姓名：左之睿　　学号：191300087　　邮箱：1710670843@qq.com

为排版美观，将所有题目附图删去

一. 已知周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数表示式为 $x(t) = 2 + 3\cos(2t) + 4\sin(2t) + 2\sin(3t + 30°) - \cos(7t + 150°)$：

(1) 求周期信号 $x(t)$ 的基波角频率；

(2) 画出周期信号 $x(t)$ 的幅度谱和相位谱。

解：

(1)、分别求 $3cos(2t), 4sin(2t), 2sin(3t + 30°), cos(7t + 150°)$ 的周期为 $\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{7}$，故基波周期 T_0 为最小公倍数 2π，所以基波角频率：

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

(2)、$x(t) = 2 + 3cos2t + cos3t + \frac{\sqrt{3}}{2}cos7t + 4sin2t + \sqrt{3}sin3t + \frac{1}{2}sin7t$

由 $X_n = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}jb_n$

求得 $X_0 = 2, X_2 = 1.5 - 2j, X_3 = 1 - \sqrt{3}j, X_7 = \frac{\sqrt{3}}{4} - 0.25j,$

单边频谱振幅$C_n = 2|X_n|$，绘制的幅度谱和相位谱如下：

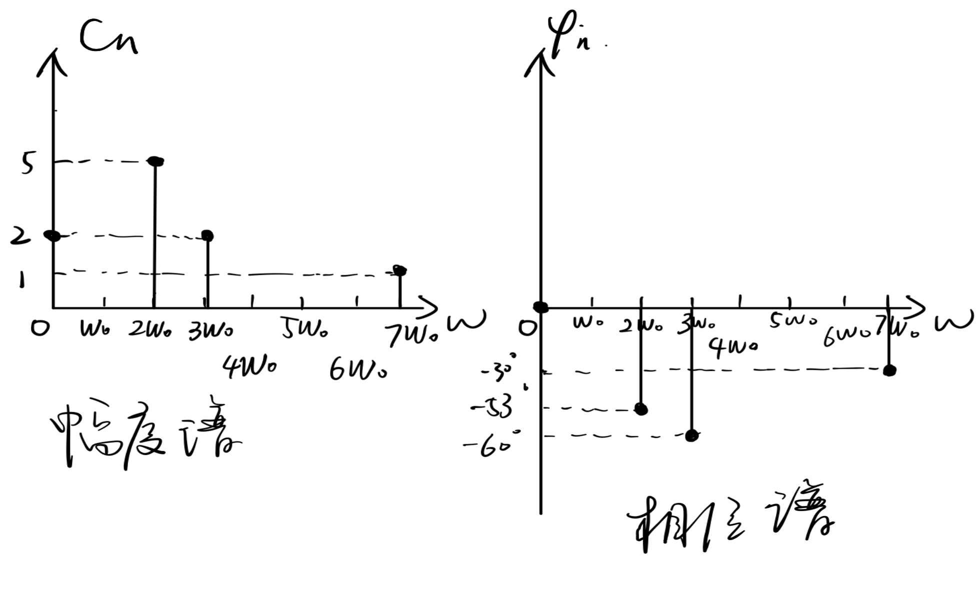

Figure 1: 第一题幅度谱和相位谱

二. 已知信号

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \cos(t), & |t| \le \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

求该信号的傅里叶变换。

解:

$$\begin{aligned} X(jw) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(1 + cos(t))e^{-jwt}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(coswt - jsinwt)dt + \int_{-\pi}^{\pi} cost(coswt - jsinwt)dt \end{aligned}$$

第一项中由于 $sinwt$ 为奇函数，故只需要计算 $coswt$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上的积分，结果为 $2\frac{sin\pi w}{w}$
接下来计算第二项 $\int_{-\pi}^{\pi} cost(coswt - jsinwt)dt$，其中含 $sinwt$ 项为奇函数，在对称区间上积分为 0，故计算 $\int_{-\pi}^{\pi} costcoswtdt$ 即可

