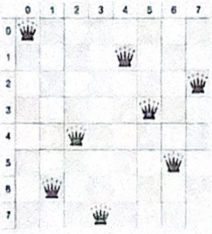
TD 3. Modélisation à l'aide de formules propositionnelles

Rappel : Pour modéliser un problème en logique propositionnelle il faut se donner, pour chaque instance $\mathcal{I}$ du problème, une formule propositionnelle $\varphi_{\mathcal{I}}$ telle que :
- chaque interprétation qui satisfait $\varphi_{\mathcal{I}}$ correspond à une solution de $\mathcal{I}$ et
- chaque solution de $\mathcal{I}$ correspond à une interprétation qui satisfait $\varphi_{\mathcal{I}}$.

Quand les variables du problème sont booléennes, le choix des propositions de $\varphi_{\mathcal{I}}$ est simple. Si ce n'est pas le cas, il faut choisir judicieusement les propositions, briques de base de la modélisation. Si $\varphi_{\mathcal{I}}$ est sous CNF, sa satisfiabilité peut être étudiée à l'aide d'un solveur SAT, par exemple basé sur l'algorithme DPLL.

Exercice 1. Le problème des n dames

Nous considérons un échiquier de taille $n \times n$. Le but du *problème des n dames* est de placer n dames sur cet échiquier afin qu'elles ne se menacent pas mutuellement conformément aux règles du jeu d'échecs. Cela signifie que deux dames ne doivent jamais être placées sur la même ligne, colonne ou diagonale. Par conséquent, sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a exactement une dame.



(a) Choisir les propositions pour modéliser la position des dames sur l'échiquier.

(b) Donner les formules sous CNF modélisant le fait que sur chaque ligne, respectivement sur chaque colonne, il y a au moins une dame.

(c) Donner les formules sous CNF modélisant le fait que sur chaque ligne, respectivement sur chaque colonne, il y a au plus une dame.

(d) Donner les formules sous CNF modélisant le fait que sur chaque diagonale il y a au plus une dame.

(e) Donner la formule sous CNF modélisant le problème des n dames.

(f) (Bonus) Utilisez un solveur SAT pour trouver une solution au problème des 10 dames.

Exercice 2. Fonctions, injections, surjections, bijections

Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble d'agents, et $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ un ensemble de ressources. Nous allons utiliser la logique propositionnelle pour décrire une relation d'accessibilité entre agents et ressources, et nous utilisons pour cela les propositions $P_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, telles que $P_{i,j}$ est vraie ssi l'agent a_i a accès à la ressource b_j. Écrire des formules propositionnelles sous CNF qui modélisent les problèmes/contraintes suivants :

(a) chaque agent a accès à au moins une ressource. Appelons φ cette formule.

(b) chaque agent a accès à au plus une ressource. Appelons ψ cette formule.

(c) que modélise la formule $\varphi \wedge \psi$?

(d) chaque ressource est accessible par au moins un agent. Appelons θ cette formule.

(e) chaque ressource est accessible par au plus un agent. Appelons ξ cette formule.

(f) que modélisent les formules $\varphi \wedge \psi \wedge \theta$, $\varphi \wedge \psi \wedge \xi$ et $\varphi \wedge \psi \wedge \theta \wedge \xi$?

Exercice 3. Carrés latins et gréco-latins

Un *carré latin* est un tableau carré de n lignes et n colonnes remplies de n éléments distincts dont chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un seul exemplaire. Par exemple,

0	1	2
1	2	0
2	0	1

est un carré latin de dimension 3. Nous pouvons utiliser un solveur SAT pour trouver des carrés latins de taille donnée.

(a) Choisir les propositions pour la modélisation du problème de carré latin (idée : pour une case donnée, il faudra autant de proposition que de valeurs possibles pour le remplissage de la case, c.à.d. n)

(b) Donner les formules sous CNF modélisant le fait que chaque case contient un (et un seul) entier.

