2 条件概率与独立性

前面所讲的事件概率 $P(A)$ 都是在给定随机试验的样本空间上进行的, 除随机试验的基本条件外, 不考虑其它任意条件和因素. 在解决很多实际的概率问题时, 往往需要考虑在某些附加信息 (条件) 下的事件发生的概率, 即本节所研究的条件概率.

2.1 条件概率

2.1.1 条件概率

将事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率, 记为 $P(B|A)$, 称其为事件 A 条件下事件 B 的概率, 或事件 B 在事件 A 条件下的概率. 首先来看一个直观的例子.

例2.1. *掷一枚骰子后观察点数, 事件 B 表示观察到 3 点, 事件 A 表示观察到奇数点, 求 $P(B)$ 和 $P(B|A)$.*

解. 样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$, 以及事件 $B=\{3\}$ 和事件 $A=\{1,3,5\}$. 根据古典概型可得

$$P(B)=\frac{1}{6},\quad P(B|A)=\frac{1}{3}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

□

若事件 A 发生的条件下事件 B 发生, 则试验结果必为 AB, 由此给出条件概率的形式化定义.

定义2.1. *设 A 和 B为同一样本空间的两随机事件且 $P(A)>0$, 称 $P(B|A)=P(AB)/P(A)$ 为事件A发生的条件下事件B发生的概率, 简称***条件概率***.*

由于 A 发生的条件下考虑 B 事件的发生, 可将 A 看作新的样本空间, 即缩减的样本空间, 由此可知条件概率的本质是缩小了有效的样本空间.

下面研究条件概率的性质:

1) 有界性: 对随机事件 A 和 B 且满足 $P(A)>0$, 有 $0\leq P(B|A)\leq 1$.

   Proof. 由 $AB\subset A$ 有 $0\leq P(AB)\leq P(A)$, 再根据 $P(A)>0$ 可得 $0\leq\frac{P(AB)}{P(A)}\leq 1$. □

2) 规范性: 对随机事件 A 和样本空间 Ω 且满足 $P(A)>0$, 有 $P(\Omega|A)=1$.

   Proof. 由 $\Omega\cap A=A$ 可得 $P(\Omega|A)=\frac{P(A\Omega)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$. □

3) 容斥原理: 对随机事件 A, B_1 和 B_2 且满足 $P(A)>0$, 有

$$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A).$$

Proof. 由条件概率的定义有

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P((B_1 \cup B_2) \cap A)/P(A).$$

再根据随机事件的分配律和容斥原理有

$$P((B_1 \cup B_2) \cap A) = P(AB_1 \cup AB_2) = P(AB_1) + P(AB_2) - P(AB_1B_2),$$

上式两边同时除以 $P(A)$ 即可完成证明. □

4) 补事件: 对随机事件 A 和 B 且满足 $P(A) > 0$, 有 $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$.

Proof. 由容斥原理有

$$1 = P(\Omega|A) = P(B \cup \bar{B}|A) = P(B|A) + P(\bar{B}|A) - P(B\bar{B}|A)$$

再根据事件 B 和 $\bar{B}$ 互不相容有 $P(B\bar{B}|A) = 0$, 从而完成证明. □

5) 可列可加性: 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 是两两互不相容的事件, 以及随机事件 $P(A) > 0$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

Proof. 由事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 两两互不相容, 可得事件 $AB_1, AB_2, \cdots, AB_n, \cdots$ 也是两两互不相容, 根据概率公理性有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \frac{P\left(A \bigcap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\right)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} AB_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

□

例2.2. 盒子中有 4 只不同的产品, 其中 3 只一等品, 1 只二等品. 从盒子中不放回随机取两次产品. 用 A 表示第一次拿到一等品的事件, B表示第二次取到一等品的事件, 求条件概率 $P(B|A)$.

解. 将盒子中 3 只一等产品分别编号为 $1, 2, 3$, 二等品编号4. 用 i 和 j 分别表示第一、二次抽取的产品的编号, 由此可得

$$\Omega = \{(i,j) \colon i \neq j, i,j \in [4]\}, \qquad A = \{(i,j) \colon i \neq j, i \neq 4\},$$
$$B = \{(i,j) \colon i \neq j, j \neq 4\}, \qquad AB = \{(i,j), i \neq j, i,j \in [3]\},$$

进一步有

$$|\Omega| = 12, \quad |A| = 9, \quad |B| = 9, \quad AB = 6.$$

根据古典概型有

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}, \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

方法二: 样本空间缩减法 当事件 A 发生后, 剩下 2 只一等品, 1 只二等品, 因此有 $P(B|A) = 2/3$. □

例2.3. 随机掷两次骰子, 已知第一次掷 6 点, 求两次点数之和不小于 10 的概率.

