Contents

Algebra e Geometria

A.A. 2022/2023

Luca Marchi

1 Sezione prima

1.1 Insiemi

Prodotto cartesiano: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} : \{(a,b) = a \in A, b \in B\}$.
Una **relazione** é un sottoinsieme del prodotto cartesiano di due o più insiemi, quindi una relazione su A é un sottoinsieme di $A \times A$ (scelgo alcune coppie di $A \times A$).
Scrivo $a_1 R a_2$ se $(a_1, a_2) \in R$ e dico "a_1 é in relazione con a_2".

Def. Una relazione é di **equivalenza** se rispetta le seguenti proprietà:

- Riflessiva: se $aRa \forall a \in A$ (ogni elemento é in relazione con se stesso
- Simmetrica: se $a_1 R a_2$ allora $a_2 R a_1$
- Transitiva: se $a_1 R a_2 e a_2 R a_3$ allora $a_1 R a_3$

1.2 Funzioni o applicazioni

$f : X \longrightarrow Y$

- f é **Iniettiva** se "elementi diversi vanno in elementi diversi", cioè $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f é **Suriettiva** se "ogni elementi di Y viene da qualche elemento di X", cioè se $\forall y \in Y$, $\exists\, x \in X \ / \ y = f(x)$.
- f é **Biunivoca** se é sia **iniettiva** sia **suriettiva**, cioè ogni elemento di Y viene da uno e un solo elemento di X, $\forall y \in Y$, $\exists!\, x \in A \ / \ y = f(x)$.
  f^{-1} da Y a X é la funzione inversa.

Esempi:

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, non iniettiva, non suriettiva (es -2 non é x^2 per nessun $x \in \mathbb{R}$)
- $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, é iniettiva, ma non suriettiva
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = x^2$, é suriettiva ma non iniettiva
- $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = x^2$, è sia suriettiva sia iniettiva quindi biunivoca. Esiste la funzione inversa e vale: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

1.3 Numeri

Naturali : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$, operazioni definite: $+, \cdot$, non sono presenti né gli opposti né gli inversi.

Interi : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3...\}$, operazioni definite: $+, \cdot, -$, non sono presenti gli inversi.

Razionali : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, operazioni definite : $+, \cdot, -, :$, non sono presenti i limiti $(-\infty, +\infty)$.

Reali : $\mathbb{R} = \{-\infty ... \ 0 ... + \infty\}$, non sono presenti le radici dei numeri negativi

Complessi : $\mathbb{C} = \{a + bi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, $\boldsymbol{i^2 = -1}$, i é chiamata $\rightarrow$ unità immaginaria.

1.3.1 Campi

Def: $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é un **campo** se:

1. valgono le proprietà commutativa, associativa e distributiva su $+, \cdot$.
2. esistono elementi neutri, rispettivamente (0,1).
3. ogni $x \in \mathbb{K}$ ha opposto $-x/x + (-x) = 0$,ogni $x \in \mathbb{K}, x \neq 0$ ha inverso $x^{-1}/(x \cdot x^{-1} = 1)$

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono campi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ no.

1.3.2 Campi finiti

Dato un numero intero $n \geq 0$, definiamo su $\mathbb{Z}$ la relazione di equivalenza

$$a \equiv b(n) \iff \exists k \in Z : a - b = k \cdot n$$

essa rispetta tutte e 3 le proprietà che definiscono un campo. Definiamo $[b] = \{a \in Z : a \equiv b(n)\}$ e $Z_n = \{[0], [1], ..., [n-1]\}$.

Es. in $Z_2 = \{[0], [1]\}$, [0] sono i numeri pari, [1] quelli dispari.

Definiamo su Z_n le operazioni:

$$[a] + [b] = [a + b], [a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

Es. Possiamo scrivere, con la notazione dei campi finiti, il prodotto tra numeri interi:
Dato Z_2: $[0] \cdot [0] = [0], [0] \cdot [1] = [0 \cdot 1] = [0], [1] \cdot [1] = [1 \cdot 1] = [1]$.

Z_n é un campo $\iff$ n é **primo**. Se n non é primo, non esisterà l'inverso di un fattore di n, ovvero non esisterà nessuna classe di elementi che se moltiplicata con la classe del fattore restituisca classe 1.

1.4 Spazio vettoriale

<u>**Def**</u>: uno **spazio vettoriale** definito su campo $\mathbb{K}$, é un insieme V con due operazioni:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad (v_1, v_2) \to v_1 + v_2$$

$$\cdot : \underbrace{\mathbb{K}}_{costante} \times V \longrightarrow V \qquad (a, v) \to av$$

Gli elementi di V sono detti **vettori**, gli elementi di $\mathbb{K}$ sono detti **scalari**.
$(+, \cdot)$ verificano le seguenti proprietà: $+$ é commutativa, associativa, con elemento neutro (vettore nullo) e opposti $(-v)$, $\cdot$ é associativa, distributiva rispetto alla somma e con elemento neutro.

$v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad \forall v_1, v_2 \in V$

$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$

Esiste un "vettore nullo" $0 \in V \ / \ 0 + v = v \quad \forall v \in V$

$\forall v \in V \ \exists - v/v + (-v) = 0$

$a(bv) = (ab)v \qquad (a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v, \quad a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$

Esempi di spazi vettoriali:

1. Somma vettoriale metodo del parallelogramma:

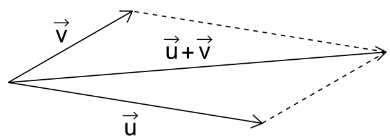

Figure 1: Somma di vettori

2. $\forall \ \mathbb{K}, \mathbb{K}^n$ é uno spazio vettoriale $\mathbb{K}^n = \{(x_1 ... x_n), x_i \in \mathbb{K} \ \forall \ i = 1...n\}$ su $\mathbb{K}$
   $v = (x_1 ... x_n) \quad u = (y_1 ... y_n) \quad a \in \mathbb{K}$
   $v + u = (x_1 + y_1 ... x_n + y_n) \quad av = (ax_1 ... ax_n)$
   Quindi $\mathbb{R}^n$ é uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, ${\mathbb{Z}_p}^n$ é uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}_p$ etc...

3. I polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[x]$ sono uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto alle operazioni usuali.

4. Se X é un insieme $V = \{$ funzione $X \to \mathbb{K}\}$ é uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con le operazioni:
   - $(f + g)(x) \ = \ f(x) + g(x) \quad \forall x \in X, \ \forall \ f, g \in \ V$
   - $(a \cdot f)(x) \ = \ a \cdot f(x) \quad \forall a \in \ \mathbb{K}$

1.5 Sottospazio vettoriale

<u>Def</u>: Un sottoinsieme non vuoto $U \subseteq V$ é un **sottospazio vettoriale** di V se é chiuso rispetto a tali operazioni, cioè:

$$\forall v_1, v_2 \in U \Longrightarrow v_1 + v_2 \in U$$

$$\forall v_1 \in U, \forall a \in \mathbb{K},\ a \cdot v_1 \in U$$

Esempi:

1. $V = \mathbb{R}^2$ spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$
   $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 2x\}$, é un SSV? (mi sto chiedendo se U sottoinsieme di V soddisfi le proprietà per essere un sottospazio vettoriale).
   se $v_1 = (x_1, y_1) \in U \Longrightarrow y_1 = 2x_1$
   se $v_2 = (x_1 + y_2) \in U \Longrightarrow y_2 = 2x_2$
   $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e $y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2 \Longrightarrow v_1 + v_2 \in U$(soddisfa l'operazione $+$)
   Inoltre $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot v_1 = (ax_1, ay_1)$ e $ay_1 = 2(ax_1) \Longrightarrow a \cdot v_1 \in U$ (soddisfa l'operazione $\cdot$)
   $\Longrightarrow U$ é un SSV.

2. $V = \mathbb{R}^2$ spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$
   $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$, é un SSV? No! Non lo é.
   Se prendo ad esempio $v_1 = (1, 0)\ e\ v_2 = (0, 1) \in C$, ma $v_1 + v_2 = (1, 1) \notin C$ e $2v_1 \notin C$

3. $V = \mathbb{R}^2$ spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$
   $W = \{(x, Y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \in \mathbb{Z}\}$, é un SSV?
   $\forall v_1, v_2 \in W, v_q + v_2 \in W$? Sì (soddisfa la prima operazione.
   $\forall v_1 \in W, \forall a \in \mathbb{R}\ a \cdot v_1 \in W$? No! (non soddisfa la seconda operazione), per esempio $\frac{1}{2} \cdot (1, 0) = (\frac{1}{2}, 0) \notin W$

4. $V = \mathbb{R}^2$ spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$
   $S = \{(x, Y) \in \mathbb{R}^2 / \ xy \geq 0\}$, é un SSV?
   $\forall v \in S,\ a \in \mathbb{R}\ av \in S$?, Si (soddisfa la seconda operazione)
   $\forall v_1, v_2 \in S,\ v_1 + v_2 \in S$? No! (non soddisfa la seconda operazione)
   $\Rightarrow S$ non é un SSV di V.

5. $V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}^3)$ spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$
   $U = \{(x, y, z) \in V \ / \ z = 1\} = \{(x, y, 1), x, y \in \mathbb{R}\}$, é un SSV?
   $u_1 = (x_1, y_1, 1),\ u_2 = (x_2, y_2, 1) \quad u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) \notin U$
   $\Longrightarrow U$ non é SSV.

6. $V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}^3)$ spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$
   $W = \{(x, y, z) \in \ V/; z = 0\} = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}$ é un SSV?
   se $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in W$, (soddisfa la prima operazione)
   se $a \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow aw \in W \Rightarrow W$ é un SSV (soddisfa anche la seconda condizione)

7. $V = \mathbb{R}[x] = \{polinomi\ a\ coef.\ in\ \mathbb{R}\}$
   $U = \{polinomi\ di\ grado\ 2\}$, é un SSV?
   $u_1 = x^2 - 3x + 4,\ u_2 = -x^2 + x - 2 \quad u_1 + u_2 = -2x + 2$, (grado 1) $\Rightarrow \notin U$, (non soddisfa la prima operazione)
   $\Longrightarrow U$ non è SSV.

8. $V = \{funzioni\ da\ \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}\}$
   $U = \{funzioni\ continue\ da\ \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$, é un SSV? Sì
   La somma di funzioni continue sarà a sua volta una funzione continua quindi $\in U$, soddisfa sia la prima sia la seconda operazione.

OSS: U é un SSV di $V \iff \forall u_1, u_2 \in U\ \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K},\ \underline{a_1 u_1 + a_2 + u_2 \in U}$.
Dim: $\Rightarrow$ se U é un SSV e $u_1, u_2 \in U \Rightarrow a_1u_1, a_2u_2 \in U\ \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}$
$\Leftarrow$ se $a_1u_1 + a_2u_2 \in U \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, in particolare prendendo $a_1 = 1, a_2 = 1$, ho che $u_1 + u_2 \in U$, e prendendo un qualsiasi $a_2 = 0$ ho che $a_1u_1 \in U$, cioè V è un SSV. #

Def : Dati $v_1, v_2...v_n \in V$, diciamo che $v \in V$ é una **combinazione lineare** di $v_1, v_2...v_n$ se esistono $a_1, a_2...a_n \in \mathbb{K}\ /\ v = a_1v_1 + a_2 + v_2... + a_nv_n$. Per quanto osservato nella pagina precedente, U é un SSV $\iff$ contiene tutte le combinazioni lineari di tutti i propri elementi.

Esempi:

1. $V = \mathbb{R}^2 \quad v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v = (3, -2)$, v é comb. lin. di v_1, v_2?
   Sì perchè $\exists a_1 = 3, a_2 = -2 \in \mathbb{R}\ /\ 3v_1 - 2v_2 = (3, -2) = v$

2. $V = \mathbb{R}^2\ u_1 = (2, 0), u_2 = (-1, 0), v = (3, -2)$, v é comb. lin. di u_1, u_2? No! $a_1u_1+a_2+u_2 = (2a_1, 0) = (2a_1, 0) + (-a_2, 0) = (2a_1 - a_2, 0) \neq v = (3, -2)$

Diciamo che un SSV U di V é **generato** da $\{v_1...v_n\}$ se ogni $u \in U$ é comb. lin. di $v_1...v_n$, cioè se $\forall u \in U\ \exists a_1...a_n \in \mathbb{K}\ /\ u = a_nv_1 + ...a_nv_n)$. In questo caso diciamo anche che U é lo **span** di $v_1...v_n$ e scriviamo $U =< v_1...v_n >$

Esempio:

1. $V = \mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w), x, y, z, w \in \mathbb{R}\},\ v_1 = (2, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, -1, 0)$
   Il SSV generato da v_1, v_2 é $< v_1, v_2 > = \{a_1v_1 + a_2v_2, a_1a_2 \in \mathbb{R}\} =$
   $= \{(2a_1, 0, 0, 0) + (0, a_2, -a_2, 0), a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} =$
   $= \{(2a_1, a_2, -a_2, 0), a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^2\ /\ y + z = 0, w = 0\}$

2. $V = \mathbb{R}[x]$, il SSV generato dallo span $< 1, x, x^2 > = \{a_01 + a_1x + a_2x^2\} = \{$ tutti i polinomi di grado $\leq 2\}$

3. $V = \mathbb{R}^3 \quad v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0)$
   $< v_1, v_2 >= \{a_1v_1 + a_2v_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ z = 0\}$
   $v_3 = (0, 0, 0)\ v_4 = (2, 1, 0)\ v_5 = (-1, 3, 0)$
   Lo span di questi 5 vettori resta uguale allo span $< v_1, v_2 >$, quindi v_3, v_4, v_5 sono "inutili" perché aggiungendoli non ottengo nulla di nuovo (tutti e tre si possono ricavare da $v_1 e v_2$). Diremo che sono **linearmente dipendenti**.

Def: Un insieme di vettori $\{v_1, v_n\}$ é **linearmente indipendente**
1) se nessun vettore é comb. lin. degli altri.
2) cioè se l'unica comb. lin. di $v_1...v_n$ che dà 0 é quella $a_1 = 0...a_n = 0$, se $a_1v_1 + ...a_nv_n = 0 \Longrightarrow a_1 = 0...a_n = 0$.
Un insieme di vettori é **linearmente dipendente** se non é linearmente indipendente.

Perché le due definizioni sopra elencate sono equivalenti?:
Se 1) é falsa, c'è un v_i, supponiamo $v_1\ /\ v_1 = a_2v_2 + a_n...v_n$.
Ma allora $0 = -v_1 + a_2v_2 + a_n...v_n$ cioè 2) é falsa.

