NANJING UNIVERSITY

离散数学习题课

范文殊

2019/11/24

内容回顾

- 代数系统引论
- 群论导引

代数系统引论（第11讲）

- 代数系统主要研究一个运算封闭的非空集合。
- 单位元、零元，不加左右都是合称，而且一旦左右均存在则相等且唯一。
- 单位元和零元相对于代数系统进行讨论，逆元相对于每个元素进行讨论。

代数系统引论（第11讲）

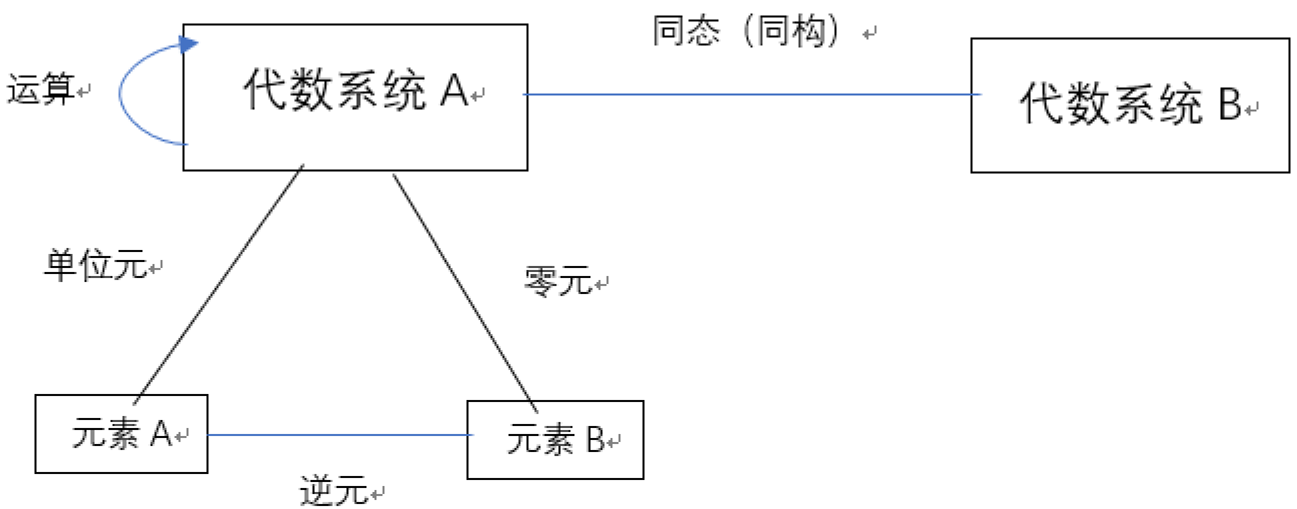
- 代数系统$\langle S_1,\circ\rangle$与$\langle S_2,*\rangle$同态（homomorphism，记$S_1 \sim S_2$）当且仅当存在函数$f: S_1 \rightarrow S_2$，满足：

$$\forall x, y \in S_1, f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

- 同态和同构用于描述代数系统具有相似性质。

- 同构可以看作同态中映射函数为双射函数的特殊情况。

代数系统引论（第11讲）



习题解答

Problem 2

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：

(4) 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算，其中 $n \geq 2$。

(5) 正实数集合 $\mathbb{R}^+$ 和 $\circ$ 运算，其中 $\circ$ 运算定义为：

$\forall a$，$b \in \mathbb{R}^+$，$a \circ b = ab - a - b$

(9) $S = \{0，1\}$，S 关于普通加法和乘法运算。

（4）加法不封闭，乘法封闭。

（5）不封闭。

（9）加法不封闭，乘法封闭。

习题解答

Problem 3

$\mathbb{R}$ 为实数集，定义以下 6 个函数 f_1，f_2，…，f_6。$\forall x$，$y \in \mathbb{R}$ 有

$$f_1((x,\ y>)) = x + y, \qquad f_2((x,\ y>)) = x - y,$$

$$f_3((x,\ y>)) = x \cdot y, \qquad f_4((x,\ y>)) = max(x,\ y),$$

$$f_5((x,\ y>)) = min(x,\ y), \qquad f_6((x,\ y>)) = |x - y|$$

(3) 求所有 $\mathbb{R}$ 上二元运算的单位元、零元以及每一个可逆元素的逆元。

(3)

