第三讲　集合论

一、集合的基本概念和运算

1．集合的基本概念

· 集合(*set*)：集合是数学中最基本的概念之一，不能以更简单的概念来定义(define)，只能给出它的描述(description)。一些对象的整体就称为一个集合，这个整体的每个对象称为该集合的一个元素(*member* 或 *element*)。

· 用大写字母 A, B, C 等表示集合，用小写字母 a, b, c 等表示集合的元素

· $a\in$A 表示：a 是集合 A 的元素，或说 a 属于集合 A

· $a\notin$A 表示：a 不是集合 A 的元素，或说 a 不属于集合 A

· 集合中的元素是无序的，不重复的。通常使用两种方法来给出一个集合：

· 列元素法：列出某集合的所有元素，如：

· A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}表示所有小于 10 的自然数所构成的集合

· B = {$a, b, \ldots, z$} 表示所有小写英文字母所构成的集合

· 性质概括法：使用某个性质来概括集合中的元素，如：

· A = { n | n 是小于 10 的自然数}

· C = { n | n 是质数} 表示所有质数所构成的集合

· 集合由它的元素所决定，换句话说，两个集合 A 和 B 相等，记为 A = B，如果 A 和 B 具有相同的元素，即 a 属于集合 A 当且仅当 a 属于集合 B。

· 子集(*subset*)：说集合 A 是集合 B 的子集，记为 A$\subseteq$B，如果 a 属于集合 A 则 a 也属于集合 B。因此 A=B 当且仅当 A$\subseteq$B 且 B$\subseteq$A。说集合 A 是集合 B 的真子集(*proper subset*)，如果 A$\subseteq$B 且 A 不等于 B(A$\neq$B)。

· 空集(*empty set*)：约定存在一个没有任何元素的集合，称为空集，记为ϕ，有时也用{}来表示。按子集的定义，空集是任何集合的子集(为什么？)。

· 幂集(*power set*)：集合 A 的幂集，记为 *P*(A)，是 A 的所有子集所构成的集合，即：

· *P*(A) = { B | B $\subseteq$ A }

· 例如，A = {0, 1}，则 *P*(A) = { {}, {0}, {1}, {0, 1} }

· 显然，对任意集合 A，有$\phi\in$ *P*(A)和 A$\in$*P*(A)

· 补集(*complement set*)：集合 A 的补集，记为 $\overline{A}$，是那些不属于集合 A 的元素所构成的集合，即 $\overline{A}$ = {x | $x\notin$A}。通常来说，是在存在一个全集 U 的情况下讨论集合的补集。全集 U 是所讨论的问题域中所有元素所构成的集合。

2．集合的基本运算

· 集合的并(*union*)：集合 A 和 B 的并 A$\cup$B 定义为：A$\cup$B = {x | $x\in$A $\vee$ $x\in$B}，集合的并可推广到多个集合，设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 都是集合，它们的并定义为：

$$A_1\cup A_2\ldots\cup A_n = \{x \mid \exists i(x\in A_i)\}$$

· 集合的交(*intersection*)：集合 A 和 B 的并 A$\cap$B 定义为：A$\cap$B = {x | $x\in$A $\wedge$ $x\in$B}，集合的交也可推广到多个集合，设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 都是集合，它们的交定义为：

$$A_1\cup A_2\ldots\cup A_n = \{x \mid \forall i(x\in A_i)\}$$

· 集合的相对补：集合 B 对 A 的相对补集 A–B 定义为：A–B = {x | $x\in$A $\wedge$ $x\notin$B}。集合 B 对全集 U 的相对补集记为~B，称为 B 的绝对补集。

·集合的对称差：集合 A 和 B 的对称差 $A \oplus B$ 定义为：$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$，对称差的一个等价定义是：$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

·集合的运算可使用文氏图形象地表示。

·集合的运算中，~优先于并、交、相对补及对称差，后面四种运算的顺序由括号决定。

3．集合恒等式

·集合的基本恒等式包括幂等律、结合律、交换律、分配律、同一律、零律、排中律、矛盾律、吸收律、德·摩尔根律、双重否定律，其中最重要的恒等式有：

吸收律：　$A \cup (A \cap B) = A$　　$A \cap (A \cup B) = A$

德·摩尔根律：　$A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$　　$A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

·例 6.6、例 6.7 表明证明集合恒等式的一个重要方法是，如果要证明集合 $A = B$，即可证明对任意的 $x \in A$ 有 $x \in B$，且对任意的 $x \in B$ 有 $x \in A$。

·其它的一些有关集合运算的性质：

$(A \cap B) \subseteq A$　$(A \cap B) \subseteq B$　$A \subseteq (A \cup B)$　$B \subseteq (A \cup B)$　$(A-B) \subseteq A$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cup B) = B \Leftrightarrow (A \cap B) = A \Leftrightarrow (A-B) = \phi$　$(A-B) = (A \cap \sim B)$

$A \oplus B = B \oplus A$　$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$　$A \oplus \phi = A$　$A \oplus A = \phi$

$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$

·例 6.8、例 6.9 运用上述性质及基本恒等式来证明集合的恒等式。

4．有穷集合的计数

·含有有限个元素的集合称为有穷集合（有限集合，*finite set*），有限集合 A 的元素个数通常记为$|A|$。

·A 的幂集 $P(A)$的元素个数有如下等式：$|P(A)| = 2^{|A|}$。

·使用文氏图再加上列方程组，求解方程组的办法可解决许多有关集合计数的问题，例 6.2、例 6.3 采用了这种方法。

·集合计数中一个很重要的定理称为容斥原理，其简单形式如下：

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

·例 6.2、例 6.3 也可使用容斥原理求解。

作业：教材 p127~131 的 3、6、12、28

二、二元关系

1．有序对与笛卡尔积

【定义 2.1】称 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$为由 a, b 构成的有序对(*order pair*)，记为$<a, b>$，其中 a 称为有序对的第一个元素，b 称为第二个元素，且 a, b 可以相同。

【定理 2.2】$<a, b> = <c, d>$当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$。

【证明】为证明上述定理，先证明$\{x, a\} = \{x, b\}$当且仅当 $a = b$。再证明，设 A_1, A_2, B_1, B_2 是集合，若$\{A_1, A_2\} = \{B_1, B_2\}$则 $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$ 且 $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2$。显然当 $a = c$ 且 $b = d$ 时有$<a, b> = <c, d>$。只要证当$<a, b> = <c, d>$有 $a = c$ 且 $b = d$。为此证当$<a, b> = <c, d>$有$\{a, b\} = \{c, d\}$及当$<a, b> = <c, d>$有 $a = c$ 从而定理得证。

【推论 2.3】$a \neq b$ 时$<a, b> \neq <b, a>$

定理 2.2 和推论 2.3 表明定义 2.1 是有意义的，即反映了有序对中元素的有序性。有序

对可推广到 n 个元素。

【定义 2.4】设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是集合，$a_1\in A_1, a_2\in A_2, \ldots, a_n\in A_n$ 是元素，定义有序 n 元组(*ordered n-tuple*)$<a_1, a_2, \ldots, a_n>$为$<<a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}>, a_n>$，注意这是一个归纳(*inductive*)定义，将有序 n 元组的定义归结为有序 n-1 元组的定义。

【定理 2.5】$<a_1, a_2, \ldots, a_n> = <b_1, b_2, \ldots, b_n>$当且仅当 $a_1 = b_1$ 且 $a_2 = b_2$ 且…且 $a_n = b_n$。

【定义 2.6】两个集合 A 和 B 的笛卡尔积笛卡尔积(*cartesian product*)A×B 定义为：

$$A\times B = \{<a, b> \mid a\in A \text{ 且 } b\in B\}$$

例如，设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2\}$，则 $A\times B = \{<a, 1>, <a, 2>, <b, 1>, <b, 2>, <c, 1>, <c, 2>\}$

笛卡尔积可推广到多个集合的情况。

【定义 2.7】集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的笛卡尔积定义为：

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{<a_1, a_2, \ldots, a_n> \mid a_1\in A_1 \text{ 且 } a_2\in A_2 \text{ 且…且 } a_n\in A_n\}$$

笛卡尔积有如下性质：

1. $A\times\phi = \phi$且$\phi\times A = \phi$
2. 不适合交换律，即 A×B 不一定等于 B×A。
3. 不适合结合律，即 A×(B×C)不一定等于(A×B)×C。
4. 笛卡尔积运算对并和交运算满足分配律，即：

   $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$

   $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$ $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$
5. 设 A, B, C, D 是集合，则有 $A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$。

