1.1 Ons talstelsel

1 Ons tiendelig stelsel

In de basisschool hebben we geleerd om vlot te rekenen met getallen. Zowel het hoofdrekenen als het cijferrekenen kwam veelvuldig aan bod.

HOOFDREKENEN	CIJFERREKENEN
$8 \cdot 9 = 72$ $27 + 43 = 20 + 40 + 7 + 3 = 60 + 10 = 70$ $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ $3 \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{7}$	$\begin{array}{r} 398 \\ +\quad 743 \\ \hline 1141 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} 27{,}45 \\ -\quad 6{,}89 \\ \hline 20{,}56 \end{array}$

maalteken:
8×9 noteren we
vanaf nu als $8 \cdot 9$

Om onze getallen te vormen maken we gebruik van de **cijfers** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9.
Zo bestaat het getal 12,43 uit vier cijfers.

Deze cijfers worden **Arabische cijfers** genoemd omdat het de Arabieren waren die ons talstelsel bekendgemaakt hebben.

Omdat we gebruikmaken van tien symbolen in ons talstelsel noemen we het een **tiendelig talstelsel**.
Het wordt ook een **positiestelsel** genoemd, omdat de plaats van de cijfers in het getal zeer belangrijk is.

tientallen
123
eenheden
honderdtallen

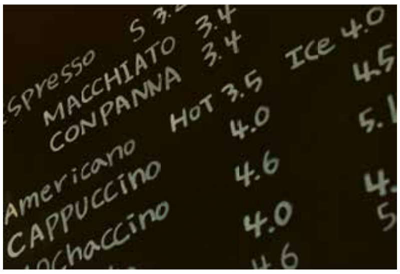
H	T	E
honderdtallen	tientallen	eenheden
1	2	3

Tien **eenheden** vormen een **tiental**. 10 E = 1 T
Tien tientallen vormen een **honderdtal**. 10 T = 1 H
Tien honderdtallen vormen een **duizendtal**. 10 H = 1 D
Tien duizendtallen vormen een **tienduizendtal**. 10 D = 1 TD

Samengevat:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1\text{ TD} & = & 10\text{ D} & = & 100\text{ H} & = & 1000\text{ T} & = & 10\,000\text{ E} \\ & & 1\text{ D} & = & 10\text{ H} & = & 100\text{ T} & = & 1000\text{ E} \\ & & & & 1\text{ H} & = & 10\text{ T} & = & 100\text{ E} \\ & & & & & & 1\text{ T} & = & 10\text{ E} \end{array}$$

In het dagelijkse leven gebruiken we ook veel kommagetallen.



Hoe verder *naar links* een cijfer in een getal staat, hoe groter de waarde van het cijfer wordt.

0,05	5 honderdsten
0,5	5 tienden
5	5 eenheden
50	5 tientallen
500	5 honderdtallen
5000	5 duizendtallen

Hoe verder *naar rechts* een cijfer in een getal staat, hoe kleiner de waarde van het cijfer wordt.

5000	5 duizendtallen
500	5 honderdtallen
50	5 tientallen
5	5 eenheden
0,5	5 tienden
0,05	5 honderdsten

Er geldt ook:

Tien **tienden** vormen een eenheid. 10 t = 1 E

Tien **honderdsten** vormen een tiende. 10 h = 1 t

Tien **duizendsten** vormen een honderdste. 10 d = 1 h

Tien **tienduizendsten** vormen een duizendste. 10 td = 1 d

In onderstaande tabel wordt het cijfer 5 een aantal keren genoteerd. Bespreek telkens de betekenis van het cijfer 5.

het getal	D	H	T	E		t	h	d
425,38		4	2	5	,	3	8	
22,045			2	2	,	0	4	5
5138,006	5	1	3	8	,	0	0	6
0,534				0	,	5	3	4
83,25			8	3	,	2	5	
454,321		4	5	4	,	3	2	1
502,4		5	0	2	,	4		

2 Grote getallen

Sommige getallen zijn wel heel groot.

– Ons melkwegstelsel telt zo'n **400 000 000 000** sterren.
– De snelheid van het licht bedraagt **299 792 458** meter per seconde.
– Licht verplaatst zich aan een snelheid van **1 079 251 200** km/h.
– Toen Pinterest op de beurs kwam, was het bedrijf meteen **12 600 000 000** dollar waard.
– Als je op een lottoformulier 6 van de 45 getallen aankruist, dan heb je één kans op **8 145 060** op de winnende combinatie.
– Volgens wetenschappers is de aarde zo'n **4 560 000 000** jaar geleden ontstaan.

Aan sommige grote getallen geven we speciale namen:

Hoe noemen we het getal?	Hoe schrijven we het getal?	
1 **miljoen**	1 000 000	Deze naam komt van 'mille' maal 'mille', of 1000 × 1000.
1 **miljard**	1 000 000 000	
1 **biljoen**	1 000 000 000 000	Het voorvoegsel 'bi' duidt op 2: miljoen × miljoen.
1 **biljard**	1 000 000 000 000 000	
1 **triljoen**	1 000 000 000 000 000 000	Het voorvoegsel 'tri' duidt op 3: miljoen × miljoen × miljoen.
1 **googol**	1 000 … 000 100 nullen	

Opgelet! Niet iedereen volgt deze indeling.
In Amerika bestaat een biljoen uit 1000 miljoenen,
een triljoen uit 1000 biljoenen, enz.

Googol

Een googol werd zo genoemd door de Amerikaanse wiskundige Edward Kasner, die in 1920 aan zijn negenjarig neefje Milton een naam vroeg voor een getal met honderd nullen. De neef koos voor 'googol'. Hij vond zelfs een naam voor een 1, gevolgd door één googol nullen. Dit noemde hij een 'googolplex'. Dit getal is zo groot dat je het nauwelijks gebruikt. Het heelal is zelfs te klein om er een googolplex zandkorreltjes in op te bergen!

De oprichter van de internetzoekmachine Google was een fan van wiskunde. In zijn zoektocht naar een naam kwam hij al vlug bij 'googol': alle info ter wereld voor iedereen bereikbaar maken.
Uiteindelijk maakte medeoprichtster Sean Anderson een spelfout toen ze het merk registreerde.

3 Oorsprong van onze getallen

Cijfers en namen voor getallen hebben niet altijd bestaan. Maar toch kon de mens al lang tellen voor hij cijfers bedacht. We overlopen enkele bekende talstelsels.

vanaf 3100 voor Christus

a De Egyptenaren

De schrijfwijze bij de Egyptenaren is eenvoudig.
Ze gebruikten hiërogliefen.

1 =			
10 =		10 000 =	
100 =		100 000 =	
1000 =		1 000 000 =	

Het systeem had als basis 10 en had geen symbool voor 0. Om een getal te lezen, maak je gewoon de som van de tekens. Daarom is dit een voorbeeld van een **additief stelsel**: je krijgt het getal door de waarde van alle symbolen op te tellen. De plaats van het symbool is dus van geen belang.

Voorbeelden:

= 234

= 32 348

van 200 tot 900 na Christus

b De Maya's

De Maya's leefden in Yucatan, in Midden-Amerika. Ze waren hoofdzakelijk maïskwekers en hun beschaving stond op een uitzonderlijk hoog peil. Hun talstelsel had als basis 20, wellicht omdat een mens in totaal 20 vingers en tenen heeft. Overblijfselen van dit systeem vinden we terug in de Franse taal. Zo heeft het Franse woord voor 20 (vingt) helemaal niets te maken met 2 (deux), terwijl dat wel zo was voor 3 en 30 (trois, trente), 4 en 40 enz.

0 =	3 =	6 =	9 =	12 =
1 =	4 =	7 =	10 =	13 =
2 =	5 =	8 =	11 =	14 =

De Maya's hadden (wat merkwaardig was) een symbool voor nul. Ze schreven ook alles onder elkaar. Het onderste symbool geeft de eenheden aan, daarboven staan de twintigtallen gevolgd door de 360-tallen. Niet echt logisch, je zou hier 400 verwachten, maar de Maya's dachten dat één jaar bestond uit 360 'positieve' dagen.

