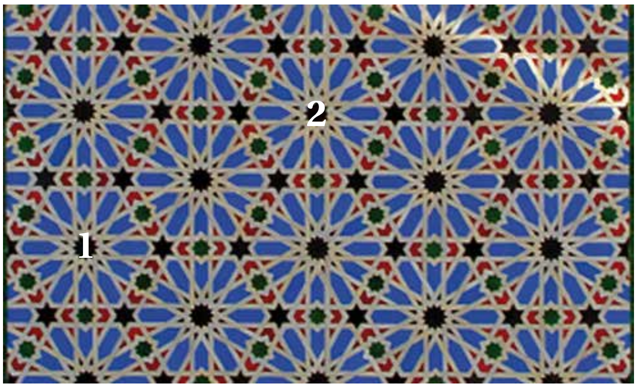
3.1 Even observeren

Op deze bladzijde vind je een collage van een aantal mooie foto's. Bekijk de foto's. Bespreek wat er te zien is. Wat is er zo bijzonder aan?

3.2 Congruentie

1 Congruente figuren



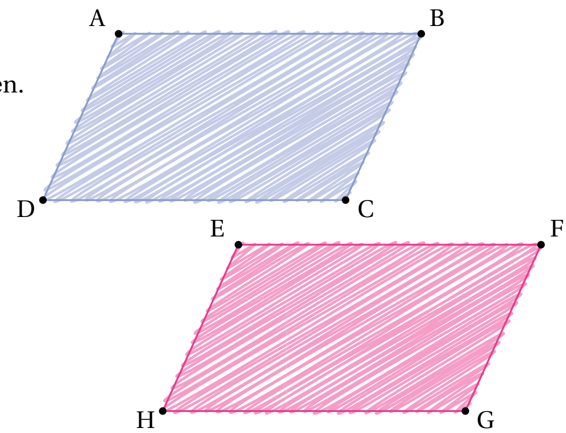
Overal ter wereld kunnen we islamitische patronen bewonderen in gebouwen, tapijten, muurschilderingen …
Rechts zie je een kunstwerk uit Granada. Je herkent er duidelijk een **meetkundig patroon** in.

Op het patroon links wordt er een deeltje uitvergroot. Als we figuur 1 en figuur 2 op elkaar zouden kleven, zouden ze elkaar exact bedekken: dat noemen we **congruente figuren**.

In woorden:
Parallellogram ABCD is congruent met parallellogram EFGH.

Voor … is congruent met … zullen we het symbool ≅ gebruiken.

In symbolen: ▱ ABCD ≅ ▱ EFGH



Terminologie:

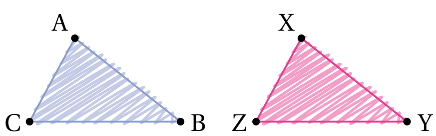
Overeenkomstige zijden: [AB] en [EF]
[BC] en [FG]
[CD] en [GH]
[AD] en [EH]

Overeenkomstige hoeken: $\widehat{A}$ en $\widehat{E}$
$\widehat{B}$ en $\widehat{F}$
$\widehat{C}$ en $\widehat{G}$
$\widehat{D}$ en $\widehat{H}$

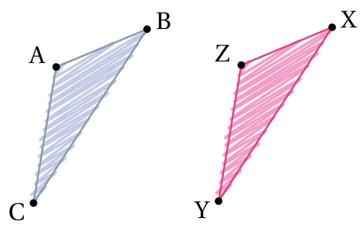
Merk op:
We spreken af dat we bij de notatie in symbolen de overeenkomstige hoekpunten in dezelfde volgorde plaatsen.

Voorbeelden:

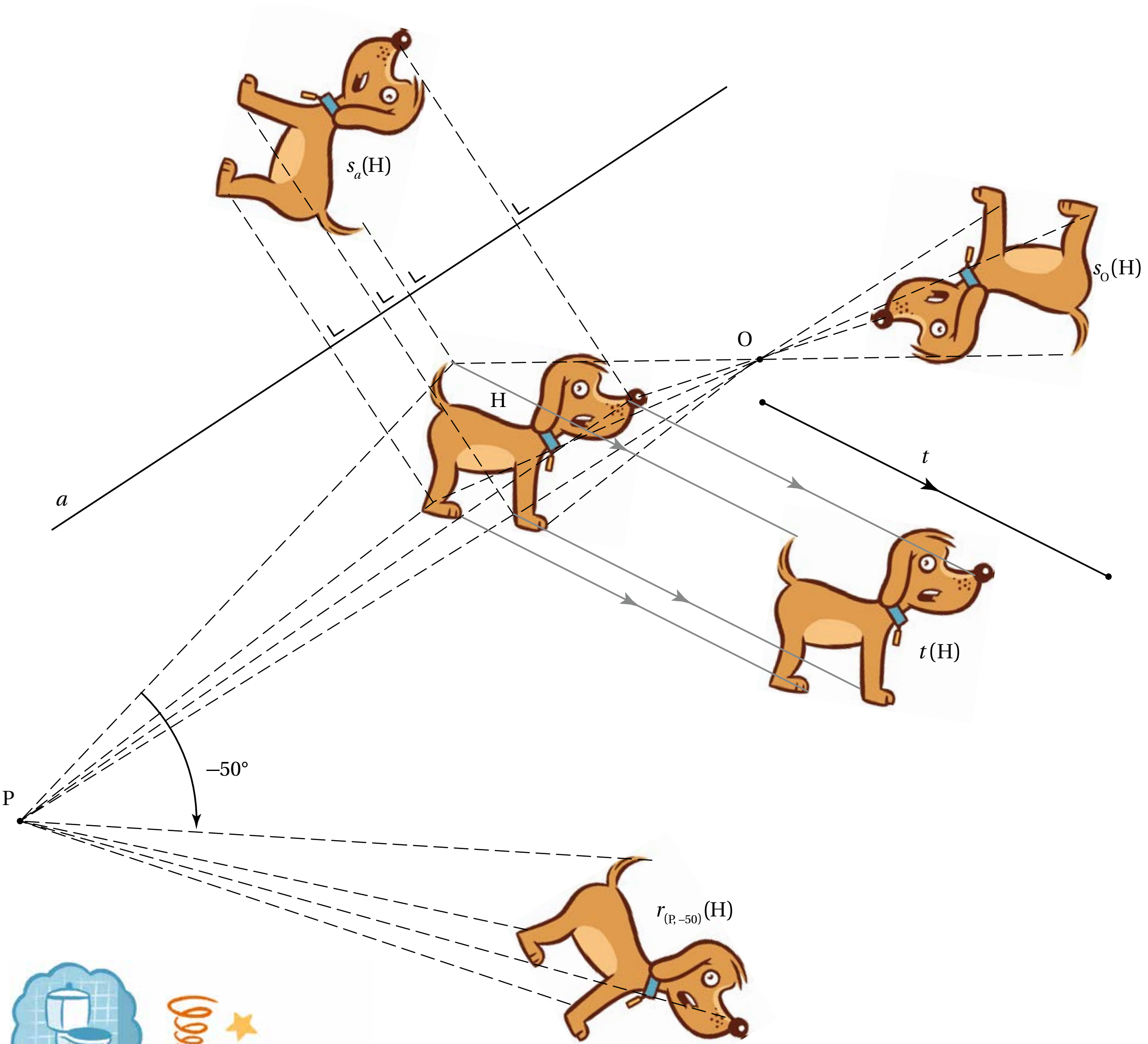
$\Delta ABC \cong \Delta XYZ$



$\Delta ABC \cong \Delta ZXY$



In het eerste hoofdstuk maakte je kennis met een aantal transformaties van het vlak: spiegelingen, translaties en rotaties.
Bij de eigenschappen ontdekten we dat die transformaties de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken bewaren. Bekijk eens onderstaand hondje dat al deze transformaties ondergaat.
Wat kun je zeggen over alle figuren die je ziet?

