Université de Paris
Licence L2 Informatique

UFR de Mathématiques
2022-2023

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.
Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 : On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (2, 3, 4, 0)$ ainsi que $f_1 = (-1, 2, -3, 1)$, $f_2 = (-1, 2, 1, 3)$, $f_3 = (-1, 2, 5, -1)$.
Extraire de $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$ une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3 : Trouver une base de l'espace vectoriel défini par le système d'équations linéaires :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = & 0 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4 : Pour chacun des sev suivants, donner une base parmi la famille génératrice donnée, la dimension et un système d'équations minimal. Compléter la base de chaque sev, s'il y a lieu, en une base de $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$ pour les questions 1, 2, 3, $n = 4$ pour les questions 4, 5).

(1) $E = \text{Vect}\big((-1, 1, 1), (-1, 1, 2)\big)$.
(2) $F = \text{Vect}\big((2, -3, 1), (1, 2, -3), (3, -1, -2)\big)$.
(3) $G = \text{Vect}\big((1, 1, -2)\big)$.
(4) $H = \text{Vect}\big((2, -1, 2, 1), (-1, 3, 0, 1), (1, 2, 2, 2)\big)$.
(5) $K = \text{Vect}\big((-3, 1, 2, -1), (-3, 1, 2, 0)\big)$.

Exercice 5 : Pour chacun des sev suivants de $\mathbb{R}^3$, donner une base puis la dimension.

(1) $E = \big\{(2x - y, x + y, -x + y),\ x, y \in \mathbb{R}\big\}$.
(2) $F = \big\{(x + 2y, y - 2x, y - x),\ x, y \in \mathbb{R}\big\}$.

Exercice 6 : Soit E_1 le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{(1, 3, 0, 4), (2, 0, 1, 2)\}$ et E_2 le sous-espace engendré par $\{(1, 1, 2, 3), (4, -1, 0, 2)\}$. E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 7 : Soit E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par les vecteurs $\{(1, -1, 0, 1), (0, 2, 1, 0)\}$ et les vecteurs $\{(0, 6, -1, 4), (3, 3, 1, 5)\}$.

(1) Donner une base de $E_1 + E_2$.
(2) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des (x, y, z, t) tels que $x + y + z + t = 0$ et l'ensemble F des (x, y, z, t) tels que $x = y = z = t$.

(1) Montrer que E et F sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
(2) Déterminer des bases de E et de F .

Exercice 9 : Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, -1, 2, 3)$, $(1, 1, 2, 0)$ et $(3, -1, 6, -6)$, et F le sous-espace engendré par $(0, -2, 0, -3)$, $(1, 0, 1, 0)$.

(1) Trouver des bases de $E, F, E \cap F, E + F$.
(2) E et F sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 10 : Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, 1, -1)$ et $(1, 3, 1, 3)$ et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 2, 0, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$ et $(3, 1, 3, 1)$.

(1) Trouver des bases de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.
(2) F et G sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

TD4 :

Ex 1.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \to -L_1 \\ \xrightarrow{L_2 + 2L_1} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{L_2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{L_1+2L_2}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = e_1$$

Donc on peut ajouter $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e_2 et e_3 $e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a_1, a_2, e_2, e_3) base de $\mathbb{R}^4$

Ex2

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut pas prendre car au début car il sont un peu trop pareil

L_1 pivot

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

$L_5 \leftarrow L_5 + L_1$

$L_6 \leftarrow L_6 + L_1$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

L_2 pivot

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$

$L_5 \leftarrow L_5 - 2L_2$

$L_6 \leftarrow L_6 - 2L_2$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}$$

$L_3 \longleftrightarrow L_4$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ e_3 \end{array}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3$$
$$L_5 \leftarrow L_5 + L_3$$
$$L_6 \leftarrow L_6 + 2L_3$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Base de $\mathbb{R}^4$

$\{e_1, e_2, f_3, f_1\}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(f_3, e_1, e_2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(e_1, e_2, f_3, f_4)$$

Ex 3

Dans $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 0 \\ 2x + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & -12 & -15 & -3 \\ 0 & -32 & -10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{-L_3}{8}]{\frac{-L_2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \end{array}$$

Donc dimensions $= 2$

ils sont libre car il sont pas colinéaire

Base $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = 9x_2 + 11x_3 \\ x_4 = -4x_2 - 5x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 9x_2 + 11x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -4x_2 - 5x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ex 4

1) $\mathbb{R}^3$

$E = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Base : $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Dim $= 2$

Equation : $(x + y = 0)$

On peut ajouter e_1 ou e_2 pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$

2) $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_1 \\ x \end{array}, \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ v_2 \\ y \end{array}, \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ v_3 \\ z \end{array} \right)$

