NANJING UNIVERSITY

图论与树

刘释然

章节概念

- **1 图的基本概念**

  图论导引、图的连通性、欧拉图与哈密顿图、带权图与最短路、有向图与二部图的匹配
- **2 平面图**

  平面图与欧拉公式
- **3 图的着色**

  顶点着色、平面图的着色、边的着色
- **4 树**

  树的性质、生成树与割集、树的计数、有根树与二叉树、最优树
- **5 网络流**

  连通度与块、网络最大流、图与二分图的匹配、独立集和覆盖、Petri网

图的术语

- 定义　一个图是一个三元组$<V(G),E(G),\varphi_G>$,简记为$G=<V,E>$，其中：

1. $V=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}$是一个非空集合,$v_i(i=1,2,3,\ldots,n)$称为结点,简称点,V为结点集;

2. $E=\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_m\}$是一个有限集，$e_i(i=1,2,3,\ldots,m)$称为边,E为边集，E中的每个元素都有V中的结点对（有序偶或无序偶）与之对应。

图的术语

3. 若边e与结点无序偶(u，v)相对应，则称边e为无向边,记为e＝(u，v)，这时称u，v是边e的两个端点；
4. 若边e与结点有序偶<u，v>相对应，则称边e为有向边(或弧)，记为e＝<u，v>，这时称u是边e的始点(或弧尾)，v是边e的终点(或弧头)，统称为e的端点；
5. 在一个图中，关联结点v_i和v_j的边e，无论是有向的还是无向的，均称边e与结点v_i和v_j相关联，而v_i和v_j称为邻接点，否则称为不邻接的；
6. 关联于同一个结点的两条边称为邻接边；
7. 图中关联同一个结点的边称为自回路(或环)；
8. 图中不与任何结点相邻接的结点称为孤立结点；
9. 仅由孤立结点组成的图称为零图；
10. 仅含一个结点的零图称为平凡图；

图的术语

11. 含有n个结点、m条边的图称为(n，m)图；
12. 每条边都是无向边的图称为无向图；
13. 每条边都是有向边的图称为有向图；
14. 有些边是无向边，而另一些是有向边的图称为混合图。
15. 在有向图中，两个结点间(包括结点自身间)若有同始点和同终点的几条边，则这几条边称为平行边，在无向图中，两个结点间(包括结点自身间)若有几条边，则这几条边称为平行边，两结点v_i，v_j间相互平行的边的条数称为边(v_i，v_j)或<v_i，v_j>的重数；
16. 含有平行边的图称为多重图。非多重图称为线图；无自回路的线图称为简单图。
17. 赋权图G是一个三元组<V,E,g>或四元组<V,E,f,g>，其中，V是结点集合，E是边的集合，g是从E到非负实数集合的函数

度数

- 定义 在无向图G＝<V，E>中，与结点v(v∈V)关联的边的条数，称为该结点的度数，记为**deg(v)**；
- 定义 在有向图G＝<V，E>中，以结点v(v∈V)为始点引出的边的条数，称为该结点的引出度数,简称出度,记为**$deg^+(v)$**；以结点v(v∈V)为终点引入的边的条数，称为该结点的引入度数，简称入度,记为**$deg^-(v)$**；而结点的出度和入度之和称为该结点的度数，记为deg(v)，即
  - $deg(v)＝deg^+(v)+deg^-(v)$；
- $\delta(G)$最小度，$\Delta(G)$最大度
- 定义 在图G＝<V，E>中，对任意结点v∈V，若度数deg(v)为奇数，则称此结点为奇度数结点，若度数deg(v)为偶数，则称此结点为偶度数结点。

定理

- [定理1 (握手定理Handshaking)] 设无向图G=<V, E>有n个顶点，m条边，则G中所有顶点的度之和等于m的两倍。即

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m.$$

- 证明思路：利用数学归纳法。
- [定理2] 无向图中度为奇数的顶点个数恰有偶数个。
- 证明思路：将图中顶点的度分类，再利用定理1。
- [定理3] 设有向图D=<V, E>有n个顶点，m条边，则G中所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和，也等于m。证明思路：利用数学归纳法。

$$\sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m.$$

图论导引（Problem 18A B）

- Problem set 18 A Problem 4

设无向图 G 有 $\mathcal{V}$ 个点，$\mathcal{E}$ 条边，$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的点的度，证明 $\delta(G) \leq \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \leq \Delta(G)$。（其中 $\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 称为图的**顶点平均度**）

