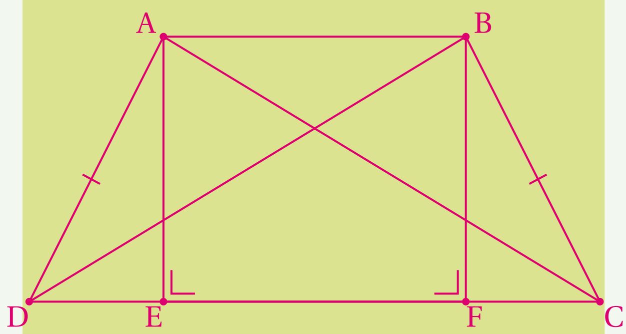
8 Oefeningen

1 Op zoek naar een eigenschap voor het gelijkbenig trapezium.
Teken een gelijkbenig trapezium ABCD met als opstaande (en even lange) zijden [BC] en [DA].

a Meet de hoeken $\widehat{C}$ en $\widehat{D}$.

$\widehat{C} = 63°$ (voorbeeld!)

$\widehat{D} = 63°$



b Wat stel je vast? Formuleer een besluit.

$\widehat{C} = \widehat{D}$

In een gelijkbenig trapezium zijn
de basishoeken even groot.

c Meet [AC] en [BD].

$|AC| = 6,7$ cm (voorbeeld!)

$|BC| = 6,7$ cm

d Wat stel je vast? Formuleer een besluit.

$|AC| = |BC|$

In een gelijkbenig trapezium zijn de diagonalen even lang.

e Bewijs jouw vaststellingen van b en d.

Teken in A en B een loodlijn op DC.

In ΔAED en ΔBFC geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} |AE| = |BF| & \text{(gelijke afstanden tussen 2 evenwijdigen)} \\ \widehat{E} = \widehat{F} & (= 90°) \\ |AD| = |BC| & \text{(gegeven)} \end{array}\right\} \xrightarrow{90°ZZ} \begin{array}{ccc} \Delta AED & \cong & \Delta BFC \\ & \Downarrow & \text{(overeenkomstige hoeken)} \\ \widehat{D} & = & \widehat{C} \end{array}$$

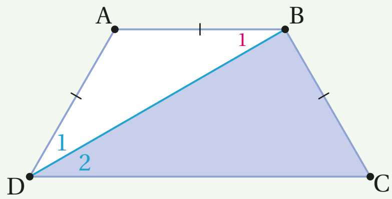
In ΔACD en ΔBDC geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} |AD| = |BC| & \text{(def. gelijkbenig trapezium)} \\ \widehat{D} = \widehat{C} & \text{(zie bewijs hierboven)} \\ |CD| = |CD| & \text{(gemeenschappelijke zijde)} \end{array}\right\} \xrightarrow{ZHZ} \begin{array}{ccc} \Delta ACD & \cong & \Delta BDC \\ & \Downarrow & \text{(overeenkomstige zijden)} \\ |AC| & = & |BD| \end{array}$$

2 Gegeven: zie figuur

$AB \parallel CD$

Te bewijzen: $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$



Bewijs:

ΔABD is gelijkbenig

$\Downarrow$ kenmerk gelijkbenige driehoek

$\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$

$\widehat{B}_1 = \widehat{D}_2$ (verwisselende binnenhoeken bij $AB \parallel CD$ en snijlijn BD)

$\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{D}_2$

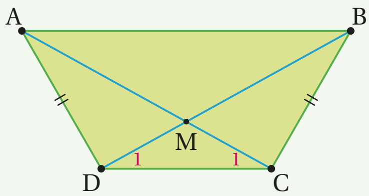
dus: $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$

3 Gegeven: ABCD is een gelijkbenig trapezium

$AB \parallel CD$

M is het snijpunt van de diagonalen

Te bewijzen: ΔMCD is gelijkbenig



Bewijs:

in ΔACD en ΔBDC geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} |AD| = |BC| & \text{(gegeven)} \\ \widehat{D} = \widehat{C} & \text{(eigenschap van het gelijkbenige trapezium)} \\ |CD| = |CD| & \text{(gemeenschappelijke zijde)} \end{array}\right\} \overset{\text{ZHZ}}{\Longrightarrow} \Delta ACD \cong \Delta BDC$$

