2.1

Machten met gehele exponenten

1 Machten met een gehele exponent

Vorig schooljaar leerde je machten berekenen van rationale getallen waarbij de exponent een natuurlijk (met andere woorden een positief geheel) getal was.

$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$ (een product van 4 factoren 7)

We vragen ons af wat er zou gebeuren mocht de exponent een negatief geheel getal zijn.
Volg nu eens de onderstaande redenering, waarbij we de exponent telkens één geheel kleiner maken.

$$\begin{array}{ccc}
 & 2^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16 & \\
:2 \downarrow & & \uparrow \cdot 2 \\
 & 2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8 & \\
:2 \downarrow & & \uparrow \cdot 2 \\
 & 2^2 = 2\cdot 2 = 4 & \\
:2 \downarrow & & \uparrow \cdot 2 \\
 & 2^1 = 2 = 2 & \\
:2 \downarrow & & \uparrow \cdot 2 \\
 & 2^0 = \dfrac{2}{2} = 1 & \\
:2 \downarrow & & \uparrow \cdot 2 \\
 & 2^{-1} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2} & \\
:2 \downarrow & & \uparrow \cdot 2 \\
 & 2^{-2} = \dfrac{1}{2\cdot 2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4} & \\
:2 \downarrow & & \uparrow \cdot 2 \\
 & 2^{-3} = \dfrac{1}{2\cdot 2\cdot 2} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} & \\
:2 \downarrow & & \uparrow \cdot 2 \\
 & 2^{-4} = \dfrac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16} &
\end{array}$$

Vaststelling:
Telkens als je de exponent met één geheel vermindert, wordt het resultaat gedeeld door twee.
Telkens als je de exponent met één geheel vermeerdert, wordt het resultaat vermenigvuldigd met twee.

Merk op:

- Je ziet dus dat 2^{-3} het omgekeerde is van 2^3.
- Deze redenering is ook geldig voor andere grondtallen. Zo is 5^{-3} het omgekeerde van 5^3.
- De nulde macht van een getal is steeds 1, behalve als het getal nul is. De macht 0^0 wordt niet gedefinieerd.

Voorbeelden:

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $\quad$ $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000}$ $\quad$ $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\quad$ $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ $\quad$ $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

Omdat het grondtal elk rationaal getal verschillend van 0 mag voorstellen, kunnen we die vervangen door een letter. Om te komen tot een definitie in symbolen vervangen we ook de exponent door een letter:

macht met negatieve exponent

$\forall a \in \mathbb{Q}_0, \forall n \in \mathbb{N}: \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

In bovenstaande definitie mag je a ook vervangen door een breuk. Volg mee wat er gebeurt:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

De breuk wordt omgedraaid en de exponent verandert van teken.

Als het grondtal een breuk is, kun je de definitie in symbolen als volgt noteren:

macht met negatieve exponent

$\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \forall n \in \mathbb{N}: \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

Voorbeelden:

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^{-3} = \left(-\frac{6}{5}\right)^3 = -\frac{216}{125}$$

$$(0,5)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

$$(1,25)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

Om het jou gemakkelijker te maken, kun je bij het rekenen met machten de oefeningen sneller oplossen door gebruik te maken van enkele rekenregels:

- product van machten met hetzelfde grondtal
- quotiënt van machten met hetzelfde grondtal
- macht van een macht
- macht van een product
- macht van een quotiënt

2 Product van machten met hetzelfde grondtal

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 2^4 \cdot 2^3 &= (2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2) \\ &= 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 \\ &= 2^7 \\ &= 2^{4+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^{-3}\cdot 10^{-2} &= \frac{1}{10^3}\cdot\frac{1}{10^2} \\ &= \frac{1}{10^3\cdot 10^2} \\ &= \frac{1}{10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10} \\ &= \frac{1}{10^5} \\ &= 10^{-5} \\ &= 10^{-3+(-2)} \end{aligned}$$

Vanuit die getallenvoorbeelden kunnen we onderstaande rekenregel afleiden:

rekenregel

in woorden:
Om machten met hetzelfde grondtal te vermenigvuldigen, behoud je het grondtal en tel je de exponenten bij elkaar op.

in symbolen:
$\forall\, a \in \mathbb{Q}_0, \forall\, n, p \in \mathbb{Z}: \qquad a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

Voorbeelden:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)^{2+1}=\left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{27}{64}$$

$$3^4\cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6 = 729$$

We kunnen de rekenregel ook toepassen als het grondtal van de macht een letter is.
De letter is dan de plaatsvervanger van een willekeurig grondtal verschillend van 0.

