7 Oefeningen

1 Vul de meest passende benaming in.
Kies uit: hoekpunt, zijde, drager van een zijde, ingesloten hoek, aanliggende hoeken, overstaande hoek.

a [XY] is een zijde.

b $\hat{Y}$ is de ingesloten hoek

tussen de zijden [XY] en [YZ].

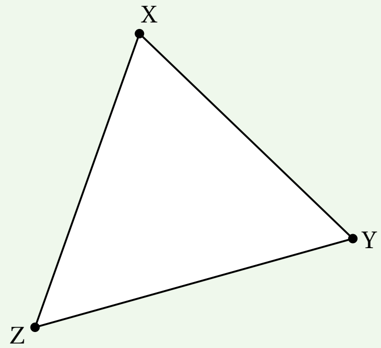
c YZ is de drager van een zijde.

d $\hat{X}$ en $\hat{Z}$ zijn de aanliggende hoeken

van de zijde [XZ].

e $\hat{Z}$ is de overstaande hoek

van de zijde [XY].



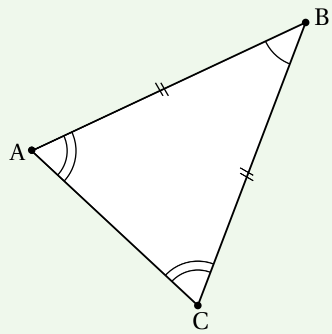
2 Driehoek ABC is gelijkbenig. Hoe noem je …

a [AC]? basis

b [AB]? been

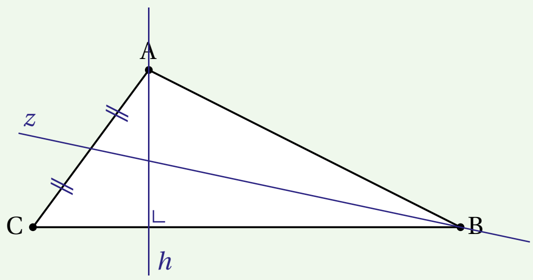
c $\hat{B}$? tophoek

d $\hat{A}$ en $\hat{C}$? basishoeken

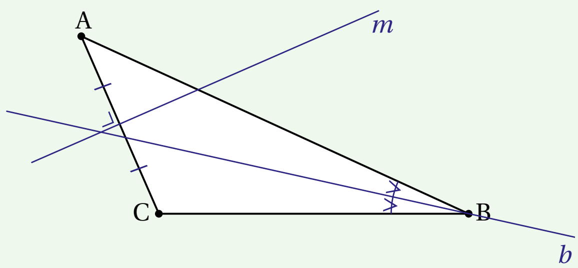


3 Teken met je geodriehoek in driehoek ABC:

a de hoogtelijn uit A en de zwaartelijn uit B.

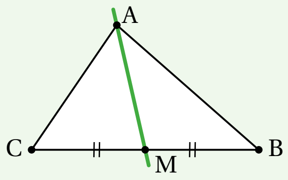


b de middelloodlijn van [AC] en de bissectrice van $\hat{B}$.



4 Wat is de naam van volgende bijzondere lijnen?

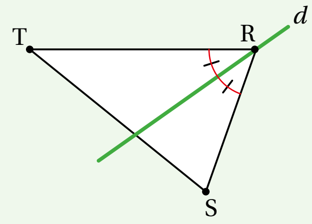
a



AM is de zwaartelijn

uit A in ΔABC.

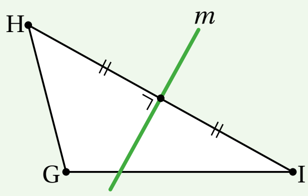
c



d is de bissectrice

van $\widehat{R}$ in ΔRST.

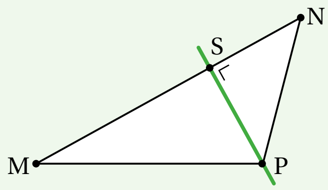
b



m is de middelloodlijn

van [HI] in ΔGHI.

d



PS is de hoogtelijn

uit P in ΔMNP.

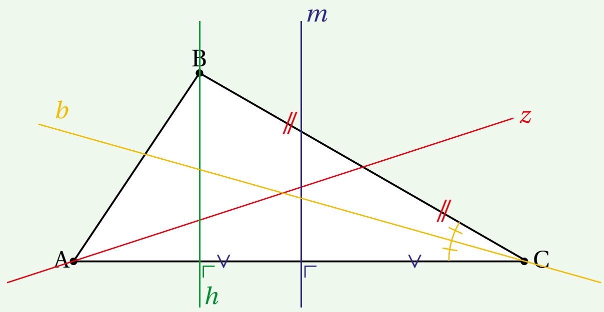
5 Teken met je geodriehoek in ΔABC:

a de zwaartelijn *z* door A.

b de hoogtelijn *h* door B.

c de middelloodlijn *m* op de zijde [AC].

d de bissectrice *b* van $\widehat{C}$.



