2020春季学期“数理逻辑”课程作业六

1. 设Φ与Ψ为一阶语言的公式集合, 且$Con(\Phi)$与$Con(\Psi)$, 证明:

(1) $Con(\Phi \cap \Psi)$;

(2) 举反例说明$Con(\Phi \cup \Psi)$ 未必成立.

2. 若Γ为一阶语言的有穷公式集, A, B为公式, c为A、B的新常元, 证明若$\Gamma, A[c/x] \models B$, 则$\Gamma, \exists x A \models B$.

3. 求公式$\forall x \exists y \forall z \exists u P(x, y, z, u)$的Skolem范式.

4. A为前束范式, 证明若$FV(A) = \emptyset$, 则$FV(A^S) = \emptyset$.

5. 证明对于任何n, $|H_n| < \aleph_0$, 且$|H_A| = \aleph_0$.

6$\star$. 一阶语言$\mathcal{L}$的定理T: 对于给定的一阶语言$\mathcal{L}$, 若$\mathcal{L} \models \phi$表示在该语言中公式ϕ 永真, 则一阶语言$\mathcal{L}$的定理$T(\mathcal{L})$指公式集合$\{\varphi | \mathcal{L} \models \varphi\}$, 其中$\mathcal{L}$称为$T$的一个*模型*.

试证明Upwards Löwenheim - Skolem theorem: 如果定理T存在一个无限模型，则T存在任意大小的模型.