【例子 2.1】设 A, B, C, D 为 4 个集合，有：

1. $A\times B = \phi$当且仅当 $A = \phi$或 $B = \phi$。
2. $A\neq\phi$，则 $A\times B\subseteq A\times C$ 当且仅当 $B\subseteq C$
3. $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$，则 $A\times B\subseteq C\times D$，并且当 $A = B = \phi$或 $A\neq\phi$且 $B\neq\phi$时，其逆为真。

2. 关系及其运算

【定义 2.8】若集合 R 中的全体元素均为有序 $n(n\geq 2)$元组，则称 R 为 n 元关系，特别地当 $n = 2$ 时，称 R 为二元关系，简称关系(*relation*)。规定空集为 n 元关系。

【定义 2.9】定义 n 个集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 之间的一个 n 元关系 R 为集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的笛卡尔积 $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ 的一个子集。设$<a_1, a_2, \ldots, a_n>\in A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$，若$<a_1, a_2, \ldots, a_n>\in R$，则称 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 间具有关系 R，否则称它们不具有关系 R。特别地：

· 当 $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ 时，称 R 为 A 上的 n 元关系。

· 当 $n = 2$ 时，有 $R\subseteq A_1\times A_2$，称 R 为 A_1 到 A_2 的一个二元关系(*binary relation*)。这时若有$<a_1, a_2>\in R$ 则简记为 a_1Ra_2，否则（即$<a_1, a_2>\notin R$）记为 $a_1\overline{R}a_2$。

通常研究得最多的是二元关系，n 元关系的许多性质可从二元关系的性质扩充而得到。如果没有特别指明的话，说 R 是一个关系则是指 R 是一个二元关系。

【例子 2.2】全域关系、恒等关系。

【定义 2.10】设 $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$，$R\subseteq A\times A$ 是 A 上的二元关系，称矩阵 $M(R) = (r_{ij})_{n\times n}$ 为关系 R 的关系矩阵，其中若 x_iRx_j 则 $r_{ij} = 1$ 否则 $r_{ij} = 0$。

【定义 2.11】设 $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$，$R\subseteq A\times A$ 是 A 上的二元关系，以 A 的元素为顶点，且若 x_iRx_j 则从顶点 x_i 向 x_j 引一条有向边，这样得到的有向图称为 R 的关系图 G(R)。

【例子 2.3】任意给定一个关系，求其关系矩阵和关系图。

【定义 2.12】关系 R 的定义域 dom(R)定义为：$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y(xRy)\}$，关系 R 的值域 ran(R)定义为：$\mathrm{ran}(R) = \{y \mid \exists x(xRy)\}$。

【定义 2.13】设 R 和 S 是关系，A 是集合，定义：

1. 称 $R^{-1} = \{<x, y> \mid <y, x>\in R\}$为 R 的逆(*converse*)。

2. 称 $R \circ S = \{<x, y> \mid \exists z(<x, z>\in R \wedge <z, y>\in S)\}$为 R 和 S 的复合(*composite*)。

3. 称 $R\upharpoonright A = \{<x, y> \mid <x, y>\in R \wedge x\in A\}$为 R 在集合 A 上的限制(*restrict*)，称 $R(A) = ran(R\upharpoonright A)$为 A 在关系 R 下的象(*image*)。

4. 如果关系 R 满足对任意的 $y\in ran(R)$，存在唯一的 $x\in dom(R)$，使得$<x, y>\in R$，则称 R 是单根的。

5. 如果关系 R 满足对任意的 $x\in dom(R)$，存在唯一的 $y\in ran(R)$，使得$<x, y>\in R$，则称 R 是单值的。

【注解】

1. 有的书上将复合定义为：$R \circ S = \{<x, y> \mid \exists z(<x, z>\in S \wedge <z, y>\in R)\}$，这种复合称为左复合，我们同教材一样使用右复合。

2. 对于关系矩阵来说，求关系的逆就是将矩阵倒置，求复合可使用关系矩阵的乘法，不过其中的矩阵元素的加法需使用逻辑加法（$1 + 1 = 0, 1 + 0 = 1, 0 + 0 = 0$）。

【例子 2.4】任意给定两、三个关系，求其逆、复合，并判断其是否是单根或单值的。

【定理 2.14】（域、值域与并、交之间关系）设 R、S 都是关系，则：

1. $dom(R\cup S) = dom(R)\cup dom(S)$　　$ran(R\cup S) = ran(R)\cup ran(S)$
2. $dom(R\cap S) \subseteq dom(R)\cap dom(S)$　　$ran(R\cap S) \subseteq ran(R)\cap ran(S)$

【证明】

1. 对于任意的 x，有：

$x \in dom(R\cup S) \Leftrightarrow \exists y(<x, y>\in R\cup S) \Leftrightarrow \exists y(<x, y>\in R \vee <x, y>\in S)$

$\Leftrightarrow \exists y(<x, y>\in R) \vee \exists y(<x, y>\in S) \Leftrightarrow x \in dom(R) \vee x \in dom(S) \Leftrightarrow x\in dom(R)\cup dom(S)$

类似不难证明第二个等式。

2. 对于任意的 x，有：

$x \in dom(R\cap S) \Leftrightarrow \exists y(<x, y>\in R\cap S) \Leftrightarrow \exists y(<x, y>\in R \wedge <x, y>\in S)$

$\Rightarrow \exists y(<x, y>\in R) \wedge \exists y(<x, y>\in S) \Leftrightarrow x \in dom(R) \wedge x \in dom(S) \Leftrightarrow x\in dom(R)\cap dom(S)$

类似不难证明第二个包含式。

□

【思考】请举例说明定理 2.14 中的 2 是包含关系而不是相等。

【定理 2.15】（域、值域与关系逆、复合运算之间的关系）设 R、S 是关系，则：

1. $dom(R^{-1}) = ran(R)$　　$ran(R^{-1}) = dom(R)$
2. $dom(R \circ S) \subseteq dom(R)$　　$ran(R \circ S) \subseteq ran(S)$

【定理 2.16】设 R 是关系，则$(R^{-1})^{-1} = R$

【定理 2.17】（逆与并、交之间的关系）设 R、S 是关系，则：

1. $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$　　$(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$

【定理 2.18】（复合的结合律）设 R、S 和 T 是关系，则$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

【证明】对于任意的$<x, y>$，有：

$<x, y> \in (R \circ S) \circ T \Leftrightarrow \exists z(<x, z> \in R \circ S \wedge <z, y> \in T)$

$\Leftrightarrow \exists z\ (\exists s\ (<x, s> \in R \wedge <s, z> \in S) \wedge <z, y> \in T)$

$\Leftrightarrow \exists z\ \exists s\ (<x, s> \in R \wedge <s, z> \in S \wedge <z, y> \in T)$

$\Leftrightarrow \exists s\ \exists z\ (<x, s> \in R \wedge <s, z> \in S \wedge <z, y> \in T)$

$\Leftrightarrow \exists s\ (<x, s> \in R \wedge \exists z\ (<s, z> \in S \wedge <z, y> \in T)) \Leftrightarrow \exists s\ (<x, s> \in R \wedge <s, y> \in S \circ T)$

$\Leftrightarrow <x, y> \in R \circ (S \circ T)$

【定理 2.19】（复合与逆的关系）设 R、S 是关系，则$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

【定理 2.20】（复合与并、交的关系）设 R、S 和 T 是关系，则：

1. $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$　　$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$

2. $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$　　　$(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$

【证明】

1. 对于任意的$<x, y>$，有：

$<x, y> \in R \circ (S \cup T) \Leftrightarrow \exists z\,(<x, z> \in R \wedge <z, y> \in (S \cup T))$

$\Leftrightarrow \exists z\,(<x, z> \in R \wedge (<z, y> \in S \vee <z, y> \in T))$

$\Leftrightarrow \exists z\,((<x, z> \in R \wedge <z, y> \in S) \vee (<x, z> \in R \wedge <z, y> \in T))$

$\Leftrightarrow \exists z\,(<x, z> \in R \wedge <z, y> \in S) \vee \exists z(<x, z> \in R \wedge <z, y> \in T))$

$\Leftrightarrow (<x, y> \in R \circ S) \vee (<x, y> \in R \circ T) \Leftrightarrow <x, y> \in (R \circ S) \cup (R \circ T)$

同理不难证明第二个等式（留作练习）。

2. 对于任意的$<x, y>$，有：

$<x, y> \in R \circ (S \cap T) \Leftrightarrow \exists z\,(<x, z> \in R \wedge <z, y> \in (S \cap T))$

$\Leftrightarrow \exists z\,(<x, z> \in R \wedge (<z, y> \in S \wedge <z, y> \in T))$

