第五节 矩阵的分块

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 具体做法是：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例 $$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

即 $$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}a&1&0&0\\0&a&0&0\\1&0&b&1\\0&1&1&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\E&B\end{pmatrix},\text{其中}A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}a&1&0&0\\0&a&0&0\\1&0&b&1\\0&1&1&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_2&A_3&A_4\end{pmatrix},$$

$$\text{其中}A_1=\begin{pmatrix}a\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

二、分块矩阵的运算规则

(1) 设矩阵A与B的行数相同,列数相同,采用相同的分块法,有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}的行数相同,列数相同,那末

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数,那末

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

例 $\lambda=2,\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

$$2A=\begin{pmatrix} 1\times 2 & 2\times 2 & 3\times 2 \\ 3\times 2 & 2\times 2 & 1\times 2 \\ 4\times 2 & 5\times 2 & 6\times 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

(3) 设A为$m\times l$矩阵, B为$l\times n$矩阵, 分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于$B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$的行数, 那末

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r).$

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

(5) 设A为n阶矩阵,若A的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵,且非零子块都是方阵. 即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵,那末称 A 为分块对角矩阵.

分块对角矩阵的行列式具有下述性质:

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

(6)设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \boldsymbol{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & A_s \end{pmatrix}$,

若 $|A_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$,则$|A|\neq 0$,并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \boldsymbol{O} \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(7)\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

例1 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

求 AB.

解 把A,B分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

又 $$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

例2 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix},\qquad A_1=(5),\ A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right);$$

$$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},\qquad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix};$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}.$$

例3 已知矩阵等式$A_{m\times n}B_{n\times k}=O$,求证：$r(A)+r(B)\le n$.

证明:记$B=[\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_k]$，则$AB=O$可以改写作

$$AB=A[\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_k]$$
$$=[A\beta_1,\ A\beta_2,\cdots,A\beta_k]=[o,o,\cdots,o]=O,$$

可见 $$A\beta_i=o \qquad (i=1,2,\cdots,k),$$

则知B的任何一列都是方程组$Ax=O$的解.

设方程组$Ax=O$的基础解系为$\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\xi_{n-r(A)}$，那么向量组$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_k$必由$\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\xi_{n-r(A)}$线性表示，因此

$$r(B)=r(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_k)\le r(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\xi_{n-r(A)})=n-r(A).$$

即 $$r(A)+r(B)\le n.$$ 证毕.

三、小结

在矩阵理论的研究中，矩阵的分块是一种最基本重要的计算技巧与方法.

分块矩阵之间的运算：

分块矩阵之间与一般矩阵之间的运算性质类似

(1) **加法**　同型矩阵，采用相同的分块法

(2) **数乘**　数k乘矩阵A，需k乘A的每个子块

(3) **乘法**

若 A 与 B 相乘，需 A 的列的划分与 B 的行的划分相一致.

(4) 转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

(5) 分块对角阵的行列式与逆阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & O & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$$

A可逆$\Leftrightarrow A_i$可逆$i=1,2,\cdots,s$且

$$A^{-1}=diag\left(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1}\right).$$

第4.6节　初等矩阵

- 建立矩阵的初等变换与矩阵乘法的关系

- 给出初等变换求逆矩阵的方法

定义　对单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵,称为初等矩阵（初等方阵）

三类初等变换对应着三种初等矩阵. 以3阶单位阵为例予以说明.

(i)互换E的i、j两行(或i、j两列),记作$P(i,j)$

$$P(i,j)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(r_i \leftrightarrow r_j)$$

例如

$$P(2,3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(r_2 \leftrightarrow r_3)$$

(ii)E的第i行(或第i列)乘以不等于零的数k,记作 P(i(k))

$$P(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(k \times r_i)$$

例如

$$P(2(3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii)E的第j行的k倍加到第i行上(或第i列的k倍加到第j列上),记作P(i，j(k))

$$P(i,j(k))=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}$$

$$(r_i + kr_j)$$

例如

$$P(1,2(3))=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

性质 (1)初等矩阵的转置矩阵仍是初等矩阵.

(2)初等矩阵均可逆，且

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j), P(i(k))^{-1}=P\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),\ P(i,j(k))^{-1}=P[i,j(-k)]$$

例如

$$P(2,3)^{T}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$P(1,2(3))^{T}=\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

初等矩阵

前面我们可以看到，用初等行变换可以化简矩阵，事实上如果同时用行与列的初等变换，矩阵还可以进一步化简.

定义 如果B可以由A经过一系列初等变换得到，则称矩阵A与B是等价的.

