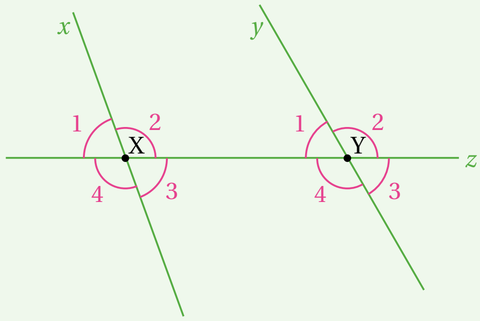
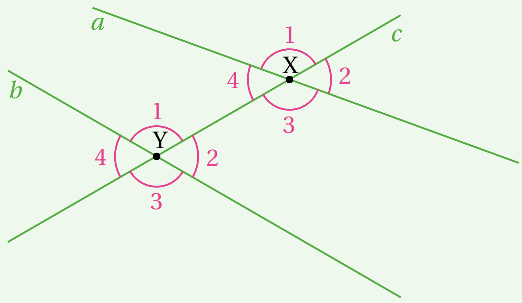
5 Oefeningen

1 De rechten x en y worden gesneden door z.
Vul de tabel aan.



HOEKEN	BENAMING
$\hat{X}_1$ en $\hat{Y}_1$	overeenkomstige hoeken
$\hat{X}_1$ en $\hat{Y}_3$	verwisselende buitenhoeken
$\hat{X}_4$ en $\hat{Y}_2$	verwisselende buitenhoeken
$\hat{X}_2$ en $\hat{Y}_1$	binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn
$\hat{X}_4$ en $\hat{Y}_3$	buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn
$\hat{X}_3$ en $\hat{Y}_1$	verwisselende binnenhoeken

2 De rechten a en b worden gesneden door c.



a Geef alle overeenkomstige hoeken.

$\hat{X}_1$ en $\hat{Y}_1$ $\hat{X}_2$ en $\hat{Y}_2$

$\hat{X}_3$ en $\hat{Y}_3$ $\hat{X}_4$ en $\hat{Y}_4$

b Geef alle verwisselende binnenhoeken.

$\hat{X}_3$ en $\hat{Y}_1$

$\hat{X}_4$ en $\hat{Y}_2$

c Geef alle verwisselende buitenhoeken.

$\hat{X}_1$ en $\hat{Y}_3$

$\hat{X}_2$ en $\hat{Y}_4$

d Geef alle binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn.

$\hat{X}_3$ en $\hat{Y}_2$

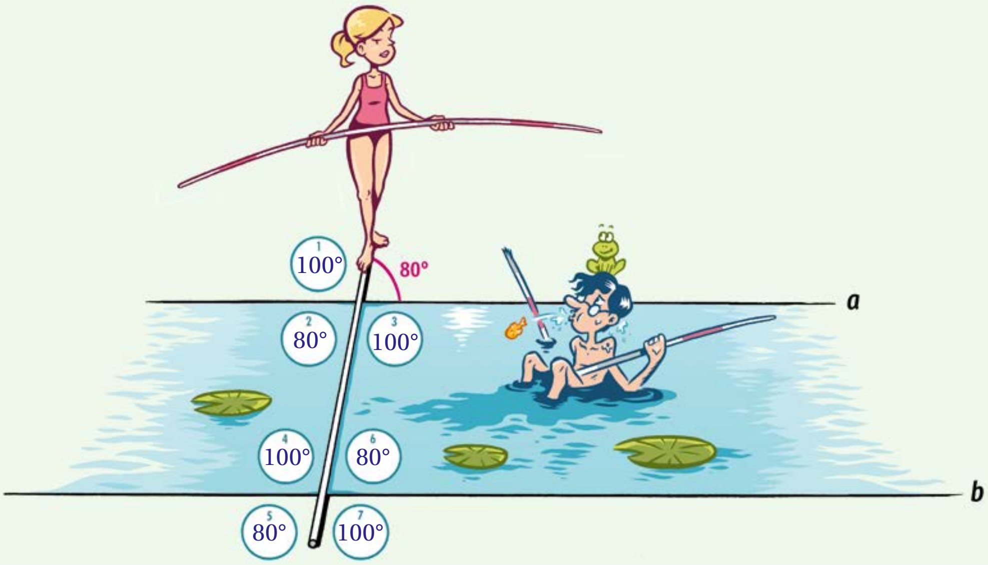
$\hat{X}_4$ en $\hat{Y}_1$

e Geef alle buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn.

