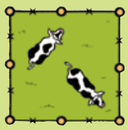
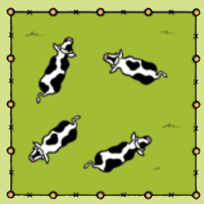
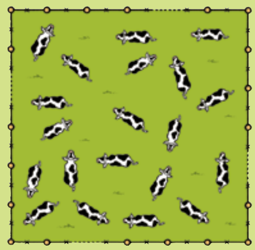
3.1 Eentermen en veeltermen

1 Letterformules: eentermen

Voorbeeld 1: in de wei

In het eerste jaar leerde je hoe je **regelmaat** kunt herkennen en veralgemenen.
Een landbouwer wil een afsluiting bouwen in de vorm van een vierkant.

NUMMER FIGUUR	1	2	3	4	…	n
FIGUUR						
AANTAL METER AFSLUITING	4	8	12	16	…	$4n$

Vul nu volgende tabel aan.

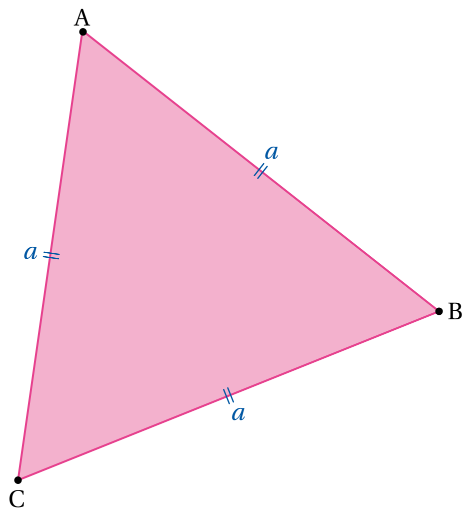
n	$4n$
5	20
6	24
12	48
15	60
45	180

$4n$ wordt een **eenterm** genoemd. Een eenterm bestaat uit een getalgedeelte en een lettergedeelte.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{getal-} \\ \text{gedeelte}}}{4}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{letter-} \\ \text{gedeelte}}}{n}$$

Voorbeeld 2: omtrek driehoek

Driehoek ABC is een gelijkzijdige driehoek.
De omtrek van ΔABC is $3a$.
Ook $3a$ is een eenterm.



Vul nu volgende tabel aan.

a	$3a$
7	21
13	39
32	96
51	153

2 Eentermen

$4n$, $3a$, $5xy$, $9a^2$ en $\frac{1}{4}c$ worden **eentermen** genoemd omdat ze een product zijn van getallen en letters. Het getalgedeelte wordt steeds vooraan genoteerd en noemen we de **coëfficiënt**.

eenterm

Een **eenterm** is een product van een **coëfficiënt** en letterfactoren met positieve exponenten.

EENTERM	COËFFICIËNT	LETTERGEDEELTE
$3a$	3	a
$4n$	4	n
$\frac{1}{2}n^2$	$\frac{1}{2}$	n^2
$5xy$	5	xy
$-ab$	-1	ab

We maken volgende afspraken:
- De coëfficiënt schrijf je steeds vooraan.
- Tussen de coëfficiënt en het lettergedeelte hoef je geen maalteken te noteren.
- De letterfactoren rangschik je alfabetisch.
- De letterfactoren schrijf je zo compact mogelijk: gebruik hiervoor exponenten.
- De coëfficiënten 1 en -1 schrijf je niet.

Voorbeelden: $1ab = ab$

$-1x^2y = -x^2y$

graad van de eenterm

De **graad** van een eenterm in een letter is de exponent van die letter in de eenterm.
De graad van een eenterm in alle letters is de som van de exponenten van alle letters die in de eenterm voorkomen.

Voorbeelden:

$4n$ is van de eerste graad in n.

$\frac{1}{2}n^2$ is van de tweede graad in n.

$5xy$ is van de eerste graad in x, van de eerste graad in y en van de tweede graad in x en y.

$8a^2b^3$ is van de tweede graad in a, van de derde graad in b en van de vijfde graad in a en b.

$4x^n$, $\frac{1}{5}x^{p+2}$ en $3x^2y^{n+3}$ zijn eentermen waarvan de exponenten die in de letters voorkomen, zelf letters zijn.

EENTERM	COËFFICIËNT	LETTERGEDEELTE	GRAAD
$4x^n$	4	x^n	n
$\frac{1}{5}x^{p+2}$	$\frac{1}{5}$	x^{p+2}	$p+2$
$3x^2y^{n+3}$	3	x^2y^{n+3}	$n+5$

3 Gelijksoortige eentermen

De eentermen	$7a$ en $-41a$	hebben hetzelfde lettergedeelte: a
De eentermen	$-b^2$ en $1{,}7b^2$	hebben hetzelfde lettergedeelte: b^2
De eentermen	$9ab^2$ en $11ab^2$	hebben hetzelfde lettergedeelte: ab^2
De eentermen	$3x^2y$ en $5xy^2$	hebben niet hetzelfde lettergedeelte.

gelijksoortige eentermen

Gelijksoortige eentermen zijn eentermen die hetzelfde lettergedeelte hebben.

$\frac{1}{2}ab$, $-9ab$, ab en $0{,}25ab$ zijn gelijksoortige eentermen.

$3x$, $4y$, $7x^2$ zijn niet-gelijksoortige eentermen.

4 Getalwaarde van een eenterm

Om de **getalwaarde** van een eenterm te bepalen, vervang je de letters door de gegeven getallen en werk je daarna de rekenoefening uit.

Voorbeeld:
De getalwaarde van $4a^2$b als $a = -\frac{1}{2}$ en $b = \frac{3}{5}$ wordt:

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3}{5}$$

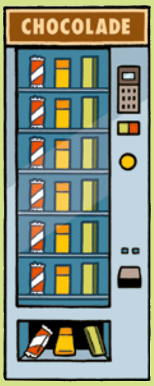
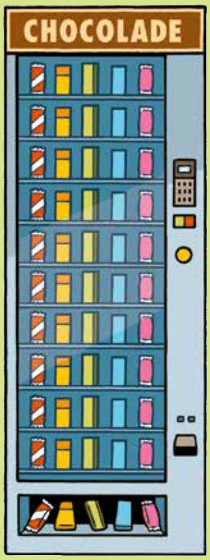
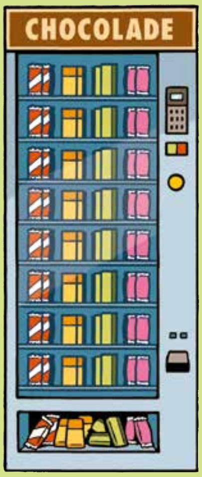
Taak:
Bereken telkens de getalwaarde.

