Université de Paris
Licence L2 Informatique

UFR de Mathématiques
2022-2023

# Feuille d'exercices 3

***Exercice* 1 :**

(1) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ le sous-ensemble suivant est-il un sous-espaces vectoriel ?

$$E_1 = \{ (x,y) \; : \; 2x - y = 0 \}$$

(2) On considère l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel réel. Le sous-ensemble suivant en est-il un sous-espaces vectoriel ?

$$E_2 = \{ f \; : \; f(0) = 1 \}$$

***Exercice* 2 :** On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$a = (1,2,-1,-2)$ , $b = (2,3,0,-1)$ , $c = (1,2,1,3)$ , $d = (1,3,-1,0)$ et $e = (4,8,0,2)$ .

Montrer que $e$ est une combinaison linéaire des vecteurs $a,b,c,d$ . Le système $\{a,b,c,d\}$ est-il générateur dans $\mathbb{R}^4$ ? Forme-t-il une base de $\mathbb{R}^4$ ?

***Exercice* 3 :** Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, le vecteur $x = (2,3,1,5)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs

$$a = (1,3,1,2), \qquad b = (2,5,1,1), \qquad c = (3,1,4,2), \qquad d = (3,2,5,5) \; ?$$

***Exercice* 4 :** Trouver une relation de dépendance linéaire entre les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ :

$$a = (3,1,-1), \qquad b = (-1,1,2), \qquad c = (1,-1,1), \qquad d = (5,-2,3)$$

***Exercice* 5 :** Trouver un système d'équations du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$a = (1,-1,1,0) \; , \; b = (1,1,0,1) \; , \; c = (2,0,1,1) \; .$$

***Exercice* 6 :** Pour chacune des suites de vecteurs suivantes, dans les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ , on indiquera s'il s'agit d'un suite libre, génératrice, d'une base ; si l'on montre que la suite est liée, on donnera une relation linéaire explicite entre les $v_j$. Le cas échéant, on devra discuter suivant le paramètre $m$.

(1) $v_1 = (2,3,4)$ , $v_2 = (-1,-5,-7)$ , $v_3 = (3,1,1)$ ,
(2) $v_1 = (1,2,-1,0)$ , $v_2 = (4,5,0,1)$ , $v_3 = (2,1,2,1)$ ,
(3) $v_1 = (1,-1,2,4)$ , $v_2 = (0,3,-1,5)$ , $v_3 = (-1,0,2,6)$ ,
(4) $v_1 = (4,3,3,6)$ , $v_2 = (1,1,-1,-2)$ , $v_3 = (4,2,10,m)$ ,
(5) $v_1 = (1,2,-1,-2)$ , $v_2 = (2,3,0,-1)$ $v_3 = (1,3,-1,0)$ , $v_4 = (1,2,1,m)$ .

***Exercice* 7 :** Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ . On considère le sous-espace $F$ engendré par les vecteurs $(1,2,-1,0)$ , $(4,8,-4,-3)$ , $(0,1,3,4)$ et $(2,5,1,4)$ . Extraire de ce système générateur de $F$ un système de vecteurs libres.

***Exercice* 8 :** On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ . Trouver une base puis donner la dimension de la partie $F$ formée des vecteurs $(x,y,z)$ qui vérifient l'identité $2x-y-2z=0$ .

***Exercice* 9 :** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ , trouver une base puis donner la dimension du sous-espace vectoriel $F$ formé des $(x,y,z,t)$ qui vérifient $x-y=0$ et $z-t=0$ .

# Espace vectoriel

$E$ un ensemble avec

* Loi de composition interne : $+$

tq - $\exists!\ 0 \in E$, $0 + a = a$ $\forall a \in E$

- $\forall a \in E$ $\exists -a \in E$ $a + (-a) = 0$

- $(a+b)+c = a+(b+c)$

* Loi de composition externe $*$

$\mathbb{R} \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\lambda, a) \longmapsto \lambda . a$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in E$

tq $-\lambda(a+b) = \lambda . a + \lambda . b$

$0 . a = 0$

$\lambda(u - a) = (\lambda, 1) - a$

Ex 1

1) Dans $\mathbb{R}^2$

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 2x - y = 0 \right\}$

est-il un sous-espaces vectoriel

Vérification $*$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$

et $*$ Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E_1$

alors $x + \lambda y \in E_1$

-> oui car $2 \times 0 - 0 = 0$

donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$x + \lambda y = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \end{pmatrix}$$

$$2(x_1 + \lambda y_1) - (x_2 + \lambda y_2)$$

$$= \underbrace{(2x_1 - x_2)}_{0} + \lambda \underbrace{(2y_1 - y_2)}_{0}$$

$$= 0$$

Donc $x + \lambda y \in E_1$

$$2 \triangleright \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$$

$f \cdot g \qquad f + g$

$$f+g(x) = f(x)+g(x)$$

$$\lambda f(x) \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f(0) = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