Voorbeelden:

$$\left.\begin{array}{c} 8 \times 360 \\ 6 \times 20 \\ 0 \end{array}\right\} 3000 \qquad \left.\begin{array}{c} 16 \times 360 \\ 2 \times 20 \\ 13 \end{array}\right\} 5813 \qquad \left.\begin{array}{c} 1 \times 20 \\ 1 \end{array}\right\} 21$$

c De Grieken

Bij dit Attische systeem werden de getallen met volgende herodiaanse cijfers (genoemd naar de Griekse geschiedenisschrijver Herodianus) voorgesteld:

1 = Ι	50 = 𐅄	1000 = Χ
5 = Π	100 = Η	5000 = 𐅆
10 = Δ	500 = 𐅅	10 000 = Μ

Voorbeelden:

ΧΧΗΗΗΔΔΔΠΙ = 2336

𐅄Δ = 60

Ook dit systeem is geen positiestelsel.
Later werden de letters van het Griekse alfabet gebruikt om de cijfers voor te stellen:

1 = α (alfa)	20 = κ (kappa)
2 = β (bèta)	100 = ρ (rho)
3 = γ (gamma)	200 = ζ (zèta)

d De Romeinen

Deze symbolen zul je misschien wel kennen:

1 = I	50 = L	1000 = M
5 = V	100 = C	5000 = $\overline{\text{V}}$
10 = X	500 = D	5 000 000 = $\overline{\overline{\text{V}}}$

Staat er voor een symbool een symbool met een kleinere waarde, dan moet je die kleinere waarde van de andere aftrekken.

vanaf 200 voor Christus

Een streepje boven het symbool betekent dat je met 1000 moet vermenigvuldigen. Een dubbele streep erboven betekent maal een miljoen enzovoort.
Een groot nadeel aan de Romeinse cijfers was dat ze erg onhandig waren om mee te rekenen. Probeer maar eens CCLXVII te vermenigvuldigen met DCCXXXIII zonder de getallen eerst om te zetten naar ons talstelsel.
Ze gebruikten daarom voor hun rekenwerk een telraam (abacus), dat bestond uit staafjes met kralen erop.
In oosterse landen wordt dit nu nog steeds gebruikt en zijn er mensen die er sneller mee kunnen rekenen dan met een rekenmachine!

Voorbeelden:

LXIV = 64	$\overline{\text{V}}$MMDXXIX = 7529
CXXXVI = 136	$\overline{\text{XII}}$ = 12 000

Romeinse cijfers

De herkomst van C en M in het Romeins talstelsel ligt bij de eerste letters van de woorden 'centum' (100) en 'mille' (1000). Bij de andere symbolen is dat helemaal niet zo zeker. Waarschijnlijk zijn ze overblijfselen van het gebruik van de kerfstok bij herders.

e ‘Onze’ cijfers

Met veel goede wil kun je onze cijfers herkennen in het Indië van de 5e eeuw. Vandaar kwamen ze naar Arabië, waar zich twee types gingen ontwikkelen: de Oost-Arabische en de West-Arabische. Bij ons worden de West-Arabische cijfers gebruikt. De cijfers waren er al vanaf de 10e eeuw, maar zouden pas 700 jaar later de Romeinse cijfers verdringen. Ondanks het feit dat de Indiase wiskundige Brahmagupta (ब्रह्मगुप्त) al een symbool had voor nul, is het cijfer 0 er maar helemaal op het laatst bijgekomen.

Indisch:	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Oost-Arabisch:	١	٢	٣	۴	۵	۶	٧	٨	٩
West-Arabisch:	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

Onze cijfers stammen af van de West-Arabische cijfers. Vooral het gebruik van de boekdrukkunst heeft die Indisch-Arabische cijfers aan populariteit doen winnen. Dankzij deze cijfers brak de renaissance aan: het tijdperk van de vernieuwing.

f Simon Stevin

Deze Vlaamse natuurkundige, wiskundige en ingenieur was raadsman van prins Maurits van Oranje, voor wie hij in 1601 een zeilwagen ontwierp. Hij voerde het tiendelige stelsel in, stelde intresttabellen op en verbeterde de werking van sluizen en molens.
Ook voor de wiskundige woordenschat was Simon belangrijk. Hij vond woorden uit zoals wiskunde, driehoek, delen, omtrek, middellijn en wortel. Deze woorden hebben het echter niet gehaald: *brantse* (voor parabool), *uytbreng* (voor product) en *teerlincxwortel* (voor derdemachtswortel). Je vindt zijn standbeeld op het Simon Stevinplein in Brugge.
Zijn belangrijkste werk was *De Thiende* (1586), waarin hij decimale breuken invoerde. Dat zijn breuken met als noemer een macht van 10. Stevin gebruikte nog niet de notatie met een decimaal punt of komma, maar een notatie waar achter elk cijfer een macht van 10 kwam te staan. Wat wij nu als 4,58 schrijven, schreef hij als 4(0)5(1)8(2).

4 Het binair of tweetallig talstelsel

Je werkt waarschijnlijk af en toe met een rekenmachine of een computer. Die denken in nog een ander talstelsel, met heel veel bits en bytes. Ze maken gebruik van het **binair stelsel** of het **tweetallig stelsel**. Enkel de cijfers 0 en 1 mogen meespelen. Elk cijfertje is één bit.

Stel je even voor dat je alle getallen moet opbouwen door enkel de cijfers 0 en 1 te gebruiken. Een binair getal is dus opgebouwd uit alleen maar nullen en enen. Hoe het opgebouwd is, merk je in de tabel hiernaast. Probeer je te achterhalen wanneer er bij een binair getal een cijfer bijkomt?

TIENDELIG	BINAIR
0	0
1	1
2	1 0
3	1 1
4	1 0 0
5	1 0 1
6	1 1 0
7	1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0
13	1 1 0 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1
16	1 0 0 0 0
17	1 0 0 0 1
18	1 0 0 1 0
19	1 0 0 1 1
20	1 0 1 0 0
32	1 0 0 0 0 0
64	1 0 0 0 0 0 0

a Hoe een getal omzetten van tientallig naar binair?

1. Plaats het getal rechts en deel altijd door 2. Het quotiënt schrijf je links van dit getal.
2. De rest (die altijd 1 of 0 is) schrijf je onder het getal dat je deelt.
3. Doe dit telkens opnieuw tot je als quotiënt 1 krijgt. Een laatste keer delen door 2 geeft als resultaat nul en (voor de laatste keer) noteer je een rest één.
4. Het binair getal lees je in de 'restrij' van links naar rechts.

Voorbeeld:

Zet het getal 172 om naar het binair stelsel.

: 2   : 2   : 2

0	1	2	5	10	21	43	86	172
	1	0	1	0	1	1	0	rest 0

$172_{10} = 10101100_2$

b Hoe een getal omzetten van binair naar tientallig?

1. Plaats de cijfers van het binair getal van rechts naar links onder elkaar.
2. Vermenigvuldig het eerste cijfer met 1, het tweede met 2, het derde met 4 en de daaropvolgende met 8, met 16, met 32 … (telkens maal 2).
3. Werk deze makkelijke producten uit.
4. Tel alle producten op. De som die je bekomt is het oorspronkelijke getal in het binair stelsel.

Voorbeeld:

Zet het getal 100 011 101 om van het binair naar het tientallig stelsel.

$$
\begin{array}{lcr}
1 \cdot 1 & = & 1 \\
0 \cdot 2 & & \\
1 \cdot 4 & = & 4 \\
1 \cdot 8 & = & 8 \\
1 \cdot 16 & = & 16 \\
0 \cdot 32 & & \\
0 \cdot 64 & & \\
0 \cdot 128 & & \\
1 \cdot 256 & = & \underline{256} \\
 & & 285
\end{array}
$$

5 Samenvatting

- Je kent de tien symbolen in ons talstelsel.
  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Die worden cijfers genoemd.