EENTERM	WAARDE VOOR DE LETTERS	GETALWAARDE
$4n$	$n = 4$	$4 \cdot 4 = 16$
$\frac{1}{2}n^2$	$n = 6$	$\frac{1}{2} \cdot 6^2 = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$
$2ab$	$a = 5$ en $b = 3$	$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$
$-4xy$	$x = -2$ en $y = 5$	$-4 \cdot (-2) \cdot 5 = 40$

5 Letterformules

Voorbeeld 1: de chocoladeautomaat

Een producent van automaten heeft volgende modellen op de markt. De koper kan een keuze maken uit een miniautomaatje (waarin 10 repen passen) tot heel grote automaten. Om aan het aantal repen te komen moet je ook rekening houden met de schuifjes waar telkens al een reep op jou ligt te wachten.

AUTOMAAT NUMMER	2	3	4	5	…	n
AUTOMAAT						
AANTAL REPEN IN DE AUTOMAAT	$2^2 + 2^2 + 2$	$3^2 + 3^2 + 3$	$4^2 + 4^2 + 4$	$5^2 + 5^2 + 5$	…	$n^2 + n^2 + n$

Vul nu volgende tabel aan.

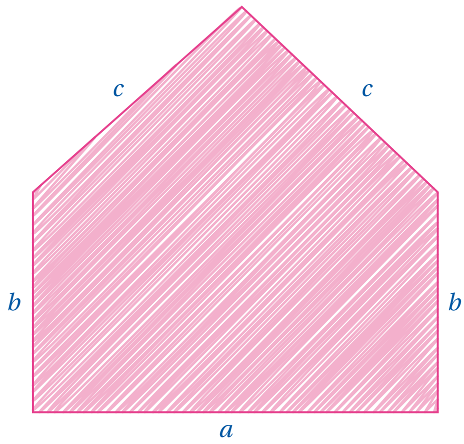
n	$2n^2 + n$
5	55
6	78
11	253
14	406
15	465

$n^2 + n^2 + n$ of ook $2n^2 + n$ wordt een **veelterm** genoemd. Een veelterm is een som van eentermen.

$$\underbrace{2n^2}_{\text{eenterm}} + \underbrace{n}_{\text{eenterm}}$$

Voorbeeld 2: huisje tekenen

De omtrek van deze figuur is $a + 2b + 2c$.
Ook dit noemen we een veelterm.



Vul nu volgende tabel aan.

a	b	c	$a + 2b + 2c$
4	5	3	20
7	3	8	29
5	10	6	37
20	15	18	86

6 Veeltermen

Voorbeelden:

$a^2 + 4a$ is een **veelterm**

$\frac{1}{5}y^3 + 2y - \frac{1}{5}$ is een veelterm

$2{,}5a + 3{,}5b$ is een veelterm

veelterm

Een **veelterm** is een som van eentermen.

Een veelterm met precies twee termen noemen we een **tweeterm**.

Voorbeelden:

$a^2 - a$

$0{,}12x^2 + 0{,}8x$

$6b - 9$

Een veelterm met precies drie termen noemen we een **drieterm**.

Voorbeelden:

$2a^2 - 5a + 8$

$2x^2 - 6x + 7$

$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}y + 4$

graad in een letter van een veelterm

De **graad** van een veelterm in een letter is de grootste exponent waarmee die letter in de veelterm voorkomt.

Voorbeelden:

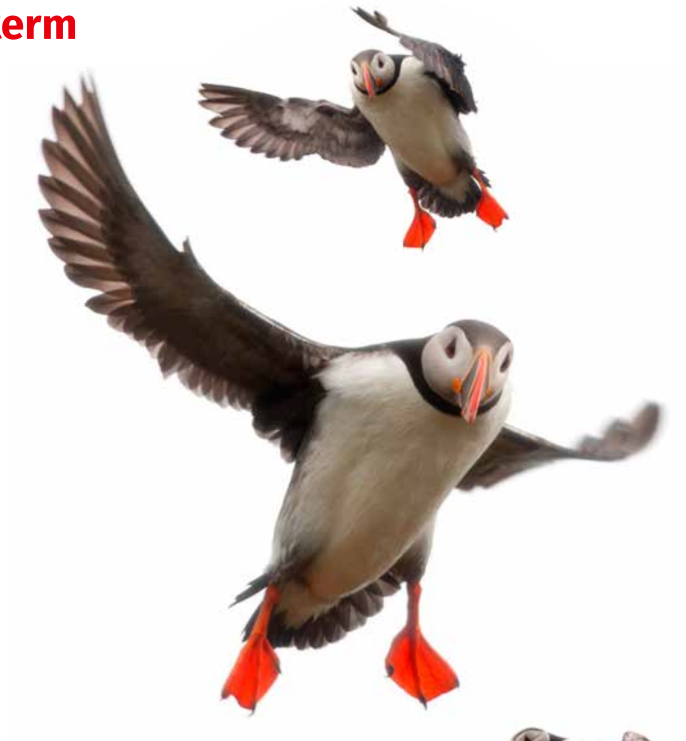
$3a^3 + 2a^2 - \frac{1}{4}a$ is van de derde graad in a

$-\frac{2}{5}x^2y^5 + 2x^3y^2$ is van de derde graad in x
is van de vijfde graad in y

Herkomst van de algebra: Nicholas Saunderson

Nicholas Saunderson (1682–1739) was professor aan de universiteit van Cambridge, waar hij door King George was aangesteld om les te geven en zelfs toe te treden tot de koninklijke familie. Toen Richard een jaar oud was, werd hij blind door de waterpokken. Hij leerde zichzelf lezen en schrijven door de inscripties te betasten op de graven van het kerkhof. Hij schreef voor zijn leerlingen twee boeken: 'Elements of Algebra' en 'Method of Fluxions'. Bovendien ontwierp hij een 'rekenmachine' waarmee hij algebraïsche oefeningen door tastzin kon oplossen. In zijn geboortedorp Penistone (Groot-Brittannië) kun je een korte wiskundewandeling maken en over zijn leven is zelfs een musical gemaakt: 'No Horizon'.

