

Contents

1 Sezione prima	2	7 Sezione settima	29
1.1 Insiemi	2	7.1 Forma bilineare	29
1.2 Funzioni o applicazioni	2	7.1.1 Matrici simmetriche e matrici congruenti	30
1.3 Numeri	3	7.2 Diagonalizzare forme bilineari	30
1.3.1 Campi	3	8 Prodotto scalare	32
1.3.2 Campi finiti	3	8.1 Forma quadratica	32
1.4 Spazio vettoriale	4	8.1.1 Matrice Hessiana	33
1.5 Sottospazio vettoriale	5	8.2 Prodotto scalare	34
1.6 Base	7	8.3 Disuguaglianza di Cauchy- Schwartz	35
1.6.1 Basi canoniche	8	9 Isometrie	37
1.6.2 Estrarre e completare	8	9.1 Isometria	37
2 Sezione seconda	8	9.2 Teoremi isometrie e matrici or- togonali	38
2.1 Dimensione	8	9.3 Altre proprietà	39
2.2 Forma cartesiana e parametrica	9		
2.3 Somma di sottospazi	10		
2.3.1 Somma diretta	11		
3 Sezione terza	12		
3.1 Applicazione lineare	12		
3.2 Nucleo e Immagine	12		
3.3 Isomorfismo	14		
3.4 Matrici	14		
3.4.1 Prodotto tra matrici	15		
3.5 Ancora isomorfismo...	16		
4 Sezione quarta	17		
4.1 Matrice identità	17		
4.2 Matrici invertibili	18		
4.2.1 Il rango e la trasposta	19		
4.3 Determinante	20		
4.3.1 Proprietà del determinante	20		
4.3.2 Prodotto vettoriale	21		
5 Sezione quinta	21		
5.1 Sistemi lineari matriciali: metodi risolutivi	21		
5.1.1 Inverso di una matrice (metodo Gauss)	23		
5.2 Insieme delle soluzioni di un sis- tema lineare	23		
5.3 Sottospazio affine	24		
6 Sezione sesta	25		
6.1 Matrice diagonale	25		
6.2 Autovettore e autovalore	25		
6.3 Autospazio	26		
6.4 Applicazioni nilpotenti	28		

Algebra e Geometria

A.A. 2022/2023

1 Sezione prima

1.1 Insiemi

Prodotto cartesiano: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} : \{(a, b) = a \in A, b \in B\}$.

Una **relazione** é un sottoinsieme del prodotto cartesiano di due o più insiemi, quindi una relazione su A é un sottoinsieme di $A \times A$ (scelgo alcune coppie di $A \times A$).

Scrivo $a_1 R a_2$ se $(a_1, a_2) \in R$ e dico " a_1 é in relazione con a_2 ".

Def. Una relazione é di **equivalenza** se rispetta le seguenti proprietà:

- Riflessiva: se $a R a \forall a \in A$ (ogni elemento é in relazione con se stesso)
- Simmetrica: se $a_1 R a_2$ allora $a_2 R a_1$
- Transitiva: se $a_1 R a_2$ e $a_2 R a_3$ allora $a_1 R a_3$

1.2 Funzioni o applicazioni

$f : X \longrightarrow Y$

- f é **Iniettiva** se "elementi diversi vanno in elementi diversi", cioè $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- f é **Suriettiva** se "ogni elemento di Y viene da qualche elemento di X ", cioè se $\forall y \in Y, \exists x \in X / y = f(x)$.
- f é **Biunivoca** se é sia **iniettiva** sia **suriettiva**, cioè ogni elemento di Y viene da uno e un solo elemento di $X, \forall y \in Y, \exists! x \in A / y = f(x)$.
 f^{-1} da Y a X é la funzione inversa.

Esempi:

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, non iniettiva, non suriettiva (es -2 non é x^2 per nessun $x \in \mathbb{R}$)
- $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, é iniettiva, ma non suriettiva
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty), f(x) = x^2$, é suriettiva ma non iniettiva
- $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty), f(x) = x^2$, è sia suriettiva sia iniettiva quindi biunivoca. Esiste la funzione inversa e vale: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

1.3 Numeri

Naturali : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, operazioni definite: $+$, \cdot , non sono presenti né gli opposti né gli inversi.

Interi : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$, operazioni definite: $+$, \cdot , $-$, non sono presenti gli inversi.

Razionali : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, operazioni definite : $+$, \cdot , $-$, $:$, non sono presenti i limiti $(-\infty, +\infty)$.

Reali : $\mathbb{R} = \{-\infty \dots 0 \dots +\infty\}$, non sono presenti le radici dei numeri negativi

Complessi : $\mathbb{C} = \{a + bi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, $i^2 = -1$, i é chiamata \rightarrow unità immaginaria.

1.3.1 Campi

Def: $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é un **campo** se:

1. valgono le proprietà commutativa, associativa e distributiva su $+$, \cdot .
2. esistono elementi neutri, rispettivamente $(0, 1)$.
3. ogni $x \in \mathbb{K}$ ha opposto $-x/x + (-x) = 0$, ogni $x \in \mathbb{K}, x \neq 0$ ha inverso $x^{-1}/(x \cdot x^{-1} = 1)$

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono campi \mathbb{N}, \mathbb{Z} no.

1.3.2 Campi finiti

Dato un numero intero $n \geq 0$, definiamo su \mathbb{Z} la relazione di equivalenza

$$a \equiv b(n) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = k \cdot n$$

essa rispetta tutte e 3 le proprietà che definiscono un campo. Definiamo $[b] = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv b(n)\}$ e $Z_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$.

Es. in $Z_2 = \{[0], [1]\}$, $[0]$ sono i numeri pari, $[1]$ quelli dispari.

Definiamo su Z_n le operazioni:

$$[a] + [b] = [a + b], [a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

Es. Possiamo scrivere, con la notazione dei campi finiti, il prodotto tra numeri interi:

Dato Z_2 : $[0] \cdot [0] = [0], [0] \cdot [1] = [0 \cdot 1] = [0], [1] \cdot [1] = [1 \cdot 1] = [1]$.

Z_n é un campo $\iff n$ é **primo**. Se n non é primo, non esisterà l'inverso di un fattore di n , ovvero non esisterà nessuna classe di elementi che se moltiplicata con la classe del fattore restituisca classe 1.

1.4 Spazio vettoriale

Def: uno **spazio vettoriale** definito su campo \mathbb{K} , é un insieme V con due operazioni:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad (v_1, v_2) \rightarrow v_1 + v_2$$

$$\cdot : \underbrace{\mathbb{K}}_{\text{costante}} \times V \longrightarrow V \quad (a, v) \rightarrow av$$

Gli elementi di V sono detti **vettori**, gli elementi di \mathbb{K} sono detti **scalari**.

$(+, \cdot)$ verificano le seguenti proprietà: $+$ é commutativa, associativa, con elemento neutro (vettore nullo) e opposti $(-v)$, \cdot é associativa, distributiva rispetto alla somma e con elemento neutro.

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$$

$$\text{Esiste un "vettore nullo" } 0 \in V / 0 + v = v \quad \forall v \in V$$

$$\forall v \in V \exists -v / v + (-v) = 0$$

$$a(bv) = (ab)v \quad (a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v, \quad a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$$

Esempi di spazi vettoriali:

1. Somma vettoriale metodo del parallelogramma:

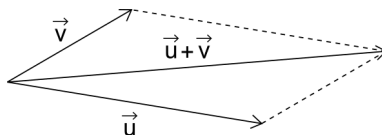


Figure 1: Somma di vettori

2. $\forall \mathbb{K}, \mathbb{K}^n$ é uno spazio vettoriale $\mathbb{K}^n = \{(x_1 \dots x_n), x_i \in \mathbb{K} \forall i = 1 \dots n\}$ su \mathbb{K}

$$v = (x_1 \dots x_n) \quad u = (y_1 \dots y_n) \quad a \in \mathbb{K}$$

$$v + u = (x_1 + y_1 \dots x_n + y_n) \quad av = (ax_1 \dots ax_n)$$

Quindi \mathbb{R}^n é uno spazio vettoriale su \mathbb{R} , \mathbb{Z}_p^n é uno spazio vettoriale su \mathbb{Z}_p etc...

3. I polinomi a coefficienti in \mathbb{K} , $\mathbb{K}[x]$ sono uno spazio vettoriale su \mathbb{K} rispetto alle operazioni usuali.

4. Se X é un insieme $V = \{ \text{funzione } X \rightarrow \mathbb{K} \}$ é uno spazio vettoriale su \mathbb{K} con le operazioni:

$$\bullet (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X, \forall f, g \in V$$

$$\bullet (a \cdot f)(x) = a \cdot f(x) \quad \forall a \in \mathbb{K}$$

1.5 Sottospazio vettoriale

Def: Un sottoinsieme non vuoto $U \subseteq V$ é un **sottospazio vettoriale** di V se é chiuso rispetto a tali operazioni, cioè:

$$\forall v_1, v_2 \in U \implies v_1 + v_2 \in U$$

$$\forall v_1 \in U, \forall a \in \mathbb{K}, a \cdot v_1 \in U$$

Esempi:

1. $V = \mathbb{R}^2$ spazio vettoriale sul campo \mathbb{R}
 $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$, é un SSV? (mi sto chiedendo se U sottoinsieme di V soddisfa le proprietà per essere un sottospazio vettoriale).
se $v_1 = (x_1, y_1) \in U \implies y_1 = 2x_1$
se $v_2 = (x_1 + y_2) \in U \implies y_2 = 2x_2$
 $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e $y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) \implies v_1 + v_2 \in U$ (soddisfa l'operazione +)
Inoltre $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot v_1 = (ax_1, ay_1)$ e $ay_1 = 2(ax_1) \implies a \cdot v_1 \in U$ (soddisfa l'operazione \cdot)
 $\implies U$ é un SSV.
2. $V = \mathbb{R}^2$ spazio vettoriale sul campo \mathbb{R}
 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$, é un SSV? No! Non lo é.
Se prendo ad esempio $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1) \in C$, ma $v_1 + v_2 = (1, 1) \notin C$ e $2v_1 \notin C$
3. $V = \mathbb{R}^2$ spazio vettoriale sul campo \mathbb{R}
 $W = \{(x, Y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \in \mathbb{Z}\}$, é un SSV?
 $\forall v_1, v_2 \in W, v_1 + v_2 \in W$? Sì (soddisfa la prima operazione).
 $\forall v_1 \in W, \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot v_1 \in W$? No! (non soddisfa la seconda operazione), per esempio
 $\frac{1}{2} \cdot (1, 0) = (\frac{1}{2}, 0) \notin W$
4. $V = \mathbb{R}^2$ spazio vettoriale sul campo \mathbb{R}
 $S = \{(x, Y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 0\}$, é un SSV?
 $\forall v \in S, a \in \mathbb{R} \quad av \in S$? Sì (soddisfa la seconda operazione)
 $\forall v_1, v_2 \in S, v_1 + v_2 \in S$? No! (non soddisfa la seconda operazione)
 $\implies S$ non é un SSV di V .
5. $V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$ spazio vettoriale sul campo \mathbb{R}
 $U = \{(x, y, z) \in V / z = 1\} = \{(x, y, 1), x, y \in \mathbb{R}\}$, é un SSV?
 $u_1 = (x_1, y_1, 1), u_2 = (x_2, y_2, 1) \quad u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) \notin U$
 $\implies U$ non é SSV.
6. $V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$ spazio vettoriale sul campo \mathbb{R}
 $W = \{(x, y, z) \in V / z = 0\} = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ é un SSV?
se $w_1, w_2 \in W \implies w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in W$, (soddisfa la prima operazione)
se $a \in \mathbb{R}, w \in W \implies aw \in W \implies W$ é un SSV (soddisfa anche la seconda condizione)
7. $V = \mathbb{R}[x] = \{\text{polinomi a coef. in } \mathbb{R}\}$
 $U = \{\text{polinomi di grado } 2\}$, é un SSV?
 $u_1 = x^2 - 3x + 4, u_2 = -x^2 + x - 2 \quad u_1 + u_2 = -2x + 2$, (grado 1) $\implies \notin U$, (non soddisfa la prima operazione)
 $\implies U$ non è SSV.

8. $V = \{funzioni da \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}\}$

$U = \{funzioni continue da \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, \text{ é un SSV? Sì}$

La somma di funzioni continue sarà a sua volta una funzione continua quindi $\in U$, soddisfa sia la prima sia la seconda operazione.

OSS: $U \text{ é un SSV di } V \iff \forall u_1, u_2 \in U \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}, a_1u_1 + a_2u_2 \in U.$

Dim: \Rightarrow se $U \text{ é un SSV e } u_1, u_2 \in U \Rightarrow a_1u_1, a_2u_2 \in U \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}$

\Leftarrow se $a_1u_1 + a_2u_2 \in U \forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, in particolare prendendo $a_1 = 1, a_2 = 1$, ho che $u_1 + u_2 \in U$, e prendendo un qualsiasi $a_2 = 0$ ho che $a_1u_1 \in U$, cioè V è un SSV. #

Def : Dati $v_1, v_2 \dots v_n \in V$, diciamo che $v \in V$ é una **combinazione lineare** di $v_1, v_2 \dots v_n$ se esistono $a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{K} / v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$. Per quanto osservato nella pagina precedente, $U \text{ é un SSV} \iff$ contiene tutte le combinazioni lineari di tutti i propri elementi.

Esempi:

1. $V = \mathbb{R}^2 \quad v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v = (3, -2)$, v é comb. lin. di v_1, v_2 ?

