3.1 Vraagstukken oplossen met hoofdbewerkingen

1 Hoofdbewerkingen

Voorbeeld 1: het ISS

WISKUNDE & TECHNOLOGIE

Het internationaal ruimtestation ISS vliegt in een baan rond de aarde met een snelheid van 27 660 km/h.
Na hoeveel minuten heeft het ruimtestation een keer rond de aarde gevlogen als je weet dat het zich bevindt in een baan rond de aarde met omtrek ongeveer 42 412 km?

Het probleem begrijpen:
Omdat hier het aantal minuten gevraagd wordt, kan het handig zijn om de snelheid om te zetten naar minuten.
Hiervoor deel je de snelheid (in km/h) door 60. Er zijn immers 60 minuten in een uur.

$27\,660 \text{ km/h} = 461 \text{ km/min}$

Oplossing:

$$\frac{42\,412 \text{ km}}{461 \text{ km/min}} = 92 \text{ min}$$

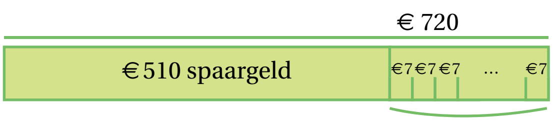
Antwoord: De omwentelingstijd van het ISS ruimtestation is 92 minuten.

Controle: $92 \cdot 461 = 42\,412$

Voorbeeld 2: een nieuwe laptop

Ik wil een laptop kopen voor de prijs van 720 euro.
Op mijn spaarrekening heb ik al 510 euro.
Wekelijks kan ik van mijn zakgeld 7 euro overhouden.
Hoe lang moet ik nog sparen voordat ik de laptop kan kopen?

Het probleem begrijpen:
Ik haal de juiste gegevens uit de folder.

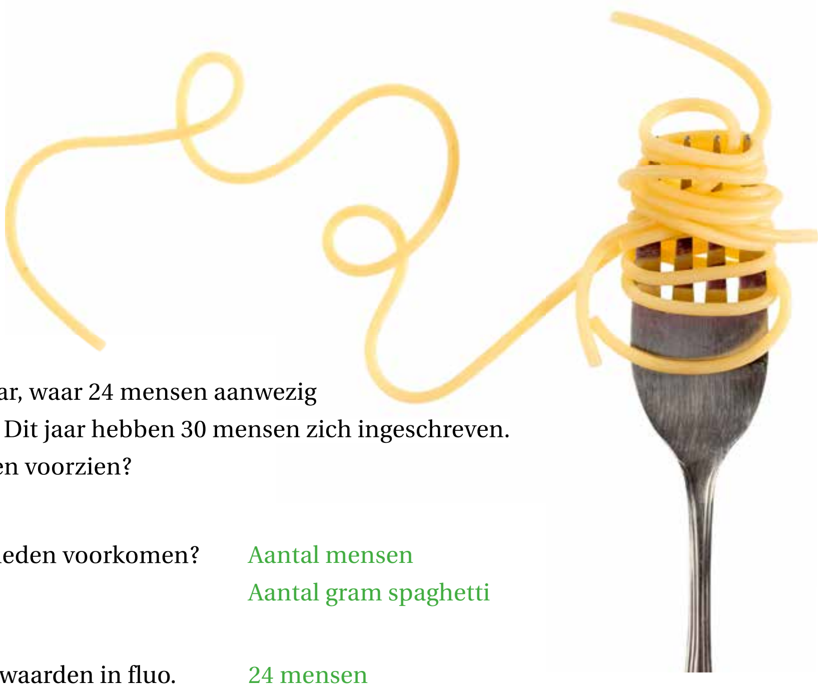


Oplossing:
Ik moet nog € 720 – € 510 = € 210 sparen.
Dat zal nog gedurende (210 : 7) weken = 30 weken zijn.

Antwoord: Ik moet nog 30 weken sparen voordat ik de laptop kan kopen.

Controle: $510 + 7 \cdot 30 = 720$

2 De regel van drie



Je maakte er al enkele jaren geleden kennis mee in de lagere school: de **regel van drie**.
Met deze handige methode kun je heel wat problemen oplossen.

Voorbeeld: spaghettifeest
Voor het spaghettifeestje van vorig jaar, waar 24 mensen aanwezig waren, had je 1920 g spaghetti nodig. Dit jaar hebben 30 mensen zich ingeschreven. Hoeveel gram spaghetti zul je voor hen voorzien?

– Heb je gemerkt welke twee grootheden voorkomen?	Aantal mensen Aantal gram spaghetti
– Zet de grootheden en de gegeven waarden in fluo.	24 mensen 1920 gram 30 mensen

– Het gevraagde plaats je steeds rechts, in dit voorbeeld is dat de hoeveelheid spaghetti.

– Noteer je eerste lijn	24 mensen → 1920 g
– Herleid in de tweede lijn naar 1. De deling (of vermenigvuldiging) die je hiervoor uitvoerde, moet je ook rechts uitvoeren.	1 mens → 80 g
– Herleid in je derde lijn naar het gevraagde getal. Ook hier zul je de vermenigvuldiging of deling die je links ziet, rechts moeten uitvoeren.	30 mensen → 2400 g
– Geef antwoord op de vraag.	Voor 30 personen heb je 2400 gram spaghetti nodig.

Opmerkingen
- Het is niet steeds nodig om in je tweede lijn naar 1 te herleiden. Zo had je in het spaghettivoorbeeld ook kunnen herleiden naar 6, omdat dit getal een deler is van zowel 24 als 30.
- Bij eenvoudige vraagstukken kun je de tweede lijn zelfs weglaten. Als in het voorbeeld gevraagd werd naar de hoeveelheid spaghetti voor 36 personen, dan had je de hoeveelheid spaghetti rechtstreeks kunnen vermenigvuldigen met 1,5.

Problemen oplossen met de regel van drie
- Ga in je vraagstuk op zoek naar de twee grootheden. Een van de twee wordt ook gevraagd. Noteer die rechts.
- Herleid in de tweede lijn naar 1.
- Herleid in je derde lijn naar het gevraagde getal. Hier verschijnt nu rechts het antwoord.
- Geef een antwoord.

3 Werken met een verhoudingstabel

Een **verhoudingstabel** is een handig hulpmiddel bij rekenproblemen met verhoudingen. Het toont erg veel gelijkenissen met de regel van drie, met dit verschil dat het antwoord terug te vinden is in een tabel.