等价关系具有：自反性、对称性、传递性

定理　任意一个$s\times n$矩阵A都与一形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{s\times n}$$

的矩阵等价，其称为A的**标准形**，主对角线上1的个数等于A的秩.

证明 如果$A=0$,那么它已经是标准形了.现假定$A\neq 0$,不妨设$a_{11}\neq 0$.对第$i=2,3,\cdots,s$行分别减去第一行的$a_{11}^{-1}a_{i1}$倍,对第$i=2,3,\cdots,n$列分别减去第一列的$a_{11}^{-1}a_{1j}$,然后用a_{11}^{-1}乘第一行.矩阵A就变成

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

A_1是一个（$s-1)\times(n-1)$的矩阵，对A_1再重复以上的步骤，这样进行下去就可得出所要的标准形.

初等变换不改变矩阵的秩，所以1的个数等于A的秩.

矩阵的初等变换与初等矩阵有着非常密切的关系. 有了初等矩阵, 可以用矩阵乘法来描述矩阵化简的过程.

引理 设A是$s\times n$矩阵，则

(1)对A施行一次初等行变换所得到的矩阵, 等于用同种s级初等矩阵左乘A.

(2)对A施行一次初等列变换所得到的矩阵, 等于用同种n级初等矩阵右乘A.

证明 我们只看行变换的情况，列变换的情况可用同样的方法证明.

设$B=\left[b_{ij}\right]$为任意一个$s\times s$矩阵，$a_1^T,a_2^T,\cdots,a_s^T$是A的行向量.

则

$$BA=\begin{bmatrix} b_{11}a_1^T+b_{12}a_2^T+\cdots+b_{1s}a_s^T \\ b_{21}a_1^T+b_{22}a_2^T+\cdots+b_{2s}a_s^T \\ \cdots \\ b_{s1}a_1^T+b_{s2}a_2^T+\cdots+b_{ss}a_s^T \end{bmatrix}$$

特别地取$B = P(i,j)$,得

$$(1) \qquad P(i,j)A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_j^T \\ \vdots \\ a_i^T \\ \vdots \\ a_s^T \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

这相当于把A的第i行元素与第j行元素互换.

令$B = P(i(c))$得

(2) $$P(i(c))A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ ca_i^T \\ \vdots \\ a_s \end{bmatrix} i$$

这相当于用c乘A的第i行.

取$B=P(i,j(k))$,得

(3)
$$P(i,j(k))A=\begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_i^T+ka_j^T \\ \vdots \\ a_j^T \\ \vdots \\ a_s^T \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

这相当于把A的第j行元素的k倍加到第i行元素.

根据引理，对一个矩阵进行行初等变换就相当于用相应的初等矩阵去乘这个矩阵.因此矩阵A、B等价的充要条件是有初等矩阵$P_1, P_2, \cdots P_l, Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$使

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l B Q_1 Q_2 \cdots Q_t.$$

n级可逆矩阵的秩为n,所以可逆矩阵的标准形为单位矩阵；反过来也成立.这样可得到

定理 n级矩阵A为可逆的充要条件是它能表示成一些初等矩阵的乘积：$A = Q_1 Q_2 \cdots Q_m.$

推论 两个$s\times n$矩阵A,B等价的充要条件是，存在可逆的s级矩阵P与可逆的n级矩阵Q使得

$$A=PBQ.$$

由于$A=Q_1Q_2\cdots Q_m$，所以有

$$Q_m^{-1}Q_{m-1}^{-1}\cdots Q_1^{-1}A=E$$

因为初等矩阵的逆矩阵还是初等矩阵，同时用初等矩阵左乘A就相当于对A作初等行变换，所以就说明

推论 可逆矩阵总可以通过一系列初等行变换化成单位矩阵.

例如

$$A \xrightarrow{r_2\times 3}$$

$$P(2(3))A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\12&15&18\\7&8&9\end{bmatrix}$$

$$AP(2(3))=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6&3\\4&15&6\\7&24&9\end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow{c_2\times 3}$$

例1 **利用矩阵乘法表示下述化A为标准型的过程.**

$$A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+(-3)r_3]{r_1+(-3)r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$P(1,3(-3))P(1,\ 2(-3))\ P(3\ ,1(-1))P(2,1(-1))A=E$$

解

上述过程可表示为:

P(1,3(-3))P(1, 2(-3)) P(3 ,1(-1))P(2,1(-1))A=E.