$\Downarrow$ overeenkomstige hoeken

$\widehat{D}_1 = \widehat{C}_1$

$\Downarrow$ kenmerk gelijkbenige Δ

ΔDMC is gelijkbenig

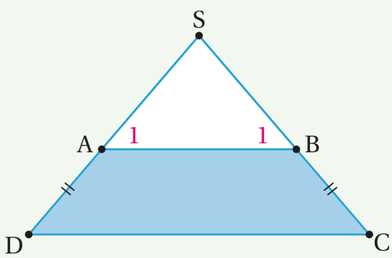
4 Gegeven: ABCD is een gelijkbenig trapezium

$|AD| = |BC|$

$AB \parallel CD$

S is het snijpunt van AD en BC

Te bewijzen: ΔSBA is gelijkbenig



$\widehat{A}_1 = \widehat{D}$ (overeenkomstige hoeken bij $AB \parallel DC$ en snijlijn AD)

$\widehat{B}_1 = \widehat{C}$ (overeenkomstige hoeken bij $AB \parallel DC$ en snijlijn BC)

Aangezien in een gelijkbenig trapezium de basishoeken gelijk zijn, is

$\widehat{C} = \widehat{D}$

$\Downarrow$

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

$\Downarrow$ kenmerk gelijkbenige driehoek

ΔSBA is gelijkbenig

5 a In een vierhoek ABCD is $\hat{D} = \hat{A} + 20°$. De hoek $\hat{A}$ is 15° groter dan $\hat{C}$.
Bereken alle hoeken van de vierhoek als je weet dat $\hat{B} = 97°$.

$$\begin{aligned} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} &= 360° \\ &\Updownarrow \\ \hat{A}+97°+\hat{A}-15°+\hat{A}+20° &= 360° \\ &\Updownarrow \\ 3\hat{A} &= 258° \\ &\Updownarrow \\ \hat{A} &= 86° \end{aligned}$$

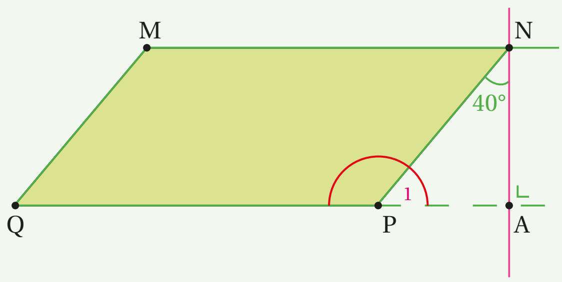
Antwoord: $\hat{A}=86°, \hat{B}=97°, \hat{C}=71°$ en $\hat{D}=106°$

b In een parallellogram ABCD is $\hat{A} = \hat{B} + 40°$. Bereken alle hoeken van het parallellogram.

$$\begin{aligned} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} &= 360° \\ &\Updownarrow \\ \hat{B}+40°+\hat{B}+\hat{B}+40°+\hat{B} &= 360° \\ &\Updownarrow \\ 4\hat{B}+80° &= 360° \\ &\Updownarrow \\ 4\hat{B} &= 280° \\ &\Updownarrow \\ \hat{B} &= 70° \end{aligned}$$

Antwoord: De hoeken zijn 110°, 70°, 110° en 70°.

c Bepaal alle hoeken van het parallellogram MNPQ.



- In ΔNAP bereken je

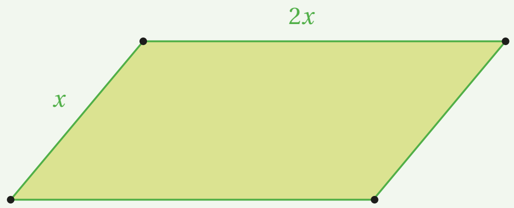
  $\hat{P}_1 = 180° - 90° - 40° = 50°$
- $\hat{P} + \hat{P}_1 = 180°$ dus is $\hat{P} = 130°$
- $\hat{P} = \hat{M} = 130°$ en $\hat{N} = \hat{Q} = 50°$

Antwoord: $\hat{M} = 130°, \hat{N} = 50°$

$\hat{P} = 130°$ en $\hat{Q} = 50°$

6 Bepaal telkens de lengte van de zijden van het parallellogram.

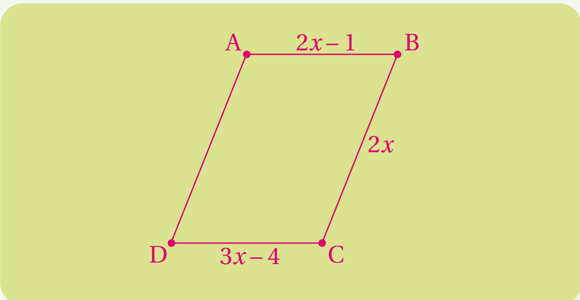
a Bereken x als je weet dat de omtrek van het parallellogram 150 cm is.



