L2 Licence d'informatique
Groupes, arithmétique, probabilités MI4

Université de Paris
Année 2021-2022

# Examen final du 18 mai 2022

---

*Durée : 2 heures.*
*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables. Les exercices sont indépendants entre eux.* **Tous les résultats devront être soigneusement justifiés.**

---

**Exercice 1 (1+2+2 pts).**

1. Calculer le PGCD de 51 et 21.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes

$$51x + 21y = 8 \qquad\qquad 51x + 21y = 12.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} x & \equiv 7 \mod 51 \\ 2x & \equiv 11 \mod 21. \end{cases}$$

**Exercice 2 (2+1 pts).**

1. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division par 124 de $5^n$.
2. Quel est le chiffre des unités de $9^{12367}$ ?

**Exercice 3 (1+1+2 pts).**

1. Existe t-il un morphisme $f$ du groupe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ tel que $f(\bar{1}) = \bar{2}$ ? tel que $f(\bar{1}) = \bar{3}$ ? Dans le(s) cas où $f$ est un morphisme, dire s'il est surjectif et déterminer son noyau.
2. Soit $p$ un nombre premier. Combien le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ a-t-il de générateurs ?
3. Déterminer les éléments du groupe $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times, \times)$ et calculer leurs ordres. Ce groupe est-est-il cyclique ?

**Exercice 4 (1+1).** Écrire la décomposition en cycles disjoints de la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

et calculer sa signature.

**Exercice 5 (1+1+1+1 pts).** On mélange dans un bol un sachet contenant 5 dragées rouges, 3 bleues et 1 verte, et un sachet contenant 1 rouge et 3 vertes. On tire 3 dragées au hasard, successivement et sans remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 dragées rouges ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 dragée bleue ?
3. Quelle est la probabilité que la seconde dragée soit bleue, sachant que la première est verte ?
4. Sachant que les trois dragées tirées sont vertes, quelle est la probabilité qu'elles viennent toutes du second sachet ?

**Exercice 6 (2 pts).** Soit $G$ un groupe et $x \in G$ tel que $x^6 = 1$. On suppose qu'il existe un morphisme de groupe $f : G \to \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$, montrer que $x \in \ker f$.

Ex 1

1) $Pgcd(51,21) = 3$

$51 = 2\times 21 + 9$
$21 = 2\times 9 + 3$
$9 = 3\times 3 + 0$

2) $51x + 21y = 8$

On a $pgcd(51,21) = 3$ puisque $5 \mid 51x + 21y$ et $5 \nmid 8$

L'équation $51x + 21y = 8$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

$51x + 21y = 12$

On a $pgcd(51,21) = 3$ puisque $3 \mid 51x + 21y$ et $3 \mid 12$

L'équation admet donc des solutions

On a :

$3 = 21 - 2\times 9$
$3 = 21 - 2\times(51 - 2\times 21)$
$3 = 21 - 2\times 51 + 4\times 21$
$3 = -2\times 51 + 5\times 21$

On a $(x_0, y_0) = (-2, 5)$

On cherche sa solution particulière

$51x + 21y = 12$
$51\times(-2)\times 4 + 21\times(5)\times 4 = 12$

$51 \times (-8) + 21 \times 20 = 12$

$(x_0, y_0) = (-8, 20)$

Soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, l'équation initiale est sous forme $ax + by = c$, avec $a = 51$, $b = 21$

$a = \text{pgcd}(a, b) \times a'$ $\qquad$ $b = \text{pgcd}(a, b) \times b'$

$51 = 3 \times a'$ $\qquad$ $21 = 3 \times b'$

$a' = 17$ $\qquad$ $b = 7$

L'ensemble des solutions est :

$S = \{[(-8) + 7k, 20 - 17k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3) $S : \begin{cases} x \equiv 7 \bmod 51 \\ 2x \equiv 11 \bmod 21 \end{cases}$