注 ① 化简过程表明,有些矩阵仅经过一系列行变换,即可 化为标准形矩阵;

② 若设

$P(1,3(-3))P(1, 2(-3))\ P(3\ ,1(-1))P(2,1(-1)) = B$,

则 $BA=E$.(标准形为单位阵时，B恰为A^{-1})

附带结论

(1)矩阵$A \to B \Leftrightarrow$ 有初等矩阵$P_1, P_2, \ldots, P_l$及$Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$使 $P_1 P_2 \ldots P_l A Q_1 Q_2 \ldots Q_t = B$

(2) A可逆$\Leftrightarrow$它可以表示成一些初等矩阵的乘积.

(3)矩阵$A \to B \Leftrightarrow$ 有可逆矩阵P、Q使 $PAQ=B$

依据附带结论 (2)可以获得求方阵A的逆的方法——初等变换求逆法(Gauss-Jordan方法)

例如 $A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{bmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+(-3)r_3]{r_1+(-3)r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$P\left(1,3(-3)\right)P\left(1,\ 2(-3)\right)\ P\left(3\ ,1(-1)\right)P\left(2,1(-1)\right)A=E$$

这说明 初等行变换可将可逆矩阵A化为E

$$故A=\{P\left(1,3(-3)\right)P\left(1,\ 2(-3)\right)\ P\left(3\ ,1(-1)\right)P\left(2,1(-1)\right)\}^{-1}$$

$$=P\left(2,1(-1)\right)^{-1}P\left(3\ ,1(-1)\right)^{-1}P\left(1,\ 2(-3)\right)^{-1}P\left(1,3(-3)\right)^{-1}$$

这说明 可逆矩阵A表示成一些初等变换矩阵的乘积

$$从而\ A^{-1}=\ P\left(1,3(-3)\right)P\left(1,\ 2(-3)\right)\ P\left(3\ ,1(-1)\right)P\left(2,1(-1)\right)E$$

这说明 初等变换将E化为A^{-1}

据此，提供了利用初等变换求方阵A的逆的方法.

利用初等行变换求矩阵A的逆矩阵方法：

①构造$n\times 2n$矩阵（$A|E$）；

②对于（$A|E$）施以初等行变换，把A化为E的同时，E就化为A 的逆阵A^{-1}.

即

$$\boxed{(A\,\vdots\,E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E\,\vdots\,A^{-1}\right)}$$

例2　求$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$的逆矩阵

解

构造$n\times 2n$矩阵$\left(A\vdots E\right)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right]$

$$\left(A\vdots E\right)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right]$$

继续进初等行变换，

$$
\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]
$$

$$
\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
(A \vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(E \vdots A^{-1}\right)
$$

这是一种很重要的求逆的方法

例3

解矩阵方程$AX=B$,其中$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{bmatrix}$.

分析

若A可逆，则$X=A^{-1}B$.对矩阵（$A\vdots B$）施以初等行变换,当把A变为E时,B就变为$A^{-1}B$.

构造3×5矩阵$(A\vdots B)$并对之施以初等行变换

$$(A\vdots B)=\begin{bmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&-2&1&-4\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&-1&-1&-3\end{bmatrix}$$

继续初等行变换，

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & -4\\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

所求$X=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$.

例4 解矩阵方程 $AX = A + 2X$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

解 由 $AX = A + 2X$ 可得（$A - 2E$）$X = A$.

$$\boxed{X = (A - 2E)^{-1} A}$$

法1 先求 $(A-2E)^{-1}$.

$$由 (A-2E \vdots E) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{行变换} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{行变换} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{行变换} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\therefore X=\left(A-2E\right)^{-1}A=\begin{bmatrix} 4 & -8 & -9 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 12 & 12 \end{bmatrix}.}$$

法2

$$由\left(A-2E \vdots A\right)=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{行变换}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}\xrightarrow{行变换}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$所以X=(A-2E)^{-1}A=\begin{bmatrix} 4 & -8 & -9 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 12 & 12 \end{bmatrix}.$$

需要指出：求矩阵A的逆阵,也可以利用初等列变换.

$$\boxed{\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}}$$

- 小结

$$(1)\ (A \vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \cdots \longrightarrow (E \vdots A^{-1})$$

$$(2)\ (A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \cdots \longrightarrow (E \vdots A^{-1}B)$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

练习

1.判断 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -5\\ 3 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$是否可逆? 若可逆则求出$A^{-1}$.

2.用逆矩阵解方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$.

