Université Paris Cité

VÉRIFICATION DES APTITUDES ET DES CONNAISSANCES

DATE : 18/03

ECUE OU UE : Mathématiques

Après avoir rempli l'en-tête, rabattre et coller le coin noirci

Nom : TANG

Prénom : Thanh Long

N° d'étudiant : 22110569

N° de place : Info 4

N.B. - Il est interdit aux candidats, sous peine d'exclusion, de signer leur composition ou d'y apporter un signe distinctif quelconque.

Correcteurs			
Nom : Appréciations :	NOTE $14^{,5}/20$	Nom : Appréciations :	NOTE

Note définitive :

Ne rien inscrire ici

Ex 2 : 2/2

$33x + 15y = 9$

On calcule d'abord le pgcd $(33, 15) = 3$? c'est un 3 ?

$33 = 2 \times 15 + 3$ On constate que $3 \mid 9$ donc l'équati[on]

$15 = 5 \times 3 + 0$ admet donc des solutions

On cherche la solution particulière à l'équation

$33x + 15y = 3$

On remonte la division Euclidienne :

$3 = 33 - 2 \times 15$

On a alors $(x_0, y_0) = (1, (-2))$

On cherche ensuit la solution particulière ~~dans l'éq~~

$33x + 15y = 3$

$\Leftrightarrow 33 \times 1 \times 3 + 15 \times (-2) \times 3 = 3 \times 3$

$\Leftrightarrow 33 \times 3 + 15 \times (-6) = 9$

$\Rightarrow (x_1, y_1) = (3; (-6)) \leftarrow$ Solution particulière

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, On a l'équation sous la formule

$ax + by = d$ avec $a = 33$ $b = 15$

$a = pgcd(a,b) \times a'$ $b = pgcd(a,b) \times b'$

$33 = 3 \times a'$ $15 = 3 \times b'$

$a' = 11$ $b' = 5$

✓ Solution générale : $\{((3 + 5k, (-6) - 11k)) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ex 3 2/2

1) 203^{180323} mod 51

$203 = 3 \times 51 + 50$

Donc $203 \equiv -1 \mod 51 \equiv 50 \mod 51$

$\Leftrightarrow (203)^2 \equiv (-1)^2 \mod 51$

$\equiv 1 \mod 51$

Alors 180323 est un nombre impair. $\exists$ alors un k tel que $180323 = 2k + 1$

On a alors

$203^{180323} = (203^2)^k \, 203$

$\rightarrow 203^{180323} \mod 51$

$\Leftrightarrow \cancel{(203^2)^k \, 203} \mod 203^{2k+1}$ ~~mod 5~~

$\Leftrightarrow (203^2)^k \, 203 \equiv 1^k \times (-1) \mod 51$

$\equiv -1 \mod 51$

Le reste de la division euclidienne est 50 ✓

2) $2023^{14071789}$

On constate que 2023 est un nombre impair donc
$2023 \equiv 1 \mod 2$
$\Leftrightarrow 2023^{14071789} \equiv 1^{14071789} \mod 2$
$\equiv 1 \mod 2$
Donc le chiffre unité est 1 ✓

Ex 4 4.5/5. bien.
merci !

a) ~~$3x \equiv 2 \mod 7$~~
~~pgcd (3, 7) = 1~~
~~On constate que le pgcd (3, 7) : 1 ∤ 2 donc l'équation n'admet pas de solution~~

$3x \equiv 2 \mod 7$ fait à la page 8

$2x \equiv 4 \mod 6$
pgcd (2, 6) = 2
$6 = 3 \times 2 + 0$
On voit que le pgcd (2, 6) : 2 | 4 donc l'équation admet au moins ~~des~~ une solution et est équivalente à :
$x \equiv 2 \mod 3$ ✓
~~On cherche à inverser le modu 2 mod 6~~
Donc $S = \{ 3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$9x \equiv 9 \mod 15$
pgcd (9, 15) = 3
$15 = 1 \times 9 + 6$
$9 = 1 \times 6 + 3$
$3 = 2 \times 3 + 0$

