# 第十章　双线性函数~~与辛空间~~

- 线性函数
- 对偶空间
- 双线性函数
- ~~辛空间~~

# §1 线性函数

**定义 1** 设$V$是数域$P$上的一个线性空间，$f$是$V$到$P$的一个映射，如果$f$满足

1） $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$;

2） $f(k\alpha)=kf(\alpha)$.

其中$\alpha,\beta$是$V$中任意元素，$k$是$P$中任意数

则称$f$为$V$上的一个线性函数.

从定义可推出线性函数的以下简单性质：

1．设 $f$ 是 $V$ 上的线性函数，

$$f(0)=0,\ f(-\alpha)=-f(\alpha)$$

2．如果 $\beta$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合：

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

那么

$$f(\beta)=k_1f(\alpha_1)+k_2f(\alpha_2)+\cdots+k_sf(\alpha_s)$$

**例 1** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $P$ 中任意数，

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $P^n$ 中的向量. 函数

$$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \qquad (1)$$

就是 $P$ 上的一个线性函数.当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 时，得 $f(X)=0$,称为零函数，仍用 0 表示零函数.

但应注意，对于例1中的例子，就是对于给定的$n$个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$,若定义

$$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

则$f$由定义1知，$f$是一个线性函数.但我们知道，在数学分析中，

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b$$

叫做线性函数.而在代数中，若$b\neq 0$，$g$不满足定义1的线性函数的要求（加法运算、数乘运算），因此不能称为“线性函数”.也就是说，只有分析中的齐次线性函数在代数中才称为“线性函数”.

实际上，$P^n$ 上的任意一个线性函数都可以表成这种形式.令

$$\varepsilon_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0),\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

第 $i$ 个

$P^n$ 中任一向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可表成

$$x = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n.$$

设 $f$ 是 $P^n$ 上一个线性函数，则

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\varepsilon_i)$$

令

$$a_i = f(\varepsilon_i), i = 1, 2, \cdots, n,$$

则

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

就是上述形式.

例2　给定$P^n$上的一个$n$元向量$y_0$，和一个$n$级矩阵$A$，则取

$$f(x) = y_0^T Ax, \qquad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

$f$为$P^n$上的一个线性函数.

例3　用$C[a,b]$表示闭区间$[a,b]$上的所有连续函数构成的线性空间，定义映射

$$f : C[a,b] \to R$$

$$f(x) = \int_a^b f(x)dx \qquad \forall x \in [a,b]$$

$f(x)$就是$C[a,b]$上的一个线性函数.

**例 4** $A$ 是数域 $P$ 上一个 $n$ 级矩阵，设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $A$ 的迹

$$Tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

是 $P$ 上全体 $n$ 级矩阵构成的线性空间 $P^{n\times n}$ 上的一个线性函数.

**例 5** 设 $V=P[x]$, $t$ 是 $P$ 中一个取定的数.定义 $P[x]$ 上的函数 $L_t$ 为

$$L_t(P(x))=p(t)\ ,\ p(x)\in P[x],$$

即 $L_t(p(x))$ 为 $p(x)$ 在 $t$ 点的值， $L_t(p(x))$ 是 $P[x]$ 上的线性函数.

如果 $V$ 是数域 $P$ 上一个 $n$ 维线性空间. 取定 $V$ 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ .对 $V$ 上任意线性函数 $f$ 及 $V$ 中任意向量 $\alpha$ ：

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$$

都有

$$f(\alpha)=f(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(\varepsilon_i) \qquad (2)$$

因此，$f(\alpha)$ 由 $f(\varepsilon_1),f(\varepsilon_2),\cdots,f(\varepsilon_n)$ 的值唯一确定.反之，任给 $P$ 中 $n$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，用下式定义 $V$ 上一个函数 $f$：

$$f(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i$$

这是一个线性函数，并且

$$f(\varepsilon_i)=a_i\,,i=1,2,\cdots,n$$

因此有

**定理 1** 设 $V$ 是 $P$ 上一个 $n$ 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $V$ 的一组基，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $P$ 中任意 $n$ 个数，则在 $V$ 上存在唯一的线性函数 $f$ 使

