Feuille 6 : Probabilités

Exercice 1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard. Les évènements "tirer un nombre pair" et "tirer un multiple de 3" sont ils indépendants ? La réponse change t-elle s'il y a 13 boules ?

Exercice 2. On a un espace probabilisé dont l'univers Ω est de cardinal p, un nombre premier, avec la loi de l'équiprobabilité. Est-il possible de trouver deux évènements qui ne sont ni $\emptyset$ ni Ω qui sont indépendants ?

Exercice 3. Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire 3 boules successivement et sans remise.

1. Définir un espace probabilisé décrivant cette situation.
2. Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules blanches
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire au 2e tirage.
4. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire au 2e tirage, sachant que la première est blanche.

Exercice 4. On lance un dé rouge et un dé noir. Soient les évènements suivants :
A="La somme des dés vaut 6"
B="La somme est un multiple de 3"
C="La somme est paire"
Calculer $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(B \cap C)$.

Exercice 5. On lance deux dés. Quelle est la probabilité que l'un donne 6, sachant que les deux résultats sont différents ?

Exercice 6. Alice propose à Bob le jeu suivant : il tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 52. Si l'as de pique figure parmi les cartes, il a gagné.

1. Quelle est la probabilité que Bob gagne ?
2. Alice essaie de tricher en retirant 10 cartes au hasard du jeu. Quelle est maintenant la probabilité que Bob gagne ? Expliquer pourquoi la probabilité n'a pas changée.

Exercice 7. Alice et Bob, qui sont colocataires, jouent chaque jour à pile ou face pour décider qui fait la vaisselle. Alice sait que Bob triche 30% du temps en utilisant une pièce truquée qui lui permet de gagner avec 75% de chances.

1. Quelle est la probabilité que Bob gagne un jour donné ?
2. Il gagne 7 jours d'affilée. Quelle est la probabilité qu'il ait triché au moins une fois ?

Exercice 8. Felicity développe un filtre anti-spam. Elle sait que 80% des emails sont des spams. Elle sait aussi que 30% des spams contiennent le mot "promotion" contre seulement 0.01% des e-mails qui ne sont pas des spams. Quelle est la probabilité qu'un e-mails contenant le mot "promotion" soit un spam ?

Exercice 9. La Joconde a été volée. On pense l'avoir retrouvé plus tard, mais on estime qu'il y a 20% de chances que ça soit une copie, et on fait appel à deux expertes pour l'authentifier. On suppose que leurs avis sont indépendants. La première, qui se trompe 1 fois sur 5, déclare que le tableau est authentique. La seconde, qui se trompe 2 fois sur 11, déclare que c'est une copie. Quelle est la probabilité que le tableau soit authentique ?

Mercredi 8h51 12/04

$(\Omega, \mathcal{T}, P)$

Ω : univers

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ tribus

$P \longrightarrow$ probabilité : $P : \mathcal{T} \longrightarrow [0,1]$

+ propriété

$A, B \in \mathcal{T}$ sont indépendants

1) $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

2) $P(A) = P(A \mid B) \to$ P(A) sachant que P(B) déjà produit

3) $P(B) = P(B \mid A)$

Ex 1 :

$\Omega = \{1, \dots, 12\}$

Si $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{|A|}{\Omega}$$

Exemple :

A = " On tire un nbr pair "

B = " On tire un multiple de 3 "

On calcule

$$\underbrace{\{1 \ldots 12\}}_{12}$$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$B = \{3, 6, 9, 12\}$

$C = A \cap B = \{6, 12\}$

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(C) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A).P(B)$$

Donc A et B sont indépendant

$\Omega' = \{1, \ldots, 13\}$

$$P'(A) = \frac{|A|}{|\Omega'|} = \frac{|A|}{13}$$

$$P'(A) = \frac{6}{13} \qquad P'(B) = \frac{4}{13} \qquad P'(C) = \frac{2}{13}$$

$$P'(A).P'(B) = \frac{6}{13} \times \frac{4}{13} = \frac{24}{169} \neq \frac{2}{13}$$

Ex2

Soient $A, B \subset \Omega$

avec $|\Omega| = p$ premier

$0 < |A|, |B| < p$

On calcule $P(A \cap B) = \dfrac{\overbrace{|A \cap B|}^{\geq 0 \text{ et } < p}}{p}$

