Outils logiques
TD n° 6

Exercice 1 :

Mettre les formules suivantes en forme normale de négation.

1. $\neg(\neg x \vee y)$
2. $\neg(\neg(x \vee y) \wedge z)$
3. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$

Exercice 2 :

Soit $\phi : \mathit{Form} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par récurrence :

- $\phi(x) = 1$, où $x \in V$
- $\phi((p_1 \wedge p_2)) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$
- $\phi((p_1 \vee p_2)) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$
- $\phi(\neg p) = (\phi(p))^2 + 1$

Montrez que $\phi(p) \geqslant 1$ pour toute formule p.

Exercice 3 :

Soit p une forme en forme normale de négation. Montrez par induction que l'on peut transformer $\neg p$ en sa forme normale de négation q en appliquant la transformation suivante sur p (qu'on appelera transformation T) :

1. Remplacer tous les $\wedge$ par des $\vee$ et les $\vee$ par des $\wedge$.
2. Remplacer toutes les variables niées par des variables non-niées, et réciproquement (*i.e.* remplacer les ocurrences de $\neg x$ pour $x \in V$ par x, et celles de x non précédées du symbole $\neg$ par $\neg x$).

Note : cela montre que les formules en forme normale de négation sont pratiques à manipuler. La conjonction et la disjonction préservent la forme NNF, et l'exercice montre que la mise en NNF de la négation se calcule très rapidement.

Exercice 4 :

Déterminez une forme normale conjonctive et disjonctive des formules suivantes :

1. $\neg(p \leftrightarrow q)$
2. $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$
3. $(p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge (q \rightarrow (q \wedge \neg p))$

Exercice 5 :

Soit ψ : *Form* $\to \mathbb{N}$ définie par récurrence :

- $\psi(x) = 2$
- $\psi((p_1 \wedge p_2)) = (\psi(p_1))^2 * \psi(p_2)$
- $\psi((p_1 \vee p_2)) = 2 * \psi(p_1) + \psi(p_2) + 1$
- $\psi(\neg p) = \psi(p)$

1. Montrer que $\psi(p) \geqslant 2$ pour toute formule p.
2. Considérons les règles de transformation suivantes :

$$
\begin{aligned}
X \wedge (Y \vee Z) &\rightsquigarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) && (1)\\
(X \vee Y) \wedge Z &\rightsquigarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) && (2)\\
(X \wedge Y) \wedge Z &\rightsquigarrow X \wedge (Y \wedge Z) && (3)\\
(X \vee Y) \vee Z &\rightsquigarrow X \vee (Y \vee Z) && (4)
\end{aligned}
$$

Montrer que pour toute formule $p \in Form$: Si p se transforme en q par l'application d'une des règles précédentes, alors $\psi(p) > \psi(q)$.

Exercice 6 :

Nous disons (pour cet exercice) qu'une formule propositionnelle est en *forme anormale* quand elle ne contient ni une sous-formule de la forme $\neg\neg p$, ni de la forme $(\neg p \vee \neg q)$, ni $(\neg p \wedge \neg q)$.

1. Donner des règles de réécriture qui permettent de transformer toute formule donnée en une formule équivalente en forme anormale. Expliquer, en quelques lignes (pas de preuve formelle),
   (a) pourquoi le processus de réécriture termine toujours,
   (b) pourquoi la formule obtenue à la fin est équivalente à la formule de départ,
   (c) pourquoi la formule obtenue à la fin est en forme anormale.
2. Est-ce qu'il y a deux formules en forme anormale qui sont logiquement équivalentes mais qui diffèrent par plus que seulement les lois de commutativité, d'associativité, et d'idempotence ?

Exercice 7 :

Une formule en forme conjonctive normale

$$(d_1 \wedge d_2 \wedge \ldots \wedge d_n)$$

est valide si et seulement si pour tout i il existe une variable x telle que la clause disjonctive d_i contient à la fois le littéral x et aussi sa négation $\neg x$.