7 Getalwaarde van een veelterm



Voorbeeld 1: papegaaiduikers

De grootte van een populatie papegaaiduikers laat zich voor een tiental jaren beschrijven door de formule

$2t^2 + t + 40$ met t: het aantal jaren

Vul nu volgende tabel aan.

t	WAARDE VOOR $2t^2 + t + 40$
1	$2 \cdot 1^2 + 1 + 40 = 43$
2	$2 \cdot 2^2 + 2 + 40 = 50$
3	$2 \cdot 3^2 + 3 + 40 = 61$
4	$2 \cdot 4^2 + 4 + 40 = 76$
5	$2 \cdot 5^2 + 5 + 40 = 95$
…	…

↓ waarde van de letter die voorkomt in de veelterm

↓ getalwaarde van de veelterm

Om de **getalwaarde** van een veelterm te bepalen, vervang je de letters door de gegeven getallen en werk je daarna de rekenoefening verder uit.

Voorbeeld 2: priemgetallen

Wellicht ken je nog de betekenis van een **priemgetal**: een natuurlijk getal dat precies twee verschillende delers heeft, namelijk 1 en zichzelf.
Al eeuwenlang zijn mensen op zoek naar een formule die alleen maar priemgetallen weergeeft.
Misschien is het deze formule wel, ooit bestudeerd door **Euler**.

$n^2 + n + 41$ met n: een natuurlijk getal

Vul nu volgende tabel aan.

n	WAARDE VOOR $n^2 + n + 41$	PRIEMGETAL?
0	$0^2 + 0 + 41 = 41$	ja
1	$1^2 + 1 + 41 = 43$	ja
2	$2^2 + 2 + 41 = 47$	ja
3	$3^2 + 3 + 41 = 53$	ja
4	$4^2 + 4 + 41 = 61$	ja
5	$5^2 + 5 + 41 = 71$	ja
…		

Zet je onderzoek voort voor volgende waarden van n: 12, 14, 22, 39 en 40.
Wat kun je besluiten?

Voorbeeld 3:
Bereken de getalwaarde van…

VEELTERM	WAARDE	OPLOSSING
$n^2 + n - 3$	$n = 3$	$3^2 + 3 - 3$ $= 9 + 3 - 3$ $= 9$

VEELTERM	WAARDE	OPLOSSING
$p^2q - pq^2 - 4$	$p = 4$ $q = -2$	$4^2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-2)^2 - 4$ $= 16 \cdot (-2) - 4 \cdot 4 - 4$ $= -32 - 16 - 4$ $= -52$

8 Samenvatting

- Je weet wat een eenterm is.
  Een eenterm is een product van een coëfficiënt en letterfactoren met positieve exponenten.
- Je kunt de graad van een eenterm in een letter bepalen.
  De graad van een eenterm in een letter is de exponent van die letter in de eenterm.
- Je kunt de graad van een eenterm (in alle letters) bepalen.
  De graad van een eenterm is de som van de exponenten van alle letters die in de eenterm voorkomen.
- Je weet wat gelijksoortige eentermen zijn.
  Gelijksoortige eentermen zijn eentermen die hetzelfde lettergedeelte hebben.
- Je kunt de getalwaarde berekenen van een eenterm.
  Om de getalwaarde te berekenen van een eenterm vervang je de letters door de gegeven getallen en werk je daarna de rekenoefening uit.
- Je weet wat een veelterm is.
  Een veelterm is een som van eentermen.
- Je kunt de graad van een veelterm in een letter bepalen.
  De graad van een veelterm in een letter is de grootste exponent waarmee die letter in de veelterm voorkomt.
- Je kunt de getalwaarde berekenen van een veelterm.
  Om de getalwaarde te berekenen van een veelterm, vervang je de letters door de gegeven getallen en werk je daarna de rekenoefening uit.

3.2 Som en verschil van algebraïsche uitdrukkingen

1 Som en verschil van eentermen

Voorbeelden:

$$2a + 5a = (2+5) \cdot a = 7a$$

het vermenigvuldigen is distributief t.o.v. het optellen in $\mathbb{Q}$

$$\frac{1}{2}b - 3b = \left(\frac{1}{2} - 3\right) \cdot b = \left(\frac{1}{2} - \frac{6}{2}\right) \cdot b = -\frac{5}{2}b$$

het vermenigvuldigen is distributief t.o.v. het aftrekken in $\mathbb{Q}$

We spreken af dat we tussenstappen (zo veel mogelijk) weglaten:

$$7x + 18x = 25x$$

$$-9y - 5y = -14y$$

$$2x^2 + x^2 - 6x^2 = 3x^2 - 6x^2 = -3x^2$$

$$\frac{3}{4}ab^2 - \frac{1}{3}ab^2 = \frac{9}{12}ab^2 - \frac{4}{12}ab^2 = \frac{5}{12}ab^2$$

Merk op:

Alle eentermen hebben hetzelfde lettergedeelte.

Een vorm zoals $2a + 3b$ kun je niet korter noteren (herleiden) omdat de eentermen niet-gelijksoortig zijn.

Gelijksoortige eentermen optellen en aftrekken

Om gelijksoortige eentermen op te tellen of af te trekken:

- Bereken de som of het verschil van de coëfficiënten.
- Behoud het lettergedeelte.

Als de eentermen letters in de exponenten hebben, gebruik je dezelfde werkwijze.

Voorbeelden:

$2x^n + 5x^n = 7x^n \longrightarrow$ lettergedeelte is x^n

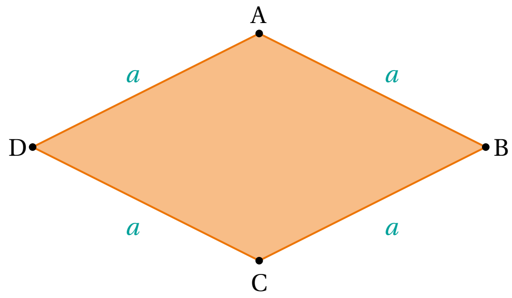
$-5y^q + 12y^q = 7y^q \longrightarrow$ lettergedeelte is y^q

$3x^{m+1} - \frac{1}{3}x^{m+1} = \frac{8}{3}x^{m+1} \longrightarrow$ lettergedeelte is x^{m+1}

Maar $x^m + x^n$ kun je niet korter noteren of herleiden omdat de eentermen niet hetzelfde lettergedeelte hebben.

