姓名：左之睿　　学号：191300087　　邮箱：1710670843@qq.com

一. 求图 一所示各信号的拉普拉斯变换。

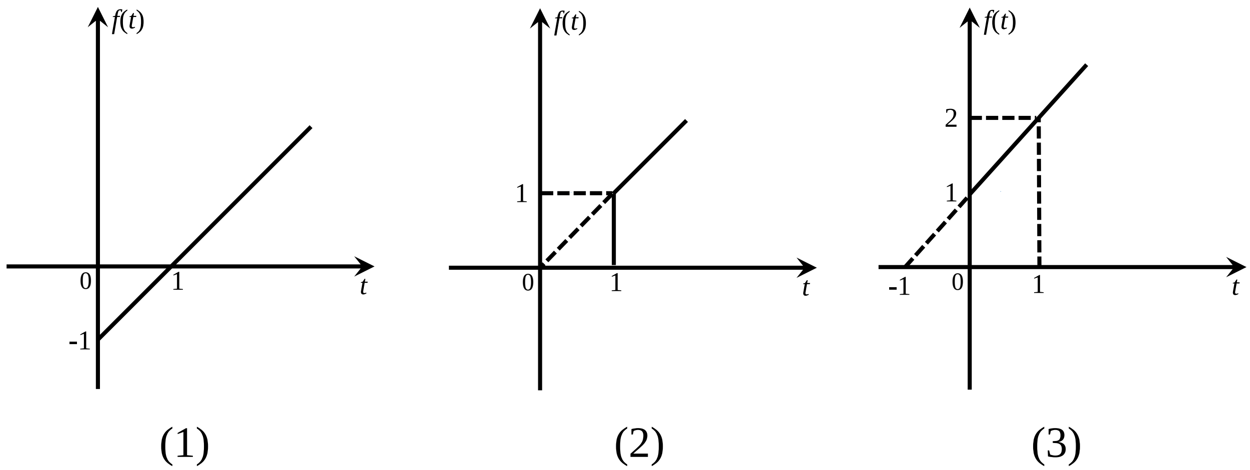

Figure 1: 第一题图

解：

(1)、

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} (t-1)e^{-st}dt \\
&= -\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} (t-1)de^{-st} \\
&= -\frac{1}{s}[(t-1)e^{-st}|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}d(t-1)] \\
&= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}
\end{aligned}
$$

(2)、

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{1}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\
&= \int_{1}^{\infty} te^{-st}dt \\
&= -\frac{1}{s}\int_{1}^{\infty} tde^{-st} \\
&= -\frac{1}{s}[te^{-st}|_{1}^{\infty} - \int_{1}^{\infty} e^{-st}dt] \\
&= \frac{1}{se^{s}} + \frac{1}{s^{2}e^{s}}
\end{aligned}
$$

(3)、

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} (t+1)e^{-st}dt \\
&= -\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} (t+1)de^{-st} \\
&= -\frac{1}{s}[(t+1)e^{-st}|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}d(t+1)] \\
&= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{2}}
\end{aligned}
$$

二. 求图 二所示信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变化 $F(s)$.

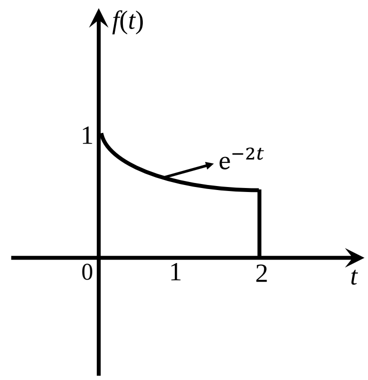

Figure 2: 第二题图

解:

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_{0}^{2} e^{-2t}e^{-st}dt \\
&= \frac{1-e^{-4-2s}}{s+2}
\end{aligned}
$$

三. 某系统函数 $H(s)=\frac{1}{s^2+3s+1}$，若输入 $x(t)=u(t)$，求出系统的零状态响应 $y(t)$。

解：

系统的零状态响应 $Y(s)=H(s)X(s)=\frac{1}{s(s^2+3s+1)}$

对 $Y(s)$ 作分式展开有

$$Y(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s-(-1.5+0.5\sqrt{5})}+\frac{k_3}{s-(-1.5-0.5\sqrt{5})}$$

$k_1=sY(s)|_{s=0}=1$

$k_2=(s-(-1.5+0.5\sqrt{5}))Y(s)|_{s=-1.5+0.5\sqrt{5}}=-\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$

