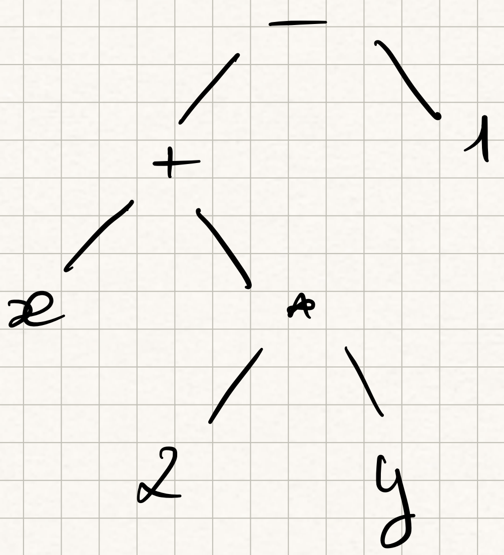
Syntaxe

concrète $(x + 2y) - 1$

abstraite



Sémantique

$[\![e]\!]^C$ ← contexte d'évaluation

↑ expression

Exemple $x = 1$, $y = 2$

$[\![(x+2y)-1]\!]^{[\frac{1}{x}, \frac{2}{y}]}$

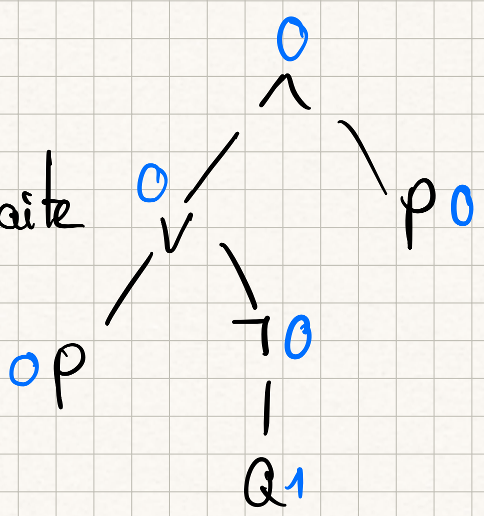
$= 4 \in \mathbb{N}$

Logique propositionnelle

Syntaxe

Concrète $(P \vee \neg Q) \wedge P$

abstraite



Syntaxe

$[\![\varphi]\!]^I$

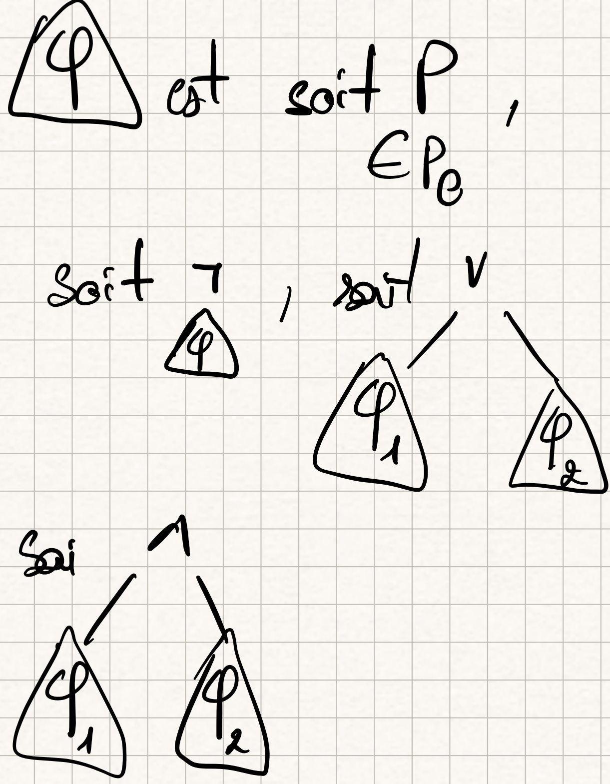
Exemple

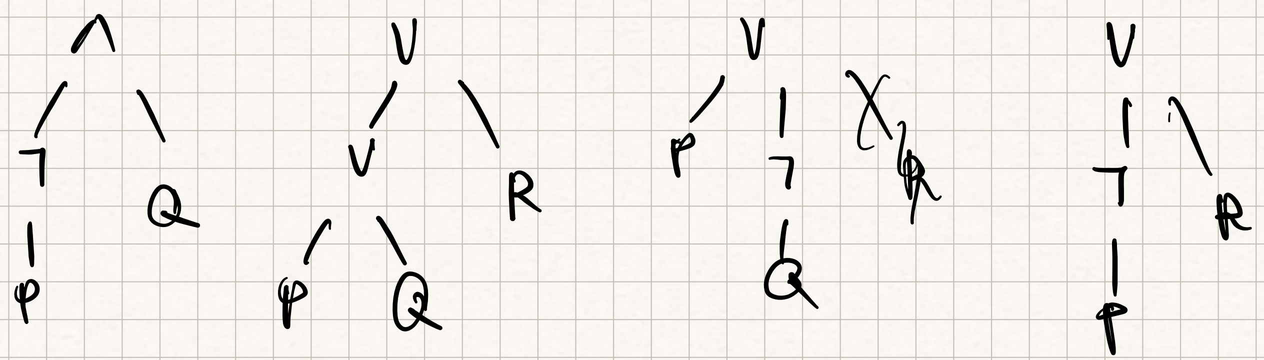
$[\![(P \vee \neg Q) \wedge P]\!]^{[0/P, 1/Q]}$

$= 0 \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$

valeur de vérité

Déf : Soit P_0 un exemple de symboles de propositions (variables propositionnelles) infini dénombrable

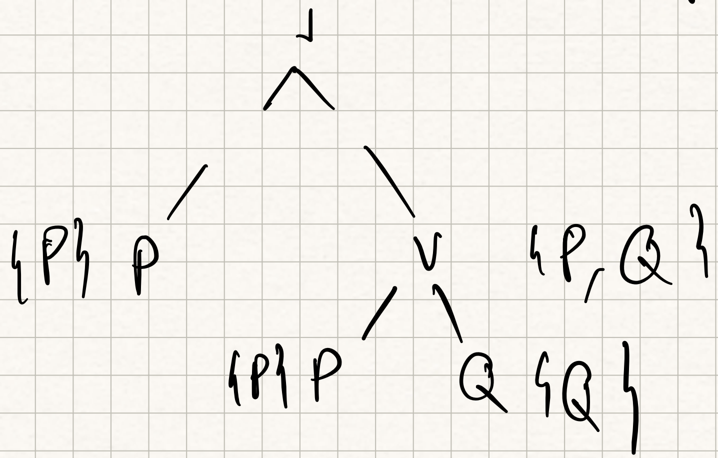




Syntaxe abstraite

$$\varphi ::= \underset{\in P_0}{P} \mid \neg \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi$$

$F_P(\varphi) \overset{def}{=} \{ P \in P_0 \mid P \text{ apparait dans } \varphi \}$



On peut définir $F_p(\varphi)$ pour induction structurelle sur φ

$F_p(P) \overset{def}{} \{P\}$

$F_p(\neg\varphi) \overset{def}{} F_p(\varphi)$

$F_p(\varphi \vee \varphi) \overset{def}{} F_p(\varphi) \cup F_p(\varphi)$

$F_p(\varphi \wedge \varphi) \overset{def}{} F_p(\varphi) \cup F_p(\varphi)$

<u>Def</u> : Une interpretation propositionelle est une fonction $I : \mathcal{P}_0 \to \mathbb{B} = \{0, 1\}$

On note $P^I \overset{def}{=} I(P)$

Déf : sur $\mathbb{B}$, on a les fonctions

not : $\mathbb{B} \to \mathbb{B}$! de type bool - bool

or : $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ || bool × bool → bool

and : $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ && ....

