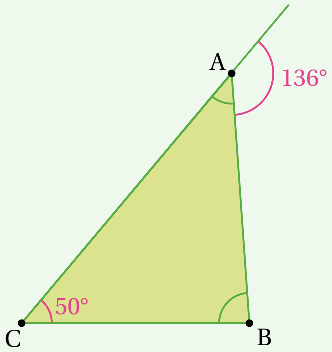
5 Oefeningen

1 Bepaal telkens de grootte van de hoeken $\widehat{A}$ en $\widehat{B}$.

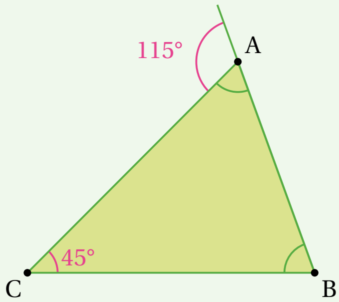
a



$\widehat{A} = 44°$

$\widehat{B} = 86°$

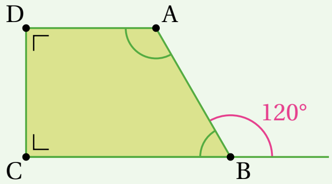
c



$\widehat{A} = 65°$

$\widehat{B} = 70°$

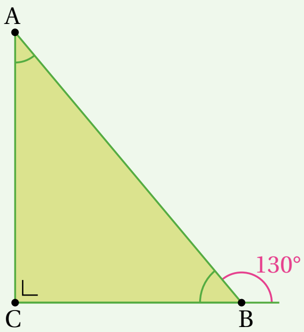
e



$\widehat{A} = 120°$

$\widehat{B} = 60°$

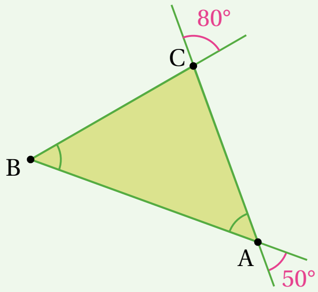
b



$\widehat{A} = 40°$

$\widehat{B} = 50°$

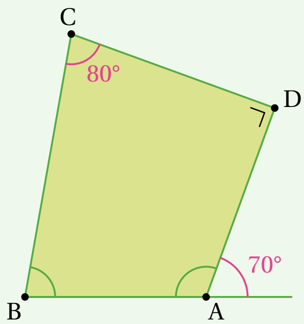
d



$\widehat{A} = 50°$

$\widehat{B} = 50°$

f



$\widehat{A} = 110°$

$\widehat{B} = 80°$

2 In ΔABC is $\widehat{A} = 49°$. Bereken $\widehat{B}$ en $\widehat{C}$ als je weet dat $\widehat{B} = 2 \cdot \widehat{A}$.

- $\widehat{B} = 2 \cdot \widehat{A}$, dus $\widehat{B} = 2 \cdot 49°$
  $= 98°$

- hoekensom in ΔABC: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

$$\Updownarrow$$

$$49° + 98° + \widehat{C} = 180°$$

$$\Updownarrow$$

$$\widehat{C} = 180° - 49° - 98°$$

$$\Updownarrow$$

$$\widehat{C} = 33°$$

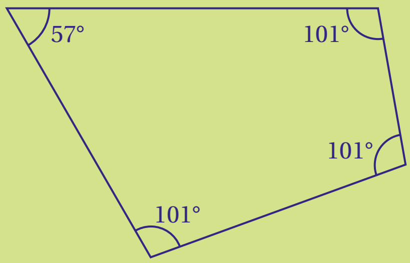
3 Bereken in de vierhoek ABCD de grootte van de ontbrekende hoek.

$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$	$\widehat{D}$
100°	80°	50°	130°
120°	20°	150°	70°
90°	90°	60°	120°
22°	33°	44°	261°

4 Kan het of kan het niet?
Zo ja, geef en teken een voorbeeld. Zo neen, verklaar.

a In een vierhoek ABCD zijn drie hoeken groter dan 100°.

JA !



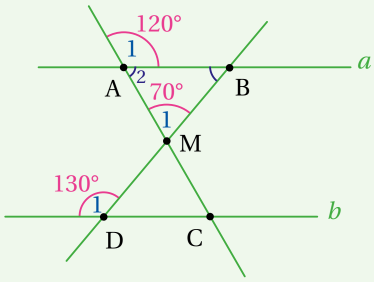
b In een driehoek XYZ zijn twee hoeken groter dan 90°.