Se invece 2) è falsa, cioè $\exists a_1 ... a_n$ con almeno un $a_i \neq 0$ / $a_1 v_1 + a_n + v_n = 0$ allora $v_i = \frac{a_1}{a_i} v_1 + \frac{a_n}{a_i} v_n$ cioè 1) é falsa.

Esempio:
$V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (-1, 2)$ $v_2 = (2, 4)$
$\{v_1, v_2\}$ é lin. dipendente perché $v_2 = -2v_1$, cioè $2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = (0, 0)$ e $(2, 1) \neq (0, 0)$.

1.6 Base

<u>**Def**</u>: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, diciamo che $\{v_1, ... v_n\}$ é una **base** di V se $\{v_1, ... v_n\}$ é lin. indipendente e genera V.
Esempio:

$$\begin{cases} \{(1,1),(2,2)\} \text{ non é ind. e non genera V} \\ \{(1,0),(0,1)(1,1) \text{ non é ind. ma genera } \mathbb{R}^2 \\ \{(1,0)\} \text{ é indip. ma non genera } \mathbb{R}^2 \end{cases} \implies \text{non sono basi}$$

$\{(1, 0), (0, 1)\}$ é indip. e genera $\mathbb{R}^2$

Sia V uno spaio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ e sia $B = \{v_1 ... v_n\}$.

<u>**Def**</u>:

1. B **genera** V se ogni elemento di $V(v \in V)$ é combinazione lineare di $v_1 ... v_n$, cioè $\forall v \in V \exists a_1 ... a_n \in \mathbb{K}$ / $v = a_1 \cdot v_1 ... a_n \cdot v_n$.
2. B è linearmente indipendente.
3. B é una base di V se genera V ed é linearmente indipendente.

TEOREMA 1 *B è una base $\iff$ ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come comb. lin. di $v_1 ... v_n$, cioè $\forall v \in V \exists! a_1 ... a_n \in \mathbb{K}$ / $v = v_1 a_1 ... v_n a_n$.*

<u>**Def:**</u> in questo caso $a_1 ... a_n$ sono detti le coordinate di V nella base B.

Dim: $\implies$ Sia B una base e $V \in V$ poiché B genera $V, \exists a_1 ... a_n$ / $v = a_1 v_1 ... a_n v_n$. Per mostrare l'unicità supponiamo che $\exists b_1 ... b_n$ / $v = b_1 v_1 ... b_n v_n$.

$$\underbrace{v - v}_{=0} = a_1 v_1 ... a_n v_n - (b_1 v_1 ... b_n v_n) = (a_1 - b_1) v_1 + ... + (a_n - b_n) v_n.$$

Ho una comb. lin. che genera un vettore nullo, poichè B é lin. indipendente questo implica che $a_1 - b_1 = 0 ... a_b - b_n = 0$, cioè $a_1 = b_1 ... a_n = b_n$.
$\impliedby$ se $\forall v \in V \exists! a_1 ... a_n \in \mathbb{K}$ / $a_1 v_1 + a_n v_n = v$ allora B genera V. Inoltre $0v_1 + ... + 0v_n = 0$ é l'unica comb. lin. che dà 0: vettore nullo. Quindi B é lin. indip. $\Rightarrow B$ è una base.

Esempi:

- $X_1 = \{v_1 = (0, 1)\}$ non é una base perché non genera $V = \mathbb{R}^3$ e infatti, dato $v_2 = (2, 3)$, non esiste $a_1 \in \mathbb{R}$ / $a_1 v_1 = v_2$.
- $X_2 = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1)\}$ non é una base perché non é lin. indipendente. Infatti $v = (2, 3) = 2v_1 + 3v_2 + 0v_3 = 0v_1 + v_2 + 2v_3$ quindi a_1, a_2, a_3 non sono unici.

- Dimostro che $B = \{u_1 = (1,1), u_2 = (1,-1)\}$ é una base.
  $\forall v = (x,y) \exists! a_1, a_2 \ / \ \underbrace{a_1 u_1 + a_2 u_2}_{(a_1+a_2, a_1-a_2)} = (x,y)$
  $\begin{cases} a_1 + a_2 = x & 2a_1 = x + y \quad a_1 = \frac{x+y}{2} \\ a_1 - a_2 = y & 2a_2 = x - y \quad a_2 = \frac{x-y}{2} \end{cases}$
  Quindi $\forall v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \exists! a_1, a_2 \ / \ v = a_1 v_1 + a_2 v_2$ ad esempio $v = (2,3) = \frac{5}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2$.

1.6.1 Basi canoniche

Una base per lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$ é: $e_1 = (1, 0, 0...0), e_2 = (0, 1, 0...0), e_n = (0, 0, ...1)$. In effetti $v = (x_1, x_2 ... x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... x_n e_n$ quindi $\exists! \ x_1 ... x_n \Rightarrow \{e_1 ... e_n\}$ é una base, detta la **base canonica** di $\mathbb{R}^n$.

Sia $V = \mathbb{R}[x]$ = polinomi a coeff. in $\mathbb{R}$.
Una base $V = \{1, x, x^2, x^3 ...\}$(base canonica dei polinomi) ad esempio, troviamo le coordinate di $p(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{2}$ in questa base.
$p(x) = \frac{1}{2} 1 + (-4)x + 0x^2 + 1x^3 + 0x^4 ...$
Sottospazio U=polinomi di grado ≤ 2
Base canonica: $\{1, x, x^2\} = \{ax^2 + bx + c\}$.

1.6.2 Estrarre e completare

Def: sia X un insieme di vettori che genera V. **Estrarre** una base da X significa trovare un $B \subseteq X$ che sia una base di U. Esempio:
$V = \mathbb{R}^2 \quad X = \{v_1 = (1,0) \ v_2 = (2,0) \ v_3 = (0,1) \ v_4 = (0,0)\}$
Base estratta da $X \Rightarrow B_1 = \{v_1, v_3\} \quad B_2 = \{v_2, v_3\}$.

Def: sia X un insieme lin.indip. in V, **completare** X ad uns base di V significa aggiungere ad X altri vettori in modo da ottenere una base.
Esempio:
$X = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
Non genera V perchè $< x >= \{a_1 v_1 + a_2 v_2\} = \{(a_1, a_1, a_2)\}$.
Sia $v_3 = (x,y,z)$ con $\boldsymbol{x \neq y}$ ad esempio $v_3 = (1,0,0)$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ é una base di $\mathbb{R}^3$. Ho **completato** $\{v_1, v_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$.

2 Sezione seconda

2.1 Dimensione

TEOREMA 2 *Tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale V su campo $\mathbb{K}$ hanno lo stesso numero di elementi.*

Def: Tale numero é detto la **dimensione** di V.
Esempi:

- $V = \mathbb{R}^3 \ U \subseteq V, \ U = \{(x,y,z) \in V \ / \ x - y = 0\}$
  Una base di U é data da $u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,0,1)$ infatti $\{u_1, u_2\}$ é lin. indip. e $< u_1, u_2 >= \{a_1 u_1 + a_2 + u_2\} = \{a_1, a_1, a_2\}$, quindi u_1, u_2 generano U.
  Qualunque altra base di U ha 2 elementi $\Longrightarrow$ dim U = 2.

- $W = \{(x, y, z) \in V \ / \ x - y = 0, x = 3z\}$
  $\{w_1 = (3, 3, 1)\}$ é una base di W $\Longrightarrow$ dim W = 1
  $< w_1 >= \{a_1 w_1, a_1 \in \mathbb{R}\} = \{3a, 3a, a\} = W$.

Sia V uno spazio vettoriale di **dimensione d** su campo $\mathbb{K}$.

1. ogni base di V contiene d elementi.
2. ogni insieme linearmente indipendente di V contiene k elementi, $k \leq d$; può essere completato ad una base aggiungendo d-k elementi in modo opportuno.
3. ogni insieme che genera V contiene g elementi, $g \geq d$, possiamo estrarre una base scegliendo in modo opportuno d vettori tra i g dell'insieme.
   NON VALE IL VICEVERSA (ogni insieme che contiene g elementi non genera V).

2.2 Forma cartesiana e parametrica

Sia U un sottospazio di dimensione d di uno spazio vett. di dimensione n ($d \leq n$).
Posso esprimere U in 2 modi:
1) **In forma cartesiana**: U é identificato in $\mathbb{R}^n$ da n-d equazioni tra loro lin. indip.
(ogni equazione toglie un grado di libertà).
2) **In forma parametrica**: U é espresso in funzione di d parametri.

Esempio:
In $v = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \underbrace{x = 2y, y = 3z, w = 0}_{equazioni\ cartesiane}\}$
dim U = 4(dimensione di V) - 3(eq. cartesiane) = 1.
Un altro modo per scrivere U é: $U = \{(6t, 3t, t, 0) \ t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ 1 parametro (dim U = 1).

Come si passa da cartesiana a parametrica?
Basta usare le equazioni cartesiane per esplicitare n-d coordinate in funzione delle altre. Le rimanenti sono i parametri.
Esempio:
$\{(x, y, z)\} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\}$ mi permette di scrivere $z = x + 2y$.
Quindi se $x = t, \ y = s, \ z = t + 2s \quad \{(t, s, t + 2s), t, s \in \mathbb{R}\}$.

Come si passa da parametriche a cartesiane?
Basta risolvere un sistema: $\{(t, -2t, s, t + 2s)\} \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x = t \quad 2x + y = 0 \\ y = -2t \quad x = t \\ z = s \quad z = s \\ w = t + 2s \quad x + 2z - w = 0 \end{cases}$$

OSS: per **intersecare** i sottospazi é più comoda la forma cartesiana. Invece per **trovare una base** di un sottospazio é più comoda la forma parametrica.

Esempio:
$U = \{(t, -2t, s, t + 2s)\} = \{(t, -2t, 0, t) + (0, 0, s, 2s)\} = \{t \underbrace{(1, -2, 0, 1)}_{v_1} + s \underbrace{(0, 0, 1, 2)}_{v_2}\}$
$= \{tv_1 + sv_2\} =< v_1, v_2 > \Longrightarrow v_1, v_2$ sono una base di U.

Prop: L'intersezione di sottospazi vettoriali é un sottospazio vettoriale.
Dim: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano U,W sottospazi.
$U \cap W = \{v \in V \ / \ v \in U, v \in W\}$, vogliamo mostrare che: se $v_1, v_2 \in U \cap W, v_1 + v_2 \in U \cap W$
In effetti dato che U e W sono sottospazi vettoriali e che $v_1, v_2 \in U, v_1, v_2 \in W$:
$\Longrightarrow v_1 + v_2 \in U, \ v_1 + v_2 \in W$
$\Longrightarrow v_1 + v_" \in U \cap W$
Analogamente se $v_\in U \cap W$ e $a \in \mathbb{K}, av \in U \cap W$, con lo stesso ragionamento. #

<u>OSS</u>: Invece l'unione di sottospazi <u>non</u> é un sottospazio! Facciamo un es:
$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 0\} = \{(0, t), t \in \mathbb{R}\}$
$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 0\} = \{(s, 0), s \in \mathbb{R}\}$, $e_1 = (1, 0) \in W, e_2 = (0, 1) \in U$
$\Longrightarrow e_1, e_2 \in U \cup W$ ma, $e_1 + e_2 = (1, 1) \notin U, \notin W$, e quindi $\notin U \cup W$.

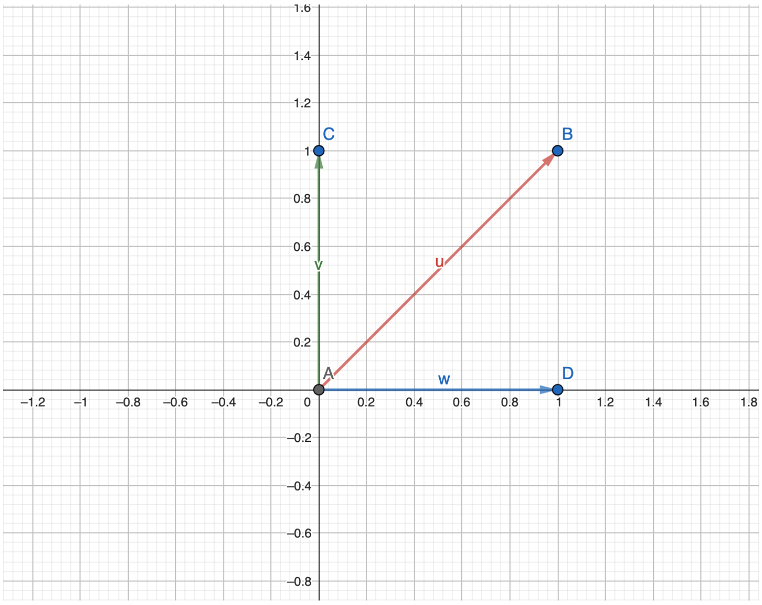

Figure 2: Unione di sottospazi

Il vettore u nell'immagine rappresenta $e_1 + e_2$ e non appartiene a nessuno dei due insiemi.

Abbiamo visto che dato uno spazio vettoriale V su campo $\mathbb{K}$, e dati due sottospazi U,W di V:

- $U \cap W$ **é un sottospazio.**
- $U \cup W$ **non é un sottospazio.**

2.3 Somma di sottospazi

<u>**Def**</u>: La somma di sottospazi U,W é:

$$\underbrace{\boldsymbol{U + W}}_{\text{somma di sottospazi}} = \{ \underbrace{\boldsymbol{u + w}}_{\text{somma di vettori}} , \boldsymbol{u \in U, w \in W}\}$$

Si verifica immediatamente che $U + W$ é un sottospazio di V:
- $(U + W) + (U' + W') = (\underbrace{u + u'}_{\in U}) + (\underbrace{w + w'}_{\in W})$
- $\forall a \in \mathbb{K} \ a(u + w) = au + aw \in U + W$

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0, z = 0\} = \{(t, -t, 0), t \in \mathbb{R}\}$
$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = 0\} = \{(0, 0, s), s \in \mathbb{R}\}$
$U + W = \{u + w, u \in U, w \in W\} = \{(t, -t, 0) + (0, 0, s), t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}\} = \{(t, -t, s), t, s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0\}$

<u>OSS</u>: dim U = 1, dim W = 1, dim U+W = 2 $\longrightarrow$ le rette si intersecano in un punto
Geometricamente U+W é l'unico piano di $\mathbb{R}^3$ che contiene le rette U,W.
OSS: $U \cap W = \{\underline{0}\}$ ha per base $\emptyset \Rightarrow$ dim $U \cap W = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad \Longrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) = \underline{0} \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Uno spazio vettoriale che contiene sono $\underline{0}$ si chiama sottospazio banale ed é $\neq$ da $\emptyset$.

