2.1 Welkom in ℤ

1 Van ℕ naar ℤ

- Natuurlijke getallen kun je optellen, je bekomt dan steeds opnieuw een natuurlijk getal. Zo is 15 + 20 = 35.
- Natuurlijke getallen aftrekken lukt in ℕ niet altijd. Zo is 20 – 15 = 5 een natuurlijk getal. Maar 15 – 20 is geen natuurlijk getal.
- In Leiden (Nederland) bevindt zich de diepste parkeergarage van West-Europa. De auto's kunnen tot zeven verdiepingen onder de grond parkeren. Goed onthouden of je de wagen op –3 of op –5 geparkeerd hebt.

© Foto AD | David Bremmer

- Op 30 december 1978 was de maximumtemperatuur in Vlaanderen 7 °C. Door de invoer van Siberische koude landlucht werd het 17 °C kouder. De dag nadien kwam de temperatuur niet hoger dan –10 °C.
- Zitten we boven of onder de zeespiegel? Een verdieping onder de begane grond? Een voorschrift bij de opticien? Een dieptemeter bij het duiken? Steeds heb je **negatieve getallen** nodig.

Uit deze voorbeelden blijkt dat het nodig is om de verzameling ℕ uit te breiden. We herhalen de definitie van **gehele getallen**.

geheel getal

Een **geheel getal** is een natuurlijk getal voorzien van een toestandsteken.

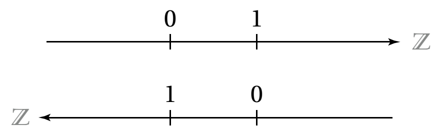
ℤ = { …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, … }

Er geldt: ℕ ⊂ ℤ

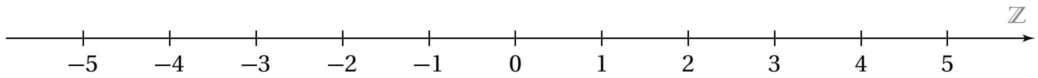
Alle natuurlijke getallen zijn gehele getallen.

2 Orde op de getallenas

We kunnen de gehele getallen netjes voorstellen op een rechte. Je kiest dan twee punten. Bij een van die punten plaatsen we een 0 en bij het andere punt een 1.



Wanneer we naar rechts en naar links steeds dezelfde afstanden afpassen als de afstand tussen 0 en 1, dan vinden we de punten die 2, 3, 4, … voorstellen en ook –1, –2, –3, …
We noemen deze voorstelling een getallenas. Op deze manier vinden we alle gehele getallen terug op de getallenas.



Als we de getallenas doorlopen in de zin van de pijl, dan …

	komt 3 voor 5		komt –4 voor –1	
	… is kleiner dan …	**… is groter dan …**	**… is kleiner dan …**	**… is groter dan …**
WE ZEGGEN	3 is kleiner dan 5	5 is groter dan 3	–4 is kleiner dan –1	–1 is groter dan –4
WE NOTEREN	$3 < 5$	$5 > 3$	$-4 < -1$	$-1 > -4$

De symbolen $<$ en $>$ gebruiken we om de begrippen '… is kleiner dan …' en '… is groter dan …' wiskundig korter te noteren.

Als we de formulering 'alle gehele getallen kleiner dan 3' korter willen schrijven, dan zullen we ook gebruikmaken van een letter. Er zijn immers verschillende gehele getallen die kleiner zijn dan 3. Die letter dient als **plaatsvervanger** van zo'n geheel getal.

	… is kleiner dan …	**… is groter dan …**
WE ZEGGEN	alle gehele getallen kleiner dan 3	alle gehele getallen groter dan 3
WE NOTEREN	$x < 3$	$x > 3$
	x kan zijn: 2, 1, 0, –1, –2, –3, …	x kan zijn: 4, 5, 6, 7, 8, …

De symbolen $\leqslant$ en $\geqslant$ worden ook vaak gebruikt.

	… is kleiner dan of gelijk aan …	**… is groter dan of gelijk aan …**
WE ZEGGEN	alle gehele getallen kleiner dan of gelijk aan –4	alle gehele getallen groter dan of gelijk aan –4
WE NOTEREN	$x \leqslant -4$	$x \geqslant -4$
	x kan zijn: –4, –5, –6, –7, …	x kan zijn: –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, …

Dankzij de getallenas kunnen we orde scheppen. Voor de gehele getallen noteren we:

$$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$$

$$\ldots \leqslant -3 \leqslant -2 \leqslant -1 \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant \ldots$$

Toepassingen

- Door handig gebruik te maken van symbolen, kunnen verzamelingen weergegeven worden door omschrijving.
  $\{3, 4, 5, 6\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$
  $\{-2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{x \in 2\mathbb{Z} \mid x > -3\}$

- Tijdlijn

–2589
Start van de bouw van de piramide van Cheops.

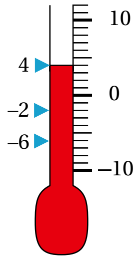
–63
Keizer Augustus wordt geboren.

1641
Blaise Pascal stelt de eerste rekenmachine voor.

2032
De Olympische Spelen vinden plaats in Brisbane (Australië)

- Thermometer
  Een temperatuur van –2 °C is kouder dan een temperatuur van 4 °C.
  We noteren: $-2 < 4$ (lees –2 is kleiner dan 4)

  Een temperatuur van –6 °C is kouder dan een temperatuur van –2 °C.
  We noteren: $-6 < -2$ (lees –6 is kleiner dan –2)



3 Absolute waarde

absolute waarde

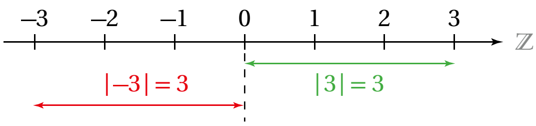
De **absolute waarde** van een getal is dat getal zonder toestandsteken.

De absolute waarde van een getal is dus altijd positief.
Als symbool gebruiken we twee verticale streepjes, met daartussen het getal:

Voorbeelden:

$|-3| = 3$ *lees:* 'de absolute waarde van –3 is 3'
$|8| = 8$
$|0| = 0$

Op de getallenas komt 'absolute waarde' overeen met de afstand van dat getal tot het nulpunt.



4 Tegengestelde

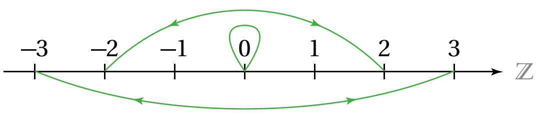
tegengestelde

Het **tegengestelde** van een getal is dat getal voorzien van een ander toestandsteken.

Voorbeelden: Het tegengestelde van 3 is –3. We zeggen ook dat 3 en –3 tegengestelde getallen zijn.
Het tegengestelde van –8 is 8.
Het tegengestelde van x is $-x$.

Er is maar één getal dat zichzelf als tegengestelde heeft en dat is 0.