$\hat{X}_1$ en $\hat{Y}_4$

$\hat{X}_2$ en $\hat{Y}_3$

3 Vul de ontbrekende hoekgroottes in als je weet dat $a \parallel b$.



4 De rechten a en b zijn evenwijdig en worden gesneden door c. Zoek de grootte van de hoeken.

$\widehat{A}_1 =$ 145°

$\widehat{A}_2 =$ 35°

$\widehat{A}_3 =$ 145°

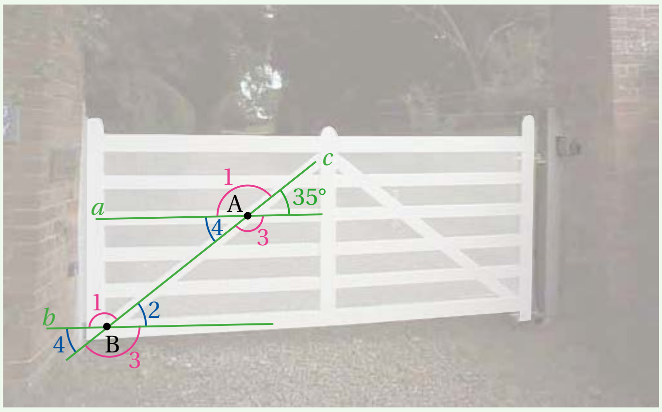
$\widehat{A}_4 =$ 35°

$\widehat{B}_1 =$ 145°

$\widehat{B}_2 =$ 35°

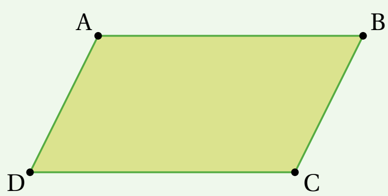
$\widehat{B}_3 =$ 145°

$\widehat{B}_4 =$ 35°



5 Gegeven: parallellogram ABCD

Gevraagd: verklaar volgende gelijkheden



a $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$

Binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn supplementair bij AD // BC en snijlijn AB.

b $\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

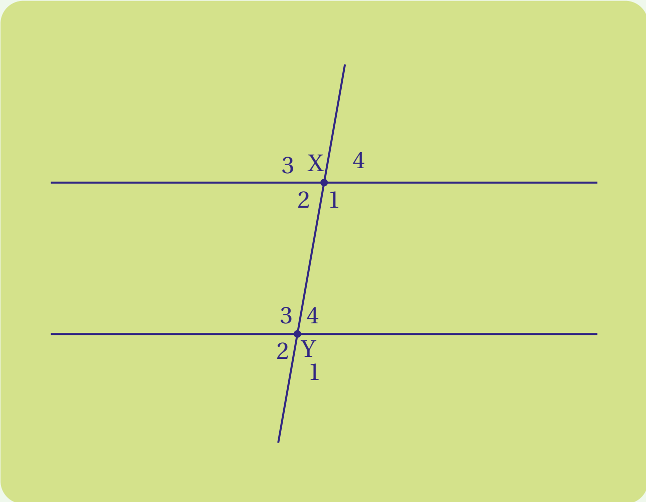
Binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn supplementair bij AB // CD en snijlijn BC.

c $\widehat{A} = \widehat{C}$

Overstaande hoeken in een parallellogram zijn even groot.

of: $\left.\begin{array}{l}\widehat{A}+\widehat{B} = 180° \\ \widehat{B}+\widehat{C} = 180°\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{A}+\widehat{B} = \widehat{B}+\widehat{C} \Longrightarrow \widehat{A} = \widehat{C}$

6 Een rechte snijdt twee evenwijdige rechten. De som van twee verwisselende binnenhoeken is 160°.
Bereken de acht gevormde hoeken.