$$f(\varepsilon_i)=a_i\ ,i=1,2,\cdots,n$$

# §2 对偶空间

设$V$是数域$P$上一个$n$维线性空间. $V$上全体线性函数组成的集合记作$L(V,P)$，可以用自然的方法在$L(V,P)$上定义加法和数量乘法

设$f,g$是$V$的两个线性函数.定义函数$f+g$如下：

$$(f+g)\alpha = f(\alpha)+g(\alpha),\quad \alpha\in V.$$

$f+g$ 也是线性函数：

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha+\beta) &= f(\alpha+\beta)+g(\alpha+\beta)\\ &= f(\alpha)+f(\beta)+g(\alpha)+g(\beta)\\ &= (f+g)(\alpha)+(f+g)(\beta),\end{aligned}$$

$$(f+g)(k\alpha) = f(k\alpha)+g(k\alpha)$$

$$= kf(\alpha)+kg(\alpha) = k(f+g)(\alpha)$$

$f+g$ 称为 $f$ 与 $g$ 的和.

还可以定义数量乘法.设 $f$ 是 $V$ 上线性函数，对于 $P$ 中任意数 $k$，定义函数 $kf$ 如下：

$$(kf)(\alpha)=k(f(\alpha))\ ,\ \alpha\in V\ ,$$

$kf$ 称为 $k$ 与 $f$ 的数量乘积，易证 $kf$ 也是线性函数.

容易检验，在这样定义的加法和数量乘法下，$L(V,P)$ 成为数域 $P$ 上的线性空间.通常称为线性函数空间.

取定 $V$ 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，作 $V$ 上 $n$ 个线性函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，使得

$$f_i(\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & j=i;\\ 0, & j\neq i,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

因为 $f_i$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 上的值已确定，这样的线性函数是存在且唯一的.对 $V$ 中向量

$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，有

$$f_i(\alpha)=f_i(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n)=x_i \tag{2}$$

即 $f_i(\alpha)$ 是 $\alpha$ 的第 $i$ 个坐标的值.

**引理** 对 $V$ 中任意向量 $\alpha$，有

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\varepsilon_i \qquad (3)$$

而对 $L(V,P)$ 中任意向量 $f$，有

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) f_i \qquad (4)$$

**定理 2** $L(V,P)$ 的维数等于 $V$ 的维数，而且 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是 $L(V,P)$ 的一组基.

证明　首先证明$f_1, f_2, \cdots, f_n$是线性无关的.设

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0 \quad (c_1, c_2, \cdots, c_n \in P)$$

依次用基向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$代入，有（1）式得

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

所以$f_1, f_2, \cdots, f_n$线性无关.而由(4)式，$L(V, P)$中的任一向量都可由$f_1, f_2, \cdots, f_n$线性表示，所以$f_1, f_2, \cdots, f_n$是$L(V, P)$的一组基，且$\dim(L(V, P)) = n = \dim(V)$.

**定义 2** $L(P,V)$ 称为 $V$ 的对偶空间.由（1）决定的 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 $L(V,P)$ 的基，称为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的对偶基.

以后简单地把 $V$ 的对偶空间记作 $V^*$.

**例 1** 考虑实数域 $R$ 上的 $n$ 维线性空间 $V = P[x]_n$，对任意取定的 $n$ 个不同实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，根据拉格朗日插值公式，得到 $n$ 个多项式

$$p_i(x) = \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}, i=1,2,\cdots,n.$$

它们满足

$$p_i(a_j)=\begin{cases}1\,, j=i\,;\\0\,, j\neq i\,,\end{cases}\quad i,j=1,2\,,\cdots,n.$$

$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)$是线性无关的，因为由

$c_1p_1(x)+c_2\,p_2(x)+\cdots+c_np_n(x)=0$

用$a_i$代入，即得

$$\sum_{k=1}^{n}c_kp_k(a_i)=c_ip_i(a_i)=c_i=0\ ,i=1,2,\cdots,n$$

又因$V$是$n$维的，所以$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)$是$V$的一组基.

设 $L_i \in V^* \ (i=1,2,\cdots,n)$ 是在点 $a_i$ 的取值函数：

$$L_i(p(x)) = p(a_i),\ p(x)\in V\ .i=1,2,\cdots,n.$$

则线性函数 $L_i$ 满足

$$L_i(p_j(x)) = p_j(a_i) = \begin{cases} 1, i=j; \\ 0, i\neq j, \end{cases},\quad i,\ j=1,2,\cdots,n.$$

因此，$L_1, L_2, \cdots, L_n$ 是 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$ 的对偶基.