- Je kent het verschil tussen een cijfer en een getal.
  90,36 is een getal dat bestaat uit vier cijfers.

- Je weet dat de waarde van een cijfer in een getal afhangt van de plaats in dat getal.
  In het getal 90,36 staat 9 voor de tientallen (9 T) en staat 3 voor de tienden (3 t).

- Je kent de overgangen in ons tiendelig systeem.
  1 D = 10 H = 100 T = 1000 E
  1 E = 10 t = 100 h = 1000 d

- Je kent voorbeelden van talstelsels en je kunt de evolutie ervan schetsen in de geschiedenis.

- Je kunt getallen omzetten van en naar een ander talstelsel.

Cijfers

Het woord 'cijfer' komt, net als ons talstelsel, uit de Arabische wereld. Het is afgeleid van het woord sifr (صفر), wat 'leeg' betekent. Het werd oorspronkelijk gebruikt om het symbool nul aan te duiden. Later werd dit woord de algemene term voor alle symbolen.

1.2 Getalverzamelingen

1 Natuurlijke getallen

Sofie zit in het eerste jaar secundair onderwijs en heeft van **10** verschillende leerkrachten les.
In haar klas zitten in totaal **25** leerlingen. Sofie is **12** jaar en heeft nog **3** broers. Ze woont op **800** m van de school.

Sofie is bezeten van rollercoasters. Ze zou dolgraag eens meerijden in **een** supersnelle **achtbaan**: de 'Kingda Ka'. Daarvoor moet ze naar **Six** Flags Great Adventure in New Jersey. Het bouwwerk heeft $ **25 000 000** gekost en is niet actief bij regenweer of bij wind.
Het spectaculaire aan deze achtbaan is de topsnelheid van **206** km/h die je al na **4** seconden hebt bereikt! Bovendien is de attractie **139** m hoog. Dat kun je vergelijken met een flatgebouw van **45** verdiepingen. Op die top blijft het wagentje met **18** passagiers **1** seconde in rusttoestand om dan pijlsnel verticaal naar beneden te rijden. Na slechts **28** seconden is het ritje gedaan.

Alle getallen die in deze tekst voorkomen, noemen we natuurlijke getallen.

natuurlijk getal

Een **natuurlijk getal** is het resultaat van een telling van een eindig aantal dingen.

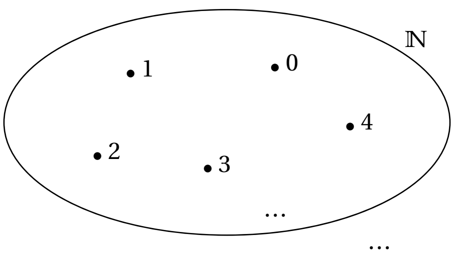
De verzameling van de natuurlijke getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5 … noteren we als $\mathbb{N}$. Als we een verzameling weergeven, noteren we accolades. We geven $\mathbb{N}$ weer als **opsomming**. Drie puntjes op het einde van de opsomming betekenen dat er oneindig veel getallen in de verzameling zitten.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

De verzameling van de natuurlijke getallen zonder het getal nul stellen we voor als $\mathbb{N}_0$ (lees: $\mathbb{N}$ zonder nul).

$$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Je kunt de verzameling ook voorstellen in een **venndiagram**. Daarin noteren we bij het element een punt.
De drie puntjes duiden op het feit dat er oneindig veel elementen zitten in dat gebied:



2 Gehele getallen

- Is er leven op Mars? De NASA-wetenschappers zijn het er (nog) niet over eens. Maar als er leven zou zijn, hebben ze wel warme kledij nodig: de gemiddelde temperatuur is er **–60 °C**. Dat maatgetal is **negatief**.
- Op sommige plaatsen in ons zonnestelsel is het erg koud. Op de dwergplaneet Pluto kan het **–233 °C** worden.

  toestandsteken

- Op een bankrekening kan je rekeningsaldo negatief zijn. Als je vader slechts 40 euro op zijn bankrekening heeft en hij betaalt aan de kassa van de supermarkt 60 euro, dan zal op zijn rekeninguittreksel **–20 euro** als saldo staan. Helaas zal hij op een negatief saldo intrest moeten betalen.
- In het jaar **–200** (dus 200 voor Christus) was Aristarchos de eerste wiskundige die probeerde de afstand van de aarde tot de zon te bepalen. Op een tijdlijn kan het dus ook handig zijn om negatieve getallen te gebruiken.

We gebruiken volgende toestandstekens:

–	(min)	het getal is negatief *nul is het enige getal dat zowel positief als negatief is*
+	(plus)	het getal is positief *dit teken wordt meestal niet geplaatst*

geheel getal

Een **geheel getal** is een natuurlijk getal voorzien van een toestandsteken.

0, 1, 2, 3, 4, 5, …	zijn positieve gehele getallen (of natuurlijke getallen).
0, –1, –2, –3, –4, –5, …	zijn negatieve gehele getallen. Je merkt dus dat het getal 0 zowel positief is als negatief!
… –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …	zijn **gehele getallen**.

De verzameling van de gehele getallen noteren we als $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

De verzameling van de positieve gehele getallen stellen we voor als $\mathbb{Z}^+$.

$\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

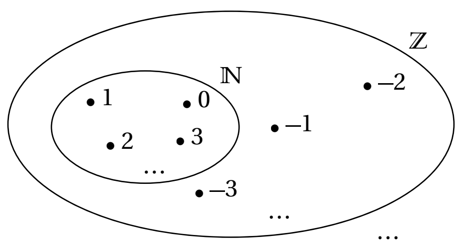
De verzameling van de negatieve gehele getallen stellen we voor als $\mathbb{Z}^-$.

$\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

De verzameling van de gehele getallen zonder het getal nul stellen we voor als $\mathbb{Z}_0$ (lees: $\mathbb{Z}$ zonder nul).

$\mathbb{Z}_0 = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$

Voorgesteld in een venndiagram:



3 Rationale getallen

Breuken en kommagetallen komen we overal tegen in het dagelijkse leven. Kommagetallen noemen we ook decimale vormen.

recepten

Om chocoladepudding te maken:

Gebruiksaanwijzing

Neem van $^3/_4$ liter koude melk een kopje (10 eetlepels) af en los daar de inhoud van het pakje zorgvuldig in op, zodat er geen klonters blijven.

Voeg 75 g (5 afgestreken eetlepels) suiker bij de rest van de melk en breng die aan het koken.

Neem de pan van het vuur en giet er, onder voortdurend roeren, de oplossing van melk en poeder in.

Laat de bereiding nog 1 min doorkoken, terwijl u blijft roeren.

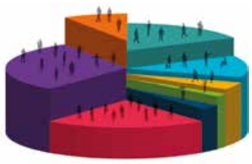
Giet de warme pudding in een met water omgespoelde vorm en laat hem koud worden.

Dien op met karamel-, chocolade- of vruchtensaus, fruitsla, slagroom, hagelslag enz.

