NANJING UNIVERSITY

离散数学习题课

张震宇

2019/11/24

内容回顾

- 命题逻辑
- 命题逻辑推理
- 谓词逻辑
- 证明方法
- 集合论
- 二元关系
- 关系的性质
- 函数
- 集合的基数
- 数学归纳法与递归结构

命题逻辑（第1讲）

- 命题表达的陈述或真或假，但不可兼得
- 常用的命题联结词及其真值表
- 将自然语言翻译为命题表达式

命题逻辑（第1讲）

- 逻辑等价与命题逻辑的等值演算
- 定理：任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式
- 命题逻辑的可判定性

命题逻辑（Problem Set 1）

Problem 1

令p、q、r为如下命题:

p: 在这个地区发现过灰熊

q: 在乡间小路上徒步旅行是安全的。

r: 乡间小路两旁的草莓成熟了。

用p、q、r和逻辑连接词(包括否定)写出下列命题:

e) 为了使在乡间小路上旅行很安全，其必要但非充分条件是乡间小路两旁的草莓没有成熟且在这个地区没有发现过灰熊。

注：大部分同学未考虑到“非充分条件”，如 $q \to (\neg r \wedge \neg p)$

参考答案： $(q \to (\neg r \wedge \neg p)) \wedge \neg((\neg r \wedge \neg p) \to q)$

命题逻辑（Problem Set 1）

Problem 8

你有资格当美国总统仅当你已年满35岁、出生在美国或者你出生时你的双亲是美国公民并且你再这个国家至少生活了14年。用e:“你有资格当美国总统”，a: “你已年满35岁”，b: “你出生在美国”，p: “在你出生的时候，你的双亲均是美国公民”和r: “你在美国至少生活了14年”来表达你的答案。

注：大部分同学答案为 $e \to (a \wedge b) \vee (p \wedge r)$

参考答案： $e \to (a \wedge (b \vee p) \wedge r)$

原因：大部分是因为文化因素，原文（英文版）表达美国总统的有效候选人条件是并列的三个条件，并非或的条件。还有题目是“仅当”，不是“当且仅当”。

命题逻辑的推理理论（第2讲）

- 自然推理系统的推理规则：

附加	1. $A \Rightarrow (A \vee B)$
化简	2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$
假言推理	3. $A \rightarrow B, A \Rightarrow B$
取拒式	4. $A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$
析取三段论	5. $A \vee B, \neg B \Rightarrow A$
假言三段论	6. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$
消解	7. $A \vee B, \neg A \vee C \Rightarrow B \vee C$
合取引入	8. $A, B \Rightarrow A \wedge B$

命题逻辑的推理理论（第2讲）

- 推理规则的竖式形式

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

假言推理

$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \to q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

取拒式

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

假言三段论

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

析取三段论

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

附加

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

化简

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

合取引入

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

消解

- 具体例子会用命题逻辑进行推理

命题逻辑（Problem Set 2）

Problem 4

证明 $(p \to q) \to (r \to s)$ 和 $(p \to r) \to (q \to s)$ 不是逻辑等价。

注：这是个简单的赋值问题，找一个情况证明不是逻辑等价即可。

证法不唯一。假设 r 为真且 p,q 和 s 都为假，那么第一个为假，而第二个为真，说明它们不是逻辑等价。

命题逻辑（Problem Set 2）

Problem 10

使用推理规则证明前提“如果天不下雨或天不起雾,则帆船比赛将举行并且救生表演将进行”、“如果帆船比赛举行,则将颁发奖杯”以及“没有颁发奖杯”蕴含着结论“天下雨了”。

注意：提醒部分同学，命题一般用小写字母p,q,r等表示(见课件1)。每步最好注明理由。

Problem 10 参考答案

解：设p是命题“天不下雨”，q是命题“天不起雾”，s是命题“帆船比赛举行”，t是命题“救生表演进行”，u是命题“颁发奖杯”。那么这些前提表示为$(p \vee q) \to (s \wedge t)$、$s \to u$以及$\neg u$。结论则是$\neg p$。如下构造一个论证来证明我们的前提能导致期望的结论。