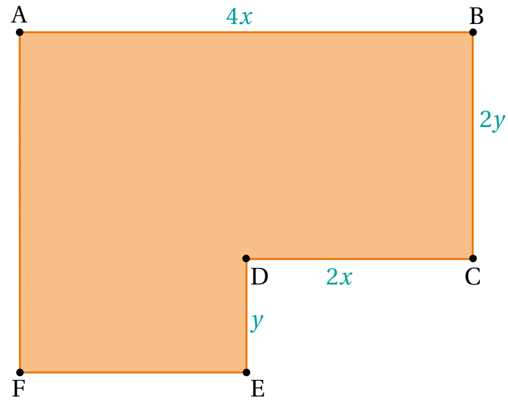
2 Veeltermen herleiden en rangschikken

Onderzoeksopdracht 1:
Bereken de omtrek van de ruit.
Noteer deze omtrek zo bondig mogelijk.



De veelterm $a + a + a + a$ kun je eenvoudiger (= met minder termen) schrijven: $a + a + a + a = 4a$

Onderzoeksopdracht 2:
Bereken de lengte van [FE] en van [AF].
Bereken nadien de omtrek van de veelhoek ABCDEF.
Noteer ook deze omtrek zo eenvoudig mogelijk.



De veelterm $4x + 2y + 2x + y + 2x + 3y$ kun je nog **herleiden**.
Je zult dan alle gelijksoortige eentermen optellen of aftrekken.

Tip: onderstreep alle gelijksoortige termen op dezelfde manier. Vergeet niet om het bewerkingsteken voor elke term mee te onderstrepen.

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 2x + y + 2x + 3y &= 4x + 2x + 2x + 2y + y + 3y \\ &= 8x + 6y \end{aligned}$$

Herleiden
Om een veelterm te herleiden, maak je de som of het verschil van de gelijksoortige eentermen.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} a^3 + a - 2a^2 + 6a - 9a^2 &= a^3 + a + 6a - 2a^2 - 9a^2 \\ &= a^3 + 7a - 11a^2 \end{aligned}$$

Om in een veelterm wat orde te scheppen, kunnen we de veelterm **rangschikken**.

Rangschikken
Om een veelterm te rangschikken, zul je de veelterm noteren naar dalende of stijgende machten van een bepaalde letter.

Voorbeelden:

$5x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 17x$	is gerangschikt naar dalende machten van x.
$5 - 6y + 8y^2 - 7y^4$	is gerangschikt naar stijgende machten van y.
$\frac{1}{4}a^2 - \frac{6}{5}ab + b^2$	is gerangschikt naar dalende machten van a, maar ook naar stijgende machten van b.

3 Som van veeltermen

Voorbeelden:

$$
\begin{aligned}
& (2a^2 + 3a) + (5a^2 - 2a) \\
={}& 2a^2 + 3a + 5a^2 - 2a && \text{het optellen van rationale getallen is associatief} \\
={}& 2a^2 + 5a^2 + 3a - 2a && \text{het optellen van rationale getallen is commutatief} \\
={}& 7a^2 + a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (x^2 + 2x + 3) + (3x^2 - 4x + 5) \\
={}& x^2 + 2x + 3 + 3x^2 - 4x + 5 \\
={}& x^2 + 3x^2 + 2x - 4x + 3 + 5 \\
={}& 4x^2 - 2x + 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (6a^3 - 5a^2 + a) + (-8a^3 - 6a^2 - a) \\
={}& 6a^3 - 5a^2 + a - 8a^3 - 6a^2 - a \\
={}& 6a^3 - 8a^3 - 5a^2 - 6a^2 + a - a \\
={}& -2a^3 - 11a^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left(a + \frac{5}{2}b\right) + \left(\frac{1}{3}a - 5b\right) \\
={}& a + \frac{5}{2}b + \frac{1}{3}a - 5b \\
={}& a + \frac{1}{3}a + \frac{5}{2}b - 5b \\
={}& \frac{4}{3}a - \frac{5}{2}b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (3a^m + 2a^k) + (-5a^k - 4a^m) \\
={}& 3a^m + 2a^k - 5a^k - 4a^m \\
={}& 3a^m - 4a^m + 2a^k - 5a^k \\
={}& -a^m - 3a^k
\end{aligned}
$$

Som van veeltermen

Om een som van veeltermen te berekenen:

- Werk de haakjes weg.
- Tel de gelijksoortige termen op.

4 Verschil van veeltermen

Herinner je je de regels om haakjes weg te werken:

$$
\begin{aligned}
a - (b + c) &= a - b - c \\
a - (b - c) &= a - b + c \\
a - (-b + c) &= a + b - c \\
a - (-b - c) &= a + b + c
\end{aligned}
$$

Voorbeelden:

$$
\begin{aligned}
& (x^2 + x - 2) - (2x^2 - 2x) \\
={}& x^2 + x - 2 - 2x^2 + 2x \\
={}& x^2 - 2x^2 + x + 2x - 2 \\
={}& -x^2 + 3x - 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -(2a + 3b - 4) - (-5a + 4b - 8) \\
={}& -2a - 3b + 4 + 5a - 4b + 8 \\
={}& -2a + 5a - 3b - 4b + 4 + 8 \\
={}& 3a - 7b + 12
\end{aligned}
$$

