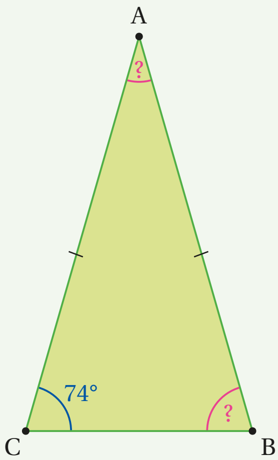
9 Oefeningen

1 Bepaal telkens de grootte van de aangeduide hoeken.

a

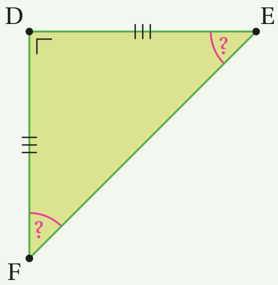


$\hat{B} = \hat{C} = 74°$

$\hat{A} = 180° - 2 \cdot 74°$

$= 32°$

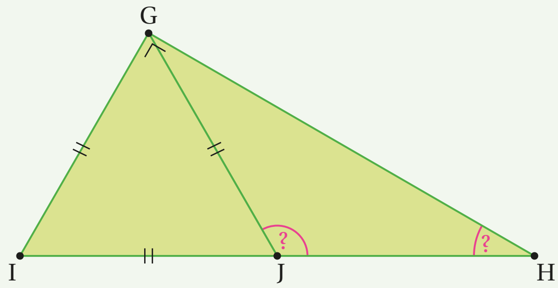
b



$\hat{E} = \hat{F} = \dfrac{180° - 90°}{2}$

$= 45°$

c

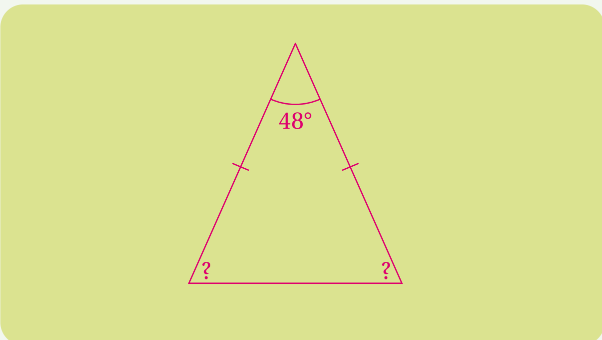


$\hat{J} = 180° - 60° = 120°$

$\hat{H} = 180° - \hat{I} - \hat{G}$

$= 180° - 60° - 90° = 30°$

2 De tophoek van een gelijkbenige driehoek is 48°. Bepaal de grootte van de basishoeken.

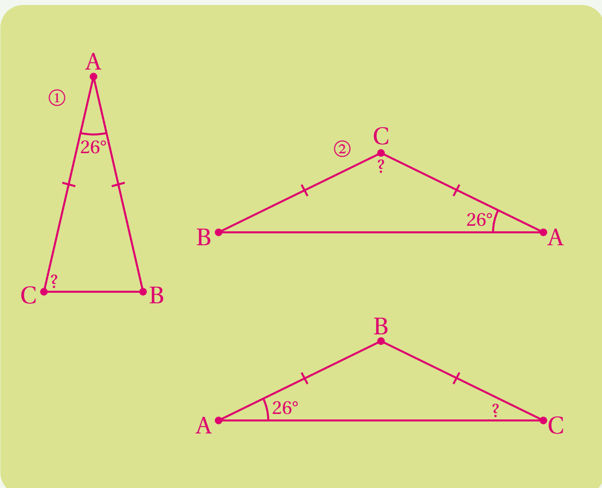


$\dfrac{180° - 48°}{2} = \dfrac{132°}{2}$

$= 66°$

Antwoord: De basishoeken zijn 66°.

3 In een gelijkbenige driehoek ABC is $\hat{A} = 26°$. Geef de drie mogelijke antwoorden op de vraag: hoe groot is $\hat{C}$?