- Problem set 18 A Problem 5

令 G 是至少有两个顶点的无向图，证明或反驳：

1. 删除 G 中一个度最大的点和相关的边，不会增加图的顶点平均度；
2. 删除 G 中一个度最小的点和相关的边，不会减少图的顶点平均度。

图论导引（Problem 18A B）

- Problem set 18 A Problem 5

1. 删除 G 中一个度最大的点和相关的边，不会增加图的顶点平均度；

证明：1. 记删点得到的新图 $G' = (V', E')$，由题意有 $|V'| = \mathcal{V} - 1, |E'| = \mathcal{E} - \Delta(G)$。

由 5 知 $\Delta(G) \geq \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$，于是

$$\frac{2|E'|}{|V'|} = \frac{2\left(\mathcal{E} - \Delta(G)\right)}{\mathcal{V} - 1} \leq \frac{2\left(\mathcal{E} - \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}\right)}{\mathcal{V} - 1} = \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \cdot \frac{\mathcal{V} - 2}{\mathcal{V} - 1} < \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$$

题设成立。

图论导引（Problem 18A B）

- Problem set 18 A Problem 5

2. 删除 G 中一个度最小的点和相关的边，不会减少图的顶点平均度。

反驳： 2. 考虑图 K_2，删除任意一个点后顶点平均度都会从 1 减少到 0，所以题设不成立。

$$\mathbf{A}\quad \frac{2|E'|}{|V'|} = \frac{2\big(\varepsilon-\delta(G)\big)}{\mathcal{V}-1} \geq \frac{2\left(\varepsilon-\frac{2\varepsilon}{\mathcal{V}}\right)}{\mathcal{V}-1} = \frac{2\varepsilon}{\mathcal{V}}\,\mathbf{C}\cdot\frac{\mathcal{V}-2}{\mathcal{V}-1} \leq \frac{2\varepsilon}{\mathcal{V}}\quad \mathbf{B}$$

$$\frac{2|E'|}{|V'|}(?>|?<)\frac{2\varepsilon}{\mathcal{V}}$$

A > C

B > C

一些图的概念

- (1) **无向完全图**K_n(Complete Graphs)
- (2) **有向完全图**
- (3) **零图**：$E=\varnothing$.
- (4) **平凡图**：$E=\varnothing$且$|V|=1$.
- (5) **正则图**：若图G＝<V, E>中每个顶点的度均为n，称此图G是n-正则图(n-regular graph)。
- (6) **子图**：当V'=V时，称G'为G的生成子图。当E'≠E，或V'≠V时，称G'为G的真子图。
- (5) **补图**：设G=<V, E>是n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有能使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G相对于完全图K_n的补图，简称G的**补图**，记为。{图G与其补图G'具有相同的顶点集，其边集不相交，构成相应完全图边集的划分。}

图同构

- 定义 设有图$G=<V,E>$和图$G_1=<V_1,E_1>$,如果存在双射函数$g:V\rightarrow V_1$,使得对于任意的边$e=(v_i,v_j)\in E$(或$<v_i,v_j>\in E$)当且仅当$e_1=(g(v_i),g(v_j))\in E_1$(或$<g(v_i),g(v_j)>\in E_1$) 则称G和$G_1$同构，记为$G\cong G_1$。

- 同构的充要条件：两个图的结点和边分别存在一一对应，且保持关联关系。

图论导引（Problem 18A B）

- Problem set 18 B

Problem 4

若简单图 G 与 $\bar{G}$ 是同构的，则 G 称为**自补图**

试证明：若正则图 G 是自补图，则图 G 的顶点数 $\mathcal{V}$ 满足 $\mathcal{V} \equiv 1\,(mod4)$。

Problem 5

若简单图 G 与 $\bar{\mathrm{G}}$ 是同构的，则 G 称为自补图。

1. 4 阶和 5 阶自补图各有几个非同构图?
2. 为什么没有 3 阶和 6 阶的自补图?

图论导引（Problem 18A B）

- Problem set 18 B

Problem 4

若简单图 G 与 $\bar{G}$ 是同构的，则 G 称为**自补图**

试证明：若正则图 G 是自补图，则图 G 的顶点数 $\mathcal{V}$ 满足 $\mathcal{V} \equiv 1\,(mod4)$。

若 G 是自补图，则 $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{V}(\mathcal{V}-1)}{4}$，即 $4|\mathcal{V}$ 或 $4|(\mathcal{V}-1)$。