Sì perchè $\exists a_1 = 3, a_2 = -2 \in \mathbb{R} / 3v_1 - 2v_2 = (3, -2) = v$

2. $V = \mathbb{R}^2 \quad u_1 = (2, 0), u_2 = (-1, 0), v = (3, -2)$, v é comb. lin. di u_1, u_2 ? No! $a_1u_1 + a_2u_2 = (2a_1, 0) = (2a_1, 0) + (-a_2, 0) = (2a_1 - a_2, 0) \neq v = (3, -2)$

Diciamo che un SSV U di V é **generato** da $\{v_1 \dots v_n\}$ se ogni $u \in U$ é comb. lin. di $v_1 \dots v_n$, cioè se $\forall u \in U \exists a_1 \dots a_n \in \mathbb{K} / u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. In questo caso diciamo anche che U é lo **span** di $v_1 \dots v_n$ e scriviamo $U = \langle v_1 \dots v_n \rangle$

Esempio:

1. $V = \mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w), x, y, z, w \in \mathbb{R}\}, v_1 = (2, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, -1, 0)$

Il SSV generato da v_1, v_2 é $\langle v_1, v_2 \rangle = \{a_1v_1 + a_2v_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(2a_1, 0, 0, 0) + (0, a_2, -a_2, 0), a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(2a_1, a_2, -a_2, 0), a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / y + z = 0, w = 0\}$

2. $V = \mathbb{R}[x]$, il SSV generato dallo span $\langle 1, x, x^2 \rangle = \{a_01 + a_1x + a_2x^2\} = \{\text{tutti i polinomi di grado } \leq 2\}$

3. $V = \mathbb{R}^3 \quad v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0)$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \{a_1v_1 + a_2v_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$

$v_3 = (0, 0, 0) \quad v_4 = (2, 1, 0) \quad v_5 = (-1, 3, 0)$

Lo span di questi 5 vettori resta uguale allo span $\langle v_1, v_2 \rangle$, quindi v_3, v_4, v_5 sono "inutili" perché aggiungendoli non ottengo nulla di nuovo (tutti e tre si possono ricavare da v_1, v_2).

Diremo che sono **linearmente dipendenti**.

Def: Un insieme di vettori $\{v_1, v_n\}$ é **linearmente indipendente**

1) se nessun vettore é comb. lin. degli altri.

2) cioè se l'unica comb. lin. di $v_1 \dots v_n$ che dà 0 é quella $a_1 = 0 \dots a_n = 0$, se $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0 \implies a_1 = 0 \dots a_n = 0$.

Un insieme di vettori é **linearmente dipendente** se non é linearmente indipendente.

Perché le due definizioni sopra elencate sono equivalenti?:

Se 1) é falsa, c'è un v_i , supponiamo $v_1 / v_1 = a_2v_2 + \dots + a_nv_n$.

Ma allora $0 = -v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ cioè 2) é falsa.

Se invece 2) è falsa, cioè $\exists a_1 \dots a_n$ con almeno un $a_i \neq 0$ / $a_1 v_1 + a_n v_n = 0$ allora $v_i = \frac{a_1}{a_i} v_1 + \frac{a_n}{a_i} v_n$ cioè 1) è falsa.

Esempio:

$$V = \mathbb{R}^2 \quad v_1 = (-1, 2) \quad v_2 = (2, 4)$$

$\{v_1, v_2\}$ è lin. dipendente perché $v_2 = -2v_1$, cioè $2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = (0, 0)$ e $(2, 1) \neq (0, 0)$.

1.6 Base

Def: Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , diciamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una **base** di V se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è lin. indipendente e genera V .

Esempio:

$$\begin{cases} \{(1, 1), (2, 2)\} \text{ non è ind. e non genera } V \\ \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\} \text{ non è ind. ma genera } \mathbb{R}^2 & \implies \text{non sono basi} \\ \{(1, 0)\} \text{ è indep. ma non genera } \mathbb{R}^2 \\ \{(1, 0), (0, 1)\} \text{ è indep. e genera } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Sia V uno spazio vettoriale su campo \mathbb{K} e sia $B = \{v_1 \dots v_n\}$.

Def:

1. B **genera** V se ogni elemento di $V (v \in V)$ è combinazione lineare di $v_1 \dots v_n$, cioè $\forall v \in V \exists a_1 \dots a_n \in \mathbb{K} / v = a_1 \cdot v_1 \dots a_n \cdot v_n$.
2. B è linearmente indipendente.
3. B è una base di V se genera V ed è linearmente indipendente.

TEOREMA 1 B è una base \iff ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come comb. lin. di $v_1 \dots v_n$, cioè $\forall v \in V \exists! a_1 \dots a_n \in \mathbb{K} / v = v_1 a_1 \dots v_n a_n$.

Def: in questo caso $a_1 \dots a_n$ sono detti le coordinate di V nella base B .

Dim: \implies Sia B una base e $V \in V$ poiché B genera $V, \exists a_1 \dots a_n / v = a_1 v_1 \dots a_n v_n$. Per mostrare l'unicità supponiamo che $\exists b_1 \dots b_n / v = b_1 v_1 \dots b_n v_n$.

$$\underbrace{v - v}_{=0} = a_1 v_1 \dots a_n v_n - (b_1 v_1 \dots b_n v_n) = (a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_n - b_n) v_n.$$

Ho una comb. lin. che genera un vettore nullo, poiché B è lin. indipendente questo implica che $a_1 - b_1 = 0 \dots a_n - b_n = 0$, cioè $a_1 = b_1 \dots a_n = b_n$.

\iff se $\forall v \in V \exists! a_1 \dots a_n \in \mathbb{K} / a_1 v_1 + a_n v_n = v$ allora B genera V . Inoltre $0v_1 + \dots + 0v_n = 0$ è l'unica comb. lin. che dà 0: vettore nullo. Quindi B è lin. indep. $\Rightarrow B$ è una base.

Esempi:

- $X_1 = \{v_1 = (0, 1)\}$ non è una base perché non genera $V = \mathbb{R}^3$ e infatti, dato $v_2 = (2, 3)$, non esiste $a_1 \in \mathbb{R} / a_1 v_1 = v_2$.
- $X_2 = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1)\}$ non è una base perché non è lin. indipendente. Infatti $v = (2, 3) = 2v_1 + 3v_2 + 0v_3 = 0v_1 + v_2 + 2v_3$ quindi a_1, a_2, a_3 non sono unici.

- Dimostro che $B = \{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)\}$ é una base.

$$\forall v = (x, y) \exists! a_1, a_2 / \underbrace{a_1 u_1 + a_2 u_2}_{(a_1+a_2, a_1-a_2)} = (x, y)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = x & 2a_1 = x + y & a_1 = \frac{x+y}{2} \\ a_1 - a_2 = y & 2a_2 = x - y & a_2 = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

Quindi $\forall v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \exists! a_1, a_2 / v = a_1 v_1 + a_2 v_2$ ad esempio $v = (2, 3) = \frac{5}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2$.

1.6.1 Basi canoniche

Una base per lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$ é: $e_1 = (1, 0, 0 \dots 0), e_2 = (0, 1, 0 \dots 0), e_n = (0, 0, \dots 1)$.

In effetti $v = (x_1, x_2 \dots x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots x_n e_n$ quindi $\exists! x_1 \dots x_n \Rightarrow \{e_1 \dots e_n\}$ é una base, detta la **base canonica** di \mathbb{R}^n .

Sia $V = \mathbb{R}[x]$ = polinomi a coeff. in \mathbb{R} .

Una base $V = \{1, x, x^2, x^3 \dots\}$ (base canonica dei polinomi) ad esempio, troviamo le coordinate di $p(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{2}$ in questa base.

$$p(x) = \frac{1}{2}1 + (-4)x + 0x^2 + 1x^3 + 0x^4 \dots$$

Sottospazio U = polinomi di grado ≤ 2

Base canonica: $\{1, x, x^2\} = \{ax^2 + bx + c\}$.

1.6.2 Estrarre e completare

Def: sia X un insieme di vettori che genera V . **Estrarre** una base da X significa trovare un $B \subseteq X$ che sia una base di U . Esempio:

$$V = \mathbb{R}^2 \quad X = \{v_1 = (1, 0) \ v_2 = (2, 0) \ v_3 = (0, 1) \ v_4 = (0, 0)\}$$

Base estratta da $X \Rightarrow B_1 = \{v_1, v_3\} \quad B_2 = \{v_2, v_3\}$.

Def: sia X un insieme lin.indip. in V , **completare** X ad una base di V significa aggiungere ad X altri vettori in modo da ottenere una base.

Esempio:

$$X = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Non genera V perchè $\langle x \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2\} = \{(a_1, a_1, a_2)\}$.

Sia $v_3 = (x, y, z)$ con $x \neq y$ ad esempio $v_3 = (1, 0, 0)$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ é una base di \mathbb{R}^3 . Ho **completato** $\{v_1, v_2\}$ ad una base di \mathbb{R}^3 .

2 Sezione seconda

2.1 Dimensione

TEOREMA 2 *Tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale V su campo \mathbb{K} hanno lo stesso numero di elementi.*

Def: Tale numero é detto la **dimensione** di V .

Esempi:

- $V = \mathbb{R}^3 \quad U \subseteq V, \quad U = \{(x, y, z) \in V / x - y = 0\}$

Una base di U é data da $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 0, 1)$ infatti $\{u_1, u_2\}$ é lin. indep. e $\langle u_1, u_2 \rangle = \{a_1 u_1 + a_2 u_2\} = \{a_1, a_1, a_2\}$, quindi u_1, u_2 generano U .

Qualunque altra base di U ha 2 elementi $\implies \dim U = 2$.

- $W = \{(x, y, z) \in V \mid x - y = 0, x = 3z\}$
 $\{w_1 = (3, 3, 1)\}$ é una base di $W \implies \dim W = 1$
 $\langle w_1 \rangle = \{a_1 w_1, a_1 \in \mathbb{R}\} = \{3a, 3a, a\} = W$.

Sia V uno spazio vettoriale di **dimensione d** su campo \mathbb{K} .

1. ogni base di V contiene d elementi.
 2. ogni insieme linearmente indipendente di V contiene k elementi, $k \leq d$; può essere completato ad una base aggiungendo $d-k$ elementi in modo opportuno.
 3. ogni insieme che genera V contiene g elementi, $g \geq d$, possiamo estrarre una base scegliendo in modo opportuno d vettori tra i g dell'insieme.
- NON VALE IL VICEVERSA (ogni insieme che contiene g elementi non genera V).

2.2 Forma cartesiana e parametrica

Sia U un sottospazio di dimensione d di uno spazio vett. di dimensione n ($d \leq n$).

Posso esprimere U in 2 modi:

- 1) **In forma cartesiana:** U é identificato in \mathbb{R}^n da $n-d$ equazioni tra loro lin. indep. (ogni equazione toglie un grado di libertà).
- 2) **In forma parametrica:** U é espresso in funzione di d parametri.

Esempio:

$$\text{In } v = \mathbb{R}^4, U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid \underbrace{x = 2y, y = 3z, w = 0}_{\text{equazioni cartesiane}}\}$$

$$\dim U = 4(\text{dimensione di } V) - 3(\text{eq. cartesiane}) = 1.$$

Un altro modo per scrivere U é: $U = \{(6t, 3t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow 1 \text{ parametro } (\dim U = 1)$.

Come si passa da cartesiana a parametrica?

Basta usare le equazioni cartesiane per esplicitare $n-d$ coordinate in funzione delle altre. Le rimanenti sono i parametri.

Esempio:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\} \text{ mi permette di scrivere } z = x + 2y.$$

$$\text{Quindi se } x = t, y = s, z = t + 2s \quad \{(t, s, t + 2s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Come si passa da parametriche a cartesiane?

Basta risolvere un sistema: $\{(t, -2t, s, t + 2s)\} \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x = t & 2x + y = 0 \\ y = -2t & x = t \\ z = s & z = s \\ w = t + 2s & x + 2z - w = 0 \end{cases}$$

OSS: per **intersecare** i sottospazi é più comoda la forma cartesiana. Invece per **trovare una base** di un sottospazio é più comoda la forma parametrica.

Esempio:

$$\begin{aligned} U &= \{(t, -2t, s, t + 2s)\} = \{(t, -2t, 0, t) + (0, 0, s, 2s)\} = \{t \underbrace{(1, -2, 0, 1)}_{v_1} + s \underbrace{(0, 0, 1, 2)}_{v_2}\} \\ &= \{tv_1 + sv_2\} = \langle v_1, v_2 \rangle \implies v_1, v_2 \text{ sono una base di } U. \end{aligned}$$

Prop: L'intersezione di sottospazi vettoriali é un sottospazio vettoriale.

Dim: Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e siano U, W sottospazi.

$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U, v \in W\}$, vogliamo mostrare che: se $v_1, v_2 \in U \cap W, v_1 + v_2 \in U \cap W$
In effetti dato che U e W sono sottospazi vettoriali e che $v_1, v_2 \in U, v_1, v_2 \in W$:

$$\Rightarrow v_1 + v_2 \in U, v_1 + v_2 \in W$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$$

Analogamente se $v \in U \cap W$ e $a \in \mathbb{K}, av \in U \cap W$, con lo stesso ragionamento. #

OSS: Invece l'unione di sottospazi non é un sottospazio! Facciamo un es:

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} = \{(0, t), t \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} = \{(s, 0), s \in \mathbb{R}\}, e_1 = (1, 0) \in W, e_2 = (0, 1) \in U$$

$$\Rightarrow e_1, e_2 \in U \cup W \text{ ma, } e_1 + e_2 = (1, 1) \notin U, \notin W, \text{ e quindi } \notin U \cup W.$$

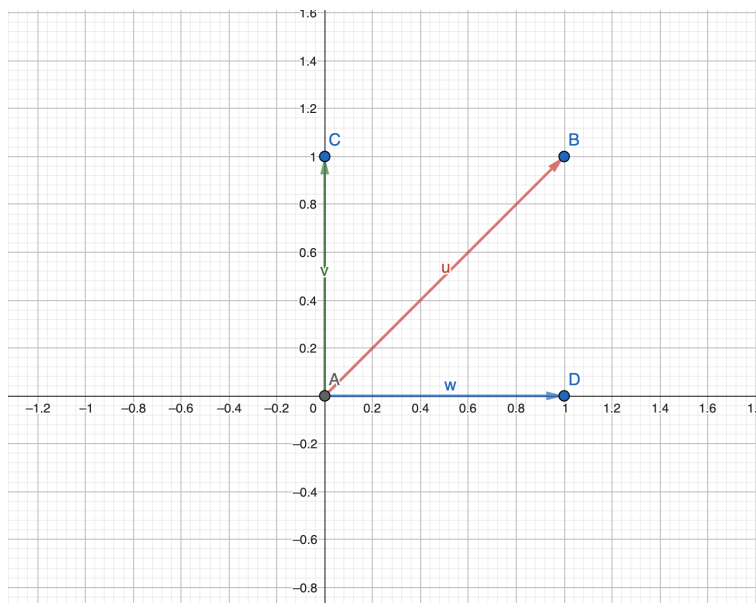


Figure 2: Unione di sottospazi

Il vettore u nell'immagine rappresenta $e_1 + e_2$ e non appartiene a nessuno dei due insiemi.