步骤	理由
1. $\neg u$	前提引入
2. $s \to u$	前提引入
3. $\neg s$	取拒式，用(1)和(2)
4. $(p \vee q) \to (s \wedge t)$	前提引入
5. $\neg(s \wedge t) \to \neg(p \vee q)$	(4)的逆否命题
6. $(\neg s \vee \neg t) \to (\neg p \wedge \neg q)$	德·摩根律，对(5)使用
7. $\neg s \vee \neg t$	附加律，用(3)
8. $\neg p \wedge \neg q$	假言推理，用(7)和(6)
9. $\neg p$	化简律，用(8)

谓词逻辑（第3讲）

- 全称量词，存在量词

(1)**全称量词**。“$P(x)$的全称化”记为$\forall xP(x)$，指命题“对所有论域中的x，$P(x)$为真。”

(2)**存在量词**。“$P(x)$的存在化”记为$\exists xP(x)$，指命题“存在论域中的某个x，使$P(x)$为真。”

- 将自然语言翻译为谓词逻辑表达式

例1：“这个班上的每个学生都学过微积分课程。”

- $S(x)$：x是这个班上的学生
- $C(x)$：x学过微积分课程
- $\forall x(S(x) \rightarrow C(x))$

谓词逻辑（第3讲）

谓词逻辑的推理实例

“在这个班上的某个学生没有读过这本书”，“班上的每个人都通过了第一门考试”，结论“通过第一门考试的某个人没有读过这本书”。

$C(x)$: x在这个班上

$B(x)$: x读过书了

$P(x)$: x通过了第一门考试

- $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
- $\forall x(C(x) \to P(x))$
- $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

$C(a) \wedge \neg B(a)$	存在例示
$C(a)$	化简
$C(a) \to P(a)$	全称例示
$P(a)$	假言推理
$\neg B(a)$	化简
$\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$	存在生成

谓词逻辑（Problem Set 3）

Problem 11

用推理规则证明：如果$\forall x(P(x) \vee Q(x))$和$\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$，$\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$和$\exists x \neg P(x)$为真，则$\exists x \neg R(x)$ 为真。

参考答案：

步骤		推理
1	$\exists x \neg P(x)$	前提
2	$\neg P(x)$	存在示例(1)
3	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	前提
4	$P(c) \vee Q(c)$	全称示例(3)
5	$Q(c)$	(4)
6	$\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$	前提
7	$\neg Q(c) \vee S(c)$	全称示例(6)
8	$S(c)$	(5)(7)
9	$\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$	前提
10	$R(c) \rightarrow \neg S(c)$	全称示例（9）
11	$\neg R(c)$	拒取式(8)(10)
12	$\exists x \neg R(x)$	存在引入(11)

证明方法（第4讲）

- 直接证明法，间接证明法

  归谬法（反证法），穷举法（分情况证明法）

  空证明法：A为矛盾式 $\Rightarrow$ A→B为真

  平凡证明法：B为永真式 $\Rightarrow$ A→B为真

  构造证明法，反例证明法

证明方法（Problem Set 4）

Problem 5

两个实数x和y的平方均值是$\sqrt{(x^2+y^2)/2}$。通过计算不同正实数对的算术均值和平方均值，构造一个关于这两种均值的相对大小的猜想并证明之。

提示：举几个例子看看，就可以猜想$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$。切记包含等号。

Problem 7

证明任一个有理数和任一个无理数之间都有一个无理数。

参考答案：假设有理数x，无理数y，令它们的均值为a = (x+y)/2，且a必在x和y之间且一定为无理数。假设a为有理数,则y = 2a-x，则y为有理数。与假设矛盾。因此a为无理数。

证明方法（Problem Set 4）

Problem 10

证明 $\sqrt[3]{2}$是无理数。

参考答案：（个别同学不会做）

假设 $\sqrt[3]{2}$是有理数，且$p/q = \sqrt[3]{2}$，其中p、q为互质的正整数。等式两边三次方得到$2 = p^3/q^3$，即$p^3 = 2q^3$。因此p^3是偶数。假设$p = 2s$，则有$8s^3 = 2q^3$,简化得到$4s^3 = q^3$。同理可得出结论，p和q都能被2 整除，与假设矛盾，故 $\sqrt[3]{2}$是无理数。