$\widehat{X}_2 + \widehat{Y}_4 = 160°$

Verwisselende binnenhoeken zijn even groot.

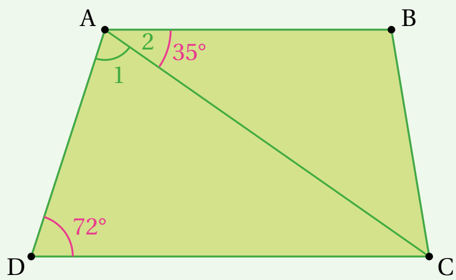
$\widehat{X}_2 = \widehat{Y}_4$ dus is $\widehat{X}_2 = 80° = \widehat{Y}_4$

Dus:

$\widehat{X}_2 = \widehat{X}_4 = 80° = \widehat{Y}_2 = \widehat{Y}_4$ (overstaande hoeken)

$\widehat{X}_1 = \widehat{X}_3 = 100° = \widehat{Y}_1 = \widehat{Y}_3$ (overstaande hoeken)

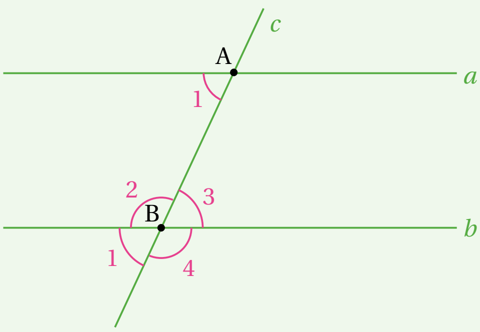
7 ABCD is een trapezium.
Bereken $\widehat{A}_1$ als je weet dat $\widehat{A}_2 = 35°$ en $\widehat{D} = 72°$.



Binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn supplementair bij AB // CD en snijlijn AD.

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 180°$$
$$\Updownarrow$$
$$\widehat{A}_1 + 35° + 72° = 180°$$
$$\Updownarrow$$
$$\widehat{A}_1 = 180° - 35° - 72°$$
$$\Updownarrow$$
$$\widehat{A}_1 = 73°$$

8 De rechten a en b zijn evenwijdig en worden gesneden door c.
Zoek $\widehat{B}_2$, $\widehat{B}_3$ en $\widehat{B}_4$ als je weet dat $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 130°$.



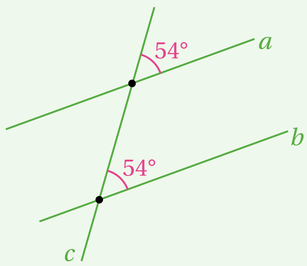
Overeenkomstige hoeken zijn even groot bij $a \mathbin{/\!/} b$ en snijlijn c.

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_3 = 65°$

$\widehat{B}_2 = 180° - 65° = 115° = \widehat{B}_4$

9 Kun je aan de hand van de gegeven hoeken afleiden dat $a \parallel b$?
Verklaar aan de hand van een geziene eigenschap.