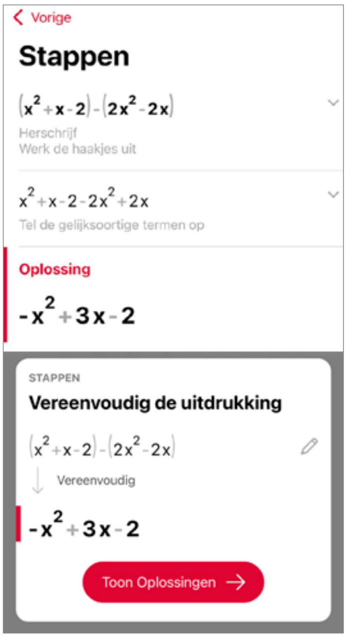
Verschil van veeltermen

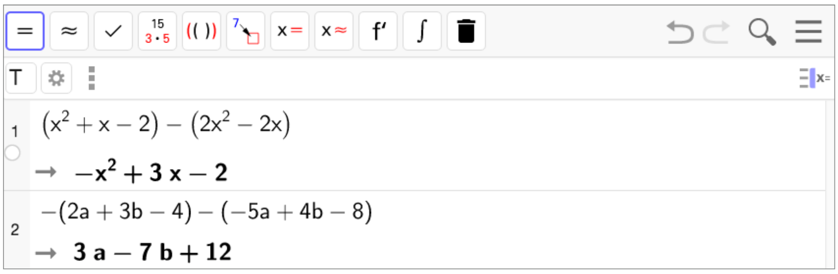
Om een verschil van twee veeltermen te berekenen:

- Werk de haakjes weg: laat het minteken en de haakjes voor de tweede veelterm weg en vervang elke term van de veelterm door zijn tegengestelde.
- Tel de gelijksoortige termen op.

Je kunt jezelf controleren door van de opgave een foto te trekken met de app Photomath of Mathsolver.
Ook met de CAS van GeoGebra kun je rekenen met veeltermen.

Voorbeeld:





5 Samenvatting

- Je kunt gelijksoortige eentermen optellen en aftrekken.
  - Bereken de som of het verschil van de coëfficiënten.
  - Behoud het lettergedeelte.

- Je kunt een veelterm herleiden en rangschikken.
  - Om een veelterm te herleiden, maak je de som of het verschil van de gelijksoortige eentermen.
  - Om een veelterm te rangschikken, zul je de veelterm noteren naar dalende of stijgende machten van een bepaalde letter.

- Je kunt de som bepalen van veeltermen.
  - Werk de haakjes weg.
  - Tel de gelijksoortige termen op.

- Je kunt het verschil bepalen van veeltermen.
  - Werk de haakjes weg: laat het minteken en de haakjes voor de tweede veelterm weg en vervang elke term van die veelterm door zijn tegengestelde.
  - Tel de gelijksoortige termen op.

3.3

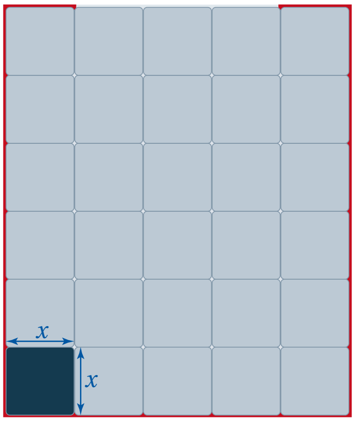
Product van algebraïsche uitdrukkingen

1 Product van eentermen

De vloer van een garage is bedekt met vierkante tegels waarvan de zijde x cm is.

De lengte van deze garage kan worden uitgedrukt met de eenterm $6x$.
De breedte kan worden uitgedrukt met de eenterm $5x$.

We willen graag de oppervlakte kennen van de vloer van deze garage.



Om dit te kunnen berekenen moet je een beroep doen op een aantal zaken uit jouw wiskunderugzak.

- De formule voor de oppervlakte van een rechthoek: $A = l \cdot b$.
- De eigenschappen van de vermenigvuldiging.
  'Het vermenigvuldigen van rationale getallen is commutatief en associatief.'
- De rekenregel voor machten met eenzelfde grondtal.
  'Om machten met eenzelfde grondtal te vermenigvuldigen, behoud je het grondtal en tel je de exponenten met elkaar op.'

De oppervlakte van de vloer van de garage wordt dus:

$$\begin{aligned} 6x \cdot 5x &= 6 \cdot 5 \cdot x \cdot x \\ &= 30x^2 \end{aligned}$$

Controleer op de figuur en je zult 30 vierkante tegels tellen, elk met een oppervlakte van x^2 cm^2.

Eentermen vermenigvuldigen
Om eentermen met elkaar te vermenigvuldigen:
- Bereken het product van de coëfficiënten.
- Bereken het product van de letterfactoren (pas de regel toe om machten met eenzelfde grondtal met elkaar te vermenigvuldigen).

Voorbeelden:

$2 \cdot (-4a) = -8a$

$7x^3 \cdot (x^5) = 7x^8$

$0{,}4c \cdot 3d = 1{,}2cd$

$\frac{2}{3}xy \cdot \frac{-3}{7}y = \frac{-2}{7}xy^2$

Met letterexponenten:

$y^{3m} \cdot y^{2m} = y^{5m}$

$\frac{1}{2}a^m \cdot 6a^m = 3a^{2m}$

$4a^m \cdot (-3a^2) = -12a^{m+2}$

$x^{m+1} \cdot x^{m+2} = x^{2m+3}$

2 Macht van een eenterm

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}(2a^3)^2 &= (2a^3)\cdot(2a^3)\\ &= 2\cdot a^3\cdot 2\cdot a^3\\ &= 2\cdot 2\cdot a^3\cdot a^3\\ &= 2^2\cdot (a^3)^2\\ &= 4a^6\end{aligned}$$

Macht van een eenterm

Om een macht van een eenterm te berekenen:

- Bereken de macht van de coëfficiënt.
- Bereken de macht van het lettergedeelte (pas de regel toe om een macht van een macht te berekenen).