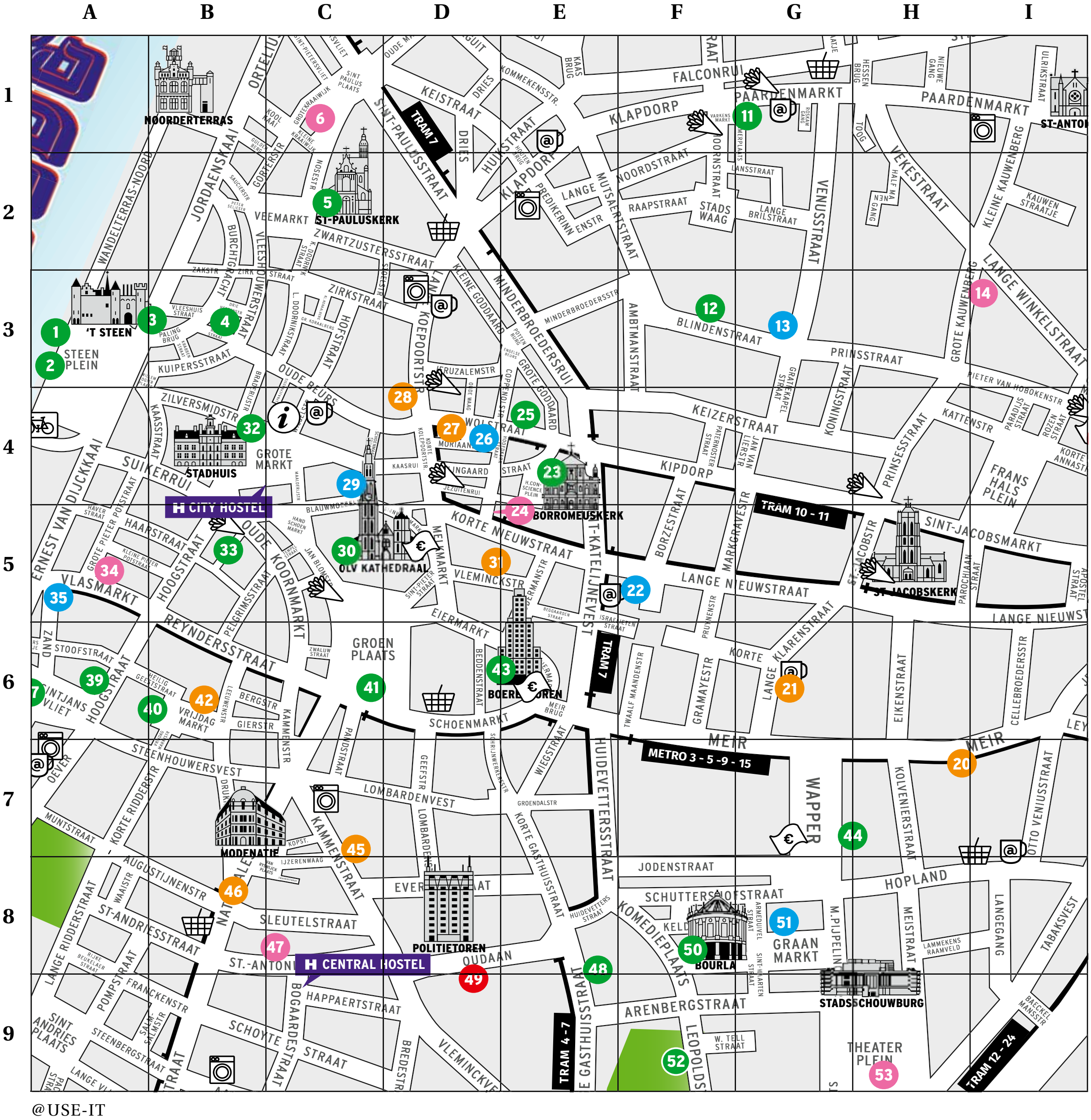
Ook op de getallenas kunnen we het 'tegengestelde' aflezen.
Het ligt immers even ver van 0, maar langs de andere kant.



5 Plaatsbepaling met coördinaten

Voorbeeld 1: stadsplan

Om wegwijs te raken in Antwerpen, een van 's werelds grootste havensteden, heb je een degelijk stadsplan nodig. Als je wilt winkelen op de Meir moet je eerst op dit plan opzoeken in welke zone deze winkelstraat gelegen is.



Het stadsplan is als volgt opgebouwd:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4		B 4				

- In welke zone vind je het stadhuis van Antwerpen?

  B4

- Waar vind je de stadsschouwburg?

  G9 - H9

- Als je wandelt van het Steenplein naar het Noorderterras, door welke zones heb je je dan begeven?

  A3 - A2 - B2 - B1

Voorbeeld 2: schaakbord

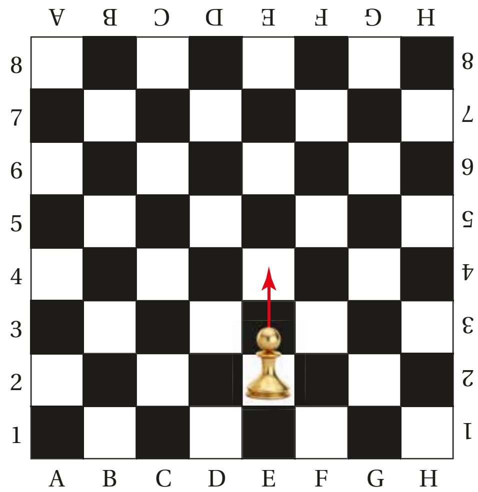
Hiernaast zie je hoe een schaakbord is opgebouwd.
Zo kan de plaats van elk stukje bepaald worden door een letter, gevolgd door een cijfer.

- Hoe verplaats je de aangeduide pion?

  Van E2 naar E4

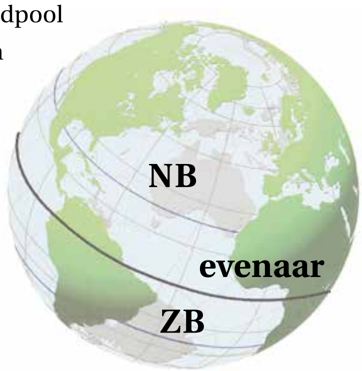
- Waar plaats je alle andere pionnen?

  A2, B2, C2, D2, F2, G2 en H2



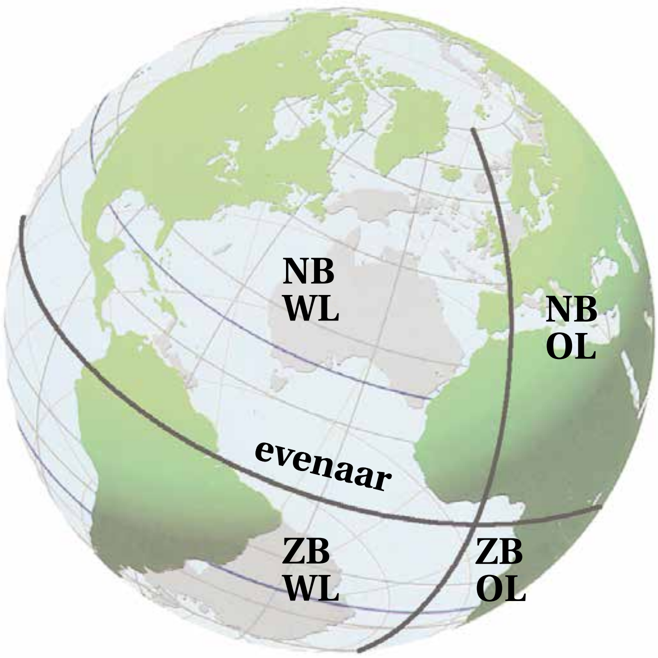
Voorbeeld 3: lengte- en breedtecirkels

Voor de lengte verdeelt men de aardbol in 360°. Die lengtecirkels of meridianen lopen van de Noordpool naar de Zuidpool en worden beschreven in graden ten oosten of ten westen van de nulmeridiaan (Greenwich).



Voor de breedte verdeelt men de aardbol aan weerszijden van de evenaar in 90 schijven. Die breedtecirkels lopen evenwijdig met de evenaar en worden beschreven in graden ten noorden of ten zuiden van de eve

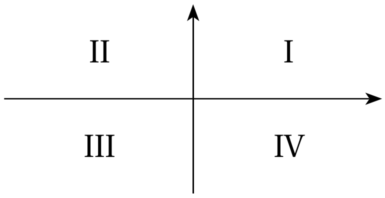
Brengen we die twee bij elkaar, dan krijgen we dit:



Gebruikte afkortingen:
NB: noorderbreedte;
ZB: zuiderbreedte;
OL: oosterlengte;
WL: westerlengte.

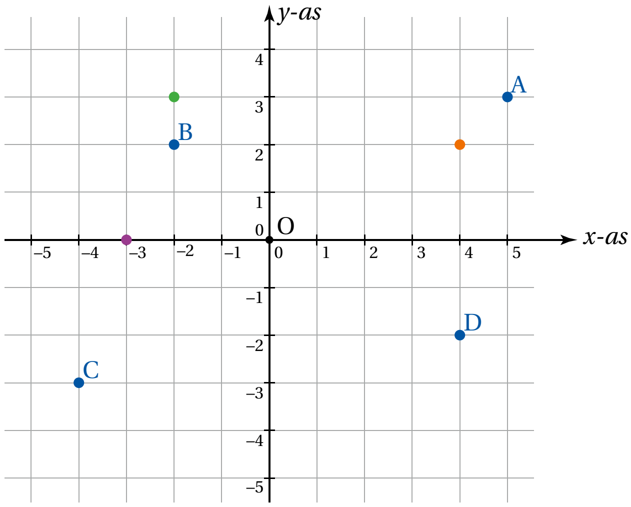
Lengte- en breedtecirkels
Eratosthenes (270 –194 voor Christus), ook bekend van de 'zeef van Eratosthenes', leverde enkele belangrijke bijdragen. Hij zag dat elke plaats op aarde kon worden gelokaliseerd met een eenvoudig rooster van lengte- en breedtecirkels, en dat gebruiken we nu nog altijd.