(c) Donner les formules sous CNF modélisant les contraintes de ligne et de colonne.

(d) On dit que deux carrés latins de taille n sont *orthogonaux* si, en les superposant, chaque couple de nombres apparaît exactement une fois. Par exemple, les carrés latins à gauche ci-dessous sont orthogonaux, car en les superposant, on obtient le carré de droite :

0	1	2
1	2	0
2	0	1

et

1	2	0
0	1	2
2	0	1

(0,1)	(1,2)	(2,0)
(1,0)	(2,1)	(0,2)
(2,2)	(0,0)	(1,1)

Ce carré de droite, obtenu par la superposition de deux carrés latins othogonaux, est appelé un *carré gréco-latin*.

Choisir les propositions nécessaires pour une modélisation du problème de trouver un carré gréco-latin de taille n.

(e) Donnez une formule, pas nécessairement sous CNF, pour modéliser la contrainte d'orthogonalité des deux carrés latins. Quelle est la taille de la CNF de cette formule ?

(f) (Bonus) Montrer à l'aide d'un solveur SAT qu'il n'y a pas de carré gréco-latin de taille 2 ni de taille 6. Pouvez-vous en trouver un de taille 10 ?

Exercice 4. Au plus k parmi n, au moins k parmi n.

(a) Écrire deux formules propositionnelles φ_k et ψ_k en CNF n'utilisant que les propositions $P_1, \ldots, P_n$ telles que :

   i. une interprétation I satisfait la formule φ_k si et seulement si au moins k propositions parmi $P_1, \ldots, P_n$ sont satisfaites par I, et

   ii. une interprétation I satisfait la formule ψ_k si et seulement si au plus k propositions parmi $P_1, \ldots, P_n$ sont satisfaites par I.

(b) Que modélise la formule propositionnelle $\varphi_k \wedge \psi_k$?

(c) Quelle est la taille de φ_k en fonction de k et n ?

(d) Pour réduire la taille de cette formule, on introduit des propositions « auxiliaires » $Q_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq n$. Intuitivement, on utilise la proposition $Q_{i,j}$ pour exprimer le fait que P_j est la « i-ième » proposition vraie. On lie ces nouvelles propositions aux propositions P_j par la formule

$$\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \left(P_j \Leftrightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq k} Q_{i,j} \right) .$$

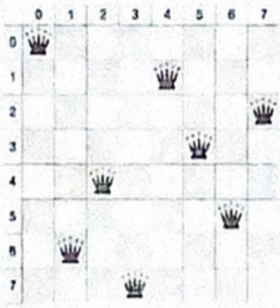
Écrire une formule propositionnelle χ_k utilisant uniquement les propositions $Q_{i,j}$ telle qu'une interprétation I satisfait exactement k propositions parmi $P_1, \ldots, P_n$ si et seulement s'il existe une interprétation partielle J des propositions $Q_{i,j}$ telle que $IJ \models \vartheta \wedge \chi_k$.

(e) Quelle est la taille de χ_k ? Quel était donc l'intérêt d'introduire les $Q_{i,j}$?

Ex 1

Exercice 1. Le problème des n dames

Nous considérons un échiquier de taille $n \times n$. Le but du *problème des n dames* est de placer n dames sur cet échiquier afin qu'elles ne se menacent pas mutuellement conformément aux règles du jeu d'échecs. Cela signifie que deux dames ne doivent jamais être placées sur la même ligne, colonne ou diagonale. Par conséquent, sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a exactement une dame.



(a) Choisir les propositions pour modéliser la position des dames sur l'échiquier.

(b) Donner les formules sous CNF modélisant le fait que sur chaque ligne, respectivement sur chaque colonne, il y a au moins une dame.

(c) Donner les formules sous CNF modélisant le fait que sur chaque ligne, respectivement sur chaque colonne, il y a au plus une dame.

(d) Donner les formules sous CNF modélisant le fait que sur chaque diagonale il y a au plus une dame.

(e) Donner la formule sous CNF modélisant le problème des n dames.