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} costcoswtdt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[cos(t + wt) + cos(t - wt)]dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos((1 + w)t)dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos((1 - w)t)dt \\ &= \frac{sin((1 + w)\pi)}{1 + w} + \frac{sin((1 - w)\pi}{1 - w} \end{aligned}$$

将两项加起来即可得到:

$$\begin{aligned} X(jw) &= 2\frac{sin\pi w}{w} + \frac{sin((1 + w)\pi)}{1 + w} + \frac{sin((1 - w)\pi}{1 - w} \\ &= 2\pi Sa(w\pi) + \pi Sa((1 - w)\pi) + \pi Sa((1 + w)\pi) \end{aligned}$$

三. 已知 $x_1(t)$ 和 $x(t)$ 的波形图如图所示，$x_1(t)$ 的傅里叶变换为 $X_1(j\omega) = 2T \cdot Sa(\omega T)$，试利用傅里叶变换的尺度变换、位移和线性性质求 $x(t)$ 的傅里叶变换。

解：

$x(t) = x_1(2t - T) - x_1(2t + T)$，故

$$X(jw) = \mathcal{F}[(x_1(2t - T))] - \mathcal{F}[(x_1(2t + T))]$$

分别求这两项

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(x_1(2t - T))] &= \mathcal{F}[(x_1(2(t - 0.5T))] \\ &= \frac{1}{2}X_1(\frac{jw}{2})e^{-\frac{jwT}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(x_1(2t + T))] &= \mathcal{F}[(x_1(2(t + 0.5T))] \\ &= \frac{1}{2}X_1(\frac{jw}{2})e^{\frac{jwT}{2}}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}X(jw) &= \frac{1}{2}X_1(\frac{jw}{2})e^{-\frac{jwT}{2}} - \frac{1}{2}X_1(\frac{jw}{2})e^{\frac{jwT}{2}} \\ &= TSa(\frac{wT}{2})(e^{-\frac{jwT}{2}} - e^{\frac{jwT}{2}})\end{aligned}$$

四. 求图所示对称周期矩形信号的傅里叶级数，三角形式和指数形式。

解：

1. 三角形式：

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-0.5T}^{0.5T} x(t)dt = 0$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-0.5T}^{0.5T} x(t)cos(nwt)dt = 0$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-0.5T}^{0.5T} x(t)sin(nwt)dt = \frac{2E}{Tnw} - \frac{2E}{Tnw}cos(0.5nwT)$$

将 $T = \frac{2\pi}{w}$ 代入，得到 $b_n = \frac{E}{n\pi} - \frac{E}{n\pi}cos(n\pi)$

故三角形式的傅里叶级数为 $x(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{E}{n\pi} - \frac{E}{n\pi}cos(n\pi))sin(nwt)$

2. 指数形式：

$$X_n = \frac{1}{2}a_n - \frac{j}{2}b_n = \frac{j}{2}(\frac{E}{n\pi}cos(nw) - \frac{E}{n\pi})$$

注意到 $n = 0$ 时分母变成 0，故 $X_0 = \frac{1}{T}\int_{-0.5T}^{0.5T} x(t)dt = 0$

故指数形式的傅里叶级数为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty \text{且} n\neq 0}^{\infty} \frac{j}{2}(\frac{E}{n\pi}cos(nw) - \frac{E}{n\pi})e^{jnwt}$$

五. 求图所示周期锯齿信号的指数形式傅里叶级数，并大致画出频谱图。

解：

$$
\begin{aligned}
X_n &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jnwt}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T (-\frac{E}{T}t + E)e^{-jnwt}dt \\
&= -\frac{E}{T^2}\int_0^T te^{-jnwt}dt + \frac{E}{T}\int_0^T e^{-jnwt}dt \\
&= -\frac{E}{T^2}(-\frac{T}{jnw}e^{-jnwT})
\end{aligned}
$$