Voorbeeld: spaghettifeest

Voor het spaghettifeestje van vorig jaar, waar 24 mensen aanwezig waren, had je 1920 g spaghetti nodig. Dit jaar hebben zich slechts 18 mensen ingeschreven. Hoeveel gram spaghetti zul je voor hen voorzien?

aantal mensen	24	1	18
aantal gram spaghetti	1920	80	1440

Opmerking:

Soms is het handig een kolom tussen te voegen met bijvoorbeeld 1 of 2 of 5 als eenheid. Als in het voorbeeld echter de hoeveelheid spaghetti gevraagd werd voor 12 personen, dan had je de kolom met 1 / 80 niet nodig. Je had dan rechtstreeks kunnen delen door 2.

Problemen oplossen met een verhoudingstabel

- Ga in je vraagstuk op zoek naar de twee grootheden. Een van de twee wordt ook gevraagd. Noteer die in je tabel onderaan.
- Herleid in de tweede kolom naar 1. De deling (of vermenigvuldiging) die je hiervoor uitvoerde, moet je ook onderaan uitvoeren.
- Herleid in je derde kolom naar het gevraagde getal. De vermenigvuldiging (of deling) die je hiervoor uitvoerde, moet je ook onderaan uitvoeren. Hier verschijnt nu het antwoord.

Voorbeeld 1: de prijs van hout

Voor 5 m^3 notelaar betaalde een meubelmaker 370 euro.
Hoeveel zou hij voor 8 m^3 betalen?

Het probleem begrijpen:

Welke gegevens plaats ik in de tabel? Welke gegevens plaats ik bovenaan/onderaan?

Oplossing:

verhoudingstabel

: 5 · 8

aantal m^3 notelaar	5	1	8
te betalen in €	370	74	?

: 5 · 8

berekening: $74 \cdot 8 = 592$

regel van 3

$$\begin{array}{lcl} 5\ m^3 \text{ notelaar} & \rightarrow & € 370 \\ \downarrow :5 & & \downarrow :5 \\ 1\ m^3 \text{ notelaar} & \rightarrow & € 74 \\ \downarrow \cdot 8 & & \downarrow \cdot 8 \\ 8\ m^3 \text{ notelaar} & \rightarrow & € 592 \end{array}$$

Antwoord:

Voor 8 m^3 notelaar betaalt de meubelmaker 592 euro.

Controle: We controleren of de eenheidsprijs dezelfde is: $592 : 8 = 370 : 5 = 74$

Voorbeeld 2: muziekabonnement

Om drie maanden naar zijn favoriete streamingdienst te luisteren, betaalt Liam als student 18 euro. Van zijn oma krijgt hij 60 euro. Voor hoeveel maanden kan Liam met dit bedrag muziek streamen?

Het probleem begrijpen:
Welke gegevens plaats ik in de tabel?

Oplossing:
Verhoudingstabel

Prijs in euro	18	6	60
Aantal maanden	3	1	10

Antwoord:
Met de 60 euro van oma kan Liam 10 maanden muziek streamen.

Controle:
We controleren of de prijs voor een maand hetzelfde is: $18 : 3 = 60 : 10 = 6$

4 Samenvatting

- Je kunt de gegevens en het gevraagde uit een tekst halen.
- Je kunt de verhouding tussen getallen bepalen en getallen terugvinden die voldoen aan een verhouding.
- Je kunt de regel van 3 toepassen.
- Je kunt vraagstukken oplossen door
  - hoofdbewerkingen uit te voeren;
  - een verhoudingstabel op te stellen;
  - de regel van 3 toe te passen.

3.2 Vraagstukken oplossen in verband met deelbaarheid

1 Priemgetallen

priemgetal

Een **priemgetal** is een natuurlijk getal dat juist twee verschillende delers heeft, namelijk 1 en zichzelf.

Voorbeelden:
3 is een priemgetal want 1 en 3 zijn de enige delers van 3.
71 is een priemgetal want 1 en 71 zijn de enige delers van 71.
51 is géén priemgetal want 1 en 51 zijn niet de enige delers: 51 is ook deelbaar door 3 en 17.
1 is geen priemgetal want 1 heeft slechts één deler (zichzelf).
0 is geen priemgetal want 0 heeft oneindig veel delers.

Onderaan op de vorige bladzijde kun je lezen hoe je via de zeef van Eratosthenes aan de eerste priemgetallen komt. Zet alle priemgetallen in een fluokleur. De priemgetallen kleiner dan 20 zijn: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 en 19.

2 Priemfactorisatie

Elk getal dat geen priemgetal is, kan geschreven worden als een product waarvan elke factor zelf een priemgetal is.

Voorbeelden:
$6 = 2 \cdot 3$ $\qquad$ $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ $\qquad$ $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$

Dat noemen we **priemfactorisatie**, of ook een getal **ontbinden in priemfactoren**.

Praktische werkwijze:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

- Je zoekt het kleinste priemgetal (om er geen te vergeten) waardoor 360 deelbaar is (= 2).
- Je bepaalt het quotiënt van 360 en 2.
- Je herhaalt deze werkwijze met het verkregen quotiënt tot je als quotiënt 1 hebt.

$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Merk op:
36 is een deler van 360
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$ en $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
De priemfactoren die in 36 voorkomen, komen ook voor in 360. Dat geldt nu voor elke deler van 360.
(Controleer zelf voor 60 en voor 90.)

Algemeen:
Alle priemfactoren die in een deler van een getal voorkomen, komen ook in het getal zelf voor.
Alle priemfactoren die in een getal voorkomen, zullen ook voorkomen in een veelvoud van dat getal.

3 Grootste gemeenschappelijke deler

grootste gemeenschappelijke deler

De **grootste gemeenschappelijke deler** van twee getallen is het grootste natuurlijke getal dat een deler is van beide getallen.

Notatie: de grootste gemeenschappelijke deler van a en b noteren we als ggd (a, b).

Merk op: de **ggd** van twee getallen kan nooit groter zijn dan het kleinste van de twee getallen.

