4.1 Welkom in $\mathbb{Q}$

1 Van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Q}$

- De vergelijking $2x = 3$ heeft geen oplossing in $\mathbb{Z}$.
  Er geldt nochtans dat $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.
- 2% van 34 bereken je als volgt: $\frac{2 \cdot 34}{100} = \frac{68}{100} = 0,68$.
- In een supermarkt is 1 kg pruimen te koop voor **3,42** euro.
- De kans om een zes te gooien met een eerlijke dobbelsteen is $\frac{1}{6}$.
- Het rekeningsaldo van Jens bedraagt **–64,50** euro.
- $\frac{3}{5}$ van de leerlingen komt met de fiets naar school.
- Op de bloemenveiling in Nederland worden rozen verkocht voor **0,24** euro per bloem.

Uit deze voorbeelden blijkt dat het nodig is om de verzameling $\mathbb{Z}$ uit te breiden. We worden immers vaak geconfronteerd met **rationale getallen**.

$$\frac{3}{2};\ 0,68;\ 3,42;\ \frac{1}{6};\ -64,5;\ \frac{3}{5};\ 10,50 \qquad \text{zijn rationale getallen.}$$

Ook 7 en –48 zijn rationale getallen want $7 = \frac{7}{1}$ en $-48 = \frac{-48}{1}$.

Rationale getallen zijn steeds in breukvorm te noteren. De decimale vorm is ofwel **begrensd** (zoals –2,5 en 4,25) ofwel **onbegrensd** met een periode (zoals 20,4545…). Kommagetallen die onbegrensd zijn en geen periode hebben (zoals 3,1415…) zijn niet te noteren als een breuk en zijn dus geen rationale getallen.

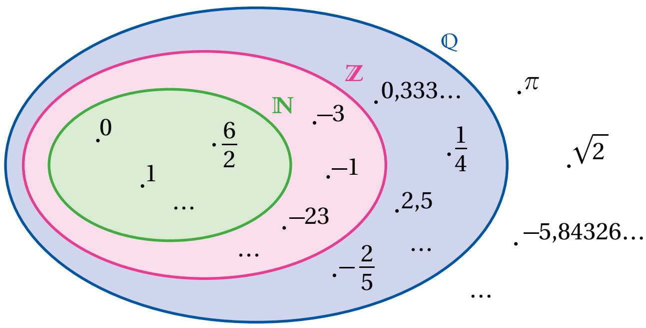
Er geldt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Alle natuurlijke getallen zijn gehele getallen.
$x \in \mathbb{N} \implies x \in \mathbb{Z}$

Alle natuurlijke getallen zijn rationale getallen.
$x \in \mathbb{N} \implies x \in \mathbb{Q}$

Alle gehele getallen zijn rationale getallen.
$x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Q}$

We kunnen dan volgend diagram maken:

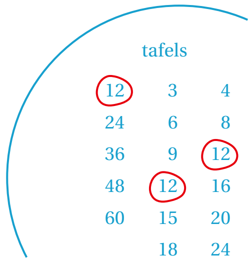


2 Orde in $\mathbb{Q}$

a Breuken ordenen

Als je breuken gelijknamig kunt maken, is het eenvoudig om een reeks breuken te **ordenen**, bijvoorbeeld van klein naar groot.

Voorbeeld: orden $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$ van klein naar groot.



$$\begin{matrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ \frac{5}{12} & \frac{4}{12} & \frac{3}{12} \end{matrix}$$

Maak eerst alle breuken gelijknamig.

$$\frac{3}{12} < \frac{4}{12} < \frac{5}{12}$$

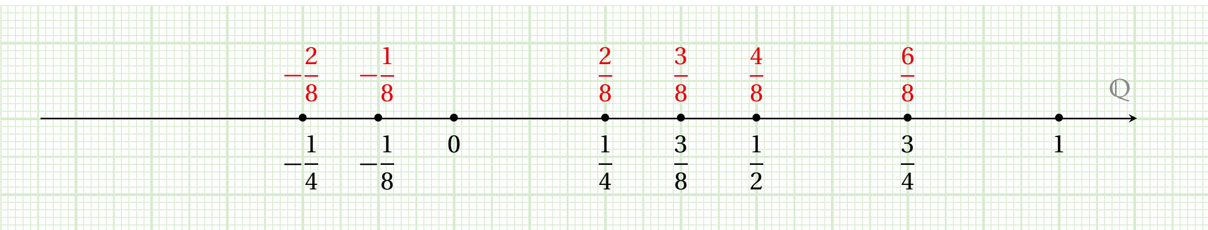
Orden dan volgens de tellers.

dus:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{5}{12}$$

Noteer de oorspronkelijke breuken in je antwoord.

Alle rationale getallen hebben een plaats op de getallenas.

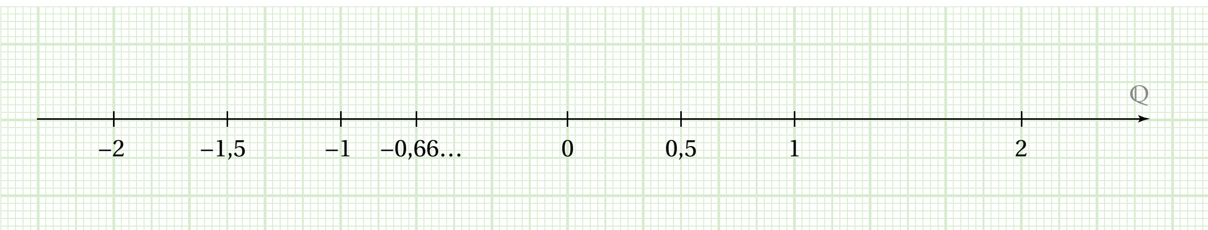


Er geldt dus: $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{8} < 0 < \frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$

b Decimale getallen ordenen

Remco en Jietske hebben deze maand heel veel geld uitgegeven en daardoor hebben ze allebei een negatief banksaldo. Op de zichtrekening van Remco staat er –297,87 euro. Op de zichtrekening van Jietske –425,26 euro. Wie staat er het meest in 'het rood'? Wie staat er het meest onder nul?

Ook decimale getallen kun je ordenen.



Voorbeelden:

$$-425{,}26 < -297{,}87$$
$$-1{,}5 < -0{,}66$$
$$-3{,}15 > -10{,}5$$

3 Absolute waarde en tegengestelde

absolute waarde

De **absolute waarde** van een getal is dat getal zonder toestandsteken.

Als symbool gebruiken we twee verticale streepjes, met daartussen het getal:

Voorbeelden:

$|-3| = 3$ lees: 'de absolute waarde van –3 is 3'

$|8| = 8$

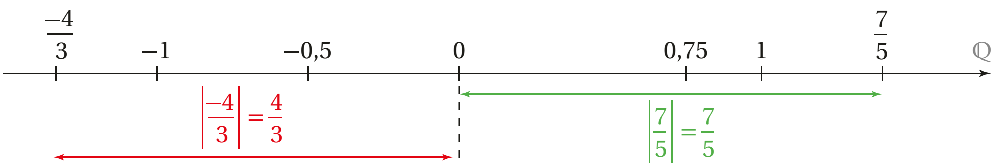
$|0| = 0$

$\left|\dfrac{-3}{8}\right| = \dfrac{3}{8}$

$|-12{,}7| = 12{,}7$

De absolute waarde van een getal is dus altijd positief.