On constate que 3 | 9 donc l'équation admet au moins une solution et ~~équa~~ est équivalente à :
$3x \equiv 3 \mod 5$

On cherche à inverser le 3 mod 5
$3 \times 7 = 21 \equiv 1 \mod 5$
On a donc : $3x \equiv 3 \mod 5$
$\Leftrightarrow 3x \times 7 \equiv 3 \times 7 \mod 5$
$\Leftrightarrow 21x \equiv 21 \mod 5$
$\Leftrightarrow x \equiv 21 \mod 5$
$\Leftrightarrow x \equiv 1 \mod 5$ ✓

$S = \{ 5k + 1 \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Rappel n° de place :

Ex

3/4 0.5.

positif

Ex1: 0.5.

a) Un nombre premier est un nombre qui a seulement les diviseurs qui sont 1 ou lui même donc son pgcd avec n'importe quel nombre est toujours = 1

c'est faux pgcd(3,6)=3

il est aussi divisible par -1, et par -p.

b) Un groupe est un ensemble G, une loi $G \times G \xrightarrow{*} G$ qui doit vérifie

- $*$ associativité : $\forall x,y,z \in G$ ~~tel que~~ $(a*b)*c = a*(b*c)$
- $\exists$ un élément neutre, e, tel que $\forall a \in G$ $a*e = e*a = a$
- $\forall x$ $\exists y$ un inverse $\cancel{a*b} = \cancel{b*a} = e$ $x*y = y*x$

ok mais attention aux erreurs

Ex 5 2.5/8

a) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ et l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui sont inversibles, un élément a est inversible par la multiplication si et seulement si a et n sont premier entre eux

ok 1/

1/ b) $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{17}\}$

ex $f : (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$ tel que $f(\bar{1}) = \bar{8}$

Puisque $f(\bar{1}) = \bar{8}$, on peut définir f pour chaque élément de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ en multipliant 8 par l'élément de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

On définit donc $\cancel{f(a) = 8a}$ mod 27 $\quad f(a) = \bar{8}^a$

Pour que $f : (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$ soit un unique morphisme, il doit vérifier les propriété suivant :

$f(a + b \bmod 12) = f(a) + f(b) \bmod 27$ pour tous les éléments a, b de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

Soit a et b des éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. On a

$f(a + b \bmod 12) = 8(a + b \bmod 8) \bmod 27$

~~Ainsi : f(a) + f~~ $= 8(a+b) \bmod 27$

Ainsi $f(a) + f(b) \bmod 27 = (8a \bmod 27 + 8b \bmod 27) \bmod 27$
$= (8a + 8b) \bmod 27$

On a $8(a+b) \bmod 27 = (8a + 8b) \bmod 27$

Donc $f(a + b \bmod 12) = f(a) + f(b) \bmod 27$

Supposons qu'il y a un autre morphisme de groupe $g : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ tel que $g(1) = \bar{8}$

Alors pour chaque élément a de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ on a

$g(a) = g(a \times 1) = a \times g(1) = a * 8 \bmod 27 \Rightarrow g = f$

Cela montre que $g(a) = 5a \pmod{20}$ pour un unique morphisme de groupe $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/27$ tel que $f(\bar{1}) = \bar{8}$

On cherche son noyau :

$\ker = \{ a \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \mid f(a) = 0 \bmod 27 \}$

Pour déterminer le noyau, on cherche les valeurs de a pour que $f(a) = 8a \equiv 0 \pmod{27}$

Dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, les éléments possibles sont $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, 8, 9, 10, 11\}$

$f(0) = 8 \times 0 = 0 \pmod{27}$

Donc ~~Ker~~ $\ker f = \{0\}$

On cherche ensuite l'image de f :
$\mathrm{Im} f = \{ f(a) \mid a \in \mathbb{Z}/\cancel{12}\mathbb{Z} \}$