Hoe bepaal je de ggd van twee getallen?

a) Uit het hoofd: ggd $(6, 9) = 3$
ggd $(12, 24) = 12$

b) Vanuit de opsomming van de delers: delers van 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, **24**, 48
delers van 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, **24**, 36, 72
dus ggd $(48, 72) = 24$

c) Via het **algoritme van Euclides**
Euclides heeft een **algoritme** (een stappenplan) ontworpen om de grootste gemeenschappelijke deler te berekenen van twee getallen:

De grootste gemeenschappelijke deler van twee getallen a en b (met $a > b$) is gelijk aan de grootste gemeenschappelijke deler van b en de rest r van de deling van a door b.

ggd(a, b) = ggd(b, r) met r de rest van a gedeeld door b.

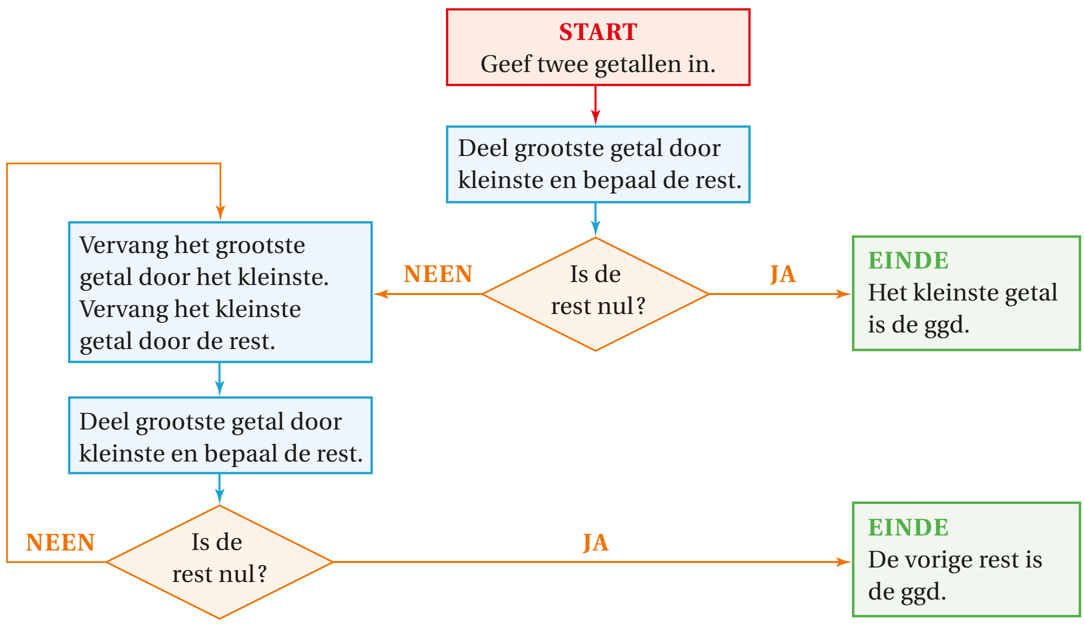
Voorbeelden:

ggd$(66, 21)$ = ggd$(21, 3)$ = ggd$(3, 0) = 3$

de rest van de deling van 66 door 21 *de rest van de deling van 21 door 3*

ggd$(200, 64)$ = ggd$(64, 8)$ = ggd$(8, 0) = 8$

de rest van de deling van 200 door 64 *de rest van de deling van 64 door 8*



Taak: Zoek met behulp van dit schema ggd$(72, 48)$.

d) Door priemfactorisatie:

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$108 = 2^2 \cdot 3^3$

Maak het product van de **gemeenschappelijke** priemfactoren, elk met hun kleinste exponent.

$$\begin{aligned} \text{ggd}\,(90, 108) &= 2 \cdot 3^2 \\ &= 2 \cdot 9 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Hoe de grootste gemeenschappelijke deler bepalen?

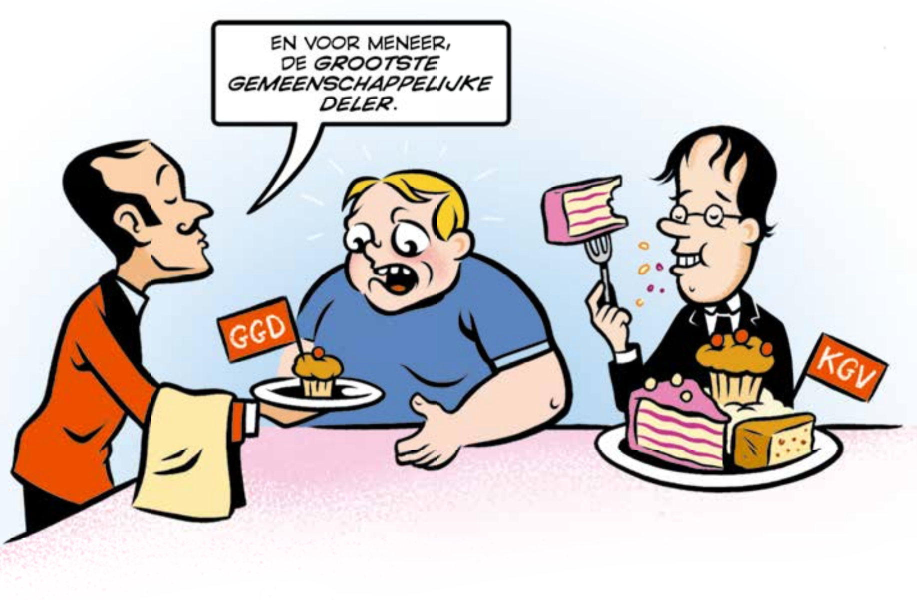
1 Ontbind de getallen in priemfactoren.
2 Maak het product van de **gemeenschappelijke** priemfactoren, elk met hun **kleinste** exponent.

Verklaring:
Een deler van beide getallen heeft geen andere priemfactoren dan deze die in beide getallen voorkomen. Om de grootste gemeenschappelijke deler te vinden, moet je dus alle mogelijke gemeenschappelijke priemfactoren nemen, elk met hun kleinste exponent.

onderling ondeelbaar

Onderling ondeelbare getallen zijn getallen waarvan de grootste gemeenschappelijke deler 1 is.

Voorbeelden:
18 en 25 zijn onderling ondeelbaar want ggd (18, 25) = 1.
15 en 49 zijn onderling ondeelbaar want ggd (15, 49) = 1.
Ook elke 2 verschillende priemgetallen zijn onderling ondeelbaar.



