

Logique

Propositionnelle

$\rightarrow \neg q$  et  $p$  est une formule

$(q \wedge p)$  : formule

$(q \vee p)$  : formule

Formule :

$\rightarrow y$  (variable)

$\rightarrow x$  (variable propositionnelle)

$\rightarrow \neg x$  (formule)

$\rightarrow (\neg x \wedge y)$  (conjunction de deux formules)

Ne sont pas des formules d'après ↑

$\rightarrow ((x$

$\rightarrow x \vee y$

Variables propositionnelles

On choisit d'abord un ensemble :

$V := \{x, x_1, x_2, x_3, \dots, y, y_1, y_2, \dots, z, z_1, z_2, \dots\}$

L'ensemble  $\text{Form}$  des formules propositionnelles est défini comme l'ensemble de chaînes de caractère tel que :

$$1, V \subseteq \text{Form}$$

$$2, \text{ Si } p \in \text{Form} \text{ alors } \top_p \in \text{Form}$$

$$3, \text{ Si } p, q \in \text{Form} \text{ alors } (p \wedge q) \in \text{Form}$$

$$4, \text{ Si } p, q \in \text{Form} \text{ alors } (p \vee q) \in \text{Form}$$

## Outils logiques

### TD n° 1

#### Exercice 1 :

Déterminez si les mots suivants sont des formules. Dans les cas où la réponse est non, dire si on peut quand même donner une sémantique au mot, ou s'il y a de l'ambiguïté :

- $x, y$
- $(x)$
- $(x \wedge x)$
- $x \wedge x$
- $x \wedge y \wedge z$
- $x \wedge y \wedge z \vee x'$
- $(x \wedge y \wedge z) \vee x'$
- $((x \wedge y) \vee (x \vee z))$

#### Exercice 2 :

Dessiner l'arbre syntaxique des formules suivantes :

- $x$
- $(x \wedge y)$
- $((x \wedge y) \vee z)$
- $((x \wedge y) \vee (x \vee z)) \wedge (\neg(x \wedge y) \vee (x \vee z))$
- $((x \wedge y) \vee z) \wedge ((x \wedge y) \vee (x \vee z))$
- $((x \wedge y) \wedge z) \wedge w$

#### Exercice 3 :

Formaliser les phrases suivantes en logique propositionnelle.

1. Je serai heureux ;  
 J'étudie la logique ;  
 Si j'étudie la logique, alors je serai heureux ;  
 j'étudie la logique si et seulement si je serai heureux.
2. S'il pleut, on annulera le pique-nique ;  
 S'il ne pleut pas, Marie insistera pour aller à la plage et le pique-nique sera annulé ;  
 Ou bien il pleuvra ou bien il ne pleuvra pas ;  
 Uniquement s'il pleut Marie insistera pour aller à la plage ;
3. Le soleil brille si les nuages sont grises ;  
 Seulement si les nuages sont grises le soleil brille ;  
 Le soleil brille ou les nuages ne sont pas grises ;  
 Le soleil brille et le soleil ne brille pas ;

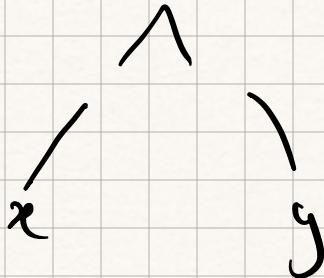
## Ex 1

- $x, y$  : non ( $\bar{a}$  cause de , )
- $x$  : non
- $(x \wedge x)$  non
- $x \wedge x$  non pas de ( )
- $x \wedge y \wedge z$  non pas de ( )
- $x \wedge y \wedge z \vee x'$  non pas de ( )  
pas formule
- $(x \wedge y \wedge z) \vee x'$  non car  $(x \wedge y \wedge z)$
- $((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$  oui

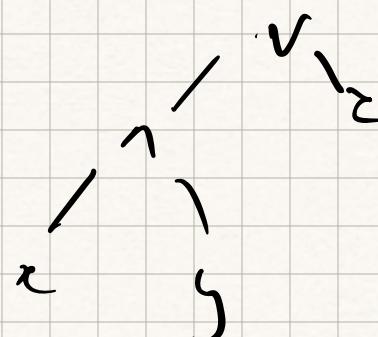
## Ex 2

-  $x$  :  $x$

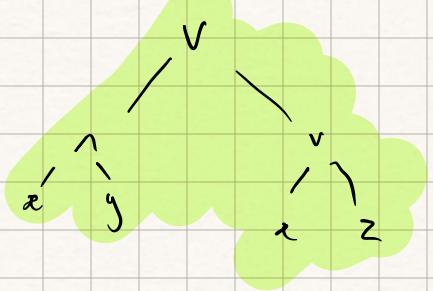
-  $(x \wedge y)$ :



