离散数学习题课

范文殊

2019/12/29

内容回顾

- 子群与群的分解
- 循环群与群同构
- 偏序集与偏序格
- 偏序格与代数格
- 布尔代数引论

子群与群的分解（第13讲）

定义 10.5 设 G 是群，H 是 G 的非空子集，如果 H 关于 G 中的运算构成群，则称 H 是 G 的子群，记作 $H \leqslant G$. 若 H 是 G 的子群，且 $H \subset G$，则称 H 是 G 的真子群，记作 $H < G$.

定理 10.10（拉格朗日定理） 设 G 是有限群，H 是 G 的子群，则

$$|G| = |H| \cdot [G:H]$$

这个定理的意义在于说明了有限群的阶是它的子群的阶的整数倍。

习题解答

Problem 1

不定项选择题

设 H,K 是群 $< G, \circ >$ 的子群，下面哪些代数系统是 $< G, \circ >$ 的子群？ B

A.$< H \cup K, \circ >$　　B.$< H \cap K, \circ >$　　C.$< K - H, \circ >$　　D.$< H - K, \circ >$

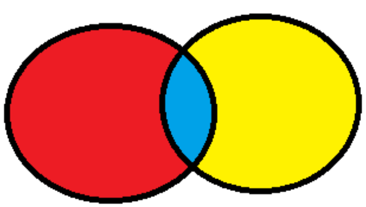
假设 $H \not\subseteq K$ 且 $K \not\subseteq H$，那么存在 h 和 k 使得

$$h \in H \wedge h \notin K, k \in K \wedge k \notin H$$

这就推出 $hk \notin H$. 若不然，由 $h^{-1} \in H$ 可得

$$k = h^{-1}(hk) \in H$$

与假设矛盾. 同理可证 $hk \notin K$. 从而得到 $hk \notin H \cup K$. 这与 $H \cup K$ 是子群矛盾.



形象理解：

红色和黄色部分里的数作运算结果不在红黄蓝三色部分中。

- **定义（循环群）：**

设$\langle G,*\rangle$为循环群（cyclic group）指：

$$(\exists a \in G)(G = \langle a\rangle)$$

这里，$\langle a\rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$，$a$称为$G$之生成元（generator）

循环群与群同构（第14讲）

- 定义（群同构）：群$\langle G_1,\circ\rangle$与$\langle G_2,*\rangle$同构 $(G_1 \cong G_2)$ 当且仅当存在双射函数 $f: G_1 \to G_2$，满足：

$$\forall x, y \in G_1,\ f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

- 代数系统$\langle S_1,\circ\rangle$与$\langle S_2,*\rangle$同态（homomorphism，记$S_1 \sim S_2$)当且仅当存在函数$f: S_1 \to S_2$，满足：

$$\forall x, y \in S_1, f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

Problem 1

对以下各小题给定的群 G_1 和 G_2，以及 $f: G_1 \to G_2$，说明 f 是否为群 G_1 到 G_2 的同态，如果是，说明是否为单同态、满同态和同构。求同态像 $f(G_1)$。

(1) $G_1 =< \mathbb{Z}, + >$, $G_2 =< \mathbb{R}^*, \cdot >$, 其中 $\mathbb{R}^*$ 为非零实数集合，$+$ 和 $\cdot$ 分别表示数的加法和乘法。

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是偶数} \\ -1 & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

(2) $G_1 =< \mathbb{Z}, + >$, $G_2 =< A, \cdot >$, 其中 $+$ 和 $\cdot$ 分别表示数的加法和乘法, $A = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge |x| = 1\}$, 其中 $\mathbb{C}$ 为复数集合。

$$f: \mathbb{Z} \to A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

(1) 是同态，不是单同态，也不是满同态。$f(G_1) = \{-1, 1\}$;

(2) 是同态，是单同态，不是满同态。$f(G_1) = \{\cos x + i \sin x | x \in \mathbb{Z}\}$;

习题解答

Problem 4

设 $G=<a>$ 是 15 阶循环群。

(1) 求出 G 的所有生成元；

(2) 求出 G 的所有子群。

可以利用拉格朗日定理

(1) 生成元为 $a^1, a^2, a^4, a^7, a^8, a^{11}, a^{13}, a^{14}$;

(2) 子群为 $<e>=\{e\}$, $<a>=G$, $<a^3>=\{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}\}$,

$<a^5>=\{e, a^5, a^{10}\}$.

偏序集与偏序格（第15讲）

定义（偏序关系）：非空集合A上的自反、反对称和传递的关系称为A上的偏序关系，记为：$\preccurlyeq$

定义（偏序集）：集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起称为偏序集（partially ordered set, poset），记作$(A, \preccurlyeq)$

定义 11.1 设 $<S, \preccurlyeq>$ 是偏序集，如果 $\forall x, y \preccurlyeq S$，$\{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界，则称 S 关于偏序 $\preccurlyeq$ 作成一个格.

Problem 3

对偏序集 $(\{\{1\},\{2\},\{4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\},\subseteq)$, 回答下述问题。

a) 求极大元素。

a) $\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$

偏序格与代数格（第16讲）

定理 11.1 设 $<L, \preccurlyeq>$ 是格，则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 适合交换律、结合律、幂等律和吸收律，即

(1) $\forall a,b \in L$ 有

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a$$

(2) $\forall a,b,c \in L$ 有

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

(3) $\forall a \in L$ 有

$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a$$

(4) $\forall a,b \in L$ 有

$$a \vee (a \wedge b) = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

子格（sub lattice）是格的子代数。设 $\langle L,\wedge,\vee\rangle$ 是格，非空集合 $S \subseteq L$，若 S 关于 L 中的运算 $\wedge,\vee$ 仍构成格，称 $\langle S,\wedge,\vee\rangle$ 是 L 的子格

偏序格与代数格（第16讲）

定义 11.5 设 $<L,\wedge,\vee>$ 是格，若 $\forall a,b,c\in L$，有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$
$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

成立，则称 L 为分配格.