① Als $\hat{A}$ de tophoek is, dan is $\hat{C} = 77°$:

$\dfrac{180° - 26°}{2} = \dfrac{154°}{2} = 77°$

② Als $\hat{A}$ niet de tophoek is, dan zijn de basishoeken 26°

en de tophoek 128°:

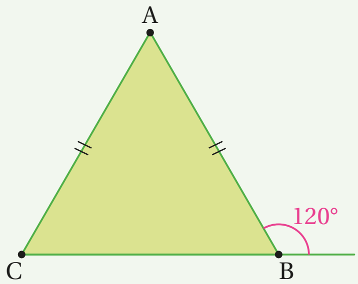
$180° - (2 \cdot 26°) = 180° - 52° = 128°$

$\hat{C}$ kan dus 128° of 26° zijn.

4 ΔABC is een gelijkbenige driehoek met tophoek $\hat{A}$. Vul de tabel aan.

	opgave a	opgave b	opgave c	opgave d
$\hat{A}$	20°	140°	α	$180° - 2\alpha$
$\hat{B}$	80°	20°	$\frac{180° - \alpha}{2}$	α
$\hat{C}$	80°	20°	$\frac{180° - \alpha}{2}$	α

5 Verklaar waarom ΔABC gelijkzijdig is.



De binnenhoek van $\hat{B}$ is 60° (nevenhoek met 120°).

Dus is ook $\hat{C} = 60$ (ΔABC is immers gelijkbenig).

Dan is $\hat{A} = 180° - 60° - 60°$

$= 60°$

Alle binnenhoeken zijn 60°, dus is ΔABC gelijkzijdig.

6 Hoeveel symmetrieassen kan de gegeven driehoek hebben? Duid elke mogelijkheid aan.

	0 SYMMETRIE-ASSEN	1 SYMMETRIEAS	2 SYMMETRIE-ASSEN	3 SYMMETRIE-ASSEN
GELIJKBENIGE DRIEHOEK		✓		✓
GELIJKZIJDIGE DRIEHOEK				✓
RECHTHOEKIGE DRIEHOEK	✓	✓		
SCHERPHOEKIGE DRIEHOEK	✓	✓		✓
STOMPHOEKIGE DRIEHOEK	✓	✓		

7 In een gelijkbenige driehoek is één van de hoeken 120°. Verklaar waarom dit de tophoek is.

Als het een basishoek zou zijn, dan zou de andere basishoek ook 120° zijn en is de hoekensom van de driehoek al meer dan 180° !

8 ΔABC is een gelijkbenige driehoek met top A. Bereken $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$ als:

a $\hat{A} = 2\hat{B}$

$$\begin{aligned} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ 2\hat{B}+\hat{B}+\hat{B} &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ 4\hat{B} &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ \hat{B} &= 45^\circ \end{aligned}$$

Antwoord: $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$

c $\hat{A} = \hat{B} + 24^\circ$

$$\begin{aligned} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ \hat{B}+24^\circ+\hat{B}+\hat{B} &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ 3\hat{B} &= 156^\circ \\ &\Updownarrow \\ \hat{B} &= 52^\circ \end{aligned}$$

Antwoord: $\hat{A} = 76^\circ$, $\hat{B} = 52^\circ$, $\hat{C} = 52^\circ$

b $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} + 72^\circ$

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ \overbrace{\hat{B}+\hat{B}+72^\circ}^{\hat{A}}+\hat{B}+\hat{B} &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ 4\hat{B} &= 180^\circ - 72^\circ \\ &\Updownarrow \\ 4\hat{B} &= 108^\circ \\ &\Updownarrow \\ \hat{B} &= 27^\circ \end{aligned}$$

Antwoord: $\hat{A} = 126^\circ$, $\hat{B} = 27^\circ$, $\hat{C} = 27^\circ$

d $\hat{B} + \hat{C} = 110^\circ$

$$\begin{aligned} \hat{B}+\hat{C} &= 110^\circ \\ &\Updownarrow \\ \hat{B}+\hat{B} &= 110^\circ \\ &\Updownarrow \\ \hat{B} &= 55^\circ = \hat{C} \end{aligned}$$

Antwoord: $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 55^\circ$, $\hat{C} = 55^\circ$

** **9** ΔABC is een gelijkbenige driehoek met top A. Bereken $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$ als $4\hat{A} = 3\hat{B} + 5\hat{C} + 40^\circ$.