Nog meer voorbeelden:

$$\begin{aligned}(3x)^4 &= 3^4\cdot x^4\\ &= 81x^4\end{aligned}$$

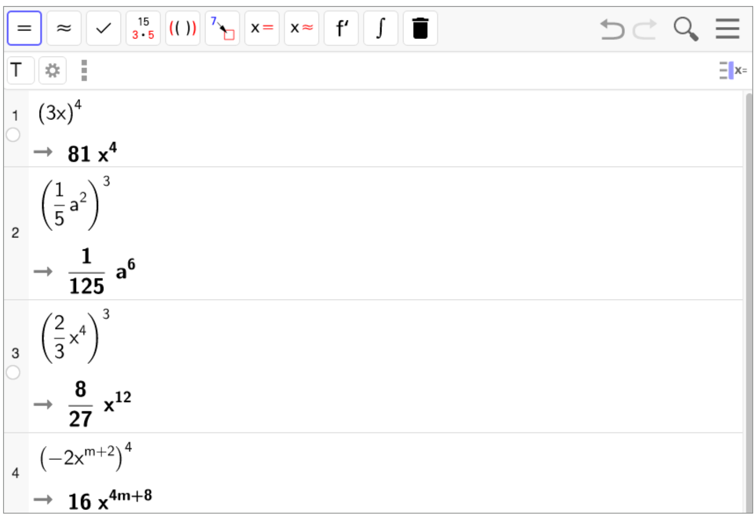
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{5}a^2\right)^3 &= \left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot (a^2)^3\\ &= \frac{1}{125}\cdot a^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}x^4\right)^3 &= \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot (x^4)^3\\ &= \frac{2^3}{3^3}\cdot x^{12}\\ &= \frac{8}{27}x^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-2x^{m+2})^4 &= (-2)^4\cdot (x^{m+2})^4\\ &= 16x^{4m+8}\end{aligned}$$

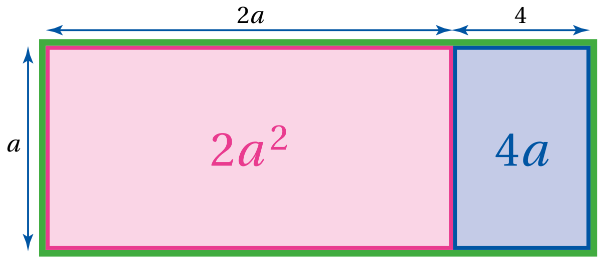
Taak:

Controleer met ICT.



3 Product van een veelterm met een eenterm

De oppervlakte A van de grote groene rechthoek kun je op verschillende manieren weergeven.



$$A_{\text{grote rechthoek}} = (2a+4)\cdot a \qquad \longleftarrow ❶$$

$$\begin{aligned} A_{\text{grote rechthoek}} &= A_{\text{rechthoek 1}} + A_{\text{rechthoek 2}} \\ &= 2a\cdot a + 4\cdot a \\ &= 2a^2 + 4a \qquad \longleftarrow ❷ \end{aligned}$$

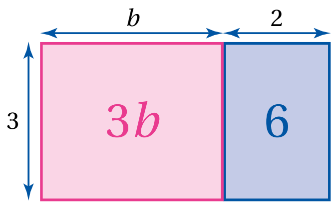
Omdat ❶ = ❷, is dus ook $(2a+4)\cdot a = 2a^2+4a$.

Inderdaad, volg even mee en herken de distributiviteit van het vermenigvuldigen ten opzichte van het optellen (**de haakjesregel**):

$$(2a+4)\cdot a = 2a\cdot a + 4\cdot a = 2a^2+4a$$

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 3\cdot(b+2) &= 3b+3\cdot 2 \\ &= 3b+6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^3\cdot(x-4) &= x^3\cdot x - x^3\cdot 4 \\ &= x^4-4x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2y\cdot(3y^2-1) &= -2y\cdot 3y^2-(-2y)\cdot 1 \\ &= -6y^3+2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4\cdot(x+1) &= -4\cdot x + (-4)\cdot 1 \\ &= -4x-4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a^4\cdot\left(\frac{1}{2}a+1\right) &= 2a^4\cdot\frac{1}{2}a + 2a^4\cdot 1 \\ &= a^5 + 2a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y+2)\cdot\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\cdot y + 2\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}y + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^3-2)\cdot 4a &= a^3\cdot 4a - 2\cdot 4a \\ &= 4a^4-8a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}a\cdot\left(-4a^3+2a^2+1\right) &= \frac{1}{3}a\cdot\left(-4a^3\right) + \frac{1}{3}a\cdot 2a^2 + \frac{1}{3}a\cdot 1 \\ &= \frac{-4}{3}a^4 + \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0{,}5k^2\cdot(-14k-7) &= 0{,}5k^2\cdot(-14k)-0{,}5k^2\cdot 7 \\ &= -7k^3-3{,}5k^2 \end{aligned}$$

Product van een eenterm met een veelterm

Om een eenterm met een veelterm te vermenigvuldigen:
- Vermenigvuldig elke term van de veelterm met de eenterm.
- Werk de verkregen producten uit.
  Herleid, indien mogelijk, de verkregen veelterm.

De werkwijze is ook geldig voor eentermen en veeltermen met verschillende letters.

Voorbeelden:

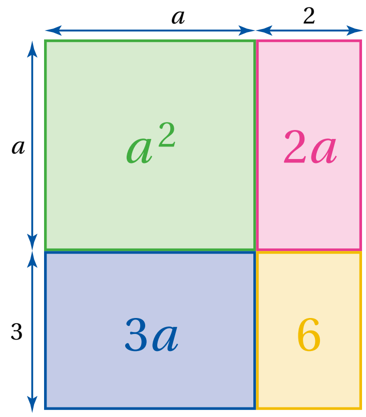
$$\begin{aligned} & -3xy \cdot (x^2 - 5xy + 2y^2) \\ = & -3xy \cdot x^2 - 3xy \cdot (-5xy) - 3xy \cdot 2y^2 \\ = & -3x^3y + 15x^2y^2 - 6xy^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}a^3b^2 \cdot \left(\frac{2}{3}ab + \frac{3}{7}b\right) \\ = & \frac{1}{2}a^3b^2 \cdot \frac{2}{3}ab + \frac{1}{2}a^3b^2 \cdot \frac{3}{7}b \\ = & \frac{1}{3}a^4b^3 + \frac{3}{14}a^3b^3 \end{aligned}$$

4 Product van veeltermen

Bij het vermenigvuldigen van veeltermen zullen we ook gebruikmaken van de distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling.
Bovendien weten we ook dat we gelijksoortige eentermen kunnen herleiden.

$$\begin{aligned} (a+2) \cdot (a+3) &= a \cdot (a+3) + 2 \cdot (a+3) \\ &= a^2 + 3a + 2a + 6 \\ &= a^2 + 5a + 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (2a+3) \cdot (4a-5) &= 2a \cdot (4a-5) + 3 \cdot (4a-5) \\ &= 8a^2 - 10a + 12a - 15 \\ &= 8a^2 + 2a - 15 \end{aligned}$$

Product van twee veeltermen

Om twee veeltermen met elkaar te vermenigvuldigen:
- Vermenigvuldig elke term van de eerste veelterm met elke term van de tweede veelterm.
- Werk de verkregen producten uit.
  Herleid, indien mogelijk, de verkregen veelterm.

