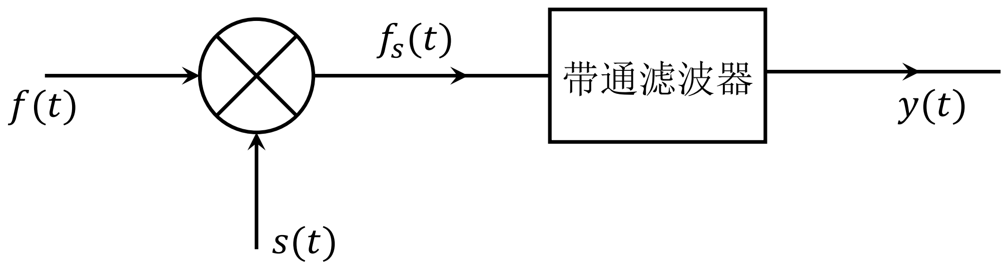

Figure 1: 第一题图 (a)

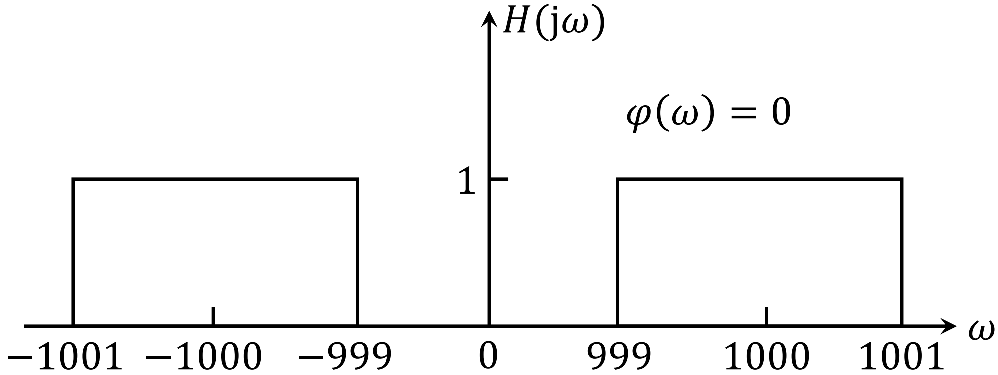

Figure 2: 第一题图 (b)

一. 如图 所示的系统，带通滤波器的频率响应如图 所示，其相频特性 $\phi(\omega)=0$，若输入 $f(t)=\frac{\sin 2t}{2\pi t}$，$s(t)=\cos 1000t$，求输出信号 $y(t)$。

解：

记 $\mathcal{F}[f(t)]=X(jw)$，$\mathcal{F}[\frac{sint}{t}]=X_1(jw)$

$$
\begin{aligned}
X(jw) =&F[\frac{sin2t}{2\pi t}] \\
&= \frac{1}{\pi}\mathcal{F}[\frac{sin2t}{2t}] \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}X_1(\frac{jw}{2}) \\
&= \frac{1}{2}[u(1-0.5w)-u(-1-0.5w)]
\end{aligned}
$$

故

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_s(t)] &= \frac{1}{2\pi}[\mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[s(t)]] \\ &= \frac{1}{2}[X(j(w+1000)) + X(j(w-1000))]\end{aligned}$$

我们可以绘制出 $\mathcal{F}[f_s(t)]$ 的图像，经过带通滤波器后，两边都只保留中间的一半，即

$$Y(jw) = \frac{1}{4}\{[u(-999-w)-u(-1001-w)]+[u(1001-w)-u(999-w)]\}$$

对 $Y(jw)$ 作傅里叶反变换

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(jw)e^{jwt}dw \\ &= \frac{1}{8\pi}[\int_{-1001}^{-999} e^{jwt}dw + \int_{999}^{1001} e^{jwt}dw] \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{sin(1001t) - sin(999t)}{t}\end{aligned}$$