(f) (Bonus) Utilisez un solveur SAT pour trouver une solution au problème des 10 dames.

a) On utilise les propositions

$P_{i,j}$ tq $\begin{cases} P_{i,j} = 1 & \text{Si il existe une dame à la case correspondant à la ligne } i\text{, colonne } j \\ P_{i,j} = 0 & \text{autrement} \end{cases}$

Conjonction sur toutes les lignes

colonnes

b) pour les lignes $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} P_{i,j}$ $\qquad P_{i,j} = \varphi$

pour les colonnes $\bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{i=1}^{n} P_{i,j}$ $\qquad P_{i,j} = \psi$

c) lignes $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{j'=j+1}^{n} (\neg P_{i,j} \vee \neg P_{i,j'})$ $\quad P_{i,j} = \theta$

colonnes $\bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{i'=i+1}^{n} (\neg P_{i,j} \vee \neg P_{i',j})$ $\quad P_{i,j} = \gamma$

d) $\xi = ?$

e) $\varphi \wedge \psi \wedge \theta \wedge \gamma \wedge \xi$

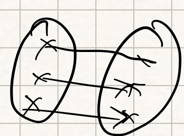
I Relations binaires

Soient deux ensembles X, Y une relation binaire R est un ensemble

$$R \subseteq X \times Y \to f$$

- une relation binaire totale à gauche (lef-total) pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ tq $(x, y) \in R$
- fonction partielle est une relation binaire R tq pour tout $x \in X$, $y, y' \in Y$ si $(x, y) \in R$ et $(x, y') \in R$ alors $y = y'$
- une fonction est une fonction partielle left-total
- On écrit pour une fonction f

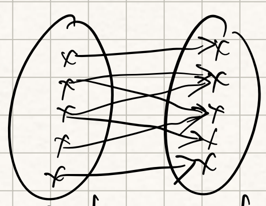
$$f : X \longrightarrow Y, \quad f(x) = y \text{ si } (x, y) \in f$$
$$f^{-1}(y) = x$$



- f est injective ssi si $(X, Y) \in f$ et $(x, y) \in f$ alors $X = X'$

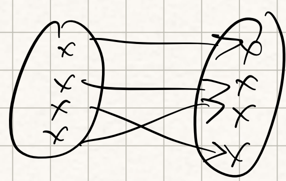
f^{-1} est une fonction partielle right-total

- f est surjective pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tq $f(x) = y$



f^{-1} est une relation totale

- f est bijective ssi f est injective et surjective



f^{-1} est une fonction bijective

Ex2

Exercice 2. Fonctions, injections, surjections, bijections

Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble d'agents, et $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ un ensemble de ressources. Nous allons utiliser la logique propositionnelle pour décrire une relation d'accessibilité entre agents et ressources, et nous utilisons pour cela les propositions $P_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, telles que $P_{i,j}$ est vraie ssi l'agent a_i a accès à la ressource b_j. Écrire des formules propositionnelles sous CNF qui modélisent les problèmes/contraintes suivants :

(a) chaque agent a accès à au moins une ressource. Appelons φ cette formule.

(b) chaque agent a accès à au plus une ressource. Appelons ψ cette formule.

(c) que modélise la formule $\varphi \wedge \psi$?

(d) chaque ressource est accessible par au moins un agent. Appelons θ cette formule.

(e) chaque ressource est accessible par au plus un agent. Appelons ξ cette formule.