$\Leftrightarrow \exists z\,((<x, z> \in R \wedge <z, y> \in S) \wedge (<x, z> \in R \wedge <z, y> \in T))$

$\Rightarrow \exists z\,(<x, z> \in R \wedge <z, y> \in S) \wedge \exists z(<x, z> \in R \wedge <z, y> \in T))$

$\Leftrightarrow (<x, y> \in R \circ S) \wedge (<x, y> \in R \circ T) \Leftrightarrow <x, y> \in (R \circ S) \cap (R \circ T)$

同理不难证明第二个包含式（留作练习）。

【思考】请举例说明定理 2.20 中的 2 是包含关系而不是相等。

【定义 2.21】设 $R \subseteq A \times A$，n 为自然数，R 的 n 次幂记作 R^n，其中：

1. $R^0 = I_A$　(A 上的恒等关系)
2. $R^{n+1} = R^n \circ R$，$n \geq 1$

【定理 2.22】设 $R \subseteq A \times A$，n、m 为任意的自然数，则：

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$　　　　$(R^m)^n = R^{mn}$

3. 关系的性质

这里所讨论的都是非空集合上的二元关系的性质。

【定义 2.23】设 A 为一集合，$R \subseteq A \times A$，定义：

1. 称 R 是自反的(*reflexive*)，如果对任意的 $x \in A$ 有 xRx，即：
   R 是自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow <x, x> \in R)$
2. 称 R 是反自反的(*irreflexive*)，如果对任意的 $x \in A$ 有 $x\overline{R}x$，即：
   R 是反自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow <x, x> \notin R)$
3. 称 R 是对称的(*symmetric*)，如果对任意的 $x, y \in A$ 有若 xRy 则 xRy，即：
   R 是对称的 $\Leftrightarrow \forall x\, \forall y\,(x \in A \wedge y \in A \wedge <x, y> \in R \rightarrow <y, x> \in R)$
4. 称 R 是反对称的(*antisymmetric*)，如果对任意的 $a, b \in A$ 有若 aRb 且 bRa 则 $a = b$：
   R 是反对称的 $\Leftrightarrow \forall x\, \forall y\,(x \in A \wedge y \in A \wedge <x, y> \in R \wedge <y, x> \in R \rightarrow x = y)$
5. 称 R 是传递的(*transitive*)，如果对任意的 $x, y, z \in A$ 有若 xRy 且 yRz 则 xRz：
   R 是传递的 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge <x, y> \in R \wedge <y, z> \in R \rightarrow <x, z> \in R)$

【定理 2.24】设 $R \subseteq A \times A$，则下面五个命题等价：

1. R 是自反的；
2. $I_A \subseteq R$；
3. R^{-1} 是自反的；
4. M(R)主对角线上的元素全为 1；
5. G(R)的每个顶点处均有环。

【例子 2.5】举一个自反的关系。

【定理 2.25】设 $R \subseteq A \times A$，则下面五个命题等价：

1. R 是反自反的；

2. $I_A \cap R = \phi$；
3. R^{-1} 是反自反的；
4. M(R)主对角线上的元素全为 0；
5. G(R)的每个顶点处均无环。

【例子 2.6】举一个反自反的关系。

【定理 2.26】设 $R \subseteq A \times A$，则下面四个命题等价：

1. R 是对称的；
2. $R^{-1} = R$；
3. M(R)是对称的；
4. G(R)中任何两个顶点之间若有有向边，必有两条方向相反的有向边。

【例子 2.7】举一个对称的关系。

【定理 2.27】设 $R \subseteq A \times A$，则下面四个命题等价：

1. R 是反对称的；
2. $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$；
3. 在 M(R)中，若任意的 $r_{ij} = 1 (i \neq j)$，则必有 $r_{ji} = 0$；
4. 在 G(R)中，对于任何两个顶点 $x_i, x_j (i \neq j)$之间若有有向边，则必没有从 x_j 到 x_i 的有向边。

【例子 2.8】举一个反对称的关系。

【定理 2.28】设 $R \subseteq A \times A$，则下面四个命题等价：

1. R 是传递的；
2. $R \circ R \subseteq R$；
3. 在 $M(R \circ R)$中，若任意的 $r'_{ij} = 1$，则 M(R)中相应的元素 $r_{ij} = 1$；
4. 在 G(R)中，对于任意顶点 $x_i, x_j, x_k (i \neq j)$，若有从 x_i 到 x_j 的有向边和有从 x_j 到 x_k 的有向边则必有从 x_i 到 x_k 的有向边。

【例子 2.9】举一个传递的关系。

【定理 2.29】设 R、$S \subseteq A \times A$，则：

1. 若 R 和 S 是自反的，则 R^{-1}、S^{-1}、$R \cup S$、$R \cap S$、$R \circ S$、$S \circ R$ 都是自反的；
2. 若 R 和 S 是反自反的，则 R^{-1}、S^{-1}、$R \cup S$、$R \cap S$ 都是反自反的；
3. 若 R 和 S 是对称的，则 R^{-1}、S^{-1}、$R \cup S$、$R \cap S$ 都是对称的；
4. 若 R 和 S 是反对称的，则 R^{-1}、S^{-1}、$R \cap S$ 都是反对称的；
5. 若 R 和 S 是传递的，则 R^{-1}、S^{-1}、$R \cap S$ 都是传递的；

【证明】选择其中一些命题进行证明。

【思考】

1. 请举例说明定理 2.29 中 2 的 $R \circ S$ 不一定是反自反的；
2. 请举例说明定理 2.29 中 3 的 $R \circ S$ 不一定是对称的；
3. 请举例说明定理 2.29 中 4 的 $R \circ S$、$R \cup S$ 不一定是反对称的；
4. 请举例说明定理 2.29 中 5 的 $R \circ S$、$R \cup S$ 不一定是传递的；

作业：p171~172，3、12、证明定理 2.20

4．关系的闭包

【定理 2.30】设 $A \neq \phi$，$R \subseteq A \times A$，R 的自反闭包（对称闭包、传递闭包）R’是满足如下条件的关系：

1. R’是自反的（对称的、传递的）；
2. $R \subseteq R'$；

3.　对于 A 上的任意自反的（对称的、传递的）关系 R”，若 $R \subseteq R''$，则 $R' \subseteq R''$。

换句话说，R 的自反闭包（对称闭包、传递闭包）是包含 R 的最小的自反的（对称的、传递的）关系。通常分别用 $r(R)$、$s(R)$和 $t(R)$表示 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

【定理 2.31】设 $A \neq \phi$，$R \subseteq A \times A$，则：

1.　R 是自反的当且仅当 $r(R) = R$；
2.　R 是对称的当且仅当 $s(R) = R$；
3.　R 是传递的当且仅当 $t(R) = R$；

【定理 2.32】设 $A \neq \phi$，R、$S \subseteq A \times A$，且 $R \subseteq S$，则：

1.　$r(R) \subseteq r(S)$；
2.　$s(R) \subseteq s(S)$；
3.　$t(R) \subseteq t(S)$。

【证明】只证明 1，2 和 3 同理可证。对于 1，由于 $r(S)$是自反的，且有 $R \subseteq S \subseteq r(S)$，按照自反闭包的定义有 $r(R) \subseteq r(S)$。

【定理 2.33】设 $A \neq \phi$，$R \subseteq A \times A$，则：

1.　$r(R) = R \cup I_A$；
2.　$s(R) = R \cup R^{-1}$；
3.　$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$。

【证明】

1.　首先 $R \cup I_A$ 是自反的，且 $R \subseteq R \cup I_A$，若又有自反关系 R’满足 $R \subseteq R'$，则因为 R’是自反的有 $I_A \subseteq R'$，即有 $R \subseteq R' \wedge I_A \subseteq R'$，从而有 $R \cup I_A \subseteq R'$，命题得证。

2.　首先 $R \cup R^{-1}$ 是对称的，因为$(R \cup R^{-1})^{-1} = R \cup R^{-1}$。若又有对称关系 $R \subseteq R'$，则对任意的$<x, y> \in A \times A$，有：

$$<x, y> \in R \cup R^{-1} \Leftrightarrow (<x, y> \in R) \vee (<x, y> \in R^{-1}) \Rightarrow (<x, y> \in R') \vee (<y, x> \in R)$$
$$\Rightarrow (<x, y> \in R') \vee (<y, x> \in R') \Leftrightarrow (<x, y> \in R') \vee (<y, x> \in R'^{-1}) \quad // R' = R'^{-1}$$
$$\Leftrightarrow (<x, y> \in R') \vee (<x, y> \in R') \Leftrightarrow <x, y> \in R'$$