	单位元	零元	逆元
f_1	0	×	$-x$
f_2	×	×	×
f_3	1	0	$\boxed{1/x(x \neq 0)}$
f_4	×	×	×
f_5	×	×	×
f_6	×	×	×

Problem 7

下面各集合都是 $\mathbb{N}$ 的子集，它们能否构成代数系统 $V=<\mathbb{N}, +>$ 的子代数：

(1) $\{x|x \in \mathbb{N} \wedge x$ 的某次幂可以被 16 整除 $\}$

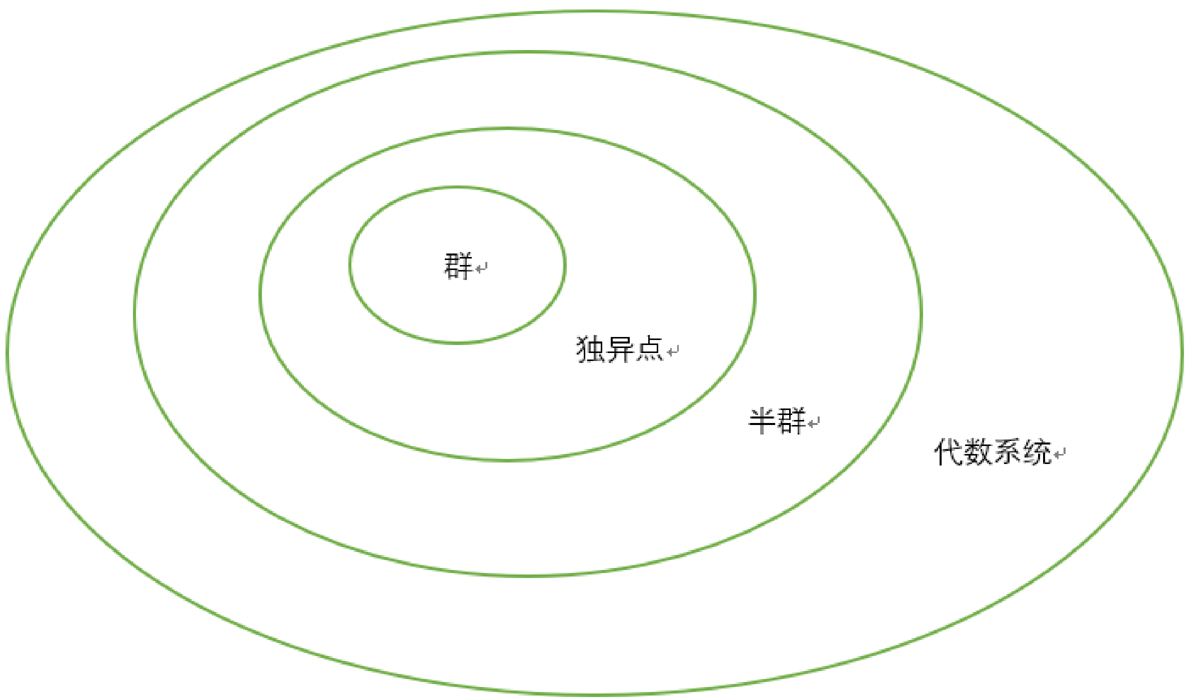
(2) $\{x|x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x$的某次幂可以被$y$整除$\}$

（1）能。

（2）能。

群论导引（第12讲）

- 半群：可结合的代数系统
- 独异点：含有单位元的半群
- 群：每个元素都有逆元的独异点



群论导引（第12讲）

- 群的阶：群的基数

- 元素的阶：使得等式 $a^k = e$ 成立的最小正整数 k

Problem 2

$S=\{a，b，c\}$，$*$ 是 S 上的二元运算，且 $\forall x$，$y\in S$，$x*y=x$。

(1) 证明 S 关于 $*$ 运算构成半群。

(2) 试判断 S 成为独异点的条件。

解:

（1）

运算显然是封闭的。因为 $\forall x,y,z\in S$，$(x*y)*z=x*y=x$ 且 $x*(y*z)=x*y=x$。所以结合律成立。综上，S 关于 $*$ 运算构成半群。

（2）若存在 $e\in S$，使得 e 为 S 中的单位元，必有 $a*e=e*a=a$，而 $\forall x$，$y\in S$，$x*y=x$，那么 $e*a=e$，于是得到 $e=a$。因此如果存在单位元，这个单位元必然与每个元素相同。但一个代数系统只有一个单位元，矛盾。因此不存在成为独异点的条件。