4 Kleinste gemeenschappelijk veelvoud

kleinste gemeenschappelijk veelvoud

Het **kleinste gemeenschappelijk veelvoud** van twee getallen is het kleinste, van nul verschillend, natuurlijk getal dat een veelvoud is van beide getallen.

Notatie:

het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van a en b noteren we als kgv (a, b).

Merk op:

het **kgv** van twee getallen kan nooit kleiner zijn dan het grootste van de twee getallen.

Hoe bepaal je het kgv van twee getallen?

a) Uit het hoofd: kgv (6, 9) = 18
kgv (12, 24) = 24

b) Vanuit de opsomming van de veelvouden: veelvouden van 18: 0, 18, 36, 54, **72**, 90, 108, …
veelvouden van 24: 0, 24, 48, **72**, 96, 120, 144, …
dus kgv (18, 24) = 72

c) Door priemfactorisatie:

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$108 = 2^2 \cdot 3^3$

Maak het product van **alle** voorkomende priemfactoren, elk met hun grootste exponent.

$$\begin{aligned} \text{kgv}\,(90, 108) &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \\ &= 4 \cdot 27 \cdot 5 \\ &= 540 \end{aligned}$$

Hoe het kleinste gemeenschappelijk veelvoud bepalen?

1 Ontbind de getallen in priemfactoren.
2 Maak het product van **alle** priemfactoren, elk met hun **grootste** exponent.

Verklaring:

Een veelvoud van beide getallen heeft minstens de priemfactoren die in beide getallen voorkomen.
Om het kleinste gemeenschappelijk veelvoud te vinden, moet je dus alle priemfactoren nemen, maar wel met de grootste exponent die telkens voorkomt.

Nog een voorbeeld:

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

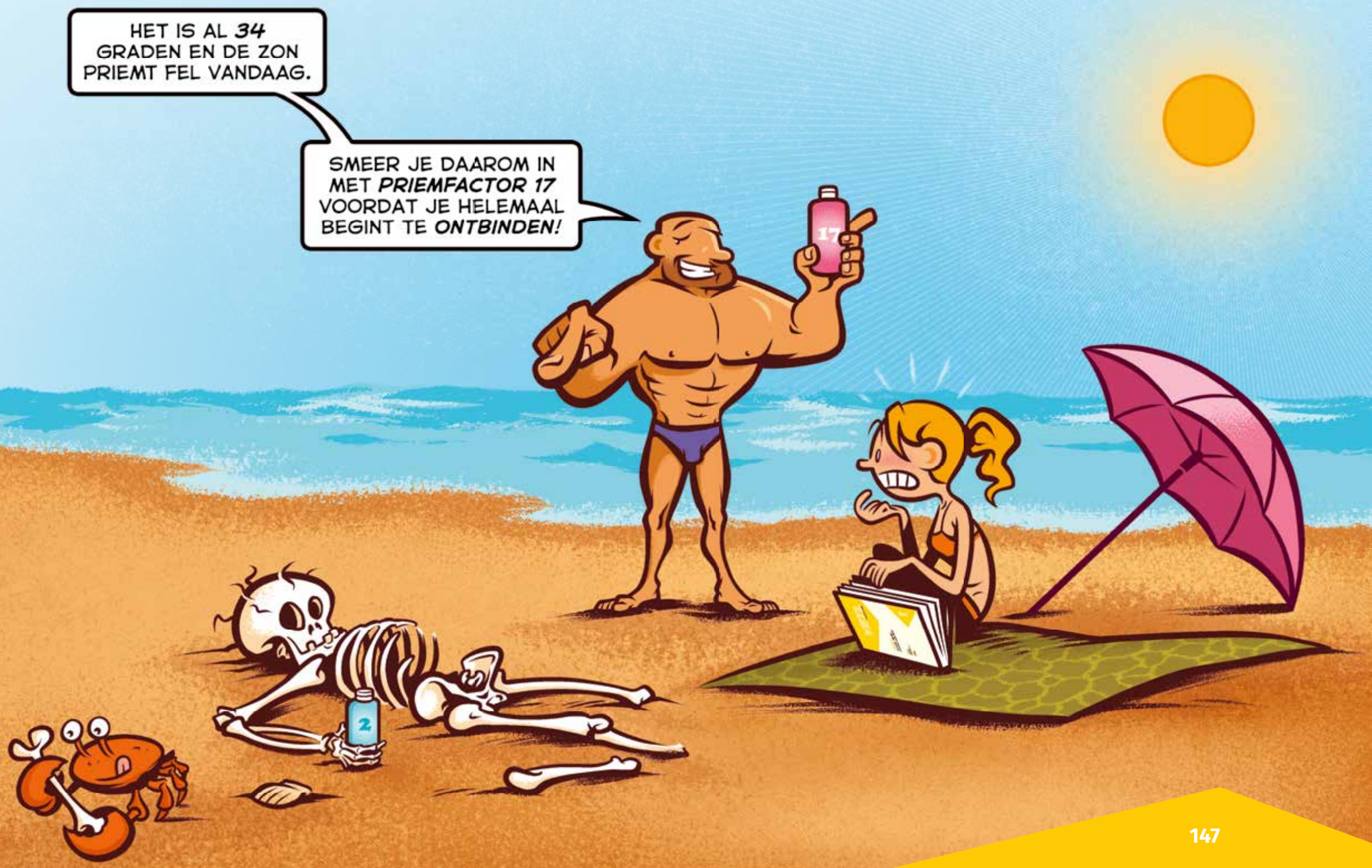
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$$\begin{aligned} \text{kgv}\,(60, 168) &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 840 \end{aligned}$$

5 Samenvatting

- Je weet wat de grootste gemeenschappelijke deler en het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van enkele getallen zijn en kunt ze terugvinden uit het hoofd of door opsomming van delers en veelvouden.
- Je kunt de begrippen ‘grootste gemeenschappelijke deler’ en ‘kleinste gemeenschappelijk veelvoud’ definiëren.
  - De grootste gemeenschappelijke deler van twee getallen is het grootste natuurlijk getal dat deler is van beide getallen.
  - Het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van twee getallen is het kleinste, van nul verschillend, natuurlijk getal dat veelvoud is van beide getallen.
- Je kent de definitie van een priemgetal.
  Een priemgetal is een natuurlijk getal dat juist twee verschillende delers heeft, namelijk 1 en zichzelf.
- Je weet dat onderling ondeelbare getallen 1 als ggd hebben.
- Je kunt een getal ontbinden in priemfactoren.
- Je kent het algoritme van Euclides: als $a > b$ dan: $\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(b, r)$ met r de rest van a gedeeld door b.
- Je kunt de grootste gemeenschappelijke deler en het kleinste gemeenschappelijk veelvoud berekenen door priemfactorisatie:
  - Ontbind de getallen in priemfactoren.
  - ggd: Maak het product van de **gemeenschappelijke** priemfactoren, elk met hun **kleinste exponent**.
  - kgv: Maak het product van **alle** priemfactoren, elk met hun **grootste exponent**.



