第四章 矩阵

一、矩阵概念的引入

1. 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的解取决于

系数 $a_{ij}(i, j = 1,2,\cdots,n)$,

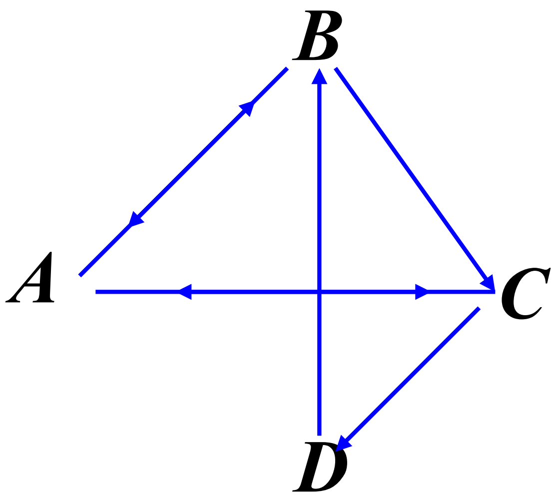
常数项 $b_i(i = 1,2,\cdots,n)$

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2. 某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线，如图所示表示了四城市间的航班图,如果从A到B有航班,则用带箭头的线连接 A 与B.



四城市间的航班图情况常用表格来表示:

发站 \ 到站	*A*	*B*	*C*	*D*
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

其中 ✓ 表示有航班.

为了便于计算,把表中的 ✓ 改成1,空白地方填上0,就得到一个数表:

	A	B	C	D
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**

这个数表反映了四城市间交通联接情况.

二、矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵. 简称 $m\times n$ 矩阵. 记作

主对角线

副对角线

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵A的(m,n)元

简记为 $A=A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}\right).$

这$m\times n$个数称为A的元素,简称为元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵,

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是一个 3×1 矩阵,

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 是一个 1×4 矩阵, $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ 是一个 1×1 矩阵.

三 矩阵的运算

矩阵的加法

设有两个$m\times n$矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, 那末矩阵 A 与 B 的和记作$A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明　只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

矩阵加法的运算规律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$$(3)\ -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=\left(-a_{ij}\right),$$

称为矩阵A的**负矩阵**.

$(4)\ A+(-A)=0,\ A-B=A+(-B).$

数与矩阵相乘

数λ与矩阵A的乘积记作λA或$A\lambda$,规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵的运算规律

（设 A、B 为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 为数）

$$(1)\ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A);$$

$$(2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$$

$$(3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$$

矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为矩阵的**线性运算**.

例 如果矩阵X满足$X-2A=B-X$，

其中$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -2\\-2 & 0\end{bmatrix}$,求$X$.

解 $\because X-2A=B-X \therefore X=A+\dfrac{1}{2}B$

$$X=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -2\\-2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\-2 & 2\end{bmatrix}.$$

矩阵与矩阵相乘

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，那末规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $C=AB.$

$$C = AB$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$

$$\left(i = 1, 2, \cdots m;\ j = 1, 2, \cdots, n\right)$$

例 1

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

例2　　设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

注：

（1）只有当矩阵A(左矩阵）的列数等于B(右矩阵）的行数时，矩阵乘法才有意义；

（2）乘积矩阵$C=AB$的第i行第j列元素c_{ij}是A的第i行与B的第j列对应元素相乘然后相加；

例如 $c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2s}b_{s1}$

（3）一个$1\times s$矩阵与一个$s\times 1$矩阵相乘是一个数（1级矩阵）

解 $\because A = (a_{ij})_{3\times 4}, \quad B = (b_{ij})_{4\times 3},$

$\therefore C = (c_{ij})_{3\times 3}.$

故

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

注意　只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

例如
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 不存在.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(1\times 3+2\times 2+3\times 1\right) = (10).$$

矩阵乘法的运算规律

(1) $(AB)C = A(BC)$;

(2) $A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA$;

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）；

(4) $AE = EA = A$;

