Feuille d'exercices 6

Exercice 1 : Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -22 & 22 & -33 \\ 55 & 11 & 44 \\ 33 & -44 & 55 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3+2i & -7+3i \\ -2+5i & 4-i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+i & 2-i & 2 \\ i & 1+2i & 1+i \\ 2+i & 3+i & 3-i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & -7 & -9 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & -7 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 17 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & cos\theta \end{vmatrix}.$$

Exercice 2 : Calculer les déterminants suivants en factorisant le résultat autant que possible et *aussi tôt que possible* durant le calcul :

$$\begin{vmatrix} 2-x & 3 & 2 \\ 1 & 1-x & -1 \\ -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 3-x & 1 \\ 3 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & x & -4 \\ -x & y & 2x \\ x & 2y & -y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3 : Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$ et si oui les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 :

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Exercice 5 : Calcul d'une puissance n-ième

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 :

Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

***Exercice* 7 :**

Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

(1) Quelles sont les valeurs propres de f ?

(2) Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?

(3) On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

***Exercice* 8 :** Application à des suites récurrentes

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) Diagonaliser A.

(2) Calculer A^n en fonction de n.

(3) On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Ex 1

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{2} \\ \overset{-}{-2} & \overset{+}{2} & \overset{-}{3} \\ \overset{+}{-1} & \overset{-}{-3} & \overset{+}{1} \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

On développe $= 3 \times 11 + 1 \times 1 + 2 \times 8$

$$= 33 + 1 + 16$$

$$= 50$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 1 + 12 + 27 - 2 + 4$$

$$= 50$$

$$\begin{vmatrix} -22 & 22 & -33 \\ 55 & 11 & 44 \\ 33 & -44 & 55 \end{vmatrix} = 11^3 \times \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$L_1 - 2L_2$

$L_3 + 4L_2$

$$11^3 \begin{vmatrix} -12 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \\ 23 & 0 & 21 \end{vmatrix}$$

Developper selon la colonne

$$= 11^3 \begin{vmatrix} -12 & -5 \\ 23 & 21 \end{vmatrix} = 11^3(-12 \times 21 + 5 \times 23)$$

$$= 11^3(-252 + 115)$$

$$= 11^3$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

$$\begin{vmatrix} 3+2i & -7+3i \\ -2+5i & 4-i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3+17i & 5 \\ -2+5i & 4-i \end{vmatrix}$$

$$= (-3+17i)(4-i) - 5(-2+5i)$$

$$= -12 + i + 68i - 17i + 10 - 25i$$

$$= 15 + 46i$$

$$\begin{vmatrix} 1+i & 2i & 2 \\ i & 1+2i & 1+i \\ 2+i & 3+i & 3-i \end{vmatrix} \overset{L_1-L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1-3i & 1-i \\ i & 1+2i & 1+i \\ 2+i & 3+i & 3-i \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_2 - iL_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1-3i & 1-i \\ 0 & 1+2i-i-3 & 0 \\ 2+i & 3+i & 3-i \end{vmatrix}$$

Devellop 2ème ligne $(-2+i)\begin{vmatrix} 1 & 1-i \\ 2+i & 3-i \end{vmatrix}$

$$= (-2+i)\left[(3-i)-(1-i)(2+i)\right]$$

$$= (-2+i)\left[0+0i\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \quad = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta \times 1 \times \cos\theta$$

$$+ \sin \times 0 \times 0$$

$$+ 0 \times 0 \times (-\sin\theta)$$

$$- \sin\theta \times 1 \times (\sin\theta)$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\det = aei + cdh$$

$$+ bfg$$

$$- (\_\_\_)$$

$$\begin{vmatrix} 2-x & 3 & 2 \\ 1 & 1-x & -1 \\ -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-x & 3 & 2 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 2-x & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x) \begin{vmatrix} 2-x & 3 & 2 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad C_2 - C_3$$

$$= (2-x) \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 2 \\ 1 & 2-x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{A} & \\ C \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (2-x)\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} \quad \det M = 1 \times \det A$$

$$= (2-x)\left[(2-x)^2 - 1\right]$$

$$= (2-x)(3-x)(1-x)$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 3-x & 1 \\ 3 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$L_1 = L_1 + L_2 + L_3 \quad \begin{vmatrix} 6-x & 6-x & 6-x \\ 2 & 3-x & 1 \\ 3 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$= (6-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 1 \\ 3 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (6-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-x & -1 \\ 3 & -2 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$= (6-x)\left[(1-x)(1+x) -2 \right]$$

$$= (6-x)(-x^2 -1 -2)$$

$$= (6-x)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

$$\begin{vmatrix} 2 & x & -4 \\ -x & y & 2x \\ x & 2y & -y \end{vmatrix} = (2x-y)\begin{vmatrix} 2 & x \\ -x & y \end{vmatrix}$$

$$= (2x-y)(2y+x^2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

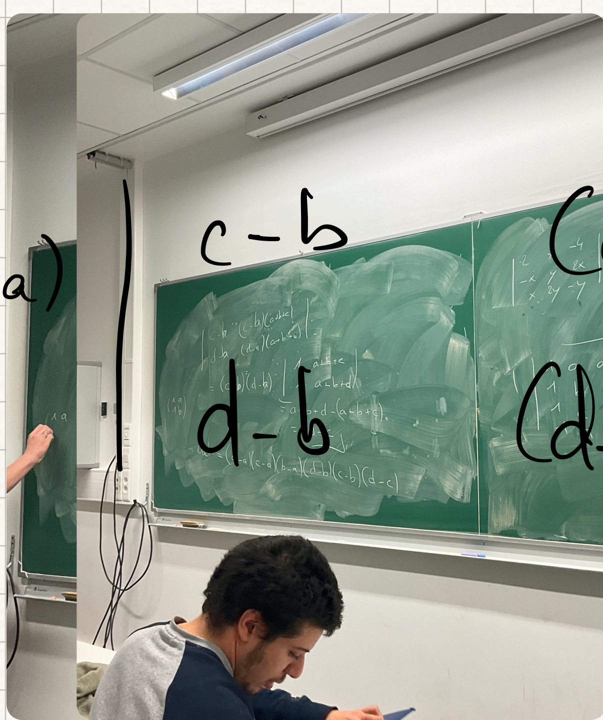
$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & b^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (d-a(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 0 & 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (d-a)(c-a)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$$

$$(b-a)(b^2+ab+a^2)$$
$$= b^3 + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - a^3$$

$$= (d-a)(c-a)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-b & c^2+ac-ab \\ & & -b^2 \\ 0 & d-b & d^2+ad-ab \\ & & -b^2 \end{vmatrix}$$



$$= (d-a)(c-a)(b-a)\begin{vmatrix} c-b & (c-b)(a+b+c) \\ d-b & (d-b)(a+b+d) \end{vmatrix}$$