3.3 Vraagstukken oplossen door het gebruik van letters

1 Even kennismaken

Vaak gebruiken we in de wiskunde en in andere vakken vormen waarin letters getallen voorstellen. Denk maar aan het noteren van de eigenschappen van de hoofdbewerkingen in symbolen!
Zo'n vorm noemen we een **lettervorm**.

Voorbeelden

$3 \cdot a \cdot b$	Product van letters en getallen.
$x + y + 6$	Som van letters en getallen.
$2x = 12$	Vergelijking in de onbekende x.
$a \cdot b = b \cdot a$	Het vermenigvuldigen is commutatief.
$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$	Oppervlakteformule van een driehoek.
$I = k \cdot i \cdot t$	Intrestformule economie.
$R = \dfrac{U}{I}$	Wet van Ohm, een formule uit de elektronica.

Enkele afspraken.

– Het vermenigvuldigingsteken $(\cdot)$ mag weggelaten worden als er geen verwarring mogelijk is. Dat is het geval tussen letters en tussen een getal en een letter.

  Voorbeelden:

$3 \cdot a$	wordt	$3a$
$a \cdot b \cdot c$	wordt	abc
$3 \cdot 4$	blijft	$3 \cdot 4$

– In een lettervorm die een product voorstelt, schrijven we het **cijfergedeelte (coëfficiënt)** eerst. Bij het **lettergedeelte** rangschikken we de letters alfabetisch. Dat mogen we doen door de commutativiteit van de vermenigvuldiging toe te passen.

  Voorbeeld:
  We noteren niet $b \cdot 5 \cdot a \cdot c$ maar wel $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{coëfficiënt} \\ \text{of cijfergedeelte}}}{5}\,\underset{\substack{\downarrow \\ \text{lettergedeelte}}}{\underline{abc}}$

– Factor 1 wordt niet geschreven.

  Voorbeeld:
  We noteren niet $1 \cdot x \cdot y$ maar wel xy

2 Gebruik van letters bij regelmaat

Voorbeeld 1: de puppy's

Onze hond heeft puppy's!
Hoeveel tel je er?

Daarvoor stellen we een tabel op.

aantal pootjes	24	4	8	12	16
aantal puppy's	6	1	2	3	4

We gaan nu letters invoeren om het verband weer te geven tussen het aantal puppy's en het aantal pootjes. We nemen de letter h als plaatsvervanger voor het aantal puppy's en de letter p als plaatsvervanger voor het aantal pootjes.

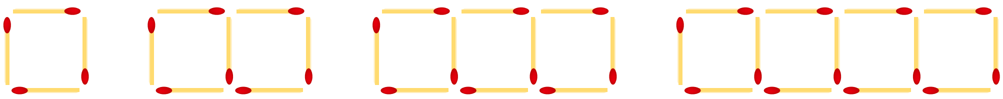
aantal puppy's h	1	2	3	4	5	h
aantal pootjes p	4	8	12	16	20	$4 \cdot h$

Aangezien elke puppy vier pootjes heeft, wordt dit:

Woordformule: Het aantal pootjes is gelijk aan vier maal het aantal honden.
Letterformule: $p = 4 \cdot h$

Voorbeeld 2: speel niet met vuur

We tellen het aantal lucifers dat nodig is om er een rij vierkanten mee te maken.
Vul de tabel aan.



aantal vierkanten v	1	2	3	4	5	6	7
aantal lucifers l	4	7	10	13	16	19	22

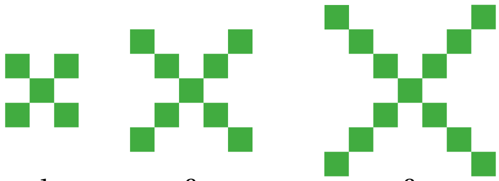
We gaan met letters het verband weergeven tussen het aantal vierkanten (v) en het aantal nodige lucifers (l).
We merken op dat het aantal lucifers telkens eentje meer is dan het drievoud van het aantal vierkanten.

Woordformule: Het aantal lucifers is gelijk aan het drievoud van het aantal vierkanten vermeerderd met één.
Letterformule: $l = 3 \cdot v + 1$

Hoeveel vierkanten telt de figuur die je maakt met 2020 lucifers?

Voorbeeld 3: kruisjes

Bekijk volgende figuren. We tekenen zelf de twee volgende figuren en noteren in de tabel het aantal gekleurde vierkantjes.



1 2 3

figuurnummer n	1	2	3	4	5	6	7
aantal gekleurde vierkantjes v	5	9	13	17	21	25	29

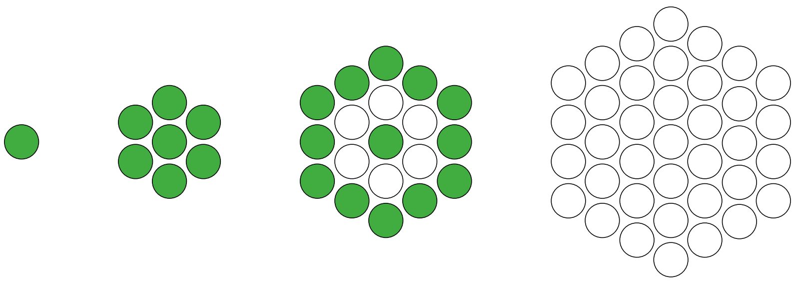
We gaan met letters het verband weergeven tussen het figuurnummer n en het aantal vierkantjes v. We merken op dat het aantal vierkantjes steeds één meer is dan het viervoud van het figuurnummer.

Woordformule: Het aantal vierkantjes is gelijk aan het viervoud van het nummer van de figuur vermeerderd met één.