3.解矩阵方程:

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

$$\boxed{X=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}}$$

第七节 分块乘法的初等变换及应用

本节介绍矩阵运算中，矩阵的分块乘法与初等变换的结合使用

将单位矩阵做如下分块

$$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$

实施三种初等变换，得到如下类型矩阵

$\begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{bmatrix}$,交换第一、第二两行（列）块；

$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$,第一行（列）块左（右）乘矩阵$P$;

$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$第二行(列）块左（右）乘矩阵$P$;

$\begin{bmatrix} E_m & P \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$第二行（列）块乘$P$，加到第一行（列）块；

$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ P & E_n \end{bmatrix}$第一行（列）块乘$P$，加到第二行（列）块.

用上面的这些矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

只要分块乘法能够进行，其结果就是对它进行相应的行变换。

只要分块乘法能够进行，其结果就是对它进行相应的变换

$$\begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ P & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{bmatrix}$$

右乘任一个矩阵，有相应结果。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AP & B \\ CP & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ P & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BP & B \\ C+DP & D \end{bmatrix}$$

适当选取P, 可使$C+PA=0$,例如A可逆时取 $P=-CA^{-1}$,则$C+PA=0$.于是

$$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ P & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ P & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

用下面例子看出在行列式、逆矩阵和解决其它问题中的应用

例1 $$T=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

A, D 可逆，求 T^{-1}

解

由 $$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

及

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

例2 $\boldsymbol{T_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}$

设T_1可逆，D可逆，试证$(A-BD^{-1}C)^{-1}$存在，并求T_1^{-1}

$$\begin{bmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

而右端仍可逆，故$(A-BD^{-1}C)^{-1}$存在

再由例1 有

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+D^{-1} \end{bmatrix}$$

例3 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \quad 1 \leq k \leq n$$

则有下三角矩阵$B_{n\times n}$使

$$BA = \text{上三角矩阵}。$$

证明 对n作数学归纳法. 当$n=1$时，一阶矩阵既是上三角矩阵，又是下三角矩阵，故命题成立

设对$n-1$命题为真，我们看

$$A_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

它仍满足命题中所设的条件，由归纳法假设

有下三角矩阵$(B_1)_{(n-1)\times(n-1)}$满足

$$B_1A_1=\text{上三角矩阵}$$

对A作下面分块

则
$$A=\begin{bmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{bmatrix}, \beta \in R^{(n-1)\times 1}, \alpha \in R^{1\times(n-1)}$$

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & \beta \\ 0 & -\alpha A^{-1}\beta + a_{nn} \end{bmatrix}$$

再作

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\alpha A^{-1}\beta + a_{nn}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B_1 A_1} & \boldsymbol{B_1\beta} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{\alpha A^{-1}\beta + a_{nn}} \end{bmatrix}$$

该等式右端已经是上三角阵，而矩阵B为

两次乘法结合起来得到

$$B=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

因此得到

$BA=$上三角矩阵。

在结束这一节的时候，给出一个矩阵求逆的公式.

定理（*Sherman Morrison*）　设A是一个n级的非奇异矩阵，u,v是任意两个向量，且$v^T A^{-1} v \neq -1$,则矩阵$(A+uv^T)$非奇异，且其逆矩阵为

$$(A+uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1+v^T A^{-1}u}$$

证明　因$v^T A^{-1} v \neq -1$，即$1+v^T A^{-1} v \neq 0$,因此上式等式右边有意义.

由于

$$(A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u})(A+uv^T)$$

$$=E+A^{-1}uv^T-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}A}{1+v^TA^{-1}u}-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}uv^T}{1+v^TA^{-1}u}$$

$$=E+A^{-1}uv^T-\frac{A^{-1}uv^T}{1+v^TA^{-1}u}-\frac{(v^TA^{-1}u)A^{-1}uv^T}{1+v^TA^{-1}u}$$

$$=E+A^{-1}uv^T-A^{-1}uv^T$$

$$=E$$

第八节 直交矩阵和酉矩阵

定义　　设A是一个n级实方矩阵，如果A满足

$$A^T A = E$$

则称矩阵A是直交矩阵或正交矩阵.

矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

都是直交矩阵，这里θ为某一实数.

如果$A^T A = E$,则$AA^T = E$;反之若$AA^T = E$，则$A^T A = E$.

因此我们也可以用$AA^T = E$来定义A为直交矩阵.

设n级实方阵A表示为

$$A=\left[a_1,a_2,\cdots,a_n\right] \qquad a_i\in R^{n\times 1},i=1,2,\cdots,n$$

则

$$A^T A=[a_i^T a_j]_{n\times n}$$

因此若A为直交矩阵，即有$A^T A=E$,则

$$a_i^T a_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad i,j=1,2,\cdots,n \qquad\qquad (*)$$

反之，若（*）式成立，则$A^T A=E$,且$AA^T=E$,即A为直交矩阵，因此A为直交矩阵的充要条件是（*）式成立.