(f) que modélisent les formules $\varphi \wedge \psi \wedge \theta$, $\varphi \wedge \psi \wedge \xi$ et $\varphi \wedge \psi \wedge \theta \wedge \xi$?

a) $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} P_{i,j}$ (left-total) relation)

b) $\psi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j \neq j'}^{m} (\neg P_{i,j} \vee \neg P_{i,j'})$ → fonction partielle

$\bigwedge_{j=1}^{n}$ $\bigwedge_{j'=1}^{m}$

c) $\varphi \wedge \psi$ modélise le fait que chaque agent a accès à exactement une ressource

$\varphi \wedge \psi$ modélise une fonction

d) $\theta = \bigwedge_j \bigvee_i P_{i,j}$ (right-total)

e) $\xi = \bigwedge_j \bigwedge_{i \neq i'} (\neg P_{i,j} \vee \neg P_{i',j})$ fonction partielle

f) $\varphi \wedge \psi \wedge \theta$ (fonction surjective)

$\varphi \wedge \psi \wedge \xi$ injective

Exercice 3. Carrés latins et gréco-latins

Un *carré latin* est un tableau carré de n lignes et n colonnes remplies de n éléments distincts dont chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un seul exemplaire. Par exemple,

0	1	2
1	2	0
2	0	1

est un carré latin de dimension 3. Nous pouvons utiliser un solveur SAT pour trouver des carrés latins de taille donnée.

(a) Choisir les propositions pour la modélisation du problème de carré latin (idée : pour une case donnée, il faudra autant de proposition que de valeurs possibles pour le remplissage de la case, c.à.d. n)

(b) Donner les formules sous CNF modélisant le fait que chaque case contient un (et un seul) entier.

(c) Donner les formules sous CNF modélisant les contraintes de ligne et de colonne.

(d) On dit que deux carrés latins de taille n sont *orthogonaux* si, en les superposant, chaque couple de nombres apparaît exactement une fois. Par exemple, les carrés latins à gauche ci-dessous sont orthogonaux, car en les superposant, on obtient le carré de droite :

0	1	2
1	2	0
2	0	1

et

1	2	0
0	1	2
2	0	1

(0,1)	(1,2)	(2,0)
(1,0)	(2,1)	(0,2)
(2,2)	(0,0)	(1,1)

Ce carré de droite, obtenu par la superposition de deux carrés latins othogonaux, est appelé un *carré gréco-latin*.

Choisir les propositions nécessaires pour une modélisation du problème de trouver un carré gréco-latin de taille n.

(e) Donnez une formule, pas nécessairement sous CNF, pour modéliser la contrainte d'orthogonalité des deux carrés latins. Quelle est la taille de la CNF de cette formule ?

(f) (Bonus) Montrer à l'aide d'un solveur SAT qu'il n'y a pas de carré gréco-latin de taille 2 ni de taille 6. Pouvez-vous en trouver un de taille 10 ?

Ex3 :

a) $P_{i,j,k}$ vraie ssi, l'entier k se trouve à la case correspondant à la ligne i, colonne j

$$0 \leq i, j, k \leq n-1$$

b) au moins un entier par case

$$\varphi = \bigwedge_i \bigwedge_j \bigvee_k P_{i,j,k}$$
$$= \bigwedge_{i,j} \bigvee_k P_{i,j,k}$$

au plus un entier

$$\psi = \bigwedge_{i,j} \bigwedge_{k \neq k'} (\neg P_{i,j,k} \vee \neg P_{i,j,k'})$$

exactement un entier $\varphi \wedge \psi$

c) Pour les lignes

$$\theta = \bigwedge_{j,k} \bigwedge_{i' \neq i} (\neg P_{i,j,k} \vee \neg P_{i',j,k})$$

Pour les colonnes $\varepsilon = \bigwedge_{i,k} \bigwedge_{j' \neq j} (\neg P_{i,j,k} \vee \neg P_{i,j',k})$

d) $P_{i,j,k}$ = pour le premier carré (Q(0)) et $Q_{i,j,k}$ pour le second

$$\gamma = \bigwedge_{k,l} \bigvee_{i,j} \underbrace{(P_{i,j,k} \wedge Q\ Q_{i,j,k})}_{\text{clause}} \Big] \ n^2 \times 2^{n^2}$$

taille : 2^{n^2} pour obtenir CNF

taille pour obtenir

Ex 4

Exercice 4. Au plus k parmi n, au moins k parmi n.