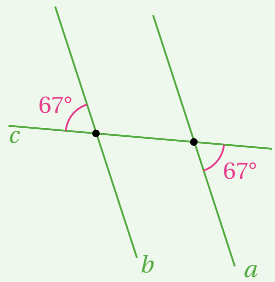
a



JA NEEN

overeenkomstige hoeken
zijn even groot

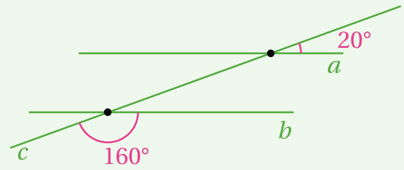
d



JA NEEN

verwisselende buitenhoeken
zijn even groot

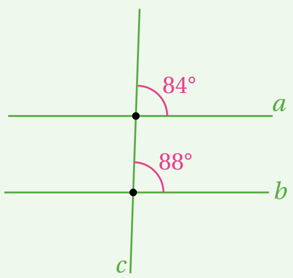
g



JA NEEN

buitenhoeken aan dezelfde
kant van de snijlijn
zijn supplementair

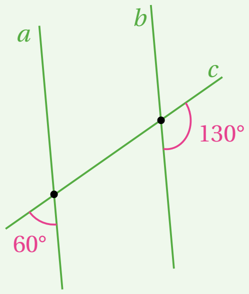
b



JA NEEN

overeenkomstige hoeken
zijn niet even groot

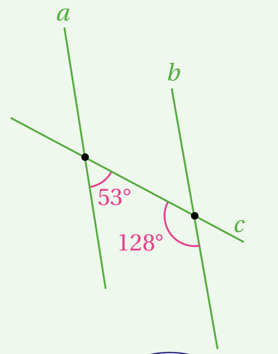
e



JA NEEN

buitenhoeken aan dezelfde
kant van de snijlijn
zijn niet supplementair

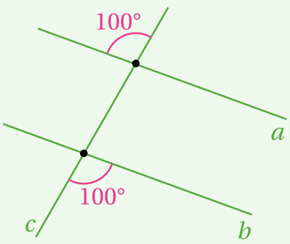
h



JA NEEN

binnenhoeken aan dezelfde
kant van de snijlijn
zijn niet supplementair

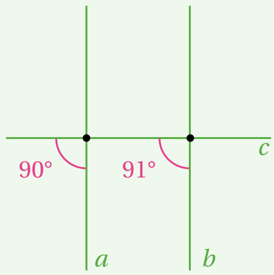
c



JA NEEN

verwisselende buitenhoeken
zijn even groot

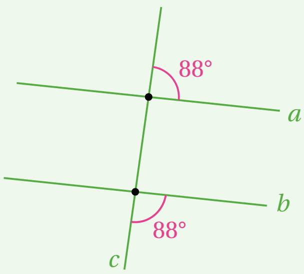
f



JA NEEN

overeenkomstige hoeken
zijn niet even groot

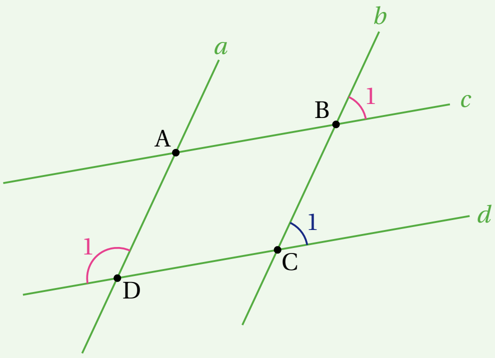
i



JA NEEN

buitenhoeken aan dezelfde
kant van de snijlijn zijn
niet supplementair

10 Gegeven: $a \parallel b$ en $c \parallel d$
$\widehat{B}_1 = 55°$
Gevraagd: bereken $\widehat{D}_1$



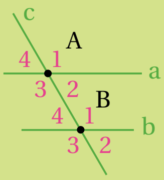
Overeenkomstige hoeken zijn even groot bij $c \parallel d$ met snijlijn b,
dus $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = 55°$
Buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn
supplementair bij $a \parallel b$ met snijlijn d, dus

$$\widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = 180° \iff \widehat{D}_1 = 180° - 55°$$
$$\iff \widehat{D}_1 = 125°$$

11 Gegeven: $a \parallel b$ en $b \not\parallel c$
Gevraagd: zoek telkens $\widehat{B}_1$ en $\widehat{B}_2$ als

a $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 + 28°$

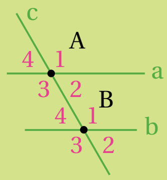
$$\begin{aligned} \widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 &= 180° \\ &\Updownarrow \\ \widehat{B}_2 + 28° + \widehat{B}_2 &= 180° \\ &\Updownarrow \\ 2\widehat{B}_2 &= 152° \\ &\Updownarrow \\ \widehat{B}_2 &= 76° \end{aligned}$$