Def : La <u>sémantique</u> $[\![\varphi]\!]^I \in \mathbb{B}$ d'une formule prop φ dans une interprétation I est définie par induction structurelle par

$[\![P]\!]^I \overset{def}{} P^I$

$[\![\neg\varphi]\!]^I \overset{def}{} \text{not}([\![\varphi]\!]^I)$

$[\![\varphi \vee \varphi]\!]^I \overset{def}{} \text{or}([\![\varphi]\!]^I, [\![\psi]\!]^I)$

$[\![\varphi \wedge \psi]\!]^I \overset{def}{=} \text{and}([\![\varphi]\!]^I, [\![\psi]\!]^I)$

b_1	b_2	$\text{not}(b_1)$	$\text{or}(b_1, b_2)$	$\text{and}(b_1, b_2)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Proposition : Soit φ une formule proposition

Si I et I' sont deux interprétations telles que $p^I = p^{I'}$ pour tout $p \in F_p(\varphi)$

alors $[\![\varphi]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I'}$

Preuve : Par induction structurelle sur φ

- case de base $\varphi \in \mathcal{P}_0$: $\varphi = p \in F_p(\varphi)$

$$[\![p]\!]^I = p^I \underset{p \in F_p(\varphi)}{=} p^{I'} = [\![p]\!]^{I'}$$

- cas de $\neg\varphi$: $F_p(\neg\varphi) = F_p(\varphi)$

$$[\![\neg\varphi]\!]^I = \text{not}([\![\varphi]\!]^I) \overset{\text{hypo induc}}{=} \text{not}([\![\varphi]\!]^{I'})$$

- cas de $\varphi \vee \psi$: $F_p(\varphi \vee \psi) = F_p(\varphi) \cup F_p(\psi)$

$$[\![\varphi \vee \psi]\!]^I = \text{or}([\![\varphi]\!]^I, [\![\psi]\!]^I) \overset{\text{hypo induc}}{=} \text{or}([\![\varphi]\!]^{I'}, [\![\psi]\!]^{I'}) = [\![\varphi \vee \psi]\!]^{I'}$$

car pour tout $p \in F_p(\varphi) \subseteq F_p(\varphi \vee \psi)$, $p^I = p^{I'}$

donc $[\![\varphi]\!]^I \overset{h.i}{=} [\![\varphi]\!]^{I'}$

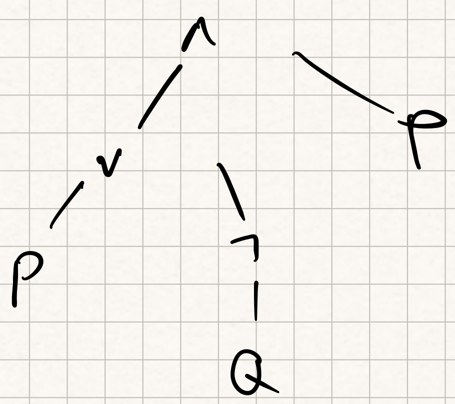
et

pour tout $P \in f_p(\psi) \subseteq f_p(\varphi \vee \psi)$,

$P^I = P^{I'}$ donc $[\![\psi]\!]^I \overset{h.r.}{=} [\![\psi]\!]^{I'}$

- cas de $\varphi \wedge \psi$: idem

Tables de vérité



les interprétations possibles de $f_p(\varphi)$

	P	Q	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$(P \vee \neg Q) \wedge P$
I_1	0	0	1	1	0
I_2	0	1	0	0	0
I_3	1	0	1	1	1
I_4	1	1	0	1	1
	$1/P$	$1/Q$	$[\![\neg Q]\!]^{I_4}$	$[\![P \vee \neg Q]\!]^{I_4}$	$[\![(P \vee \neg Q) \wedge P]\!]^{I_4}$

Fonctions booléennes

fonction de type $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, $n > 0$

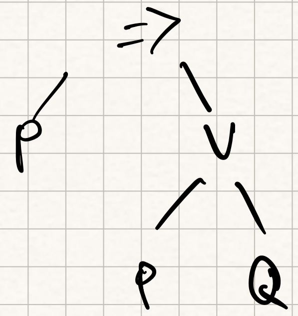
sémantique $[\![\cdot]\!]^I$: Formules $\to \mathbb{B}$)

$[\![\varphi]\!]^{\cdot}$: Interprétations $\to \mathbb{B}$

$\mathbb{B}^{fp(\varphi)} \to \mathbb{B}$

b_1	b_2	0	1	xor	nand	implé	equiv
0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1

concrete



abstraite $\varphi ::= \underset{\in \mathcal{P}_0}{P} \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \bot \mid \top$

$\mid \varphi \oplus \varphi \mid \varphi \uparrow \psi \mid \varphi \Rightarrow \varphi \mid \varphi \Leftrightarrow \varphi$