

شروین ایران عقیده

نام استاد:

ابوالفضل تهرانیان

نام درس:

مبانی جبر

دوشنبه ۷:۳۰

قضیه: فرض کنیم H یک زیرگروه G باشد، آنگاه دو هم مجموعه H یا برابرند یا از هم مجزا. (یعنی: یا $aH=bH$ یا

یا $aH \cap bH = \emptyset$) و تعداد عناصر هم مجموعه‌های H یکسانند و هر عضو G متعلق به یک هم مجموعه H است.

اثبات: فرض کنیم که $aH \cap bH \neq \emptyset$ ، پس عنصری مانند c وجود دارد که $c \in aH$ و $c \in bH$ است، پس

عناصر h_1 و h_2 از H وجود دارند به طوری که $c = ah_1$ و $c = bh_2$ پس:

$$c = ah_1 = bh_2 \rightarrow a = bh_2 h_1^{-1}$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم که: $aH = bH$:

فرض کنیم $(h \in H) x \in aH$ پس $x = ah$ در نتیجه:

$$x = bh_2 h_1^{-1} h = bh_c \rightarrow x \in bH$$

$\underbrace{h_2 h_1^{-1} h}_{h_c \in H}$

$$h_c \in H$$

x همچنین عضو aH هم بود پس:

$$aH \subseteq bH$$

$$x = bh \rightarrow x = ah_1 h_2^{-1} h = ah_t \rightarrow x \in aH \rightarrow bH \subseteq aH \rightarrow aH \subseteq bH \rightarrow aH = bH$$

$\underbrace{h_1 h_2^{-1} h}_{h_t \in H}$ $\underbrace{bH \subseteq aH}$

$b = ah_1 h_2^{-1}$
فرض کنیم $(h \in H) x \in bH$ در نتیجه:

(۲) نشان می‌دهیم که $|aH| = |H|$ به ازای $a \in G$:

تابع λ_a را به صورت:

$$\lambda_a: H \rightarrow aH$$

$$h\lambda_a = ah$$

حال اگر:

$$h_1 \lambda_a = h_2 \lambda_a, (h_1, h_2 \in H) \rightarrow ah_1 = ah_2 \rightarrow h_1 = h_2$$

پس λ_a تابعی یک به یک است پس: $|aH| = |H|$

(۳) اگر $a \in G$ باشد، $a = ae$ و $e \in H$ پس:

$$a = ae \in aH$$

پایان