解. 根据题意可知样本空间 $\Omega=\{(i,j)\colon i,j\in[6]\}$, 事件 $A=\{(6,j)\colon j\in[6]\}$ 表示第一次掷 6 点, 事件 $B=\{(i,j)\colon i+j\geq 10\}$ 表示两次点数之和小于 10. 于是有事件 $AB=\{(6,j)\colon j\in\{4,5,6\}\}$, 从而得到 $P(B|A)=1/2$.

方法二: 样本空间缩减法 在第一次掷 6 点的条件下, 第二次掷骰子的样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$, 事件 $B=\{$两次点数之和 $\geq 10\}=\{4,5,6\}$, 于是有 $P(B|A)=1/2$. □

2.1.2 乘法公式

对随机事件 A 和 B 且 $P(A)>0$, 根据条件概率公式 $P(B|A)=P(AB)/P(A)$, 由此可得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

针对更一般的情况, 有如下条件概率乘法公式:

性质2.1. 对随机事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

例2.4. 假设一批灯泡有 100 只, 其中有次品 10 只, 其余为正品. 不放回抽取, 每次抽取一只, 求第三次才是正品的概率.

解. 令事件 A_i 表示第 i 次抽到正品($i\in[3]$), 事件 B 表示第 3 次才抽到的正品, 有 $B=\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$. 根据乘法公式有

$$P(B)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\ A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}=\frac{9}{1078}.$$

□

例2.5. 假设有 n 把钥匙, 只有一把能打开门. 不放回随机取出一把开门, 求第 k 次打开门的概率.

解. 用事件 A_i 表示第 i 次不能打开门, 则第 k 次打开门的事件可表示为 $A_1A_2\cdots A_{k-1}\bar{A}_k$, 根据乘法公式有

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_{k-1}\bar{A}_k) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_{k-1}|A_1\cdots A_{k-2})P(\bar{A}_k|A_1A_2\cdots A_k)\\ &= \frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\times\frac{1}{n-(k-1)}=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

方法二: 抽签原理 第 k 次打开门的概率与 k 无关, 每次打开门的概率相同, 共 n 把钥匙, 因此第 k 次打开门的概率为 $1/n$. □

课题练习(Matching 问题)**.** 有 n 对夫妻参加一次活动, 所有夫妻被随机两两分成 n 组, 每组 1 男 1 女, 求恰好 n 对夫妻两两全配对的概率.

2.1.3 全概率公式 (Law of total probability)

全概率公式用于复杂的概率计算, 本质上是对加法和乘法的综合运用:

- 对互不相容的事件 A, B 有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;
- 对任意事件 A, B 有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

首先定义样本空间的一个划分.

定义2.2. *若随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足*

- *互斥性或互不相容性: $A_i\cap A_j=\emptyset$ $(i\neq j)$,*
- *完备性: $\Omega=\bigcup_{i=1}^n A_i$,*

称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为空间 Ω 的一个 **划分**.

特别地, 当 $n=2$ 时有 $A_1=\bar{A}_2$, 即 A_1 与 A_2 互为对立事件. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间的一个划分, 则每次试验时事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有且仅有一个事件发生.

基于样本空间的划分, 下面介绍全概率公式:

定理2.1. *设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分, 对任意事件 B, 有*

$$P(B)=\sum_{i=1}^n P(BA_i)=\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i),$$

称之为 ***全概率公式 (Law of probability)***.

将事件 B 看作某一过程的结果, 将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 看作该过程的若干原因, 若 i) 每一原因发生的概率已知, 即 $P(A)$ 已知; ii) 每一原因对结果 B 的影响已知, 即 $P(B|A_k)$ 已知, 则 $P(B)$ 可求.

Proof. 根据分配律有

$$B=B\cap\Omega=B\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\bigcup_{i=1}^n BA_i$$

由 $A_i\cap A_j=\emptyset$ 可得 $BA_i\cap BA_j=\emptyset$, 由概率的有限可列可加性有

$$P(B)=P\left(\bigcup_{i=1}^n BA_i\right)=\sum_{i=1}^n P(BA_i)=\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

定理得证. □

例2.6. *同一种型号产品由三家工厂生产, 其生产的市场份额分别为 30%, 50%, 20%, 三家工厂的次品率分别为 2%, 1%, 1%. 求这批产品中任取一件是次品的概率.*

