Chapter 1 概率论基本概念

南京大学

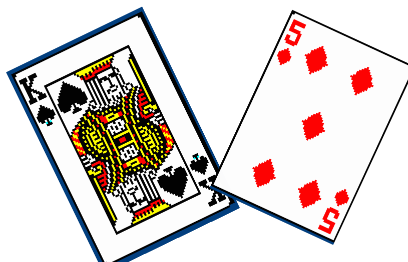
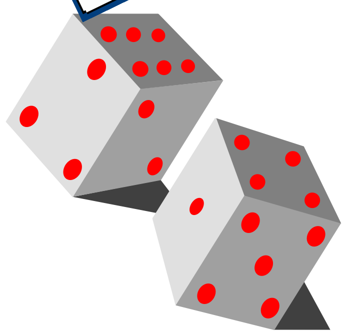
高 尉

生活的世界充满了各种随机现象

我们无时无刻不面对具有不确定性现象，即随机现象

- 机会游戏：硬币、掷骰子和摸扑克、彩票 ...
- 社会现象：婴儿的诞生、流星殒落、蝴蝶效应 ...





随机现象

自然界所观察到的现象：必然现象　随机现象

- **必然现象：**在一定条件下必然发生的现象，其特征是条件完全决定结果
  - 太阳从东边升起
  - 水往低处流
  - 可导的函数必连续

- **随机现象：**在一定条件下可能出现、可能不出现的现象，其特征是条件不能完全决定结果

例1：在相同条件下掷一枚均匀的硬币

结果：可能是正面、也可能反面

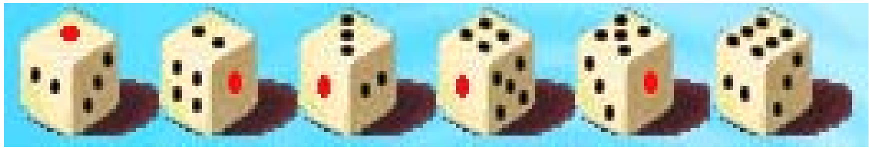
随机现象(续)

例2：同一门火炮向同一目标发射同一种炮弹多发

结果：弹落点会各不相同

例3：抛一枚骰子

结果：1，2，3，4，5，6



例4：过马路交叉口时，可能遇上的交通指挥灯

结果：红、黄、绿

例5：一批含正品和次品的产品中任取一个产品

结果：正品、次品

随机现象的必然性与偶然性

- 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系,其数量关系无法用函数确切的描述
- 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，即多种可能的结果中不能确定到底是哪一种结果
- 随机现象是否是无规律可言　　不是

大量重复试验或观察中，结果的出现具有一定的统计规律性

□ 偶然性：对随机现象做一次观察，观察结果不可预知

□ 必然性：对随机现象做大量观察，观察结果具有一定的规律性，即统计规律性

概　率:研究随机现象统计规律性的数学分支

Laplace:对生活中大部分，最重要的问题实际上只是概率问题

随机试验

- **随机现象**：具有**不确定性**（或偶然性）的现象
- 试　　验：对某随机现象的观察或测量等
- **随机试验(用E表示)**：具备以下三个特点的试验
  - **可重复**：可在相同的条件下重复进行
  - **多结果**：结果不止一个，所有可能的结果事先已知
  - **不确定**：试验前无法预测/确定哪一种结果

