Université de Paris
Licence L2 Informatique

UFR de Mathématiques
2022-2023

Feuille d'exercices 2

Exercice 1:

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0
3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0
4. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0
5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0
6. $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 2:

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0
2. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0
3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0
4. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 3:

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0
2. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
3. $e^{\cos(x)}$ à l'ordre 5 en 0
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0.
5. $x\big(\cosh x\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 4:

Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0
2. $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 5:

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2
2. $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2

Exercice 6:

Montrer que la fonction $x \mapsto x + \ln(1+x)$ admet au voisinage de zéro une fonction réciproque et en donner un développement limité en 0 à l'ordre 3.

Exercice 7:

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$ 2. $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$

Exercice 8:

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer un équivalent et la limite au point indiqué.

1. $\dfrac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6}$ en 0; 2. $\dfrac{1+\ln(1+x) - e^x}{1-\cos x}$ en 0; 3. $\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ en 0;
4. $\dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0; 5. $\dfrac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x}$ en 0; 6. $\dfrac{x^{x^x}\ln x}{x^x - 1}$ en 0^+;
7. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ en 0; 8. $\dfrac{\ln(x)}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1}$ en 1 9. $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0
10. $\dfrac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)}$ en 0; 11. $\dfrac{1-\exp(-x^2)}{x(\exp(x) - \exp(-x))}$ en 0 12. $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ $+\infty$

Exercice 9:

Déterminer un équivalent et la limite de la suite :

$$u_n = \sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt[4]{n^4 + n^3 + n + 2}$$

Exercice 10:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 11:

A l'aide des développements limités, déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}.$$

Exercice 12:

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

1. $f(x) = \dfrac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$
2. $g(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
3. $h(x) = \dfrac{x+1}{1+\exp(1/x)}$
4. $u(x) = x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

Exercice 13:

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$. Déterminer $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(4)}(0)$ et $f^{(8)}(0)$.

Ex 8 :

$$f : x \mapsto \frac{\exp(\sin(x)) - \exp(\tan(x))}{\sin(x) - \tan(x)} \text{ en } 0,$$

$\sin(x) - \tan(x)$

$$\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\underset{0}{=} \frac{-x^3}{2} + o(x^4)$$

$$\sim \frac{-x^3}{2}$$

$$\exp(\sin(x)) \underset{0}{=} \exp\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$$

$$\underset{0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{x^6}\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 + o(x^3)$$

$$\exp(\tan(x)) \underset{0}{=} \exp\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\exp(\sin(x)) - \exp(\tan(x))$$

$$\underset{0}{=} \frac{-x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{-x^3}{2}$$

$$\exp(\sin(x)) - \exp(\tan(x))$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{-x^3}{2} \times \frac{-2}{x^3} = 1$$

f_7 $\quad \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ en 0

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)}$$

$$= \frac{\frac{-x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = \frac{-x}{6} + o(x)$$

On sait que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin(x) - x = \frac{-x^3}{6} + o(x^3)$$

8) $\dfrac{\ln(x)}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1}$ en 1

$y = x - 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

$x = y + 1$

$\dfrac{\ln(1+y)}{y^2} - \dfrac{1}{y}$ en 0

$= \dfrac{\ln(1+y) - y}{y^2}$

$\ln(1+y) - y = y - \dfrac{y^2}{2} + y + o(y^2)$

$= \dfrac{-y^2}{2} + o(y^2)$

$\sim \dfrac{-y^2}{2}$

$\overset{\shortparallel}{\dfrac{-y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3}}$

$$\frac{\ln(1+y)}{y^2} - \frac{1}{y} \underset{0}{\sim} \frac{-y^2}{2} \times \frac{1}{y^2} = \frac{-1}{2}$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{-1}{2}$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{y}{3} + o(y)$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{(x-1)}{3} + o(x-1)$$

6) $\dfrac{(x^{x^x})\ln(x)}{x^x-1}$ en 0^+

$$x^x - 1 = \exp(x\ln(x)) - 1$$
$$\underset{0}{\sim} x\ln(x)$$

$$\frac{x^{(x^x)}\ln x}{x^x-1} \underset{0}{\sim} \frac{x^{x^x}}{x} = x^{(x^x-1)}$$

$$= \exp((x^x-1)\ln(x))$$
$$(x^x-1)\ln(x)$$
$$\underset{0}{\sim} x\ln(x)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Donc $\dfrac{x^{x^x}\ln(x)}{x^x-1} \longrightarrow e^0 = 1$

par continuité de exp

11)