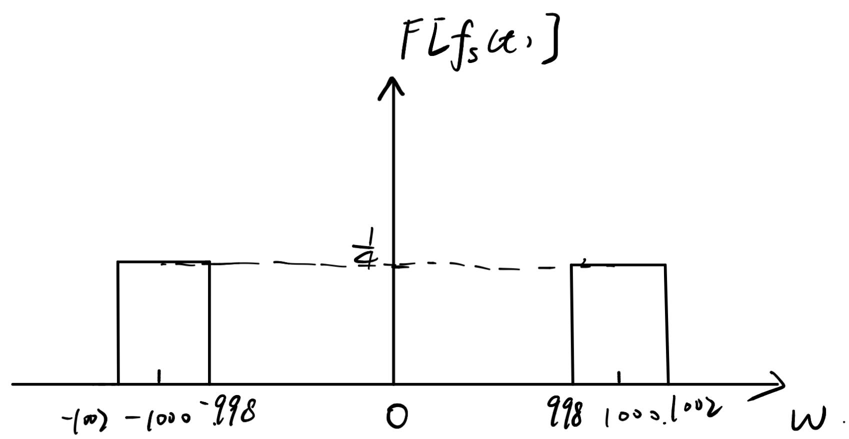

Figure 3: $\mathcal{F}[f_s(t)]$

二. 若 $x(t)=\cos(\omega_m t)$，$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，$T=\frac{2\pi}{\omega_s}$，分别画出以下情况 $x(t)\cdot\delta_T(t)$ 波形及其频谱 $\mathcal{F}[x(t)\delta_T(t)]$ 图形。讨论从 $x(t)\delta_T(t)$ 能否恢复 $x(t)$。注意比较 (1) 和 (4) 的结果。(建议画波形时保持 T 不变)。

(1) $\omega_m=\frac{\omega_s}{8}=\frac{\pi}{4T}$

(2) $\omega_m=\frac{\omega_s}{4}=\frac{\pi}{2T}$

(3) $\omega_m=\frac{\omega_s}{2}=\frac{\pi}{T}$

(4) $\omega_m=\frac{9\omega_s}{8}=\frac{9\pi}{4T}$

解：为排版方便，在此页后四页放置各小问图片

本页讨论能否恢复，并给出 $\mathcal{F}[x(t)]=\pi[\delta(w+w_m)+\delta(w-w_m)]$ 的图像

(1) 能，由采样定理 $w_s>2w_m$

(2) 能，因为 $w_s>2w_m$

(3) 不能，$w_s=2w_m$，导致发生混叠

(4) 不能，$w_s<2w_m$

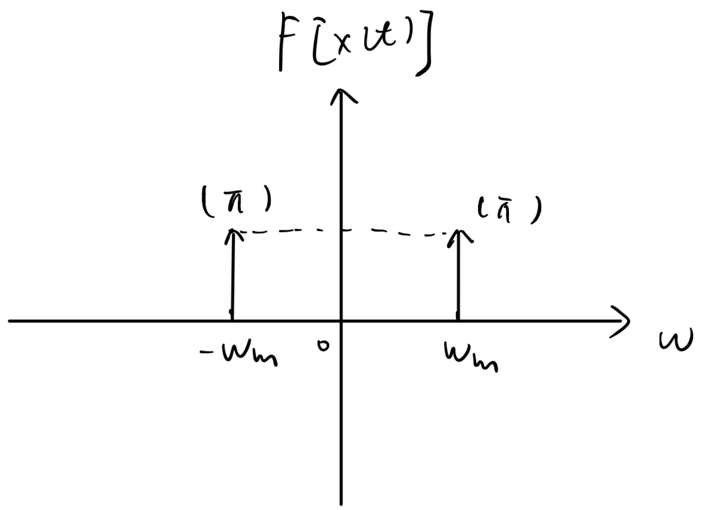

Figure 4: $\mathcal{F}[x(t)]$

(1)、$x(t)$ 周期 $T_0 = \frac{2\pi}{w_m} = 8T$，图片如下:

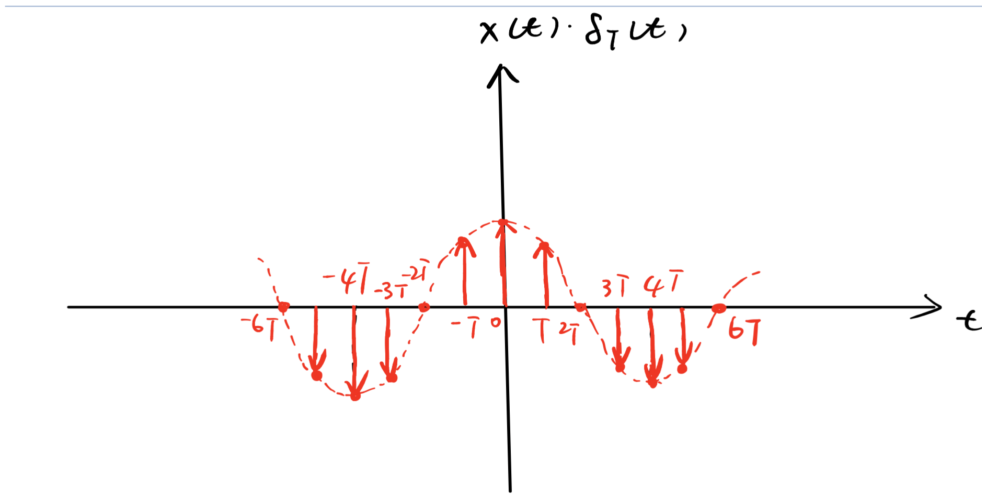

Figure 5: (1)$x(t) \cdot \delta_T(t)$

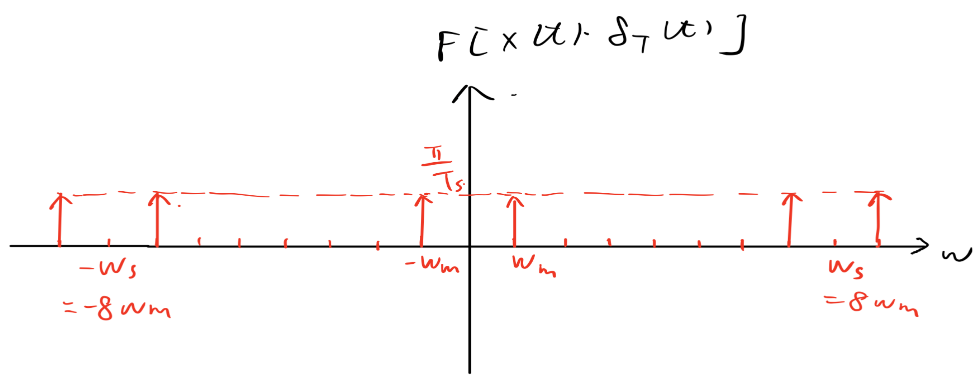

Figure 6: (1)$\mathcal{F}[x(t)\delta_T(t)]$

(2)、$x(t)$ 周期 $T_0=\frac{2\pi}{w_m}=4T$，图片如下:

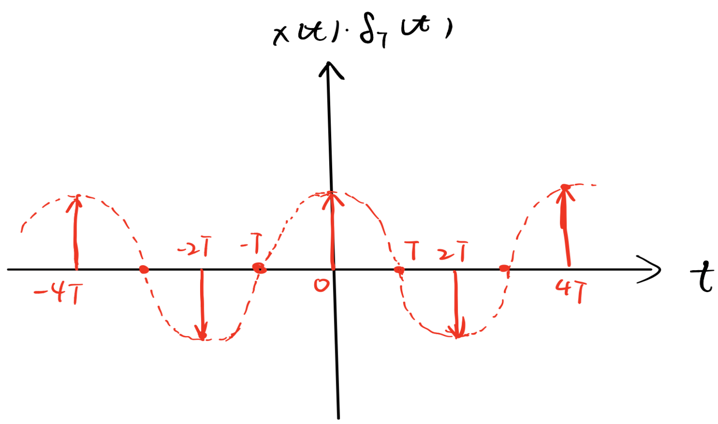

Figure 7: $(2)x(t)\cdot\delta_T(t)$

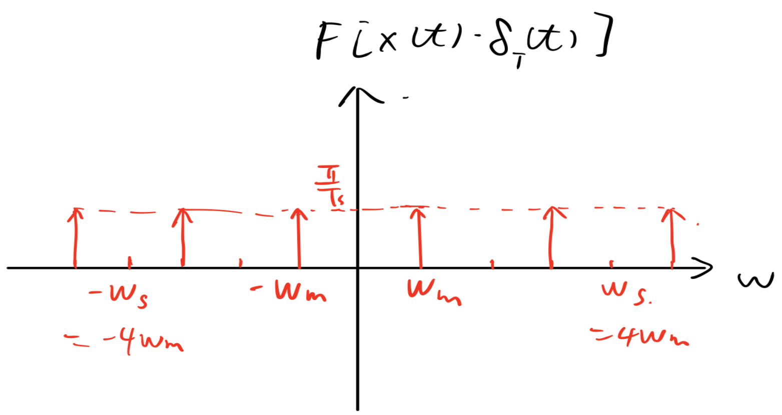

Figure 8: $(2)\mathcal{F}[x(t)\delta_T(t)]$

(3)、$x(t)$ 周期 $T_0 = \frac{2\pi}{w_m} = 2T$，图片如下:

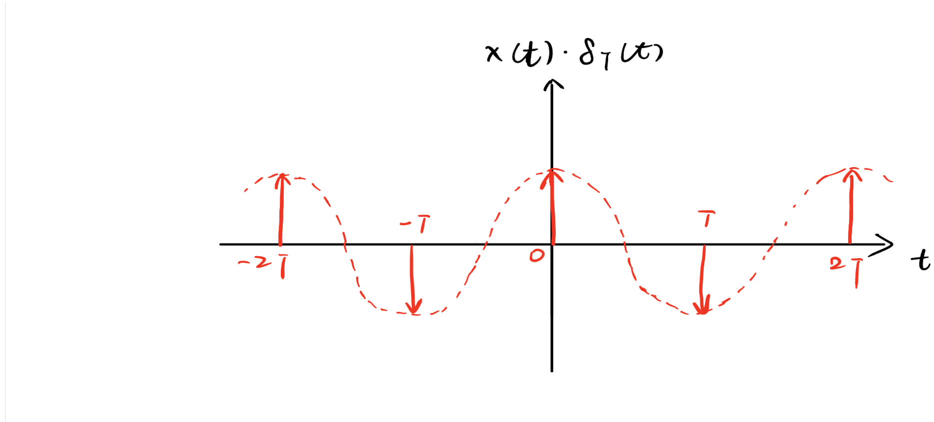

Figure 9: (3)$x(t) \cdot \delta_T(t)$

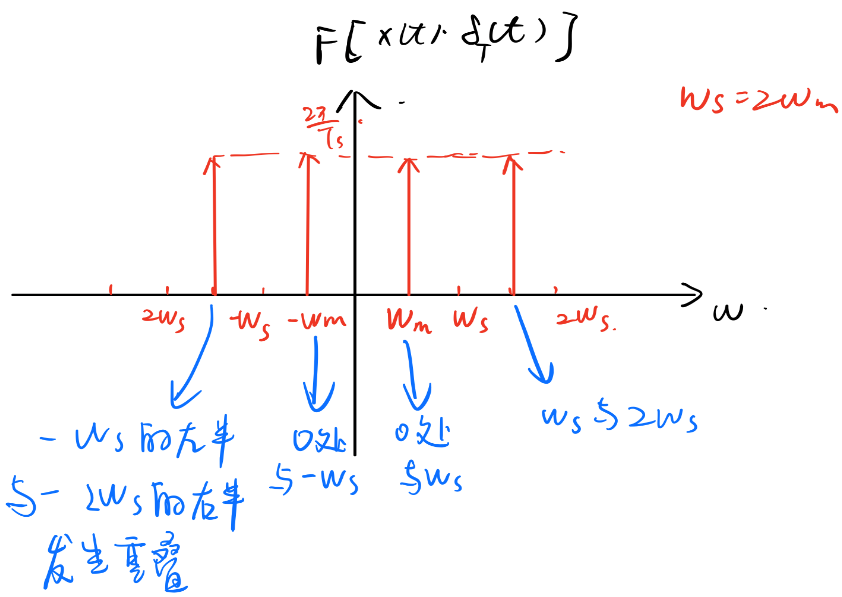

Figure 10: (3)$\mathcal{F}[x(t) \cdot \delta_T(t)]$

(4)、$x(t)$ 周期 $T_0 = \frac{2\pi}{w_m} = \frac{8}{9}T$，图片如下:

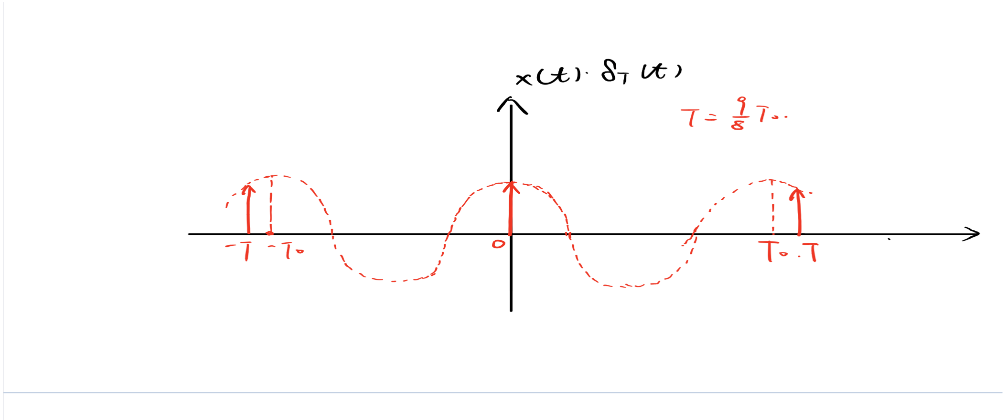

Figure 11: $(4)x(t) \cdot \delta_T(t)$

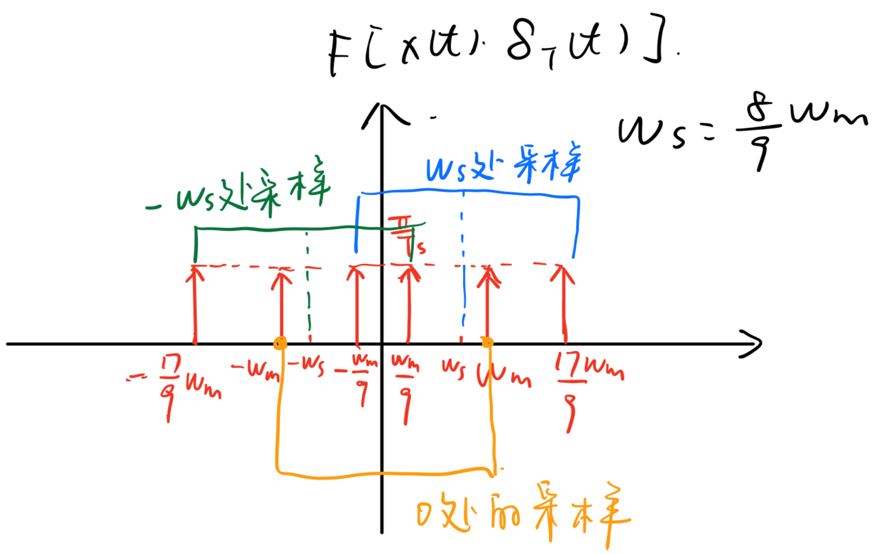

Figure 12: $(4)\mathcal{F}[x(t)\delta_T(t)]$

三. 已知信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\omega)$，对 $x(t)$ 进行冲激串采样，产生信号 $x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$，这里 $T=10^{-4}$。对于以下所给的关于 $x(t)$ 和（或）$X(\mathrm{j}\omega)$ 的约束条件，试判断采样定理能否保证由 $x_p(t)$ 恢复 $x(t)$?

(1) 当 $|\omega|>5000\pi$ 时，$X(\mathrm{j}\omega)=0$

(2) 当 $|\omega|>15000\pi$ 时，$X(\mathrm{j}\omega)=0$

(3) 当 $|\omega|>5000\pi$ 时，$\mathrm{Re}\{X(\mathrm{j}\omega)\}=0$

(4) $x(t)$ 是实的，且当 $\omega>5000\pi$ 时，$X(\mathrm{j}\omega)=0$

(5) $x(t)$ 是实的，且当 $\omega<-15000\pi$ 时，$X(\mathrm{j}\omega)=0$

(6) 当 $|\omega|>15000\pi$ 时，$X(\mathrm{j}\omega)*X(\mathrm{j}\omega)=0$

(7) 当 $\omega>5000\pi$ 时，$|X(\mathrm{j}\omega)|=0$

解：

采样定理要求采样间隔 $T_s<\frac{1}{2f_m}(w_s>2w_m)$，其中 $2w_m$ 为待采样信号的频带宽度，由题给条件可知，采样信号的 $T_s=10^{-4},w_s=20000\pi$

(1) 能

因为条件意味着 $w_m=5000\pi$，而 $w_s=20000\pi>2w_m$

(2) 不能

条件意味着 $w_m=15000\pi$，而 $w_s=20000\pi<2w_m$，

无法保证 $(10000\pi,15000\pi),(-10000\pi,-15000\pi)$ 上 $X(jw)=0$

(3) 能

时域信号的实部对应频域中的偶对称实部和奇对称虚部

时域信号的虚部对应频域中的奇对称实部和偶对称虚部

故通过条件可知 $w_m=5000\pi$，后续同 (1)

(4) 能

因为实信号的频谱是对称的，所以条件意味着 $w_m=5000\pi$，后续同 (1)

(5) 不能

无法保证 $(-10000\pi,-15000\pi)$ 上 $X(jw)=0$

(6) 能
$\mathcal{F}[x(t)\cdot x(t)] = \frac{1}{2\pi}[X(jw) * X(jw)]$
设频带宽度为 $2w_m$，则 $X(jw) * X(jw)$ 的频带宽度为 $4w_m$，
由题给条件可知 $30000\pi = 4w_m \rightarrow w_m = 7500\pi$，故 $w_s > 2w_m$

(7) 不能
由题目条件知，$w > 5000\pi$ 时，频谱的实部和虚部均为 0，
对于实信号，显然有 $w_m = 5000\pi$
对于复信号，其频谱实部由一个偶对称部分和一个奇对称部分组成，
在 $w > 5000\pi$ 的时候有 $X_{偶对称}(jw) + X_{奇对称}(jw) = 0$，
但是到了 $w < -5000\pi$ 的时候，由于偶对称和奇对称的特性，二者叠加不再为 0，这也就意味着无法得到确切的 w_m，故无法保证满足采样定理