> **TEOREMA 3 (formula di Grassman)** *Siano U, W sottospazi di V.*
> ***dim(U+W) = dim U + dim W - dim U $\cap$ W***

Idea di dim: Scelgo una base $\{v_1 ... v_k\}$ per $U \cap W$ e la completo ad una base $\{v_1 ... v_k, u_1 ... u_l\}$ di U e ad una base $\{v_1 ... v_k, w_1 ... w_m\}$ di W.
Con qualche caolcolo si può dimostrare che $\{v_1 ... v_k, u_1 ... u_l, w_1 ... w_m\}$ é una base di U+W. Da questo segue la formula. #

Esempio: $V = \mathbb{R}^4$
$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \ / \ x_1 - x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$
$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \ / \ x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$
Voglio trovare U+W.
$U \cap W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \ / \ x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = x_4\} = \{(t, t, t, t), t \in \mathbb{R}$
$U \cap W$ ha dimensione 1 (compare solo un parametro nella forma parametrica), una base può essere $\{v_1 = (1, 1, 1, 1)\}$.
Formula di Grassman: dim U+W = dim U + dim W - dim $U \cap W$ = 2+2-1=3
$U = \{(t, s, s, t)\}$, $W = \{(a, a, b, b)\} \Longrightarrow U + W = \{(t + a, s + a, s + b, t + b)\} =$
$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \ / \ x_1 - x_2 = x_4 - x_3\}$

2.3.1 Somma diretta

<u>Def</u>: Siano U,W sottospazi di V. Diciamo che U,W formano **somma diretta** se $U \cap W = \{\underline{0}\}$.
se U,W sono in somma diretta, scriviamo $U \oplus W$ al posto di U+W.

Prop: Sia V uno spazio vettoriale e siano U,W due sottospazi / $V = U \oplus W$.
Allora ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$.
Dim: $V = U \oplus W$("V é somma diretta di U e W") significa che 1) **V = U+W** e 2) $\boldsymbol{U \cap W = \{\underline{0}\}}$.
Poiché V = U+W , $\forall v \in V \exists u \in U, w \in W \ / \ v = u + w$.
Supponiamo che tale scrittura non sia unica, $\exists u' \in U, w' \in W \ / \ v = u + w = u' + w' \Longrightarrow$
$\underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W} \in U \cap W$ ma $U \cap W = \{\underline{0}\}$,
cioè le due componenti di v coincidono. #
<u>OSS</u>: Se V = U+W, ma $U \cap W \neq \{\underline{0}\}$ ci sono infiniti modi per scrivere $v \in V$ come $u + w$, con $u \in U, w \in W$.

3 Sezione terza

3.1 Applicazione lineare

Def: Siano V,U due sottospazi vettoriali su campo $\mathbb{K}$.
Un'applicazine $f : V \longrightarrow U$ é **lineare** se "é compatibile con le operazioni di V e U", cioè se:

1. $\forall v_1, v_2 \in V$, $\boldsymbol{f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)}$
2. $\forall v \in V, \forall a \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{f(a \cdot v) = a \cdot f(v)}$

In maniera equivalente, l'applicazione f é lineare se e solo se $\forall v_1, v_2 \in V$ e $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{K} f(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2)$

Esempio: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y, z) = (x + y, y - z)$ é lineare?
1) Dati $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
$f(v_1 + v_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 - z_1 - z_2)$
$f(v_1) + f(v_2) = (x_1 + y_1, y_1 - z_1) + (x_2 + y_2, y_2 - z_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_2 + y_1 - z_1 - z_2)$
2)$f(av) = f(ax, ay, az) = (ax + ay, ay - az) = a(x + y, y - z) = af(v)$
$\Longrightarrow f$ é lineare

3.2 Nucleo e Immagine

Sia $f : V \longrightarrow U$ un'applicazione lineare:
Def:

- **nucleo** di f Kerf $= \{v \in V \ / \ f(v) = \{\underline{0}\}\}$
- **immagine** di f Imf$=\{f(v), v \in V\} = \{u \in U \ / \ \exists v \in V \ / \ f(v) = u\}$

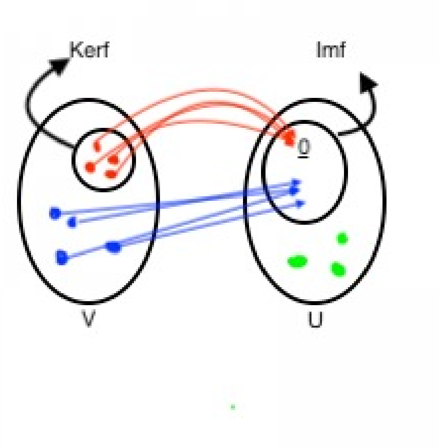

Figure 3: nucleo e immagine

Prop:

1. **Kerf** é un sottospazio vettoriale di V
2. **Imf** é un sottospazio vettoriale di U

Dim:
Dimostro 1) $\Rightarrow$ Dobbiamo mostrare che dati $v_1, v_2 \in$ Kerf anche $v_1 + v_2 \in$ Kerf.
$f(v_1 + v_2) \underbrace{=}_{\text{f é lin}} f(v_1) + f(v_2) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \quad f(v_1) = \underline{0}, f(v_2) = \underline{0}$
Analogamente, dato $a \in \mathbb{K}$ e $v \in$ Kerf (cioè $f(v) = \underline{0}$, ho che:
$f(av) = af(v) = a\underline{0} = \underline{0} \Longrightarrow av \in$Kerf.
Dunque ho dimostrato che Kerf é un SSV di V.
Dimostro 2) $\Rightarrow$ Siano $u_1, u_2 \in$Imf, dunque esistono $v_1, v_2 \in V \ / \ f(v_1) = u_1, \ f(v_2) = u_2$.
Allora $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = u_1 + u_2$, cioè esiste un elemento di V che viene mandato in $u_1 + u_2 \Longrightarrow u_1 + u_2 \in$ Imf.
Analogamente, se $a \in \mathbb{K}$ e $u \in$Imf (cioè $\exists v \in V \ / \ f(v) = u$) allora $f(av) = af(v) = au$, ovvero esiste un vettore $av \in V \ / \ f(av) = au \Longrightarrow au \in$Imf.
Dunque ho dimostrato che Imf é un SSV di U.

Ricordiamo che $f : V \longrightarrow U$ é **suriettiva** $\iff$ ogni $u \in U$ è $u = f(v)$ per qualche $v \in V$ cioé se ogni $u \in U$ appartiene a Imf. Quindi:
Prop: f é suriettiva $\iff$ **Imf = U** #

Ricoridamo anche che $f : V \longrightarrow U$ é **iniettiva** se $v_1 \neq v_2 \Rightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$
Prop: f é iniettiva $\iff$ Kerf $= \{\underline{0}\}$
Dim:
$\Rightarrow$ Poichè f é lineare $f(\underline{0}) = f(v - v) = f(v) - f(v) = \underline{0}$ cioè $\underline{0} \in$ Kerf. Poichè f é iniettiva, se $v \neq \underline{0}, f(v) \neq f(\underline{0}) = \underline{0}$ quindi Kerf $= \underline{0}$.
$\Leftarrow$ Siano $v_1, v_2 \in V \ / \ f(v_1) = f(v_2)$. Allora $\underline{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$ cioè $v_1 - v_2 \in$Kerf, ma Kerf$= \{\underline{0}\} \Longrightarrow v_1 - v_2 = \underline{0}$, cioè $v_1 = v_2 \Rightarrow$ f é iniettiva. #

Esempio:
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$
Abbiamo visto che Kerf$=\{(t, t), t \in \mathbb{R}\} \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow$ f non é iniettiva.
Imf $= \{(t, 2t), t \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ f non é suriettiva.

TEOREMA 4 (Teorema del rango) *Sia $f : V \longrightarrow U$ un'applicazione lineare. Allora* ***dim V = dim Kerf + dim Imf***

Dim: sia $v_1 ... v_k$ una base di Kerf. Completiamola ad una base di V, $v_1 ... v_k, v_{k+1}, v_n$.
Quindi per ogni $v \in V$, esistono e sono unici $a_1 ... a_n \ / \ v = a_1 v_1 + ... a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + ... a_n v_n$.
Poichè f é lineare $f(v) = a_1 \underbrace{f(v_1)}_{\underline{0}} + ... a_k \underbrace{f(v_k)}_{\underline{0}} + a_{k+1} v_{k+1} + ... a_n f(v_n) =$
$= a_{k+1} f(v_{k+1}) + ... a_n f(v_n)$, cioè ogni vettore $f(v)$ di Imf si scrive in modo unico come cob lineare di $f(v_{kn}) ... f(v_n)$, cioè $f(v_{k+1}) ... f(v_n)$ é una base di Imf.
Quindi dim Kerf = k, dim V = n, dim Imf = n-k. #

Corollario: Sia $f : V \longrightarrow U$ un'appl. lineare.

1. Se dim V > dim U, f non può essere iniettiva.
2. Se dim V < dim U, f non può essere suriettiva.

Dim: 1)dim Imf $\leq$ dim U $<$ dim V $\overbrace{=}^{Teor.Rango}$ dim Imf + dim Kerf
cioè dim Kerf $> 0 \Rightarrow$ Kerf $\neq \{\underline{0}\} \Rightarrow$ f non é iniettiva.

Dim: 2)dim Imf $\leq$ dim Imf + dim Kerf $\overbrace{=}^{Teor.Rango}$ dim V $<$ dim U
cioè dim Imf $<$ dim U quindi Imf$\neq U \Rightarrow$ f non é suriettiva. #

Corollario: Sia $f : V \longrightarrow U$, un'appl. lineare e dim V = dim U.
Allora f é iniettiva $\iff$ f é suriettiva ($\iff$ é biunivoca)

Dim: dim Kerf + dim Imf = $\overbrace{=}^{Teor.Rango}$ dim V = dim U.
Quindi f é iniettiva $\iff$ dim Kerf = 0 $\iff$ dim Imf = U $\iff$ f é suriettiva. #

3.3 Isomorfismo

<u>**Def**</u>: $f : V \longrightarrow U$ é un **isomorfo** se é lineare e biunivoca.
Diciamo che V,U sono isomorfi se $\exists$ un isomorfo $V \longrightarrow U$. Essere isomorfi é una relazione di equivalenza.

Esempio:
$V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ / \ p(x) \leq 2\} = \{ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $U = \mathbb{R}^3$
$f : V \longrightarrow U$ é lineare ed é biunivoca $ax^2 + bx + c \rightarrow (a, b, c) \Rightarrow$ f é un isomorfo.
V e U sono isomorfi.

> **TEOREMA 5** *Siano V,U due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ sia $\{v_1 ... v_n\}$ una base di V e siano $u_1 ... u_n \in U$. Allora $\exists$ una e una sola applicazione lineare $f : V \longrightarrow U \ / \ f(v_1) = u_1, ... f(v_n) = u_n$.*

Dim: sia $v \in V$. Poichè $\{v_1 ... v_n\}$ é una base, esistono e sono unici $a_1 ... a_n \in \ / \ v = a_1 v_1 + ... a_n v_n$.
Poiché f è lineare, $f(v) = a_1 f(v_1) + ... + a_n f(v_n) = a_1 u_1 + ... + a_n u_n$.
In questo modo f é lineare ed é unicamente determinata, perchè ogni $v \in V$ può andare in un unico vettore di U. #

Sia $f : V \longrightarrow U$ un'applicazione lineare e siano $B_v = \{v_1 ... v_n\}$ una base di V e $B_u = \{u_1 ... u_n\}$ una base di U.

3.4 Matrici

La **matrice** di f nelle basi B_v, B_u é la tabella di numeri A che ha all'i-esima riga e j-esima colonna il coefficiente a_{ij} che appare nell'espressione $f(v_j) = a_{1j} u_1 + ... + a_{nj} u_n$.
Infatti, poiché $f(v_j) \in U$ e B_u una base, tali coefficienti $\exists!$. E poichè B_v é una base, per il teorema precedente conoscere tutti questi coefficienti (cioè conoscere la matrice A) determina unicamente f.
A é la matrice che ha per j-esima colonna i coefficienti di $f(v_j)$ nella base B_u.

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$, $U = \mathbb{R}^2$
$f : V \longrightarrow U \quad f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$
$B_v = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 0, 1), v_3 = (1, 0, 1)\}$
$B_u = \{u_1 = (2, 0), u_2 = (0, -1)\}$
$f(v_1) = (0, 1) = 0u_1 + (-1)u_2$
$f(v_2) = (-1, 3) = -\frac{1}{2}u_1 - 3u_2$
$f(v_3) = (1, 2) = \frac{1}{2} - 2u_2$

La matrice A di f nelle basi B_v, B_u
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

OSS: in basi diverse la stessa f ha matrice diversa!

Se $f, g : V \longrightarrow U$ sono appl. lineari, anche f+g(definita come$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \forall v \in V$) é lineare. E per ogni $a \in \mathbb{K}$, af(definita come $(af)(v) = af(v) \forall v \ inV$ é lineare.
Quindi l'insieme di tutte le applicazioni lineari:

$$Hom(V, U) = \{\text{appl. lineari } V \longrightarrow U\}$$

é esso stesso uno spazio vettoriale.
Fissate basi di V,U se A é la matrice di f e B é la matrice di g, la matrice di f+g é A+B ottenuta sommando gli elementi corrispondenti. E la matrice di di af, sarà aA, ottenuta moltiplicando per a ogni elemento di A.
Rispetto a queste operazioni, l'insieme:

$$M_{m,n} = \{\text{matrici mxn, con m righe e n colonne}\}$$

é esso stesso uno spazio vettoriale ed ho un isomorfo di spazi vettoriali.

$$\boldsymbol{Hom(V, U) \longrightarrow M_{m,n}}$$

f$\longrightarrow$ matrice f(che dipende dalla scelta delle basi) nelle basi B_v, B_u.

Dati sp. vettoriali V,U,W e appl. lineari f,g: $\quad \underbrace{V \overbrace{\longrightarrow}^{g} U \overbrace{\longrightarrow}^{f}}_{f \circ g} W$

posso considerare la composizione $f \circ g : v \longrightarrow f(g(v))$.

Prop: se f,g sono lineari lo é anche $f \circ g$.

Dim: $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{K} \ \forall v_1, v_2 \in V (f \circ g)(a_1 v_1 + a_2 v_2) = f(g(a_1 v_1 + a_2 v_2)) \overbrace{=}^{\text{g lin}}$

$= f(a_1 g(v_1) + a_2 g(v_2)) \overbrace{=}^{\text{f lin}} a_1 f(g(v_1)) + a_2 f(g(v_2)) = a_1 (f \circ g)(v_1) + a_2 (f \circ g)(v_2)$ #

3.4.1 Prodotto tra matrici

Sia $\{v_1 ... v_n\}$ una base di V, sia $\{u_1 ... u_m\}$ una base di U, sia $\{w_1 ... w_l\}$ una base di W.