Abbiamo visto che dato uno spazio vettoriale V su campo \mathbb{K} , e dati due sottospazi U, W di V :

- $U \cap W$ é un sottospazio.
- $U \cup W$ non é un sottospazio.

2.3 Somma di sottospazi

Def: La somma di sottospazi U, W é:

$$\underbrace{U + W}_{\text{somma di sottospazi}} = \{ \underbrace{u + w}_{\text{somma di vettori}}, u \in U, w \in W \}$$

Si verifica immediatamente che $U + W$ é un sottospazio di V :

- $(U + W) + (U' + W') = \underbrace{(u + u')}_{\in U} + \underbrace{(w + w')}_{\in W}$
- $\forall a \in \mathbb{K} \ a(u + w) = au + aw \in U + W$

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, z = 0\} = \{(t, -t, 0), t \in \mathbb{R}\}$
 $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\} = \{(0, 0, s), s \in \mathbb{R}\}$
 $U + W = \{u + w, u \in U, w \in W\} = \{(t, -t, 0) + (0, 0, s), t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}\} = \{(t, -t, s), t, s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$

OSS: $\dim U = 1, \dim W = 1, \dim U+W = 2 \rightarrow$ le rette si intersecano in un punto
 Geometricamente $U+W$ é l'unico piano di \mathbb{R}^3 che contiene le rette U, W .

OSS: $U \cap W = \{\underline{0}\}$ ha per base $\emptyset \Rightarrow \dim U \cap W = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies (x, y, z) = (0, 0, 0) = \underline{0}$$

Uno spazio vettoriale che contiene solo $\underline{0}$ si chiama sottospazio banale ed é \neq da \emptyset .

TEOREMA 3 (formula di Grassman) Siano U, W sottospazi di V .
 $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$

Idea di dim: Scelgo una base $\{v_1 \dots v_k\}$ per $U \cap W$ e la completo ad una base $\{v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_l\}$ di U e ad una base $\{v_1 \dots v_k, w_1 \dots w_m\}$ di W .

Con qualche calcolo si può dimostrare che $\{v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_l, w_1 \dots w_m\}$ é una base di $U+W$. Da questo segue la formula. #

Esempio: $V = \mathbb{R}^4$

$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V / x_1 - x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V / x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$

Voglio trovare $U+W$.

$U \cap W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V / x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = x_4\} = \{(t, t, t, t), t \in \mathbb{R}\}$

$U \cap W$ ha dimensione 1 (compare solo un parametro nella forma parametrica), una base può essere $\{v_1 = (1, 1, 1, 1)\}$.

Formula di Grassman: $\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 2+2-1=3$

$U = \{(t, s, s, t)\}, W = \{(a, a, b, b)\} \implies U + W = \{(t+a, s+a, s+b, t+b)\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V / x_1 - x_2 = x_4 - x_3\}$

2.3.1 Somma diretta

Def: Siano U, W sottospazi di V . Diciamo che U, W formano **somma diretta** se $U \cap W = \{\underline{0}\}$.
 se U, W sono in somma diretta, scriviamo $U \oplus W$ al posto di $U+W$.

Prop: Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W due sottospazi / $V = U \oplus W$.

Allora ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$.

Dim: $V = U \oplus W$ ("V é somma diretta di U e W") significa che 1) $V = U+W$ e 2) $U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Poiché $V = U+W$, $\forall v \in V \exists u \in U, w \in W / v = u + w$.

Supponiamo che tale scrittura non sia unica, $\exists u' \in U, w' \in W / v = u + w = u' + w' \implies$

$$\underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W} \in U \cap W \text{ ma } U \cap W = \{\underline{0}\},$$

cioè le due componenti di v coincidono. #

OSS: Se $V = U+W$, ma $U \cap W \neq \{\underline{0}\}$ ci sono infiniti modi per scrivere $v \in V$ come $u + w$, con $u \in U, w \in W$.

3 Sezione terza

3.1 Applicazione lineare

Def: Siano V, U due sottospazi vettoriali su campo \mathbb{K} .

Un'applicazione $f : V \longrightarrow U$ é **lineare** se "é compatibile con le operazioni di V e U ", cioè se:

1. $\forall v_1, v_2 \in V, \mathbf{f}(v_1 + v_2) = \mathbf{f}(v_1) + \mathbf{f}(v_2)$
2. $\forall v \in V, \forall a \in \mathbb{K}, \mathbf{f}(a \cdot v) = a \cdot \mathbf{f}(v)$

In maniera equivalente, l'applicazione f é lineare se e solo se $\forall v_1, v_2 \in V$ e $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{K} f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2)$

Esempio: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y, z) = (x + y, y - z)$ é lineare?

1) Dati $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$f(v_1 + v_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 - z_1 - z_2)$

$f(v_1) + f(v_2) = (x_1 + y_1, y_1 - z_1) + (x_2 + y_2, y_2 - z_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_2 + y_1 - z_1 - z_2)$

2) $f(av) = f(ax, ay, az) = (ax + ay, ay - az) = a(x + y, y - z) = af(v)$

$\implies f$ é lineare

3.2 Nucleo e Immagine

Sia $f : V \longrightarrow U$ un'applicazione lineare:

Def:

- **nucleo** di f $\text{Ker}f = \{v \in V / f(v) = \{0\}\}$
- **immagine** di f $\text{Im}f = \{f(v), v \in V\} = \{u \in U / \exists v \in V / f(v) = u\}$

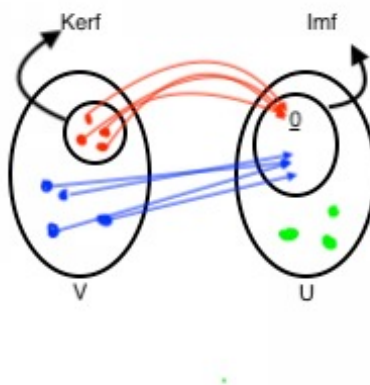


Figure 3: nucleo e immagine

Prop:

1. **Kerf** é un sottospazio vettoriale di V
2. **Imf** é un sottospazio vettoriale di U

Dim:

Dimostro 1) \Rightarrow Dobbiamo mostrare che dati $v_1, v_2 \in \text{Kerf}$ anche $v_1 + v_2 \in \text{Kerf}$.

$$\underbrace{f(v_1 + v_2)}_{f \text{ é lin}} = f(v_1) + f(v_2) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \quad f(v_1) = \underline{0}, f(v_2) = \underline{0}$$

Analogamente, dato $a \in \mathbb{K}$ e $v \in \text{Kerf}$ (cioè $f(v) = \underline{0}$, ho che:

$$f(av) = af(v) = a\underline{0} = \underline{0} \Rightarrow av \in \text{Kerf}.$$

Dunque ho dimostrato che Kerf é un SSV di V .

Dimostro 2) \Rightarrow Siano $u_1, u_2 \in \text{Imf}$, dunque esistono $v_1, v_2 \in V / f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$.

Allora $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = u_1 + u_2$, cioè esiste un elemento di V che viene mandato in $u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \in \text{Imf}$.

Analogamente, se $a \in \mathbb{K}$ e $u \in \text{Imf}$ (cioè $\exists v \in V / f(v) = u$) allora $f(av) = af(v) = au$, ovvero esiste un vettore $av \in V / f(av) = au \Rightarrow au \in \text{Imf}$.

Dunque ho dimostrato che Imf é un SSV di U .

Ricordiamo che $f : V \rightarrow U$ é **suriettiva** \iff ogni $u \in U$ è $u = f(v)$ per qualche $v \in V$ cioè se ogni $u \in U$ appartiene a Imf . Quindi:

Prop: f é suriettiva $\iff \text{Imf} = U$ #

Ricordiamo anche che $f : V \rightarrow U$ é **iniettiva** se $v_1 \neq v_2 \Rightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$

Prop: f é iniettiva $\iff \text{Kerf} = \{\underline{0}\}$

Dim:

\Rightarrow Poichè f é lineare $f(\underline{0}) = f(v - v) = f(v) - f(v) = \underline{0}$ cioè $\underline{0} \in \text{Kerf}$. Poichè f é iniettiva, se $v \neq \underline{0}, f(v) \neq f(\underline{0}) = \underline{0}$ quindi $\text{Kerf} = \underline{0}$.

\Leftarrow Siano $v_1, v_2 \in V / f(v_1) = f(v_2)$. Allora $\underline{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$ cioè $v_1 - v_2 \in \text{Kerf}$, ma $\text{Kerf} = \{\underline{0}\} \Rightarrow v_1 - v_2 = \underline{0}$, cioè $v_1 = v_2 \Rightarrow f$ é iniettiva. #

Esempio:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$$

Abbiamo visto che $\text{Kerf} = \{(t, t), t \in \mathbb{R}\} \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ non é iniettiva.

$\text{Imf} = \{(t, 2t), t \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ non é suriettiva.

TEOREMA 4 (Teorema del rango) Sia $f : V \rightarrow U$ un'applicazione lineare. Allora $\dim V = \dim \text{Kerf} + \dim \text{Imf}$

Dim: sia $v_1 \dots v_k$ una base di Kerf . Completiamola ad una base di V , $v_1 \dots v_k, v_{k+1}, v_n$.

Quindi per ogni $v \in V$, esistono e sono unici $a_1 \dots a_n / v = a_1 v_1 + \dots a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots a_n v_n$.

$$\text{Poichè } f \text{ é lineare } f(v) = \underbrace{a_1 f(v_1) + \dots a_k f(v_k)}_{\underline{0}} + \underbrace{a_{k+1} v_{k+1} + \dots a_n v_n}_{\underline{0}} =$$

$= a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots a_n f(v_n)$, cioè ogni vettore $f(v)$ di Imf si scrive in modo unico come cob lineare di $f(v_{k+1}) \dots f(v_n)$, cioè $f(v_{k+1}) \dots f(v_n)$ é una base di Imf .

Quindi $\dim \text{Kerf} = k, \dim V = n, \dim \text{Imf} = n - k$. #

Corollario: Sia $f : V \rightarrow U$ un'appl. lineare.

1. Se $\dim V > \dim U$, f non può essere iniettiva.
2. Se $\dim V < \dim U$, f non può essere suriettiva.

Teor. Rango

Dim: 1) $\dim \text{Imf} \leq \dim U < \dim V \xRightarrow{\text{Teor. Rango}} \dim \text{Imf} + \dim \text{Kerf}$
cioè $\dim \text{Kerf} > 0 \Rightarrow \text{Kerf} \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ non é iniettiva.

Dim: $2) \dim \text{Im} f \leq \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f \stackrel{\text{Teor. Rango}}{=} \dim V < \dim U$
cioè $\dim \text{Im} f < \dim U$ quindi $\text{Im} f \neq U \Rightarrow f$ non é suriettiva. #

Corollario: Sia $f : V \rightarrow U$, un'appl. lineare e $\dim V = \dim U$.
Allora f é iniettiva $\iff f$ é suriettiva (\iff é biunivoca)

Dim: $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f \stackrel{\text{Teor. Rango}}{=} \dim V = \dim U$.
Quindi f é iniettiva $\iff \dim \text{Ker} f = 0 \iff \dim \text{Im} f = U \iff f$ é suriettiva. #

3.3 Isomorfismo

Def: $f : V \rightarrow U$ é un **isomorfo** se é lineare e biunivoca.
Diciamo che V, U sono isomorfi se \exists un isomorfo $V \rightarrow U$. Essere isomorfi é una relazione di equivalenza.

Esempio:

$V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] / p(x) \leq 2\} = \{ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}, U = \mathbb{R}^3$
 $f : V \rightarrow U$ é lineare ed é biunivoca $ax^2 + bx + c \rightarrow (a, b, c) \Rightarrow f$ é un isomorfo.
 V e U sono isomorfi.

TEOREMA 5 Siano V, U due spazi vettoriali su \mathbb{K} sia $\{v_1 \dots v_n\}$ una base di V e siano $u_1 \dots u_n \in U$. Allora \exists una e una sola applicazione lineare $f : V \rightarrow U / f(v_1) = u_1, \dots, f(v_n) = u_n$.

Dim: sia $v \in V$. Poichè $\{v_1 \dots v_n\}$ é una base, esistono e sono unici $a_1 \dots a_n \in \mathbb{K} / v = a_1 v_1 + \dots a_n v_n$.
Poichè f é lineare, $f(v) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$.
In questo modo f é lineare ed é unicamente determinata, perchè ogni $v \in V$ può andare in un unico vettore di U . #

Sia $f : V \rightarrow U$ un'applicazione lineare e siano $B_v = \{v_1 \dots v_n\}$ una base di V e $B_u = \{u_1 \dots u_n\}$ una base di U .

3.4 Matrici

La **matrice** di f nelle basi B_v, B_u é la tabella di numeri A che ha all'i-esima riga e j-esima colonna il coefficiente a_{ij} che appare nell'espressione $f(v_j) = a_{1j} u_1 + \dots + a_{nj} u_n$.
Infatti, poichè $f(v_j) \in U$ e B_u una base, tali coefficienti $\exists!$. E poichè B_v é una base, per il teorema precedente conoscere tutti questi coefficienti (cioè conoscere la matrice A) determina unicamente f .

A é la matrice che ha per j-esima colonna i coefficienti di $f(v_j)$ nella base B_u .