6 Coördinaat van een punt



Ook in de wiskunde willen we aan plaatsbepaling doen.
Een **assenstelsel** (het woord ‘stelsel’ duidt op ‘meer dan één’) bestaat uit twee getallenassen die elkaar snijden in een punt, dat we de oorsprong noemen. Er ontstaan vier **kwadranten**.

Bij een **orthonormaal assenstelsel** tekenen we de assen altijd loodrecht op elkaar en wordt dezelfde eenheid (norm) gebruikt op beide assen. De horizontale as wordt de x-as genoemd. De verticale as is de y-as. Ze snijden elkaar in de **oorsprong** O (0, 0).



Elk roosterpunt kun je nu weergeven met twee getallen waarvan de volgorde belangrijk is. Die twee getallen vormen de **coördinaat** van het punt.
Voor punt A zijn die getallen 5 en 3.

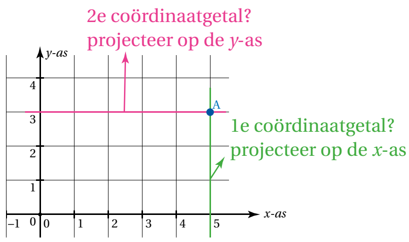
We noteren: co(A) = (5, 3)
tweede coördinaatgetal of **ordinaat**
eerste coördinaatgetal of **abscis**

Het eerste coördinaatgetal lees je altijd af op de x-as.
Het tweede coördinaatgetal lees je altijd af op de y-as.

Om de coördinaat van A af te lezen:
- Projecteer A op de x-as. Lees het getal af op de x-as. Je krijgt 5.
- Projecteer A op de y-as. Lees het getal af op de y-as. Je krijgt 3.
- Dus: A(5, 3) of co(A) = (5, 3).

Om de coördinaat van C af te lezen:
- Projecteer C op de x-as. Lees het getal af op de x-as. Je krijgt –4.
- Projecteer C op de y-as. Lees het getal af op de y-as. Je krijgt –3.
- Dus: C(–4, –3) of co(C) = (–4, –3).

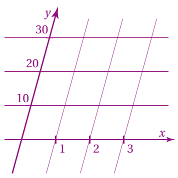
Om te projecteren, teken je een verticale of horizontale rechte door het punt.

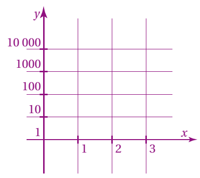


Lees nu zelf de coördinaat van B en D af.

Descartes en het assenstelsel

René Descartes (1596 – 1650) was een Franse wiskundige en filosoof die ook in Nederland studeerde. Van hem is de bekende filosofische uitspraak ‘je pense, donc je suis’.
Hij plaatste wiskundige objecten in het vlak, voorzien van een loodrecht assenstelsel waarbij de eenheden (zowel horizontaal als verticaal) steeds even groot zijn. Vandaar dat we ook spreken over een cartesisch of cartesiaans assenstelsel. Enkele voorbeelden van andere assenstelsels:





We duiden nu een punt M aan waarvan de coördinaat (4, 2) is.

- co(M) = (4, 2)

  Ga rechts van de oorsprong, 4 vakjes verder op de x-as.

  Ga nadien 2 vakjes naar omhoog en je vindt het roosterpunt M (oranje ingekleurd).

We duiden nu een punt N aan waarvan de coördinaat (–2, 3) is.

- co(N) = (–2, 3)

  Ga links van de oorsprong, 2 vakjes verder op de x-as.

  Ga nadien 3 vakjes naar omhoog en je vindt het roosterpunt N (groen ingekleurd).

We duiden nu een punt P aan waarvan de coördinaat (–3, 0) is.

- co(P) = (–3, 0)

  Ga links van de oorsprong, 3 vakjes verder op de x-as.

  Ga niet omlaag of omhoog en je vindt het roosterpunt P (paars ingekleurd).

7 Samenvatting

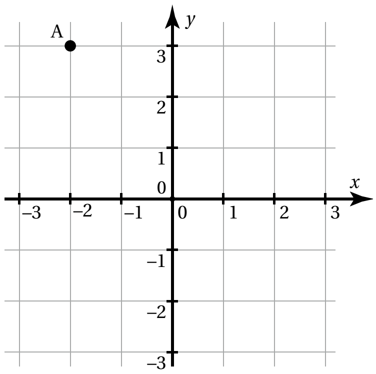
- Je kunt de gehele getallen op een getallenas voorstellen en ordenen en je kent de betekenis van de symbolen $<$, $>$, $\leqslant$ en $\geqslant$.

- Je weet wat de absolute waarde van een getal is en kunt dit bepalen.
  De absolute waarde van een getal is dat getal zonder toestandsteken.
  $|-3| = 3$

- Je weet wat het tegengestelde van een getal is en kunt dat bepalen.
  Het tegengestelde van een getal is dat getal voorzien van een ander toestandsteken.
  –12 en 12 zijn elkaars tegengestelde.

- Je weet dat bij een orthonormaal (of cartesiaans) assenstelsel de assen loodrecht op elkaar staan en dat dezelfde eenheid gebruikt wordt voor beide assen.

- Je kunt punten in het vlak bepalen door middel van coördinaten.
  de coördinaat van A is (–2, 3)
  A(–2, 3)
  co(A) = (–2, 3)
  –2: eerste coördinaatgetal (of abscis)
  3: tweede coördinaatgetal (of ordinaat)



2.2 Hoofdbewerkingen met gehele getallen

1 De optelling

De bewerking die als resultaat de som oplevert van twee gehele getallen, noemen we de **optelling**.
Die bewerking is steeds uitvoerbaar omdat je steeds een som kunt vinden.

We zeggen:	de som van 3 en 4 is 7
of:	3 plus 4 is 7
We noteren:	$3 + 4 = 7$

3	+	4	=	7
↓	↓	↓		↓
term	**plusteken**	**term**		**som**

We geven een betekenis aan oefeningen zoals $(-2) + 5$ en $(-40) + (-30)$.

– Stel je voor dat je in een lift zit. De lift staat in de parkeergarage op –2. Je stijgt vijf verdiepingen. Op welke verdieping stap je dan uit?
  $(-2) + 5 = 3$

– Tante Gusta verliest bij het kaartspel 40 cent. Haar totaal staat nu op –40 cent. Na enige tijd verliest ze nog eens 30 cent. Hoeveel is dan haar totaalstand?
  $(-40) + (-30) = -70$

Om de methode voor het optellen van gehele getallen te achterhalen los je volgende opdrachten op.

$5 + 2 = 7$	$2 + 5 = 7$	$(-3) + 3 = 0$	$3 + (-3) = 0$
$5 + 1 = 6$	$1 + 5 = 6$	$(-3) + 2 = -1$	$2 + (-3) = -1$
$5 + 0 = 5$	$0 + 5 = 5$	$(-3) + 1 = -2$	$1 + (-3) = -2$
$5 + (-1) = 4$	$(-1) + 5 = 4$	$(-3) + 0 = -3$	$0 + (-3) = -3$
$5 + (-2) = 3$	$(-2) + 5 = 3$	$(-3) + (-1) = -4$	$(-1) + (-3) = -4$
$5 + (-3) = 2$	$(-3) + 5 = 2$	$(-3) + (-2) = -5$	$(-2) + (-3) = -5$

In de reeksen hierboven zijn de opgaven bestaande uit twee getallen met eenzelfde teken (allebei positief of allebei negatief) in het blauw gekleurd. Bij de blauwe opgaven merk je:
– de absolute waarde van de som is de som van de absolute waarden;
– het teken van de som is het teken van de twee termen in de opgave.

