8 Oefeningen

1 Schrijf de volgende producten als een macht.

a $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$

b $(-b)\cdot(-b)\cdot(-b) = (-b)^3 = -b^3$

c $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 5^6$

d $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

e $0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2 = 0{,}2^3$

f $5\cdot5\cdot5\cdot4\cdot4\cdot4\cdot5 = 4^3\cdot5^4$

g $x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y = x^3\cdot y^3$

h $\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right) = \left(\frac{-5}{7}\right)^3\cdot\frac{3}{8}$

2 Reken uit.

a $5^3 = 5\cdot5\cdot5 = 125$

b $4^2 = 4\cdot4 = 16$

c $10^3 = 10\cdot10\cdot10 = 1000$

d $0^4 = 0\cdot0\cdot0\cdot0 = 0$

e $-2^3 = -2\cdot2\cdot2 = -8$

f $(-3)^0 = 1$

g $(-1)^6 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = 1$

h $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{9}{16}$

i $(-1)^5 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$

j $-\frac{-2^2}{3^3} = -\frac{-2\cdot2}{3\cdot3\cdot3} = -\frac{-4}{27} = \frac{4}{27}$

k $0{,}1^5 = 0{,}1\cdot0{,}1\cdot0{,}1\cdot0{,}1\cdot0{,}1 = 0{,}00001$

l $\frac{4^2}{2^4} = \frac{4\cdot4}{2\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{16}{16} = 1$

m $-1^6 = -1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1 = -1$

n $-3^0 = -1$

o $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-27}{64}$

p $\left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{8}$

q $-\left(\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{-27}{64}$

r $0{,}5^2 = 0{,}5\cdot0{,}5 = 0{,}25$

s $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

t $-\frac{3^3}{4} = -\frac{3\cdot3\cdot3}{4} = -\frac{27}{4}$

u $0{,}2^3 = 0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2 = 0{,}008$

v $(-0{,}7)^2 = (-0{,}7)\cdot(-0{,}7) = 0{,}49$

w $(-2)^5 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -32$

x $(-0{,}1)^4 = (-0{,}1)\cdot(-0{,}1)\cdot(-0{,}1)\cdot(-0{,}1) = 0{,}0001$

3 Bereken de volgende machten met negatieve exponenten.

a $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

b $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

c $1^{-4} = \frac{1}{1^4} = 1$

d $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

e $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} = (-6)^2 = 36$

f $(0,5)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

g $(1,2)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

h $-4^{-2} = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$

i $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

j $-\left(-\frac{1}{10}\right)^{-4} = -(-10)^4$
$= -10\,000$

k $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$

l $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{-1}{64}$

m $-4^{-3} = -\frac{1}{4^3} = -\frac{1}{64}$

n $(-7)^{-1} = \frac{-1}{7}$

o $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$

p $\left(\frac{-3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{-2}{3}\right)^3$
$= \frac{-8}{27}$

q $(-1,5)^{-2} = \left(\frac{-3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

r $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$

4 Kleur het vakje groen als de macht een positief resultaat oplevert.

$(-2)^{33}$	$(-34)^2$	$-0{,}3^8$	$(-6{,}2)^2$	-6^{42}
-2^{34}	$(-2)^5$	$(-7{,}2)^4$	$(-1)^0$	$\left(\frac{-4}{5}\right)^8$
$(-2)^{34}$	$\left(\frac{-3}{7}\right)^{28}$	$(-0{,}125)^{64}$	$-(-1)^5$	$-\left(\frac{-1}{7}\right)^3$

5 Werk uit door de rekenregel 'product van machten met hetzelfde grondtal' toe te passen.

a $2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32$

b $2^{-4} \cdot 2^2 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

c $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

d $5^{-2} \cdot 5^4 = 5^2 = 25$

e $0,3^2 \cdot 0,3^{-2} = 0,3^0 = 1$

f $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^0 = \left(\frac{-3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$

g $0,5^3 \cdot 0,5^{-2} = 0,5^1 = 0,5$

h $3^{-1} \cdot 3^3 = 3^2 = 9$

6 Werk uit door de rekenregel 'product van machten met hetzelfde grondtal' toe te passen. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $x^3 \cdot x^4 = x^7$

b $k^4 \cdot k^{-2} = k^2$

c $x^4 \cdot x = x^5$

d $a^{-3} \cdot a^5 = a^2$

e $b^2 \cdot b^5 = b^7$

f $b^0 \cdot b^{-2} = b^{-2} = \frac{1}{b^2}$

g $\left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^6 = \frac{a^6}{64}$

h $d^{-4} \cdot d^{-4} = d^{-8} = \frac{1}{d^8}$

* **7** Werk uit. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $a \cdot a^2 \cdot a^3 = a^6$