注：参考课件中的例2：**证明：$\sqrt{2}$是无理数.**

集合论（第5讲）

- 空集本身是一个集合，但空集不含任何元素。

  空集本身是一个集合，也可以做为另一个集合的元素或子集，故：$\emptyset \in \{\emptyset\}$，$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$；但因为空集不含任何元素，故$\emptyset \notin \emptyset$，$\emptyset \neq \{\emptyset\}$

- 幂集公理：集合A的幂集，即由集合A的全体子集构成的集合。
- 集合运算及运算规律

  交换律，结合律，分配律，幂等律，空集性质，

  De Morgan律，幂集性质

集合论（第5讲）

- 广义交与广义并

集合的广义并：设A为集合，A的所有元素的并称为集合A的广义并，记为：$\cup A = \{x \mid \exists y(y \in A \land x \in y)\}$

集合的广义交：设A为非空集合，A的所有元素的交称为集合A的广义交，记为：$\cap A = \{x \mid \forall y(y \in A \to x \in y)\}$

- 集合公式的基本证明方式（四种）

集合论(Problem Set 5)

Problem 3

给出以下各个谓词的真值集合，这里的域是整数集合。

a) $P(x): x^2 < 3$

b) $R(x): 2x + 1 = 0$

提示：认真审题，论域是整数集合。

Problem 6

令 A 和 B 为全集 U 的子集。证明 $A \subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$。

参考答案：

$A \subseteq B \equiv \forall x(x \in A \to x \in B) \equiv \forall x(x \notin B \to x \notin A) \equiv \forall x(x \in \overline{B} \to x \in \overline{A}) \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}$

二元关系（第6讲）

- 笛卡尔积的定义及相关命题

任给集合A与B，令$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$，

$A\times B$称为A与B的笛卡尔积（Cartesian Product）

(1) $A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$

(2) $A\times B=B\times A\Leftrightarrow[(A=\emptyset)\vee(B=\emptyset)\vee(A=B)]$

(3) 分配律：$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

Cogito, ergo sum.
吾思故吾在
—René Descartes
[法]笛卡尔

二元关系（第6讲）

- 二元关系，R的定义域、值域
  空关系，全关系 E_A，恒同关系 I_A

- 定义：设$R \subseteq A \times B$，R的**逆**（inverse）为

$$R^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}$$

易见，R^{-1}为从B到A的关系：$R^{-1} \subseteq B \times A$

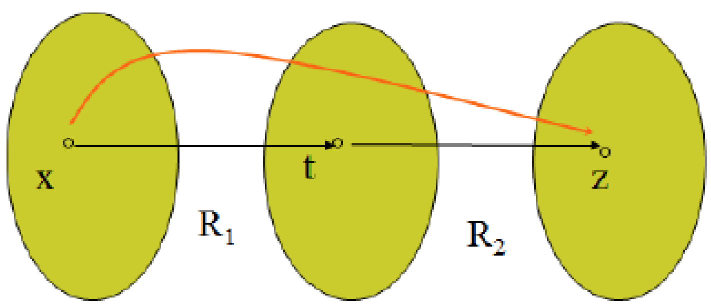
二元关系（第6讲）

- 二元关系R和S的复合

  - 定义：设$R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$，$R$与$S$的**复合**为

$$R \circ S = \{(x,y) \mid \exists t((x,t) \in R \wedge (t,y) \in S)\}$$

事实上，$x(R \circ S)y \Leftrightarrow \exists t(xRtSy)$ 或 $x(R \circ S)y = xR\square Sy$，$R \circ S$为从$A$到$C$的关系



二元关系（第6讲）

- 关系的运算

设$R \subseteq A\times B$，$S \subseteq B\times C$，则:

(1) $(R^{-1})^{-1} = R$

(2) $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

(3) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

(4) $I_A \circ R = R \circ I_B = R$

- 关系的幂

二元关系(Problem Set 6)

Problem 6

设R_1和R_2分别是整数集合上的“模3同余”和“模4同余”关系，即$R_1 = \{(a,b) | a \equiv b \pmod 3\}$和$R_2 = \{(a,b) | a \equiv b \pmod 4\}$。求

a) $R_1 \cup R_2$
b) $R_1 \cap R_2$
c) $R_1 - R_2$
d) $R_2 - R_1$
e) $R_1 \oplus R_2$

注意：大部分同学并未化简。

参考答案：

a) $\{(a,b) \mid a-b \equiv 0, 3, 4, 6, 8$ 或 $9 \pmod{12}\}$

b) $\{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{12}\}$

c) $\{(a,b) \mid a-b \equiv 3, 6$ 或 $9 \pmod{12}\}$

d) $\{(a,b) \mid a-b \equiv 4$ 或 $8 \pmod{12}\}$

e) $\{(a,b) \mid a-b \equiv 3, 4, 6, 8$ 或 $9 \pmod{12}\}$

二元关系(Problem Set 6)

Problem 7

a) 在集合$\{a,b,c,d\}$上有多少个不同的关系?

b) 在集合$\{a,b,c,d\}$上有多少个关系包含有序对(a,a)?

提示：集合 A 上的关系是从 A 到 A 的关系。换句话说，集合 A 上的关系是 A×A 的子集。当 A 是 n 元素集合时 A×A 有 n^2 个元素，并且 m 个元素的集合有 2^m 个子集，所以 A×A 的子集有 2^{n^2} 个。于是 n 元素集合有 2^{n^2} 个关系。

参考答案:

a) 有$2^{4^2}=65536$个不同的关系，因为$|A\times A|=4^2$。

b) 有$2^{4^2-1}=32768$个关系包含有序对(a,a)，因为$|A\times A|-1=4^2-1$。

关系的性质（第7讲）

- 关系的几类重要性质及其充要条件（自反，对称，传递）
- 等价关系与等价类
- 关系的闭包与Warshall算法

关系的性质（第7讲）

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$，且 $i \neq j$，则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中 1 所在位置，M 中相应位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边,是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边,是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 也有边

关系的性质（第7讲）

定义（等价关系）：设A为集合，R为A上的关系，若R自反、对称且传递，称R为A上的等价关系（equivalence relation）。这时把xRy记为$x \sim_R y$或简记为$x \sim y$

定义（等价类）：令R为A上的等价关系，对任意$a \in A$，a关于R的等价类（equivalence class）$[a]_R$：

$$[a]_R \overset{\text{def}}{=} \{b \in A \mid aRb\}$$

简记为$[a]$（或$R[\{a\}]$，$R(a)$）

关系的性质（第7讲）

- 定义（**关系的闭包**）：设R为集合A上的关系，P为某个性质（即自反性，对称性，传递性之一），若存在$S \subseteq A \times A$，使得：
  - (1) $R \subseteq S$
  - (2) S具有性质P
  - (3) $\forall T(R \subseteq T \land T$ 具有性质$P \to S \subseteq T)$

则称S为“相对于P的R的闭包（简称R的P闭包）”

关系的性质(Problem Set 7)

Problem 8

题目：设 R 和 S 是 A 上的对称关系，如果 $R \circ S = S \circ R$，请证明：$R \circ S$ 是对称关系。

参考答案：

如果$(a,b) \in R \circ S$,由复合关系的定义可知,A 中必有元素 x,使得

$$(a,x) \in R, (x,b) \in S$$

由于 R 和 S 都是对称关系,所以有

$$(x,a) \in R, (b,x) \in S$$

· 6 ·

又由复合关系的定义可知,$(b,a) \in S \circ R$,而题设有 $R \circ S = S \circ R$,所以$(b,a) \in R \circ S$,由此证得 $R \circ S$ 是对称关系。

关系的性质(Problem Set 7)

