概率统计课程第八次作业

2020 年 11 月

1. 证明 chernoff 引理. 设 $x \in [a,b]$, $E[x]=\mu$. 对 $\forall t>0$, 有 $\mathbb{E}[e^{tx}] \le \exp(\mu t + \frac{t^2(b-a)^2}{8})$.

2. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个独立的随机变量, 且 $X_i \sim Ber(p_i)$, $p_i > 0$. 利用 chernoff 方法给出 $Pr[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n [X_i - \mathbb{E}(X_i)] \ge \epsilon]$ 和 $Pr[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n [X_i - \mathbb{E}(X_i)] \le -\epsilon]$ 的上界.

3. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个独立同分布随机变量, $X_i \in \{a,b\}$, $b>a$, 且 $P(X_i=a)=P(X_i=b)=\frac{1}{2}$. 求 $Pr[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{a+b}{2}) \ge \epsilon]$ 和 $Pr[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{a+b}{2}) \le -\epsilon]$ 的上界. (利用讲义中 $X_i = \pm 1$ 的结论可解).

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个独立的随机变量, 且 $X_i \sim Ber(p_i)$, $p_i > 0$. $X = \sum_{i=1}^n X_i$, $\mu = \sum_{i=1}^n p_i$. 对 $\forall 0<\epsilon<1$, 证: $Pr[X \ge (1+\epsilon)\mu] \le e^{-\mu\epsilon^2/3}$.

5. 设随机变量 X 的期望 $\mathbb{E}(X)=\mu>0$, 方差为 σ^2. 对 $\forall \epsilon>0$, 有 $P(X-\mu \le -\epsilon) \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\epsilon^2}$.

6. 对 n 个独立同分布随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 满足 $\mathbb{E}(X_i)=\mu$, $Var(X_i) \le v$. 对 $\forall \epsilon > 0$, 证明: $Pr[|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu| \ge \epsilon] \le \frac{v}{n\epsilon^2}$.

7. 阐述什么是 chernoff 方法.

作业上交日期：11 月 26 日课前

学术诚信

允许同学之间的相互讨论，但是署你名字的工作必须由你完成，不允许直接照搬任何已有的材料，必须独立完成作业的书写过程。

在完成作业过程中，对他人工作（出版物、互联网资料）中文本的直接照搬（包括原文的直接摘抄及语句的简单修改等）都将视为剽窃，剽窃者成绩将被取消。对于完成作业中有关键作用的公开资料，应予以明显引用。

如果发现作业之间高度相似将被判定为互相抄袭行为，抄袭和被抄袭双方的成绩都将被取消。因此请主动防止自己的作业被他人抄袭。