Wilt u een stevigere pudding verkrijgen, dan gebruikt u slecht $^1/_2$ liter melk. Voor een lichtere crème gebruikt u naar smaak 1 liter melk of meer.

kans of verdeling

grafieken



prijzen

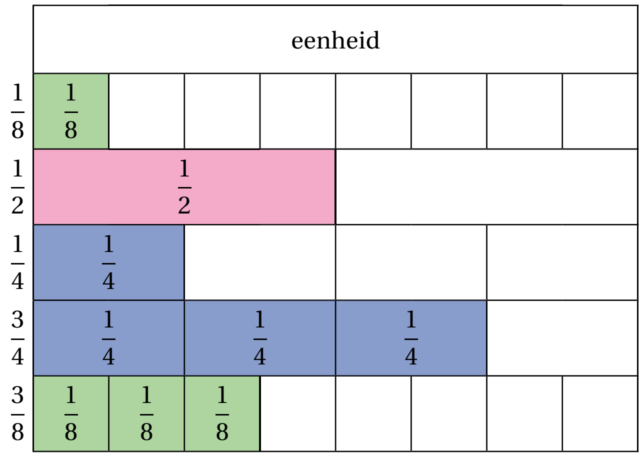
schaal en afstand

Gemengde getallen

In het basisonderwijs maakte je misschien kennis met gemengde getallen.

Een vorm zoals $2\frac{3}{4}$ *duidt op twee gehelen en drie vierden. Wij noteren dat als* $\frac{11}{4}$.

$\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ … worden breuken genoemd.
Ze duiden een deel van een geheel aan.



$$\frac{3}{8}$$

> **teller**
> **breukstreep**
> **noemer**

Breuken worden onder andere gebruikt:

- als andere schrijfwijze van een deling;
- om verhoudingen aan te duiden.

- 0,2 ; 44,5 en 1,122 zijn **begrensde decimale vormen** of **decimale getallen**.
  We kunnen die getallen ook in breukvorm noteren.
  Let wel, deze breuken kun je nog vereenvoudigen.

  $0,2 = \frac{2}{10}$ $\quad 44,5 = \frac{445}{10}$ $\quad 1,122 = \frac{1122}{1000}$

- 0,33…; 0,1515… en –2,83535… zijn **onbegrensde decimale vormen** met een **periode**. Die periode is een groepje cijfers dat steeds blijft weerkeren. We noteren de periode twee keer, gevolgd door drie puntjes. Ook deze getallen zal je later omzetten in een breuk.

De verzameling van alle getallen die als breuk genoteerd kunnen worden, noemen we **rationale getallen**.
We noteren de verzameling als $\mathbb{Q}$ en geven $\mathbb{Q}$ als volgt weer door omschrijving:

rationale getallen

Een **rationaal getal** is het quotiënt van twee gehele getallen waarbij het tweede getal niet nul is.

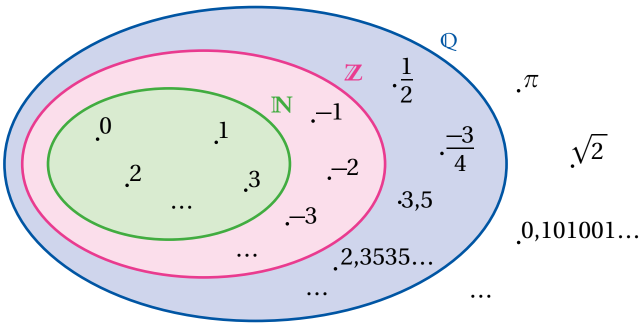
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ en } b \in \mathbb{Z}_0 \right\}$$

Het symbool | lees je als: … waarvoor geldt …

Niet alle getallen zijn rationale getallen. Sommige getallen kunnen niet als breuk geschreven worden.
Die getallen zijn onbegrensd en hebben geen periode. We noemen ze **irrationale getallen**.
Voorbeelden:

π
13,842567…
–1,234567…

Voorgesteld in een venndiagram:



De verzameling van de positieve rationale getallen stellen we voor als $\mathbb{Q}^+$.
De verzameling van de negatieve rationale getallen stellen we voor als $\mathbb{Q}^-$.
De verzameling van de rationale getallen zonder het getal nul stellen we voor als $\mathbb{Q}_0$.

4 Symbolen in de wiskunde

Wiskundige symbolen worden gebruikt om bepaalde relaties kort en makkelijk weer te geven. Zo ken je al een + voor het optellen en een **:** voor het delen. In dit boek maak je kennis met enkele (universele) nieuwe symbolen die het wiskundig leven een stuk makkelijker zullen maken.

$\in$ $\notin$

IN SYMBOLEN	BETEKENIS
$3 \in \mathbb{N}$	3 is een **element** van de verzameling van de natuurlijke getallen. *Lees:* 3 is een natuurlijk getal.
$-5 \notin \mathbb{N}$	–5 is geen element van de verzameling van de natuurlijke getallen. *Lees:* –5 is geen natuurlijk getal.
$\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$	$\frac{3}{4}$ is een element van de verzameling van de rationale getallen. *Lees:* $\frac{3}{4}$ is een rationaal getal.
$\pi \notin \mathbb{Q}$	π is geen element van de verzameling van de rationale getallen. *Lees:* π is geen rationaal getal.

$\subset$ $\not\subset$

IN SYMBOLEN	BETEKENIS
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	De verzameling van de natuurlijke getallen is een **deelverzameling** van de verzameling van de gehele getallen. *Lees:* alle natuurlijke getallen zijn gehele getallen.
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	De verzameling van de gehele getallen is een deelverzameling van de verzameling van de rationale getallen. *Lees:* alle gehele getallen zijn rationale getallen.
$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$	De verzameling van de gehele getallen is geen deelverzameling van de verzameling van de natuurlijke getallen. *Lees:* niet alle gehele getallen zijn ook natuurlijke getallen.

$\Longrightarrow$

IN SYMBOLEN	BETEKENIS
$a \in \mathbb{N}$ $\Downarrow$ $a \in \mathbb{Z}$	**Als** a een element is van $\mathbb{N}$, **dan** is a ook een element van $\mathbb{Z}$. *Lees:* elk natuurlijk getal is een geheel getal.
$a \in \mathbb{Z}$ $\Downarrow$ $a \in \mathbb{Q}$	**Als** a een element is van $\mathbb{Z}$, **dan** is a ook een element van $\mathbb{Q}$. *Lees:* elk geheel getal is een rationaal getal.

5 Samenvatting

- Je weet dat een natuurlijk getal het resultaat is van een telling van een eindig aantal dingen.
  De verzameling van de natuurlijke getallen wordt voorgesteld als $\mathbb{N}$.
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
  $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

- Je weet dat een geheel getal een natuurlijk getal is, voorzien van een toestandsteken.
  De verzameling van de gehele getallen wordt voorgesteld als $\mathbb{Z}$.
  $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
  $\mathbb{Z}_0 = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$
  $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
  $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

- Je weet dat een rationaal getal het quotiënt is van twee gehele getallen waarbij het tweede getal niet nul is.
  $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ en } b \in \mathbb{Z}_0\right\}$$
  Een rationaal getal kan genoteerd worden als een breuk of een decimale vorm.
  $\mathbb{Q}$: de verzameling van de rationale getallen
  $\mathbb{Q}_0$: de verzameling van de rationale getallen zonder nul
  $\mathbb{Q}^+$: de verzameling van de positieve rationale getallen
  $\mathbb{Q}^-$: de verzameling van de negatieve rationale getallen

- Je kent de betekenis van de symbolen $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ en $\Longrightarrow$.

$12 \in \mathbb{N}$	12 is een natuurlijk getal
$-4 \notin \mathbb{N}$	–4 is geen natuurlijk getal
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	alle natuurlijke getallen zijn gehele getallen
$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$	niet alle rationale getallen zijn ook gehele getallen
$a \in \mathbb{N} \Longrightarrow a \in \mathbb{Z}$	een natuurlijk getal is ook een geheel getal

Negatieve getallen

Negatieve getallen werden lange tijd argwanend bekeken. De Grieken probeerden ze te vermijden, of bestempelden ze als 'illusie'. De hindoewiskundigen uit India aanvaardden wel negatieve oplossingen, maar vonden het toch griezelig.
De Chinezen hadden het gebruik van negatieve getallen bij het tellen ontdekt. Rond de twaalfde eeuw gebruikten ze rode telstaafjes voor positieve getallen en zwarte telstaafjes voor negatieve getallen.
Zelfs in de 15e en de 16e eeuw waren de wiskundigen nog sceptisch. Pascal en Descartes spraken nog van 'absurde' of 'denkbeeldige' getallen onder nul, verkregen door getallen van nul af te trekken.