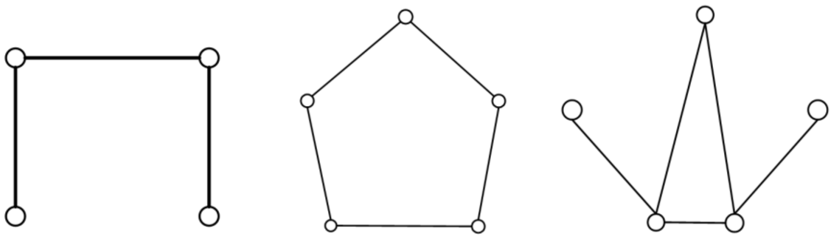
又 G 是正则自补图，则 $\forall v \in V(G).\deg(V) = n-1-\deg(V) = \frac{n-1}{2}$，即 $2|(\mathcal{V}-1)$。

综上 $4|(\mathcal{V}-1)$。

图论导引（Problem 18A B）

- Problem set 18 B Problem 5

(1)在同构意义下，4阶自补图只有一个(a)，5阶自补图有两个(b)和(c)



(a) (b) (c)

Problem 4

若简单图 G 与 $\bar{G}$ 是同构的，则 G 称为**自补图**

试证明：若正则图 G 是自补图，则图 G 的顶点数 ν 满足 $\nu \equiv 1\,(mod 4)$

(2)要回答为什么没有3阶和6阶的自补图，只需证明如下的命题：

若G为n阶自补图，则$n = 4k(k \geq 1)$或$n = 4k + 1(k \geq 0)$

证明：若$G \cong \bar{G}$，则G的边数m_1与$\bar{G}$的边数m_2相等，即$m_1 = m_2$，记它们为m。

而$m_1 + m_2 = 2m$应为n阶完全图K_n的边数$\frac{n(n-1)}{2}$，即$2m = \frac{n(n-1)}{2}$，也即$4m=n(n-1)$。

由于n与n-1是互素的，所以，必有$n = 4k(k \geq 1)$或$n = 4k + 1(k \geq 0)$.

3与6均不能表示成4k或4k+1的形式，故不会有3阶或6阶的自补图。

图的连通性

- 简单通路：通路中没有重复的边。
- 基本通路：通路中没有重复的点。
- 简单回路和基本回路。
- 定理：一个有向（n,m）图中任何基本通路长度≤n-1。任何基本回路的长度≤n。
- 可达性与连通性
- 连通分支
- V’点割集、E’边割集、**κ(G)点连通度**、**λ(G)边连通度**

图的连通性（Problem 19）

Problem 1

1. G 是 n 阶简单图并且 $\delta(G) \ge n-2$, 试证明 $\kappa(G) = \delta(G)$;

2. 试找出一个图 G，满足：$\delta(G) = n-3$，而 $\kappa(G) < \delta(G)$

1. **δ=|V(G)|-1，G为完全图，κ(G)=|V(G)|-1=δ；**
2. **δ=|V(G)|-2，假设κ(G)=|V(G)|-3，即删去|V(G)|-3个顶点后G不再连通，则有两种情况：**

(A) ○-----○　○　或　(B) ○　○　○

无论哪一种情况，都存在v∈G，v与G中其他的两个顶点不相邻，因此有，d(v) ≤ |V(G)|-3 ＜ |V(G)|-2，与δ=|V(G)|-2矛盾。

（这句话详细解释：①首先现在假设条件是，删去|V(G)|-3个顶点后G不再连通；②无论这|V(G)|-3个顶点与剩下的存在不连通的3个顶点怎么连接，这剩下的存在不连通的3个顶点之间的连接情况都只能是(A)与(B)中这两种情况，因为κ(G)是G的点割集，由点割集的定义可得。因此，由①②得，总是存在v∈G，v与G中其他的两个顶点不相邻；③然后再考虑这样一种情况，G是完全图，那么G上的最大度d(v)=n-1，然而此时不是完全图，而是存在v与G中其他的两个顶点不相邻。因此，由①②③得，d(v) ≤ |V(G)|-3）

∴κ(G) ＞ |V(G)|-3

由κ(G) ≤ λ(G) ≤ δ(G) （该定理不需要证，直接使用），**κ(G) ≤ |V(G)|-2 = δ**

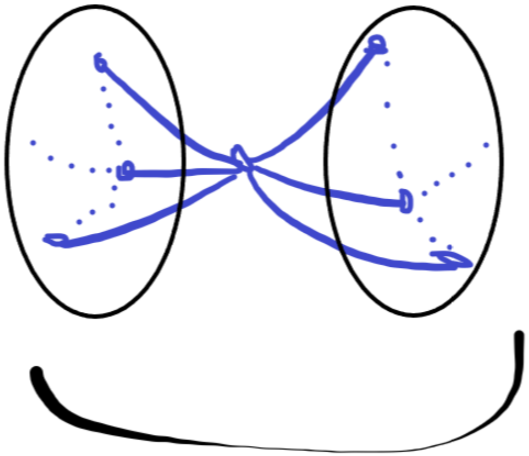
∴κ(G) = |V(G)|-2 = δ

图的连通性（Problem 19）

Problem 3

1. 证明或反驳：存在一个函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 使得对于所有 $k\in\mathbf{N}$，最小度至少为 $f(k)$ 的图一定是 k-连通的。
2. 证明或反驳：存在一个函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 使得对于所有 $k\in\mathbf{N}$，边连通度至少为 $f(k)$ 的图一定是 k-连通的。