$P(A).P(B) = \dfrac{|A|\cdot|B|}{p^2}$ (sous forme réduite)

Les seuls diviseurs positifs de p^2 sont 1, p et p^2

$p^2 \nmid \ 1 < |A| \cdot |B| < p^2$

Supposons que $p \mid |A|.|B|$

Comme p premier

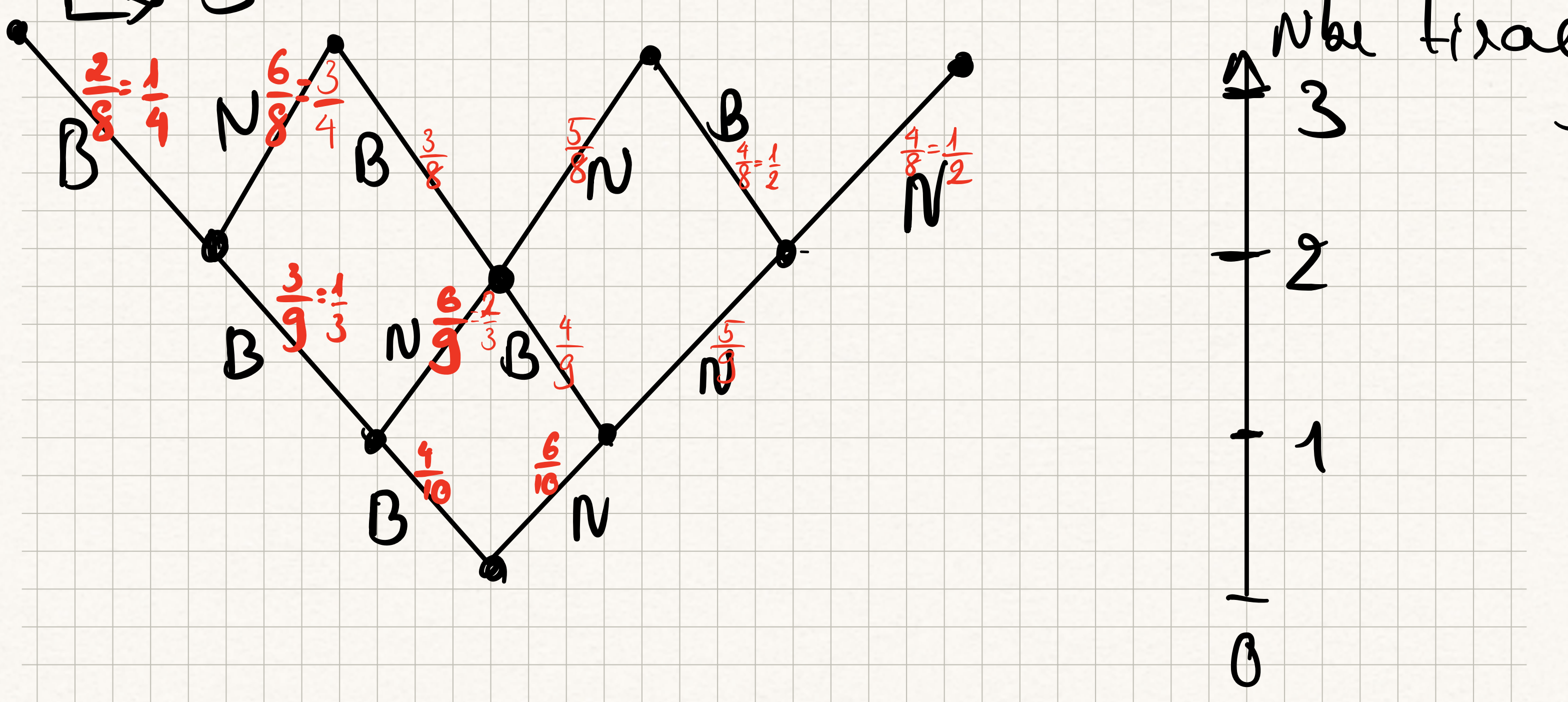
$\Rightarrow p \mid |A|$ ou $p \mid |B|$