1.3 Deelbaarheid

1 Opgaande en niet-opgaande deling

Tijdens een sportdag worden er activiteiten georganiseerd voor alle leerlingen van het eerste jaar. In totaal zijn er 144 leerlingen. De sportleraren beslissen om de leerlingen in groepjes te verdelen.

De heer De Wolf wil de leerlingen onderverdelen in groepjes van 10 leerlingen.

Hij berekent uit zijn hoofd de deling 144 : 10.
Er kunnen 14 groepjes gevormd worden, maar dan zijn er nog 4 leerlingen over.

Hierbij is	144	het **deeltal** (D)
	10	de **deler** (d)
	14	het **quotiënt** (q)
	4	de **rest** (r)

Als je 144 deelt door 10 is de rest niet nul.
Daarom spreken we van een **niet-opgaande deling**.
Controle: $144 = 10 \cdot 14 + 4$

Mevrouw De Pauw wil de leerlingen verdelen in groepjes van 9 leerlingen.

Zij voert de deling uit en verkrijgt 144 : 9 = 16.

Bij deze deling is de rest nul. We noemen dit een **opgaande deling**.
Controle: $144 = 9 \cdot 16 + 0$

Euclidische deling

deeltal = deler · quotiënt + rest

of:

$D = d \cdot q + r$ met een positieve rest r kleiner dan de deler d

Euclidische deling

De 'euclidische deling' is genoemd naar Euclides, een Griekse wiskundige die ongeveer 300 jaar voor Christus leefde. Hij schreef het boek 'Elementen', waarin hij veel wiskundige weetjes noteerde over cirkels, punten, rechten, kortom een flink stuk meetkunde. Toen koning Ptolemaeus na een lang bewijs aan zijn leerkracht Euclides vroeg of er geen gemakkelijkere methode bestond, antwoordde die: "Hoogheid, in de wiskunde bestaat er geen koninklijke methode."

2 Veelvouden en delers

a Definitie

24 is een **veelvoud** van 8, want $24 = 8 \cdot 3$

We zeggen ook dat 24 **deelbaar** is door 8 of dat 8 een **deler** is van 24.

In symbolen: $8 \mid 24$

lees: 8 is een deler van 24

deler en veelvoud

a is een **veelvoud** van b

$\Updownarrow$

a is **deelbaar** door b

$\Updownarrow$

b is een **deler** van a

Notatie:

$\text{del } 9 = \{1, 3, 9\}$ ⟶ Er zitten drie elementen in de verzameling delers van 9.

$\text{del } 18 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ ⟶ Er zitten oneindig veel elementen in de verzameling van even natuurlijke getallen.

$5\mathbb{N} = \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$

$7\mathbb{N} = \{0, 7, 14, 21, 28, \ldots\}$

Delers en veelvoud

$\text{del } a$ = de verzameling van de natuurlijke delers van a

$a\mathbb{N}$ = de verzameling van de natuurlijke veelvouden van a

b Merkwaardige veelvouden

- Elk getal is een veelvoud van 1,
  want bv. $124 = 1 \cdot 124$
- Elk getal is een veelvoud van zichzelf,
  want bv. $73 = 73 \cdot 1$
- 0 is een veelvoud van elk getal,
  want bv. $0 = 18 \cdot 0$

c Merkwaardige delers

- 1 is een deler van elk getal,
  want bv. $20 = 1 \cdot 20$
- Elk getal (dat niet nul is) is een deler van zichzelf,
  want bv. $53 = 53 \cdot 1$
- 0 is nooit een deler van een getal
  zo is 0 geen deler van 7, want $0 \cdot x = 0$

3 Symbolen in de wiskunde

Je kent al de betekenis van $\Longrightarrow$.
Die pijl noemen we een **implicatie** en lees je als **als … dan …**

Als de pijl ook geldt in omgekeerde richting, dan maak je gebruik van $\Longleftrightarrow$.
Die pijl noemen we een **equivalentie** en lees je als **… als en slechts als …**

Voorbeeld 1:

a is een deler van 8 $\quad\Longrightarrow\quad$ a is een deler van 24

Die uitspraak is waar omdat elke deler van 8 ook een deler is van 24.
Het getal 24 is immers een veelvoud van 8.

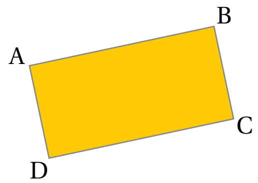
Maar:
a is een deler van 24 $\quad\not\Longrightarrow\quad$ a is een deler van 8
Hier geldt de implicatie niet, omdat je minstens één deler van 24 kunt vinden die geen deler is van 8, bijvoorbeeld 6.

Voorbeeld 2:

ABCD is een vierkant $\quad\Longrightarrow\quad$ ABCD is een rechthoek

Die uitspraak is waar want elk vierkant is ook een rechthoek.

Maar:
ABCD is een rechthoek $\quad\not\Longrightarrow\quad$ ABCD is een vierkant
Hier geldt de implicatie niet, omdat niet alle rechthoeken ook vierkanten zijn, zoals deze rechthoek:



Voorbeeld 3:

$2 + 9 = 11 \quad\Longleftrightarrow\quad 9 = 11 - 2$

Die uitspraak is waar.
$\Longrightarrow$ $\quad 2 + 9 = 11 \quad\Longrightarrow\quad 9 = 11 - 2$
$\Longleftarrow$ $\quad 9 = 11 - 2 \quad\Longrightarrow\quad 2 + 9 = 11$

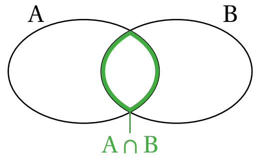
Voorbeeld 4:

vandaag is het dinsdag $\quad\Longleftrightarrow\quad$ morgen is het woensdag

Die uitspraak is waar.
$\Longrightarrow$ Als het vandaag dinsdag is, dan is het morgen woensdag.
$\Longleftarrow$ Ook de omgekeerde uitspraak is correct. Als het morgen woensdag is, dan is het vandaag dinsdag.

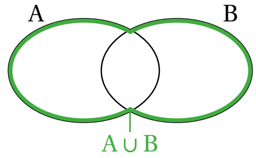
Het symbool ∩ wordt gebruikt om de **doorsnede** van twee verzamelingen weer te geven. Je bekomt de verzameling met de gemeenschappelijke elementen van beide verzamelingen.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ **en** } x \in B\}$



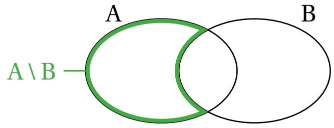
Het symbool ∪ wordt gebruikt om de **unie** van twee verzamelingen weer te geven. Je bekomt de verzameling met hierin de elementen die behoren tot de ene **of** de andere verzameling.

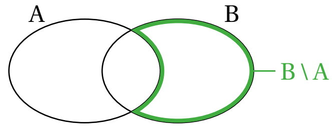
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ **of** } x \in B\}$



Het symbool \ wordt gebruikt om het **verschil** van twee verzamelingen weer te geven. Je bekomt de verzameling van elementen die behoren tot de eerste verzameling, maar **niet** tot de tweede verzameling.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$

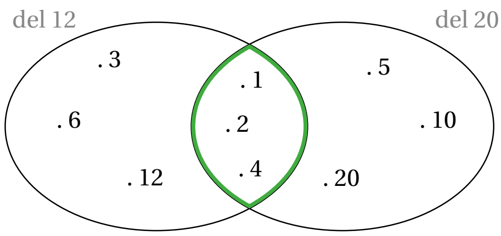




Voorbeeld:

del 12 $= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
del 20 $= \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

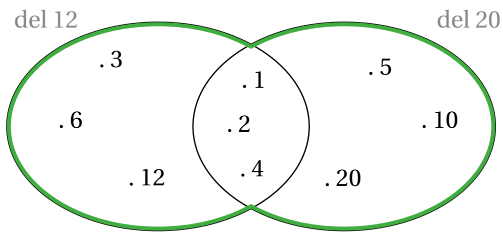
doorsnede



del 12 ∩ del 20 $= \{1, 2, 4\}$

In de **doorsnede** zitten getallen die een deler zijn van 12 **en** van 20.