$$x+2x+x+2x = 150$$
$$\Updownarrow$$
$$6x = 150$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 150:6$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 25$$

Antwoord: $x = 25$, de lengte van de zijden: 25 cm, 50 cm, 25 cm en 50 cm.

b Hoe lang zijn de vier zijden van een parallellogram ABCD als je weet dat
$|AB| = 2x - 1$
$|BC| = 2x$
$|CD| = 3x - 4$

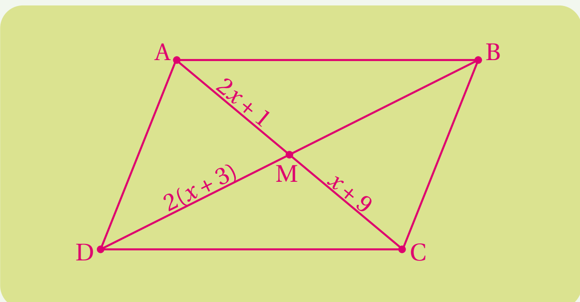


$$2x-1 = 3x-4$$
$$\Updownarrow$$
$$-1+4 = 3x-2x$$
$$\Updownarrow$$
$$3 = x$$

dus is $2x-1$ gelijk aan 5 en $2x$ wordt 6

Antwoord: $|AB| = |CD| = 5$ en $|BC| = |AD| = 6$

c De diagonalen van een parallellogram ABCD snijden elkaar in M. Bereken de lengte van de twee diagonalen als je weet dat
$|AM| = 2x + 1$
$|DM| = 2(x + 3)$
$|MC| = x + 9$



$$2x+1 = x+9$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 8$$

dus is $2\cdot(2x+1) = 2\cdot(16+1) = 34$

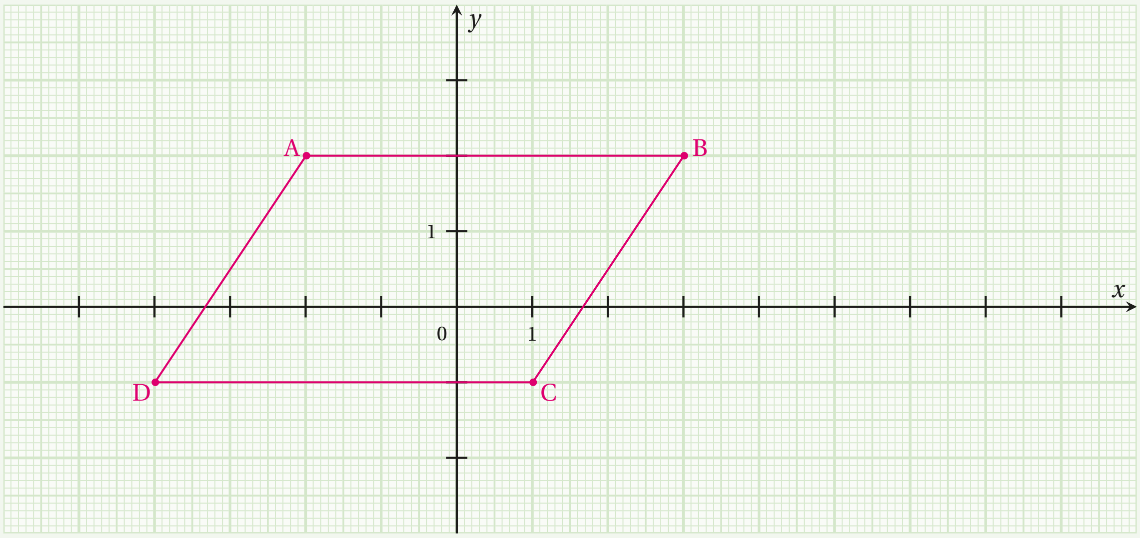
$2\cdot(2x+6) = 2\cdot 22 = 44$

Antwoord: $|AC| = 34$ en $|BD| = 44$

7 ABCD is een parallellogram met A(–2, 2), B(3, 2) en C(1, –1).

a Teken het parallellogram ABCD.

b Bepaal de coördinaat van D. D(–4, –1)



* **8** Bepaal de hoeken van het parallellogram ABCD als je weet dat

a het complement van $\widehat{C}$ driemaal groter is dan $\widehat{A}$.

$$90° - \widehat{C} = 3 \cdot \widehat{A}$$
$\Updownarrow$ hoekenkenmerk ▱
$$90° - \widehat{C} = 3\widehat{C}$$
$\Updownarrow$
$$90° = 4\widehat{C}$$
$\Updownarrow$
$$22°30' = \widehat{C}$$

Antwoord: $\widehat{A} = 22°30'$

$\widehat{B} = 157°30'$

$\widehat{C} = 22°30'$

$\widehat{D} = 157°30'$

b de som van $\widehat{A}$ en $\widehat{C}$ het vierde deel is van de som van $\widehat{B}$ en $\widehat{D}$.