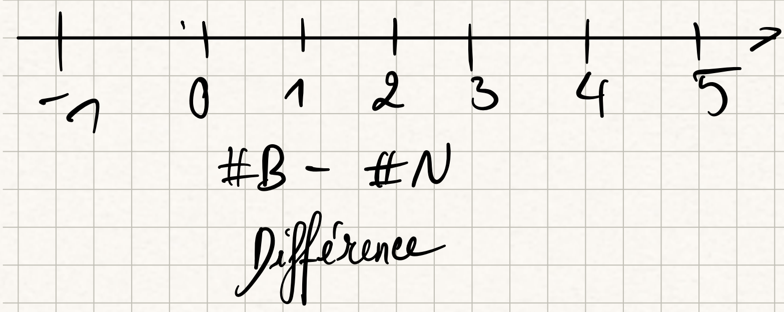
impossible car $0 < |A|, |B| < p$

donc $\dfrac{|A|.|B|}{p^2}$ sous forme réduite

donc $\dfrac{|A|.|B|}{p^2} \neq \dfrac{|A \cap B|}{p}$ donc A et B pas indépendant

Ex 3





$$\Omega = \{(B,B,B),\ (B,B,N),\ (B,N,B),\ (B,N,N),\ (N,B,B),\ (N,B,N),\ (N,N,B),\ (N,N,N)\}$$

$P(\Omega)$

$$P(BBB) = \frac{4}{10} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$$

$$P(BBN) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{1}{10}$$

$$P(BNB) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{4}{10} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{10}$$

$P(BNN) = \frac{4}{10} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{6}$

$P(NBB) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 3}{10 \times 3 \times 3 \times 2 \times 4} = \frac{1}{10}$

$P(NBN) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{3 \times 2 \times 4 \times 5}{2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 4} = \frac{1}{6}$

$P(NNB) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$P(NNN) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

1) $P(BBB) = \frac{1}{30}$

2) $A = \{(BNB), (BNN), (NNB), (NNN)\}$

$P(A) = \frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

3) $P((-,N,-) | (B,-,-))$

$= \frac{P(B,N,-)}{P(B,-,-)} =$

$$P(B,N,-) = \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$P(B,-,-) = \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$P((B,N,-)|(B,-,-)) = \frac{4}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{2}{3}$$

5 >

$$P((-,N,-)|(-,-,B))$$

$$= \frac{P(-,N,B)}{P(-,-,B)} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{4}{15} \\ \rightarrow \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{2}{5} \end{array}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Ex 4

$\Omega = \{(a,b) \mid \begin{smallmatrix} a \in \{1, \dots, 6\} \\ b \in \{1, \dots, 6\} \end{smallmatrix}\}$

$|\Omega| = 36$

$\mathcal{P}(\Omega)$

$P(A) = \dfrac{|A|}{36}$

A = la somme vaut 6

$A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$P(A) = \dfrac{5}{36}$

$B = \{(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3), (3,6)$
$, (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (6,3), (6,6)\}$

$P(B) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$

$|C| = 18$

$P(C) = \dfrac{1}{2}$

$A \cap B$: La somme vaut 6 et la somme est multiple de 3"

$\parallel$

A

$P(A \cap B) = P(A) = \frac{5}{36}$

B = " La somme est multiple de 3 "

C = " La somme est multiple de 2 "

$B \cap C$ = " La somme est un multiple de 6

$P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

D: " La somme est multiple de 5 "