$\underbrace{V \overbrace{\longrightarrow}^{g} U \overbrace{\longrightarrow}^{f}}_{f \circ g} W$, se A é la matrice di f e B é la matrice di g, chi é la matrice di $f \circ g$? Calcoliamola:

sia $j \in \{i ... n\}$, $(f \circ g)(v_j) = f(\sum_{i=1}^{m} b_{ij} u_i) \overbrace{=}^{\text{f é lin}} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f(u_i) \overbrace{=}^{\text{def di A}} \sum_{i=1}^{m} (b_{ij} \sum_{k=1}^{l} a_{ki} w_k)$

Il **coefficiente** di w_k é $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m} b_{ij} a_{ki}}$. La matrice di $f \circ g$ dovrà avere questo coefficiente alla k-esima riga e j-esima colonna.
Indichiamo questa matrice con **AB** e la chiamiamo il **prodotto riga per colonna di A e B**.

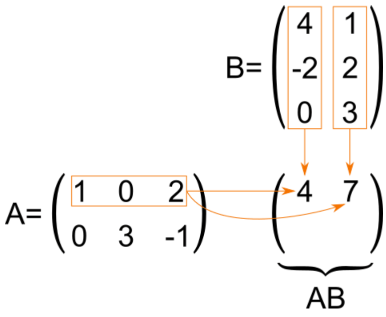

Figure 4: Prodotto tra matrici

3.5 Ancora isomorfismo...

TEOREMA 6 *Un'applicazione lineare é un isomorfismo* $\iff$ *manda basi in basi.*

Dim:
$\Rightarrow$ Sia $f : V \longrightarrow U$ un isomorfismo e sia $\{v_1...v_n\}$ una base di V. Vogliamo mostrare che $\{f(v_1)...f(v_n)\}$ é una base di U, cioè che ogni $u \in U$ si scrive in odo unico come comb. lin di $f(v_1)...f(v_n)$.
Poiché f é biunivoca, $\exists! v \in V \ / \ f(v) = u$. Poiché $\{v_1...v_n\}$ é una base di V, $\exists! a_1...a_n \in \mathbb{K} \ / \ v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ e poiché f é lineare, $u = f(v) = a_1f(v_1) + ... + a_n(fv_n)$, cioé la tesi.
$\Leftarrow$ Sia $\{v_1...v_n\}$ una base di V, e sia $f : V \longrightarrow U$ un'appl. lineare tale che $\{f(v_1)...f(v_n)\}$ é una base di U. Vogliamo dimostrare che f é biunivoca.
Sia $u \in U$. Poiché $\{f(v_1)...f(v_n)\}$ é una base $\exists! a_1...a_n \in \mathbb{K} \ / \ u = a_1f(v_1) + ... + a_nf(v_n) = f(a_1v_1 + ... + a_nv_n)$, cioé $\forall u \in U \exists! v \in V(v = a_1v_1 + ... + a_nv_n)$ tale che $f(v) = u$ quindi f é biuivoca.

Corollario: L'inverso di un isomorfismo é un isomorfismo.
Dim: Sia $f : V \longrightarrow U$ un isomorfismo e sia $f^{-1} : U \longrightarrow V$ l'applicazione inversa, cioé $f^{-1}(u) =$ l'unico $v \in V \ / \ f(v) = u$. Sia $\{v_1...v_n\}$ una base di V: per il teorema 6, $\exists$ un'unica appl. lineare che manda $f(v_1) \to v_1...f(v_n) \to v_n$ ed é proprio f^{-1}.
Inoltre f^{-1} é biunivoca perché la sua inversa é f. #

Abbiamo detto che due spazi vettoriali V,U sono isomorfi se esiste un isomorfismo $V \to U$ e scriviamo $\boldsymbol{V \simeq U}$.

Prop: "essere isomorfi" é una relazione di equivalenza:

- Riflessiva: ogni spazio vettoriale V é isomorfo a sé stesso.
  Relazione identità: $V \longrightarrow V$, $v \longrightarrow v$
- Simmetrica: se $V \simeq U$, allora $U \simeq V$.
  Se $f : V \longrightarrow U$ é un isomorfismo, abbiamo appena dimostrato che $f^{-1} : U \longrightarrow V$ é un isomorfismo.
- Transitiva: se $V \simeq U$, $U \simeq W$ allora $V \simeq W$.
  Se $g : V \longrightarrow U$ e $f : U \longrightarrow W$ sono isomorfi allora anche $f \circ g : V \longrightarrow W$ é un isomorfismo.

Corollario: Due spazi vettoriali V,U su uno stesso campo $\mathbb{K}$ sono isomorfi $\iff$ hanno la stessa dimensione.
Dim: Sia $\{v_1..v_n\}$ una base di V e $\{u_1...u_m\}$ una base di U. Dunque dimV=n, dimU=m.

Se n=m $\exists$ una biezione $v_1 \to u_1 ... v_n \to u_n$ che per il teorema 5 si estende ad un'unica appl. lineare $f : V \longrightarrow U \ / \ f(v_1) = u_1 ... f(v_n) = u_n$ che per il teorema 6 é un isomorfismo (manda basi in basi).
Se $n \neq m$ non può esistere un isomorfismo $f : V \longrightarrow U$ perché altrimenti $\{f(v_1)...f(v_n)\}$ dovrebbe essere una base di U, ma questo é assurdo. #

<u>OSS</u>: Sia $f : V \longrightarrow U$ un'appl. lineare. Fissate basi B_v, B_u di V e U, dato $v \in V$, il vettore delle coordinate di $f(v)$ nella base B_u é ottenuto moltiplicando la matrice di f (nelle basi B_v, B_u) per il vettore colonna delle coordinate di v nella base B_v.

Esempio:
Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ / \ p(x) \text{ha grado} \leq 3\} = \{\underbrace{ax^3 + bx^2 + cx + d}_{p'(x)=3ax^2+2bx+c}\}$
$d : V \longrightarrow V$ La derivata é un'applicazione lineare
$p(x) \to p'(x)$
Scriviamo la matrice D di d nella base canonica $\{1, x, x^2, x^3\}$

$d(1) = 0$
$d(x) = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = 1$
$d(x^2) = 0 + 2x + 0x^2 + 0x^3 = 2x$
$d(x^3) = 0 + 0x + 3x^2 + 0x^3$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}$$
Sono le coordinate di $p'(x)$ nella base $\{1, x, x^2, x^3\}$

4 Sezione quarta

4.1 Matrice identità

Sia $id : V \longrightarrow V$ l'applicazione lineare che manda ogni vettore in sè stesso, cioè:

$$id(v) = v \ \forall v \in V$$

Sia $v_1 ... v_n$ una base di V. Chi è la matrice di id?
$f(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2 ...$
$f(v_2) = v_2 = 0v_1 + 1v_2 ...$
$f(v_n) = v_n = 0v_1 + 0v_2 ... + 1v_n$

$$\mathbf{In} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$ In é la matrice identità, ha tutti 0 tranne gli 1 sulla diagonale.

<u>OSS 1</u>: Ottengo In qualsiasi sia la base scelta.

<u>OSS 2</u>: Per ogni $f : V \longrightarrow V$, $f \circ id = f$, $id \circ f = f$.
Esempio:
Ovvero, se A é la matrice di f, $A \cdot In = A, \quad In \cdot A = A$

In é l'elemento neutro del prodotto riga per colonna di matrici.

<u>OSS 3</u>: $f : V \longrightarrow U$ lineare e sia n = dimV, m = dimU
f é isomorfo $\iff$ f é invertibile cioé $\forall u \in U \exists! v \in V \ / \ f(v) = u$
e scirvo $v = f^{-1}(u) \iff$ esiste $f^{-1} : U \longrightarrow V \ / \ f \circ f^{-1} = id_u, f^{-1} \circ f = id_v$.
Fissate basi di V e di U, se A é la matrice di f e A^{-1} é la matrice di f^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = Im$$

<u>Def</u>: A^{-1} é detta la **matrice inversa** di A:

$$A^{-1} \cdot A = In$$

<u>OSS 4</u>: f é un isomorfismo $\iff$ la sua matrice A é invertibile, cioé esiste A^{-1} tale che valgono le equzioni scritte sopra.

<u>OSS 5</u>: Se A non é quadrata (cioé righe $\neq$ colonne) non ha senso chiedersi se A sia invertibile perchè A corrisponde ad una funzione $f : V \longrightarrow U$ con $dimV \neq dimU$ e tale f non può essere biunivoca per il corollario del teorema del rango.

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare e siano $B = \{v_1 ... v_n\}$ e $B' = \{u_1 ... u_n\}$ basi di V. Sia A la matrice di f nella base B e sia M la matrice di f nella base B'.
Che legame c'è tra A e M?

<u>Def</u>: La matrice di **cambiamento di base** é:

$$B = \begin{pmatrix} ... & a_{ij} & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & a_{nj} & ... \end{pmatrix}$$ La cui j-ma colonna é ottenuta $u_j = a_{1j}v_1 + ... + a_{nj}v_n$

TEOREMA 7

$$\boldsymbol{M = B^{-1}AB}$$

4.2 Matrici invertibili

<u>Def</u>: Due matrici A,M sono **simili** se esiste una matrice invertibile B tale che $M = B^{-1}AB$.

<u>OSS</u>: Per il teorema 7, due matrici sono simili $\iff$ rappresentano la stessa applicazione lineare (in basi diverse).

<u>OSS</u>: essere simili é una relazione di equivalenza:
Dim:

- Riflessiva $\Rightarrow A = In^{-1}AIn$
- Simmetrica $\Rightarrow$ se $M = B^{-1}AB$ allora $A = BMB^{-1}$ (perché $B^{-1^{-1}} = B$)
- Transitiva $\Rightarrow$ se $M = B^{-1}AB$ e $N = C^{-1}MC$ allora $N = C^{-1}(B^{-1}AB), C = (BC)^{-1}A(BC)$

Come capire se una matrice quadrata A é invertibile?

TEOREMA 8 *Una matrice quadrata A é **invertibile** $\iff$ i suoi vettori colonna sono linearmenti indipendenti.*

Dim: Siano $v_1 ... v_n$ i vettori colonna di A.
Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $f(e_1) = v_1 ... f(e_n) = v_n$ essa esiste ed é unica per il teorema 5.
La matrice di f nella base canonica é proprio $A = (v_1 \; ... \; v_n)$, perché
$v_1 = (x_1 ... x_n) = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ allora $f(e_1) = v_1 = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$,
quindi per il teorema 6 $v_1 ... v_n$ é una base $\iff$ f é un isomorfismo $\iff$ la matrice A di f é invertibile. #

4.2.1 Il rango e la trasposta

Sia A una matrice mxn.
__**Def**__: Il **rango** di A (che indichiamo con rg(A)) é massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ rg(A)} = 2$$

Abbiamo dimostrato che una matrice nxn é invertibile $\iff$ ha rango n.
Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (o più in generale potremo prendere $f : \underbrace{V}_{dim_n} \longrightarrow \underbrace{U}_{dim_m}$) e sia A la matrice associata ad f (nelle basi canoniche).

TEOREMA 9

$$dim \; Imf = rg(A)$$

Dim: per definizione $f(e_1) = v_1 ... f(e_n) = v_n$ dove $v_1 ... v_n$ sono vettori colonna di A.
Poiché $e_1 ... e_n$ generano $\mathbb{R}^n$, $v_1 ... v_n$ generano Imf (perché $\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists! a_1 ... a_n \; / \; v = a_1 e_1 + ... + a_n e_n$ e quindi $f(v) = a_1 v_1 + ... a_n v_n \forall f(v) \in Imf$.
Quindi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\{v_1 ... v_n\}$ é pari alla dimensione dell' immagine.
Nell'esempio sopra elencato Imf = $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; z = 0\}$ che ha per base i primi due vettori colonna di A. #

__**Def**__: la **trasposta** di una matrice A é la matrice A^T che ha per righe le colonne di A. In altre parole $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 5 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3 Determinante

Sia A una matrice nxn. Il **determinante** di A é definito nel seguente modo ricorsivo.

- se n = 2, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ det(A) = ad-bc
- se n > 2, riconduciamo il calcolo di det(A) al calcolo di determinanti di matrici più piccole mediante la **regola di Laplace**:
  scegliamo una colonna di A, la j-ma,
  det(A) = $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A^{ij})$ dove A^{ij} é la matrice ottenuta da A rimuovendo la i-ma riga e la j-ma colonna.

4.3.1 Proprietà del determinante

1. é **multilineare** cioé se ho due matrici che differiscono solo per una colonna allora, $A = (v_1...v_j...v_n), B = (v_1...v'_j...v_n) \Rightarrow det(v_1 av_j + bv'_j v_n) = a\dot{d}et(A) + b \cdot det(B)$
2. é alternante cioé se A' é ottenuta da A scambiando due colonne, allora det(A') = -det(A)
3. det(In) = 1
4. é l'unica funzione $M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{K}$ che verifica 1,2,3
5. $\boldsymbol{det(A^T) = det(A)}$
   in particolare lo sviluppo di Laplace si può fare per righe e le proprietà 1,2 valgono anche per le righe.
6. $det(A \cdot B) = det(A)det(B)$
7. $\boldsymbol{det(A) \neq 0 \iff A}$ **é invertibile**

OSS: Per le proprietà 3 e 6, se A è invertibile $\boldsymbol{det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}}$.
Infatti $AA^{-1} = In$ e quindi $det(AA^{-1}) \overbrace{=}^{6} det(A)det(A^{-1}) = det(In) \overbrace{=}^{3} 1$

Prop: Se A e M sono **simili**, allora hanno lo stesso determinante.
Dim: per definizione, se A e M sono simili esiste una matrice invertibile B tale che $M = B^{-1}AB$.
Quindi det(M) = det(B^{-1})$det(A)det(B) = \underbrace{det(B)^{-1}det(B)}_{1} det(A) = det(A)$.#

Def: Sia V uno spazio vettoriale e $f : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.
Definiamo **det(f) = det(A)**, dove A é la matrice di f in una base di V. Per la prop precedente non dipende dalla base scelta.

Il determinante ci permette di stabilire se una matrice quadrata A é invertibile o no. Ma come la troviamo in caso affermativo?