$k_3=(s-(-1.5-0.5\sqrt{5}))Y(s)|_{s=-1.5-0.5\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}-5}{10}$

故

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{\frac{3\sqrt{5}+5}{10}}{s-(-1.5+0.5\sqrt{5})}+\frac{\frac{3\sqrt{5}-5}{10}}{s-(-1.5-0.5\sqrt{5})}$$

所以零状态响应

$$y(t)=u(t)-\frac{3\sqrt{5}+5}{10}e^{(-1.5+0.5\sqrt{5})t}u(t)+\frac{3\sqrt{5}-5}{10}e^{(-1.5-0.5\sqrt{5})t}u(t)$$

四. 已知某线性时不变系统的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=2x(t)$。

(1) 求该系统的系统函数，画出零极点图并判断该系统是否稳定。

(2) 求该系统的冲激响应.

解:

(1)、对微分方程两边作拉普拉斯变换，有

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+4[sY(s)-y(0^-)]+3Y(s)=2X(s)$$

求系统函数时，$y(0^-)=0, y'(0^-)=0$，故

$$(s^2+4s+3)Y(s)=2X(s)$$

$$\Downarrow$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2}{s^2+4s+3}$$

系统极点 $s_1=-1, s_2=-3$ 均位于 s 平面的左半部分，故系统稳定，零极点图如下

(2)、冲激响应 $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$

做部分分式分解

$$H(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}$$

所以

$$h(t)=e^{-t}u(t)-e^{-3t}u(t)$$

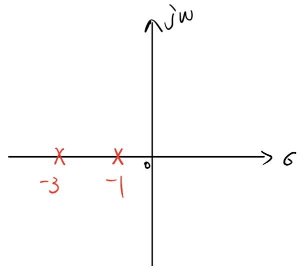

Figure 3: 零极点图

五. 求下列函数的拉普拉斯变换。

(1) $f(t)=\begin{cases}\sin(\omega t) & \text{当}\left(0<t<\frac{T}{2}\right)\\ 0 & t\text{为其他值}\end{cases}$

$T=\frac{2\pi}{\omega}$

(2) $f(t)=\sin(\omega t+\phi)$

解:

(1)、

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt\\&=\int_{0}^{\frac{T}{2}}sinwt\cdot e^{-st}dt\\&=-\frac{w^2}{s^2+w^2}(\frac{1}{w}e^{-st}coswt+\frac{s}{w^2}e^{-st}sinwt)|_0^{\frac{T}{2}}\\&=\frac{w}{s^2+w^2}(1+e^{-\frac{sT}{2}})\end{aligned}$$

(2)、$f(t)=sinwtcos\phi+coswtsin\phi$, 故

$$\begin{aligned}F(s)&=cos\phi\mathcal{L}[sinwt]+sin\phi\mathcal{L}[coswt]\\&=\frac{w\cdot\cos\phi+s\cdot\sin\phi}{s^2+w^2}\end{aligned}$$

六. 求下列函数的拉普拉斯变换。

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t-2)$

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)$

(3) $f(t)=\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t)$

(4) $f(t)=\sin(2t)\cdot u(t-1)$

(5) $f(t)=(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]$

解:

(1)、

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt\\&=\int_{2}^{\infty}e^{-t}e^{-st}dt\\&=\frac{e^{-2(s+1)}}{s+1},\sigma>-1\end{aligned}$$

(2)、

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt\\&=\int_{2}^{\infty}e^{-(t-2)}e^{-st}dt\\&=\frac{e^{-2s}}{s+1},\sigma>-1\end{aligned}$$

(3)、

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt\\&=\int_{0}^{\infty}e^{-(t-2)}e^{-st}dt\\&=\frac{e^{2}}{s+1},\sigma>-1\end{aligned}$$

(4)、

$$\begin{aligned}F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{1}^{\infty} sin(2t)e^{-st}dt \\ &= \frac{4}{4-s^2}(-\frac{1}{2}e^{-st}cos2t + \frac{s}{4}e^{-st}sin2t)|_1^{\infty} \\ &= \frac{2cos2 + s\cdot\sin 2}{s+4}e^{-s}\end{aligned}$$

(5)、

$$\begin{aligned}F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{1}^{2} (t-1)e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}(t-1)e^{-st}|_1^2 - \frac{1}{s^2}e^{-st}|_1^2 \\ &= -\frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-s}\end{aligned}$$