Problem 9

题目：设 R 是 A 上的等价关系，请证明：$R^2 = R$。

参考答案：

4. **证明**　对于任意的$(a,b) \in R^2$,必有 $x \in A$,使得$(a,x) \in R$ 和$(x,b) \in R$,由于 R 是传递关系,所以$(a,b) \in R$,由此可知:$R \supseteq R^2$。

对于任意的$(a,b) \in R$,由于 R 是自反关系,所以$(b,b) \in R$,于是有

$$(a,b) \in R,(b,b) \in R$$

由复合关系的定义可知,$(a,b) \in R^2$,由此可知,$R^2 \supseteq R$。综上所述,有 $R = R^2$。

函数 (第8讲)

- 知识梳理
- 函数的集合定义
  - 设F为二元关系，F为函数指：

$$(\forall x,y,z)(xFy \wedge xFz \rightarrow y = z)$$

当F为函数，若有y使xFy，则这样的y是唯一的，这时记这样的y为$F(x)$，且称y为F在x的值。事实上：

$$F\text{为函数} \leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{Dom}(F) \rightarrow (\exists!\, y)(xFy))$$

函数 (第8讲)

- 满射 onto、单射 1-1、双射 1-1对应
  - 定义：设$f: A \to B$

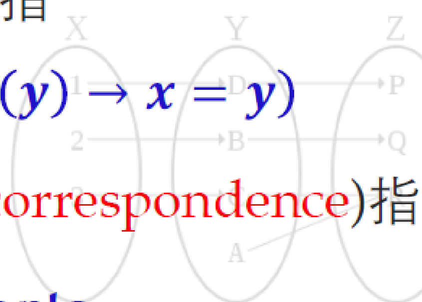
(1) f 为满射(surjection / onto)指$\mathbf{Ran}(f) = B$

(2) f 为单射(injection / 1-1)指

$$(\forall x, y \in A)(f(x) = f(y) \to x = y)$$

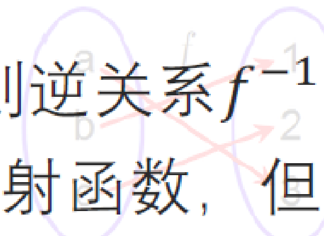
(3) f 为双射(bijection /1-1 correspondence)指

$$f \text{ 为 } \mathbf{1\text{-}1} \text{ 且 } \mathbf{onto}$$

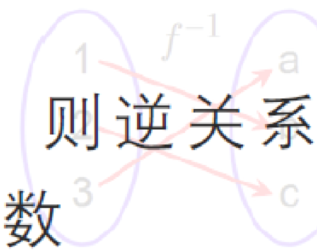


函数 (第8讲)

- 函数的复合及其结合性
- 逆关系与函数
  - 函数的逆关系不一定是函数，可能只是一个二元关系
  - (1) 任给单射函数$f: A \to B$，则逆关系f^{-1}是函数，且是$\mathrm{Ran}(f)$到A的双射函数，但不一定是B到A的双射函数

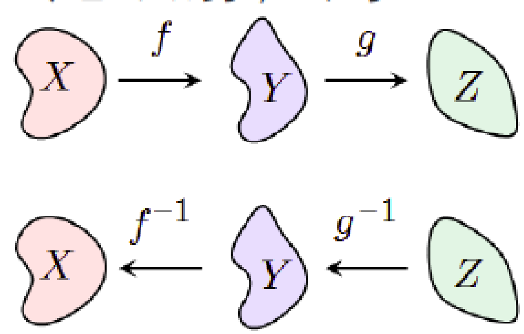


  - (2) 对于双射函数$f: A \to B$，则逆关系$f^{-1}: B \to A$是从B到A的双射函数



反函数

- 定义（反函数）：若$f: A \to B$为双射函数，则f的逆关系$f^{-1}: B \to A$称为f的反函数
- 反函数的性质：设$f: A \to B$是双射，则：