NEEN !

De hoekensom is steeds 180°. Wanneer twee hoeken elk groter zijn dan 90°, voldoen we al niet meer aan die eigenschap.

5 Gegeven: $\widehat{A}_1 = 120°$
$\widehat{M}_1 = 70°$
$\widehat{D}_1 = 130°$

Gevraagd: toon aan dat $a \mathbin{/\!/} b$



- $\widehat{A}_2 = 60°$

  $\widehat{B} = 180° - 70° - 60°$

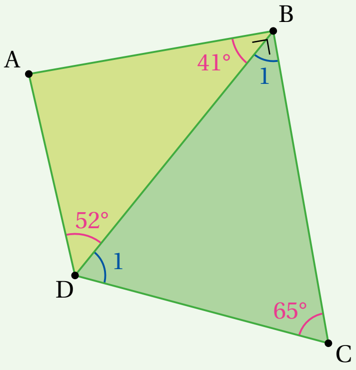
  $= 50°$

- $\widehat{D}_1 + \widehat{B} = 180°$, supplementaire binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn

dus $a \mathbin{/\!/} b$

6 Bepaal zonder te meten de grootte van de aangeduide hoeken.

a



- $\widehat{B}_1 = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$

- $\widehat{B}_1 + \widehat{C} + \widehat{D}_1 = 180^\circ$ hoekensom in Δ BCD

  $\Updownarrow$

  $49^\circ + 65^\circ + \widehat{D}_1 = 180^\circ$

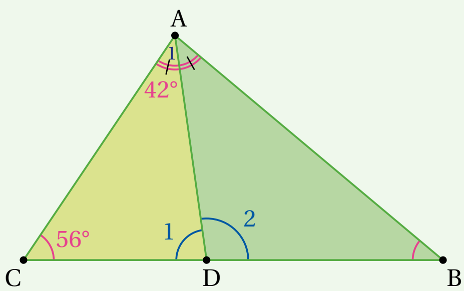
  $\Updownarrow$

  $\widehat{D}_1 = 180^\circ - 49^\circ - 65^\circ$

  $\Updownarrow$

  $\widehat{D}_1 = 66^\circ$

b



- $\widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 + \widehat{C} = 180^\circ$ hoekensom in Δ ADC

  $\Updownarrow$

  $42^\circ + \widehat{D}_1 + 56^\circ = 180^\circ$

  $\Updownarrow$

  $\widehat{D}_1 = 82^\circ$

- $\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 180^\circ$ nevenhoeken

  $\Updownarrow$

  $\widehat{D}_2 = 180^\circ - 82^\circ$

  $\Updownarrow$

  $\widehat{D}_2 = 98^\circ$

- $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ hoekensom in Δ ADC

  $\Updownarrow$

  $2 \cdot \widehat{A}_1 + \widehat{B} + 56^\circ = 180^\circ$ gegeven

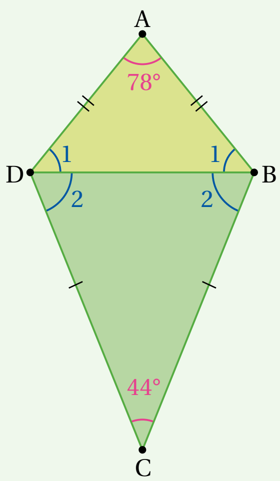
  $\Updownarrow$

  $\widehat{B} = 180^\circ - 84^\circ - 56^\circ$

  $\Updownarrow$

  $\widehat{B} = 40^\circ$

c



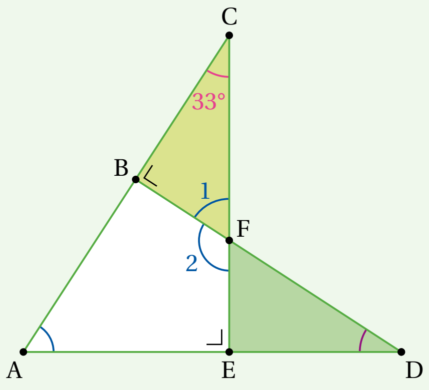
- In Δ ABD is $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 = \dfrac{180^\circ - 78^\circ}{2}$ hoekensom in gelijkbenige Δ ABD

