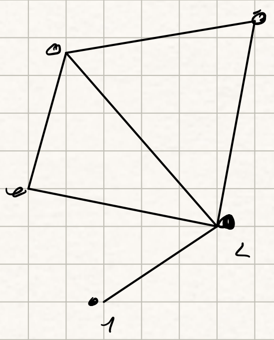
sylvain.perifel@irif.f. 4017

Graphe et combinatoire



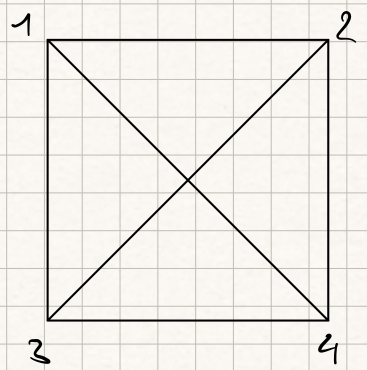
Def : Un graphe non orienté est
- un ensemble de sommets V fini
- un ensemble d'arêtes qui sont des paires de sommets

ex

$V = \{1,2\}$

$E = \{ \underbrace{\{1,2\}}_{\text{paire}} \}$

edges



graphe complet
il a toutes les arêtes possibles

$V = \{1,2,3,4\}$

$E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$

Def : Un <u>ensemble</u> est une collection d'objets distincts (pas de répétitions)

non ordonné

Un objet de la collection est appelé un élément x, il <u>appartient</u> à l'ensemble E

exemple : $\mathbb{N}$ (entier), $\mathbb{C}$ (nbr complexe), $2\mathbb{N}$ (paire), $\emptyset$, $\{1\}$

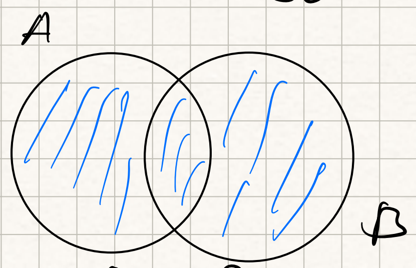
contre ex : $(1,2,3,4)$ n-uplet, "$\{1,1\}$" multi-ensemble

Si on autorise les répétitions, on parle de multi-ensemble

Opérations sur les ensembles

Union → "ou"

$A \cup B$: l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B



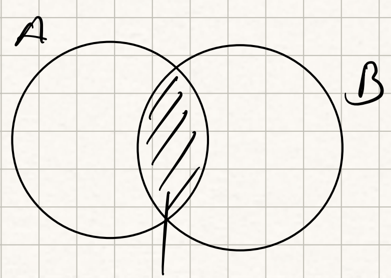
$A \cup B$

$= \{x \mid x \in A \boxed{\text{ou}} x \in B\}$

Intersection → "Et"

: l'ens des éléments qui appartiennent à A et B

$= \{x \mid x \in A$ et $x \in B\}$



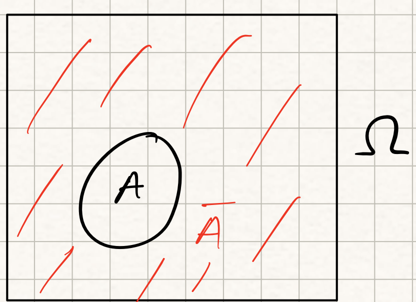
$A \cap B$

Complémentaire

$\bar{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$

$\bar{A}$ → négation

Ω → univers

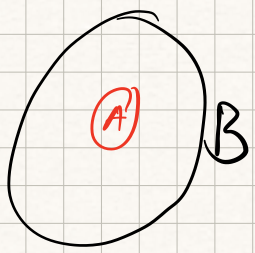


$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$

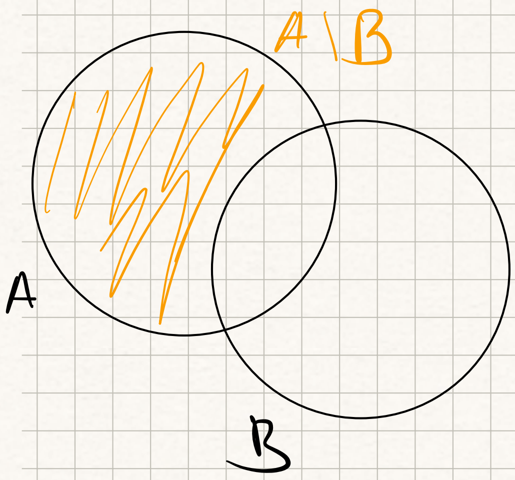
produit cartésien

Relation : $A \subseteq B$ tous les éléments de A sont dans B

$\forall x \in A, x \in B$



$A \setminus B : \quad = \{x \in A \mid x \notin B\}$



TD 1. Ensembles et récurrence

Exercice 1. Compter des ensembles

Soit A l'ensemble $\{a, b, c\}$ et B l'ensemble $\{a, d\}$.

(a) Ecrire tous les éléments des ensembles $A \times B$, $A \cup B$ et $A \cap B$. Quelle sont les cardinalités de ces ensembles ?

(b) Ecrire tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$. Quelle est sa cardinalité ?

(c) Soit X un ensemble et x un élément qui n'est pas dans X. Montrer que, si X possède p sous-ensembles, alors $X \cup \{x\}$ possède $2p$ sous-ensembles.

(d) Montrer par récurrence que, si un ensemble X a une cardinalité de n, alors $\mathcal{P}(X)$ a une cardinalité de 2^n.

Exercice 2. Différence symétrique, inclusion-exclusion

(a) Montrer que, pour deux ensembles quelconques A et B, on a

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(b) Quel est l'opérateur logique correspondant à l'ensemble qui figure dans la question précédente ?

(c) Montrer que, pour A et B de cardinalité finie, on a $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Exercice 3. Preuves par récurrence d'égalités arithmétiques

Écrire la preuve par récurrence que les égalités suivantes sont vraies pour tout $n \geq 1$.

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$

Exercice 4. Suites rythmiques

Un instrument peut jouer deux types de notes : une note courte (C) qui dure 1 seconde et une note longue (L) qui dure 2 secondes. On écrit R_n pour le nombre de séquences de notes de longueur totale égale à n secondes. Par exemple, LC, CL, et CCC sont trois séquences de notes de longueur 3.

(a) Pour chaque valeur de $n \in [1, 5]$, trouver les valeurs de R_n en décrivant toutes les séquences rythmiques possibles de longueur n.

(b) Étant donné les rythmes de longueur $n-1$ et $n-2$, comment trouver tous les rythmes de longueur n ?

(c) Écrire une formule permettant de calculer R_n en fonction de R_{n-1} et R_{n-2}.

(d) On définit maintenant $\varphi := \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrez que $\varphi^2 = 1 + \varphi$.

(e) Donner une preuve par récurrence que $R_n \leq \varphi^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 5. Découpages du plan

Le but de cet exercice est de calculer le nombre de régions obtenues en traçant n lignes droites dans le plan. Une seule droite divise toujours le plan en deux régions, et deux droites donnent quatre régions. Pour la suite de l'exercice, nous respecterons deux règles importantes : deux droites ne sont jamais tracées parallèlement l'une à l'autre, et trois droites ne s'intersectent jamais en un seul point.

(a) Compter le nombre de régions quand $n = 3$. Le nombre de régions dépend-il de la façon dont vous tracez les droites (pour autant que vous respectiez les deux règles ci-dessus) ?

(b) Lorsque vous avez déjà n droites, et que vous tracez une autre droite, combien de régions existantes va-t-elle traverser ?

(c) Dénotons par P_n le nombre de régions après avoir tracé n droites. Écrire une relation de récurrence pour P_n.
(d) Trouver une formule directe qui calcule P_n. *Indication.* Utiliser l'égalité de l'exercice 3a.

Exercice 6. Mots finis

Soit A un ensemble fini. L'ensemble des mots finis avec des lettres dans A est défini récursivement comme le plus petit ensemble W tel que :
— le mot vide est dans W, et
— pour tout élément a de A et tout élément w de W, la concaténation wa est aussi dans W.

(a) À quel type inductif de données correspondent les mots finis ? Écrire une définition de ce type.
(b) Si A est de cardinalité 2, alors combien de mots de longueur n y a-t-il ?
(c) Expliquer le lien entre la question (b) et question (d) de l'exercice 1.
(d) Écrire une définition récursive d'une fonction ℓ qui calcule la longueur d'un mot fini.
(e) Supposons que A est de cardinalité k. Montrer par récurrence qu'il y a k^n mots de longueur n.

Exercice 7. Parenthèses équilibrées

Dans cet exercice, nous considérons l'ensemble W de mots finis sur l'alphabet fini $\{(,)\}$. On dit que un tel mot w est *équilibré* si chaque parenthèse ouvrante a une parenthèse fermante correspondante plus loin dans le mot.