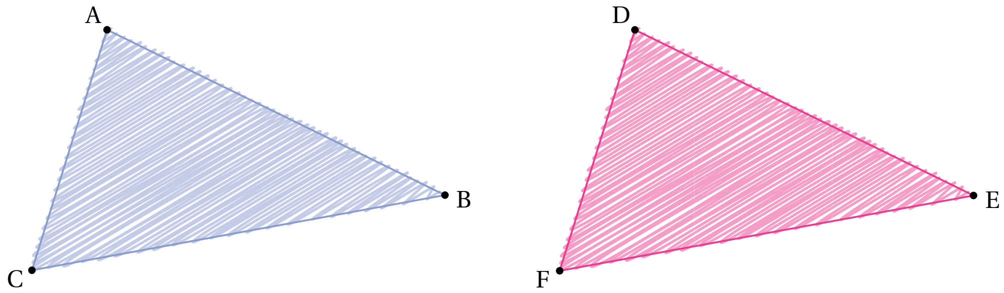


congruente figuren

Congruente figuren zijn figuren die op elkaar afgebeeld kunnen worden door een spiegeling, translatie, rotatie of een combinatie van twee of meer van die transformaties.

2 Congruente driehoeken

Nu we de betekenis kennen van congruente figuren, kunnen we congruente driehoeken van dichterbij bestuderen.



In symbolen:
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Er ontstaan drie paar even lange overeenkomstige zijden. Ook de drie paar overeenkomstige hoeken zijn even groot. Je krijgt dus zes gelijkheden.

congruente driehoeken

in woorden:
Twee driehoeken zijn congruent als en slechts als hun overeenkomstige zijden even lang zijn en hun overeenkomstige hoeken even groot zijn.

in symbolen:

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \iff \begin{cases} |AB| = |DE| \\ |AC| = |DF| \\ |BC| = |EF| \end{cases} \text{ en } \quad \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{D} \\ \widehat{B} = \widehat{E} \\ \widehat{C} = \widehat{F} \end{array}$$

Als twee driehoeken congruent zijn, **dan** gelden er zes gelijkheden.
Volgens de definitie geldt ook het omgekeerde.
Als de zes gelijkheden gelden, **dan** zijn twee driehoeken congruent.
Om aan te tonen dat twee driehoeken congruent zijn, kun je proberen om alle zes gelijkheden aan te tonen.
Of je kunt proberen om een spiegeling, translatie, rotatie of een samenstelling ervan te zoeken die de ene driehoek afbeeldt op de andere.

Dat is allemaal niet zo eenvoudig.
Het zou makkelijker zijn als we een kortere manier zouden vinden om aan te tonen dat twee driehoeken congruent zijn.

3 Congruentiekenmerken van driehoeken

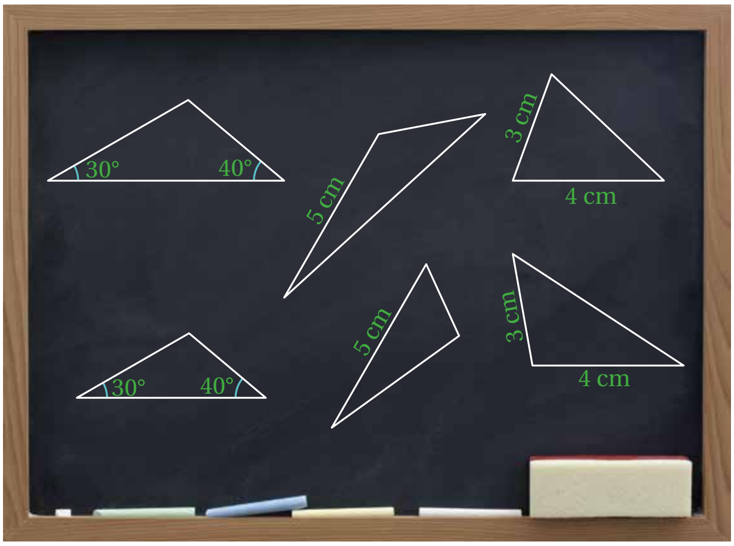
Onderzoek:

a Heb je met één gelijkheid voldoende om aan te tonen dat twee driehoeken congruent zijn?

b Heb je met twee gelijkheden voldoende om aan te tonen dat twee driehoeken congruent zijn?

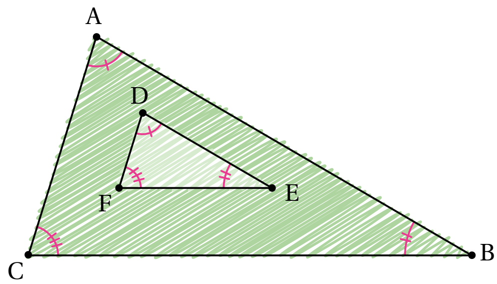
c Heb je met drie gelijkheden voldoende om aan te tonen dat twee driehoeken congruent zijn?

d Lukt het ook met vier, vijf of zes gelijkheden?



Congruentie bij driehoeken kun je bewijzen door slechts drie van de zes gelijkheden aan te tonen. Deze drie goed gekozen gelijkheden vormen een **congruentiekenmerk**.

Niet alle combinaties van drie gelijkheden leiden tot congruente driehoeken.
Stel dat we zeker zijn dat alle overeenkomstige hoeken even groot zijn.
Dan zijn de driehoeken niet noodzakelijk congruent.
Ze hebben dezelfde vorm, maar hebben niet noodzakelijk dezelfde grootte.



Welke combinaties vormen dan wel een congruentiekenmerk?

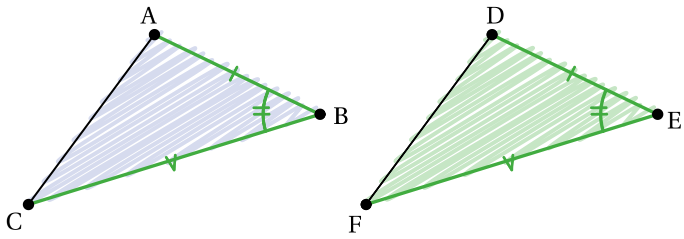
kenmerk 1: ZHZ

Twee driehoeken zijn congruent als en slechts als twee zijden van de eerste driehoek even lang zijn als twee zijden van de tweede driehoek en de ingesloten hoeken even groot zijn.

In symbolen:

$$\left.\begin{array}{l}|AB|=|DE|\\ \widehat{B}=\widehat{E}\\ |BC|=|EF|\end{array}\right\}\iff \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

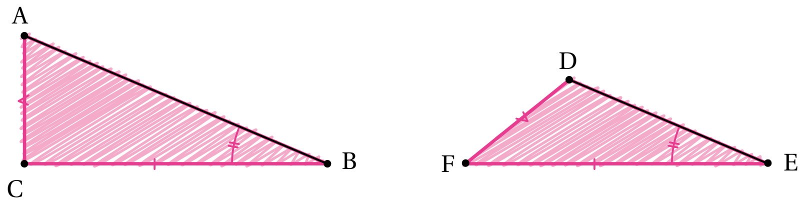
Tekening:



Merk op:

Let goed op dat het de twee ingesloten hoeken zijn die even groot zijn. Een ander paar even grote hoeken levert niet noodzakelijk congruente driehoeken op.