直交矩阵有以下明显性质：

（1） 直交矩阵A的行列式等于1或 - 1,

即$|A| = \pm 1$;

(2)直交矩阵是非奇异的，且$A^{-1} = A^T$;

(3)直交矩阵的乘积仍为直交矩阵，

即设A和B为同阶直交矩阵，则AB仍为直交矩阵.

下面介绍几种常用的直交矩阵：

（一）排列阵

设$p(1), p(2), \cdots, p(n)$是自然数1,2,⋯，n的任一种排列，那么排列阵

$$E(p)=\begin{bmatrix} e_{p(1)}^T \\ e_{p(2)}^T \\ \vdots \\ e_{p(n)}^T \end{bmatrix}$$

是一个直交矩阵.

事实上，易知

$$E(p)E(p)^T = \begin{bmatrix} e_{p(1)}^T \\ e_{p(2)}^T \\ \vdots \\ e_{p(n)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{p(1)} & e_{p(2)} & \cdots & e_{p(n)} \end{bmatrix}$$

$$= E$$

（二）*Givens*矩阵

二级矩阵

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

对θ为任一实数都是直交矩阵.这个矩阵左乘实向量

$(x, y)^T$得

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

记 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$ 这相当于将向量$(x, y)^T$依顺时针方向旋转θ角得（$x', y')^T$

一般地，令$R(p,q)$表示n级矩阵.

$$R(p,q)=\left[r_{pq}\right]_{n\times n}=$$

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& \cos\theta &&&& \sin\theta &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& -\sin\theta &&&& \cos\theta &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

矩阵的元素除

$$r_{pp} = r_{qq} = \cos\theta \qquad r_{pq} = -r_{qp} = \sin\theta$$

（$p < q$)外，其余元素与n级单位阵的相应元素相同.通常$R(p,q)$称为*Givens*平面旋转矩阵，简称为*Givens*矩阵，θ为旋转角.容易验证$R(p,q)$是一个直交矩阵.从而

$$R(p,q)^{-1} = R(p,q)^T$$

我们用$R(p,q)$左乘任一n级矩阵

$$B=\begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix}$$

时，只是把B的第p,q两行向量b_p^T, b_q^T分别改变为

$$b_p^T\cos\theta+b_q^T\sin\theta \quad 和 \quad -b_p^T\sin\theta+b_q^T\cos\theta$$

其余各行元素均不改变，这种变化可以看作在b_p, b_q两向量间所确定的平面上的一种旋转.

(三）*Householder*矩阵

前面已经证明当$x^T x = 1$,则

$$H = E - 2xx^T$$

称为*Householder*变换矩阵，简称*Householder*矩阵.

这是一类重要的直交矩阵.

设A是为$m \times n$实矩阵，若$A^T A = E_n$则称A是列直交矩阵；

若$AA^T = E_m$，则称A为行直交矩阵.

设

$$A=[a_{ij}]=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$$

是一个$m\times n$的列直交矩阵,其中a_i是A的第j列向量,$j=1,2,\cdots,n$.由于

$$A^TA=\begin{bmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_n^T\end{bmatrix}[a_1,a_2,\cdots,a_n]=\begin{bmatrix}a_i^Ta_j\end{bmatrix}=E_n$$

因此我们有 $$a_i^Ta_j=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}\qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

设

$$A=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$$

是一个$m\times n$的行直交矩阵，其中a_i^T是A的第i行向量$i=1,2,\cdots,m$

由于

$$AA^T=[a_i^T a_j]=E_m$$

因此我们有

$$a_i^T a_j=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \quad i,j=1,2,\cdots,m$$

设$A \in C^{n\times n}$，若 $A^H A = E_n$,则称A为一个酉矩阵.若 $A^H A = E_n$，则必有$AA^H = E_n$，所以$A^{-1} = A^H$.

一个n级矩阵

$$A = \left[a_{ij} \right] = \left[a_1, a_2, \cdots, a_n \right]$$

是酉矩阵的充要条件为

$$a_i^H a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

其中a_i是A的第j列向量.

第四章 习题

P198-203

1.(2)

2.(3)、（5）、（6)

4.(1)、(2)

5.

7.（3）

10.

12.

14.

15.

16.

17.

18.

20. (3)、(7)、(10)

21.

22.

23.(2)、（4）

24.(1)

25.

28.

29.

30.