Devoir Maison 1

Devoir maison à rendre sur la page moodle du cours pour le 12 novembre 2020. Le barème sur 15 points donné dans la marge est indicatif.

Exercice 1. Algorithme DPLL

Considérons la formule propositionnelle φ_1 ci-dessous.

$$\varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \big(S \Rightarrow \big((Q \vee R \vee P) \wedge (Q \Rightarrow R)\big)\big) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge \big(\neg P \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\big) \wedge \big(S \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)\big) \wedge (P \Rightarrow R)\,.$$

[1,5] (a) Mettre φ_1 sous forme normale négative : calculer $\mathrm{nnf}(\varphi_1)$.

[0,5] (b) Mettre $\mathrm{nnf}(\varphi_1)$ sous forme clausale.

[2] (c) Appliquer l'algorithme DPLL à la formule obtenue en (b). Plus précisément, dessiner un arbre de recherche DPLL comme vu en cours (c.f. figures 15 à 18 des notes de cours).

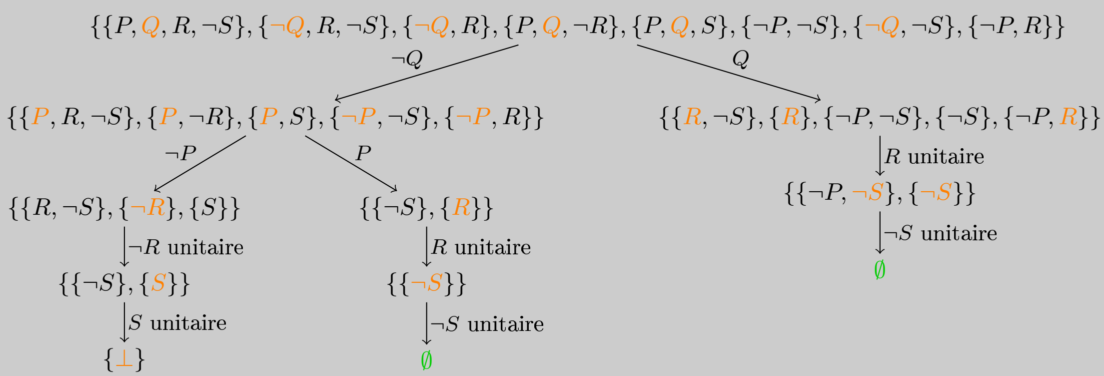
[0,5] (d) Dire si la formule φ_1 est satisfiable, et si oui, fournir un modèle.

Solution :

(a) $\mathrm{nnf}(\varphi_1) = \big(\neg S \vee \big((Q \vee R \vee P) \wedge (\neg Q \vee R)\big)\big) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg R \vee Q) \wedge (S \vee P \vee Q) \wedge \big(\neg S \vee (\neg P \wedge \neg Q)\big) \wedge (\neg P \vee R)$

(b) $\{\{P, Q, R, \neg S\}, \{\neg Q, R, \neg S\}, \{\neg Q, R\}, \{P, Q, \neg R\}, \{P, Q, S\}, \{\neg P, \neg S\}, \{\neg Q, \neg S\}, \{\neg P, R\}\}$

(c)



(d) La formule est satisfiable ; par exemple, toute interprétation qui étend $[1/Q, 1/R, 0/S]$ est un modèle de φ_1.

Exercice 2. Calcul des séquents propositionnel

Considérons la formule propositionnelle φ_2 ci-dessous.

$$\varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} (P \wedge \neg Q) \Rightarrow \big((\neg Q \Rightarrow (Q \wedge \neg R)) \Rightarrow Q\big)\ .$$

[1] (a) Mettre φ_2 sous forme normale négative : calculer $\mathrm{nnf}(\varphi_2)$.

[1,5] (b) Faire une recherche de preuve dans le calcul des séquents propositionnel vu en cours sur la formule $\mathrm{nnf}(\varphi_2)$ obtenue en (b).

[0,5] (c) Dire si la formule φ_2 est valide, et si non, fournir un contre-modèle.

[1,5 (bonus)] (d) Utiliser un raisonnement à base d'équivalences logiques et le fait que la loi de Peirce est valide pour arriver à la même conclusion. *Ne pas perdre de temps sur cette question bonus !*

Solution :

(a) $\mathrm{nnf}(\varphi_2) = (\neg P \lor Q) \lor \big((\neg Q \land (\neg Q \lor R)) \lor Q\big)$

(b)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \lor Q, \neg Q, Q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \lor Q, \neg Q, R, Q$}
\RightLabel{($\lor$)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \lor Q, \neg Q \lor R, Q$}
\RightLabel{($\land$)}
\BinaryInfC{$\vdash \neg P \lor Q, \neg Q \land (\neg Q \lor R), Q$}
\RightLabel{($\lor$)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \lor Q, \big(\neg Q \land (\neg Q \lor R)\big) \lor Q$}
\RightLabel{($\lor$)}
\UnaryInfC{$\vdash (\neg P \lor Q) \lor \big((\neg Q \land (\neg Q \lor R)) \lor Q\big)$}
\end{prooftree}
$$

(c) La formule φ_2 est valide puisque la recherche de preuve réussit.