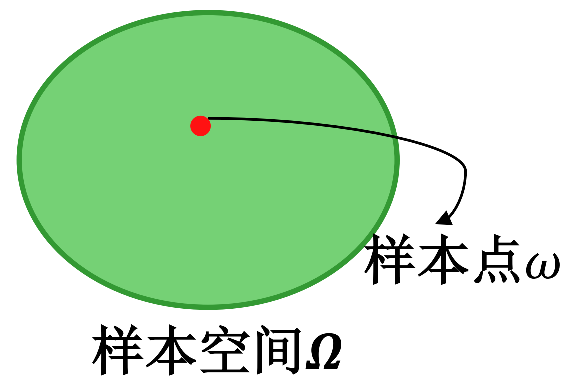
例如

✓ E_1： 抛一枚骰子，观察其出现的点数

✓ E_2：随机选取一盏电灯，测试其寿命

样本空间

- **样本点**：试验的每一种可能的结果
  - 记为ω
- **样本空间**：试验中所有可能的结果组成的集合
  - 记为Ω



E_1： 抛一枚骰子，观察其出现的点数

样本空间$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E_2：随机选取一盏电灯，测试其寿命

样本空间$\Omega = \{t\colon\ t \geq 0\}$

样本空间

有限样本空间：有限个样本点

例：将一枚硬币抛掷两次，观察正面H、反面T出现的情况，则该试验的样本空间$\Omega=?$

无限可列样本空间：样本点是无限的但可列的

例：中国一年内出生的婴儿数，其样本空间$\Omega=?$

不可列样本空间：样本点是无限的、且不可列的

例：随机选取一盏电灯，测试其寿命，则样本空间$\Omega=?$

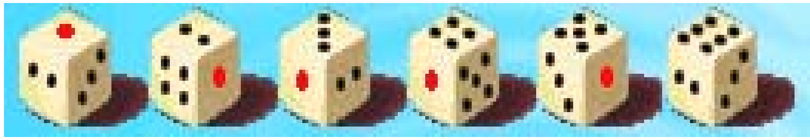
随机事件

随机事件：样本空间Ω的子集，由单个或某些样本点ω的集合

- **本质是集合**
- 一般用字母A、B、C等

称"**随机事件A发生**"当且仅当**试验的结果是子集A中的元素**

对试验E：抛两枚骰子



其样本空间$\Omega = \{(i,j): i,j \in [6]\}$

- 随机事件A：点数相同，$A=?$
- 随机事件B：点数和为偶数，$B=?$

随机事件

- **基本事件**：由单个样本点构成的单点集合

对试验E：抛一枚骰子

– $A=\{\text{掷出1点}\}$　$\mathrm{B}=\{\text{掷出基数点}\}$

- **必然事件**：试验中必定发生的事件，记为Ω
- **不可能事件**：试验中不可能发生的事件，用∅表示

对试验E：抛一枚骰子

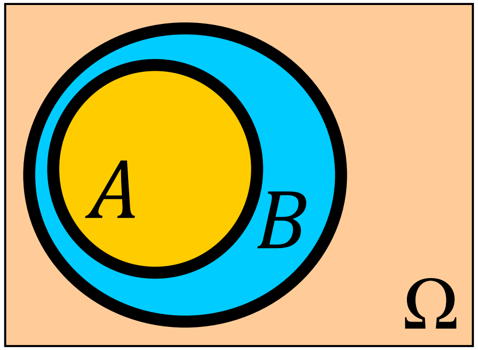
– “抛出的点数小于7”的事件是必然事件

– “抛出的点数大于7”的事件是不可能事件

概率论与集合论之间的关系

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	随机事件	子集

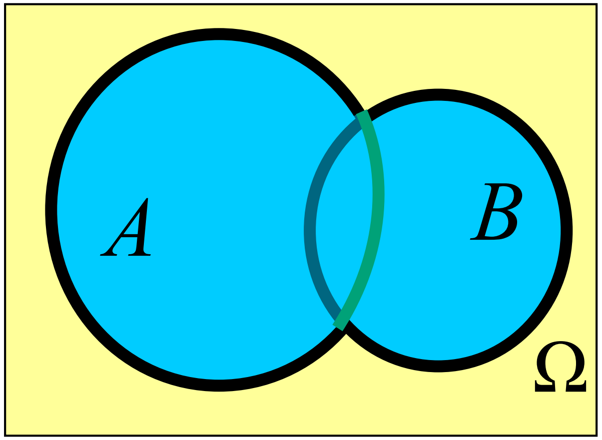
事件间的关系



包含：若A发生必然导致B发生，称事件B包含事件A，记为$\boldsymbol{A \subset B}$或$\boldsymbol{B \supset A}$

相等：若$A \supset B$且$B \supset A$，记为$\boldsymbol{A = B}$

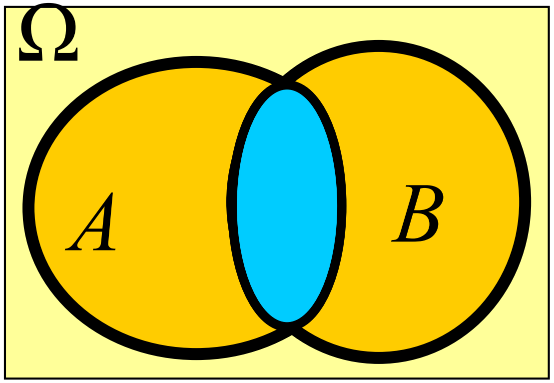
事件间的关系



事件的并：事件A和B至少发生一个的事件称为A和B的并/和，记为$\boldsymbol{A \cup B}$

事件$A_1, A_2, \dots, A_n$中至少有一个发生的事件称为$A_1, A_2, \dots, A_n$的并,记为

$$\boldsymbol{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \cup_{i=1}^{n} A_i}$$