Op de getallenas komt 'absolute waarde' overeen met de afstand van dat getal tot het nulpunt.



tegengestelde

Het **tegengestelde** van een getal is dat getal voorzien van een ander toestandsteken.

Voorbeelden: Het tegengestelde van 3 is –3. We zeggen ook dat 3 en –3 tegengestelde getallen zijn.

Het tegengestelde van –17,8 is 17,8. Notatie: $-(-17{,}8) = 17{,}8$

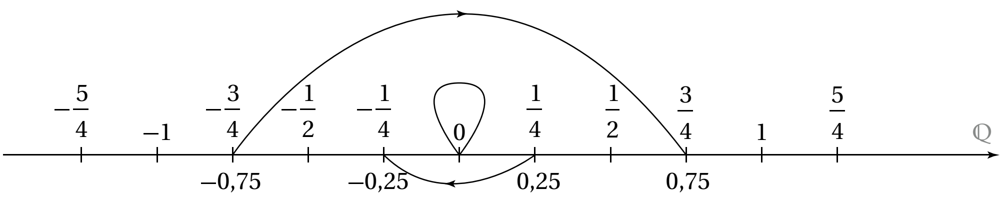
Het tegengestelde van $\dfrac{2}{3}$ is $-\dfrac{2}{3}$.

Door gebruik te maken van een letter als plaatsvervanger kun je het begrip tegengestelde als volgt noteren:

Het tegengestelde van x is $-x$.

Er is maar één getal dat zichzelf als tegengestelde heeft en dat is 0.

Ook op de getallenas kunnen we het 'tegengestelde' aflezen. Het ligt immers even ver van 0, maar langs de andere kant.



4 Omgekeerde

Als je bewerkingen uitvoert met rationale getallen, zul je ook gebruikmaken van het omgekeerde van een rationaal getal.

omgekeerde

Het **omgekeerde** van een rationaal getal verschillend van nul krijg je door in de breukvorm van het getal teller en noemer te verwisselen.

notatie:

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\qquad a \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ $\qquad a \neq 0$ en $b \neq 0$

Voorbeelden:

Het omgekeerde van $\frac{3}{8}$ is $\frac{8}{3}$ of: $\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{3}$.

Het omgekeerde van 4 is $\frac{1}{4}$ of: $4^{-1} = \frac{1}{4}$.

Het omgekeerde van $-\frac{4}{5}$ is $-\frac{5}{4}$ of: $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-1} = -\frac{5}{4}$.

Om het omgekeerde van een decimaal getal te bepalen, zet je dit getal het best eerst om in zijn breukvorm.
Zo is het omgekeerde van 0,8 ook het omgekeerde van $\frac{4}{5}$, dus $\frac{5}{4} = 1,25$

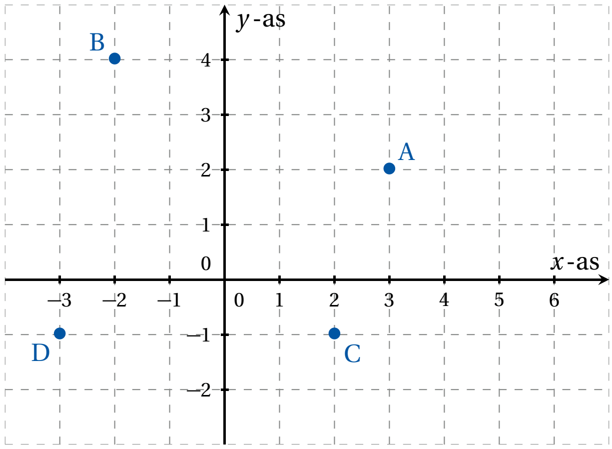
of: $0,8^{-1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{4} = 1,25$.

Voorbeelden:

RATIONAAL GETAL	ABSOLUTE WAARDE	TEGENGESTELDE	OMGEKEERDE
$0,5 = \frac{1}{2}$	0,5	–0,5	2
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
–1	1	1	–1
$0,2 = \frac{1}{5}$	0,2	–0,2	5
$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{5}{2}$
a	$\lvert a \rvert$	$-a$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$

5 Coördinaten

In de tekening zien we dat er twee getallenassen loodrecht op elkaar staan. We noemen dit een cartesiaans assenstelsel.
De horizontale as noemen we de x-as, de verticale as noemen we de y-as. Een punt in het assenstelsel heeft een **coördinaat**.



Zo heeft A als coördinaat (3, 2).

co(A) = (3, 2)

Het eerste coördinaatgetal lees je af op de x-as.
De x-coördinaat van A is 3.
Het tweede coördinaatgetal lees je af op de y-as.
De y-coördinaat van A is 2.

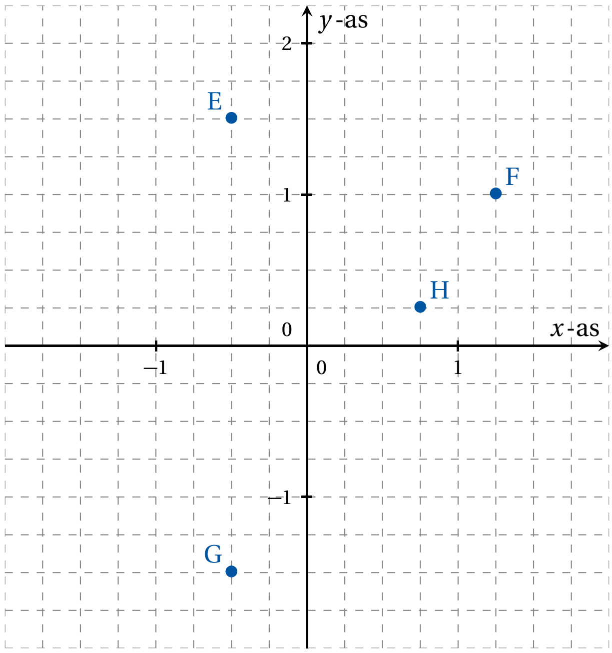
co(B) = (–2, 4)
co(C) = (2, –1)
co(D) = (–3, –1)

De coördinaatgetallen zijn niet altijd gehele getallen.