$\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (4,6), (5,5), (6,4)\}$

$P(D) = \frac{7}{36}$, $P(C) = \frac{1}{2}$

$P(C \cap D) = \frac{3}{36}$

Ex 6

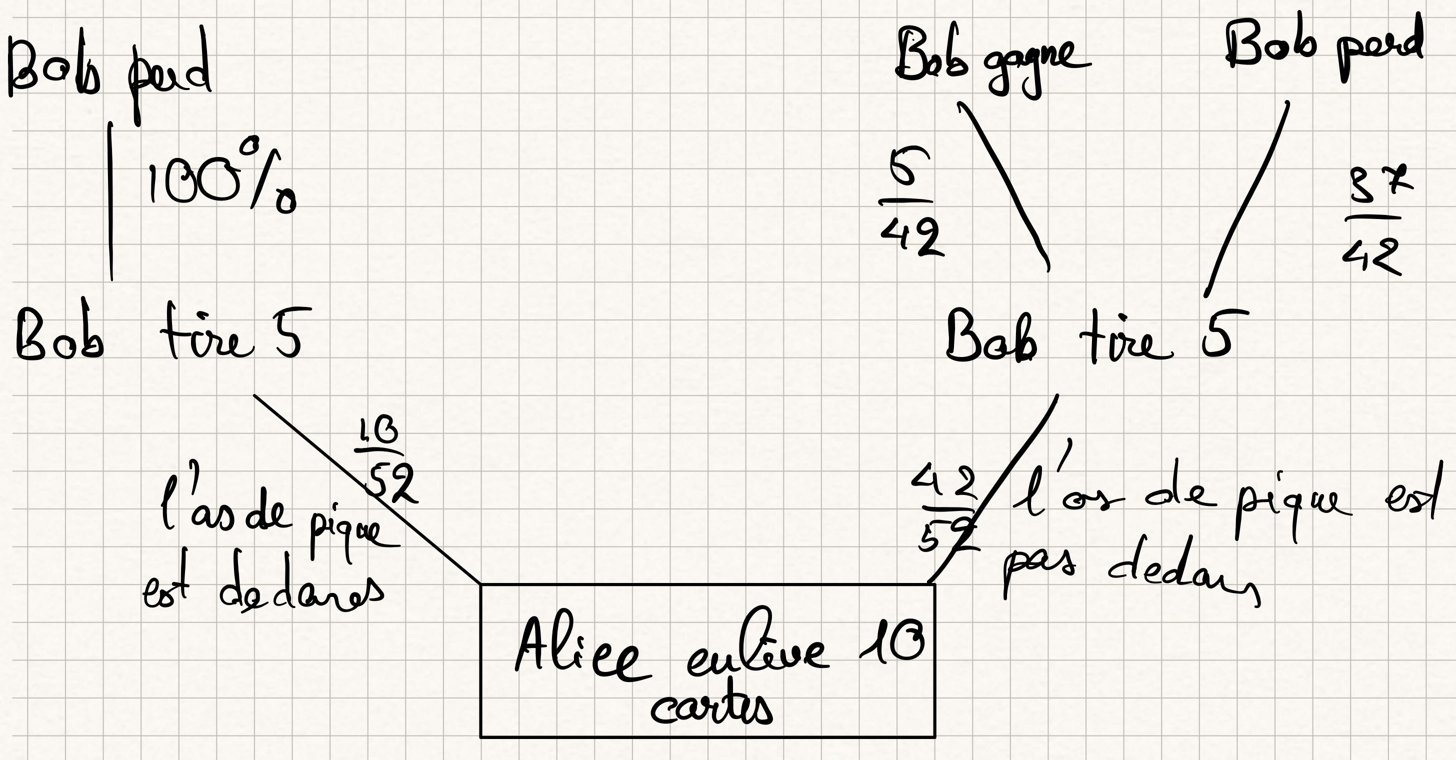
Ω : l'ensemble des mains possibles : $\binom{52}{5} = \dfrac{52!}{5! \times (52-5)!}$

$$= \frac{52 \times 51 \times 50 \times \dots \times 1}{5!}$$

A : " la main contient l'as de pique "

