
Feuille 5 : Probabilités

Exercice 1. *Ensemble des parties d'un ensemble*
Soit $E := \{1, 2, 7, 42\}$.

1. Écrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.
2. Est-ce que 2 est un élément de $\mathcal{P}(E)$?
3. L'ensemble $\{2, 3\}$ appartient-il à $\mathcal{P}(E)$? L'ensemble vide appartient-il à $\mathcal{P}(E)$?
4. Soit $A := \{\{1, 2\}, \{42\}\}$. A-t-on $A \subseteq \mathcal{P}(E)$?
   Même question avec $B = \{\{1\}, \{42\}, \emptyset\}$ et $C = \{E, \{3\}\}$.

Exercice 2. *Espace probabilisé*
On choisit un nombre au hasard parmi les entiers entre 1 et 100. Quel est l'espace probabilisé suggéré par cet énoncé ?

Exercice 3. *Événements et point de vue ensemblistes*
Soient A, B, C trois évènements d'un espace probabilisé. Exprimer les évènements suivants :

1. Aucun des évènements A, B, C n'est réalisé.
2. Un seul des trois événements est réalisé.
3. Au moins deux des trois événements sont réalisés.
4. Au plus deux des trois événements sont réalisés.

Exercice 4. *Tribus*

1. Soit T une tribu sur un ensemble Ω et soit Ω' une partie de Ω.
   Vérifiez que $T' := \{A \cap \Omega' \mid A \in T\}$ définit une tribu sur Ω'.
2. Soient T' une tribu sur Ω' et $f : \Omega \to \Omega'$.
   Vérifiez que $T := \{f^{-1}(A') \mid A' \in T'\}$ définit une tribu sur Ω.
3. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille de tribus sur un même ensemble Ω. Vérifiez que $T = \cap_{i \in I} T_i$ est une tribu sur Ω.

Exercice 5. On s'intéresse au lancer d'un dé à 20 faces qui n'est pas truqué.

1. Quel est l'univers Ω correspondant ?
2. On munit cet univers de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Quelle est la loi de probabilité associée ?
3. À quel ensemble les événements suivants correspondent-ils ?
   — « Le résultat est 12. »
   — « Le résultat est strictement inférieur à 7. »
   — « Le résultat est divisible par 3. »
4. Calculez la probabilité des trois événements ci-dessus.

Exercice 6. *Quelques calculs de probabilités*

1. Un QCM comporte dix questions, pour chacune desquelles quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins six fois correctement ?
2. Monsieur Ollivander possède 1200 baguettes magiques dans son magasin. Une seule parmi les 1200 convient à Harry. S'il avait tiré au hasard les baguettes qu'il proposait au jeune sorcier, quelle aurait été la probabilité qu'il tombe sur la bonne au troisième essai ?

Exercice 7. Soient A et B deux événements.

1. Montrer que
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$
2. Démontrer l'inégalité
$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Exercice 8. On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

1. Si on tient compte de l'ordre dans lequel les cartes sont tirées, combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Si on ne tient pas compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles :
   (a) au total
   (b) contenant cinq carreaux ou deux piques
   (c) contenant 3 trèfles et 2 cœurs
   (d) ne contenant aucune reine
   (e) contenant au moins un valet.

Exercice 9. Dénombrer le nombre d'anagrammes des mots :

1. licorne
2. chocolat
3. ananas.

Exercice 10. On tire 4 boules dans une urne contenant 10 boules de couleurs différentes. Déterminer le nombre de tirages possibles lorsque :

1. on tire les 4 boules successivement et avec remise.
2. on tire les 4 boules successivement et sans remise.
3. on tire les 4 boules simultanément.

