List to do : TD2

Ex 1

Ex 2 :

Ex 3 :

Ex 4 :

Ex 5

Entraînement

Ex 5

Ex 6

Ex 12

Amphi définition :

- Groupe
- Axiomes :
  + Associativité
  + Existence d'un inverse
  + Existence d'un neutre
- Théorème des restes chinois

List d'exo Partiel

Ex 4, 5 TD 2

Ex 12 TP2

Ex 10 TD2

Contrôle continu 2
Mathématiques 4
22 fevrier 2023

durée de l'épreuve : 30 minutes

Pas de documents ni de matériel électronique autorisés

1 Question de cours /4 *pts*

- donner la définition d'un groupe /3 *pts*,
- donner deux exemples de groupes /1 *pts*,

2 Exercice /6 *pts*

- Pour chacun des systèmes suivants, dire si ils admettent ou non des solutions, justifier. (On ne demande pas de trouver les solutions.)/4 *pts*,

$$\begin{cases} x & \equiv 6 \mod 5 \\ 2x & \equiv -3 \mod 7 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x & \equiv 3 \mod 15 \\ x & \equiv 5 \mod 18 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x & \equiv 6 \mod 9 \\ x & \equiv 9 \mod 12 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} 2x & \equiv 3 \mod 6 \\ x & \equiv 4 \mod 5 \end{cases} \tag{4}$$

- Choisir un des systèmes précédents qui admet des solutions, et le résoudre. /2 *pts*.

Ex 4 : TD2

$$(S) \begin{cases} x \equiv 4 \mod 6 \\ x \equiv 7 \mod 9 \end{cases}$$

pgcd $(6,9) = 3$

$9 = 6 \times 1 + 3$
$6 = 3 \times 2 + 0$

et $7 \equiv 4 \mod 3$
donc $\exists!$ solution modulo ppcm $(6,9) = 18$

Méthode d'Euclide :

$9 = 1 \times 6 + 3$
$6 = 2 \times 3 + 0$ pgcd $= 3$

PPCM : $6 \times 9 : 3 = 18$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

On observe que $16 \equiv 4 \mod 6$
(car $16 = 2 \times 6 + 4$)
et $16 \equiv 4 \mod 6$
(car $16 = 2 \times 6 + 4$)
et $16 \equiv 7 + 9$)

donc 16 est solution de S
Car ∃! solution modulo 18
les solution générales sont de la formes

$$16 + 18k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S \begin{cases} x \equiv \overset{a}{4} \mod \overset{m}{6} \\ x \equiv \underset{b}{7} \mod \underset{n}{9} \end{cases}$$

pgcd $(6,9) = 3 \rightsquigarrow$ ppcm $(6,9) = 18$
On a $7 \equiv 4 \mod 3$ donc ∃! solution
⇒ On applique l'algo Euclide à $(6,9)$
$\rightarrow 6u + 9v = 3$
(algo Euclide)

$$6 \times (\underset{u}{-1}) + 9(\underset{v}{1}) = 3$$

$$m' = \frac{m}{\text{pgcd}(m,n)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$n' = \frac{n}{\text{pgcd}(m,n)} = \frac{9}{3} = 3$$

Solution : $x = b u n' + a v n'$

$x = 7 \times (-1) \times 2 + 4 \times (1) \times 3$

$= -14 + 12 = -2$

Solution particulière : $x = -2$

Solution générales :

Solution générales + PPCM (a, b)

$-2 + 18k$

Entraînement :

1) $(S) \begin{cases} x \equiv 5 \mod 17 \\ x \equiv 6 \mod 23 \end{cases}$

cacul pgcd(17, 23) = 1

$23 = 17 \times 1 + 6$
$17 = 6 \times 2 + 5$
$6 = 5 \times 1 + 1$
$5 = 1 \times 5 + 0$

$1 = 6 - 5$
$1 = 6 - (17 - 6 \times 2)$
$1 = -17 + 6 \times 3$
$1 = -17 + (23 - 17) \times 3$
$1 = -17 + 3 \times 23 - 3 \times 17$

6
46

$17 \times 4 = 68$

$68 \mid 23$, 2

$68 \mid 23$, 2

$68 - 46 = 22$

$1 = 3 \times 23 - 4 \times 17$

$x = aum + bon$

donc $3 \times 23 \equiv 1 \mod 17$

$5 \times 3 \times 23 \equiv 5 \mod 17$

$-4 \times 17 \equiv 1 \mod 23$

$6 \times (-4) \times 17 \equiv 6 \mod 23$

$$(S) \begin{cases} x \equiv 5 \mod 17 \\ x \equiv 6 \mod 23 \end{cases}$$

Solution particulière :

$x = 5 \times 3 \times 23 + 6 \times (-4) \times 17$

$= -63$

$PPCM(17, 23) = 17 \times 23 = 391$

Solution générale :

$\{ x = -63 + 391k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$-63 + 391 = 328 = 19 \times 17 + 5$

$328 = 14 \times 23 + 6$

2) $(S) \begin{cases} x \equiv \overset{a}{1} \mod \overset{m}{14} \\ x \equiv \overset{b}{6} \mod \overset{n}{8} \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 18 \\ \hline 112 \\ 14 \end{array}$$

