Optimization Methods **Fall 2020**

Homework 1

Instructor: Lijun Zhang Name: 左之睿, StudentId: 191300087

Problem 1:

a). ①. 对于所有 $z\in R^n$，取 $x=(0,0,\ldots0)$时，$z'x=0$，由于对偶范数取的是上界，因而 z 的对偶范数必然≥0，故满足非负性。

②. $z=0$ 时 $f(z)=0$ 显然成立，$z\neq0$ 时，不妨设第一个分量 $z1\neq0$,此时取 $x=(a/z1,0,\ldots),(a>0)$,$z'x=a$，由于对偶范数取的是上界,故值必然$\geq a>0$，所以 $f(x) = 0$ only if $x = 0$ 得证

③. $\sup\{tz'x \mid \|x\|\leq1\}=|t|*\sup\{z'x \mid \|x\|\leq1\}$

④. $\sup\{(a+b)'x \mid \|x\|\leq1\}=\sup\{a'x+b'x \mid \|x\|\leq1\}$,由于 $a'x,b'x$ 未必可以同时取到上界，故原式$<=\sup\{a'x \mid \|x\|\leq1\}+\sup\{b'x \mid \|x\|\leq1\}$

综上得证，对偶范数是范数

b). 取 $x=z/\|z\|$，此时 $z'x=\|z\|$，由 Cauchy-Schwarz inequality, $z'x\leq\|z\|*\|x\|$，故 $\sup\{z'x \mid \|x\|\leq1\}=\|z\|$,即欧拉范数的对偶范数是欧拉范数

Problem 2:

a). 必要性：由于凸集与凸集的交集仍然是凸的，故凸集∩一条线仍然是凸的

充分性：若 S 与任意一条线交集都是凸的，则对于任意两点 x，y∈S，S 与通过 x，y 的直线的交集是凸的，即 $\theta x1 + (1-\theta)x2 \in S$ for all, $x1,x2 \in S,0 \leq \theta \leq 1$，故 S 是凸集。

b).

1) Yes
2) Yes
3) No
4) Yes
5) No

Problem 3:

1) 某个集合 A is convex 当且仅当他与任意一条线的交集$\{x^*+tv \mid t\in R\}$是 convex 的，
   x^*是一个向量，记$(x^*+tv)'A(x^*+tv)+b'(x^*+tv)+c=\alpha t^2+\beta t+\gamma$，其中 $\alpha=v'Av$，$\beta=b'v+2x^{*\prime}Av$，$\gamma=c+b'x^*+x^{*\prime}Ax^*$
   则 C 与 x^*+tv 的交集为$\{x^*+tv \mid \alpha t^2+\beta t+\gamma\leq0\}$，当 $\alpha\geq0$ 时为 convex，即 for any v，$v'Av\geq0$，即 $A \succeq 0$，得证

2)True。
   记 $H=\{x \mid g'x+h=0\}$，α，β，γ 同 1)中，并设 $\delta=g'v$，$\varepsilon=g'x^*+h$，不妨假设 $x^*\in H$，即 $\varepsilon=0$，
   此时 $C\cap H=\{x^*+tv \mid \alpha t^2+\beta t+\gamma\leq0，\delta t=0\}$。
   若 $\delta\neq0$，则交集为$\{x^*\}$,若 $\gamma\leq0$ 或者他是空集。其他情况下他是 convex 的。
   若 $\delta=0$，集合变为$\{x^*+tv \mid \alpha t^2+\beta t+\gamma\leq0\}$，在 $\alpha\geq0$ 时是 convex 的。因此 $C\cap H$ 是 convex 的当 $g'v=0$ 即 $v'Av\geq0$
   若存在 λ 满足 $A+\lambda gg' \succeq 0$，上式成立，因为 $v'Av=v'(A+\lambda gg')v\geq0$ 对任意 v 满足 $g'v=0$

Problem 4:代入 $\phi(x)$，$\psi(x)$，整理可得 $\Gamma(x)=((EA+fc')x+(Eb+fd))/((g'A+hc')x+(g'b+hd))$

显然，$\Gamma(x)$是 linear-fractional function

而给出的矩阵乘积也分别对应 $\Gamma(x)$各个系数

Problem 5:

1) 由于 K*是所有 $x\in K$ 对应的半空间之交集，所以 K*是 convex 的。

而对于 $y\in K^*$，显然有 $cy\in K^*$，故 K*是 convex cone

2) $K1^*=\{a \mid x'a\geq 0,\ x\in K1\}$
   $K2^*=\{b \mid x'b\geq 0,\ x\in K2\}$
   K1 包含于 K2 $\rightarrow K2^*=\{b \mid x'b\geq 0,\ x\in K1 \cup (K2/K1)\}$
   故 for all $b \in K2^*$，b 满足 $x'b\geq 0$，$x\in K1$，即 $b\in K1^*$
   故 K2*包含于 K1*，证毕