七. 求下列函数的拉普拉斯逆变换。

(1) $\frac{1}{s+1}$

(2) $\frac{4}{2s+3}$

(3) $\frac{4}{s(2s+3)}$

(4) $\frac{3}{(s+4)(s+2)}$

(5) $\frac{1}{s^2-3s+2}$

(6) $\frac{1}{(s^2+3)^2}$

解：

(1)、

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{-t}u(t)$$

(2)、$F(s) = 2\frac{1}{s+1.5}$，故

$$f(t) = 2e^{-1.5t}u(t)$$

(3)、作分式分解 $F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{2s+3}$，故

$k_1 = sF(s)|_{s=0} = \frac{4}{3}$

$k_2 = (2s+3)F(s)|_{s=-1.5} = -\frac{8}{3}$

即

$$F(s) = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s} - \frac{8}{3}\frac{1}{2s+3}$$

所以

$$f(t) = \frac{4}{3}u(t) - \frac{4}{3}e^{-1.5t}u(t)$$

(4)、作分式分解 $F(s) = \frac{k_1}{s+4} + \frac{k_2}{s+2}$，故

$k_1 = (s+4)F(s)|_{s=-4} = -1.5$

$k_2 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = 1.5$

即

$$F(s) = -1.5\frac{1}{s+4} + 1.5\frac{1}{s+2}$$

所以

$$f(t) = -1.5e^{-4t}u(t) + 1.5e^{-2t}u(t)$$

(5)、$F(s) = \frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$
作分式分解 $F(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$
所以

$$f(t) = -e^{t}u(t) + e^{2t}u(t)$$

(6)、考虑到 $\mathcal{L}[sin\sqrt{3}t] = \frac{\sqrt{3}}{s^2+3}$
故计算 $f(t) = tsin\sqrt{3}t$ 的 laplace 变换

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_{0^-}^{\infty} tsin\sqrt{3}t \cdot e^{-st}dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{0^-}^{\infty} te^{-st}dcos\sqrt{3}t \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}[te^{-st}cos\sqrt{3}t|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} cos\sqrt{3}td(te^{-st})] \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}cos\sqrt{3}tdt - \frac{s}{\sqrt{3}}\int_{0^-}^{\infty} te^{-st}cos\sqrt{3}tdt \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}[cos\sqrt{3}t] + \frac{s}{3}\int_{0^-}^{\infty} sin\sqrt{3}td(te^{-st}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}[cos\sqrt{3}t] + \frac{s}{3}\mathcal{L}[sin\sqrt{3}t] - \frac{s^2}{3}F(s)
\end{aligned}$$

故

$$F(s) = \frac{3}{3+s^2}(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{s}{s^2+3} + \frac{s}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{s^2+3}) = \frac{2\sqrt{3}s}{(s^2+3)^2}$$

由积分性质和线性性

$$\mathcal{L}[\frac{1}{2\sqrt{3}}\int f(t)dt] = \frac{1}{(s^2+3)^2}$$

所以最终求得的拉普拉斯逆变换为:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{3}}\int tsin\sqrt{3}tdt \\
=&\frac{1}{2\sqrt{3}}(-\frac{1}{\sqrt{3}}tcos\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\int cos\sqrt{3}tdt) \\
=&-\frac{t}{6}cos\sqrt{3}t+\frac{1}{6\sqrt{3}}sin\sqrt{3}t
\end{aligned}
$$

八. 离散系统的差分方程为 $y[n]-2y[n-1]=x[n]$, 激励 $x[n]=3^n u[n], y[0]=2$，求响应 $y[n]$。

解：

对差分方程两边做 Z 变换，有

$$Y(z)-2z^{-1}Y[z]-2y[-1]=X(z)$$

由差分方程 $y[0]-2y[-1]=x[0] \to y[-1]=0.5$
而 $X(z)=\sum_{i=0}^{\infty} 3^i z^{-i}=\frac{1}{1-3z^{-1}}$ 所以差分方程为

$$(1-2z^{-1})Y(z)-1=\frac{1}{1-3z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z)=\frac{2-3z^{-1}}{(1-3z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

做部分分式分解，有 $Y(z)=\frac{3}{1-3z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}$
故

$$y[n]=3^{n+1}u[n]-2^n u[n]$$

九. 已知离散时间单位阶跃信号 $u[n]$ 的 z 变换为 $\frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$，利用 z 变换的性质求信号 $n^2u[n]$ 的 z 变换。

