Proposition

Soit c en forme conjonctive normale.

- *Si la variable x apparaît seulement avec polarité positive en c alors c est satisfaisable si et seulement si $c[x/1]$ est satisfaisable.*
- *Si la variable x apparaît seulement avec polarité négative en c alors c est satisfaisable si et seulement si $c[x/0]$ est satisfaisable.*

$$
\begin{array}{lll}
 & (\overset{1}{x} \vee \neg y) \wedge (y \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee \neg z_2) & \text{est satisfaisable} \\
\text{ssi} & (\overset{1}{y} \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee \neg z_2) & \text{est satisfaisable} \\
\text{ssi} & (\neg z_1 \vee \neg z_2) & \text{est satisfaisable} \\
\text{ssi} & \top \quad \to z_1 = 0 \quad \to \neg z_1 = 1 & \text{est satisfaisable}
\end{array}
$$

La formule de départ est donc satisfaisable.

x soit 1 → satisfaisable

$$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$$

$x/1$ | $x/0$

$(1 \vee y) \wedge (0 \vee \neg y)$ | $(0 \vee y) \wedge (1 \vee \neg y)$

$\top \wedge \neg y$ | $y \wedge \top$

H $\neg y$

$y/0$

$\top$

satisfaisable

On trouve satisfaisable, on sait que la formule est déjà satisfaisable ormule de départ

Si x_1 est True => toute la clause est vraie

True

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \lor \neg x_2 \lor y_1 \lor \neg y_2 \lor \neg z_2 \lor \neg z_4) \\
&\land (x_2 \lor y_1) \land (x_2 \lor y_1 \lor y_2 \lor z_1 \lor z_4) \land (x_2 \lor \neg y_2 \lor z_1 \lor \neg z_2) \\
&\land (x_2 \lor \neg y_1 \lor z_3 \lor \neg z_4) \land (x_2 \lor \neg y_2 \lor z_2 \lor \neg z_3) \\
&\land (\neg x_2 \lor \neg y_1) \land (\neg x_2 \lor \neg y_1 \lor \neg y_2) \land (\neg x_2 \lor y_1 \lor y_2) \land (\neg x_2 \lor \neg y_2 \lor z_1) \\
&\qquad \land (\neg x_2 \lor \neg z_1 \lor z_2) \\
&\land (\neg z_3 \lor \neg z_4) \land (z_3 \lor z_4) \land (\neg z_3 \lor z_4)
\end{aligned}
$$

x_1 apparaît seulement avec polarité positive $\Rightarrow$ supprimer la première clause

- DPLL : satisfaisabilité de formules en CNF
- DPLL dual : validité de formules en DNF
-

Formule en	DNF	CNF
Satisfaisabilité :	trivial	DPLL
Validité :	DPLL dual	trivial

Outils logiques
TD nº 7

Exercice 1 : Formule en CNF/DNF à partir d'une table de vérité

On considère la fonction booléenne $f : \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \mapsto \{0,1\}$ définie par la table suivante :

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

1. Donner une formule en DNF correspondant à la fonction ;
2. Donner une formule en CNF correspondant à la fonction ;
3. Donner une méthode générale pour obtenir une formule en DNF (CNF) à partir d'une table de vérité ;

Exercice 2 : Application de l'algorithme DPLL

Appliquer l'algorithme DPLL sur la formule suivante :

$$\begin{array}{rrcrcr} f = & (x \vee y \vee z) & \wedge & (x \vee \neg y \vee \neg z) & \wedge & (x \vee \neg w) \\ & \wedge\, (\neg y \vee \neg z \vee \neg w) & \wedge & (\neg x \vee \neg y \vee z) & \wedge & (u \vee v) \\ \wedge & (u \vee \neg v) & \wedge & (y \vee \neg u) & \wedge & (\neg z \vee \neg u) \end{array}$$

Exercice 3 : DPLL : équisatisfaisabilité mais pas équivalence

L'algorithme DPLL se base sur le fait que, pour une formule quelconque c, les formules c et $c[x/0] \vee c[x/1]$ sont équisatisfaisables.

Voici une tentative (erronée) de prouver que ces formules sont équivalentes :

$$[\![c[x/0] \vee c[x/1]]\!]v = 1 \overset{?}{\Rightarrow} [\![c[x/0]]\!]v = 1 \text{ ou } [\![c[x/1]]\!]v = 1 \overset{?}{\Rightarrow}$$
$$[\![c]\!](v[x/0]) = 1 \text{ ou } [\![c]\!](v[x/1]) = 1 \overset{?}{\Rightarrow} [\![c]\!]v = 1$$

Trouver l'implication qui n'est pas correcte.

