & y \\ 3 & 2 & 7 & 1 & z \\ 1 & -1 & -1 & -3 & t \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_2 \\ C_3 - 4C_2 \\ C_5 - xC_2 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & y-x \\ -1 & 2 & -1 & 1 & z-2x \\ 3 & -1 & 3 & -3 & t+x \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 + C_3 \\ C_3 + C_4 \\ C_5 - (y-x)C_4 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & z-x-y \\ -1 & 3 & t-2x+3y \end{pmatrix}$$

colonne : Base et Im

ligne : résoudre vecteur

Base de Im f $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

dim Im f = 2

equations

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2x + 3y + t = 0 \end{cases}$$

Pour Ker f : lignes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad L_1 \Leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \times 2 \text{ ou enlève}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow \; L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + z - t = 0 \\ y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \rightarrow v = \begin{pmatrix} t - z \\ -2z - 2t \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Base de Ker f $\longrightarrow$ $= z\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$

Ex 4

$$f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$$
$$P \longrightarrow P - XP'$$

$$f(P + \lambda Q) = P + \lambda Q - X(P + \lambda Q)'$$
$$= P + \lambda Q - XP' + \lambda XQ'$$
$$= f(P) + \lambda f(Q)$$

$f(1) = 1 - X \cdot 0 = 1$

$f(x) = X - X \cdot 1 = 0$

$f(x^2) = X^2 - x \cdot 2x$

$$f(x^3) = x^3 - 3x^3$$
$$= -2x^3$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\, M_f = \mathrm{rg}\, f = 3$

Base de $\mathrm{Im} f = (1, -x^2, -2x^3)$

ou

$(1, x^2, x^3)$

Base de $\mathrm{Ker} f$: (X)

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$Mf = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ b_1 & b_2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ c_1 & c_2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ d_1 & d_2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4$$

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) \right)$$

Ex 5 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$

tq : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y \end{pmatrix}$

y

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{x}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

× Matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

× Déterminer Ker (f) :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 ; x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Alors $\text{Ker}(f) = \{0\}$ $f(x) = f(x)$; $x = y$

Donc f est injective

des vecteurs sont pas colinéaires

Alors $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont libre

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$

$\underset{\dim 2}{\mathrm{Im} f} \subseteq \mathbb{R}^3$

$\mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3$

$\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^3$

Donc $\mathrm{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^3$

f n'est pas surjective

Ex 6

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y - x \\ z + y \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pour base Im f (colonne)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg\, f = 2$$

pour Ker f (Ligne) (dim 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 + L_1 \\ \\ L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$, alors

$$v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc f n'est pas injective

Ex f

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x - y + z \\ 8x + 3y - 2z \\ -4x - y + 2z \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2 + C_3]{C_1 + 3C_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2+2C_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$ $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$

Base de $\mathrm{Im}\, f$:

f est pas surjective
$\dim(\mathrm{Im}(f)) \neq 3$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 + L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{cases} -x + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \right)$$

$\forall v \in \ker(f)$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\ker(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; f n'est pas injective

$\dim(\ker(f)) = \underline{1}$

Ex 8

$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$M_u = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ker u

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 + L_3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 = \frac{L_2}{-2}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{L_3}{3}$

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$v \in \ker u$

$$v = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

base de ker u $\quad \left(\overset{z}{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$ dim E

dim (ker u) = 1

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u$$

$$3 = \underbrace{\dim \operatorname{Im} u}_{2} + 1$$

Donc u est ni surjective, ni injective

Base de Im u $\left(\overset{x}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{y}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right)$ dim F

rg u = 2

$$\dim E - F = \underbrace{\dim E}_{1} + \underbrace{\dim F}_{2} - \dim E \cap F$$

vecteurs écrits en (ligne)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $\dim(\mathrm{Im}\, u + \ker u) = 3$

donc $\mathrm{Im}\, u + \ker u = \mathbb{R}^3$

et $\mathrm{Im}\, u \cap \ker u = \{0\}$

Donc $\ker u \oplus \mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}^3$

Ex 9

→ Impossible

$E = \mathbb{R}^4$ $\qquad F = \mathbb{R}^2$

$H \subseteq \mathbb{R}^4$

$H = \{x = y = z = t\}$

$= \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\dim H = 1$

Existe-t-il $\varphi : E \longrightarrow F$
$\ker \varphi = H$

Si oui, φ vérifie

$$\underbrace{\dim \ker \varphi}_{1} + \dim \operatorname{Im} \varphi = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{4}$$

Dans ce cas $\operatorname{rg} \varphi = 3$

Donc $\operatorname{Im} \varphi \subseteq \mathbb{R}^2$ sera-t-il de dim 3 $\rightarrow$ Impossible

$F = \mathbb{R}^3$

ex1 td5 Camille

$f(e_1) = e_1 + 2e_2$

$f(e_2) = e_1 + 6e_2$

$f(e_3) = e_1 - e_3$

$$\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{-3z}{2} \\ y = \frac{z}{2} \end{cases}$$

Base de Ker f $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 \leftarrow C_2 + 2C_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$F \cap G$