$\text{pgcd}(51, 21) = 3$

$\text{ppcm}(51, 21) = 51 \times 21 : 3 = 351$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times \ 5 \\ \hline 105 \end{array}$$

On inverse $2x \equiv 11 \bmod 21$

$2 \times 11 = 22 \equiv 1 \bmod 21$

Donc $2x \equiv 11 \bmod 55$

$\Leftrightarrow 11 \times 2x \equiv 11 \times 11 \bmod 21$

$\Leftrightarrow 22x \equiv 121 \bmod 21$

$\Leftrightarrow x \equiv 16 \bmod 21$

$$\begin{array}{r|l} 121 & 21 \\ \hline 16 & 5 \end{array}$$

Le système est donc équivalent à :

$$S : \begin{cases} x = 7^{a} \bmod 51^{m} \\ x = 16^{b} \bmod 21^{n} \end{cases}$$

Comme pgcd(51,21) = 3 qui divise 16 − 7 = 9
Le système admet solutions

On applique l'algo Euclide à (51,21)

$$51x + 21y = 3$$

avec $51x + 21y = 3$

avec $u = -2$, $v = 5$

$$m' = \frac{m}{\text{pgcd}(51,21)} = \frac{51}{3} = 17$$

$$n' = \frac{n}{\text{pgcd}(51,21)} = \frac{21}{7} = 7$$

Solution particulière : $x = bum' + avn'$

$$= \cancel{16 \times (-2) \times 51 + 21 \times 5 \times 7}$$

$$= \cancel{-1632 + 735}$$

$$= -897$$

Solution générale : $\{ x = -897 + 351k,\ k \in \mathbb{Z} \}$

Ex2 :

1)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $5^n$ mod 124 | 1 | 5 | 25 | $125 \equiv 1$ | \ | \ |

Réponse $5^n \equiv \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \mod 124 \\ 5 & n \equiv 1 \mod 124 \\ 25 & n \equiv 2 \mod 125 \end{cases}$

2) Chiffre unités de $9^{12367}$

$9^1 = 9$

$9^2 = 81$

$9^3 = 729$

$9^4 = 6561$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

Donc on ~~constate~~ que si l'exposant est paire, chiffre unité est 1, si c'était impaire, chiffre unité est 9
Ici l'exposant est impair donc chiffre unité est 9

Ex 4:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

$\sigma = (1\,2)(3\,4)(5\,7\,8\,6)$

et $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1\,2))\varepsilon(3\,4)\varepsilon(5\,7\,8\,6)$

$= (-1)^{2-1}(-1)^{2-1}(-1)^{4-1}$

$= (-1)^5 = -1$

Ex5 :

Rouges : 5 + 1 = 6 rouges : 1

Bleues : 3 bleues : 2

Vertes : 1 + 3 = 4 Vertes 3

Total : 13

Tirage de 3 dragées Sans remise

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{1, 2, \dots, 13\}, x_i \neq x_j, \forall i \neq j\}$