$\widehat{B}$ en $\widehat{E}$ zijn in dit geval niet de ingesloten hoeken van de even lange zijden.



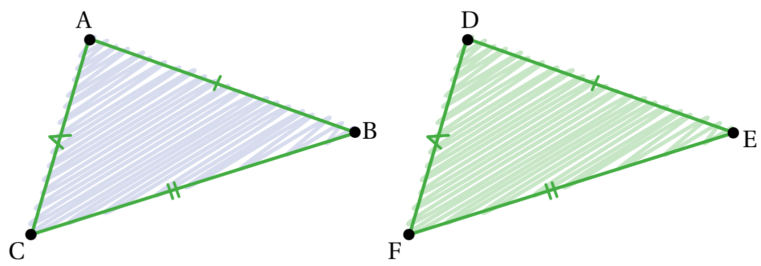
kenmerk 2: ZZZ

Twee driehoeken zijn congruent als en slechts als de drie zijden van de eerste driehoek even lang zijn als de drie zijden van de tweede driehoek.

In symbolen:

$$\left.\begin{array}{l}|AB|=|DE|\\ |BC|=|EF|\\ |AC|=|DF|\end{array}\right\}\iff \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Tekening:



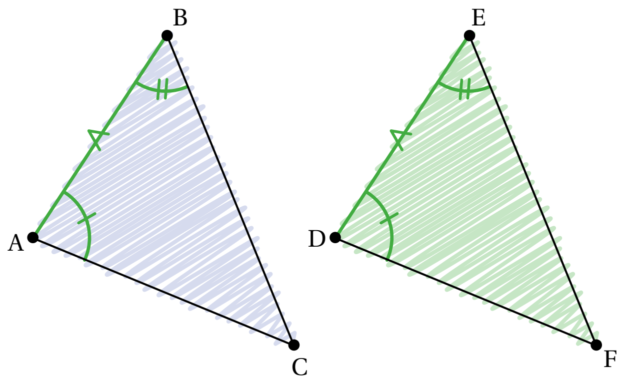
kenmerk 3: HZH

Twee driehoeken zijn congruent als en slechts als één zijde van de eerste driehoek even lang is als één zijde van de tweede driehoek en de twee paar aanliggende hoeken even groot zijn.

In symbolen:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}=\widehat{D}\\ |AB|=|DE|\\ \widehat{B}=\widehat{E}\end{array}\right\} \iff \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Tekening:



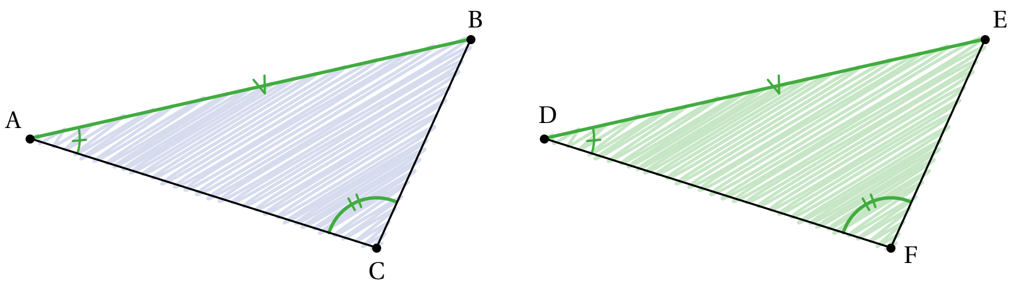
gevolg van kenmerk 3: ZHH

Twee driehoeken zijn congruent als en slechts als één paar zijden van de twee driehoeken even lang is, één paar aanliggende hoeken even groot is en het paar overstaande hoeken even groot is.

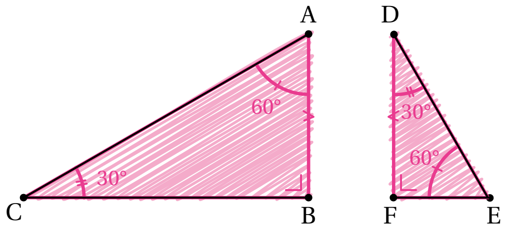
In symbolen:

$$\left.\begin{array}{l}|AB|=|DE|\\ \widehat{A}=\widehat{D}\\ \widehat{C}=\widehat{F}\end{array}\right\} \iff \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Tekening:



Let op:
Bekijk goed de ligging van de even lange zijde en de even grote hoeken.
Ook bij deze twee driehoeken heb je twee paar even grote hoeken en één paar even lange zijden.
De driehoeken zijn echter niet congruent.
Verklaar waarom.



De congruentiekenmerken op de vorige bladzijden gelden voor alle driehoeken.

Heb je twee rechthoekige driehoeken, dan heb je nog één extra kenmerk ter beschikking.

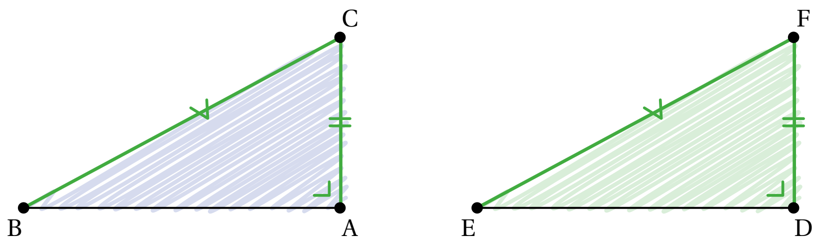
kenmerk 4: ZZ90°

Twee rechthoekige driehoeken zijn congruent als en slechts als de langste zijden van beide driehoeken even lang zijn en één paar rechthoekszijden even lang is.

In symbolen:

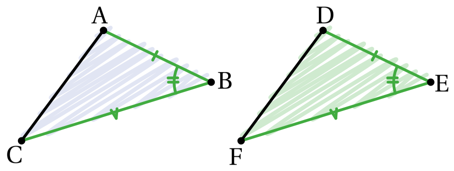
$$\left.\begin{array}{l} |BC| = |EF| \\ |AC| = |DF| \\ \hat{A} = 90° = \hat{D} \end{array}\right\} \iff \Delta ABC \cong \Delta DEF \qquad \text{met } \hat{A} = 90° \text{ en } \hat{D} = 90°$$

Tekening:

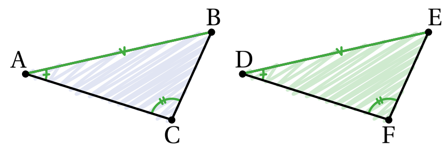


TWEE DRIEHOEKEN ZIJN CONGRUENT ALS EN SLECHTS ALS

twee zijden *van de eerste driehoek even lang zijn als de twee zijden van de tweede driehoek en de* ***ingesloten hoeken*** *even groot zijn.*



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



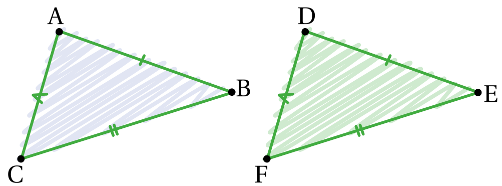
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