事件的交: 事件A和B同时发生的事件称为A与B的交/积，记为$A \cap B = AB$

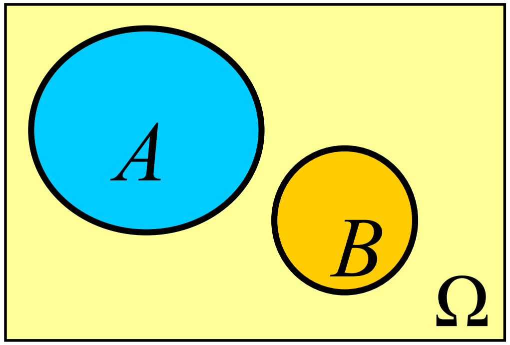
事件$A_1, A_2, \dots, A_n$同时发生的事件称为$A_1, A_2, \dots, A_n$的交，记

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n$$

事件间的关系

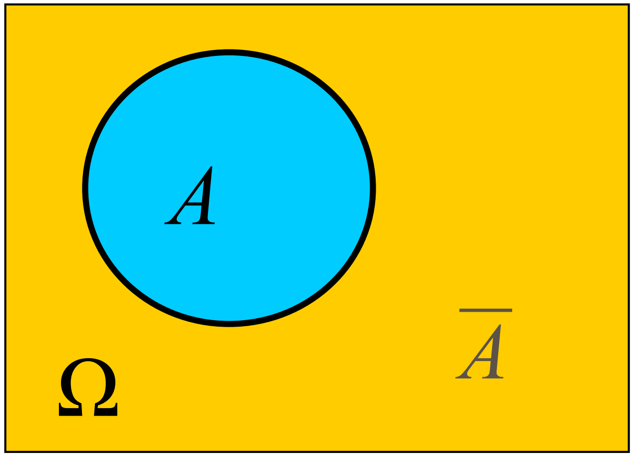
互斥/互不相容：若事件A和B不可能同时发生，称事件A和B互斥、或互不相容

$B \cap A = \emptyset$



对立/逆事件：事件 A 不发生的事件称为A的对立事件、或逆事件，记$\bar{A}$

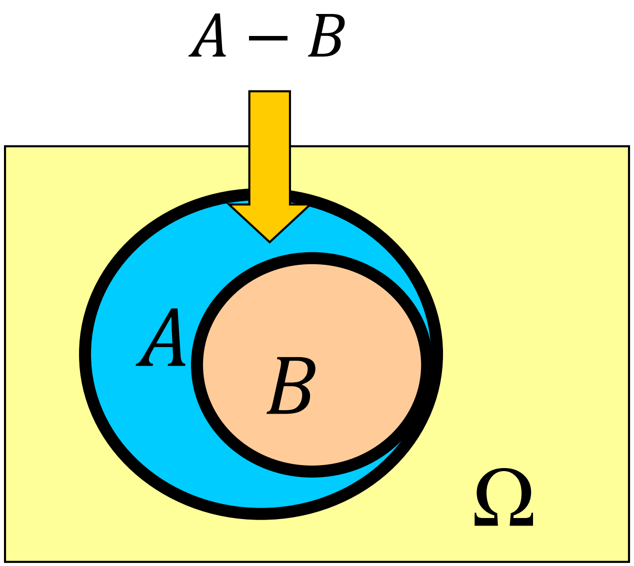
$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \qquad A \cup \bar{A} = \Omega$$

