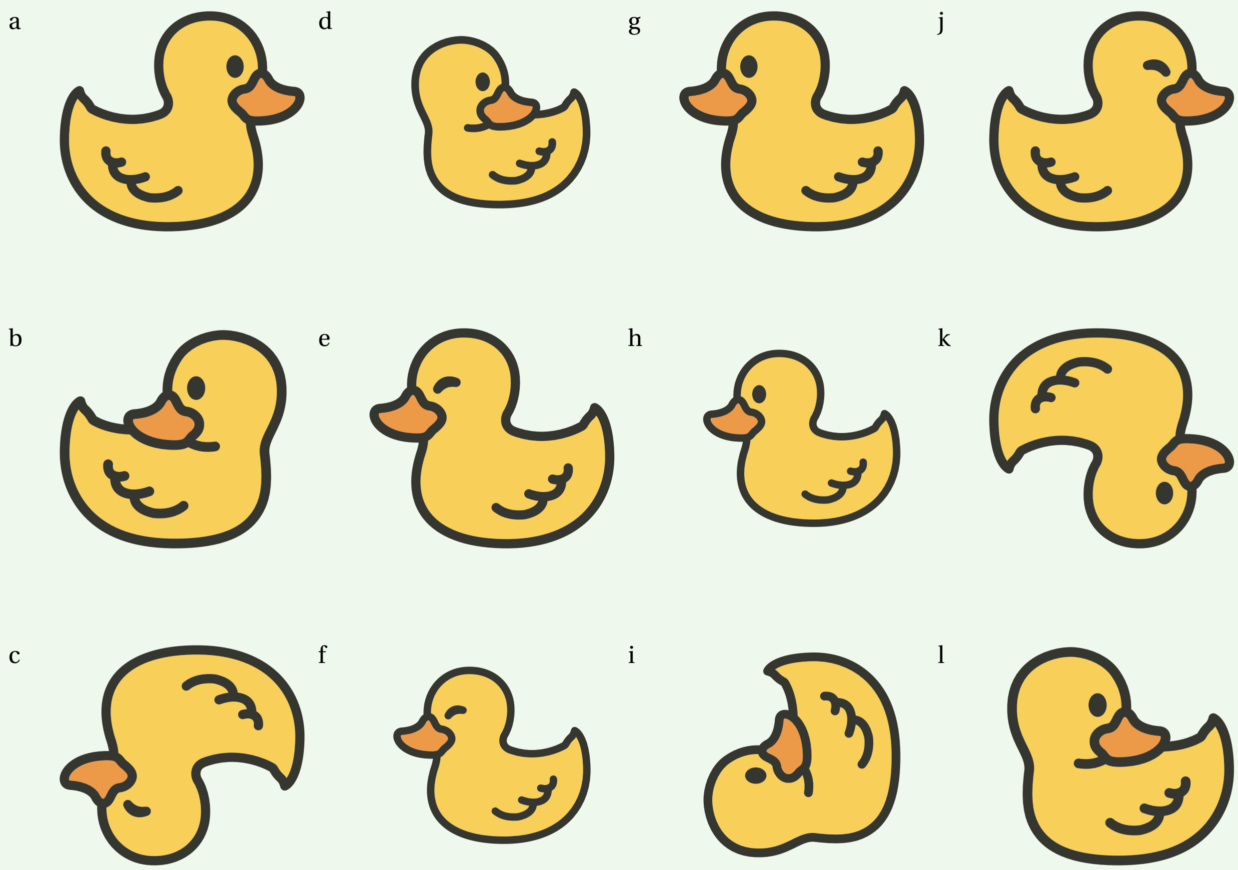
6 Oefeningen

1 Welke eendjes zijn congruent?

a – g – k

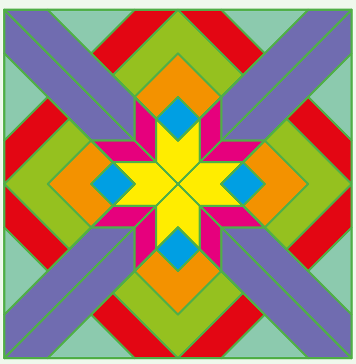
b – l

c – j – e

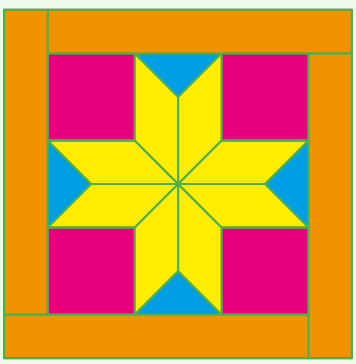


2 Hieronder vind je een aantal patronen die gebruikt worden om parket te leggen.
Plaats de congruente figuren in het patroon in eenzelfde kleur.

