§3 双线性函数

定义 3 V 是数域 P 上一个线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上一个二元函数，即对 V 中任意两个向量 α,β，根据 f 都唯一地对应于 P 中一个数 $f(\alpha,\beta)$.如果 $f(\alpha,\beta)$ 有下列性质：

1) $f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1f(\alpha,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2)$

2) $f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$

其中 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta,\beta_1,\beta_2$ 是 V 中任意向量，k_1,k_2 是 P 中任意数，则称 $f(\alpha,\beta)$ 为 V 上的一个双线性函数.

对 $\forall\alpha,\ \beta\in V, f(\alpha,\ \beta)\to P$,可以表示成：$f:V\times V\to P$

这个定义实际上是说对于V上双线性函数$f(\alpha,\beta)$，将其中一个变元固定时是另一个变元的线性函数.

例 1 欧氏空间V的内积是V上双线性函数.

例 2 设$f_1(\alpha),f_2(\alpha)$都是线性空间V上的线性函数，则

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta),\qquad \alpha,\beta\in V$$

是V上的一个双线性函数.

例 3 设 P^n 是数域 P 上 n 维列向量构成的线性空间. $x, y \in P^n$ 再设 A 是 P 上 n 级方阵.令

$$f(x, y) = x^T A y \tag{1}$$

则 $f(x, y)$ 是 P^n 上的一个双线性函数.

如果设 $x^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y^T = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，并设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{2}$$

（1）或（2）实际上是数域P上任意n维线性空间V上的双线性函数$f(\alpha,\beta)$的一般形式.可以如下地说明这一事实.取V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.设

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x$$

$$\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)y$$

则

$$f(\alpha,\beta)=f(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j \qquad (3)$$

令

$$a_{ij}=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j),\ i,j=1,2,\cdots,n$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则（3）就成为（1）或（2）.

定义 4 设 $f(\alpha,\beta)$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{pmatrix} \qquad (4)$$

叫做 $f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵.

下面分析一下例2中的度量矩阵.

f_1，f_2是线性空间V上的线性函数，则令

$$f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta), \qquad \forall\alpha,\beta\in V.$$

则$f(\alpha,\beta)$是V上的线性函数.

设V是n维欧氏空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组标准正交基.则

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,\ \beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n$$

故 $$f_1(\alpha)=f_1(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n)=\sum_{i=1}^n x_i f_1(\varepsilon_i)$$

$$f_2(\beta)=f_2(y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n)=\sum_{j=1}^n y_j f_2(\varepsilon_j)$$

这样

$$f_1(\alpha)f_2(\beta)=[\sum_{i=1}^{n}x_i f_1(\varepsilon_i)][(\sum_{j=1}^{n}y_j f_2(\varepsilon_j)]$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix} f_1(\varepsilon_1) \\ f_1(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ f_1(\varepsilon_n) \end{bmatrix}(f_2(\varepsilon_1),f_2(\varepsilon_2),\cdots,f_2(\varepsilon_n))\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

令 $a_{ij}=f_1(\varepsilon_i)f_2(\varepsilon_j),\qquad i=1,2,\cdots,n,\qquad i=1,2,\cdots,n$

则 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

这样 $f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta)=x^T Ay$

这里n级矩阵A是秩1矩阵，即$rank(A)=1$.且

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\qquad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

分别是α，β在标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的座标.

上面的讨论说明，取定V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$后，每个双线性函数都对应于一个$n$级矩阵，就是这个双线性函数在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的度量矩阵.度量矩阵被双线性函数及基唯一确定.而且不同的双线性函数在同一基下的度量矩阵是不同的.

反之，任给数域 P 上一个 n 级矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对 V 中任意向量 $\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x$ 及 $\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)y$，其中 $x^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y^T=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 用

$$f(\alpha,\beta)=x^T Ay=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i y_j$$

定义的函数是 V 上一个双线性函数.容易计算出 $f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵就是 A.

因此，在给定的基下，V 上全体双线性函数与 P 上全体 n 级矩阵之间的一个双射.

在不同的基下，同一个双线性函数的度量矩阵一般是不同的，它们之间的什么关系呢？

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是线性空间 V 的两组基，则一定存在 n 级过渡矩阵 C：

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C$$

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)x_1$$

$$\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)y_1$$

那么

$$x=Cx_1\ ,\ y=Cy_1$$

如果双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的度量矩阵分别为 A,B，则有

$$f(\alpha,\beta)=x^TAy=(Cx_1)^TA(Cy_1)=x_1^T(C^TAC)y_1$$

又

$$f(\alpha,\beta)=x_1^TBy_1$$

因此

$$B=C'AC$$

这说明同一个双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的.

定义 5 设 $f(\alpha,\beta)$ 是线性空间 V 上一个双线性函数，如果

$$f(\alpha,\beta)=0$$

对任意 $\beta\in V$，可推出 $\alpha=0$，f 就叫做非退化的.

可以应用度量矩阵来判断一个双线性函数是不是退化的.设双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵为 A，则对 $\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x$，$\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)y$，有

$$f(\alpha,\beta)=x^TAy$$

如果向量α满足

$$f(\alpha,\beta)=0,\ \forall\beta\in V$$

那么对任意y都有 $x^T Ay=0$

因此 $x^T A=0$

而有非零向量x使上式成立的充要条件为A是退化的，因此易证双线性函数$f(\alpha,\beta)$是非退化的充要条件为其度量矩阵A为非退化矩阵.

