以及定义 **样本极差** 为

$$R_n = X_{(n)} - X_{(1)}.$$

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, 则有

$$F_{X_{(1)}}(x) = \Pr(X_{(1)} \le x) = 1 - \Pr(X_{(1)} > x) = 1 - (1 - F(x))^n, \qquad F_{X_{(n)}}(x) = F^n(x).$$

定理8.1. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体 X 的一个样本, 则第 k 次序统计量 $X_{(k)}$ 的分布函数和密度函数分别为

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} [F(x)]^r [1 - F(x)]^{n-r} \\ f_k(x) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x). \end{aligned}$$

Proof. 根据题意有第 k 次序统计量 $X_{(k)}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \Pr[X_{(k)} \le x] = \Pr[X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ 中至少有 } k \text{ 个随机变量 } \le x] \\ &= \sum_{r=k}^{n} \Pr[X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ 中恰有 } r \text{ 个随机变量 } \le x,\ n-r \text{ 个随机变量 } > x] \\ &= \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} [F(x)]^r [1 - F(x)]^{n-r}. \end{aligned}$$

利用恒等式

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt \quad (r \in [n],\ p \in [0,1])$$

由此可知

$$F_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{F(x)} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt,$$

根据积分函数求导完成证明. □

8.3 Beta 分布、Γ 分布、Dirichlet 分布

首先介绍两积分函数.

定义8.3 (Beta-函数)**.** 对任意给定 $\alpha_1 > 0$ 和 $\alpha_2 > 0$, 定义 *Beta* 函数为

$$Beta(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 x^{\alpha_1 - 1} (1-x)^{\alpha_2 - 1} dx,$$

有些书简记为 $B(\alpha_1, \alpha_2)$, 被称为第一类欧拉积分函数.

根据数学分析可知 $\mathrm{Beta}(\alpha_1,\alpha_2)$ 在定义域 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 连续. 利用变量替换 $t=1-x$,根据定义有

$$\begin{aligned}\mathrm{Beta}(\alpha_1,\alpha_2) &= \int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt = \int_1^0 (1-x)^{\alpha_1-1}x^{\alpha_2-1}d(1-x)\\ &= \int_0^1 x^{\alpha_2-1}(1-x)^{\alpha_1-1}dx = \mathrm{Beta}(\alpha_2,\alpha_1),\end{aligned}$$

由此可知 Beta 函数的对称性: $\mathrm{Beta}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathrm{Beta}(\alpha_2,\alpha_1)$.

定义8.4 (Γ-函数)**.** 对任意给定 $\alpha>0$, 定义 Γ-函数为

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

又被称为第二类欧拉积分函数.

性质8.1. 对 Γ-函数, 有 $\Gamma(1)=1$ 和 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, 以及对 $\alpha>1$ 有 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$.

Proof. 根据定义有

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1.$$

利用变量替换 $x=t^{1/2}$ 有

$$\Gamma(1/2)=\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty} x^{-1}e^{-x^2}dx^2=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

进一步有

$$\Gamma(\alpha)=-\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}de^{-x}=-[x^{\alpha-1}e^{-x}]_0^{+\infty}+(\alpha-1)\int_0^{+\infty} x^{\alpha-2}e^{-x}dx=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

□

对任意正整数 n, 根据上面的性质有

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

关于 Beta 函数和 Γ-函数, 有如下关系:

定理8.2. 对任意给定 $\alpha_1>0$ 和 $\alpha_2>0$, 有

$$Beta(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Proof. 根据 Γ-函数的定义有

$$\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha_1-1}e^{-t}dt\int_0^{+\infty} s^{\alpha_2-1}e^{-s}ds=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t+s)}t^{\alpha_1-1}s^{\alpha_2-1}dtds.$$

引入变量替换 $x=t+s$ 和 $y=t/(t+s)$, 反解可得 $t=xy$ 和 $s=x-xy$, 计算雅可比行列式有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -x.$$

同时有 $x\in(0,+\infty)$ 和 $y\in(0,1)$ 成立, 由此可得

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2) &= \int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha_1-1}y^{\alpha_1-1}x^{\alpha_2-1}(1-y)^{\alpha_2-1}|x|dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha_1+\alpha_2-1}y^{\alpha_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1}dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha_1+\alpha_2-1}dx\int_0^1 y^{\alpha_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1}dy \\
&= \Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\mathrm{Beta}(\alpha_1,\alpha_2)
\end{aligned}$$