$8a$	mod 27
0	0
1	8
2	16
3	24
4	~~32~~ 5
5	13
6	21
7	2
8	
9	
10	

Donc $\mathrm{Im} f = \{ \cancel{0,1,2}$
$\{0, 8, 16, 24, 25, 13, 5, 21, 2\}$

c) $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$, $(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^*$ $(\mathbb{Z}/216\mathbb{Z})^*$

0.5

Les éléments du groupe $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont $\{1, 3, 5, 7\}$

~~0, c'est élément neutre de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$, on a 0 est ordre~~

* On calcule leurs ordres :
$\bar{1}$ est l'élément neutre de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$, il est donc d'ordre 1 dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$

Ex 4

a) $3x \equiv 2 \mod 7$

$pgcd(3, 7) = 1$

On constate que $1|2$, l'équation admet donc au moins une solution

On cherche à inverser 3 mod 7

$3 \times 5 = 15 \equiv 1 \mod 7$

On a donc

$$3x \equiv 2 \mod 7$$
$$\Leftrightarrow 5 \times 3x \equiv 5 \times 2 \mod 7$$
$$\Leftrightarrow 15x \equiv 10 \mod 7$$
$$\Leftrightarrow x \equiv 3 \mod 7$$

$S = \{ ~~S~~ \ 7k + 3 \mid k \in \mathbb{Z} \}$

1

b) $S \begin{cases} 3x \equiv 2 \mod 7 \\ 2x \equiv 4 \mod 6 \\ 9x \equiv 9 \mod 15 \end{cases}$

D'après la question précédente (a), on obtient donc ~~une~~ nouveau système de congruences

$$S \begin{cases} x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 1 \mod 5 \end{cases}$$

On choisi 2 équations

$$S' \begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 1 \mod 5 \end{cases}$$

On cherche ~~dan~~ ~~sous~~ le pgcd $(3, 5) = 1$

Comme $1 | 2-1$, ~~le~~ système admet des solution

On applique l'algo ~~Euclude~~ Euclide à $(3, 5)$

Rappel n° de place :

Ex 4

1 b) On applique l'algo Euclide à $(3,5)$

$3u + 5v = \text{pgcd}(3,5)$

$3u + 5v = 1$

avec $u = 2$ $v = -1$

$m' = \dfrac{m}{\text{pgcd}(a,b)} = \dfrac{3}{1} = 3$

$n' = \dfrac{n}{\text{pgcd}(a,b} = \dfrac{5}{1} = 5$

solution particulière $x = bum' + avn'$

$= 1 \times 2 \times 3 + 2 \times (-1) \times 5$

$= 6 \quad -10$

$= -4$

$\text{ppcm}(3,5) = 15$

$\Rightarrow$ Solution ~~génale~~ générale ~~= -4 +~~ $x \equiv -4 \bmod 15$

$| k \in \mathbb{Z} \}$

On obtient donc un nouveau système de S

$$S \begin{cases} x \equiv 3 \bmod 7 \\ x \equiv -4 \bmod 15 \end{cases}$$

$\text{pgcd}(7,15) = 1$

On constate que pgcd$(7,15)$: $1 \mid -4 - 3$

l'équation admet des solutions

On applique l'algo Euclide à $(7,15)$

$7u + 15v = \text{pgcd}(7,15)$

$7u + 15v = 1$

$u = (-2)$ $v = +1$

$m' = \dfrac{m}{\text{pgcd}(a,b)} = \dfrac{7}{1} = 7$

$n' = \dfrac{n}{\text{pgcd}(a,b)} = \dfrac{15}{1} = 15$

solution particulière : $x = bum' + avu'$

$= (-4) \times -2 \times 7 + \cancel{...}\ 3 \times 1 \times 15$

$= -56 + 45$

$= \cancel{-11}$ 101

$ppcm(7, 15) = 105$

$\Rightarrow$ Solution générale de S est $\{-11 + 105k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

presque correct, à part une erreur de calcul

1.5/2