Exo 1

$$24x + 38y = 44$$

1) On calcule $\text{pgcd}(24, 38) = 2$

$38 = 1 \times 24 + 14$
$24 = 1 \times 14 + 10$
$14 = 1 \times 10 + 4$
$10 = 2 \times 4 + 2$
$4 = 2 \times 2 + 0$

On constate que $2 \mid 44$, l'équation admet des solutions
On cherche d'abord une solution particulière à l'équation

$$24x + 38y = 2$$

$2 = 10 - 2 \times 4$
$2 = 10 - 2(14 - 1 \times 10)$
$2 = 10 - 2 \times 14 + 2 \times 10$
$2 = -2 \times 14 + 3 \times 10$
$2 = -2 \times 14 + 3(24 - 1 \times 14)$
$2 = -2 \times 14 + 3 \times 24 - 3 \times 14$
$2 = 3 \times 24 - 5 \times 14$
$2 = 3 \times 24 - 5(38 - 1 \times 24)$
$2 = 3 \times 24 - 5 \times 38 + 5 \times 24$
$2 = -5 \times 38 + 8 \times 24$

On obtient donc une solution particulière suivant :
$(x_0, y_0) = (8, -5)$

On cherche ensuite une solution particulière à l'équation

$24x + 38y = 44$

$24 \times 8 \times 22 + 38 \times (-5) \times 22 = 44$

$24 \times 176 + 38 \times (-110) = 44$

$(x_1, y_1) = (176, -110)$

Soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, l'équation est sous forme $ax + by = c$

$a = 24 \qquad b = 38$

$\text{pgcd}(24, 38) = 2$

$a = \text{pgcd}(24, 38) \times a' \qquad b = \text{pgcd}(24, 38) \times b'$

$24 = 2 \times a' \qquad 38 = 2 \times b'$

$a' = 12 \qquad b' = 19$

$S = \{(176 + 19k, -110 - 12k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ✓

Test : $k = 1$

$195 \times 24 + 38 \times (-122)$

$176 + 19 = 195$

$-110 - 12 = -122$

$$\begin{array}{r} 195 \\ \times\ 24 \\ \hline 780 \\ 390\ \ \\ \hline 4680 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 122 \\ \times\ 38 \\ \hline 976 \\ 366\ \ \\ \hline 4636 \end{array}$$

$-$

Ex 4

$$(S) : \begin{cases} x \equiv \overset{a}{5} \mod \overset{m}{12} \\ x \equiv \overset{b}{17} \mod \overset{n}{20} \end{cases}$$

$pgcd(12, 20) = 4$ $\qquad$ $ppcm(12, 20) = 60$

$20 = 1 \times 12 + 8$

$12 = 1 \times 8 + 4$

$8 = 2 \times 4 + 0$

On vérifie si le système admet des solutions :

$4 \mid 17 - 5 = 4 \mid 12$, le système admet donc des solutions

On applique l'algo Euclide à $(12, 20)$

$12u + 20v = pgcd(12, 20)$

$12u + 20v = 4$

avec $u = 2$ $\qquad$ $v = -1$

$$m' = \frac{m}{pgcd(12,20)} = \frac{12}{4} = 3$$

$$n' = \frac{n}{pgcd(12,20)} = \frac{20}{4} = 5$$

Solution particulière : $x = bum' + avn'$

$= 17 \times 2 \times 3 + 5 \times (-1) \times 5$

$= 102 - 25$

$= 77$

Solution générale : $\{x = 77 + 60k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ex 5

1) $8x \equiv 4 \mod 12$

$\text{pgcd}(8, 12) = 4$

$12 = 1 \times 8 + 4$

$8 = 2 \times 4 + 0$

Donc l'équation est équivalente à :

$$2x \equiv 1 \mod 3$$

On cherche l'inverse de 2 mod 3. On a

$$2 \times 2 = 4 \equiv 1 \mod 3$$

Donc $2x \equiv 1 \mod 4$

$\Leftrightarrow 2 \times 2x \equiv 2 \times 1 \mod 3$

$\Leftrightarrow \quad x \equiv 2 \mod 3$

$S = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2) $8x \equiv 3 \mod 12$

$\text{pgcd}(8, 12) = 4$

On constate que $4 \nmid 3$ donc l'équation admet pas de solution

Ex 3

1) $368^{12\ldots 20}$ mod 123

La division euclidienne de 368 par 123 donne

$$368 = 3 \times 123 - 1$$

Donc $368 \equiv -1 \bmod 123$ et alors

$$(368)^2 \equiv (-1)^2 \bmod 123$$
$$\equiv 1 \bmod 123$$

Or $12\ldots 1920$ est pair, donc

$$(368)^{12\ldots 1920} \equiv 1 \bmod 123$$

2) 2021^{19} se termine par 0 ou 1

On voit que 2021 est impair donc

$2021 \equiv 1 \bmod 2$

$\Rightarrow 2021^{19} \equiv 1^{19} \equiv 1 \bmod 2$

Le chiffre unité de l'écriture en binaire de 2021^{19} est 1