解. 用事件 B 表示任取一件是次品, 事件 A_i 表示取自第 i 家工厂的产品 ($i \in [3]$). 于是有

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 1.3\%.$$

□

例2.7. *随机抛 n 次硬币, 证明正面朝上的次数是偶数 (或奇数) 的概率为 $1/2$.*

Proof. 用事件 A 表示前 $n-1$ 次抛硬币正面朝上的次数为偶数, 其对立事件 $\bar{A}$ 表示前 $n-1$ 次抛硬币朝上的次数为奇数, 事件 B 表示前 n 次硬币朝上的次数为偶数. 于是有

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{P(A)}{2} + \frac{P(\bar{A})}{2} = \frac{1}{2}.$$

方法二: 直接计算概率 前 n 次硬币朝上的次数为偶数分别有 $\{0, 2, 4, \ldots, 2k\}$ ($2k \leq n$), 根据概率公式直接计算有

$$\sum_{0\leq k\leq n/2} \binom{n}{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k} = \frac{1}{2^n} \sum_{0\leq k\leq n/2} \binom{n}{2k} = \frac{1}{2}$$

这里使用公式 $\sum_{0\leq k\leq n/2} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$.

方法三: 推迟决定原则 (Principle of deferred decision) 无论前 $n-1$ 次中正面朝上的次数为奇数或偶数, 前 n 次正面朝上次数的奇偶性取决于最后一次, 机会各半. □

2.1.4 贝叶斯公式 (Bayes' Law)

实际中还存在另一类问题, 已知结果找原因, 因果互换. 即观察到事件 B 已发生的条件下, 寻找导致 B 发生原因的概率. 下面给出贝叶斯公式 (Bayes' law) 的严格定义:

定理2.2. *设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分, 且事件 B 满足 $P(B) > 0$, 则有*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}.$$

Proof. 根据条件概率和全概率公式可知

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}.$$

□

贝叶斯公式的直觉解释: 将事件 B 看作结果, 将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 看作产生结果的若干种原因, 如果 i) 每一种原因发生的概率 $P(A_i)$ 已知; ii) 每一种原因 A_i 对结果 B 的影响已知, 即概率 $P(B|A_i)$ 已知, 则可求事件 B 由第 i 种原因引起的概率 $P(A_i|B)$. 特别地, 当 $n = 2$ 时有

推论2.1. *对事件 A 和 B 且满足 $P(B) > 0$, 有*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}.$$

例2.8. *有一种型号产品由三家工厂生产, 其生产的市场份额分别为 15%, 80%, 5%, 次品率分别为 2%, 1%, 3%, 在仓库中随机取一件, 若已知取到的是次品, 求此产品出自三家工厂的概率.*

解. 三家工厂分别标号为 1, 2, 3, 用事件 A_i 表示所取产品来自第 i 家工厂, 于是有 $P(A_1) = 0.15$, $P(A_2) = 0.8$, $P(A_3) = 0.05$. 用事件 B 表示所取产品为次品, 有 $P(B|A_1) = 0.02$, $P(B|A_1) = 0.01$, $P(B|A_1) = 0.03$. 根据全概率公式有

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.0125.$$

根据贝叶斯公式有

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.15 \cdot 0.02}{0.0125} = \frac{30}{125}, \\ P(A_2|B) &= \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.8 \cdot 0.01}{0.0125} = \frac{80}{125}, \\ P(A_3|B) &= \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.05 \cdot 0.03}{0.0125} = \frac{15}{125}, \end{aligned}$$

由此可知次品出自于第 2 家工厂的概率最大. □

课题练习. *已知事件A为病人被诊断为肝癌, 事件C为病人患有肝癌, $P(A|C) = 0.95$, $P(\overline{A}|\overline{C}) = 0.9$, $P(C) = 0.0004$. 求$P(C|A)$.*

例2.9 (三门问题)**.** *在一电视节目中, 参赛者看到三扇关闭的门, 已知一门后面是汽车, 其它两门后面是山羊, 选中什么则获得什么, 主持人知道三门后有什么. 当参赛者选定一扇门但未开启, 此时节目主持人则开启剩下有山羊的一扇门. 问题: 若参赛者允许重新选择, 是否换一扇门?*

解. 主持人知道三门后有什么, 当参赛者选择的门后是山羊时, 则主持人则选择了另一头山羊所在的门, 因此此时未打开的门则为汽车, 此时的概率为 2/3; 当参赛者选择的门后是汽车时, 主持人可随机选择一门并打开, 换门则选择山羊, 此时的概率为 1/3. 因此若不换门, 获得车的概率为 1/3; 若换门, 获得车的概率为 2/3. □

