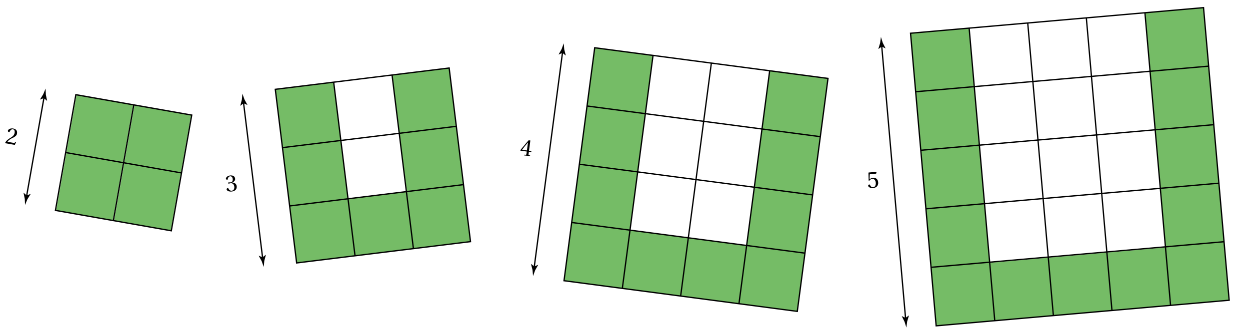
6.1

Vraagstukken oplossen door het gebruik van letters

1 Even kennismaken

Als je een rij getallen bekijkt, dan lukt het je soms om de rij voort te zetten.
Hieronder zie je een aantal vierkanten. De zijde wordt steeds één groter en we bekijken het aantal gekleurde vierkantjes. Je herkent onmiddellijk een **regelmaat** en je zal zonder problemen het volgende vierkant kunnen tekenen.

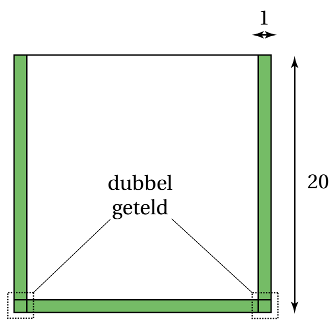


We plaatsen in een tabel enerzijds de zijde en anderzijds het aantal gekleurde vakjes.

lengte zijde	2	3	4	5	6	7
aantal gekleurde vakjes	4	7	10	13	?	?

Om het aantal gekleurde vakjes van een vierkant met zijde 20 terug te vinden, zullen we een beroep doen op een formule.

We gebruiken z = lengte zijden
v = aantal gekleurde vakjes.



Je merkt dat je de zijde drie keer groen inkleurt, maar de hoeken heb je dan dubbel ingekleurd. Om het aantal gekleurde vakjes te verkrijgen, zul je de zijde met 3 vermenigvuldigen en er daarna 2 van aftrekken.

Woordformule: Het aantal gekleurde vierkantjes is gelijk aan driemaal de zijde verminderd met 2.
Letterformule: $v = 3 \cdot z - 2$

Taak:
Teken de grafiek die het aantal gekleurde vakjes weergeeft als de lengte van de zijde gegeven is.

2 Gebruik van letters bij regelmaat

Voorbeeld 1: bliksem

Alle donders en bliksems! Ook hier zit regelmaat in. Zwoele zomeravonden eindigen soms met een echte regenbui, voorzien van onweer. Eerst zie je de bliksem: een bundeling van elektriciteit tot 100 000 V. Na enkele seconden hoor je de donder. Als je je net onder zo'n natuurfenomeen bevindt, krijg je ze op hetzelfde moment voorgeschoteld. In het andere (en veiligere) geval moet je per seconde 0,34 kilometer rekenen om te weten hoe ver het onweer van jou is verwijderd.