  of $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 = 51^\circ$

- In Δ BCD is $\widehat{B}_2 = \widehat{D}_2 = \dfrac{180^\circ - 44^\circ}{2}$ hoekensom in gelijkbenige Δ BCD

  of $\widehat{B}_2 = \widehat{D}_2 = 68^\circ$

d



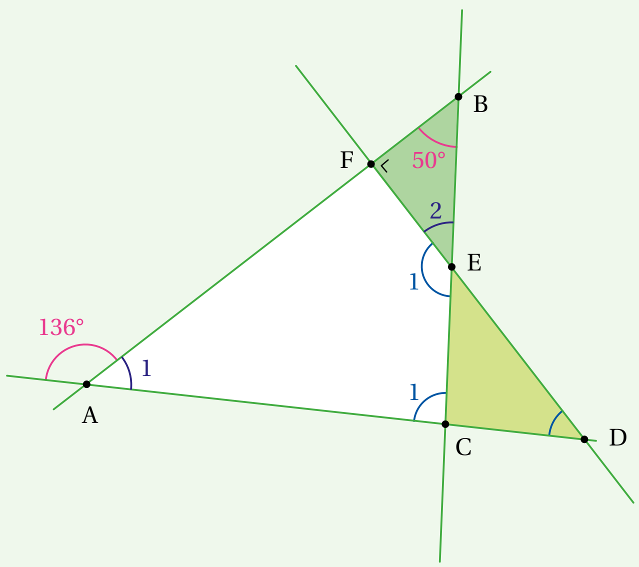
- $\hat{C}+\hat{F}_1+\hat{B} = 180°$ hoekensom in ΔCFB
  $\Updownarrow$
  $\hat{F}_1 = 180°-33°-90° = 57°$

- $\hat{F}_1+\hat{F}_2 = 180°$ nevenhoeken
  $\Updownarrow$
  $\hat{F}_2 = 180°-57° = 123$

- $\hat{C}+\hat{E}+\hat{A} = 180°$ hoekensom in ΔCEA
  $\Updownarrow$
  $\hat{A} = 180°-90°-33° = 57°$

- $\hat{B}+\hat{D}+\hat{A} = 180°$ hoekensom in ΔBDA
  $\Updownarrow$
  $\hat{D} = 180°-90°-57° = 33°$

e



- $\hat{B}+\hat{E}_2+\hat{F} = 180°$ hoekensom in ΔBEF
  $\Updownarrow$
  $\hat{E}_2 = 180°-90°-50° = 40°$

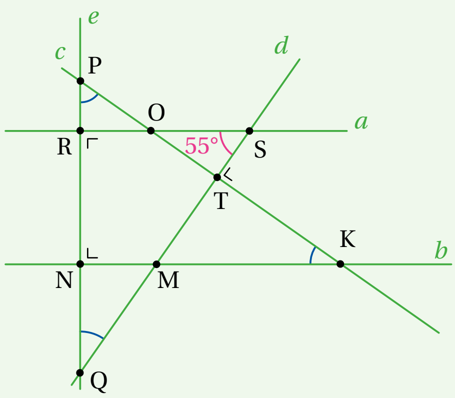
- $\hat{E}_1+\hat{E}_2 = 180°$ nevenhoeken
  $\Updownarrow$
  $\hat{E}_1 = 140°$

- $\hat{A}_1 = 180°-136° = 44°$

- $\hat{B}+\hat{C}_1+\hat{A}_1 = 180°$ hoekensom in ΔBCA
  $\Updownarrow$
  $\hat{C}_1 = 180°-50°-44° = 86°$

- $\hat{D} = 180°-90°-44° = 46°$ hoekensom in ΔDAF

f



- $\hat{R}+\hat{S}+\hat{Q} = 180°$ hoekensom in ΔRSQ
  $\Updownarrow$
  $\hat{Q} = 180°-90°-55° = 35°$

- $\hat{P}+\hat{T}+\hat{Q} = 180°$ hoekensom in ΔPTQ
  $\Updownarrow$
  $\hat{P} = 180°-90°-35° = 55°$

- $\hat{P}+\hat{K}+\hat{N} = 180°$ hoekensom in ΔPKN
  $\Updownarrow$
  $\hat{K} = 180°-90°-55° = 35°$

7 Vraagstukken over driehoeken.

a In Δ DEF is $\widehat{D} = 27°$ en $\widehat{E} = 4 \cdot \widehat{D}$.
Bereken $\widehat{E}$ en $\widehat{F}$.