与三门问题类似的是三囚徒问题, 如下

例2.10. *三犯人 a, b, c 均被判为死刑, 法官随机赦免其中一人, 看守知道谁被赦免但不会说. 犯人 a 问看守: b 和 c 谁会被执行死刑? 看守的策略: i) 若赦免 b, 则说 c; ii) 若赦免 c, 则说 b; iii) 若赦免 a, 则以 1/2 的概率说 b 或 c. 看守回答 a: 犯人 b 会被执行死刑. 犯人 a 兴奋不已, 因为自己生存的概率为 1/2. 犯人 a 将此事告诉犯人 c, c 同样高兴, 因为他觉得自己的生存几率为 2/3. 那么谁错了?*

解. 用事件 A, B, C 分别表示犯人 a, b, c 被赦免, 由题意可知

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3.$$

用事件 D 表示看守人说犯人 b 被执行死刑, 则有

$$P(D|A) = 1/2 \quad P(D|B) = 0 \quad P(D|C) = 1.$$

由全概率公式有

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = 1/2.$$

由贝叶斯公式有

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)} = \frac{1}{3} \quad P(C|D) = \frac{P(C)P(D|C)}{P(D)} = \frac{2}{3}$$

所以犯人 a 的推断不正确, 犯人 c 的推断正确. □

2.2 独立性

在一般情况下, 由条件概率定义知

$$P(B|A) = P(AB)/P(A) \neq P(B),$$

即事件 A 发生对事件 B 的发生有影响. 然而在很多情况下, 事件 A 的发生对事件 B 的发生可能没有任何影响, 这是本节研究的事件独立性.

2.2.1 两事件的独立性

定义2.3. *若事件 A, B 满足 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A 与 B 相互独立.*

根据上面的定义可知, 对事件 A 和 B 满足 $P(A)P(B) > 0$, 有

$$P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A).$$

其次, 任何事件与不可能事件 (或必然事件) 相互独立.

性质2.2. *若事件 A 与 B 相互独立, 则 A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B, $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都互相独立.*

Proof. 根据事件差公式 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$ 有

$$P(A\bar{B}) = P(A-AB) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1-P(B)) = P(A)P(\bar{B}).$$

同理可证 $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B)$. 利用容斥原理有

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}) &= 1 - P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1-P(A))(1-P(B)) = P(\bar{A})P(\bar{B}), \end{aligned}$$

从而完成证明. □

如何判断事件的独立性? 根据定义直接计算, 例如

例2.11. *从一副扑克 (不含大王、小王) 中随机抽取一张扑克, 用事件 A 表示抽到 10, 事件 B 表示抽到黑色的扑克. 事件 A 与 B 是否独立?*

解. 根据问题可知一副扑克 (不含大王、小王) 52张, 黑色扑克 26 张, 4 张 10, 因此

$$P(A) = 4/52 = 1/13, \qquad P(B) = 1/2.$$

另一方面有

$$P(AB) = 2/52 = 1/26 = P(A)P(B),$$

事件 A 和 B 相互独立. □

其次, 可根据实际问题判断事件的独立性, 例如

例2.12. *i) 两人独立射击打靶、且互不影响, 因此两人中靶的事件相互独立;*

ii) 从 n 件产品中随机抽取两件, 事件 A_i 表示第 i 件是合格品. 若有放回抽取, 则事件 A_1 与 A_2 相互独立; 若不放回则不独立;

iii) 机器学习的经典假设是训练数据独立同分布采样.

在第一章中研究了事件的互斥性, 现在讨论独立与互斥 (互不相容) 之间的关系: 事件 A 和 B 独立, 根据定义有

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

独立性与概率相关, 反映事件的概率属性; 事件 A 和 B 互斥, 根据定义有

$$AB = \emptyset,$$

互斥性与事件的运算关系相关, 与概率无关. 因此独立与互斥反映事件不同的性质, 无必然联系. 这一点可通过图 xxx证明: 事件 A 和 B 独立并不意味着事件 A 和 B 互斥; 以及事件 A 和 B 互斥并不意味着事件 A 和 B 独立. 进一步有

性质2.3. *事件 A 和 B 满足 $P(A)P(B) > 0$, 若事件 A 和 B 独立则 A 和 B 不互斥; 若事件 A 和 B 互斥则 A 和 B 不独立.*

Proof. 若事件 A 和 B 独立且 $P(A)P(B) > 0$, 有

$$P(AB) = P(A)P(B) > 0$$

事件 A 和 B 不互斥; 另一方面, 若事件 A 和 B 互斥且 $P(A)P(B) > 0$, 有

$$P(AB) = 0 \neq P(A)P(B)$$

事件 A 和 B 不独立. □

课题练习. *1) 若事件 A 和 B 互斥且 $P(A)P(B) > 0$, 哪些说法正确:*
i) $P(B|A) > 0$, ii) $P(A|B) = 0$, iii) A, B不独立, iv) $P(A|B) = P(A)$.