$B_F \; \mathcal{G}_F \; \{$

$B_G \; \mathcal{G}_G \; \{$

Système d'équations de

$F \cap G$

$F = (3x + 2y + z = 0)$

$G = (x = y)$

$\varphi_F \begin{cases} = \\ = \\ = \end{cases}$

$\varphi_G \begin{cases} = \\ = \\ = \end{cases}$

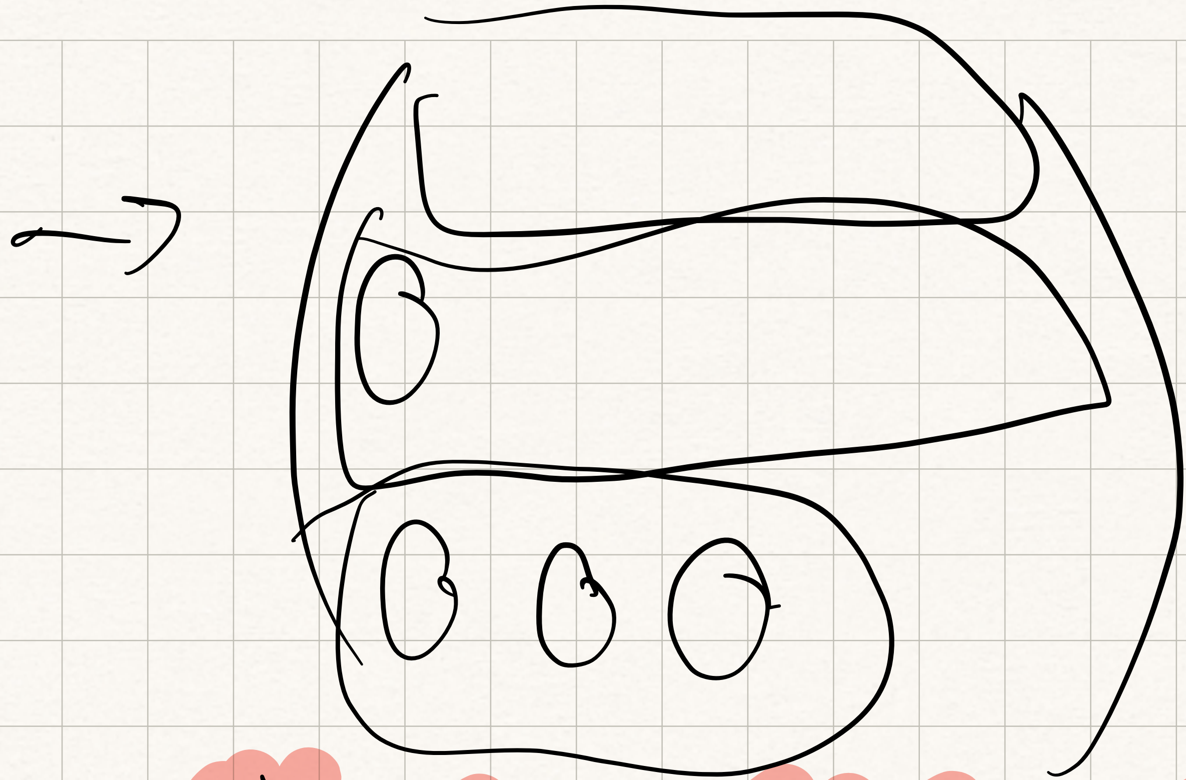
$F \cap G = \begin{cases} x = y \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

(B_F, B_G) famille génératrice

$F + G$

$B_F \begin{pmatrix} = \\ = \\ = \\ = \\ \\ = \\ = \\ = \end{pmatrix}$

B_G



une base est donnée par toute les lignes non nulles

$$\begin{cases} x = y \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = -5x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ -5 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right.$$

$$\left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 2x + 2y + z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \\ 5x - 4y - 3z &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\sim \left\{ \begin{aligned} x &= z \qquad -3y = -2z \\ y &= z \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ \\ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z - y \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

F, G sev de E

F + G = le sev de E engendré par G

$= \{ \lambda f +$

Ex 11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

1) Déterminer $\ker(\ell)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x + y + z = 0$

$x = -y - z$

$$\mathrm{Ker}(\ell) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$\forall v \in \mathrm{Ker}(\ell),$

$$v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$= y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Déterminer $\mathrm{Im}(\ell)$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\text{rang}(A) = 1$

$\text{Im}(\ell) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

3) Calculer $\overline{A^2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= A^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$

4) Prouver que $A^2 - 3A = 0$

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

Ex 12

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1) $a \neq 0$ $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[L_3 - \frac{L_1}{a}]{L_2 - \frac{L_1}{a}} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a - \frac{1}{a} & 1 - \frac{1}{a} \\ 0 & 1 - \frac{1}{a} & a - \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$L_3 - \frac{L_2}{a+1}$ $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & \frac{a^2-1}{a} & \frac{a-1}{a} \\ 0 & \frac{a-1}{a} & \frac{a^2-1}{a} \end{pmatrix}$

$$\frac{a^2-1}{a} = \frac{(a-1)}{a} \times (a+1)$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & \frac{a^2-1}{a} & \frac{a-1}{a} \\ 0 & 0 & \frac{a^2-1}{a} - \frac{\frac{a-1}{a}}{a+1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\frac{a-1}{a}}{a+1} - \frac{a-1}{a(a+1)}$$

$$= \frac{(a^2-1)(a+1) - (a-1)}{a(\cancel{a}+1)}$$

$$= \frac{(a-1)((a+1)^2-1)}{a(a+1)}$$

$$= \frac{(a-1)\left((a+1)^2 - 1\right)}{a(a+1)}$$

$$= \frac{(a-1)\left((a+1)(a+1)-1\right)}{a(a+1)}$$

$$= \frac{(a-1)(a^2+2a)}{a(a+1)}$$

$$= \frac{(a-1)(a(a+2))}{a(a+1)}$$

$$= \frac{(a-1)(a+2)}{a+1}$$

On cherche $\frac{(a-1)(a+2)}{(a+1)} = 0$

pour $a = 1$ et $a = -2$

le rang de M_a est $\leqslant 2$

pour $a = 1$ rang$(M_a) = 1$

pour $a = 2$ rg$(M_a) = 2$

Sinon rg$(M_a) = 3$ exclu $a = -1$