Letterformule: $v = 4 \cdot n + 1$

Voorbeeld 4: bollen in een zeshoek

Bekijk volgende figuren. Teken zelf de volgende figuur en vul de tabel aan.



1 2 3 4

figuurnummer n	1	2	3	4	5	6	7
aantal gekleurde bollen b	1	7	13	19	25	31	37

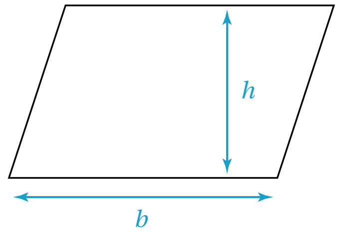
We geven met letters het verband weer tussen het figuurnummer n en het aantal gekleurde bollen b. We merken dat er steeds zes gekleurde bollen bijkomen om de volgende zeshoek te kunnen inkleuren.

Woordformule: Het aantal gekleurde bollen is gelijk aan het zesvoud van het nummer van de voorgaande figuur, vermeerderd met één.

Letterformule: $b = 6 \cdot (n - 1) + 1$

3 De letter als plaatsvervanger van een getal

Voorbeeld 1: oppervlakte van een parallellogram



We stellen de basis voor door b en de hoogte door h.
De oppervlakte van een parallellogram is basis maal hoogte.

$A_{\text{parallellogram}} = b \cdot h$

waarde voor b (in cm)	waarde voor h (in cm)	oppervlakte A (in cm^2)
10	5	$10 \cdot 5 = 50$
18	6	$18 \cdot 6 = 108$
20	12	$20 \cdot 12 = 240$
b	h	$b \cdot h = A$

Voorbeeld 2: de taxirit

Bij taxibedrijf SPEEDY wordt de prijs van een taxirit als volgt bepaald.
Als vaste kost betaal je steeds 3 euro. Per afgelegde kilometer komt er 2 euro bij.
De prijs die je zult betalen voor een rit met de taxi wordt:

3 euro + (aantal kilometer) · 2 euro

n aantal gereden km	p te betalen prijs (in €)
6	$3 + 2 \cdot 6 = 15$
25	$3 + 2 \cdot 25 = 53$
50	$3 + 2 \cdot 50 = 103$
n	$3 + 2 \cdot n = p$

4 Samenvatting

- Je weet dat bij lettervormen het cijfergedeelte vooraan staat en dat je het lettergedeelte alfabetisch noteert.
- Je kunt een eenvoudige woordformule opstellen vanuit een reeks getallen (of een reeks figuren).
- Je kunt letters vervangen door de opgegeven getallen en dan de bewerkingen uitvoeren.
- Je kunt een letterformule opstellen vanuit een reeks getallen (of een reeks figuren).

3.4 Vraagstukken oplossen met vergelijkingen

1 Vergelijkingen

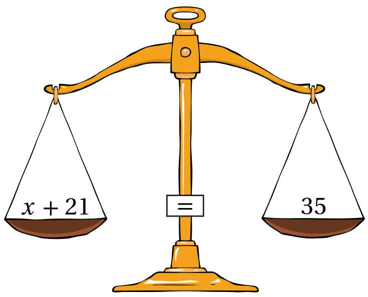
$3 + 2 = 5$
$17 - 2 = 15$
$6 \cdot 8 = 48$

Al deze uitspraken zijn gelijkheden. Wanneer in een gelijkheid een onbekend element voorkomt, spreken we van een **vergelijking**.

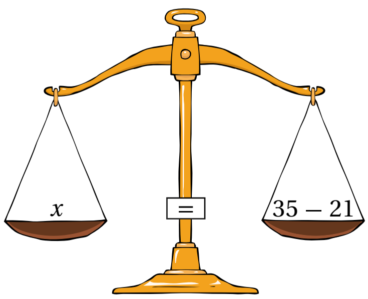
Voorbeeld: $3 + x = 5$ is een vergelijking

De onbekende wordt meestal voorgesteld door de letter x.
'$3 + x$' noemen we het **linkerlid** van de vergelijking, 5 noemen we het **rechterlid**.
Zoeken naar de mogelijke waarden voor de onbekende opdat de gelijkheid juist is, noemen we de vergelijking oplossen. Je kunt een vergelijking beschouwen als een voorwaarde waaraan een onbekend getal x moet voldoen.

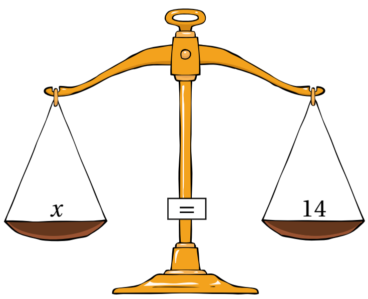
Vergelijkingen oplossen: balansmethode



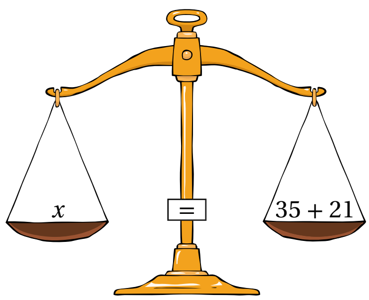
Als we aan beide kanten van de weegschaal 21 wegnemen, dan blijft de balans in evenwicht.



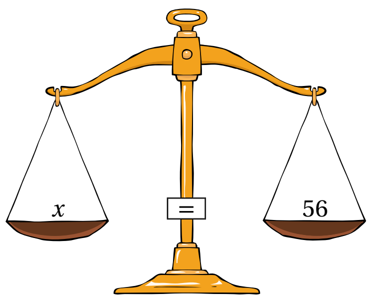
We kunnen nu x bepalen:



Als we aan beide kanten van de weegschaal 21 bij doen, dan blijft de balans in evenwicht.



