rappel n° de place :

Corrections

Ex1. 1. $\sinh(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

donc $\sinh(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \sinh(x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

donc $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\Rightarrow 2(1-\cos(x)) = x^2 + o(x^3)$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$

donc $2(1-\cos(x))\sqrt{1+x} = \mathrm{Tronc}_3\left(\left(1+\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)x^2\right) + o(x^3)$

$= x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\Rightarrow x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

donc $2(1-\cos(x))\sqrt{1+x} - x\ln(1+x) = x^3 + o(x^3)$

$\Leftrightarrow$

$2(1-\cos(x))\sqrt{1+x} - x\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x^3$.

donc $\frac{2(1-\cos(x))\sqrt{1+x} - x\ln(1+x)}{\sinh(x) - x} \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{-\frac{x^3}{6}} = -6$

$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos(x))\sqrt{1+x} - x\ln(1+x)}{\sinh(x) - x} = -6$

2. En fait $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ où $f(x) = \frac{x^2\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1\right)}{\sqrt{x^2-x}}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = 0$, $x^2 - x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ ~~donc~~.

$\Rightarrow \sqrt{x^2-x} \underset{+\infty}{\sim} x$.

$$\Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} \tilde{f}(x) = \frac{\cancel{x^2}\,(x\ln(1+\frac{1}{x})-1)}{\cancel{x}}$$

$$= x^2\ln(1+\tfrac{1}{x}) - x.$$

Méthode 1 : Comme au point 0 :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

on a en $+\infty$

$$\ln(1+\tfrac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o_{+\infty}(\tfrac{1}{x^2})$$

donc $\tilde{f}(x) = x - \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1) - x = -\frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = -\frac{1}{2}$$

Méthode 2 :

Soit ~~$g(y)$~~ $y = \frac{1}{x}$

$$g(y) = \tilde{f}(\tfrac{1}{y}) = \frac{1}{y^2}\ln(1+y) - \frac{1}{y} = \frac{\ln(1+y)-y}{y^2}$$

au point 0 : $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$

donc $\ln(1+y) - y = -\frac{y^2}{2} + o(y^2) \Leftrightarrow \ln(1+y) - y \underset{0}{\sim} -\frac{y^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+y)-y}{y^2} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = \lim_{y\to 0} g(y) = -\frac{1}{2}$$

Ex 2 : (1) Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = 0$, $\quad x^2+x^3 \underset{0}{\sim} x^2$.

~~et~~ $\cancel{\ln(1+x) = x + o(x)}$ ~~donc~~.

$$\cancel{\ln(1-x^2) = -x^2 + o(x^2)}$$

$$\cancel{(1+2x)\ln(1-x^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc $\ln(1-x^2) = -x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$.

donc

$$(1+2x)\ln(1-x^2) = \mathrm{Tronc}_4\left((1+2x)\left(-x^2-\frac{x^4}{2}\right)\right) + o(x^4)$$

$$= -x^2 - 2x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$= -x^2 - 2x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow (1+2x)\ln(1-x^2) + x^2 = -2x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow (1+2x)\ln(1-x^2) + x^2 \underset{0}{\sim} -2x^3$$

donc $\dfrac{(1+2x)\ln(1-x^2)+x^2}{x^2+x^3} \underset{0}{\sim} \dfrac{-2x^3}{x^2} = -2x$

(2) $e^{x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$

$$e^{x^2} - 1 - x^2 = \frac{x^4}{2} + o(x^4) \Rightarrow e^{x^2} - 1 - x^2 \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{2}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \Rightarrow \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{x^2}-1-x^2}{\cosh(x)-1-\frac{x^2}{2}} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{2}}{\frac{x^4}{24}} = 12$$

Ex 3

1. $f(x) = \cos\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$

$$= \text{Tronc}_3 \left(PP_3(\cos(u))(u) \Big|_{u = PP_3(\sin(x))(x)} \right) + o(x^3)$$

$$= \text{Tronc}_3 \left(\left(1 - \cancel{x} \frac{u^2}{2}\right) \Big|_{u = x - \frac{x^3}{6}} \right) + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

2. Comparant les coefficients correspondants :

$f'(0) = 0$ (le coefficient de x)

$\frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{2}$ (le coefficient de x^2) $\Rightarrow f''(0) = -1$

3. ~~La~~ l'équation de la tangente en 0 est $y = 1$.