L'ensemble D de mots avec des parenthèses équilibrées est défini récursivement comme le plus petit sous-ensemble de W tel que
— le mot vide est dans D ;
— si w_1 et w_2 sont deux mots dans D, alors le mot $(w_1)w_2$ est dans D.

Pour $n \geq 0$, on écrit D_n pour le sous-ensemble des mots de longueur $2n$ dans D.

(a) Écrire les éléments des ensembles D_0, D_1, D_2, et D_3.
(b) Expliquer comment on peut construire D_n à partir des ensembles $D_0, \ldots, D_{n-1}$.
(c) Donner une rélation de récurrence qui permet de calculer $|D_n|$.

Note. Les mots dans l'ensemble D sont appelés *mots de Dyck*, et la suite des cardinalités $|D_n|$ est appelé la *suite de Catalan*.

Exercice 8. Arbres binaires

Un *arbre binaire* peut être défini informellement comme un arbre fini avec une racine dans lequel chaque noeud a au plus deux fils.

(a) Écrire une définition récursive de l'ensemble T d'arbres binaires.
(b) Donner une définition récursive de l'ordre « est un sous-arbre de » sur l'ensemble T. Expliquer pourquoi cet ordre est bien fondé.
(c) Écrire une définition récursive de la fonction h qui associe à chaque arbre binaire sa hauteur (entier naturel). On considère que la hauteur d'un arbre à un seul noeud est 0.
(d) Écrire une définition récursive de la fonction v qui associe à chaque arbre binaire le nombre de ses noeuds.
(e) Soit t un arbre binaire. Écrire une définition récursive de la fonction p_t qui associe à chaque noeud x dans t sa profondeur, c'est-à-dire, sa distance de la racine. On considère que la profondeur de la racine est 0.
(f) Une *feuille* est un noeud dans un arbre qui n'a aucun fils. On appelle un arbre binaire t *parfait* si chaque noeud a 0 ou 2 fils, et toutes les feuilles ont la même profondeur. Donner une définition inductive de l'ensemble P des arbres binaires parfaits.

Exercice 9. Formules propositionnelles

Soit P un ensemble fini de propositions. L'ensemble de formules propositionnelles sur P est défini récursivement comme le plus petit ensemble F tel que
— pour tout $p \in P$, on a $p \in F$;
— pour tout $\varphi \in F$, on a $\neg(\varphi) \in F$;
— pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a $(\varphi \vee \psi) \in F$.

(a) Écrire une fonction récursive h qui calcule le nombre d'opérateurs logique dans une formule.

(b) Écrire une fonction récursive t qui calcule la *profondeur* d'une formule propositionnelle, c'est-à-dire, le nombre maximal d'opérateurs imbriqués dans la formule.

(c) Deux formules sont dites *équivalentes* si elles ont la même table de vérité. Soit S un ensemble de formules propositionnelle sur P tel que chaque formule propositionnelle sur P est équivalente à une et une seule formule dans S. Trouver une formule qui calcule $|S|$ en termes de $|P|$.

(d) Écrire une fonction récursive s qui calcule l'ensemble de sous-formules d'une formule propositionnelle.

(e) Montrer que, pour toute formule φ, $|s(\varphi)| \leq 2h(\varphi) + 1$.

Exercice 10. Triominos

On appelle *triomino* une pièce composée de trois carrés en forme de la lettre L.

(a) On souhaite paver avec triominos une grille de taille 8×8, avec la case du coin supérieur droit enlevée. Décrivez une méthode récursive pour le faire.

(b) On écrit T_n pour le nombre de pièces de triominos nécessaires pour réaliser un pavage d'un plateau de taille $2^n \times 2^n$ avec le coin supérieur droit enlevé. Donner une formule récursive pour T_n.

(c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = \frac{4^n - 1}{3}.$$

Exercice 2. Différence symétrique, inclusion-exclusion

(a) Montrer que, pour deux ensembles quelconques A et B, on a

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

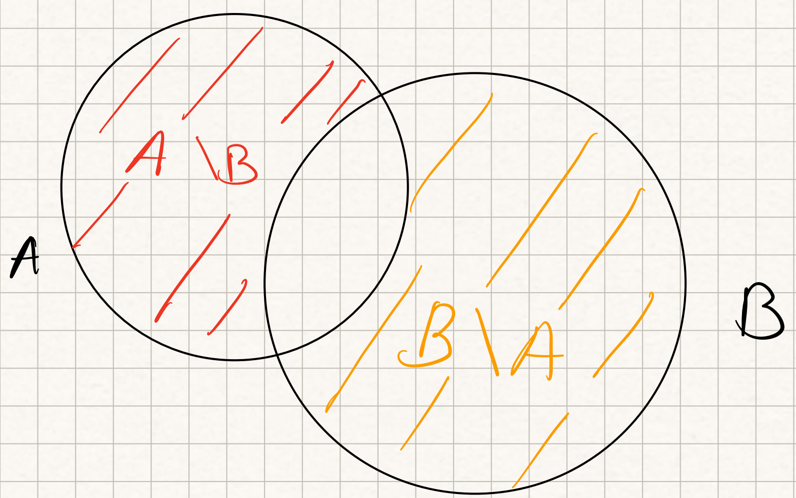
(b) Quel est l'opérateur logique correspondant à l'ensemble qui figure dans la question précédente ?

(c) Montrer que, pour A et B de cardinalité finie, on a $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

disjoints

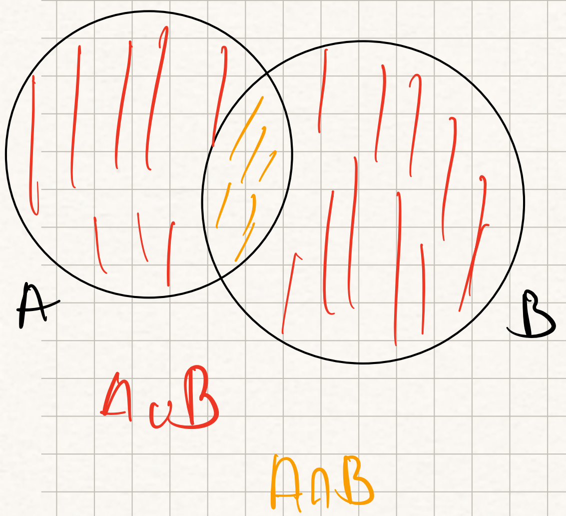
Ex2 (a). $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 1 $= A \,\triangle\, B$ différence symétrique XOR

$\overset{?}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ 2



1

Si A et B sont disjoints,
On peut noter leur union
$A \sqcup B$ $A \cap B = \emptyset$
union disjointe



2

On montre $(A \setminus B)$ est inclu dans $(A \cup B)$

$\subseteq$: $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Si $x \in A \setminus B$: $x \in A \subseteq A \cup B$ donc $x \in A \cup B$

$x \in A\setminus B$ donc $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$

Conclusion $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

cas $x \in B \setminus A$: Identique ↑

$\supseteq$: $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

si $x \in A$ alors $x \notin B$ car $x \notin A \cap B$

donc $x \in A \setminus B$

si $x \in B$: de même $x \in B \setminus A$

Sur les graphes

opérations sur les graphes

$G = (V, E)$

$G' = (V', E')$

union $H =$ G G'

si disjoints

(souvent $V \cap V' = \emptyset$)

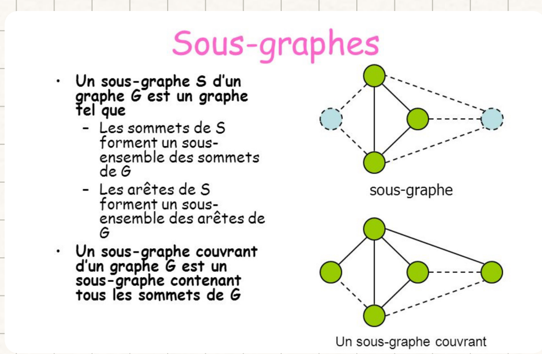
sinon $H = (V'', E'')$ avec $V'' = V \cup V'$