(d)

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &\stackrel{\text{def}}{=} (P \land \neg Q) \Rightarrow \big((\neg Q \Rightarrow (Q \land \neg R)) \Rightarrow Q\big) \\
&\Leftrightarrow (P \land \neg Q) \Rightarrow \big((\neg(Q \land \neg R) \Rightarrow \neg\neg Q) \Rightarrow Q\big) && \text{par contraposition} \\
&\Leftrightarrow (P \land \neg Q) \Rightarrow \big((\neg(Q \land \neg R) \Rightarrow Q) \Rightarrow Q\big) && \text{par double négation} \\
&\Leftrightarrow (P \land \neg Q) \Rightarrow \big(((\neg Q \lor R) \Rightarrow Q) \Rightarrow Q\big) && \text{par dualité de DE MORGAN pour } \land \\
&\Leftrightarrow (P \land \neg Q) \Rightarrow \big(((Q \Rightarrow R) \Rightarrow Q) \Rightarrow Q\big) && \text{par définition de l'implication} \\
&\Leftrightarrow (P \land \neg Q) \Rightarrow \top && \text{car la loi de PEIRCE est valide} \\
&\Leftrightarrow \neg(P \land \neg Q) \lor \top && \text{par définition de l'implication} \\
&\Leftrightarrow \top && \text{car } \top \text{ est absorbant pour } \lor
\end{aligned}
$$

Exercice 3. Modélisation en logique propositionnelle

Le problème qui nous intéresse est le problème du graphe hamiltonien. L'entrée du problème est un graphe fini non orienté simple $G = (V, E)$ comme celui de gauche dans la figure 1, où V est l'ensemble de sommets et E l'ensemble des arêtes.

Un graphe est dit *hamiltonien* s'il existe un *cycle hamiltonien* dans le graphe, c'est-à-dire un cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet. Rappelons que, comme vu en cours de mathématiques discrètes, un *cycle* est une séquence $(v_1, v'_1), (v_2, v'_2), \ldots, (v_k, v'_k)$ de paires de sommets telles que $\{v_i, v'_i\} \in E$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et

1. les sommets sont consécutifs, c'est-à-dire $v'_i = v_{i+1}$ pour tout $1 \leq i < k$, et
2. les deux sommets extrémités sont identiques, c'est-à-dire $v'_k = v_1$.

Par exemple, un tel cycle hamiltonien $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,9)$, $(9,10)$, $(10,17)$, $(17,18)$, $(18,19)$, $(19,15)$, $(15,16)$, $(16,8)$, $(8,7)$, $(7,6)$, $(6,5)$, $(5,14)$, $(14,13)$, $(13,12)$, $(12,11)$, $(11,3)$, $(3,4)$, $(4,0)$ est indiqué en rouge dans le graphe de droite de la figure 1.

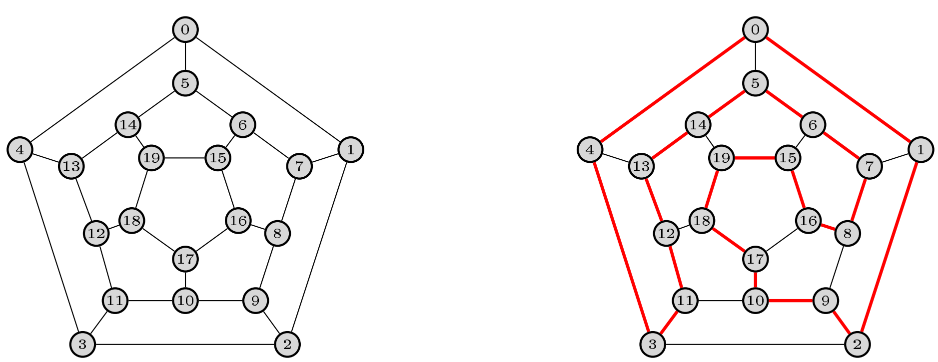


FIGURE 1 – Un graphe hamiltonien.

Le but de l'exercice est d'écrire une formule propositionnelle $\varphi_3 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{3,\geq 1} \wedge \varphi_{3,\leq 1} \wedge \varphi_{3,C} \wedge \varphi_{3,H}$ qui dépend du graphe d'entrée $G = (V, E)$, et qui est satisfiable si et seulement si le graphe est hamiltonien.