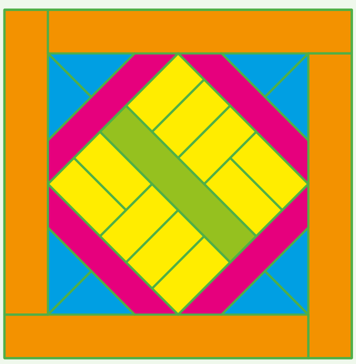
a



b

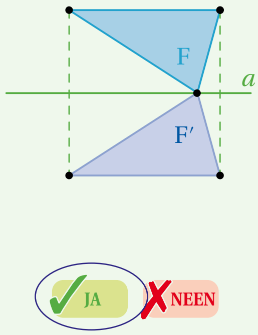


c



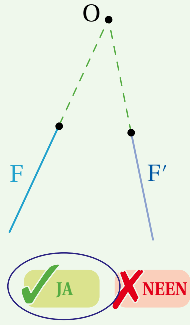
3 Is F congruent met F′? Zo ja, vermeld door welke transformatie(s) F op F′ wordt afgebeeld.

a



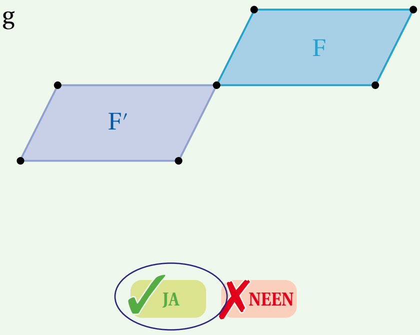
s_a

d



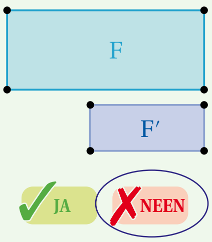
$r_{(O,\,\alpha)}$

g

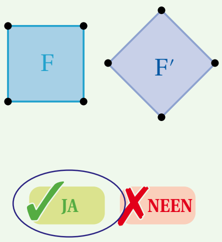


s_O of $t_{\overrightarrow{AB}}$ of $r_{(O,\,180°)}$

b



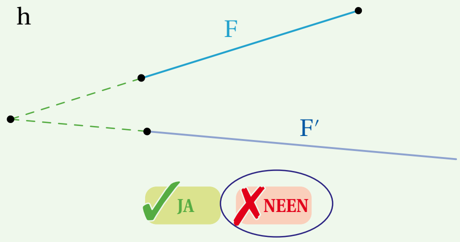
e



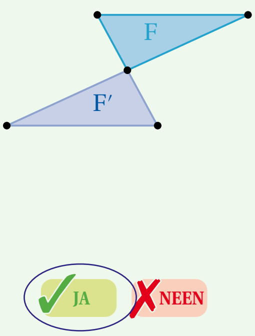
een verschuiving gevolgd

door een rotatie

h

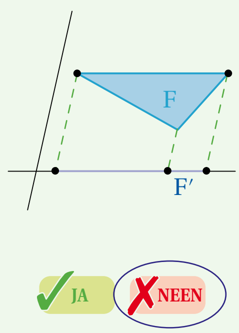


c

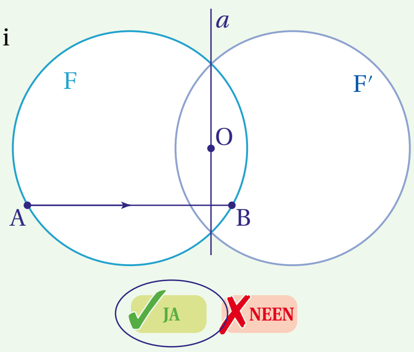


s_O

f



i



s_O of s_a of $t_{\overrightarrow{AB}}$ of $r_{(O,\,180°)}$

4 Op het logo van de UEFA Champions League vind je een aantal sterren. Welke sterren zijn congruent met elkaar en waarom?

- in het vlak bekeken:

  geen enkele

- op een bol bekeken:

  allemaal

5 a Gegeven: $\Delta ABC \cong \Delta XOY$

$co(A) = (1, 2)$ $co(C) = (3, 2)$ $co(O) = (0, 0)$

$co(B) = (3, 5)$ $co(X) = (-2, -3)$

Gevraagd: bepaal $co(Y)$ $co(Y) = (0, -3)$

b Gegeven: $\Delta ABC \cong \Delta XOY$

$co(A) = (4, -3)$ $co(C) = (4, -1)$ $co(O) = (0, 0)$

$co(B) = (0, -2)$ $co(X) = (1, 4)$

Gevraagd: bepaal $co(Y)$ $co(Y) = (-1, 4)$

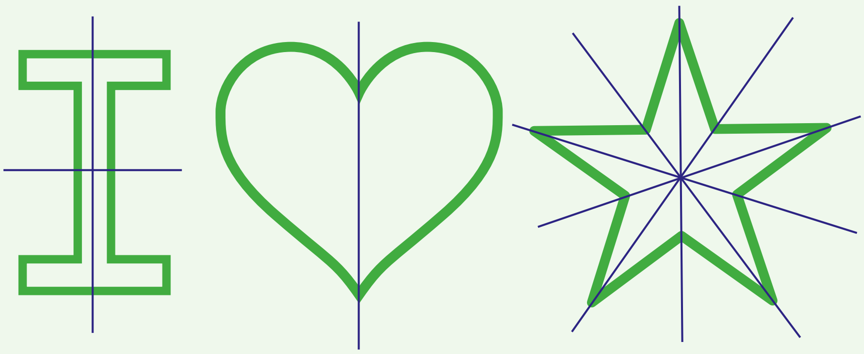
c Gegeven: $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