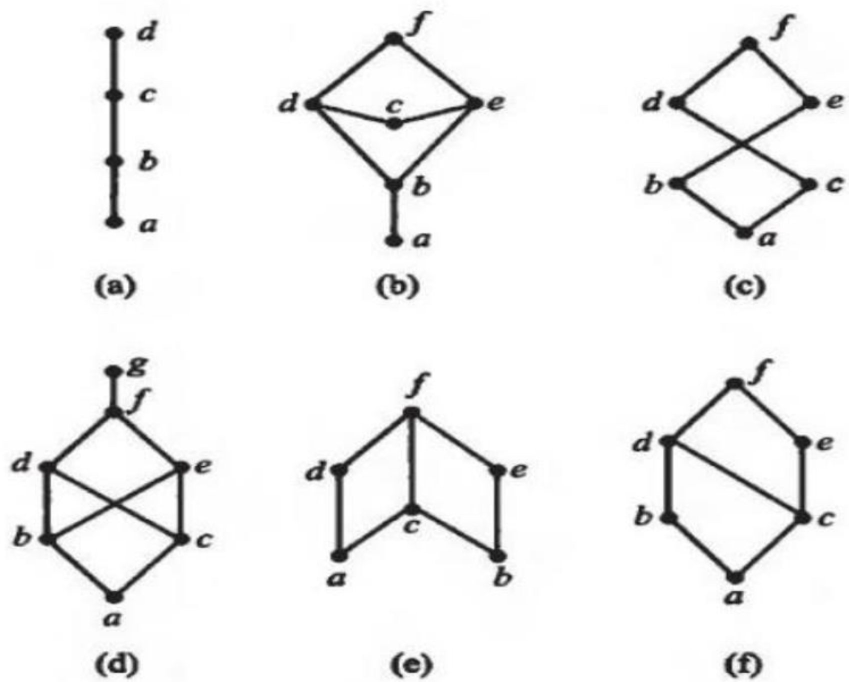
定义 11.8 设 $<L,\wedge,\vee,0,1>$ 是有界格，$a\in L$，若存在 $b\in L$ 使得

$$a\wedge b=0 \text{ 和 } a\vee b=1$$

成立，则称 b 是 a 的补元.

Problem 1

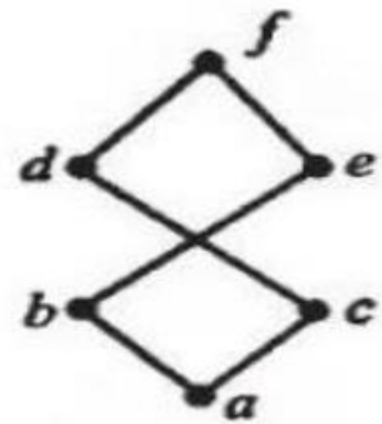
图 1 给出了 6 个偏序集的哈斯图。判断其中哪些是格。如果不是格，请说明理由。



(b),(d),(e) 不是格。在 (b) 中 $\{d,e\}$ 没有最大下界。在 (d) 中 $\{d,e\}$ 没有最大下界。在 (e) 中 $\{a,b\}$ 没有最大下界.

习题解答

- 哈斯图怎么看一个点的上下界有哪些？
- 下界：从这个点出发，一直往下走，中途不允许往上走，能到达的所有点就是它的下界。（“水往低处流”）注意：如果遇到分支，比如上题f图中的d有b和c两个下界，选择其中一条路径走。走到不能再走的时候返回原来的点重新向下走，此时选择另一个分支。
- 上界：从这个点出发，一直往上走，中途不允许往下走，能到达的所有点就是它的上界。（“人往高处走”）“注意”和下界的情况类似。



(c)

Problem 7

针对 **Problem 1** 中的每个格，如果格中的元素存在补元，则求出这些补元。

(c) a 与 f 互为补元, b 的补元是 c 和 d, c 的补元是 b 和 e, d 的补元是 b 和 e, e 的补元是 c 和 d.

定义（**布尔格**）：如果一个格为有补分配格，则称其为布尔格或布尔代数（Boolean algebra），可记为$\langle B,\wedge,\vee,{}',\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$

习题解答

Problem 8

今有 x, y, z 三个布尔变元，用 xyz 表示 0-7 之间的一个二进制数。定义布尔函数 F：当 xyz 是一个斐波那契数时 $F(x,y,z)=1$，否则 $F(x,y,z)=0$。（注：斐波那契数递归定义为 F(1)=1，F(2)=1, F(n)=F(n-1)+F(n-2)，也就是这样一个数列：1、1、2、3、5、8、13、21、34、...... 即 7 以内的斐波那契数为 1、2、3、5）

(1) 给出 F 的真值表。

(2) 以“布尔积之布尔和”的形式给出 F 的表达式（无需化简）。

(3) 化简该表达式。

(1) 真值表为

$F(0,0,0)$	0
$F(0,0,1)$	1
$F(0,1,0)$	1
$F(0,1,1)$	1
$F(1,0,0)$	0
$F(1,0,1)$	1
$F(1,1,0)$	0
$F(1,1,1)$	0

(2) $F = x'y'z + x'yz' + x'yz + xy'z$

(3) $F = y'z + x'y.$