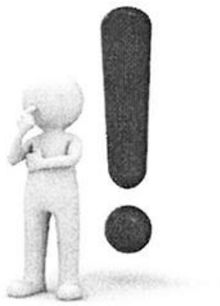
atheneum Mariakerke

Naam: Klas:

Datum:

Studeerbundel bewijzen

Tips om een bewijs te studeren:

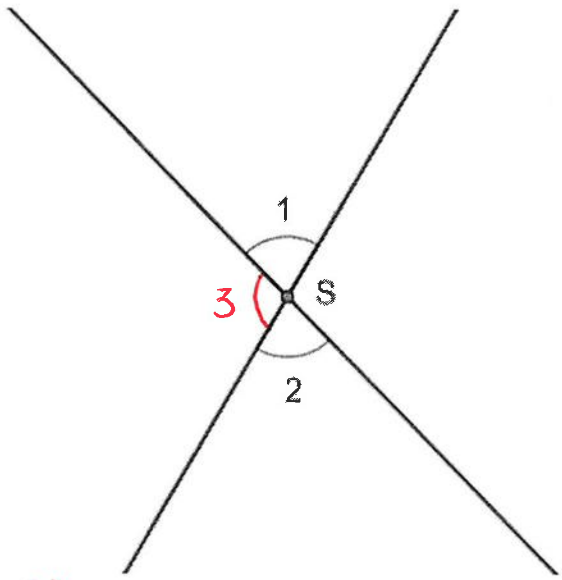


1. **Begrijp goed over welke eigenschap het bewijs gaat.**
   – Wat moet er bewezen worden? Welke wiskundige regel zit erachter?
2. **Bekijk aandachtig de gegevens en de figuur.**
   – Lees goed wat je gegeven krijgt en wat je moet aantonen.
3. **Duid in de figuur aan wat je al weet.**
   – Gebruik hiervoor definities en eerder bewezen eigenschappen.
4. **Probeer het bewijs uit te leggen aan iemand anders.**
   – Zo merk je snel wat je goed snapt en waar je nog twijfelt.
5. **Verander eens de namen in de figuur.**
   – Dat helpt om het bewijs los te maken van de letters in je boek.
6. **Oefen het bewijs door het zelf op te schrijven.**
   – Schrijf eerst op wat je al weet, en vul aan in een andere kleur wat je vergat.
7. **Herhaal het bewijs op verschillende dagen.**
   – Zo onthoud je het beter dan bij één keer studeren.
8. **Begrijp het bewijs, leer het niet zomaar vanbuiten.**
   – Als je elke stap begrijpt, onthoud je het makkelijker.

Het is belangrijk dat je je goed realiseert dat een bewijs universeel geldt. Dit betekent dat het geldig moet zijn voor alle mogelijke figuren die aan de stelling voldoen. Om deze reden vind je in deze bundel voor elke eigenschap drie bewijzen terug. Bij elk bewijs zie je een andere figuur staan, maar de redenering is wel steeds hetzelfde. Het gaat er dus niet om hoe de figuur eruit ziet of welke letters er staan, maar wel om welke redeneringen je maakt met deze letters. Om dit grondig onder de knie te krijgen, zal je veel moeten oefenen!

Eigenschap overstaande hoeken (1)

Eigenschap: Overstaande hoeken zijn steeds even groot.



Gegeven: $\hat{S}_1$ en $\hat{S}_2$ zijn overstaande hoeken

Te bewijzen: $\hat{S}_1 = \hat{S}_2$

Bewijs:

$$\underbrace{\begin{aligned} \hat{S}_1 + \hat{S}_3 &= 180° \quad \text{(gestrekte hoek)} \\ \hat{S}_2 + \hat{S}_3 &= 180° \quad \text{(gestrekte hoek)} \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{S}_1 + \hat{S}_3 = \hat{S}_2 + \hat{S}_3$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{S}_1 = \hat{S}_2 + \cancel{\hat{S}_3} - \cancel{\hat{S}_3}$$