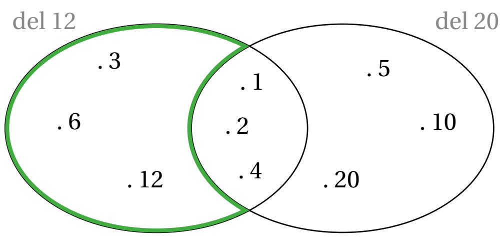
unie



del 12 ∪ del 20 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 20\}$

In de **unie** zitten getallen die een deler zijn van 12 **of** van 20.

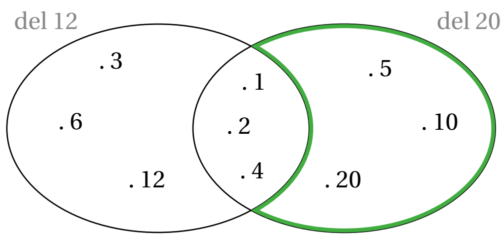
verschil



del 12 \ del 20 $= \{3, 6, 12\}$

In dit **verschil** zitten de getallen die een deler zijn van 12 maar **niet** van 20.

verschil

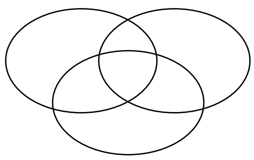


del 20 \ del 12 $= \{5, 10, 20\}$

In dit **verschil** zitten de getallen die een deler zijn van 20 maar **niet** van 12.

Vlinder en klaverblad

De voorstellingswijze van twee venndiagrammen (zoals hierboven) noemen we een vlinderdiagram. De voorstellingswijze van drie venndiagrammen zie je hiernaast. Dit noemen we een klaverbladdiagram.



4 Kenmerken van deelbaarheid

We gaan op zoek naar kenmerken van getallen waarmee we snel (dus zonder de deling uit te voeren) kunnen bepalen of een getal deelbaar is door 2, door 3, door 4, door 5, door 9, door 10 en door 25.

a Deelbaarheid door 10

deelbaar door 10

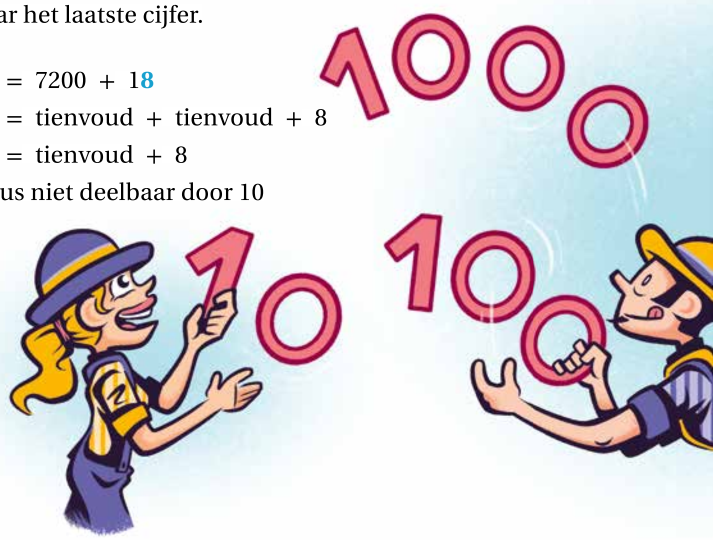
Een getal is deelbaar door 10.
$\Updownarrow$
Het laatste cijfer van het getal is een 0.

We verduidelijken met enkele getallenvoorbeelden en kijken naar het laatste cijfer.

210 = 200 + 10
= tienvoud + tienvoud
= tienvoud
210 is dus deelbaar door 10

7218 = 7200 + 18
= tienvoud + tienvoud + 8
= tienvoud + 8
7218 is dus niet deelbaar door 10

We kunnen dit kenmerk ook uitbreiden naar 100, 1000, …
Zo is een getal deelbaar door 100 als en slechts als
de laatste twee cijfers van het getal nullen zijn.
Om deelbaar te zijn door 1000 moeten de laatste drie cijfers
nullen zijn.



Algemeen:

deelbaar door 100, 1000, …

Een getal is deelbaar door 100, 1000, …
$\Updownarrow$
De laatste 2, 3, … cijfers van het getal zijn nullen.

b Deelbaarheid door 2 en door 5

deelbaar door 2 (door 5)

Een getal is deelbaar door 2 (of 5).
$\Updownarrow$
Het laatste cijfer van het getal is deelbaar door 2 (of 5).

We verduidelijken met enkele getallenvoorbeelden en kijken naar het laatste cijfer.

136 = 130 + 6
= tweevoud + tweevoud
= tweevoud
136 is dus deelbaar door 2

365 = 360 + 5
= vijfvoud + vijfvoud
= vijfvoud
365 is dus deelbaar door 5

477 = 470 + 7
= tweevoud + 6 + 1
= tweevoud + 1
477 is dus niet deelbaar door 2

639 = 630 + 9
= vijfvoud + 5 + 4
= vijfvoud + 4
639 is dus niet deelbaar door 5

c Deelbaarheid door 4 en door 25

deelbaar door 4 (door 25)

Een getal is deelbaar door 4 (of 25).

⇕

Het getal gevormd door de laatste twee cijfers is deelbaar door 4 (of 25).

We verduidelijken met enkele getallenvoorbeelden en kijken naar de laatste cijfers.

$$\begin{aligned} 1324 &= 1300 + 24 \\ &= \text{viervoud} + 24 \\ &= \text{viervoud} + \text{viervoud} \\ &= \text{viervoud} \end{aligned}$$

1324 is dus deelbaar door 4

$$\begin{aligned} 8475 &= 8400 + 75 \\ &= \text{25-voud} + 75 \\ &= \text{25-voud} + \text{25-voud} \\ &= \text{25-voud} \end{aligned}$$

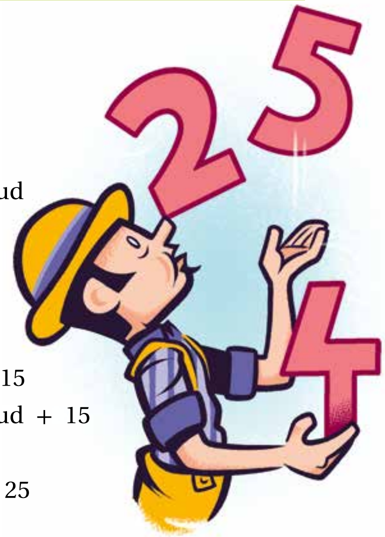
8475 is dus deelbaar door 25

$$\begin{aligned} 1325 &= 1300 + 25 \\ &= \text{viervoud} + 24 + 1 \\ &= \text{viervoud} + \text{viervoud} + 1 \\ &= \text{viervoud} + 1 \end{aligned}$$

1325 is dus niet deelbaar door 4

$$\begin{aligned} 3490 &= 3400 + 90 \\ &= \text{25-voud} + 75 + 15 \\ &= \text{25-voud} + \text{25-voud} + 15 \\ &= \text{25-voud} + 15 \end{aligned}$$

3490 is dus niet deelbaar door 25



We kunnen dit kenmerk ook uitbreiden naar 8 en 125.
Zo is een getal deelbaar door 8 als en slechts als de laatste drie cijfers een getal vormen dat deelbaar is door 8.