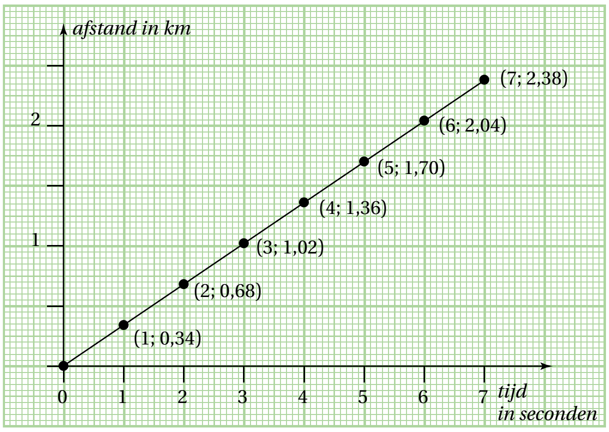
Een beetje rekenwerk levert volgende tabel op:

aantal seconden tussen bliksem en donder	1	2	3	4	5	6	7	8
aantal km dat het onweer verwijderd is van ons	0,34	0,68	1,02	1,36	1,70	2,04	2,38	?

En ook die gegevens kunnen we in een grafiek weergeven.

Ook bij dit voorbeeld kun je een algemene formule vinden. Om te vinden hoe ver het natuurgeweld van ons verwijderd is, gebruik je de volgende gegevens. Als je 20 seconden hebt moeten wachten, moet je die 20 alleen maar vermenigvuldigen met 0,34.

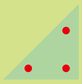
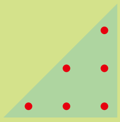
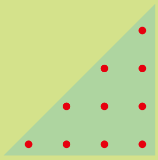
Hoe ver is het onweer van ons verwijderd?

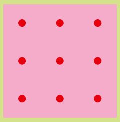
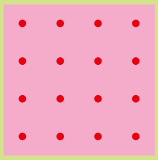


Woordformule: Het aantal km dat het onweer van ons is verwijderd is gelijk aan 0,34 keer het aantal seconden tussen bliksem en donder.

Letterformule: $k = 0{,}34 \cdot s$

Voorbeeld 2: driehoeksgetallen en vierkantsgetallen

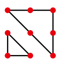
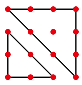
driehoeksgetal	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$	$\triangle_4$
voorstelling				

vierkantsgetal	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$
voorstelling				

Merk op:

$\triangle_1 = 1$	$\square_1 = 1^2 = 1$
$\triangle_2 = 1 + 2 = 3$	$\square_2 = 2^2 = 4$
$\triangle_3 = 1 + 2 + 3 = 6$	$\square_3 = 3^2 = 9$
$\triangle_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$\square_4 = 4^2 = 16$
…	…

Je kunt bovendien elk vierkantsgetal (groter dan 1) noteren als de som van twee driehoeksgetallen.

$\square_2$	= 	$= 2^2$	$= 4$	$= 1 + 3$	$= \triangle_{1} + \triangle_{2}$
$\square_3$	= 	$= 3^2$	$= 9$	$= 3 + 6$	$= \triangle_{2} + \triangle_{3}$
$\square_4$	= 	$= 4^2$	$= 16$	$= 6 + 10$	$= \triangle_{3} + \triangle_{4}$
$\square_{20}$	= …	$= 20^2$	$= 400$	$= 190 + 210$	$= \triangle_{19} + \triangle_{20}$

Het aantal stippen van het n-vierkantsgetal is n^2.
Teken en bepaal nu zelf het vijfde driehoeksgetal en vierkantsgetal.

Pythagoras redeneerde op dezelfde manier voor het bepalen van vijfhoeksgetallen.
Zoek dit op en teken er enkele.

3 Rekenen met lettervormen

In dit boek maakte je kennis met heel wat lettervormen. Zo'n lettervorm is een som en/of product waarin letters voorkomen. Die letters kunnen al dan niet een bepaalde betekenis hebben.

Voorbeelden:

- de veralgemening van een logische rij getallen: 3, 7, 11, 15, 4 n – 1
- het optellen in Q is commutatief: a + b = b + a
- het oplossen van een vergelijking: x + 3 = 92
- de oppervlakte van een parallellogram: A = b · h

Algemeen:

Bij lettervormen spreken we af dat we het getalgedeelte (= de **coëfficiënt**) steeds vooraan noteren. Het lettergedeelte komt erachter. Die letters noteer je alfabetisch. Bovendien mag je het maalteken weglaten als er geen verwarring mogelijk is.