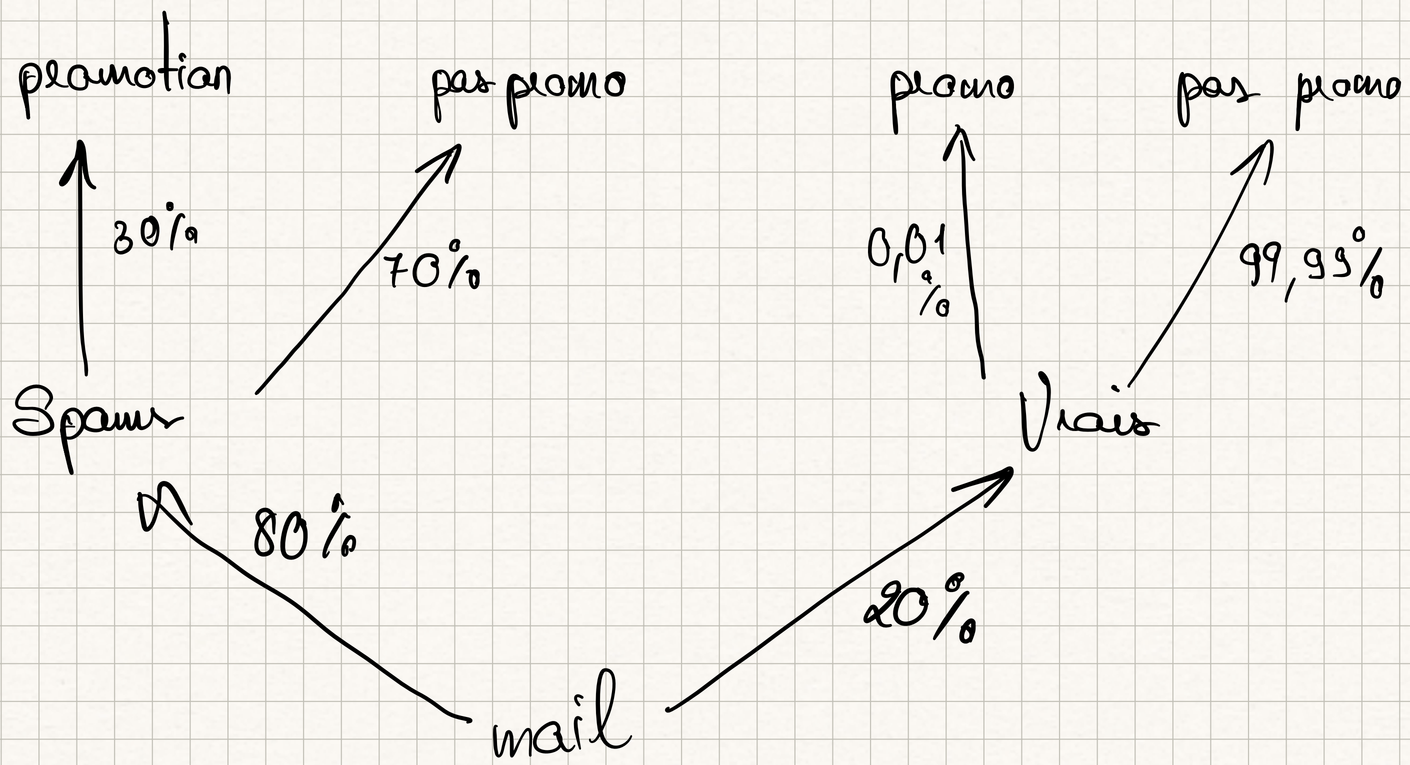
$|A| = \binom{51}{4}$

$$P(A) = \frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}} = \frac{\dfrac{51!}{4! \times \underbrace{\cancel{(51-4)!}}_{47!}}}{\dfrac{52!}{5! \times \underbrace{\cancel{(52-5)!}}_{47!}}} = \frac{51!}{52!} \times \frac{5!}{4!} = \frac{5}{52}$$



$$P(\text{Bob gagne}) = \frac{5}{42} \times \frac{42}{52} = \frac{5}{52}$$

Ex 8



Promo : "le mot promo est dans le mail"