定理得证. □

根据上述定理可知

推论8.1. 对任意 $\alpha_1>1$ 和 $\alpha_2>0$, 有

$$Beta(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1+\alpha_2-1}Beta(\alpha_1-1,\alpha_2).$$

Proof. 根据前面的定理有

$$\mathrm{Beta}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{(\alpha_1-1)\Gamma(\alpha_1-1)\Gamma(\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2-1)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-1)}=\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{Beta}(\alpha_1-1,\alpha_2).$$

□

定义8.5. 对任意 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k>0$, 定义多维 *Beta* 函数为

$$Beta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)}.$$

下面介绍三种分布:

定义8.6 (Beta 分布)**.** 给定 $\alpha_1>0$ 和 $\alpha_2>0$, 若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}}{B(\alpha_1,\alpha_2)} & x\in(0,1) \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

称 X 服从参数为 α_1 和 α_2 的 *Beta* 分布，记 $X\sim B(\alpha_1,\alpha_2)$.

定理8.3. 若随机变量 $X\sim B(\alpha_1,\alpha_2)$, 则有

$$E[X]=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} \quad \text{和} \quad Var(X)=\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_2+1)}.$$

Proof. 根据期望的定义有

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{B(\alpha_1,\alpha_2)}\int_0^1 x\cdot x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx = \frac{B(\alpha_1+1,\alpha_2)}{B(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}, \\ E[X^2] &= \frac{1}{B(\alpha_1,\alpha_2)}\int_0^1 x^{\alpha_1+1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx = \frac{B(\alpha_1+2,\alpha_2)}{B(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\alpha_1+1}{\alpha_1+\alpha_2+1}\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}, \end{aligned}$$

由此可得

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2]-E[X]^2 = \frac{\alpha_1(1+\alpha_1)}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+1)} - (\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2})^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_2+1)}.$$

□

例8.2. 设独立同分布随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 服从均匀分布 $\mathcal{U}(0,1)$, 记 $X_{(k)}$ 为其顺序统计量, 则

$$X_{(k)} \sim B(k, n-k+1).$$

Proof. 若随机变量 $X_i \sim U(0,1)$ $(i\in[n])$, 则当 $x\in(0,1)$ 时其分布函数 $F(x)=x$. 由此可得到第 k 个统计量 $X_{(k)}$ 的概率密度函数

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{B(k,n-k+1)}x^{k-1}(1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

□

下面定义 Γ 分布:

定义8.7. 如果随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

其中 $\alpha>0$ 和 $\lambda>0$, 则称随机变量 X 服从参数为 α 和 λ 的 Γ 分布, 记为$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$.

定理8.4. 若随机变量 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$, 则有 $E(X)=\alpha/\lambda$ 和 $Var(X)=\alpha/\lambda^2$.

Proof. 根据期望的定义有

$$E[X] = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^\alpha e^{-\lambda x}dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha e^{-\lambda x}dx = \alpha/\lambda.$$

以及

$$E[X^2] = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)}x^{\alpha+1}e^{-\lambda x}dx = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2,$$

由此可得

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2]-(E[X])^2 = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2 - \alpha^2/\lambda^2 = \alpha/\lambda^2.$$

□

我们有 Γ 分布的可加性:

定理8.5. 若随机变量 $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ 和 $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

Proof. 设随机变量 $Z = X + Y$, 根据独立同分布随机变量和函数的分布有随机变量 Z 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_0^z \frac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} (z-x)^{\alpha_2-1} e^{-\lambda(z-x)} dx \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1} dx \end{aligned}$$

令变量替换 $x = zt$ 有

$$\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}dx = z^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt = z^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathcal{B}(\alpha_1,\alpha_2)$$

在利用 Beta 函数的性质

$$\mathcal{B}(\alpha_1,\alpha_2) = \int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

代入完成证明. □

特别地, 若随机变量 $X \sim \Gamma(1/2, 1/2)$, 则其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

例8.3. 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则有 $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$.

解. 首先求解随机变量函数 $Y = X^2$ 的分布函数. 当 $y \leq 0$ 时有 $F_Y(y) = 0$; 当 $y > 0$ 时有

$$F_Y(y) = \Pr(X^2 \leq y) = \Pr(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

由此得到概率密度为 $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2}}$. 从而得到 $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$. □

下面介绍 Dirichlet 分布:

定义8.8. 给定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in (0, +\infty)$, 若多元随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 的密度函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \begin{cases} \frac{x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \cdots x_k^{\alpha_k-1}}{Beta(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)} & \sum_{i=1}^k x_i = 1,\ x_i > 0\ (i \in [k]), \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则称 X 服从参数为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 的 *Dirichlet* 分布, 记 $X \sim Dir(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$.