b $k^4 \cdot k \cdot k^2 = k^7$

c $2 \cdot 2^{-2} \cdot 2^5 = 2^4 = 16$

d $x^4 \cdot y \cdot x^2 \cdot y^2 = x^6 y^3$

e $a^6 \cdot a^{-2} \cdot a^3 = a^7$

f $a^2 \cdot b^3 \cdot a^{-1} \cdot b^2 = a b^5$

g $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 4^2 \cdot 4^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 4^{-1} = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{128}$

h $t^{-2} \cdot t^3 \cdot t^{-1} = t^0 = 1$

8 Werk uit. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

b $b^m \cdot b^m = b^{2m}$

c $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y}$

d $a^m \cdot a^{-3} = a^{m-3}$

e $a^m \cdot a^{m+1} = a^{2m+1}$

f $a^x \cdot a^y \cdot a^z = a^{x+y+z}$

g $b^2 \cdot b^p \cdot b^{p+1} = b^{2p+3}$

h $a^2 \cdot b^3 \cdot a^k \cdot b^q = a^{k+2} \cdot b^{q+3}$

9 Werk uit door de rekenregel ‘quotiënt van machten met hetzelfde grondtal’ toe te passen.

a $2^4 : 2^2 = 2^2 = 4$

b $\dfrac{10^2}{10^3} = 10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

c $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 : \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^1 = \dfrac{2}{5}$

d $0{,}5^4 : 0{,}5^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25$

e $\dfrac{3^2}{3^{-1}} = 3^3 = 27$

f $7^5 : 7^{-1} = 7^6 = 117\,649$

g $\dfrac{2^3}{2^{-2}} = 2^5 = 32$

h $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5 : \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$

i $4^4 : 4^3 = 4^1 = 4$

j $\dfrac{2^{-3}}{2^{-2}} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

10 Werk uit door de rekenregel ‘quotiënt van machten met hetzelfde grondtal’ toe te passen. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $a^7 : a^3 = a^4$

b $\dfrac{b^5}{b^{-2}} = b^7$

c $y^4 : y^{-2} = y^6$

d $(-x)^6 : (-x)^4 = (-x)^2 = x^2$

e $x^5 : x^{-3} = x^8$

f $\dfrac{b^{-2}}{b^{-4}} = b^2$

g $x^{-3} : x^4 = x^{-7} = \dfrac{1}{x^7}$

h $\left(\dfrac{3}{b}\right)^5 : \left(\dfrac{3}{b}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{b}\right)^3 = \dfrac{27}{b^3}$

i $\dfrac{-y}{(-y)^3} = (-y)^{-2} = \left(\dfrac{-1}{y}\right)^2 = \dfrac{1}{y^2}$

j $z^2 : z^3 = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$

11 Werk uit. Opgelet! Zowel het grondtal als de exponent kunnen letters zijn. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $\dfrac{b^n}{b^3} = b^{n-3}$

b $\dfrac{a^n}{a^2} = a^{n-2}$

c $\dfrac{a^{m+1}}{a^2} = a^{m-1}$

d $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x : \left(\dfrac{3}{4}\right)^y = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-y}$

e $a^{4p} : a^{2p} = a^{2p}$

f $\dfrac{a^n}{a^{-2}} = a^{n+2}$

g $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x : \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+2}$

h $\dfrac{5^p}{5^{-p}} = 5^{2p}$

i $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x : \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

j $a^{-n} : a^{-2n} = a^n$

12 Werk uit door de rekenregel 'macht van een macht' toe te passen.

a $(10^2)^4 = 10^8 = 100\,000\,000$

b $(3^2)^2 = 3^4 = 81$

c $(10^{-2})^{-1} = 10^2 = 100$

d $(0,2^2)^2 = 0,2^4 = 0,0016$

e $(1,5^2)^0 = 1,5^0 = 1$

f $(5^2)^3 = 5^6 = 15\,625$

g $((-2)^2)^{-1} = (-2)^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

h $(5^{-1})^{-2} = 5^2 = 25$

i $(2^3)^2 = 2^6 = 64$

j $((-1)^3)^{-1} = (-1)^{-3} = -1$

13 Werk uit door de rekenregel 'macht van een macht' toe te passen. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $(a^2)^3 = a^6$

b $(b^2)^{-2} = b^{-4} = \frac{1}{b^4}$

c $((-y)^2)^{-1} = (-y)^{-2} = \frac{1}{y^2}$

d $(a^3)^3 = a^9$

e $(c^{-2})^{-2} = c^4$

f $(x^2)^{-3} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$

g $(c^{-1})^{-1} = c^1 = c$

h $(c^2)^4 = c^8$

i $(a^{-1})^{-2} = a^2$

j $(b^3)^5 = b^{15}$

14 Werk uit. Opgelet! Zowel het grondtal als de exponent kunnen letters zijn. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $(a^p)^q = a^{pq}$