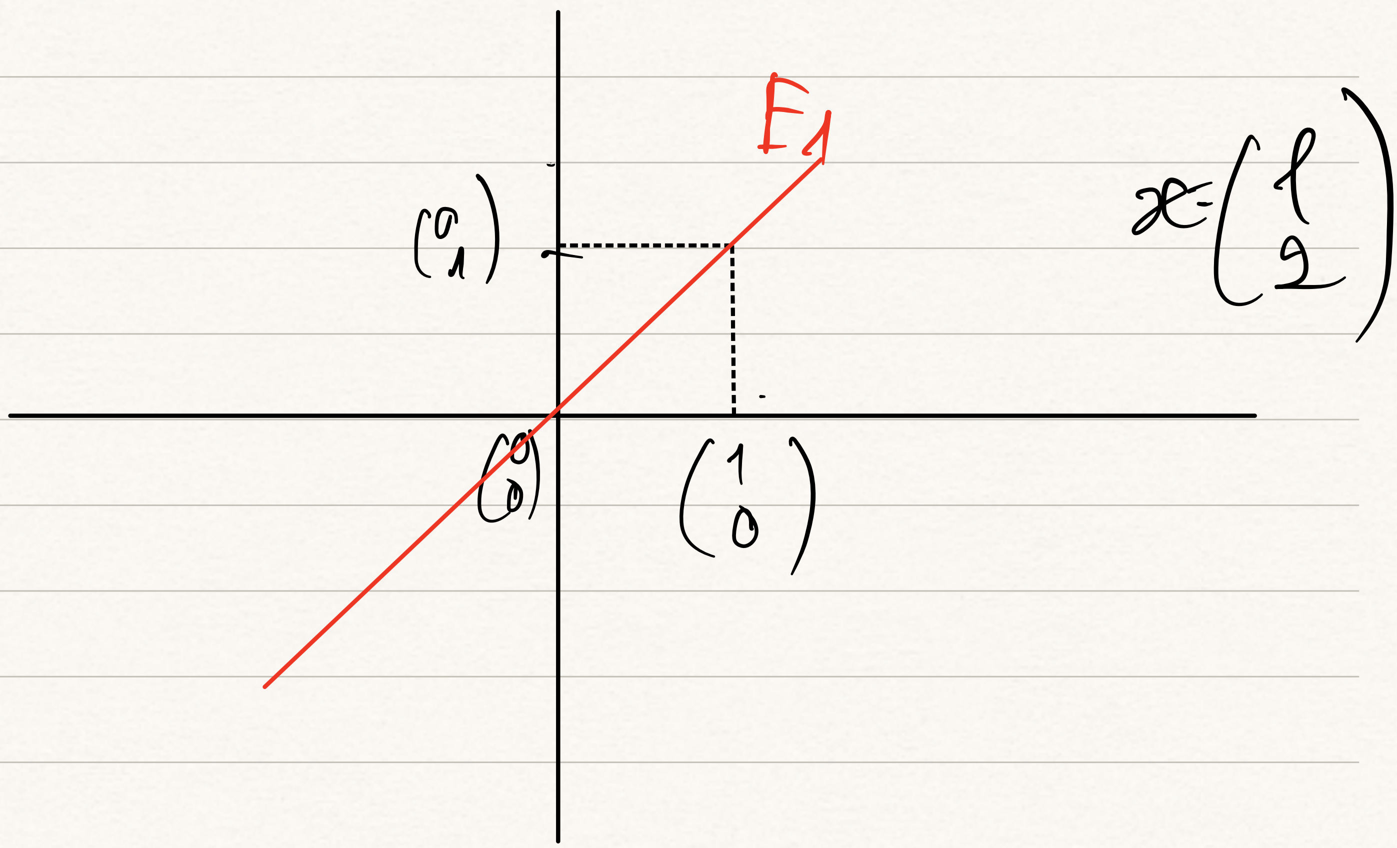
$$f = 0 \quad \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$\cos \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$\underline{\mathbb{1}} \xrightarrow{} \mathbb{1} \text{ indicatrice}$$

$$[0 ; +\infty[ \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$\mathbb{1}_x (y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin x \\ 1 & \text{si } y \in x \end{cases}$$



Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$E_3 = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f(0) = 0 \}$$

* $0 \in E_3$

* $\lambda \in \mathbb{R}$

  $f, g \in E_3$

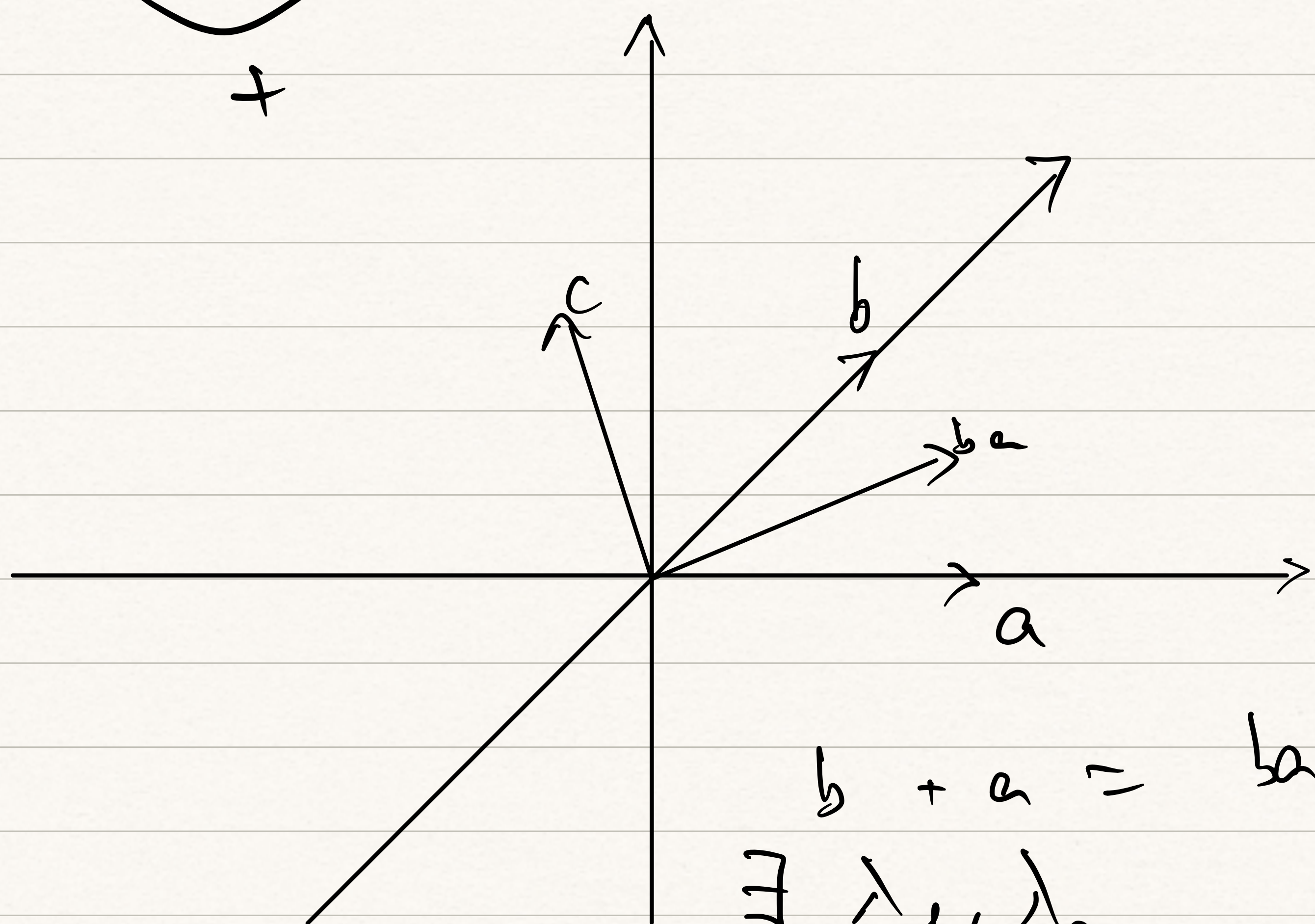
$$(f + \lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0)$$
$$= f(0) + \lambda g(0)$$
$$= 0 + \lambda . 0$$
$$= 0$$