Dirichlet 分布是 Beta 分布的一种推广, 当 $k = 2$ 时 Dirichlet 分布退化为 Beta 分布.

定理8.6. 若随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_k)\sim Dir(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$, 设 $\tilde\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ 和 $\tilde\alpha_i=\alpha_i/\tilde\alpha$, 则

$$E[X_i]=\tilde\alpha_i \qquad \text{和} \qquad Cov(X_i,X_j)=\begin{cases}\frac{\tilde\alpha_i(1-\tilde\alpha_i)}{\tilde\alpha+1} & i=j,\\ -\frac{\tilde\alpha_i\tilde\alpha_j}{\tilde\alpha+1} & i\neq j.\end{cases}$$

Proof. 根据期望的定义有

$$\begin{aligned}E[X_i] &= \frac{\int\int_{\sum_i x_i=1,x_i\geq 0} x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\cdots x_k^{\alpha_k-1}\cdot x_i dx_1\cdots dx_k}{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)}\\ &= \frac{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+1,\cdots,\alpha_k)}{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_k)}=\frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}=\tilde\alpha_i.\end{aligned}$$

若 $i=j$, 则有

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_i)=E[X_i^2]-(E[X_i])^2=\frac{Beta(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+2,\cdots,\alpha_k)}{Beta(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_k)}-(\tilde\alpha_i)^2=\frac{\tilde\alpha_i(1-\tilde\alpha_i)}{\tilde\alpha+1}.$$

若 $i\neq j$, 则有

$$\begin{aligned}Cov(X_i,X_j) &= E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j]=\frac{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+1,\cdots,\alpha_j+1,\cdots,\alpha_k)}{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_k)}-\tilde\alpha_i\tilde\alpha_j\\ &= \frac{\alpha_i\alpha_j}{\tilde\alpha(\tilde\alpha+1)}-\tilde\alpha_i\tilde\alpha_j=-\frac{\tilde\alpha_i\tilde\alpha_j}{\tilde\alpha+1}.\end{aligned}$$

□

8.4 正态总体抽象分布定理

8.4.1 χ^2 分布

定义8.9. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ 的一个样本, 称 $Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 为服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记 $Y\sim\chi^2(n)$.

根据 $X_1^2\sim\Gamma(1/2,1/2)$ 和 Γ函数的可加性可得 $Y\sim\Gamma(n/2,1/2)$. 于是有随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

下面研究 χ^2 分布的性质:

定理8.7. 若随机变量 $X\sim\chi^2(n)$, 则 $E(X)=n$ 和 $Var(X)=2n$; 若随机变量 $X\sim\chi^2(m)$ 和 $Y\sim\chi^2(n)$ 相互独立, 则 $X+Y\sim\chi^2(m+n)$;

Proof. 若随机变量 $X\sim\chi^2(n)$, 则有 $X=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$, 其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $X'\sim\mathcal{N}(0,1)$ 的一个样本. 我们有

$$\begin{aligned}E[X] &= E[X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2]=nE[X_1^2]=n,\\ \mathrm{Var}(X) &= n\mathrm{Var}(X_1^2)=n[E(X_1^4)-(E(X_1^2))^2]=n(E(X_1^4)-1).\end{aligned}$$

计算

$$E(X_1^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{x^2}{2}}=3\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=3$$

可得 $\mathrm{Var}(X)=2n$. □

若随机变量 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 则

$$E(X^k)=\begin{cases}(k-1)!! & k \text{ 为偶数}\\ 0 & k \text{ 为奇数}\end{cases}$$

其中 $(2k)!!=2k\cdot(2k-2)\cdot\dots\cdot 2$ 和 $(2k+1)!!=(2k+1)\cdot(2k-1)\cdot\dots\cdot 1$.

例8.4. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自于总体 $\mathcal{N}(0,4)$ 的样本, 以及 $Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$. 求 a,b 取何值时, Y 服从 χ^2 分布, 并求其自由度.