LETTERVORM	COËFFICIËNT	LETTERGEDEELTE
$5ab$	5	ab
$-8x$	-8	x
$\frac{3}{4}x^2y$	$\frac{3}{4}$	x^2y

Lettervormen vermenigvuldigen

Door de commutatieve en associatieve eigenschap kunnen we lettervormen vermenigvuldigen.

Voorbeelden:

$$5a \cdot 3a = 5 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 15a^2$$

$$\frac{2}{5}x \cdot 5y = \frac{2}{5} \cdot 5 \cdot x \cdot y = 2xy$$

Lettervormen optellen en aftrekken

De distributieve eigenschap is een handig hulpmiddel om lettervormen met hetzelfde lettergedeelte op te tellen.

Voorbeelden:

$$5a + 3a = (5+3)a = 8a$$

$$12x - 6x + x = (12 - 6 + 1)x = 7x$$

$$\frac{6}{5}a + \frac{3}{2}a = \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{2}\right)a = \frac{27}{10}a$$

Rekenregels

Om het product te bepalen van twee lettervormen:

1. Vermenigvuldig de coëfficiënten.
2. Vermenigvuldig de lettergedeeltes.

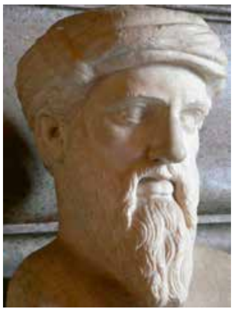
Om de som (of het verschil) te bepalen van twee lettervormen met **hetzelfde lettergedeelte**:

1. Tel de coëfficiënten op (of trek ze van elkaar af).
2. Behoud het lettergedeelte.

4 Samenvatting

- Je kunt in een reeks getallen de regelmaat ontdekken.
- Je kunt na een reeks tekeningen de volgende figuur tekenen.
- Je kunt een eenvoudige formule opstellen vanuit een reeks getallen (of figuren).
- Je kunt een eenvoudige letterformule opstellen vanuit een reeks getallen (of figuren).
- Je kunt het product bepalen van twee lettervormen.
  1 Vermenigvuldig de coëfficiënten.
  2 Vermenigvuldig de lettergedeeltes.
- Je kunt de som (of het verschil) bepalen van twee lettervormen met hetzelfde lettergedeelte.
  1 Tel de coëfficiënten op (of trek ze van elkaar af).
  2 Behoud het lettergedeelte.

Pythagoras



Pythagoras was een groot geleerde uit Griekenland. Hij werd in 572 voor Christus (of daaromtrent, want daar is veel discussie over) geboren op het Griekse eiland Samos. Hij verliet zijn eiland rond zijn veertigste, omdat het werd geregeerd door een tiran.
Na een verblijf in Egypte en in Babylonië belandde hij in Zuid-Italië, waar hij in de stad Croton een 'school' stichtte. Dat was een soort klooster waar de voornaamste intellectuelen uit die tijd samenkwamen. Zij hadden hun eigen regels, hun geheimen en hun symbolen. Pythagoras en zijn leerlingen bestudeerden er o.a. wiskunde en filosofie.
Pythagoras werd door zijn leerlingen op handen gedragen, maar door de bevolking van Croton niet. Zij beschouwden de school als een sekte. Er wordt verteld dat Pythagoras stierf toen de bevolking van Croton het huis van een leerling en vriend van Pythagoras in brand stak als protest tegen de aanwezigheid van het genootschap. De bekende 'stelling van Pythagoras' speelt zich af in een rechthoekige driehoek. Je zult er kennis mee maken in je derde jaar. De rechthoekige driehoek vind je samen met het standbeeld van Pythagoras (die naar de hemel wijst) terug in de haven van Samos.

6.2 Vraagstukken oplossen met vergelijkingen

1 Vergelijkingen van de vorm $x + a = b$

In hoofdstuk 4 leerde je wat een **vergelijking** is en hoe je die vergelijking moet oplossen.