Voorbeelden:
$5 + 4 = 9$
$(-3) + (-6) = -9$

Voor de andere opgaven hebben de twee termen telkens een ander toestandsteken. Hier merk je:
- de absolute waarde van de som is het verschil van de grootste absolute waarde met de kleinste absolute waarde van beide termen;
- het teken van de som is het teken van de term met de grootste absolute waarde.

Voorbeelden:

$5 + (-2) = 3$

↳ getal met de grootste absolute waarde. Dit getal is positief, dus de uitkomst is positief.

$(-3) + 2 = -1$

↳ getal met de grootste absolute waarde. Dit getal is negatief, dus de uitkomst is negatief.

We vatten de bevindingen samen in de volgende rekenregel.

Gehele getallen optellen

Om de som te bepalen van twee gehele getallen **met hetzelfde teken**:
1. Behoud het teken.
2. Tel de absolute waarden op.

Om de som te bepalen van twee gehele getallen **met verschillend teken**:
1. Neem het teken van het getal met de grootste absolute waarde.
2. Trek de absolute waarden van elkaar af (grootste min kleinste).

2 De aftrekking

In de lagere school heb je geleerd dat er een zeker verband is tussen de aftrekking en de optelling:

$13 - 5 = 8$ want $5 + 8 = 8 + 5 = 13$

De bewerking die resulteert in het verschil van twee gehele getallen, noemen we de **aftrekking**.
Die bewerking is steeds uitvoerbaar in $\mathbb{Z}$.

We zeggen: het verschil van 13 en 5 is 8
of: 13 min 5 is 8
We noteren: $13 - 5 = 8$

13	–	5	=	8
↓	↓	↓		↓
aftrektal (term)	**minteken**	**aftrekker** (term)		**verschil**

De bewerkingstekens + – · en :

De tekens + en – zijn van Europese oorsprong. Het was de Duitse wiskundeleerkracht Johann Widmann die zijn leerlingen in 1481 die tekens liet gebruiken. Voordien werden er helemaal geen bewerkingstekens gebruikt. Soms werd er wel al eens een p gebruikt voor plus en een m voor min. Het klassieke maalteken × wordt steeds meer vervangen door een stip. Het was de Engelsman Thomas Harriot die voor het eerst met dit symbool werkte. Zijn bedoeling was meer om letters en cijfers duidelijk te scheiden door dit punt (3.a) dan een nieuw vermenigvuldigingssymbool uit te vinden. Het symbool : werd voor het eerst door Gottfried Leibniz gebruikt in 1684.

We geven een betekenis aan oefeningen zoals $(-5) - 3$ en $(-1) - 2$.

– In het weerbericht lees je dat de temperatuur vandaag –5 °C wordt en dat het morgen nog 3 graden kouder wordt. Wat wordt de temperatuur morgen?
  $(-5) - 3 = -8$

– In de ondergrondse parking Ladeuze in Leuven stap je uit op verdieping –1. Maar neen! Papa had de auto twee verdiepingen lager geparkeerd.
  $(-1) - 2 = -3$

Om de methode voor het aftrekken van twee gehele getallen te achterhalen, los je volgende opdrachten op.

$4 - 2 = 2$	$3 - 4 = -1$
$4 - 1 = 3$	$2 - 4 = -2$
$4 - 0 = 4$	$1 - 4 = -3$
$4 - (-1) = 5$	$0 - 4 = -4$
$4 - (-2) = 6$	$(-1) - 4 = -5$
$4 - (-3) = 7$	$(-2) - 4 = -6$

Je vervangt de aftrekking door een gelijkwaardige optelling met het tegengestelde van de tweede term. Daarna volg je de rekenregel van de optelling.

tegengestelde getallen

$$13 - 5 = 8 \qquad\qquad 13 + (-5) = 8$$

een verschil wordt een som

Voorbeelden:

$5 - 7 = 5 + (-7) = -2$

$5 - (-7) = 5 + 7 = 12$

$-12 - 9 = -12 + (-9) = -21$

$-12 - (-9) = -12 + 9 = -3$

Gehele getallen aftrekken
Een geheel getal aftrekken van een ander geheel getal betekent hetzelfde als zijn tegengestelde erbij optellen.

Opmerkingen:

- Bij je eerste term mag je steeds de haakjes weglaten.
  $(-6) + 4 = -6 + 4$
- Het bewerkingsteken + staat voor de haakjes:
  $5 + (-9) = 5 - 9$ — **+ (– wordt –**
- Het bewerkingsteken – staat voor de haakjes:
  $-9 - (-4) = -9 + 4$ — **– (– wordt +**

3 De vermenigvuldiging

De bewerking met als resultaat het product van twee gehele getallen, noemen we de **vermenigvuldiging**.
Die bewerking is steeds uitvoerbaar. De vermenigvuldiging is een verkorte schrijfwijze van een optelling:

$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$

We zeggen: het product van 3 en 4 is 12
of: 3 maal 4 is 12
We noteren: $3 \cdot 4 = 12$

3	·	4	=	12
↓	↓	↓		↓
factor	**maalteken**	**factor**		**product**

We geven een betekenis aan oefeningen zoals $4 \cdot (-30)$ en $2 \cdot (-560)$.

– De gemiddelde temperatuur op de planeet Mars is –30 °C. Op de planeet Jupiter is het zelfs vier keer zo koud! Wat is de temperatuur op Jupiter?
  $4 \cdot (-30) = -120$

– In de mijn van Waterschei werd vroeger op verschillende 'verdiepingen' geboord. Een eerste laag lag op –560 m, voor de laatste laag ging de mijnschacht zelfs dubbel zo diep. Hoe diep?
  $2 \cdot (-560) = -1120$

Om de methode voor het vermenigvuldigen van twee gehele getallen te achterhalen, los je volgende reeksen op:

$3 \cdot 3 =$	9	$3 \cdot (-2) =$	–6
$3 \cdot 2 =$	6	$2 \cdot (-2) =$	–4
$3 \cdot 1 =$	3	$1 \cdot (-2) =$	–2
$3 \cdot 0 =$	0	$0 \cdot (-2) =$	0
$3 \cdot (-1) =$	–3	$(-1) \cdot (-2) =$	2
$3 \cdot (-2) =$	–6	$(-2) \cdot (-2) =$	4

Nadat we die reeksen hebben uitgewerkt, merken we:
– het resultaat is negatief als er in de opgave één minteken staat;
– de absolute waarde van het resultaat is het product van de absolute waarden van de factoren.

We vatten de bevindingen samen in de volgende rekenregel.

Gehele getallen vermenigvuldigen
Om het product te bepalen van twee gehele getallen:
1 Bepaal het toestandsteken: dat is – als er in de opgave één minteken staat.
2 Vermenigvuldig de absolute waarden.

Opmerking:
Noteer niet: $7 \cdot -3$ maar wel $7 \cdot (-3)$

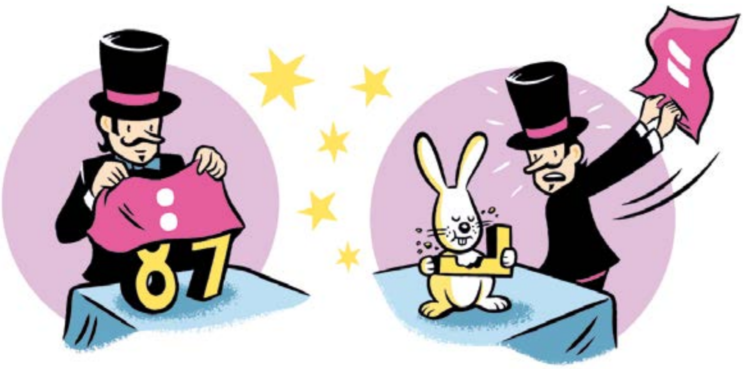
Voorbeelden:
$-6 \cdot 7 = -42$
$-7 \cdot (-8) = 56$

4 De deling

In de basisschool leerde je dat er een verband is tussen de deling en de vermenigvuldiging:

$78 : 13 = 6 \quad \text{want} \quad 13 \cdot 6 = 6 \cdot 13 = 78$

De bewerking die resulteert in het quotiënt van twee natuurlijke getallen, noemen we de **deling**.
Die bewerking is niet steeds uitvoerbaar als we alleen zouden werken met natuurlijke getallen.
Zo stelt 7 : 2 geen natuurlijk getal meer voor maar wel $\frac{7}{2}$ of 3,5.