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} a^2\cdot a^4 &= a^{2+4} \\ &= a^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{-8}\cdot x^3 &= x^{-8+3} \\ &= x^{-5} \\ &= \frac{1}{x^5} \end{aligned}$$

Merk op:

- Let op bij exponent 1: die wordt meestal niet geschreven.
  $x^3 \cdot x = x^4$
- De rekenregel geldt ook voor een product van meerdere machten.
  $x^4 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot x = x^{4+3+2+1} = x^{10}$
  $a^2 \cdot a^5 \cdot a^{-4} = a^{2+5+(-4)} = a^3$

3 Quotiënt van machten met hetzelfde grondtal

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 2^8 : 2^5 &= \frac{2^8}{2^5} \\ &= \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} \\ &= 2\cdot2\cdot2 \\ &= 2^3 \\ &= 2^{8-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^2 : 10^4 &= \frac{10^2}{10^4} \\ &= \frac{10\cdot10}{10\cdot10\cdot10\cdot10} \\ &= \frac{1}{10\cdot10} \\ &= \frac{1}{10^2} \\ &= 10^{-2} \\ &= 10^{2-4} \end{aligned}$$

Vanuit die getallenvoorbeelden kunnen we onderstaande rekenregel afleiden:

rekenregel

in woorden:
Om machten met hetzelfde grondtal door elkaar te delen, behoud je het grondtal en trek je de exponenten van elkaar af.

in symbolen:
$\forall\, a \in \mathbb{Q}_0, \forall\, n, p \in \mathbb{Z}$: $\quad a^n : a^p = a^{n-p}$

Voorbeelden:

$$\left(-\frac{5}{8}\right)^{12} : \left(-\frac{5}{8}\right)^{9} = \left(-\frac{5}{8}\right)^{12-9} = \left(-\frac{5}{8}\right)^{3} = -\frac{125}{512}$$

$$0{,}1^7 : 0{,}1^6 = 0{,}1^{7-6} = 0{,}1^1 = 0{,}1$$

We kunnen deze rekenregel ook toepassen als het grondtal van de macht een letter is.
De letter is dan plaatsvervanger van een willekeurig grondtal verschillend van 0.

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} b^5 : b^{-2} &= b^{5-(-2)} \\ &= b^{5+2} \\ &= b^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{-2} : x^4 &= x^{-2-4} \\ &= x^{-6} \\ &= \frac{1}{x^6} \end{aligned}$$

Merk op:

- Let op bij exponent 1: die wordt meestal niet geschreven.
  $b^4 : b = b^{4-1} = b^3$
- De rekenregel geldt ook bij meerdere machten en in combinatie met de vorige rekenregel.
  $a^4 \cdot a^5 : a^6 = a^{4+5-6} = a^3$
  $x^3 : x \cdot x^4 : x^5 = x^{3-1+4-5} = x^1 = x$

4 Macht van een macht

Voorbeelden:

$$\left(2^3\right)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6 = 2^{3 \cdot 2}$$

$$\left(10^{-5}\right)^4 = 10^{-5} \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-5} = 10^{-20} = 10^{-5 \cdot 4}$$

$$\left(7^{-6}\right)^2 = 7^{-6} \cdot 7^{-6} = 7^{-12} = 7^{-6 \cdot 2}$$

$$\left(9^{-3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(9^{-3}\right)^2} = \frac{1}{9^{-3} \cdot 9^{-3}} = \frac{1}{9^{-6}} = 9^6 = 9^{-3 \cdot (-2)}$$

Vanuit die getallenvoorbeelden kunnen we onderstaande rekenregel afleiden:

rekenregel

in woorden:
Om een macht tot een macht te verheffen, behoud je het grondtal en vermenigvuldig je de exponenten.

in symboelen:
$\forall\, a \in \mathbb{Q}_0, \forall\, n, p \in \mathbb{Z}: \qquad (a^n)^p = a^{n \cdot p}$

Voorbeelden:

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3 \cdot (-2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{729}{64}$$

$$\left((0,5)^{-2}\right)^{-1} = 0,5^{-2 \cdot (-1)} = 0,5^2 = 0,25$$

We kunnen deze rekenregel ook toepassen als het grondtal van de macht een letter is.
De letter is dan plaatsvervanger van een willekeurig grondtal verschillend van 0.