$pgcd(14, 8) = 2$

$18 = 14 \times 1 + 4$

$14 = 4 \times 3 + 2$

$ppcm(14, 8) = 14 \times 8 : 2$

$= 56$

~~On applique l'algo Euclide à (14, 8)~~

~~$\longrightarrow$ $14u + 8v = 2$ $\quad u = (-1)$~~

~~$14 \times (-1) + 8 \times 2 = 2$ $\quad v = 2$~~

$x = bum' + avn'$

~~$m' = \dfrac{m}{pgcd(m,n)} = \dfrac{14}{2} = 7$~~

~~$n' = \dfrac{n}{pgcd(m,n)} = \dfrac{8}{2} = 4$~~

~~Solution $x = 6 \times (-1) \times 7 + 1 \times (2) \times 4$~~
~~$= -42 + 8 = -34$~~

~~Solution générales :~~

~~$\{x = -34 + 56k \mid k \in \mathbb{Z}\}$~~

Correction

pgcd (8, 14) = 2 ≠ 1

On vérifie si $2 \mid 6 - 1$, $2 \nmid 5$ donc pas de solution

2) (S) $\begin{cases} x \equiv 1^{a} \bmod 14^{m} \\ x \equiv 5^{b} \bmod 8^{n} \end{cases}$

$pgcd(8, 14) = 2 \neq 1$

$ppcm(8,14) = 56$

On vérifie si le système admet des solutions :

$2 \mid 5 - 1 = 2 \mid 4$

donc on a une solution unique

On calcule son $pgcd(8, 14) = 2$

$14 = 1 \times 8 + 6$

$8 = 1 \times 6 + 2$

$6 = 3 \times 2 + 0$

$2 = 8 - 1 \times 6$

$2 = 8 - (14 - 1 \times 8)$

$2 = -14 + 2 \times 8$

$1 = -7 + 2 \times 4$

$ppcm(8, 14) = 56$

On applique l'algo Euclide à $(14, 8)$

$\rightarrow 14u + 8v = 2$

$u = (-1)$

$v = 2$

$$m' = \frac{m}{pgcd(m,n)} = \frac{14}{2} = 7$$

$$n' = \frac{n}{pgcd(m,n)} = \frac{8}{2} = 4$$

Solution particulière : $x = bum' + avn'$

$= 5 \times (-1) \times 7 + 1 \times 2 \times 4$

$= -27$

Solution générale :

$$\{ x = 27 + 56k \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

$3\times$ $(S)\begin{cases} 3x \equiv 1 \mod 8 \\ 2x \equiv 5 \mod 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3\times 3x \equiv 3\times 1 \mod 8 & (3\times 3 = 9 \equiv 1 \mod 8) \\ 4\times 2x = 20 \mod 7 & 4\times 2 = 8 \equiv 1 \mod 8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 9x = 3 \mod 8 \\ 8x = 20 \mod 7 \end{cases} \left(\begin{array}{c} 3x \equiv 1 \mod 8 \\ \Leftrightarrow \\ 2x \equiv 5 \mod 7 \end{array} \right)$

$\Rightarrow (S) \Rightarrow \begin{cases} 3\times 3x \equiv 3 \mod 8 \\ 2x = 5 \mod 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 3 \mod 8 \\ 2x \equiv 5 \mod 7 \end{cases}$

pgcd $(2, 7) = 1$

donc $\exists\, k \in \mathbb{Z}$

tq $2u \equiv 1 \mod 7$

$7 = 3\times 2 + 1$

$2 = 2\times 1$

On résout :

$\exists u, v,\ 2u + 7v = 1$

$7 = 3 \times 2 + 1$

$7 + (-3) \times 2 = 1$

donc $u = -3$

$2 \times (-3) + 7 \times 1 = 1$

$u = (-3) \quad v = 1$

tel que : $(-3) \times 2 \equiv 1 \pmod 7$

et $(-3) \equiv 4 \pmod 7$

donc

$$(S) \Rightarrow \begin{cases} x \equiv \overset{a}{3} \mod \overset{m}{8} \\ x \equiv \overset{b}{6} \mod \overset{n}{7} \end{cases} \Leftrightarrow (8x \equiv 20 \mod 7)$$

$\mathrm{pgcd}(7, 8) = 1$

$\mathrm{ppcm}(7, 8) = 56$

On vérifie si le système admet des solutions :

$1 \mid 6 - 3 = 1 \mid 3$

On applique l'algo Euclide à $(7, 8)$

$\longrightarrow 7u + 8v = 1 \qquad u = 1$

$v = -1$

$$m' = \frac{m}{\mathrm{pgcd}(7,8)} = 8$$

$$n' = \frac{n}{\mathrm{pgcd}(7,8)} = 7$$

Solution particulière :

$$x = bum' + avn'$$

$$= 6 \times 1 \times 8 + 3 \times (-1) \times 7$$
$$= 48 - 21 = 27$$

Solution générale : $\{ 27 + 56k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Contrôle :

$$\begin{cases} x \equiv 6 \mod 5 \\ 2x \equiv -3 \mod 7 \end{cases}$$