b $(b^2)^m = b^{2m}$

c $(b^{-1})^k = b^{-k} = \frac{1}{b^k}$

d $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-a} = 2^a$

e $(a^x)^2 = a^{2x}$

f $(b^2)^p = b^{2p}$

g $(a^{-2})^{-q} = a^{2q}$

h $(b^n)^n = b^{n \cdot n} = b^{n^2}$

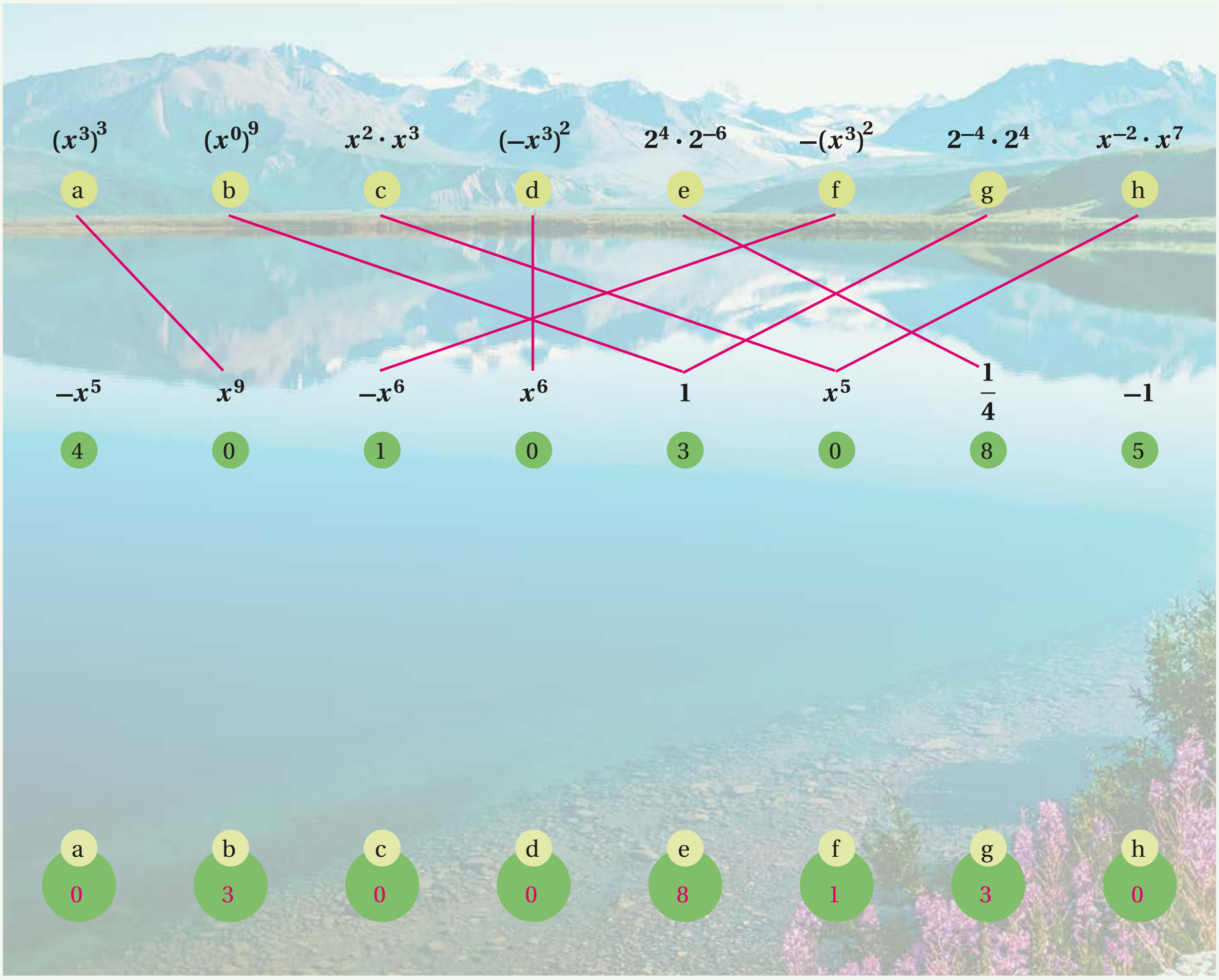
i $(d^{-2})^{-p} = d^{2p}$

j $(x^{-1})^a = x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

15 **WISKUNDE & AARDRIJKSKUNDE**

Een van de laatste stukjes ‘onontgonnen gebied’ van Noord-Amerika is Alaska.
Het telt anderhalf miljoen vierkante kilometer en die werden allemaal in 1867 voor slechts 7 000 000 dollar overgekocht van Rusland. De hoofdstad is Juneau en de gemiddelde temperatuur in het noorden van deze staat is –12 °C. In het zuiden wordt het echter warmer, tot 35 °C.
Alaska telt heel wat ‘National Parks’, waar je geniet van de ongerepte natuur en de wildernis. Maar je kunt er ook nog oog in oog komen te staan met kariboes, elanden, zwarte beren en grizzly’s. En dat is niet zonder gevaar!
De plaatselijke gidsen zullen je dan ook uitgebreid inlichten over wat je moet doen als je zo’n kanjer plots voor je ziet staan.