$$\Updownarrow$$

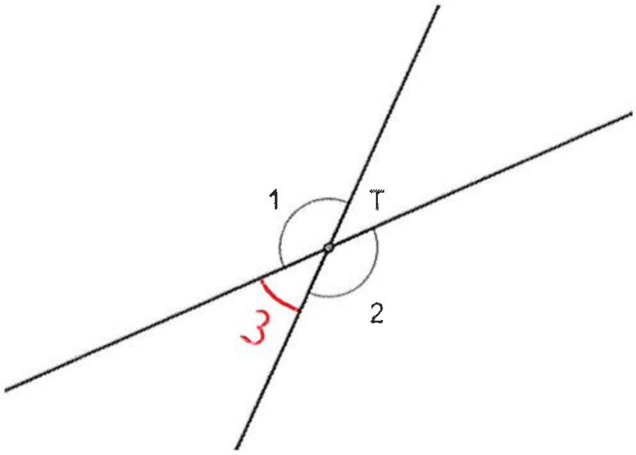
$$\hat{S}_1 = \hat{S}_2$$

Eigenschap overstaande hoeken (2)

Eigenschap: Overstaande hoeken zijn steeds even groot.

Gegeven: $\hat{T}_1$ en $\hat{T}_2$ zijn overstaande hoeken

Te bewijzen: $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$



Bewijs:

$$\hat{T}_1 + \hat{T}_3 = 180^\circ \quad \text{(gestrekte hoek)}$$

$$\hat{T}_2 + \hat{T}_3 = 180^\circ \quad \text{(gestrekte hoek)}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{T}_1 + \hat{T}_3 = \hat{T}_2 + \hat{T}_3$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{T}_1 = \hat{T}_2 + \cancel{\hat{T}_3} - \cancel{\hat{T}_3}$$

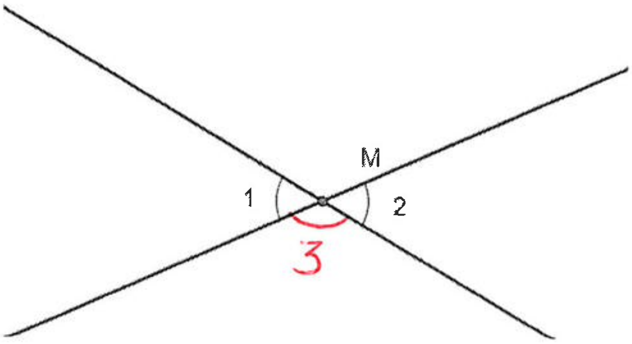
$$\Updownarrow$$

$$\hat{T}_1 = \hat{T}_2$$

Eigenschap overstaande hoeken (3)

Eigenschap: Overstaande hoeken zijn steeds even groot.

Gegeven: $\widehat{M}_1$ en $\widehat{M}_2$ zijn overstaande hoeken



Te bewijzen: $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

Bewijs:

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_3 = 180^\circ \quad \text{(gestrekte hoek)}$$

$$\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 180^\circ \quad \text{(gestrekte hoek)}$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_3 = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3$$

$$\Updownarrow$$

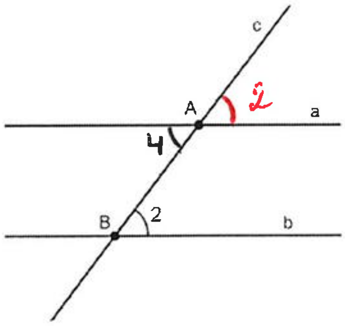
$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 - \widehat{M}_3$$

$$\Updownarrow$$

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$$

Eigenschap van 2 verwisselende binnenhoeken bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (1)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten gesneden worden door een derde rechte, dan zijn elke 2 verwisselende binnenhoeken even groot.



Gegeven: a // b

c snijdt a en b

$\hat{A}_4$ en $\hat{B}_2$ zijn verwisselende binnenhoeken

Te bewijzen: $\hat{A}_4 = \hat{B}_2$

Bewijs:

$\hat{A}_4 = \hat{A}_2$ (overstaande hoeken)

$\Updownarrow$ ($\hat{A}_2 = \hat{B}_2$, eig. overeenkomstige hoeken)

$\hat{A}_4 = \hat{B}_2$

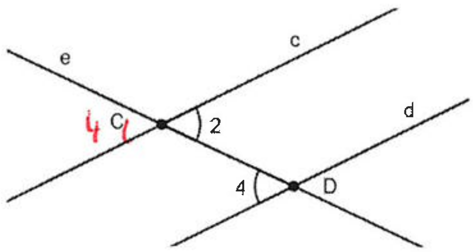
Eigenschap van 2 verwisselende binnenhoeken bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (2)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten gesneden worden door een derde rechte, dan zijn elke 2 verwisselende binnenhoeken even groot.