TWEE DRIEHOEKEN ZIJN CONGRUENT ALS EN SLECHTS ALS

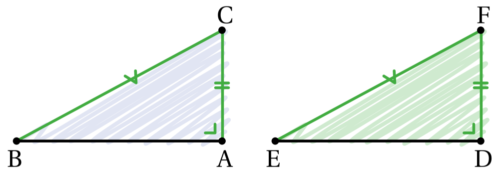
één paar zijden *van de twee driehoeken even lang is,* ***één paar aanliggende hoeken*** *even groot is en het* ***paar overstaande hoeken*** *even groot is.*

TWEE DRIEHOEKEN ZIJN CONGRUENT ALS EN SLECHTS ALS

de ***drie zijden*** *van de eerste driehoek even lang zijn als de drie zijden van de tweede driehoek.*



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



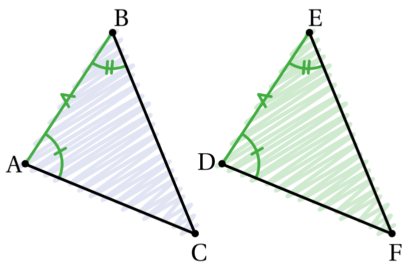
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

TWEE RECHTHOEKIGE DRIEHOEKEN ZIJN CONGRUENT ALS EN SLECHTS ALS

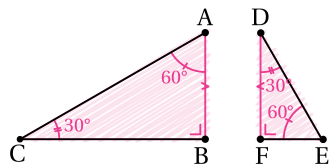
de langste zijden *van de twee driehoeken even lang zijn en één paar rechthoekszijden even lang is.*

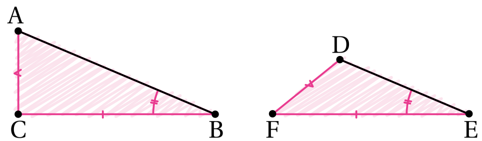
TWEE DRIEHOEKEN ZIJN CONGRUENT ALS EN SLECHTS ALS

één zijde *van de eerste driehoek even lang is als één zijde van de tweede driehoek en de* ***twee paar aanliggende hoeken*** *even groot zijn.*



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$





HHH EN ZZH

zijn geen correcte congruentiekenmerken om congruente driehoeken te bewijzen.

↑ ② dunne stippellijn: KNIP

← ① dikke stippellijn: PLOOI

① dikke stippellijn: PLOOI →

② dunne stippellijn: KNIP ↑

ZHH

ZIJDE - HOEK - HOEK

ZZ90°

ZIJDE - ZIJDE - RECHTE HOEK

ZHZ

ZIJDE - HOEK - ZIJDE

ZZZ

ZIJDE - ZIJDE - ZIJDE

HZH

HOEK - ZIJDE - HOEK

4 Bewijzen met behulp van congruentie

De congruentiekenmerken kunnen we gebruiken om heel wat wiskundige bewijzen op te stellen.
We gebruiken de kenmerken onder andere om aan te tonen dat:

- twee driehoeken congruent zijn;
- twee hoeken even groot zijn;
- twee lijnstukken even lang zijn.

Hoe een bewijs leveren met behulp van een congruentiekenmerk:

STAP 1: Ga op zoek in welke twee driehoeken je werkt. Noteer dit.

STAP 2: Zoek drie gelijkheden waarvan je kunt verklaren waarom ze gelden. Noteer die verklaring erachter. De gelijkheden zijn steeds even lange zijden of even grote hoeken.

STAP 3: Plaats een accolade en noteer een implicatiepijl met hierboven het gebruikte kenmerk. Noteer hierna de congruente driehoeken.

STAP 4: Zodra je weet dat de twee driehoeken congruent zijn, kun je (indien dit gevraagd wordt) afleiden dat de overeenkomstige hoeken even groot zijn of de overeenkomstige zijden even lang zijn.

In de wiskunde willen we graag een redenering overzichtelijk noteren om zo makkelijk te kunnen volgen.

Voordat je een bewijs opstelt, moet je jezelf een aantal vragen stellen. Soms is het nodig de opgave een beetje te bewerken zodat het voor jou een stuk duidelijker wordt.

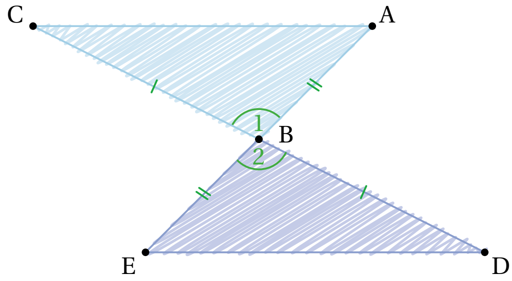
Nog enkele handige tips.

STAP 1 :
- Start steeds het bewijs met **'In Δ… en Δ… geldt:'**.
- Kleur eventueel de twee driehoeken in.
- Als je even lange zijden of even grote hoeken moet bewijzen, zet je datgene wat bewezen moet worden in het rood met een vraagteken op je tekening.
- Duid alle gegevens in het groen aan op je tekening.

STAP 2:
- Noteer na elke gelijkheid waarom de gelijkheid geldt.
- Die verklaring haal je uit je wiskunderugzak waarin je kennis van dit jaar en vorig jaar opgeborgen zit. De verklaring kan:
  - gegeven zijn;
  - afgeleid worden uit het gegeven;
  - een eigenschap zijn die je kent;
  - een definitie zijn die je toepast …
- Als je een gelijkheid niet kunt verklaren, mag je de gelijkheid niet gebruiken.
- Gebruik als verklaring het woord 'gegeven' als het daadwerkelijk in je gegevens staat.

STAP 3:
- Kom je niet aan een congruentiekenmerk? Ga dan op zoek naar een andere gelijkheid in je bewijs.
- Kijk uit naar de notatie van je twee driehoeken. De plaats van elke letter is belangrijk.

Voorbeeld 1:



Gegeven: $|AB| = |BE|$
$|CB| = |BD|$

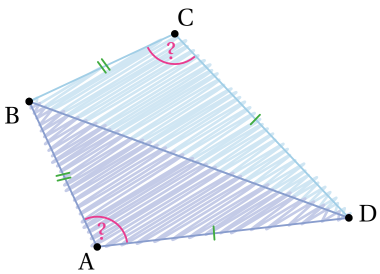
Te bewijzen: $\Delta ABC \cong \Delta EBD$

Bewijs: In ΔABC en ΔEBD geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} |AB| = |BE| & \text{gegeven} \\ \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 & \text{overstaande hoeken} \\ |CB| = |BD| & \text{gegeven} \end{array}\right\} \overset{ZHZ}{\Longrightarrow} \Delta ABC \cong \Delta EBD$$

Voorbeeld 2:

Soms moet je een gelijkheid van lengtes van lijnstukken (of groottes van hoeken) aantonen. Vaak ga je hiervoor op zoek naar congruente driehoeken.