De natuur krijgt in Alaska dus de hoofdrol. Je vindt er de hoogste berg uit Noord-Amerika, de Mount McKinley, 6194 m hoog, en er zijn 70 vulkanen. Ongeveer 5 % van Alaska is gletsjergebied. Er zijn meer dan 5000 gletsjers (waarvan sommige zelfs 8 km lang!) en je vindt er ook ontzettend veel meren. Het aantal meren in Alaska vind je door onderstaande puzzel op te lossen. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul. Verbind de opgave met de correcte oplossing en noteer dan onderaan bij de letter van de oefening het cijfer dat je boven de oplossing vindt. Het getal dat je zo vormt, is het aantal meren in Alaska.
Je kunt het steeds ter plaatse gaan natellen!



16 Werk uit door de rekenregel 'macht van een product' toe te passen.

a $(2a)^2 = 4a^2$

b $(4c)^3 = 64c^3$

c $(-ab)^2 = a^2b^2$

d $(-3c)^2 = 9c^2$

e $(-2c)^3 = -8c^3$

f $(-2ab)^2 = 4a^2b^2$

g $(2ac)^3 = 8a^3c^3$

h $\left(\frac{1}{2}ac\right)^2 = \frac{1}{4}a^2c^2$

i $(-ab)^3 = -a^3b^3$

j $\left(-\frac{1}{4}ac\right)^2 = \frac{1}{16}a^2c^2$

17 Werk uit door de rekenregel 'macht van een product' toe te passen. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $(2a^2b)^2 = 4a^4b^2$

b $(4ac^4)^2 = 16a^2c^8$

c $(10xy^2z^3)^2 = 100x^2y^4z^6$

d $\left(-\frac{4}{5}a^3b^4\right)^2 = \frac{16}{25}a^6b^8$

e $(-3x^2y^4)^3 = -27x^6y^{12}$

f $(0{,}5x^{-2}y^{-3})^{-2} = 4x^4y^6$

g $(a^{-1}b^{-1})^{-3} = a^3b^3$

h $(2ab^2)^4 = 16a^4b^8$

i $(-abc)^2 = a^2b^2c^2$

j $(5ab^2c^3)^2 = 25a^2b^4c^6$

18 Werk uit. Opgelet! Zowel het grondtal als de exponent kunnen letters zijn. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $(x \cdot y)^k = x^ky^k$

b $(0{,}1a^{-2}b^{-1})^{-m} = 10^ma^{2m}b^m$

c $(r^2 \cdot s)^m = r^{2m}s^m$

d $(y \cdot z^{-2})^m = y^mz^{-2m} = \frac{y^m}{z^{2m}}$

e $(a^{-x} \cdot b^{-y} \cdot c^{-z})^{-1} = a^xb^yc^z$

f $(a^2b^3c)^m = a^{2m}b^{3m}c^m$

g $(-2xy^3)^{2m} = 4^mx^{2m}y^{6m}$

h $(10ab^2c^3)^m = 10^ma^mb^{2m}c^{3m}$

i $(5x^3)^{k+1} = 5^{k+1}x^{3k+3}$

j $\left(\frac{1}{4}a^2\right)^{-m} = 4^ma^{-2m} = \frac{4^m}{a^{2m}}$

19 Werk uit door de rekenregel 'macht van een quotiënt' toe te passen.

a $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

b $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}$

c $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

d $\left(\frac{-1}{10}\right)^3 = \frac{-1}{1000}$

e $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

f $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 9$

g $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{-5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

h $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

i $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

j $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{1}\right)^3 = 1000$

20 Werk uit door de rekenregel 'macht van een quotiënt' toe te passen. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

b $\left(-\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{-x^3}{8}$

c $\left(\frac{3}{z^2}\right)^2 = \frac{9}{z^4}$

d $\left(-\frac{1}{a}\right)^4 = \frac{1}{a^4}$

e $\left(\frac{-c}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{-2}{c}\right)^2 = \frac{4}{c^2}$

f $\left(-\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$

g $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2} = \left(\frac{b^3}{a^2}\right)^2 = \frac{b^6}{a^4}$

h $\left(\frac{-3}{y^3}\right)^{-3} = \left(\frac{-y^3}{3}\right)^3 = \frac{-y^9}{27}$

i $\left(-\frac{1}{ab}\right)^2 = \frac{1}{a^2b^2}$

j $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x^2}$

21 Werk uit. Opgelet! Zowel het grondtal als de exponent kunnen letters zijn. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