- $\widehat{E} = 4 \cdot \widehat{D} = 4 \cdot 27° = 108°$
- $$\begin{aligned} \widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{F} &= 180° \\ &\Updownarrow \\ 27°+108°+\widehat{F} &= 180° \\ &\Updownarrow \\ \widehat{F} &= 180°-27-108° \\ &\Updownarrow \\ \widehat{F} &= 45° \end{aligned}$$
- ANTWOORD: $\widehat{E} = 108°$ en
  $\widehat{F} = 45°$

b In een driehoek is één hoek het dubbel van de kleinste hoek. De derde hoek is driemaal zo groot als de kleinste. Hoe groot is de kleinste hoek van die driehoek?

- stel dat α de kleinste hoek is, dan zijn de andere 2α en 3α
- $$\begin{aligned} \alpha+2\alpha+3\alpha &= 180° \\ &\Updownarrow \\ 6\alpha &= 180° \\ &\Updownarrow \\ \alpha &= 30° \end{aligned}$$
- ANTWOORD: $\alpha = 30°$

c In Δ MNO is $\widehat{M} = 40°$ en $\widehat{N} = 2 \cdot \widehat{M} + \widehat{O}$.
Bereken $\widehat{N}$ en $\widehat{O}$.

- $\widehat{N} = 80° + \widehat{O}$
- $$\begin{aligned} \widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{O} &= 180° \\ &\Updownarrow \\ 40°+80°+\widehat{O}+\widehat{O} &= 180° \\ &\Updownarrow \\ 2\widehat{O} &= 180°-40°-80° \\ &\Updownarrow \\ 2\widehat{O} &= 60° \\ &\Updownarrow \\ \widehat{O} &= 30° \end{aligned}$$
- ANTWOORD: $\widehat{O} = 30°$ en
  $\widehat{N} = 110°$

d In een rechthoekige driehoek is een scherpe hoek driemaal zo groot als de andere scherpe hoek. Hoe groot is de kleinste hoek?

- stel dat α de kleinste hoek is, dan is de andere 3α
- $$\begin{aligned} \alpha+3\alpha+90° &= 180° \\ &\Updownarrow \\ 4\alpha &= 90° \\ &\Updownarrow \\ \alpha &= 22°30' \end{aligned}$$
- ANTWOORD: $\alpha = 22°30'$

e In Δ GHI is $\hat{G} = 3 \cdot \hat{I}$ en $\hat{H} = 4 \cdot \hat{I}$.
Bereken $\hat{G}$, $\hat{H}$ en $\hat{I}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{G}+\hat{H}+\hat{I} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
3\cdot\hat{I}+4\cdot\hat{I}+\hat{I} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
8\cdot\hat{I} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{I} &= 22{,}5^\circ = 22^\circ 30' \\
\text{dus: } \hat{G} &= 3\cdot\hat{I} = 67{,}5^\circ = 67^\circ 30' \\
\text{en: } \hat{H} &= 4\cdot\hat{I} = 90^\circ
\end{aligned}
$$

g $\hat{A} = 3 \cdot \hat{B}$ en $\hat{B} = \hat{C} + 20°$.
Bereken $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} &= 180^\circ \\
/\!/ \quad &\Updownarrow \\
3\cdot\hat{B}+\hat{B}+\overbrace{\hat{B}-20^\circ} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
5\cdot\hat{B} &= 200^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{B} &= 40^\circ \\
\text{dus: } \hat{C} &= 20^\circ \\
\text{en: } \hat{A} &= 120^\circ
\end{aligned}
$$

f In Δ PQR is $\hat{P} + \hat{Q} = 58°$ en $\hat{P} - \hat{Q} = 26°$.
Bereken $\hat{P}$, $\hat{Q}$ en $\hat{R}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{P} = 58^\circ-\hat{Q} \ \text{ en } \ \hat{P} &= 26^\circ+\hat{Q} \\
&\Updownarrow \\
\text{dus: } 26^\circ+\hat{Q} &= 58^\circ-\hat{Q} \\
&\Updownarrow \\
2\hat{Q} &= 58^\circ-26^\circ \\
&\Updownarrow \\
2\hat{Q} &= 32^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{Q} &= 16^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{P} = 26^\circ+16^\circ &= 42^\circ \\
\hat{P}+\hat{Q}+\hat{R} &= 180^\circ \text{ wordt:} \\
&\Updownarrow \\
42^\circ+16^\circ+\hat{R} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{R} &= 122^\circ
\end{aligned}
$$

