DST 1 - version ◇

Ex 1 :

(1) Calculons les DL de $\sqrt{1+x^3}$ et de $\sin x$ en 0 à l'ordre 2 et respectivement 3 :

$$(1+x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Alors $\dfrac{x\sqrt{1+x^3} - \sin x}{x^3} = \dfrac{\cancel{x} + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$

$= \frac{1}{6} + \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{1+x^3} - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

(2) On a $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\dfrac{1}{\ln(1-x)} + \dfrac{1}{x} =$

$= \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2} + o(x)}\right) = \dfrac{1}{x}\left(1 - 1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) = \dfrac{1}{2} + \varepsilon(x)$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$.

Ex 2

(1) On a $e^X = 1 + X + o(X)$ donc $e^X - 1 \underset{0}{\sim} X$

Comme $\sin x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ on peut poser $X = \sin x$ et on trouve $e^{\sin x} - 1 \underset{0}{\sim} \sin x$. Et comme $\sin x \underset{0}{\sim} x$

On a que $e^{\sin x} - 1 \underset{0}{\sim} x$.

On sait aussi que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ (par exemple puisque $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$).

En faisant le quotient on a que $\dfrac{e^{\sin x} - 1}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$.

(2) On a que $\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)}$

On $\ln\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{4x}{1+2x}\right)$ avec $\dfrac{4x}{1+2x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

On peut utiliser alors $\ln(1-X) \underset{0}{\sim} -X$ avec $X = \dfrac{4x}{1+2x}$ pour obtenir $\ln\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{-4x}{1+2x}$

et $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{-4}{1+2x} \underset{0}{\sim} -4$.

Alors $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)} = e^{-4}$ et donc $\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}} \underset{0}{\sim} e^{-4}$.

Ex 3.

1) On a $\sqrt{1+4x^2} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{4x^2}{2} + o(x^2)$ donc $x\sqrt{1+4x^2} = x + 2x^3 + o(x^3)$.

On a aussi $\dfrac{1}{1+2x} = 1 - 2x + o(x)$

Par conséquent $\dfrac{x\sqrt{1+4x^2}}{1+2x} = (x + 2x^3 + o(x^3))(1 - 2x + o(x)) =$

$= x - 2x^2 + o(x^2) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$.

On en déduit que $f'(0) = 1$, que $f''(0) = -4$, que $y = x$ est la tangente à C_f (courbe représentative de f)

en 0 et que $f(x)-y = -2x^2+o(x^2)$ est du signe de $-2x^2$ au voisinage de 0. Cela signifie que C_f est en dessous de la tangente au voisinage de 0.

2) On pose $z = \frac{1}{x}$ et on obtient $f(x) = g(z) = \dfrac{\frac{1}{z}\sqrt{1+\frac{4}{z^2}}}{1+\frac{2}{z}} =$

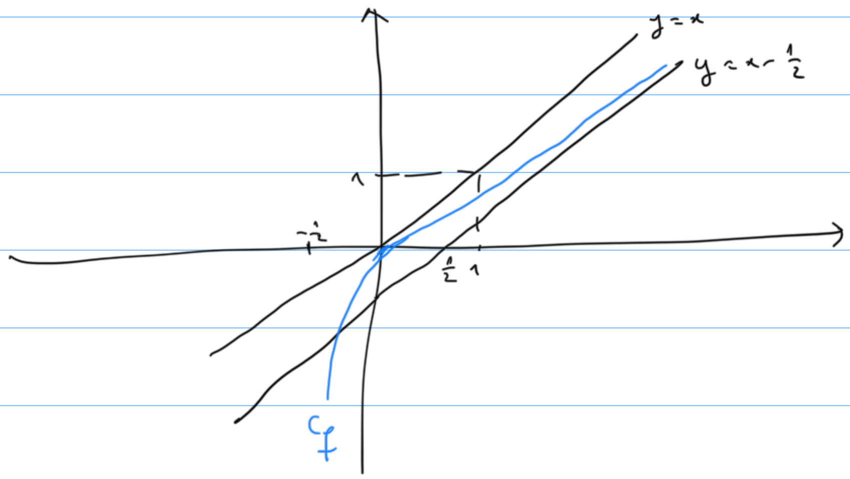
$$= \frac{\sqrt{z^2+4}}{z^2+2z} = \frac{2\sqrt{1+(\frac{z}{2})^2}}{2z(1+\frac{z}{2})} \underset{0}{=} \frac{1+\frac{1}{2}(\frac{z}{2})^2+o(z^2)}{z}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+o(z^2)\right)$$

$$= \left(1+\frac{z^2}{8}+o(z^2)\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{z}{4}+o(z^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{z}{4}+\frac{z}{8}+o(z) = \frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{3z}{8}+o(z)$$

$$\underset{+\infty}{=} x-\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Alors C_f (la courbe représentative de f) admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x-\frac{1}{2}$ et comme $f(x)-y = \frac{3}{8x}+o(\frac{1}{x})$ est du signe de $\frac{3}{8x}$ en $+\infty$ on en déduit que C_f est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$.



DST 1 - Version ♣

Ex 1

(1) On écrit $\sqrt{1-x^2} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ et

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ d'où

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} - \sin x}{x^3} = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{2} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3} + \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-x^2} - \sin x}{x^3} = -\frac{1}{3}$.

(2) On a $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ d'où

$$\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1\right) = \frac{1}{2} + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Ex 2.

1) On a $e^X - 1 \underset{0}{\sim} X$ et comme $2\sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

on peut poser $X = 2\sin x$ pour obtenir $e^{2\sin x} - 1 \underset{0}{\sim} 2\sin x$

Et $\sin x \underset{0}{\sim} x$, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ d'où

$$\frac{e^{2\sin x} - 1}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{x} = 2$$

2) On écrit $\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)}$

et ensuite $\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right) = \ln\left(1 - \frac{4x}{1+2x}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{4x}{1+2x}$

car $\ln(1-X) \underset{0}{\sim} -X$ et $\frac{4x}{1+2x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (donc on peut poser $X = \frac{4x}{1+2x}$).

Alors $\frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{4x}{1+2x} \frac{1}{2x} = -\frac{2}{1+2x} \underset{0}{\sim} -2$

et donc $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)} = e^{-2}$. Cela entraîne que

$$\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2x}} \underset{0}{\sim} e^{-2}.$$

Ex 3

1) On a $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+o(x^2)$

d'où le DL de f à ordre 2 en 0 :

$$f(x) = x\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+x+x^2+o(x^2)\right) =$$

$$= x + x^2 + o(x^2) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

On en déduit que $f'(0) = 1$, que $f''(0) = 2$, que $y = x$ est la tangente à C_f (la courbe représentative de f) en 0 et que $f(x) - y = x^2 + o(x^2)$ est du signe de x^2 au voisinage de 0 donc que C_f est au-dessus de la tangente au voisinage de 0.

2) On pose $z = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ et on trouve que

$$f(x) = g(z) = \frac{\frac{1}{z}\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{\sqrt{1+z^2}}{z^2-z} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{z^2}{2}+o(z^2)\right)\left(1+z+z^2+o(z^2)\right)$$

$$= -\frac{1}{z} - 1 - z - \frac{z}{2} + o(z) = -\frac{1}{z} - 1 - \frac{3}{2}z + o(z) =$$

$$\underset{+\infty}{=} -x - 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$ Ceci signifie que la

droite $y = -x-1$ est asymptote de C_f en $+\infty$.

Comme $f(x) - y = -\frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $-\frac{3}{2x}$

en $+\infty$ on sait aussi que C_f est au-dessous de l'asymptote en $+\infty$.