Voorbeelden:

$$\left(q^2\right)^3 = q^{2 \cdot 3} = q^6$$

$$\left(-a^4\right)^2 = a^{4 \cdot 2} = a^8$$

$$\left(x^{-4}\right)^2 = x^{-4 \cdot 2} = x^{-8} = \frac{1}{x^8}$$

$$\left(x^{-3}\right)^{-2} = x^{-3 \cdot (-2)} = x^6$$

5 Macht van een product

Voorbeelden:

$$\begin{aligned}(2\cdot 10)^4 &= (2\cdot 10)\cdot(2\cdot 10)\cdot(2\cdot 10)\cdot(2\cdot 10)\\ &= 2\cdot 10\cdot 2\cdot 10\cdot 2\cdot 10\cdot 2\cdot 10\\ &= 2^4\cdot 10^4\\ &= 160\,000\end{aligned}$$

Zo kun je op een andere manier 20^4 berekenen.

$$\begin{aligned}(3\cdot 4)^3 &= (3\cdot 4)\cdot(3\cdot 4)\cdot(3\cdot 4)\\ &= 3\cdot 4\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 4\\ &= 3^3\cdot 4^3\\ &= 1728\end{aligned}$$

Zo kun je op een andere manier 12^3 berekenen.

Vanuit die getallenvoorbeelden kunnen we onderstaande rekenregel afleiden:

rekenregel in woorden

in woorden:

Om een product tot een macht te verheffen, verhef je elke factor tot die macht.

in symbolen:

$\forall\, a, b \in \mathbb{Q}_0, \forall\, n \in \mathbb{Z}: \qquad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Voorbeelden:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}\right)^2 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2\\ &= \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{49}\\ &= \frac{4}{441}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\cdot 3)^{-3} &= 2^{-3}\cdot 3^{-3}\\ &= \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3^3}\\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{27}\\ &= \frac{1}{216}\end{aligned}$$

We kunnen deze rekenregel ook toepassen als de factoren van het product letters zijn.
De letter is dan plaatsvervanger van een willekeurig getal verschillend van 0.

Voorbeelden:

$$(a\cdot b\cdot c)^3 = a^3\cdot b^3\cdot c^3$$

$$\begin{aligned}(-2\cdot a)^3 &= (-2)^3\cdot a^3\\ &= -8\cdot a^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\cdot p\cdot q^4)^2 &= 2^2\cdot p^2\cdot (q^4)^2\\ &= 4\cdot p^2\cdot q^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\cdot a\cdot b)^{-3} &= 2^{-3}\cdot a^{-3}\cdot b^{-3}\\ &= \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^3}\\ &= \frac{1}{8\cdot a^3\cdot b^3}\end{aligned}$$

Merk op:

We kunnen de rekenregel ook van rechts naar links toepassen. Dat kan je soms wat rekenvoordeel opleveren.

$$\begin{aligned}2^5\cdot 5^5 &= (2\cdot 5)^5\\ &= 10^5\\ &= 100\,000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^6\cdot 0{,}5^6 &= (2\cdot 0{,}5)^6\\ &= 1^6\\ &= 1\end{aligned}$$

6 Macht van een quotiënt

Voorbeelden:

$$
\begin{aligned}
(1:2)^4 &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} \\
&= \frac{1^4}{2^4} \\
(&= 1^4 : 2^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8:3)^3 &= \left(\frac{8}{3}\right)^3 \\
&= \frac{8}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{8}{3} \\
&= \frac{8\cdot 8\cdot 8}{3\cdot 3\cdot 3} \\
&= \frac{8^3}{3^3} \\
(&= 8^3 : 3^3)
\end{aligned}
$$

Vanuit deze getallenvoorbeelden kunnen we onderstaande rekenregel afleiden:

rekenregel in woorden

in woorden:

Om een quotiënt tot een macht te verheffen, verhef je deeltal en deler tot die macht.

of

Om een breuk tot een macht te verheffen, verhef je teller en noemer tot die macht.

in symbolen:

$\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}: \qquad (a:b)^n = a^n : b^n$

of

$\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}: \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Grote en kleine getallen: stel je voor ...