1. 反驳。考虑一个非连通图，每个连通分支的最小度都可能任意大，因此对于 $k=1$ 就无法找到满足要求的 $f(k)$，即不存在这样的函数 f。
2. 反驳。考虑两个完全图通过一个割点相连的情况，该图可以有任意大的边连通度，但点连通度为 1。因此对于 $k=2$ 就无法找到满足要求的 $f(k)$，即不存在这样的函数 f。



欧拉图

- 定义：图G的回路，若它通过G中的每条边一次，这样的回路称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图。
- 定义欧拉通路：通过图G中每条边一次的通路（非回路）称为欧拉通路。
- 黑书上 判定欧拉通路/欧拉图的**两个定理**。

二分图

- 定义：设无向图$G=<V,E>$有两个V的子集V_1、V_2，两个相互分离，且满足$V_1 \cup V_2=V$，图G的每一边e均有$e=(v_i,v_j)$,其中$v_i \in V_1$,$v_j \in V_2$，称G为二分图/二部图。
- 定理：图G是两分图的充要条件是G的所有回路长度均为偶数。

欧拉图（Problem 20 A）

Problem 1

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有

1. 欧拉回路?
2. 欧拉通路?

1. 欧拉回路：m 和 n 均为偶数
2. 欧拉通路：
   - m 和 n 均为偶数;
   - m 与 n 中一个为奇数，另一个为 2;
   - m 和 n 均为 1。

Problem2

设连通图G有k个奇数度的结点，证明在图G中至少要添加$\frac{k}{2}$条边才能使其成为欧拉图。

答案：

由黑书550页定理2知：在任何图中，度数为奇数的结点必是偶数个，则k是偶数。
又根据黑书588页定理1的推论，图G是欧拉图的充要条件是图G中不含奇数度结点。
因此，只要在每对奇数度结点间各加一条边，使图G的所有结点的度数变为偶数，成为欧拉图。故最少要加$\frac{k}{2}$条边才能使其成为欧拉图。

欧拉图（Problem 20 A）

Problem 3

若 G 是欧拉图，证明或反驳：

[1)]当 G 的顶点数是奇数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中存在欧拉通路。(2)当 G 的顶点数是偶数时，若补图 $\bar{G}$ 是连通的，则 $\bar{G}$ 中存在欧拉通路。

2. 反驳：考虑 C_{2k}，其补图每个点的度是 $2k-3$，对于 $k>1$，显然不存在欧拉通路。

欧拉图（Problem 20 A）

Problem 4

给定简单图 G（$|G| \geq 3$），定义线图 $L(G)$ 如下:

- 对 G 中的每条边，$L(G)$ 中恰好有一个顶点与之对应;
- $L(G)$ 中任意两点相邻当且仅当它们在 G 中对应的两条边相邻（即有一个公共顶点）。

证明若 G 是简单, 连通的 r-正则图, 则 $L(G)$ 是欧拉图。然后举例说明反之不一定成立。

先证明 $L(G)$ 是连通的：对于任意的 e_1, e_2，分别取它们的端点 u_1, u_2，由 G 的连通性知存在 $Path(u_1, u_2)$，因此存在路 $e_1, Path(u_1, u_2), e_2$，其上边都是相邻的，因此 $L(G)$ 中 e_1, e_2 是连通的。

举例说明反之不一定成立：$L(K_{1,3}) = C_3$，$K_{1,3}$ 不是正则图，但 C_3 是欧拉图。

哈密顿图

- 定义：若图G的一个回路通过G中每个点一次，这样的回路称为哈密尔顿回路，有这种回路的图称为哈密尔顿图。
- 显然欧拉回路是简单回路，无重复边；哈密尔顿图是基本回路，无重复点。
- 注意：关于如何判断哈密尔顿通路与回路，至今尚未找到它的充要条件，只有一些充分条件和必要条件。
- 必要条件： $p(G-V_1) \le |V_1|$
- 充分条件：黑书上 **狄拉克定理**和**欧尔定理**。
- 哈密顿通路充分条件：**欧尔定理的推论。**