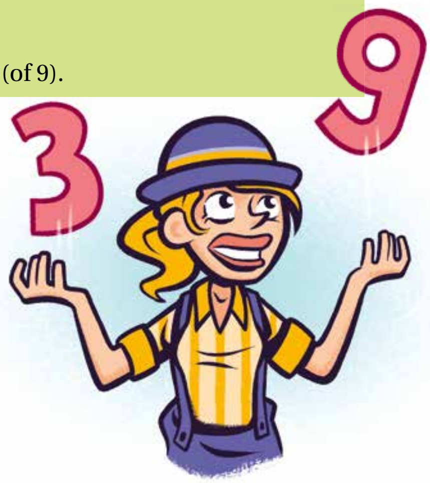
d Deelbaarheid door 3 en door 9

deelbaar door 3 (door 9)

Een getal is deelbaar door 3 (of 9).

⇕

De som van de cijfers van dat getal is deelbaar door 3 (of 9).



We verduidelijken met een getallenvoorbeeld. Merk op dat
elke macht van 10 geschreven kan worden als één meer dan een 9-voud.

$$\begin{aligned} 8631 &= 8000 + 600 + 30 + 1 \\ &= 8 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1 \\ &= 8 \cdot (999 + 1) + 6 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 1 \\ &= 8 \cdot 999 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 99 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 1 \\ &= 8 \cdot 999 + 6 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \\ &= \text{9-voud} + \text{9-voud} + \text{9-voud} + 8 + 6 + 3 + 1 \\ &= \text{9-voud} + 8 + 6 + 3 + 1 \\ &= \text{9-voud} + 18 \\ &= \text{9-voud} + \text{9-voud} \\ &= \text{9-voud} \end{aligned}$$

8631 is dus deelbaar door 9

Het getal 8631 is gelijk aan een 9-voud plus de som van de cijfers 8, 6, 3 en 1. Als die som deelbaar is door 3 (of door 9), dan is het getal het ook.

Elk natuurlijk getal kun je schrijven als een negenvoud plus de som van zijn cijfers.

5 Samenvatting

- Je weet dat je voor elke twee natuurlijke getallen D en d $(d \neq 0)$ een quotiënt q en een rest r kunt vinden zodat:
  $D = d \cdot q + r \quad \text{met } 0 \leqslant r < d$

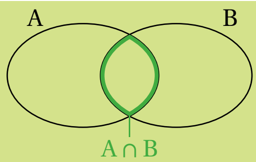
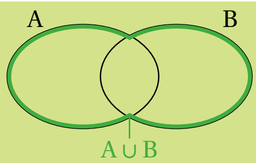
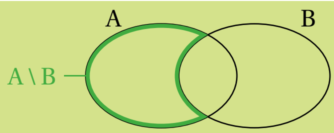
- Je kunt voor twee natuurlijke getallen (waarvan het tweede niet nul is) het quotiënt en de rest bepalen.

- Je weet wat bedoeld wordt met opgaande en niet-opgaande deling.
  Bij een opgaande deling is de rest nul.
  Bij een niet-opgaande deling is de rest niet nul.

- Je kent de definitie van deler en veelvoud van een natuurlijk getal.
  a is een veelvoud van b
  $\Updownarrow$
  a is deelbaar door b
  $\Updownarrow$
  b is een deler van a

- Je kunt delers en veelvouden van een natuurlijk getal bepalen.
  del a = de verzameling van de natuurlijke delers van a
  $a\mathbb{N}$ = de verzameling van de natuurlijke veelvouden van a

- Je kunt volgende symbolen gebruiken: $\cup$, $\cap$ en $\setminus$.

$A \cap B$	doorsnede	de verzameling van de gemeenschappelijke elementen van A **en** B. $A \cap B = \{x \mid x \in A$ **en** $x \in B\}$	
$A \cup B$	unie	de verzameling van de elementen die behoren tot A **of** B. $A \cup B = \{x \mid x \in A$ **of** $x \in B\}$	
$A \setminus B$	verschil	de verzameling van de elementen die behoren tot A en **niet** tot B. $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ en $x \notin B$	

- Je kunt bepalen of een getal deelbaar is door 2, 3, 4, 5, 9, 10 en 25.

- Je kunt de volgende kenmerken van deelbaarheid weergeven.
  Een getal is deelbaar door 10 $\iff$ Het laatste cijfer van het getal is een 0.
  Een getal is deelbaar door 100, 1000 … $\iff$ De laatste 2, 3 … cijfers van dit getal zijn nullen.
  Een getal is deelbaar door 2 (of door 5) $\iff$ Het laatste cijfer van dit getal is deelbaar door 2 (of door 5).
  Een getal is deelbaar door 4 (of door 25) $\iff$ Het getal gevormd door de laatste twee cijfers is deelbaar door 4 (of door 25).
  Een getal is deelbaar door 3 (of door 9) $\iff$ Het getal gevormd door de som van de cijfers is deelbaar door 3 (of door 9).

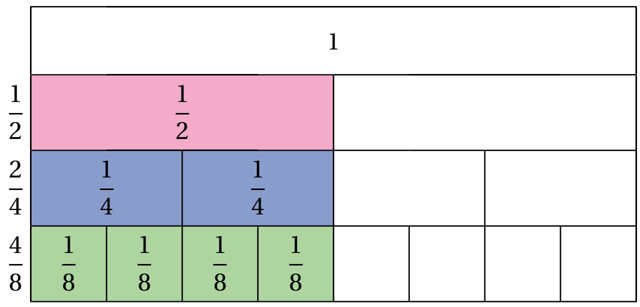
1.4 Breuk, decimale vorm en procent

1 Gelijkwaardige breuken

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ zijn **gelijkwaardige breuken**, want ze stellen hetzelfde getal voor.

$$\frac{1}{2} \overset{\cdot 4}{\underset{\cdot 4}{=}} \frac{4}{8} \qquad \frac{4}{8} \overset{:\,4}{\underset{:\,4}{=}} \frac{1}{2}$$

Als je teller en noemer van een breuk vermenigvuldigt met (of deelt door) hetzelfde getal (verschillend van nul), dan krijg je een breuk die gelijkwaardig is aan de oorspronkelijke breuk.



Voorbeelden:

$$\frac{12}{32} = \frac{12:4}{32:4} = \frac{3}{8} \qquad \frac{5}{7} = \frac{5\cdot 6}{7\cdot 6} = \frac{30}{42}$$

$$\frac{22}{77} = \frac{22:11}{77:11} = \frac{2}{7} \qquad \frac{26}{39} = \frac{26:13}{39:13} = \frac{2}{3}$$

Tegenvoorbeeld:

$\frac{2}{3} \neq \frac{4}{9}$ want we kunnen teller en noemer van de eerste breuk niet vermenigvuldigen met of delen door eenzelfde getal zodat we de tweede breuk uitkomen.

eigenschap

Als je teller en noemer van een breuk vermenigvuldigt met of deelt door eenzelfde getal, verschillend van nul, krijg je een breuk die gelijkwaardig is met de oorspronkelijke breuk.

2 Breuken vereenvoudigen

We spreken af dat je bij het resultaat van een oefening steeds de meest eenvoudige schrijfwijze van een breuk noteert. Je zult je breuk dus (indien mogelijk) **vereenvoudigen**.
Dat betekent dat je de teller en noemer van deze breuk deelt door eenzelfde getal.

Voorbeeld:

$\frac{3}{6} = \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2}$ Je hebt teller en noemer gedeeld door 3.

$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$ De breuk $\frac{2}{3}$ is niet meer vereenvoudigbaar.

$\frac{2}{3}$ is een **onvereenvoudigbare breuk**.

Bij grotere tellers en noemers is het gebruik van ICT aangeraden.