Voorbeelden:

$$\text{co}(E) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{co}(F) = \left(\frac{5}{4}, 1\right)$$



Als de coördinaatgetallen rationale getallen zijn, dan kun je ze ook noteren in hun begrensde decimale vormen.
Tussen de coördinaatgetallen noteren we dan een puntkomma.

co(G) = (–0,5; –1,5)
co(H) = (0,75; 0,25)

Coördinaat

'Coördinaat' komt van het zelfstandig naamwoord 'coördinatie' en van het werkwoord 'coördineren'. Beide vinden hun oorsprong in het Latijnse 'coordinare', dat letterlijk 'met gelijk gezag aanstellen' betekent. In het woordenboek vinden we als verklaring van coördineren: 'rangschikken in onderling verband, met elkaar in overeenstemming brengen, bij elkaar laten aansluiten'. Vind je zelf het verband met de wiskundige betekenis van 'coördinaat'?

6 Van breuk naar decimale vorm

BREUK	DECIMALE VORM	
$\frac{3}{10}$	0,3	
$\frac{123}{100}$	1,23	de noemer is een macht van 10
$-\frac{17}{100}$	–0,17	
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$	0,4	
$-\frac{6}{25} = -\frac{24}{100}$	–0,24	herleid de noemer tot 10, 100, 1000, …
$\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$	0,75	
$-\frac{2}{3}$	–0,66…	
$\frac{14}{11}$	1,2727…	maak een staartdeling, je verkrijgt een periode
$\frac{23}{11}$	2,0909…	

Je merkt dat soms, na de komma, eenzelfde cijfergroep (bestaande uit een of meerdere cijfers) zich blijft herhalen. Die cijfergroep noemen we de **periode**. De periode hoeft niet onmiddellijk na de komma te starten.

We spreken af dat we de periode twee keer noteren, gevolgd door drie puntjes.

Voorbeelden:

$\frac{48}{11} = 4{,}\underbrace{36}\underbrace{36}\ldots$

$-\frac{13}{22} = -0{,}5\underbrace{90}\underbrace{90}\ldots$

$\frac{25}{6} = 4{,}1\underbrace{6}\underbrace{6}\ldots$

$\frac{26}{111} = 0{,}\underbrace{234}\underbrace{234}\ldots$

$-\frac{1}{99} = -0{,}\underbrace{01}\underbrace{01}\ldots$

$\frac{1129}{370} = 3{,}0\underbrace{513}\underbrace{513}\ldots$

7 Van decimale vorm naar breuk

BEGRENSD DECIMALE VORM	BREUK
0,4	$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$
3,25	$\frac{325}{100}=\frac{13}{4}$
–12,5	$-\frac{125}{10}=-\frac{25}{2}$
3,125	$\frac{3125}{1000}=\frac{25}{8}$

Een begrensd decimale vorm omzetten naar een breuk
- Schrijf een breuk met als
  - teller de decimale vorm zonder komma
  - noemer een 1 gevolgd door zoveel keer het cijfer 0 als er cijfers na de komma staan in de opgave
- Vereenvoudig indien mogelijk die breuk.
- Controleer je antwoord met je rekenmachine.

Andere omzettingen doe je met behulp van ICT:

ONBEGRENSD DECIMALE VORM	BREUK
0,44…	$\frac{4}{9}$
0,2323…	$\frac{23}{99}$
–0,4545…	$-\frac{45}{99}=-\frac{5}{11}$
0,185185…	$\frac{5}{27}$
0,533…	$\frac{8}{15}$
–2,155…	$-\frac{97}{45}$
0,87272…	$\frac{48}{55}$

8 Samenvatting

- Je kunt breuken en decimale getallen ordenen.

- Je kunt de absolute waarde van een rationaal getal bepalen.
  De absolute waarde van een rationaal getal is dat getal zonder toestandsteken.

- Je kunt het tegengestelde van een rationaal getal bepalen.
  Het tegengestelde van een rationaal getal is dat getal voorzien van een ander toestandsteken.

- Je kunt het omgekeerde van een van nul verschillend rationaal getal bepalen.
  Het omgekeerde van een rationaal getal verschillend van nul krijg je door in de breukvorm van het getal teller en noemer te verwisselen.

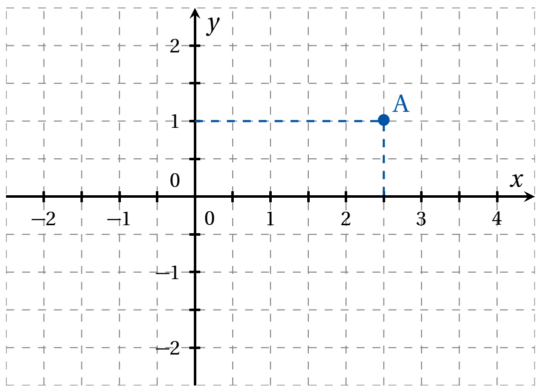
- Je kunt punten in het vlak bepalen door middel van coördinaten.

  de coördinaat van A is $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$

  $\text{co}(A) = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$

  $\frac{5}{2}$ is het eerste coördinaatgetal of de abscis

  1 is het tweede coördinaatgetal of de ordinaat



- Je kunt een breuk omzetten naar zijn decimale vorm.

- Je kunt een begrensd decimale vorm omzetten naar een breuk.
  - Schrijf een breuk met
    – als teller de decimale vorm zonder komma.
    – als noemer een 1 gevolgd door zoveel keer het cijfer 0 als er cijfers na de komma staan in de opgave.
  - Vereenvoudig indien mogelijk die breuk.

4.2 Hoofdbewerkingen met rationale getallen

1 De optelling

We geven een betekenis aan de som $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$.

In het pizzarestaurant eet Lore één derde van een pizza op. Lowie eet de helft van de pizza op. Welk deel van de pizza hebben ze samen opgegeten?

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$$

We vatten de bevindingen samen in deze rekenregel.

Breuken optellen

Om de som te bepalen van twee breuken:

1. Vereenvoudig – indien mogelijk – elke breuk.
2. Maak de breuken gelijknamig.
3. Tel de tellers op en behoud de noemer.
4. Vereenvoudig – indien mogelijk – het resultaat.

in symbolen:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \text{met } b \neq 0$$

Voorbeelden:

$$\frac{2}{11}+\frac{7}{11}=\frac{9}{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{-7}{5}+\frac{4}{3}&=\frac{-21}{15}+\frac{20}{15}\\&=\frac{-1}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-9}{27}+\left(\frac{-4}{16}\right)&=\frac{-1}{3}+\left(\frac{-1}{4}\right)\\&=\frac{-4}{12}+\left(\frac{-3}{12}\right)\\&=\frac{-7}{12}\end{aligned}$$

Om te cijferen met decimale getallen rangschik je de getallen zodat de eenheden (en dus ook de komma's) onder elkaar staan. Hou wel rekening met de tekens van de getallen! Bepaal vooraf het teken van het resultaat.