10^{22} m (of 1 miljoen lichtjaren) is de doorsnede van ons melkwegstelsel.
10^{16} m (of 1 lichtjaar) is de afstand die het licht in 1 jaar aflegt.
10^{7} m (of tienduizend kilometer) is de diameter van de aarde.
10^{0} m (of 1 meter) is de lengte van de veer van een pauw.
10^{-5} m (of 10 micrometer) is de diameter van een cel van ons DNA.
10^{-14} m (of 10 femtometer) is de diameter van een atoom.

Voorbeelden:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$$

We kunnen deze rekenregel ook toepassen als deeltal en deler (of teller en noemer) letters bevatten. De letters zijn dan plaatsvervanger van een willekeurig getal verschillend van 0.

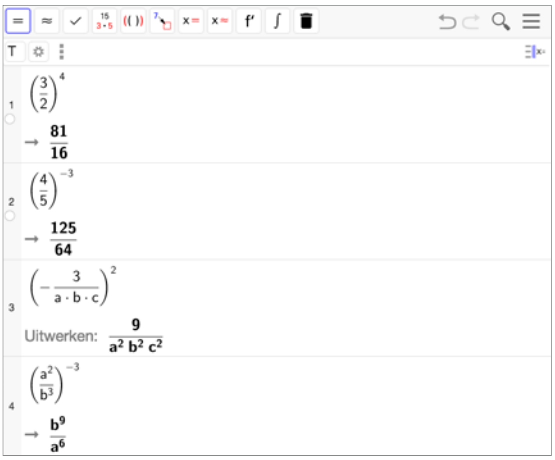
Voorbeelden:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$$

$$\left(\frac{-3}{a \cdot b \cdot c}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = \frac{9}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$$

$$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-3} = \left(\frac{b^3}{a^2}\right)^3 = \frac{\left(b^3\right)^3}{\left(a^2\right)^3} = \frac{b^9}{a^6}$$

Taak:
Controleer met ICT.



Een handig hulpblad

① Knip de volgende pagina uit op de stippellijn in de rug.
Op die bladzijde zie je nu twee soorten lijnen:
– – – – ② dikke stippellijn: hier plooi je over de volle breedte;
-------- ③ dunne stippellijn: die knip je met een schaar door.
Correct uitgevoerd?
Dan heb je een handig hulpblad bij het studeren van deze belangrijke rekenregels.

MACHT MET NEGATIEVE EXPONENT

- *grondtal omkeren*
- *exponent van teken veranderen*

$\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \forall n \in \mathbb{N}:$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$

$\forall a \in \mathbb{Q}_0, \forall n, p \in \mathbb{Z}:$

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

MACHT VAN EEN MACHT

- *grondtal behouden*
- *exponenten vermenigvuldigen*

PRODUCT VAN MACHTEN MET HETZELFDE GRONDTAL

- *grondtal behouden*
- *exponenten optellen*

$\forall a \in \mathbb{Q}_0, \forall n, p \in \mathbb{Z}:$

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$$

$\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \forall n \in \mathbb{Z}:$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

MACHT VAN EEN PRODUCT

- *verhef elke factor tot de macht*

QUOTIËNT VAN MACHTEN MET HETZELFDE GRONDTAL

- *grondtal behouden*
- *exponenten aftrekken*

$\forall a \in \mathbb{Q}_0, \forall n, p \in \mathbb{Z}:$

$$a^n : a^p = \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

$\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \forall n \in \mathbb{Z}:$

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

MACHT VAN EEN QUOTIËNT

- *verhef deler en deeltal tot de macht*

↑ ③ dunne stippellijn: KNIP ← ② dikke stippellijn: PLOOI ② dikke stippellijn: PLOOI → ③ dunne stippellijn: KNIP ↑

← ① dunne stippellijn: KNIP

← ① dunne stippellijn: KNIP

MACHT VAN EEN MACHT

MACHT VAN EEN PRODUCT

MACHT VAN EEN QUOTIËNT

MACHT MET NEGATIEVE EXPONENT

PRODUCT VAN MACHTEN MET HETZELFDE GRONDTAL

QUOTIËNT VAN MACHTEN MET HETZELFDE GRONDTAL

7 Samenvatting

- Je kunt de definitie van een macht met gehele exponenten noteren.

  $\forall a \in \mathbb{Q}_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

  $\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

- Je kunt de rekenregels voor machten formuleren en toepassen.