即 $R \cup R^{-1} \subseteq R'$，命题得证。

3.　记 $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$，首先证 $t(R) \subseteq R^+$，这只要证 R^+是传递的，因为若 R^+是传递的，而又有 $R \subseteq R^+$，那么根据传递闭包的定义有 $t(R) \subseteq R^+$。为了证 R^+是传递的，我们考察对任意的 $x, y, z \in A$，若$<x, y> \in R^+$且$<y, z> \in R^+$，则必存在自然数 n, m 使得$<x, y> \in R^n$ 且$<y, z> \in R^m$，那么有$<x, z> \in R^n \circ R^m = R^{n+m}$，从而$<x, y> \in R^+$，因此 R^+确实是传递的。再证 $R^+ \subseteq t(R)$，这只要证对任意的自然数 $n \geq 1$ 有 $R^n \subseteq t(R)$，为此我们使用数学归纳法：

i).　归纳基，当 $n = 1$ 时，根据传递闭包的定义有 $R \subseteq t(R)$；

ii).　归纳步，设当 $n = k$ 时，有 $R^k \subseteq t(R)$，考察 $n = k+1$，因为有 $R^{k+1} = R^k \circ R$，所以对任意的 $x, y \in A$，若$< x, y> \in R^{k+1}$，则必存在 $z \in A$ 使得$<x, z> \in R^k$ 且$<z, y> \in R$，因此有$<x, z> \in t(R)$且$<z, y> \in t(R)$，而 $t(R)$是传递的，因此有$<x, y> \in t(R)$，即对任意的自然数 $n \geq 1$ 有 $R^n \subseteq t(R)$，因此 $R^+ \subseteq t(R)$，而上面已经证明了 $t(R) \subseteq R^+$，所以有 $R^+ = t(R)$，从而命题得证。

□

【例子 2.10】给出一个关系，求它的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

【定理 2.34】设 $A \neq \phi$，$R \subseteq A \times A$，则：

1.　若 R 是自反的，则 $s(R)$和 $t(R)$也是自反的；
2.　若 R 是对称的，则 $r(R)$和 $t(R)$也是对称的；
3.　若 R 是传递的，则 $r(R)$也是传递的。

【证明】1 显然成立，因为有 $I_A \subseteq R \subseteq s(R)$和 $I_A \subseteq R \subseteq t(R)$。对于 2，$r(R)$的对称性也不难证明，因为有$(r(R))^{-1} = (I_A \cup R)^{-1} = I_A^{-1} \cup R^{-1} = I_A \cup R = r(R)$。为了证明 $t(R)$是对称的，我

们先使用数学归纳法证明，若 R 是对称的，则对任意的自然数 $n\geq 1$ 有 R^n 是对称的。$n = 1$ 时成立，设 $n = k$ 时 R^k 是对称的，考察 $n = k + 1$。任给 $x, y\in A$，有：

$$<x, y>\in R^{k+1}\Rightarrow \exists z(<x, z>\in R^k \wedge <z, y>\in R)\Rightarrow \exists z(<z, x>\in R^k \wedge <y, z>\in R)\Rightarrow <y, x>\in R\circ R^k = R^{k+1}$$

因此若 R 是对称的，则对任意的自然数 $n\geq 1$ 有 R^n 是对称的。这样任给 $x, y\in A$，有：

$$<x, y>\in t(R) \Leftrightarrow <x, y>\in R\cup R^2\cup\ldots\Rightarrow \exists n(<x, y>\in R^n)\Rightarrow \exists n(<y, x>\in R^n)\Rightarrow <y, x>\in t(R)$$

因此 $t(R)$是对称的。对于 3，由于有：

$$r(R)\circ r(R) = (I_A\cup R)\circ(I_A\cup R) = I_A\cup R\cup(R\circ R)\subseteq I_A\cup R = r(R)$$

因此 $r(R)$是传递的。

□

5．等价关系和序关系

【定义 2.35】设 $A\neq\phi$，$R\subseteq A\times A$，若 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

【定义 2.36】设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对任意的 $x\in A$，定义$[x]_R = \{y \mid y\in A\wedge xRy\}$，称为 x 关于 R 的等价类，简称 x 的等价类，在不混淆的情况下记为$[x]$。

【例子 2.11】给出一个等价关系，并求其每个元素的等价类。

【定理 2.37】设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对于任意的 $x, y\in A$，有：

1. $[x]_R\neq\phi$且$[x]_R\subseteq A$；
2. 若$<x, y>\in R$，则$[x]_R = [y]_R$；
3. 若$<x, y>\notin R$，则$[x]_R\cap[y]_R = \phi$；
4. $\cup\{[x]_R \mid x\in A\} = A$。

【定义 2.38】设 R 是非空集合 A 上的等价关系，以关于 R 的全体不同的等价类为元素的集合称为 A 关于 A 的商集，记为 A/R。

【例子 2.12】给出一个集合和等价关系，求商集。

【定义 2.39】设 A 为非空集合，若存在 A 的一个子集簇 $C\subseteq P(A)$满足：

1. $\phi\notin C$；
2. 对于 A 的任意子集 $x, y\in C$，若 $x\neq y$，则 $x\cap y = \phi$；
3. $\cup C = A$。

则称 C 为 A 的一个划分，C 中的元素称为划分块。

【定义 2.40】设 A 为非空集合，则：

1. 设 R 为 A 上的任意一个等价关系，则商集 A/R 是 A 的一个划分；
2. 设 C 是 A 的任意一个划分，则定义 $R_C = \{<x, y> \mid x, y\in A\wedge x, y$ 属于 C 的同一划分块}，则 R_C 是等价关系。

【定义 2.41】设 $A\neq\phi$，$R\subseteq A\times A$，若 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 是 A 上的偏序关系(*partial order*)。常将偏序关系 R 记为≤，并将 xRy 记为 $x\leq y$。进一步将 $x\leq y\wedge x\neq y$ 记为 $x<y$。

【例子 2.11】给出一些偏序关系的例子。

【定义 2.42】称一个非空集合 A 及 A 上的一个偏序关系≤组成的二元组$<A, \leq>$为一个偏序集(*partial order set*，或为 *poset*)。

【定义 2.43】设$<A, \leq>$是偏序集，$x, y\in A$，若有 $x\leq y\vee y\leq x$，则称 x 与 y 是可比的。若 x 与 y 可比，且 $x<y$，但不存在 $z\in A$，使得 $x<z\wedge z<y$，则称 y 覆盖 x。

根据上述定义，可以简化偏序关系的关系图得到哈斯图，具体画法如下：

1. 省去关系图中的每个顶点处的环；
2. 若 $x<y$ 且 y 覆盖 x，将代表 y 的顶点放在代表 x 的顶点之上，并在 y 与 x 之间连线，省去有向边的箭头，使其为无向图。若 $x<y$ 但 y 不覆盖 x，则去掉 y 与 x 之间的连线。

【例子 2.12】给出一些偏序关系，并画其哈斯图。

【定义 2.44】设$<A, \le>$为偏序集，若 A 中的任意两个元素 x, y 都是可比的，则称$\le$为 A 上的全序关系或线序关系，此时称$<A, \le>$为全序集。

【定义 2.45】设 $A \ne \phi$，$R \subseteq A \times A$，若 R 是反自反的和传递的，则称 R 是 A 上的拟序关系(*preorder*)。常将拟序关系 R 记为$<$，并将 xRy 记为 $x < y$。

【定理 2.46】设$\le$为非空集合 A 上的偏序关系，$<$为 A 上的拟序关系，则：

1. $<$是反对称的；
2. $\le - I_A$ 为 A 上的拟序关系，$< \cup I_A$ 为 A 上的偏序关系。

【定义 2.47】设$<A, \le>$为偏序集，$B \subseteq A$，则：

1. 若存在 $y \in B$，使得$\forall x\ (x \in B \to y \le x)$为真，则称 y 为 B 的最小元(*least element*)。
2. 若存在 $y \in B$，使得$\forall x\ (x \in B \to x \le y)$为真，则称 y 为 B 的最大元(*greatest element*)。
3. 若存在 $y \in B$，使得$\forall x\ (x \in B \wedge x \le y \to x = y)$为真，则称 y 为 B 的极小元(*minimal element*)。
4. 若存在 $y \in B$，使得$\forall x\ (x \in B \wedge y \le x \to x = y)$为真，则称 y 为 B 的极大元(*maximal element*)。