Univers Ω = ensemble des possibilités / résultats

Evénement $A \subset \Omega$, liste de possibilités

$$P : \mathcal{T} \longrightarrow [0,1]$$
$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$$

tq $P(\Omega) = 1$

$(A_i)_{i \in I}$ $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$, alors

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

I dénombrable

probabilité de tout éléments

proba de la somme des éléments

· Si $A \subset \Omega$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Preuve : $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

Ex 1

$E = \{1, 2, 7, 42\}$

1) $|P(E)| = 2^{|E|} = 2^4$

$|\ \ |$: Cardinal

Lister les parties de E

- 0 élément :

$- \emptyset \in P(E) \Big) \ 1$

- 1 élément :

singleton

$$\left.\begin{array}{l} - \{1\} \\ - \{2\} \\ - \{7\} \\ - \{42\} \end{array}\right) \ 4 = |E|$$

- 2 éléments :

$$\left.\begin{array}{l} \{1, 2\} \\ \{1, 7\} \\ \{1, 42\} \\ \{2, 7\} \\ \{2, 42\} \\ \{7, 42\} \end{array}\right) \ 6$$

Triangle de pascal

1 4 6 4 1

- 3 éléments :

$$\left.\begin{array}{ll} \{1, 2, 7\} & \{1, 7, 42\} \\ \{1, 2, 42\} & \{2, 7, 42\} \end{array}\right) \ 4$$

. 4 élements

$\{1, 2, 7, 42\}$) 1

2) 2 n'est pas un élément de $P(E)$

$\{2\}$ (singleton de 2) oui, c'est un ensemble de $P(E)$

$\{2\} \neq 2$

$2 \in P(E)$

3) $\{2, 3\} \overset{?}{\in} P(E)$

Non car $3 \in \{2, 3\}$ mais $3 \notin E$

4 $A \subseteq P(E)$ Vrai ? A est inclus dans Partie de E ?

$A = \{\{1, 2\}, \{\{2\}\}\}$

Elément de A : $\{1, 2\} \in P(E)$

$\{\{2\}\} \in P(E)$

donc $A \subseteq P(E)$

$A \in P(E)$? (A est 1 élément de $P(E)$)

NON

$\boxed{\{1, \{1\}\}}$ $\not\subset \mathcal{P}(E)$

non oui

$\not\in \mathcal{P}(E)$

Dans la liste ?

4) $B = \{\{1\}, \{2\}, \emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(E)$

$C = \{E, \{3\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$

non car $\{3\} \in \mathcal{P}(E)$

Espace probabilisé

triplet : - Ω, univers

- $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, tribus

- $P : \mathcal{T} \longrightarrow [0, 1]$ loi de proba

$\Omega = \{1, 2, \dots, 99, 100\}$

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$

$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ ensemble de départ

ensemble d'arrivé

$P(\emptyset) = 0$

$P(\Omega) = 1$

$$P(\{x\}) = \frac{1}{100} \quad \forall x \in \Omega$$

$$P(\{1, 2, 7\}) = \frac{3}{100}$$

$\parallel$

$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{7\})$

Pour $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{|A|}{100} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ex 3 :

Soient A, B, C trois événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$

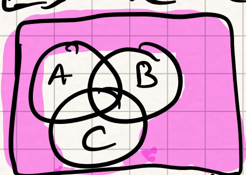
$A, B, C \subset \Omega$

- $D \subset \Omega$ tq D correspond à ni A, ni B, ni C réalisés

$A \cup B \cup C \subset \Omega$

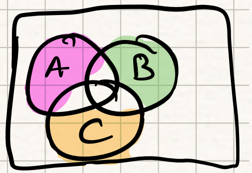
$x \in A \cup B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$

$D = \overline{(A \cup B \cup C)}$

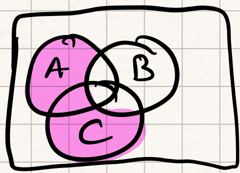


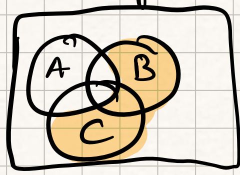
- $E \subset \Omega$ tq E correspond à Exactement 1 réalisés parmi A, B, C

$$E = \left(A \cap \overline{(B \cup C)}\right) \cup \left(B \cap \overline{(A \cup C)}\right)$$
$$\cup \left(C \cap \overline{(A \cup B)}\right)$$