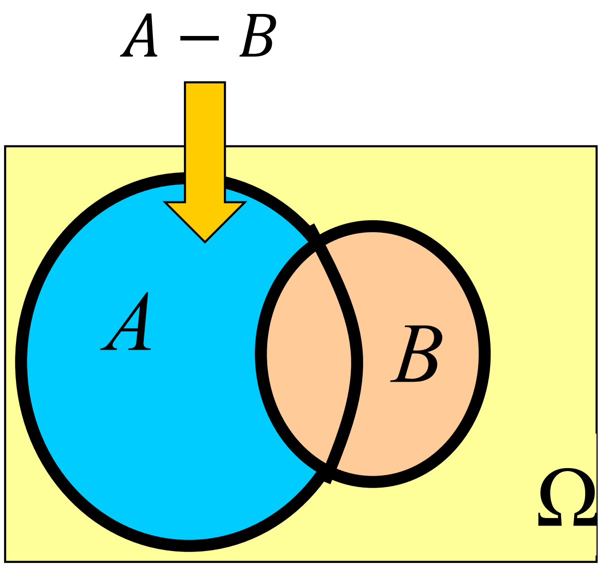


对立和互不相容事件之间的关系?

事件间的关系

事件的差： A发生，而B不发生的事件称为A与B的差，记为$\boldsymbol{A-B}$





$$A-B=A-AB=A\bar{B}$$

概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
$\bar{A}$	A的对立事件	A的补集
$A \subset B$	A发生必然导致B发生	A是B的子集
$A = B$	事件A与事件B相等	集合A与集合B相等
$A \cup B$	事件A与事件B的和	集合A与集合B的并集
$A \cap B$	事件A与B的积事件	集合A与集合B的交集
$A - B$	事件A与事件B的差	集合A与集合B的差集
$A \cap B = \emptyset$	事件A与事件B互不相容	集合A与集合B中没有相同的元素

事件的运算规律

- 幂等律： $A\cup A = A,\ A\cap A = A$
- 交换律： $A\cup B = B\cup A,\ A\cap B = B\cap A$
- 结合律： $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

  $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
- 分配律： $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

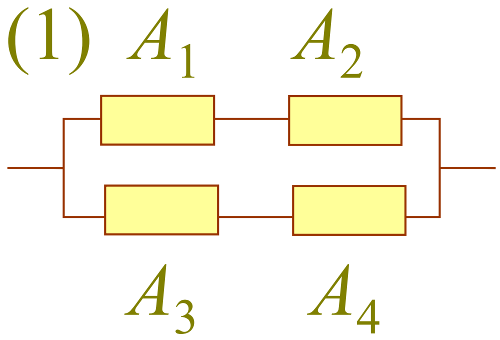
  $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
- 对偶律：$\overline{A\cup B} = \bar{A}\bar{B}$ ，$\overline{AB} = \bar{A}\cup\bar{B}$

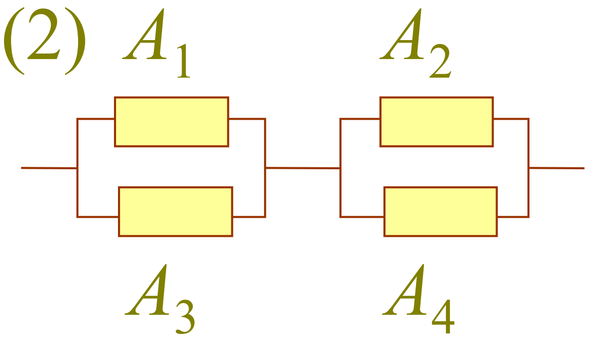
练习

设A、B、C为三个随机事件，试用A、B、C表示如下随机事件：

- A发生、 且B和C不发生
- A、B、C都不发生
- A、B、C中恰好有一个事件发生
- A、B、C中至少有两个事件发生
- A、B、C中至少有一个事件发生
- A、B、C中恰好有两个事件发生

可靠性系统





如图(1)、(2)两个系统中 A_i表示"第i个元件工作正常", B_i表示"第i个系统工作正常"

试用A_1, A_2, A_3, A_4表示B_1, B_2

解: (1) $B_1 = A_1A_2 \cup A_3 A_4$

(2) $B_2 = (A_1 \cup A_3)(A_2 \cup A_4)$

频率

在相同的条件下，进行了n次试验，n次试验中事件A发生的次数为n_A，称为A发生的频数。事件A发生的频率为

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

频率的性质：

- $0 \leq f_n(A) \leq 1$
- $f_n(\Omega) = 1$
- 若$A_1, A_2, \dots A_k$两两互不相容，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