Exercice 8 : Optionnel

On considère la formule $E = ((y \land z) \rightarrow (x \leftrightarrow (\neg y \lor z)))$ où x, y et z sont des variables propositionnelles.

1. Déterminer une formule logiquement équivalente à E, écrite sans autre symbole de connecteur que $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ (en particulier, pas de $\neg$).
2. Donner une DNF de E, aussi réduite que possible.
3. Montrer que les formules $(z \rightarrow (y \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))))$ et $(z \rightarrow (y \rightarrow x))$ sont logiquement équivalentes.

Outils Logiques TD6

Exercice 1

1) $\neg(\neg x \vee y) \rightarrow (\neg\neg x \wedge \neg y) \rightarrow x \wedge \neg y$

2) $\neg(\neg(x \vee y) \wedge z) \rightarrow (\neg\neg(x \vee y) \vee \neg z) \rightarrow (x \vee y) \vee \neg z$

$\rightarrow \neg((\neg x \wedge \neg y) \wedge z)$

$\rightarrow \neg(\neg x \wedge \neg y) \vee \neg z$

$\rightarrow (\neg\neg x \vee \neg\neg y) \vee \neg z$

$\rightarrow (x \vee y) \vee \neg z$

3) $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ $\rightarrow$ on remplace $\rightarrow$ par sa définition

On obtient $x \rightarrow (\neg y \vee z)$

et $\neg x \vee (\neg y \vee z)$

Exercice 2

Preuve par induction struct.

1. $p = x$ $\qquad \phi(x) = 1 \geq 1$

ok

2. $p = \neg q$

$$\phi(\neg q) = (\phi(q))^2 + 1$$

$$\geq 1^2 + 1 \geq 1$$

par hyp. d'ind.

3. $p = p_1 \wedge p_2$

$$\phi(p_1 \wedge p_2) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$$

$$\geq 1 + 1$$

$$\geq 1$$

par hyp. d'ind.

4. $p = p_1 \vee p_2$ $\qquad$ analogue

Exercice 3

$p = (\neg x \vee y) \wedge \neg z$ 1) g pa écri

2) preuve par induction

① $p = x$ $\neg p = \neg x$ T remplace x par $\neg x$

② $p = \neg x$ $\neg p = \neg\neg x$ avec T on obtient x aussi

Sa NNF est x

$p = \neg q$ q ne peut pas être autre chose qu'une variable

③ $p = p_1 \wedge p_2$

$\neg p = \neg(p_1 \wedge p_2) \models\!\mid (\neg p_1 \vee \neg p_2)$

par hyp. d'ind. q_1 est NNF de $\neg p_1$

q_2 obtenu par $T^{\neg q_1}$

$\neg(\neg(x \vee y) \wedge z) \rightarrow \underbrace{\neg((\neg x \wedge \neg y) \wedge z)}_{\text{NNF}}$

avec $\top$ on obtient
$(x \vee y) \vee \neg z$

Exercice 4

1) $\neg(p \leftrightarrow q) = \neg((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q))$

$\mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert} ((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg\neg q))$

$\mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert} (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ NNF & DNF

$\mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert} ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)$

$\mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert} ((\underbrace{p \vee \neg p}_{\top}) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \wedge ((p \vee q) \wedge (\underbrace{\neg q \vee q}_{\top}))$

$\mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert} (\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee q)$ CNF

2) $(((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q) \mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert} (\neg p \wedge \neg q) \vee q$ DNF

$\mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert} (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$

$\mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert} \neg p \vee q$ NNF DNF CNF

3) $(p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge (q \rightarrow (q \wedge \neg p)) = (\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p))$ NNF

$\mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert} ((\underbrace{\neg p \vee p}_{\top}) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \wedge ((\underbrace{\neg q \vee q}_{\top}) \wedge (\neg q \vee \neg p))$