Voorbeelden:

$-19{,}51+26{,}4=$

$$\begin{array}{r} 26{,}40\\ -\ 19{,}51\\ \hline 6{,}89\end{array}$$

$-19{,}51+26{,}4=6{,}89$

$21{,}13+(-14{,}56)=$

$$\begin{array}{r} 21{,}13\\ -\ 14{,}56\\ \hline 6{,}57\end{array}$$

$21{,}13+(-14{,}56)=6{,}57$

$-18{,}7+(-14{,}6)=$

$$\begin{array}{r} 18{,}7\\ +\ 14{,}6\\ \hline 33{,}3\end{array}$$

$-18{,}7+(-14{,}6)=-33{,}3$

2 De aftrekking

In het tweede hoofdstuk leerde je dat een geheel getal aftrekken van een ander geheel getal, hetzelfde is als zijn tegengestelde erbij optellen. Ook bij het aftrekken van rationale getallen kun je zo redeneren: een rationaal getal aftrekken van een ander rationaal getal is hetzelfde als zijn tegengestelde erbij optellen.

We geven een betekenis aan het verschil $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$.

Op het einde van het pizzabuffet blijft nog een halve pizza over. De chef-kok eet nog een derde van de pizza op. Hoeveel blijft er nog over?

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

We vatten de bevindingen samen in deze rekenregel.

Breuken aftrekken

Om het verschil te bepalen van twee breuken:
1. Vereenvoudig – indien mogelijk – elke breuk.
2. Maak de breuken gelijknamig.
3. Trek de tellers af en behoud de noemer.
4. Vereenvoudig – indien mogelijk – het resultaat.

in symbolen:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b} \qquad \text{met } b \neq 0$$

Tekenregel:

De tekenregel die we eerder gebruikten, blijft gelden: $a+(-b) = a-b$

$a-(-b) = a+b$

Voorbeelden:

$$\frac{5}{7}-\frac{8}{7}=\frac{-3}{7}$$

$$\frac{3}{8}-\left(\frac{-7}{8}\right)=\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$$\frac{-7}{11}-\frac{4}{22}=\frac{-7}{11}-\frac{2}{11}=\frac{-9}{11}$$

Om decimale getallen af te trekken, pas je eerst de rekenregel toe en werk je daarna zoals bij het optellen.

Voorbeelden:

16,14 – 14,3

```
   16,14
 – 14,30
   1,84
```

16,14 – 14,3 = 1,84

–5,26 – (–18,2) =
–5,26 + 18,2 =

```
   18,20
 –  5,26
   12,94
```

–5,26 – (–18,2) = 12,94

–3,26 – 4,83 =
–3,26 + (–4,83) =

```
    3,26
 +  4,83
    8,09
```

–3,26 – 4,83 = –8,09

3 De vermenigvuldiging

We geven een betekenis aan het product $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

Nadat Lowie een derde van een chocoladereep had genomen,
zegt mama dat hij de helft ervan aan zijn zus moet geven.
Welk deel van de reep is voor zijn zus?

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

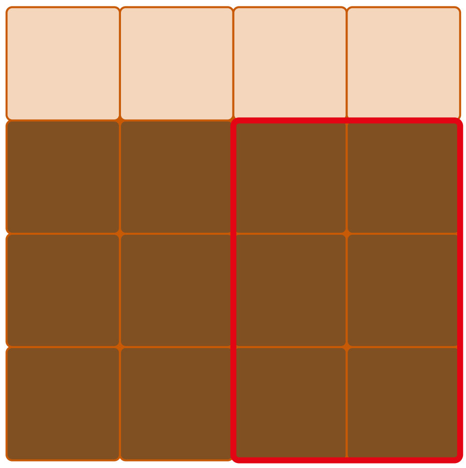
We geven een betekenis aan het product $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$.

De Ritter chocoladerepen zijn vierkant van vorm.
Nadat Lowie drie vierde van dit tablet afbrak,
zegt mama dat hij ook nu de helft ervan aan
zijn zus moet geven.
Welk deel van de reep is voor zijn zus?

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

Klopt dit met de tekening?
Inderdaad:

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$



Als in de opgave mintekens voorkomen, bepaal je eerst het toestandsteken van het product:
- tel je een even aantal mintekens, dan is het product positief.
- tel je een oneven aantal mintekens, dan is het product negatief.

We vatten de bevindingen samen in deze rekenregel.

Breuken vermenigvuldigen

Om het product te bepalen van breuken:
1. Bepaal vooraf het teken (min bij een oneven aantal mintekens).
2. Noteer een grote breukstreep.
3. Vermenigvuldig de tellers (zonder het product uit te werken).
4. Vermenigvuldig de noemers (zonder het product uit te werken).
5. Vereenvoudig.
6. Vermenigvuldig de resterende tellers met elkaar en de resterende noemers met elkaar.

in symbolen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad b \neq 0 \text{ en } d \neq 0$$

Voorbeelden:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 7} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{-5}{6}\cdot 5 = -\frac{5\cdot 5}{6} = -\frac{25}{6}$$

$$\frac{-3}{8}\cdot\left(\frac{-4}{15}\right) = \frac{3\cdot 4}{8\cdot 15} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{2}{\cancel{8}}\cdot\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{2}{18}\cdot\frac{12}{5} = \frac{2\cdot\overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{18}}\cdot 5} = \frac{2\cdot 2}{3\cdot 5} = \frac{4}{15}$$

Om decimale getallen te vermenigvuldigen, bepaal je eerst het teken van het product. Daarna voer je de vermenigvuldiging uit alsof er geen komma's staan. Nadien bepaal je de plaats van de komma met volgend regeltje: 'het aantal cijfers na de komma in het product is gelijk aan de som van het aantal cijfers na de komma in beide factoren'.

Voorbeelden:

–5,06 · 4,1 wordt

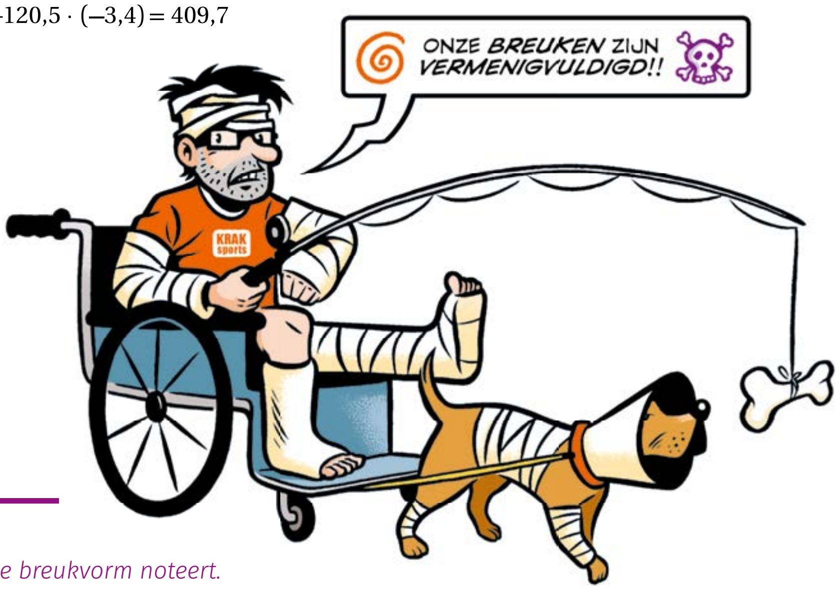
$$\begin{array}{rr} & 5{,}06 \\ \cdot & 4{,}1 \\ \hline & 506 \\ & 2024 \\ \hline & 20{,}746 \end{array}$$

