

Partiel du samedi 18 mars 2023

Durée : 2 heures.

*Les documents, calculatrices, téléphones portables et montres connectées sont interdits.
Pour obtenir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de résoudre tous les exercices.*

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (1+3 pts). *Questions de cours.*

- a) Qu'est-ce qu'un nombre premier ?
- b) Qu'est-ce qu'un groupe ?

Exercice 2 (2 pts). Déterminer les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $33x + 15y = 9$.

Exercice 3 (1+1 pts).

- 1. Quel est le reste dans la division euclidienne par 51 de 203^{180323} ?
- 2. L'écriture en binaire de $2023^{14071789}$ se termine-t-elle par 0 ou par 1 ?

Exercice 4 (1+1+1+2 pts).

- a) Pour chacune des congruences suivantes, trouver une congruence équivalente de la forme $x \equiv a \pmod{n}$.
$$3x \equiv 2 \pmod{7}, \quad 2x \equiv 4 \pmod{6}, \quad 9x \equiv 9 \pmod{15}.$$
- b) Résoudre le système de congruences

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{7} \\ 2x \equiv 4 \pmod{6} \\ 9x \equiv 9 \pmod{15} \end{cases}$$

Exercice 5 (1+1+2+2+2 pts).

- a) Soit $n \geq 1$ un entier. Rappeler la définition du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
- b) Dresser la liste des éléments du groupe $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$.
- c) Calculer les ordres des groupes $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$, $(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/216\mathbb{Z})^\times$.
- d) Déterminer l'ordre de la classe de 2 et celui de la classe de 8 dans le groupe $(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times$.
Ce groupe est-il cyclique ?
- e) Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times$ qui envoie la classe de 1 sur celle de 8. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 6 (2 pts). Soit G un groupe. Soient x et y deux éléments de G qui sont d'ordres finis a et b . Supposons que $xy = yx$. Montrer que l'ordre de xy divise $\text{ppcm}(a, b)$.