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \frac{1}{4}(\widehat{B} + \widehat{D})$$
$\Updownarrow$ hoekenkenmerk ▱
$$\widehat{A} + \widehat{A} = \frac{1}{4}(\widehat{B} + \widehat{B})$$
$\Updownarrow$
$$2\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{B}$$
$\Updownarrow$
$$4\widehat{A} = \widehat{B}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$$
$\Updownarrow$
$$\widehat{A} + 4\widehat{A} = 180°$$
$\Updownarrow$
$$5\widehat{A} = 180°$$
$\Updownarrow$
$$\widehat{A} = 36°$$

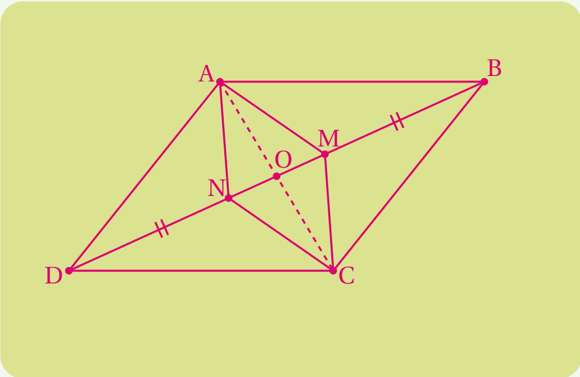
Antwoord: $\widehat{A} = 36°$

$\widehat{B} = 144°$

$\widehat{C} = 36°$

$\widehat{D} = 144°$

9 Op de diagonaal [BD] van een parallellogram ABCD plaats je de punten M en N zodat |BM| = |ND|.
Bewijs dat AMCN een parallellogram is.



Gegeven: ABCD is een parallellogram

M en N behoren tot [BD]

|BM|=|ND|

Te bewijzen: AMCN is een parallellogram

Bewijs

Teken de diagonaal [AC].

Aangezien ABCD een parallellogram is, is |AO|=|OC|.

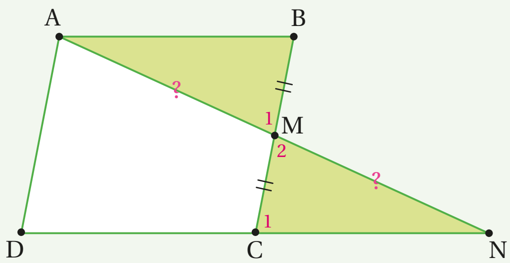
(diagonalenkenmerk)

Zo is ook |BO|=|OD|.

Aangezien |BM|=|ND| zal O ook het midden zijn van [MN].

Dus delen de diagonalen in vierhoek AMCN elkaar middendoor en is (diagonalenkenmerk) AMCN een parallellogram.

10 ABCD is een parallellogram.
M is het midden van [BC].
AM snijdt DC in N.
Onderzoek met ICT of |AM| = |MN|.
Bewijs die gelijkheid.



Gegeven: ABCD is een parallellogram

M is het midden van [BC]

AM snijdt DC in N

Te bewijzen: |AM|=|MN|

Bewijs:

In ΔABM en ΔNCM geldt:

$\widehat{B} = \widehat{C}_1$ (verwisselende binnenhoeken bij AB // CN en snijlijn BC)

|BM| = |MC| (gegeven)

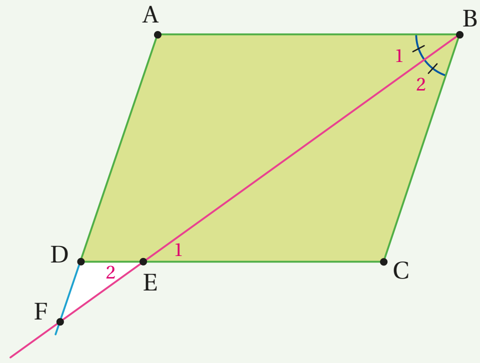
$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (overstaande hoeken)

$\stackrel{HZH}{\Longrightarrow}$ ΔABM ≅ ΔNCM

⇓ overeenkomstige zijden

|AM| = |MN|

11 Gegeven: parallellogram ABCD
BF is de bissectrice van $\widehat{B}$
Te bewijzen: ΔDEF is gelijkbenig
Onderzoek dit eerst met ICT.