Gegeven: c // d

e snijdt c en d

$\hat{C}_2$ en $\hat{D}_4$ zijn verwisselende binnenhoeken



Te bewijzen: $\hat{C}_2 = \hat{D}_4$

Bewijs:

$\hat{C}_2 = \hat{C}_4$ (overstaande hoeken)

$\Updownarrow$ ($\hat{C}_4 = \hat{D}_4$, eig. overeenkomstige hoeken)

$\hat{C}_2 = \hat{D}_4$

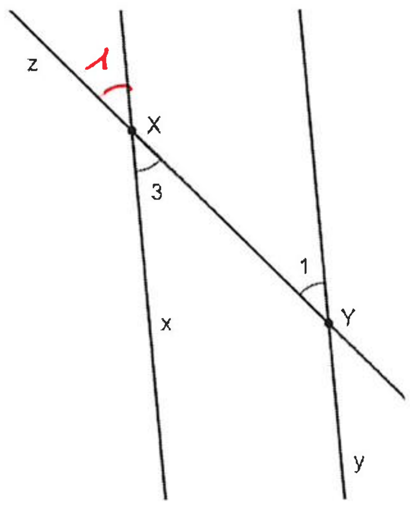
Eigenschap van 2 verwisselende binnenhoeken bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (3)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten gesneden worden door een derde rechte, dan zijn elke 2 verwisselende binnenhoeken even groot.

Gegeven: x // y

z snijdt x en y

$\hat{X}_3$ en $\hat{Y}_1$ zijn verwisselende binnenhoeken



Te bewijzen: $\hat{X}_3 = \hat{Y}_1$

Bewijs:

$\hat{X}_1 = \hat{X}_3$ (overstaande hoeken)

$\Updownarrow$ ($\hat{X}_1 = \hat{Y}_1$, eig. overeenkomstige hoeken)

$\hat{Y}_1 = \hat{X}_3$

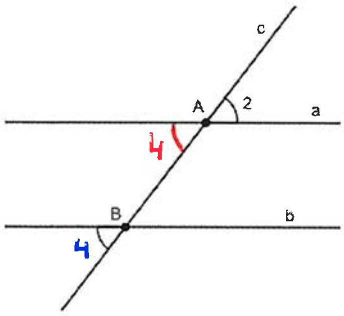
Eigenschap van 2 verwisselende buitenhoeken bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (1)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten gesneden worden door een derde rechte, dan zijn elke 2 verwisselende buitenhoeken even groot

Gegeven: a // b

c snijdt a en b

$\hat{A}_2$ en $\hat{B}_4$ zijn verwisselende buitenhoeken



Te bewijzen: $\hat{A}_2 = \hat{B}_4$

Bewijs:

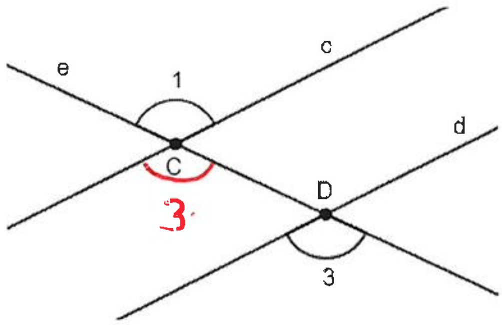
$\hat{A}_2 = \hat{A}_4$ (overstaande hoeken)

$\Updownarrow$ $\quad =$ (overeenkomstige hoeken)

$\hat{A}_2 = \hat{B}_4$

Eigenschap van 2 verwisselende buitenhoeken bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (2)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten gesneden worden door een derde rechte, dan zijn elke 2 verwisselende buitenhoeken even groot.