$E'' = E \cup E'$

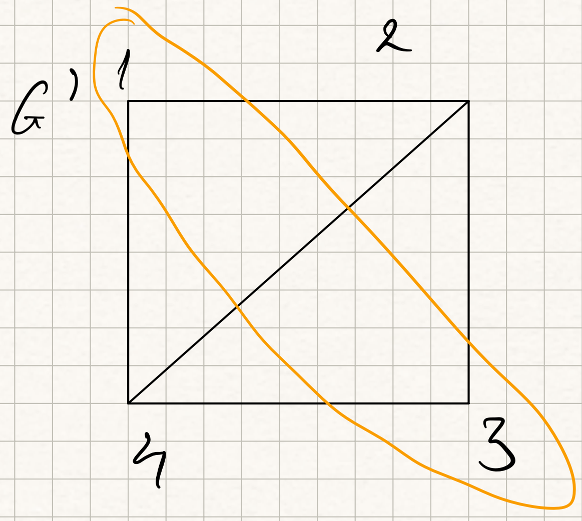
Sous graphe

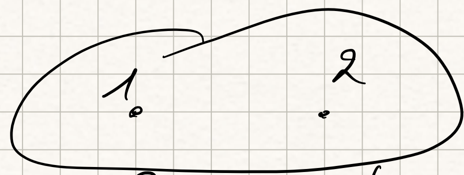
G est un sous-graphe de G' si $V \subseteq V'$ et $E \subseteq E'$

G est un sous-graphe induit de G si $V \subseteq V'$ et E est l'ensemble de toutes les arêtes de E' entre sommets de V'

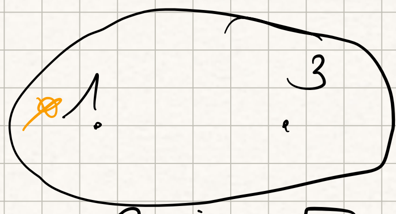


Ex

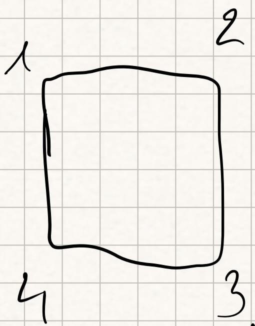




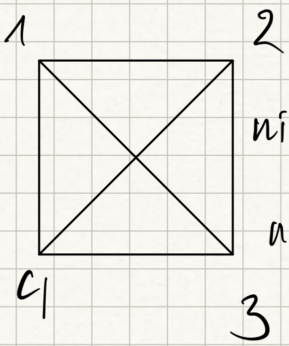
Sous graphe



Sg_i ← sommets isolés



Sous graph



ni l'un ni l'autre

Cardinal

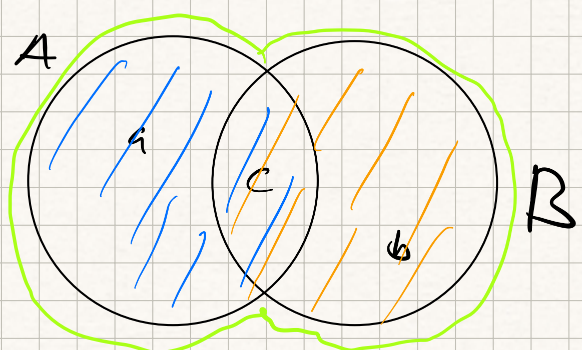
Le cardinal d'un ensemble fini E, noté $|E|$ (ou $\#E$ ou $card(E)$) est le nbe d'éléments de E

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

On note $a = |A \setminus B|$

$b = |B \setminus A|$



$c = |A \cap B|$

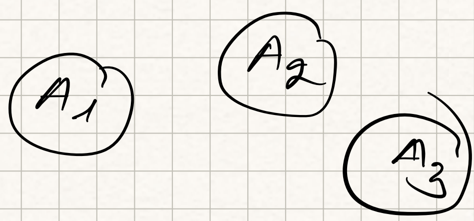
Ex:

montre que $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$

Principe d'addition

$$|A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

ens. disjoints



par le principe d'addition :

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$$

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|$$

$A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$

$$= \overbrace{(|A \setminus B| + |A \cap B|)}^{= A} + \overbrace{(|B \setminus A| + |A \cap B|)}^{B} - |A \cap B|$$

$=$

- $|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$
- $\bar{A} = |\Omega| - |A|$

Produit :

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$

$= \bigsqcup\limits_{x \in A} \underbrace{\{(x_0, y) \mid y \in B\}}_{\text{cardinal } |B|}$

$|A|$ eus

principe d'addition : $|A \times B| = |A| \times |B|$

Principe de multiplication : $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod\limits_{i=1}^{n} |A_i|$

2 tables : N clients et M commandes

a b c . . .

1
2
3
⋮
N

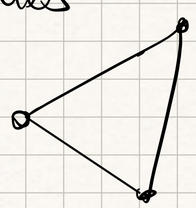
client	comman
1	a
1	b
⋮	⋮
1	c
2	d
⋮	⋮
N	M

→ NM lignes
principe de multiplication

graphe G 5 sommets verts
4 —— rouges
6 —— bleus

les sommets couleurs ≠ sont reliés

Cb de Δ dans G ?



pour former un triangle il faut choisir un sommet vert, un bleu et 1 rouge

$\rightarrow \underbrace{5}_{\text{1 sommet vert}} \times \underbrace{6}_{\text{bleu}} \times \underbrace{4}_{\text{rouges}} = 120$ de Δ dans G

Combien G a-t-il d'arêtes ?

principe d'addition :

$E = E_{vr} \sqcup E_{rb} \sqcup E_{br}$

$\Rightarrow |E| = \underbrace{|E_{vr}|}_{5\times 4} + \underbrace{|E_{rb}|}_{4\times 6} + \underbrace{|E_{br}|}_{5\times 6} = 74$

ens A :

sous ens : $B \subseteq A$

$\mathcal{P}(A) =$ l'ens des parties de A

l'ens des sous ens de A

Exercice 1. Compter des ensembles

Soit A l'ensemble $\{a, b, c\}$ et B l'ensemble $\{a, d\}$.

(a) Ecrire tous les éléments des ensembles $A \times B$, $A \cup B$ et $A \cap B$. Quelle sont les cardinalités de ces ensembles ?

(b) Ecrire tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$. Quelle est sa cardinalité ?

(c) Soit X un ensemble et x un élément qui n'est pas dans X. Montrer que, si X possède p sous-ensembles, alors $X \cup \{x\}$ possède $2p$ sous-ensembles.

(d) Montrer par récurrence que, si un ensemble X a une cardinalité de n, alors $\mathcal{P}(X)$ a une cardinalité de 2^n.

Ex 1

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, d\}$

1) (a) $A \times B = \{(a,a), (a,d), (b,a), (b,d), (c,a), (c,d)\}$ card 6

$A \cup B = \{a, b, c, d\}$ card 4

$A \cap B = \{a\}$ card 1

2) Tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$
card 8

$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Principe de récurrence sur $\mathbb{N}$

But : Montrer que $P(n)$ $n \in \mathbb{N}$ c'est vraie $\forall n \geq n_0$
(prop sur n)

Initialisation : $P(n_0)$ vraie
Hérédité $\forall n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$] $P(n)$ vraie $\forall n \geq n_0$

Ce principe est valide

Dem : par l'absurde, si $\exists n \geq n_0$ tq $P(n)$ fausse
$n > n_0$ car $P(n_0)$ vraie par hypothèse

soit $m = \min \{ n > n_0 \mid P(n) \text{ fausse} \}$

$P(m-1)$ vraie

donc $P(m-1) \not\Rightarrow P(m)$ contradiction

Ex 1

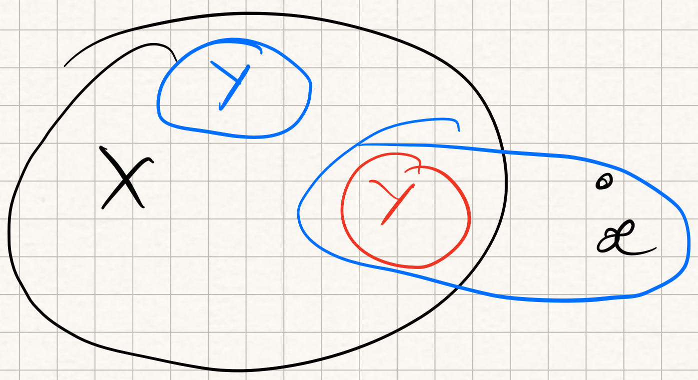
Cq $x \notin X$ $\quad |\mathcal{P}(X \cup \{x\})| = 2\,|\mathcal{P}(X)|$

$$\mathcal{P}(X \cup \{x\}) = \{Y \subseteq X\} \sqcup \{Y \cup \{x\} \mid Y \subseteq X\}$$

ou $\{Y \subseteq X \cup \{x\} \mid x \in Y\} \to \mathcal{P}(X)$

$\sqcup \{Y \subseteq X \cup \{x\} \mid x \in Y\}$

card $= |\mathcal{P}(X)|$



$\Rightarrow |\mathcal{P}(X \cup \{x\})| = 2|\mathcal{P}(X)|$

1(d). Mq $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$ par récurrence sur $|X|$