$\mathrel{\vert\!\!=\!\!\vert} \neg p \vee \neg q$ DNF CNF

Ex 5

$\Psi(x) = 2$

$\Psi((p_1 \land p_2)) = (\Psi(p_1))^2 * \Psi(p_2)$

$\Psi((p_1 \lor p_2)) = 2 * \Psi(p_1) + \Psi(p_2) + 1$

$\Psi(\neg p) = \Psi(p)$

① Montre que $\Psi(p) \geq 2$
$\hookrightarrow$ pour toute formule $p \in$ Form

②

On montre ① par induction structurelle

cas 1 : $p = x$

cas 2 : $p = \neg q$

cas 3 : $p = (p_1 \land p_2)$

par hyp d'induction on sait que :

$\Psi(p_1) \geq 2$

$\Psi(p_2) \geq 2$

On doit montrer $\Psi(p) \geq 2$

cas 4 : $p = (p_1 \lor p_2)$

à faire

$$\psi(p) = \psi((p_1 \wedge p_2)) \geq 4$$

$$\overset{\text{par hyp}}{=} \underbrace{(\psi(p_1))^2}_{\geq 2} * \underbrace{\psi(p_2)}_{\geq 2}$$

$$\geq 8 \geq 2$$

2) cas 1 : $p = x$ ok car on ne peut appliquer aucune règle

$$\neg(\underset{\substack{2\\4}}{X} \wedge (\underset{2}{y} \vee \underset{2}{2})) \rightsquigarrow \neg((\underset{8}{x \wedge y}) \vee (\underset{8}{x \wedge 2}))$$

$$\psi \quad 28 \qquad\qquad 2 * 8 + 8 + 1 = 25$$

$\psi(x) = 2$

$\psi((p_1 \wedge p_2)) = (\psi(p_1))^2 * \psi(p_2)$

$\psi((p_1 \vee p_2)) = 2 * \psi(p_1) + \psi(p_2) + 1$

cas 2 : $p = \neg q$. On peut appliquer une règle sur p uniquement sur p_1

p_1 se transforme en q_1, on obtient $q = \neg q_1$

et par hyp d'induction. On sait que $\psi(p_1) > \psi(q_1)$

$$\psi(p) = \psi(\neg p_1) = \psi(p_1) > \psi(q_1) = \psi(\neg q_1) = \psi(q)$$

Donc $\psi(p) > \psi(q)$

$$X \wedge (Y \vee Z) \rightsquigarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \quad (1)$$
$$(X \vee Y) \wedge Z \rightsquigarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \quad (2)$$
$$(X \wedge Y) \wedge Z \rightsquigarrow X \wedge (Y \wedge Z) \quad (3)$$
$$(X \vee Y) \vee Z \rightsquigarrow X \vee (Y \vee Z) \quad (4)$$

cas 3 : $p = (p_1 \wedge p_2)$

3 sous cas :

A : On applique une règle dans p_1

B : On applique une règle dans p_2

C : On applique la règle (4) à la racine de $(p_1 \vee p_2)$

A $p \rightsquigarrow q$

$(p_1 \vee p_2) \rightsquigarrow (q_1 \vee q_2)$

Par hyp. d'induction soit

$$\psi(p_1) > \psi(q_1)$$

On doit montrer

$$\psi(p) > \psi(q)$$

$$= \psi((p_1 \vee p_2)) \qquad = \psi(q_1 \vee p_2)$$

$$= 2 * \psi(p_1) + \psi(p_2) + 1 > \quad = 2\psi(q_1) + \psi(p_2) + 1$$

(B) pareil $(p_1 \vee p_2) \rightsquigarrow (p_1 \vee q_2)$

Par hyp. d'induction on sait

$$\psi(p_1) > \psi(q_1)$$

On doit montrer

$$\psi(p) > \psi(q)$$

$$= \psi((p_1 \vee p_2)) \qquad = \psi(q_1 \vee p_2)$$

$$= 2 * \psi(p_1) + \psi(p_2) + 1 > \quad = 2\psi(q_1) + \psi(p_2) + 1$$

(C) $p \rightsquigarrow q$ avec règle (4)