Opmerking: Let op voor de (min)tekens!

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} (2x-3) \cdot (2x^2 - 4x + 7) &= 2x \cdot 2x^2 + 2x \cdot (-4x) + 2x \cdot 7 - 3 \cdot 2x^2 - 3 \cdot (-4x) - 3 \cdot 7 \\ &= 4x^3 - 8x^2 + 14x - 6x^2 + 12x - 21 \\ &= 4x^3 - 14x^2 + 26x - 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3a-2b) \cdot (a-3b) &= 3a \cdot a + 3a \cdot (-3b) - 2b \cdot a - 2b \cdot (-3b) \\ &= 3a^2 - 9ab - 2ab + 6b^2 \\ &= 3a^2 - 11ab + 6b^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(5x^2-3xy+6y^2)\cdot(4x-3y) &= 5x^2\cdot 4x+5x^2\cdot(-3y)-3xy\cdot 4x-3xy\cdot(-3y)+6y^2\cdot 4x+6y^2\cdot(-3y)\\
&= 20x^3\underline{-15x^2y-12x^2y}\underline{+9xy^2+24xy^2}-18y^3\\
&= 20x^3\underline{-27x^2y}\underline{+33xy^2}-18y^3
\end{aligned}
$$

$$b^k\cdot(b^2+3) = b^{2+k}+3b^k$$

$$
\begin{aligned}
(a^{2m}+3)\cdot(a^{3m}-5) &= a^{2m}\cdot a^{3m}+a^{2m}\cdot(-5)+3\cdot a^{3m}+3\cdot(-5)\\
&= a^{5m}-5a^{2m}+3a^{3m}-15
\end{aligned}
$$

Als je al veel geoefend hebt, mag je ook bepaalde tussenstappen weglaten.

$$
\begin{aligned}
(-x+y)\cdot(4x+2y) &= -4x^2\underline{-2xy+4xy}+2y^2\\
&= -4x^2\underline{+2xy}+2y^2
\end{aligned}
$$

5 Samenvatting

- Je kunt eentermen met elkaar vermenigvuldigen.
  - Bereken het product van de coëfficiënten.
  - Bereken het product van de letterfactoren. Pas de rekenregel toe om machten met hetzelfde grondtal te vermenigvuldigen.
- Je kunt een macht van een eenterm berekenen.
  - Bereken de macht van de coëfficiënt.
  - Bereken de macht van het lettergedeelte. Pas de rekenregel toe om een macht van een macht te berekenen.
- Je kunt een eenterm met een veelterm vermenigvuldigen.
  - Vermenigvuldig elke term van de veelterm met de eenterm.
  - Werk de verkregen producten uit.
    Herleid, indien mogelijk, de verkregen veelterm.
- Je kunt twee veeltermen met elkaar vermenigvuldigen.
  - Vermenigvuldig elke term van de eerste veelterm met elke term van de tweede veelterm.
  - Werk de verkregen producten uit.
    Herleid, indien mogelijk, de verkregen veelterm.

Herkomst van de algebra: Evariste Galois

Het leven van Evariste Galois (1811–1832) leest als een roman, gevuld met revolutionaire praktijken, een onbeantwoorde liefde, twee gevangenisbezoeken en een duel. Maar hij had ook een onmiskenbaar wiskundetalent, dat pas na zijn dood werd erkend. Hij werd 'de tienerwiskundige' genoemd en heeft de basis gelegd voor het al dan niet vinden van oplossingsmethodes voor algebraïsche vergelijkingen van hogere graad. Ook al was Evariste een van de knapste wiskundestudenten van zijn school, hij haalde altijd tekorten op examens en discussieerde uren met zijn leerkrachten, die zijn genie niet erkenden. Hij deed ook tweemaal mee aan het toelatingsexamen van de prestigieuze École Polytechnique, maar ving ook daar bot. De omstandigheden van zijn dood zijn vrij mysterieus, maar we weten wel dat hij in een duel is gestorven. Hij was er vrij zeker van dat hij het niet zou overleven en pende daarom de nacht voor het duel al zijn wiskundige theorieën neer in een brief. Hij werd geraakt in de buik en overleed de dag erna aan zijn verwondingen.

3.4 Merkwaardige producten

Sommige producten van veeltermen zijn zo speciaal dat je ze veel sneller kunt uitwerken. We noemen die producten merkwaardige producten. Dit schooljaar zul je twee formules leren zodat je ze gebruiksklaar in je wiskunderugzak hebt zitten.

1 Kwadraat van een tweeterm

Hoe kom je aan de eerste formule? Volg even mee …

Algemeen:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(a+b)}_{\text{tweeterm}}{}^{\overset{\text{kwadraat}}{2}} &= (a+b)\cdot(a+b)\\
&= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b\\
&= a^2 + ab + ab + b^2\\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

Voorbeeld:

$$
\begin{aligned}
(x+4)^2 &= (x+4)\cdot(x+4)\\
&= x\cdot x + 4\cdot x + x\cdot 4 + 4\cdot 4\\
&= x^2 + 4x + 4x + 16\\
&= x^2 + 8x + 16
\end{aligned}
$$

In het resultaat heb je naast het kwadraat van de eerste term en het kwadraat van de andere term nog het dubbel product van beide termen.

Kwadraat van een tweeterm

in symbolen: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

in woorden: Het **kwadraat van een tweeterm** is gelijk aan de som van
het kwadraat van de eerste term;
het dubbel product van de twee termen;
het kwadraat van de tweede term.

Merk op:

- De twee kwadraattermen zijn steeds positief.
- Het dubbel product is positief als beide termen in de opgave hetzelfde toestandsteken hebben. Is een van beide termen negatief, dan is het dubbel product negatief.