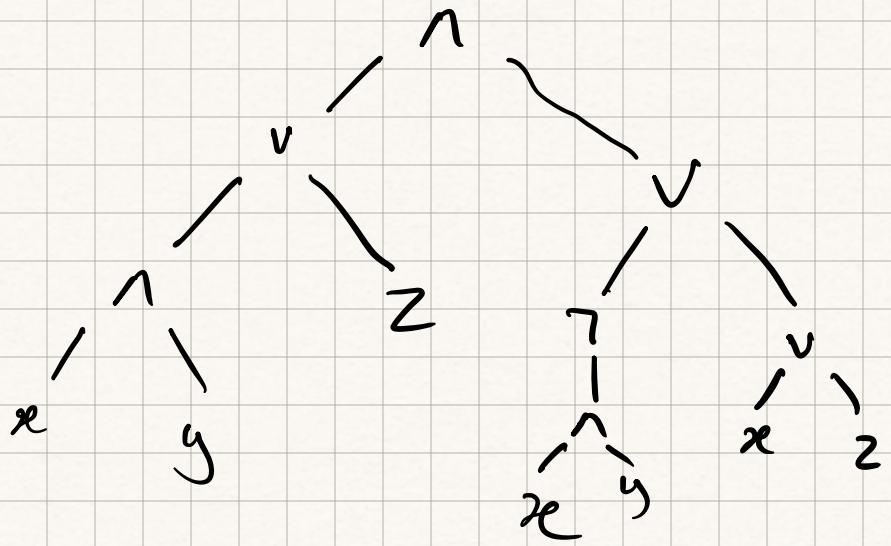
-  $((x \wedge y) \vee z)$  :



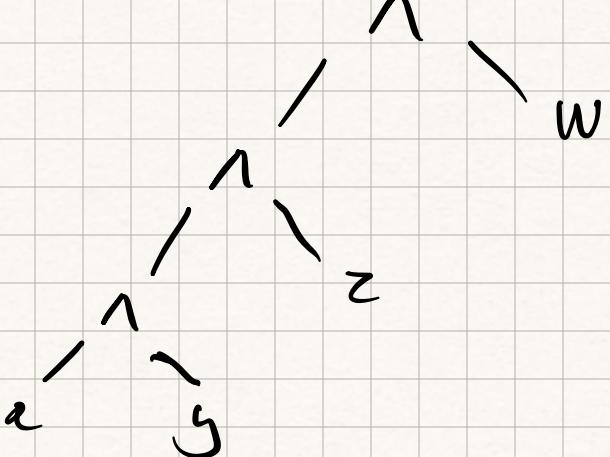
$$- ((x \wedge y) \vee (\neg(x \vee z) \wedge (\neg(x \wedge y) \vee (x \vee z))))$$



$$- ((x \wedge y) \vee z) \wedge (\neg(x \wedge y) \vee (x \vee z))$$



$$- (((x \wedge y) \wedge z) \wedge w)$$



$$(p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$$

$$(p \Leftrightarrow q) = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

si  $p$  alors  $q$

$$(p \Rightarrow q)$$

$q$  si  $p$

$$(p \Rightarrow q)$$

$q$  seulement si  $p$

$$(p \Leftarrow q) \text{ ou } (q \Rightarrow p)$$

$q$  uniquement si  $p$

$$(p \Leftarrow q) \text{ ou } (q \Rightarrow p)$$

$q$  si et seulement si  $p$

$$(p \Leftrightarrow q)$$

exemple :

$$((x \wedge z) \Leftrightarrow y)$$

$$= (((x \wedge z) \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow (x \wedge z)))$$

$$= ((\neg(x \wedge z) \vee y) \wedge (\neg y \vee (x \wedge z)))$$

Si Ulysse voyage

$$p \Rightarrow q$$

Bleury

g

### Ex 3

Formaliser : donner un sens stricte

1<sub>y</sub> Je serai heureux :  $x$

J'étudie la logique :  $y$

Si j'étudie la logique, alors je serai heureux

$\Rightarrow (y \Rightarrow x)$

1.4 :  $y \Leftrightarrow x$

2<sub>y</sub> il pleut :  $x$

on annulera :  $y$

Marie insistera :  $z$

2.1  $x \Rightarrow y$

2.2 :  $(\neg x \Rightarrow (\neg z \wedge y))$

2.3 :  $(x \vee \neg x)$

2.4 :  $(z \Rightarrow x)$

3.7 Le soleil brille :  $x$

les nuages font  $y$

3.1  $y \Rightarrow x$

3.2  $x \Rightarrow y$  ou  $y \Leftarrow x$

3.3  $(x \vee \neg y)$

3.4  $(x \wedge \neg x)$