$co(A) = (4, 1)$ $co(C) = (6, 5)$ $co(Y) = (-3, 0)$

$co(B) = (2, 2)$ $co(X) = (-1, -1)$

Gevraagd: bepaal $co(Z)$ $co(Z) = (1, 3)$

6 a Teken in elk van de drie figuren één symmetrieas.

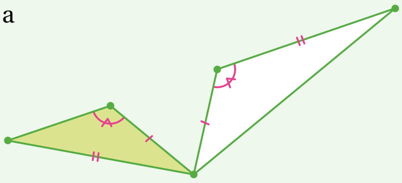


b Je hebt in de drie gevallen de figuur in twee delen verdeeld. Wat kun je besluiten over beide delen?

Een symmetrieas verdeelt de figuur in twee congruente figuren.

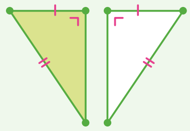
7 Mag je aan de hand van volgende gegevens in de tekening besluiten dat onderstaande driehoeken congruent zijn?

a



JA NEEN

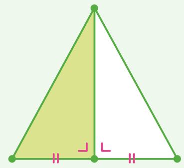
d



JA NEEN

ZZ90°

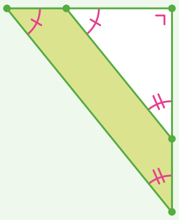
g



JA NEEN

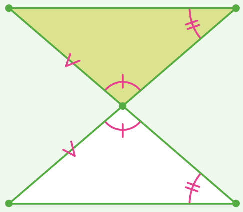
ZHZ

b



JA NEEN

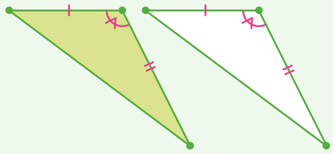
e



JA NEEN

ZHH

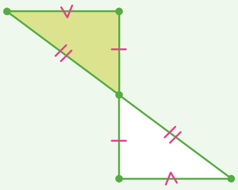
h



JA NEEN

ZHZ

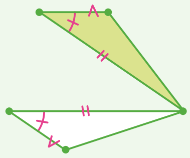
c



JA NEEN

ZZZ

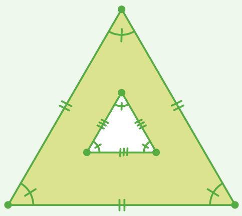
f



JA NEEN

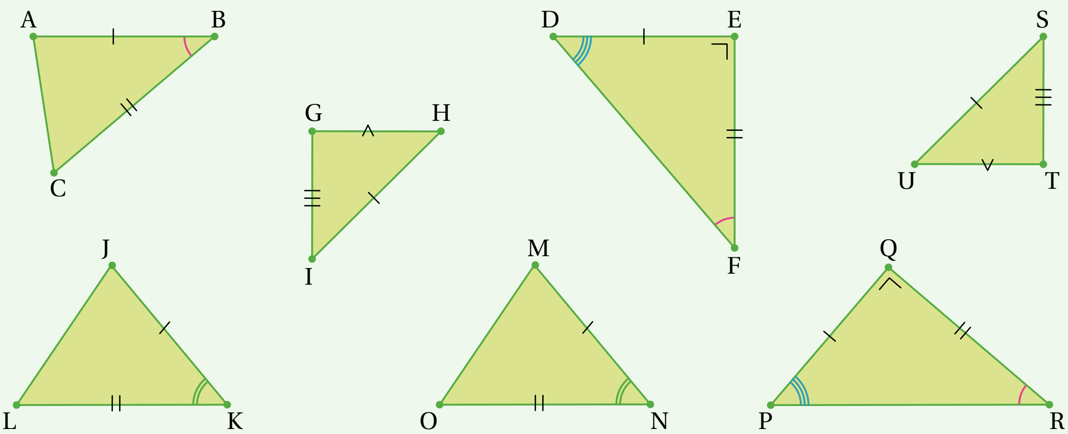
ZHZ

i



JA NEEN

8 Welke van onderstaande driehoeken zijn congruent? Geef het congruentiekenmerk.



Δ STU ≅ Δ IGH (ZZZ)

Δ MNO ≅ Δ JKL (ZHZ)

Δ DEF ≅ Δ PQR (ZHZ of HZH)