  Om machten met hetzelfde grondtal met elkaar te vermenigvuldigen, behoud je het grondtal en tel je de exponenten bij elkaar op.
  $\forall a \in \mathbb{Q}_0, \quad \forall n, p \in \mathbb{Z}: \quad a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

  Om machten met hetzelfde grondtal door elkaar te delen, behoud je het grondtal en trek je de exponenten van elkaar af.
  $\forall a \in \mathbb{Q}_0, \quad \forall n, p \in \mathbb{Z}: \quad a^n : a^p = a^{n-p}$

  Om machten tot een macht te verheffen, behoud je het grondtal en vermenigvuldig je de exponenten.
  $\forall a \in \mathbb{Q}_0, \quad \forall n, p \in \mathbb{Z}: \quad (a^n)^p = a^{n \cdot p}$

  Om een product tot een macht te verheffen, verhef je elke factor tot die macht.
  $\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}: \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

  Om een quotiënt tot een macht te verheffen, verhef je deeltal en deler tot die macht.
  $\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}: \quad (a : b)^n = a^n : b^n$

  Om een breuk tot een macht te verheffen, verhef je teller en noemer tot die macht.
  $\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}: \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Machten van 10: de voorvoegsels

De voorvoegsels die je in de wetenschappen gebruikt, duiden eigenlijk op een vermenigvuldiging van een macht van 10. De voorvoegsels voor grotere getallen ken je wellicht van de grootte van de harde schijf van een computer. De voorvoegsels van kleinere getallen zul je later in wetenschappelijke vakken bestuderen.

macht van 10	voorvoegsel	symbool	macht van 10	voorvoegsel	symbool
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	µ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deca	da	10^{-24}	yocto	y

2.2 Wetenschappelijke schrijfwijze

1 Machten van 10

WISKUNDE & WETENSCHAPPEN

Machten van tien worden in de wetenschap veel gebruikt.

$1 = 10^0$

$10 = 10^1$

$100 = 10^2$

$1000 = 10^3$

$10\,000 = 10^4$

$100\,000 = 10^5$

De exponent is gelijk aan het aantal nullen achter de 1.

De exponent zonder het minteken geeft het aantal nullen weer voor de 1.

$0{,}1 = 10^{-1}$

$0{,}01 = 10^{-2}$

$0{,}001 = 10^{-3}$

$0{,}0001 = 10^{-4}$

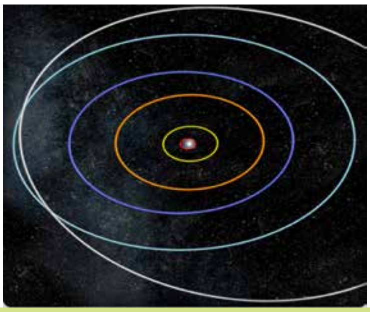
$0{,}00001 = 10^{-5}$

Maak een reis mee van 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 m of (iets makkelijker) 10^{36} m.

Eén miljoen lichtjaren van ons verwijderd: het melkwegstelsel.

$\gg 10^{22}$ m $\gg$ $\gg$

Ons zonnestelsel. De blauwe lijn volgt onze planeet.

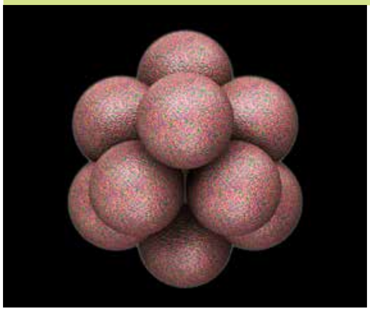


$\gg 10^{13}$ m $\gg$ $\gg$

Ziehier onze planeet met enkele miljarden passagiers.

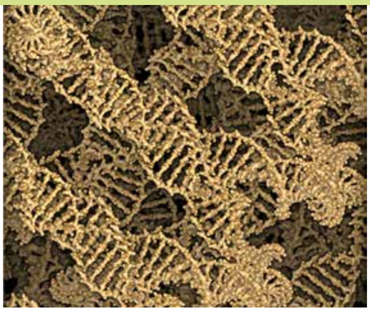
$\gg 10^{8}$ m $\gg$

$\ll 10^{-14}$ m $\ll$ $\ll$



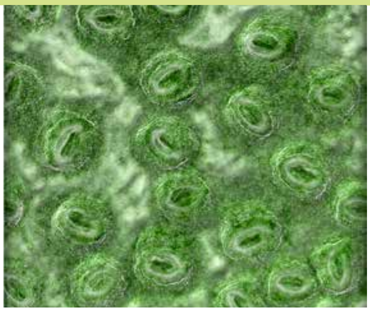
De kern van een koolstofatoom = 10 femtometer.