TEOREMA 10
$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot cof(A)^T}$$
dove $cof(A)_{ij} = (-1)^{i+j}det(A^{ij})$

4.3.2 Prodotto vettoriale

Il determinante ci dà anche una regola per calcolare il "prodotto vettoriale", un'operazione $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(v, u) \longrightarrow v \wedge u$, usata in fisica.
Se $v = (a_1, a_2, a_3), u = (b_1, b_2, b_3)$, definiamo:

$$v \wedge u = det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (-a_1b_3 + a_3b_1)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3$$

5 Sezione quinta

5.1 Sistemi lineari matriciali: metodi risolutivi

Consideriamo un sistema di **m** equazioni lineari in **n** incognite $x_1...x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Possiamo riscrivere questo sistema "in forma matriciale" come:

$\boldsymbol{Ax = b}$ dove $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ è il <u>vettore delle incognite</u>, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ è il <u>vettore dei termini noti</u> e A è la matrice (m x n) dei coefficienti.
Come posso risolvere il sistema?

- <u>**1° metodo**</u>**(di Cramer)** $\Rightarrow$ <u>applicabile sono se m = n</u> (cioè matrice quadrata). Ho due casi:

  1. se $\boldsymbol{det(A) \neq 0}$, allora A è invertibile cioè $\exists A^{-1}$ / $A^{-1}A = In$.
     Quindi $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow \boldsymbol{x = A^{-1}b}$ (ho moltiplicato per A^{-1} entrambe le parti e poi semplificato $A^{-1}A = In$).
     Cioé posso ottenere il vettore delle soluzioni x = $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ moltiplicando il vettore dei termini noti b per l'inversa di A.
  2. Se $\boldsymbol{det(A) = 0}$ allora A non è invertibile cioè l'applicazione
     $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, **f(x)= Ax non é suriettiva o non è iniettiva**. A seconda del termine noto la soluzione del sistema non esiste(non suriettiva) o non è unica(non iniettiva).

- <u>**2° metodo**</u>**(di Gauss)** <u>Computazionalmente più efficiente e m può essere diverso da n.</u>
  Lavoriamo sulla matrice $\boldsymbol{A|b}$ ottenuta affiancando la colonna b ad A.

  1. Il mio obiettivo è quello di ottenere una matrice che nella prima colonna ha tutti 0 tranne il primo numero.
     Possiamo supporre $a_{11} \neq 0$ (altrimenti scambiamo la prima equazione con un'altra).
     Moltiplico la prima riga per a_{11}^{-1} ottenendo:
     $1\frac{a_{12}}{a_{11}}...\frac{a_{1n}}{a_{11}} = \frac{b_1}{a_{11}}$
     Sostituisco la seconda riga con (2° riga - $a_{21}\cdot$ la 1° riga) e così via con le altre...

sostituisco la m-esima riga con (m-esima riga -$a_{m1}\cdot$ la 1° riga).

Ottengo così una matrice $\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ nella prima colonna tutti 0 tranne il primo 1

2. Faccio lo stesso con la matrice A^{11} in modo da ottenere anche qui tutti 0 nella prima colonna tranne il primo 1 (di A^{11}).

Ad ogni passo ottengo una colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ oppure, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ se i coefficienti di x_i sono tutti nulli.

La matrice così ottenuta è molto semplice e corrisponde ad un sistema che ha le stesse soluzioni di $Ax = b$, perché **le operazioni effettuate** (scambiare tra loro due righe, sommare ad una riga un multiplo dell'altra) **non cambiano le soluzioni**.

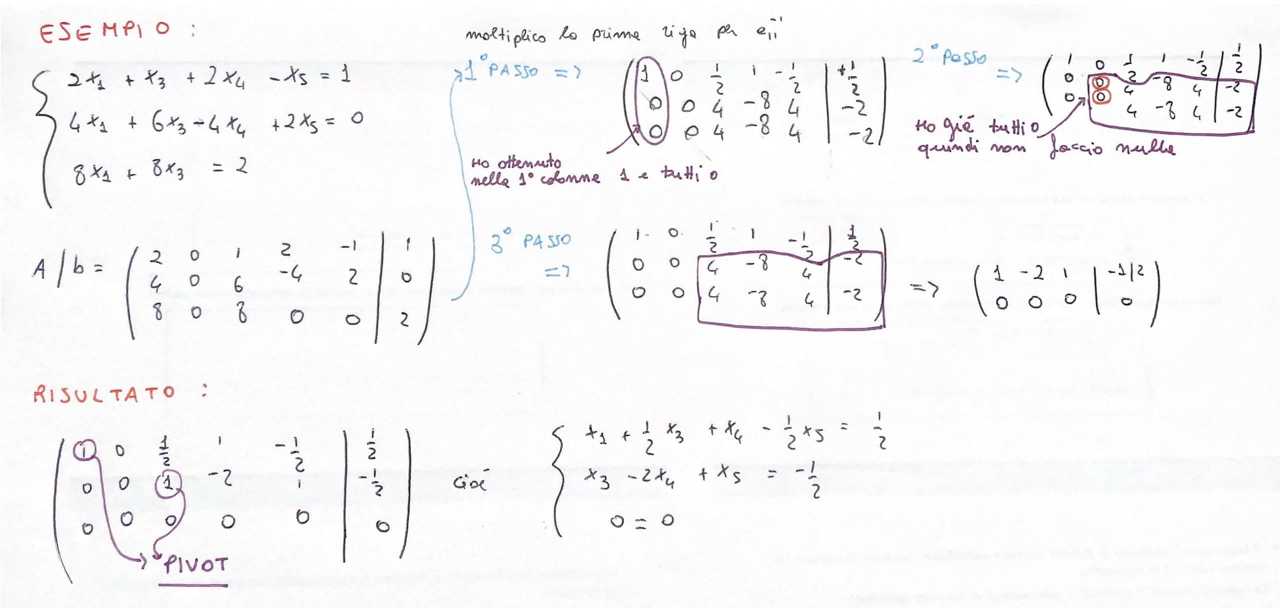

Figure 5: Sistema risolto con metodo Gauss

Nell'esempio in figura 5 il sistema Ax = b é equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 - x_5 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

cioé posso sciegliere come voglio i valori di x_2, x_4, x_5 ma x_1, x_3 sono deterinati da essi.
se $x_2 = t, x_4 = s, x_5 = r$ $(t, s, r \in \mathbb{R})$ allora
$x_3 = 2s - r - \frac{1}{2}$, $x_1 = -\frac{1}{2}(2s - r - \frac{1}{2}) - s + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$.
L'insieme delle soluzioni è: $S = \{(-\frac{1}{2}(2s - r - \frac{1}{2}) - s + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}, t, 2s - r - \frac{1}{2}, s, r)\}$.

Nell'esempio precedente abbiamo trasformato la matrice A in una matrice A'. Osserviamo che $rg(A')$=max numero di colonne lin. indipendenti = 2 = numero di **Pivot** = numero di righr di A' lin. indip.

D' altra parte $rg(A') = rg(A)$ perché le operazioni dell' algoritmo di Gauss non cambiano il rango. Lo stesso vale in generale.

TEOREMA 11 *Il **rango di A** (cioé il max n° di colonne lin. indip.) è uguale al max n° di righe lin indip, e anche al **numero di pivot** della matrice A' ottenuta applicando ad A l'algoritmo di Gauss.*

5.1.1 Inverso di una matrice (metodo Gauss)

L'algoritmo di Gauss ci permette anche di calcolare **l'inverso di una matrice quadrata**, se esiste applichiamo l'algoritmo a $A|In$ fino a ottenere $In|B$. B sarà proprio A^{-1}.

TEOREMA 12 (Rouchè-Capelli) *Il sistema $Ax = b$ ammette almeno una soluzione $\iff rg(A|b) = rg(A)$.*

Dim:
Ax = b ammette soluzioni $\iff$ b é comb lineare dei vettori colonna di A (con coefficienti $x_1...x_n$) $\iff$ il max n° di colonne lin. indip di $A|b$ é lo stesso di A $\iff$ rg$(A|b) = rg(A)$.

5.2 Insieme delle soluzioni di un sistema lineare

Diciamo che un sistema è **omogeneo** se $b_1 = 0, b_2 = 0...b_n = 0$, cioè se è del tipo $Ax = \underline{0}$.

Prop: L'insieme U delle soluzioni del sistema lin. omogeneo $Ax = \underline{0}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, e dim U = n-rk(A).
Dim: $A\underline{0} = \underline{0}$ quindi $\underline{0} \in U$. Inoltre se $x, x' \in U$ (cioè $Ax = \underline{0}, Ax' = \underline{0}$) allora $A(x + x') = Ax + Ax' = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, quindi $x + x' \in U$.
Infine, se $x \in U$ e $a \in \mathbb{R}$, $A(ax) = a(Ax) = a\underline{0} = \underline{0} \Rightarrow ax \in U$, U è un SSV.
Abbiamo dimostrato che U è un sottospazio vettoriale. D'altra parte U è il nucleo (elementi del dominio che vanno in 0) dell'applicazione lineare
$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $(x \longrightarrow Ax)$ dunque dimU = dimKerf $\overbrace{=}^{T.Rango}$ n-dimImf= n-rg(A). #

E se il sistema non è omogeneo?
Esempio:
$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; / \; x_1 + x_2 = 2\}$ il nostro sistema lineare.
$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; / \; x_1 + x_2 = 0\}$ sistema omogeneo associato.

OSS 1): U é un SSV di $\mathbb{R}^2$, S non lo è, ad esempio $(1, 1) \in S, (0, 2) \in S$, ma $(1, 1) + (0, 2) = (1, 3) \notin S$.

OSS 2): Però $(1, 1) - (0, 2) = (1, -1) \in U$. Più in generale, se $x, x' \in Sallorax - x' \in U$.

OSS 3): In altre parole, se $x \in S$, S si ottiene sommando x a tutti gli elementi di U. Diciamo che S è ottenuto traslando U per il vettore x.

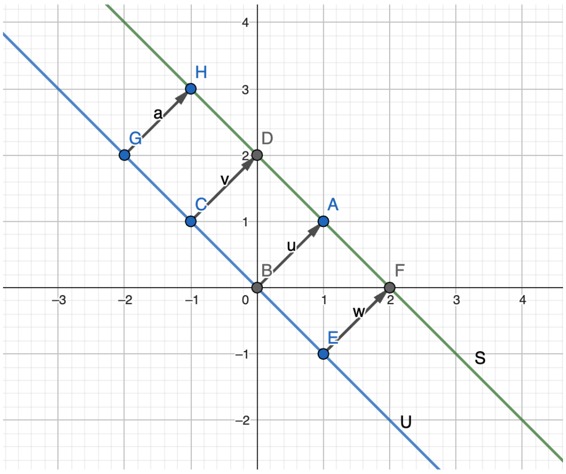

Figure 6: Esempio traslazione insieme per un vettore

5.3 Sottospazio affine

Diciamo che S è un **sottospazio affine** di $\mathbb{R}^n$ se si ottiene traslando un sottospazio vettoriale cioè se $\exists U$ ssv di $\mathbb{R}^n, x \in S$ / $\boldsymbol{S = \{u + x, u \in U\}}$.
Per definizione dimS = dimU.

> **TEOREMA 13** *L'insieme S delle soluzioni di un sistema lineare $Ax = b$, se è non vuoto, è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, ottenuto traslando per un qualsiasi $x \in S$ l'insieme U delle soluzioni del sist. lin. omogeneo $Ax = \underline{0}$.*

Ovvero $S = \{u + x, u \in U\}$ dove x è una qualsiasi soluzione.
Dim: Se $x, x' \in S$ allora $x - x' \in U$: infatti se $Ax = b$, $Ax' = b$ allora $A(x - x') = Ax - Ax' = b - b = \underline{0} \Rightarrow x - x' \in U$.
D'altra parte se $x \in S, u \in U$ allora $x + u \in S$, perchè $A(x + u) = Ax + Au = b + \underline{0} = b.\#$
<u>OSS</u>: dim S = dim U = n - rgA.

ESEMPIO:
Sia S l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_3 = 8 \end{cases} \quad \text{sistema omogeneo associato} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 8 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}$$

Ha per insieme le sol: $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 = -x_3, x_2 = 0\} =$
$= \{(t, 0, -t), t \in \mathbb{R}\}$
Si vede facilmente che (1,2,3) appartiene a S:
$S = \{u + (1, 2, 3), u \in U\} = \{(t + 1, 2, -t + 3)\}$

6 Sezione sesta

6.1 Matrice diagonale

Sia V uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ (e sia n=dimV).
Def: Un **endomorfismo** di V è un'applicazione lineare $V \longrightarrow V$.
Sia f un endomorfismo di V. Abbiamo visto che, fissata una base di V, possiamo associare ad f una matrice nxn, che dipende dalla base scelta.
Domanda: Posso scegliere la base di V in modo che la matrice di f sia particolarmente semplice?

Def: Una matrice **D(nxn)** è **diagonale** se $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$.

$$D= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} d_1, d_n \in \mathbb{K}$$

OSS:Due matrici diagonali D,E sono facili da moltiplicare tra loro! Infatti se D è come sopra ed

$$E= \begin{pmatrix} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_n \end{pmatrix} \quad D \cdot E = \begin{pmatrix} d_1 e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n e_n \end{pmatrix}$$

6.2 Autovettore e autovalore

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare.
Def: Un **autovettore** di f è un $v \in V, v \neq \underline{0}$ / $\boldsymbol{f(v) = \lambda v}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$.
(In altre parole, $\lambda \in \mathbb{K}$ é una **autovalore** se $\exists v \in V$, $v \neq \underline{0}$, / $f(v) = \lambda v$ e tale v é detto **autovettore relativo** a λ).

Esempio:
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = (y, x)$
$v_1 = (1, 1)$ è un autovettore di autovalore 1 perché $f(v_1) = 1v_1$
$v_2 = (1, -1)$ è un autovettore di autovalore -1 perché $f(v_2) = -1v_2$
La matrice di f nella base v_1, v_2 è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $f(v_1) = 1v_1 + 0v_2 \quad f(v_2) = 0v_1 - 1v_2$

In generale se $\{v_1, v_2 ... v_n\}$ è una base di V composta da autovettori, allora la matrice di f in tale base è diagonale, perché:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 ... + 0v_n$$

$$f(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 ... + 0v_n \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$f(v_n) = 0v_1 ... + \lambda_n v_n$$

Quindi per "diagonalizzare f" (cioè rappresentare f con una matrice diagonale), dobbiamo trovare una base di autovettori. Come si fa?
Procediamo in 2 passi:

1. Troviamo gli autovalori di f.
2. Troviamo gli autovettori corrispondenti.

Def: **Polinomio caratteristico** di f:

$$\boldsymbol{p(\lambda) = det(f - \lambda id)}$$

TEOREMA 14 *λ_i è un autovalore di $f \iff p(\lambda_i) = 0$.*

Dim: λ_i è un autovalore di f $\iff \exists v \in V, v \neq \underline{0} \ / \ f(v) = \lambda_i v \iff$
$\exists v \in V, v \neq \underline{0} \ / \ f(v) = \lambda_i v \Rightarrow f(v) - \lambda_i id(v) = 0$ (perchè $\lambda_i id(v) = \lambda_i(v)) \Rightarrow (f - \lambda_i id)v = \underline{0} \iff \exists v \neq \underline{0} \ / \ , v \in Ker(f - \lambda_i id) \iff f - \lambda_i id$ non è iniettiva, ovvero non è un isomorfismo $\iff p(\lambda_i) = det(f - \lambda_i id) = 0.\#$
Quindi per trovare gli autovalori di f basta trovare gli zeri del polinomio $p(\lambda)$!