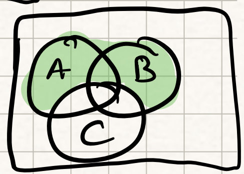


$F \subset \Omega$ tq F correspond à au moins 2 parmi A, B, C réalisés



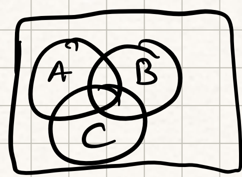


$$F = \Omega \setminus (D \cup E)$$
$$= \overline{(D \cup E)} = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$



$G \subset \Omega$ tq G correspond à au plus 2 parmi A, B et C réalisés

$$G = \overline{A \cap B \cap C}$$



Ex 5

1) $\Omega = \{1, \dots, 20\}$

2) $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

Si $A \subset \Omega$

$P(A) \overset{?}{=}$

$P(\{1\}) = \frac{1}{20}$ $\quad P(\{2\}) = \frac{1}{20}$ $\quad \dots \quad P(\{20\}) = \frac{1}{20}$

$$P(A) = \frac{|A|}{20}$$

3)

A : - Le résultat est 12 correspond à $A = \{12\}$, $P(A) = \frac{1}{20}$

B - Le résultat est < 7 correspond à $B = \{1, \dots, 6\}$, $P(B) = \frac{6}{20}$

C - Le résultat divisible par 3 correspond à

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \quad P(C) = \frac{6}{20}$$

Ex 8 :

Ω : On tient compte de l'ordre $(1\diamondsuit, 2\diamondsuit, 3\diamondsuit, 4\diamondsuit, 5\diamondsuit)$, $(2\diamondsuit, 4\diamondsuit, 3\diamondsuit, 5\diamondsuit, 1\diamondsuit)$

Ω' : On ne tient pas compte {les 5 premiers carreaux)

$$|\Omega| = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \dots$$

$$= \frac{52 \times 51 \times 50 \times \dots 1}{47 \times 46 \times 45 \times \dots \times 1}$$

$$= \frac{52!}{(52-5)!}$$

$$|\Omega'| = \frac{|\Omega|}{5!} = \frac{52!}{(52-5)!\,5!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k} = C_n^k$$

a) au total : $|\Omega'|$ résultats : C_n^k

b) contenant 5 carreaux ou 2 piques

{5 carreaux} ∪ {2 piques}

intersection vide

mains avec 5 carreaux : $\binom{13}{5}$ (13 cartes on choisit 5)

mains avec exactement 2 piques : $\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{3}$

"au moins 2 piques" + "exactement 1" ou

"exactement 3" ou "exactement 4" ou "exactement 5"

$$+ \binom{13}{2}\binom{39}{3} + \binom{13}{3}\binom{39}{2} + \binom{13}{4}\binom{39}{1} + \binom{13}{5}$$

b) "exactement 5 carreaux ou exactement 2 piques"

$$\binom{13}{5} + \binom{13}{2}\binom{39}{3}$$

au moins 2 piques : $\binom{13}{5} + \binom{13}{2}\binom{39}{3} + \binom{13}{3}\binom{39}{2}$

$$+\binom{13}{4}\binom{39}{1}+\binom{13}{5}\Big)$$

c) $\binom{13}{3}\binom{13}{2}$

d) $\binom{48}{5}$ $\Big(\binom{4}{0}\binom{48}{5}\Big)$ → On choisit 5 autre cartes

$\binom{4}{0}$ → 0 reine

e) Exactement 1 ou Exact 2 ou Exact 3 ou Exact 4

$$\binom{4}{1}\binom{48}{4}+\binom{4}{2}\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\binom{48}{2}+\binom{4}{4}\binom{48}{1}$$