We herhalen:

$$\begin{aligned} x + a &= b \\ &\Updownarrow \quad \text{in beide leden } a \text{ aftrekken} \\ x &= b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - a &= b \\ &\Updownarrow \quad \text{in beide leden } a \text{ optellen} \\ x &= b + a \end{aligned}$$

We beperkten ons toen tot de gehele getallen. Nu breiden we dit uit tot de rationale getallen en houden we rekening met de rekenregels.

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} x + \left(\frac{-7}{5}\right) &= \frac{-3}{4} \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{-3}{4} - \left(\frac{-7}{5}\right) \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{-15}{20} + \frac{28}{20} \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 1{,}5 &= 4{,}75 \\ &\Updownarrow \\ x &= 4{,}75 + 1{,}5 \\ &\Updownarrow \\ x &= 6{,}25 \end{aligned}$$

2 Vergelijkingen van de vorm $ax = b$

We herhalen:

$$\begin{aligned} a \cdot x &= b \\ &\Updownarrow \quad \text{in beide leden delen door } a \quad (\neq 0) \\ x &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x : a &= b \\ &\Updownarrow \quad \text{in beide leden vermenigvuldigen met } a \quad (\neq 0) \\ x &= b \cdot a \end{aligned}$$

We beperkten ons toen tot de gehele getallen. Nu breiden we dit uit tot de rationale getallen en houden we rekening met de rekenregels. Merk op dat a hier niet nul mag zijn.

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x &= \frac{-4}{5} \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{-4}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &\Updownarrow \\ x &= -\frac{\cancelto{2}{4}}{5} \cdot \left(\frac{-3}{\cancelto{1}{2}}\right) \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x : \left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{4}{15} \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{4}{15} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &\Updownarrow \\ x &= -\frac{\cancelto{2}{4} \cdot \cancelto{1}{3}}{\cancelto{5}{15} \cdot \cancelto{1}{2}} \\ &\Updownarrow \\ x &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

3 Vergelijkingen van de vorm $ax + b = c$

Algemeen:

$$\begin{aligned} a \cdot x + b &= c \\ &\Updownarrow \text{ in beide leden } b \text{ aftrekken} \\ a \cdot x &= c - b \\ &\Updownarrow \text{ in beide leden delen door } a \\ x &= \frac{c - b}{a} \end{aligned}$$

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 3x + 7 &= 13 \\ &\Updownarrow \\ 3x &= 13 - 7 \\ &\Updownarrow \\ 3x &= 6 \\ &\Updownarrow \\ x &= 6 : 3 \\ &\Updownarrow \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{2} &= \frac{1}{6} \\ &\Updownarrow \\ 2x &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \\ &\Updownarrow \\ 2x &= \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \\ &\Updownarrow \\ 2x &= \frac{2}{3} \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{2}{3} : 2 \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Het is mogelijk dat je in de opgave haakjes moet wegwerken door de distributieve eigenschap toe te passen. Als de haakjes weggewerkt zijn, volg je de werkwijze van hierboven.

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x + 2) &= 8 \\ &\Updownarrow \\ 2x + 4 &= 8 \\ &\Updownarrow \\ 2x &= 8 - 4 \\ &\Updownarrow \\ 2x &= 4 \\ &\Updownarrow \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3 \cdot (x + 1) &= 9 \\ &\Updownarrow \\ -3x - 3 &= 9 \\ &\Updownarrow \\ -3x &= 12 \\ &\Updownarrow \\ x &= 12 : (-3) \\ &\Updownarrow \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Doe een controle:

Na het oplossen van de vergelijking kun je je antwoord controleren. Je vervangt in de opgave de letter x door de oplossing. Kijk na of beide leden gelijk zijn.

Controle:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2 + 2) &\stackrel{?}{=} 8 \\ &\Updownarrow \\ 2 \cdot 4 &\stackrel{?}{=} 8 \\ &\Updownarrow \\ 8 &\stackrel{!}{=} 8 \end{aligned}$$

Controle:

$$\begin{aligned} -3 \cdot (-4 + 1) &\stackrel{?}{=} 9 \\ &\Updownarrow \\ -3 \cdot (-3) &\stackrel{?}{=} 9 \\ &\Updownarrow \\ 9 &\stackrel{!}{=} 9 \end{aligned}$$

4 Vraagstukken oplossen met een vergelijking

In de oefeningen die je in dit boek vindt, kreeg je heel wat vraagstukken voorgeschoteld. We beperken ons in dit deel tot **vraagstukken** die je oplost door middel van een vergelijking.