(5) 若A是 n 阶矩阵，则 A^k 为A的 k 次幂，即

$$A^k = \underbrace{A\,A\cdots A}_{k个} \text{ 并且 } A^m A^k = A^{m+k}, (A^m)^k = A^{mk}.$$

$(m, k$为正整数$)$

注意 矩阵不满足交换律，即：

$$AB \neq BA,\ (AB)^k \neq A^k B^k.$$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

故 $AB \neq BA.$

例3 计算下列乘积：

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

解 (1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 2 \\ 3\times 1 & 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

$$(2)\ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \text{其中} a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1,2,3.$$

解 $$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + a_{31}b_3 & a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + a_{32}b_3 & a_{13}b_1 + a_{23}b_2 + a_{33}b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}b_1^2 + a_{22}b_2^2 + a_{33}b_3^2 + 2a_{12}b_1b_2 + 2a_{13}b_1b_3 + 2a_{23}b_2b_3.$$

运用矩阵的乘法，我们可以将下列线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

写为 $Ax = b$, 其中

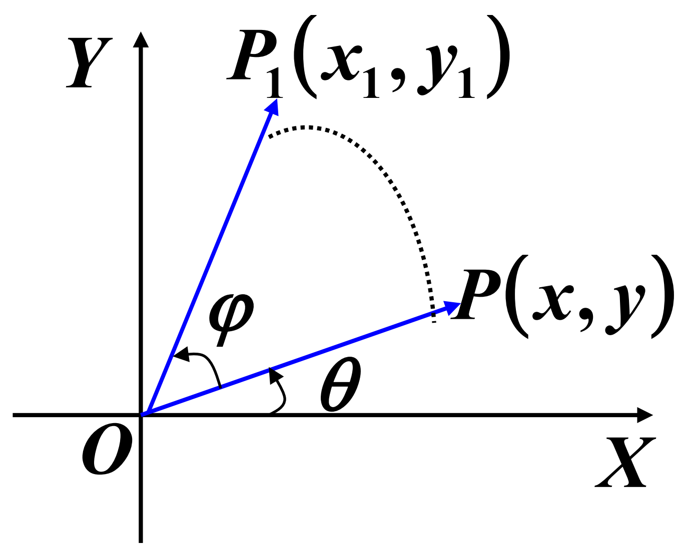
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

实际上，上面的记法也可用于坐标变换.

例如对于二维空间中的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = \cos\varphi x - \sin\varphi y, \\ y_1 = \sin\varphi x + \cos\varphi y. \end{cases} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

这是一个以原点为中心旋转 φ 角的旋转变换.



矩阵的转置

定义　把矩阵A的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做A的转置矩阵，记作A^T.

例　$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&8\end{pmatrix}$,　$A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}18&6\end{pmatrix}$,　$B^T=\begin{pmatrix}18\\6\end{pmatrix}$.

转置矩阵的运算性质

$$(1)\left(A^T\right)^T = A;$$

$$(2)\left(A+B\right)^T = A^T + B^T;$$

$$(3)\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T;$$

$$(4)\left(AB\right)^T = B^T A^T.$$

例5 已知

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ 求\left(AB\right)^T.$$

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},$$

$$\therefore \left(AB\right)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

解法2

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

注意

（1）只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

（2）只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘,且矩阵相乘不满足交换律.

（3）矩阵的数乘运算与行列式的数乘运算不同.

思考题

设A与B为n阶方阵,问等式

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

成立的充要条件是什么?

第三节 矩阵乘积的行列式与秩

定理1 设A, B是数域P上的两个 $\boldsymbol{n\times n}$ 矩阵，那么

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

证明

设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$

则令

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

$$i, j = 1, 2, \cdots . n$$

作一个$2n\times 2n$级行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

根据拉普拉斯定理，按D的前n行展开，就得到

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=|A||B|$$

下面证明$D=|C|=|AB|$.对D作初等行变换，将第$n+1$行的a_{11}倍, 第$n+2$行的a_{12}倍,$\cdots$，第$2n$行的a_{1n}倍加到第1行, 得

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

再依次将第$n+1$行的a_{k1}（$k=2,3,\cdots,n$)倍，第$n+2$行的a_{k2}倍，$\cdots$，第$2n$行的a_{kn}倍加到第k行，就得到

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式的前n行也只有一个n级的子式不为零，因此有拉普拉斯定理得到

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$.(-1)^{(1+2+\cdots+n)+(n+1+n+2+\cdots+2n)} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= |C| = |AB|$$

因此$|AB| = |A||B|$,这就是行列式的乘法定理.