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow f(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$f(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

donc au voisinage de 0, $f(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2} < 0$.

la courbe représentative de f est en dessous de la tangente.

Ex 4.

1. Soit $y = \frac{1}{x}$, $(y > 0)$

$$\tilde{f}(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \sqrt{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}} - \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}}$$

$\rightarrow y \tilde{f}(y) = \sqrt{1-y} - \sqrt{1+y}$

en $0+$: $\sqrt{1-y} = 1 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} \cancel{+ o(y^2)} - \frac{y^3}{16} + o(y^3)$

$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} \cancel{+ o(y^2)} + \frac{y^3}{16} + o(y^3$

donc $y\tilde{f}(y) = -y - \frac{y^3}{8} + o(y^3)$

donc $\tilde{f}(y) = -1 - \frac{y^2}{8} + o(y^2)$

$\Rightarrow f(x) = -1 - \frac{1}{8x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$

2. $f(x)$ admet une asymptote en $+\infty$ et l'équation de l'asymptote est $\cancel{f(x)}\ y = -1$.

$f(x) - (-1) = -\frac{1}{8x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

donc $f(x) + 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{8x^2} < 0$

la courbe est en dessous de l'asymptote.

Ex5 : $\sqrt{x}\ln(e^{x^2} + x^{\frac{3}{2}}) - x^{\frac{5}{2}}$

$= \sqrt{x}\left(\ln(e^{x^2} + x^{\frac{3}{2}}) - x^2\right)$

$= \sqrt{x}\left(\ln(e^{x^2} + x^{\frac{3}{2}}) - \ln(e^{x^2})\right)$

$= \sqrt{x}\ln\left(1 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^{x^2}}\right)$

Comme $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^{x^2}} = 0$

on a $\ln\left(1 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^{x^2}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^{x^2}}$

donc $\sqrt{x}\ln(e^{x^2} + x^{\frac{3}{2}}) - x^{\frac{5}{2}}$

$= \sqrt{x}\ln\left(1 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^{x^2}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^{x^2}}$

Ex 6 $\quad (\cos(x))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos(x))\right)$

$$= \exp\left(-\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)$$

$$= \mathrm{Tronc}_3\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6}\Big|_{u = -\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}}\right) + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{5}{48}x^3 + o(x^3)$$

donc $f(x) = \sqrt{1+x}\,(\cos(x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{Tronc}_3\left(\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{5}{48}x^3\right)\right) + o(x^3)$

$$= 1 - \cancel{\frac{x}{2}} + \cancel{\frac{x^2}{8}} - \frac{5}{48}x^3 + \cancel{\frac{x}{2}} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} - \cancel{\frac{x^2}{8}} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

donc $f'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$

et $\quad \ln(2-x) - \ln 2 = \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x$$

donc $f'(x) - \ln(2-x) + \ln 2 = \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \Rightarrow f'(x) - \ln(2-x) + \ln 2 \underset{0}{\sim} \frac{3}{8}x^2$

et $\quad$ on sait que

$\tanh(x) \underset{0}{\sim} x$ $\quad \& \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ $\Rightarrow \tanh(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$

donc $\quad \dfrac{f'(x) - \ln(2-x) + \ln 2}{\tanh(x^2)} \underset{0}{\sim} \dfrac{3}{8}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \ln(2-x) + \ln 2}{\tanh(x^2)} = \frac{3}{8}$$