Outils logiques
TD n° 6

Exercice 1 :

Mettre les formules suivantes en forme normale de négation.

1. $\neg(\neg x \vee y)$
2. $\neg(\neg(x \vee y) \wedge z)$
3. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$

Exercice 2 :

Soit $\phi : Form \rightarrow \mathbb{N}$ définie par récurrence :
- $\phi(x) = 1$, où $x \in V$
- $\phi((p_1 \wedge p_2)) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$
- $\phi((p_1 \vee p_2)) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$
- $\phi(\neg p) = (\phi(p))^2 + 1$

Montrez que $\phi(p) \geqslant 1$ pour toute formule p.

Exercice 3 :

Soit p une forme en forme normale de négation. Montrez par induction que l'on peut transformer $\neg p$ en sa forme normale de négation q en appliquant la transformation suivante sur p (qu'on appelera transformation T) :

1. Remplacer tous les $\wedge$ par des $\vee$ et les $\vee$ par des $\wedge$.
2. Remplacer toutes les variables niées par des variables non-niées, et réciproquement (*i.e.* remplacer les ocurrences de $\neg x$ pour $x \in V$ par x, et celles de x non précédées du symbole $\neg$ par $\neg x$).

Note : cela montre que les formules en forme normale de négation sont pratiques à manipuler. La conjonction et la disjonction préservent la forme NNF, et l'exercice montre que la mise en NNF de la négation se calcule très rapidement.

Exercice 4 :

Déterminez une forme normale conjonctive et disjonctive des formules suivantes :

1. $\neg(p \leftrightarrow q)$
2. $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$
3. $(p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge (q \rightarrow (q \wedge \neg p))$

Exercice 5 :

Soit $\psi : Form \to \mathbb{N}$ définie par récurrence :
- $\psi(x) = 2$
- $\psi((p_1 \wedge p_2)) = (\psi(p_1))^2 * \psi(p_2)$
- $\psi((p_1 \vee p_2)) = 2 * \psi(p_1) + \psi(p_2) + 1$
- $\psi(\neg p) = \psi(p)$

1. Montrer que $\psi(p) \geqslant 2$ pour toute formule p.
2. Considérons les règles de transformation suivantes :

$$
\begin{aligned}
X \wedge (Y \vee Z) &\leadsto (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) && (1)\\
(X \vee Y) \wedge Z &\leadsto (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) && (2)\\
(X \wedge Y) \wedge Z &\leadsto X \wedge (Y \wedge Z) && (3)\\
(X \vee Y) \vee Z &\leadsto X \vee (Y \vee Z) && (4)
\end{aligned}
$$

Montrer que pour toute formule $p \in Form$: Si p se transforme en q par l'application d'une des règles précédentes, alors $\psi(p) > \psi(q)$.

Exercice 6 :

Nous disons (pour cet exercice) qu'une formule propositionnelle est en *forme anormale* quand elle ne contient ni une sous-formule de la forme $\neg\neg p$, ni de la forme $(\neg p \vee \neg q)$, ni $(\neg p \wedge \neg q)$.

1. Donner des règles de réécriture qui permettent de transformer toute formule donnée en une formule équivalente en forme anormale. Expliquer, en quelques lignes (pas de preuve formelle),
   (a) pourquoi le processus de réécriture termine toujours,
   (b) pourquoi la formule obtenue à la fin est équivalente à la formule de départ,
   (c) pourquoi la formule obtenue à la fin est en forme anormale.
2. Est-ce qu'il y a deux formules en forme anormale qui sont logiquement équivalentes mais qui diffèrent par plus que seulement les lois de commutativité, d'associativité, et d'idempotence ?

Exercice 7 :

Une formule en forme conjonctive normale

$$(d_1 \wedge d_2 \wedge \ldots \wedge d_n)$$

est valide si et seulement si pour tout i il existe une variable x telle que la clause disjonctive d_i contient à la fois le littéral x et aussi sa négation $\neg x$.

Exercice 8 : Optionnel

On considère la formule $E = ((y \wedge z) \rightarrow (x \leftrightarrow (\neg y \vee z)))$ où x, y et z sont des variables propositionnelles.