哈密顿图（Problem 20 B）

- Problem 2

设n (n≥3) 阶无向简单图G有m条边，证明：若 $m \geq \binom{n-1}{2} + 2$ ，则G是哈密顿图。
（Ore定理作为已知条件：设G是n (n≥3) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点u,v，均有***d*(u)+*d*(v)≥n**，则G为哈密顿图）

证明：利用反证法证明满足充分条件。

假设存在两点u,v，使得 **d(u)+d(v)≤n-1**

则从图G中擦去顶点u,v，及其与它们关联的边后，考察剩下的n-2个顶点的图的边数**m’**。

若u,v不相邻，则 **m’≥m-(n-1)=(n-2)(n-3)/2+1**

若u,v相邻，则 **m’≥m-(n-1-1)=(n-2)(n-3)/2+2**

这与剩下的图是简单无向图矛盾。（因为，对于一个有(n-2)个顶点的无向完全图来说，共有$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$条边）

哈密顿图（Problem 20 B）

Problem 3

证明：每当 n 是正整数时，就存在 n 阶格雷码，或者等价地证明：$n > 1$ 的 n 维立方体 (n-cube)Q，总是具有哈密顿回路。[提示：用数学归纳法，证明如何从 $n-1$ 阶格雷码产生 n 阶格雷码。]

证明：

n-1阶格雷码：$a_1, a_2, \ldots, a_{2^{n-1}}$

n阶格雷码：$0a_1, 0a_2, \ldots, 0a_{2^{n-1}}; 1a_{2^{n-1}}, 1a_{2^{n-2}} \ldots, 1a_1$

2阶:00 01 11 10

3阶:000 001 011 010; 110 111 101 100

4阶:0000 0001 0011 0010 0110 0111 0101 0100; 1100 1101 1111 1110 1010 1011 1001 1000

树的概念

- **树：连通**而**不含回路**的**无向**图称为无向树，简称树，记作 *T*。
- **森林：** 连通分支数大于等于2，且每个连通分支均是树的非连通无向图。
- **平凡树：** 平凡图为平凡树
- **树叶:** 树中度数为1的顶点
- **分支点:** 树中度数≥2的顶点

树的性质

- **设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向树，则下面各命题是等价的：**
- (1) G连通而不含回路；
- (2) 每对顶点之间具有**唯一一条初级通路**
- (3) $\boldsymbol{n = m+1}$
- (4) 若在G中任意两个不相邻的顶点之间增加一条边，就形成**唯一一条初级回路**。
- (5) 连通且**每条边都是桥**
- (6) 连通但删除任何一条边后就不连通

根树

定义 把根树看作一棵家族树:

(1) 若顶点 a 邻接到顶点 b, 则称 b 是 a 的儿子, a 是 b 的父亲;

(2) 若b和c为同一个顶点的儿子, 则称b和c是兄弟;

(3) 若$a\neq b$且a可达b, 则称a是b的祖先, b是a的后代.

(4)设v为根树的一个顶点且不是树根, 称v及其所有后代的导出子图为以v为根的根子树.

根树

根树的画法: 树根放上方, 省去所有有向边上的箭头

如右图所示

*a*是树根

*b,e,f,h,i*是树叶

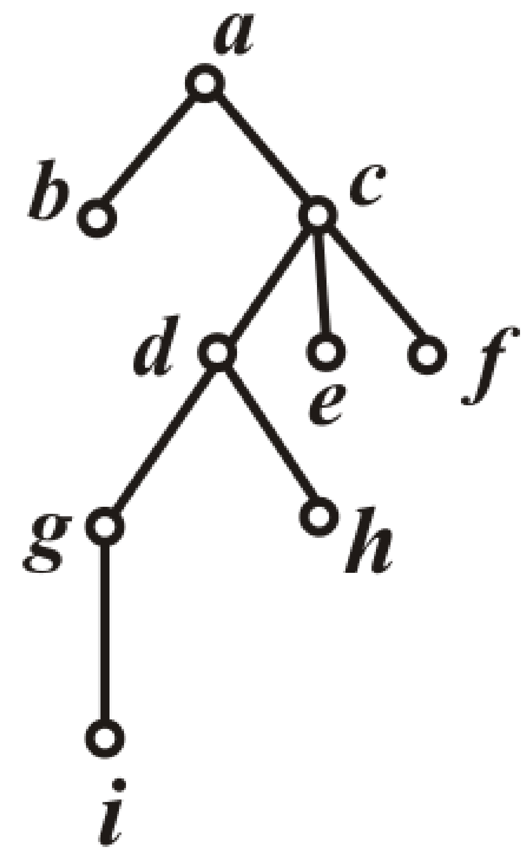
*c,d,g*是内点

*a,c,d,g*是分支点

*a*为0层;1层有*b,c*; 2层有*d,e,f*;

3层有*g,h*; 4层有*i*.