Gegeven: $|AD| = |CD|$
$|AB| = |BC|$

Te bewijzen: $\widehat{A} = \widehat{C}$

Bewijs: In ΔABD en ΔCBD geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} |AB| = |BC| & \text{gegeven} \\ |AD| = |CD| & \text{gegeven} \\ |BD| = |BD| & \text{gemeenschappelijke zijde} \end{array}\right\} \overset{ZZZ}{\Longrightarrow} \Delta ABD \cong \Delta CBD$$

$$\Downarrow \text{ overeenkomstige hoeken}$$

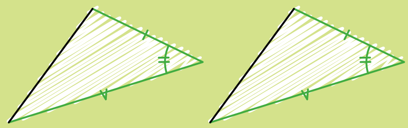
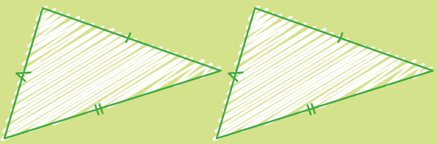
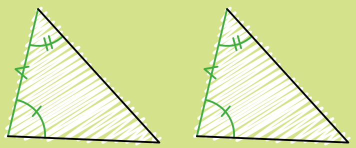
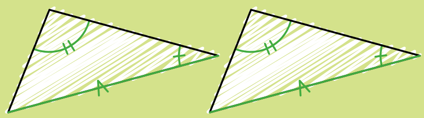
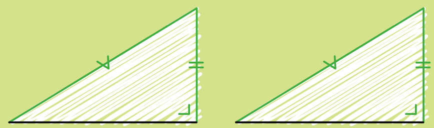
$$\widehat{A} = \widehat{C}$$

5 Samenvatting

- Je kunt congruente figuren herkennen, tekenen en je weet wat overeenkomstige hoekpunten, overeenkomstige hoeken en overeenkomstige zijden zijn.
  Congruente figuren zijn figuren die op elkaar afgebeeld kunnen worden door een spiegeling, translatie, rotatie of een combinatie van twee of meer van die transformaties.

- Je kunt in symbolen noteren dat twee figuren congruent zijn.

- Je kunt de volgende congruentiekenmerken van driehoeken formuleren en illustreren met een tekening.

CONGRUENTIE-KENMERK	EIGENSCHAP	FIGUUR
ZHZ	Twee driehoeken zijn congruent als en slechts als twee zijden van de eerste driehoek even lang zijn als twee zijden van de andere driehoek en de ingesloten hoeken even groot zijn.	
ZZZ	Twee driehoeken zijn congruent als en slechts als de drie zijden van de eerste driehoek even lang zijn als de drie zijden van de andere driehoek.	
HZH	Twee driehoeken zijn congruent als en slechts als één zijde van de eerste driehoek even lang is als één zijde van de andere driehoek en de twee paar aanliggende hoeken even groot zijn.	
ZHH	Twee driehoeken zijn congruent als en slechts als één paar zijden van de twee driehoeken even lang is, één paar aanliggende hoeken even groot is en het paar overstaande hoeken even groot is.	
ZZ90°	Twee rechthoekige driehoeken zijn congruent als en slechts als de langste zijden van beide driehoeken even lang zijn en één paar rechthoekszijden even lang is.	

- Je kunt congruentiekenmerken van driehoeken gebruiken om congruentie van twee driehoeken te bewijzen.

- Je kunt congruentiekenmerken van driehoeken gebruiken om de gelijkheid van lengtes van zijden of groottes van hoeken aan te tonen.

Congruentie

Het voorvoegsel 'con' in een woord duidt meestal op 'samen', samenhangend met wat volgt. Ook in het woord 'congruent' is dat zo. Figuren zijn congruent als zij dezelfde vorm en grootte hebben.
Congruent heeft zijn wortels in het Latijnse woord 'congruens', dat overeenstemmend betekent. Het werkwoord congrueren ('congruere' in het Latijn) betekent: bij elkaar passen, overeenstemmen.

3.3

Verantwoorden van constructies

1 Kenmerk van de middelloodlijn

Vorig jaar leerde je de middelloodlijn tekenen van een lijnstuk.

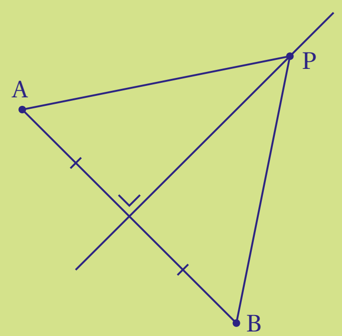
middelloodlijn

De **middelloodlijn van een lijnstuk** is de rechte die het lijnstuk loodrecht snijdt in het midden.

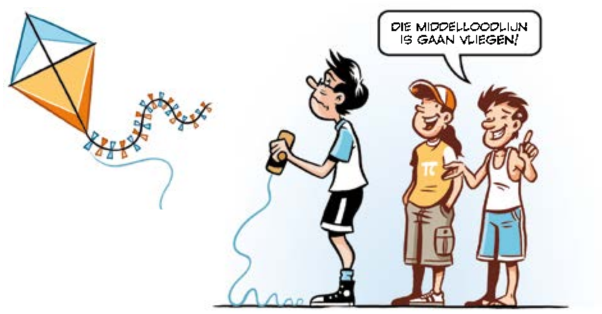
Maar er is meer aan de hand met zo'n middelloodlijn.

Onderzoek 1:

- Teken een lijnstuk [AB] met hierbij de middelloodlijn.
- Kies een punt P op de middelloodlijn.
- Bepaal de afstand van het punt P tot de grenspunten: |AP| = … |BP| = …
- Wat stel je vast?
- Kies een ander punt Q op de middelloodlijn.
- Bepaal de afstand van het punt Q tot de grenspunten: |AQ| = … |BQ| = …
- Wat stel je vast? Vergelijk dit met het resultaat van je medeleerlingen.
- Formuleer een besluit van jouw onderzoek.

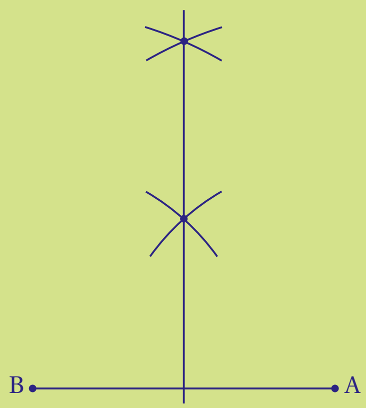


Elk punt ligt even ver van de grenspunten van het lijnstuk.



Onderzoek 2:

- Teken een lijnstuk [AB] van 4 cm.
- Bepaal alle punten die op 5 cm liggen van A.
- Bepaal alle punten die op 5 cm liggen van B.
- Bepaal alle punten die op 5 cm liggen van A en B.
- Bepaal alle punten die op 3 cm liggen van A en B.
- Wat stel je vast? Vergelijk dit met het resultaat van je medeleerlingen.
- Formuleer een besluit van jouw onderzoek.



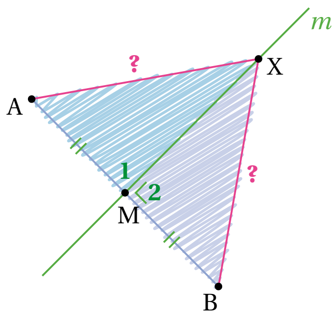
De punten die op eenzelfde afstand liggen van A en B liggen ook op de middelloodlijn van [AB].

Uit die onderzoeken halen we twee eigenschappen in verband met de middelloodlijn van een lijnstuk.

eigenschap middelloodlijn

Als een punt op de middelloodlijn van een lijnstuk ligt, **dan** ligt het op gelijke afstanden van de grenspunten van dat lijnstuk.

Bewijs:



Gegeven: [AB]
m is de middelloodlijn van [AB]
X ligt op de middelloodlijn van [AB]

Te bewijzen: $|XA| = |XB|$

Bewijs: *Hulpconstructie: je verbindt X met A en met B.*
Je krijgt twee driehoeken.