Esempio: $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^2$

$f : V \rightarrow U \quad f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$

$B_v = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 0, 1), v_3 = (1, 0, 1)\}$

$B_u = \{u_1 = (2, 0), u_2 = (0, -1)\}$

$f(v_1) = (0, 1) = 0u_1 + (-1)u_2$

$f(v_2) = (-1, 3) = -\frac{1}{2}u_1 - 3u_2$

$f(v_3) = (1, 2) = \frac{1}{2}u_1 - 2u_2$

La matrice A di f nelle basi B_v, B_u

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

OSS: in basi diverse la stessa f ha matrice diversa!

Se $f, g : V \rightarrow U$ sono appl. lineari, anche $f+g$ (definita come $(f+g)(v) = f(v) + g(v) \forall v \in V$) é lineare. E per ogni $a \in \mathbb{K}$, af (definita come $(af)(v) = af(v) \forall v \in V$) é lineare. Quindi l'insieme di tutte le applicazioni lineari:

$$\text{Hom}(V, U) = \{\text{appl. lineari } V \rightarrow U\}$$

é esso stesso uno spazio vettoriale.

Fissate basi di V, U se A é la matrice di f e B é la matrice di g , la matrice di $f+g$ é $A+B$ ottenuta sommando gli elementi corrispondenti. E la matrice di af , sará aA , ottenuta moltiplicando per a ogni elemento di A .

Rispetto a queste operazioni, l'insieme:

$$M_{m,n} = \{\text{matrici } m \times n, \text{ con } m \text{ righe e } n \text{ colonne}\}$$

é esso stesso uno spazio vettoriale ed ho un isomorfo di spazi vettoriali.

$$\text{Hom}(V, U) \rightarrow M_{m,n}$$

$f \rightarrow$ matrice f (che dipende dalla scelta delle basi) nelle basi B_v, B_u .

Dati sp. vettoriali V, U, W e appl. lineari f, g :

$$V \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} W$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{f \circ g}$

posso considerare la composizione $f \circ g : v \rightarrow f(g(v))$.

Prop: se f, g sono lineari lo é anche $f \circ g$.

Dim: $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{K} \forall v_1, v_2 \in V (f \circ g)(a_1 v_1 + a_2 v_2) = f(g(a_1 v_1 + a_2 v_2)) \stackrel{g \text{ lin}}{=} \\ = f(a_1 g(v_1) + a_2 g(v_2)) \stackrel{f \text{ lin}}{=} a_1 f(g(v_1)) + a_2 f(g(v_2)) = a_1 (f \circ g)(v_1) + a_2 (f \circ g)(v_2) \quad \#$

3.4.1 Prodotto tra matrici

Sia $\{v_1 \dots v_n\}$ una base di V , sia $\{u_1 \dots u_m\}$ una base di U , sia $\{w_1 \dots w_l\}$ una base di W .

$V \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} W$, se A é la matrice di f e B é la matrice di g , chi é la matrice di $f \circ g$? Calcoliamola:

sia $j \in \{1 \dots n\}$, $(f \circ g)(v_j) = f\left(\sum_{i=1}^m b_{ij} u_i\right) \stackrel{f \text{ é lin}}{=} \sum_{i=1}^m b_{ij} f(u_i) \stackrel{\text{def di } A}{=} \sum_{i=1}^m (b_{ij} \sum_{k=1}^l a_{ki} w_k)$

Il **coefficiente** di w_k é $\sum_{i=1}^m b_{ij} a_{ki}$. La matrice di $f \circ g$ dovrà avere questo coefficiente alla k -esima riga e j -esima colonna.

Indichiamo questa matrice con **AB** e la chiamiamo il **prodotto riga per colonna** di **A** e **B**.

$$\begin{array}{c}
 B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{AB}
 \end{array}$$

Figure 4: Prodotto tra matrici

3.5 Ancora isomorfismo...

TEOREMA 6 *Un'applicazione lineare é un isomorfismo \iff manda basi in basi.*

Dim:

\Rightarrow Sia $f : V \rightarrow U$ un isomorfismo e sia $\{v_1 \dots v_n\}$ una base di V . Vogliamo mostrare che $\{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ é una base di U , cioè che ogni $u \in U$ si scrive in modo unico come comb. lin di $f(v_1) \dots f(v_n)$.

Poiché f é biunivoca, $\exists! v \in V / f(v) = u$. Poiché $\{v_1 \dots v_n\}$ é una base di V , $\exists! a_1 \dots a_n \in \mathbb{K} / v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ e poiché f é lineare, $u = f(v) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$, cioè la tesi.

\Leftarrow Sia $\{v_1 \dots v_n\}$ una base di V , e sia $f : V \rightarrow U$ un'applic. lineare tale che $\{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ é una base di U . Vogliamo dimostrare che f é biunivoca.

Sia $u \in U$. Poiché $\{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ é una base $\exists! a_1 \dots a_n \in \mathbb{K} / u = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$, cioè $\forall u \in U \exists! v \in V (v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$ tale che $f(v) = u$ quindi f é biunivoca.

Corollario: L'inverso di un isomorfismo é un isomorfismo.

Dim: Sia $f : V \rightarrow U$ un isomorfismo e sia $f^{-1} : U \rightarrow V$ l'applicazione inversa, cioè $f^{-1}(u) =$ l'unico $v \in V / f(v) = u$. Sia $\{v_1 \dots v_n\}$ una base di V : per il teorema 6, \exists un'unica appl. lineare che manda $f(v_1) \rightarrow v_1 \dots f(v_n) \rightarrow v_n$ ed é proprio f^{-1} .

Inoltre f^{-1} é biunivoca perché la sua inversa é f . #

Abbiamo detto che due spazi vettoriali V, U sono isomorfi se esiste un isomorfismo $V \rightarrow U$ e scriviamo $V \simeq U$.

Prop: "essere isomorfi" é una relazione di equivalenza:

- Riflessiva: ogni spazio vettoriale V é isomorfo a sé stesso.
Relazione identità: $V \rightarrow V, v \rightarrow v$
- Simmetrica: se $V \simeq U$, allora $U \simeq V$.
Se $f : V \rightarrow U$ é un isomorfismo, abbiamo appena dimostrato che $f^{-1} : U \rightarrow V$ é un isomorfismo.
- Transitiva: se $V \simeq U, U \simeq W$ allora $V \simeq W$.
Se $g : V \rightarrow U$ e $f : U \rightarrow W$ sono isomorfi allora anche $f \circ g : V \rightarrow W$ é un isomorfismo.

Corollario: Due spazi vettoriali V, U su uno stesso campo \mathbb{K} sono isomorfi \iff hanno la stessa dimensione.

Dim: Sia $\{v_1 \dots v_n\}$ una base di V e $\{u_1 \dots u_m\}$ una base di U . Dunque $\dim V = n, \dim U = m$.

Se $n=m$ \exists una biezione $v_1 \rightarrow u_1 \dots v_n \rightarrow u_n$ che per il teorema 5 si estende ad un'unica appl. lineare $f : V \rightarrow U$ / $f(v_1) = u_1 \dots f(v_n) = u_n$ che per il teorema 6 é un isomorfismo (manda basi in basi).

Se $n \neq m$ non può esistere un isomorfismo $f : V \rightarrow U$ perché altrimenti $\{f(v_1) \dots f(v_n)\}$ dovrebbe essere una base di U , ma questo é assurdo. #

OSS: Sia $f : V \rightarrow U$ un'appl. lineare. Fissate basi B_v, B_u di V e U , dato $v \in V$, il vettore delle coordinate di $f(v)$ nella base B_u é ottenuto moltiplicando la matrice di f (nelle basi B_v, B_u) per il vettore colonna delle coordinate di v nella base B_v .

Esempio:

Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] / p(x) \text{ ha grado } \leq 3\} = \underbrace{\{ax^3 + bx^2 + cx + d\}}_{p'(x)=3ax^2+2bx+c}$

$d : V \rightarrow V$ La derivata é un'applicazione lineare

$p(x) \rightarrow p'(x)$

Scriviamo la matrice D di d nella base canonica $\{1, x, x^2, x^3\}$

$$d(1) = 0$$

$$d(x) = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = 1$$

$$d(x^2) = 0 + 2x + 0x^2 + 0x^3 = 2x$$

$$d(x^3) = 0 + 0x + 3x^2 + 0x^3$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sono le coordinate di $p'(x)$ nella base $\{1, x, x^2, x^3\}$

4 Sezione quarta

4.1 Matrice identità

Sia $id : V \rightarrow V$ l'applicazione lineare che manda ogni vettore in sè stesso, cioè:

$$id(v) = v \quad \forall v \in V$$

Sia $v_1 \dots v_n$ una base di V . Chi é la matrice di id ?

$$f(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2 \dots$$

$$f(v_2) = v_2 = 0v_1 + 1v_2 \dots$$

$$f(v_n) = v_n = 0v_1 + 0v_2 \dots + 1v_n$$

$$\mathbf{In} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{In é la matrice identità, ha tutti 0 tranne gli 1 sulla diagonale.}$$

OSS 1: Ottengo \mathbf{In} qualsiasi sia la base scelta.

OSS 2: Per ogni $f : V \rightarrow V$, $f \circ id = f$, $id \circ f = f$.

Esempio:

Ovvero, se A é la matrice di f , $A \cdot \mathbf{In} = A$, $\mathbf{In} \cdot A = A$

In é l'elemento neutro del prodotto riga per colonna di matrici.

OSS 3: $f : V \longrightarrow U$ lineare e sia $n = \dim V$, $m = \dim U$

f é isomorfo $\iff f$ é invertibile cioè $\forall u \in U \exists! v \in V / f(v) = u$

e scirvo $v = f^{-1}(u) \iff$ esiste $f^{-1} : U \longrightarrow V / f \circ f^{-1} = id_u, f^{-1} \circ f = id_v$.

Fissate basi di V e di U , se A é la matrice di f e A^{-1} é la matrice di f^{-1} :

$$A \cdot A^{-1} = Im$$

Def: A^{-1} é detta la **matrice inversa** di A :

$$A^{-1} \cdot A = In$$

OSS 4: f é un isomorfismo \iff la sua matrice A é invertibile, cioè esiste A^{-1} tale che valgono le equazioni scritte sopra.

OSS 5: Se A non é quadrata (cioé righe \neq colonne) non ha senso chiedersi se A sia invertibile perchè A corrisponde ad una funzione $f : V \longrightarrow U$ con $\dim V \neq \dim U$ e tale f non può essere biunivoca per il corollario del teorema del rango.

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare e siano $B = \{v_1 \dots v_n\}$ e $B' = \{u_1 \dots u_n\}$ basi di V . Sia A la matrice di f nella base B e sia M la matrice di f nella base B' .

Che legame c'è tra A e M ?

Def: La matrice di **cambiamento di base** é:

$$B = \begin{pmatrix} \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{nj} & \dots \end{pmatrix} \text{ La cui } j\text{-ma colonna é ottenuta } u_j = a_{1j}v_1 + \dots + a_{nj}v_n$$

TEOREMA 7

$$M = B^{-1}AB$$

4.2 Matrici invertibili

Def: Due matrici A, M sono **simili** se esiste una matrice invertibile B tale che $M = B^{-1}AB$.

OSS: Per il teorema 7, due matrici sono simili \iff rappresentano la stessa applicazione lineare (in basi diverse).

OSS: essere simili é una relazione di equivalenza:

Dim:

- Riflessiva $\Rightarrow A = In^{-1}AIn$
- Simmetrica \Rightarrow se $M = B^{-1}AB$ allora $A = BMB^{-1}$ (perché $B^{-1^{-1}} = B$)
- Transitiva \Rightarrow se $M = B^{-1}AB$ e $N = C^{-1}MC$ allora $N = C^{-1}(B^{-1}AB)C = (BC)^{-1}A(BC)$

Come capire se una matrice quadrata A é invertibile?

TEOREMA 8 Una matrice quadrata A é **invertibile** \iff i suoi vettori colonna sono linearmente indipendenti.

Dim: Siano $v_1 \dots v_n$ i vettori colonna di A .

Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $f(e_1) = v_1 \dots f(e_n) = v_n$ essa esiste ed é unica per il teorema 5.

La matrice di f nella base canonica é proprio $A = (v_1 \dots v_n)$, perché

$v_1 = (x_1 \dots x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ allora $f(e_1) = v_1 = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

quindi per il teorema 6 $v_1 \dots v_n$ é una base $\iff f$ é un isomorfismo \iff la matrice A di f é invertibile. #

4.2.1 Il rango e la trasposta

Sia A una matrice $m \times n$.

Def: Il **rango** di A (che indichiamo con $\text{rg}(A)$) é massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A .

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A) = 2$$

Abbiamo dimostrato che una matrice $n \times n$ é invertibile \iff ha rango n .

Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (o più in generale potremo prendere $f : \underbrace{V}_{\dim_n} \longrightarrow \underbrace{U}_{\dim_m}$) e sia A la matrice associata ad f (nelle basi canoniche).

TEOREMA 9

$$\dim \text{Im} f = \text{rg}(A)$$

Dim: per definizione $f(e_1) = v_1 \dots f(e_n) = v_n$ dove $v_1 \dots v_n$ sono vettori colonna di A .

Poiché $e_1 \dots e_n$ generano \mathbb{R}^n , $v_1 \dots v_n$ generano $\text{Im} f$ (perché $\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists! a_1 \dots a_n / v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ e quindi $f(v) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \forall f(v) \in \text{Im} f$).

Quindi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\{v_1 \dots v_n\}$ é pari alla dimensione dell' immagine.

Nell'esempio sopra elencato $\text{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ che ha per base i primi due vettori colonna di A . #

Def: la **trasposta** di una matrice A é la matrice A^T che ha per righe le colonne di A . In altre parole $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 5 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3 Determinante

Sia A una matrice $n \times n$. Il **determinante** di A é definito nel seguente modo ricorsivo.

- se $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\det(A) = ad - bc$
- se $n > 2$, riconduciamo il calcolo di $\det(A)$ al calcolo di determinanti di matrici più piccole mediante la **regola di Laplace**:
scegliamo una colonna di A , la j -ma,
$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$
 dove A^{ij} é la matrice ottenuta da A rimuovendo la i -ma riga e la j -ma colonna.