$|X| = n$ $\quad$ Pour $n = 0$ $\quad X = \emptyset$ $\quad \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$

$$|\mathcal{P}(X)| = 1 = 2^0$$

la prop est vraie au rang 0

pour $n \geq 0$: $HR_n \Rightarrow \underbrace{HR_{n+1}}_{|X'| = n+1}$ Hypothèse Reccurence

$|X| = n$: $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

$X' = X \cup \{x\}$ pour $|X| = n$ et $x \notin X$

$$\mathcal{P}(X') = 2\,|\mathcal{P}(X)| \underset{HR_n}{=} 2 \times 2^n = 2^{|X'|}$$

TD1 : 2nd Part 6/10

Ex 3 :

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$

$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$, $P(1)$ vraie

Hérédité : pour $n \geq 1$: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = n+1 + \sum_{i=1}^{n} i \underset{P_n}{=} n+1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc P_{n+1} vraie

b) $\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$

Par récurrence sur $n \geq 1$, mq P_n vraie $\forall n \geq 1$

Initialisation $n = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{1} i2^i = 1 \times 2^1 = 2 \\ (1-1)2^{1+1} + 2 = 2 \end{array}\right\} P_1 \text{ vraie}$$

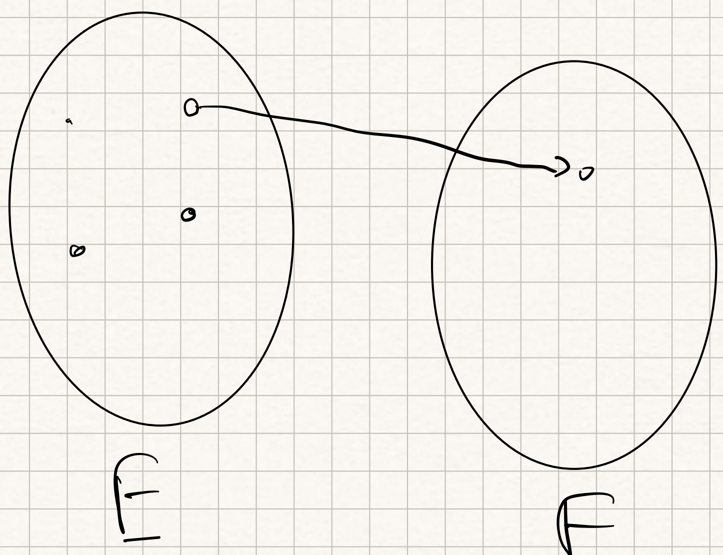
Hérédité $n \geq 1$. Mq $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i2^i = (n+1)2^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\overset{P_n}{=} (n+1)2^{n+1} + (n-1)2^{n+1} + 2$$

$$= 2n2^{n+1} + 2$$

$$= n2^{n+2} + 2 \quad \text{donc } P_{n+1} \text{ vraie}$$



"Définition d'une liste"

- Un k-uplet d'éléments d'un sens F est une liste de k éléments de F $(a_1, \dots, a_k)$ (ordonné avec répétitions possibles)

- Une application de E dans F est un $|E|$-uplet d'éléments de F

Exemple :

$F(E)$

$E = \{0, 1, 2, 3\}$ $F = [\![0, 5]\!]$

$f(x) = 2x \mod 6$

$f(0) = 0$ $f(1) = 2$ $f(2) = 4$ $f(3) = 0$

$\longrightarrow (0, 2, 4, 0) \in F^4$

Prop : le nombre de fonctions de E dans F est $|F|^{|E|}$

Dem : pour chaque $x \in E$, il y a $|F|$ choix pour $f(x)$
Il y a $|E|$ images à choisir $\rightarrow$ au total $|F|^{|E|}$ possibles

Rem : si $F = \{0, 1\}$, il y a $2^{|E|}$ fonctions
c'est aussi le nb de sous ensemble de E
(dem : pour choisir $A \subseteq E$: pour chaque $x \in E$
on choisit si on le met dans $A \rightarrow 2^{|E|}$ possibilités)

Un sous ensemble $A \subseteq E$ peut être vu comme dans la fonction f :

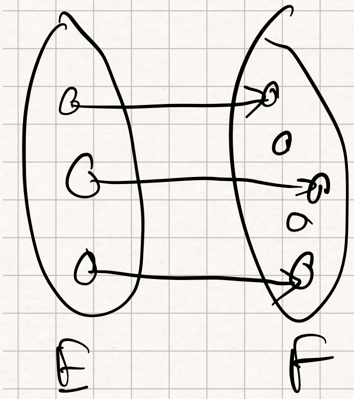
$$f : E \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

une fonction $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ peut être vue comme $A = \{x \in E \mid f(x) = 1\} \subseteq E$

Injection

Def : si $f : E \longrightarrow F$ est injective si $\forall x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow x_1 = x_2$

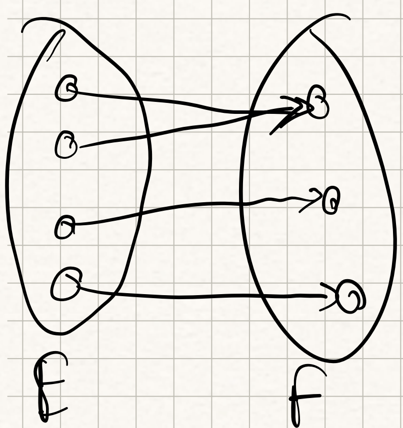
(les éléments ont tous des images $\neq$)



Surjection

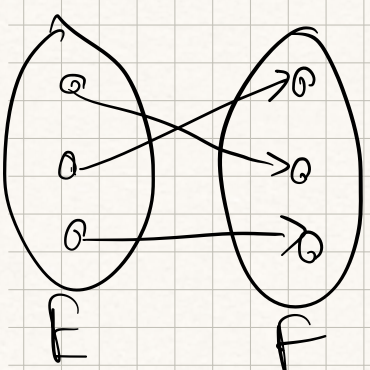
× f est surjective (tous les éléments de F sont atteints)

$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad f(x) = y$



Bijection

× f est bijective si elle est à la fois surjective et injective



Prop : si $\exists f : E \to F$ $\boxed{\text{injective}}$ alors $|E| \leq |F|$

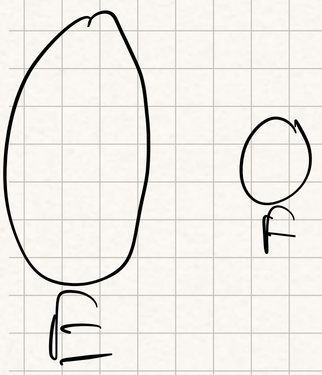
Principe des tiroirs : (Pigeon hole principle)

n chaussettes et m tiroirs

Si $n > m$ alors il y a (au moins) un tiroir qui contient plusieurs chaussettes

<u>Exercice Exemple :</u>

Quel est le nb de bijection de E dans F ?



- 0 si $|E| \neq |F|$
- si $|E| = |F| = n$

(total n^n)

f est un n-uplet d'éléments de F

tous $\neq$

$\rightarrow$ Nb de possibilités $= n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$

$$= n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Stirling

$f : E \to E$ bijective est appelée une <u>permutation</u> de E il y en a $|E|!$

Def : Un k-arrangement d'éléments de E est un k-uplet de E dont tous les éléments sont différents ($k \leq |E|$)

où il y en a $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

$|E| = n$ $\quad (A_n^k)$

Ex 6 cours à trier dans un ordre quelconque
Combien de possibilités ?

→ Permutations sur 6 éléments $6! = 720$

Ex Classer 4 candidats parmi 20
4 arrangent parmi 20 éléments

$$\frac{20!}{(20-4)!} = 20 \times 19 \times 18 \times 17$$

---

sous ens de taille k

$B \subseteq E$ pas ordonné

$|B| = k$ $\quad |E| = n$

→ il y a $\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$ coef binomial

Combinaison

$B = \{2, 5, 4, 8\}$ taille k

arrangement : $(2,4,5,8)$

nb d'arrgt : $(2,4,8,5)$

$k!$ $\quad (2,5,4,8)$

⋮

Exemple : Loto

| 5 parmi 49 | + | 1 parmi 10 |

Combien de possibilités

(pas ordonné) : Combinaison de 5 éléments parmi 49

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{49}{5} = \frac{49!}{44!\,5!} = \frac{49\times 48\times\cdots\times 45}{120}$$

$$\simeq \frac{50^5}{100} = \frac{50^4}{2} = \frac{5^4}{2}\times 10^4$$

$\simeq 3$ millions

100 → 463

8

Prop : Le nb de multi-ensembles de k éléments choisis parmi n est $\binom{n+k-1}{k}$

Démo :

k croix

1	2	×	×	3	×	4	5	6	7	×	×	8	

2 2 3 7 7 $= \{2, 2, 3, 7, 7\}$

$n+k$ cases

Ex : 10 chaussettes identiques à placer dans 5 tiroirs

Nb de possibilités ?

