Montrer que $(1, 1, 1)$ u_1

$(1, 1, 0)$ u_2 $\quad (1, 0, 1)$ u_3 est

génératrice de $\mathbb{R}^3$

On veut montrer que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$$

$$(x, y, z) = \lambda_1 (1, 1, 1) + \lambda_2 (1, 1, 0) + \lambda_3 (1, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ y = \lambda_1 + \lambda_2 \\ z = \lambda_1 + \lambda_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y \\ \lambda_1 + \lambda_3 = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ -\lambda_3 = y - x \\ -\lambda_2 = z - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - x + z - x + y = -x + z + y \\ \lambda_3 = x - y \\ \lambda_2 = x - z \end{cases}$$

Donc l'équation (E) admet des solutions en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ existent donc la famille est génératrice

Montrer que $\overset{u_1}{(1,0)}, \overset{u_2}{(1,1)}, \overset{u_3}{(1,-1)}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$

On veut montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$(x,y) = \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (1,1) + \lambda_3 (1,-1)$$

$$(E) \Leftrightarrow (x,y) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 - \lambda_3 = y \end{cases}$$

Ici on a une infinité de solutions
Si $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = y$, $\lambda_1 = x - y$
alors ils vérifient les système et sont donc des solutions de E

Donc la famille est génératrice

$(1,1,1),(2,1,-1) \quad \mathbb{R}^3$

$\forall (x,y,z) \ \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2,1,-1) \quad (E)$

$(E) = (x,y,z) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)$

$$E \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y \\ \lambda_1 - \lambda_2 = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ -\lambda_2 = y - x \\ -3\lambda_2 = z - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ \lambda_2 = x - y \\ \lambda_2 = \dfrac{x-z}{3} \end{cases}$$

On a $x - y = \dfrac{1}{3}(x-z)$

$$x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z - y = 0$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{z}{3} - y = 0$$

$$2x + z - 3y = 0$$

Pour que F ait des solutions en λ, il faut $2x - 3y + z = 0$. Or pour avoir une famille génératrice E doit avoir des solutions $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Donc famille pas génératrice

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}$$

$$x = -2y - 3y$$

$$F = \{(-2y - 3z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(-2,1,0) + z(-3,0,1) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathrm{Vect}((-2,1,0), (-3,0,1))$$