Ex 2

Dans $\mathbb{R}^4$

$$\underbrace{a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{+} \quad \underbrace{d = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{+} \quad \underbrace{b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{+}$$

$$c = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{+} \qquad e = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad a + b + b + c = e$$




$b + a = ba$

$\exists\ \lambda_1, \lambda_2$

tq $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$

$$\lambda_2 b = \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \\ 3\lambda_2 \\ \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$e = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d$$

$$e = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$4 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$$
$$8 = 2\lambda + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4$$
$$0 = -\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4$$
$$2 = -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 + (2)L_1$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + (2)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (4)L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) L_4 \leftarrow L_4 + \left(\frac{-3}{2}\right)L_3$$

a, b, c, d

$\hookrightarrow$ famille génératrice

On a

* $3\lambda_4 = 2 \iff \lambda_4 = \frac{2}{3}$

* $2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 4$

$\iff 2\lambda_3 + 2 \cdot \frac{2}{3} = 4$

$\iff 2\lambda_3 + \frac{4}{3} = 4$

$\iff \lambda_3 = \frac{1}{2}$

* $-\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2}{3}$

* $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 8$

$\iff \lambda_1 = 8 - 2\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4$

$\lambda_1 = 8 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$

$\lambda_1 = \frac{11}{2}$

## Ex 3 :

Dans $\mathbb{R}^4$

$a = (1,3,1,2)$ $\quad x = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d$

$b = (2,5,1,1)$ $\quad x = (2,3,1,5)$

$c = (3,1,4,2)$

$d = (3,2,5,5)$

$$\begin{cases} 2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 \\ 3 = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 \\ 5 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 5\lambda_4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ $\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right.$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 7 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow L_4 \leftarrow L_4 + \left(\frac{-11}{6}\right) L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow 0x \neq \frac{10}{3}$

Pas de solution

Ex 4

$a = (3, 1, -1) \quad c = (1, -1, 1)$

$b = (-1, 1, 2) \quad d = (5, -2, 3)$

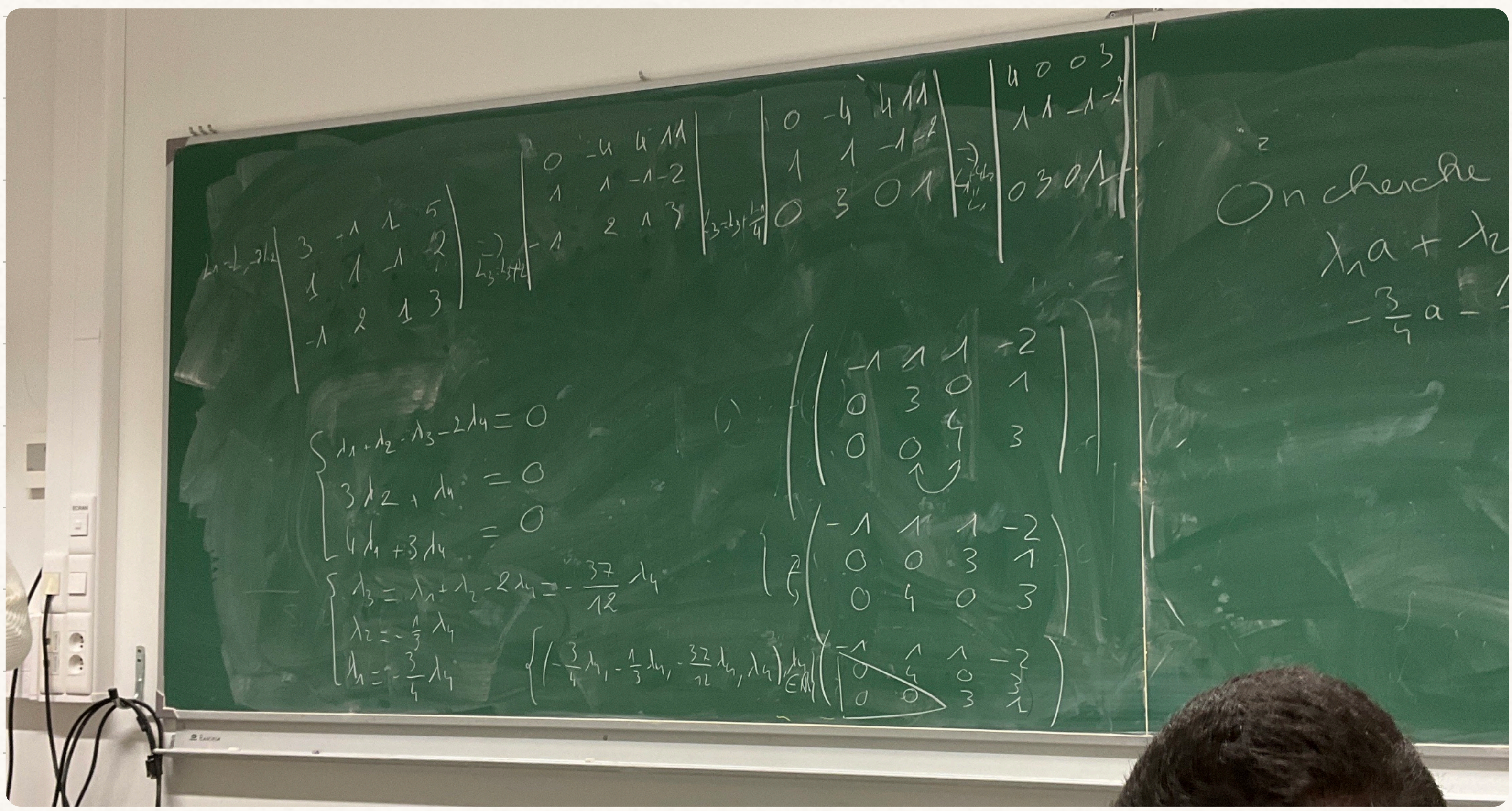
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 14 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