$\binom{48}{4}$ → 4 parmi 48

Mercredi 8h51 12/04

$(\Omega, \mathcal{T}, P)$

Ω : univers

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ tribus

probabilité : $P : \mathcal{T} \to [0,1]$ + propriété

$A, B \in \mathcal{T}$ sont indépandants

1) $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

2) $P(A) = P(A \mid B) \to$ P(A) sachant que P(B) déjà produit

3) $P(B) = P(B \mid A)$

Ex 1 :

$\Omega = \{1, \dots, 12\}$

Si $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{|A|}{\Omega}$$

Exemple :

A = " On tire un nbr pair "

B = " On tire un multiple de 3 "

On calcule

$$\underbrace{\{1 \ldots 12\}}_{12}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$C = A \cap B = \{6, 12\}$$

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(C) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A).P(B)$$

Donc A et B sont indépendant

$$\Omega' = \{1, \ldots, 13\}$$

$$P'(A) = \frac{|A|}{|\Omega'|} = \frac{|A|}{13}$$

$$P'(A) = \frac{6}{13} \qquad P'(B) = \frac{4}{13} \qquad P'(C) = \frac{2}{13}$$

$$P'(A).P'(B) = \frac{6}{13} \times \frac{4}{13} = \frac{24}{169} \neq \frac{2}{13}$$

Ex2

Soient $A, B \subset \Omega$
avec $|\Omega| = p$ premier

$0 < |A|, |B| < p$

On calcule $P(A \cap B) = \dfrac{\overbrace{|A \cap B|}^{\geq 0 \text{ et } < p}}{p}$

$P(A).P(B) = \dfrac{|A| \cdot |B|}{p^2}$ (sous forme réduite)