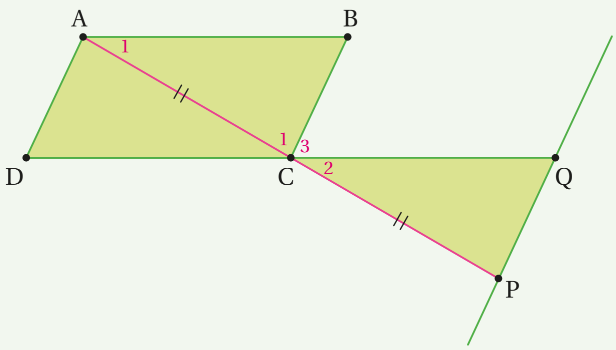
Gegeven: parallellogram ABCD
BE is de bissectrice van $\widehat{B}$

Te bewijzen: ΔDEF is gelijkbenig

Bewijs:
$\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1$ overeenkomstige hoeken bij AB // CD en snijlijn BE)
en $\widehat{B}_2 = \widehat{F}$ verwisselende binnenhoeken bij BC // AF en snijlijn BF)

$\Downarrow$ $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (gegeven)
$\widehat{E}_2 = \widehat{F}$ $(\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2)$
$\Downarrow$ criterium gelijkbenige driehoek
ΔDEF is gelijkbenig

12 Gegeven: parallellogram ABCD
|AC| = |CP|
PQ // AD en Q ligt op DC
Te bewijzen: BQPC is een parallellogram



Gegeven: parallellogram ABCD
|AC|=|CP|
PQ // AD, dus ook PQ // BC

Te bewijzen: BQPC is een parallellogram

Bewijs:
In ΔABC en ΔCQP geldt:
$\widehat{A}_1 = \widehat{C}_2$ (overeenkomstige hoeken bij AB // CQ en snijlijn AC)
|AC|=|CP| (gegeven)
$\widehat{C}_1 = \widehat{P}$ (overeenkomstige hoeken bij BC // PQ en snijlijn CP)

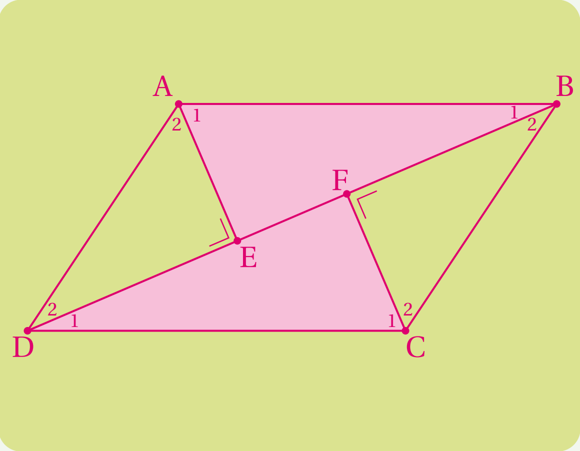
$\overset{\text{HZH}}{\Longrightarrow}$ $\Delta ABC \cong \Delta CQP$
$\Downarrow$ overeenkomstige zijden
|BC| = |PQ| *

In ΔBQC en ΔPCQ geldt:
|QC|=|QC| (gemeenschappelijke zijde)
|BC|=|PQ| (zie eerste deel*)
$\widehat{C}_3 = \widehat{Q}$ (verwisselende binnenhoeken bij BC // PQ en snijlijn CQ)

$\overset{\text{ZHZ}}{\Longrightarrow}$ $\Delta BQC \cong \Delta PCQ$
$\Downarrow$ overeenkomstige zijden
|BC| = |PQ| **

Uit * en ** mogen we dankzij het zijdekenmerk concluderen dat BQPC een parallellogram is.

13 Toon aan dat in een parallellogram ABCD de afstand van A tot diagonaal [BD] gelijk is aan de afstand van C tot diezelfde diagonaal. Maak eerst een duidelijke tekening.