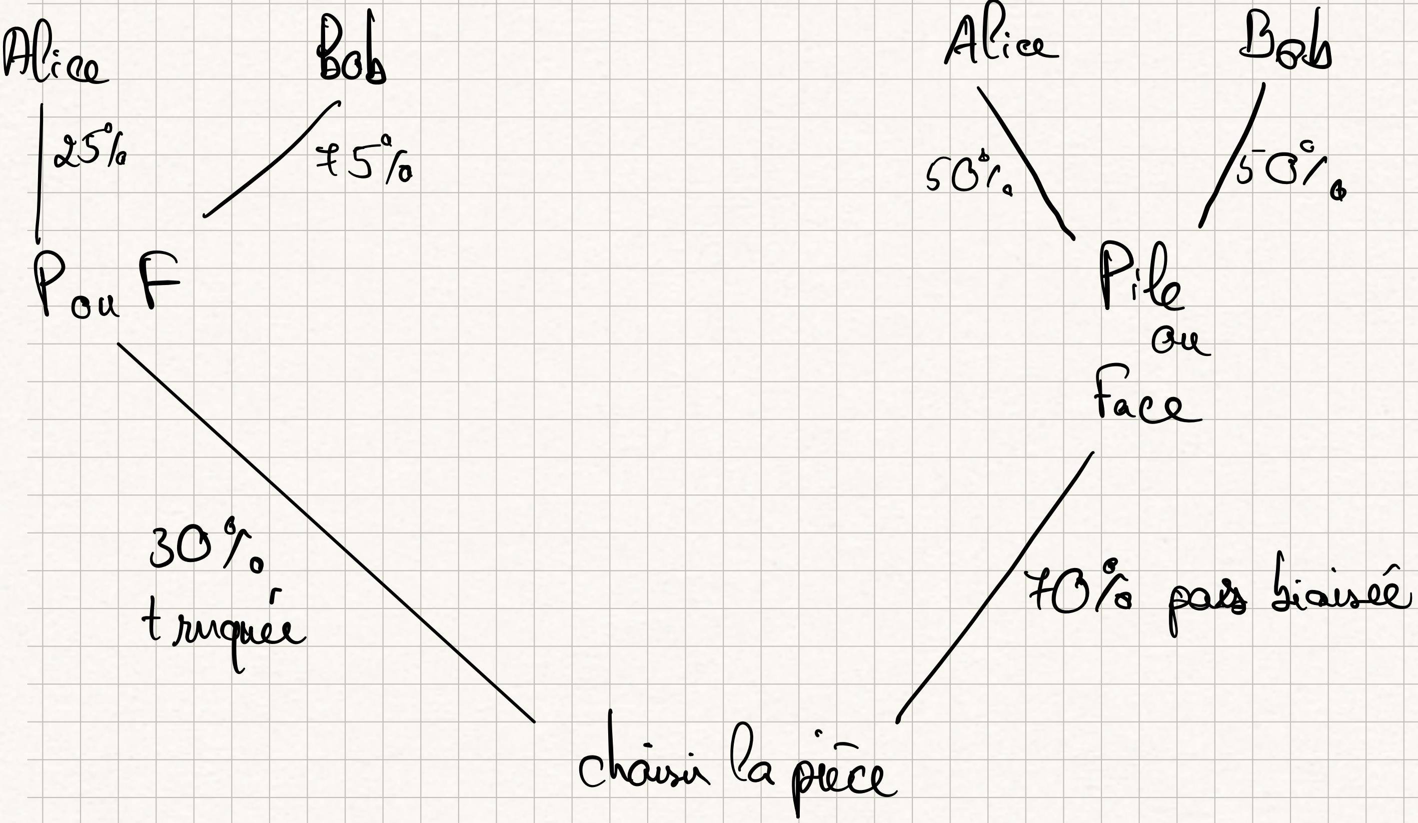
Spam : "le mail est un spam"

$$P(\text{Spam} \mid \text{Promo}) := \frac{P(\text{Spam} \cap \text{Promo})}{P(\text{Promo})}$$

$$:= \frac{0,3 \times 0,8}{0,3 \times 0,8 + 0,2 \times 0,0001}$$

$> 99,99\,\%$

Ex7



$$P(\text{Bob gagne}) = \frac{3}{4} \times \frac{30}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{70}{100} = 0,575 > \frac{1}{2}$$

$$P(\overbrace{\text{pièce truquée au moins 1 fois}}^{\text{triche}} \mid 7 \text{ victoires})$$

$$P(7 \text{ victoires} \mid \text{pas truquée}) = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$P(7 \text{ victoires}) = (0,575)^7$$

$$P(\text{triche} \mid 7 \text{ vict}) + P(\text{pas triche} \mid 7 \text{ vict}) = 1$$

$$\parallel$$

$$\frac{P(\text{pas triche} \cap 7 \text{ vrai})}{P(7 \text{ vrai})}$$

On sait que

$$\frac{P(\text{pas triche} \cap 7 \text{ vrai})}{P(\text{pas triche})} = P(7 \text{ vrai} \mid \text{pas triche})$$

$$P(\text{pas triche}) = (0,7)^7$$

$$P(\text{triche} \mid 7 \text{ vrai}) = \left(\frac{P(7 \text{ vrai} \mid \text{pas triche}) \times P(\text{pas triche})}{P(7 \text{ vrai})}\right)$$

$$= 1 - \frac{(0,5)^7 \times (0,7)^7}{(0,575)^7} = 1 - \underbrace{\left(\frac{0,35}{0,575}\right)^7}_{0,031}$$

$$\approx 96,9\%$$

$$P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$
$$= P(A \cap B)$$