【定理 2.48】设$<A, \le>$为偏序集，$B \subseteq A$，若 B 有最小（大）元，则该最小（大）元是唯一的。

【定义 2.49】设$<A, \le>$为偏序集，$B \subseteq A$，则：

1. 若 $y \in A$ 满足$\forall x\ (x \in B \to x \le y)$，称 y 为 B 的上界(*upper bound*)。
2. 若 $y \in A$ 满足$\forall x\ (x \in B \to y \le x)$，称 y 为 B 的下界(*lower bound*)。
3. 记 $B\uparrow = \{ y \mid y \in A$ 且 y 是 B 的上界$\}$，若 $B\uparrow$有最小元，则称该最小元为 B 的上确界(*least upper bound*，或 *join*)，记为 $lub(B)$或$\vee B$。
4. 记 $B\downarrow = \{ y \mid y \in A$ 且 y 是 B 的下界$\}$，若 $B\downarrow$有最大元，则称该最大元为 B 的下确界(*greatest lower bound*，或 *meet*)，记为 $glb(B)$或$\wedge B$。

【定义 2.50】设$<A, \le>$为偏序集，$B \subseteq A$，若对于$\forall x, y \in B$, x 与 y 均可比，则 B 为 A 的一个链(*link*)，B 中的元素个数称为链的长度。

【定义 2.51】若偏序集 A 的每一个非空子集都有最小元，则称 A 为良序集。

【定义 2.52】每一个良序集必是全序集，每一个有限的全序集必是良序集。

作业：p174，31、32、35

三、函数

1．基本概念

【定义 3.1】如果关系 R 满足对任意的 $x \in dom(R)$，存在唯一的 $y \in ran(R)$，使得$<x, y> \in R$，则称 R 是函数或映射，即：

R 是函数 $\Leftrightarrow$ R 是二元关系 $\wedge$

$$\forall x \forall y \forall z(x \in dom(R) \wedge y \in ran(R) \wedge z \in ran(R) \wedge <x, y> \in R \wedge <x, z> \in R \to y = z)$$

【定义 3.2】设 A, B 为二集合，R 是一函数，若 $dom(R) \subseteq A$ 且 $ran(R) \subseteq B$ 则称 R 是从 A 到 B 的偏函数(partial function)，若 $dom(R) = A$，则称 R 为全函数，简称函数（即下面没有特别说明的话均指全函数）。我们通常用 $\boldsymbol{f}: A \to B$ 表示从 A 到 B 的函数，并记$<x, y> \in \boldsymbol{f}$为 $y = \boldsymbol{f}(x)$。

【定义 3.3】设 $\boldsymbol{f}: A \to B$ 是函数，$A' \subseteq A$，定义 A'在 A 下的象 $\boldsymbol{f}(A') = \{y \mid y = \boldsymbol{f}(x) \wedge x \in A'\}$。设 $B' \subseteq B$，称 $\boldsymbol{f}^{-1}(B') = \{x \mid x \in A \wedge \boldsymbol{f}(x) \in B'\}$为 B'的原象。

【例子 3.1】列出两个非空集合之间的所有函数，并给出它对某些子集的象与原象。

【例子 3.2】教材 p177 之例 8.2。

【注解】函数是一个特殊的关系，因此有关关系的运算也适合于函数。不过很少讨论函数的并、交等，最主要的运算是函数的复合和函数的逆。函数的逆不一定是函数，必需满足一些性质才能称为函数，这些性质我们在后面讨论。

【定理 3.4】设 $\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{B}$, $\boldsymbol{g}: \mathrm{B}\to\mathrm{C}$ 是两个函数，则 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{C}$ 也是函数，且对任意的 $x\in\mathrm{A}$ 有$(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(x))$。

【证明】首先证明 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ 是函数，对于任意的 $x\in\mathrm{A}$，$y, z\in\mathrm{C}$，则：

$$<x, y>\in \boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f} \wedge <x, z>\in\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f} \Leftrightarrow (\exists s(s\in\mathrm{B} \wedge <x, s>\in\boldsymbol{f} \wedge <s, y>\in\boldsymbol{g})) \wedge$$

$$(\exists t(t\in\mathrm{B} \wedge <x, t>\in\boldsymbol{f} \wedge <t, z>\in \boldsymbol{g})) \quad // \boldsymbol{f}\text{ 是函数得到 } s = t$$

$$\Rightarrow (\exists s(s\in\mathrm{B} \wedge <x, s>\in\boldsymbol{f} \wedge <s, y>\in\boldsymbol{g} \wedge <s, z>\in\boldsymbol{g})) \Rightarrow y = z \quad // \boldsymbol{g}\text{ 是函数}$$

又若 $y = (\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(x)$，则存在 $s\in\mathrm{B}$，使得$<x, s>\in\boldsymbol{f}$ 且$<s, y>\in\boldsymbol{g}$，显然 $s = \boldsymbol{f}(x)$，即 $y = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(x))$。

□

下面定义一些特殊的函数。

【定理 3.5】由关系的复合满足结合律可得到函数的复合也满足结合律。

【定理 3.6】设 $\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{B}$，则 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}\circ \boldsymbol{I}_\mathrm{A} = \boldsymbol{I}_\mathrm{B}\circ\boldsymbol{f}$，其中 $\boldsymbol{I}_\mathrm{A}: \mathrm{A}\to\mathrm{A}$，$\boldsymbol{I}_\mathrm{B}: \mathrm{B}\to\mathrm{B}$ 为恒等函数。

【定义 3.7】

1. 设 $\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{B}$，如果存在 $y\in\mathrm{B}$ 使得对所有的 $x\in\mathrm{A}$ 有 $\boldsymbol{f}(x) = y$，则称 $\boldsymbol{f}$ 为常函数。
2. A 上的恒等关系 $\boldsymbol{I}_\mathrm{A}$ 是函数，称为 A 上的恒等函数。
3. 设 A 为集合，对于任意的 $\mathrm{B}\subseteq\mathrm{A}$ 可定义 B 的特征函数 $X_\mathrm{B}: \mathrm{A}\to\{0, 1\}$为，对任意的 $x\in\mathrm{A}$ 有若 $x\in\mathrm{B}$ 则 $X_\mathrm{B}(x) = 1$，否则 $X_\mathrm{B}(x) = 0$。
4. 设 R 是 A 上的等价关系，定义一个从 A 到 A/R 的函数 $\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{A/R}$ 为 $\boldsymbol{f}(a) = [a]_\mathrm{R}$，它把 A 中的元素 a 映射到 a 的等价类$[a]_\mathrm{R}$，称 $\boldsymbol{f}$ 是从 A 到商集 A/R 的自然映射。
5. 设$<\mathrm{A}, \leq_\mathrm{A}>$和$<\mathrm{B}, \leq_\mathrm{B}>$为两个偏序集，$\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{B}$ 是函数，如果对任意 $x, y\in\mathrm{A}$ 有若 $x\leq_\mathrm{A}y$ 则 $\boldsymbol{f}(x) \leq_\mathrm{B} \boldsymbol{f}(y)$，那么称 $\boldsymbol{f}$ 为单调递增函数或简称单调函数。如果对任意 $x, y\in\mathrm{A}$ 有若 $x\leq_\mathrm{A}y$ 则 $\boldsymbol{f}(y) \leq_\mathrm{B} \boldsymbol{f}(x)$，那么称 $\boldsymbol{f}$ 为单调递减函数。

【例子 3.2】设 $\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{B}$ 是函数，则可定义单调函数 $\boldsymbol{F}^{-1}: P(\mathrm{B})\to P(\mathrm{A})$为，对任意的 $\mathrm{X}\subseteq\mathrm{B}$ 有 $\boldsymbol{F}^{-1}(\mathrm{X}) = \boldsymbol{f}^{-1}(\mathrm{X}) = \{x \mid x\in\mathrm{A} \wedge \boldsymbol{f}(x) \in \mathrm{X}\}$。

2．函数的性质

【定义 3.8】设 $\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{B}$ 是函数，定义：

1. 如果 $\boldsymbol{f}$ 满足 $\mathrm{ran}(\boldsymbol{f}) = \mathrm{B}$，则称 $\boldsymbol{f}$ 是满射(*surjection*)。
2. 如果 $\boldsymbol{f}$ 满足对任意的 $x, y\in\mathrm{A}$ 有 $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(y)\Rightarrow x = y$，则称 $\boldsymbol{f}$ 是内射(入射)(*injection*)。
3. 如果 $\boldsymbol{f}$ 既是内射又是满射则称为双射(*bijection*)。