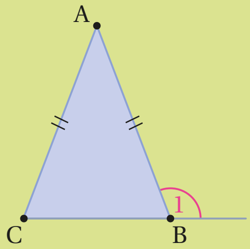
$$\begin{aligned} 4\hat{A} &= 3\hat{B}+5\hat{B}+40^\circ \\ &\Updownarrow \\ 4\hat{A} &= 8\hat{B}+40^\circ \\ &\Updownarrow \\ \hat{A} &= 2\hat{B}+10^\circ \end{aligned}$$

Antwoord: $\hat{A} = 95^\circ$, $\hat{B} = 42^\circ30'$, $\hat{C} = 42^\circ30'$

$$\begin{aligned} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ 2\hat{B}+10^\circ+\hat{B}+\hat{B} &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ 4\hat{B} &= 170^\circ \\ &\Updownarrow \\ \hat{B} &= 42^\circ30' = \hat{C} \\ \hat{A} = 2\cdot\hat{B}+10^\circ &= 2\cdot 42^\circ30'+10^\circ \\ &= 95^\circ \end{aligned}$$

10 Bereken $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$ als:

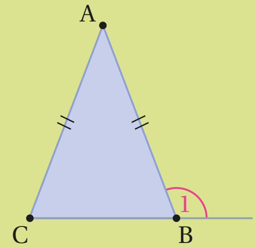
a $\hat{B}_1 = 5\hat{A}$



$$\begin{aligned}
\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{A}+\hat{B}+\hat{B} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{A}+(180^\circ-\hat{B}_1)+(180^\circ-\hat{B}_1) &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{A}+180^\circ-5\hat{A}+180^\circ-5\hat{A} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
-9\hat{A} &= -180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{A} &= 20^\circ
\end{aligned}$$

Antwoord: $\hat{A} = 20^\circ$
$\hat{B} = 80^\circ$
$\hat{C} = 80^\circ$

b $\hat{B}_1 = \frac{7}{5}\hat{A}$

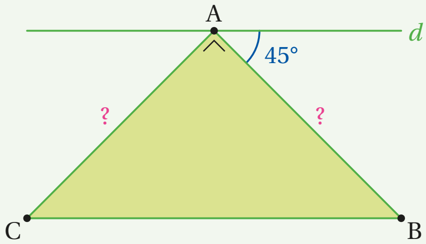


$$\begin{aligned}
\hat{B}_1 &= \hat{A}+\hat{C} \\
&\Updownarrow \\
\frac{7}{5}\hat{A} &= \hat{A}+\hat{C} \\
&\Updownarrow \\
\frac{2}{5}\hat{A} &= \hat{C}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{A}+\frac{2}{5}\hat{A}+\frac{2}{5}\hat{A} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\frac{9}{5}\hat{A} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{A} &= 180^\circ : \frac{9}{5} \\
\hat{A} &= 100^\circ
\end{aligned}$$

Antwoord: $\hat{A} = 100^\circ$
$\hat{B} = 40^\circ$
$\hat{C} = 40^\circ$

11 Toon aan dat ΔABC gelijkbenig is als $d \parallel BC$.

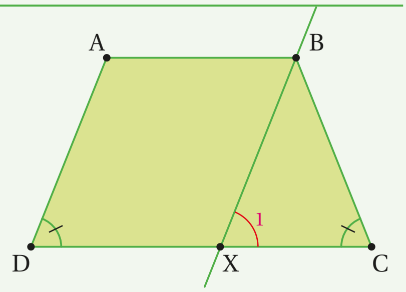


- $d \parallel BC$ dus $\hat{A} = \hat{B}$ (verwisselende binnenhoeken bij $d \parallel BC$ en snijlijn AB)
- Als $\hat{B} = 45^\circ$, dan is ook $\hat{C} = 45^\circ$ (hoekensom in ΔABC)
- Dankzij het kenmerk van de gelijkbenige driehoek mag je concluderen dat ΔABC gelijkbenig is.