推论1 设$A_1, A_2, \ldots, A_m$是数域P上的$n \times n$矩阵，那么

$$\left|A_1 A_2 \cdots A_m\right| = \left|A_1\right|\left|A_2\right|\cdots\left|A_m\right|$$

定义6 数域P上的 $n\times n$矩阵A 称为**退化的**，如果 $|A|=0$ ，否则称为**非退化的.**

(非) 退化矩阵也称为(非)奇异矩阵.

矩阵A为非退化矩阵的充分必要条件是矩阵A的秩等于 n .

推论2 设A, B是数域P上 $n\times n$ 矩阵，矩阵 AB 是退化的充分必要条件是A, B中至少有一个是退化的.

(因为$|AB|=|A||B|$，所以只要$|A|$和$|B|$中有一个为0, $|AB|=0$)

定理2 设A是数域P上的 $n\times m$ 矩阵， B是数域P上的 $m\times s$ 矩阵, 那么

$$秩(AB)\le \min[秩(A),秩(B)]$$

即乘积的秩不超过各因子的秩.

证明 只需要证明 秩$(AB)\le$秩(A)， 同时秩$(AB)\le$秩(B)

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdots \\ B_m \end{pmatrix}$.

记 $AB=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$, 由于$C_i$是$AB$的第$i$行向量，其第$j$个分量等于 $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, 即$c_{ij}$为$A$的第行元素与$B$的第$j$列元素对应相乘，然后相加.

$a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + \cdots + a_{im}B_m$ 的第 j 个分量也等于 $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$

因而 $C_i = a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + \cdots + a_{im}B_m \quad (i = 1,2,\cdots,n)$.

矩阵AB的行向量组$C_1,C_2,\ldots,C_n$可经B的行向量线性表出，所以AB的秩不超过B的秩. 秩$(AB) \le$ 秩(B).

将上述证明中的行向量换作列向量，相似地得到

秩$(AB) \le$ 秩(A).

即 **秩$(AB) \le \min[$秩(A),秩$(B)]$**

推论 如果$A = A_1A_2\cdots A_t$，则

$$\text{秩}(A) \le \text{秩}(A_1A_2\cdots A_t)$$

关于AB的几点注记

1. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}=\left[a_{ij}\right]$,

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{bmatrix}$,

b_i^T表示A的第i行元素,$b_i \in R^s$

$i=1,2,\cdots,m$

则令

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_n^T \end{bmatrix}, \qquad \begin{gathered} c_i^T = a_{i1}b_1^T + a_{i2}b_2^T + \cdots + a_{im}b_m^T \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{gathered}$$

这说明：AB的行向量是B的行向量的线性组合.

2.设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_m]$,

a_i 表示A的第i列元素，$a_i \in R^n$，$i = 1, 2, \cdots, m$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix} = \left[b_{ij} \right]_{m \times s},$$

令

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \end{bmatrix}$$

则有

$$c_i = b_{1i}a_1 + b_{2i}a_2 + \cdots + b_{mi}a_m$$

也就是说：C的列向量是A的列向量的线性组合.

3.两个非零矩阵相乘可能是零矩阵，即$AB=0$但不能推出$A=0$或者$B=0$;　　$AC=BC$不能推出$A=B$.