对度量矩阵作合同变换可使度量矩阵化简.但对一般矩阵用合同变换化简是比较复杂的.对于对称矩阵已有较完整的理论.

定义 6 $f(\alpha,\beta)$ 是线性空间 V 上的一个双线性函数，如果对 V 上任意两个向量 α,β 都有

$$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$$

则称 $f(\alpha,\beta)$ 为对称双线性函数.如果对 V 中任意两个向量 α,β 都有

$$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$$

则称 $f(\alpha,\beta)$ 为反对称双线性函数.

设 $f(\alpha,\beta)$ 是线性空间 V 上的一个对称双线性函数，对 V 的任一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$， 由于

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=f(\varepsilon_j,\varepsilon_i)$$

故其度量矩阵是对称的，另一方面，如果双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵是对称的，那么对 V 中任意两个向量 $\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x$ 及 $\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)y$ 都有

$$f(\alpha,\beta)=x^T Ay=y^T A^T x=y^T Ax=f(\beta,\alpha)$$

因此 $f(\alpha,\beta)$ 是对称的，这就是说，双线性函数是对称的，当且仅当它在任一组基下的度量矩阵是对称的.

同样，双线性函数是反对称的的充要条件是它在任一组基下的度量矩阵是反对称矩阵.

我们知道，欧氏空间的内积不仅是对称双线性函数，而且它在任一基下的度量矩阵是正定矩阵.

定理 5 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，使 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的度量矩阵为对角矩阵.

证明　定理只要证明能找到一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,使得在这组基下，其度量矩阵$A$为对角阵，即$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 \quad i\neq j$,

如果对V中所有向量α,β都有$f(\alpha,\beta)=0$,那结论就成立了.

设$f(\alpha,\beta)$不全为零，则先证必有ε_1使得$f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)\neq 0$.否则，

若对于所有$\alpha\in V$都有$f(\alpha,\alpha)=0$,那么对任意的$\alpha,\beta\in V$,有

$$f(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-f(\alpha,\alpha)-f(\beta,\beta)]=0$$

这就与$f(\alpha,\beta)$不全为零矛盾.

所以使得$f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)\neq 0$的$\varepsilon_1$是存在的.

下面对空间n作归纳法.

设对于维数$\leq n-1$的空间，上述结论成立.

将ε_1扩充成V的一组基$\varepsilon_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，令

$$\varepsilon_i^{'}=\eta_i-\frac{f(\varepsilon_1,\eta_i)}{f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1,\qquad i=2,\cdots,n.$$

则 $$f(\varepsilon_1,\varepsilon_i^{'})=f(\varepsilon_1,\eta_i-\frac{f(\varepsilon_1,\eta_i)}{f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1)=0,\qquad i=2,\cdots,n.$$

易知$\varepsilon_1,\varepsilon_2^{'},\cdots,\varepsilon_n^{'}$仍是$V$的一组基.设由$\varepsilon_2^{'},\cdots,\varepsilon_n^{'}$生成的线性子空间为$L(\varepsilon_2^{'},\cdots,\varepsilon_n^{'})$,则对$\forall\alpha\in L(\varepsilon_2^{'},\cdots,\varepsilon_n^{'})$,满足$f(\varepsilon_1,\alpha)=0$.

而且$V=L(\varepsilon_1)\oplus L(\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')$,把$f(\alpha,\beta)$看成是$L(\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')$上的双线性函数，仍然是对称的，但是$L(\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')$的维数小于$n$,由归纳法的假设，$L(\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')$有一组基$\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$满足

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, \qquad i,j=2,\cdots,n, \qquad i\neq j$$

由于$V=L(\varepsilon_1)\oplus L(\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')$,故$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基，且满足要求.

故得证.

如果 $f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵为对角矩阵，那么对

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\,,\beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$$

$f(\alpha,\beta)$ 有表示式

$$f(\alpha,\beta)=d_1x_1y_1+d_2x_2y_2+\cdots+d_nx_ny_n$$

容易看出，这个表达式也是 $f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵为对角形的充分条件.

推论 1 设V是复数域上n维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是V上对称双线性函数，则存在V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，对$V$中任意向量

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$$

有 $$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ry_r \qquad (0\le r\le n)$$

推论 2 设V是实数n上维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是V上对称双线性函数，则存在V的一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，对$V$中任意向量

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$$

有 $$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ry_r \qquad (0\le p\le r\le n)$$

对称双线性函数与二次齐次函数是 1—1 对应的.

定义 7 设 V 是数域 P 上线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上双线性函数.当 $\alpha=\beta$ 时，V 上函数 $f(\alpha,\alpha)$ 称为与 $f(\alpha,\beta)$ 对应的二次齐次函数.

给定 V 上一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，设 $f(\alpha,\beta)$ 的度量矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.对 V 中任意向量

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$$

有

$$f(\alpha,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{5}$$

式中 $x_i x_j$ 的系数为 $a_{ij}+a_{ji}$（即$a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$）.因此如果两个双线性函数的度量矩阵分别为

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n} \text{ 及 } B=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$$

只要

$$a_{ij}+a_{ji}=b_{ij}+b_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

那么它们对应的二次齐次函数就相同，