Esempio:
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$
Per calcolare $p(\lambda)$, scriviamo la matrice A di f in una base a nostra scelta (ad es la base canonica).

$f(e_1) = 0e_1 + 1e_2 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(e_2) = 1e_1 + 0e_2$

La matrice di $f - \lambda id$ è $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$

$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$
Abbiamo così ottenuto gli autovalori di f. A questo punto trovare gli autovettori è facile, basta usare la definizione.
Sia $\lambda_1 = 1$, cerco $v_1 \ / \ f(v_1) = \lambda_1 v_1 = v_1$
cioè cerco $(x, y) \ / \ (y, x) = (x, y)$:

$\begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases}$ una soluzione è $x = 1, y = 1 \Longrightarrow v_1 = (1, 1)$.

Analogamente dato $\lambda_2 = -1$ cerco $v_2 \ / \ f(v_2) = \lambda_2 v_2 = -v_2$
cioè cerco $(x, y) \ / \ (y, x) = -(x, y)$:

$\begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases}$ una soluzione può essere $x = 1, y = -1 \Longrightarrow v_2 = (1, -1)$.

OSS: tutto questo funziona se $p(A)$ che è un polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$ ha i suoi zeri in $\mathbb{K}$.

TEOREMA 15 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$ ha tutte le sue radici in $\mathbb{C}$.*

Quindi gli autovalori (che sono le radici del polinomio caratteristico $p(A)$, li posso sempre trovare in $\mathbb{C}$ ma non è detto che siano in $\mathbb{R}$.

6.3 Autospazio

Def: Sia $\lambda_i \in \mathbb{K}$ un autovalore, l'**autospazio** relativo a λ_i è:

$$\boldsymbol{V_{\lambda_i} = \{v \in V \ / \ f(v) = \lambda_i v\}}$$

Prop:

- 1) V_{λ_i} è un sottospazio vettoriale di V.
- 2) Se $\lambda_i \neq \lambda_j$, $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\underline{0}\}$

Dim:
1) Se $v_i, v_2 \in V_{\lambda_i}$ allora $f(v_1) = \lambda_i v_1$ e $f(v_2) = \lambda_i v_2$, $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda_i v_1 + \lambda_i v_2 = \lambda_i(v_1 + v_2) \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_{\lambda_i}$.
Se $a \in \mathbb{K}, f(av_1) = af(v_1) = af(v_1) = a\lambda_i v_1 \Rightarrow av_1 \in V_{\lambda_i}$
2)Se $v \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, $\lambda_i v = f(v) = \lambda_j v \Rightarrow \lambda_i v - \lambda_j v = \underline{0}$, cioè $(\lambda_i - \lambda_j)v = \underline{0}$. Per ipotesi $\lambda_i \neq \lambda_j$ quindi $v = \underline{0}$. #

Def: Sia $\lambda_i \in \mathbb{K}$ un autovalore di f.
La **molteplicità geometrica** di λ_i è: $\boldsymbol{Mg(\lambda_i) = dim(V_{\lambda_i})}$.
La **molteplicità algebrica** di λ_i è la molteplicità di λ_i come soluzione del polinomio $p(\lambda) = 0$, ovvero il massimo intero m tale che $(\lambda - \lambda_i)^m$ divida $p(\lambda)$, e la indichiamo con $\boldsymbol{Ma(\lambda_i)}$.

Esempio:
$p(\lambda) = \lambda^4(\lambda - 3)^2(\lambda - 7) = 0$
$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 7 \qquad Ma(0) = 4 \quad Ma(3) = 2 \quad Ma(7) = 1$

Esempio:
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (2x + 5y, 2y)$
$f(e_1) = 2e_1, \ f(e_2) = 5e_1 + 2e_2 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$p(\lambda) = det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 = 0 \qquad \lambda_1 = 2 \quad Ma(\lambda_1) = 2 \quad Mg(\lambda_1) =?$
$V_{\lambda_1} = \{v \in V \ / \ f(v) = \lambda_1 v\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (2x + 5y, 2y) = (2x, 2y)\}$
$\begin{cases} 2x + 5y = 2y \\ 2y = 2y \end{cases} \Rightarrow y = 0$ quindi $V_{\lambda_1} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow Mg(\lambda_1) = dim(V_{\lambda_1}) = 1$
In questo esempio **non** posso trovare una base di autovettori: $v_1 = (1, 0)$ è un autovettore ma se prendo $v_2 \in V_{\lambda_1}$ allora $\{v_1, v_2\}$ non è una base perché i vettori non sono linearmente indipendenti. Se invece prendessi $v_1 \notin V_{\lambda_1}$, allora v_2 non sarebbe un autovettore.
f non si può diagonalizzare.

Prop: Sia λ_i un autovalore di f. Allora:

$$1 \leq \boldsymbol{Mg(\lambda_i)} \leq \boldsymbol{Ma(\lambda_i)}$$

Dim: $Mg(\lambda_i) \leq 1$ perchè se fosse $= 0$ avremmo $V_{\lambda_i} = \{\underline{0}\}$ cioè $f(v) = \lambda_i v \iff v = \underline{0}$ cioè λ_i non è autovalore. ASSURDO!
Ora sia m $= Mg(\lambda_i)$, per mostrare che $Ma(\lambda_i) \geq m$ prendiamo una base $\{v_1 ... v_m\}$ di V_{λ_i} e completiamola ad una base di V.
$\{v_1 ... v_m, v_{m+1} ... v_n\}$ e scriviamo la matrice di f in questa base:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 & ? & ? & ? \\ & \ddots & 0 & ? & ? & ? \\ & & \lambda_i & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

La prima parte della matrice in alto a sinistra è diagonale. Facendo lo sviluppo di Laplace rispetto alle prime m colonne ottengo $det(A-\lambda In) = (\lambda_i - \lambda)^m \cdot q(\lambda)$, dove $q(\lambda)$ è un polinomio che non conosco. Quindi in $p(\lambda)$ ci sono almeno m fattori $(\lambda_i - \lambda)$, potrebbe essercene qualcuno anche in $q(\lambda)$...forse.#

<u>OSS</u>: In particolare, se $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ed ha $Mg(\lambda_i) = 1 \forall \lambda_i$ allora f di diagonalizza.

TEOREMA 16 *Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare e siano $\lambda_1 ... \lambda_h$ i suoi autovalori distinti. Allora f è diagonalizzabile (cioè ammette base di autovettori) $\iff$ valgono le condizioni seguenti:*

1. $\lambda_i \in \mathbb{K} \forall i = 1...h$
2. $Ma(\lambda_i) = Mg(\lambda_i) \forall i = 1...h$

Cioè ogni autovalore deve appartenere al campo considerato ed ha molteplicità geometrica uguale a quella algebrica.

Dim:
Supponiamo che valga la 1) ovvero $\lambda_1 ... \lambda_h \in \mathbb{K}$ e consideriamo gli autospazi $V_{\lambda_1} ... V_{\lambda_h}$. Per ciascuno di essi scegliamo una base $B_1 ... B_h$. Dato che se $\lambda_i \neq \lambda_j$, $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\underline{0}\}$, gli autospazi formano somma diretta, sia U tale somma. $\underline{U} = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_h}$. Dunque $B = B_1 \cup B_2 \cup ... B_h$ è una base per $\underline{U}$. Dobbiamo capire se $U = V$ oppure $U \subsetneq V$(sottoinsieme proprio).
Se vale la 2) dim$\underline{\text{U}}$ $= Mg(\lambda_1) + ... + Mg(\lambda_h) = Ma(\lambda_1) + ... + Ma(\lambda_h)$ e dunque U=V cioè B è una base di V composta da autovettori!.
Se non vale 2) allora $Mg(\lambda_1) + ... + Mg(\lambda_h) < Ma(\lambda_1) + ... + Ma(\lambda_h)$ e quindi dimU ¡ dimV, perciò B (che è una base di U) NON è una base di V. Posso completarla ad una base di V solo aggiungendo vettori che non sono autovettori. Quindi f non si diagonalizza.

<u>OSS</u>: Se valgono 1) e 2) questo teorema ci dà un algoritmo per trovare una base di V composta da autovettori: basta trovare una base di ciascun autospazio, e poi unirle tutte.

6.4 Applicazioni nilpotenti

<u>**Def**</u>: f è **nilpotente** se $\exists n > 0 \ / \ f^n = f \circ ... \circ f = \underline{0}$ (applicazione nulla).
A è nilpotente se $\exists n > 0 \ / \ A^n = 0$ (matrice nulla).

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 17 *Se $f \neq 0$ è nilpotente, allora non è diagonalizzabile.*

Dim: Se f è diagonalizzabile, esiste una base $\{v_1...v_n\}$ / $f(v_i) = \lambda_i v_i \forall i = 1...n$.
Se f è nilpotente, $\exists n > 0$ / $f^n = 0$ e dunque $0 = f^n(v_i) = \lambda_i^n v_i \Rightarrow \lambda_i^n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ quindi f = 0.#

OSS: In altre parole, se f è nilpotente, il suo unico autovalore è 0!

TEOREMA 18 (forma canonica di Jordan) *Sia $f : V \longrightarrow V$ lineare. Allora esiste una base di V in cui la matrice di f è della forma:* $\begin{pmatrix} J_{\lambda_1,n_1} & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & J_{\lambda_h,n} \end{pmatrix}$

7 Sezione settima

7.1 Forma bilineare

Def: Dato uno spazio vettoriale V su campo $\mathbb{K}$, una **forma bilineare** è una applicazione $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ (cioè associa a due vettori $v, u \in V$un numero$\beta(v, u) \in \mathbb{K}$) che è lineare nel primo e nel secondo argomento, cioè:

$$\beta(v_1 + v_2, u) = \beta(v_1, u) + \beta(v_2, u)$$

$$\beta(v, u_1 + u_2) = \beta(v, u_1) + \beta(v, u_2)$$

$$\beta(av, u)) = a\beta(v, u) = \beta(v, au)$$

Esempio:
$V = \mathbb{R}^2 \quad v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2)$
$\beta(v, u) = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$, è bilineare perché se prendo $v' = (z_1, z_2)$:
$\beta(v + v', u) = 3(x_1 + z_1)y_1 - (x_1 + z_1)y_2 + 2(x_2 + z_2)y_1 + (x_2 + z_2)y_2 = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + 3z1y_1 - z_1y_2 + 2z_2y_1 + z_2y_2 = \beta(v, u) + \beta(v', u)$
analogamente con le altre proprietà.

Def: Una forma bilineare β è **simmetrica** se $\beta(v, u) = \beta(u, v) \forall v, u \in V$.
β è **antisimmetrica** se $\beta(v, u)) - \beta(u, v) \forall v, u \in V$.

OSS: Ogni forma bilineare β si può scrivere come $\beta = \beta_s + \beta_a$, con β_s simmetrica e β_a antisimmetrica. Basta prendere:
$\beta_s(v, u) = \frac{\beta(v,u)+\beta(u,v)}{2}$
$\beta_a(v, u) = \frac{\beta(v,u)-\beta(u,v)}{2}$

Sia V uno spazio vettoriale $v_1...v_n$ una base di V e sia β una forma bilineare. Dati $v, u \in V$, posso scriverli nella base data:
$v = a_1v_1 + ... + a_nv_n = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i \quad u = b_1v_1 + ... + b_nv_n = \sum_{j=1}^{n} b_jv_j$
$\beta(v, u) = \beta(\sum_{i=1}^{n} a_iv_i, \sum_{j=1}^{n} b_jv_j) \overbrace{=}^{\text{lin } 1^\circ} \sum_{i=1}^{n} a_i\beta(v_i, \sum_{j=1}^{n} b_jv_j) \overbrace{=}^{\text{lin } 2^\circ} \sum_{i,j=1}^{n} a_ib_j\beta(v_i, v_j)$
Mi basta sapere $\beta(v_i, v_j)$! Quindi posso rappresentare β con una matrice A dove $A_{ij} = \beta(v_i, v_j)$.

Esempio:
$\beta(v,u) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$
$\beta(e_1,e_1) = 2 \quad \beta(e_1,e_2) = 1 \quad \beta(e_2,e_1) = -1 \quad \beta(e_2,e_2) = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Quindi se $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n, \quad u = b_1v_1 + ... + b_nv_n$
$\beta(v,u) = (a_1, ...a_n)A \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

7.1.1 Matrici simmetriche e matrici congruenti

<u>**Def**</u>: A è **simmetrica** se $A = A^T$ cioè se $A_{ij} = A_{ji}$, A è **antisimmetrica** se $A = -A^T$ cioè se $A_{ij} = -A_{ji} \forall i,j$.

Esempi:
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ è simmetrica $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

<u>OSS</u> una forma bilineare è simmetrica $\iff$ la sua matrice (in qualnque base) è simmetrica.
Una forma bilineare è antisimmetrica $\iff$ la sua matrice è antisimmetrica.

<u>**Def**</u>: Due matrici A,M sono congruenti $\iff$ $\exists$ una matrice invertibile B / $M = B^TAB$.
"Essere congruenti" è una relazione di equivalenza.

TEOREMA 19 *Due matrici sono congruenti se e solo se rappresentano la stessa forma bilineare (in basi magari diverse)*

Dim: $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n = x_1u_1 + ... + x_nu_n$
$u = b_1v_1 + ... + b_nv_n = y_1u_1 + ... + y_nu_n$

$$\beta(v,u) = (a_1...a_n)A \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{ma} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\beta(v,u) = (B \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix})^T AB \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}^T \underbrace{B^TAB}_{M} \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \quad \#$$

7.2 Diagonalizzare forme bilineari

Analogamente a quanto fatto per le appl. lineari, ci chiediamo:
"posso trovare una base $v_1...v_n$ in cui la matrice della forma bilineare β sia diagonale?
<u>OSS</u>: Se β è antisimmetrica, sicuramente no:
l'unica matrice diagonale antisimmetrica è la matrice nulla. (perchè una matrice antisimmetrica ha tutti 0 sulla diagonale).