[0,5] (a) On définit k comme le nombre de paires (v_i, v'_i) qui peuvent apparaître dans un cycle hamiltonien. Pour simplifier les notations par la suite, on définit $\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{(v, v') \in V \times V \mid \{v, v'\} \in E\}$ comme l'ensemble des « orientations » d'arêtes de E ; un cycle est alors une séquence d'éléments de $\vec{E}$ qui satisfait les conditions 1 et 2 données plus haut.
On va travailler avec les propositions $P_{i,(v,v')}$ où $1 \leq i \leq k$ et $(v, v') \in \vec{E}$. Que vaut k en fonction du graphe $G = (V, E)$?

[1] (b) Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,\geq 1}$ qui impose que, pour tout $1 \leq i \leq k$, $P_{i,(v,v')}$ soit vraie pour au moins une paire $(v, v') \in \vec{E}$.

[1] (c) Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,\leq 1}$ qui impose que, pour tout $1 \leq i \leq k$, $P_{i,(v,v')}$ soit vraie pour au plus une paire $(v, v') \in \vec{E}$.

[2] (d) On sait maintenant que, si I est une interprétation qui satisfait $\varphi_{3,\leq 1} \wedge \varphi_{3,\geq 1}$, alors elle définit une séquence $C_I \stackrel{\text{def}}{=} (v_1, v'_1), (v_2, v'_2), \ldots, (v_k, v'_k)$ de paires de sommets où, pour tout $1 \leq i \leq k$, (v_i, v'_i) est l'unique paire de $\vec{E}$ telle que $P^I_{i,(v_i,v'_i)} = 1$.
Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,C}$ qui impose que C_I soit un cycle : les sommets doivent être consécutifs (condition 1) et les sommets extrémités doivent être identiques (condition 2).

[2] (e) Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,H}$ qui impose que C_I passe exactement une fois par chaque sommet.

Solution :

(a) $k = |V|$ le nombre de sommets du graphe

(b) $$\varphi_{3,\geq 1} = \bigwedge_{1\leq i\leq k} \bigvee_{(v,v')\in\vec{E}} P_{i,(v,v')}$$

(c) $$\varphi_{3,\leq 1} = \bigwedge_{1\leq i\leq k} \bigwedge_{\substack{(u,u'),(v,v')\in\vec{E}\\ \text{t.q. } (u,u')\neq(v,v')}} (\neg P_{i,(u,u')} \vee \neg P_{i,(v,v')})$$

(d) $$\varphi_{3,C} = \left(\bigwedge_{1\leq i<k} \bigvee_{\substack{u,v,w\in V\\ \text{t.q. } (u,v),(v,w)\in\vec{E}}} (P_{i,(u,v)} \wedge P_{i+1,(v,w)}) \right) \wedge \bigvee_{\substack{u,v,w\in V\\ \text{t.q. } (u,v),(v,w)\in\vec{E}}} (P_{1,(v,w)} \wedge P_{k,(u,v)})$$

(e) $$\varphi_{3,H} = \left(\bigwedge_{v\in V} \bigvee_{1\leq i\leq k} \bigvee_{\substack{v'\in V\\ \text{t.q. } (v,v')\in\vec{E}}} P_{i,(v,v')} \right) \wedge \left(\bigwedge_{v\in V} \bigwedge_{1\leq i<j\leq k} \neg\Big(\bigvee_{\substack{v'\in V\\ \text{t.q. } (v,v')\in\vec{E}}} P_{i,(v,v')}\Big) \vee \neg\Big(\bigvee_{\substack{v''\in V\\ \text{t.q. } (v,v'')\in\vec{E}}} P_{j,(v,v'')}\Big) \right)$$

qu'on peut en fait simplifier en remarquant qu'il suffit d'interdire de passer deux fois par un même sommet :

$$\varphi_{3,H} = \bigwedge_{v\in V} \bigwedge_{1\leq i<j\leq k} \neg\Big(\bigvee_{\substack{v'\in V\\ \text{t.q. } (v,v')\in\vec{E}}} P_{i,(v,v')}\Big) \vee \neg\Big(\bigvee_{\substack{v''\in V\\ \text{t.q. } (v,v'')\in\vec{E}}} P_{j,(v,v'')}\Big)$$

ou alternativement en obligeant à passer au moins une fois par chaque sommet :

$$\varphi_{3,H} = \bigwedge_{v\in V} \bigvee_{1\leq i\leq k} \bigvee_{\substack{v'\in V\\ \text{t.q. } (v,v')\in\vec{E}}} P_{i,(v,v')}$$