Gegeven: c // d

e snijdt c en d

$\hat{C}_1$ en $\hat{D}_3$ zijn verwisselende buitenhoeken

Te bewijzen: $\hat{C}_1 = \hat{D}_3$

Bewijs:

$\hat{C}_1 = \hat{C}_3$ (overstaande hoeken)

$\Updownarrow \qquad \parallel$ (overeenkomstige hoeken)

$\hat{C}_1 = \hat{D}_3$

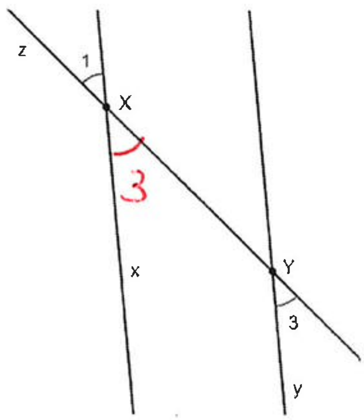
Eigenschap van 2 verwisselende buitenhoeken bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (3)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten worden gesneden door een derde rechte, dan zijn elke 2 verwisselende buitenhoeken even groot.

Gegeven: x // y

z snijdt x en y

$\hat{X}_1$ en $\hat{Y}_3$ zijn verwisselende buitenhoeken



Te bewijzen: $\hat{X}_1 = \hat{Y}_3$

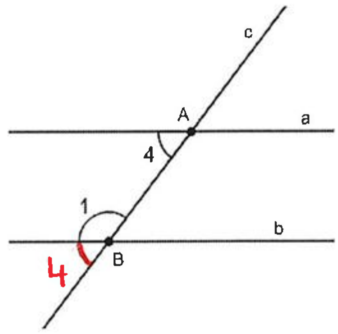
Bewijs: $\hat{X}_1 = \hat{X}_3$ (overstaande hoeken)

$\Updownarrow$ $\quad \|$ (overeenkomstige hoeken)

$\hat{X}_1 = \hat{Y}_3$

Eigenschap 2 binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (1)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten worden gesneden door een derde rechte, dan zijn elke 2 binnenhoeken aan dezelfde kant v.d snijlijn supplementair.



Gegeven: a // b

c snijdt a en b

$\hat{A}_4$ en $\hat{B}_1$ zijn binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn

Te bewijzen: $\hat{A}_4 + \hat{B}_1 = 180°$

Bewijs:

$\hat{A}_4 = \hat{B}_4$ (overeenkomstige hoeken)

$\Updownarrow$ " (nevenhoeken)

$\hat{A}_4 = 180° - \hat{B}_1$

$\Updownarrow$

$\hat{A}_4 + \hat{B}_1 = 180°$

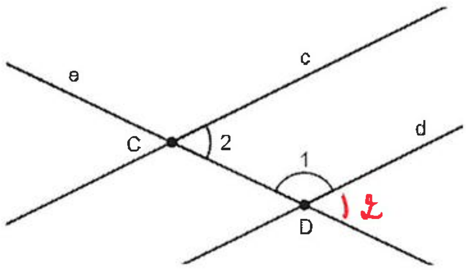
Eigenschap 2 binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (2)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten worden gesneden door een derde rechte, dan zijn elke 2 binnenhoeken aan dezelfde kant v.d. snijlijn supplementair.

Gegeven: c // d

e snijdt c en d

$\hat{C}_2$ en $\hat{D}_1$ zijn binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn



Te bewijzen: $\hat{C}_2 + \hat{D}_1 = 180°$

Bewijs: $\hat{C}_2 = \hat{D}_2$ (overeenkomstige hoeken)

$\Updownarrow$ " (nevenhoeken)

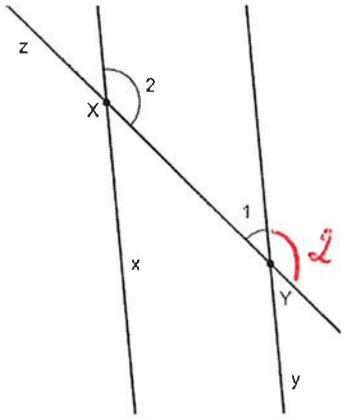
$\hat{C}_2 = 180° - \hat{D}_1$

$\Updownarrow$

$\hat{C}_2 + \hat{D}_1 = 180°$

Eigenschap 2 binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (3)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten worden gesneden door een derde rechte, dan zijn elke 2 binnenhoeken aan dezelfde kant v.d. snijlijn supplementair.