Hoe een vraagstuk oplossen?

Het vraagstuk begrijpen:

1 Lees en herlees het vraagstuk.
2 Stel datgene wat je zoekt voor door de letter x.

Het vraagstuk oplossen (mathematiseren):

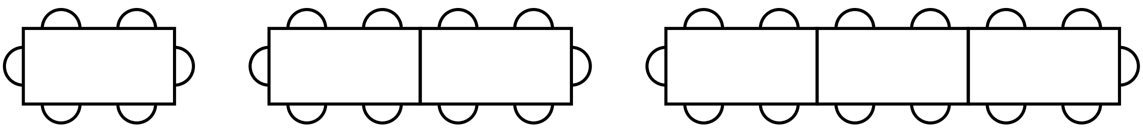
3 Vertaal het vraagstuk naar een vergelijking.
4 Los de vergelijking op.

Het vraagstuk beantwoorden (demathematiseren):

5 Formuleer een antwoord en controleer.

Voorbeeld 1:

Voor de actie 'De langste tafel' worden buurtbewoners uitgenodigd om plaats te nemen aan een lange rij tafels die volgens deze regelmaat zijn opgesteld:



Als de organisatie 306 mensen verwacht, hoeveel tafels zullen er dan nodig zijn?

Het vraagstuk begrijpen:

Lees en herlees het vraagstuk. Je merkt dat je eerst de regelmaat moet herkennen. Je weet dat het aantal tafels gezocht wordt.

x: het aantal nodige tafels

Oplossing:

Elke tafel heeft aan de lange zijden telkens twee keer twee zitplaatsen (= 4). Bij elke opstelling zal je aan de uiteinden nog een extra stoel plaatsen (+2).

Het aantal stoelen is dus gelijk aan 4 maal het aantal tafels plus 2.

$$\begin{aligned} 4x+2 &= 306 \\ &\Updownarrow \\ 4x &= 306-2 \\ &\Updownarrow \\ 4x &= 304 \\ &\Updownarrow \\ x &= 304:4 \\ &\Updownarrow \\ x &= 76 \end{aligned}$$

Antwoord: Als je 306 mensen verwacht, heb je 76 tafels nodig.

Controle: $76 \cdot 4 + 2 = 306$

Voorbeeld 2:
Voor één tafel en vier stoelen betaal je in de meubelwinkel 200 euro.
Hoeveel kost één stoel als je weet dat de tafel 88 euro kost?

Het vraagstuk begrijpen:
x: de prijs van één stoel

Oplossing:

$$\begin{aligned} x + x + x + x + 88 &= 200 \\ &\Updownarrow \\ 4x + 88 &= 200 \\ &\Updownarrow \\ 4x &= 200 - 88 \\ &\Updownarrow \\ 4x &= 112 \\ &\Updownarrow \\ x &= 28 \end{aligned}$$

Antwoord: Één stoel kost in deze winkel 28 euro.

Controle: $28 + 28 + 28 + 28 + 88 = 200$

5 Samenvatting

- Je kunt vergelijkingen van een van onderstaande vormen oplossen.

$$\begin{aligned} x + a &= b \\ &\Updownarrow \\ x &= b - a \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - a &= b \\ &\Updownarrow \\ x &= b + a \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a \cdot x &= b \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{b}{a} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x : a &= b \\ &\Updownarrow \\ x &= b \cdot a \end{aligned}$$

- Je kunt vraagstukken oplossen met behulp van een vergelijking.
  1. Lees en herlees het vraagstuk.
  2. Stel datgene wat je zoekt voor door de letter x.
  3. Vertaal het vraagstuk naar een vergelijking.
  4. Los de vergelijking op.
  5. Formuleer een antwoord en controleer.

- Je weet dat bij $ax = b$ het getal a nooit nul mag zijn.

- Je kunt vergelijkingen oplossen van de vorm $ax + b = c$ en je weet dat hierbij a nooit nul mag zijn.