12 Gegeven: trapezium ABCD met $\widehat{C} = \widehat{D}$

$BX \mathbin{/\!/} AD$

Te bewijzen: $|BX| = |BC|$



Bewijs:

$\widehat{D} = \widehat{X}_1$ (overeenkomstige hoeken bij $AD \mathbin{/\!/} BX$ en snijlijn DX)

$\widehat{X}_1 = \widehat{C}$ (aangezien $\widehat{D} = \widehat{C}$ en $\widehat{D} = \widehat{X}_1$)

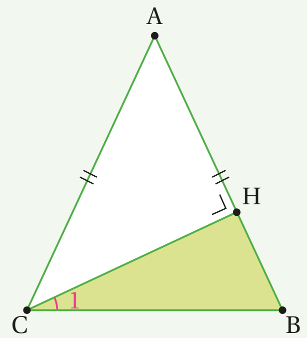
$\Updownarrow$ kenmerk van de gelijkbenige driehoek

ΔBCX is gelijkbenig, dus $|BX| = |BC|$

13 Gegeven: ΔABC is gelijkbenig met $|AB| = |AC|$

$CH \perp AB$

Te bewijzen: $\widehat{C}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2}$



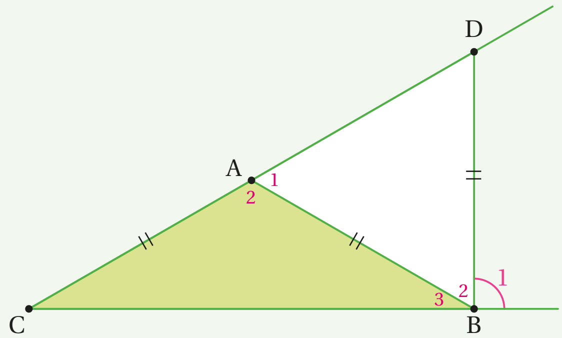
Bewijs:

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) & & \widehat{C}_1 + \widehat{B} = 90° \\ \phantom{\widehat{A}} = 180° - 2\widehat{B} & \text{er geldt ook} & \text{of } \widehat{C}_1 = 90° - \widehat{B} \end{array}}_{\frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{C}_1}$$

14 Gegeven: ΔABC is gelijkbenig

$D \in AC$ zodat $|BA| = |BD|$

Te bewijzen: $\widehat{B}_1 = 3 \cdot \widehat{C}$



Bewijs:

$\widehat{B}_1 = \widehat{C} + \widehat{D}$ (eigenschap buitenhoek)

$\Updownarrow$

$\widehat{B}_1 = \widehat{C} + \widehat{A}_1$ (kenmerk gelijkbenige driehoek)

$\Updownarrow$

$\widehat{B}_1 = \widehat{C} + \widehat{B}_3 + \widehat{C}$ (eigenschap buitenhoek)

$\Updownarrow$

$\widehat{B}_1 = \widehat{C} + \widehat{C} + \widehat{C} = 3\widehat{C}$ (eigenschap gelijkbenige driehoek)

15 Onderzoeksopdrachten.
Onderzoek telkens met ICT en lever daarna het bewijs.

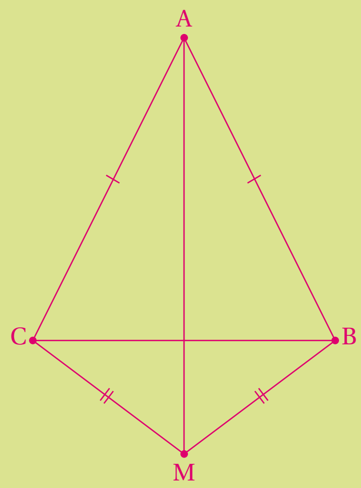
a Plaats twee gelijkbenige driehoeken met gelijke basissen tegen elkaar. De toppen liggen aan weerszijden van de basis. Er ontstaat een vierhoek. Wat is er bijzonder aan de diagonalen van die vierhoek?

Gegeven:
ΔABC en ΔBMC zijn gelijkbenig

Te bewijzen:
$AM \perp BC$

Bewijs:
$|AB| = |AC|$ (ΔABC is gelijkbenig)
dus A ligt op de middelloodlijn van [BC]
$|MB| = |MC|$ (ΔBMC is gelijkbenig)
dus M ligt op de middelloodlijn van [BC]

Besluit:
AM is de middelloodlijn van [BC] en dus $AM \perp BC$

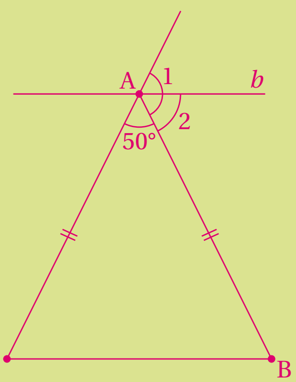


b ΔABC is gelijkbenig met tophoek $\widehat{A} = 50°$. De rechte b is de bissectrice van buitenhoek $\widehat{A}_1$.
Wat kun je besluiten over de ligging van b en BC?