9 Zijn volgende driehoeken ABC en DEF congruent? Verklaar.

a $|AB| = |DE| = 3$ cm

$|AC| = |DF| = 4$ cm

$\hat{A} = \hat{D} = 40°$

JA NEEN

ZHZ

b $|AC| = |DF| = 2$ cm

$|BC| = |EF| = 4$ cm

$\hat{B} = \hat{E} = 25°$

JA NEEN

De driehoeken zijn niet noodzakelijk congruent.

c $|AB| = |DE| = 3$ cm

$|BC| = |EF| = 3{,}5$ cm

$|AC| = |DF| = 4$ cm

JA NEEN

ZZZ

d $\hat{A} = \hat{D} = 30°$

$\hat{B} = \hat{E} = 70°$

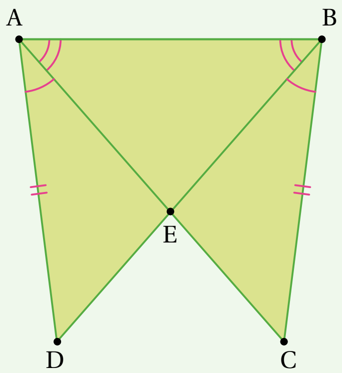
$\hat{C} = \hat{F} = 80°$

JA NEEN

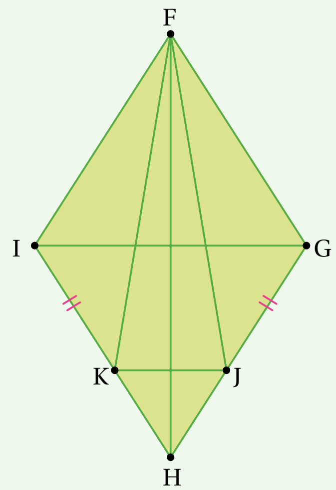
De driehoeken zijn niet noodzakelijk congruent.

10 Welke driehoeken zijn congruent? Noteer in symbolen en geef het congruentiekenmerk.

a



b



FGHI is een ruit

Δ AED $\cong$ Δ BEC
ZHH

Δ ABD $\cong$ Δ BAC
ZHH of ZHZ

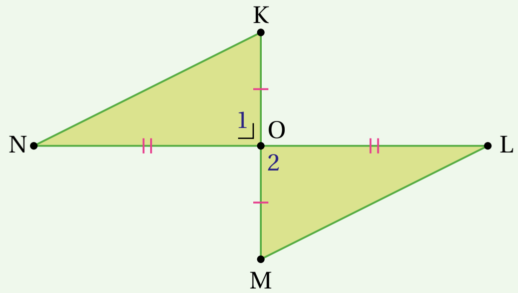
Δ FGI $\cong$ Δ HGI
ZZZ

Δ FGJ $\cong$ Δ FIK
ZHZ

ΔFGH $\cong$ Δ FIH
ZZZ

11 Vervolledig het onderstaande redeneerschema om na te gaan of $\Delta\,KON \cong \Delta\,MOL$.

Gegeven: $|KO| = |OM|$
$|NO| = |OL|$
$KM \perp NL$



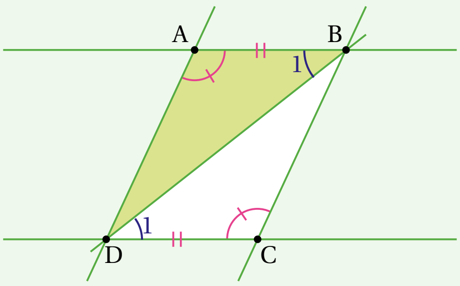
Te bewijzen: $\Delta\,KON \cong \Delta\,MOL$

Bewijs: in Δ KON en Δ MOL geldt:

$\lvert KO\rvert = \lvert OM\rvert$	gegeven	ZHZ $\Longrightarrow$	$\Delta\,KON \cong \Delta\,MOL$
$\lvert NO\rvert = \lvert OL\rvert$	gegeven		
$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$	90°, overstaande hoeken		

12 Vervolledig het onderstaande redeneerschema om na te gaan of $\Delta\,BAD \cong \Delta\,DCB$.

Gegeven: $AB \parallel CD$
$\hat{A} = \hat{C}$
$|AB| = |CD|$



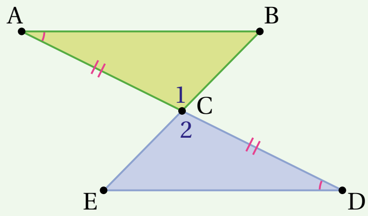
Te bewijzen: $\Delta\,BAD \cong \Delta\,DCB$

Bewijs: in Δ ABD en Δ CDB geldt:

$\hat{A} = \hat{C}$	gegeven	HZH $\Longrightarrow$	$\Delta\,ABD \cong \Delta\,CDB$
$\lvert AB\rvert = \lvert DC\rvert$	gegeven		
$\hat{B}_1 = \hat{D}_1$	verwisselende binnenhoeken bij $AB \parallel CD$ en snijlijn BD		