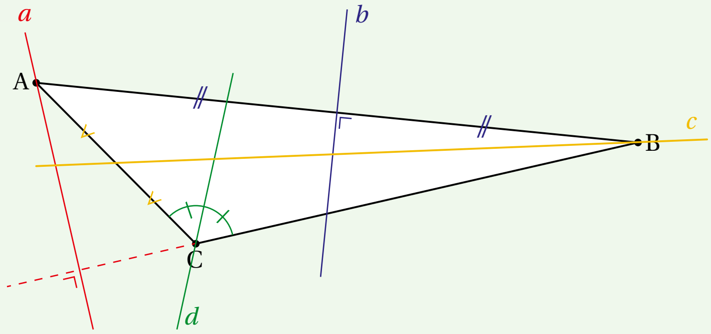
6 Teken de rechten *a*, *b*, *c* en *d* als:

a *a* de hoogtelijn is uit A.

b *b* de middelloodlijn is op [AB].

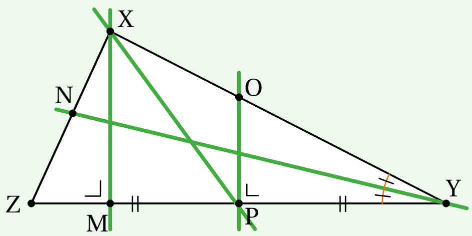
c *c* de zwaartelijn is uit B.

d *d* de bissectrice is van $\widehat{C}$.



7 Vul in met zwaartelijn, hoogtelijn, middelloodlijn of bissectrice.

a



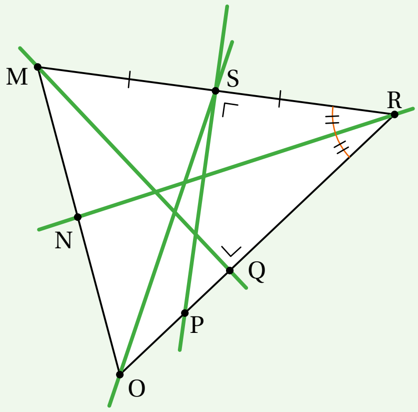
XM is een hoogtelijn.

YN is een bissectrice.

XP is een zwaartelijn.

OP is een middelloodlijn.

b



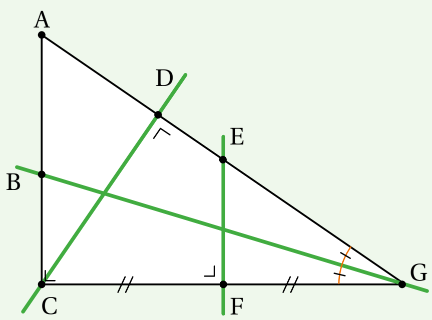
OS is een zwaartelijn.

RN is een bissectrice.

MQ is een hoogtelijn.

SP is een middelloodlijn.

c



CD is een hoogtelijn.

GB is een bissectrice.

GC is een hoogtelijn.

EF is een middelloodlijn.

8 Duid met een kruisje aan welke kenmerken de volgende merkwaardige lijnen in een driehoek hebben.

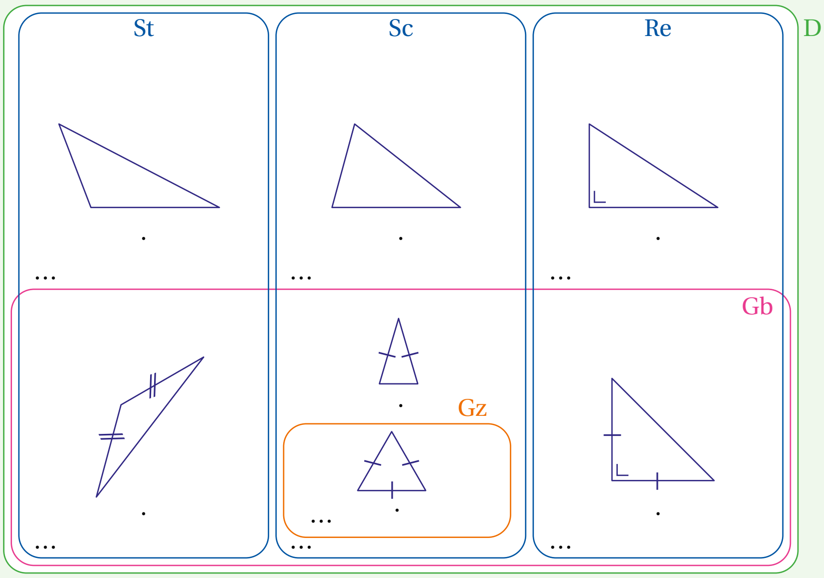
	DOOR EEN HOEKPUNT	LOODRECHT OP EEN ZIJDE	DOOR HET MIDDEN VAN EEN ZIJDE
ZWAARTELIJN	✗		✗
HOOGTELIJN	✗	✗	
MIDDELLOODLIJN		✗	✗
BISSECTRICE	✗		

9 Welke reeks hoeken kan van eenzelfde driehoek zijn?

		KAN	KAN NIET
a	Een rechte hoek, een stompe hoek en een scherpe hoek.		✗
b	Een rechte hoek, een stompe hoek en een stompe hoek.		✗
c	Een rechte hoek, een rechte hoek en een scherpe hoek.		✗
d	Een rechte hoek, een scherpe hoek en een scherpe hoek.	✗	

10 Als je de verzameling driehoeken van blz. 101 samenbrengt met die van blz. 103, dan bekom je onderstaande verzameling driehoeken. Teken in elk gebied een gepaste driehoek bij het zwarte puntje.