TEOREMA 20 *Se β è simmetrica, esiste una base $v_1...v_n$ in cui la matrice di β è diagonale. In altre parole, ogni matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale.*

Dim: Sia $w_1...w_n$ una base qualsiasi:

- PASSO 1) se $\beta(w_1, w_1) \neq 0$ vai al passo 2. Se $\beta(w_1, w_1) = 0$ ma esiste i / $\beta(w_i, w_i) \neq 0$, scambio w_1 con w_i e vado al passo 2. Se $\beta(w_i, w_i) = 0 \forall i$ allora cerco i, j / $\beta(w_i, w_j) \neq 0$ e scambio $w_1 = w_i + w_j$ $w_2 = w_j$ $w_i = w_1$ $w_j = w_2$ e vado al passo 2.
- PASSO 2) Faccio una nuova base.
  $w'_1 = w_1, \forall i = 2...n w'_i = w_i - \frac{\beta(w_1,w_i)}{\beta(w_1,w_1)} w_1$
  così che $\beta(w_1, w_i) = \beta(w_1, w_i) - \frac{\beta(w_1,w_i)}{\beta(w_1,w_1)} \beta(w_1, w_1) = 0$.
  Ottengo una matrice che ha sulla prima riga e sulla prima colonna tutti 0 tranne $A_{1,1}$, per diagonalizzarla completamente devo ripetere il procedimento anche su $(w'_2, ..., w'_n)$ senza toccare w'_1. Dopo n-1 iterazioni ottengo una matrice diagonale.

Con questo algoritmo è possibile diagonalizzare una forma bilineare simmetrica. Si può fare di meglio?
Esempio:
Sia $V = \mathbb{R}^4$, supponiamo di avere trovato una base v_1, v_2, v_3, v_4 tale che la matrice di β è diagonale.
Se pongo $u_1 = \frac{1}{2}v_1, \beta(u_1, u_1)) = \beta(\frac{1}{2}v_1, \frac{1}{2}v_1 = 1/4 \cdot 4 = 1$
Se pongo $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}v_2, \beta(u_2, u_2) = 1$
Se pongo $u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}v_3, \beta(u_3, u_3) = -1$
Se pongo $u_4 = v_4, \beta(u_4, u_4) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dopo le sostituzioni: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>OSS</u>: se invece che su $\mathbb{R}^4$ fossi stato su $\mathbb{C}^4$ invece che $u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}v_3$ avrei potuto porre:
$u_3 = \frac{1}{\sqrt{-5}}v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}iv_3$ e così $\beta(u_3, u_3) = 1$ e avrei avuto una matrice con solo 0 e 1.

TEOREMA 21 (Sylvester) *Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e una forma bilineare simmetrica β esiste una base $u_1...u_n$ di V tale che la matrice di β in tale base è:*

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & .. &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& .. &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& .. & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

Con p = num. di 1, r-p = num. di -1, n-r = num. di 0

*Inoltre la coppia di numeri **(p, r-p)** non dipende dalla base scelta ed è detta la **segnatura** di β.*

Dim: Per il teorema 20, esiste una base $v_1...v_n$ in cui la matrice di β è diagonale. A meno di riordinarli sappiamo che:

$\beta(v_i, vi)$ sia $\begin{cases} > 0 \forall i \in \{1...p\} \\ < 0 \forall i \in \{p+1...r\} \\ = 0 \forall i \in \{r+1...n\} \end{cases}$

Allora ponendo $u_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\beta(v_i,v_i)|}} v_i \text{ se} i \leq r \\ v_i \text{altrimenti} \end{cases}$

$\beta(u_i, u_i) = \begin{cases} 1 i \in \{1...p\} \\ -1 i \in \{p+1...r\} \\ 0 i \in \{r+1...n\} \end{cases}$ #

> **TEOREMA 22** *Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ e una forma bilineare simmetrica, esiste una base $u_1...u_n$ di V tale che la matrice di β è della forma* $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & .. & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & .. & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$
>
> *Il numero di 1 è uguale al rango della matrice*

Dim: Come nel teorema precedente, ma $\forall j \in \{p+1...r\}$ $u_j = \frac{1}{\sqrt{\beta(v_j,v_j)}} v_j = i \frac{1}{\sqrt{|\beta(v_j,v_j)|}} v_j$ in modo che $\beta(u_j, u_j) = 1$. #

I due teoremi precedenti, in altre parole, ci dicono che:
Corollario: Due matrici simmetriche sono congruenti su $\mathbb{R} \iff$ hanno la stessa segnatura; sono congruenti su $\mathbb{C} \iff$ hanno lo stesso rango.

8 Prodotto scalare

8.1 Forma quadratica

Def: Sia β una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}$. La **forma quadratica** associata a β è $q : V \longrightarrow \mathbb{K} \quad q(v) = \beta(v, v)$.

OSS 1): Data q posso ritrovare β perchè:
$(q(v+u) - q(v) - q(u))/2 = (\beta(v+u, v+u)) - \beta(v, v) - \beta(u, u))/2$
$= (\beta(v, v) + \beta(u, u) + 2\beta(v, u) - \beta(v, v) - \beta(u, u))/2 = \beta(v, u)$

OSS 2): data una forma quadratica $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$, $q(\underline{0}) = \beta(\underline{0}, \underline{0}) = \underline{0}$

Esempio:
$V = \mathbb{R}^2 \quad v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2) \quad \beta(v, u) = 2x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1$
$q(v) = \beta(v, v) = 2x_1^2 - x_2^2 + 6x_1x_2$

Def:

1. q è **definita positiva** se $\boldsymbol{q(v) > 0}$ $\forall v \neq 0$.
2. q è **definita negativa** se -q è definita positiva, cioè se $\boldsymbol{q(v) < 0}$ $\forall v \neq 0$.
3. q è **semidefinita positiva** se $\boldsymbol{q(v) \geq 0}$ $\forall v \in V$.

4. q è **semidefinita negativa** se $\boldsymbol{q(v) \leq 0}$ $\forall v \in V$.

5. q è **indefinita** se $\exists v_1, v_2 \in V \ / \ \boldsymbol{q(v_1) > 0, q(v_2) < 0}$

OSS:

1. q è def pos $\iff$ la segnatura di β è (n,0). Cioè $\exists$ una base in cui la matrice di β è I_n. (ci sono solo 1)

2. q è def neg $\iff$ la segatura di β è (0,n). (ci sono solo -1)

3. q è semidef pos $\iff$ la segnatura di β è (r,0). (ci sono solo 1 e 0)

4. q è semidef neg $\iff$ la segnatura di β è (0,r). (ci sono solo -1 e 0)

5. q è indefinita $\iff$ la segnatura di β è (p,r-p). (ci sono -1 e 1)

8.1.1 Matrice Hessiana

L'**Hessiana** di una *funzione reale di più variabili reali* è una matrice quadrata i cui elementi sono le derivate parziali seconde della funzione f.

Data cioè una funzione reale di più variabili reali:

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definita in un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^n$ e che ammetta derivate parziali almeno fino all'ordine 2 in tale sottoinsieme, possiamo costruire la matrice Hessiana ad essa associata che è data da

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

dove

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$$

$$\forall \ i, j \in \{1, 2, ..., n\} : \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]$$

ovvero è un modo compatto per indicare la derivata parziale rispetto ad x_i della derivata parziale di f rispetto a x_j.

Figure 7:

8.2 Prodotto scalare

<u>**Def**</u>: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (si utilizza $\mathbb{R}$ perchè ci serve il concetto di ordinamento che non c'è sui complessi).
Un **prodotto scalare** è una forma bilineare definita positiva (cioè tale che la forma quadratica associata sia definita positiva).

<u>OSS</u>: Sia $V = \mathbb{R}^n \quad v = (x_1...x_n), \quad u = (y_1...y_n)$
$\beta(v,u) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ è un esempio di prodotto scalare chiamato Prodotto Scalare Standard di $\mathbb{R}^n$.

Sia $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ un prodotto scalare (cioè una forma bilineare simmetrica definita positiva).
Invece di $\beta(v,u)$ scriveremo semplicemente $\boldsymbol{(v,u)}$ (oppure $< v,u >$ o, $v \cdot u$) e invece di $q(v)$ scriveremo $||v||^2$ cioè definiamo la **norma** (o <u>lunghezza</u>) di v come $\boldsymbol{||v|| = \sqrt{(v,v)}}$.
Osserviamo che $||v|| > 0 \forall v \neq \underline{0}$.
Diciamo che v è un **versore** se $||v|| = 1$.
Diciamo che $\{v_1...v_n\}$ sono vettori tra loro **ortogonali** se $(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$.

<u>**Def**</u>: Diciamo che un insieme di vettori $\{v_1...v_n\}$ è **ortonormale** se:
$$(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ ortogonali} \\ 1 & i = j \text{ versori} \end{cases}$$

TEOREMA 23 *Per ogni spazio vettoriale V e per ogni prodotto scalare su V esiste una base ortonormale di V.*

Dim: Poichè il prodotto scalare è def. postivo, per il teorema di Sylvester esiste una base $v_1...v_n$ in cui la matrice del prodotto scalare è In. Quindi $v_1...v_n$ sono vettori ortonormali. #

Esempio: Controllo che la funzione sia un prodotto scalare.
Sia $V = \mathbb{R}^2 \quad v = (x_1, x_2) \quad u = (y_1, y_2) \quad (v,u) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$.
Per controllare che sia un prodotto scalare deve essere 1) bilineare, 2) simmetrica, 3) def. pos.
Nella base e_1, e_2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice è simmetrica, ho verificato i punti 1 e 2.
Diagonalizzo la matrice, così ottengo la segnatura (se è (n,0) allora è def. pos).
Pongo $w_1 = e_1 \quad w_2 = e_2 - \frac{\beta(e_2,e_1)}{\beta(e_1,e_1)} e_1 = e_2 - \frac{1}{2} e_1$
$(w_1, w_2) = (e_1, e_2) - \frac{1}{2}(e_1, e_1) = 0$
$(w_2, w_2) = (e_2, e_2) + \frac{1}{4}(e_1, e_1) - \frac{2}{2}(e_1, e_2) = 3 + \frac{2}{4} - 1 = \frac{5}{2}$
La matrice in base w_1, w_2 diventa $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$
Pongo $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} w_1 \quad v_2 = \frac{\sqrt{10}}{5} w_2 \quad (v_1, v_1) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 (w_1, w_1) = 1 \quad (v_2, v_2) = 1 \quad (v_1, v_2) = 0$
La matrice in base v_1, v_2 è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ def. pos
Quindi è un prodotto scalare e v_1, v_2 è una base ortonormale.

TEOREMA 24 *Sia $v_1...v_m$ un insieme di vettori ortogonali. Allora $v_1...v_m$ sono linearmente indipendenti.*

Dim: Siano $a_1...a_m \in \mathbb{R} \ / \ a_1v_1 + ... + a_mv_m = \underline{0}$, dobbiamo mostrare che $a_1 = 0...a_m = 0$.
$0 = (v_1, \underline{0}) = (v_1, a_1v_1 + ... + a_mv_m) = a_1(v_1, v_1) + a_2 \underbrace{(v_1, v_2)}_{0} + ... + a_m \underbrace{(v_1, v_m)}_{0}$
$0 = a_1(v_1, v_1) \Rightarrow a_1 = 0$. Nello stesso modo verifico che $a_2 = 0...a_m = 0$ #.

OSS: In particolare se n = dimV, n vettori tra loro ortogonali sono automaticamente una base.

OSS: Un qualsiasi prod. scalare posso ricondurlo al prodotto scalare standard.
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con un prodotto scalare e sia $v_1...v_n$ una base ortonormale (rispetto a tale prodotto). Allora il prodotto scalare di due vettori $v, u \in V$ è uguale al prodotto scalare standard delle loro coordinate nella base $v_1...v_n$.

Dim: $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n \quad u = b_1v_1 + ... + b_nv_n$
$(v, u) = a_1(v_1, u)+...+a_n(v_n, u) = a_1b_1(v_1, v_1)+a_1b_2(v_1, v_2)+...+a_1b_n(v_1, v_n)+...+a_nb_1(v_n, v_1)+ ... + a_nb_n(v_n, v_n) \Rightarrow (v, u) = a_1b_1 + ... + a_nb_n$ (perchè essendo la base ortonormale se $i \neq$ j allora$(v_i, v_j) = 0$)
$= \sum_{i=1}^{n} a_ib_i =$ prod. scalare std di $(a_1...a_n), (b_i...b_n)$

8.3 Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

TEOREMA 25 *Sia V uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *con un prod. scalare. Allora* $\forall v, u \in V$:

$$\boldsymbol{(v, u)^2 \leq (v, v) \cdot (u, u)}$$

ovvero $|(v, u)| \leq ||v|| \cdot ||u||$, *e l'uguaglianza vale* $\iff$ *v,u sono linearmente indipendenti*

Dim:

- Se NON sono lin. indip, ad es $u = av$, banalmente $(v, av)^2 = a^2(v, v)^2 = (v, v) \cdot (av, av)$
- Se sono lin. indip. ovvero $av + bu = \underline{0} \iff a, b = 0$
  $0 < (av + bu, av + bu) =$ perchè definita positiva $(q(v) = \beta(v, v) > 0)$
  $= a^2(v, v) + b^2(u, u) + 2ab(v, u)$
  In particolare per $a = (u, u) \quad b = -(v, u)$ otteniamo:
  $0 < (u, u)^2 + (v, u)^2(u, u) - 2(u, u)(v, u)^2$ Dividendo per (u, u) (che è >0):
  $0 < (v, v)(u, u) - (v, u)^2 \Rightarrow (v, u)^2 < (v, v)(u, u)$ #

Def: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con un prodotto scalare. Dati due vettori $v, u \in \mathbb{R}$ definiamo **l'angolo convesso** tra v,u come: $\boldsymbol{\theta = arccos\frac{(v,u)}{||v|| \cdot ||u||}}$ $\quad$ ($\frac{(v,u)}{||v|| \cdot ||u||} \in [-1, 1]$ per disugu. di Shwartz).

Def: Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ definisce una **distanza euclidea** nel modo seguente:
Dati $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $\quad \boldsymbol{d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||}$.