(1) $I_A: A \to A$是双射函数

(2) $f = f \circ I_B = I_A \circ f$

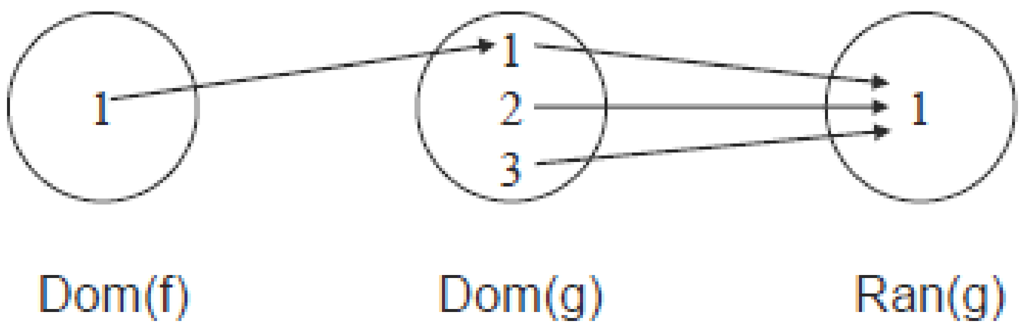
(3) $f \circ f^{-1} = I_A$，$f^{-1} \circ f = I_B$

函数(Problem Set 8)

- 习题讲解

如果f和$f\circ g$都是一对一的，能否得出结论g也是一对一的？说明理由。

- $f\circ g(x)$如果理解为$g(f(x))$，则g不一定是一对一。



- $f\circ g(x)$如果理解为$f(g(x))$，则g是一对一的(反证法)。

函数(Problem Set 8)

Problem 3

令f为从$\mathbf{R}$到$\mathbf{R}$的函数$f(x)=x^2$。求

a) $f^{-1}(\{1\})$

b) $f^{-1}(\{x|0<x<1\})$

c) $f^{-1}(\{x|x>4\})$

注意：此题不是有关反函数的，因为

函数 $f(x)=x^2$ 不是一对一的，因为 $f(1)=f(-1)=1$，但 $1\neq -1$。

此题缺少了书上的一段定义：

令 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数。S 是 B 的一个子集。定义 S 的**逆像**(inverse image)为 A 的子集，其元素恰好是 S 所有元素的原像。S 的逆像记作 $f^{-1}(S)$，于是 $f^{-1}(S)=\{a\in A\mid f(a)\in S\}$。(小心：记号 f^{-1}有两种不同的使用方式。不要将这里引入的符号与可逆函数 f 的逆函数在 y 处的值的记号 $f^{-1}(y)$混淆。还要注意集合 S 的逆像 $f^{-1}(S)$对所有函数 f 都有意义，而不仅仅是可逆函数。)

参考答案：

a) $\{-1,1\}$

b) $\{x|-1<x<0\vee 0<x<1\}$

c) $\{x|x>2\vee x<-2\}$

函数(Problem Set 8)

Problem 10

令f为从A到B的函数。S为B的子集。证明$f^{-1}(\overline{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$。

注意：此处 $f^{-1}(S)$ 表示S的逆像

参考答案：

$$f^{-1}(\overline{S}) = \{x \in A \mid f(x) \notin S\} = \overline{\{x \in A \mid f(x) \in S\}} = \overline{f^{-1}(S)}$$

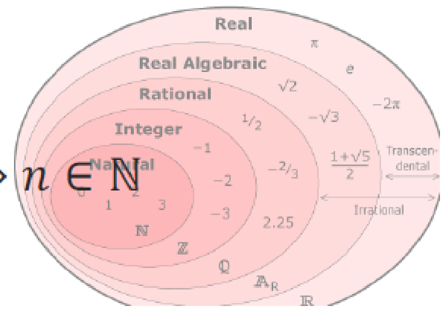
集合的基数(第9讲)

- 自然数的定义方式：归纳定义、集合定义

  Ⅰ. 归纳定义：$\emptyset$为自然数，若n为自然数，则

  n^+亦然；

  Ⅱ. 集合定义：n为自然数$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}$



- 集合基数的定义，等势、有限集、无穷集、可数集

  集合A中所包含元素的个数称为集合A的基数 或称A的势

  定义（等势）：

  - 设 A，B 为集合，A 等势 (equipotence, equipollence 或 equinumerosity) 于 B 指有 $f: A \xrightarrow{1-1,\text{onto}} B$，记为$A \approx B$（或$A \sim B$）