代入 $wT = 2\pi$ 得到 $X_n = \frac{E}{j2n\pi}e^{-j\cdot 2n\pi} = \frac{E}{j2n\pi}$

注意到 $n = 0$ 时分母为 0，故 $X_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{E}{2}$

所以指数形式傅里叶级数为

$$
x(t) = \frac{E}{2} + \sum_{n=-\infty \text{且} n\neq 0}^{\infty} \frac{E}{j2n\pi}e^{jnwt}
$$

频谱图如下：

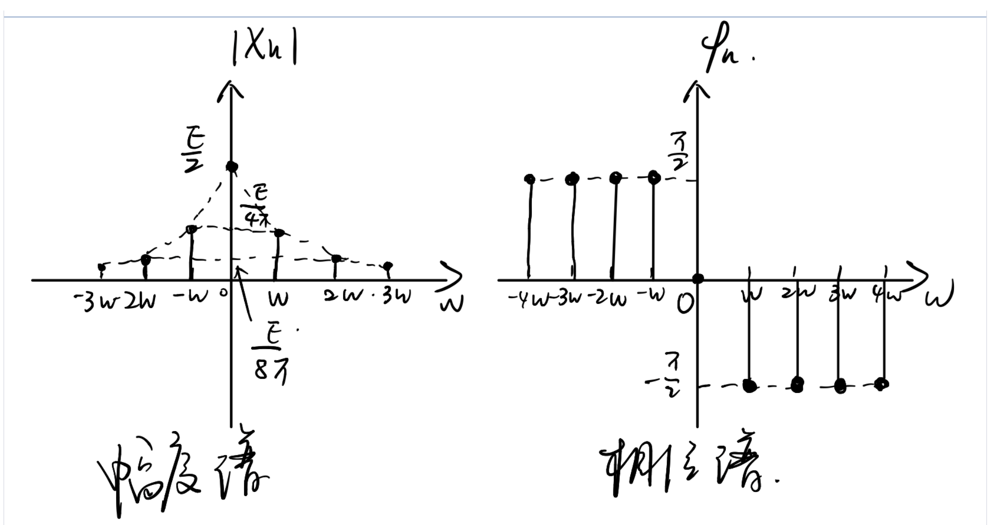

Figure 2: 第五题频谱图

六. 求图所示锯齿脉冲与单周正弦脉冲的傅里叶变换。

解：

(a)

$$\begin{aligned}X(jw) &= \int_{-0.5T}^{0.5T} x(t)e^{-jwt}dt \\ &= \int_{-0.5T}^{0.5T} \frac{2E}{T}te^{-jwt}dt \\ &= \frac{2E}{T}\cdot(-\frac{1}{jw})(te^{-jwt} - \frac{sinwt}{w} + j\frac{coswt}{w})|_{t_1=-0.5T}^{t_2=0.5T} \\ &= \frac{4Esin0.5wT}{Tjw^2} - \frac{2Ecos0.5wT}{jw} \\ &= -\frac{2E}{jw}cos0.5wT + \frac{2E}{jw}Sa(0.5wT)\end{aligned}$$

注意 $w = w_0$ 时分母为 0，此时 $X(jw) = X(0) = 0$

(b)

$$\begin{aligned}X(jw) &= \int_{0}^{T} x(t)e^{-jwt}dt \\ &= \int_{0}^{T} (-\frac{E}{T}t + E)e^{-jwt}dt \\ &= -\frac{E}{T}\int_{0}^{T} te^{-jwt}dt + E\int_{0}^{T} e^{-jwt}dt \\ &= -\frac{E}{T}\cdot(-\frac{1}{jw})(te^{-jwt} - \frac{sinwt}{w} + j\frac{coswt}{w})|_{t_1=0}^{t_2=T} + E(\frac{sinwt + jcoswt}{w})|_{t_1=0}^{t_2=T} \\ &= \frac{E}{Tw^2}e^{jwT} - \frac{E}{Tw^2} - \frac{Ej}{w}\end{aligned}$$