$$\frac{1-\exp\left(-x^{2}\right)}{x(\exp(x)-\exp(x))} \text{ en } 0$$

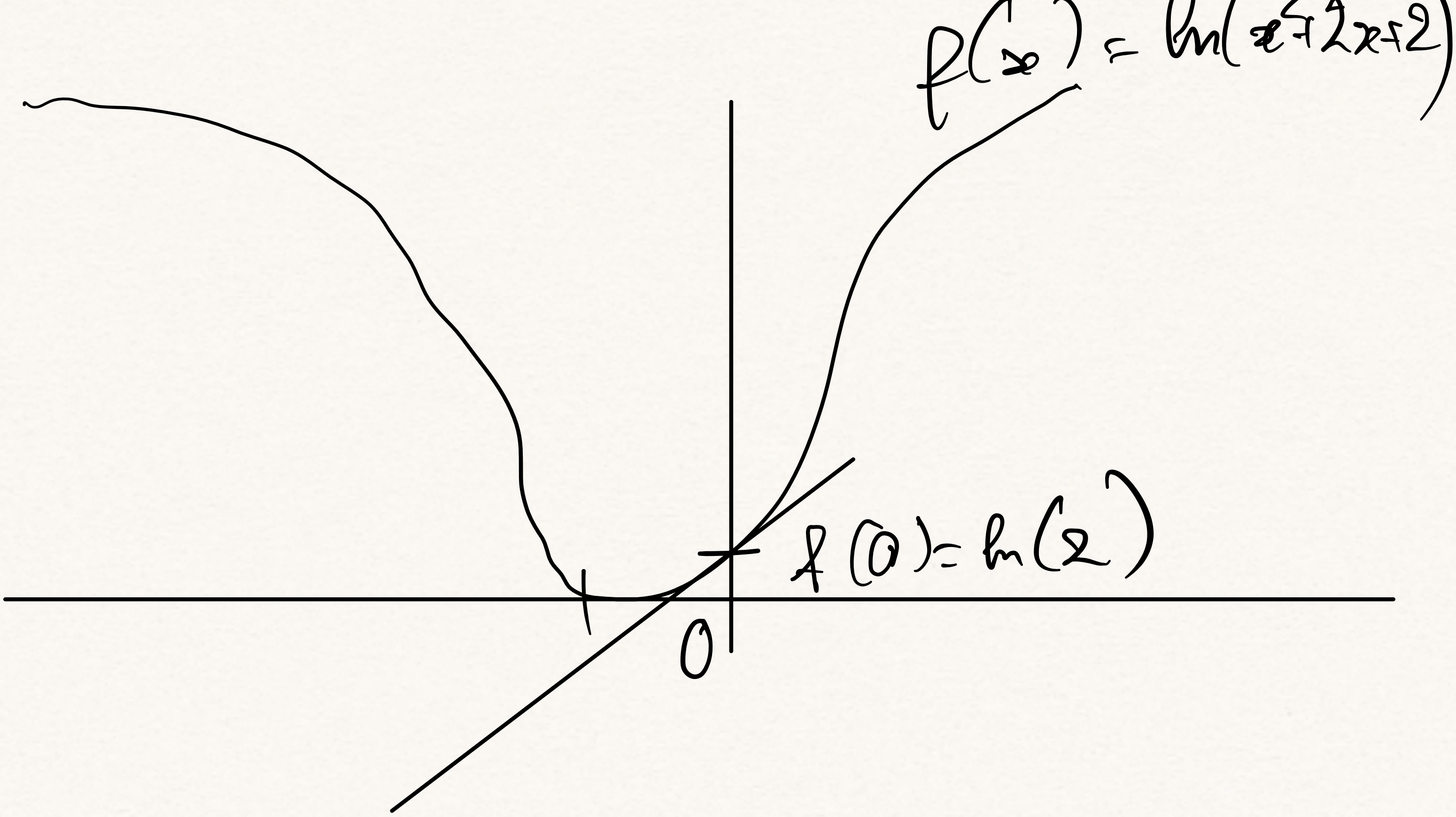
$$\frac{1-e^{-x^2}}{x(e^{x}-e^{-x})} = \frac{1-e^{-x^2}}{xe^{x}(1-e^{-2x})} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{x(-2x)}$$

$$= \frac{-x^2}{-2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$1-e^{-x^2} = 1-(1-x^2+o(-x^2)) \underset{0}{\sim} -x^2$$

$$1-e^{-2x} = 1-(1-2x+o(x)) \underset{0}{\sim} -2x$$

Ex 10



$$\ln(x^2+2x+2) = \ln\left[2\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)\right]$$

$$= \ln(2) + \ln\left(1+\frac{1}{2}x^2+x\right)$$

$$= \ln(2) + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= \ln(2) + x + o(x^2)$$

$$\Delta \quad y = \ln(2) + x$$

$$\ln(x^2+2x+2) = \ln\left[2\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)\right]$$

$$= \ln(2) + \ln\left(1+\frac{1}{2}x^2+x\right)$$

$$= \ln(2) + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$= \ln 2 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$= \ln 2 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(x^2+2x+2) - \ln(2) + x$$

$$= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

en 0 : C_f est au dessus de Δ

en 0^- : C_f est en dessous de Δ

Ex 11

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$$

$$= x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= x\left(1+\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

$$= 2x - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$f(x) - 2x = O(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