2) 若事件 A 和 B 独立且 $P(A)P(B) > 0$, 哪些说法正确:
i) $P(B|A) > 0$, ii) $P(A|B) = P(A)$, iii) $P(A|B) = 0$, iv) $P(AB) = P(A)P(B)$.

2.2.2 多事件的独立性

定义2.4. 若三事件 $A,\ B,\ C$ 满足 $P(AB)=P(A)P(B),\ P(AC)=P(A)P(C),\ P(BC)=P(B)P(C)$ 且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$, 则称事件 A,B,C 独立.

注意上述定义中三事件 A,B,C 的独立性与三事件中两两事件独立性有所不同: 由三事件 A,B,C 独立可知三事件 A,B,C 两两独立; 反之不一定成立, 还需满足 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$. 下面定义 n 个事件的独立性:

定义2.5. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意 k 个事件独立, 即对 $\forall k\in[n]$ 有

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$$

其中 $1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots i_k\leq n$, 则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

下面来看一个独立性的例子.

例2.13. 三人独立破译一份密码, 每人单独能破译的概率分别为 $1/5,1/3,1/4$, 问三人中至少有一人能破译密码的概率.

解. 用事件 A_i 表示第 i 个人破译密码 $(i\in[3])$, 根据题意有

$$P(A_1)=1/5,\qquad P(A_2)=1/3,\qquad P(A_3)=1/4.$$

根据容斥原理和独立性, 三人中至少有一人能破译密码的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1\cup A_2\cup A_3) &= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3) \\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{20}-\frac{1}{15}-\frac{1}{12}+\frac{1}{60}=0.6 \end{aligned}$$

方法二 根据对偶性和独立性, 三人中至少有一人能破译密码的概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=0.6.$$

□

从上例可知: 尽管每个人能破译密码的概率都小于 1/2, 但三人中至少有一人能破译密码的概率则为 2/3. 下面推广到更一般的情况.

设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立、且其概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$, 则事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一事件发生的概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)=1-(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n);$$

而事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一事件不发生的概率为

$$P(\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_n)=1-P(A_1A_2\cdots A_n)=1-p_1p_2\cdots p_n.$$

若每个事件发生的概率 p_i 都非常小而 n 非常大, 则 n 个事件中 ‘至少有一事件发生’ 或 ‘至少有一事件不发生’ 的概率可能很大.

定义2.6. 若事件 A 在一次试验中发生的概率非常小, 但经过多次独立地重复试验, 事件 A 的发生是必然的, 称之为 **小概率原理**.

小概率原理可根据严格的数学推理得到: 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 独立且每事件发生的概率 $P(A_i) = p > 0$ 非常小, 则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) = 1 - (1-p)^n \to 1 \quad \text{当} \quad n \to \infty,$$

即独立重复多次的小概率事件亦可成立必然事件.

若独立事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 发生的概率 $P(A_i) = p\ (i \in [n])$, 则 n 个事件中恰有 k 个事件发生的概率为 $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

例2.14. 冷战时期美国的导弹精度 99%, 苏联的导弹精度 60%, 但苏联的导弹数量特别多, 导弹的数量能否弥补精度的不足?

解. 假设每次独立发射 n 枚导弹, 用事件 A_i 表示第 i 枚导弹命中目标, 则 n 枚导弹击中目标的概率为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - (1-0.6)^n \geq 0.99 \quad \Rightarrow \quad n \geq 5,$$

因此每次独立发射 5 枚导弹, 击中目标的概率高于 99%. □

在上例中, 若美国的导弹精度为 90%, 苏联的导弹精度为 70%, 则苏联每次只需独立发射两枚导弹即可达到 91%.

例2.15. 一串电路图: A, B, C, D, E, F, G 是电路元件, 电路元件各自下方的数字表示正常工作的概率. 若各电路元件之间相互独立. 求电路正常工作的概率.

解. 用事件 W 表示电路正常工作, 则有 $W = A \cap B \cap (C \cup D \cup E) \cap (F \cup G) \cap H$. 根据独立性假设有

$$P(W) = P(A)P(B)P(C \cup D \cup E)P(F \cup G)P(H).$$

根据 $P(C \cup D \cup E) = 1 - P(\bar{C})P(\bar{D})P(\bar{E}) = 1 - (2/3)^3 = 19/27$ 和 $P(F \cup G) = 1 - P(\bar{E})P(\bar{G}) = 7/16$, 可得 $P(W) = 133/1800$. □