–5,06 · 4,1 = –20,746

–120,5 · (–3,4) wordt

$$\begin{array}{rr} & 120{,}5 \\ \cdot & 3{,}4 \\ \hline & 4820 \\ & 3615 \\ \hline & 409{,}70 \end{array}$$

–120,5 · (–3,4) = 409,7



Breuken vereenvoudigen

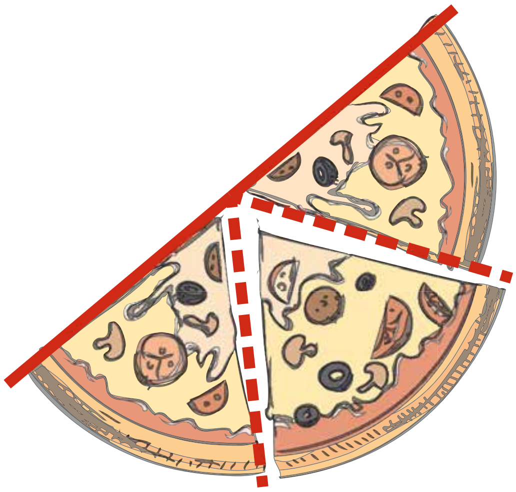
We spreken af dat je altijd de meest eenvoudige breukvorm noteert.

VERTICAAL VEREENVOUDIGEN mag je altijd: deel in teller en noemer door hetzelfde getal.

SCHUIN VEREENVOUDIGEN mag enkel als je een product hebt (zoals bij de voorbeelden hierboven).

HORIZONTAAL VEREENVOUDIGEN is uit den boze. Met andere woorden: het mag nooit.

4 De deling

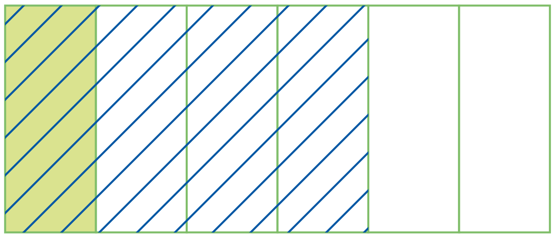


We geven een betekenis aan $\frac{1}{2}:3$.

Stel: de helft van een large pizza wordt in drie delen verdeeld en jij eet er één stuk van op.
Welk deel van de pizza heb je dan opgegeten?

$$\frac{1}{2}:3=\frac{1}{6}$$

We geven een betekenis aan $\frac{2}{3}:\frac{1}{6}$.



Hoeveel keer gaat $\frac{1}{6}$ in $\frac{2}{3}$?
Verdeel een rechthoek in zes gelijke delen.
Kleur één deel groen in.
Arceer twee derde van de rechthoek blauw.
Je merkt dat het groene vakje 4 keer past in het gearceerde deel.

Merk op: $\frac{2}{3}:\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{1}=\frac{2\cdot 6}{3\cdot 1}=4$

Breuken delen

Om het quotiënt te bepalen van twee breuken (waarvan de tweede niet nul is), vermenigvuldig je de eerste breuk met het omgekeerde van de tweede breuk. Volg dan de werkwijze van de vermenigvuldiging.

in symbolen:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \text{met } b\neq 0, c\neq 0 \text{ en } d\neq 0$$

Voorbeelden:

$$\frac{8}{5}:\frac{2}{3}=\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 3}{5\cdot\underset{1}{\cancel{2}}}=\frac{12}{5}$$

$$\frac{7}{8}:\frac{2}{3}=\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 2}=\frac{21}{16}$$

$$\begin{aligned}-\frac{9}{16}:\frac{3}{4} &= -\frac{9}{16}\cdot\frac{4}{3}\\ &= -\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{4}{\cancel{16}}\cdot\underset{1}{\cancel{3}}}\\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Decimale getallen delen doe je het best met ICT. Toch kun je eenvoudige oefeningen met de staartdeling uitrekenen. Om decimale getallen te delen, bepaal je eerst het teken van het quotiënt. Daarna bepaal je het quotiënt met de staartdeling.

Voorbeeld:

48,24 : (–1,2) wordt

$$
\begin{array}{r|l}
482{,}4 & 12 \\ \cline{2-2}
\underline{-48} & 40{,}2 \\
02 & \\
\underline{-\ 0} & \\
24 & \\
\underline{-24} & \\
0 &
\end{array}
$$

Doe in de deler de komma weg door deler en deeltal te vermenigvuldigen met 10.

Deel dan en als je bij het delen in het deeltal de komma tegenkomt, plaats je de komma in het quotiënt.

48,24 : (–1,2) = –40,2

5 Samenvatting

- Je kunt rekenen met rationale getallen in breukvorm met ICT.

- Je kunt de som en het verschil van twee breuken berekenen:

  Algemeen: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\qquad b \neq 0$

  Werkwijze:
  1 vereenvoudig – indien mogelijk – elke breuk;
  2 maak de breuken gelijknamig (zoek het kgv van de noemers);
  3 maak de som (of het verschil) van de tellers en behoud de noemer;
  4 vereenvoudig – indien mogelijk – het resultaat.

- Je kunt het product van twee breuken berekenen:

  Algemeen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\qquad b \neq 0$ en $d \neq 0$

  Werkwijze:
  1 noteer een grote breukstreep;
  2 vermenigvuldig de tellers met elkaar zonder het product uit te werken;
  3 vermenigvuldig de noemers met elkaar zonder het product uit te werken;
  4 vereenvoudig teller en noemer;
  5 vermenigvuldig de resterende tellers met elkaar en de resterende noemers met elkaar.

- Je kunt het quotiënt van twee breuken berekenen:

  Algemeen: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ $\qquad b \neq 0, c \neq 0$ en $d \neq 0$

  Werkwijze: vermenigvuldig de eerste breuk met het omgekeerde van de tweede breuk.

- Je kunt rekenen met rationale getallen in decimale vorm.

4.3 Machten en vierkantswortels

1 De machtsverheffing

machten

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$	n factoren met $n > 1$
$a^1 = a$	
$a^0 = 1$	$a \neq 0$

Breuken

Voorbeelden:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3\cdot3\cdot3}{5\cdot5\cdot5} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

Uit de voorbeelden met breuken kun je de volgende rekenregel afleiden:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ in woorden: Om een breuk tot een macht te verheffen, verhef je de teller en de noemer tot die macht.

Voorbeelden:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125} \qquad \left(\frac{-3}{5}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

Een macht met een even exponent is steeds positief.
Een macht met een oneven exponent heeft het teken van het grondtal.

Voorbeelden:

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \qquad \left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{-8}{27} \qquad \left(\frac{-2}{5}\right)^1 = \frac{-2}{5}$$

Let echter op!