13 Vervolledig het onderstaande redeneerschema om aan te tonen dat $\Delta ABC \cong \Delta DEC$.

Gegeven: ΔABC en ΔCDE
$|AC| = |CD|$
$\widehat{A} = \widehat{D}$



Te bewijzen: $\Delta ABC \cong \Delta DEC$

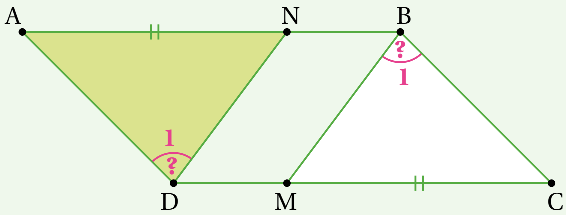
Bewijs: In Δ ABC en Δ DEC geldt:

$\lvert AC\rvert = \lvert CD\rvert$	gegeven
$\widehat{A} = \widehat{D}$	gegeven
$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$	overstaande hoeken

HZH $\Longrightarrow$ $\Delta ABC \cong \Delta DEC$

14 Vervolledig het onderstaande redeneerschema om aan te tonen dat $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$.

Gegeven: parallellogram ABCD
$|AN| = |MC|$



Te bewijzen: $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$

Bewijs: In Δ AND en Δ CMB geldt:

$\lvert AN\rvert = \lvert MC\rvert$	gegeven
$\lvert AD\rvert = \lvert BC\rvert$	eig. parallellogram
$\widehat{A} = \widehat{C}$	eig. parallellogram

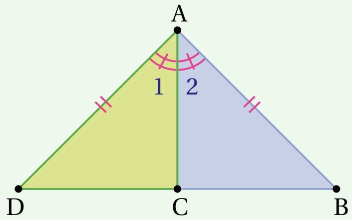
ZHZ $\Longrightarrow$ $\Delta AND \cong \Delta CMB$

$\Downarrow$ overeenkomstige hoeken

$\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$

15 Gegeven: zie tekening

Te bewijzen: $\widehat{D} = \widehat{B}$



In Δ ACD en Δ ACB geldt:

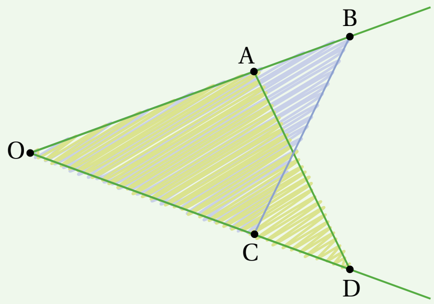
$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ |DA| = |BA| & \text{gegeven} \\ \bullet\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 & \text{gegeven} \\ \bullet\ |AC| = |AC| & \text{gemeenschappelijke zijde} \end{array}\right\} \overset{\text{ZHZ}}{\Longrightarrow} \Delta ACD \cong \Delta ACB$$

$\Downarrow$ overeenkomstige hoeken

$$\widehat{D} = \widehat{B}$$

16 Gegeven: $\widehat{O}$
$|OA| = |OC|$
$|OB| = |OD|$

Te bewijzen: $\Delta OAD \cong \Delta OCB$



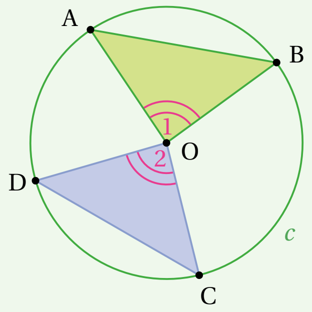
In Δ OAD en Δ OCB geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ |OA| = |OC| & \text{gegeven} \\ \bullet\ |OB| = |OD| & \text{gegeven} \\ \bullet\ \widehat{O} = \widehat{O} & \text{gemeenschappelijke hoek} \end{array}\right\} \overset{\text{ZHZ}}{\Longrightarrow} \Delta OAD \cong \Delta OCB$$

17 Gegeven: cirkel $c_{(O,\, r)}$

$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$

Te bewijzen: $|AB| = |CD|$



In Δ ABO en Δ CDO geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 & \text{gegeven} \\ \bullet\ |OA| = |OC| & \text{gelijke } r \text{ in cirkel} \\ \bullet\ |OB| = |OD| & \text{gelijke } r \text{ in cirkel} \end{array}\right\} \overset{\text{ZHZ}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \Delta ABO \cong \Delta CDO \\ \Downarrow \text{ overeenkomstige zijden} \\ |AB| = |CD| \end{array}$$