【例子 3.3】举例列出两个非空有限集合上的内射、满射和双射。

【例子 3.4】设 A, B 是非空有限集：

1. 设 $\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{B}$ 是任意的函数，定义 $\boldsymbol{g}: \mathrm{A}\to\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ 为对任意的 $a\in\mathrm{A}$，$\boldsymbol{g}(a) = <a, \boldsymbol{f}(a)>$，则当 B 是单元集（即 B 中只有一个元素）时 $\boldsymbol{g}$ 为双射，否则 $\boldsymbol{g}$ 是内射而非满射。
2. 定义投影函数$\pi_\mathrm{A}: \mathrm{A}\times\mathrm{B}\to\mathrm{A}$ 为对任意的$<x, y>\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}$，$\pi_\mathrm{A}(<x, y>) = x$，则当 B 是单元集时$\pi_\mathrm{A}$ 是双射，否则π_A 是满射而非内射。
3. 定义函数 $switch: \mathrm{A}\times\mathrm{B}\to\mathrm{B}\times\mathrm{A}$ 为对任意的$<x, y>\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}$，$switch(<x, y>) = <y, x>$，则函数 $switch$ 是双射。
4. 定义 3.5 中给出的从 A 到商集 A/R 的自然映射是满射，而且当 R 是恒等关系时，它是双射。

【定理 3.9】设 $\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{B}$, $\boldsymbol{g}: \mathrm{B}\to\mathrm{C}$，则：

1. 如果 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 都是内射则 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ 也是内射。

2. 如果 f 和 g 都是满射则 $g \circ f$ 也是满射。

3. 如果 f 和 g 都是双射则 $g \circ f$ 也是双射。

【证明】

1. 对于任意的 $x, y \in C$，若 $g \circ f(x) = g \circ f(y)$，即 $g(f(x)) = g(f(y))$，由 g 是内射，即有 $f(x) = f(y)$，又 f 是内射，所以有 $x = y$。

2. 对于任意的 $x \in C$，由 g 是满射，则存在 $y \in B$，使得 $x = g(y)$， 又 f 是满射，则存在 $z \in A$，使得 $y = f(z)$。因此对于任意的 $x \in C$ 有 $x = g \circ f(z)$，即 $g \circ f$ 是满射。

3. 由 1 和 2 可得。

【定理 3.10】设 $f : A \to B, g : B \to C$，则：

1. 如果 $g \circ f$ 是内射则 f 是内射。
2. 如果 $g \circ f$ 是满射则 g 是满射。
3. 如果 $g \circ f$ 是双射则 f 是内射，而 g 是满射。

【证明】

1. 设 $x_1, x_2 \in A$，且 $f(x_1) = f(x_2) = y$，那么有 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = g(y)$，由于 $g \circ f$ 是内射，即有 $x_1 = x_2$，因此 f 是内射。

2. 对于任意的 $z \in C$，由于 $g \circ f$ 是满射，那么存在 $x \in A$ 使得 $g \circ f(x) = z$，因此存在 $y = f(x) \in B$，使得 $z = g(y)$，因此 g 是满射。

3. 由 1 和 2 可得。

3．反函数

将函数看作关系时，它的逆不一定是函数，那么在什么情况下是函数呢？有如下定理：

【定理 3.11】单射 $f : A \to B$ 的逆（作为关系的逆）是函数 $f^{-1} : \mathrm{ran}(f) \to A$。

【证明】若存在 $x \in \mathrm{ran}(f)$，使得存在 $y_1, y_2 \in A$ 满足 $<x, y_1> \in f^{-1}$ 且 $<x, y_2> \in f^{-1}$，那么有 $<y_1, x> \in f$ 且 $<y_2, x> \in f$，这与 f 是单射矛盾，因此 f^{-1} 是函数，且显然 $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{ran}(f)$ 及 $\mathrm{ran}(f^{-1}) = A$。

注意单射 f 的逆 f^{-1} 仅仅是 $\mathrm{ran}(f)$ 到 A 的函数，不过由该定理我们显然有：

【定理 3.12】双射 $f : A \to B$ 的逆是函数 $f^{-1} : B \to A$，且 f^{-1} 是双射。

【定义 3.13】对于函数 $f : A \to B$，如果它是双射，则称其逆为它的反函数。

【例子 3.5】构造 $N \times N$ 到 N 的双射函数，并求其反函数。

【解答】按照康托尔对角线法，我们可以定义：

$$p(<m, n>) = ((m+n)(m+n+1))/2 + m$$

其逆函数定义为：

$$p^{-1}(u) = <u - (A(A+1))/2, (A(A+3))/2 - u>$$

其中 A 是((sqrt(1 + 8u)) – 1)/2 的整数部分。

【定理 3.14】对于双射 $f : A \to B$，显然有 $f \circ f^{-1} = I_B : B \to B$ 及 $f^{-1} \circ f = I_A : A \to A$。

【定义 3.15】设函数 $f : A \to B$，$g : B \to A$，如果 $f \circ g = I_B : B \to B$ 则称 g 为 f 的右逆。如果 $g \circ f = I_A : A \to A$ 则称 g 为 f 的左逆。

【定理 3.16】设 $f : A \to B$，且 A 不是空集：

1. f 存在左逆当且仅当 f 是内射；
2. f 存在右逆当且仅当 f 是满射；
3. f 既有左逆又有右逆当且仅当 f 是双射；
4. 如果 f 是双射，则 f 的左逆和右逆相等且就是 f 的反函数。

【证明】

1. 先证⇒)：如果 f 存在左逆 g，那么有 $g \circ f = I_A : A \to A$，而 I_A 是内射，由定理 3.10 知 f 是内射。

再证⇐)：由定理 3.11 有 $f^{-1} : \mathrm{ran}(f) \to A$ 是函数，由于 A 不是空集，因此存在 $a \in A$，我

们定义 $\boldsymbol{g}: \mathrm{B}\to\mathrm{A}$ 为，对任意的 $y\in\mathrm{B}$，若 $y\in\mathrm{ran}(\boldsymbol{f})$，则 $\boldsymbol{g}(y) = \boldsymbol{f}^{-1}(y)$，否则令 $\boldsymbol{g}(y) = a$。显然有 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f} = \boldsymbol{I}_{\mathrm{A}}: \mathrm{A}\to\mathrm{A}$，因此 $\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的左逆。

2. 先证⇒)：如果 $\boldsymbol{f}$ 存在右逆 $\boldsymbol{h}$，那么有 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{h} = \boldsymbol{I}_{\mathrm{B}}: \mathrm{B}\to\mathrm{B}$，而 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{B}}$ 是满射，由定理 3.10 知 $\boldsymbol{f}$ 是满射。

再证⇐)：由于 f 是满射，因此对于任意的 $y\in\mathrm{B}$，存在 $x\in\mathrm{A}$ 使得 $\boldsymbol{f}(x) = y$，对每一个 $y\in\mathrm{B}$，我们可选择这样的 x，使得 $\boldsymbol{f}(x) = y$，因此可定义 $\boldsymbol{h}: \mathrm{B}\to\mathrm{A}$ 为对任意 $y\in\mathrm{B}$，$\boldsymbol{h}(y)$为所选择的 x。显然对任意的 $y\in\mathrm{B}$ 有 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{h}(y) = \boldsymbol{f}(x) = y$，因此 $\boldsymbol{h}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的右逆。

3. 由 1 和 2 可得。

4. 设 $\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的左逆，$\boldsymbol{h}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的右逆，那么有：

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{I}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{g}\circ(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})\circ\boldsymbol{h} = \boldsymbol{I}_{\mathrm{A}}\circ\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}$$

同理可证这种逆是唯一的，因此它就等于双射的反函数。

【定理 3.17】设函数 $\boldsymbol{f}: \mathrm{A}\to\mathrm{B}$：

1. $\boldsymbol{f}$ 是满射则对任意的函数 $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}: \mathrm{B}\to\mathrm{C}$ 有 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{f}$ 推出 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$；
2. $\boldsymbol{f}$ 是内射则对任意的函数 $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}: \mathrm{C}\to\mathrm{A}$ 有 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{h}$ 推出 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$；

【证明】

1. 若 $\boldsymbol{f}$ 是满射，则 $\boldsymbol{f}$ 存在右逆 $\boldsymbol{k}$，使得 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{k} = \boldsymbol{I}$，这样对任意的函数 $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}: \mathrm{B}\to\mathrm{C}$ 若有 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{f}$ 则 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{k} = \boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{k}$ ，即 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$；
2. 同理可证。

作业：教材 p190　4(1, 2, 3, 4)、9

1. 设 $\mathrm{A} = \{a, b\}$，$\mathrm{B} = \{0, 1\}$
   (1). 求 $P(\mathrm{A})$和 B^{A}
   (2). 构造一个从 $P(\mathrm{A})$到 B^{A} 的双射

（以下四、五为选学内容）

四、自然数集

讨论自然数集的目的是让读者了解最常见的数集，包括自然数集、有理数集、实数集，在数学上的构造方法及基本性质，并为讨论集合基数、可数集、无穷集等提供必要的准备。

【定义 4.1】设 A 为一个集合，称 $A\cup\{A\}$为 A 的后继，记为 A^+，并称求集合的后继为后继运算。

【例子 4.1】求下列集合的后继的后继：

(1) $\varnothing$

(2) $A = \{a\}$

(3) $B = \{\varnothing, a\}$

【定义 4.2】设 A 为一个集合，若 A 满足：

(1) $\varnothing\in A$，

(2) 若$\forall a\in A$，则 $a+\in A$

则称 A 是归纳集。

【定义 4.3】自然数是属于每个归纳集的集合。

根据归纳集的定义，显然有$\varnothing$，$\varnothing^+$，$\varnothing^{++}$，......都是自然数，分别记为 0, 1, 2, ...，且：

$0 = \varnothing$，

$1 = 0^+ = \{0\}$，

$2 = 1^+ = \{0, 1\}$，

... ...

