Chapitre 3 - Preuve manquante

Proposition sur les substitutions

Proposition

Pour toute formule q, variables différentes $x_1, \ldots, x_n$, formules $p_1, \ldots, p_n$, et affectation v on a que

$$[\![q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]]\!]v = [\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v, \ldots, x_n/[\![p_n]\!]v])$$

Proposition sur les substitutions

Proposition

Pour toute formule q, variables différentes $x_1, \ldots, x_n$, formules $p_1, \ldots, p_n$, et affectation v on a que

$$[\![q[x_1/p_1, \ldots, x_n/p_n]]\!]v = [\![q]\!](v[x_1/[\![p_1]\!]v, \ldots, x_n/[\![p_n]\!]v])$$

En d'autres mots, on obtient le même résultat

1. quand on substitue les x_i par les p_i dans la formule q et puis évalue la formule ainsi obtenue par rapport à l'affectation v;
2. quand on évalue d'abord les formules p_i par rapport à l'affectation v, puis on met à jour dans l'affectation v les valeurs des variables x_i par l'interprétation des p_i, et on évalue la formule q originale par rapport à la nouvelle affectation.

Démonstration

Nous donnons ici la preuve pour le cas $n = 1$, c'est-à-dire nous montrons

$$[\![q[x/p]]\!]v = 1 \text{ ssi } [\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$$

La preuve se fait par induction structurelle

Cas Variable, sous-cas : q est la variable x

À montrer : $[\![x[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![x[x/p]]\!]v = 1$

Cas Variable, sous-cas : q est la variable x

À montrer : $[\![x[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![x[x/p]]\!]v = 1$
ssi $[\![p]\!]v = 1$ par définition substitution

Cas Variable, sous-cas : q est la variable x

À montrer : $[\![x[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![x[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![p]\!]v = 1$	par définition substitution
ssi $(v[x/[\![p]\!]v])(x) = 1$	par définition substitution dans les aff.

Cas Variable, sous-cas : q est la variable x

À montrer : $[\![x[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![x[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![p]\!]v = 1$	par définition substitution
ssi $(v[x/[\![p]\!]v])(x) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![x]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Variable, sous-cas : q est une variable $y \neq x$

À montrer : $[\![y[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![y[x/p]]\!]v = 1$

Cas Variable, sous-cas : q est une variable $y \neq x$

À montrer : $[\![y[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![y[x/p]]\!]v = 1$
ssi $[\![y]\!]v = 1$ par définition de substitution

Cas Variable, sous-cas : q est une variable $y \neq x$

À montrer : $[\![y[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![y[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![y]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $v(y) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Variable, sous-cas : q est une variable $y \neq x$

À montrer : $[\![y[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![y[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![y]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $v(y) = 1$	par définition de la sémantique
ssi $v[x/[\![p]\!]v](y) = 1$	par définition substitution dans les aff.

Cas Variable, sous-cas : q est une variable $y \neq x$

À montrer : $[\![y[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![y[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![y]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $v(y) = 1$	par définition de la sémantique
ssi $v[x/[\![p]\!]v](y) = 1$	par définition substitution dans les aff.
ssi $[\![y]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition de la sémantique

Cas Négation

À montrer : $[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction : $[\![q[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$$[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$$

Cas Négation

À montrer : $[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction : $[\![q[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$
ssi $[\![\neg(q[x/p])]\!]v = 1$ par définition de substitution

Cas Négation

À montrer : $[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction : $[\![q[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![\neg(q[x/p])]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $[\![q[x/p]]\!]v = 0$	par définition sémantique

Cas Négation

À montrer : $[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction : $[\![q[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![\neg(q[x/p])]\!]v = 1$	par définition de substitution
ssi $[\![q[x/p]]\!]v = 0$	par définition sémantique
ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 0$	par hypothèse d'induction

Cas Négation

À montrer : $[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction : $[\![q[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$$
\begin{array}{ll}
[\![(\neg q)[x/p]]\!]v = 1 & \\
\text{ssi } [\![\neg(q[x/p])]\!]v = 1 & \text{par définition de substitution} \\
\text{ssi } [\![q[x/p]]\!]v = 0 & \text{par définition sémantique} \\
\text{ssi } [\![q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 0 & \text{par hypothèse d'induction} \\
\text{ssi } [\![\neg q]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1 & \text{par définition sémantique}
\end{array}
$$

Cas Conjonction

À montrer : $[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!] v = 1$ ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!] v]) = 1$
Hypothèse d'induction 1 : $[\![q_1[x/p]]\!] v = 1$ ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!] v]) = 1$
Hypothèse d'induction 2 : $[\![q_2[x/p]]\!] v = 1$ ssi $[\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!] v]) = 1$

$$[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!] v = 1$$

Cas Conjonction

À montrer : $[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 1 : $[\![q_1[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 2 : $[\![q_2[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$
ssi $[\![q_1[x/p] \wedge q_2[x/p])]\!]v = 1$ par définition

Cas Conjonction

À montrer : $[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 1 : $[\![q_1[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 2 : $[\![q_2[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$
ssi $[\![q_1[x/p] \wedge q_2[x/p])]\!]v = 1$ par définition
ssi $[\![q_1[x/p]]\!]v = [\![q_2[x/p]]\!]v = 1$ par définition

Cas Conjonction

À montrer : $[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!] v = 1$ ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 1 : $[\![q_1[x/p]]\!] v = 1$ ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 2 : $[\![q_2[x/p]]\!] v = 1$ ssi $[\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!] v = 1$	
ssi $[\![q_1[x/p] \wedge q_2[x/p])]\!] v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1[x/p]]\!] v = [\![q_2[x/p]]\!] v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = [\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par hypothèse d'induction

Cas Conjonction

À montrer : $[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 1 : $[\![q_1[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$
Hypothèse d'induction 2 : $[\![q_2[x/p]]\!]v = 1$ ssi $[\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$

$[\![(q_1 \wedge q_2)[x/p]]\!]v = 1$	
ssi $[\![q_1[x/p] \wedge q_2[x/p])]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1[x/p]]\!]v = [\![q_2[x/p]]\!]v = 1$	par définition
ssi $[\![q_1]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = [\![q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par hypothèse d'induction
ssi $[\![q_1 \wedge q_2]\!](v[x/[\![p]\!]v]) = 1$	par définition

Cas Disjonction

similaire au cas précédent.