→ un multiensemble de taille 10 parmi $\{1, \ldots, 5\}$

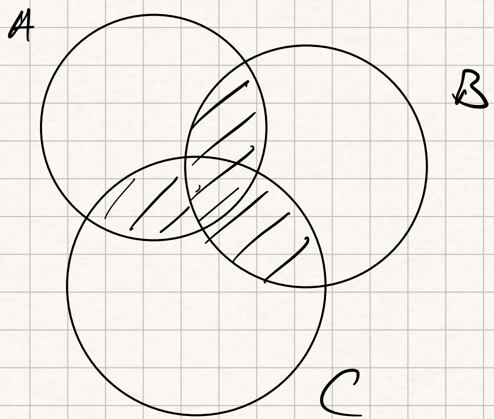
$k = 10, \quad n = 5 \longrightarrow \binom{n+k-1}{k} \quad \binom{14}{5}$

	ordonné	non ordonné
avec répétitions	k-uplets n^k	k-multiensembles $\binom{n+k-1}{k}$
sans répétitions	k-arrangements $\dfrac{n!}{(n-k)!}$	k-ensembles $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Inclusion Exclusion

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Principe d'inclusion - exclusion

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1| + \dots + |A_n| - \big(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_4| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|\big) + \big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|\big) - \big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \dots\big) + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Démo : On veut montrer que chaque élément de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est compté exactement une fois

$x \in A_{i_1}$, $x \in A_{i_2}$, ……, $x \in A_{i_t}$ $(i \leq t \leq n)$

pour $k = 1$ il apparait t fois avec le signe $+$ $\quad +\binom{t}{1}$

pour $k=2$ $\quad -\binom{t}{2}$

$\rightarrow$ nb de fois où on compte x

pour $k = 3 = \; +\binom{t}{3}$ … $\quad \binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \binom{t}{4} + \dots + (-1)^{t-1}\binom{t}{t}$

$$(x+y)^t = \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} x^i y^{t-i}$$

$$0 = (-1+1)^t = \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i}(-1)^i = \binom{t}{0} - S_t = 1 - S_t$$

$$\Rightarrow S_t = 1$$

Ex 4

$R_1 = 1 \quad C$

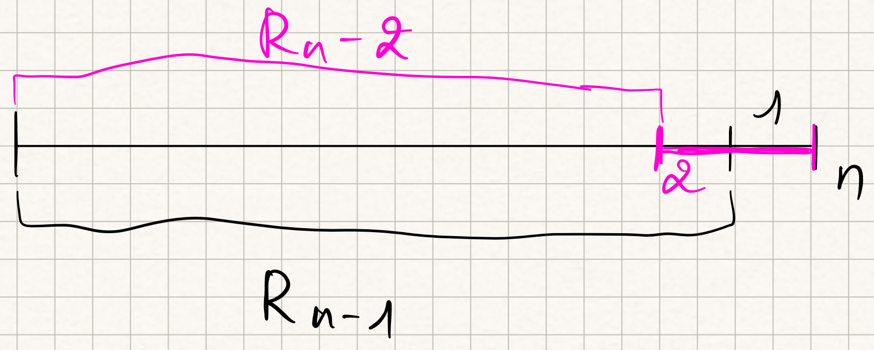
$R_2 = 2 \quad CC, L$

$R_3 = 3 \quad CCC, CL, LC$

$R_4 = 5 \quad CCCC, CCL, CLC, LCC, LL$

$R_5 = 8 \quad C^5, C^3L, C^2LC, CLC^2, LC^3, CLL, LCL, LLC$

(b)



$$R_n = R_{n-2} + R_{n-1}$$

(d) $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618\ldots$ (nb d'or)

$\varphi^2 \overset{?}{=} 1 + \varphi$ $\qquad \varphi^2 = \dfrac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \dfrac{6}{4} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad \left(\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}\right)$

$$= 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \longrightarrow \varphi$$

ex $\underbrace{R_n \leq \varphi^n}_{P_n}$ pour $n \geq 1$

Initialisation : $R_1 = 1 \leq \varphi^1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ vrai

Hérédité : $n \geq 1$: P_n et $P_{n+1} \Rightarrow P_{n+2}$

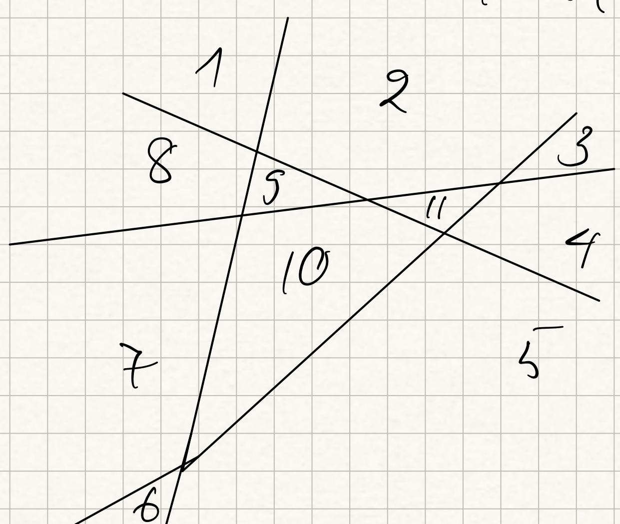
$$R_{n+2} = R_{n+1} + R_n \underset{\substack{\uparrow \\ P_{n+1} \text{ et } P_n}}{\leq} \varphi^{n+1} + \varphi^n = \varphi^n \underbrace{(\varphi + 1)}_{\varphi^2}$$

$$= \varphi^{n+2} \to P_{n+2} \text{ vraie}$$

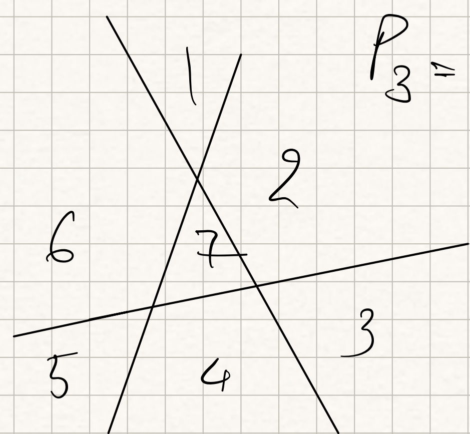
Ex 5

a) 7

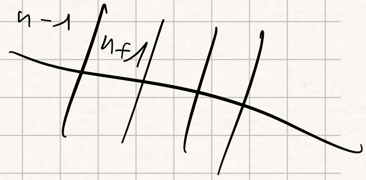
$P_4 = 11$



$P_3 = 7$



b) On intersecte les n droites existantes
$\longrightarrow$ $(n+1)$ régions traversées



c) $P_{n+1} = P_n + (n+1) \qquad P_1 = 2$

d) $P_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

Notation BNF : entiers naturels

$n ::= 0 \mid succ(n)$ l'ensemble minimal est clot par succ n

types : type Nat = Zero | succ Nat

Définition : Une structure définie inductivement est l'ensemble minimal contenant des éléments minimaux donnés $(m_1, \dots, m_k)$
* clos par des constructeurs (fonctions) donnés

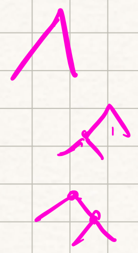
de manière équivalente, c'est l'envers obtenu en partant des éléments min et en appliquant de toutes les manières possibles les constructeurs

Ex :

Arbres binaires non vides :

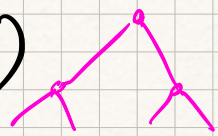
$A ::= F \mid ab(A, A)$

(feuille)

$F,\ ab(F,F)$ 

$\to ab(ab(F,F),F)$

$ab(F,ab(F,F))$

$ab(ab(F,F),ab(F,F))$ 

Mot sur un alphabet A

$$m ::= \varepsilon \mid c(a,m) \qquad a \in A$$

ex : $A = \{a,b\}$, ε, $\overset{a}{c(a,\varepsilon)}$, $\overset{b}{c(b,\varepsilon)}$, $\overset{aa}{c(a,c(a,\varepsilon))}$, $\overset{ab}{c(a,c(b,\varepsilon))}$, $\overset{ba}{c(b,c(a,\varepsilon))}$, ...