b $\left(\frac{x}{y}\right)^{p+1} = \frac{x^{p+1}}{y^{p+1}}$

c $\left(\frac{x}{2}\right)^{2+a} = \frac{x^{2+a}}{2^{2+a}}$

d $\left(-\frac{3}{2}\right)^{2a} = \frac{3^{2a}}{2^{2a}} = \frac{9^a}{4^a}$

e $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-m} = \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^m = \frac{y^{3m}}{x^{2m}}$

f $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x^2}\right)^a = \frac{y^a}{x^{2a}}$

g $\left(\frac{-1}{a}\right)^{2p} = \frac{1}{a^{2p}}$

h $\left(\frac{3^x}{2^y}\right)^2 = \frac{3^{2x}}{2^{2y}} = \frac{9^x}{4^y}$

i $\left(\frac{5}{x^2}\right)^k = \frac{5^k}{x^{2k}}$

j $\left(-\frac{4x}{5}\right)^{2m} = \frac{(4x)^{2m}}{5^{2m}} = \frac{16^m x^{2m}}{25^m}$

22 Bewijzen maar …

Je hoeft niet alles in de wiskunde zomaar aan te nemen. Daarom zul je geregeld een verklaring of **bewijs** terugvinden van rekenregels of eigenschappen.

We kunnen zo'n bewijs opbouwen dankzij de gekende leerstof van dit en van het vorige schooljaar. Bij elke stap van een bewijs hoort een verantwoording. Eigenlijk een beetje het antwoord op de vraag: "Waarom mag je dat uit de vorige stap afleiden?"

Er bestaan in de wiskunde verschillende soorten bewijzen.

Dit bewijs steunt op een hele reeks gelijkheden. We vertrekken bij het linkerlid en proberen (via definities en eigenschappen) bij het rechterlid uit te komen. Volg je mee?

Voorbeeld: bewijs de eerste rekenregel $\forall a \in \mathbb{Q}_0, \forall n, p \in \mathbb{N}: \quad a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

Gegeven: $\left.\begin{array}{l} a \in \mathbb{Q}_0 \\ n, p \in \mathbb{N} \end{array}\right\}$ voorwaarde letters

Te bewijzen: $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

Bewijs:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^p &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ factoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots a)}_{p \text{ factoren}} && \text{definitie macht} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+p \text{ factoren}} && \text{het vermenigvuldigen in } \mathbb{Q} \text{ is associatief} \\ &= a^{n+p} && \text{definitie macht} \end{aligned}$$

Ook voor gehele exponenten is de uitspraak waar.

Bewijs op een analoge manier een andere rekenregel.

Delen van machten met hetzelfde grondtal.

$\forall a \in \mathbb{Q}_0, \forall n, p \in \mathbb{N}: \; a^n : a^p = a^{n-p}$

$$\begin{aligned} a^n : a^p &= a^n \cdot \frac{1}{a^p} && \text{definitie delen} \\ &= a^n \cdot a^{-p} && \text{definitie macht negatieve exponent} \\ &= a^{n-p} && \text{product machten met eenzelfde grondtal} \end{aligned}$$

Macht van een product.

$\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \forall n \in \mathbb{N}: \; (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) && \text{definitie macht} \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \ldots a \cdot b && \text{"·" is associatief} \\ &= \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ factoren}} \cdot \underbrace{b \cdot b \ldots b}_{n \text{ factoren}} && \text{"·" is commutatief} \\ &= a^n b^n && \text{definitie machten} \end{aligned}$$

Macht van een macht.

$\forall a \in \mathbb{Q}_0, \forall n, p \in \mathbb{N}: \; (a^n)^p = a^{n \cdot p}$

$$\begin{aligned} (a^n)^p &= \underbrace{a^n \cdot a^n \ldots a^n}_{p \text{ factoren}} && \text{definitie macht} \\ &= a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{p \text{ termen}}} && \text{product machten met eenzelfde grondtal} \\ &= a^{n \cdot p} && \text{definitie product} \end{aligned}$$

Macht van een quotiënt.

$\forall a, b \in \mathbb{Q}_0, \forall n \in \mathbb{N}: \; (a : b)^n = a^n : b^n$

$$\begin{aligned} (a : b)^n &= \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n && \text{definitie delen} \\ &= a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n && \text{macht van een product} \\ &= a^n \cdot \frac{1}{b^n} && \text{definitie macht van een breuk} \\ &= \frac{a^n}{b^n} \\ &= a^n : b^n \end{aligned}$$