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9} \qquad \frac{-2}{3^2} = \frac{-2}{9} \qquad \frac{(-2)^2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$-\left(\frac{-1}{6}\right)^3 = -\left(\frac{-1}{216}\right) = \frac{1}{216} \qquad -\left(\frac{-1}{8}\right)^2 = -\frac{1}{64} \qquad -\frac{(-2)^3}{(-3)^2} = -\frac{(-8)}{9} = \frac{8}{9}$$

Decimale getallen

Om de macht van een decimaal getal te berekenen, bereken je de macht alsof er in het grondtal geen komma staat. Nadien bepaal je de plaats van de komma met volgende regel: ‘Het aantal cijfers na de komma is gelijk aan het product van de exponent en het aantal cijfers na de komma in het grondtal’. Bepaal wel vooraf het teken van de macht.

Voorbeelden:

$(1{,}3)^2 = 1{,}69$ $\quad$ $(-0{,}01)^3 = -0{,}000001$ $\quad$ $(-0{,}5)^3 = -0{,}125$

2 De vierkantsworteltrekking

Voorbeelden:

$\sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7}$ omdat $\left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{81}{49}$ en omdat het resultaat positief moet zijn.

$\sqrt{\frac{1}{225}} = \frac{1}{15}$ omdat $\left(\frac{1}{15}\right)^2 = \frac{1}{225}$

$\sqrt{0,49} = 0,7$ omdat $(0,7)^2 = 0,49$

Let echter op!

$\sqrt{\frac{-1}{49}}$ heeft geen betekenis, want je kunt geen rationaal getal vinden dat vermenigvuldigd met zichzelf $\frac{-1}{49}$ geeft.

$-\sqrt{\frac{1}{121}} = -\frac{1}{11}$

$-\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$

Om de vierkantswortel van een decimaal getal te zoeken, gebruik je ICT.

3 Samenvatting

- Je kent de definitie van een macht van een getal.

  Voor elk getal a: $\quad a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ $\quad$ n is een natuurlijk getal en groter dan 1

  $a^1 = a$

  $a^0 = 1$ $\quad$ $a \neq 0$

- Je kunt de macht van een rationaal getal berekenen.
- Je kunt de macht en de vierkantswortel van een rationaal getal berekenen met ICT.

4.4 Eigenschappen van de hoofdbewerkingen

Je maakte al kennis met de eigenschappen van de hoofdbewerkingen bij gehele getallen. Ze gelden ook voor alle rationale getallen. We geven hier een synthese.

1 Kwantoren

In de wiskunde maken we vaak gebruik van symbolen om een uitdrukking te noteren. Vaak is dit korter en bovendien is het universeel.

$\forall$	betekent:	'voor alle'	we noemen $\forall$ de **universele kwantor** of **alkwantor**
$\exists$	betekent:	'er bestaat minstens één'	we noemen $\exists$ de **existentiële kwantor**
$\exists!$	betekent:	'er bestaat juist één'	we noemen $\exists!$ de **uniciteitskwantor**
:	lees je als:	'geldt' of 'waarvoor geldt'	
$n \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$	betekent:	'n is een natuurlijk getal, verschillend van 0 en van 1'	

Als we gebruikmaken van die symbolen kunnen we bijvoorbeeld eigenschappen verkorten en symbolisch noteren.

2 Commutatief

+

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{-1}{2}\right) \stackrel{?}{=} \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{3}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2}{6} + \left(\frac{-3}{6}\right) \stackrel{?}{=} \left(\frac{-3}{6}\right) + \frac{2}{6}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{-1}{6} \stackrel{!}{=} \frac{-1}{6}$$

·

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-6}{5}\right) \stackrel{?}{=} \left(\frac{-6}{5}\right) \cdot \frac{2}{3}$$
$$\Updownarrow$$
$$-\frac{2 \cdot \cancel{6}^{2}}{\cancel{3}_{1} \cdot 5} \stackrel{?}{=} -\frac{\cancel{6}^{2} \cdot 2}{5 \cdot \cancel{3}_{1}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{-4}{5} \stackrel{!}{=} \frac{-4}{5}$$

Betekenis:

Bij het optellen van rationale getallen mag je de termen van plaats veranderen, het resultaat blijft hetzelfde.

Bij het vermenigvuldigen van rationale getallen mag je de factoren van plaats veranderen, het resultaat blijft hetzelfde.

Besluit:

Het optellen van rationale getallen is commutatief.
$\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$: $\quad a + b = b + a$

Het vermenigvuldigen van rationale getallen is commutatief.
$\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$: $\quad a \cdot b = b \cdot a$

3 Associatief

+
$\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{-5}{4}\right)\right]+\frac{1}{3} \overset{?}{=} \frac{3}{4}+\left[\left(\frac{-5}{4}\right)+\frac{1}{3}\right]$
$\Updownarrow$
$\frac{-2}{4}+\frac{1}{3} \overset{?}{=} \frac{3}{4}+\left[\frac{-15}{12}+\frac{4}{12}\right]$
$\Updownarrow$
$\frac{-1}{2}+\frac{1}{3} \overset{?}{=} \frac{3}{4}+\left(\frac{-11}{12}\right)$
$\Updownarrow$
$\frac{-3}{6}+\frac{2}{6} \overset{?}{=} \frac{9}{12}-\frac{11}{12}$
$\Updownarrow$
$\frac{-1}{6} \overset{!}{=} \frac{-2}{12}$

Betekenis:
Bij het optellen van rationale getallen mag je de haakjes van plaats veranderen, de som blijft dezelfde.

Besluit:

Het optellen van rationale getallen is associatief in $\mathbb{Q}$.
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$

$\cdot$
$\left[\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)\right]\cdot\frac{1}{4} \overset{?}{=} \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left[\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}\right]$
$\Updownarrow$
$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} \overset{?}{=} \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{12}\right)$
$\Updownarrow$
$\frac{1}{24} \overset{!}{=} \frac{1}{24}$

Bij het vermenigvuldigen van rationale getallen mag je de haakjes van plaats veranderen, het product blijft hetzelfde.

Het vermenigvuldigen van rationale getallen is associatief in $\mathbb{Q}$.
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) = a\cdot b\cdot c$

4 Distributief

$\cdot$ t.o.v. +
$\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \overset{?}{=} \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}$
$\Updownarrow$
$\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\right) \overset{?}{=} \frac{-1}{6}+\left(\frac{-1}{8}\right)$
$\Updownarrow$
$\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{7}{12} \overset{?}{=} \frac{-1}{6}-\frac{1}{8}$
$\Updownarrow$
$\frac{-7}{24} \overset{?}{=} \frac{-4}{24}-\frac{3}{24}$
$\Updownarrow$
$\frac{-7}{24} \overset{!}{=} \frac{-7}{24}$

Betekenis:
Om een getal te vermenigvuldigen met een som, vermenigvuldig je dat getal met elke term van die som en tel je de producten op.