We zeggen: het quotiënt van 78 en 13 is 6
of: 78 gedeeld door 13 is 6
We noteren: $78 : 13 = 6$

78	:	13	=	6
↓	↓	↓		↓
deeltal	**deelteken**	**deler**		**quotiënt**

Opmerking:

– Je kunt nooit delen door nul.

$10 : 5 = 2 \quad \text{omdat} \quad 2 \cdot 5 = 10$

$21 : 7 = 3 \quad \text{omdat} \quad 3 \cdot 7 = 21$

$5 : 0$ bestaat niet omdat $x \cdot 0 = 5$ geen oplossing heeft.
Er bestaat geen getal dat vermenigvuldigd met 0 als product 5 geeft.

We geven een betekenis aan oefeningen zoals $(-30) : 3$ en $(-18) : 2$.

– Een duiker ontdekt een nieuw wrak op een diepte van 30 meter. Enkele kilometers verder ligt een ander wrak waarvoor hij drie keer minder diep moet duiken.

$(-30) : 3 = -10$

– Om aan helder drinkwater te komen, moet je soms boren tot op –18 m. Dat is uiteraard afhankelijk van je woonplaats in België. Op sommige punten moet je maar half zo diep boren.

$(-18) : 2 = -9$

Ook voor de deling hebben we een rijtje oefeningen klaar. Los op en merk de regelmaat op.

$3 \cdot 2 = 6$	dan is	$6 : 2 =$	3
$2 \cdot 2 = 4$	dan is	$4 : 2 =$	2
$1 \cdot 2 = 2$	dan is	$2 : 2 =$	1
$0 \cdot 2 = 0$	dan is	$0 : 2 =$	0
$(-1) \cdot 2 = -2$	dan is	$(-2) : 2 =$	-1
$(-2) \cdot 2 = -4$	dan is	$(-4) : 2 =$	-2

$(-3) \cdot (-2) = 6$	dan is	$6 : (-2) =$	-3
$(-2) \cdot (-2) = 4$	dan is	$4 : (-2) =$	-2
$(-1) \cdot (-2) = 2$	dan is	$2 : (-2) =$	-1
$0 \cdot (-2) = 0$	dan is	$0 : (-2) =$	0
$1 \cdot (-2) = -2$	dan is	$(-2) : (-2) =$	1
$2 \cdot (-2) = -4$	dan is	$(-4) : (-2) =$	2

We merken op:

- Een positief getal delen door een positief getal geeft steeds een positief getal.
- Als een van de twee getallen negatief is, dan is ook het resultaat negatief.
- Een negatief getal delen door een negatief getal zal resulteren in een positief getal, omdat we dan in de opgave een even aantal mintekens hebben.

We vatten de bevindingen samen in de volgende rekenregel.

Gehele getallen delen

Om het quotiënt te bepalen van twee gehele getallen (waarvan het tweede niet nul is):

1. Bepaal het toestandsteken: dat is – als er in de opgave één minteken staat.
2. Deel de absolute waarden.

Voorbeelden:

$(-72) : 9 = -(72 : 9) = -8$

$-36 : (-4) = 36 : 4 = 9$

$1000 : (-10) = -(1000 : 10) = -100$

$0 : 8 = 0$

Opmerking:

Delen door nul is onmogelijk. Zo bestaat $8 : 0$ niet omdat er geen getal x te vinden is zodat $0 \cdot x = 8$

5 Samenvatting

- Je kunt de terminologie in verband met bewerkingen correct gebruiken

BEWERKING	NOTATIE	NAAMGEVING	RESULTAAT
optelling	$a + b$	a: (eerste) term b: (tweede) term	som
aftrekking	$a - b$	a: aftrektal (of term) b: aftrekker (of term)	verschil
vermenigvuldiging	$a \cdot b$	a: (eerste) factor b: (tweede) factor	product
deling	$a : b$	a: deeltal b: deler	quotiënt

- Je kunt het verband tussen aftrekken en optellen en tussen delen en vermenigvuldigen verwoorden.

Om de som te bepalen van twee gehele getallen met hetzelfde teken:
1. Behoud het teken.
2. Tel de absolute waarden op.

Om de som te bepalen van twee gehele getallen met verschillend teken:
1. Neem het teken van het getal met de grootste absolute waarde.
2. Trek de absolute waarden van elkaar af (grootste min kleinste).

Om het verschil te bepalen van twee gehele getallen:
Een geheel getal aftrekken van een ander geheel getal betekent hetzelfde als zijn tegengestelde erbij optellen.

Om het product te bepalen van twee gehele getallen:
1. Bepaal het teken: dat is – als er één minteken staat in de opgave.
2. Vermenigvuldig de absolute waarden.

Om het quotiënt te bepalen van twee gehele getallen:
1. Bepaal het teken.
2. Deel de absolute waarden.

2.3 Machten en vierkantswortels

1 De machtsverheffing

$3 + 3 + 3 + 3 + 3$ kun je schrijven als $5 \cdot 3$.

Zo kun je ook $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ korter schrijven als 3^5. Je leest dit als **3 tot de vijfde (macht)** of ook **de vijfde macht van 3**.

In 3^5 noemen we
- 3 het **grondtal**,
- 5 de **exponent**
- 3^5 de **macht**

In a^n noemen we
- a het **grondtal**,
- n de **exponent**,
- a^n de **macht**.

Voorbeelden:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

$1^7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$4^0 = 1$

$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

$(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = -216$

Algemeen:

$$\begin{array}{c} a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \\ \downarrow : a \\ a^3 = a \cdot a \cdot a \\ \downarrow : a \\ a^2 = a \cdot a \\ \downarrow : a \\ a^1 = a \\ \downarrow : a \\ \hline a^0 = 1 \end{array}$$

machten

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$	n factoren met $n > 1$
$a^1 = a$	
$a^0 = 1$	$a \neq 0$

Hoofdrekenen

Voor eenvoudige getallen kun je dadelijk je antwoord noteren.

$3^3 = 27$ $\qquad 2^4 = 16$ $\qquad 5^3 = 125$

De tweede macht van een getal noemen we ook het **kwadraat** van dat getal.

De tweede macht van de natuurlijke getallen tot 15 ken je het best uit het hoofd.
De natuurlijke getallen die een tweede macht zijn, noemt men ook **volkomen kwadraten**.
Het zal je later flink helpen als je de volkomen kwadraten herkent.

Je vindt hiernaast de eerste 16 kwadraten.
Leer ze van links naar rechts en van rechts naar links uit het hoofd.
Je kunt dit doen door de ene helft met een blaadje te bedekken om de andere te leren.

Voor minder eenvoudige getallen gebruik je ICT.

x	x^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225

Om een macht van een negatief getal te zoeken, gebruiken we de volgende rekenregel:

Machtsverheffing van negatieve getallen

Om de macht van een negatief getal te berekenen:

1. Is de exponent een even getal, dan is het resultaat positief;
   Is de exponent een oneven getal, dan is het resultaat negatief
   (dat is dus het teken van het grondtal).
2. Zoek de macht van de absolute waarde van dit getal.

Voorbeelden:

$(-8)^2 = 64$

$(-4)^3 = -64$

$(-2)^5 = -32$

$(-1)^4 = 1$

Opmerking:

Je moet heel goed opletten met de mintekens in de opgave. Onthoud dat de exponent steeds slaat op wat erbij staat. Als dit een haakje is, dan slaat de exponent op alles wat tussen de haakjes staat.

Voorbeelden:

$$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16 \quad \text{maar} \quad -2^4 = -2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = -16$$

$$-(-3)^3 = -(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -(-27) = 27$$

Het schaakbord

Als je met machten gaat rekenen, krijg je al snel heel grote getallen zoals je zult merken.
Toen de koning van Perzië zich verveelde, schreef hij een wedstrijd uit om het prettigste gezelschapsspel te ontwerpen. De geleerde Sessa creëerde een spel dat later heel beroemd zou worden: het schaakspel. De koning van Perzië was zo ingenomen met deze uitvinding dat hij Sessa wou belonen. Hij vroeg hem wat hij verlangde. Hij zou hem geven wat hij vroeg.