Formules propositionnelles

(ex : $x \vee (\neg y \wedge \neg(x \wedge z)))$

$$F ::= x \in X \mid \neg F \mid \underset{\text{une formule quelconque}}{F} \ \underset{\text{ou}}{\vee}\ \underset{\text{une formule quelconque}}{F} \mid F \wedge F$$

<u>Langages rationnels</u>

Le plus petit ens. de langages contenant $\emptyset$, $\{a\}$ $\forall a \in A$ et clos par $\cup$ et $*$

Récurrence "faible" sur les entiers

soit P une propriété sur $\mathbb{N}$

(cas de base) si $P(n_0)$ est vraie pour $n_0 \in \mathbb{N}$

et $\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité)

$\Rightarrow$ alors $\forall n \geq N$ $P(n)$ vraie

Ex :

Fibo :

$F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

pour montrer $F_n \leq \varphi^n$ on a besoin de 2 cas de base et $\boxed{P(n) \wedge P(n+1)} \Rightarrow P(n+2)$

2 hypothèses

par récurrence sur n : cas de base : $F_1 \leq \varphi^1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$F_2 \leq \varphi^2 = 1 + \varphi$

pour $n \geq 1$

hérédité : si $F_n \leq \varphi^n$ et $F_{n+1} \leq \varphi^{n+1}$

alors $F_{n+2} \leq \varphi^{n+2}$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \underset{\uparrow}{\leq} \varphi^{n+1} + \varphi^n = \varphi^n(1+\varphi) \quad \varphi^2$$
$$= \varphi^{n+2}$$

Hérédité aux rangs $n+1$ et n

Théorème : Principe d'induction "complète"

$\mathcal{P}$ propriété sur $\mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_0 : (\forall k \in [n_0, n[\ P(k) \text{ vraie})$
$\Rightarrow P(n)$ vraie

2 possibilités, ◦ cas de base (sans utiliser le membre gauche)
◦ hérédité

Alors $\mathcal{P}(n)$ vraie $\forall n \geq n_0$

Remarque : si (*) est vraie alors $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie car pour $n = n_0$, $[n_0, n[= \emptyset$
donc le membre gauche de l'implication est vrai
donc $\mathcal{P}(n)$ doit être vraie

Ex Fibonacci : $n_0 = 1$ pour $n = 1$ $P(1)$ doit être vraie

pour $n = 2$ $P(1) \Rightarrow P(2)$ $\boxed{\text{cas de base}}$

pour $n = 3$; $P(1), P(2)$
$\Rightarrow P(3)$
hérédité

Démo :

Par l'absurde, si $\exists n \geq m_0$ $P(n)$ fausse
soit n_0 le premier $\geq m_0$ tq (P_n) fausse en particulier
$\forall k \in [m_0, n_0[$, $P(k)$ vraie
alors par l'implication on doit avoir $P(n_0)$ vraie
contradiction

Faux contre-exemple : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x \leq 1$ $\quad P(x)$

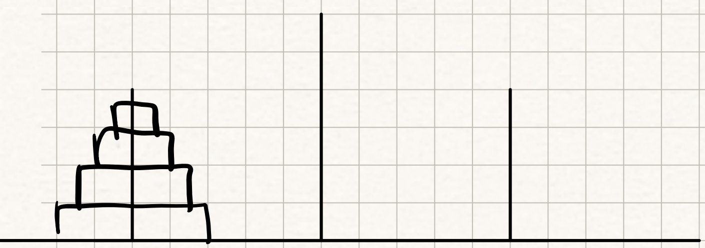
Base : $P(0)$ vraie.

Hérédité : si $P(y)$ vraie $\forall y < x$ alors $P(x)$ vraie ?

$\forall y < x$, $y \leq 1$

Alors $x \leq 1$ sinon $x > 1$ et $\exists y < x$ et > 1

donc $P(x)$ vraie



T_n = nb de mouvements pour déplacer n anneaux

$T_1 = 1 \qquad T_{n+1} = 1 + 2T_n$

Par récurrence : $T_n = 2^n - 1$

Cas de base : $T_1 = 1 = 2^1 - 1$

Hérédité : $T_{n+1} = 1 + 2T_n \underset{\text{rec}}{=} 1 + 2(2^n - 1)$

Exo :

Tout entier, $n \geq 0$ a écriture binaire

$$n = \sum a_i 2^i \quad \text{où} \quad a_i \in \{0, 1\}$$

si $\forall n \in \mathbb{N}$, ($\forall k < n$ $P(k)$ vraie)
=> $P(n)$ vraie alors $P(n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ $n = 0 \times 2^0 \rightarrow P(0)$ vraie

$n > 0$: Soit 2^p la plus grande puissance de 2 qui soit $\leq x$

$n' = n - 2^p$. Par hypothèse de récurrence, n'a une écriture binaire

$$n' = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 2^i$$

donc $n = 1 \times 2^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i 2^i$

donc $P(n)$ vraie

Def : une relation d'ordre $R(x, y)$

$x < y$ et $y < z \Rightarrow x < z$

transitivité
$$R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$$

antisymétique
$$R(x, y) \Rightarrow \neg R(y, x)$$

→ Une relation d'ordre strict sur un ens. X est <u>bien fondée</u> s'il n'existe pas de chaine infinie strictement décroissante

$(x_i) \in X$ tq $x_{i+1} < x_i \ \forall i$

ex $\mathbb{Z}$ car la suite $x_i = -i$ est infinie strictement décroissante

pas bien fondé

$[0, 1]$ sur $\mathbb{R}$

$x_i = \frac{1}{i}$ est strictement déc

bien fondé

$\mathbb{N}$ $(x_i) \in \mathbb{N}$ $x_0 \in \mathbb{N}$

alors $x_i \leq x_0 - i$ donc ce n'est plus possible pour $i > x_0$

pas bien fondé

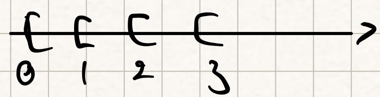
Mots sur $\{a, b\}$ avec l'ordre du dictionnaire

$aab < ab$

$x^i = a^i b$ $\quad x_{i+1} < x_i$

Sous-ens de $\mathbb{N}$ munis de $\subsetneq$ (ordre partiel)

$X_i = [i, +\infty[$



suite strict dec

-> pas bien fondé

Sous ens de A finis munis de $\subsetneq$

$X_{i+1} \subsetneq X_i \Rightarrow \underbrace{|X_{i+1}| < |X_i|}_{\in \mathbb{N}}$

pas de suite strict dec infinie car $\mathbb{N}$ est bien fondé bien fondé :

mot sur $\{a,b\}$ avec $u < v$ ssi u sous-mot strict de v

$\mathbb{N}^2$ $(x,y) < (x',y')$ si $x < x'$ et $y < y'$

$\mathbb{N}^2$ ordre lexicographique

$x < x'$ ou ($x = x'$ et $y < y'$)

$(5, 3) \to (5, 2)$ $(5, 0)$ $(4, 10^9)$

(x_i, y_i) $x_{i_k} < x_{i_k - 1}$ y_{i_k}

nb d'étapes $\leq \sum y_{ik}$

Théorème : Principe d'induction complète

Soit $(X, \underset{\text{inférieur}}{<})$ un ensemble bien fondé et P une propriété sur X

Si $\forall x \in X \mid (\forall y < x \; P(y)$ vraie$)$
$\Rightarrow P(x)$ vraie

Alors $P(x)$ vraie $\forall x \in X$

Ex : $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $f(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m = 0 \\ 1 + f(n, m-1) & \text{si } m > 0 \\ f(n-1, n) & \text{si } n > 0 \end{cases}$

f est bien définie ?

$(n, m-1) <_{lex} (n,m)$ et $(n-1, n) <_{lex} (n,m)$

donc $f(n,m)$ est définie à partir de valeurs de f définies précédemment dans l'ordre lexico

or $\mathbb{N}^2$ ordre-lexicographique est bien fondé avec comme unique élément min : $(0,0)$ qui est le cas de base pour f
donc f est bien définie ("la def recursive de f termine")

mq : $f(n,m) = \frac{n(n+1)}{2} + m$ par induction sur $\mathbb{N}^2$

$$f(0,0) = 0 = \frac{0(0+1)}{2} + 0 \quad \text{Cas de base vrai}$$

Hérédité $(n,m) \in \mathbb{N}^2$

$$f(n,m) = 1 + f(n,m-1) \text{ si } m > 0$$
$$\underset{HR}{=} 1 + \frac{n(n+1)}{2} + m - 1 = \frac{n(n+1)}{2} + m$$

si $m = 0$ et $n > 0$: $f(n,m) = f(n-1,n)$

$$\underset{HR}{=} \frac{(n-1)n}{2} + n$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + 0$$

Induction Structurelle

si X est un ens. défini inductivement éléments
min $m_1 \dots m_k$
constructeurs $c_1 \dots c_l$