*23 Werk uit door rekenregels van machten toe te passen. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$

b $(-5)^3 = -125$

c $\left(x^3\right)^4 = x^{12}$

d $x^5 : x^3 = x^2$

e $(a \cdot b)^2 = a^2b^2$

f $x^3 \cdot x^4 = x^7$

g $-5^2 = -25$

h $3^{-4} \cdot 3^2 = 3^{-2}$
$= \frac{1}{3^2}$
$= \frac{1}{9}$

i $\left(\frac{-3}{5}\right)^4 : \left(\frac{-3}{5}\right)^2 = \left(\frac{-3}{5}\right)^2$
$= \frac{9}{25}$

j $(-0,2)^3 = -0,008$
of
$\left(\frac{-1}{5}\right)^3 = \frac{-1}{125}$

k $(0,2)^8 : (0,2)^4 = (0,2)^4 = 0,0016$
of
$\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}$

l $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-2} = \left(\frac{-1}{2}\right)^6$
$= \frac{1}{64}$

m $\left[\left(x^2\right)^2\right]^2 = x^8$

n $\left(\frac{2a^3}{b}\right)^4 = \frac{16a^{12}}{b^4}$

o $a^4 \cdot \left(a^2\right)^3 = a^4 \cdot a^6$
$= a^{10}$

p $1^4 \cdot (-1)^6 = 1$

q $\left(\frac{-2x^2}{y}\right)^{-4} = \left(\frac{-y}{2x^2}\right)^4$
$= \frac{y^4}{16x^8}$

r $\left(\frac{2}{a^{-2}}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{a^4} = \frac{1}{4a^4}$

24 Werk uit. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $\left((-a)^2 \cdot a^5\right)^3 =$

$$(-a)^6 \cdot a^{15}$$
$$= a^6 \cdot a^{15}$$
$$= a^{21}$$

b $\left(a^2\right)^4 : a^{-4} =$

$$a^8 : a^{-4}$$
$$= a^{12}$$

c $\dfrac{a^3 \cdot \left(b^2\right)^4 \cdot c^5}{a^2 \cdot b^{10} \cdot \left(c^2\right)^3} =$

$$\frac{a^3 \cdot b^8 \cdot c^5}{a^2 \cdot b^{10} \cdot c^6}$$
$$= a \cdot b^{-2} \cdot c^{-1}$$
$$= \frac{a}{b^2 \cdot c}$$

d $\dfrac{a^3 \cdot a^4}{\left(a^2\right)^3} =$

$$\frac{a^7}{a^6}$$
$$= a$$

e $\left(\dfrac{a^3}{a^7}\right)^{-2} \cdot \left(a^{-3}\right)^2 =$

$$\left(a^{-4}\right)^{-2} \cdot a^{-6}$$
$$= a^8 \cdot a^{-6}$$
$$= a^2$$

f $\left(\dfrac{m^{-4} \cdot m^{-4}}{m^{-9} \cdot m}\right)^{10} =$

$$\left(\frac{m^{-8}}{m^{-8}}\right)^{10}$$
$$= \left(m^0\right)^{10}$$
$$= 1$$

*25 Werk uit door rekenregels van machten toe te passen. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $\left(\dfrac{-2}{a^2b^2}\right)^{-2} =$

$\left(\dfrac{a^2b^2}{-2}\right)^2$

$= \dfrac{a^4b^4}{4}$

b $\dfrac{(a^2)^3 \cdot b^2 \cdot a^{-2}}{b^4 \cdot a^3} =$

$\dfrac{a^6 \cdot a^{-2} \cdot b^2}{a^3 \cdot b^4}$

$= \dfrac{a^4 \cdot b^2}{a^3 \cdot b^4}$

$= \dfrac{a}{b^2}$

c $\left(\dfrac{k^2 \cdot k^{-4} \cdot n^3}{k^3 \cdot n^{-2}}\right)^{-3} =$

$(k^{-5} \cdot n^5)^{-3}$

$= \dfrac{k^{15}}{n^{15}}$

d $\dfrac{(a^2bc^3)^3}{(2ab)^2} =$

$\dfrac{a^6b^3c^9}{4a^2b^2}$

$= \dfrac{a^4bc^9}{4}$

e $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2}{a^3 \cdot b \cdot a^{-2}} =$

$\dfrac{\frac{1}{4}a^4b^2}{ab}$

$= \frac{1}{4}a^3b$

*26 Bereken met ICT. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $\left(\dfrac{-8}{7}\right)^2 \cdot \dfrac{7}{2^5} \cdot \dfrac{4^2}{2^{-3}} = \dfrac{256}{7}$

b $\dfrac{(a^2)^{-3} \cdot (b^3)^{-2}}{(a^5)^{-2} \cdot b^{-4}} = \dfrac{a^4}{b^2}$

c $\dfrac{2,5^3}{8^2} : \dfrac{16^{-4}}{(-2,5)^{-2}} = 2560$

d $\dfrac{(1,5)^{-3} \cdot 6,2^2}{4^3} = \dfrac{961}{5400}$

27 Werk uit. Gebruik zo veel mogelijk rekenregels om de opgave te vereenvoudigen. Bestudeer vooraf grondig het voorbeeld.