p doit être de la forme $(p_3 \vee p_4) \vee p_2$

$$(p_3 \vee p_4) \vee p_2 \rightsquigarrow p_3 \vee (p_4 \vee p_2)$$

On doit montrer que

$$\psi((p_3 \vee p_4) \vee p_2) > \psi(p_3 \vee (p_4 \vee p_2))$$

$$= 2 * \psi(p_3 \vee p_4) + \psi(p_2) + 1$$

$$= 2 * (2\psi(p_3) + \psi(p_4) + 1) + \psi(p_2) + 1)$$

$$= 4\psi(p_3) + 2\psi(p_4) + \psi(p_2) + 3$$

$$= 2\psi(p_3) + \psi(p_4 \vee p_2) + 1$$

$$= 2\psi(p_3) + 2\psi(p_4) + 1 + \psi(p_2) +$$

$$= 2\psi(p_3) + 2\psi(p_4) + \psi(p_2) + 2$$

$>_{ok}$

cas 4 : $p = (p_1 \wedge p_2)$

5 sous-cas

(A) On applique la règle sur P_1

(B) On applique la règle sur P_2

(C) On applique la règle (1) à la racine

(D) On applique la règle (2) à la racine

(E) On applique la règle (3) à la racine

D : p est de la forme

$$(P_3 \vee P_4) \wedge P_2 \rightsquigarrow (P_3 \wedge P_2) \vee (P_4 \wedge P_2)$$

$\Psi((P_3 \vee P_4) \wedge P_2)$

$= (\Psi(P_3 \vee P_4))^2 * \Psi(P_2)$

$= (2 * \Psi(P_3) + \Psi(P_4) + 1)^2 * \Psi(P_2)$?

$= (4\Psi(P_3)^2 + \Psi(P_4)^2 + 1)$

$> \Psi((P_3 \wedge P_2) \vee (P_4 \wedge P_2))$

$= 2 * \Psi((P_3 \wedge P_2)) + \Psi(P_4 \wedge P_2) + 1$

$= 2((\Psi(P_3))^2 * \Psi(P_2)))$

$+ (2\Psi(P_4))^2 * \Psi(P_2) + 1$

?

=

Correction

$= (4(P_3 \vee P_4))^2 \cdot \psi(P_2)$

$= (2\psi(P_3) + \psi(P_4) + 1)^2 \psi(P_2)$

$= [4(\psi(P_3))^2 + (4(\psi_4))^2 + 1$
$+ 4\psi(P_3) \cdot \psi(P_4) + 2\psi(P_4)$
$+ 4\psi(P_3)] \psi(P_2)$

$= 4((P_3 \wedge P_2) \vee (P_4 \wedge P_2))$

$= 2\psi(P_3 \wedge P_2) + \psi(P_4 \wedge P_2) + 1$

$= 2(\psi(P_3))^2 + \psi(P_2)$
$+ 2(\psi(P_4))^2 \cdot \psi(P_2) + 1$

ok

Ex 6

1) $\neg\neg X \rightsquigarrow X$

$(\neg X \vee \neg Y) \rightsquigarrow \neg(X \wedge Y)$

$(\neg X \wedge \neg Y) \rightsquigarrow \neg(X \vee Y)$

a) chaque application de règles diminue strictement

b) Quand on applique une règle on remplace une formule par une formule équivalente

c) Si la formule n'est pas anormale, on peut appliquer une règle

DNF : (Disjonctif)

$$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (x \wedge \neg x \wedge y)$$

CNF ((Conjonctif)

$$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (\neg x \vee y)[x/0]$$

$$= \bot \wedge (\top \vee y)$$

$$= \bot$$

$$x \wedge (\neg x\ y)[x/1]$$

$$= \top \wedge (\bot \vee y)$$

$$= y$$

$C = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge z$