Gegeven:
ΔABC zijn gelijkbenig
$\widehat{A} = 50°$
b is de bissectrice van $\widehat{A}_1$

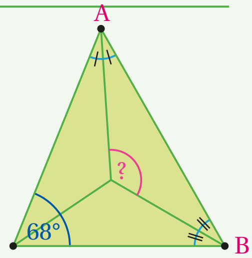
Te bewijzen:
$b \parallel BC$

Bewijs:
$\widehat{A}_1 = 130°$
$\widehat{A}_2 = \frac{1}{2}\widehat{A}_1 = 65°$
$\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$
Dus $\widehat{B} = \widehat{A}_2 \Rightarrow b \parallel BC$



Besluit:
Als twee verwisselende binnenhoeken gelijk zijn bij de rechten b en BC met snijlijn AB, dan zijn de rechten evenwijdig.

16 Een driehoek heeft een hoek van 68°. In de driehoek zijn de drie bissectrices getekend. Hoeveel graden is de hoek met het vraagteken?



(A) 124 (B) 128 (C) 132 (D) 136 (E) 140

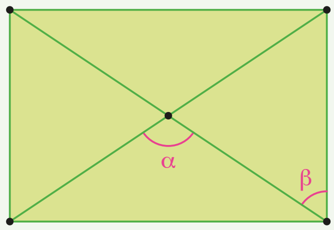
wizPROF 2009 vraag 9 © Stichting Wiskunde Kangoeroe

$\widehat{A}+\widehat{B}=112°$

$\frac{1}{2}\widehat{A}+\frac{1}{2}\widehat{B}=56°$

De gevraagde hoek is $180°-56°=124°$

***17** In een rechthoek tekent men de twee diagonalen (zie figuur hiernaast). Hoe groot is β in functie van α?



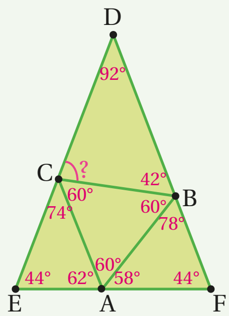
(A) $\alpha-45°$ (B) $90°-\frac{\alpha}{2}$ (C) $180°-\frac{\alpha}{2}$ (D) $180°-\alpha$ (E) $\frac{\alpha}{2}$

JWO 2010 eerste ronde, vraag 2 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

$$
\begin{aligned}
180°-\alpha &= 180°-2\beta\\
&\Updownarrow\\
-\alpha &= -2\beta\\
&\Updownarrow\\
\frac{\alpha}{2} &= \beta
\end{aligned}
$$

---

18 Op de zijden van een gelijkbenige driehoek DEF met top D neemt men punten A, B en C zodat driehoek ABC gelijkzijdig is zoals in de figuur. Als $C\widehat{A}E = 62°$ en $A\widehat{B}F = 78°$, dan is $B\widehat{C}D$ gelijk aan



(A) 40° (B) 46° (C) 52° (D) 54° (E) 58°

JWO 2015 eerste ronde, vraag 18 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

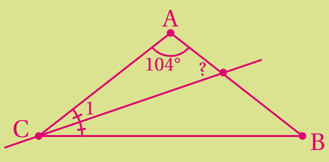
Zie tekening

---

19 Een gelijkbenige driehoek ΔABC heeft een tophoek $\widehat{A} = 104°$. Bepaal de hoek tussen de zijde [AB] en de bissectrice van $\widehat{C}$.

(A) 52° (B) 55° (C) 56° (D) 57° (E) 58°

JWO 2019 eerste ronde, probleem 10 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw



$$
\begin{aligned}
\widehat{B} = \widehat{C} &= \frac{180°-104°}{2}\\
&= 38°
\end{aligned}
$$

dus $\widehat{C}_1 = 19°$

De gevraagde hoek: $180°-104°-19°=57°$