D: driehoeken
Re: rechthoekige driehoeken
Sc: scherphoekige driehoeken
St: stomphoekige driehoeken
Gb: gelijkbenige driehoeken
Gz: gelijkzijdige driehoeken



11 Welke driehoeken zitten in volgende verzamelingen? Omschrijf de driehoeken in woorden.

	OPGAVE	ANTWOORD
a	Sc ∩ Gz	gelijkzijdige driehoeken
b	St \ Gb	stomphoekige driehoeken die niet gelijkbenig zijn
c	Sc \ Gz	scherphoekige driehoeken die niet gelijkzijdig zijn
d	Re ∪ Sc ∪ St	alle driehoeken
e	Re ∩ Gb	rechthoekige driehoeken die gelijkbenig zijn
f	Gb ∩ Gz	gelijkzijdige driehoeken
g	Gz \ Gb	geen enkele driehoek
h	Gb ∪ Gz	gelijkbenige driehoeken

12 Waar of niet waar?

a Er bestaat een stomphoekige driehoek die rechthoekig is. niet waar

b Er bestaan gelijkbenige, rechthoekige driehoeken. waar

c Als een driehoek gelijkzijdig is, dan is die driehoek gelijkbenig. waar

d Als een driehoek gelijkbenig is, dan is die driehoek gelijkzijdig. niet waar

e Een rechthoekige driehoek kan niet gelijkzijdig zijn. waar

13 Bereken de gevraagde hoeken.

a In ΔABC is $\hat{A} = 58°$ en $\hat{B} = 67°$.
Bereken $\hat{C}$.

$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$
$= 180° - 58° - 67°$
$= 55°$

ANTWOORD: $\hat{C} = 55°$

b In ΔDEF is $\hat{D} = 130°$ en $\hat{F} = 25°$.
Bereken $\hat{E}$.

$\hat{E} = 180° - \hat{D} - \hat{F}$
$= 180° - 130° - 25°$
$= 25°$

ANTWOORD: $\hat{E} = 25°$

c ΔXYZ is gelijkbenig.
De tophoek $\hat{Y} = 84°$. Bereken $\hat{X}$.

$\hat{X} = \dfrac{180° - 84°}{2}$
$= \dfrac{96°}{2}$
$= 48°$

ANTWOORD: $\hat{X} = 48°$

d In ΔABC is $\hat{C}$ dubbel zo groot als $\hat{A}$.
Bereken $\hat{B}$ als je weet dat $\hat{A} = 26°$.

$\hat{C} = 2 \cdot \hat{A} = 2 \cdot 26° = 52°$
$\hat{B} = 180° - \hat{C} - \hat{A}$
$= 180° - 52° - 26°$
$= 102°$

ANTWOORD: $\hat{B} = 102°$

e ΔDEF is rechthoekig in $\hat{D}$.
Bereken $\hat{E}$ als je weet dat $\hat{F} = 42°$.

$\hat{E} = 180° - \hat{D} - \hat{F}$
$= 180° - 90° - 42°$
$= 48°$

ANTWOORD: $\hat{E} = 48°$

f ΔDEF is $\hat{D} = 27°$ en $\hat{E} = 4\hat{D}$.
Bereken $\hat{F}$.

$\hat{E} = 4 \cdot \hat{D} = 4 \cdot 27° = 108°$
$\hat{F} = 180° - \hat{D} - \hat{E}$
$= 180° - 27° - 108°$
$= 45°$

ANTWOORD: $\hat{F} = 45°$

g Bij een gelijkbenige driehoek is de tophoek 100°. Hoe groot is elke basishoek?

$$\frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

ANTWOORD: Elke basishoek is 40°.

h Van een gelijkbenige stomphoekige driehoek is één scherpe hoek 22°. Hoe groot is de stompe hoek?

$$180^\circ - 22^\circ - 22^\circ = 136^\circ$$

ANTWOORD: De stompe hoek is 136°.

i In een rechthoekige driehoek is een scherpe hoek viermaal zo groot als de andere scherpe hoek. Hoe groot is de kleinste hoek in deze driehoek?

$$\begin{aligned} 90^\circ + \alpha + 4\alpha &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ 5\alpha &= 90^\circ \\ &\Updownarrow \\ \alpha &= 18^\circ \end{aligned}$$

ANTWOORD: De kleinste hoek is 18°.

j Hoe groot zijn de basishoeken in een rechthoekige, gelijkbenige driehoek?

$$\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

ANTWOORD: De basishoeken zijn elk 45°.

k In een driehoek is de ene hoek dubbel zo groot als de kleinste hoek. De andere hoek is het drievoud van de kleinste hoek. Bepaal de grootte van elke hoek van de driehoek.

$$\begin{aligned} \alpha + 2\alpha + 3\alpha &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ 6\alpha &= 180^\circ \\ &\Updownarrow \\ \alpha &= 30^\circ \end{aligned}$$

ANTWOORD: De hoeken zijn 30°, 60° en 90°.

l In ΔPQR is $\hat{P} + \hat{Q} = 58^\circ$ en $\hat{P} - \hat{Q} = 26^\circ$. Bepaal de grootte van $\hat{P}$, $\hat{Q}$ en $\hat{R}$.

$$\begin{aligned} \hat{P} + \hat{Q} &= 58^\circ \\ + \quad \hat{P} - \hat{Q} &= 26^\circ \\ \hline 2\hat{P} &= 84^\circ \\ \hat{P} &= 42^\circ \end{aligned}$$

$$\hat{Q} = 58^\circ - 42^\circ = 16^\circ$$

$$\hat{R} = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$$

ANTWOORD: De hoeken zijn 42°, 16° en 122°.