In ΔAXM en ΔBXM geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} |AM| = |MB| & \text{M is het midden van [AB]} \\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 & \text{definitie middelloodlijn} \\ |XM| = |XM| & \text{gemeenschappelijke zijde} \end{array}\right\} \overset{ZHZ}{\Longrightarrow} \Delta AXM \cong \Delta BXM$$

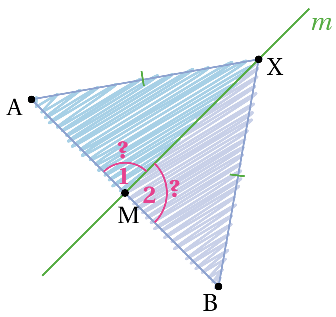
$$\Downarrow \text{ overeenkomstige zijden}$$

$$|XA| = |XB|$$

omgekeerde eigenschap

Als een punt op gelijke afstanden ligt van de twee grenspunten van een lijnstuk, **dan** ligt het op de middelloodlijn van dat lijnstuk.

Bewijs:



Gegeven: [AB]
$|XA| = |XB|$

Te bewijzen: X ligt op de middelloodlijn van [AB]

Bewijs: *Hulpconstructie: je verbindt het punt X met het midden van [AB].*
Als je nu nog kunt aantonen dat XM loodrecht staat op [AB], dan is de rechte XM de middelloodlijn van [AB].

In ΔAXM en ΔBXM geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} |XA| = |XB| & \text{gegeven} \\ |AM| = |MB| & \text{M is het midden van [AB]} \\ |XM| = |XM| & \text{gemeenschappelijke zijde} \end{array}\right\} \overset{ZZZ}{\Longrightarrow} \Delta AXM \cong \Delta BXM$$

$$\Downarrow \text{ overeenkomstige hoeken}$$

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$$

$$\Downarrow \ \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ$$

$$\widehat{M}_1 = 90^\circ = \widehat{M}_2$$

Als een eigenschap en de omgekeerde eigenschap bewezen kunnen worden, dan spreken we van een criterium of een kenmerk. De twee vorige eigenschappen leveren het **kenmerk van de middelloodlijn** op.

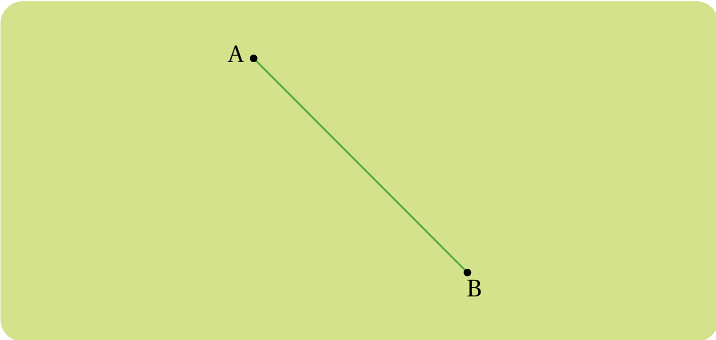
kenmerk middelloodlijn

Een punt ligt op de middelloodlijn van een lijnstuk als en slechts als het punt even ver ligt van de grenspunten van dat lijnstuk.

2 Constructie van de middelloodlijn

Steunend op het kenmerk van de middelloodlijn kunnen we de middelloodlijn van een lijnstuk construeren.

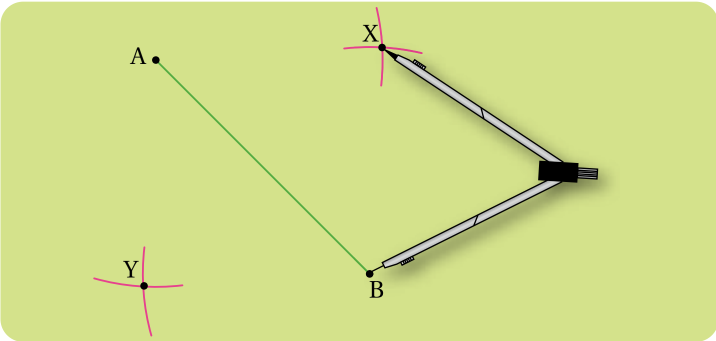
Gegeven is een lijnstuk [AB].



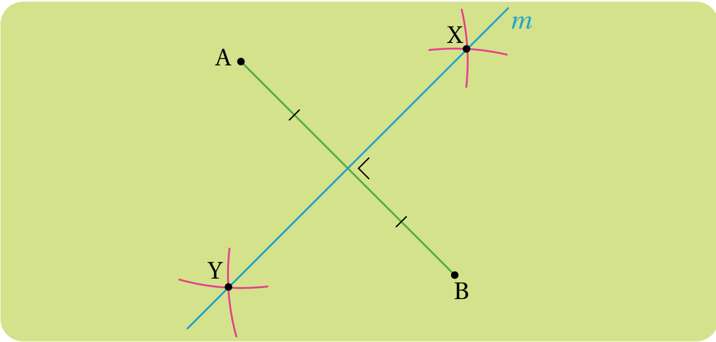
Plaats je passerpunt in A en teken twee boogjes. De boogjes moeten groter zijn dan de helft van de lengte van [AB].

Plaats de passerpunt in B en teken met dezelfde passeropening twee boogjes.

Noem de snijpunten X en Y.



XY is de middelloodlijn van [AB].



Verklaring voor de constructie:

We hebben dezelfde passeropening gebruikt, dus:

$$|AX| = |AY| = |BX| = |BY|$$

$$\Downarrow$$

$$|XA| = |XB| \quad = \quad |YA| = |YB|$$

$$\Downarrow$$

X ligt op de middelloodlijn van [AB] en Y ligt op de middelloodlijn van [AB]

$$\Downarrow$$

XY is de middelloodlijn van [AB]

3 Kenmerk van de bissectrice

Vorig jaar leerde je een bissectrice tekenen van een hoek of van een paar snijdende rechten.

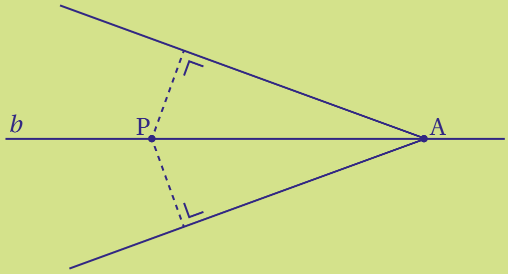
bissectrice

De **bissectrice van een hoek** is de rechte die de hoek in twee even grote hoeken verdeelt.

Maar ook met de punten op de bissectrice van een hoek is er meer aan de hand.

Onderzoek 1:

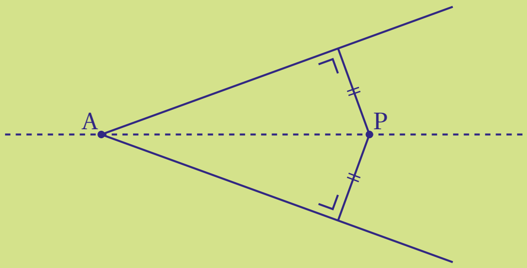
- Teken een hoek $\widehat{A}$ en teken de bissectrice.
- Kies een punt P op de bissectrice.
- Bepaal de afstand van het punt P tot de benen van hoek $\widehat{A}$.
- Wat stel je vast? Vergelijk dit met het resultaat van je medeleerlingen.
- Formuleer een besluit van jouw onderzoek.