$v_1 + v_2 = v_3$

et (v_1, v_2) libre

[Donc (v_1, v_2) base]

Dim $= 2$

Equation : $(x + y + z = 0)$

On peut ajouter e_1, e_2 ou e_3

pour compléter

Ex Dans $\mathbb{R}^3$

$$G = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}_{v}\right)$$

$$\begin{cases}\text{Dim } 1\\ \text{Base } (v)\end{cases}$$

Equations $\quad a = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$a = \begin{pmatrix}x\\x\\-2x\end{pmatrix}$$

Compléter en base de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Cours

$$V \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$a \in \mathbb{R}^3$$

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\dim V = 1$

$a \in V \qquad a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\underbrace{(\alpha x + \beta y + \gamma z}_{\varphi(a)} = 0$$

Ker : noyau

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

théorème du rang : $\varphi . A \longrightarrow B$

$\dim \mathrm{Im}\, \varphi + \dim \mathrm{Ker}\, \varphi$

$= \dim A$

$$\underbrace{\mathrm{rang}\, \varphi}_{1} + \dim \mathrm{Ker}\, \varphi = \dim A$$

Ex 4 :

4) $H = \text{Vect}\big((\underset{v_1}{2,-1,2,1}), (\underset{v_2}{-1,3,0,1}), (\underset{v_3}{1,2,2,2})\big)$

On voit que

$$v_3 - v_2 = v_1$$

On a pour Base (v_2, v_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
$\Rightarrow$
$L_3 \leftarrow L_3 - xL_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & y-2x & z-2x & t-2x \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{y-2x}{5} L_2$
$\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & z-2x-\left(\frac{2y-4x}{5}\right) & t-2x-\left(\frac{3y-6x}{5}\right) \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} 5z - 6x - 2y = 0 \\ 5t - 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

On peut ajouter e_3 et e_4

$$e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ t \end{matrix} \qquad e_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5) $K = \mathrm{Vect}\left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right) \subseteq \mathbb{R}^4$

$\mathrm{Dim}\, K = 2$ Base : (v_1, v_2)

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - tL_2]{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + yL_1 \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x+3y & 0 & z-2y & 0 \end{pmatrix}$$

Donc un système d'équations est

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ z - 2y = 0 \end{cases}$$

On peut compléter en ajoutant e_1 et e_2

Ex 5

1) $E = \{(2x-y,\ x+y,\ -x+y),\ x,y \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{pmatrix} 2x-y \\ x+y \\ -x+y \end{pmatrix} = x \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} + y \overset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \in E$$

(v_1, v_2) est libre (pas colinéaire)

Donc $\dim E = 2$ Base (v_1, v_2)

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2x-4y \\ x-2y \\ -x+2y \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-2y)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+2y \\ y-2x \\ y-x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$a \in F$

$$a = \begin{pmatrix} x+2y \\ y-2x \\ y-x \end{pmatrix} = x \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}} + y \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(v_1, v_2) est libre

Donc c'est une base $\dim F = 2$

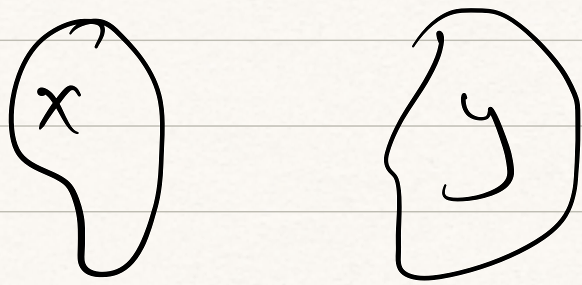
Supplémentaire

$E_1 , E_2 \subseteq \mathbb{R}^4$

E_1 et E_2 sont supplémentaire de si

- $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^4$
- $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

On note $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^4$



$X \cup Y = X \sqcup Y$

$(X \cap Y = \emptyset)$

$E_1 \oplus E_2 = E_1 + E_2$

$\hookrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0\}$

Ex 6 :

$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$$

$\dim E_1 = 2$

$$E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$

$\dim E_2 = 2$

est ce que $\left(\underset{f_1}{\begin{pmatrix}1\\3\\0\\4\end{pmatrix}}, \underset{f_2}{\begin{pmatrix}2\\0\\1\\2\end{pmatrix}}, \underset{f_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}}, \underset{f_4}{\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\2\end{pmatrix}}\right)$

est une base de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 1 & -6 \\ 0 & -13 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{13}{2} L_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -13 & \frac{-13}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{13}{5} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$f_4 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$

(V) est libre, génératrice donc (V) est une base de $\mathbb{R}^4$

Alors $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^4$, E_1, E_2 sont supplémentaire