$n = \{0, 1, 2, ..., n\text{-}1\}$

【定义 4.4】记集合簇 $\boldsymbol{D} = \{A \mid A$ 为归纳集$\}$，称集合簇的广义交$\cap\boldsymbol{D}$ 为全体自然数的集合，记为 $\boldsymbol{N}$。

【定理 4.5】$\boldsymbol{N}$ 是归纳集

【定理 4.6】$\boldsymbol{N}$ 满足 Peano 公理：

(1) $0\in\boldsymbol{N}$

(2) 若 $n\in\boldsymbol{N}$，则 $n^+\in N$

(3) 如果一个子合 $S\subseteq\boldsymbol{N}$ 满足 *a*) $0\in S$，*b*)若 $n\in S$ 则 $n^+\in S$，则有 $S = \boldsymbol{N}$。

【数学归纳法】要证明任意自然数 n 都具有性质 P，则证 $P(n)$为真，可先证 $P(0)$为真，并证由 $P(n)$为真可推出 $P(n^+)$为真即可。这是因为可构造集合 $S = \{n \mid n\in N\wedge P(n)\}$，由 $P(0)$为真，即有 $0\in S$，由 $P(n)$真可推出 $P(n^+)$得到若 $n\in S$ 则有 $n^+\in S$，即 S 是归纳集，从而有 $\boldsymbol{N}\subseteq S$。

【定理 4.7】任何自然数的元素都是它的子集。

【证明】证明 $S = \{n \mid n\in N \wedge \forall x(x\in n \to x\subseteq n)\}$是归纳集。 □

【定理 4.8】对于任意自然数 m, n，则 $m+\in n+$当且仅当 $m\in n$。

【定理 4.9】(三歧性)对于任意自然数 m, n，下面三式有且仅有一式成立：

$$m \in n \qquad m = n \qquad n \in m$$

【定义 4.10】设 A 为一个集合，如果 A 中任何元素的元素也是 A 的元素，则称 A 为传递集合，简称传递集，即：

A 为传递集 $\Leftrightarrow \forall x\forall y(x \in y \wedge y \in A \to x \in A)$

【定理 4.11】设 A 为一个集合，则下面命题等价：

(1) A 是传递集；

(2) $\cup A \subseteq A$；

(3) 对于任意 $y \in A$，则 $y\subseteq A$；

(4) $A \subseteq \boldsymbol{P}(A)$

【例子 4.2】判断下列集合哪些是传递集：

(1) $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

(2) $B = \{0, 1, 2\}$

(3) $C = \{\{a\}\}$

(4) $D = \langle 0, 1\rangle$

【定理 4.12】设 A 为一个集合，则 A 为传递集当且仅当 $\boldsymbol{P}(A)$为传递集。

【定理 4.13】设 A 为是传递集，则$\cup(A^+) = A$。

【定理 4.14】每个自然数都是传递集。

【定理 4.15】自然数集 $\boldsymbol{N}$ 是传递集。

五、基数

【定义 5.1】设 A、B 为两个集合，若存在从 A 到 B 的双射函数，则称 A 与 B 等势，记为 A~B。

【例子 5.1】设 $\boldsymbol{N}_{偶} = \{n \mid n \in \boldsymbol{N} \wedge n$ 为偶数$\}$、$\boldsymbol{N}_{奇} = \{n \mid n \in \boldsymbol{N} \wedge n$ 为奇数$\}$、$\boldsymbol{N}_{2^n} = \{m \mid m = 2^n \wedge n \in \boldsymbol{N}\}$，则 $\boldsymbol{N} \sim \boldsymbol{N}_{偶} \sim \boldsymbol{N}_{奇} \sim \boldsymbol{N}_{2^n}$

【解】 取 $f : \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}_{偶}$，定义为 $f(n) = 2n$

取 $g : \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}_{奇}$，定义为 $g(n) = 2(n+1)$

取 $h : \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}_{2^n}$，定义为 $h(n) = 2^n$

【定理 5.2】

(1) $\boldsymbol{Z} \sim \boldsymbol{N}$ (2) $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N} \sim \boldsymbol{N}$ (3) $\boldsymbol{N} \sim \boldsymbol{Q}$ (4) $(0, 1) \sim \boldsymbol{R}$ (5) $[0, 1] \sim (0, 1)$

【证明】

(1) 取 $f : \boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{N}$，定义为：$f(n) = 0$, if $n = 0$; $f(n) = 2n$, if $n > 0$; $f(n) = 2|n| - 1$, if $n < 0$

(2) 参见例子 3.5。

(3) 有理数可表示成既约分数，即整数对，可同样使用康托尔对角线法对其编号。

(4) 取 $f : (0, 1) \to R$，定义为$\forall x\in(0, 1)$，$f(x) = \mathrm{tg}\pi((2x - 1) / 2)$，则 f 是双射，其反函数是：$h(y) = (\mathrm{arctg}(y)) / \pi + 1/2$。

【定理 5.3】记 $2 = \{0, 1\}$，设 A 为任意的集合，则 $\boldsymbol{P}(A) \sim 2^A$，其中 2^A 是所有从 A 到 2 的函数组成的集合。

【证明】取 $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{P}(A)\to 2^A$，定义为$\forall B \in \boldsymbol{P}(A)$，即 $B\subseteq A$，令 $\boldsymbol{H}(B) = X_B : A\to\{0, 1\}$，即 B 的特征函数。下面证明 $\boldsymbol{H}$ 是双射，定义 $\boldsymbol{H}$ 的反函数 $\boldsymbol{H}^{-1} : 2^A\to\boldsymbol{P}(A)$为，$\forall f \in 2^A$，令 $\boldsymbol{H}^{-1}(f) = \{x \mid x\in A \wedge f(x) = 1\} \in \boldsymbol{P}(A)$。

□

【定理 5.4】设 A、B、C 为任意集合，则：

(1) $A \sim A$

(2) 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$

(3) 若 $A \sim B$，且 $B \sim C$，则 $A \sim C$

【定理 5.5】(康托定理)

(1) $\boldsymbol{N}$ 不与 $\boldsymbol{R}$ 等势

(2) 设 A 为任意集合，则 A 不与 $\boldsymbol{P}(A)$等势

【证明】

(1) 只要证 $\boldsymbol{N}$ 不与$[0, 1]$等势。反证法，若 $\boldsymbol{N}$ 与$[0, 1]$等势，则所有$[0, 1]$之间的小数可编号为$\{x_0, x_1, ..., x_n, ...\}$，因此这些小数可排成如下形式：

$$x_0 = 0.a_{00}\, a_{01}\, a_{02} \ldots$$

$x_1 = 0.a_{10}\, a_{11}\, a_{12} \ldots$

... ...

$x_n = 0.a_{n0}\, a_{n1}\, a_{n2} \ldots$

... ...