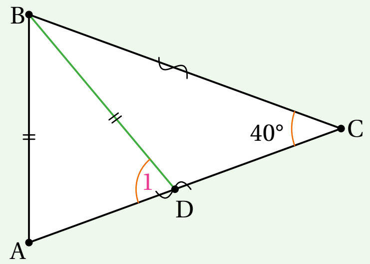
14 Bekijk aandachtig de figuur en bepaal $\widehat{D}_1$ als je weet dat $|AB| = |DB|$ en $|AC| = |BC|$. Geef ook een verklaring.

ΔABC is gelijkbenig

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \frac{180° - 40°}{2} \\ &= \frac{140°}{2} \\ &= 70°\end{aligned}$$

ΔABD is gelijkbenig

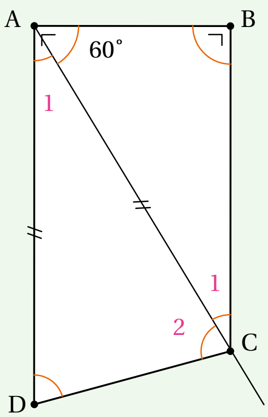
$\widehat{A} = \widehat{D}_1 = 70°$

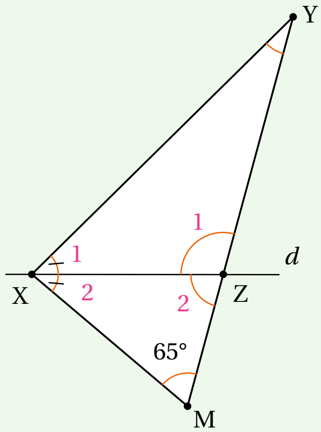


15 Bepaal zonder te meten.

a De hoeken $\widehat{A}_1$, $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$ en $\widehat{D}$.

b De hoeken $\widehat{Z}_1$, $\widehat{Z}_2$ en $\widehat{Y}$ als je weet dat $\widehat{X}_1 = \widehat{X}_2 = 40°$.





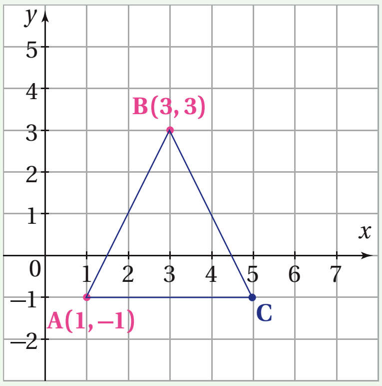
- in ΔABC: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}_1 = 180°$
  $60° + 90° + \widehat{C}_1 = 180°$
  $\widehat{C}_1 = 180° - 60° - 90°$
  $\widehat{C}_1 = 30°$
- $\widehat{A}_1 = 90° - 60°$
  $= 30°$
- in ΔABC: $\widehat{C}_2 = \widehat{D} = \frac{180° - 30°}{2}$
  $= 75°$

- in ΔXZM: $\widehat{X}_2 + \widehat{Z}_2 + \widehat{M} = 180°$
  $40° + \widehat{Z}_2 + 65° = 180°$
  $\widehat{Z}_2 = 180° - 40° - 65°$
  $\widehat{Z}_2 = 75°$
- $\widehat{Z}_1 + \widehat{Z}_2 = 180°$
  $\widehat{Z}_1 + 75° = 180°$
  $\widehat{Z}_1 = 180° - 75°$
  $\widehat{Z}_1 = 105°$
- in ΔXYZ: $\widehat{Y} = 180° - 40° - 105°$
  $= 35°$

16 In een assenstelsel zijn de punten A en B getekend zodat co(A) = (1, –1) en co(B) = (3, 3).

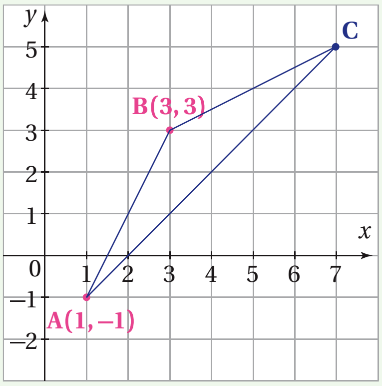
Bepaal co(C) zodat:

a ΔABC gelijkbenig is en scherphoekig.