Gegeven: x // y

z snijdt x en y

$\hat{X}_2$ en $\hat{Y}_1$ zijn binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn

Te bewijzen: $\hat{X}_2 + \hat{Y}_1 = 180°$

Bewijs:

$\hat{X}_2 = \hat{Y}_2$ (overeenkomstige hoeken)

$\Updownarrow$ " (nevenhoeken)

$\hat{X}_2 = 180° - \hat{Y}_1$

$\Updownarrow$

$\hat{X}_2 + \hat{Y}_1 = 180°$

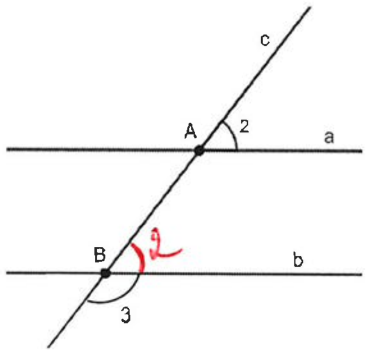
Eigenschap 2 buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (1)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten worden gesneden door een derde rechte, dan zijn elke 2 buitenhoeken aan dezelfde kant v d snijlijn supplementair.

Gegeven: a // b

c snijdt a en b

$\hat{A}_2$ en $\hat{B}_3$ zijn buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn



Te bewijzen: $\hat{A}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ$

Bewijs: $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ (overeenkomstige hoeken)

$\Updownarrow$ 〃 (nevenhoeken)

$\hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{B}_3$

$\Updownarrow$

$\hat{A}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ$

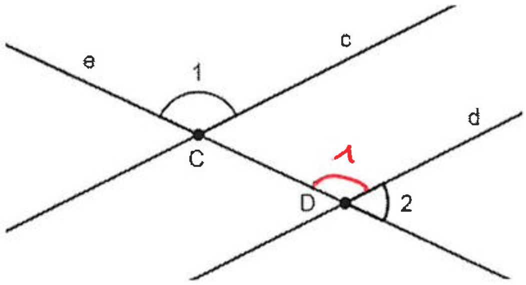
Eigenschap 2 buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (2)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten worden gesneden door een derde rechte, dan zijn elke 2 buitenhoeken aan dezelfde kant r.d. snijlijn supplementair.

Gegeven: c // d

e snijdt c en d

$\hat{C}_1$ en $\hat{D}_2$ zijn buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn



Te bewijzen: $\hat{C}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ$

Bewijs:

$\hat{C}_1 = \hat{D}_1$ (overeenkomstige hoeken)

$\Updownarrow$ $\qquad$ ॥ $\qquad$ (nevenhoeken)

$\hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{D}_2$

$\Updownarrow$

$\hat{C}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ$

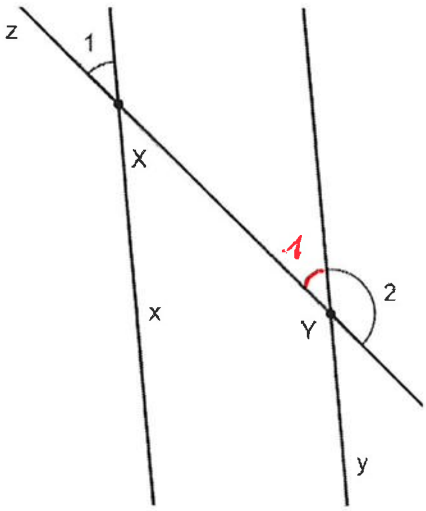
Eigenschap 2 buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij 2 evenwijdigen en een snijlijn (3)

Eigenschap: Als 2 evenwijdige rechten worden gesneden door een derde rechte, dan zijn elke 2 buitenhoeken aan dezelfde kant v.d snijlijn supplementair.