树高为4



根树的分类

- **有序树**: 每一层的结点均有序
- ***r*元树**:根树的每个分支点至多有*r*个儿子
- ***r*元正则树**: 根树的每个分支点恰有*r*个儿子
- ***r*元完全正则树**: 所有树叶层数相同都等于树高的*r*元
- 正则树
- ***r*元有序树**: 有序的*r*元树
- ***r*元正则有序树**: 有序的*r*元正则树
- ***r*元完全正则有序树**: 有序的*r*元完全正则树

有向树的概念

- 有向树: 基图为无向树的有向图
- 根树: 有一个顶点入度为0, 其余的入度均为1的
- 非平凡的有向树
- 树根: 有向树中入度为0的顶点
- 树叶: 有向树中入度为1, 出度为0的顶点
- 内点: 有向树中入度为1, 出度大于0的顶点
- 分支点: 树根与内点的总称(出度大于等于1）
- 顶点v的层数: 从树根到*v*的通路长度，记作$l(v)$
- 树高: 有向树中顶点的最大层数，记作$h(T)$

最小生成树

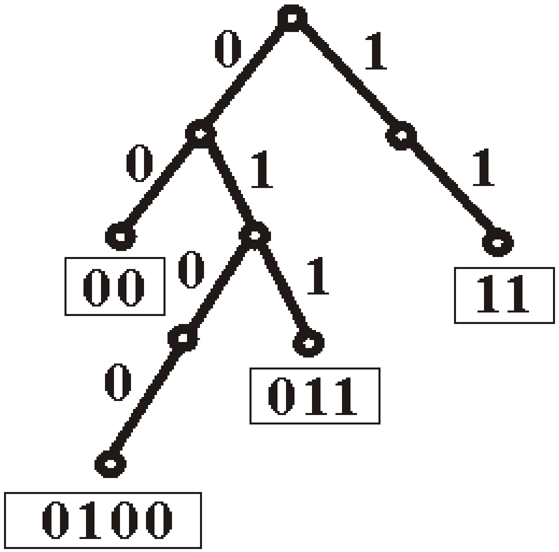
- **生成树：** 若图G为无向连通图. T为G的生成子图，且T为树，称T为G的**生成树**
- **带权图的最小生成树：** 设$G = < V,E,W >$是带权的连通简单图，T中**所有枝的权之和**称为T的**权**，记作：$W(T)$。具有**权最小**的生成树称为最小生成树。
- Prim算法，Kruskal算法

最优二元树

定义 设2元树T有t片树叶$v_1, v_2, \ldots, v_t$, 树叶的权分别为$w_1, w_2, \ldots, w_t$, 称$W(t)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为T的权, 记作$W(T)$, 其中$l(v_i)$是v_i的层数. 在所有有t片树叶, 带权$w_1, w_2, \ldots, w_t$ 的 2元树中, 权最小的2元树称为最优2元树.

Huffman编码

- 设$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n$是长度为$n$的符号串
- α的前缀: $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$, k=1,2,…,n-1
- 前缀码: $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$, 其中$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$为非空字符
- 串, 且任何两个互不为前缀
- 2元前缀码: 只出现两个符号(如0与1)的前缀码
- 如 {0,10,110, 1111}, {10,01,001,110}是2元前缀码
- {0,10,010, 1010} 不是2元前缀码
- 最优2进制编码：使信息传递的2进制数最短



树的遍历

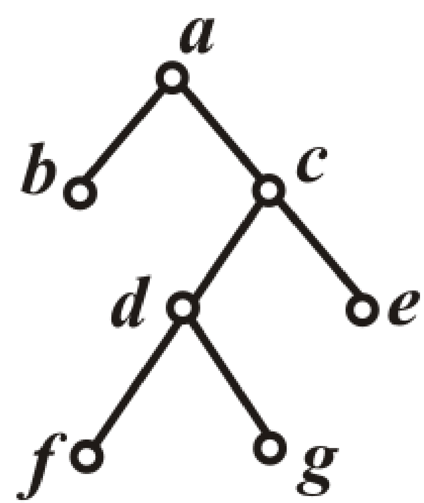
行遍(周游)根树*T*：对*T* 的每个顶点访问且仅访问一次.