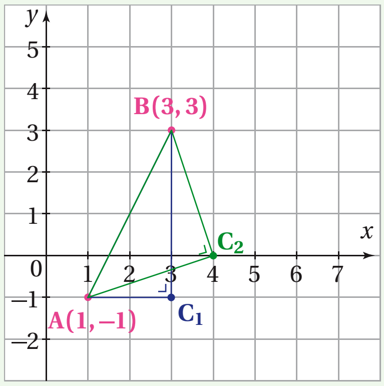
co(C) = (5, –1)

b ΔABC gelijkbenig is en stomphoekig.



co(C) = (7, 5)

c ΔABC rechthoekig is in C.



co(C_1) = (3, –1)
co(C_2) = (4, 0)

Controleer nadien je antwoorden met GeoGebra.

17 Teken deze driehoeken met behulp van ICT.

a Teken een driehoek ABC met |AB| = 9, $\widehat{A}$ = 36° en |AC| = 4.

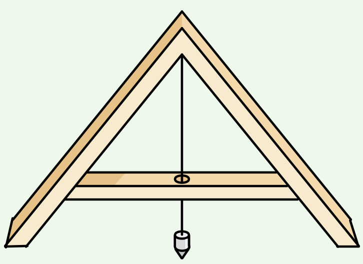
b Teken een gelijkbenige driehoek DEF met tophoek $\widehat{F}$ = 50° en |EF| = 3.

c Teken een gelijkzijdige driehoek met omtrek 18.

d Teken een driehoek XYZ met |XY| = 6, $\widehat{X}$ = 45° en $\widehat{Y}$ = 35°.

De gelijkbenige driehoek als waterpas

De Egyptenaren gebruikten geen waterpas om na te kijken of iets volkomen horizontaal was. In plaats daarvan gebruikten ze een houten instrument in de vorm van de letter A. Aan de top van dit instrument was een touwtje bevestigd met daaraan een gewichtje. Door ervoor te zorgen dat het touw met het gewichtje (dat steeds verticaal hing) door het midden van het verbindingsstuk ging, had men zekerheid dat dit latje horizontaal stond. Ze maakten hier gebruik van de eigenschap dat in een gelijkbenige driehoek (de letter A) de zwaartelijn (verticaal touwtje door het midden van het latje) ook de hoogtelijn was. Het touwtje stond dus loodrecht op de drager van de overstaande zijde: het onderste latje was dus mooi waterpas.



18 Teken onderstaande driehoeken op papier of met ICT.

a ΔABC met $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 4$ cm en $\widehat{B} = 40°$.

b ΔDEF waarvan een zijde 4 cm lang is, een andere zijde 5,5 cm lang is en de ingesloten hoek 100° is.

c ΔGHI met $|GH| = 5{,}5$ cm, $\widehat{G} = 30°$ en $\widehat{H} = 75°$.

d ΔMNP met $|MN| = 5$ cm, $|NP| = 4{,}5$ cm en $|MP| = 3$ cm.

e ΔJKL waarvan een zijde 5 cm lang is en de aanliggende hoeken aan die zijde 45° en 60° meten.

f Een gelijkbenige driehoek RST met tophoek $\widehat{R} = 50°$ en $|ST| = 4$ cm.

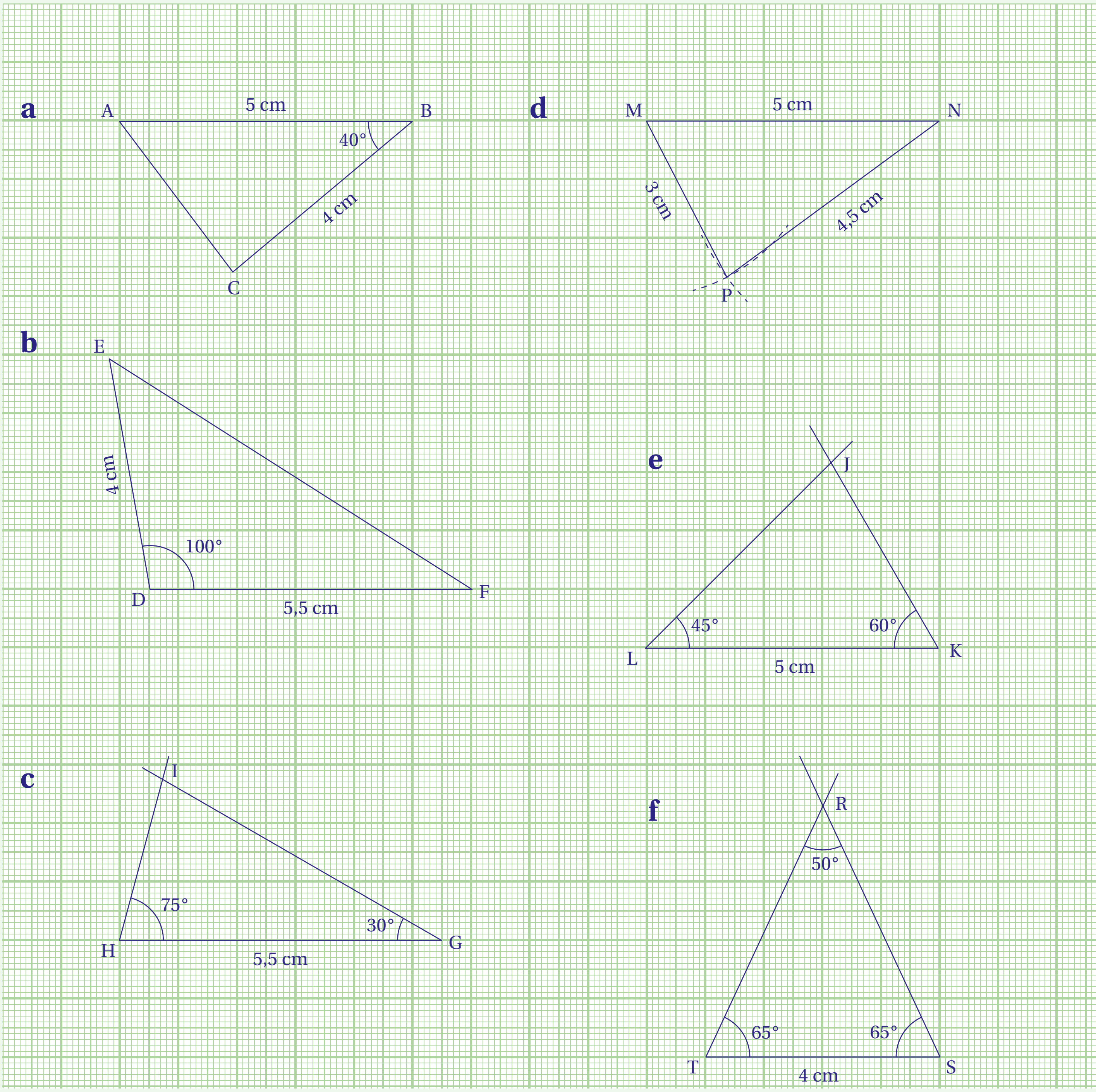
g Een gelijkbenige driehoek UVW met een hoek van 120° en de overstaande zijde die 7 cm lang is.