De sluwe geleerde vroeg met grote bescheidenheid het volgende:
1 graankorrel voor het eerste vakje van het schaakbord;
2 graankorrels voor het volgende vakje;
4 graankorrels voor het daaropvolgende vakje, enzovoort:
op het volgende vakje steeds het dubbel aantal graankorrels van het vorige.
De koning lachte even met wat hij zoveel domheid noemde en liet dan een bediende enkele zakken met graan brengen. Sessa zei echter even te wachten en de geleerden aan het hof exact te laten uitrekenen op hoeveel graankorrels hij recht had.
Toen Sessa de volgende dag terug in het paleis aankwam, waren de hofgeleerden nog niet klaar met hun berekeningen. Sessa gaf dan maar zelf het antwoord. Op het eerste vakje lag 1 korrel, of 2^0, op het tweede vakje 2^1 korrels, op het derde vakje 2^2 enz. Op het 64e of laatste vakje zouden dus 2^{63} of 9 223 372 036 854 775 808 korrels liggen, of alles samen 18 446 744 073 709 551 615 korrels.
Sessa berekende dat heel het land van de koning bedekt zou moeten worden met een laag graan van verschillende centimeters dik om aan deze gevraagde hoeveelheid te voldoen. Hoe het verder met Sessa uit deze legende is afgelopen, is onbekend. Maar dat machten 'machtig' grote getallen opleveren, is wel juist.

2 De vierkantsworteltrekking

We stellen de volgende vraag:
welk natuurlijk getal moet je tot de tweede macht verheffen om 25 te verkrijgen?

$\square^2 = \square \cdot \square = 25$

Dit getal is 5 want $5 \cdot 5 = 25$ of $5^2 = 25$. We noteren: $\sqrt{25} = 5$.

We lezen: de **vierkantswortel** (tweedemachtswortel) van 25 is 5.
We noemen 25 het **grondtal** en $\sqrt{\ }$ het **wortelteken**.

Maar –5 is ook een vierkantswortel van 25 omdat $(-5)^2 = 25$

25 heeft dus twee vierkantswortels: 5 en –5.
Het symbool $\sqrt{\ }$ gebruiken we, volgens afspraak, alleen om de positieve vierkantswortel weer te geven.

$\sqrt{25} = 5$ (De positieve vierkantswortel uit 25.)

$-\sqrt{25} = -5$ (De negatieve vierkantswortel uit 25.)

Opmerkingen:

- Als je met de rekenmachine $\sqrt{-25}$ berekent, dan krijg je een foutmelding.
- Kun je de vierkantswortel zoeken van een negatief getal?

  $\sqrt{-25} = ?$

  We zouden een rationaal getal moeten vinden dat vermenigvuldigd met zichzelf –25 geeft.
  Dit is onmogelijk, $5 \cdot 5 = 25$ en $(-5) \cdot (-5) = 25$.
  Een kwadraat is altijd een positief getal.

Voorbeelden

$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{9} = 3$	$-\sqrt{625} = -25$
$-\sqrt{121} = -11$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt{10\,000} = 100$
$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{1} = 1$

Kwadraat en vierkantswortel

Het woord 'kwadraat' komt van het Latijnse woord 'quattuor', dat 'vier' betekent. In het oude Griekenland stelden Pythagoras en zijn leerlingen getallen voor door een meetkundige tekening.
De getallen 4, 9, 16 en 25 enz. kregen de naam vierkantsgetallen omdat je er vierkanten mee kon maken.
Nu zijn 4, 9, 16 en 25 enz. de tweede macht van respectievelijk 2, 3, 4, 5 enz. Daarom noemen we nu nog de tweede macht van een getal het vierkant of het kwadraat van een getal.
De omgekeerde bewerking, namelijk het getal zoeken waarvan een getal de tweede macht is, noemen we daarom het berekenen van de vierkantswortel.
Het symbool $\sqrt{\ }$ bestaat al langer. De Duitser Christoph Rudolff gebruikt het symbool V in het begin van de 16e eeuw. De Franse wiskundige René Descartes voegde aan het symbool V een horizontaal streepje toe, zodat $\sqrt{\ }$ ontstond.

3 Samenvatting

- Je weet wat bedoeld wordt met macht, exponent en grondtal.

Bij $4^2 = 16$ noemen we	4	het grondtal
	2	de exponent
	16	de macht

- Je kent de betekenis van de 'n-de macht van een getal'.

  $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ $\quad$ n factoren met $n > 1$

  $a^1 = a$

  $a^0 = 1$ $\quad$ $a \neq 0$

- Je kent de kwadraten van natuurlijke getallen tot en met 15.

- Je kent de betekenis van 'vierkantswortel van een positief getal'.

  Voorbeelden:

  $\sqrt{16} = 4$

  $\sqrt{100} = 10$

  $-\sqrt{64} = -8$

  $\sqrt{0} = 0$

- Je kunt een macht van een negatief geheel getal berekenen.
  1 Zoek de macht van de absolute waarde van dit getal.
  2 Is de exponent een oneven getal, dan is het resultaat negatief;
  is de exponent een even getal, dan is het resultaat positief.

- Je kent de tekenregel bij machten.
  Een even macht is altijd positief.
  Een oneven macht heeft het teken van het grondtal.

- Je weet wat bedoeld wordt met grondtal en wortelteken.

Bij $\sqrt{25} = 5$ noemen we	25	het grondtal
	$\sqrt{}$	het wortelteken

- Je weet dat je geen vierkantswortel kunt berekenen van een negatief getal.

2.4 Eigenschappen van de hoofdbewerkingen in $\mathbb{Z}$

1 Commutatief

We onderzoeken of we hetzelfde resultaat krijgen als we de getallen bij een bewerking van plaats veranderen.

+

$$15 + 6 \stackrel{?}{=} 6 + 15$$
$$21 \stackrel{!}{=} 21$$

−

$$15 - 7 \stackrel{?}{=} 7 - 15$$
$$8 \stackrel{!}{\neq} -8$$

·

$$8 \cdot 21 \stackrel{?}{=} 21 \cdot 8$$
$$168 \stackrel{!}{=} 168$$

:

$$15 : 3 \stackrel{?}{=} 3 : 15$$
$$5 \stackrel{!}{\neq} \frac{1}{5}$$

Bij het optellen en vermenigvuldigen mag je de getallen van plaats verwisselen zonder dat het een invloed heeft op het resultaat.

Als je bij het aftrekken en het delen de getallen van plaats verandert, zul je meestal een ander resultaat krijgen.

Als bij een bewerking de getallen van plaats mogen verwisselen zonder dat het resultaat beïnvloed wordt, zeggen we dat die bewerking **commutatief** is.

commutatief

in woorden:	in symbolen:
Het optellen van gehele getallen is commutatief.	$a + b = b + a$
Het vermenigvuldigen van gehele getallen is commutatief.	$a \cdot b = b \cdot a$

2 Associatief

We onderzoeken of we hetzelfde resultaat krijgen als we de haakjes bij een bewerking van plaats veranderen.
Denk eraan: haakjes moet je eerst uitwerken.

+

$$(14 + 17) + 19 \stackrel{?}{=} 14 + (17 + 19)$$
$$31 + 19 \stackrel{?}{=} 14 + 36$$
$$50 \stackrel{!}{=} 50$$

−

$$(28 - 16) - 7 \stackrel{?}{=} 28 - (16 - 7)$$
$$12 - 7 \stackrel{?}{=} 28 - 9$$
$$5 \stackrel{!}{\neq} 19$$

·

$$(7 \cdot 12) \cdot 15 \stackrel{?}{=} 7 \cdot (12 \cdot 15)$$
$$84 \cdot 15 \stackrel{?}{=} 7 \cdot 180$$
$$1260 \stackrel{!}{=} 1260$$

:

$$(16 : 4) : 4 \stackrel{?}{=} 16 : (4 : 4)$$
$$4 : 4 \stackrel{?}{=} 16 : 1$$
$$1 \stackrel{!}{\neq} 16$$

Bij het optellen en vermenigvuldigen mag je de plaats van de haakjes veranderen zonder dat dat invloed heeft op het resultaat.

Als je bij het aftrekken en het delen de haakjes van plaats verandert, zul je meestal een ander resultaat verkrijgen.