行遍2元有序正则树的方式:

① 中序行遍法: 左子树、根、右子树

② 前序行遍法: 根、左子树、右子树

③ 后序行遍法: 左子树、右子树、根



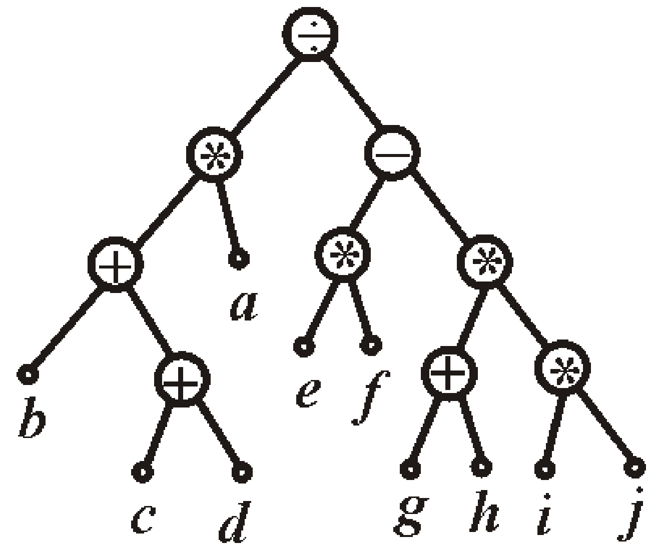
例如, 对图所示根树按中序、前序、后序行遍法访问结果分别为:

b a (f d g) c e　　*a b (c (d f g) e)*　　*b ((f g d) e c) a*

带下划线的是(子)树根, 一对括号内是一棵子树

遍历应用

- 应用：算术式的波兰符号法与逆波兰符号法
- 用2元有序正则树表示算式：例如，右图表示算式 $((b+(c+d))*a)\div((e*f)-(g+h)*(i*j))$



- 波兰符号法(前缀符号法)：按*前序*法遍历算式树，其结果不加括号.结果为$\div * + b + c\,d\,a - * e\,f * + g\,h * i\,j$
- 逆波兰符号法(后缀符号法)：按*后序*法遍历，规定每个运算符与前面紧邻两数运算.结果为$b\,c\,d + + a * e\,f * g\,h + i\,j * * - \div$

树与有根树（Problem 21）

- Problem 4

标记树是其中每个顶点都指定了标记的树。当在两个标记树之间存在保持顶点标记的同构时，就称这两个标记树是同构的。 用集合 3（即 {0,1,2}）里不同的数来标记三个顶点的、非同构的标记树有多少种？用集合 4 里不同的数来标记四个顶点的、非同构的标记树有多少种？

解：对于n=3，只需要考虑一棵树，即长度为2的简单路径。对于放在路径中间的标签，有三种选择，一旦作出选择，标签树就被确定为同构。因此，有3个顶点时有3个标记树。

对于n=4，树可能有两个结构。如果这是一条长度为3的简单路径，那么有12个不同的标记树；这是从整数1到4的排列有P(4,4)=4! =24个得到的。但是一个排列和它的逆序会导致相同的标记树（从左a,b,c,d和从右a,b,c,d是一样的）。如果树的结构是K1,3，那么唯一的选择是把哪个标签放在与其他三个顶点相邻的顶点上，因此有4个这样的树。因此，对于4个顶点，总共有16（12+4）个标记树。

事实上，对于所有n≥2，具有n个顶点的标记树的数目都是n^{n-2}，这是一个定理。

Problem 5

一个每个内点的孩子都恰好是 m 个的树 T 有 81 个树叶并且高度为 4。

1. 给出 m 的上界和下界。
2. 若 T 还是平衡的，则 m 是多少?