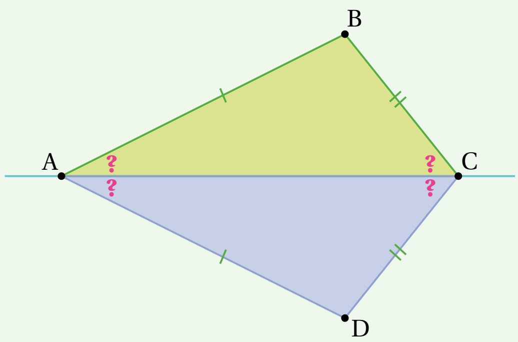
18 Gegeven: vierhoek ABCD

$|AB| = |AD|$

$|CB| = |CD|$

Te bewijzen: a $\Delta ADC \cong \Delta ABC$

b AC is een bissectrice van $\widehat{A}$ en $\widehat{C}$

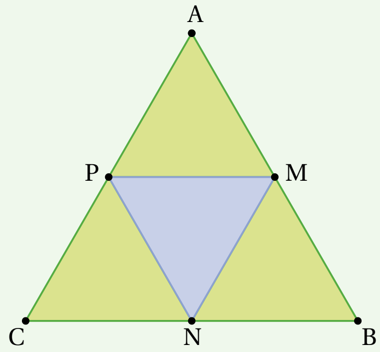


In Δ ABC en Δ ADC geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ |AB| = |AD| & \text{gegeven} \\ \bullet\ |CB| = |CD| & \text{gegeven} \\ \bullet\ |AC| = |AC| & \text{gemeenschappelijke zijde} \end{array}\right\} \overset{\text{ZZZ}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \Delta ABC \cong \Delta ADC \\ \Downarrow \text{ overeenkomstige hoeken} \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ en } \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \\ \Downarrow \text{ def. bissectrice} \\ \text{AC is bissectrice van } \widehat{A} \text{ en } \widehat{C} \end{array}$$

19 Gegeven: ΔABC is gelijkzijdig
M is het midden van [AB]
N is het midden van [BC]
P is het midden van [AC]

Te bewijzen: $\Delta AMP \cong \Delta MBN$

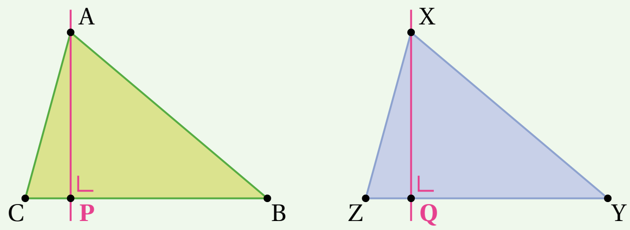


In Δ AMP en Δ MBN geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ |AM| = |MB| & M = \text{mi}\,[AB], \text{ gegeven} \\ \bullet\ \widehat{A} = \widehat{B} & = 60^\circ \\ \bullet\ |AP| = |BN| & |AC| = |BC| \text{ dus} \\ & \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}|BC| \end{array}\right\} \overset{\text{ZHZ}}{\Longrightarrow} \Delta AMP \cong \Delta MBN$$

20 Gegeven: $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$
AP en XQ zijn hoogtelijnen

Te bewijzen: $\Delta ABP \cong \Delta XYQ$



In Δ ABP en Δ XYQ geldt:

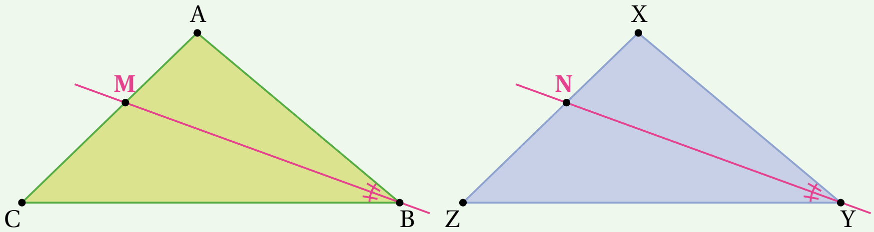
$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ |AB| = |XY| & \text{definitie congruentie driehoeken} \\ \bullet\ \widehat{B} = \widehat{Y} & \text{definitie congruentie driehoeken} \\ \bullet\ \widehat{P} = \widehat{Q} & \text{definitie hoogtelijn} \end{array}\right\} \overset{\text{ZHH}}{\Longrightarrow} \Delta ABP \cong \Delta XYQ$$

21 Gegeven: $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

BM is de bissectrice van $\widehat{B}$

YN is de bissectrice van $\widehat{Y}$

Te bewijzen: $\Delta ABM \cong \Delta XYN$



In Δ ABM en Δ XYN geldt:

- $\widehat{A} = \widehat{X}$ gegeven
- $|AB| = |XY|$ gegeven
- $\widehat{B}_1 = \widehat{Y}_1$ $\widehat{B} = \widehat{Y}$ dus $\frac{1}{2}\widehat{B} = \frac{1}{2}\widehat{Y}$