ANTWOORD: $\widehat{B}_1 = 104°$
$\widehat{B}_2 = 76°$

c $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 + \frac{1}{3}\widehat{A}_1$

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ \widehat{A}_1 - \frac{1}{3}\widehat{A}_1 &= \widehat{A}_2 \\ &\Updownarrow \\ \frac{2}{3}\widehat{A}_1 &= \widehat{A}_2 \end{aligned}$$

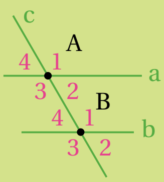


$$\begin{aligned} \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 &= 180° \\ &\Updownarrow \\ \widehat{A}_1 + \frac{2}{3}\widehat{A}_1 &= 180° \\ &\Updownarrow \\ \frac{5}{3}\widehat{A}_1 &= 180° \\ &\Updownarrow \\ \widehat{A}_1 &= 108° \end{aligned}$$

ANTWOORD: $\widehat{B}_1 = 108°$
$\widehat{B}_2 = 72°$

b $\widehat{A}_4 = \widehat{B}_3 - 18°$

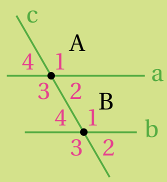
$$\begin{aligned} \widehat{A}_4 + \widehat{B}_3 &= 180° \\ &\Updownarrow \\ \widehat{B}_3 - 18° + \widehat{B}_3 &= 180° \\ &\Updownarrow \\ 2\widehat{B}_3 &= 198° \\ &\Updownarrow \\ \widehat{B}_3 &= 99° \end{aligned}$$



ANTWOORD: $\widehat{B}_1 = 99°$
$\widehat{B}_2 = 81°$

d $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_3 = 239°$

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_3$ (verwisselende buitenhoeken)

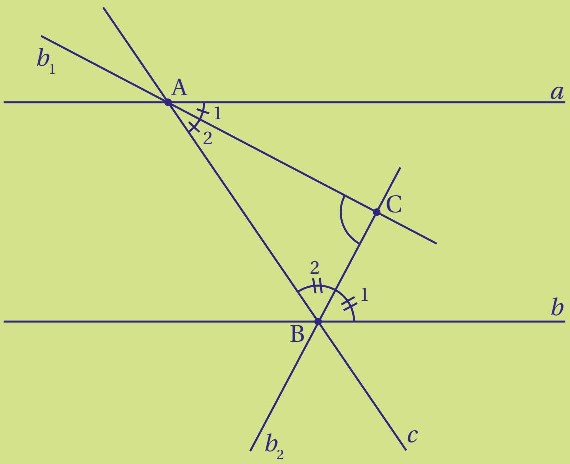


Dus:

$$\begin{aligned} \widehat{A}_1 = \widehat{B}_3 &= \frac{239°}{2} = 119°30' \\ \widehat{B}_1 = \widehat{B}_3 &= 119°30' \\ \widehat{B}_2 &= 180° - 119°30' \\ &= 60°30' \end{aligned}$$

12 Onderzoeksopdrachten.

a De rechte c snijdt twee evenwijdige rechten a en b. Onder welke hoek snijden de bissectrices van twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn elkaar? Verklaar.



De bissectrices van 2 binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn vormen samen 90°.

Verklaring:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180°$$

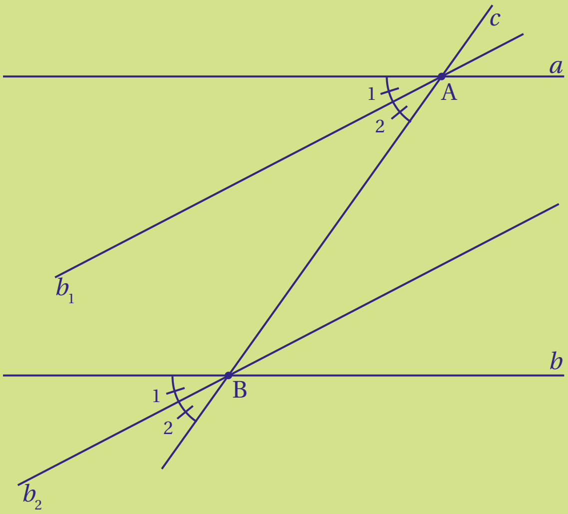
$$\Downarrow \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ en } \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 = 90°$$

In ΔACB is de hoekensom 180°.