Les seuls diviseurs positifs de p^2 sont 1, p et p^2

$p^2 \nmid 1 < |A| \cdot |B| < p^2$

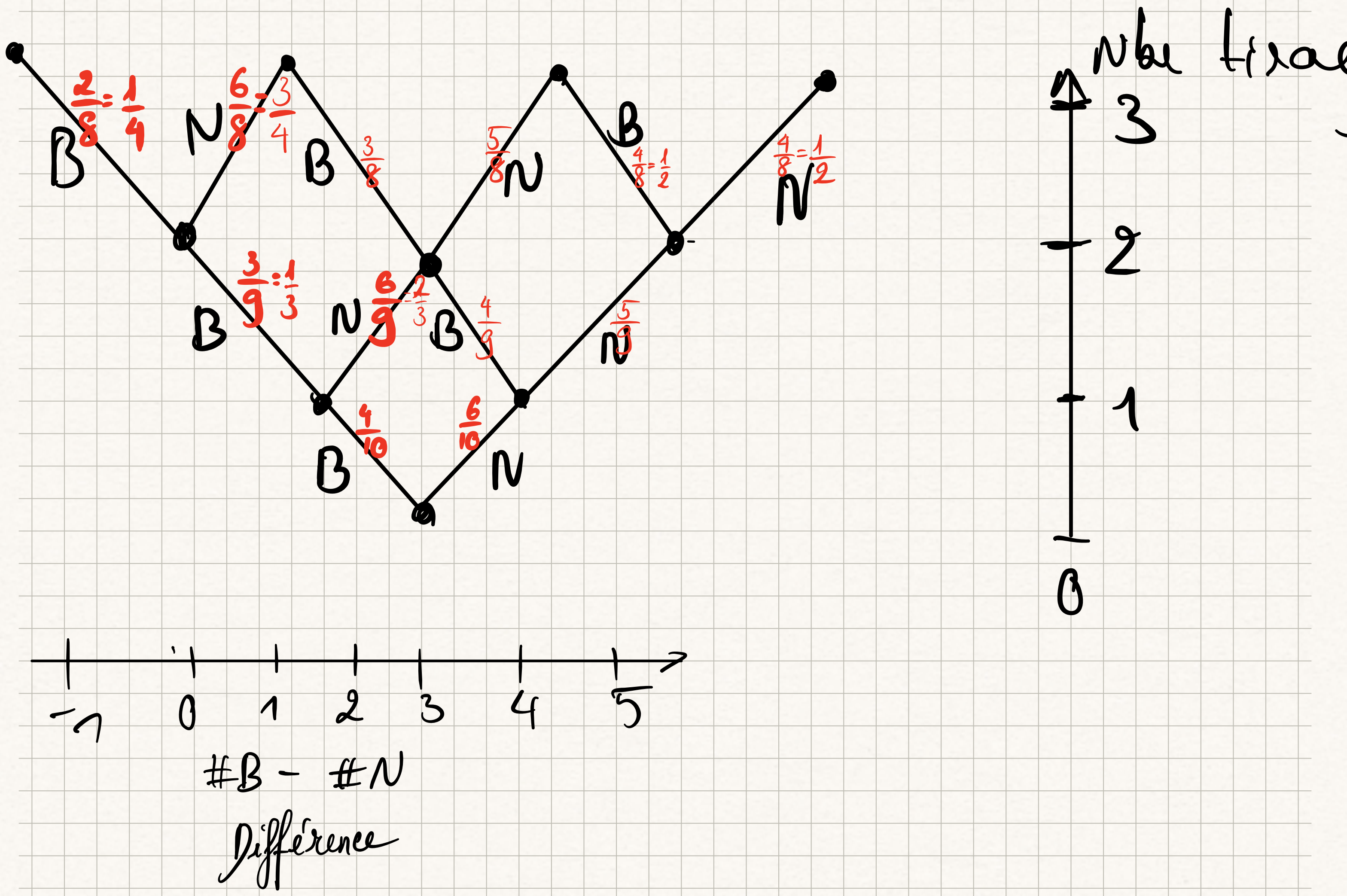
Supposons que $p \mid |A|.|B|$

Comme p premier

$\Rightarrow p \mid |A|$ ou $p \mid |B|$
impossible car $0 < |A|, |B| < p$

donc $\dfrac{|A|.|B|}{p^2}$ sous forme réduite

donc $\dfrac{|A|.|B|}{p^2} \neq \dfrac{|A \cap B|}{p}$ donc A et B pas indépendant



$$\Omega = \{(B,B,B),(B,B,N),(B,N,B),(B,N,N),(N,B,B),(N,B,N),(N,N,B),(N,N,N)\}$$

$P(\Omega)$

$$P(BBB) = \frac{4}{10} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$$

$$P(BBN) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{1}{10}$$

$$P(BNB) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{4}{10} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{10}$$

$$P(BNN) = \frac{4}{10} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{6}$$

$$P(NBB) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 3}{10 \times 3 \times 3 \times 2 \times 4} = \frac{1}{10}$$

$$P(NBN) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{3 \times 2 \times 4 \times 5}{2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 4} = \frac{1}{6}$$

$$P(NNB) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(NNN) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

1) $P(BBB) = \frac{1}{30}$

2) $A = \{(BNB), (BNN), (NNB), (NNN)\}$

$$P(A) = \frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

3) $P((-, N, -) \mid (B, -, -))$

$$= \frac{P(B, N, -)}{P(B, -, -)} =$$

$$P(B,N,-) = \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$P(B,-,-) = \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$P((B,N,-)|(B,-,-)) = \frac{4}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{2}{3}$$

5)

$$P((-,N,-)|(-,-,B))$$

$$= \frac{P(-,N,B)}{P(-,-,B)} \quad \begin{matrix} \rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{4}{15} \\ \rightarrow \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{2}{5} \end{matrix}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Ex 4

$\Omega = \{ (a, b) \mid \begin{smallmatrix} a \in \{1, \dots, 6\} \\ b \in \{1, \dots, 6\} \end{smallmatrix} \}$

$|\Omega| = 36$

$P(\Omega)$