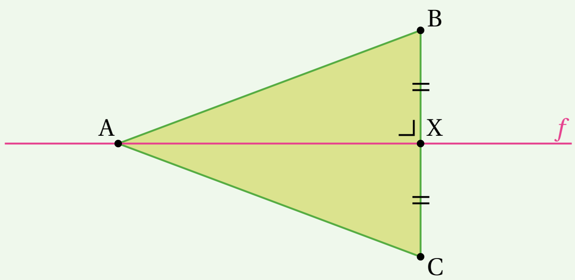
$\overset{\text{HZH}}{\Longrightarrow}$ $\Delta ABM \cong \Delta XYN$

22 Gegeven: ΔABC

f is de hoogtelijn en de zwaartelijn uit A

f snijdt BC in X

Te bewijzen: $|AC| = |AB|$



In Δ AXC en Δ AXB geldt:

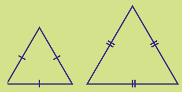
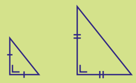
- $|AX| = |AX|$ gemeenschappelijke zijde
- $\widehat{X}_1 = \widehat{X}_2$ definitie hoogtelijn $= 90°$
- $|XC| = |XB|$ definitie zwaartelijn

$\overset{\text{ZHZ}}{\Longrightarrow}$ $\Delta AXC \cong \Delta AXB$

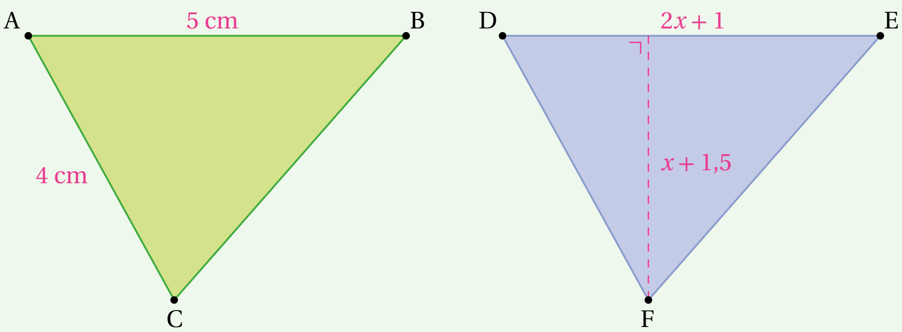
$\Downarrow$ overeenkomstige zijden

$|AC| = |AB|$

23 Waar of vals? Verklaar.

	STELLING	WAAR OF VALS	VERKLARING
a	Twee gelijkzijdige driehoeken zijn altijd congruent.	VALS	 zijn niet congruent.
b	Twee gelijkbenige, rechthoekige driehoeken zijn altijd congruent.	VALS	 zijn niet congruent.
c	De bissectrice van de tophoek van een gelijkbenige driehoek verdeelt de driehoek in twee congruente driehoeken.	WAAR	Je kunt ZHZ toepassen.
d	Driehoeken die congruent zijn, hebben steeds dezelfde oppervlakte.	WAAR	Congruente driehoeken kunnen elkaar perfect bedekken.
e	Twee gelijkbenige driehoeken zijn congruent als een been van de ene driehoek even lang is als een been van de andere driehoek en als bovendien de tophoeken even groot zijn.	WAAR	Je kunt ZHZ toepassen.
f	De middelloodlijn van een zijde van een gelijkzijdige driehoek verdeelt de driehoek in twee congruente driehoeken.	WAAR	Je kunt ZZZ toepassen.

* **24** Bepaal de oppervlakte van ΔDEF als je weet dat $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

$\Downarrow$

$|AB| = |DE|$

dus: $2x + 1 = 5$

$\Downarrow$

$2x = 4$

$\Downarrow$

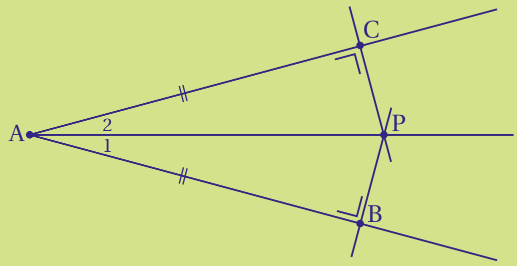
$x = 2$

$A_{\Delta DEF} = \dfrac{5 \cdot 3{,}5}{2}\ \text{cm}^2$

$= 8{,}75\ \text{cm}^2$

25 Tekenopdrachten. Maak telkens een tekening en verklaar aan de hand van een congruentiekenmerk.

a Als je op de benen [AB en [AC van een hoek $B\widehat{A}C$ gelijke stukken |AB| en |AC| afmeet en in B en C de loodlijnen tekent op de benen, dan snijden die loodlijnen elkaar in een punt P van de bissectrice van de hoek $B\widehat{A}C$. Ga dat ook na met ICT.