Dus is $\hat{C} = 90°$.

b De rechte c snijdt twee evenwijdige rechten a en b. Teken de bissectrices van twee overeenkomstige hoeken. Wat is de onderlinge stand van de bissectrices? Verklaar.



De bissectrices van 2 overeenkomstige hoeken zijn evenwijdig.

Verklaring:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$$

$$\Downarrow \quad \text{overeenkomstige hoeken bij } a \,/\!/\, b \text{ en snijlijn } c$$

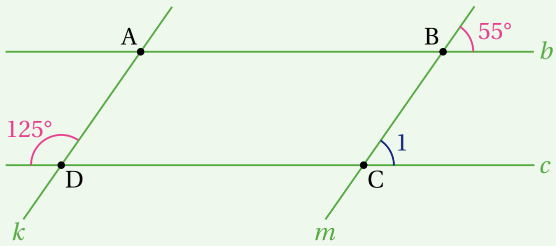
$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ en } \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_2$$

$$\Downarrow \quad \text{overeenkomstige hoeken zijn even groot bij } b_1 \text{ en } b_2 \text{ en snijlijn } c$$

$$b_1 \,/\!/\, b_2$$

13 Gegeven: $k \parallel m$
$\widehat{B} = 55°$
$\widehat{D} = 125°$
Te bewijzen: $b \parallel c$



- $\widehat{C}_1 + 125° = 180°$ buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn bij $k \parallel m$ en snijlijn c

$$\Updownarrow$$

$$\widehat{C}_1 = 55°$$

- $\widehat{B} = \widehat{C}_1$ twee rechten zijn evenwijdig bij twee rechten en een snijlijn als twee overeenkomstige hoeken even groot zijn

$$\Updownarrow$$

$$b \parallel c$$

***14** Twee rechten worden gesneden door een derde rechte in de punten X en Y. De scherpe of stompe hoeken die zo gevormd worden, noemen we $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \widehat{X}_3, \widehat{X}_4, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Y}_3, \widehat{Y}_4$. We weten het volgende:

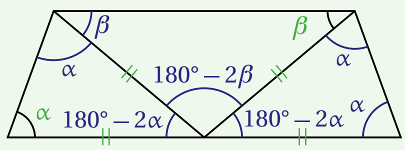
- $\widehat{Y}_1$ en $\widehat{Y}_2$ zijn overstaande hoeken;
- $\widehat{X}_3$ en $\widehat{Y}_2$ zijn verwisselende binnenhoeken;
- $\widehat{Y}_3$ en $\widehat{X}_2$ zijn verwisselende buitenhoeken;
- $\widehat{X}_1$ en $\widehat{Y}_2$ zijn overeenkomstige hoeken.

Dan zijn $\widehat{X}_4$ en $\widehat{Y}_4$:

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
verwisselende binnenhoeken	verwisselende buitenhoeken	binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn	buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn	overeenkomstige hoeken

JWO 2010 eerste ronde, vraag 29 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

***15** Als vier lijnstukken in een trapezium dezelfde lengte hebben zoals in de figuur, welk verband tussen α en β is dan altijd geldig?



(A) $\alpha + \beta = 90°$ (B) $2\alpha + \beta = 180°$ (C) $\alpha + 2\beta = 180°$ (D) $\alpha - \beta = 30°$ (E) $3\alpha + 2\beta = 360°$

JWO 2024 tweede ronde, probleem 11 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

$$180° - 2\alpha + 180° - 2\beta + 180° - 2\alpha = 180°$$
$$\Updownarrow$$
$$360° = 4\alpha + 2\beta$$
$$\Updownarrow$$
$$180° = 2\alpha + \beta$$