1. Déterminer une formule logiquement équivalente à E, écrite sans autre symbole de connecteur que $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ (en particulier, pas de $\neg$).
2. Donner une DNF de E, aussi réduite que possible.
3. Montrer que les formules $(z \rightarrow (y \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))))$ et $(z \rightarrow (y \rightarrow x))$ sont logiquement équivalentes.

08/03

IV. Formes Normales

Formules : p, $p \wedge p$, $p \wedge p \wedge p$, ...

Une formule est en forme normale de négation si :

1. Elle ne contient que les opérateurs $\{\wedge, \vee, \neg\}$

2. L'opérateur $\neg$ ne s'applique qu'à des variables propositionnelles

Exemple : $((\neg x \wedge \neg y) \wedge z)$

$((\neg x \vee y) \wedge (\neg z \vee x))$

Contre exemple : $\neg(x \wedge y)$

$\neg\neg y$

$x \to y$

Exemple : (Transformations)

$\neg\neg(x_1 \wedge x_2) \longrightarrow (x_1 \wedge x_2)$

$(x_1 \vee \neg\neg x_2) \longrightarrow (x_1 \vee x_2)$

$\neg(x \wedge (y \vee \neg z))$

se transforme en :

$(\neg x \vee \neg(y \vee \neg z))$

se transforme en :

$(\neg x \vee (\neg y \wedge \neg\neg z))$

se transforme en

$(\neg x \vee (\neg y \wedge z))$

Terminaison :

Si on avait une seule règle :

$\neg\neg X \longrightarrow X$

- Chaque application de cette règle enlève deux occurrences du symbole $\neg$.
- Si la formule de départ a n occurrences de $\neg$, alors l'algorithme de transformation termine après au plus $\frac{n}{2}$ étapes.

La deuxième règle

$$\neg(X \wedge Y) \longrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$$

- Si $p = (p_1 \wedge p_2)$ alors plusieurs possibilités pour appliquer une règle peuvent exister, cela dépend de p_1 et de p_2.
- Chaque transformation se fait soit sur p_1 soit sur p_2, il n'est pas possible d'appliquer une règle à la racine de p car toute règle commence sur le symbole $\neg$.
- Nous considérons le cas où p_1 est transformé en q_1.
- Hypothèse d'induction : $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

Hypothèse d'induction : $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$\begin{array}{cll} & \phi((p_1 \wedge p_2)) & \\ = & \phi(p_1) + \phi(p_2) & \text{par définition de } \phi \\ > & \phi(q_1) + \phi(p_2) & \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ = & \phi((q_1 \wedge p_2)) & \text{par définition de } \phi \end{array}$$

$p = \neg p_1$. Sous-cas 1 : transformation de p_1 en q_1.
Hypothèse d'induction : $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$
\begin{array}{lll}
 & \phi(\neg p_1) & \\
= & (\phi(p_1))^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \\
> & (\phi(q_1))^2 + 1 & \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\
 & & \text{et } \phi(q_1) \geq 1 \\
= & \phi(\neg q_1) & \text{par définition de } \phi
\end{array}
$$

$p = \neg p_1$. Sous-cas 1 : transformation de p_1 en q_1.
Hypothèse d'induction : $\phi(p_1) > \phi(q_1)$

$$
\begin{array}{lll}
 & \phi(\neg p_1) & \\
= & (\phi(p_1))^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \\
> & (\phi(q_1))^2 + 1 & \text{car } \phi(p_1) > \phi(q_1) \text{ par hypothèse d'induction} \\
 & & \text{et } \phi(q_1) \geq 1 \\
= & \phi(\neg q_1) & \text{par définition de } \phi
\end{array}
$$

Démonstration : le cas d'une négation (II)

Première règle appliquée à la racine : $p = \neg\neg p_2$ est transformé en p_2.

$$
\begin{array}{lll}
 & \phi(\neg\neg p_2) & \\
= & (\phi(\neg p_2))^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \\
= & ((\phi(p_2))^2 + 1)^2 + 1 & \text{par définition de } \phi
\end{array}
$$

$$\phi(p_2)$$

Démonstration : le cas d'une négation (III)