Gegeven: parallellogram ABCD

$AE \perp BD$ en $BD \perp FC$

Te bewijzen: $|AE| = |FC|$

Bewijs:

in ΔABE en ΔCDF geldt:

$\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (verwisselende binnenhoeken bij $AB /\!/ CD$ en snijlijn BD)

$|AB| = |CD|$ (zijdekenmerk parallellogram)

$\hat{F} = \hat{E}$ (def. afstand punt-rechte)

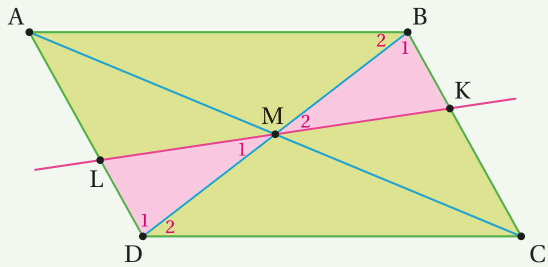
$\Downarrow$ ZHH

$\Delta ABE \cong \Delta CDF$

$\Downarrow$ overeenkomstige zijden

$|AE| = |FC|$

14 Door het snijpunt van de diagonalen van een parallellogram ABCD gaat een rechte die de zijden [BC] in K en [AD] in L snijdt. Bewijs dat $|BK| = |DL|$. Onderzoek dit eerst met ICT.



in ΔBKM en ΔDLM geldt:

$\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (verwisselende binnenhoeken bij $BC /\!/ AD$ en snijlijn BD)

$|BM| = |MD|$ (diagonalenkenmerk parallellogram)

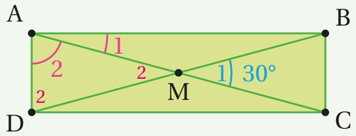
$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (overstaande hoeken)

$\overset{HZH}{\Longrightarrow}$ $\Delta BKM \cong \Delta DLM$

$\Downarrow$ overeenkomstige zijden

$|BK| = |LD|$

15 a In een rechthoek ABCD is $\widehat{M}_1 = 30°$.
Bereken $\widehat{A}_1$ en $\widehat{A}_2$.



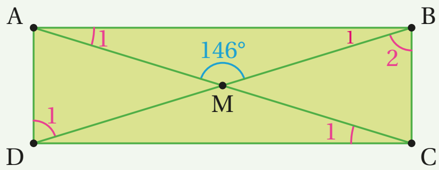
- $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 30°$
- in ΔAMD: $\widehat{A}_2 + \widehat{M}_2 + \widehat{D}_2 = 180°$

$$\Updownarrow$$
$$\widehat{A}_2 + 30° + \widehat{A}_2 = 180°$$
$$\Updownarrow$$
$$2\widehat{A}_2 = 150°$$
$$\Updownarrow$$
$$\widehat{A}_2 = 75°$$

- $\widehat{A}_1 = 90° - 75° = 15°$

Antwoord: $\widehat{A}_1 = 15°$ en $\widehat{A}_2 = 75°$

b Bereken $\widehat{A}_1$, $\widehat{C}_1$, $\widehat{B}_2$ en $\widehat{D}_1$ in rechthoek ABCD.

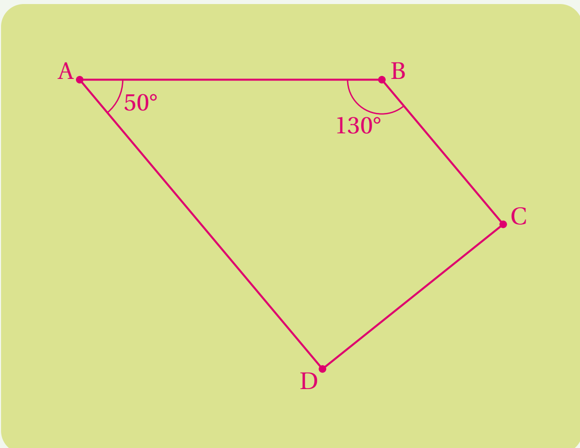


- in ΔABM: $\widehat{A}_1 = \dfrac{180° - 146°}{2} = 17°$
- $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_1 = 17°$ (verwisselende binnenhoeken bij $AB /\!/ CD$ en snijlijn AC)
- $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = 17°$ (diagonalen zijn even lang en delen middendoor dus ΔABM is gelijkbenig)
- $\widehat{B}_2 = 90° - 17° = 73° = \widehat{D}_1$ (verwisselende binnenhoeken bij $BC /\!/ AD$ en snijlijn BD)

Antwoord: $\widehat{A}_1 = 17°, \widehat{C}_1 = 17°, \widehat{B}_2 = 73°$ en $\widehat{D}_1 = 73°$

16 In een vierhoek ABCD is $\widehat{A} = 50°$ en $\widehat{B} = 130°$.
Is ABCD steeds een parallellogram?
Illustreer je antwoord met een tekening.