Exercice 4 : SAT polynomial

On a dit en cours que l'algorithme DPLL qui décide la satisfaisabilité d'une formule CNF peut prendre un temps exponentiel par rapport à la taille de la formule. On donne ci-dessous deux exemples d'instances spéciales pour lesquelles c'est polynomial.

2-SAT

Une formule est en forme 2-CNF si elle est en CNF et les clauses ont 2 variables chacune.

1. Décider si la formule suivante est satisfaisable :

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4) \wedge$$
$$(\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_5) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_4 \vee \neg x_5)$$

2. Montrer que l'algorithme DPLL sur les formules 2-CNF est polynomial.

Horn-SAT

Une *clause de Horn* est une clause disjonctive avec au maximum une variable avec polarité positive. Donc, d'une de ces formes :

1. x
2. $\neg x_1 \vee \cdots \vee \neg x_n$
3. $\neg x_1 \vee \cdots \vee \neg x_n \vee x_{n+1}$

où $n \geqslant 1$ et $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
Autrement dit, une clause de Horn est une implication $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \to x_{n+1}$ (on peut avoir des clauses $\top \to x$ ou $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \to \bot$). Une *formule de Horn* est une conjonction de plusieurs (éventuellement une ou zéro) clauses de Horn.

1. Montrez qu'une formule de Horn qui ne contient pas de clauses de la forme (1) ou qui ne contient pas de clause de la forme (2) est satisfaisable.
2. Donner une méthode efficace pour déterminer si une formule de Horn ϕ est satisfaisable.

Ex 1

1) DNF $(x \wedge y) \vee (a \wedge d)$ chaque ligne où est vrai

1ère ligne :

$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4)$

$\vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$

$\vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4)$

$\vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$

$\vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4)$

$\vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$

$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4)$

$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$\vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4)$

$\vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$ $\longrightarrow \neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4$

$\vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4)$

$\vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$ $\longrightarrow x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$

$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4)$

$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$ $\longrightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge x_4$

$\longrightarrow x_2 \wedge x_4$

plus petite

$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4)$$
$$\vee\ (x_2 \wedge x_4)$$
$$\vee\ (x_1 \wedge \neg x \wedge x_3)$$
$$\vee\ (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$$

2) CNF : $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)$$
$$\wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$
$$\wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$
$$\wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x \vee x_4)$$
$$\wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$
$$\wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)$$
$$\wedge (\neg x \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$
$$\wedge (\neg x \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

DNF

$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4)$

$\vee\ (x_2 \wedge x_4)$

$\vee\ (x_1 \wedge \neg x \wedge x_3)$

$\vee\ (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$

Comment obtenir CNF :

Ex2

$$
\begin{aligned}
f = \quad & (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg w) \\
& \wedge \cancel{(\neg y \vee \neg z \vee \neg w)} \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (u \vee v) \\
& \wedge (u \vee \neg v) \wedge (y \vee \neg u) \wedge (\neg z \vee \neg u)
\end{aligned}
$$

function $dp(c)$ = *case*

(1) *if* $c = \top$ *then true*

(2) *if* c contient une clause $\bot$ *then false*

(3) *if* c contient une clause unitaire x *then* $dp(c[x/1])$

(4) *if* c contient une clause unitaire $\neg x$ *then* $dp(c[x/0])$

(5) *if* x n'apparaît qu'avec polarité positive en c *then* $dp(c[x/1])$

(6) *if* x n'apparaît qu'avec polarité négative en c *then* $dp(c[x/0])$

(7) *else choisir* $x \in \mathcal{V}(c)$; $dp(c[x/0])$ *or* $dp(c[x/1])$

cas (6) avec w

On choisit $y=0$

On obtient :

$$(x \vee z) \wedge (u \vee v) \wedge (u \vee \neg v)$$
$$\wedge \neg u \wedge (\neg z \vee \neg u)$$

cas 4 : $u=0$

$$(x \vee z) \wedge v \wedge \neg v$$

$v=0$ $\quad \bot$

$y=1$ $\quad (x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (u \vee v)$
$$\wedge (u \vee \neg v) \wedge (\neg z \vee \neg u)$$