例2 设 $V=R^{3\times 3}$ ，在 $V$ 中取标准基

$$\varepsilon_{ij}(i,j=1,2,3)$$

（1）求对偶基 $f_{ij}(i,j=1,2,3)$，并写出其具体表达式。

（2）求对偶空间上的任意一个线性函数 $f$ 的表达式

解：取

$$f_{11}(\varepsilon_{11})=1, f_{11}(\varepsilon_{ij})=0(i\neq 1, j\neq 1)$$

$$f_{12}(\varepsilon_{12})=1, f_{12}(\varepsilon_{ij})=0(i\neq 1, j\neq 2)$$

$$f_{13}(\varepsilon_{13})=1, f_{13}(\varepsilon_{ij})=0(i\neq 1, j\neq 3)$$

……

$$f_{31}(\varepsilon_{31})=1, f_{31}(\varepsilon_{ij})=0(i\neq 3, j\neq 1)$$

$$f_{32}(\varepsilon_{32})=1, f_{32}(\varepsilon_{ij})=0(i\neq 3, j\neq 2)$$

$$f_{33}(\varepsilon_{33})=1, f_{33}(\varepsilon_{ij})=0(i\neq 3, j\neq 3)$$

任取矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in R^{3\times 3}$

那么可以计算出：

$f_{11}(A)=f_{11}(a_{11}\varepsilon_{11}+a_{12}\varepsilon_{12}+\cdots+a_{33}\varepsilon_{33})=f_{11}(a_{11}\varepsilon_{11})=a_{11}$,故

$$f_{11}(A)=a_{11}, f_{12}(A)=a_{12}, f_{13}(A)=a_{13}$$
$$f_{21}(A)=a_{21}, f_{22}(A)=a_{22}, f_{23}(A)=a_{23}$$
$$f_{31}(A)=a_{31}, f_{32}(A)=a_{32}, f_{33}(A)=a_{33}$$

任取 $f \in (R^{3\times3})^*$，于是

$$f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} k_{ij} f_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} f(\varepsilon_{ij}) f_{ij}$$

对任意的 $A \in R^{3\times3}$

$$f(A) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} k_{ij} f_{ij}(A) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} f(\varepsilon_{ij}) a_{ij}$$

下面讨论$V$的两组基的对偶基之间的关系.

设 $V$ 是数域 $P$ 上一个 $n$ 维线性空间. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是$V$ 的两组基.它们的对偶基分别是$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 及 $g_1,g_2,\cdots,g_n$.再设

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

$$(g_1,g_2,\cdots,g_n)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)B$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

由假设

$$\eta_i = a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n \ , i = 1 , 2 , \cdots, n$$

$$g_i = b_{1j} f_1 + b_{2j} f_2 + \cdots + b_{nj} f_n \ , j = 1, 2, \cdots, n$$

因此

$$g_j(\eta_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} f_k (a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n)$$

$$= b_{1j}a_{1i} + b_{2j}a_{2i} + \cdots + b_{nj}a_{ni}$$

$$= \begin{cases} 1 , i = j; \\ 0 , i \neq j , \end{cases} \quad i , j = 1 , 2 , \cdots, n$$

由矩阵乘法定义，即得 $B^T A = E$

即 $\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$

**定理 3** 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是线性空间 $V$ 的两组基，它们的对偶基分别为 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 及 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ .如果由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为 $A$ ，那么由 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 到 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 的过渡矩阵为 $(A^T)^{-1}$.

设 $V$ 是 $P$ 上一个线性空间，$V^*$ 是其对偶空间，取定 $V$ 中一个向量 $x$，定义 $V^*$ 的一个函数 $x^{**}$ 如下：

$$x^{**}(f)=f(x),\ f\in V^*$$

根据线性函数的定义，容易检验$x^{**}$是$V^*$上的一个线性函数，$V^*$又是其的对偶空间$(V^*)^*=V^{**}$中的一个元素.

线性空间$V$(向量）$\to V$的对偶线性空间$V^*$（线性函数$f$）

$\to V^*$的线性对偶空间$V^{**}$(线性函数）

**定理 4** $V$是一个线性空间，$V^{**}$是$V$的对偶空间的对偶空间. $V$到$V^{**}$的映射

$$x \to x^{**}$$

是一个同构映射.

这个定理说明，线性空间$V$也可看成$V^*$的线性函数空间，$V$与$V^*$实际上是互为线性函数空间的.这就是对偶空间名词的来由.

由此可知，任一线性空间都可看成某个线性空间的线性函数所成的空间，这个看法在多线性代数中是很重要的.