Gegeven: $x \mathbin{/\!/} y$

z snijdt x en y

$\hat{X}_1$ en $\hat{Y}_2$ zijn buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn



Te bewijzen: $\hat{X}_1 + \hat{Y}_2 = 180^\circ$

Bewijs:

$\hat{X}_1 = \hat{Y}_1$ (overeenkomstige hoeken)

$\Updownarrow$ '' (nevenhoeken)

$\hat{X}_1 = 180^\circ - \hat{Y}_2$

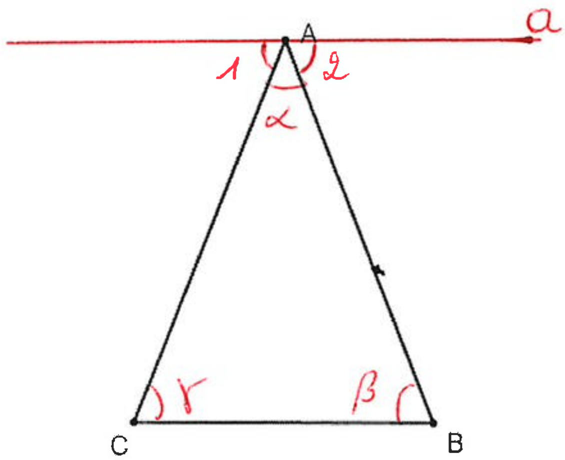
$\Updownarrow$

$\hat{X}_1 + \hat{Y}_2 = 180^\circ$

Eigenschap som van de hoeken van een driehoek (1)

Eigenschap: De som van de hoeken van een driehoek is steeds 180°.

Gegeven: ΔABC



Te bewijzen: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Bewijs:

Teken door A een rechte evenwijdig aan BC.

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \hat{A}_1 & + & \hat{A}_2 & = & 180° \\ & & \| & & \| & \Updownarrow & \\ \alpha & + & \gamma & + & \beta & = & 180° \end{array}$$

(gestrekte hoek)

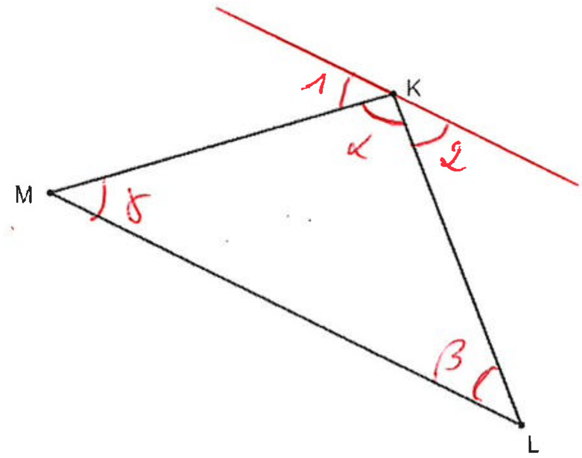
(verwisselende binnenh. bij 2 evenwijdigen en een snijlijn)

Eigenschap som van de hoeken van een driehoek (2)

Eigenschap: De som van de hoeken in een driehoek is steeds 180°.

Gegeven: ΔKLM

Te bewijzen: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Bewijs:

$$\alpha + \hat{K}_1 + \hat{K}_2 = 180° \quad \text{(gestrekte hoek)}$$

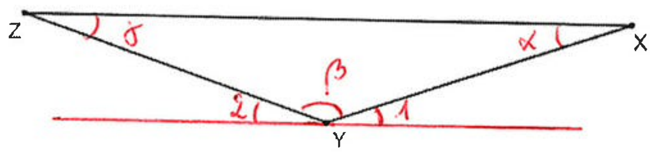
$$\Updownarrow \quad \hat{K}_1 = \gamma,\ \hat{K}_2 = \beta \quad \text{(verwisselende binnenh. bij 2 evenwijdigen en een snijlijn)}$$

$$\alpha + \gamma + \beta = 180°$$

Eigenschap som van de hoeken van een driehoek (3)

Eigenschap: De som van de hoeken in een driehoek is steeds 180°.