Application de la deuxième règle à la racine : $p = \neg(p_2 \wedge p_3)$ est transformé en $(\neg p_2 \vee \neg p_3)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \phi(\neg(p_2 \wedge p_3)) & \\
= & \phi((p_2 \wedge p_3))^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \\
= & (\phi(p_2) + \phi(p_3))^2 + 1 & \text{par définition de } \phi \\
= & (\phi(p_2))^2 + 2\phi(p_2)\phi(p_3) + (\phi(p_3))^2 + 1 & \\
> & (\phi(p_2))^2 + 1 + (\phi(p_3))^2 + 1 & \text{car } \phi(p_2) \geq 1 \\
 & & \text{et } \phi(p_3) \geq 1 \\
= & \phi(\neg p_2) + \phi(\neg p_3) & \text{par définition de } \phi \\
 & \phi((\neg p_2 \vee \neg p_3)) &
\end{array}
$$

Théorème

Theorem

Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme normale de négation.

Démonstration : Donné p, on lui applique des règles de transformation tant que possible. À montrer :

1. Le processus termine.
2. Chaque étape transforme une formule dans une formule équivalente.
3. Si aucune règle de transformation ne s'applique alors la formule est en forme normale de négation.

Démonstration de (3): Si aucune règle de transformation s'applique alors la formule est en forme normale de négation

Supposons qu'aucune règle ne s'applique à p, et que p contient une sous-formule $\neg q$.

- q ne peut pas être une négation (sinon : règle (1) s'applique)
- q ne peut pas être une conjonction (sinon : règle (2) s'applique)
- q ne peut pas être une disjonction (sinon : règle (3) s'applique)

Donc, q doit être une variable.

$$\neg\neg X \rightsquigarrow X \quad (1)$$

$$\neg(X \wedge Y) \rightsquigarrow \neg X \vee \neg Y \quad (2)$$

$$\neg(X \vee Y) \rightsquigarrow \neg X \wedge \neg Y \quad (3)$$

TD6

Ex 1

1) $\neg(\neg x \vee y)$
$\xrightarrow{(1)} (\neg\neg x \wedge \neg y)$
$\xrightarrow{(1)} (x \wedge \neg y)$

$\boxed{\text{NNF} \quad x \wedge \neg y}$

2) $\neg(\neg(x \vee y) \wedge z) \xrightarrow{(2)} \neg\neg(x \vee y) \wedge \neg z$
$\xrightarrow{(1)} (x \vee y) \vee \neg z$

NNF $(x \vee y) \vee \neg z$

3) $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ $x \rightarrow y = \neg x \vee y$
$= \neg x \vee (\neg y \vee z)$

Ex 2 :

Soit $\phi : Form \to \mathbb{N}$ définie par récurrence :

- $\phi(x) = 1$, où $x \in V$
- $\phi((p_1 \wedge p_2)) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$
- $\phi((p_1 \vee p_2)) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$
- $\phi(\neg p) = (\phi(p))^2 + 1$

Montrez que $\phi(p) \geqslant 1$ pour toute formule p.

preuve par induction

Soit $p \in$ Form, Soit $P(p)$ "$\varphi(p) \geqslant 1$"

Prouvons que P est vraie sur Form par induction

- Soit $x \in V$, sur q, $\varphi(x) \geqslant 1$
trivial car $\varphi(x) = 1 \geqslant 1$

- Soit $p \in Form$, mq $\varphi(\neg p) \geqslant 1$

On a $\varphi(\neg p) = \varphi(p)^2 + 1 \geqslant 1$

car $\varphi(p)^2 \geqslant 1$

- Soient $p, q \in Form$ tq $\mathcal{P}(p)$ et $\mathcal{P}(q)$

mq $\mathcal{P}(p \wedge q)$

$$\varphi(p \wedge q) = \varphi(p) + \varphi(q)$$
$$\geqslant 1 + 1 \quad \text{par Hypothèse Induction}$$
$$\geqslant 1$$

- cas disjonction similaire

Ex3:

ex: $(\neg x \vee y) \wedge z \xrightarrow{neg} (x \wedge \neg y) \vee \neg z$

Littéral, Clause, DNF

1. Définition

Un littéral est soit une variable propositionnelle soit la négation d'une variable propositionnelle

2. Une clause conjonctive (également appelée un terme) est soit la constante $\top$, soit un littéral, soit une conjonction d'aux moins deux littéraux.
3. Une formule en forme disjonctive normale (DNF) est soit la constante $\perp$, soit une clause conjonctive, soit une disjonction d'aux moins deux clauses conjonctives.