4.3.1 Proprietà del determinante

1. é **multilineare** cioè se ho due matrici che differiscono solo per una colonna allora, $A = (v_1 \dots v_j \dots v_n)$, $B = (v_1 \dots v'_j \dots v_n) \Rightarrow \det(v_1 \dots v_j + bv'_j \dots v_n) = a \det(A) + b \cdot \det(B)$
2. é alternante cioè se A' é ottenuta da A scambiando due colonne, allora $\det(A') = -\det(A)$
3. $\det(In) = 1$
4. é l'unica funzione $M_{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$ che verifica 1,2,3
5. **$\det(A^T) = \det(A)$**
in particolare lo sviluppo di Laplace si può fare per righe e le proprietà 1,2 valgono anche per le righe.
6. $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$
7. **$\det(A) \neq 0 \iff A$ é invertibile**

OSS: Per le proprietà 3 e 6, se A é invertibile **$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$** .

Infatti $AA^{-1} = In$ e quindi $\det(AA^{-1}) \stackrel{6}{=} \det(A)\det(A^{-1}) = \det(In) \stackrel{3}{=} 1$

Prop: Se A e M sono **simili**, allora hanno lo stesso determinante.

Dim: per definizione, se A e M sono simili esiste una matrice invertibile B tale che $M = B^{-1}AB$.
Quindi $\det(M) = \det(B^{-1})\det(A)\det(B) = \underbrace{\det(B)^{-1}\det(B)}_1 \det(A) = \det(A).$ #

Def: Sia V uno spazio vettoriale e $f : V \rightarrow V$ una applicazione lineare.

Definiamo **$\det(f) = \det(A)$** , dove A é la matrice di f in una base di V . Per la prop precedente non dipende dalla base scelta.

Il determinante ci permette di stabilire se una matrice quadrata A é invertibile o no. Ma come la troviamo in caso affermativo?

TEOREMA 10

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{cof}(A)^T$$

dove $\text{cof}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$

4.3.2 Prodotto vettoriale

Il determinante ci dà anche una regola per calcolare il "prodotto vettoriale", un'operazione $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(v, u) \rightarrow v \wedge u$, usata in fisica.

Se $v = (a_1, a_2, a_3)$, $u = (b_1, b_2, b_3)$, definiamo:

$$v \wedge u = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (-a_1 b_3 + a_3 b_1) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3$$

5 Sezione quinta

5.1 Sistemi lineari matriciali: metodi risolutivi

Consideriamo un sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1 \dots x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Possiamo riscrivere questo sistema "in forma matriciale" come:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ dove } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ è il } \underline{\text{vettore delle incognite}}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ è il } \underline{\text{vettore dei termini noti e}}$$

A è la matrice ($m \times n$) dei coefficienti.

Come posso risolvere il sistema?

- **1° metodo (di Cramer)** \Rightarrow applicabile solo se $m = n$ (cioè matrice quadrata). Ho due casi:

1. se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, allora A è invertibile cioè $\exists A^{-1} / A^{-1}A = In$.
Quindi $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ (ho moltiplicato per A^{-1} entrambe le parti e poi semplificato $A^{-1}A = In$).

Cioè posso ottenere il vettore delle soluzioni $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ moltiplicando il vettore dei termini noti b per l'inversa di A.

2. Se $\det(\mathbf{A}) = 0$ allora A non è invertibile cioè l'applicazione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ non è suriettiva o non è iniettiva. A seconda del termine noto la soluzione del sistema non esiste (non suriettiva) o non è unica (non iniettiva).

- **2° metodo (di Gauss)** Computazionalmente più efficiente e m può essere diverso da n.
Lavoriamo sulla matrice $\mathbf{A|b}$ ottenuta affiancando la colonna b ad A.

1. Il mio obiettivo è quello di ottenere una matrice che nella prima colonna ha tutti 0 tranne il primo numero.

Possiamo supporre $a_{11} \neq 0$ (altrimenti scambiamo la prima equazione con un'altra). Moltiplico la prima riga per a_{11}^{-1} ottenendo:

$$1 \frac{a_{12}}{a_{11}} \dots \frac{a_{1n}}{a_{11}} = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Sostituisco la seconda riga con (2° riga - a_{21} · la 1° riga) e così via con le altre...

sostituisco la m-esima riga con (m-esima riga $-a_{m1}$ · la 1° riga).

Otengo così una matrice $\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ nella prima colonna tutti 0 tranne il primo 1

2. Faccio lo stesso con la matrice A^{11} in modo da ottenere anche qui tutti 0 nella prima colonna tranne il primo 1 (di A^{11}).

Ad ogni passo ottengo una colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ oppure, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ se i coefficienti di x_i sono tutti nulli.

La matrice così ottenuta è molto semplice e corrisponde ad un sistema che ha le stesse soluzioni di $Ax = b$, perché **le operazioni effettuate** (scambiare tra loro due righe, sommare ad una riga un multiplo dell'altra) **non cambiano le soluzioni**.

ESEMPIO :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 8x_1 + 8x_3 = 2 \end{cases}$$

moltiplico la prima riga per e_{11}^{-1}

1° PASSO \Rightarrow $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Ho ottenuto nelle 1° colonne 1 e tutti 0

2° PASSO \Rightarrow $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Ho già tutti 0 quindi non faccio nulla

3° PASSO \Rightarrow $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

RISULTATO :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2} \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = -\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

PIVOT

Figure 5: Sistema risolto con metodo Gauss

Nell'esempio in figura 5 il sistema $Ax = b$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 - x_5 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

cioè posso scegliere come voglio i valori di x_2, x_4, x_5 ma x_1, x_3 sono determinati da essi.

se $x_2 = t, x_4 = s, x_5 = r$ ($t, s, r \in \mathbb{R}$) allora

$$x_3 = 2s - r - \frac{1}{2}, x_1 = -\frac{1}{2}(2s - r - \frac{1}{2}) - s + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}.$$

L'insieme delle soluzioni è: $S = \{(-\frac{1}{2}(2s - r - \frac{1}{2}) - s + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}, t, 2s - r - \frac{1}{2}, s, r)\}$.

Nell'esempio precedente abbiamo trasformato la matrice A in una matrice A' . Osserviamo che $rg(A') = \max$ numero di colonne lin. indipendenti $= 2 =$ numero di **Pivot** $=$ numero di righe di A' lin. indep.

D'altra parte $rg(A') = rg(A)$ perché le operazioni dell'algoritmo di Gauss non cambiano il rango. Lo stesso vale in generale.

TEOREMA 11 Il **rango di A** (cioè il max n° di colonne lin. indep.) è uguale al max n° di righe lin indep, e anche al **numero di pivot** della matrice A' ottenuta applicando ad A l'algoritmo di Gauss.

5.1.1 Inverso di una matrice (metodo Gauss)

L'algoritmo di Gauss ci permette anche di calcolare l'inverso di una matrice quadrata, se esiste applichiamo l'algoritmo a $A|In$ fino a ottenere $In|B$. B sarà proprio A^{-1} .

TEOREMA 12 (Rouché-Capelli) Il sistema $Ax = b$ ammette almeno una soluzione $\iff rg(A|b) = rg(A)$.

Dim:

$Ax = b$ ammette soluzioni $\iff b$ è comb lineare dei vettori colonna di A (con coefficienti $x_1 \dots x_n$) \iff il max n° di colonne lin. indep di $A|b$ è lo stesso di A $\iff rg(A|b) = rg(A)$.

5.2 Insieme delle soluzioni di un sistema lineare

Diciamo che un sistema è omogeneo se $b_1 = 0, b_2 = 0 \dots b_n = 0$, cioè se è del tipo $Ax = \underline{0}$.

Prop: L'insieme U delle soluzioni del sistema lin. omogeneo $Ax = \underline{0}$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n , e $\dim U = n - rk(A)$.

Dim: $A\underline{0} = \underline{0}$ quindi $\underline{0} \in U$. Inoltre se $x, x' \in U$ (cioè $Ax = \underline{0}, Ax' = \underline{0}$) allora $A(x + x') = Ax + Ax' = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, quindi $x + x' \in U$.

Infine, se $x \in U$ e $a \in \mathbb{R}$, $A(ax) = a(Ax) = a\underline{0} = \underline{0} \Rightarrow ax \in U$, U è un SSV.

Abbiamo dimostrato che U è un sottospazio vettoriale. D'altra parte U è il nucleo (elementi del dominio che vanno in 0) dell'applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, (x \longrightarrow Ax) \text{ dunque } \dim U = \dim \text{Ker} f \overset{T.Rango}{=} n - \dim \text{Im} f = n - rg(A). \#$$

E se il sistema non è omogeneo?

Esempio:

$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 2\}$ il nostro sistema lineare.

$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 0\}$ sistema omogeneo associato.

OSS 1): U è un SSV di \mathbb{R}^2 , S non lo è, ad esempio $(1, 1) \in S, (0, 2) \in S$, ma $(1, 1) + (0, 2) = (1, 3) \notin S$.

OSS 2): Però $(1, 1) - (0, 2) = (1, -1) \in U$. Più in generale, se $x, x' \in S$ allora $x - x' \in U$.

OSS 3): In altre parole, se $x \in S$, S si ottiene sommando x a tutti gli elementi di U. Diciamo che S è ottenuto traslando U per il vettore x.

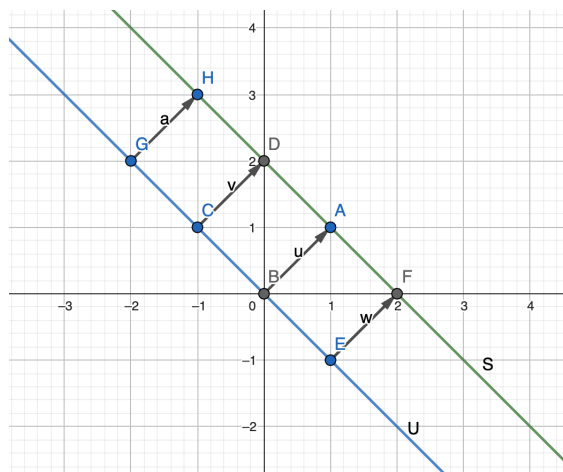


Figure 6: Esempio traslazione insieme per un vettore

5.3 Sottospazio affine

Diciamo che S è un **sottospazio affine** di \mathbb{R}^n se si ottiene traslando un sottospazio vettoriale cioè se $\exists U$ ssv di $\mathbb{R}^n, x \in S / S = \{u + x, u \in U\}$.

Per definizione $\dim S = \dim U$.

TEOREMA 13 *L'insieme S delle soluzioni di un sistema lineare $Ax = b$, se è non vuoto, è un sottospazio affine di \mathbb{R}^n , ottenuto traslando per un qualsiasi $x \in S$ l'insieme U delle soluzioni del sist. lin. omogeneo $Ax = \underline{0}$.*

Ovvero $S = \{u + x, u \in U\}$ dove x è una qualsiasi soluzione.

Dim: Se $x, x' \in S$ allora $x - x' \in U$: infatti se $Ax = b, Ax' = b$ allora $A(x - x') = Ax - Ax' = b - b = \underline{0} \Rightarrow x - x' \in U$.

D'altra parte se $x \in S, u \in U$ allora $x + u \in S$, perchè $A(x + u) = Ax + Au = b + \underline{0} = b$.#

OSS: $\dim S = \dim U = n - \text{rg}A$.

ESEMPIO:

Sia S l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_3 = 8 \end{cases} \quad \text{sistema omogeneo associato} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}$$

Ha per insieme le sol: $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = -x_3, x_2 = 0\} = \{(t, 0, -t), t \in \mathbb{R}\}$

Si vede facilmente che $(1, 2, 3)$ appartiene a S :

$$S = \{u + (1, 2, 3), u \in U\} = \{(t + 1, 2, -t + 3)\}$$

6 Sezione sesta

6.1 Matrice diagonale

Sia V uno spazio vettoriale su campo \mathbb{K} (e sia $n = \dim V$).

Def: Un **endomorfismo** di V è un'applicazione lineare $V \rightarrow V$.

Sia f un endomorfismo di V . Abbiamo visto che, fissata una base di V , possiamo associare ad f una matrice $n \times n$, che dipende dalla base scelta.

Domanda: Posso scegliere la base di V in modo che la matrice di f sia particolarmente semplice?

Def: Una matrice $D(n \times n)$ è diagonale se $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \quad d_1, d_n \in \mathbb{K}$$

OSS: Due matrici diagonali D, E sono facili da moltiplicare tra loro! Infatti se D è come sopra ed

$$E = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n \end{pmatrix} \quad D \cdot E = \begin{pmatrix} d_1 e_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n e_n \end{pmatrix}$$

6.2 Autovettore e autovalore

Sia $f : V \rightarrow V$ un'applicazione lineare.

Def: Un autovettore di f è un $v \in V, v \neq 0$ / $f(v) = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$.

(In altre parole, $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore se $\exists v \in V, v \neq 0$ / $f(v) = \lambda v$ e tale v è detto **autovettore relativo a λ**).

Esempio:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (y, x)$$

$$v_1 = (1, 1) \text{ è un autovettore di autovalore } 1 \text{ perché } f(v_1) = 1v_1$$

$$v_2 = (1, -1) \text{ è un autovettore di autovalore } -1 \text{ perché } f(v_2) = -1v_2$$

$$\text{La matrice di } f \text{ nella base } v_1, v_2 \text{ è } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad f(v_1) = 1v_1 + 0v_2 \quad f(v_2) = 0v_1 - 1v_2$$

In generale se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di V composta da autovettori, allora la matrice di f in tale base è diagonale, perché:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

$$f(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$f(v_n) = 0v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Quindi per "diagonalizzare f " (cioè rappresentare f con una matrice diagonale), dobbiamo trovare una base di autovettori. Come si fa?

Procediamo in 2 passi:

1. Troviamo gli autovalori di f .
2. Troviamo gli autovettori corrispondenti.

Def: Polinomio caratteristico di f :

$$p(\lambda) = \det(f - \lambda id)$$

TEOREMA 14 λ_i è un autovalore di $f \iff p(\lambda_i) = 0$.