Gegeven: ΔXYZ



Te bewijzen: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Bewijs:

$$\hat{Y}_1 + \beta + \hat{Y}_2 = 180° \quad \text{(gestrekte hoek)}$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel \qquad \Updownarrow$$

(verwisselende binnenh. bij 2 evenwijdigen en een snijlijn)

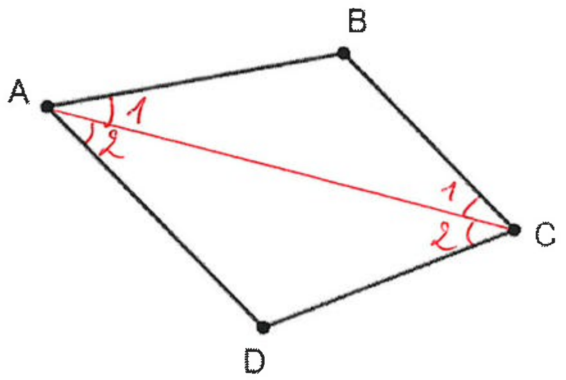
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Eigenschap som van de hoeken van een vierhoek (1)

Eigenschap: De som van de hoeken in een vierhoek is steeds $360°$.

Gegeven: vierhoek ABCD

Te bewijzen: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$



Bewijs:

Teken diagonaal [AC].

In ΔABC geldt: $\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180°$ (hoekensom Δ)

In ΔACD geldt: $\hat{A}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D} = 180°$ (hoekensom Δ)

$+$

$$\underbrace{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}_{=} + \hat{B} + \underbrace{\hat{C}_1 + \hat{C}_2} + \hat{D} = 360°$$

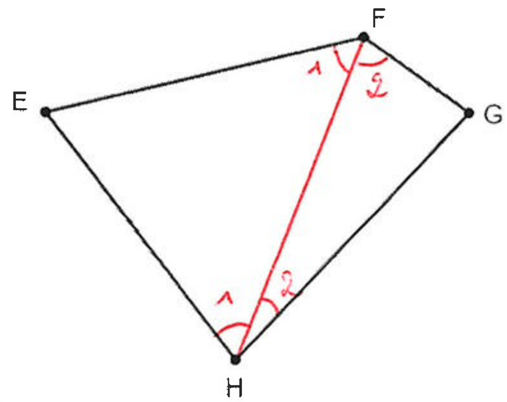
$$\Updownarrow$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$$

Eigenschap som van de hoeken van een vierhoek (2)

Eigenschap: De som van de hoeken in een viechoek is steeds 360°

Gegeven: vierhoek EFGH



Te bewijzen: $\hat{E} + \hat{F} + \hat{G} + \hat{H} = 360°$

Bewijs:

Teken diagonaal [EH].

In ΔEFG geldt: $\hat{E} + \hat{F}_1 + \hat{H}_1 = 180°$ (hoekensom Δ)

In ΔFGH geldt: $\hat{F}_2 + \hat{G} + \hat{H}_2 = 180°$ (hoekensom Δ)

$$+ \quad \overline{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

$$\underbrace{\hat{E} + \hat{F}_1 + \hat{F}_2}_{} + \hat{G} + \underbrace{\hat{H}_1 + \hat{H}_2}_{} = 360°$$

$$\Updownarrow$$

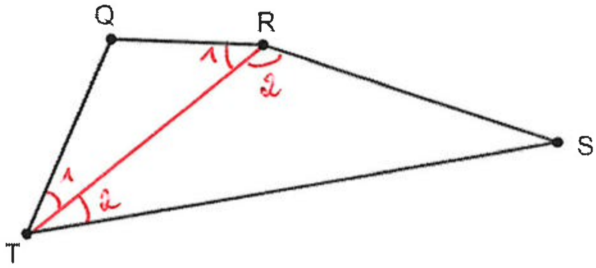
$$\hat{E} + \hat{F} + \hat{G} + \hat{H} = 360°$$

Eigenschap som van de hoeken van een vierhoek (3)

Eigenschap: De som van de hoeken in een vierhoek is steeds 360°.

Gegeven: vierhoek QRST

Te bewijzen: $\hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T} = 360^\circ$



Bewijs:

Teken diagonaal [RT].

In ΔQRT geldt: $\hat{Q} + \hat{R}_1 + \hat{T}_1 = 180^\circ$ (hoekensom Δ)

In ΔRST geldt: $\hat{R}_2 + \hat{S} + \hat{T}_2 = 180^\circ$ (hoekensom Δ)

$+$

$$\hat{Q} + \underbrace{\hat{R}_1 + \hat{R}_2}_{=\,\hat{R}} + \hat{S} + \underbrace{\hat{T}_1 + \hat{T}_2}_{=\,\hat{T}} = 360^\circ$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T} = 360^\circ$$