L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \geq 2$ un entier

Rappelons que pour un entier $a \in \mathbb{Z}$

On note $\bar{a} = {}^n\bar{a}$ la classe de congruence de a modulo n

c'est à dire l'ensemble:

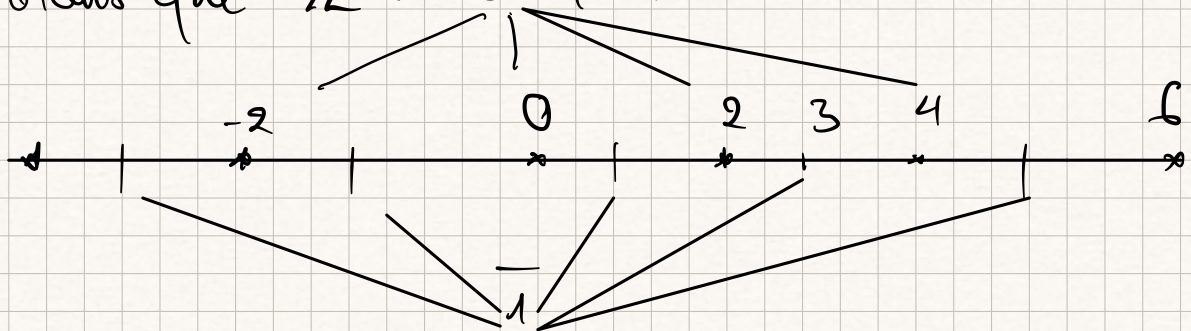
$$\bar{a} = {}^n\bar{a} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \mod n \}$$

Exemples: 1) $n = 2$: on a exactement 2 classes de congruences

$$\bar{0} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv 0 \mod 2 \} = \{\text{entier pair}\}$$

$$\bar{1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv 1 \mod 2 \} = \{\text{entier impair}\}$$

Notons que $\mathbb{Z} = \bar{0} + \bar{1}$



2) $n = 3$: On a exactement 3 classes de congruences

$$\bar{0} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv 0 \mod 3 \} = \{\text{multiple de } 3\} = 3\mathbb{Z}$$

$$\bar{1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv 1 \mod 3 \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid \text{le reste de } b \text{ dans la div eucl par 3 vaut } 1 \}$$

$$= \{ \dots -5, -2, 1, 4, 7, 10 \dots \}$$

$$= 1 + 3\mathbb{Z}$$

$= \{1 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\bar{2} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv 2 \mod 3\}$
$= \{b \in \mathbb{Z} \mid$ le reste de b dans la div eucl par 3 vaut 2$\}$
$= \{\ldots -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$
$= 2 + 3\mathbb{Z}$
$= \{2 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3) De façon générale, il existe exactement n classes de congruence modulo n, à savoir $\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}$

Rappelons que :

$$^{n}\bar{a} = {}^{n}\bar{b} \iff a \equiv b \mod a$$

Exemple $^{3}\bar{2} = {}^{3}\overline{-1} = {}^{3}\bar{5}$

Def : l'addition des classes de congruences modulo n est l'applicat[ion]

$$+ \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto \bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$$

Exemples $^{7}\bar{5} + {}^{7}\bar{2} = {}^{7}\overline{5+2}$
$= {}^{7}\bar{7} = {}^{7}\bar{0}$