解. 根据正态分布的性质有 $X_1-2X_2\sim\mathcal{N}(0,20)$ 和 $3X_3-4X_4\sim\mathcal{N}(0,100)$, 因此

$$\frac{X_1-2X_2}{2\sqrt{5}}\sim\mathcal{N}(0,1),\qquad \frac{3X_3-4X_4}{10}\sim\mathcal{N}(0,1),$$

所以当$a=\frac{1}{2\sqrt{5}},b=\frac{1}{10}$时有$Y\sim\chi^2(2)$成立. □

分布可加性:

- 如果 $X\sim\mathcal{N}(\mu_1,a_1^2)$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(\mu_2,a_2^2)$, 且 X 与 Y 独立, 那么 $X\pm Y\sim\mathcal{N}(\mu_1\pm\mu_2,a_1^2+a_2^2)$;
- 如果 $X\sim B(n_1,p)$ 和 $Y\sim B(n_2,p)$, 且 X 与 Y 独立, 那么 $X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$;
- 如果 $X\sim P(\lambda_1)$ 和 $Y\sim P(\lambda_2)$, 且 X 与 Y 独立, 那么 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_1)$;
- 如果 $X\sim\Gamma(\alpha_1,\lambda)$ 和 $Y\sim\Gamma(\alpha_2,\lambda)$, 且 X 与 Y 独立, 那么 $X+Y\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$.
- 如果 $X\sim\chi(m)$ 和 $Y\sim\chi(n)$, 且 X 与 Y 独立, 那么 $X+Y\sim\chi(m+n)$.

8.4.2 t 分布 (student distribution)

定义8.10. 随机变量 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ 和 $Y\sim\chi^2(n)$ 相互独立, 则随机变量

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 t-分布, 记 $T\sim t(n)$.

随机变量 $T\sim t(n)$ 的概率密度为

$$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

由此可知 t-分布的密度函数 $f(x)$ 是偶函数. 当 $n>1$ 为偶数时有

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots5\cdot3}{2\sqrt{n}(n-2)(n-4)\cdots4\cdot2};$$

当 $n>1$ 为奇数时有

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{\pi\sqrt{n}(n-2)(n-4)\cdots5\cdot3}.$$

当 $n\to\infty$ 时, 随机变量 $T\sim t(n)$ 的概率密度

$$f(x)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

因此当 n 足够大时, $f(x)$ 可被近似为 $\mathcal{N}(0,1)$ 的密度函数.

8.4.3 F 分布

定义8.11. 设随机变量 $X\sim\chi^2(m)$ 和 $Y\sim\chi^2(n)$ 相互独立, 称随机变量

$$F=\frac{X/m}{Y/n}$$

服从自由度为 (m,n) 的 F-分布, 记 $F\sim F(m,n)$.

随机变量 $F\sim F(m,n)$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})(1+\frac{mx}{n})^{\frac{m+n}{2}}} & x>0\\ 0 & x\le0\end{cases}$$

若随机变量 $F\sim F(m,n)$, 则 $\frac{1}{F}=F(n,m)$.

课题练习:

- 独立同分布随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 满足 $X_i\sim\mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2)$, 求 $\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_i)^2/\sigma_i^2$ 的分布.
- 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 是分别来自总体 $\mathcal{N}(0,9)$ 的两个独立样本, 求 $(X_1+X_2+\cdots+X_9)/\sqrt{Y_1^2+Y_1^2+\cdots+Y_9^2}$ 的分布.
- 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{2n}$ 来自总体 $\mathcal{N}(0,\sigma_2)$ 的样本, 求 $(X_1^2+X_3^2+\cdots+X_{2n-1}^2)/(X_2^2+X_4^2+\cdots+X_{2n}^2)$ 的分布.

8.4.4 正态分布的抽样分布定理

定理8.8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 的样本, 则有

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i\sim\mathcal{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n}),\qquad\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim\mathcal{N}(0,1).$$

定理8.9. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其样本均值和修正样本方差分别为

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n \quad 和 \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

则有 $\bar{X}$ 和 S^2 相互独立, 且

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

此定理证明参考书的附件.