4.多个矩阵相乘的转置

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$(A_1 A_2 \cdots A_t)^T = A_t^T A_{t-1}^T \cdots A_1^T;$$

5.特殊矩阵

单位矩阵 $E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

数量矩阵 $\alpha E = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix}$,

上三角矩阵 $S=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$

下三角矩阵 $L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$

性质：有限个同级上(下）三角矩阵相乘、相加仍是上（下）三角矩阵.

6.对称矩阵和斜对称矩阵

n级对称矩阵

$$A = A^T, a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

即A中元素关于主对角为对称.如果A、B为同级对称矩阵，则$A+B, \alpha A$都为对称矩阵.

但AB未必为对称矩阵，例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$$

n级斜对称矩阵

若n级矩阵A满足$A=-A^T$，$a_{ij}=-a_{ji}$, $\quad i,j=1,2,\cdots,n$,

则称A为斜对称矩阵.

例如 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$为斜对称矩阵.

由于对$i=1,2,\cdots,n$,都有$a_{ii}=-a_{ii}$,因此得$a_{ii}=0$，$i=1,2,\cdots,n$.

也就是说，斜对称矩阵的主对角元素都为0.

斜对称矩阵的性质：

（1）斜对称矩阵的和也是斜对称矩阵，即如果A、B是同级斜对称矩阵，则$A+B$也是斜对称矩阵；

（2）两个同级斜对称矩阵的乘积未必是斜对称矩阵.例如

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix},\text{而}AB=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\text{不是斜对称矩阵；}$$

(3)任何n级矩阵A可以表示为 $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$,

而$\frac{1}{2}(A+A^T)$为对称矩阵,$\frac{1}{2}(A-A^T)$为斜对称矩阵.

(7) 线性变换矩阵

变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$与变量$y_1, y_2, \cdots, y_n$之间的关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由$x_1, x_2, \cdots, x_n$到$y_1, y_2, \cdots, y_n$的线性变换.

线性变换的矩阵形式为 $x = Cy.$

线性变换矩阵

这里 $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

例 已知线性变换$x = C_1 y$和$y = C_2 z$求x到z的线性变换矩阵.

其中$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

解 易得

$$x = C_1 y = C_1 (C_2 z) = (C_1 C_2) z$$

故x到z的线性变换矩阵为

$$C = C_1 C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

例　设$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$，求$A^2, A^3$.

推断$A^n=?$
由数学归纳法证明.

解　$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$,

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}.$$

假设$A^k=\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}$，则有

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\k+1&1\end{bmatrix}$$

由归纳法原理，有$A^n=\begin{bmatrix}1&0\\n&1\end{bmatrix}$.

对n级方阵A、B，一般AB不等于BA，但总有

$$|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$$

例1　设A, B均为３级方阵且

$$|A| = \frac{1}{2}, |B| = 2,\text{求 } |-3A| \text{及} \left|2(B^T A^2)\right|.$$

解 $$|-3A| = (-3)^3|A| = (-27)\times\frac{1}{2} = -\frac{27}{2}$$

$$\left|2B^T A^2\right| = 2^3\left|B^T\right||A|^2 = 8\times 2\times\frac{1}{4} = 4.$$

注意行列式与矩阵运算的差别.

第四节 矩阵的逆

在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$,

其中$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$为a的倒数(或称a的逆);

在矩阵运算中,单位矩阵E(或I)相对于数的运算中的1,那么矩阵A,如果存在一个同阶矩阵B,使得

$$AB = BA = E,$$

则称矩阵B为A的逆矩阵，记作A^{-1},这时称A为**可逆矩阵**.

定义7　　对于n级矩阵A，如果有一个n级矩阵B，使得

$$AB = BA = E,$$

则称矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为A的逆矩阵，A的逆矩阵记作A^{-1}.

例　　设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,　　$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

因为$AB = BA = E$,所以B是A的一个逆矩阵.

说明 若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是**唯一的**.

若设B和C都是可逆矩阵A的逆矩阵，则有

$$AB = BA = E,\quad AC = CA = E,$$

可得 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$

所以A 的逆矩阵是唯一的,即

$$B = C = A^{-1}.$$

例　设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，求$A$的逆阵.