频率的稳定性

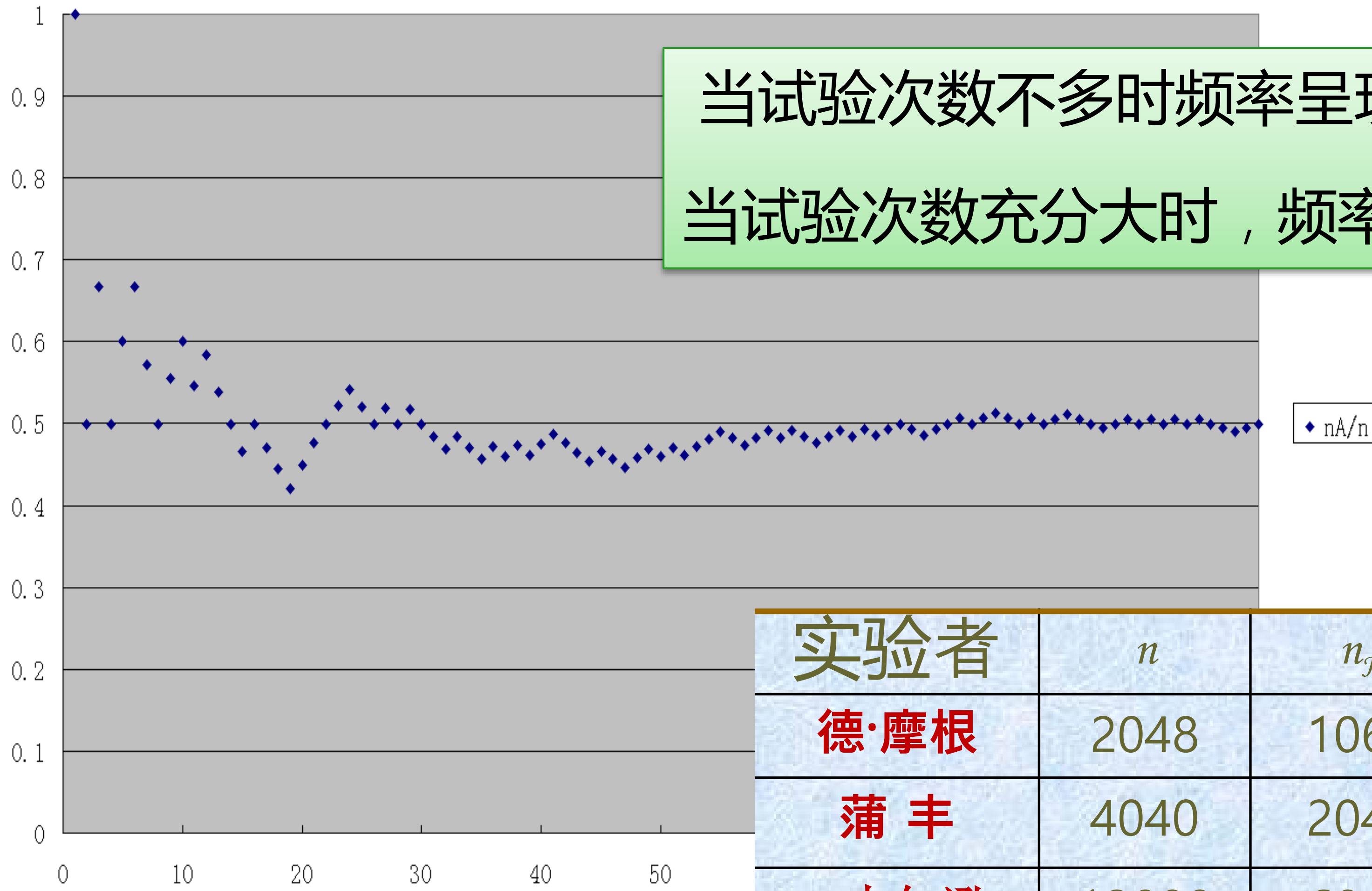
在充分多次试验中，事件的频率总在一个定值附近摆动，而且试验次数越多，一般来说摆动越小，这个性质称为**频率的稳定性**。