Als bij een bewerking de plaats van de haakjes geen belang heeft, dan is die bewerking **associatief**.

associatief

in woorden:	in symbolen:
Het optellen van gehele getallen is associatief.	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
Het vermenigvuldigen van gehele getallen is associatief.	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

3 Distributief

De distributieve eigenschap is een geval apart. Het is een eigenschap waar twee (verschillende) bewerkingen voor nodig zijn. Volg even mee.

$$5 \cdot (17 + 7) \overset{?}{=} 5 \cdot 17 + 5 \cdot 7 \qquad 6 \cdot (4 - 10) \overset{?}{=} 6 \cdot 4 - 6 \cdot 10$$

$$5 \cdot 24 \overset{?}{=} 85 + 35 \qquad 6 \cdot (-6) \overset{?}{=} 24 - 60$$

$$120 \overset{!}{=} 120 \qquad -36 \overset{!}{=} -36$$

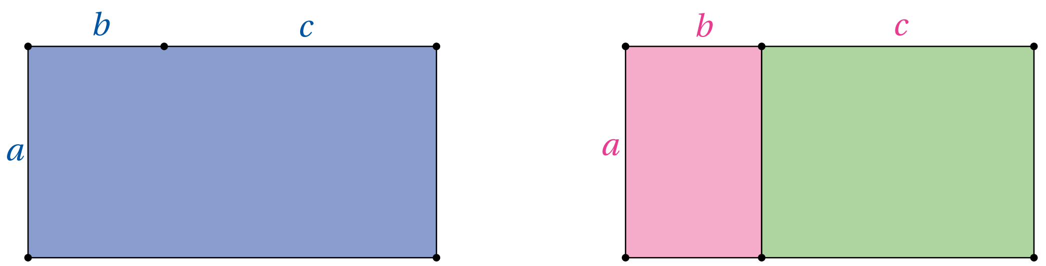
Als je in een uitdrukking met twee bewerkingen de ene bewerking mag verdelen over de andere bewerking, zonder dat het resultaat verandert, dan spreken we van distributiviteit.

Om een getal te vermenigvuldigen met een som, vermenigvuldig je dat getal met elke term van de som en tel je de verkregen producten op.
Om een getal te vermenigvuldigen met een verschil, vermenigvuldig je dat getal met elke term van het verschil en trek je de verkregen producten van elkaar af.

distributief

in woorden:	in symbolen:
Het vermenigvuldigen van gehele getallen is distributief ten opzichte van het optellen.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
Het vermenigvuldigen van gehele getallen is distributief ten opzichte van het aftrekken.	$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

Als a, b en c positieve getallen zijn, kun je ze ook voorstellen als maatgetallen van lengtes van lijnstukken.



$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (a + b) &= 2 \cdot a + 2 \cdot b \\ &= 2a + 2b \\ -(a + b) &= -a + (-b) \\ &= -a - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (x - 2) &= 4 \cdot x - 4 \cdot 2 \\ &= 4x - 8 \\ (y + 3) \cdot 5 &= y \cdot 5 + 3 \cdot 5 \\ &= 5y + 15 \end{aligned}$$

4 Handig rekenen

Eigenschappen van bewerkingen zullen je ook kunnen helpen om rekenopdrachten sneller op te lossen.

a Neutraal element

+ 0	
$0 + 17 = 17 = 17 + 0$	$(-3) + 0 = -3 = 0 + (-3)$

Als je nul bij een geheel getal optelt (of dit geheel getal optelt met nul), is de som steeds dit geheel getal. Nul heeft dus geen invloed bij het optellen en noemen we het **neutraal element** voor het optellen in $\mathbb{Z}$.

· 1	
$1 \cdot 17 = 17 = 17 \cdot 1$	$(-125) \cdot 1 = -125 = 1 \cdot (-125)$

Als je één met een geheel getal vermenigvuldigt (of dit geheel getal vermenigvuldigt met één), is het product steeds dit geheel getal. Eén heeft dus geen invloed bij het vermenigvuldigen en noemen we het **neutraal element** voor het vermenigvuldigen in $\mathbb{Z}$.

neutraal element

in woorden:	in symbolen:
Nul is het neutraal element voor het optellen van gehele getallen.	$a + 0 = a = 0 + a$
Eén is het neutraal element voor het vermenigvuldigen van gehele getallen.	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$

b Opslorpend element

· 0	
$0 \cdot 28 = 0 = 28 \cdot 0$	$(-48) \cdot 0 = 0 = 0 \cdot (-48)$

Als je nul met een geheel getal vermenigvuldigt (of dit geheel getal vermenigvuldigt met nul), dan is het product steeds nul. We noemen nul het **opslorpend element** voor het vermenigvuldigen in $\mathbb{Z}$.

opslorpend element

in woorden:	in symbolen:
Nul is het opslorpend element voor het vermenigvuldigen van gehele getallen.	$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

Distributiviteit

Het woord 'distributief' heeft zijn wortels in de Latijnse taal. Het komt van 'distribuere', dat uitdelen of ronddelen betekent. Denk ook maar aan elektriciteits-, water- of kabeldistributie. Die eigenschap is een buitenbeentje bij de eigenschappen, want je hebt er twee verschillende bewerkingen bij nodig. Laat het ons even van een andere kant bekijken. Alfons (a) is postbode en moet brieven brengen bij Bertha (b), Christa (c) en Dirk (d). $a \cdot (b + c + d)$. Dus moet Alfons zijn brieven bestellen bij Bertha, nadien gaat hij naar Christa en nadien bij Dirk. Je krijgt dan $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d$. Hij heeft zijn brieven netjes verdeeld of gedistribueerd.

c Symmetrisch element

Als een bewerking in een verzameling getallen een neutraal element heeft, dan kun je op zoek gaan naar het **symmetrisch element** voor een element.

Het optellen van gehele getallen heeft 0 als neutraal element. Bekijk nu deze voorbeelden.

+	
$5 + (-5) = 0$	$(-48) + 48 = 0$
$(-5) + 5 = 0$	$48 + (-48) = 0$

Er geldt dus: $5 + (-5) = 0 = (-5) + 5$ en $(-48) + 48 = 0 = 48 + (-48)$

We noemen –5 het **symmetrisch element** van 5 voor het optellen in $\mathbb{Z}$.
We noemen 48 het symmetrisch element van –48 voor het optellen in $\mathbb{Z}$.

Elk element van $\mathbb{Z}$ heeft dus zijn tegengestelde als symmetrisch element voor het optellen in $\mathbb{Z}$.

symmetrisch element van een element

in woorden	in symbolen
Elk geheel getal heeft een symmetrisch element voor het optellen in de verzameling van de gehele getallen, namelijk zijn tegengestelde.	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$

Taak:
Ook het vermenigvuldigen van gehele getallen heeft een neutraal element. Ga na waarom niet alle getallen in $\mathbb{Z}$ een symmetrisch element hebben voor de vermenigvuldiging.

Commutatief, associatief & symmetrisch
Het woord 'commutatief' komt van het Latijn. Het is afgeleid van 'commutare', wat 'veranderen', 'verwisselen', 'uitwisselen' betekent.
Ook het woord 'associatief' is men gaan lenen bij het Latijn. 'Ad' betekent 'bij' en 'sociare' betekent 'verbinden'. 'Associatief' betekent dus 'bij elkaar plaatsen', 'met elkaar verbinden', 'samenvoegen'.
De woorden neutraal en opslorpend spreken voor zich.
Voor 'symmetrisch' wordt soms ook het woord 'invers' gebruikt.

5 Een gedurige som en een gedurig product uitwerken

a Een gedurige som

Een **gedurige som** is een optelling (of aftrekking) van verschillende termen.

Hoe een gedurige som uitrekenen?

- Werk eerst de haakjes weg.
- Als er twee tegengestelde getallen voorkomen, schrap die dan.
- Maak de som van de positieve en van de negatieve termen.
- Tel beide sommen bij elkaar op.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}
-6-4+7+(-10)-5-(-11)+4 &= -6\underline{-4}+7-10-5+11\underline{+4} \\
&= -6+7-10-5+11 \\
&= 7+11-6-10-5 \\
&= 18+(-21) \\
&= -3
\end{aligned}$$

De som van een getal en zijn symmetrisch element is 0.

Het optellen van rationale getallen is commutatief en associatief in $\mathbb{Z}$.

b Een gedurig product

Een **gedurig product** is een product van verschillende factoren.

Hoe een gedurig product uitrekenen?