其中若 x_i 不是无限小数，则将其最后一位减 1，并在后面添上"99...."。

考虑 $x = 0.b_0\, b_1\, b_2 \ldots$，其中 $b_i = 1$，若 $a_{i\,i} \neq 1$，否则 $b_i = 9$，若 $a_{i\,i} = 1$，因为 x 与 x_i 在第 i 位小数位上不同，因此 $x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$，但 $x \in [0, 1]$，这说明自然数不能将[0, 1]中的所有自然数编号，矛盾。

(2) 设 A 为任意集合，若 $A \sim \boldsymbol{P}(A)$，则存在双射函数 $f : A \to \boldsymbol{P}(A)$。考虑：

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin f(x)\} \in \boldsymbol{P}(A)$$

若存在 $x_0 \in A$ 使得 $f(x_0) = B$，则有若 $x_0 \in B$，则由 B 的定义推出 $x_0 \notin B$，反之若 $x_0 \notin B$，则由 B 的定义推出 $x_0 \in B$，矛盾，因此 $B \notin \mathrm{ran}(f)$，因此 f 不是满射，与 f 是双射矛盾，因此 A 不可能与 $\boldsymbol{P}(A)$等势。

□

【定义 5.6】若一个集合 A 与某个自然数 n 等势，即 $A \sim n$，则称 A 为有限（有穷）集合，否则称 A 为无限（无穷）集合。

【定理 5.7】不存在与自己的真子集等势的自然数

【证明】只要证明如下命题：设 n 为自然数，$\forall f\in(n\to n)$且 f 是单射，则 f 一定是满射，因为由此可得到 n 与 n 的真子集间不可能存在双射。考虑集合：

$S = \{ n \mid n \in \boldsymbol{N} \wedge \forall f\,(f \in(n\to n) \wedge f$ 是单射 $\to f$ 是满射$)\}$

i) 显然 $0 = \varnothing \in S$，因为$\varnothing\to\varnothing$的函数只有空函数。

ii) 若 $n \in S$，考虑 n^+，设任意的单射 $f : n^+\to n^+$，即 $f : n \cup \{n\} \to n \cup \{n\}$，考虑 f 在 n 下的限制 $f\!\uparrow n : n \to n \cup \{n\}$，显然 $f\!\uparrow n$ 是单射。考虑两种情况：

a) $\mathrm{ran}(f\!\uparrow n) \subseteq n$，即 $f\!\uparrow n \in (n\to n)$，因 $n \in S$ 且 $f\!\uparrow n$ 是单射，因此有 $\mathrm{ran}(f\!\uparrow n) = n$。$f$ 是单射，因此 $f(n) \notin \mathrm{ran}(f\!\uparrow n) = n$，因此必有 $f(n) = n$，从而 $\mathrm{ran}(f) = n^+$。

b) 否则，设 $m \in n$ 使得 $f(m) = n$，而 $f(n) \in n$，构造函数 $f' : n^+\to n^+$，定义为当 $x = n$ 时 $f'(x) = n$，当 $x = m$ 时 $f'(x) = f(n)$，其他情况 $f'(x) = f(x)$，显然 f'仍是单射，且 $\mathrm{ran}(f'\!\uparrow n) \subseteq n$，由 a)得 $\mathrm{ran}(f') = n^+$，但 $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{ran}(f')$，因此 $\mathrm{ran}(f) = n^+$。

综上 f 是满射，由 f 的任意性，得 n+$\in$S，从而 $S = \boldsymbol{N}$，定理得证。

□

【推论 1】不存在与自己的真子集等势的有穷集合

【证明】反证法，设存在有穷集合 A 与其真子集 B 等势，即存在双射 $f : A\to B\subset A$。因为 A 是有穷集，因此存在自然数 n 使得 A 与 n 等势，且有双射 $h : A\to n$，这样有 $h\!\uparrow\!B : B\to n$ 是单射，从而有$(h\!\uparrow\!B) \circ f \circ h^{-1} : \mathrm{n}\to A\to B\to \mathrm{n}$ 是单射。

另一方面根据 $B\subset A$，即存在 $a\in A$ 且 $a\notin B$，因此 $h(a)\notin\mathrm{ran}(h\!\uparrow\!B)$，否则的话存在 $b\in B$ 及 $a\in A(a\notin B)$，使得 $h(b) = h(a)$，这与 h 是双射矛盾，从而有 $h(a)\notin\mathrm{ran}((h\!\uparrow\!B) \circ f \circ h^{-1})$，即单射 $(h\!\uparrow\!B) \circ f \circ h^{-1} : \mathrm{n}\to\mathrm{n}$ 不是满射，这与定理 5.7 矛盾。

□

【推论 2】(1) 任何与自己的真子集等势的集合都是无穷集合　　　　(2) $\boldsymbol{N}$ 是无穷集

【推论 3】任何有限集合都与唯一的自然数等势

【证明】若有限集合 A 与 m 和 n 都等势，则由定理 5.4 得到 m 与 n 等势，而由 $\boldsymbol{N}$ 上的三岐性定理，得到 $m\in n$ 或 $m = n$ 或 $n\in m$ 三者之一成立，但从 $m\in n$ 可推出 $m \subset n$(定理 4.7)，这与定理 5.7 矛盾，同样 $n\in m$ 也不可能成立，从而必有 $m = n$。

【引理 5.8】设 c 为自然数 n 的真子集，则 c 与某个属于 n 的自然数等势。

【证明】考虑集合 $S = \{n \mid n\in N \wedge \forall c(c\subset n \rightarrow \exists m\ (m \in n \wedge c \sim m))\}$

i) 显然 $0\in S$，因为 0 是空集，没有任何真子集；

ii) 假定 $n\in S$，证明 $n^+\in S$：对于任意的 $c\subset n^+ = n \cup \{n\}$，分两种情况：

a) $n\in c$，则 $c-\{n\} \subset n$，由假设存在 $m\in n$ 使得 $c-\{n\} \sim m$，显然有 $c \sim m^+\in n^+$

b) $n\notin c$，则 $c \subset n$，由假设存在 $m\in n$ 使得 $c \sim m \in n^+$

□

【定理 5.9】任何有限集合的子集仍是有限集

【定义 5.10】集合 A 的基数 card(A)由下述四条公设定义：

(1) 对于任意集合 A 和 B，card(A) = card(B)当且仅当 $A \sim B$；

(2) 对于任意有限集合 A，定义与 A 等势的自然数 n 为 A 的基数，card(A) = n；

(3) 定义自然数集 $\boldsymbol{N}$ 的基数为 card($\boldsymbol{N}$) = $\aleph_0$（阿列夫零）；

(4) 定义实数集 $\boldsymbol{R}$ 的基数为 card($\boldsymbol{R}$) = $\aleph$（阿列夫）；

称 0, 1, 2, ...等自然数为有穷基数，而称$\aleph_0$、$\aleph$为无穷基数。

【定义 5.11】设 A、B 为任意二集合，

(1) 若存在 $f: A\rightarrow B$ 且 f 是单射，则称 A 劣势于 B，记为 $A \preceq B$；

(2) 若 $A \preceq B$，则称 A 的基数小于等于 B，记为 card(A) ≤ card(B)；

(3) 若 $A \preceq B$，且 A 不与 B 等势，则称 A 的绝对劣势于 B，记为 $A \prec B$。

(4) 若 $A \prec B$，则称 A 的基数小于等于 B，记为 card(A) < card(B)；

【定理 5.12】设 A、B 为任意二集合，则 $A \preceq B$ 当且仅当存在 $C \subseteq B$，使得 $A \sim C$。

【推论】设 A、B 为任意二集合，则：

(1) 若 $A \subseteq B$，则 $A \preceq B$； (2) 若 $A \sim B$，则 $A \preceq B$ 且 $B \preceq A$。

【定理 5.13】设 A、B、C 为任意三集合，则：

(1) $A \preceq A$； (2) 若 $A \preceq B$，且 $B \preceq C$，则 $A \preceq C$。

【定理 5.14】(Zermelo 定理，基数的三歧性定理)设 A 和 B 是任意二集合，则有且仅有下述之一成立：a) card(A) ≤ card(B) b) card(A) = card(B) c) card(B) ≤ card(A)

【定理 5.15】(Cantor-Schröder-Bernstein 定理)设 A 和 B 是任意二集合，若 card(A) ≤ card(B)且 card(B) ≤ card(A)，则 card(A) = card(B)。

【定理 5.16】

(1) 设 n 为自然数，则 $n \le \aleph_0$ (2) $\aleph_0 \le \aleph$

【定理 5.17】若 A 是无穷集，则$\aleph_0 \le$ card(A)

【定理 5.18】(康托尔定理)设 A 为任意集合，则 card(A) ≤ card($\boldsymbol{P}$(A))

【定义 5.19】若集合 A 的基数 card(A) ≤ $\aleph_0$，则称 A 为可数集

【定理 5.20】任意无限集合，必含有可数子集

【定理 5.21】任意无限集合必与其某一真子集等势

【定理 5.22】可数集的任何无限子集是可数集

【定理 5.23】可数个可数集的并集是可数集

【定理 5.24】若 A 是无穷集，则 $\boldsymbol{P}$(A)不是可数集

【证明】由定理 5.17、定理 5.18 及定理 5.13 有$\aleph_0 \le$ card($\boldsymbol{P}$(A))，且 A 不可能与 $\boldsymbol{P}$(A)等势，因此 $\boldsymbol{P}$(A)不是可数集。

【定理 5.25】有理数集是可数集

【定理 5.26】实数集不是可数集