h $\hat{B} + \hat{C} = 4 \cdot \hat{A}$ en $\hat{C} = 2 \cdot \hat{B}$.
Bereken $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{A}+\underbrace{\hat{B}+\hat{C}} &= 180^\circ \\
\backslash\!\backslash \quad &\Updownarrow \\
\hat{A}+4\cdot\hat{A} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
5\cdot\hat{A} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{A} &= 36^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{B}+\hat{C} &= 4\hat{A} \\
&\Updownarrow \\
\hat{B}+2\cdot\hat{B} &= 4\cdot 36^\circ \\
&\Updownarrow \\
3\cdot\hat{B} &= 144^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{B} &= 48^\circ \\
36^\circ+48^\circ+\hat{C} &= 180^\circ \\
&\Updownarrow \\
\hat{C} &= 96^\circ
\end{aligned}
$$

8 Vraagstukken over vierhoeken.

a Bereken alle hoeken van de vierhoek ABCD als $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = 2\alpha$, $\widehat{C} = 3\alpha$ en $\widehat{D} = 4\alpha$.

- $$\begin{aligned} \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D} &= 360^\circ \\ &\Updownarrow \\ \alpha+2\alpha+3\alpha+4\alpha &= 360^\circ \\ &\Updownarrow \\ 10\alpha &= 360^\circ \\ &\Updownarrow \\ \alpha &= 36^\circ \end{aligned}$$

- ANTWOORD: De hoeken zijn 36°, 72°, 108° en 144°.

b In een vierhoek ABCD is $\widehat{D}$ 20° kleiner dan $\widehat{A}$ en 15° groter dan $\widehat{C}$. Bereken alle hoeken als je weet dat $\widehat{B} = 97°$.

- $\widehat{D} = \widehat{A}-20^\circ$ dus $\widehat{D}+20^\circ = \widehat{A}$
  $\widehat{D} = \widehat{C}+15^\circ$ dus $\widehat{D}-15^\circ = \widehat{C}$

- $$\begin{aligned} \widehat{A}+\widehat{B} \quad + \quad \widehat{C}+\widehat{D} &= 360^\circ \\ &\Updownarrow \\ \widehat{D}+20^\circ + 97^\circ + \widehat{D}-15^\circ + \widehat{D} &= 360^\circ \\ &\Updownarrow \\ 3\widehat{D} &= 360^\circ-20^\circ-97^\circ+15^\circ \\ &\Updownarrow \\ 3\widehat{D} &= 258^\circ \\ &\Updownarrow \\ \widehat{D} &= 86^\circ \end{aligned}$$

- ANTWOORD: $\widehat{A} = 106^\circ$
  $\widehat{B} = 97^\circ$
  $\widehat{C} = 71^\circ$
  $\widehat{D} = 86^\circ$

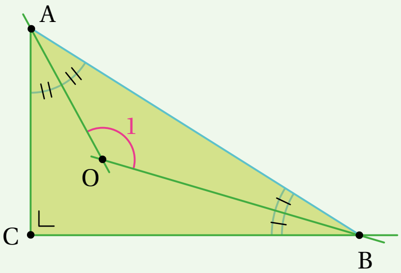
c Een vierhoek heeft twee even grote scherpe hoeken, één rechte hoek en één stompe hoek. De stompe hoek is even groot als de scherpe hoeken samen. Bepaal de grootte van één scherpe hoek.

- α : scherpe hoek
  2α : stompe hoek

- $$\begin{aligned} \alpha+\alpha+90^\circ+2\alpha &= 360^\circ \\ &\Updownarrow \\ 4\alpha &= 360^\circ-90^\circ \\ &\Updownarrow \\ 4\alpha &= 270^\circ \\ &\Updownarrow \\ \alpha &= 67{,}5^\circ \end{aligned}$$

- ANTWOORD: De scherpe hoeken in deze vierhoek zijn 67°30′ groot.

*9



ΔABC is een rechthoekige driehoek.
AO is de bissectrice van $\hat{A}$.
BO is de bissectrice van $\hat{B}$.
Toon aan dat $\hat{O}_1 = 135°$.