例：抛硬币出现的正面的频率

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

频率的稳定性

例：抛硬币出现的正面的频率



当试验次数不多时频率呈现波动性

当试验次数充分大时，频率具有稳定性

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

概率的统计定义

在大量重复的试验中，事件A发生的频率总是稳定在一个确定的常数附近，定义该常数为事件A发生的概率，记为$P(A)$

当重复的次数足够多，即$n \to \infty$时，有

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

概率的性质：

- $0 \le f_n(A) \le 1$
- $f_n(\Omega) = 1$
- 若$A_1, A_2, \dots A_k$两两互不相容，则

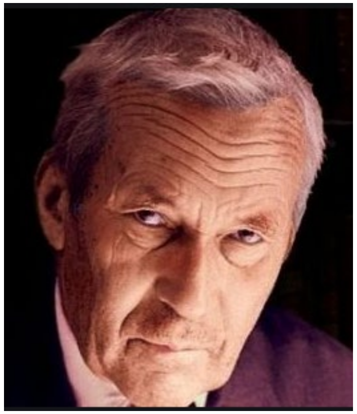
$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

概率与频率

- 概率用于度量事件发生的可能性
- 频率在一定程度上反映了事件发生的可能性
- 概率是恒定的，而频率在一些列试验中可能是变化的
- 但只要试验次数足够多，频率与概率非常接近
- 概率可以通过频率来“测量”，频率是概率的一个近似

概率的公理化定义

苏联数学家柯尔莫哥洛夫于1933年给出了概率的公理化定义，即通过规定概率应具备的基本性质来定义概率。



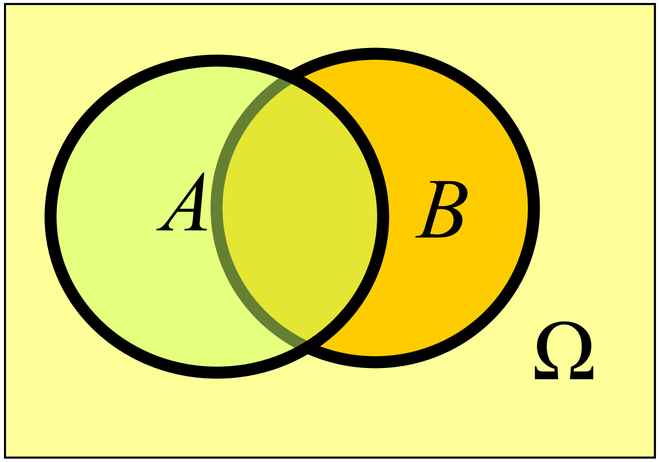
在随机试验的样本空间Ω上，对于每一个事件A赋予一个实数，记为$P(A)$，称为事件A的概率，其满足下列条件：

- **非负性**：$P(A) \geq 0$
- **规范性**：$P(\Omega) = 1$
- **可列可加性**：若$A_1, A_2, \ldots$两两互不相容，则

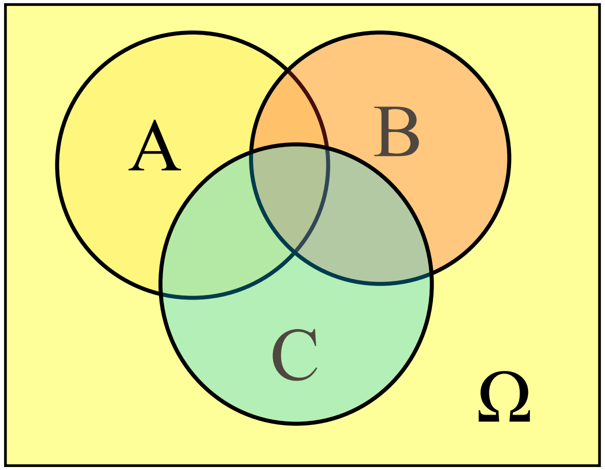
$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

概率的性质

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 若$A \subset B$，则$P(A) \leq P(B)$
- $P(B - A) = P(B) - P(AB)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$



- $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$

不等式

Union bounds: 对事件集$A_1, A_2, \dots, A_n$有

$$\boldsymbol{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \le \sum_i P(A_i)}$$

推广：Bonferroni不等式

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \ge \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P\left(A_i A_j\right)$$

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P\left(A_i A_j\right) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P\left(A_i A_j A_k\right)$$

…