Besluit:

Het vermenigvuldigen van rationale getallen is distributief ten opzichte van het optellen.
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

$\cdot$ t.o.v. –
$\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) \overset{?}{=} \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}$
$\Updownarrow$
$\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{4}{12}-\frac{3}{12}\right) \overset{?}{=} \frac{-1}{6}-\left(\frac{-1}{8}\right)$
$\Updownarrow$
$\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{12} \overset{?}{=} -\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$
$\Updownarrow$
$-\frac{1}{24} \overset{?}{=} -\frac{4}{24}+\frac{3}{24}$
$\Updownarrow$
$-\frac{1}{24} \overset{!}{=} -\frac{1}{24}$

Om een getal te vermenigvuldigen met een verschil, vermenigvuldig je dat getal met elke term van dat verschil en trek je de producten van elkaar af.

Het vermenigvuldigen van rationale getallen is distributief ten opzichte van het aftrekken.
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a\cdot(b-c) = a\cdot b - a\cdot c$
$(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$

5 Handig rekenen

a Neutraal element

$+$
$(-5) + 0 = -5 = 0 + (-5)$
$\frac{8}{5} + 0 = \frac{8}{5} = 0 + \frac{8}{5}$

$\cdot$
$(-36) \cdot 1 = -36 = 1 \cdot (-36)$
$\left(\frac{-4}{3}\right) \cdot 1 = \frac{-4}{3} = 1 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right)$

Betekenis:

Als je een rationaal getal optelt met nul, of als je nul optelt met een rationaal getal, dan behoud je dat getal.

Als je een rationaal getal met 1 vermenigvuldigt, of als je 1 met een rationaal getal vermenigvuldigt, dan behoud je dat getal.

Besluit:

Nul is het neutraal element voor het optellen van rationale getallen.
$\forall a \in \mathbb{Q}: \quad a + 0 = a = 0 + a$

Eén is het neutraal element voor het vermenigvuldigen van rationale getallen.
$\forall a \in \mathbb{Q}: \quad a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$

b Opslorpend element

$\cdot$
$(-4) \cdot 0 = 0 = 0 \cdot (-4)$
$(-2,25) \cdot 0 = 0 = 0 \cdot (-2,25)$
$\frac{-2}{7} \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \left(\frac{-2}{7}\right)$

Betekenis:

Als je een rationaal getal met nul vermenigvuldigt, of als je nul met een rationaal getal vermenigvuldigt, dan bekom je steeds nul.

Besluit:

Nul is het opslorpend element voor het vermenigvuldigen van rationale getallen.
$\forall a \in \mathbb{Q}: \quad a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

c Symmetrisch element van een element

Als een bewerking in een verzameling getallen een neutraal element heeft, dan kun je op zoek gaan naar het **symmetrisch element** van een bepaald element.

+
$\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)=0=\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{2}{3}$

We noemen $\frac{-2}{3}$ het symmetrisch element van $\frac{2}{3}$ voor het optellen in $\mathbb{Q}$.

Zo is $\frac{-4}{7}$ het symmetrisch element van $\frac{4}{7}$ voor het optellen in $\mathbb{Q}$.

·
$\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}=1=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}$

We noemen $\frac{5}{4}$ het symmetrisch element van $\frac{4}{5}$ voor het vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}_0$.

Zo is $\frac{-3}{8}$ het symmetrisch element van $\frac{-8}{3}$ voor het vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}_0$.

Het getal 0 heeft geen symmetrisch element voor het vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}$ want $\frac{1}{0}$ heeft geen betekenis. Daarom sluiten we het getal nul uit.

Besluit:

Elk rationaal getal heeft een symmetrisch element voor het optellen in $\mathbb{Q}$, namelijk zijn tegengestelde.

$\forall a \in \mathbb{Q}, \exists!\, -a \in \mathbb{Q}: a+(-a)=0=(-a)+a$

Elk rationaal getal verschillend van 0 heeft een symmetrisch element voor het vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}$, namelijk zijn omgekeerde.

$\forall a \in \mathbb{Q}_0, \exists!\, a^{-1} \in \mathbb{Q}: a\cdot a^{-1}=1=a^{-1}\cdot a$

Knip deze kaartjes uit om te oefenen op de eigenschappen van hoofdbewerkingen.

1

*Het **optellen** van rationale getallen is* **commutatief**.

2

*Het **optellen** van rationale getallen is* **associatief**.

3

Nul is het **neutraal element** *voor het **optellen** van rationale getallen.*

4

Elk rationaal getal heeft een **symmetrische element** *voor het **optellen**, nl. zijn tegengestelde.*

5

*Het **vermenigvuldigen** van rationale getallen is* **commutatief**.

6

*Het **vermenigvuldigen** van rationale getallen is* **associatief**.

7

Eén is het **neutraal element** *voor het **vermenigvuldigen** van rationale getallen.*

8

Nul is het **opslorpend element** *voor het **vermenigvuldigen** van rationale getallen.*

9

Elk rationaal getal verschillend van nul heeft een **symmetrisch element** *voor het **vermenigvuldigen**, nl. zijn omgekeerde.*

10

Het vermenigvuldigen is **distributief** *ten opzichte van het **optellen** van rationale getallen.*

11

Het vermenigvuldigen is **distributief** *ten opzichte van het **aftrekken** van rationale getallen.*

Eigenschappen van de hoofdbewerkingen in $\mathbb{Q}$.

Symbolen:

$\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$:

$$\boldsymbol{a + b = b + a}$$

Betekenis:

Je mag bij het optellen in $\mathbb{Q}$
de termen van plaats veranderen,
het resultaat blijft hetzelfde.

Symbolen:

$\forall\, a \in \mathbb{Q}, \exists! -a \in \mathbb{Q}$:

$$\boldsymbol{a + (-a) = 0 = (-a) + a}$$

Betekenis:

Als je een rationaal getal
optelt met zijn tegengestelde,
dan bekom je steeds nul
(het neutraal element voor
de optelling in $\mathbb{Q}$).

Symbolen:

$\forall\, a \in \mathbb{Q}$:

$$\boldsymbol{a \cdot 1 = a = 1 \cdot a}$$

Betekenis:

Als je een rationaal getal
vermenigvuldigt met één,
of als je één vermenigvuldigt
met een rationaal getal,
bekom je steeds datzelfde rationaal getal.

Symbolen:

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$:

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Betekenis:

Als je een getal
vermenigvuldigt met een som,
dan zal je dit getal vermenigvuldigen
met elke term van die som
en tel je deze producten op.

Symbolen:

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$:

$$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c}$$

Betekenis:

Je mag bij het optellen in $\mathbb{Q}$
de haakjes van plaats veranderen,
het resultaat blijft hetzelfde.

Symbolen:

$\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$:

$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$$

Betekenis:

Je mag bij het vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}$
de factoren van plaats veranderen,
het resultaat blijft hetzelfde.

Symbolen:

$\forall\, a \in \mathbb{Q}$:

$$\boldsymbol{a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a}$$

Betekenis:

Als je een rationaal getal
vermenigvuldigt met nul, of als je nul
vermenigvuldigt met een rationaal
getal, bekom je steeds nul.