Voorbeeld: $8 + 32 : 4 + \frac{1}{2^{-3}} - 2^2 \cdot 2$

$= 2^3 + 2^5 : 2^2 + 2^3 - 2^2 \cdot 2$

$= 2^3 + 2^3 + 2^3 - 2^3$

$= 2 \cdot 2^3$

$= 2^4$

$= 16$

a $2^3 + 16^2 : 2^5$

$= 2^3 + (2^4)^2 : 2^5$

$= 2^3 + 2^8 : 2^5$

$= 2^3 + 2^3$

$= 2 \cdot 2^3$

$= 2^4$

$= 16$

b $9 \cdot 3^2 - 81 + 3^7 : 27$

$= 3^2 \cdot 3^2 - 3^4 + 3^7 : 3^3$

$= 3^4 - 3^4 + 3^4$

$= 3^4$

$= 81$

c $25 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + 5^6 \cdot 5^2 \cdot 5^{-4} : 5^2 + \frac{1}{5^{-2}} + 125 : 5$

$= 5^2 + 5^2 + 5^6 \cdot 5^2 \cdot 5^{-4} : 5^2 + 5^2 + 5^3 : 5$

$= 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2$

$= 5 \cdot 5^2$

$= 5^3$

$= 125$

28 Vul aan. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $2^{-7} = \frac{1}{128}$

b $(3a^{3})^{2} = 9a^6$

c $(11a^8)^2 = 121a^{16}$

d $\left(\frac{1}{2}a^4\right)^{-2} = \frac{4}{a^8}$

e $7^{0} = 1$

f $27d^3 = (3d)^3$

g $\frac{e^7d^5}{e^3d^7} = \frac{e^4}{d^2}$

h $\left(\frac{4}{2} \cdot \frac{2}{22}\right)^2 = \frac{4}{121}$

i $(a^{2} b^4)^{3} = a^6b^{12}$

29 Bepaal telkens x. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

a $10^{15} : 10^x = 10^3$ — $x = 12$

b $10^3 \cdot 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot 10^x = 10^8$ — $x = 10$

c $\frac{a^x}{a^4} = a^{12}$ — $x = 16$

d $\left(\frac{2a^{15}}{a^x}\right)^2 = 4a^{20}$ — $x = 5$

e $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-7}$ — $x = 3$

f $\frac{a^4 \cdot a^x}{a^2} = a^8$ — $x = 6$

g $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{x}{7}\right)^3 = \left(\frac{25}{42}\right)^3$ — $x = 5$

h $(a \cdot b^3)^x = a^4 \cdot b^{12}$ — $x = 4$

i $(3^2)^x = 3^8$ — $x = 4$

30 Boven de poolcirkel …

Op expeditie naar het noorden van Scandinavië? Alvast geen slecht idee. Als je echt bijna in het meest noordelijke punt van Noorwegen, Zweden of Finland (je mag zelf kiezen) bent, passeer je de poolcirkel. Boven deze magische grens gaat de zon in de zomer gedurende zestig dagen niet onder! Je ziet dan 's nachts de middernachtzon (zie foto). De plaatselijke bevolking moet echter in de winter een even lange poolnacht doormaken! Ter plaatse kun je kennismaken met een ijskathedraal, een ijshotel, het noorderlichtmuseum, prehistorische rotstekeningen (zelfs tot 8000 jaar oud) en in één dorpje vind je nog een attractie: de enige echte …

Om te weten te komen over wie of wat we het hier hebben, los je elke oefening op. Zoek de letter die bij het antwoord staat en vorm hiermee het antwoord. De letters in de grondtallen stellen een rationaal getal voor verschillend van nul.

$\dfrac{(-9)^2\cdot(-9)^3}{(-9)^4}$	$=(-9)^1=-9$	S
$\left(5^{-2}\right)^{-1}$	$=5^2$	A
$\left(a^2b^{-1}\right)^{-2}$	$=\dfrac{b^2}{a^4}$	N
$\dfrac{7b^{-1}}{b^2}$	$=\dfrac{7}{b^3}$	T
$\left(\dfrac{a^2bc}{ab^3}\right)^{-2}$	$=\left(\dfrac{ab^3}{a^2bc}\right)^2=\dfrac{b^4}{a^2c^2}$	A
$\dfrac{-1^5\cdot(-1)^{-2}}{(-1)}$	$=1$	C
$\dfrac{5^2\cdot5^{-1}\cdot5^4}{5^{-2}}$	$=5^7$	L
$\dfrac{a^{-1}\left(b^2\right)^2c}{ac^3}$	$=\dfrac{b^4}{a^2c^2}$	A
$\dfrac{(-4)^{-2}\cdot(-4)^{-3}}{(-4)^{-4}}$	$=(-4)^{-1}=-\dfrac{1}{4}$	U
$(-9)^{-1}$	$=-\dfrac{1}{9}$	S

$\dfrac{a^2c^2}{b^4}$	O	$\dfrac{a^4}{b^2}$	Z
$\dfrac{7}{b^3}$	T	9	K
$-\dfrac{1}{9}$	S	0	B
-9	S	-4	D
$\dfrac{1}{4}$	F	$\dfrac{b^4}{a^2c^2}$	A
-1	R	5^7	L
5^3	M	$a^2b^3c^2$	E
$\dfrac{b^2}{a^4}$	N	$-\dfrac{1}{4}$	U
5^2	A	1	C

SANTA CLAUS: in het Finse dorpje Rovaniemi kun je hem elke dag van het jaar bezoeken.