1. 上界：$\frac{81-1}{4}+1=21$；下界：$e^{\frac{\ln 81}{4}}=3$。

2. $m=3$，由 $\lceil \log_m l \rceil = h$。

黑书642页26题：

一棵满m叉树T有81个树叶并且高度为4。

1. …

2. …

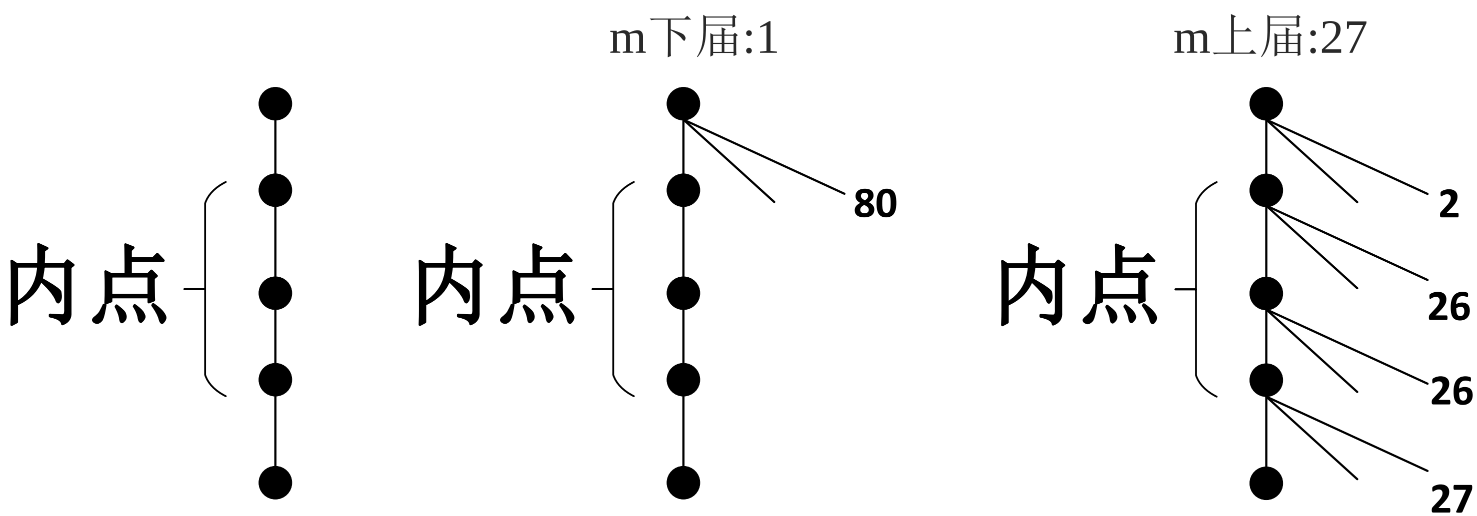
树与有根树（Problem 21）

Problem 5

一个每个内点的孩子都恰好是 m 个的树 T 有 81 个树叶并且高度为 4。

1. 给出 m 的上界和下界。
2. 若 T 还是平衡的，则 m 是多少?

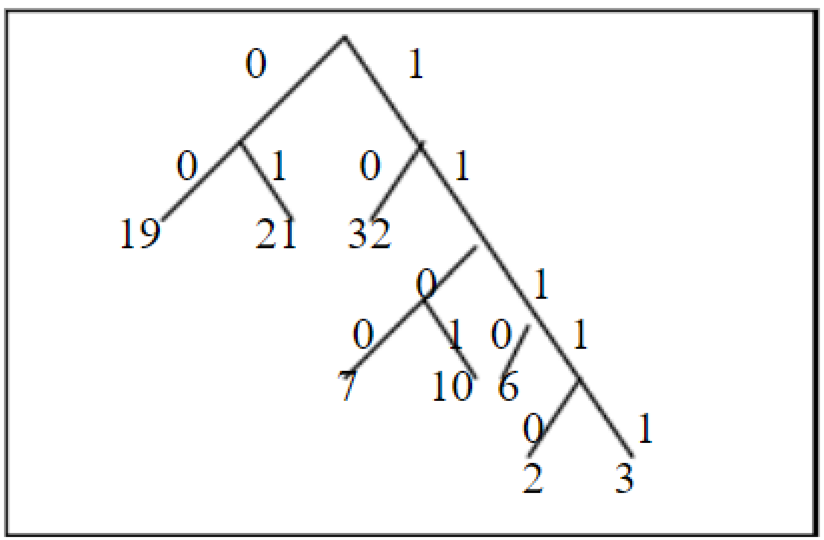
1. 上界：$\frac{81-1}{4}+1=21$；下界：$e^{\frac{\ln 81}{4}}=3$。
2. $m=3$，由 $\lceil \log_m l \rceil = h$。



- Problem 5

假设用于通信的电文仅由 8 个字母 {a,b,c,d,e,f,g,h} 组成，它们字母在电文中出现的频率分别为 {0.07,0.19,0.02,0.06,0.32,0.03,0.21,0.10}。为这8个字母设计最优前缀码。

参考答案：a: 1100; b: 00; c: 11110; d: 1110; e: 10; f: 11111; g: 01; h: 1101;



WPL＝2(0.19+0.32+0.21)+4(0.07+0.06+0.10)+5(0.02+0.03)=1.44+0.92+0.25=2.61

小技巧

- 3个

Thank you!