解：

先使用一次 z 域微分特性

$$\mathcal{Z}[nu[n]] = X_1(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

再使用一次 z 域微分特性

$$\mathcal{Z}[n \cdot nu[n]] = -z\frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

十. 求下列 $X(z)$ 的逆变换 $x[n]$。

(1) $X(z)=\frac{10}{(1-0.5z^{-1})(1-0.25z^{-1})},(|z|>0.5)$

(2) $X(z)=\frac{10z^2}{(z-1)(z+1)},(|z|>1)$

解：

(1)、作部分分式分解 $X(z)=\frac{20}{1-0.5z^{-1}}-\frac{10}{1-0.25z^{-1}}$

故

$$x[n]=20\cdot(0.5)^n u[n]-10\cdot(0.25)^n u[n]$$

(2)、$X(z)=\frac{10}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}$

做部分分式分解 $X(z)=\frac{5}{1+z^{-1}}+\frac{5}{1-z^{-1}}$

故

$$x[n]=5u[n]+5(-1)^n u[n]$$

十一. 用单边 z 变换解下列差分方程。

(1) $y[n+2]+y[n+1]+y[n]=u[n], y[0)]=1, y[1]=2$

(2) $y[n]+0.1y[n-1]-0.02y[n-2]=10u[n], y[-1]=4, y[-2]=6$

(3) $y[n]=-5y[n-1]+nu[n], y[-1]=0$

解:

(1)、对差分方程两边做 Z 变换

$$(z^2Y(z)-z^2y[0]-zy[1])+(zY(z)-zy[0])+Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z)=\frac{-2z^{-2}+2z^{-1}+1}{(1-z^{-1})(z^{-2}+z^{-1}+1)}$$

做部分分式分解

$$Y(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{7}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}}{z^{-2}+z^{-1}+1}$$

其中，第 2 项可以改写成

$$\frac{\frac{2}{3}(1-z^{-1}cos\frac{2\pi}{3})}{z^{-2}-2z^{-1}cos(\frac{2\pi}{3})+1}+\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}z^{-1}sin\frac{2\pi}{3}}{z^{-2}-2z^{-1}cos(\frac{2\pi}{3})+1}$$

再做 Z 反变换，得到

$$y[n]=\frac{1}{3}u[n]+\frac{2}{3}cos(\frac{2\pi}{3}n)u[n]+\frac{4}{\sqrt{3}}sin(\frac{2\pi}{3}n)u[n]$$

(2)、对差分方程两边做 Z 变换

$$Y(z)+0.1(z^{-1}Y(z)+y[-1])-0.02(z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2])=\frac{10}{1-z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z)=\frac{4z^{-2}-18z^{-1}-486}{(1-z^{-1})(z^{-1}+5)(z^{-1}-10)}$$

做部分分式分解

$$Y(z) = 9.26 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + 0.66 \cdot \frac{1}{1+0.2z^{-1}} - 0.2 \cdot \frac{1}{1-0.1z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$y[n] = 9.26u[n] + 0.66(-0.2)^n u[n] - 0.2(0.1)^n u[n]$$

(3)、对差分方程两边做 Z 变换 $Y(z) = -5(z^{-1}Y(z) + y[-1]) + \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
由差分方程 $y[0] = -5y[-1] \to y[0] = 0$
故

$$Y(z) + 5z^{-1}Y(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{(1+5z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

做部分分式分解

$$Y(z) = -\frac{5}{36} \cdot \frac{1}{1+5z^{-1}} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

$$\Downarrow$$

$$y[n] = -\frac{5}{36} \cdot (-5)^n u[n] - \frac{1}{36} \cdot u[n] + \frac{1}{6} \cdot (n+1)u[n]$$

$$\Downarrow$$

$$y[n] = \frac{5}{36} \cdot u[n] + \frac{n}{6}u[n] - \frac{5}{36} \cdot (-5)^n u[n]$$

十二.（选做）你对这门课程的建议。

解：

书面作业量有点少，可以稍微多加一些量便于课后巩固。

编程题很有启发性，挑战性很强，希望下一届可以继续保持出题的水准 (我认为难度还可以再往上提一提)，进一步考察同学们对傅里叶变换，f-principle 等知识的理解与应用。