3 Breuken gelijknamig maken

Om later bewerkingen te kunnen uitvoeren met breuken, is het nodig dat je breuken gelijknamig kunt maken. **Gelijknamige breuken** zijn breuken met gelijke noemers.

Als breuken niet gelijknamig zijn, kun je ze als volgt gelijknamig maken:

Voorbeeld:

Maak $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{8}$ gelijknamig.

veelvouden van 6	veelvouden van 8
6	8
12	16
18	24
24	32
30	40
…	…

$\frac{5}{6} \overset{\cdot 4}{\underset{\cdot 4}{=}} \frac{20}{24}$

$\frac{3}{8} \overset{\cdot 3}{\underset{\cdot 3}{=}} \frac{9}{24}$

Vereenvoudig (zo nodig) de breuk.

① Zoek een veelvoud van beide noemers.
Maak het jezelf makkelijk door te kiezen voor het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van de noemers.
24 is het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van 6 en 8.

② Noteer dan elke breuk als een gelijkwaardige breuk met in de noemer het zojuist gevonden veelvoud van de noemers.

③ Noteer de gelijknamige breuken $\frac{20}{24}$ en $\frac{9}{24}$.

4 Omzetting breuken – kommagetallen

Van breuk naar kommagetal

- breuken met noemer 10, 100, …

$\frac{3}{10} = 0,3$

$\frac{123}{100} = 1,23$

$\frac{129}{10} = 12,9$

$\frac{163}{1000} = 0,163$

- breuken waarvan de noemer tot 10, 100, … te herleiden is

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$

$\frac{6}{25} = \frac{24}{100} = 0,24$

$\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0,35$

$\frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = 0,125$

- andere breuken zet je om met behulp van ICT, je deelt de teller door de noemer

$\frac{1}{3} = 0,33\ldots$

$\frac{4}{11} = 0,3636\ldots$

$\frac{2}{3} = 0,66\ldots$

$\frac{17}{6} = 2,833\ldots$

Van kommagetal naar breuk

- van begrensd decimale vorm naar breuk

$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$3,25 = \frac{325}{100} = \frac{13}{4}$

$12,5 = \frac{125}{10} = \frac{25}{2}$

$2,2 = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$

- om een onbegrensd decimale vorm om te zetten naar een breuk, gebruik je ICT

$2,4343\ldots = \frac{241}{99}$

$1,11\ldots = \frac{10}{9}$

$0,77\ldots = \frac{7}{9}$

$0,4545\ldots = \frac{5}{11}$

Van Egypte naar Brugge

Vroeger noteerden Egyptenaren een breuk als een getal met een streepje erboven. Alleen de noemer werd geschreven en dat kon omdat er enkel met stambreuken gewerkt werd, maar soms ook met $\frac{2}{3}$. *Zo was* $\bar{7} = \frac{1}{7}$. *Alle breuken werden genoteerd als een som van stambreuken.*

Het streepje boven het getal zou wel eens aan de oorsprong kunnen liggen van onze breukstreep. De eerste kommagetallen komen voor in het boekje 'De Thiende' van Bruggeling Simon Stevin, die ook de term 'wiskunde' lanceerde. Hij wou met de invoering van deze schrijfwijze het rekenen vereenvoudigen. De komma zelf hebben we te danken aan de Schotse wiskundige John Napier.

5 Procenten

Percentages komen overal voor:

- De arbeiders vragen **7%** opslag.
- De elektriciteitstarieven worden vanaf september met **3%** verhoogd.
- In Hongkong wordt een dalingspercentage van **20%** weergegeven als 1 : 5.
- Het aantal werklozen in België steeg vorig jaar met **4%**.
- Meer dan **25%** van alle mensen op de wereld gebruikt Facebook.
- Bij de aankoop van een brood betaal je **6%** btw.
- Bij de aankoop van een computer betaal je **21%** btw.
- De planeet Dubbes TrES-4, die zich buiten ons zonnestelsel bevindt, is **70%** groter dan Jupiter.
- We houden van T-shirts die bestaan uit **100%** biologisch katoen.
- Het stijgingspercentage van deze weg is **12%**.

Procenten

'Percent' of 'procent' komt van het Latijnse 'pro cento' of 'per centum'. Via de Franse taal komen we aan de vertaling: 'per-cent' of 'pour-cent' of 'per honderd' of 'ten honderd'. Dit alles betekent steeds 'op honderd' en krijgt als symbool '%'.

Het symbool '‰' bestaat ook. Dat betekent 'per duizend' of 'promille' (denk maar aan het maximaal toegelaten alcoholgehalte dat een chauffeur in zijn bloed mag hebben).

a Een percentage aftrekken

Voorbeeld:

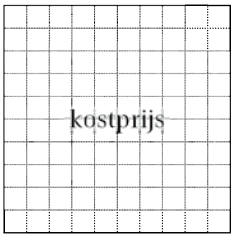
Tijdens de soldenperiode vind je nog een laatste doos van het spel Ticket to Ride: Rails & Sails, die 60 euro kost. Er hangt een sticker op de doos met hierop –15%.
Hoeveel zul je moeten betalen?

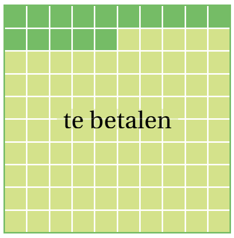
Het probleem begrijpen:

15% korting betekent dat je voor elke 100 euro die je zou moeten betalen, 15 euro korting krijgt.

Kostprijs	Korting	Te betalen
€ 100	€ 15	€ 85

Als we terugdenken aan het honderdveld uit de lagere school, kunnen we procenten als volgt voorstellen:





Oplossing:

15% betekent $\frac{15}{100}$ of $0,15$.

$0,15 \cdot 60 = 9$

Je zal voor de doos moeten betalen:

$€\ 60 - €\ 9 = €\ 51$

of

Als je 15% korting krijgt, moet je nog 85% van het bedrag betalen.

85% betekent $\frac{85}{100}$ of $0,85$.

$0,85 \cdot 60 = 51$

Antwoord:

Als je rekening houdt met 15% korting, zul je voor deze doos 51 euro betalen.

Controle:

$\frac{15}{100} \cdot 60 = 9$ en $9 + 51 = 60$

b Een percentage bijtellen

Voorbeeld:
Als je een pakje in het buitenland aankoopt, let je maar beter goed op!
Op een Amerikaanse site zie je een tof paar sportschoenen voor (omgerekend) 64 euro.
Als de pakjesdienst het bij je thuis brengt, moet je er 21% btw op betalen.

a Hoeveel bedraagt deze btw?
b Hoeveel kosten de schoenen in totaal?

Het probleem begrijpen:
We zoeken 21% van 64 euro. Daarna tellen we dit op met 64.

Oplossing:

21% betekent $\frac{21}{100}$ of $0,21$.

$0,21 \cdot 64 = 13,44$

In totaal kosten de sportschoenen:

$€\ 64 + €\ 13,44 = €\ 77,44$

of

Als je 21% btw moet bijtellen, moet je eigenlijk 121% van 64 berekenen.

$1,21 \cdot 64 = 77,44$

Antwoord:
Je zult aan de pakjesdienst nog 13,44 euro btw moeten betalen. In totaal kosten de schoenen 77,44 euro.

6 Samenvatting

- Je kunt breuken vereenvoudigen en gelijknamig maken. Je weet wat gelijkwaardige breuken zijn.
  Gelijkwaardige breuken stellen hetzelfde getal voor:
  $$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = 0,75$$
  Als je teller en noemer van een breuk vermenigvuldigt met of deelt door hetzelfde getal verschillend van nul, dan krijg je een breuk die gelijkwaardig is met de oorspronkelijke breuk.
- Je kunt een breuk omzetten naar zijn decimale vorm en je kunt een kommagetal omzetten in een breuk.
- Je kent de betekenis van een procent en kunt een percentage berekenen van een bepaald geheel.
- Je kunt vraagstukken oplossen over procenten.