下面研究多维标准正态分布的一些特征:

定理5.9. 若随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim\mathcal{N}(\mathbf{0}_n,I_n)$, 则其概率密度函数为 $p_X(\boldsymbol{x})$, 则有

$$\int p_X(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=1.$$

Proof. 根据概率密度的定义有

$$\int\int p_X(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int\int\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_i^2/2}dx_i=1.$$

□

定理5.10. 若随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$, 则

$$Y=AX+b\sim\mathcal{N}(A\mu+b,A\Sigma A^\top)$$

其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $b\in\mathbb{R}^{m\times 1}$.

证明作为练习题, 仅仅要求证明 $m=n$ 且 $|A|\neq 0$ 的情况.

5.4 多维随机变量函数的分布

本节我们研究已知 (X,Y) 的分布, 求 $Z=g(X,Y)$ 的分布. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 维离散型随机变量, 那么 $Z=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为一维随机变量, 其分布列可以通过如下两步求得:

i) 对 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的各种取值, 计算随机变量 Z 的取值;

ii) 对相同的 Z 值, 合并其概率.

例5.9. 设 (X,Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/4	1/6	1/8
1	1/4	1/8	1/12

求 $Z_1=X+Y$ 和 $Z_2=XY$ 的分布列.

解. 通过简单计算、合并可得 Z_1 和 Z_2 的分布列分别为:

Z_1	0	1	2	3
P	1/4	5/12	1/4	1/12

Z_2	0	1	2
P	19/24	1/8	1/12

.

□

对于连续随机变量 (X,Y), 其联合概率密度为 $f(x,y)$, 如何求解随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度. 针对此类问题, 主要求解思路为分布函数法, 即:

i) 求 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(x,y)\le z)=\int\int_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy.$$

ii) 求 Z 的密度函数

$$f_Z(z)=F_Z^{'}(z).$$

5.4.1 极大极小分布

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 其分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 求随机变量

$$Z_1=\max(X,Y) \quad \text{和} \quad Z_2=\min(X,Y)$$

的分布函数和概率密度函数. 首先求 Z_1 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_{Z_1}(z_1) &= P(Z_1\le z_1)\\ &= P(\max(X,Y)\le z_1)=P(X\le z_1,Y\le z_1)\\ &= P(X\le z_1)P(Y\le z_1)=F_X(z_1)F_Y(z_1). \end{aligned}$$

进一步求解 Z_2 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_{Z_2}(z_2) &= P(Z_2\le z_2)\\ &= P(\min(X,Y)\le z_2)=1-P(\min(X,Y)>z_2)\\ &= 1-P(X\ge z_2)P(Y>z_2)=1-(1-F_X(z_2))(1-F_Y(z_2)). \end{aligned}$$

上述结论可进一步推广到 n 个独立的随机变量有

引理5.1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 n 个相互独立的随机变量, 其分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)$, 则随机变量 $Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)\cdots F_{X_n}(y),$$

随机变量 $Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=1-(1-F_{X_1}(z))(1-F_{X_2}(z))\cdots(1-F_{X_n}(z)).$$

特别地, 当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布时, 则有

$$F_Y(y)=(F_{X_1}(y))^n \quad \text{和} \quad F_Z(z)=1-(1-F_{X_1}(z))^n.$$

根据分布函数可进一步求得概率密度.

例5.10. 假设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且有 $X\sim e(\alpha)$ 和 $Y\sim e(\beta)$, 求随机变量 $Z_1=\max(X,Y)$ 和 $Z_2=\min(X,Y)$ 的概率密度.

解. 根据指数随机变量的定义可知随机变量 X 和 Y 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x\geq 0\\ 0 & x\leq 0\end{cases} \quad 和 \quad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y\geq 0\\ 0 & y\leq 0.\end{cases}$$

于是得到随机变量 Z_1 的分布函数为

$$F_{Z_1}(z_1)=F_X(z_1)F_Y(z_1)=\int_{-\infty}^{z_1}f_X(t)dt\int_{-\infty}^{z_1}f_Y(t)dt.$$

当 $z_1\leq 0$ 时由 $F_{Z_1}(z_1)=0$; 当 $z_1>0$ 时

$$F_{Z_1}(z_1)=\int_0^{z_1}f_X(t)dt\int_0^{z_1}f_Y(t)dt=\int_0^{z_1}\alpha e^{-\alpha t}dt\int_0^{z_1}\beta e^{-\beta y}dt=(1-e^{-\alpha z_1})(1-e^{-\beta z_1}).$$

两边对 z_1 求导可得其概率密度为

$$f_{Z_1}(z_1)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z_1}+\beta e^{-\beta z_1}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z_1} & z_1\geq 0\\ 0 & z_1<0.\end{cases}$$

同理可得随机变量 Z_2 的分布函数和概率密度分别为

$$F_{Z_2}(z_2)=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z_2} & z_2\geq 0\\ 0 & z_2<0\end{cases} \qquad f_{Z_2}(z_2)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z_2} & z_2\geq 0\\ 0 & z_2<0.\end{cases}$$

□

5.4.2 和的分布 $Z=X+Y$

引理5.2. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)$, 则随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx \quad 或 \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy.$$

解. 首先求解分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P(Z\leq z)=P(X+Y\leq z)\\ &= \iint_{x+y\leq z}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z}f(x,u-x)du \qquad (变量替换 u=y+x)\\ &= \int_{-\infty}^{z}(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u-x)dx)du\end{aligned}$$