Symbolen:

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$:

$$\boldsymbol{a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c}$$

Betekenis:

Als je een getal
vermenigvuldigt met een verschil,
dan zal je dit getal vermenigvuldigen
met elke term van dat verschil en trek je
deze producten van elkaar af.

Symbolen:

$\forall\, a \in \mathbb{Q}$:

$$\boldsymbol{a + 0 = a = 0 + a}$$

Betekenis:

Als je rationaal getal optelt met nul,
of als je nul met een rationaal getal
optelt, behoud je steeds dat getal.

Symbolen:

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$:

$$\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c}$$

Betekenis:

Je mag bij het vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}$
de haakjes van plaats veranderen,
het resultaat blijft hetzelfde.

Symbolen:

$\forall\, a \in \mathbb{Q}_0, \exists!\, a^{-1} \in \mathbb{Q}_0$:

$$\boldsymbol{a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a}$$

Betekenis:

Als je een rationaal getal
verschillend van nul vermenigvuldigt
met zijn omgekeerde, dan bekom je
steeds één (het neutraal element voor
de vermenigvuldiging in $\mathbb{Q}$).

6 Samenvatting

- Je kunt eigenschappen weergeven in symbolen, met gebruik van kwantoren.

EIGENSCHAPPEN VAN HET OPTELLEN VAN RATIONALE GETALLEN	IN SYMBOLEN	
Het optellen van rationale getallen is **commutatief**.	$\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$:	$a + b = b + a$
Het optellen van rationale getallen is **associatief**.	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$:	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $= a + b + c$
Nul is het **neutraal element** voor het optellen van rationale getallen.	$\forall\, a \in \mathbb{Q}$:	$a + 0 = a = 0 + a$
Elk rationaal getal heeft een **symmetrisch element** voor het optellen in $\mathbb{Q}$, namelijk zijn tegengestelde.	$\forall a \in \mathbb{Q}, \exists! -a \in \mathbb{Q}$:	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$

EIGENSCHAPPEN VAN HET VERMENIGVULDIGEN VAN RATIONALE GETALLEN	IN SYMBOLEN	
Het vermenigvuldigen van rationale getallen is **commutatief**	$\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$:	$a \cdot b = b \cdot a$
Het vermenigvuldigen van rationale getallen is **associatief**.	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$:	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $= a \cdot b \cdot c$
Eén is het **neutraal element** voor het vermenigvuldigen van rationale getallen.	$\forall\, a \in \mathbb{Q}$:	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
Nul is het **opslorpend element** voor het vermenigvuldigen van rationale getallen.	$\forall\, a \in \mathbb{Q}$:	$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$
Elk rationaal getal verschillend van nul heeft een **symmetrisch element** voor het vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}$, namelijk zijn omgekeerde.	$\forall a \in \mathbb{Q}_0, \exists!\, a^{-1} \in \mathbb{Q}$:	$a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$

DISTRIBUTIVITEIT	IN SYMBOLEN	
Het vermenigvuldigen is **distributief** ten opzichte van het optellen van rationale getallen.	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$:	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Het vermenigvuldigen is **distributief** ten opzichte van het aftrekken van rationale getallen.	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$:	$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

4.5 De volgorde van bewerkingen

1 Afspraken

De vroeger gemaakte afspraken blijven geldig.

1 Als er haakjes in de opgave staan, werk je die eerst uit.
2 Daarna bereken je alle machtsverheffingen en worteltrekkingen.
3 Dan bereken je de vermenigvuldigingen en delingen van links naar rechts.
4 Ten slotte reken je de optellingen en aftrekkingen uit, ook van links naar rechts.

1 haakjes
2 machtsverheffingen en worteltrekkingen
3 vermenigvuldigingen en delingen van links naar rechts
4 optellingen en aftrekkingen van links naar rechts

Als er binnen de haakjes meerdere bewerkingen voorkomen, dan pas je daar opnieuw de volgorde van de bewerkingen toe.

2 Voorbeelden

Bij deze voorbeelden wordt stap voor stap gewerkt volgens de volgorde van de bewerkingen.
Je kunt met een blad alles onder de eerste lijn bedekken om dan zelf de volgende stap te bedenken.
Als controle kun je ook altijd de opgave intikken op je rekenmachine.

$$\begin{aligned} & 3 + (-5) \cdot 9 + 14 \\ = \; & 3 + (-45) + 14 \\ = \; & -42 + 14 \\ = \; & -28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (-24) : 4 \cdot (-2) \\ = \; & -48 : 4 \cdot (-2) \\ = \; & -12 \cdot (-2) \\ = \; & 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3+5\cdot 6+8:2 \\ = \; & -3+30+4 \\ = \; & 27+4 \\ = \; & 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{16+9}-24\cdot 2 \\ = \; & \sqrt{25}-24\cdot 2 \\ = \; & 5-24\cdot 2 \\ = \; & 5-48 \\ = \; & -43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{6}:\frac{2}{3} \\ = \; & -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{5}{6}:\frac{2}{3} \\ = \; & -\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2} \\ = \; & -\frac{3}{4}-\frac{5}{4} \\ = \; & -\frac{8}{4} \\ = \; & -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8} \\ = \; & \frac{4}{9}+\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8} \\ = \; & \frac{4}{9}+\frac{4\cdot 5}{3\cdot 8} \\ = \; & \frac{4}{9}+\frac{5}{6} \\ = \; & \frac{8}{18}+\frac{15}{18} \\ = \; & \frac{23}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 0{,}35+0{,}25\cdot(17{,}13-7{,}03)-2{,}3:0{,}8 \\ = \; & 0{,}35+0{,}25\cdot 10{,}1-2{,}3:0{,}8 \\ = \; & 0{,}35+2{,}525-2{,}3:0{,}8 \\ = \; & 0{,}35+2{,}525-2{,}875 \\ = \; & 2{,}875-2{,}875 \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}-\left(4-3\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)\right) \\ = \; & \frac{3}{2}-\left(4-3\cdot\left(\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) \\ = \; & \frac{3}{2}-\left(4-3\cdot\frac{5}{2}\right) \\ = \; & \frac{3}{2}-\left(4-\frac{15}{2}\right) \\ = \; & \frac{3}{2}-\left(\frac{8}{2}-\frac{15}{2}\right) \\ = \; & \frac{3}{2}-\left(\frac{-7}{2}\right) \\ = \; & \frac{3}{2}+\frac{7}{2} \\ = \; & \frac{10}{2} \\ = \; & 5 \end{aligned}$$

3 Samenvatting

- Je kunt rekenoefeningen waarin verschillende bewerkingen staan correct berekenen door onderstaande volgorde toe te passen:
  1. haakjes;
  2. machtsverheffingen en worteltrekkingen;
  3. vermenigvuldigingen en delingen van links naar rechts;
  4. optellingen en aftrekkingen van links naar rechts.