On check

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d = 0$$

$$\frac{-3}{4} a - \frac{1}{3} b - \frac{37}{12} c + d = 0$$

Ex5

$a = (1, -1, 1, 0)$

$b = (1, 1, 0, 1)$

$c = (2, 0, 1, 1)$

$F = \mathrm{Vect}(a, b, c)$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$$

$$\begin{pmatrix} \\ t \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma$ tel que $u = \alpha a + \beta b + \gamma c$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 2 & 2 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4$
$\longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & x + y - 2t \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_4$
$\longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & x + y \\ 1 & 1 & 2 & z + t \\ 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$\longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & x - z - t \\ 0 & 0 & 0 & x + y - 2t \\ 1 & 1 & 2 & z + t \\ 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right)$$

réarranger lignes

$\longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & z + t \\ 0 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & x - z - t \\ 0 & 0 & 0 & x + y - 2t \end{array}\right)$$

Le systèmes des solutions

$$\Rightarrow \begin{cases} x - z - t = 0 \\ x + y - 2t = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{dim } 2$$

$\mathbb{R}^4$ $\quad (a, b, c)$ libre ?

$(1, 0, 0, 0)$

$(0, 1, 0, 0)$

$(0, 0, 1, 0)$

$(0, 0, 0, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{rang } 2$$

$(a, b, c)$ pas libre

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ex 6

$\mathbb{R}^3$

1) $v_1 = (2, 3, 4)$ $\quad F = \mathrm{Vect}(a, b)$

$v_2 = (-1, -5, -7)$

$v_3 = (3, 1, 1)$

$(a, b)$ est génératrice de $F$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$$

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta$ tel que $u = \alpha a + \beta b$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

1 2 3

$$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -7 & 14 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\xrightarrow{\text{réarranger}} \quad \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ \end{array}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{-L_1}{7} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \end{array}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{réarranger}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

rang 2

$\to (v_1, v_2, v_3)$ pas libre

donc pas générateur de $\mathbb{R}^3$

pas une base

$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$

tq $\boxed{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0}$

$$\begin{cases} \lambda_3 + 3\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 - 2\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 \\ \lambda_3 = 2\lambda_1 \end{cases}$$

solutions $\{(\lambda_1, \lambda_1, 2\lambda_1)\ \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$

par ex, pour $\lambda_2 = 1$

$1 v_1 + 1 v_2 + 2 v_3 = 0$

Ex 8

$F \overset{\mathbb{R}^3}{=} \{(x, y, z) \text{ tq } 2x - y - 2z = 0\}$

dimension 2

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tq } y = 2x - 2z \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x - 2z \\ z \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix}, x, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Base : $\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{rang } 2$$