解　利用待定系数法

设　$B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　是A 的逆矩阵,

则　$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1, \\ 2b+d=0, \\ -a=0, \\ -b=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=1, \\ d=2. \end{cases}$$

又因为

$$\overset{AB}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \overset{BA}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

由于A可逆时,逆矩阵惟一,若B满足$AB=E$,则B一定满足$BA=E$;故可利用$AB=E$或$BA=E$求A^{-1}.

例1 **2级方阵A满足什么条件时可逆？可逆时,求其逆矩阵. 这里** $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

解 设$B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, 则由

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ay+bw=0 \\ cy+dw=1 \end{cases},$$ 解之得

当$ad-bc\neq 0$时,

$$x=\frac{d}{ad-bc}, z=\frac{-c}{ad-bc}; \quad y=\frac{-b}{ad-bc}, w=\frac{a}{ad-bc}.$$

于是，有

$$B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

即

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

例2 已知A，B和$A+B$均为可逆矩阵，

证明 $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$

证 方法1 （定义）

$$(A^{-1}+B^{-1})[B(B+A)^{-1}A]=(A^{-1}B+E)(B+A)^{-1}A$$

$$=(A^{-1}B+A^{-1}A)(B+A)^{-1}A$$

$$=A^{-1}(B+A)(B+A)^{-1}A$$

$$=A^{-1}EA \quad =E$$

故$(A^{-1}+B^{-1})$可逆,且其逆阵为$B(A+B)^{-1}A.$

方法2（运算性质）

证

因A、B和$A+B$均为可逆矩阵,知 $A(B+A)^{-1}B$ 可逆.

由 $[A(B+A)^{-1}B]^{-1} = B^{-1}(A+B)A^{-1}$

$$= B^{-1}(E+BA^{-1}) = B^{-1} + A^{-1}$$

知$(A^{-1}+B^{-1})$可逆,且

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A.$$

伴随矩阵(adjoint matrix)

定义9 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

证明 设 $A = (a_{ij})$, 记 $AA^* = (b_{ij})$, 则

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = |A|\delta_{ij},\quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

故 $AA^* = \left(|A|\delta_{ij}\right) = |A|\left(\delta_{ij}\right) = |A|E.$

同理可得

$$AA^* = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}\right) = \left(|A|\delta_{ij}\right) = |A|\left(\delta_{ij}\right) = |A|E.$$

如果$d = |A| \neq 0$,有

$$A\left(\frac{1}{d}A^*\right) = \left(\frac{1}{d}A^*\right)A = E.$$

定理3　矩阵A可逆($invertible$)的充要条件是$|A| \neq 0$，且矩阵的逆矩阵为 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

其中A^*为矩阵A的伴随矩阵.

证明　若 A 可逆，即有A^{-1}使$AA^{-1} = E$.

故$|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$,　所以$|A| \neq 0$.

当$|A| \neq 0$时,

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = |A|$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & \boldsymbol{O} \\ & |A| & & \\ & & \ddots & |A| \\ \boldsymbol{O} & & & |A| \end{pmatrix},$$

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A\frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|}A = E,$$

按逆矩阵的定义得

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

证毕

奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当$|A| = 0$时, A称为奇异矩阵(singular matrix), 当$|A| \neq 0$时, A称为非奇异矩阵(nonsingular matrix).

由此可得A是可逆阵的充要条件是A为非奇异矩阵.

推论 若$AB=E$(或$BA=E$),则$B=A^{-1}$.

证明 $|A|\cdot|B|=|E|=1$, 故$|A|\neq 0$,

因而A^{-1}存在, 于是

$$B=EB=\left(A^{-1}A\right)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}.$$

证毕

逆矩阵的运算性质

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆,数$\lambda \neq 0$,则λA可逆,且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

证明 $$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

(4) 若A可逆,则A^T亦可逆,且$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

证明 $\because A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = E^T = E,$

$$\therefore \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

另外, 当$|A| \neq 0$时,定义

$$A^0 = E, \quad A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k, \quad (k\text{为正整数}).$$

当$|A|\neq 0,\lambda,\mu$为整数时,有

$$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu},\qquad \left(A^{\lambda}\right)^{\mu}=A^{\lambda\mu}.$$

(5)若A可逆,则有$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$.