Dim: λ_i è un autovalore di $f \iff \exists v \in V, v \neq 0 / f(v) = \lambda_i v \iff \exists v \in V, v \neq 0 / f(v) = \lambda_i v \Rightarrow f(v) - \lambda_i id(v) = 0$ (perchè $\lambda_i id(v) = \lambda_i(v)$) $\Rightarrow (f - \lambda_i id)v = 0 \iff \exists v \neq 0 / v \in Ker(f - \lambda_i id) \iff f - \lambda_i id$ non è iniettiva, ovvero non è un isomorfismo $\iff p(\lambda_i) = \det(f - \lambda_i id) = 0$.#

Quindi per trovare gli autovalori di f basta trovare gli zeri del polinomio $p(\lambda)$!

Esempio:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (y, x)$$

Per calcolare $p(\lambda)$, scriviamo la matrice A di f in una base a nostra scelta (ad es la base canonica).

$$f(e_1) = 0e_1 + 1e_2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = 1e_1 + 0e_2$$

$$\text{La matrice di } f - \lambda id \text{ è } A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \text{ oppure } \lambda = -1$$

Abbiamo così ottenuto gli autovalori di f . A questo punto trovare gli autovettori è facile, basta usare la definizione.

Sia $\lambda_1 = 1$, cerco $v_1 / f(v_1) = \lambda_1 v_1 = v_1$

cioè cerco $(x, y) / (y, x) = (x, y)$:

$$\begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \quad \text{una soluzione è } x = 1, y = 1 \implies v_1 = (1, 1).$$

Analogamente dato $\lambda_2 = -1$ cerco $v_2 / f(v_2) = \lambda_2 v_2 = -v_2$

cioè cerco $(x, y) / (y, x) = -(x, y)$:

$$\begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \quad \text{una soluzione può essere } x = 1, y = -1 \implies v_2 = (1, -1).$$

OSS: tutto questo funziona se $p(A)$ che è un polinomio a coefficienti in \mathbb{K} ha i suoi zeri in \mathbb{K} .

TEOREMA 15 (Teorema fondamentale dell'algebra) Ogni polinomio a coefficienti in \mathbb{C} ha tutte le sue radici in \mathbb{C} .

Quindi gli autovalori (che sono le radici del polinomio caratteristico $p(A)$), li posso sempre trovare in \mathbb{C} ma non è detto che siano in \mathbb{R} .

6.3 Autospazio

Def: Sia $\lambda_i \in \mathbb{K}$ un autovalore, l'autospazio relativo a λ_i è:

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V / f(v) = \lambda_i v\}$$

Prop:

- 1) V_{λ_i} è un sottospazio vettoriale di V .
- 2) Se $\lambda_i \neq \lambda_j$, $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\underline{0}\}$

Dim:

1) Se $v_i, v_2 \in V_{\lambda_i}$ allora $f(v_1) = \lambda_i v_1$ e $f(v_2) = \lambda_i v_2$, $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda_i v_1 + \lambda_i v_2 = \lambda_i(v_1 + v_2) \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_{\lambda_i}$.

Se $a \in \mathbb{K}$, $f(av_1) = af(v_1) = a f(v_1) = a \lambda_i v_1 \Rightarrow av_1 \in V_{\lambda_i}$

2) Se $v \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, $\lambda_i v = f(v) = \lambda_j v \Rightarrow \lambda_i v - \lambda_j v = \underline{0}$, cioè $(\lambda_i - \lambda_j)v = \underline{0}$. Per ipotesi $\lambda_i \neq \lambda_j$ quindi $v = \underline{0}$. #

Def: Sia $\lambda_i \in \mathbb{K}$ un autovalore di f .

La **molteplicità geometrica** di λ_i è: $Mg(\lambda_i) = \dim(V_{\lambda_i})$.

La **molteplicità algebrica** di λ_i è la molteplicità di λ_i come soluzione del polinomio $p(\lambda) = 0$, ovvero il massimo intero m tale che $(\lambda - \lambda_i)^m$ divida $p(\lambda)$, e la indichiamo con $Ma(\lambda_i)$.

Esempio:

$$p(\lambda) = \lambda^4(\lambda - 3)^2(\lambda - 7) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 7 \quad Ma(0) = 4 \quad Ma(3) = 2 \quad Ma(7) = 1$$

Esempio:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (2x + 5y, 2y)$$

$$f(e_1) = 2e_1, \quad f(e_2) = 5e_1 + 2e_2 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 = 0 \quad \lambda_1 = 2 \quad Ma(\lambda_1) = 2 \quad Mg(\lambda_1) = ?$$

$$V_{\lambda_1} = \{v \in V / f(v) = \lambda_1 v\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (2x + 5y, 2y) = (2x, 2y)\}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 2y \\ 2y = 2y \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ quindi } V_{\lambda_1} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow Mg(\lambda_1) = \dim(V_{\lambda_1}) = 1$$

In questo esempio **non** posso trovare una base di autovettori: $v_1 = (1, 0)$ è un autovettore ma se prendo $v_2 \in V_{\lambda_1}$ allora $\{v_1, v_2\}$ non è una base perché i vettori non sono linearmente indipendenti. Se invece prendessi $v_1 \notin V_{\lambda_1}$, allora v_2 non sarebbe un autovettore.

f non si può diagonalizzare.

Prop: Sia λ_i un autovalore di f . Allora:

$$1 \leq Mg(\lambda_i) \leq Ma(\lambda_i)$$

Dim: $Mg(\lambda_i) \leq 1$ perchè se fosse $= 0$ avremmo $V_{\lambda_i} = \{\underline{0}\}$ cioè $f(v) = \lambda_i v \iff v = \underline{0}$ cioè λ_i non è autovalore. ASSURDO!

Ora sia $m = Mg(\lambda_i)$, per mostrare che $Ma(\lambda_i) \geq m$ prendiamo una base $\{v_1 \dots v_m\}$ di V_{λ_i} e completiamola ad una base di V .

$\{v_1 \dots v_m, v_{m+1} \dots v_n\}$ e scriviamo la matrice di f in questa base:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 & ? & ? & ? \\ & \ddots & 0 & ? & ? & ? \\ & & \lambda_i & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

La prima parte della matrice in alto a sinistra è diagonale. Facendo lo sviluppo di Laplace rispetto alle prime m colonne ottengo $\det(A - \lambda In) = (\lambda_i - \lambda)^m \cdot q(\lambda)$, dove $q(\lambda)$ è un polinomio che non conosco. Quindi in $p(\lambda)$ ci sono almeno m fattori $(\lambda_i - \lambda)$, potrebbe essercene qualcuno anche in $q(\lambda)$...forse. #

OSS: In particolare, se $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ed ha $Mg(\lambda_i) = 1 \forall \lambda_i$ allora f di diagonalizza.

TEOREMA 16 Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare e siano $\lambda_1 \dots \lambda_h$ i suoi autovalori distinti. Allora f è diagonalizzabile (cioè ammette base di autovettori) \iff valgono le condizioni seguenti:

1. $\lambda_i \in \mathbb{K} \forall i = 1 \dots h$
2. $Ma(\lambda_i) = Mg(\lambda_i) \forall i = 1 \dots h$

Cioè ogni autovalore deve appartenere al campo considerato ed ha molteplicità geometrica uguale a quella algebrica.

Dim:

Supponiamo che valga la 1) ovvero $\lambda_1 \dots \lambda_h \in \mathbb{K}$ e consideriamo gli autospazi $V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_h}$. Per ciascuno di essi scegliamo una base $B_1 \dots B_h$. Dato che se $\lambda_i \neq \lambda_j$, $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$, gli autospazi formano somma diretta, sia U tale somma. $\underline{U} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_h}$. Dunque $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_h$ è una base per \underline{U} . Dobbiamo capire se $U = V$ oppure $U \subsetneq V$ (sottoinsieme proprio).

Se vale la 2) $\dim \underline{U} = Mg(\lambda_1) + \dots + Mg(\lambda_h) = Ma(\lambda_1) + \dots + Ma(\lambda_h)$ e dunque $U=V$ cioè B è una base di V composta da autovettori!.

Se non vale 2) allora $Mg(\lambda_1) + \dots + Mg(\lambda_h) < Ma(\lambda_1) + \dots + Ma(\lambda_h)$ e quindi $\dim U < \dim V$, perciò B (che è una base di U) NON è una base di V. Posso completarla ad una base di V solo aggiungendo vettori che non sono autovettori. Quindi f non si diagonalizza.

OSS: Se valgono 1) e 2) questo teorema ci dà un algoritmo per trovare una base di V composta da autovettori: basta trovare una base di ciascun autospazio, e poi unirle tutte.

6.4 Applicazioni nilpotenti

Def: f è **nilpotente** se $\exists n > 0 / f^n = f \circ \dots \circ f = \underline{0}$ (applicazione nulla).

A è nilpotente se $\exists n > 0 / A^n = 0$ (matrice nulla).

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 17 Se $f \neq 0$ è nilpotente, allora non è diagonalizzabile.

Dim: Se f è diagonalizzabile, esiste una base $\{v_1 \dots v_n\}$ / $f(v_i) = \lambda_i v_i \forall i = 1 \dots n$.

Se f è nilpotente, $\exists n > 0$ / $f^n = 0$ e dunque $0 = f^n(v_i) = \lambda_i^n v_i \Rightarrow \lambda_i^n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ quindi $f = 0$. #

OSS: In altre parole, se f è nilpotente, il suo unico autovalore è 0!

TEOREMA 18 (forma canonica di Jordan) Sia $f : V \rightarrow V$ lineare. Allora esiste una base di V in cui la matrice di f è della forma:

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1, n_1} & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & J_{\lambda_h, n_h} \end{pmatrix}$$

7 Sezione settima

7.1 Forma bilineare

Def: Dato uno spazio vettoriale V su campo \mathbb{K} , una **forma bilineare** è una applicazione $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ (cioè associa a due vettori $v, u \in V$ un numero $\beta(v, u) \in \mathbb{K}$) che è lineare nel primo e nel secondo argomento, cioè:

$$\beta(v_1 + v_2, u) = \beta(v_1, u) + \beta(v_2, u)$$

$$\beta(v, u_1 + u_2) = \beta(v, u_1) + \beta(v, u_2)$$

$$\beta(av, u) = a\beta(v, u) = \beta(v, au)$$

Esempio:

$$V = \mathbb{R}^2 \quad v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2)$$

$\beta(v, u) = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$, è bilineare perché se prendo $v' = (z_1, z_2)$:

$$\beta(v + v', u) = 3(x_1 + z_1)y_1 - (x_1 + z_1)y_2 + 2(x_2 + z_2)y_1 + (x_2 + z_2)y_2 = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + 3z_1y_1 - z_1y_2 + 2z_2y_1 + z_2y_2 = \beta(v, u) + \beta(v', u)$$

analogamente con le altre proprietà.

Def: Una forma bilineare β è **simmetrica** se $\beta(v, u) = \beta(u, v) \forall v, u \in V$.

β è **antisimmetrica** se $\beta(v, u) = -\beta(u, v) \forall v, u \in V$.

OSS: Ogni forma bilineare β si può scrivere come $\beta = \beta_s + \beta_a$, con β_s simmetrica e β_a antisimmetrica. Basta prendere:

$$\beta_s(v, u) = \frac{\beta(v, u) + \beta(u, v)}{2}$$

$$\beta_a(v, u) = \frac{\beta(v, u) - \beta(u, v)}{2}$$

Sia V uno spazio vettoriale $v_1 \dots v_n$ una base di V e sia β una forma bilineare. Dati $v, u \in V$, posso scriverli nella base data:

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad u = b_1v_1 + \dots + b_nv_n = \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

$$\beta(v, u) = \beta\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) \stackrel{\text{lin 1}^\circ}{=} \sum_{i=1}^n a_i \beta(v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j) \stackrel{\text{lin 2}^\circ}{=} \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \beta(v_i, v_j)$$

Mi basta sapere $\beta(v_i, v_j)$! Quindi posso rappresentare β con una matrice A dove $A_{ij} = \beta(v_i, v_j)$.

Esempio:

$$\beta(v, u) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

$$\beta(e_1, e_1) = 2 \quad \beta(e_1, e_2) = 1 \quad \beta(e_2, e_1) = -1 \quad \beta(e_2, e_2) = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi se $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$, $u = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$

$$\beta(v, u) = (a_1, \dots, a_n)A \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

7.1.1 Matrici simmetriche e matrici congruenti

Def: A è **simmetrica** se $A = A^T$ cioè se $A_{ij} = A_{ji}$, A è **antisimmetrica** se $A = -A^T$ cioè se $A_{ij} = -A_{ji} \forall i, j$.

Esempi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix} \text{ è simmetrica } \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS una forma bilineare è simmetrica \iff la sua matrice (in qualunque base) è simmetrica.

Una forma bilineare è antisimmetrica \iff la sua matrice è antisimmetrica.

Def: Due matrici A, M sono congruenti $\iff \exists$ una matrice invertibile B / $M = B^T A B$.

"Essere congruenti" è una relazione di equivalenza.

TEOREMA 19 Due matrici sono congruenti se e solo se rappresentano la stessa forma bilineare (in basi magari diverse)

Dim: $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$

$u = b_1v_1 + \dots + b_nv_n = y_1u_1 + \dots + y_nu_n$

$$\beta(v, u) = (a_1 \dots a_n)A \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{ma} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\beta(v, u) = \left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^T A B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}^T \underbrace{B^T A B}_M \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \#$$

7.2 Diagonalizzare forme bilineari

Analogamente a quanto fatto per le appl. lineari, ci chiediamo:

"posso trovare una base $v_1 \dots v_n$ in cui la matrice della forma bilineare β sia diagonale?"

OSS: Se β è antisimmetrica, sicuramente no:

l'unica matrice diagonale antisimmetrica è la matrice nulla. (perchè una matrice antisimmetrica ha tutti 0 sulla diagonale).