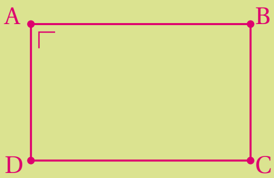
Neen, over $\widehat{C}$ en $\widehat{D}$ is er niets geweten.



17 a Als in een parallellogram twee opeenvolgende hoeken even groot zijn, dan is dat parallellogram een rechthoek. Toon dat aan.

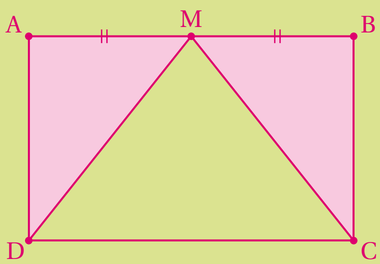
- $\hat{A}+\hat{B} = 180°$ (binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij $BC /\!/ AD$ en snijlijn AB)
  $\Updownarrow \quad \hat{A} = \hat{B}$
  $\hat{A} = \hat{B} = 90°$
- omdat overstaande hoeken even groot zijn, is $\hat{C} = 90°$ en $\hat{D} = 90°$.

b Als in een parallellogram één hoek recht is, dan is het parallellogram een rechthoek. Toon dit aan.



- $\hat{A} = 90°$ dus is $\hat{C} = 90°$ (hoekenkenmerk parallellogram)
- $\hat{A}+\hat{D} = 180°$ (binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij $AB /\!/ CD \nparallel AD$)
  $\Updownarrow$
  $\hat{D} = 90°$
- $\hat{B}+\hat{C} = 180°$ (binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij $AB /\!/ CD \nparallel BC$)
  $\Updownarrow$
  $\hat{B} = 90°$

c Als je weet dat ABCD een rechthoek is en M het midden is van [AB], bewijs dan dat ΔMCD gelijkbenig is.



In ΔAMD en ΔBMC geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{A} = \hat{B} & \text{(def. rechthoek)} \\ |AM| = |MB| & \text{(gegeven)} \\ |AD| = |BC| & \text{(zijdekenmerk } \square \text{)} \end{array}\right\} \xRightarrow{ZHZ} \Delta AMD \cong \Delta BMC$$

$\Downarrow$ overeenkomstige zijden

$|DM| = |MC|$

$\Downarrow$ definitie gelijkbenige Δ

ΔMCD is gelijkbenig

18 Waar of vals? Indien je antwoordt met 'vals', teken dan een tegenvoorbeeld.

a Er bestaan parallellogrammen waarvan de diagonalen even lang zijn. WAAR VALS

b Als in een vierhoek de diagonalen even lang zijn, dan is die vierhoek een rechthoek. WAAR VALS

c Als in een vierhoek drie hoeken even groot zijn, dan is die vierhoek een rechthoek. WAAR VALS

d Een vierhoek waarin de overstaande hoeken even groot en de diagonalen even lang zijn, is een rechthoek. WAAR VALS

e Als in een vierhoek de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan is die vierhoek een ruit. WAAR VALS

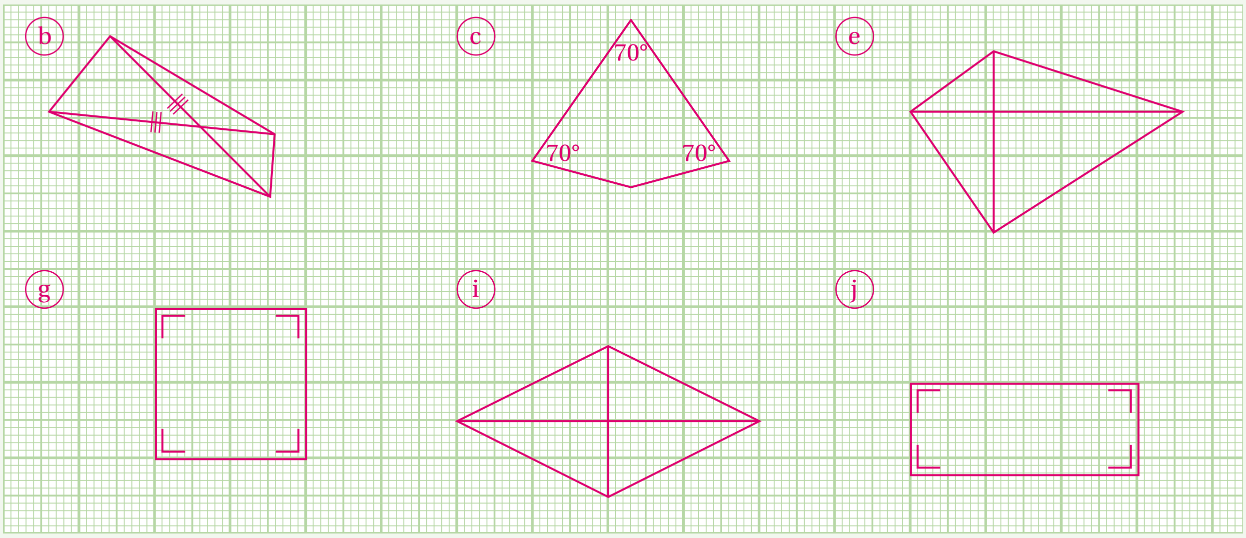
f In een ruit zijn twee opeenvolgende hoeken steeds supplementair. WAAR VALS