证明 $\because AA^{-1}=E$

$\therefore |A|\left|A^{-1}\right|=1$

因此 $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$.

定理 4 A是一个$s\times n$矩阵，如果P是$s\times s$可逆矩阵，Q是$n\times n$可逆矩阵，那么

$$秩(A)=秩(PA)=秩(AQ)$$

证明　令

$$B=PA.$$

由定理 2 $$秩(B)\leq 秩(A)$$

但是由

$$A=P^{-1}B$$

有 $$秩(A)\leq 秩(B)$$

所以 $$秩(A)=秩(B)=秩(PA)$$

利用伴随矩阵求逆矩阵

例1　求方阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$的逆矩阵.

解　$\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}\neq 0,\quad \therefore\ A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得 $$A^*=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

利用伴随矩阵求逆矩阵

(1)求 $|A|$,当 $|A| \neq 0$时逆阵存在;
（2）求A^*;
(3) 求 $\dfrac{1}{|A|}A^* = A^{-1}$.

例2

求矩阵$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,$(ad - bc \neq 0)$的逆阵.

解 由$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$,知$A$可逆.

而$A_{11} = d, A_{12} = -c, A_{21} = -b, A_{22} = a$

$$\therefore A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

例3 求矩阵A的逆阵，这里$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$.

解$\because |A|=1\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}=0,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=1, A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}=0, A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1, A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=2$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0, A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1$$

$$\therefore A^*=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&-1&2\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=1A^*=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&-1&2\\1&0&-1\end{bmatrix}.$$

例4 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix}$，求$A^{-1}$.

解 $|A|=2\neq 0$, A^{-1}存在. 得

$A_{11}=2$, $A_{21}=6$,
$A_{31}=-4$,
$A_{12}=-3$, $A_{22}=-6$,
$A_{32}=5$,
$A_{13}=2$, $A_{23}=2$,
$A_{33}=-2$,

$$\Rightarrow A^{*}=\begin{bmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix},$$

所以 $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

例5　设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$,

求矩阵X使满足 $AXB=C$.

解 $\because |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0, \quad |B|=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=1\neq 0,$

$\therefore\ A^{-1}, B^{-1}$都存在.

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$,

又由 $AXB=C \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}X\underbrace{BB^{-1}}=A^{-1}CB^{-1}$

$$E$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}.$$

于是 $X=A^{-1}CB^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

例6. 设向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in R^n$, $x^T x=1$, E为n级单位矩阵，则证明n级矩阵$H=E-2xx^T$是对称矩阵，并且$HH^T=E$.

证明 $H^T=E^T-2xx^T=E-2xx^T=H$,所以H是n级对称矩阵.

$HH^T=(E-2xx^T)(E-2xx^T)=E-2xx^T-2xx^T+$
$(-2xx^T)(-2xx^T)=E-4xx^T+4xx^T=E$

因此$HH^T=E$.

例7 设 n 阶方阵A，已知$|A|=0$,且$|A|$中元素a_{11}的代数余子式$A_{11}\neq 0$，求方程组$Ax=0$的通解.

解 因$|A|=0$,则$r(A)\leq n-1$，又因$A_{11}\neq 0$，则知A存在非零的$n-1$阶子式，则$r(A)\geq n-1$. 故$r(A)=n-1$.

因此,方程组$Ax=0$的基础解系只含$n-r(A)=1$个向量,从而方程组的任何一个非零解向量均可作为基础解系.

注意到$AA^*=|A|E=0$,可见A^*的每个列向量都是齐次方程组$Ax=0$的解. 特别地,由$A_{11}\neq 0$知:A^*的第一列即是该方程组的非零解，故方程组的通解可表作：

$$x=c(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^T \quad (c\text{为任意常数})$$