Pour montrer que P(propriété) est vraie sur X par induction

On montre que $P(m_i)$ est vraie $\forall i \in \{1, \dots, k\}$
et $\forall i \in \{1, \dots, l\}$ $\forall a_1, \dots a_{p_i} \in X$, $P(a_1) \wedge \dots \wedge P(a_{p_i}) \Rightarrow P(c_i(a_1 \dots a_{p_i}))$

arité de c_i

Principe d'induction sur X bien fondé

Si $\forall x \in X$

$$\left.\begin{array}{l} \left[(\forall y < x \quad P(y)) \Rightarrow P(x)\right]^{(**)} \\ \text{alors } \forall x \in X,\ P(x) \text{ vraie} \end{array}\right\} (*)$$

But : si $(*)$ fausse alors X n'est pas bien fondé

S'il existe x_0 minimal tq $P(x_0)$ fausse (c'est-à-dire $\forall y < x_0$, $P(y)$ vraie, et $P(x_0)$ fausse $(**)$)

Donc $\forall x_0$ tq $P(x_0)$ fausse, $\exists x_1 < x_0$ tq $P(x_1)$ fausse

Donc il existe une suite infinie strict décroissante

Exercice 7. Parenthèses équilibrées

Dans cet exercice, nous considérons l'ensemble W de mots finis sur l'alphabet fini $\{(,)\}$. On dit qu'un tel mot w est *équilibré* si chaque parenthèse ouvrante a une parenthèse fermante correspondante plus loin dans le mot.

L'ensemble D de mots avec des parenthèses équilibrées est défini récursivement comme le plus petit sous-ensemble de W tel que

— le mot vide est dans D ;

— si w_1 et w_2 sont deux mots dans D, alors le mot $(w_1)w_2$ est dans D.

Pour $n \geq 0$, on écrit D_n pour le sous-ensemble des mots de longueur $2n$ dans D.

(a) Écrire les éléments des ensembles D_0, D_1, D_2, et D_3.

(b) Expliquer comment on peut construire D_n à partir des ensembles $D_0, \ldots, D_{n-1}$.

(c) Donner une rélation de récurrence qui permet de calculer $|D_n|$.

Note. Les mots dans l'ensemble D sont appelés *mots de Dyck*, et la suite des cardinalités $|D_n|$ est appelé la *suite de Catalan*.

Ex 7

a) $D_0 = \{\varepsilon\}$

$D_1 = \{()\}$

$D_2 = \{()(), (())\}$

$D_3 = \{()()(), ()(()), (()()), ((())), (())()\}$

Tout mot de D_n est obtenu comme $(w_1)w_2$ où w_1, w_2 sont bien parenthésés et $|w_1| + |w_2| = 2n - 2$

donc $w_1 \in D_i$ (pour $0 \leq i \leq n-1$)

et $w_2 \in D_{n-1-i}$

$|w_1| = 2i \Rightarrow |w_2| = 2n-2-2i$

(c) Donner une rélation de récurrence qui permet de calculer $|D_n|$.

Note. Les mots dans l'ensemble D sont appelés *mots de Dyck*, et la suite des cardinalités $|D_n|$ est appelé la *suite de Catalan*.

c) $|D_0| = 1$

pour $n \geq 0$: $|D_{n+1}| = \sum_{i=0}^{n} |D_i||D_{n-i}|$

égalité car la décomposition de $(w_1)w_2$ est unique

Exercice 8. Arbres binaires

Un *arbre binaire* peut être défini informellement comme un arbre fini avec une racine dans lequel chaque noeud a au plus deux fils.

(a) Écrire une définition récursive de l'ensemble T d'arbres binaires.

(b) Donner une définition récursive de l'ordre « est un sous-arbre de » sur l'ensemble T. Expliquer pourquoi cet ordre est bien fondé.

(c) Écrire une définition récursive de la fonction h qui associe à chaque arbre binaire sa hauteur (entier naturel). On considère que la hauteur d'un arbre à un seul noeud est 0.

(d) Écrire une définition récursive de la fonction v qui associe à chaque arbre binaire le nombre de ses noeuds.

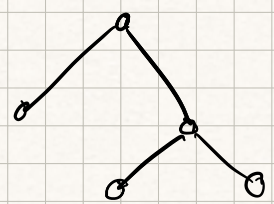
(e) Soit t un arbre binaire. Écrire une définition récursive de la fonction p_t qui associe à chaque noeud x dans t sa profondeur, c'est-à-dire, sa distance de la racine. On considère que la profondeur de la racine est 0.

(f) Une *feuille* est un noeud dans un arbre qui n'a aucun fils. On appelle un arbre binaire t *parfait* si chaque noeud a 0 ou 2 fils, et toutes les feuilles ont la même profondeur. Donner une définition inductive de l'ensemble P des arbres binaires parfaits.

a) • Vide $\in T$

• $t_1, t_2 \in T \Rightarrow Bin(t_1, t_2)$

• $t_1 \in T \Rightarrow Un(t_1)$



b) Sous arbres (Vide) = $\emptyset$

Sous-arbres$(Bin(t_1, t_2))$ = $\{t_1, t_2\} \cup$ Sous-arbres(t_1) $\cup$ Sous-arbres(t_2)

Bin[Bin(Vide, Vide), Bin{Bin(Vide, Vide), Bin(Vide, Vide)}]

Sous-arbres$(Un(t_1))$ = $\{t_1\} \cup$ sous-arbres(t_1)

Si t' est un sous arbre de t alors $\underbrace{|t'|}_{}< |t|$

taille = nombre de noeuds

donc une suite (t_i) strict déc d'arbres donne une suite $(|t_i|)$ d'entiers naturels strict. déc donc finie car $\mathbb{N}$ est bien fondé $(\mathbb{N})$

Il n'existe pas de suite (t_i) strict. déc infinie donc l'ordre "être un sous-arbre strict" est bien fondé

c) $h(\text{Vide}) = -1$

$h(\text{Un}(t_1)) = 1 + h(t_1)$

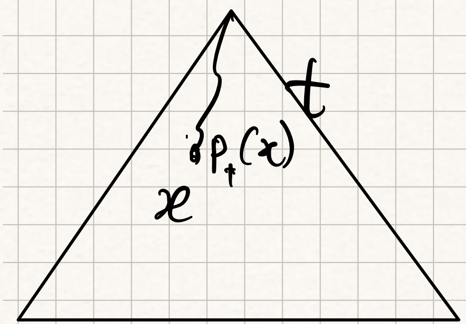
$h(\text{Bin}(t_1, t_2)) = 1 + \max(h(t_1), h(t_2))$

d) $v(\text{Vide}) = 0$

$v(\text{Un}(t_1)) = 1 + v(t_1)$

$v(\text{Bin}(t_1, t_2)) = 1 + v(t_1) + v(t_2)$

d) Écrire une définition récursive de la fonction v qui associe à chaque arbre binaire le nombre de ses noeuds.



$t = \text{Bin}(\text{Un}(\text{Bin} \dots \text{Bin}(t_1, t_2))$

$p_t(t) = 0$

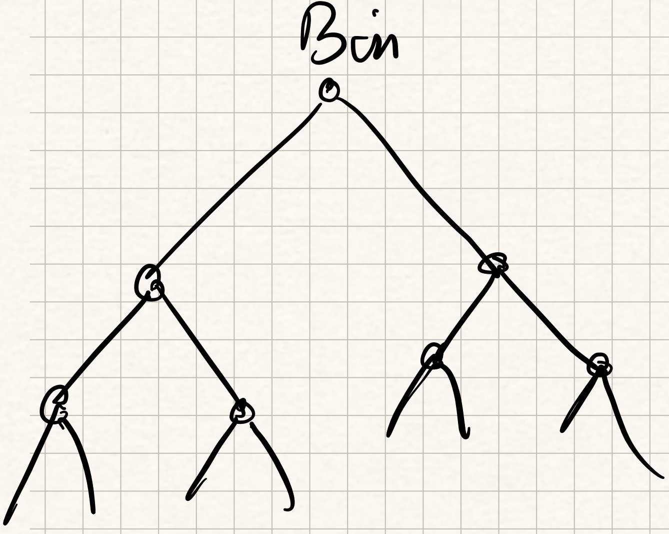
$p_t(t'') = 1 + p_t(t')$ où

$t' = \text{Bin}(t'', *)$

ou $\text{Bin}(*, t'')$

ou $\text{Un}(t'')$

(t' est le père de t'')



f)
- Feuille $\in P$
- $t_1, t_2 \in P$ et $|t_1| = |t_2|$

$\Rightarrow$ Bin $(t_1, t_2) \in P$

Ex 9

a) $\circ\ p \in P \Rightarrow p \in F$

$\circ\ \varphi \in F \Rightarrow \neg(\varphi) \in F$

$\circ\ \varphi, \psi \in F \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \in F$

Exercice 9. Formules propositionnelles

Soit P un ensemble fini de propositions. L'ensemble de formules propositionnelles sur P est défini récursivement comme le plus petit ensemble F tel que

— pour tout $p \in P$, on a $p \in F$;

— pour tout $\varphi \in F$, on a $\neg(\varphi) \in F$;

— pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a $(\varphi \vee \psi) \in F$.