$\ll 10^{-8}$ m $\ll$ $\ll$



Spiraalgedraaide strengen DNA.

$\ll 10^{-5}$ m $\ll$



Je ziet de individuele cellen van het eikenblad.

2 De wetenschappelijke schrijfwijze

Machten van 10 zijn belangrijk om heel grote getallen (zoals 100 biljoen) en heel kleine getallen (zoals –10 miljard) makkelijk weer te geven. Maar ze zijn ook erg handig om getalletjes tussen –1 en 1 (zoals 0,000000000125) weer te geven.

De **wetenschappelijke schrijfwijze** steunt in grote mate op machten van 10.

wetenschappelijke schrijfwijze

De wetenschappelijke schrijfwijze van een getal verschillend van nul is dit getal geschreven als een product van twee factoren.

- De eerste factor is een decimaal getal met één beduidend cijfer (een cijfer verschillend van nul) voor de komma.
- De tweede factor is een macht van 10.

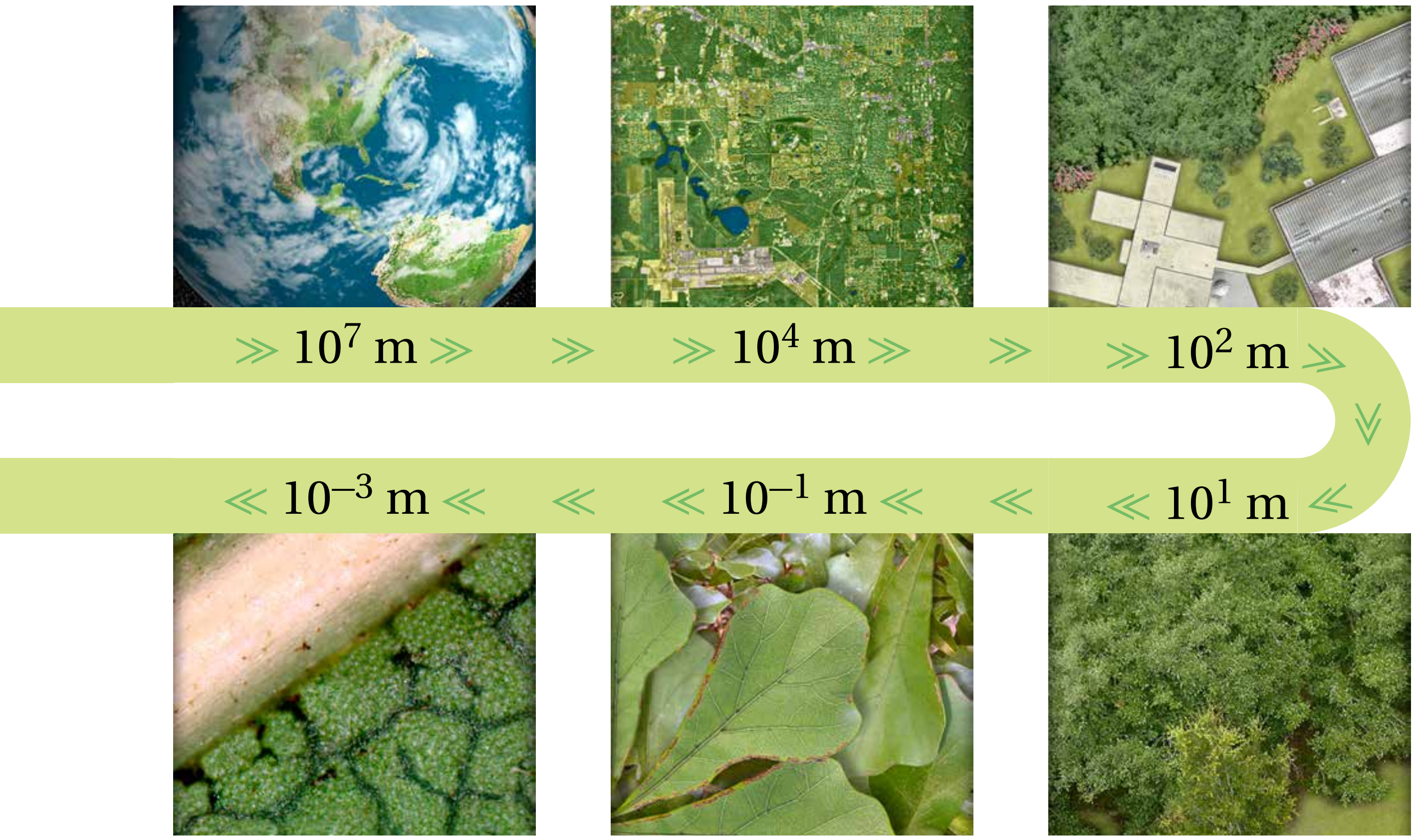
Voorbeelden:

$7{,}2 \cdot 10^{3}$	$-8{,}34 \cdot 10^{-5}$
$3 \cdot 10^{17}$	$6 \cdot 10^{0}$

10 000 km boven een deel van Amerika.

10 km verwijderd van een park in Florida.

100 meter boven het dak van een labo en een bosje.



Hier zie je het blad van een eik honderd keer vergroot.

1 dm boven het oppervlak van een blad van een eik.

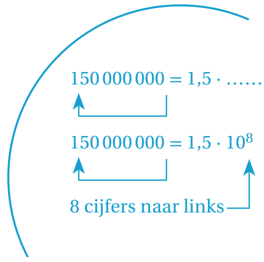
10 m boven een eikenboom.

3 Omzetten naar de wetenschappelijke schrijfwijze

De absolute waarde is groter dan 1

– Plaats de komma na het eerste beduidende cijfer. Tel hoeveel plaatsen je de komma naar links verschoven hebt.

– Vermenigvuldig met een macht van 10. De exponent is het aantal plaatsen dat je de komma naar links verschoof.



Voorbeelden:

$5730 = 5{,}73 \cdot 10^3$

$-273{,}45 = -2{,}7345 \cdot 10^2$

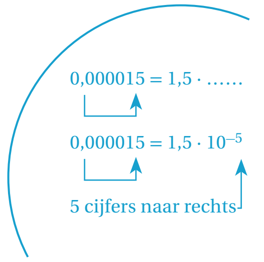
$-1012{,}53 = -1{,}01253 \cdot 10^3$

$2 = 2 \cdot 10^0$

De absolute waarde is kleiner dan 1

– Plaats de komma na het eerste beduidende cijfer. Tel hoeveel plaatsen je de komma naar rechts verschoven hebt.

– Vermenigvuldig met een macht van 10. De exponent is het aantal plaatsen dat je de komma naar rechts verschoof, voorafgegaan door een minteken.



Voorbeelden:

$0{,}4 = 4 \cdot 10^{-1}$

$-0{,}0003 = -3 \cdot 10^{-4}$

$0{,}00000321 = 3{,}21 \cdot 10^{-6}$

$-0{,}000503 = -5{,}03 \cdot 10^{-4}$

Als je rekenmachine in wetenschappelijke schrijfwijze staat (zie volgende bladzijde), zul je onmiddellijk de wetenschappelijke schrijfwijze kunnen aflezen. Tik je getal in en druk op $\boxed{\text{enter}}$.

De ingenieursnotatie

Een speciale vorm van de wetenschappelijke schrijfwijze is de ingenieursnotatie (of technische notatie). Hierbij is de exponent van tien steeds een drievoud. De absolute waarde van de eerste factor is een getal tussen 0 en 1000. Zo zal $1{,}2 \cdot 10^4$ in de ingenieursnotatie genoteerd worden als $12 \cdot 10^3$.

4 De wetenschappelijke schrijfwijze wegwerken

$1{,}5 \cdot 10^8 = 150\,000\,000$

8 cijfers naar rechts

De exponent bij de macht van tien is positief

– Schuif de komma zoveel plaatsen op naar rechts als de exponent aangeeft.
  Voeg indien nodig nullen toe.

Voorbeelden:

$$2 \cdot 10^{7} = 2 \cdot 10\,000\,000 = 2\underline{0\,000\,000}$$

$$-2{,}1 \cdot 10^{4} = -2{,}1 \cdot 10\,000 = -2\underline{1\,000}$$

$$4{,}3210987 \cdot 10^{6} = 4{,}3210987 \cdot 1\,000\,000 = 4\,\underline{321\,098},7$$

$$6 \cdot 10^{1} = 6 \cdot 10 = 6\underline{0}$$

$$-1{,}90872374 \cdot 10^{7} = -1{,}90872374 \cdot 10\,000\,000 = -1\underline{9\,087\,237},4$$

$$-3{,}1418 \cdot 10^{0} = -3{,}1418$$

$1{,}5 \cdot 10^{-5} = 0{,}000015$

5 cijfers naar links

De exponent bij de macht van 10 is negatief

– Schuif de komma zoveel plaatsen naar links als (de absolute waarde van) de exponent aangeeft.
  Noteer een nul voor de komma.

