Université de Paris
Licence L2 (S3)
2021-2022

Département de Sciences Exactes
MI-3 : Algèbre et analyse élémentaires III
11 janvier 2022, 8h30-11h30

Examen Terminal

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, téléphones portables et montres connectées. Les exercices sont indépendants entre eux. Une attention particulière sera portée sur la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée.

***Exercice* 1 :** Calculer les limites suivantes :

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1+\sin(x)) - x}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 1} (x)^{\frac{1}{x-1}} \qquad (4)\ \lim_{x\to +\infty} x^2 e^{\frac{2x+1}{x^2}} - x(x+2)$$

***Exercice* 2 :**

(1) Déterminer le développement limité de la fonction $\dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre 3 en 0.

(2) En déduire le développement limité de $\dfrac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 3 en 0.

(3) On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

***Exercice* 3 :** Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x - y + 2z + 2t, x + 2y - z + 2t, -x + y - 2z - 2t, -x + y - z - t)$$

(1) Trouver une base de $\ker(f)$. En déduire le rang de f.

(2) Donner une base et un système d'équations de $\mathrm{Im}(f)$.

(3) Les sous-espaces $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

***Exercice* 4 :** On considère l'application linéaire g de matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

(1) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -3-X & 2 & 2 \\ -2 & 1-X & 2 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix}$.

(2) Donner une base pour chacun des sous-espaces propres $E_1 = \{u = (x,y,z) | g(u) = u\}$ et $E_{-1} = \{u = (x,y,z) | g(u) = -u\}$.

(3) Justifier que g est diagonalisable, puis donner une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de g dans cette base est une matrice diagonale D.

(4) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

(5) Calculer D^n pour tout entier $n \geq 0$.

(6) Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et calculer A^n.

Barème indicatif : Exercice 1 (1,5+1,5+1,5+1,5= 6 points). Exercice 2 (1+1+2= 4 points). Exercice 3 (1+1+1= 3 points). Exercice 4 (1+1+1+1+1+2= 7 points).

$$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^2 + o(x^3)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1+x^2}}{x^4}$$

$$\sqrt{1-x^2}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^8}{8} + o(x^8)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\cos(x) - \sqrt{1+x^2}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)) - 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$+ \frac{x^4}{8} + o(x^8))$$

$$= \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\frac{\cos(x) - \sqrt{1+x^2}}{x^4}$$

$$= \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4}$$

$$= \frac{x^4}{6x^4} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1 + \sin(x)) - x}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \qquad + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \qquad + o(x^5)$$

$$\sin(x) = x \qquad + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$\ln(1 + \sin(x)) - x$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$e^x - \cos(x) - x$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$- 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^5) - x$$

$$= x^2 + o(x^2$$

$$\frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1 + \sin(x)) - x}$$

$$= \frac{x^2}{\frac{-x^2}{2}} = -2$$

3) $\lim_{x \to 1} (x)^{\frac{1}{x-1}}$

On fait le changement de variable $y = x-1$

$\lim_{x \to 1} (x)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{y \to 0} (y+1)^{\frac{1}{y}}$

On a $(y+1)^{\frac{1}{y}} = \exp\left(\ln(y+1)\frac{1}{y}\right)$

On calcule d'abord

$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(y+1)}{y}$

$\ln(1+y) = x + o(x^2)$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$$

$$\lim_{y\to 0} \exp\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right) = e$$

4) $$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{2x+1}{x^2}} - x(x+2)$$

$$e^{\frac{2x+1}{x^2}}$$

x $\quad \frac{x^2}{2}$ $\quad 2$

$$= 1 + \frac{2x+1}{x^2} + \frac{\left(\frac{2x+1}{x^2}\right)^2}{2}$$

$$= 1 + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{4x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{2}$$

$$= 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{\frac{2x+1}{2}} - x(x+2)$$

$$= x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - x(x+2)$$

$$= x^2 + 2x + 3 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - x^2 - 2x$$

$= \boxed{3}$

Ex2

1) On sait que

$\frac{1}{1+x}$ à l'ordre 3 en 0

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-1-1)}{2}x^2 + \frac{(-1)((-1)-1)((-1)-2))}{6}x^3$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

2)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\left[1 + (1 + x + o(x^2))\right]^{-1}$$

$$= 1 - (-1)(1 + x + o(x^2)) + (1 + x + o(x^2))^2 - (1 - x + o(x^2))^3$$

$$= 1 -$$

Ex 3

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x - y + 2z + 2t \\ x + 2y - z + 2t \\ -x + y - 2z - 2t \\ -x + y - z - t \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice}(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ On a $f(u) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x - y + 2z + 2t \\ x + 2y - z + 2t \\ -x + y - 2z - 2t \\ -x + y - z - t \end{pmatrix}$$

Donc $u \in \ker(f)$ ssi $\begin{cases} x - y + 2z + 2t = 0 \\ x + 2y - z + 2t = 0 \\ -x + y - 2z - 2t = 0 \\ -x + y - z - t = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Colonne

$$\xrightarrow[\substack{L_3+L_1 \\ L_4+L_1}]{L_2-L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{L_2}{3}]{L_1-2L_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z + t = \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = -t \end{cases}$$

Par conséquent $\mathrm{Ker}(f) = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} -t \\ -t \\ -t \\ t \end{array}$

$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{1} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{3} = \underbrace{\dim B}_{4}$$

rang de $f = 3$

2) On a $\operatorname{Im} f$

$$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On constate que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Puisque on sait déjà que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$

on a que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est

bien une base de l'image

Pour trouver un système d'équations :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 + L_1]{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ z + x \\ t + x \end{pmatrix}$$

donc on trouve que

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ tel que } z + x = 0 \right\}$$

5) On doit montrer que

$$\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$$

$$\dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V$$

On commence à vérifier si

$$\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$$

On note que $\ker(f) = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ et

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ tel que } z + x = 0 \right\}$$

Donc, si $v \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$
on peut écrire

$$v = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \text{ où } -t-t=0$$

$$\Rightarrow v = 0$$

et $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^4$

Ex 4

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Polynome caractéristique

On a

$$P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = \det(A - XI)$$

$$= \begin{vmatrix} -3-X & 2 & 2 \\ -2 & 1-X & 2 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (-3-x)(1-x)^2 - 8 - 8$$
$$- \left[-4(1-x) + 4(-3-x) - 4(1-x)\right]$$

$$= (-3-x)(1-x)^2 - 16$$
$$- \left[-8(1-x) + 4(-3-x) \right]$$

$$= (-3-x)(1-x)^2 - 16 + 8(1-x)$$
$$- 4(-3-x)$$

$$= (-3-x)(1-2x+x^2)$$

$$-16 + 8 - 8x + 12 + 4x$$

$$= -3 + 6x - 3x^2 - x + 2x^2$$
$$- x^3 - 16 + 8 - 8x$$
$$+ 12 + 4x$$

$$= -x^3 - x^2 + x + 1$$

$$= -x^2(x-1) + (x+1)$$

$$= (x+1)(-x^2+1)$$

$$= (x+1)(1-x)(1+x)$$

$$= (x+1)^2(1-x)$$

2) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tels que } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow A - 1I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que la multiplicité