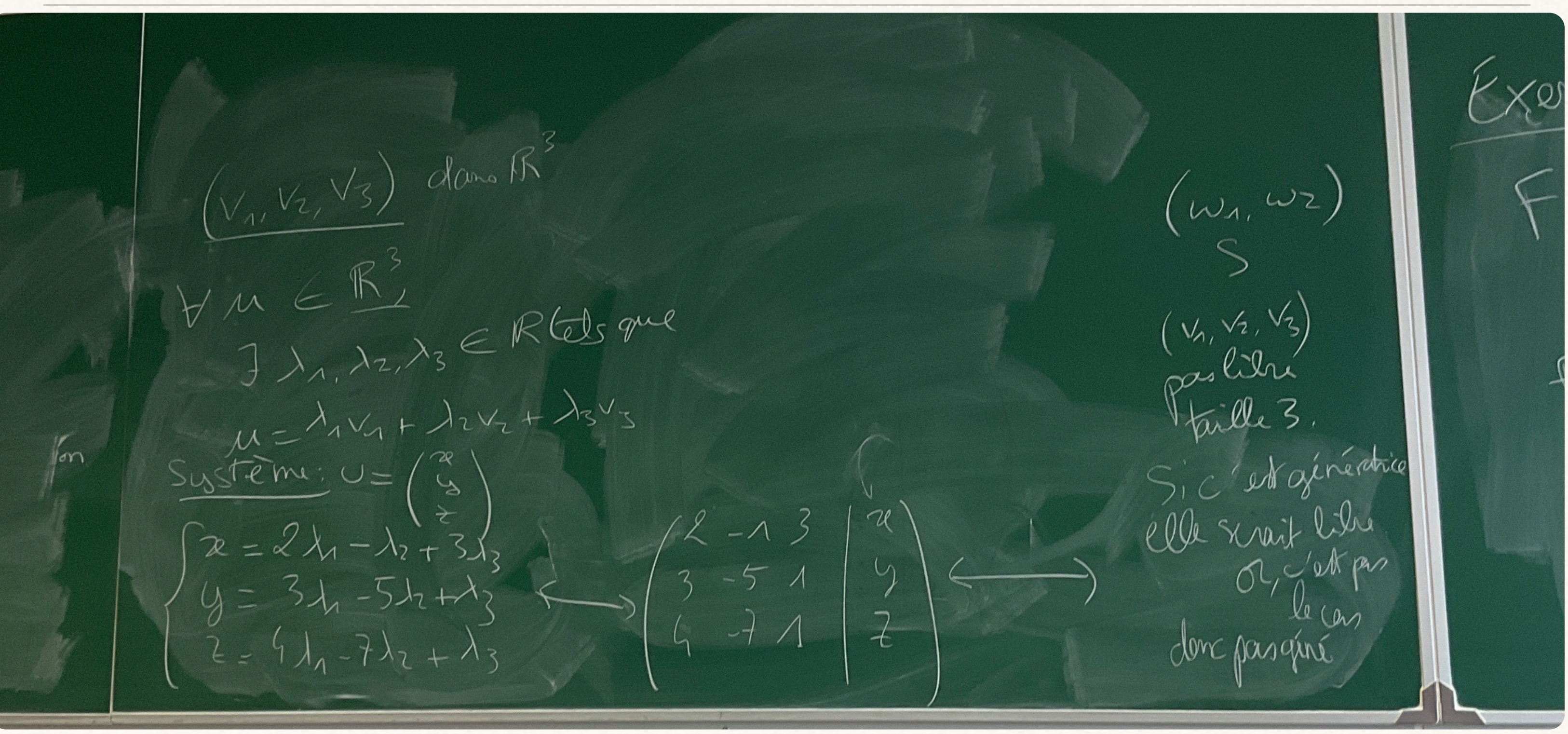
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ a une seule solution

---

$(v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbb{R}^3$

$\forall u \in \mathbb{R}^3$

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que



Ex 8 14 / 11

Dans $\mathbb{R}^3$

$-y = -2x + 2z$
$y = 2x - 2z$

$$2x - y - 2z = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad y = 2x - 2z$$

Il faut vérifier que $v_{1,2} \in F$,

$x \times 1 \qquad x \times 2x$

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x - 2z \\ z \end{pmatrix} = x \underbrace{\overset{\in F}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{v_1} + z \underbrace{\overset{\in F}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{v_2}$$

$v_1, v_2 \in F$ et engendré par $F$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ 2x - y - 2z = 0 \right\}$$
$$= \text{vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \text{vect}(v_1, v_2)$$

c'est libre car $1 \times x \neq 0$

$2 \times x \neq 2$

$2 \times x \neq 1$

ils sont pas colinéaire

Ex 9

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},\ x - y = 0,\ z - t = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F$$

$$a = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

c'est générateur et libre car