h Een rechthoekige driehoek XYZ met $\widehat{X} = 90°$, $\widehat{Y} = 55°$ en $|XZ| = 6$ cm.

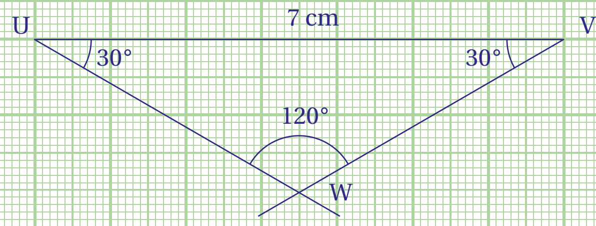
i Een gelijkbenige driehoek met een basis van 5 cm en een basishoek van 35°.

j Een gelijkbenige driehoek waarbij de basis 4 cm is en een been 8 cm lang is.

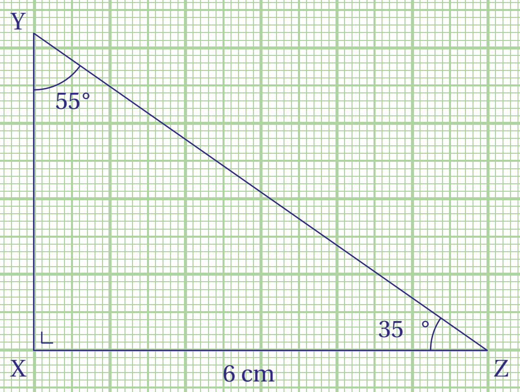
k Een gelijkzijdige driehoek waarvan de omtrek 2,1 dm is.