Elk punt ligt even ver van de grenspunten van het lijnstuk.

Onderzoek 2:

- Teken een hoek $\widehat{A}$.
- Bepaal een punt P dat op gelijke afstand ligt van beide benen van $\widehat{A}$.
- Teken de rechte door het hoekpunt A en P.
- Wat stel je vast? Vergelijk dit met het resultaat van je medeleerlingen.
- Formuleer een besluit van jouw onderzoek.



Als een punt op gelijke afstanden ligt van de twee benen van een hoek, dan ligt het op de bissectrice van die hoek.

Bissectrice

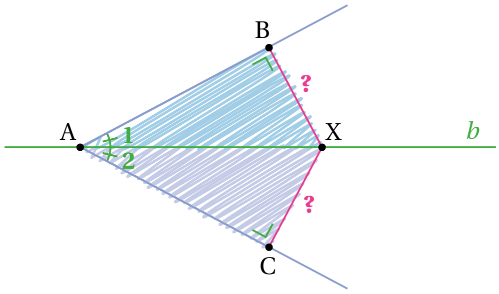
Het woord bissectrice is afkomstig van de Latijnse woorden bis (tweemaal) en sectrix of secara (wat snijdster of snijden betekent). Als we de halfrechten die een hoek bepalen, verlengen tot een rechte, dan verkrijg je in totaal vier hoeken met twee bissectrices, die loodrecht op elkaar staan. De oorspronkelijke bissectrice noemen we dan de binnenbissectrice. Enig idee wat de naam zal zijn voor de andere?

Uit die onderzoeken halen we twee eigenschappen in verband met de bissectrice van een hoek.

eigenschap bissectrice

Als een punt op de bissectrice van een hoek ligt, **dan** ligt het op gelijke afstanden van de benen van de hoek.

Bewijs:



Gegeven: $\widehat{A}$
b is bissectrice van $\widehat{A}$
X ligt op b
$XB \perp AB$ en $XC \perp AC$

Te bewijzen: $|XB| = |XC|$

Bewijs: In ΔABX en ΔACX geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 & \text{definitie bissectrice} \\ |AX| = |AX| & \text{gemeenschappelijke zijden} \\ \widehat{B} = \widehat{C} & = 90°\text{, gegeven} \end{array}\right\} \overset{\text{ZHH}}{\Longrightarrow} \Delta ABX \cong \Delta ACX$$

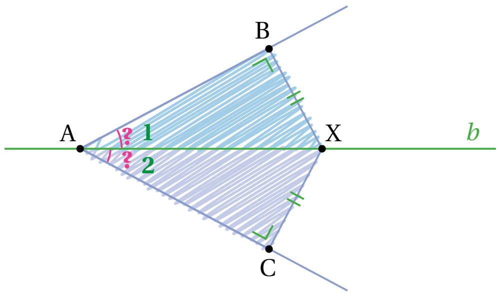
$$\Downarrow \text{ overeenkomstige zijden}$$

$$|XB| = |XC|$$

omgekeerde eigenschap

Als een punt op gelijke afstanden ligt van de twee benen van een hoek, **dan** ligt het op de bissectrice van de hoek.

Bewijs:



Gegeven: $\widehat{A}$
$XB \perp AB$ en $XC \perp AC$
$|XB| = |XC|$

Te bewijzen: X ligt op de bissectrice van $\widehat{A}$, of: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

Bewijs: In ΔABX en ΔACX geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} |AX| = |AX| & \text{gemeenschappelijke zijde} \\ |XB| = |XC| & \text{gegeven} \\ \widehat{B} = \widehat{C} & = 90°\text{, gegeven} \end{array}\right\} \overset{\text{ZZ90°}}{\Longrightarrow} \Delta ABX \cong \Delta ACX$$

$$\Downarrow \text{ overeenkomstige hoeken}$$

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$$

De twee vorige eigenschappen leveren het **kenmerk van de bissectrice** op.

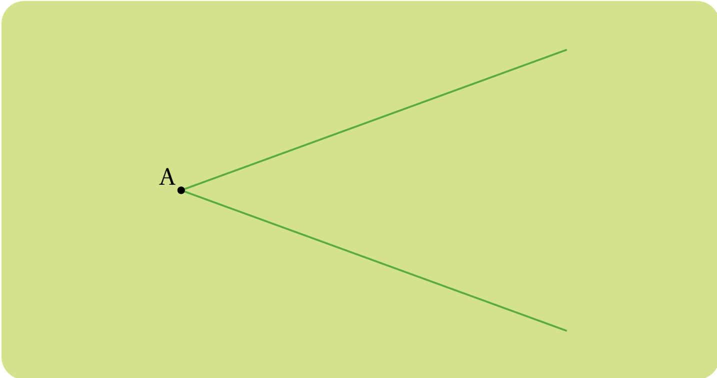
kenmerk van de bissectrice

Een punt ligt op de bissectrice van een hoek als en slechts als het punt op gelijke afstand van beide benen van die hoek ligt.

4 Constructie van de bissectrice

Steunend op het kenmerk van de bissectrice kunnen we de bissectrice van een hoek construeren.

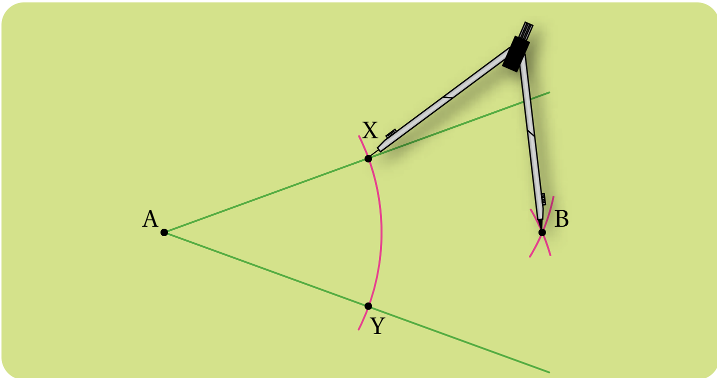
Gegeven is een hoek $\hat{A}$.



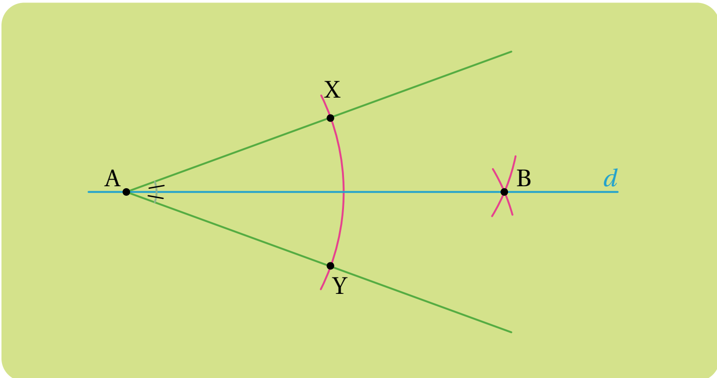
Plaats je passerpunt in $\hat{A}$ en trek met een willekeurige passeropening een cirkelboog die de benen van $\hat{A}$ snijdt in X en Y.

Zet je passerpunt in X en trek een boog. De straal van deze boog moet groter zijn dan de helft van $|XY|$.