Gegeven:

$|AB| = |AC|$

$PC \perp AC$ en $PB \perp AB$

Te bewijzen:

AP is de bissectrice van $\widehat{A}$

Bewijs: teken AP

In ΔACP en ΔABP geldt

$\widehat{C} = \widehat{B} = 90°$

($PC \perp AC$ en $PB \perp AB$)

$|AB| = |AC|$

(gegeven)

$|AP| = |AP|$

(gemeenschappelijke zijde)

$\xRightarrow{90°ZZ} \Delta ACP \cong \Delta ABP$

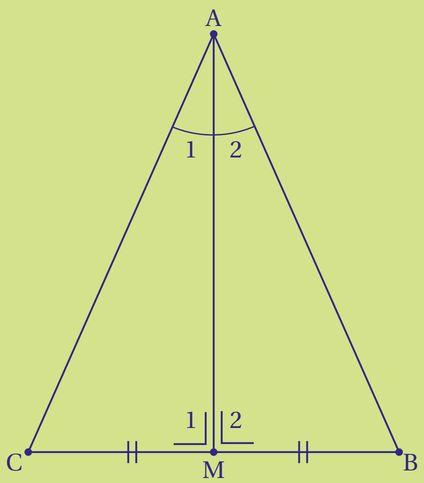
$\Downarrow$ overeenkomstige hoeken

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

$\Downarrow$ def. bissectrice

AP is de bissectrice van $\widehat{A}$

b Als in een driehoek ABC de middelloodlijn van [BC] ook de hoek $\widehat{A}$ in twee gelijke delen verdeelt, dan is die driehoek gelijkbenig.



Gegeven:

ΔABC

AM is de middelloodlijn van [BC]

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

Te bewijzen:

ΔABC is gelijkbenig

Bewijs: teken AM

In ΔAMC en ΔAMB geldt

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

(gegeven)

$|AM| = |AM|$

(gemeenschappelijke zijde)

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \ (= 90°)$

$\xRightarrow{HZH} \Delta AMC \cong \Delta AMB$

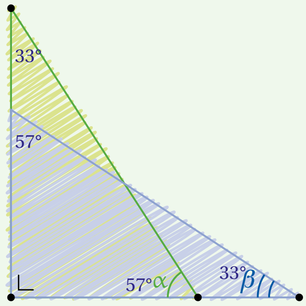
$\Downarrow$ overeenkomstige zijden

$|AC| = |AB|$

$\Downarrow$ def. gelijkbenige Δ

ΔABC is gelijkbenig

26 Twee congruente rechthoekige driehoeken worden op elkaar geplaatst zoals in de figuur. Als de hoek $\alpha = 57°$, dan is β gelijk aan



(A) 33° (B) 37° (C) 40° (D) 43° (E) 45°

JWO 2007 tweede ronde, vraag 4 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

De hoekensom is 180°, dus is de kleinste hoek in elke driehoek 180° – 57° – 90° = 33°.

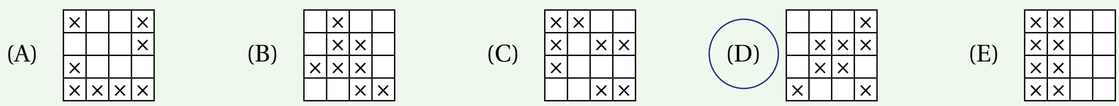
* **27** Hoeveel verschillende, niet-congruente parallellogrammen met natuurlijke getallen als lengten van de zijden zijn er waarvan de omtrek gelijk is aan 24?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) oneindig veel

JWO 2004 tweede ronde, vraag 14 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

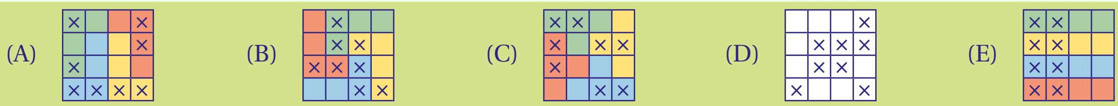
Voorbeeld: zijden die 10, 10, 2 en 2 lang zijn.
De scherpe hoeken kunnen oneindig veel waarden aannemen tussen 0° en 90°.

* **28** Welk van volgende vierkanten kan niet verdeeld worden in vier congruente gebieden bestaande uit aaneensluitende vierkanten zodat in elk gebied evenveel kruisjes liggen?
Opmerking: twee vierkanten zijn aaneensluitend als ze een zijde gemeenschappelijk hebben.

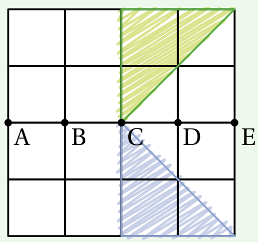


De andere vier lukken wel.

JWO 2006 eerste ronde, vraag 15 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw



* **29** Het vierkant hiernaast is onderverdeeld in 16 congruente vierkanten. Als je de bovenste gearceerde driehoek wilt afbeelden op de onderste gearceerde driehoek, dan kan dit gebeuren door een rotatie van de eerste driehoek om het punt …



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

JWO 2005 eerste ronde, vraag 12 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

Om E over 90°.