

概率统计课程第十二次作业

2020 年 12 月

1. 设总体 $X \sim N(\mu, a^2)$, 从总体中抽两组样本, 容量为 m 和 n . 求两样本均值之差的绝对值小于 ϵ 的概率。
2. 随机变量 $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$, 且 X 和 Y 独立。求证 $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$ 。
3. 证明: 若 $X \sim N(0, 1)$, 则 $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$, 以及:

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} (k-1)!! & k \text{ 是偶数} \\ 0 & k \text{ 是奇数} \end{cases}$$

4. 设 $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ 是总体 $N(0, a^2)$ 的样本。令

$$Z = a(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n)^2 + b(Y_m + 2Y_{m-1} + \dots + mY_1)^2$$

求 a, b 为何值时, Z 服从 χ^2 分布, 并求其分布。

5. 设 X_1, \dots, X_n 和 Y_1, \dots, Y_n 是总体 $X \sim N(0, n)$ 的两样本, 求

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i^2}}$$

的分布。

6. 若随机变量 $X \sim t(n)$, 求证, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $X \sim N(0, 1)$

7. 定义

$$Beta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int \int \int_{x_1+x_2+x_3=1, x_1, x_2, x_3 \geq 0} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} x_3^{\alpha_3-1} dx_1 dx_2 dx_3$$

证:

$$Beta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$$

8. 若随机变量 $X \sim B(\alpha_1, \alpha_2)$, 求 $\mathbb{E}[X^k]$ 。
9. 编程画图实现 $Beta$ 分布, Γ 分布, χ^2 分布, t 分布, F 分布的概率密度函数。
 - 允许使用库函数来计算 Γ 函数, 但感兴趣的同学也可以自己实现 Γ 函数。

- 不需要提交代码。
- 对每个分布，请选择一组参数，并将生成的概率密度函数图像画在作业本上。
- 如果你有任何想分享的心得，也欢迎写在作业本上。

作业上交日期：12 月 17 日课前

学术诚信

允许同学之间的相互讨论，但是署你名字的工作必须由你完成，**不允许**直接照搬任何已有的材料，必须独立完成作业的书写过程。

在完成作业过程中，对他人工作（出版物、互联网资料）中文本的直接照搬（包括原文的直接摘抄及语句的简单修改等）都将视为剽窃，剽窃者成绩将被取消。对于完成作业中有关键作用的公开资料，应予以**明显引用**。

如果发现作业之间高度相似将被判定为互相抄袭行为，抄袭和被抄袭双方的成绩都将被取消。因此请主动防止自己的作业被他人抄袭。