Voorbeelden:

$$
\begin{aligned}
(a+3)^2 &= a^2 + 2\cdot 3\cdot a + 3^2\\
&= a^2 + 6a + 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{2}{3}x\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\\
&= \frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3a-2b)^2 &= (3a)^2 - 2\cdot 3a\cdot 2b + (2b)^2\\
&= 9a^2 - 12ab + 4b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-3a^m-2b)^2 &= (-3a^m)^2 + 2\cdot 3a^m\cdot 2b + (-2b)^2\\
&= 9a^{2m} + 12a^m b + 4b^2
\end{aligned}
$$

Als je voldoende geoefend hebt, zul je de tussenstap weglaten en onmiddellijk het eindresultaat noteren.

2 Product van twee toegevoegde tweetermen

Toegevoegde tweetermen zijn tweetermen waarbij één term dezelfde is gebleven en de andere term van teken is veranderd.

Voorbeelden:

$x + 5$	en	$x - 5$
$2 - 3x$	en	$-3x - 2$
$a + b$	en	$a - b$

Hoe kom je aan de tweede formule? Volg even mee…

Algemeen:

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b\\ &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}(x-8)\cdot(x+8) &= x\cdot x + 8\cdot x - 8\cdot x - 8\cdot 8\\ &= x^2 + 8x - 8x - 64\\ &= x^2 - 64\end{aligned}$$

Merk op:
In de tussenstap staan steeds twee tegengestelde termen die verdwijnen. Het eindresultaat is het verschil van het kwadraat van de gelijke term met het kwadraat van een van de tegengestelde termen.

Product van toegevoegde tweetermen

in symbolen: $(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$

in woorden: Het **product van twee toegevoegde tweetermen** is gelijk aan het verschil van:
het kwadraat van de gelijke term
met het kwadraat van een van de tegengestelde termen.

Tip:
- Onderstreep in de opgave de term die gelijk gebleven is.
- Kijk ook na of de andere term wel degelijk van teken veranderde. Is dat niet het geval, dan heb je hier te maken met de eerste formule.

Voorbeelden:

$$\begin{aligned}(\underline{a}+3)\cdot(\underline{a}-3) &= a^2 - 3^2\\ &= a^2 - 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0{,}3\,\underline{+\,x})\cdot(\underline{x} - 0{,}3) &= x^2 - 0{,}3^2\\ &= x^2 - 0{,}09\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^2\underline{+2b^3})\cdot(-a^2\underline{+2b^3}) &= (2b^3)^2 - (a^2)^2\\ &= 4b^6 - a^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{5}a\,\underline{+\frac{1}{5}b^3}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}a\,\underline{+\frac{1}{5}b^3}\right) &= \left(\frac{1}{5}b^3\right)^2 - \left(\frac{3}{5}a\right)^2\\ &= \frac{1}{25}b^6 - \frac{9}{25}a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-4+a^3)\cdot(a^3-4) &= (a^3-4)^2\\ &= a^6 - 8a^3 + 16\end{aligned}$$

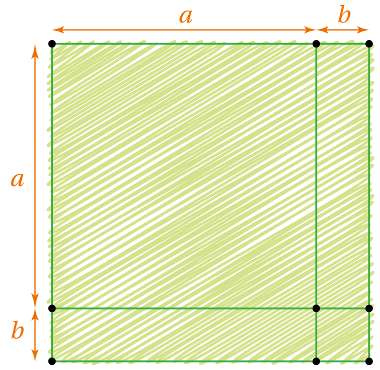
$$\begin{aligned}(\underline{6x^m} - 5x^{m+1})\cdot(\underline{6x^m} + 5x^{m+1}) &= (6x^m)^2 - (5x^{m+1})^2\\ &= 36x^{2m} - 25x^{2m+2}\end{aligned}$$

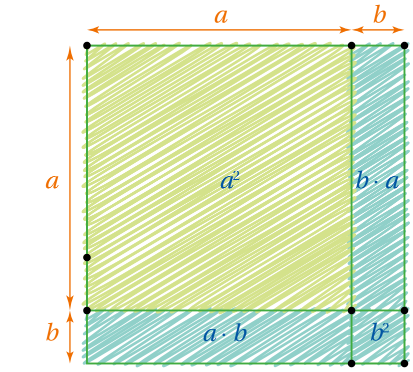
Als je voldoende geoefend hebt, zul je de tussenstap weglaten en onmiddellijk het eindresultaat noteren.

3 Merkwaardige producten in een vierkant

Beide formules kun je ook voorstellen in een vierkant.

Kwadraat van een tweeterm



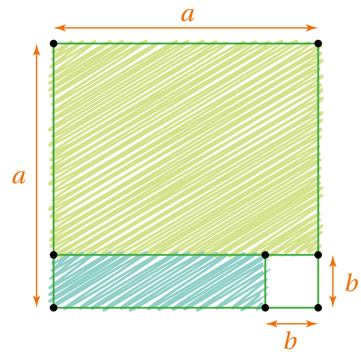


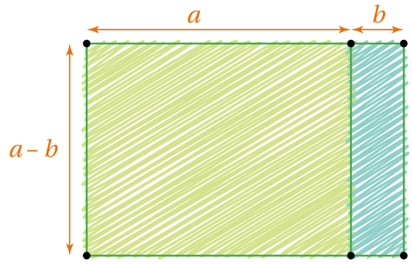
$$A_{\text{groot vierkant}} = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2$$

$$A_{\text{groot vierkant}} = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Besluit: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Product van twee toegevoegde tweetermen





$A + A = a^2 - b^2$

$$A + A = a\cdot(a-b) + b\cdot(a-b) = (a+b)\cdot(a-b)$$

Besluit: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

4 Samenvatting

- Je kent volgende formules voor merkwaardige producten en kunt ze verklaren en toepassen.

KWADRAAT VAN EEN TWEETERM	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Het kwadraat van een tweeterm is gelijk aan de som van het kwadraat van de eerste term; het dubbel product van de twee termen; het kwadraat van de tweede term.

PRODUCT VAN TOEGEVOEGDE TWEETERMEN	
$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$	Het product van twee toegevoegde tweetermen is gelijk aan het verschil van: het kwadraat van de gelijke term met het kwadraat van een van de tegengestelde termen.