(a) Écrire une fonction récursive h qui calcule le nombre d'opérateurs logique dans une formule.

(b) Écrire une fonction récursive t qui calcule la *profondeur* d'une formule propositionnelle, c'est-à-dire, le nombre maximal d'opérateurs imbriqués dans la formule.

(c) Deux formules sont dites *équivalentes* si elles ont la même table de vérité. Soit S un ensemble de formules propositionnelle sur P tel que chaque formule propositionnelle sur P est équivalente à une et une seule formule dans S. Trouver une formule qui calcule $|S|$ en termes de $|P|$.

(d) Écrire une fonction récursive s qui calcule l'ensemble de sous-formules d'une formule propositionnelle.

(e) Montrer que, pour toute formule φ, $|s(\varphi)| \leq 2h(\varphi) + 1$.

a) $\circ\ p \in P$ alors $h(p) = 0$

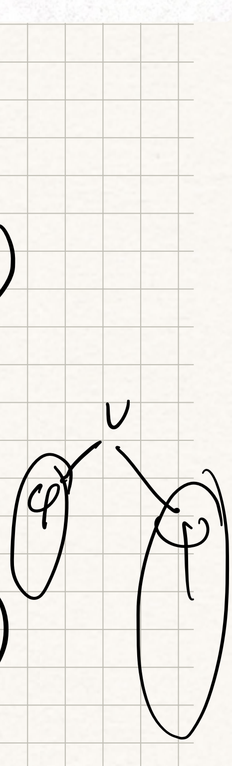
$\circ\ h(\neg(\varphi)) = 1 + h(\varphi)$

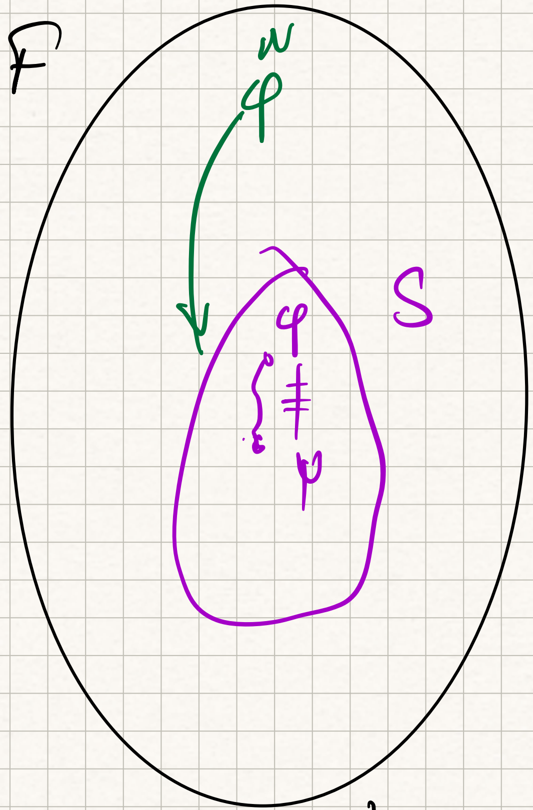
$\circ\ h((\varphi \vee \psi)) = 1 + h(\varphi) + h(\psi)$

b) $p \in P \Rightarrow t(p) = 0$

$t(\neg(\varphi)) = 1 + t(\varphi)$

$t((\varphi \vee \psi)) = 1 + \max(t(\varphi), t(\psi))$





c) Nb de lignes $k = 2^N$

On a 2 choix (0 ou 1) pour chaque ligne

$\to$ nb de total de possibilités

$2 \times 2 \times \dots = 2^k$

1ère ligne — 2ème

$2^k = 2^{2^N}$ = nb de fonction de $\{0,1\}^N \to \{0,1\}$

On a une bijection entre S et l'ensemble des tables de vérités sur P

$\Rightarrow |S| = 2^{2^{|P|}}$

d) $p \in P \Rightarrow s(p) = \{p\}$

$s(\neg(\varphi)) = \{\neg(\varphi)\} \cup s(\varphi)$

$s((\varphi \vee \psi)) = \{(\varphi \vee \psi)\} \cup s(\varphi) \cup s(\psi)$

e) $|s(\varphi)| \leq 2h(\varphi) + 1$

$h(p) = 0$

$h(\neg(\varphi)) = 1 + h(\varphi)$

$h((\varphi \vee \psi)) = 1 + h(\varphi) + h(\psi)$

Par induction : cas de bas $p \in P$

$h(p) = 0 \Rightarrow 2h(p) + 1 = 1 \geq |s(p)| = 1$

Hérédité : • $|s(\neg\varphi)| = 1 + |s(\varphi)|$

$\underset{HR}{\leq} 1 + 2h(\varphi)+1 = 2(h(\neg\varphi))$

$\leq 2h(\neg\varphi)+1$

• $|s(\varphi \vee \psi)| \leq 1 + |s(\varphi)| + |s(\psi)|$

$\leq 1 + (2h(\varphi)+1) + (2h(\psi)+1)$

$= 1 + 2(h(\varphi)+h(\psi)+1)$

$= 1 + 2h(\varphi \vee \psi)$

Exercice 10. Triominos

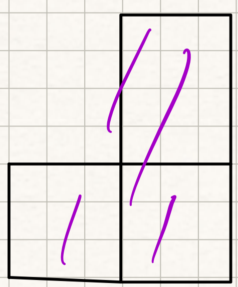
On appelle *triomino* une pièce composée de trois carrés en forme de la lettre L.

(a) On souhaite paver avec triominos une grille de taille 8×8, avec la case du coin supérieur droit enlevée. Décrivez une méthode récursive pour le faire.

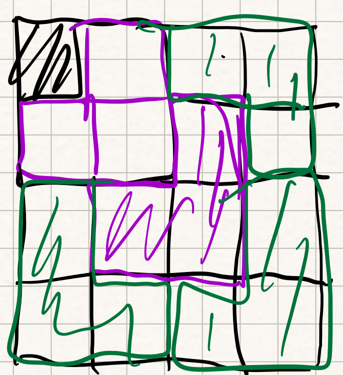
(b) On écrit T_n pour le nombre de pièces de triominos nécessaires pour réaliser un pavage d'un plateau de taille $2^n \times 2^n$ avec le coin supérieur droit enlevé. Donner une formule récursive pour T_n.

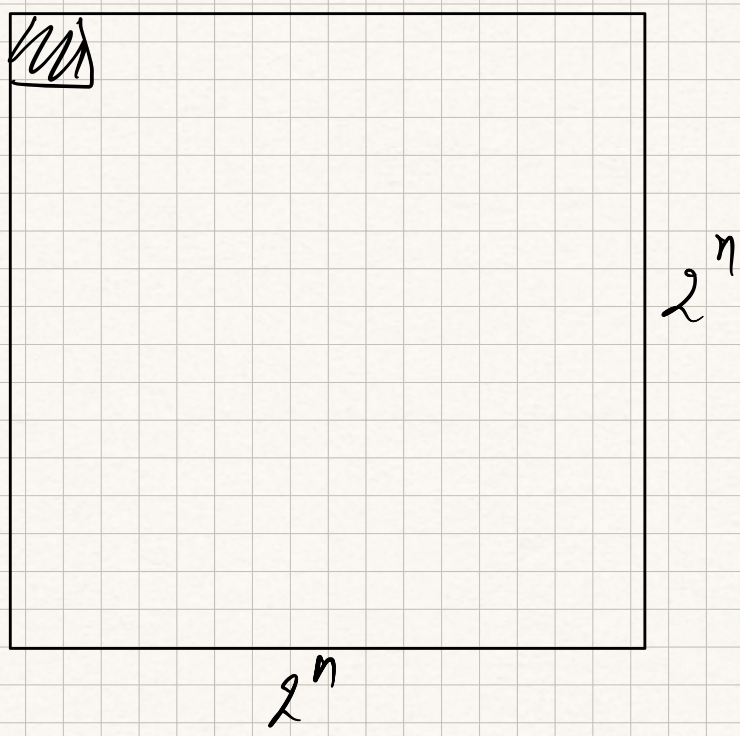
(c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = \frac{4^n - 1}{3}.$$



$n = 1$





T_n = nb de triominos paver

paver $2^n \times 2^n$

$T_n = 1 + 4T_{n-1}$ $\qquad T_1 = 1$

$$T_n = \frac{4^n - 1}{3}$$

$1 \to$ 1 pièce enlevé

$3 \to$ (triominos)