- $\hat{A}+\hat{B} = 90°$ scherpe hoeken in rechthoekige ΔABC

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = 45 \quad *$$

- $\underbrace{\frac{1}{2}\hat{A} + \frac{1}{2}\hat{B}}_{\parallel} + \hat{O}_1 = 180°$ hoekensom in ΔABO

$$\Updownarrow$$

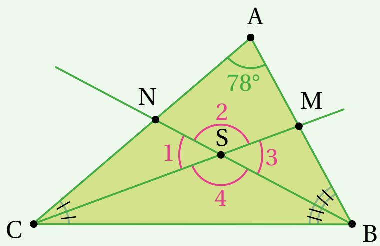
$$45° + \hat{O}_1 = 180° \quad *$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{O}_1 = 135°$$

*10

In ΔABC is $\hat{A} = 78°$.
BN is de bissectrice van $\hat{B}$.
CM is de bissectrice van $\hat{C}$.
Zoek $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$, $\hat{S}_3$ en $\hat{S}_4$.



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180° \quad \text{hoekensom in } \Delta ABC$$
$$\Updownarrow$$
$$78° + \hat{B}+\hat{C} = 180°$$
$$\Updownarrow$$
$$\hat{B}+\hat{C} = 102°$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C} = 51°$$

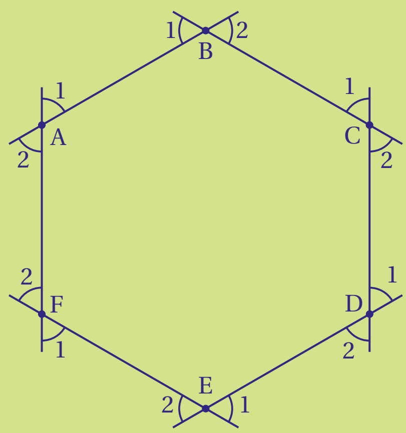
$$\frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C} + \hat{S}_4 = 180° \quad \text{hoekensom in } \Delta BCS$$
$$\Updownarrow$$
$$51° + \hat{S}_4 = 180°$$
$$\Updownarrow$$
$$\hat{S}_4 = 129°$$

Dus: $\hat{S}_2 = \hat{S}_4 = 129°$

en: $\hat{S}_3 = 180° - 129° = 51° = \hat{S}_1$

11

Een **buitenhoek van een veelhoek** is een nevenhoek van een binnenhoek van die veelhoek.
Bereken de som van de buitenhoeken van een zeshoek.



$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{F}_1 + \hat{F}_2$$

$$= 2\hat{A}_1 + 2\hat{B}_1 + 2\hat{C}_1 + 2\hat{D}_1 + 2\hat{E}_1 + 2\hat{F}_1$$

$$= 2\cdot(180° - \hat{A}) + 2\cdot(180° - \hat{B}) + 2\cdot(180° - \hat{C}) + 2\cdot(180° - \hat{D}) + 2\cdot(180° - \hat{E}) + 2\cdot(180° - \hat{F})$$

$$= 360° - 2\hat{A} + 360° - 2\hat{B} + 360° - 2\hat{C} + 360° - 2\hat{D} + 360° - 2\hat{E} + 360° - 2\hat{F}$$

$$= 2160° - 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F})$$

$$= 2160° - 2\cdot 720° = 720°$$

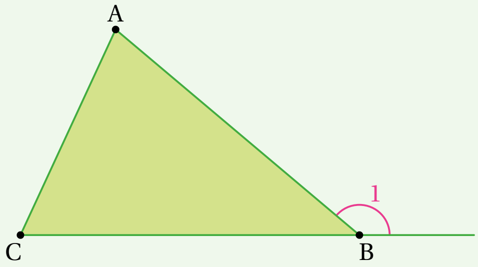
12 Een **buitenhoek van een driehoek** is een hoek gevormd door een zijde van de driehoek en het verlengde van een andere zijde van de driehoek.

a Hoeveel buitenhoeken heeft een driehoek?

6

b Hoeveel verschillende buitenhoeken kan een driehoek maximaal hebben?

3



c Bewijs dat een buitenhoek van een driehoek even groot is als de som van de niet-aanliggende binnenhoeken.