TEOREMA 26 *La distanza euclidea verifica le seguenti proprietà:*

1. $d(P, Q) \geq 0$ *ed è = 0* $\iff P = Q$
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$
3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)\ \forall R \in \mathbb{R}^n$ *(disuguaglianza triangolare)*

Dim:

1. Conseguenza del fatto che un prodotto scalare è def. pos.
   $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \geq 0 \quad = 0 \iff \overrightarrow{PQ} = 0 \iff P = Q$

2. $d(Q,P) = ||\overrightarrow{QP}|| = || - \overrightarrow{PQ}|| = |-1| \cdot ||\overrightarrow{PQ}|| = d(P,Q)$
   Perchè più in generale, $\forall a \in \mathbb{R}, \forall v \in V$:
   $||av|| = \sqrt{(av, av)} = \sqrt{a^2(v,v)} = |a| \cdot ||v||$

3. Mostriamo preliminarmente che se $v, u \in V$ allora:
   $||v+u||^2 = (v+u, v+u) = (v,v) + (u,u) + \underbrace{2(v,u)}_{\leq 2||v|| \cdot ||u|| \text{ (C.S.)}} \leq (||v|| + ||u||)^2$
   Quindi $||v+u|| \leq ||v|| + ||u||$
   sostituendo $v = \overrightarrow{PR}, u = \overrightarrow{RQ},\ v+u = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ #

Esempio:
Calcoliamo la distanza di $P = (1,-1)eQ = (4,3)$ rispetto al prodotto scalare standard:
$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$.
$\overrightarrow{PQ} = (4-1, 3-(-1)) = (3,4) = v$
$d(P,Q) = ||v|| = \sqrt{||v||} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Calcoliamo la distanza euclidea degli stessi P,Q ma rispetto al prodotto scalare:
$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$ che induce la norma $||v|| = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2}$
Quindi $d(P,Q) = ||(3,4)|| = \sqrt{2 - 3^2 + 3 * 4^2 + 2 * 3 * 4} = 3\sqrt{10}$

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con un prodotto scalare e sia U un sottospazio vettoriale di V.
$U^\perp = \{v \in V \ / \ (v,u) = 0 \forall u \in U\}$ **Sottospazio ortogonale** ad U.

<u>OSS</u>: $U^\perp$ è un SSV di V. Infatti se $v_1, v_2 \in U^\perp$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ a_1v_1 + a_2v_2 \in U^\perp$
se $u \in U,\ (a_1v_1 + a_2v_2, u) = a_1(v_1, u) + a_2(v_2, u) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0$

ESERCIZIO:
Sia $V = \mathbb{R}^3$ con il prod. scalare
$U = \langle v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,-1) \rangle = \{t v_1 + s v_2,\ t,s \in \mathbb{R}\} = \{(t+s, t, -s),\ t,s \in \mathbb{R}\}$
TROVIAMO $U^\perp$. Osserviamo che $v = (x_1, x_2, x_3) \in U^\perp$ sse $(v, v_1) = 0,\ (v, v_2) = 0$

$$U^\perp = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in V \ / \ \begin{cases} x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 = 0 & \rightarrow\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 - x_3 = 0 & \rightarrow\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow U^\perp = \{(t, -t, t) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$ (con prod. scalare STD)

Se invece scelgo prod. scalare $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$

$$U^\perp = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in V \ / \ \begin{cases} x_1 \cdot 1 + 2x_2 + 3x_3 \cdot 0 & \rightarrow\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 \cdot 1 + 2x_2 \cdot 0 - 3x_3 & \rightarrow\ x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow U^\perp = \{(t, -\frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t) \ | \ t \in \mathbb{R}\}$

Figure 8: Esercizio ssv ortogonale

9 Isometrie

9.1 Isometria

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con un prodotto scalare.
Def: Una **isometria** è una applicazione lineare $f : V \longrightarrow V$ tale che $\forall v, u \in V$:

$$\boldsymbol{(f(v), f(u)) = (v, u)}$$

"Isometria" = stessa misura

TEOREMA 27 *f è una isometria* $\iff \forall v \in V \quad ||f(v)|| = ||v||$

Dim:
$\Rightarrow$ se f è un' isometria, allora $||f(v)|| = \sqrt{(f(v), f(v))} = \sqrt{(v, v)} = ||v||$.

$\Leftarrow \ \forall v, u \in V$:
$||v+u||^2 - ||v-u||^2 = (v+u, v+u) - (v-u, v-u) = (v, v) + (u, u) + 2(v, u) - [(v, v) + (u, u) - 2(v, u)]$ $= 4(v, u)$ cioè $(v, u) = \frac{1}{4}(||v + u||^2 - ||v - u||^2))$
Quindi se f conserva la norma dei vettori $(f(v), f(u)) = \frac{1}{4}||f(v) + f(u)||^2 - ||f(v) - f(u)||^2 = (v, u)$.#

Esempio:
Sia $V = \mathbb{R}^2 \quad v = (x, y)$ prodotto scalare standard
$f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$
$||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ perchè $(||(x, y)|| = \sqrt{(v, v)})$
Inserire calcoli:

$||f(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2} = ||(x, y)|| \Rightarrow$ f è un' isometria.

OSS: Se f è una isometria, allora conserva gli angoli. In effetti l'angolo convesso tra v, u:
$\arccos \frac{(v,u)}{||v||||u||} = \arccos \frac{(f(v),f(u))}{||f(v)||||f(u||}$ che è l'angolo compreso tra $f(v), f(u)$.

OSS: Non tutte le applicazioni lineari che conservano gli angoli sono isometrie.
Ad esempio:
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad f(v) = 2v$
$\frac{(f(v),f(u))}{||f(v)||||f(u||} = \frac{4(v,u)}{4(||v||||u||}$ f non cambia gli angoli ma sicuramente f non è una isometria perchè $||f(v)|| \neq ||v||$.

TEOREMA 28 *Ogni isometria è un isomorfismo*

Dim: Sia f un isometria. Facciamo prima vedere che f è iniettiva. Poiché un prodotto scalare è def. positivo, $||v|| = 0 \iff v = \underline{0}$.
Sia v $\in kerf$, cioè $f(v) = \underline{0}$. Poichè f è una isometria $||v|| = ||f(v)|| = ||\underline{0}||$.
Quindi $kerf = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ f è iniettiva.
Adesso dimostro che è suriettiva.
Poichè $f : V \to V$, per il teorema del rango dim Imf = dimV - dim kerf = dimV.
Quindi $\Rightarrow$ f è suriettiva $\Rightarrow$ f è un isomorfismo. #

OSS: Non vale il viceversa: ad esempio $f : V \to V \quad f(v) = 2v$ è un isomorfismo ma **non** è una isometria.

Def: Una matrice A è ortogonale se $\boldsymbol{AA^T = In}$.

Esempio:
$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ è ortogonale perchè $AA^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

OSS: Questo ci fa sospettare che ci sia un legame tra matrici ortogonali e isometrie.

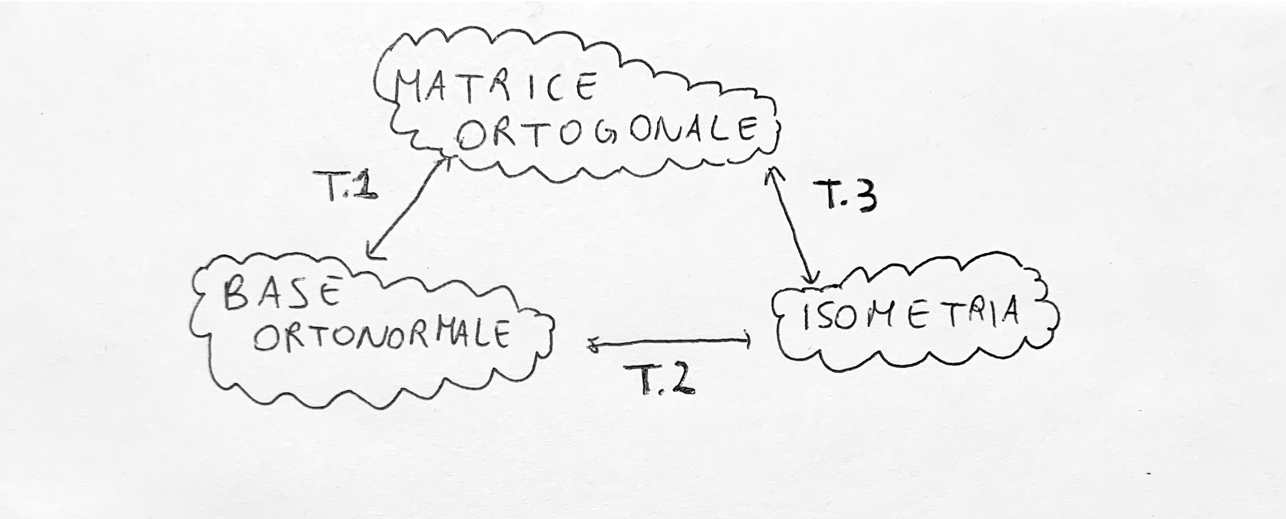

Figure 9: Collegamento teoremi

9.2 Teoremi isometrie e matrici ortogonali

TEOREMA 29 (T.1) *Sia $v_1...v_n$ una base ortonormale di V. Allora una base $w_1...w_n$ di V è anch'essa ortonormale $\iff$ la matrice del cambiamento di base è ortogonale.*

Dim: Poichè $v_1...v_n$ è ortonormale, cioè $(v_1...v_j) = \begin{cases} 1 \; se \; i = j \\ 0 \; se \; i \neq j \end{cases}$ la matrice del prodotto scalare in tale base è In. Quindi, se C è la matrice del cambiamento di base, la matrice del prodotto scalare nella base $w_1...w_n$ è $C^T InC = C^T C$ (uso In perchè deve essere congruente ad una matrice identità). Quindi $w_1...w_n$ è ortonormale $\iff$ la matrice del prodotto scalare in tale base è In $\iff$ $C^T C = In$ $\iff$ C è ortogonale. #

In precedenza abbiamo visto che un'applicazione lineare è un isomorfismo $\iff$ manda basi in basi.

TEOREMA 30 (T.2) *Un' applicazione lineare è una isometria $\iff$ manda basi ortonormali in basi ortonormali*

Dim:
$\Rightarrow$ Sia f una isometria e $v_1 ... v_n$ una base ortonormale. Allora:
$(f(v_i), f(v_j)) = (v_i, v_j) = \begin{cases} 1 \; se \; i = j \\ 0 \; se \; i \neq j \end{cases}$ cioè $f(v_1)...f(v_n)$ è una base ortonormale.
$\Leftarrow$ Sia f un'applicazione lineare e sia $v_1 ... v_n$ una base ortonormale tale che $f(v_1)...f(v_n)$ è una base ortonormale.
Voglio mostrare che f è una isometria. Dati v, u, li scrivo nella base $v_1 ... v_n$:
$v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n \quad u = y_1 v_1 + ... + y_n v_n$
$f(v) = x_1 f(v_1) + ... + x_n f(v_n)$, $f(u) = y_1 f(v_1) + ... + y_n f(v_n)$
Quindi, per il teorema "il prodotto scalare di due vettori v,u è uguale al prod. scalare std delle loro coordinate in una base ortonormale":
$(v, u) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ (perchè essendo la base ortonormale se $i \neq j$ allora$(v_i, v_j) = 0$) $=$ $(f(v), f(u))$(perchè anche $f(v_1)...f(v_n)$ è ortonormale). Quindi f è una isometria. #

> **TEOREMA 31 (T.3)** *Un' applicazione lineare f è una isometria $\iff$ la sua matrice in una qualsiasi base ortonormale è una matrice ortogonale.*

Dim: Sia $v_1 ... v_n$ una base ortonormale e sia A la matrice di f rispetto a tale base
$f(v_1) = a_{11} v_1 + ... + a_{n1} v_n$
...
$f(v_n) = a_{1n} v_1 + ... + a_{nn}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$
$(f(v_i), f(v_j)) = (a_{1i} v_1 + ... + a_{ni} v_n, a_{1j} v_i + ... + a_{nj} v_n) =$
(utilizzo la bilinearità del prodotto scalare e il fatto che $v_1 ... v_n$ sono ortonormali)
$= a_{1i} a_{1j} (v_1, v_1) + ... + a_{ni} a_{nj} (v_n, v_n)$
Cioè $(f(v_i), f(v_j)) = a_{1i} a_{1j} + ... + a_{ni} a_{nj} = (A^T A)_{ij}$
Infatti $A^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{1i} & ... & a_{ni} \\ a_{in} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{in} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{pmatrix}$
Quindi i-ma riga di A per j-ma colonna di A^T è proprio la somma qui sopra.
Quindi f è un isometria $\iff$ $(f(v_i), f(v_j)) = \begin{cases} 1 \; se \; i = j \\ 0 \; se \; i \neq j \end{cases}$ (per il T.2) $\iff$ $(A^T A)_{ij} =$ $\begin{cases} 1 \; se \; i = j \\ 0 \; se \; i \neq j \end{cases}$ $\iff A^T A = In \iff$ A è una matrice ortogonale #.

Esempio:

9.3 Altre proprietà

> **TEOREMA 32** 1. *Sia A una matrice ortogonale. Allora $det(A) = \pm 1$*
>
> 2. *Sia f un' isometria. Allora det(f) $= \pm 1$*

Dim:
1) $\det(A^T) = \det(A)$. Quindi se $A^T A = In$ allora $\det(A^T A) = \det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2 =$

$\det(\text{In}) = 1 \iff A = \pm 1$
2) Per definizione, det(f) = det(A) dove A è la matrice di f in una base qualsiasi. Se scelgo una base ortonormale, per il T.3 la matrice A di f è ortogonale, e quindi utilizzo quanto visto al punto 1). #

<u>OSS</u>: Non è vero il viceversa. Ad esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ det(A) = 1 ma A non è ortogonale. Perchè $A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ e l'applicazione $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$ non è una isometria.

TEOREMA 33 *Sia f una isometria. Allora se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore reale di f, allora* $\lambda = \pm 1$

Dim: Se v è un autovettore di f, cioè $\exists v \neq \underline{0}$ / $f(v) = \lambda v$, allora (isometria) $||f(v)|| = ||\lambda v|| = \sqrt{(\lambda v, \lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 (v, v)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(v, v)} = |\lambda| \cdot ||v||$.
Poichè f è una isometria $||v|| = ||f(v)|| = |\lambda| ||v||$ quindi $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.#

<u>OSS</u>: il teorema dice che <u>se</u> λ è reale allora è ± 1. Ma può essere anche complesso.
Esempio:
$f(x, y) = (y, -x)$ nella base canonica $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$p(\lambda) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_1 = i \ \lambda_2 = -i$
quindo f è una isometria i cui autovalori sono $i, -i$.