



Mathématiques discrètes

QCM n° 1

Durée : 15 minutes

Énoncé constitué de 5 questions. Pour chaque question, zéro, une ou plusieurs options peuvent être correctes. Colorier entièrement les cases de votre choix.

Nom :

Prénom :

Groupe :

Question 1 ♣ La relation d'ordre strict ($a < b$) sur l'ensemble des entiers \mathbb{Z} est-elle bien-fondée ?

☐ Oui ☐ Non

Question 2 ♣ Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(n) = 2f(n-1) + f(n-2)$ quand $n \geq 2$. On souhaite montrer par récurrence que $2\sqrt{2}f(n) = (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n$. Pour les cas de base, on a $(1 + \sqrt{2})^0 - (1 - \sqrt{2})^0 = 1 - 1 = 0$ et $(1 + \sqrt{2})^1 - (1 - \sqrt{2})^1 = 2\sqrt{2}$. Pour l'hérédité, on a

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}f(n) &\stackrel{(A)}{=} 2\sqrt{2}(2f(n-1) + f(n-2)) \stackrel{(B)}{=} 2((1 + \sqrt{2})^{n-1} - (1 - \sqrt{2})^{n-1}) + (1 + \sqrt{2})^{n-2} - (1 - \sqrt{2})^{n-2} \\ &\stackrel{(C)}{=} (1 + \sqrt{2})^{n-2}(2(1 + \sqrt{2}) + 1) - (1 - \sqrt{2})^{n-2}(2(1 - \sqrt{2}) + 1) \stackrel{(D)}{=} (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n. \end{aligned}$$

Dans quelle étape de la preuve utilise-t-on l'hypothèse de récurrence ?

☐ (A) ☐ (B) ☐ (C) ☐ (D)

Question 3 ♣ Soient A, B, C trois ensembles. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont toujours égaux à $A \cap (B \cup C)$?

- ☐ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
☐ $A \cap B \cap C$
☐ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
☐ $A \cup (B \cap C)$

Question 4 ♣ Soit M_n le nombre de mots de longueur n dans un alphabet de cardinalité 3. Quelle est la relation de récurrence satisfaite par la suite M_n ?

- ☐ $M_0 = 1, M_{n+1} = (M_n)^3$ pour $n \geq 1$.
☐ $M_0 = 1, M_{n+1} = nM_3$ pour $n \geq 1$.
☐ $M_0 = 1, M_{n+1} = 3M_n$ pour $n \geq 1$.
☐ $M_0 = 0, M_{n+1} = 3M_n$ pour $n \geq 1$.

Question 5 ♣ Soit f une fonction $f : A \rightarrow B$. Que peut-on conclure sur les cardinaux de A et B ?

- ☐ $|A| = |B|$
☐ Aucune de ces réponses
☐ $|A| \geq |B|$
☐ $|A| \leq |B|$
☐ $|A| = |B|$