We kunnen nu x bepalen:



Deze vergelijking is gelijkwaardig met de vorige. Je kunt ertussen $\Updownarrow$ noteren.

$$\begin{aligned} x - 21 &= 35 \\ &\Updownarrow \\ x &= 35 + 21 \\ &\Updownarrow \\ x &= 56 \end{aligned}$$

Vergelijkingen oplossen: **pijlenvoorstelling**

Welke bewerking wordt hiernaast uitgevoerd?
> de optelling

Hoe zorg je dat + 21 verdwijnt?
> door in elk lid 21 af te trekken

Controleer jezelf.
> als je x in de opgave vervangt door 14 krijg je een gelijkheid: $14 + 21 = 35$

$x + 21 = 35$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "+21"] & 35 \arrow[l, bend left, "-21"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} x + 21 &= 35 \\ &\Updownarrow \\ x &= 35 - 21 \\ &\Updownarrow \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Controle: $14 + 21 = 35$

Op dezelfde manier redeneer je voor andere bewerkingen:

$x - 18 = 52$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "-18"] & 52 \arrow[l, bend left, "+18"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} x - 18 &= 52 \\ &\Updownarrow \\ x &= 52 + 18 \\ &\Updownarrow \\ x &= 70 \end{aligned}$$

Controle: $70 - 18 = 52$

$x \cdot 14 = 84$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\cdot 14"] & 84 \arrow[l, bend left, ":14"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} 14 \cdot x &= 84 \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{84}{14} \\ &\Updownarrow \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Controle: $6 \cdot 14 = 84$

$x : 8 = 12$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, ":8"] & 12 \arrow[l, bend left, "\cdot 8"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} x : 8 &= 12 \\ &\Updownarrow \\ x &= 12 \cdot 8 \\ &\Updownarrow \\ x &= 96 \end{aligned}$$

Controle: $96 : 8 = 12$

Algemeen:

$$\begin{aligned} x + a &= b \\ &\Updownarrow \text{ in beide leden } a \text{ aftrekken} \\ x &= b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot a &= b \\ &\Updownarrow \text{ beide leden delen door } a \\ x &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - a &= b \\ &\Updownarrow \text{ in beide leden } a \text{ optellen} \\ x &= b + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x : a &= b \\ &\Updownarrow \text{ beide leden vermenigvuldigen met } a \\ x &= b \cdot a \end{aligned}$$

Merk op dat bij $a \cdot x = b$ het getal a nooit 0 mag zijn. Kun je verklaren waarom?

Voorbeelden:

Studietip: bedek met een blad alles behalve de eerste lijn van elke opgave. Noteer dan wat jij als volgende stap zou vermelden en controleer jezelf.

$$\begin{aligned} x + (-4) &= 16 \\ &\Updownarrow \\ x - 4 &= 16 \\ &\Updownarrow \\ x &= 16 + 4 \\ &\Updownarrow \\ x &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3 \cdot x &= -18 \\ &\Updownarrow \\ x &= -18 : (-3) \\ &\Updownarrow \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - (-2) &= 6 \\ &\Updownarrow \\ x + 2 &= 6 \\ &\Updownarrow \\ x &= 6 - 2 \\ &\Updownarrow \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x : (-10) &= 160 \\ &\Updownarrow \\ x &= 160 \cdot (-10) \\ &\Updownarrow \\ x &= -1600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 35 &= -35 \\ &\Updownarrow \\ x &= -35 + 35 \\ &\Updownarrow \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15 - x &= 20 \\ &\Updownarrow \\ 15 - 20 &= x \\ &\Updownarrow \\ -5 &= x \\ &\Updownarrow \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Opmerking:

Ook bij bepaalde invuloefeningen is het handig om het gezochte getal als x voor te stellen.

$$\begin{aligned} -4 + \ldots &= 17 \\ &\text{wordt:} \\ -4 + x &= 17 \\ &\Updownarrow \\ x &= 17 + 4 \\ &\Updownarrow \\ x &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \ldots &= -34 \\ &\text{wordt:} \\ 2 \cdot x &= -34 \\ &\Updownarrow \\ x &= -34 : 2 \\ &\Updownarrow \\ x &= -17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ldots - 16 &= -24 \\ &\text{wordt:} \\ x - 16 &= -24 \\ &\Updownarrow \\ x &= -24 + 16 \\ &\Updownarrow \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Vergelijkingen

De eerste vergelijkingen dateren van meer dan 17 eeuwen voor de geboorte van Christus. Het waren de Egyptenaren die toen hun onbekende voorstelden door 'haha'. Rond 825 was het een Arabische wiskundige die in het boek 'ḥisāb al-ğabr wa'l-muqābala' (حساب الجبر و المقابلة), 'de theorie van transformatie en van herstel', de overbrengingsregels publiceerde. Van het eerste deel van de titel (al-ğabr) is later het woord 'algebra' afgeleid.

2 Vraagstukken

Je kunt in sommige **vraagstukken** het te zoeken getal vervangen door x. Je 'vertaalt' het vraagstuk dan naar een vergelijking. Dat noemt men **mathematiseren**. Na het oplossen van de vergelijking controleer je je oplossing en ga je na of je antwoord realistisch is. Dit noemt men **demathematiseren**.

Voorbeeld 1:

Als je een getal met 36 vermeerdert, dan krijg je 110. Welk getal zoeken we?

Het vraagstuk begrijpen:
x is het gezochte getal

Oplossing:

$$\begin{aligned} x + 36 &= 110 \\ &\Updownarrow \\ x &= 110 - 36 \\ &\Updownarrow \\ x &= 74 \end{aligned}$$

Antwoord: Het gezochte getal is 74.

Controle: $74 + 36 = 110$

Methode:

Het vraagstuk begrijpen:
1 Lees grondig het vraagstuk.
2 Wat je zoekt, stel je voor door x.

Oplossing (mathematiseren):
3 Vertaal het vraagstuk naar een vergelijking.
4 Los de vergelijking op.

Antwoord (demathematiseren):
5 Formuleer het antwoord en controleer.

Voorbeeld 2:

WISKUNDE & WETENSCHAPPEN

Galileo is het grootste Europese ruimtevaartproject dat ooit werd verwezenlijkt. Het zorgt voor een erg precieze gps (zelfs tot op 20 cm nauwkeurig) en een betere dekking van de satellietsignalen. Dat kan dankzij de lancering van 30 satellieten rond de aarde, mooi verdeeld over drie banen rond onze planeet.
Hoeveel satellieten vliegen per baan rond de aarde?

Het vraagstuk begrijpen:
x is het aantal satellieten dat per baan rond de aarde vliegt.
We vertalen het gegeven naar een vergelijking.

Oplossing:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x &= 30 \\ &\Updownarrow \\ x &= 30 : 3 \\ &\Updownarrow \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Antwoord: Per baan vliegen 10 satellieten van het project Galileo rond de aarde.