两边同时对 z 求导数可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx.$$

□

下面给出著名的卷积公式:

定理5.11. 若连续随机变量 X 与 Y 相互独立, 其概率密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy.$$

若离散随机变量 X 与 Y 独立, 其分布列为 $a_i = P(X=i)$ 和 $b_j = P(Y=j)$ $(i,j=0,1,\cdots)$, 则随机变量 $Z = X+Y$ 的分布列为

$$P(Z = X+Y = k) = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

对于常见的分布, 我们有如下系列定理:

定理5.12. 若随机变量 $X \sim B(n_1, p)$ 和 $Y \sim B(n_2, p)$ 独立, 则

$$Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p).$$

根据此定理可推出: 若 $X_i \sim Ber(p) = B(1,p)$, 那么 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$.

Proof. 由卷积公式可得

$$\begin{aligned}
P[Z=k] &= \sum_{i=0}^{k} P[X=i]P[Y=k-i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2-(k-i)} \\
&= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i} \\
&= \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}.
\end{aligned}$$

□

定理5.13. 若随机变量 $X \sim P(\lambda_1)$ 和 $Y \sim P(\lambda_2)$ 相互独立, 则

$$Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Proof. 由泊松分布的定义可知: 当 $i \geq 0$ 和 $j \geq 0$ 时有

$$P(X=i) = \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \quad \text{和} \quad P(Y=j) = \frac{\lambda_2^j}{j!} e^{-\lambda_2}.$$

根据卷积公式有

$$\begin{aligned}
P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \\
= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1+\lambda_2)^k.
\end{aligned}$$

□

定理5.14. 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立, 则

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Proof. 首先证明随机变量 $Z = X' + Y' = X - \mu_1 + Y - \mu_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, 其中 $X' \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ 和 $Y' \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$. 根据卷积公式有

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}} dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 - \frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} dx \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2} dx \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}.
\end{aligned}$$

由此可得 $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, 进一步证明 $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. □

课题练习. 若随机变量 $X \sim e(\lambda_1)$ 和 $Y \sim e(\lambda_2)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的分布函数和概率密度.

例5.11. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$ 和 $Y \sim U(0,1)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解. 由卷积公式可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

由 $X \sim U(0,1)$ 和 $Y \sim U(0,1)$ 可知: 当 $x \in [0,1]$ 时有 $f_X(x) = 1$; 当 $z - x \in [0,1]$ 时有 $f_Y(z-x) = 1$, 即积分区域为 $\{x \in [0,1], z - x \in [0,1]\}$. 由此可得

- 当 $z \leq 0$ 或 $z \geq 2$ 时, 有$f_Z(z) = 0$;
- 当 $z \in (0,1)$ 时, 有$f_Z(z) = \int_0^z 1dz = z$;
- 当 $x \in [1,2)$ 时, 有$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 dx = 2 - z$.

□

例5.12. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$ 和 $Y \sim e(1)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解. 由卷积公式有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

由于 $X \sim U(0,1)$ 和 $Y \sim e(1)$ 可知 $f_X(x) f_Y(z-x) \neq 0$ 的区域为 $\{x \in [0,1], z \geq x\}$. 因此有

- 当 $z \leq 0$ 时有 $f_Z(z) = 0$;

- 当 $0 \le z \le 1$ 时有 $f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)}dx = e^{-z}(e^z - 1) = 1 - e^z$;
- 当 $z \ge 1$时有 $f_Z(z) = \int_0^1 e^{-(z-x)}dx = e^{-z}(e^1 - 1) = (e-1)e^{-z}$.

□

5.4.3 随机变量的乘/除法分布

定理5.15. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = XY$ 的概率密度为

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})dx,$$

随机变量 $Z = Y/X$ 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz)dx.$$

Proof. 这里给出随机变量 $Z = Y/X$ 的概率密度详细证明, 同理给出 $Z = XY$ 的概率密度. 首先考虑分布函数

$$\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= P(Y/X \le z) = \int\int_{y/x \le z} f(x, y)dxdy \\
&= \int\int_{x<0, y \ge zx} f(x, y)dxdy + \int\int_{x>0, y \le zx} f(x, y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{zx}^{+\infty} f(x, y)dy + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{xz} f(x, y)dy.
\end{aligned}$$

变量替换 $t = y/x$ 有

$$\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z}^{-\infty} xf(x, tx)dt + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} xf(x, tx)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{z} (-x)f(x, tx)dtdx + \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} xf(x, tx)dtdx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} |x|f(x, tx)dtdx = \int_{-\infty}^{z} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x, tx)dx
\end{aligned}$$

求导可得概率密度函数. □

5.4.4 随机变量的联合分布函数

已知随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 设 (X, Y) 的函数

$$U = g_1(X, Y) \quad V = g_2(X, Y)$$

如何求 (U, V) 的联合分布, 有如下结论:

定理5.16. 若 $U=g_1(X,Y)$ 和 $V=g_2(X,Y)$ 有连续偏导, 且存在反函数

$$x=x(u,v) \quad y=y(u,v),$$

则 (U,V) 的联合密度为

$$f_{UV}(u,v)=f_{XY}(x(u,v),y(u,v))|J|$$

其中 J 为变换的雅可比行列式, 即

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial x\partial y}\right|^{-1}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1}.$$

上述结论可推广到一般的 n 维随机变量.