集合的基数(第9讲)

- 集合基数的定义：等势、有限集、无穷集、可数集

  定义（有限集, 无穷集, 可列集）：A为集合,

  - (1) 若有自然数n使得$A \approx n$，则称A为有限集，且记A的基数为$|A| = n$
  - (2) 若A非有限集则称A为无穷集
  - (3) 若$A \approx \mathbb{N}$，则称A为可列集（或可数集）且记A的基数为$|A| = \aleph_0$（读作aleph null）注：本课程中可列集特指无穷可列集（无穷可数集）
  - (4) 若$A \approx \mathbb{R}$，则记$|A| = \aleph$（或$\aleph_1$）

- 一些例子：整数与自然数等势、实数集不是可列集、幂集的基数、Cantor定理

集合的基数(Problem Set 9)

Problem 1

计算下列集合的基数.

(6) 平面上所有的圆心在x轴上的单位圆的集合.　　　(6) $\aleph$

Problem 2

设A,B为可数集，证明：　(1) $A\cup B$ 是可数集；　(2) $A\times B$是可数集.

(1) 不妨设$A\cap B=\varnothing$.若两个集合都是有穷集，那么$card(A\vee B)=n+m\leqslant\aleph_0$.如果其中一个集合是有穷集，另一个是无穷可数集，构造如下双射$h: A\cup B\to N$.当$x\subset A$时，$x=a_i$，$h(x)=i$；当$x\subset B$时，$x=b_j$，$j=0,1,\cdots$,那么$h(x)=j+n$.如果$card\,A=card\,B=\aleph_0$，那么存在双射$f:A\to N$和$g:B\to N$.如下构造函数$h:A\cup B\to N$，

$$h(x)=\begin{cases} 2i, & x\in A\\ 2j+1, & x\in B\end{cases}$$

显然h为双射.这就证明了$card(A\cup B)=\aleph_0$.

集合的基数(Problem Set 9)

Problem 2

设A,B为可数集，证明：(2) $A \times B$是可数集.

(2) 若两个集合都是有穷集，那么$card(A \times B) = n\dot{m} \leqslant \aleph_0$.如果其中一个集合是有穷集，另一个是无穷可数集，构造双射$h : A \times B \rightarrow N$.$h(< ai, bi >) = i + jn$.如果$card\,A = card\,B = \aleph_0$，那么存在双射$f : A \rightarrow N$和$g : B \rightarrow N$.构造函数$h : A \times B \rightarrow N$，

$$h(< x, y >) = \frac{(i+j+1)(i+j)}{2} + i,\text{其中}f(x) = i, g(y) = j$$

显然h是双射的.从而得到$card(A \times B) = \aleph_0$.

Problem 4

如果A是不可数集合而B是可数集合，那么$A - B$一定是不可数的吗？

提示：利用反证法。 **参考答案**如下：

假设$A - B$是可数的。那么因为$A = (A - B) \cup (A \cap B)$，而$A \cap B$也是可数的，得出$A$是可数的，与前提矛盾，故$A - B$一定是是不可数的。

集合的基数(Problem Set 9)

Problem 7

设$A = \{a, b, c\}$，$B = \{0, 1\}^A$，由定义证明$\mathcal{P}(A) \approx \{0, 1\}^A$.