Clauses conjonctives (syntaxe raccourcie)

- $\top$: Top vrai $\perp$ bottom constante fausse
- x
- $(x \land y \land z)$
- $(x \land \neg x \land y)$

Forme disjonctive normale

$(x \land y \land z) \lor (x \land \neg x \land y) \lor x$

Toute formule en DNF est aussi en NNF

- Il y a des formules en NNF qui ne sont pas DNF.
- Exemple :

$$(x \land (\neg y \lor \neg z))$$

- D'abord mettre la formule en NNF
- Puis appliquer tant que possible les règles :

$$
\begin{aligned}
X \land (Y \lor Z) &\rightsquigarrow (X \land Y) \lor (X \land Z) && (4)\\
(X \lor Y) \land Z &\rightsquigarrow (X \land Z) \lor (Y \land Z) && (5)\\
(X \land Y) \land Z &\rightsquigarrow X \land (Y \land Z) && (6)\\
(X \lor Y) \lor Z &\rightsquigarrow X \lor (Y \lor Z) && (7)
\end{aligned}
$$

Remarque : Si on permet la syntaxe raccourcie on n'a besoin que des règles 4 et 5.

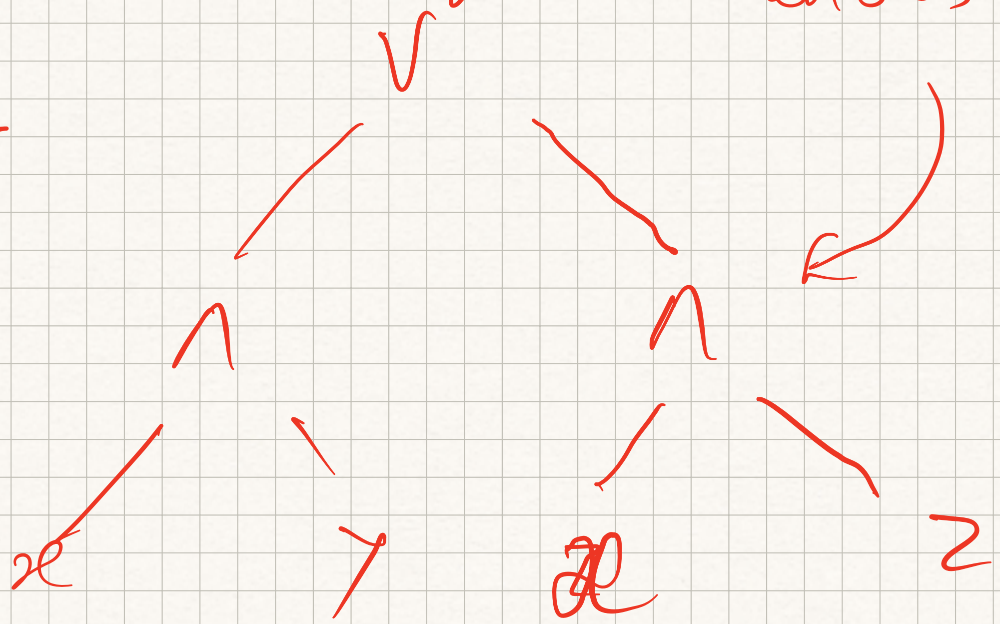
Disjonction : $\vee$

Conjonction : $\wedge$

DNF :

Disj en haut

conjonction en bas



$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge \neg\neg(z_1 \vee z_2))$

$x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$ par règle 1

$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$ **[NNF]** par règle 3

$x_1 \wedge (((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_1) \vee ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_2))$ par règle 4

$x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2))$ par règle 6 (2 fois)

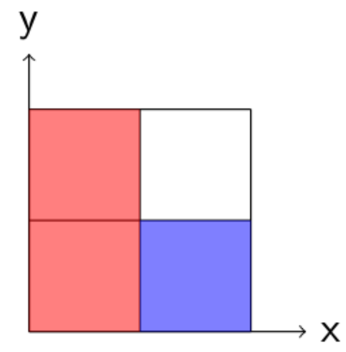
$(x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2)$ par règle 5