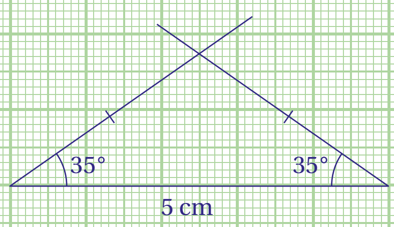
g



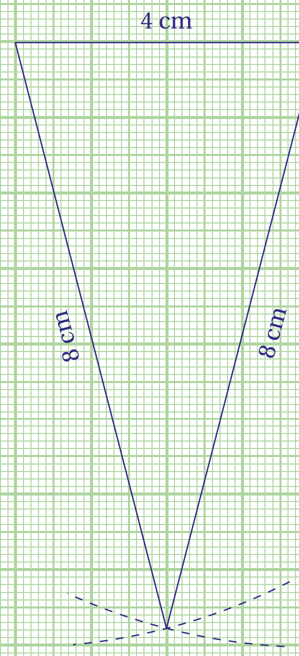
h



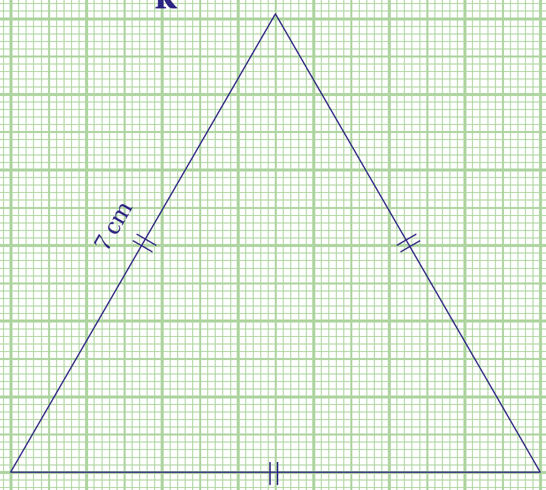
i



j

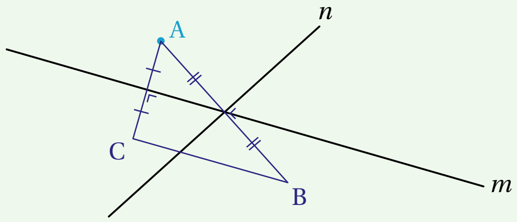


k



19 Bij deze drie tekenopdrachten maak je vooraf een analyse. Teken op papier of met ICT.

a Teken de driehoek ABC als je weet dat m de middelloodlijn is op [AC] en n de middelloodlijn op [AB].

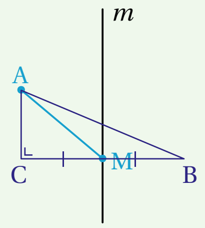


ANALYSE

- als m = ml[AC] en A is gegeven,
  dan vind je C;
- als n = ml[AB] en A is gegeven,
  dan vind je B.

(We gebruiken ml als afkorting voor middelloodlijn.)

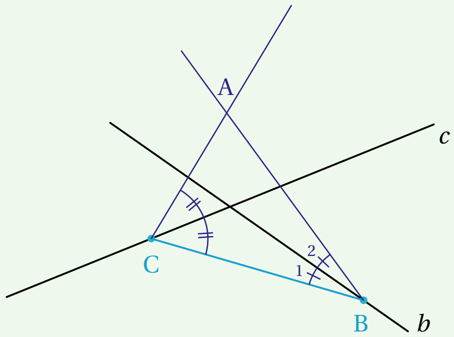
b Teken de rechthoekige driehoek ABC als je weet dat [AM] de zwaartelijn is vanuit A, $\widehat{C}$ een rechte hoek is en de rechte m de middelloodlijn is op de zijde [BC].



ANALYSE

- als m = ml[BC], dan is $m \perp$ BC en
  $\widehat{C} = 90°$ dus AC $\perp$ BC;
- |MB| = |MC| want m is de middelloodlijn.

c Teken driehoek ABC als gegeven is dat de rechte c de bissectrice is van $\widehat{C}$ en de rechte b de bissectrice is van $\widehat{B}$.