(a) Écrire deux formules propositionnelles φ_k et ψ_k en CNF n'utilisant que les propositions $P_1, \dots, P_n$ telles que :

  i. une interprétation I satisfait la formule φ_k si et seulement si au moins k propositions parmi $P_1, \dots, P_n$ sont satisfaites par I, et

  ii. une interprétation I satisfait la formule ψ_k si et seulement si au plus k propositions parmi $P_1, \dots, P_n$ sont satisfaites par I.

(b) Que modélise la formule propositionnelle $\varphi_k \wedge \psi_k$?

(c) Quelle est la taille de φ_k en fonction de k et n ?

(d) Pour réduire la taille de cette formule, on introduit des propositions « auxiliaires » $Q_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq n$. Intuitivement, on utilise la proposition $Q_{i,j}$ pour exprimer le fait que P_j est la « *i-ième* » proposition vraie. On lie ces nouvelles propositions aux propositions P_j par la formule

$$\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \left(P_j \Leftrightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq k} Q_{i,j} \right).$$

Écrire une formule propositionnelle χ_k utilisant uniquement les propositions $Q_{i,j}$ telle qu'une interprétation I satisfait exactement k propositions parmi $P_1, \dots, P_n$ si et seulement s'il existe une interprétation partielle J des propositions $Q_{i,j}$ telle que $IJ \models \vartheta \wedge \chi_k$.

(e) Quelle est la taille de χ_k ? Quel était donc l'intérêt d'introduire les $Q_{i,j}$?

a)

$$\psi_k = \bigwedge_{\{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1 \dots n\}} (\neg P_{j_1} \vee \neg P_{j_2} \vee \dots \vee \neg P_{j_{k+1}})$$

$P_1 \dots P_n$

au moins k parmi n

$$\varphi_k = \bigwedge_{\{j_1, \dots, j_{n-k+1}\} \subseteq \{1 \dots n\}} (P_{j_1} \vee P_{j_2} \vee \dots \vee P_{j_{n-k+1}})$$

b) $\varphi_j \wedge \psi_k$ modélise "exactement k positions sont vraies"

c) $\binom{n}{k-1} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$ nbr de clauses nombre de littéraux : $\frac{(n-k+1)n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$

$$= \frac{(n-k+1)n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n-k+1)n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k\,n!}{k(k-1)!(n-k)!}$$

$$= k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\binom{n}{k}$$

d) $\vartheta \stackrel{def}{=} \bigwedge_{1\leq j\leq n} (P_j \Leftrightarrow \bigvee_{1\leq i\leq k} Q_{i,j}$

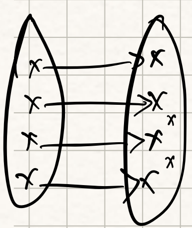
1)

domaine $\{1,\dots,k\}$ $\bigwedge_{1\leq i\leq k} \bigvee_{1\leq j\leq n} Q_{i,j}$

2) La relation $Q_{i,j}$ est une fonction : $\underbrace{X_1 \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq k} \bigvee_{1\leq j\neq l\leq n} (\neg Q_{i,j} \vee \neg Q_{i,l})}_{X_2}$

Écrire une formule propositionnelle χ_k utilisant uniquement les propositions $Q_{i,j}$ telle qu'une interprétation I satisfait exactement k propositions parmi $P_1, \dots, P_n$ si et seulement s'il existe une interprétation partielle J des propositions $Q_{i,j}$ telle que $IJ \models \vartheta \wedge \chi_k$.

3) $Q_{i,j}$ est injective $\underbrace{X_2 \wedge \bigwedge_{1\leq j\leq n} \bigwedge_{1\leq i<j\leq k} (\neg Q_{i,j} \vee \neg Q_{i,j})}_{X_k}$



fonction partielle

$$(\varphi_k \wedge \psi) \equiv \vartheta \wedge X_k$$

e) $O(n^2k + nk^2)$ clauses pareil pour les littéraux