Voorbeelden:

$$9{,}42 \cdot 10^{-4} = 9{,}42 \cdot 0{,}0001 = 0{,}\underline{0009}42$$

$$4 \cdot 10^{-5} = 0{,}\underline{00004}$$

$$-2{,}5 \cdot 10^{-6} = -0{,}\underline{000002}5$$

$$-1{,}237 \cdot 10^{-2} = 0{,}\underline{01}237$$

Ook deze omzetting gebeurt (meestal) heel makkelijk met je rekenmachine. Maak gebruik van de toets $\boxed{\times 10^n}$ en zorg ervoor dat de wetenschappelijke schrijfwijze (sci) is uitgeschakeld.
Wegens de beperktheid van het schermpje zal je rekenmachine getallen zoals $3{,}5 \cdot 10^{13}$ niet kunnen omzetten.

5 Rekenen met getallen in de wetenschappelijke schrijfwijze

Hiervoor gebruik je de eigenschappen van het vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}$. Volg je even mee?

$(2{,}3 \cdot 10^{-1}) \cdot (5 \cdot 10^3) = 2{,}3 \cdot 10^{-1} \cdot 5 \cdot 10^3$	het vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}$ is associatief
$= 2{,}3 \cdot 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^3$	het vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}$ is commutatief
$= 11{,}5 \cdot 10^2$	uitwerken en rekenregel van machten
$= 1{,}15 \cdot 10^3$	omzetten naar wetenschappelijke schrijfwijze

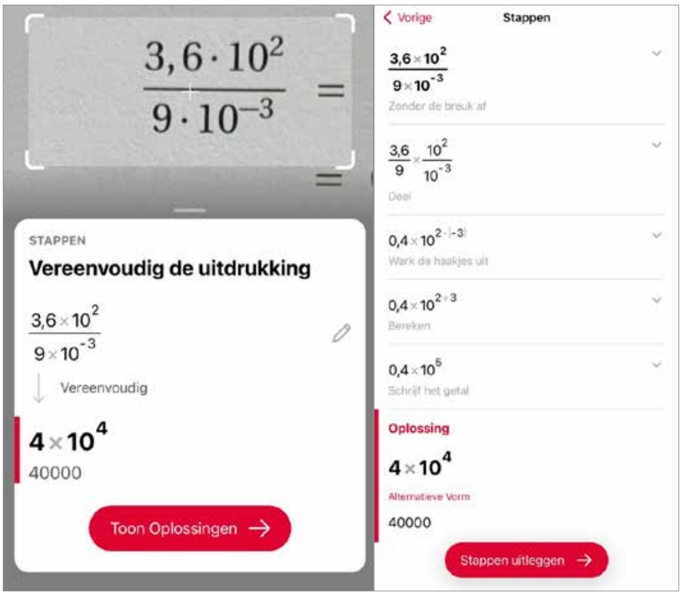
Je zet dus de machten van 10 achteraan samen. Het product van die machten van 10 vind je door de rekenregels toe te passen.

Je zoekt ook het product van de twee decimale getallen. Indien nodig moet je het eindresultaat nog omzetten in de wetenschappelijke schrijfwijze.

Voorbeelden:

$$\frac{3{,}6 \cdot 10^2}{9 \cdot 10^{-3}} = \frac{3{,}6}{9} \cdot 10^{2-(-3)} = 0{,}4 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^4$$

$$\left(1{,}2 \cdot 10^{-2}\right)^2 = (1{,}2)^2 \cdot \left(10^{-2}\right)^2 = 1{,}44 \cdot 10^{-4}$$



6 Samenvatting

- Je weet dat de wetenschappelijke schrijfwijze van een getal verschillend van nul een product is van twee factoren:
  - een decimaal getal met één beduidend cijfer voor de komma
  - een macht van 10
- Je kunt elk rationaal getal omzetten naar de wetenschappelijke schrijfwijze.
- Je kunt elke wetenschappelijke schrijfwijze omzetten naar een rationaal getal.
- Je kunt rekenen met getallen in de wetenschappelijke schrijfwijze.