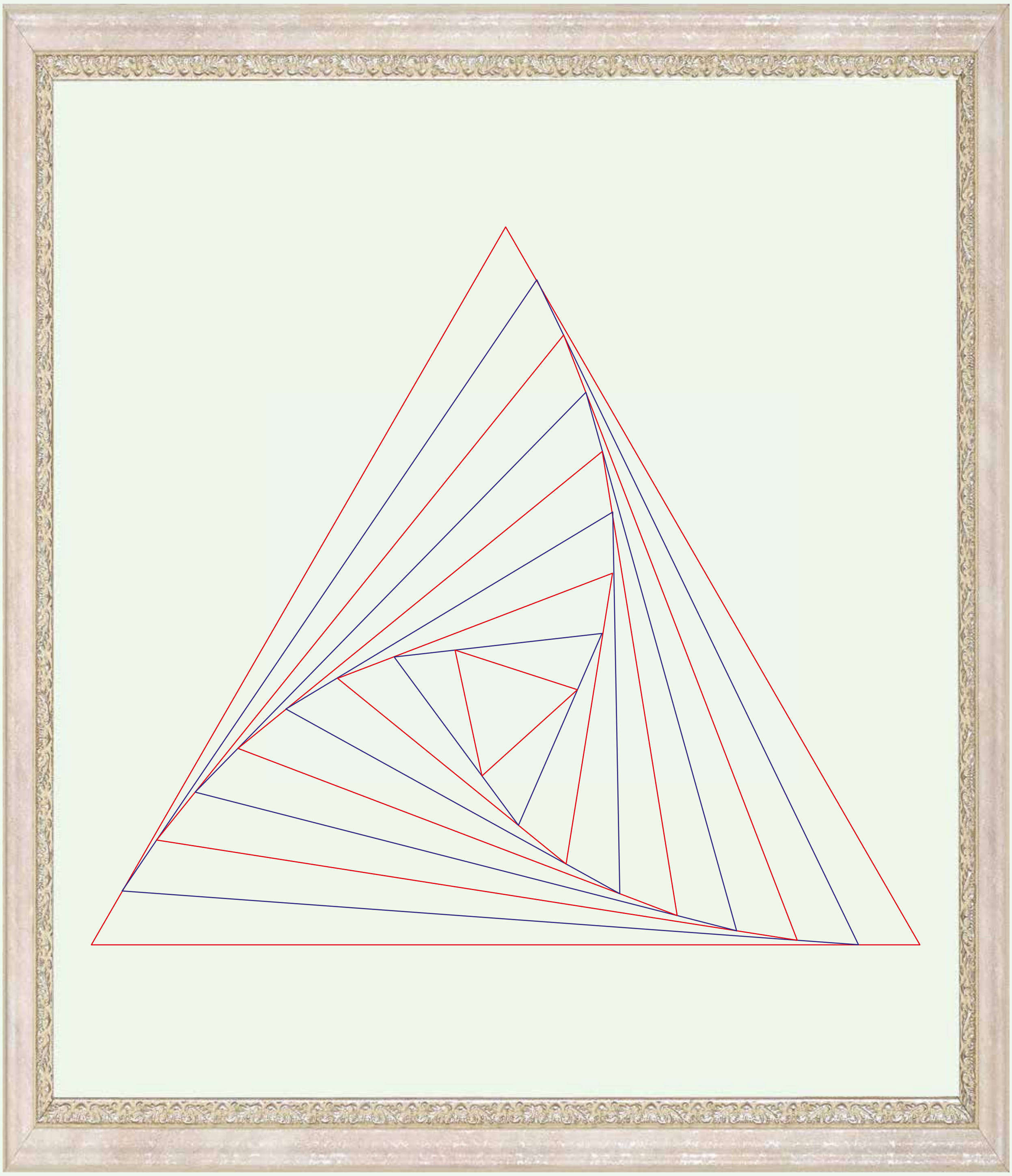
ANALYSE

- als b de bissectrice is van $\widehat{B}$, dan is $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$;
- als c de bissectrice is van $\widehat{C}$, dan is $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$.

20 WISKUNDE & ARTISTIEKE VORMING

a Teken een grote gelijkzijdige driehoek. Pas op elke zijde van de driehoek een lijnstukje van dezelfde lengte af. Hoe kleiner dit lijnstukje is, hoe mooier de tekening zal worden. Verbind de punten: je verkrijgt opnieuw een gelijkzijdige driehoek. Herhaal bovenstaande werkwijze met de nieuwe driehoek. Als je dit verschillende keren na elkaar toepast, krijg je een mooie figuur. Kleur je ze creatief in?
Geef ook een titel aan je kunstwerk.

b Er zijn nog heel wat andere manieren om op een creatieve manier met driehoeken mooie figuren te tekenen. Hier krijg je nog een voorbeeld: teken een gelijkzijdige driehoek. Neem van elke zijde het midden en verbind die punten: je krijgt opnieuw een gelijkzijdige driehoek (en zelfs meer dan één). Herhaal deze werkwijze tot …



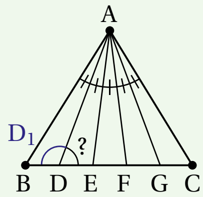
21 Bart tekent twee driehoeken: een scherphoekige en een stomphoekige. Hij meet de zes hoeken en schrijft er vier op: 120°, 80°, 55° en 10°. Hoe groot is de kleinste hoek van de scherphoekige driehoek?

(A) 5° (B) 10° (C) 45° (D) 55° (E) onmogelijk te bepalen

WALLABIE 2009 probleem 12 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

In de stomphoekige driehoek zit een hoek van 120° (stomp) en zeker niet 80°. In de scherphoekige driehoek zit al zeker 80° en niet 10°, dus wel 55°. 180° – 80° – 55° = 45°

22 Op de zijde [BC] van een gelijkzijdige driehoek ΔABC liggen de punten D, E, F en G zodanig dat de lijnstukken [AD], [AE], [AF] en [AG] de hoek $B\widehat{A}C$ in gelijke hoeken verdelen.
Hoe groot is de hoek $A\widehat{D}C$?



(A) 70° (B) 72° (C) 75° (D) 78° (E) 80°

JWO 2024 eerste ronde, probleem 20 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

ΔABC is gelijkzijdig $\longrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$
in ΔABD: $\widehat{A} = 12°$ en $\widehat{B} = 60° \longrightarrow \widehat{D}_1 = 180° - 72° = 108°$
$\widehat{D}_? = 180° - 108° = 72°$

23 Vier snoepjes hebben aardbeismaak. Zes snoepjes hebben ananassmaak. Tien snoepjes hebben kersensmaak. Hoeveel snoepjes moet je uit de zak halen om er zeker van te zijn dat er minstens twee van elke smaak uit de zak zijn gehaald?

We gaan uit van het slechtste scenario:
Je haalt eerst de 10 kersensnoepjes uit de zak, daarna haal je de 6 ananassnoepjes eruit. Nu blijven er dus maar 4 snoepjes over: de 4 aarbeiensnoepjes. Je neemt er hier 2 van. In totaal haalde je 18 snoepjes uit de zak.

ANTWOORD: Als je 18 snoepjes uit de zak haalt, heb je er minstens twee van elke smaak.

24 In onze school doen 30 jongens en 20 meisjes mee aan de Kangoeroewedstrijd. Van de jongens wint 10% een prijs en van de meisjes is dat 20%. Hoeveel procent van alle deelnemers uit onze school wint een prijs?

Aantal deelnemers: 30 + 20 = 50
Aantal jongens die een prijs winnen: 10% van 30 = 3
Aantal meisjes die een prijs winnen: 20% van 20 = 4

ANTWOORD: Er winnen dus 7 van de 50 deelnemers een prijs. Dat is 14% van de deelnemers.