$x=0$

$$\neg z \wedge (u \vee v) \wedge (u \vee \neg v) \wedge (\neg z \vee \neg u)$$

prop unitaire $z=0$

$$(u \vee v) \wedge (u \vee \neg v)$$

cas 6 $u=\underline{1}$

$\top$

On s'arrête quand on trouve $\top$

Si on choisit $x = 1$, ça ne marche pas

Ex 3

C est satisfaisable si et seulement si $C[x/0] \vee C[x/1]$ est satisfaisable

$C \dashv\vdash C[X/0] \vee C[X/1]$ n'est pas vrai

$[\![C[x/0] \vee C[x/1]]\!] v = 1$

$\Rightarrow [\![C[x/0]]\!] v = 1$ ou $[\![C[x/1]]\!] v = 1$

$\Rightarrow [\![C]\!] (v[x/0]) = 1$ ou $[\![C]\!] (v[x/1]) = 1$

$\overset{?}{\Rightarrow} [\![C]\!] v = 1 \longrightarrow$ Faux car

exemple

$C = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$v = [y \mapsto 0, z \mapsto 0, x \mapsto 0]$

$[\![C]\!] v = 0$

$[\![C]\!] (v[x/1]) = 1$

$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \wedge \neg y)$

On choisit y :

$y = 0$: $x \wedge \neg x$

x est unitaire

$x = 1$ $\perp$

$y = 1$ $x \wedge \neg x$

x est unitaire

$x = 1$ $\perp$

NNF de $\neg(x \Leftrightarrow \neg y)$

par def

$\rightsquigarrow \neg((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg\neg y))$

$\rightsquigarrow \neg((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y))$

$\rightsquigarrow \neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg(\neg x \wedge y)$

$\rightsquigarrow (\neg x \vee \neg\neg y) \wedge (\neg\neg x \vee \neg y)$

$\rightsquigarrow (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$

Correction CC2

$((x \oplus y) \oplus z) \dashv\vdash (x \oplus (y \oplus z))$

x	y	z	$x \oplus y$	$y \oplus z$	p	q
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1

2) $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4)$

$\vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4)$

$\vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4)$

$\vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4)$

Que signifie $\{y, z\} \models y \wedge (z \vee x)$?

$y \wedge (z \vee x)$ est conséquence logique

de $\underbrace{\{y, z\}}_{\text{ensemble de formule}}$

$\{p, q\} \models r$

r ~~est~~ conséquence logique de p et q

mais $\not\models$ avec $p \models r$

$q \models r$

$x \wedge y \models x \wedge y$

mais ni $x \not\models x \wedge y$

ni ~~x~~ $y \not\models x \wedge y$

Question 4

$$\boxed{\begin{array}{l} \perp \models p \rightarrow \text{n'importe quelle formule} \\ p \models \top \end{array}}$$

ap $p_1 := \neg x \wedge y$

$q_2 := \neg y \rightarrow x$

table de vérité

x	y	p_1	q_1
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

a chaque fois p_1 est vraie q_1 doit être vraie aussi

$\Rightarrow p_1 \models q_1$

mais pas $q_1 \not\models p_1$

$P_4 : (x \rightarrow y) \rightarrow z$

$q_4 : x \rightarrow (y \rightarrow z)$

table de vérité

x	y	z	$x \rightarrow y$	P_4	$y \rightarrow z$	q_4
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

$P_4 \models q_4$ mais $q_4 \not\models P_4$

$P_5 = (z \wedge ((\neg z \wedge \neg x) \vee y))$

$q_5 = (\neg((z \vee x) \wedge \neg y) \wedge z)$

$z \wedge ((\neg z \wedge \neg x) \vee y)$

$\models\!\mid$ $((\neg z \wedge \neg x) \vee y) \wedge z)$

commutativité de $\wedge$

$\models\!\mid (((\neg z \wedge \neg x) \vee \neg\neg y) \wedge z)$

$\models\!\mid ((\neg(z \vee x) \vee \neg\neg y) \wedge z) \models\!\mid (\neg((z \vee x) \wedge \neg y) \wedge z)$

Donc $p_5 \not\models q_5$

5)

x	y	z	$if_n(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$
\begin{aligned}
if(x, y, z) \;&\models\!\mid (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \\
&\vee (x \wedge \neg y \wedge z) \\
&\vee (x \wedge y \wedge z) \\
&\models\!\mid (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge z)
\end{aligned}
$$

CNF :

$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$

3) $\{\bot, \top, ifn\}$ est fonctionnellement complet

$\{\neg, \wedge\}$ est fonctionnellement complet, donc il suffit d'exprimer $\neg$ et $\wedge$ avec $\bot, \top, ifn$

$$p \wedge q \mathrel{\vDash\!\!\dashv} ifn(p, \bot, q)$$

$$\neg p \mathrel{\vDash\!\!\dashv} ifn(p, \top, \bot)$$