Ex f

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_1 + E_2 = \mathrm{Vec}(u_1, u_2, v_1, v_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \quad \xrightarrow{} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \frac{L_3}{4} \quad \xrightarrow{} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Base :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad v_2 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1)$$

$$\dim E_1 + E_2 = 3$$

Supplémentaire $\mathbb{R}^4 = \mathrm{vect}$
qui fait échelonné le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$

ie $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

et $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^4$

$\Rightarrow \forall\, v \in \mathbb{R}$

$\exists!\ v_1 \in E_1$

$\quad\ \ v_2 \in E_2$

tq $v_1 + v_2 = v$

On note $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^4$

Ex 8

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle| \ x + y + z + t = 0 \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle| \ x = y = z = t \right\}$$

$\begin{cases} x = y \\ x = z \\ x = t \end{cases}$ $\rightarrow$ dim $F = 1$

$E = \ker \varphi$ $\qquad \varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

ensemble des vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longrightarrow x + y + z + t$

$$\dim E = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathbb{R}$$
$$= 4 - 1$$
$$= 3$$

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim E + \dim \mathbb{R}$$

$v \in F$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $F = \text{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v \in E$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x-y-z \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = (e_1, e_2, e_3)$$

engendre E

+ elle est libre

$\to$ C'est une base de E

$$\to \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \notin E$ $\to$ Donc E et F sont suppl

Ex 9 :

$$E = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}3\\-1\\6\\-6\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-3\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

Facile : (v_1, v_2) base de F

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-12}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base}_E = \left(\overset{a_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overset{a_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}, \overset{a_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$$

$\dim = 3$

$$\begin{cases} \dim E = 3 \\ \dim F = 2 \end{cases}$$

$E \cap F \neq \{0\}$

Prop : (a_1, a_2, a_3, v_2) est libre

$$\underbrace{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda v_2}_{} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -\lambda \longrightarrow \lambda = \lambda_1 = 0$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Donc $E + F = \mathbb{R}^4$

$\underset{4}{\dim(E+F)} = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$

$= 3 + 2 - \underbrace{\dim E \cap F}_{1}$

On peut remarquer

$$-a_2 - 6a_3 = v_1 \in E \cap F$$

$$= \mathbb{R} v_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{\frac{L_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - xL_1$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & y+x & z-2x & t-3x \end{array}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - (y+x) L_2$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & z-2x & t-3x+\frac{3}{2}(y+x) \end{array}$$

$\rightarrow z - 2x = 0 =$

$$E = \{ z - 2x = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

yL_1

$L_3 \leftarrow L_3 \cdot x L_2 + 2$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z-\cancel{x} & t - \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{cases} \cancel{z} - x = 0 \\ t - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases}$$

$$E \cap F = \begin{cases} z - x = 0 \\ t - \frac{3}{2}y = 0 \\ z - 2x = 0 \end{cases}$$

$u \in E \cap F$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ \frac{3}{2}y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Base de $E \cap F$

2) Ils sont pas supplémentaires

Ex 13 :

Dans $\mathbb{R}^4$

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_1 \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \end{array} \qquad -x$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & y-x & z-x & t-x \end{array} \end{array}$$

$$\xrightarrow{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-x & t-y \end{pmatrix}$$

Base F $= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre f et libre donc c'est une base de F

$\dim F = 2$, équations $\begin{cases} z-x=0 \\ t-y=0 \end{cases}$

G

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & y-2x & z & t-2x \end{matrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & z+\frac{3}{5}(y-2x) & t-x-y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-x-y \end{pmatrix}$$

Base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

encore simplifiée

$L_3 \times \frac{-3}{5}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

L'équation est $t-y=0$

Autre Base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow$

Dim $G = 3$ On remarque

$F \subseteq G$

$G \cap F = F$

$G + F = G$

Donc G et F ne sont pas supplémentaire

Système d'équations de $G \cap F$ est

$$\begin{cases} t - y = 0 \\ z - x = 0 \\ t - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t - y = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

4 3 2

$\underline{\dim E + F} = \underline{\dim E} + \underline{\dim F}$

$- \dim E \cap F$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ car $\quad$ et $\quad x = z$, $\quad y = t$

le calcul d'équation à la fin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base}}$$

$$v \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, t - y = 0 \right\}$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\cancel{e_3}$

$$F \cap G = \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases}$$

Ca teste l'une des deux équations (ca valide pas)

(v_1) (v_2) $(v_3$ et $v_4)$ $\quad \mathbb{R}^4$

0

Ici e_3 oui car ca valide pas $x + y = 0$ $(0 + 0 = 0)$

mais $z - 2t = 0$ oui
$1 - 2.0 = 0$

Donc on peut l'ajouter e_3