Exo 1

$$14x + 10y = 4$$

$pgcd(14, 10) = 2$

$14 = 1 \times 10 + 4$

$10 = 2 \times 4 + 2$

$4 = 2 \times 2 + 0$

On vérifie si $pgcd(14,10)$ divise 4, donc $2 \mid 4$, l'équation admet au moins une solution.

On cherche d'abord une solution particulière à l'équation

$$14x + 10y = 2$$

$2 = 10 - 2 \times 4$

$2 = 10 - 2(14 - 1 \times 10)$

$2 = 10 - 2 \times 14 + 2 \times 10$

$2 = -2 \times 14 + 3 \times 10$

Donc $(x_0, y_0) = ((-2), 10)$

On cherche ensuite une solution particulière à l'équation

$$14x + 10y = 4$$

$14 \times (-2) \times 2 + 10 \times 3 \times 2 = 2 \times 2$

$14 \times (-4) + 10 \times 6 = 4$

Donc $(x_1, y_1) = ((-4), 6)$

Soit $a', b' \in \mathbb{Z}$, On a l'équation sous forme

$$ax + by = d$$

$a = pgcd(a,b) \times a'$ | $b = pgcd(a,b) \times b'$

$14 = 2 \times a'$ | $10 = 2 \times b'$

$a' = 7$ | $b' = 5$

Solution générale :

$$S = \{ ((-4) + 5k, 6 - 7k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Ex 3 :

$$S : \begin{cases} x \equiv \overset{a}{3} \mod \overset{m}{8} \\ x \equiv \overset{b}{7} \mod \overset{n}{22} \end{cases}$$

$\text{pgcd}(8, 22) = 2$ $\qquad$ $\text{ppcm}(8, 22) = 88$

$22 = 2 \times 8 + 6$

$8 = 1 \times 6 + 2$

$6 = 3 \times 2 + 0$

On applique l'algo d'Euclide à $(8, 22)$

$8u + 22v = \text{pgcd}(8, 22)$

$8u + 22v = 2$

avec $u = 3$ $\quad$ $v = -1$

$$m' = \frac{m}{\text{pgcd}(a,b)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$n' = \frac{n}{\text{pgcd}(a,b)} = \frac{22}{2} = 11$$

On cherche donc la solution particulière :

$x = bum' + avn'$

$= 7 \times 3 \times 4 + 3 \times (-1) \times 11$

$= 84 - 33$

$= 51$

Solution particulière : $S\{51 + 88k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ex 4 :

$$4x \equiv 2 \mod 18$$

1) $pgcd(4, 18) = 2$

$$18 = 4 \times 4 + 2$$
$$4 = 2 \times 2 + 0$$

On constate que $2\,(pgcd(4,18)) \mid 2$, l'équation admet donc une solution, l'équation est équivalente à :

$$2x \equiv 1 \mod 9$$

On cherche à inverser 2 mod 9 :

$$2 \times 5 = 10 \equiv 1 \mod 9$$

Donc on a :

$$2x \equiv 1 \mod 9$$
$$\Leftrightarrow 5 \times 2x \equiv 5 \mod 9$$
$$\Leftrightarrow x \equiv 5 \mod 9$$

$$S = \{9k + 5 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2) $4x \equiv 1 \mod 18$

$pgcd(4, 18) = 4$

On constate que $4 \nmid 1$ donc l'équation admet pas de solution