Asymptote oblique $y = 2x$

$$f(x) - 2x \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{4x^3} < 0$$

pour $x > 0$

Donc $(y = f(x))$ est en dessous de l'asymptote

f est paire, donc $(y = -2x)$ est asymptote en $-\infty$

et $(y = f(x))$ est en-dessous de l'asymptote

Ex 12

2) $g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

$\underset{+\infty}{=} x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{o(1)}$

$g(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

$g(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3x} \geqslant 0$

Donc $\left(y = x - \frac{1}{2}\right)$ est asymptote

en $+\infty$

$\frac{1}{3x} \geqslant 0$ si $x > 0$ donc la

courbe est au dessus de

l'asymptote

3) $$h(x) = \frac{x+1}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= (x+1)\left(1+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\left(1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

4) $u(x) = x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}$$

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{x}\left(\frac{x}{x-\frac{1}{x}}\right) = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{2}{x}\left(1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \to 1+\underbrace{\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{=o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$e^{\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = 1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$x e^{\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= x+2+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \to +\infty \ (1)$$

$$\frac{1}{x} > 0 \quad \text{si} \quad x > 0$$

vu que

$$x e^{\frac{2x}{x^2-1}} - (x+2) \underset{+\infty}{=} O(1)$$

Alors (Δ) $y = x+2$ est une asymptote en $+\infty$

Donc $(y = u(x))$ est au dessus de (Δ)

Ex 8

$$g \to \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$e^{\ln(x)} = \ln e^{x} = x$$

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right)$$

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x} - 1}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} + 1\right) \underset{0}{\sim} \frac{\sin(x)}{x} - 1$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{\sin(x)}{x} - 1 = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \underset{0}{\sim} \frac{-1}{6}$$

$$\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) \underset{0}{\sim} \exp\left(\frac{-1}{6}\right)$$

Ex13 $\rightarrow f^{(8)}(0)$ ordre 8

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$$

$$\underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)\,x^k}{k!} + o(x^N)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3} \underset{0}{=} x^2\left(1 - x^3 + x^6 - \cancel{x^9} + o(\cancel{x^9})\right)$$

$$= x^2 - x^5 + x^8 + o(x^8)$$

$\rightarrow f'(x) = 0$

$\rightarrow f''(0) = 2$

$$f'(0) = 0$$

$$\frac{f''(0)}{2} = 1 \rightarrow f''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(8)}(0) = 8!$$

$$u_n = \sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt[4]{n^4 + n^3 + n + 2}$$

$$= n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}}\right)$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= n\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= n\left(\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4} + o(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \sqrt{n^2+n-1} - \sqrt[4]{n^4+n^3+n+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \left(1 + \overbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}^{\to 0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} - \cancel{\frac{1}{2n^2}} - \cancel{\frac{1}{8n^2}} + \cancel{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$+ o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ex 8

10) $\dfrac{\cos(x)-1}{\sin(x^2)}$ en 0 DL 7

$$\sin(x^2) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} + o(x^{11})$$

$$\underset{0}{=} x^2\left(1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{120} + o(x^9)\right)$$

$$\cos(x)-1 \underset{0}{=} \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} + o(x^9)$$

$$\underset{0}{=} x^2\left(\frac{-1}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{8!} + o(x^7)\right)$$

$$\frac{1}{\sin(x^2)} \underset{0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^8}{120} + \frac{x^8}{36} + o(x^9)\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^4}{6} \times \frac{7}{360}x^8 + o(x^9)\right)$$

$$\frac{\cos(x)-1}{\sin(x^2)} =$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{8!} + o(x^7)\right)\left(1 + \frac{x^4}{6} + \frac{7x^8}{360} + o(x^8)\right)$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{x^2}{24} + \left(\frac{-1}{12} - \frac{1}{720}\right)x^4$$

$$+ \left(\frac{1}{6 \times 24} + \frac{1}{8!}\right)x^6 + o(x^7)$$