- Gegeven: ΔABC
  $\widehat{B}_1$ is een buitenhoek
- Te bewijzen: $\widehat{B}_1 = \widehat{A} + \widehat{C}$
- Bewijs:

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \text{hoekensom in een driehoek:} & \text{nevenhoeken:} \\ \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 180^\circ & \widehat{B}+\widehat{B}_1 = 180^\circ \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \widehat{A}+\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B} & \widehat{B}_1 = 180^\circ - \widehat{B} \end{array}}_{\text{dus}}$$

$$\widehat{A}+\widehat{C} = \widehat{B}_1$$

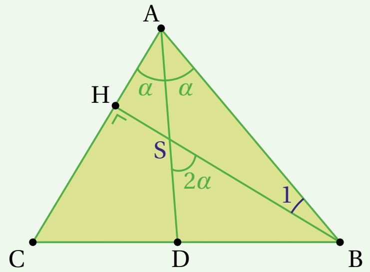
13 Een gelijkbenige driehoek heeft een hoek van 100°.
Dan geldt: twee van de hoeken van die driehoek zijn gelijk aan

(A) 100° (B) 80° (C) 60° (D) 40° (E) 20°

JWO 2015 tweede ronde, vraag 4 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

14 In driehoek ΔABC is BH de hoogtelijn uit B en AD de bissectrice van $\widehat{A}$.
De scherpe hoek tussen AD en BH is dubbel zo groot als de hoek $D\widehat{A}B$.
Hoe groot is de hoek $C\widehat{A}B$?

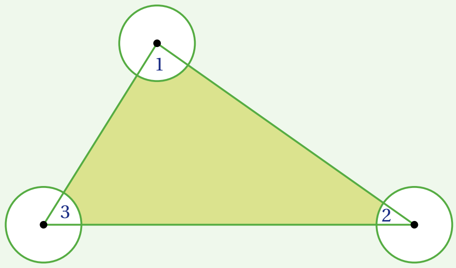
In ΔABS is 2α als buitenhoek gelijk aan $\alpha + \widehat{B}_1$, dus is $\widehat{B}_1 = \alpha$
In ΔABH is $\widehat{A} + \widehat{B}_1 = 90^\circ$ of $3\alpha = 90^\circ$, dus $\alpha = 30^\circ$.
Dus is $2\alpha = 60^\circ$.



(A) 40° (B) 45° (C) 60° (D) 75° (E) 90°

WALLABIE 2014 vraag 20 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

15 De oppervlakte van de driehoek is 25 m² en de oppervlakte van elke cirkel met een hoekpunt van de driehoek als middelpunt is 4 m².
Wat is de oppervlakte van het groene gebied?



De drie cirkelsectoren 1, 2 en 3 vormen samen een halve cirkelschijf, dus 2 m² groot.
$25\ m^2 - 2\ m^2 = 23\ m^2$

(A) 13 m² (B) 19 m² (C) 21 m² (D) 22 m² (E) 23 m²

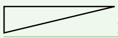
JWO 2010 eerste ronde, vraag 30 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

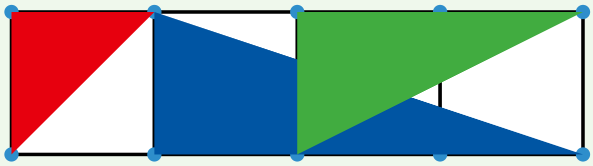
16 In deze figuur zie je vier vierkanten met in elk hoekpunt een blauwe stip. Hoeveel rechthoekige driehoeken kan je vormen door drie van deze blauwe stippen met elkaar te verbinden?

 : 4 . 4 = 16

 : 4 . 3 = 12

 : 4 . 2 = 8

 : 4 Totaal: 40



17 Het is keuzemiddag bij de jeugdbeweging. De 39 leden kunnen deze middag kiezen tussen djembé (D), volksdans (V) en Japanse (J) kunst. Elk lid kiest twee keer en kan ook twee keer dezelfde activiteit kiezen.

– 19 leden kozen minstens één keer djembé, onder hen kozen 5 leden ook voor Japanse kunst.
– 19 leden kozen minstens één keer volksdans, onder hen kozen 7 leden ook voor Japanse kunst.
– 4 leden kozen twee keer voor volksdans.

Hoeveel leden kozen twee keer voor Japanse kunst?

数学

- $J \cap D \cap V$ is leeg: er kan max. twee keer gekozen worden.
- Door redeneren vul je de aantallen in.
- Laatste stap: zorg ervoor dat er 39 leden in totaal zijn.
- **ANTWOORD**:
  Er kozen negen leden twee keer voor Japanse kunst.