TEOREMA 20 Se β è simmetrica, esiste una base $v_1 \dots v_n$ in cui la matrice di β è diagonale. In altre parole, ogni matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale.

Dim: Sia $w_1 \dots w_n$ una base qualsiasi:

- PASSO 1) se $\beta(w_1, w_1) \neq 0$ vai al passo 2. Se $\beta(w_1, w_1) = 0$ ma esiste $i / \beta(w_i, w_i) \neq 0$, scambio w_1 con w_i e vado al passo 2. Se $\beta(w_i, w_i) = 0 \forall i$ allora cerco $i, j / \beta(w_i, w_j) \neq 0$ e scambio $w_1 = w_i + w_j$ $w_2 = w_j$ $w_i = w_1$ $w_j = w_2$ e vado al passo 2.

- PASSO 2) Faccio una nuova base.

$$w'_1 = w_1, \forall i = 2 \dots n w'_i = w_i - \frac{\beta(w_1, w_i)}{\beta(w_1, w_1)} w_1$$

$$\text{così che } \beta(w_1, w_i) = \beta(w_1, w_i) - \frac{\beta(w_1, w_i)}{\beta(w_1, w_1)} \beta(w_1, w_1) = 0.$$

Otengo una matrice che ha sulla prima riga e sulla prima colonna tutti 0 tranne $A_{1,1}$, per diagonalizzarla completamente devo ripetere il procedimento anche su (w'_2, \dots, w'_n) senza toccare w'_1 . Dopo $n-1$ iterazioni ottengo una matrice diagonale.

Con questo algoritmo è possibile diagonalizzare una forma bilineare simmetrica. Si può fare di meglio?

Esempio:

Sia $V = \mathbb{R}^4$, supponiamo di avere trovato una base v_1, v_2, v_3, v_4 tale che la matrice di β è diagonale.

$$\text{Se pongo } u_1 = \frac{1}{2}v_1, \beta(u_1, u_1) = \beta(\frac{1}{2}v_1, \frac{1}{2}v_1) = 1/4 \cdot 4 = 1$$

$$\text{Se pongo } u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}v_2, \beta(u_2, u_2) = 1$$

$$\text{Se pongo } u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}v_3, \beta(u_3, u_3) = -1$$

$$\text{Se pongo } u_4 = v_4, \beta(u_4, u_4) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dopo le sostituzioni: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS: se invece che su \mathbb{R}^4 fossi stato su \mathbb{C}^4 invece che $u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}v_3$ avrei potuto porre:

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{-5}}v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}iv_3 \text{ e così } \beta(u_3, u_3) = 1 \text{ e avrei avuto una matrice con solo 0 e 1.}$$

TEOREMA 21 (Sylvester) Dato uno spazio vettoriale V su \mathbb{R} e una forma bilineare simmetrica β esiste una base $u_1 \dots u_n$ di V tale che la matrice di β in tale base è:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Con $p = \text{num. di } 1, r-p = \text{num. di } -1, n-r = \text{num. di } 0$

Inoltre la coppia di numeri $(p, r-p)$ non dipende dalla base scelta ed è detta la **segnatura** di β .

Dim: Per il teorema 20, esiste una base $v_1 \dots v_n$ in cui la matrice di β è diagonale. A meno di riordinarli sappiamo che:

$$\beta(v_i, v_i) \text{ sia } \begin{cases} > 0 \forall i \in \{1 \dots p\} \\ < 0 \forall i \in \{p+1 \dots r\} \\ = 0 \forall i \in \{r+1 \dots n\} \end{cases}$$

Allora ponendo $u_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\beta(v_i, v_i)|}} v_i & \text{se } i \leq r \\ v_i & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\beta(u_i, u_i) = \begin{cases} 1 & i \in \{1 \dots p\} \\ -1 & i \in \{p+1 \dots r\} \\ 0 & i \in \{r+1 \dots n\} \end{cases} \quad \#$$

TEOREMA 22 Dato uno spazio vettoriale V su \mathbb{C} e una forma bilineare simmetrica,

esiste una base $u_1 \dots u_n$ di V tale che la matrice di β è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Il numero di 1 è uguale al rango della matrice

Dim: Come nel teorema precedente, ma $\forall j \in \{p+1 \dots r\}$ $u_j = \frac{1}{\sqrt{\beta(v_j, v_j)}} v_j = i \frac{1}{\sqrt{|\beta(v_j, v_j)|}} v_j$ in modo che $\beta(u_j, u_j) = 1$. #

I due teoremi precedenti, in altre parole, ci dicono che:

Corollario: Due matrici simmetriche sono congruenti su \mathbb{R} \iff hanno la stessa segnatura; sono congruenti su \mathbb{C} \iff hanno lo stesso rango.

8 Prodotto scalare

8.1 Forma quadratica

Def: Sia β una forma bilineare simmetrica su \mathbb{R} . La **forma quadratica** associata a β è $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ $q(v) = \beta(v, v)$.

OSS 1): Data q posso ritrovare β perchè:

$$\begin{aligned} (\overline{q(v+u)} - q(v) - q(u))/2 &= (\beta(v+u, v+u) - \beta(v, v) - \beta(u, u))/2 \\ &= (\beta(v, v) + \beta(u, u) + 2\beta(v, u) - \beta(v, v) - \beta(u, u))/2 = \beta(v, u) \end{aligned}$$

OSS 2): data una forma quadratica $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$, $q(\underline{0}) = \beta(\underline{0}, \underline{0}) = \underline{0}$

Esempio:

$$\begin{aligned} V = \mathbb{R}^2 \quad v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2) \quad \beta(v, u) &= 2x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 \\ q(v) = \beta(v, v) &= 2x_1^2 - x_2^2 + 6x_1x_2 \end{aligned}$$

Def:

1. q è **definita positiva** se $q(v) > 0 \forall v \neq 0$.
2. q è **definita negativa** se $-q$ è definita positiva, cioè se $q(v) < 0 \forall v \neq 0$.
3. q è **semidefinita positiva** se $q(v) \geq 0 \forall v \in V$.

4. q è **semidefinita negativa** se $q(v) \leq 0 \forall v \in V$.

5. q è **indefinita** se $\exists v_1, v_2 \in V / q(v_1) > 0, q(v_2) < 0$

OSS:

1. q è def pos \iff la segnatura di β è $(n,0)$. Cioè \exists una base in cui la matrice di β è I_n . (ci sono solo 1)

2. q è def neg \iff la segnatura di β è $(0,n)$. (ci sono solo -1)

3. q è semidef pos \iff la segnatura di β è $(r,0)$. (ci sono solo 1 e 0)

4. q è semidef neg \iff la segnatura di β è $(0,r)$. (ci sono solo -1 e 0)

5. q è indefinita \iff la segnatura di β è $(p,r-p)$. (ci sono -1 e 1)

8.1.1 Matrice Hessiana

L'**Hessiana** di una *funzione reale di più variabili reali* è una **matrice quadrata** i cui elementi sono le **derivate parziali** seconde della funzione f .

Data cioè una funzione reale di più variabili reali:

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

definita in un sottoinsieme Ω di \mathbb{R}^n e che ammetta derivate parziali almeno fino all'ordine 2 in tale sottoinsieme, possiamo costruire la matrice Hessiana ad essa associata che è data da

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

dove

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right]$$

ovvero è un modo compatto per indicare la derivata parziale rispetto ad x_i della derivata parziale di f rispetto a x_j .

Figure 7:

8.2 Prodotto scalare

Def: Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (si utilizza \mathbb{R} perchè ci serve il concetto di ordinamento che non c'è sui complessi).

Un **prodotto scalare** è una forma bilineare definita positiva (cioè tale che la forma quadratica associata sia definita positiva).

OSS: Sia $V = \mathbb{R}^n$ $v = (x_1 \dots x_n)$, $u = (y_1 \dots y_n)$

$\beta(v, u) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ è un esempio di prodotto scalare chiamato Prodotto Scalare Standard di \mathbb{R}^n .

Sia $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ un prodotto scalare (cioè una forma bilineare simmetrica definita positiva).

Invece di $\beta(v, u)$ scriveremo semplicemente **(v, u)** (oppure $\langle v, u \rangle$ o $v \cdot u$) e invece di $q(v)$ scriveremo $\|v\|^2$ cioè definiamo la **norma** (o lunghezza) di v come $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

Osserviamo che $\|v\| > 0 \forall v \neq \underline{0}$.

Diciamo che v è un **versore** se $\|v\| = 1$.

Diciamo che $\{v_1 \dots v_n\}$ sono vettori tra loro **ortogonali** se $(v_i, v_j) = 0 \forall i \neq j$.

Def: Diciamo che un insieme di vettori $\{v_1 \dots v_n\}$ è **ortonormale** se:

$$(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ ortogonali} \\ 1 & i = j \text{ versori} \end{cases}$$

TEOREMA 23 Per ogni spazio vettoriale V e per ogni prodotto scalare su V esiste una base ortonormale di V .

Dim: Poichè il prodotto scalare è def. positivo, per il teorema di Sylvester esiste una base $v_1 \dots v_n$ in cui la matrice del prodotto scalare è In. Quindi $v_1 \dots v_n$ sono vettori ortonormali. #

Esempio: Controllo che la funzione sia un prodotto scalare.

Sia $V = \mathbb{R}^2$ $v = (x_1, x_2)$ $u = (y_1, y_2)$ $(v, u) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$.

Per controllare che sia un prodotto scalare deve essere 1) bilineare, 2) simmetrica, 3) def. pos.

Nella base e_1, e_2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice è simmetrica, ho verificato i punti 1 e 2.

Diagonalizzo la matrice, così ottengo la segnatura (se è (n,0) allora è def. pos).

Pongo $w_1 = e_1$ $w_2 = e_2 - \frac{\beta(e_2, e_1)}{\beta(e_1, e_1)} e_1 = e_2 - \frac{1}{2} e_1$

$$(w_1, w_2) = (e_1, e_2) - \frac{1}{2} (e_1, e_1) = 0$$

$$(w_2, w_2) = (e_2, e_2) + \frac{1}{4} (e_1, e_1) - \frac{2}{2} (e_1, e_2) = 3 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{5}{2}$$

La matrice in base w_1, w_2 diventa $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Pongo $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} w_1$ $v_2 = \frac{\sqrt{10}}{5} w_2$ $(v_1, v_1) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 (w_1, w_1) = 1$ $(v_2, v_2) = 1$ $(v_1, v_2) = 0$

La matrice in base v_1, v_2 è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ def. pos

Quindi è un prodotto scalare e v_1, v_2 è una base ortonormale.

TEOREMA 24 Sia $v_1 \dots v_m$ un insieme di vettori ortogonali. Allora $v_1 \dots v_m$ sono linearmente indipendenti.

Dim: Siano $a_1 \dots a_m \in \mathbb{R}$ / $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \underline{0}$, dobbiamo mostrare che $a_1 = 0 \dots a_m = 0$.

$$0 = (v_1, \underline{0}) = (v_1, a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) = a_1 (v_1, v_1) + a_2 \underbrace{(v_1, v_2)}_0 + \dots + a_m \underbrace{(v_1, v_m)}_0$$

$0 = a_1 (v_1, v_1) \Rightarrow a_1 = 0$. Nello stesso modo verifico che $a_2 = 0 \dots a_m = 0$ #.

OSS: In particolare se $n = \dim V$, n vettori tra loro ortogonali sono automaticamente una base.

OSS: Un qualsiasi prod. scalare posso ricondurlo al prodotto scalare standard.

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} con un prodotto scalare e sia $v_1 \dots v_n$ una base ortonormale (rispetto a tale prodotto). Allora il prodotto scalare di due vettori $v, u \in V$ è uguale al prodotto scalare standard delle loro coordinate nella base $v_1 \dots v_n$.

Dim: $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \quad u = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

$(v, u) = a_1(v_1, u) + \dots + a_n(v_n, u) = a_1 b_1(v_1, v_1) + a_1 b_2(v_1, v_2) + \dots + a_1 b_n(v_1, v_n) + \dots + a_n b_1(v_n, v_1) + \dots + a_n b_n(v_n, v_n) \Rightarrow (v, u) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ (perchè essendo la base ortonormale se $i \neq j$ allora $(v_i, v_j) = 0$)

$$= \sum_{i=1}^n a_i b_i = \text{prod. scalare std di } (a_1 \dots a_n), (b_1 \dots b_n)$$

8.3 Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

TEOREMA 25 Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} con un prod. scalare. Allora $\forall v, u \in V$:

$$(v, u)^2 \leq (v, v) \cdot (u, u)$$

ovvero $|(v, u)| \leq \|v\| \cdot \|u\|$, e l'uguaglianza vale $\iff v, u$ sono linearmente indipendenti

Dim:

- Se NON sono lin. indep, ad es $u = av$, banalmente $(v, av)^2 = a^2(v, v)^2 = (v, v) \cdot (av, av)$
- Se sono lin. indep. ovvero $av + bu = \underline{0} \iff a, b = 0$
 $0 < (av + bu, av + bu) =$ perchè definita positiva ($q(v) = \beta(v, v) > 0$)
 $= a^2(v, v) + b^2(u, u) + 2ab(v, u)$
 In particolare per $a = (u, u) \quad b = -(v, u)$ otteniamo:
 $0 < (u, u)^2 + (v, u)^2(u, u) - 2(u, u)(v, u)^2$ Dividendo per (u, u) (che è > 0):
 $0 < (v, v)(u, u) - (v, u)^2 \Rightarrow (v, u)^2 < (v, v)(u, u) \quad \#$

Def: Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} con un prodotto scalare. Dati due vettori $v, u \in \mathbb{R}$ definiamo l'angolo convesso tra v, u come: $\theta = \arccos \frac{(v, u)}{\|v\| \cdot \|u\|}$ ($\frac{(v, u)}{\|v\| \cdot \|u\|} \in [-1, 1]$ per disugu. di Shwartz).

Def: Ogni prodotto scalare su \mathbb{R}^n definisce una **distanza euclidea** nel modo seguente:

Dati $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$.