$|\Omega| = 13 . 12 . 11$ ← après chaque tirage sans remise

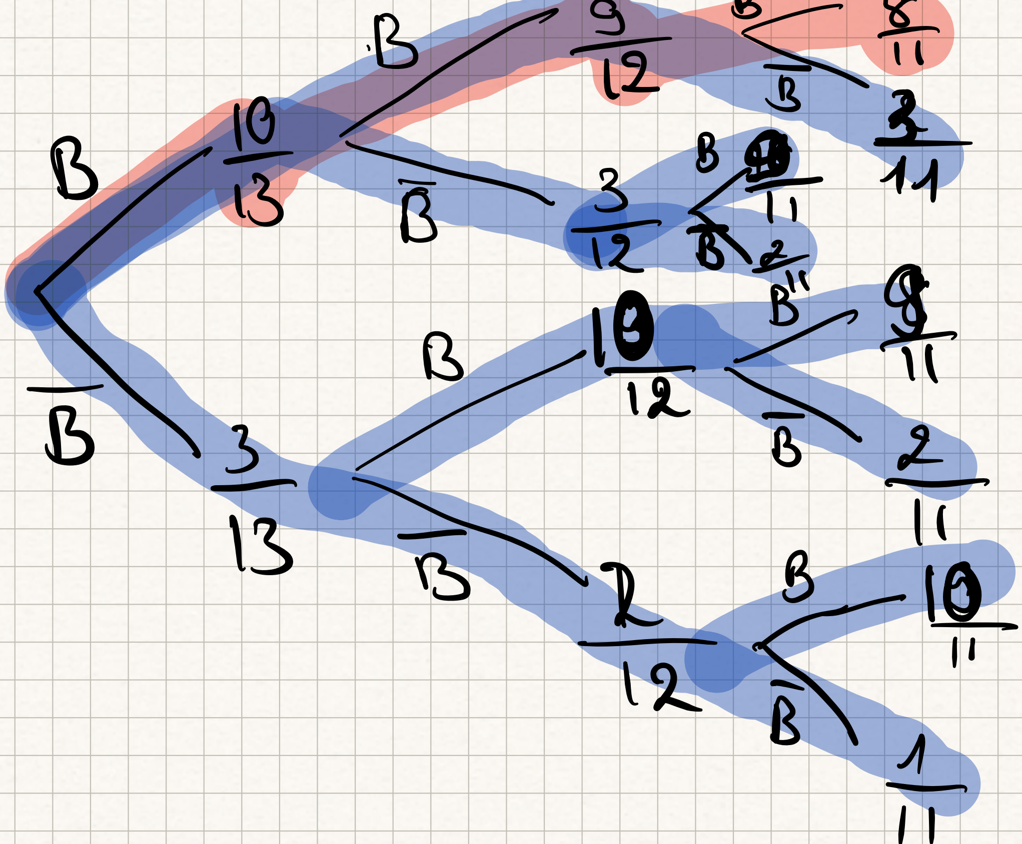
1) probabilité de tirer 3 rouges

$P(3R) = \frac{6}{13} \times \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{10}{143}$

2) B: "Tirer 0 bleue" 3 fois tirage

$P(B) = \frac{10}{13} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} = \frac{60}{143}$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{83}{143}$




$P(B) =$ "Tirer 0 bleu"

$= \frac{10}{13} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{11}$

$= \frac{60}{143}$

$P(\overline{B})$

$=$

3) $A = \{$La première soit verte$\}$ 4

$B = \{$La 2nde soit bleue$\}$ 3

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Tirer 3 fois $|\Omega| = 13, 12, 11$ Comme si on avait 13 parts de pizza, puis 12 puis 11. On a X nbr de façons dont on peut manger

$$P(B \cap A) = \frac{4 \times 3 \times 11}{|\Omega|}$$

$$= \frac{4}{13} \times \frac{3}{12} \times \frac{11}{11} = \frac{1}{13}$$

→ 4 vertes premier coup
3 bleues 2ème coup
et 11 dragées restantes $= \frac{4}{13} \times \frac{3}{12} \times \frac{11}{11}$

$$P(A) = \frac{4 \times 12 \times 11}{|\Omega|} = \frac{4}{13}$$

$$= \frac{4}{13} \times \frac{12}{12} \times \frac{11}{11}$$ → 4 vertes 1er coup
12 possibilités et puis 11 possibilités

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{13}}{\frac{4}{13}} = \frac{1}{4}$$

4) $A = \{$ les 3 dragées tirées sont vertes $\}$
$B = \{$ Elles viennent toutes du 2nd sachet $\}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{4 \times 3 \times 2}{|\Omega|} = \frac{24}{|\Omega|}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3 \times 2 \times 1}{|\Omega|}$$

$$P(B|A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$