Controle: $10 \cdot 3 = 30$

3 Procentrekenen

Veel vraagstukken in verband met procentrekenen kun je terugbrengen tot een vergelijking.
17% van 400 is gelijk aan 68

In een opgave met procenten is (zoals in bovenstaande zin) een van de gekleurde getallen het te zoeken getal.
We stellen het te zoeken getal voor door x en zetten dan de opgave om in een vergelijking.

Hoeveel procent van 400 is gelijk aan 68?

x % van 400 is 68

$$\begin{aligned} \frac{x}{100} \cdot 400 &= 68 \\ &\Updownarrow \\ x \cdot 400 &= 68 \cdot 100 \\ &\Updownarrow \\ x \cdot 400 &= 6800 \\ &\Updownarrow \\ x &= 6800 : 400 \\ &\Updownarrow \\ x &= 17 \end{aligned}$$

17% van een bepaald getal is 68. Zoek dat getal.

17% van x is 68

$$\begin{aligned} \frac{17}{100} \cdot x &= 68 \\ &\Updownarrow \\ 17 \cdot x &= 68 \cdot 100 \\ &\Updownarrow \\ 17 \cdot x &= 6800 \\ &\Updownarrow \\ x &= 6800 : 17 \\ &\Updownarrow \\ x &= 400 \end{aligned}$$

Hoeveel is 17% van 400?

17% van 400 is x

$$\begin{aligned} \frac{17}{100} \cdot 400 &= x \\ &\Updownarrow \\ 68 &= x \end{aligned}$$

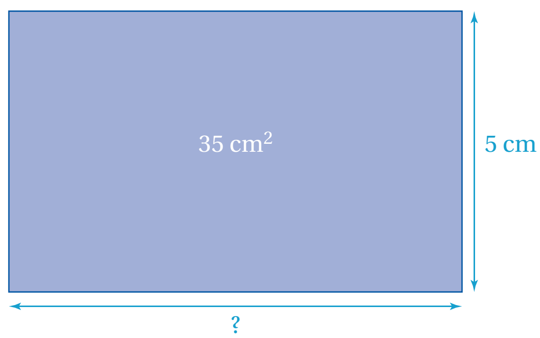
4 Formules omvormen

Ook het **omvormen van formules** kan dikwijls teruggebracht worden tot het oplossen van een vergelijking.

Voorbeeld 1: rechthoek

De oppervlakte van een rechthoek is 35 cm^2. Bepaal de lengte als de breedte gelijk is aan 5 cm.

Het probleem begrijpen:
We vullen in de formule $A_{\text{rechthoek}} = l \cdot b$ de gegevens in en stellen de onbekende gelijk aan x.



Oplossing:

$$\begin{aligned} 35 &= x \cdot 5 \\ &\Updownarrow \\ \frac{35}{5} &= x \\ &\Updownarrow \\ 7 &= x \end{aligned}$$

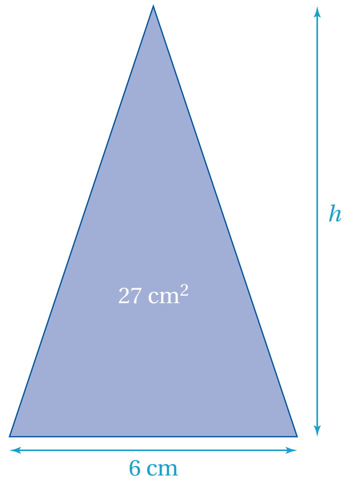
Antwoord: De lengte van de rechthoek is 7 cm.

Controle: $5 \cdot 7 = 35$

Voorbeeld 2: driehoek

Bepaal de hoogte van een driehoek als de lengte van de basis 6 cm is en de oppervlakte gelijk is aan 27 cm^2.

Het probleem begrijpen:
We vullen in de formule de gegevens in en stellen de onbekende gelijk aan x.



Oplossing:

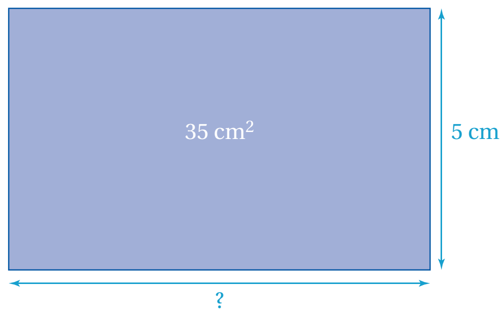
$$\begin{aligned} 27 &= \frac{6 \cdot x}{2} \\ &\Updownarrow \\ \frac{27 \cdot 2}{6} &= x \\ &\Updownarrow \\ 9 &= x \end{aligned}$$

Antwoord: De hoogte van de driehoek is 9 cm.

Controle: $\frac{6 \cdot 9}{2} = 27$

We kunnen ook eerst de formule omvormen naar het gevraagde.

In het eerste voorbeeld zullen we de formule $A_{\text{rechthoek}} = l \cdot b$ omvormen naar l.
Daarna vullen we in deze formule de gegevens in.



Oplossing:

$$\begin{aligned} A_{\text{rechthoek}} &= l \cdot b \\ &\Updownarrow \\ \frac{A_{\text{rechthoek}}}{b} &= l \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{35\ \text{cm}^2}{5\ \text{cm}} &= l \\ &\Updownarrow \\ 7\ \text{cm} &= l \end{aligned}$$

Antwoord: De lengte van de rechthoek is 7 cm.

Taak: Vorm de formule in voorbeeld 2 om naar h en werk uit.

5 Samenvatting

- Je kunt vergelijkingen oplossen van de volgende vormen.

$$\begin{aligned} x + a &= b \\ &\Updownarrow \\ x &= b - a \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - a &= b \\ &\Updownarrow \\ x &= b + a \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x \cdot a &= b \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{b}{a} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x : a &= b \\ &\Updownarrow \\ x &= b \cdot a \end{aligned}$$

- Je kunt vraagstukken oplossen met behulp van een vergelijking.
- Je kunt een eenvoudige formule opstellen vanuit een reeks getallen (of een reeks figuren).
- Je kunt een grootheid berekenen uit een gegeven formule door de waarden van de andere grootheden in te vullen en dan de vergelijking op te lossen.
- Je weet dat bij $a \cdot x = b$ en $x : a = b$ het getal a nooit 0 mag zijn.
- Je kunt een eenvoudige formule omvormen.