提示：要构造双射函数

Problem 10

证明可数多个可数集的并集是可数的。

假设$A1, A2, \ldots$是可数的，那么对于A_i都以$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$的形式列出。那么$\bigcup_{i=1}^{n} Ai$就可以列出所有的元素，有$i + j = 2, i + j = 3, i + j = 4, \ldots$。得证。

集合的基数

习题讲解

- 38.若A和B是具有相同基数的两个集合，则A的幂集与B的幂集也具有相同基数。
- 解答：A和B有相同基数，则存在双射f，则可构造A的幂集到B的幂集的映射g

$$g(\text{subset(A)}) \square \{\text{b} \mid \text{f(a)} = \text{b}, \text{a} \in \text{subset(A)}, \text{b} \in B\}$$

只需证明映射g是双射即可。

归纳法(第10讲)

数学归纳法的流程

理论依据：$\boldsymbol{P}(1), \forall x\big(\boldsymbol{P}(x) \to \boldsymbol{P}(x+1)\big) \Longrightarrow \forall x\boldsymbol{P}(x)$

证明目标：

- $\forall n\boldsymbol{P}(n)$，其中$n$的论域为正整数集或自然数集

证明框架：

- 奠基（Basis）：证明$\boldsymbol{P}(1)$为真；
- 归纳假设（Inductive hypothesis, I.H.）：假设对任意正整数k，$\boldsymbol{P}(k)$为真；
- 归纳步骤（Inductive step）：证明$\boldsymbol{P}(k) \Longrightarrow \boldsymbol{P}(k+1)$，即证明 $\forall k\big(\boldsymbol{P}(k) \to \boldsymbol{P}(k+1)\big)$；
- 由数学归纳法，命题对任意正整数均成立

归纳法(第10讲)

强数学归纳法的流程

- 强数学归纳法依赖的的公理体系：ZFC 集合系统
- 理论依据：$\boldsymbol{P}(1), \forall x\big(\forall y < x, \boldsymbol{P}(y) \to \boldsymbol{P}(x)\big) \Rightarrow \forall x \boldsymbol{P}(x)$
- 证明目标：$\forall n \boldsymbol{P}(n)$，其中$n$的论域为正整数集
- 证明框架：
  - 奠基：证明$\boldsymbol{P}(1)$为真；
  - 归纳假设与归纳步骤：给定任意正整数k，证明$\boldsymbol{P}(1) \Longrightarrow \boldsymbol{P}(k+1)$且$\boldsymbol{P}(2) \Longrightarrow \boldsymbol{P}(k+1)$ 且…且$\boldsymbol{P}(k) \Longrightarrow \boldsymbol{P}(k+1)$，即证明 $\forall k\big(\boldsymbol{P}(1) \wedge \boldsymbol{P}(2) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{P}(k) \to \boldsymbol{P}(k+1)\big)$；
  - 由强数学归纳法，命题对任意正整数均成立

归纳法(第10讲)

- 设$\boldsymbol{P}(n)$是与正整数n有关的陈述，x和y是两个给定的整数，且$y \le x$。若能够证明以下陈述：
  - (1) $\boldsymbol{P}(y), \boldsymbol{P}(y+1), \cdots, \boldsymbol{P}(x)$皆为真
  - (2) 对任意$k \ge x$，$\boldsymbol{P}(y) \wedge \boldsymbol{P}(y+1) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{P}(k) \to \boldsymbol{P}(k+1)$
- 则以下陈述成立：$\forall n \ge y, \boldsymbol{P}(n)$

递归地构造一个集合

递归地定义集合：

- (1) 奠基：指定一些初始元素；
- (2) 递归步骤：给出由集合中已有元素构造新元素的规则；
- (3) 排斥规则：限制集合中的元素仅限由步骤(1)和(2)生成

归纳法(第10讲)

结构归纳法

结构归纳法（structural induction）一般用于证明由递归构造的集合中的元素所具有的性质，或者用于证明与递归定义集合相关的命题，证明框架如下：

- 奠基：对于集合中的初始元素，证明命题成立；
- 归纳步骤：针对产生集合中新元素的规则，证明若已有元素满足命题，则该规则产生的新元素也满足命题

归纳法(Problem Set 10)

Problem 9

给出字符串的倒置的递归算法。(一个字符串的倒置(反转),是由原字符里的符号以相反顺序组成的字符串。把字符串 w 的倒置表示为 w^R。)

解:

procedure *reverse string*(w : w 是一个字符串)
if w 长度为 1 **then**
  return w
else
  $w = xy$,其中 y 长度为 1。
  $x^R = \mathit{reverse\ string}(x)$
return yx^R