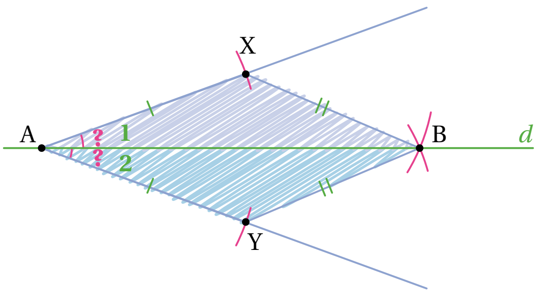
Zet je passerpunt in Y en trek met dezelfde passeropening een boog die de vorige snijdt in B.



AB is de bissectrice van hoek $\hat{A}$.



Verklaring voor de constructie:



In ΔAXB en ΔAYB geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} |AX| = |AY| & \text{zelfde passeropening} \\ |BX| = |BY| & \text{zelfde passeropening} \\ |AB| = |AB| & \text{gemeenschappelijke zijde} \end{array}\right\} \overset{ZZZ}{\Longrightarrow} \Delta AXB \cong \Delta AYB$$

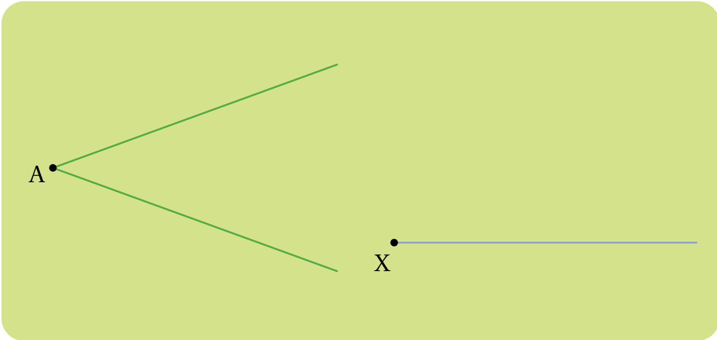
$$\Downarrow \text{ overeenkomstige hoeken}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

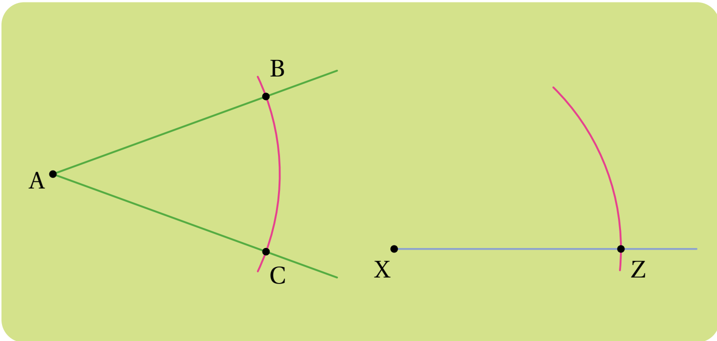
5 Constructie van even grote hoeken

Gegeven is een hoek $\widehat{A}$.

Teken een halfrechte met X als grenspunt.
Dat is het eerste been van de hoek $\widehat{X}$.

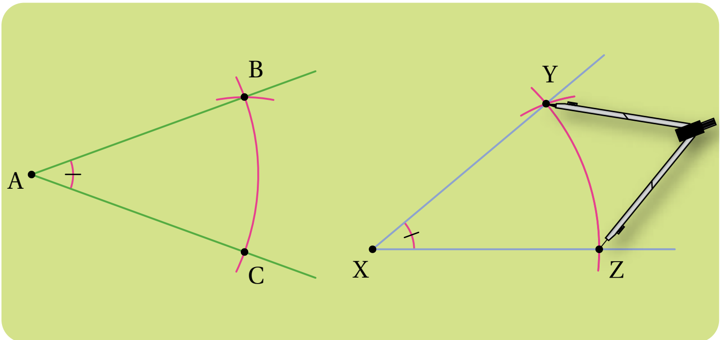


Teken in beide hoekpunten een cirkelboog met dezelfde straal.
Geef de snijpunten in de gegeven hoek $\widehat{A}$ als namen B en C en in de hoek $\widehat{X}$ noem je het snijpunt Z.

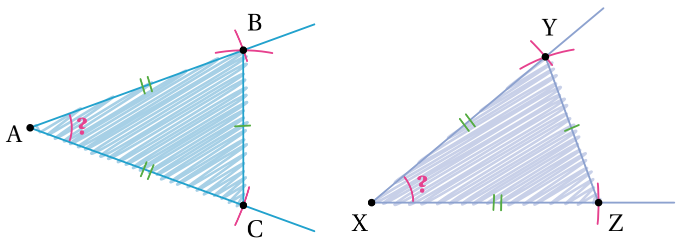


Pas de afstand |BC| af en plaats je passerpunt in Z.
Teken een boogje.
Het snijpunt met de andere boog noemen we Y.

Verbind X en Y.
De hoeken zijn even groot.
$\widehat{A} = \widehat{X}$



Verklaring voor de constructie:



In ΔABC en ΔXYZ geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} |AB| = |XY| & \text{zelfde passeropening} \\ |BC| = |YZ| & \text{zelfde passeropening} \\ |AC| = |XZ| & \text{zelfde passeropening} \end{array}\right\} \overset{ZZZ}{\Longrightarrow} \Delta ABC \cong \Delta XYZ$$

$$\Downarrow \text{ overeenkomstige hoeken}$$

$$\widehat{A} = \widehat{X}$$

6 Samenvatting

- Je kent de definitie van de middelloodlijn van een lijnstuk.
  De middelloodlijn van een lijnstuk is de rechte die het lijnstuk loodrecht snijdt in het midden.
- Je kunt de eigenschap van de middelloodlijn verwoorden en bewijzen.
  Als een punt op de middelloodlijn van een lijnstuk ligt, dan ligt het op gelijke afstanden van de grenspunten van dat lijnstuk.
- Je kunt de omgekeerde eigenschap van de middelloodlijn van een lijnstuk bewijzen.
  Als een punt op gelijke afstand ligt van de twee grenspunten van een lijnstuk, dan ligt het op de middelloodlijn van dat lijnstuk.
- Je kent het kenmerk van de middelloodlijn.
  Een punt ligt op de middelloodlijn van een lijnstuk als en slechts als het punt even ver ligt van de grenspunten van dat lijnstuk.
- Je kunt de middelloodlijn van een lijnstuk construeren.
- Je kunt de constructie van de middelloodlijn van een lijnstuk verklaren met behulp van een congruentiekenmerk.
- Je kent de definitie van een bissectrice van een hoek.
  De bissectrice van een hoek is de rechte die de hoek in twee even grote hoeken verdeelt.
- Je kunt de eigenschap van de bissectrice verwoorden en bewijzen.
  Als een punt op de bissectrice van een hoek ligt, dan ligt het op gelijke afstanden van de benen van de hoek.
- Je kunt de omgekeerde eigenschap van de bissectrice van een hoek bewijzen.
  Als een punt op gelijke afstanden ligt van de twee benen van een hoek, dan ligt het op de bissectrice van de hoek.
- Je kent het kenmerk van de bissectrice.
  Een punt ligt op de bissectrice van een hoek als en slechts als het punt op gelijke afstand van beide benen van die hoek ligt.
- Je kunt de bissectrice van een hoek (of van twee snijdende rechten) construeren.
  Je kunt de constructie verklaren met behulp van een congruentiekenmerk.
- Je kunt even grote hoeken construeren.
  Je kunt de constructie verklaren met behulp van een congruentiekenmerk.