Mise en forme DNF

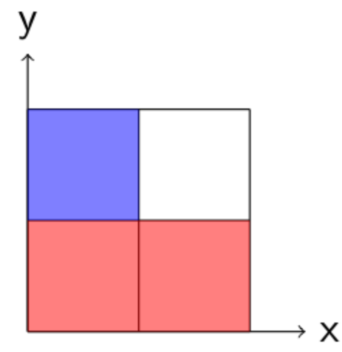
Theorem
Pour toute formule il existe une formule équivalente en forme disjonctive normale.

Démonstration : Mettre en forme NNF, puis appliquer les règles de transformaton en DNF tant que possible. À montrer :

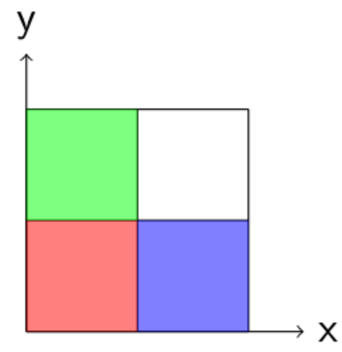
1. Le processus termine.
2. Le résultat est équivalent à la formule de départ.
3. À la fin on obtient une DNF



$\neg x$
$\vee\,(x \wedge \neg y)$



$\neg y$
$\vee(\neg x \wedge y)$



$(\neg x \wedge \neg y)$
$\vee(x \wedge \neg y)$
$\vee(\neg x \wedge y)$

$$
\begin{array}{lll}
X \wedge (Y \vee Z) & \rightsquigarrow & (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \\
(X \vee Y) \wedge Z & \rightsquigarrow & (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \\
(X \wedge Y) \wedge Z & \rightsquigarrow & X \wedge (Y \wedge Z) \\
(X \vee Y) \vee Z & \rightsquigarrow & X \vee (Y \vee Z)
\end{array}
$$

Exo 4 :

$$
\begin{array}{ll}
x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge \neg\neg(z_1 \vee z_2)) & \\
x_1 \wedge (\neg(y_1 \vee y_2) \wedge (z_1 \vee z_2)) & \text{par règle 1} \\
x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge (z_1 \vee z_2)) \text{ [NNF]} & \text{par règle 3} \\
x_1 \wedge (((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_1) \vee ((\neg y_1 \wedge \neg y_2) \wedge z_2)) & \text{par règle 4} \\
x_1 \wedge ((\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2)) & \text{par règle 6 (2 fois)} \\
(x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_1) \vee (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge z_2) & \text{par règle 5}
\end{array}
$$

On peut encoder l'implication de la manière suivante:

$$
\begin{array}{l}
(p \Rightarrow q) := (\neg p \vee q) \\
(p \Leftrightarrow q) := ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))
\end{array}
$$

$x \rightarrow y = \neg x \vee y$

On l'utilisera comme suit:

si p alors q	$(p \Rightarrow q)$
q si p	$(p \Rightarrow q)$
q seulement si p	$(p \Leftarrow q)$ ou $(q \Rightarrow p)$
q uniquement si p	$(p \Leftarrow q)$ ou $(q \Rightarrow p)$
q si et seulement si p	$(p \Leftrightarrow q)$

1, $\neg(p \Leftrightarrow q) \rightarrow \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
$\rightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q))$

(2)

$$\xrightarrow{\quad} \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q)$$

2 fois prop 3

$$\xrightarrow{2\times(3)} (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg\neg q)$$

$$\xrightarrow{2\times(1)} (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$ en NNF

aussi en DNF

2φ

$$((p \to q) \to q) \to q$$

$$= \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee q) \vee q$$

$$\xrightarrow{(3)} (\neg\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee q$$

$$\xrightarrow{1} ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee q$$ (NNF)

$$\xrightarrow{5} ((\neg p \wedge \neg q) \vee \underbrace{(q \wedge \neg q)}_{\perp}) \vee q$$

$$\models\!\mid (\neg p \wedge \neg q) \vee q$$

$$\boxed{\text{DNF } (\neg p \wedge \neg q) \vee q}$$