- Bepaal het toestandsteken:
  het resultaat is positief als er een even aantal negatieve factoren in de opgave staan;
  het resultaat is negatief als er een oneven aantal negatieve factoren in de opgave staan.
- Maak het product van de absolute waarden van alle factoren.
- Noteer het resultaat met het juiste toestandsteken.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}
(-125)\cdot 7\cdot(-2)\cdot 4\cdot(-1) &= -125\cdot 7\cdot 2\cdot 4\cdot 1 \\
&= -125\cdot 7\cdot 2\cdot 4 \\
&= -125\cdot 2\cdot 4\cdot 7 \\
&= -250\cdot 4\cdot 7 \\
&= -1000\cdot 7 \\
&= -7000
\end{aligned}$$

Toestandsteken bepalen.

1 is het neutraal element bij het vermenigvuldigen.

De vermenigvuldiging is associatief en commutatief in $\mathbb{Z}$.

6 Samenvatting

- Je kent de betekenis van de commutatieve eigenschap. Je kunt ze formuleren in woorden en in symbolen en je kunt ze illustreren met een voorbeeld.

EIGENSCHAP	IN SYMBOLEN
Het optellen van gehele getallen is **commutatief**.	$a + b = b + a$
Het vermenigvuldigen van gehele getallen is **commutatief**.	$a \cdot b = b \cdot a$

- Je kent de betekenis van de associatieve eigenschap. Je kunt ze formuleren in woorden en in symbolen en je kunt ze illustreren met een voorbeeld.

EIGENSCHAP	IN SYMBOLEN
Het optellen van gehele getallen is **associatief**.	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
Het vermenigvuldigen van gehele getallen is **associatief**.	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

- Je kent de betekenis van de distributieve eigenschap van het vermenigvuldigen t.o.v. het optellen en het aftrekken van gehele getallen. Je kunt ze formuleren in woorden en in symbolen en je kunt ze illustreren met een voorbeeld.

EIGENSCHAP	IN SYMBOLEN
Het vermenigvuldigen van gehele getallen is **distributief** ten opzichte van het optellen.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Het vermenigvuldigen van gehele getallen is **distributief** ten opzichte van het aftrekken.	$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

- Je kunt handig gebruikmaken van de eigenschappen bij rekenopdrachten.

EIGENSCHAP	IN SYMBOLEN
Nul is het **neutraal element** voor het optellen van gehele getallen.	$a + 0 = a = 0 + a$
Eén is het **neutraal element** voor het vermenigvuldigen van gehele getallen.	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
Nul is het **opslorpend element** voor het vermenigvuldigen van gehele getallen.	$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$
Elk geheel getal heeft een **symmetrisch element** voor het optellen in de verzameling van de gehele getallen, namelijk zijn tegengestelde.	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$

- Je kunt een gedurige som en een gedurig product uitwerken.

2.5
De volgorde van bewerkingen

1 Afspraken

Als er in een opgave verschillende bewerkingen voorkomen, is het noodzakelijk om een volgorde af te spreken.

Voorbeeld:
In een supermarkt koopt iemand een fles wijn van 9 euro en 4 bakjes champignons die 2 euro per bakje kosten. Hoeveel zal er betaald moeten worden?

Berekening:
$9 + 4 \cdot 2 = 9 + 8 = 17$

Als we altijd zouden rekenen van links naar rechts (zonder aan de vermenigvuldiging voorrang te geven), dan bekomen we $13 \cdot 2 = 26$. Dat is echter niet correct, want als we aan de kassa eerst de champignons zouden betalen, dan kost ons dat 8 euro. Nadien betalen we de fles wijn van 9 euro. In totaal hebben we dus 17 euro betaald.

Daarom maken we volgende afspraken:
1. Als er haakjes in de opgave staan, werk je die eerst uit.
2. Daarna bereken je alle machtsverheffingen en worteltrekkingen.
3. Dan bereken je de vermenigvuldigingen en delingen van links naar rechts.
4. Ten slotte reken je de optellingen en aftrekkingen uit, ook van links naar rechts.

De volgorde van de bewerkingen:
1. haakjes
2. machtsverheffingen en worteltrekkingen
3. vermenigvuldigingen en delingen van links naar rechts
4. optellingen en aftrekkingen van links naar rechts

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} & 2 + 3 \cdot 4 \\ = {} & 2 + 12 \\ = {} & 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{16} - 2 \cdot (-5)^2 \\ = {} & 4 - 2 \cdot 25 \\ = {} & 4 - 50 \\ = {} & -46 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 17 + 5 \cdot 4^3 - 8 \\ = {} & 17 + 5 \cdot 64 - 8 \\ = {} & 17 + 320 - 8 \\ = {} & 337 - 8 \\ = {} & 329 \end{aligned}$$

Als er binnen de haakjes verschillende bewerkingen voorkomen, dan pas je daar opnieuw de volgorde van bewerkingen toe.

$$\begin{aligned} & 6 \cdot (20 - 3 \cdot 4) \\ = {} & 6 \cdot (20 - 12) \\ = {} & 6 \cdot 8 \\ = {} & 48 \end{aligned}$$

2 Voorbeelden

Studietip: bedek met je blad de oefening, behalve de eerste lijn. Noteer dan wat jij denkt dat de volgende stap moet zijn. Zo kun je vlug zien of je de volgorde van de bewerkingen onder de knie hebt.

$$\begin{aligned} & 8:2+50:10 \\ = {} & 4+5 \\ = {} & 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 15+15:(3+2) \\ = {} & 15+15:5 \\ = {} & 15+3 \\ = {} & 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4\cdot 2+(18+6):4\cdot 2 \\ = {} & 4\cdot 2+24:4\cdot 2 \\ = {} & 8+12 \\ = {} & 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -5-2\cdot\left(4^2+4\right) \\ = {} & -5-2\cdot(16+4) \\ = {} & -5-2\cdot 20 \\ = {} & -5-40 \\ = {} & -45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3+(-5)\cdot 9+14 \\ = {} & 3+(-45)+14 \\ = {} & -42+14 \\ = {} & -28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\cdot(-24):4\cdot(-2) \\ = {} & -48:4\cdot(-2) \\ = {} & -12\cdot(-2) \\ = {} & 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3+5\cdot 6+8:2 \\ = {} & -3+30+4 \\ = {} & 27+4 \\ = {} & 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{16+9}-24\cdot 2 \\ = {} & \sqrt{25}-24\cdot 2 \\ = {} & 5-24\cdot 2 \\ = {} & 5-48 \\ = {} & -43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 235-[15\cdot 2-(20+70:2)] \\ = {} & 235-[15\cdot 2-(20+35)] \\ = {} & 235-[15\cdot 2-55] \\ = {} & 235-[30-55] \\ = {} & 235-(-25) \\ = {} & 260 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 20-\left[10-5\cdot\left(-1+\sqrt{16}\right)\right] \\ = {} & 20-[10-5\cdot(-1+4)] \\ = {} & 20-[10-5\cdot 3] \\ = {} & 20-[10-15] \\ = {} & 20-(-5) \\ = {} & 20+5 \\ = {} & 25 \end{aligned}$$

Opmerking:
Bij het wortelteken moet alles wat onder het wortelteken staat eerst uitgerekend worden, alsof het tussen haakjes staat.

Voorbeelden:

$$\begin{aligned} & \sqrt{16+9} \\ = & \sqrt{25} \\ = & \ 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{14\cdot 2+8} \\ = & \sqrt{28+8} \\ = & \sqrt{36} \\ = & \ 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{7\cdot 4+2^3} \\ = & \sqrt{7\cdot 4+8} \\ = & \sqrt{28+8} \\ = & \sqrt{36} \\ = & \ 6 \end{aligned}$$

Dankzij het zinnetje "**H**et **M**annetje **W**on **V**an **D**e **O**ude **A**ap", kun je gemakkelijk de volgorde onthouden.
Kun je achterhalen waarom?

Als de berekeningen complex zijn of als je jezelf wilt controleren, kun je gebruikmaken van ICT.

3 Samenvatting

- Je kunt rekenoefeningen waarin verschillende bewerkingen staan correct berekenen door onderstaande volgorde toe te passen:
  1. haakjes;
  2. machtsverheffingen en worteltrekkingen;
  3. vermenigvuldigingen en delingen van links naar rechts;
  4. optellingen en aftrekkingen van links naar rechts.