TEOREMA 26 La distanza euclidea verifica le seguenti proprietà:

1. $d(P, Q) \geq 0$ ed è $= 0 \iff P = Q$
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$
3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) \quad \forall R \in \mathbb{R}^n$ (disuguaglianza triangolare)

Dim:

1. Conseguenza del fatto che un prodotto scalare è def. pos.
 $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \geq 0 \quad = 0 \iff \overrightarrow{PQ} = 0 \iff P = Q$

$$2. d(Q, P) = \|\overrightarrow{QP}\| = \|\overrightarrow{-PQ}\| = |-1| \cdot \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q)$$

Perchè più in generale, $\forall a \in \mathbb{R}, \forall v \in V$:

$$\|av\| = \sqrt{(av, av)} = \sqrt{a^2(v, v)} = |a| \cdot \|v\|$$

3. Mostriamo preliminarmente che se $v, u \in V$ allora:

$$\|v + u\|^2 = (v + u, v + u) = (v, v) + (u, u) + \underbrace{2(v, u)}_{\leq 2\|v\| \cdot \|u\| \text{ (C.S.)}} \leq (\|v\| + \|u\|)^2$$

$$\text{Quindi } \|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$$

$$\text{sostituendo } v = \overrightarrow{PR}, u = \overrightarrow{RQ}, v + u = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) \quad \#$$

Esempio:

Calcoliamo la distanza di $P = (1, -1)$ e $Q = (4, 3)$ rispetto al prodotto scalare standard:

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

$$\overrightarrow{PQ} = (4 - 1, 3 - (-1)) = (3, 4) = v$$

$$d(P, Q) = \|v\| = \sqrt{\|v\|^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Calcoliamo la distanza euclidea degli stessi P, Q ma rispetto al prodotto scalare:

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 \text{ che induce la norma } \|v\| = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 x_2}$$

$$\text{Quindi } d(P, Q) = \|(3, 4)\| = \sqrt{2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3\sqrt{10}$$

Def: Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} con un prodotto scalare e sia U un sottospazio vettoriale di V .

$$U^\perp = \{v \in V / (v, u) = 0 \forall u \in U\} \quad \text{Sottospazio ortogonale ad } U.$$

OSS: U^\perp è un SSV di V . Infatti se $v_1, v_2 \in U^\perp$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 v_1 + a_2 v_2 \in U^\perp$

$$\text{se } u \in U, (a_1 v_1 + a_2 v_2, u) = a_1(v_1, u) + a_2(v_2, u) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0$$

ESERCIZIO:

Sia $V = \mathbb{R}^3$ con il prod. scalare

$$U = \langle v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, -1) \rangle = \{t v_1 + s v_2, t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t+s, t, -s), t, s \in \mathbb{R}\}$$

Troviamo U^\perp . Osserviamo che $v = (x_1, x_2, x_3) \in U^\perp \Leftrightarrow (v, v_1) = 0, (v, v_2) = 0$

$$U^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) \in V / \begin{cases} x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U^\perp = \{(t, -t, t) / t \in \mathbb{R}\} \text{ (con prod. scalare STD)}$$

Se invece scelgo prod. scalare $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$

$$U^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) \in V / \begin{cases} x_1 \cdot 1 + 2x_2 \cdot 1 + 3x_3 \cdot 0 = 0 \rightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 \cdot 1 + 2x_2 \cdot 0 - 3x_3 = 0 \rightarrow x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U^\perp = \{(t, -\frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t) / t \in \mathbb{R}\}$$

Figure 8: Esercizio ssv ortogonale

9 Isometrie

9.1 Isometria

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} con un prodotto scalare.

Def: Una **isometria** è una applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ tale che $\forall v, u \in V$:

$$(f(v), f(u)) = (v, u)$$

"Isometria" = stessa misura

TEOREMA 27 f è una isometria $\iff \forall v \in V \quad \|f(v)\| = \|v\|$

Dim:

\Rightarrow se f è un' isometria, allora $\|f(v)\| = \sqrt{(f(v), f(v))} = \sqrt{(v, v)} = \|v\|$.

$\Leftarrow \forall v, u \in V$:

$$\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2 = (v+u, v+u) - (v-u, v-u) = (v, v) + (u, u) + 2(v, u) - [(v, v) + (u, u) - 2(v, u)] = 4(v, u) \text{ cioè } (v, u) = \frac{1}{4}(\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2)$$

Quindi se f conserva la norma dei vettori $(f(v), f(u)) = \frac{1}{4}\|f(v) + f(u)\|^2 - \|f(v) - f(u)\|^2 = (v, u)$. #

Esempio:

Sia $V = \mathbb{R}^2$ $v = (x, y)$ prodotto scalare standard

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{perchè } \|(x, y)\| = \sqrt{(v, v)}$$

Inserire calcoli:

$$\|f(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\| \Rightarrow f \text{ è un' isometria.}$$

OSS: Se f è una isometria, allora conserva gli angoli. In effetti l'angolo compreso tra v, u :

$$\arccos \frac{(v, u)}{\|v\|\|u\|} = \arccos \frac{(f(v), f(u))}{\|f(v)\|\|f(u)\|} \quad \text{che è l'angolo compreso tra } f(v), f(u).$$

OSS: Non tutte le applicazioni lineari che conservano gli angoli sono isometrie.

Ad esempio:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad f(v) = 2v$$

$$\frac{(f(v), f(u))}{\|f(v)\|\|f(u)\|} = \frac{4(v, u)}{4\|v\|\|u\|} \quad f \text{ non cambia gli angoli ma sicuramente } f \text{ non è una isometria perchè } \|f(v)\| \neq \|v\|.$$

TEOREMA 28 Ogni isometria è un isomorfismo

Dim: Sia f un isometria. Facciamo prima vedere che f è iniettiva. Poiché un prodotto scalare è def. positivo, $\|v\| = 0 \iff v = \underline{0}$.

Sia $v \in \ker f$, cioè $f(v) = \underline{0}$. Poiché f è una isometria $\|v\| = \|f(v)\| = \|\underline{0}\|$.

Quindi $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ è iniettiva.

Adesso dimostro che è suriettiva.

Poiché $f : V \rightarrow V$, per il teorema del rango $\dim \text{Im} f = \dim V - \dim \ker f = \dim V$.

Quindi $\Rightarrow f$ è suriettiva $\Rightarrow f$ è un isomorfismo. #

OSS: Non vale il viceversa: ad esempio $f : V \rightarrow V \quad f(v) = 2v$ è un isomorfismo ma **non** è una isometria.

Def: Una matrice A è ortogonale se $AA^T = In$.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ è ortogonale perchè } AA^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OSS: Questo ci fa sospettare che ci sia un legame tra matrici ortogonali e isometrie.

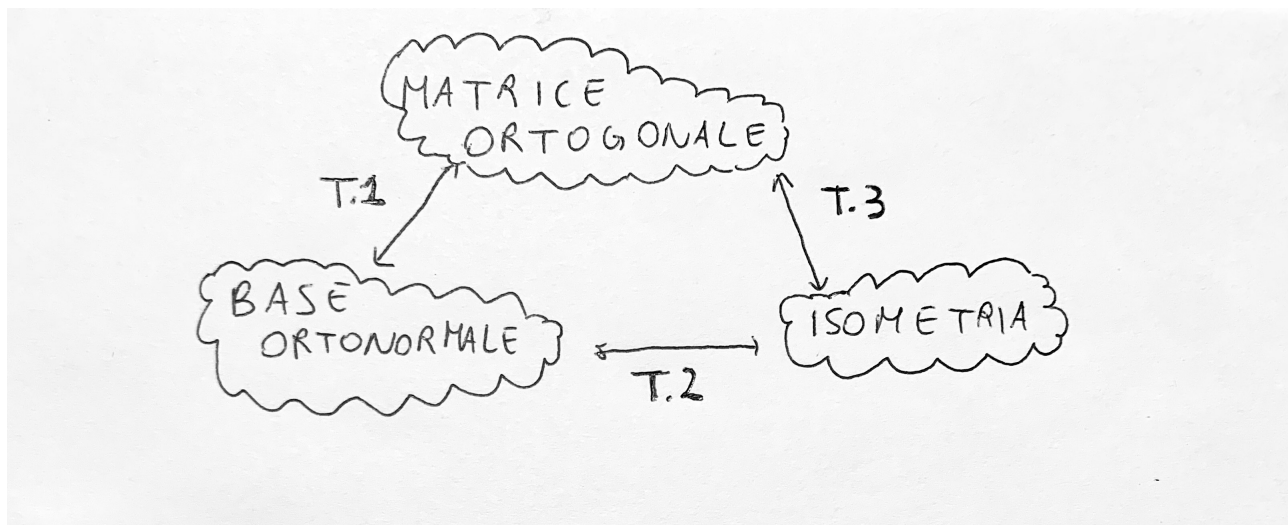


Figure 9: Collegamento teoremi

9.2 Teoremi isometrie e matrici ortogonali

TEOREMA 29 (T.1) Sia $v_1 \dots v_n$ una base ortonormale di V . Allora una base $w_1 \dots w_n$ di V è anch'essa ortonormale \iff la matrice del cambiamento di base è ortogonale.

Dim: Poichè $v_1 \dots v_n$ è ortonormale, cioè $(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ la matrice del prodotto scalare in tale base è In . Quindi, se C è la matrice del cambiamento di base, la matrice del prodotto scalare nella base $w_1 \dots w_n$ è $C^T In C = C^T C$ (uso In perchè deve essere congruente ad una matrice identità). Quindi $w_1 \dots w_n$ è ortonormale \iff la matrice del prodotto scalare in tale base è $In \iff C^T C = In \iff C$ è ortogonale. #

In precedenza abbiamo visto che un'applicazione lineare è un isomorfismo \iff manda basi in basi.

TEOREMA 30 (T.2) Un'applicazione lineare è una isometria \iff manda basi ortonormali in basi ortonormali

Dim:

\Rightarrow Sia f una isometria e $v_1 \dots v_n$ una base ortonormale. Allora:

$$(f(v_i), f(v_j)) = (v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{cioè } f(v_1) \dots f(v_n) \text{ è una base ortonormale.}$$

\Leftarrow Sia f un'applicazione lineare e sia $v_1 \dots v_n$ una base ortonormale tale che $f(v_1) \dots f(v_n)$ è una base ortonormale.

Voglio mostrare che f è una isometria. Dati v, u , li scrivo nella base $v_1 \dots v_n$:

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad u = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

$$f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n), \quad f(u) = y_1 f(v_1) + \dots + y_n f(v_n)$$

Quindi, per il teorema "il prodotto scalare di due vettori v, u è uguale al prod. scalare std delle loro coordinate in una base ortonormale":

$$(v, u) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad (\text{perchè essendo la base ortonormale se } i \neq j \text{ allora } (v_i, v_j) = 0) = (f(v), f(u)) \quad (\text{perchè anche } f(v_1) \dots f(v_n) \text{ è ortonormale}). \quad \text{Quindi } f \text{ è una isometria.} \quad \#$$

TEOREMA 31 (T.3) *Un'applicazione lineare f è una isometria \iff la sua matrice in una qualsiasi base ortonormale è una matrice ortogonale.*

Dim: Sia $v_1 \dots v_n$ una base ortonormale e sia A la matrice di f rispetto a tale base

$$f(v_1) = a_{11} v_1 + \dots + a_{n1} v_n$$

...

$$f(v_n) = a_{1n} v_1 + \dots + a_{nn} v_n \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(f(v_i), f(v_j)) = (a_{1i} v_1 + \dots + a_{ni} v_n, a_{1j} v_1 + \dots + a_{nj} v_n) =$$

(utilizzo la bilinearità del prodotto scalare e il fatto che $v_1 \dots v_n$ sono ortonormali)

$$= a_{1i} a_{1j} (v_1, v_1) + \dots + a_{ni} a_{nj} (v_n, v_n)$$

$$\text{Cioè } (f(v_i), f(v_j)) = a_{1i} a_{1j} + \dots + a_{ni} a_{nj} = (A^T A)_{ij}$$

$$\text{Infatti } A^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{1i} & \dots & a_{ni} \\ a_{in} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Quindi i-ma riga di A per j-ma colonna di A^T è proprio la somma qui sopra.

$$\text{Quindi } f \text{ è un isometria} \iff (f(v_i), f(v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{per il T.2}) \iff (A^T A)_{ij} =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \iff A^T A = I_n \iff A \text{ è una matrice ortogonale} \quad \#.$$

Esempio:

9.3 Altre proprietà

TEOREMA 32 1. Sia A una matrice ortogonale. Allora $\det(A) = \pm 1$

2. Sia f un'isometria. Allora $\det(f) = \pm 1$

Dim:

$$1) \det(A^T) = \det(A). \text{ Quindi se } A^T A = I_n \text{ allora } \det(A^T A) = \det(A) \det(A^T) = (\det(A))^2 =$$

$$\det(\text{In}) = 1 \iff A = \pm 1$$

2) Per definizione, $\det(f) = \det(A)$ dove A è la matrice di f in una base qualsiasi. Se scelgo una base ortonormale, per il T.3 la matrice A di f è ortogonale, e quindi utilizzo quanto visto al punto 1). #

OSS: Non è vero il viceversa. Ad esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\det(A) = 1$ ma A non è ortogonale. Perchè $A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ e l'applicazione $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$ non è una isometria.

TEOREMA 33 *Sia f una isometria. Allora se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore reale di f , allora $\lambda = \pm 1$*

Dim: Se v è un autovettore di f , cioè $\exists v \neq 0 / f(v) = \lambda v$, allora (isometria) $\|f(v)\| = \|\lambda v\| = \sqrt{(\lambda v, \lambda v)} = \sqrt{\lambda^2(v, v)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{(v, v)} = |\lambda| \cdot \|v\|$.

Poichè f è una isometria $\|v\| = \|f(v)\| = |\lambda| \|v\|$ quindi $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$. #

OSS: il teorema dice che se λ è reale allora è ± 1 . Ma può essere anche complesso.

Esempio:

$f(x, y) = (y, -x)$ nella base canonica $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$$

quindi f è una isometria i cui autovalori sono $i, -i$.