31 Werk uit zoals in het voorbeeld.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^4 = \left(\frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{3}{\cancel{9}}}\right)^4$$

$$= \left(\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3}\right)^4$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$= \frac{16}{81}$$

a $\left(\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$$= \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$= \frac{27}{8}$$

d $4^3 \cdot (0{,}5)^3$

$$= (4 \cdot 0{,}5)^3$$

$$= 2^3$$

$$= 8$$

b $\left(-\frac{8}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{35}{16}\right)^2$

$$= \left(\frac{-8}{5} \cdot \frac{35}{16}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{49}{4}$$

e $\left(-\frac{2}{17}\right)^3 \cdot (-34)^3$

$$= \left(\frac{-2}{17} \cdot (-34)\right)^3$$

$$= 4^3$$

$$= 64$$

c $7^3 \cdot \left(\frac{-2}{35}\right)^3$

$$= \left(7 \cdot \frac{-2}{35}\right)^3$$

$$= \left(\frac{-2}{5}\right)^3$$

$$= \frac{-8}{125}$$

f $(-1{,}5)^2 \cdot (-6)^2$

$$= (-1{,}5 \cdot (-6))^2$$

$$= 9^2$$

$$= 81$$

32 Werk uit zoals in het voorbeeld.

$$\left(\frac{9}{8}\right)^4 : \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{9}{8} : \frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2} \cdot \cancel{3}_{1}}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

a $75^3 : 25^3$

$= (75 : 25)^3$

$= 3^3$

$= 27$

d $\left(\frac{-144}{5}\right)^3 : 72^3$

$= \left(\frac{-144}{5} : 72\right)^3$

$= \left(\frac{-2}{5}\right)^3$

$= \frac{-8}{125}$

b $(-164)^4 : 82^4$

$= (-164 : 82)^4$

$= (-2)^4$

$= 16$

e $4^2 : (0{,}5)^2$

$= (4 : 0{,}5)^2$

$= 8^2$

$= 64$

c $\left(\frac{3}{16}\right)^3 : \left(\frac{-1}{8}\right)^3$

$= \left(\frac{3}{16} : \frac{-1}{8}\right)^3$

$= \left(\frac{-3}{2}\right)^3$

$= \frac{-27}{8}$

f $\left(\frac{9}{8}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{9}{8} : \frac{3}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$= \frac{9}{16}$

33 Het getal 25 wordt vijf keer verdubbeld. Het resultaat is

(A) $2 \cdot 5^3$ (B) 5^4 (C) 5^3 (D) $2^5 \cdot 5^2$ (E) $2^5 \cdot 5^3$

JWO 2007 eerste ronde, vraag 7 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25 = 2^5 \cdot 5^2$

34 $8^8 + 8^8$ is gelijk aan

(A) 2^{12} (B) 2^{22} (C) 2^{25} (D) 2^{27} (E) 2^{48}

JWO 2008 eerste ronde, vraag 11 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

$2 \cdot 8^8 = 2 \cdot \left(2^3\right)^8 = 2 \cdot 2^{24} = 2^{25}$

35 De helft van 4^8 is gelijk aan

(A) 2^4 (B) 2^8 (C) 2^{15} (D) 4^4 (E) 4^7

JWO 2009 eerste ronde, vraag 3 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

$4^8 : 2 = \left(2^2\right)^8 : 2 = 2^{16} : 2 = 2^{15}$

36 De breuk $\dfrac{16^{16}}{8^8}$ is gelijk aan

(A) 2^2 (B) 2^8 (C) 2^{16} (D) 2^{24} (E) 2^{40}

JWO 2010 eerste ronde, vraag 5 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

$\dfrac{\left(2^4\right)^{16}}{\left(2^3\right)^8} = \dfrac{2^{64}}{2^{24}} = 2^{40}$

37 Welke van de volgende getallen is geen kwadraat én ook geen derde macht?

(A) 2^9 (B) 3^{10} (C) 4^{11} (D) 5^{12} (E) 6^{13}

wizPROF 2015 vraag 8 © Stichting Wiskunde Kangoeroe

$2^9 = \left(2^3\right)^3$ $4^{11} = \left(2^{11}\right)^2$

$3^{10} = \left(2^5\right)^2$ $5^{12} = \left(5^6\right)^2$