定理8.10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其样本均值和修正样本方差分别为

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n \quad 和 \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

则有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

Proof. 根据前面两个定理可知 $(\bar{X}-\mu)/\sigma\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$ 和 $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$, 于是有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}} \sim t(n-1).$$

□

定理8.11. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别来自总体 $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ 和 $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ 的两个独立样本, 令其样本均值分别 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$, 修正样本方差分别为 S_X^2 和 S_Y^2, 则

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t(n_1+n_2-2).$$

Proof. 根据正太分布的性质有 $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2/m)$ 和 $\bar{Y} \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2/n)$, 以及

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\sigma^2\right),$$

进一步有

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sigma^2\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

根据定理 8.9 有 $\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$ 和 $\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 由此得到

$$\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2).$$

从而完成证明. □

定理8.12. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别来自总体 $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ 和 $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ 的两个独立样本, 令其样本均值分别 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$, 修正样本方差分别为 S_X^2 和 S_Y^2, 则有

$$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1).$$

Proof. 根据定理 8.9 有 $\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$ 和 $\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$, 由此得到

$$\frac{\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_X^2}/(m-1)}{\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}/(n-1)} \sim F(m-1, n-1).$$

□

课堂习题:

- 若随机变量 $X \sim t(n)$, 求 $Y = X^2$ 的分布.
- 设 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是来自总体 $\mathcal{N}(0,1)$ 的样本, 令 $Y = c_1(X_1 + X_3)^2 + c_2(X_2 + X_4 + X_5)^2$. 求常数 c_1, c_2 使 Y 服从 χ^2 分布.
- 设 X_1, X_2 是来自总体 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的样本, 求 $\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$ 的分布.

8.4.5 分位数(点)

定义8.12. 对给定 $\alpha \in (0,1)$ 和随机变量 X, 称满足 $\Pr(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ 的实数 λ_α 为上侧 α 分位数*(点)*.

对正态分布 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 给定 $\alpha \in (0,1)$, 满足 $\Pr(X > \mu_\alpha) = \int_{\mu_\alpha}^{\infty} f(x)dx = \alpha$ 的点 μ_α 称为正态分布上侧 α 分位点, 由对称性可知 $\mu_{1-\alpha} = -\mu_\alpha$.

对 $\chi^2(n)$ 分布 $X \sim \chi^2(n)$, 给定$\alpha \in (0,1)$, 满足 $\Pr(X \geq \chi_\alpha^2(n)) = \alpha$ 的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 称为 $\chi^2(n)$ 分布上侧 α 分位点. 当 $n \to \infty$ 时有 $\chi_\alpha^2(n) \approx \frac{1}{2}(\mu_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$, 其中 μ_α 表示正态分布上侧 α 分位点.

对 t-分布 $X \sim t(n)$, 给定 $\alpha \in (0,1)$, 满足 $\Pr(X > t_\alpha(n)) = \alpha$ 的点 $t_\alpha(n)$ 称为 $t(n)$-分布上侧 α 分位点. 由对称性可知 $t_{(1-\alpha)}(n) = -t_\alpha(n)$.

对 F-分布 $X \sim F(m,n)$, 给定 $\alpha \in (0,1)$, 满足 $\Pr[X > F_\alpha(m,n)] = \alpha$ 的点 $F_\alpha(m,n)$ 称为 $F(m,n)$ 分布上侧 α 分位点. 对于 F-分布, 有如下性质:

引理8.4. 对 F 分布的分位点有

$$F_{(1-\alpha)}(m,n) = \frac{1}{F_\alpha(n,m)}.$$

Proof. 设 $X \sim F(m,n)$, 根据定义有

$$1 - \alpha = \Pr(X > F_{1-\alpha}(m,n)) = \Pr\left(\frac{1}{X} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\right) = 1 - \Pr\left(\frac{1}{X} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\right).$$

再根据 $1/X \sim F(n,m)$, 结合上式有

$$\alpha = \Pr\left(\frac{1}{X} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\right) = \Pr\left(\frac{1}{X} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\right)$$

于是有 $F_\alpha(n,m) = 1/F_{1-\alpha}(m,n)$. □

课堂习题:

- 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是总体 $\mathcal{N}(\mu, 1/4)$ 的样本, i) 若 $\mu = 0$, 求 $\Pr(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \geq 4)$; ii) 若 μ 未知, 求 $\Pr(\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2 \geq 2.85)$.
- 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{25}$ 是总体 $\mathcal{N}(12, \sigma^2)$ 的样本, i) 若 $\sigma = 2$, 求 $\Pr(\sum_{i=1}^{25} X_i/25 \geq 12.5)$; ii) 若 σ 未知但知道修正样本方差为 $S^2 = 5.57$, 求 $\Pr(\sum_{i=1}^{25} X_i/25 \geq 12.5)$.