例3　已知 $V=P[x]_3$，对任意的$g(x)\in V$，定义

$$f_1(g(x))=\int_0^1 g(x)dx,$$

$$f_2(g(x))=\int_0^2 g(x)dx,$$

$$f_3(g(x))=\int_0^{-1} g(x)dx$$

（1）证明：$f_1,f_2,f_3$ 是 $V^*$ 的一个基；

（2）求 $V$ 的一个基 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$ 使得 $f_1,f_2,f_3$为其对偶基。

方法1：

$$f_1(1)=\int_0^1 1dx=1, f_1(x)=\int_0^1 xdx=1/2$$

$$f_1(x^2)=\int_0^1 x^2dx=1/3$$

$$f_2(1)=\int_0^2 1dx=2, f_2(x)=\int_0^2 xdx=2$$

$$f_2(x^2)=\int_0^2 x^2dx=8/3$$

$$f_3(1)=\int_0^{-1} 1dx=-1, f_3(x)=\int_0^{-1} xdx=1/2$$

$$f_3(x^2)=\int_0^{-1} x^2dx=-1/3$$

假设 $f'_1, f_2', f_3'$ 为基 $1, x, x^2$ 的对偶基，那么

$$f_1' = f_1(1)f_1 + f_1(x)f_2 + f_1(x^2)f_3$$

$$f_2' = f_2(1)f_1 + f_2(x)f_2 + f_2(x^2)f_3$$

$$f_3' = f_3(1)f_1 + f_3(x)f_2 + f_3(x^2)f_3$$

将这些关系式矩阵化，即为

$$[f'_1, f_2', f_3'] = [f_1, f_2, f_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

求 $V$ 的一个基 $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$使得 $f_1, f_2, f_3$ 为其对偶基。

$$[g_1(x), g_2(x), g_3(x)]$$

$$= [1, x, x^2]\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/3 & 8/3 & -1/3 \end{bmatrix}^{-1}\right)^T$$

$$g_1(x) = 1 + x - {}^3\!/_2\, x^2$$

$$g_2(x) = -{}^1\!/_6 + {}^1\!/_2\, x^2$$

$$g_3(x) = -{}^1\!/_3 + x - {}^1\!/_2\, x^2$$

方法2:

容易证明$f_1, f_2, f_3$都是$V = P[x]_3$上的线性函数.

令$g_1(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$,

使得$f_1(g_1(x)) = 1, f_2(g_1(x)) = f_3(g_1(x)) = 0$,即有

$$f_1(g_1(x)) = \int_0^1 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\ dx = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 1$$

$$f_2(g_1(x)) = \int_0^2 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\ dx = 2c_0 + 2c_1 + \frac{8}{3}c_2 = 0$$

$$f_3(g_1(x)) = \int_0^{-1} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\ dx = -c_0 + \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{3}c_2 = 0$$

解出得: $c_0 = c_1 = 1, c_2 = -\dfrac{3}{2}$,因此$g_1(x) = 1 + x - \dfrac{3}{2}x^2$

同样可令

$$g_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \text{使得}$$

$$f_2(g_2(x)) = 1, f_1(g_2(x)) = f_3(g_2(x)) = 0;$$

得到

$$g_2(x) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x^2$$

同样令

$$g_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \text{使得}$$

$$f_3(g_3(x)) = 1, f_1(g_3(x)) = f_2(g_3(x)) = 0;$$

得到 $$g_3(x) = -\frac{1}{3} + x - \frac{1}{2}x^2$$

这样就得到

$$g_1(x)=1+x-\frac{3}{2}x^2,\ \ g_2(x)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}x^2,\ \ g_3(x)=-\frac{1}{3}+x-\frac{1}{2}x^2$$

满足

$$f_i(p_j(x))=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}\qquad j=1,2,3;i=1,2,3$$

$$(g_1,g_2,g_3)=(1,x,x^2)\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ 1 & 0 & 1\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=(1,x,x^2)A$$

由于$\det(A)\neq 0$,故$g_1,g_2,g_3$是$V$的一组基，$f_1,f_2,f_3$是它的对偶基.

另一方面，设在$V$的基底1，$x, x^2$下的对偶基为$f_1', f_2', f_3'$，

由于

$$(g_1, g_2, g_3) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

因此

$$(f_1', f_2', f_3') = (f_1, f_2, f_3)\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-T} = (f_1, f_2, f_3)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/3 & 8/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$