g Er bestaan geen ruiten met vier rechte hoeken. WAAR VALS

h Er bestaan ruiten die geen vierkant zijn. WAAR VALS

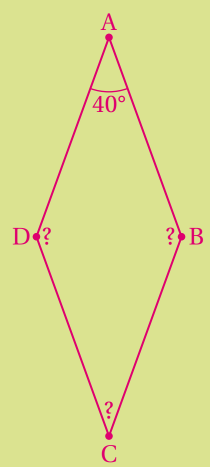
i Als in een parallellogram de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan is het parallellogram een vierkant. WAAR VALS

j Een vierhoek die zowel een parallellogram als een rechthoek is, is ook een vierkant. WAAR VALS



19 In een ruit is $\hat{A} = 40°$.
Bereken de andere hoeken.

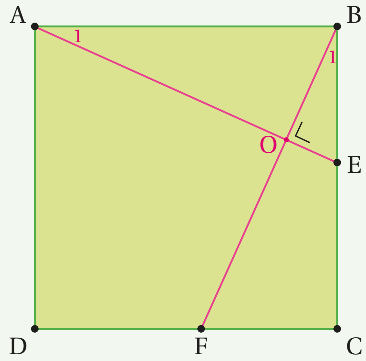
- $\hat{A} = \hat{C} = 40°$
- $\hat{B} = \hat{D} = 140°$



20 Gegeven: ABCD is een vierkant

$AE \perp BF$

Te bewijzen: $|AE| = |BF|$



Bewijs:

- In ΔABE is $\widehat{A}_1 = 180° - \widehat{B} - \widehat{E}$

$$\Updownarrow$$
$$\widehat{A}_1 = 180° - 90° - \widehat{E}$$
$$\Updownarrow$$
$$\widehat{A}_1 = 90° - \widehat{E} \qquad *1$$

- In ΔBEO is $\widehat{B}_1 = 180° - \widehat{O} - \widehat{E}$

$$\Updownarrow$$
$$\widehat{B}_1 = 180° - \widehat{E}$$
$$\Updownarrow$$
$$\widehat{B}_1 = 90° - \widehat{E} \qquad *2$$

Uit $*1 = *2$ volgt $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

- In ΔABE en ΔBCF geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 & \text{(zie*)} \\ |AB| = |BC| & \text{(def. vierkant)} \\ \widehat{B} = \widehat{C} & \text{(def. vierkant)} \end{array}\right\} \overset{ZHZ}{\Longrightarrow} \Delta ABE \cong \Delta BCF$$

$$\Downarrow \text{ overeenkomstige zijden}$$
$$|AE| = |BF|$$

21 a Teken een rechthoek met loodrechte diagonalen.
Welke figuur bekom je? een vierkant

b Teken rechthoek ABCD met A(1, 3), B(6, –2) en C(4, –4). Bepaal co(D). (–1, 1)

c Teken een vierhoek met loodrecht op elkaar staande diagonalen, waarvan een diagonaal de andere middendoor deelt. Welke figuur bekom je? een vlieger

d Teken een gelijkbenig trapezium ABCD met A(3, –3), B(0, –3) en C(–2, 3).
Bepaal co(D). (5, 3)

22 a Teken een willekeurige vierhoek en bepaal van elke zijde het midden.
Verbind de opeenvolgende middens met elkaar. Welke figuur bekom je? een parallellogram

b Bepaal de omtrek van de nieuwe vierhoek. Bepaal de som van de lengtes van de diagonalen van de oorspronkelijke vierhoek. Wat merk je? Is dat steeds zo?

Ze zijn even lang. Dat is altijd zo!

c Bepaal de oppervlakte van beide vierhoeken. Wat merk je? Is dat steeds zo?

De oorspronkelijke figuur is dubbel zo groot als de nieuwe.

Dat is altijd zo!