对于 Mill 不等式, 根据 $\mathcal{N}(0,1)$ 的概率密度 $f(x)=e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ 有 $f'(x)=xf(x)$, 进一步可得

$$P(|X|\geq\epsilon)=2\int_{\epsilon}^{\infty}f(t)dt=2\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{tf(t)}{t}dt\leq 2\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f'(t)}{\epsilon}dt=\frac{2}{\epsilon}\left[f(t)\right]_{\epsilon}^{+\infty}=\frac{2}{\epsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\epsilon^2/2}.$$

□

若随机变量 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, 根据 Mill 不等式有

$$P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|\geq 3\right)\leq\min\left\{1,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{3e^{4.5}}\right\}=0.0030,$$

由此可得若 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, 则有

$$P(u-3\sigma\leq X\leq u+3\sigma)\geq 99.7\%,$$

因此在工程应用中, 一般通常认为

$$P(|X-\mu|\leq 3\sigma)\approx 1.$$

正太分布 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

由此可知其分布函数无闭式解, 可将 $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ 转为为标准正太分布 $\mathcal{N}(0,1)$, 设 $\mathcal{N}(0,1)$ 的分布函数为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

可以通过查表或计算机计算.

例4.10. *如果 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 求概率 $P(a\leq X\leq b)$.*

解. 将 $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ 转为为标准正太分布 $\mathcal{N}(0,1)$, 即

$$P(a\leq X\leq b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

□

4.3 连续随机变量函数的分布

前面研究了连续型随机变量, 实际中可能对连续随机变量的函数更感兴趣.

对连续随机变量 X, 函数 $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数, 则 $Y=g(X)$ 是一个随机变量. 若连续随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 则如何求解随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度, 即如何求解 $f_Y(y)$?

求解思路:

- 先求解 $Y=g(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(g(X)\leq y)=\int_{g(x)\leq y}f_X(x)dx$.

- 利用分布函数和概率密度之间的关系求解密度函数 $f_Y(y) = F'_Y(y)$.

例4.11. 设连续型随机变量 X 的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} x/8 & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的密度函数.

解. 求解分布函数

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2X + 8 \le y) = P(X \le \frac{y-8}{2}) = F_X(\frac{y-8}{2}),$$

可得密度函数

$$f_Y(y) = f_X(\frac{y-8}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{y-8}{32} & \frac{y-8}{2} \in [0, 4] \\ 0 & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{y-8}{32} & y \in [0, 16] \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

□

求解连续随机变量函数的概率密度, 往往会用到积分求导公式: 若函数 $F(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt$, 那么

$$F'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x).$$

例4.12. 设X的概率密度为$f_X(x)$, 求$Y = X^2$的概率密度.

解. 首先求解分布函数 $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$. 当 $y \le 0$ 时有 $F_Y(y) = 0$; 当 $y > 0$ 时有

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx,$$

进一步得到密度函数

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

最后得到

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})) & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

□

课题练习. 已知密度函数$f_X(x)$, 求$Y = |X|$的概率密度$f_Y(y)$.

下面给出一定理, 在满足定理条件时直接写出概率密度函数.

定理4.9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$ $x \in (-\infty, +\infty)$, 函数 $y = g(x)$ 处处可导且严格单调 (即 $g'(x) > 0$ 或 $g'(x) < 0$). 令其反函数 $x = g^{-1}(y) = h(y)$, 则 $Y = g(X)$ 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & y \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$ 和 $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

此定理可推广至区间函数 $f_X(x)$ $x \in [a,b]$, 上述定理依旧成立, 此时 $\alpha = \min\{g(a), g(b)\}$ 以及 $\beta = \max\{g(a), g(b)\}$.

Proof. 证明思路类似于前面的例题, 不妨假设 $g'(x) > 0$ (同理考虑 $g'(x) < 0$), 其反函数 $x = h(y)$ 也严格单调, 且 $g(x) \in [\alpha, \beta]$. 因此, 当 $y \leq \alpha$ 时, 有 $F_Y(y) = 0$; 当 $y \geq \beta$ 时有 $F_Y(y) = 1$; 当 $\alpha < y < \beta$ 时,

$$F_Y(y) = P(g(X) < y) = P(X \leq h(y)) = F(h(y)).$$

于是可得随机变量 Y 的概率密度

$$f_Y(y) = F'(h(y)) \cdot h'(y) = f_X(h(y)) \cdot h'(y).$$

□

定理4.10. 设 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = aX + b$ $(a > 0)$ 服从正太分布 $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Proof. 设函数 $g(x) = ax + b$, 可得 $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, 以及 $y = g(x)$ 的反函数为 $x = h(y) = (y-b)/a$, 且有 $h'(y) = 1/a$. 根据定理 4.9 可知

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a}) = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\frac{y-b}{a}-\mu)^2)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} e^{-(y-b-a\mu)^2/2a^2\sigma^2},$$

由此证明 $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. □

课题练习. 连续随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 证明 $Y = e^X$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma} e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

定理4.11. 设随机变量 X 的分布函数是严格单调的连续函数, 则 $Y = F(X) \sim U(0,1)$.

Proof. 令 $Y = F(X)$ 的分布函数为 $G(y)$, 则

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y).$$

由于分布函数 $F(x) \in [0,1]$, 所以当 $y < 0$ 时有 $G(y) = 0$; 当 $y \geq 1$ 时有 $G(y) = 1$; 当 $y \in [0,1]$ 时, 由于 $F(X)$ 严格单调, 所以 $F^{-1}(y)$ 存在且严格单调, 于是有 $G(y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$. 于是得到分布函数

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y \geq 1. \end{cases},$$

以及密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in [0,1] \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

□

Pascal/负二项分布

在多次 Bernoulli 试验中, 随机事件 A 发生的概率为 $p \in (0,1)$. 用 X 表示事件 A 第 r 次成功时发生的试验次数, 则 X 取值 $r, r+1, r+2, \cdots$, 其分布列为

$$P(X=n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{n-r} \cdot p = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, r+2, \cdots .$$

易知 $P(X=n) \geq 0$, 下面证明

$$\sum_{n=r}^{\infty} P(X=n) = p^r \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} (1-p)^{n-r} = 1.$$

设 $q = 1-p$, 根据泰勒展式有

$$p^{-r} = (1-q)^{-r} = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t+r-1}{r-1} q^t = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} (1-p)^{n-r} \quad (\text{令 } n = t+r).$$

定理4.12. 设随机变量 X 服从参数为 $p \in (0,1)$ 和 $r > 0$ 的负二项分布, 则有

$$E(X) = \frac{r}{p} \quad \text{和} \quad Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Proof. 对于期望 $E(X)$ 有

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=r}^{\infty} n \cdot P(X=n) = \sum_{n=r}^{\infty} n \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= \frac{r}{p} \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n}{r} p^{r+1} (1-p)^{n-r} = \frac{r}{p} \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n+1-1}{r+1-1} p^{r+1} (1-p)^{n-r} = \frac{r}{p}. \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n+1-1}{r+1-1} p^{r+1} (1-p)^{n-r} = 1.$$

类似地, 对 $E(X^2)$ 有

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{n=r}^{\infty} n^2 P(X=n) = \sum_{n=r}^{\infty} n^2 \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= \frac{r}{p} \sum_{n=r}^{\infty} (n+1-1) \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= \frac{r(r+1)}{p^2} \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n+1}{r+1} p^{r+1} (1-p)^{n-r} - \frac{r}{p} \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \\ &= \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p}. \end{aligned}$$

于是得到

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

□