注意 $w = 0$ 时分母为 0，此时 $X(jw) = X(0) = \frac{ET}{2}$

(c) 记 $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$
\begin{aligned}
X(jw) &= \int_0^T x(t)e^{-jwt}dt \\
&= \int_0^T Esin(w_0 t)e^{-jwt}dt \\
&= E\frac{-\frac{1}{w_0}e^{-jwt}cos(w_0 t) - \frac{jw}{w_0^2}e^{-jwt}sin(w_0 t)}{1-\frac{w^2}{w_0^2}}|_{t_1=0}^{t_2=T} \\
&= \frac{w_0 E}{w_0^2 - w^2}(1-e^{-jwt})
\end{aligned}
$$

注意 $w = w_0$ 时分母为 0，此时 $X(jw) = X(jw_0) = \frac{ET}{2j}$

(d) 记 $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$
\begin{aligned}
X(jw) &= \int_{-0.5T}^{0.5T} x(t)e^{-jwt}dt \\
&= \int_{-0.5T}^{0.5T} Esin(w_0 t)e^{-jwt}dt \\
&= E\frac{-\frac{1}{w_0}e^{-jwt}cos(w_0 t) - \frac{jw}{w_0^2}e^{-jwt}sin(w_0 t)}{1-\frac{w^2}{w_0^2}}|_{t_1=-0.5T}^{t_2=0.5T} \\
&= \frac{w_0 E}{w_0^2 - w^2}(e^{-0.5jwT} - e^{0.5jwT}) \\
&= \frac{2jw_0 E}{w^2 - w_0^2}sin(0.5wT)
\end{aligned}
$$

注意 $w = w_0$ 时分母为 0，此时 $X(jw) = X(jw_0) = \frac{ET}{2j}$

七. 分别求图所示 $X(j\omega)$ 的傅里叶逆变换。

解：

(a)$X(jw) = |X(jw)|e^{j\phi(w)} = Ae^{jwt_0}$

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(jw)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-w_0}^{w_0} X(jw)e^{jwt}dw \\ &= \frac{A}{\pi}\cdot\frac{sinw_0t}{t_0+t} \\ &= \frac{Aw_0}{\pi}Sa(w_0(t+t_0)) \end{aligned}$$

(b)$X(jw) = |X(jw)|e^{j\phi(w)} = Ae^{j\frac{\pi}{2}sgn(w)}$

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(jw)]&\frac{1}{2\pi}\int_{-w_0}^{w_0} X(jw)e^{jwt}dw \\ &= \frac{A}{2\pi}\int_{-w_0}^{w_0} e^{j\frac{\pi}{2}sgn(w)}e^{jwt}dw \\ &= \frac{A}{2\pi}(\int_{-w_0}^{0} e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jwt}dw + \int_{0}^{w_0} e^{j\frac{\pi}{2}}e^{jwt}dw) \end{aligned}$$

注意到 $e^{j\frac{\pi}{2}} = cos(\frac{\pi}{2}) + jsin(\frac{\pi}{2}) = j, e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

故

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2\pi}(-j\int_{-w_0}^{0} e^{jwt}dw + j\int_{0}^{w_0} e^{jwt}dw) \\ &= \frac{jA}{2\pi}(\frac{j - sinw_0t - jcosw_0t}{t} + \frac{sinw_0t - jcosw_0t + j}{t}) \\ &= \frac{jA}{\pi}(\frac{j - jcosw_0t}{t}) \\ &= \frac{A}{\pi t}(cosw_0t - 1) \end{aligned}$$

八. 利用微分定理求图所示梯形脉冲的傅里叶变换，并大致画出 $\tau = 2\tau_1$ 情况下该脉冲的频谱图。

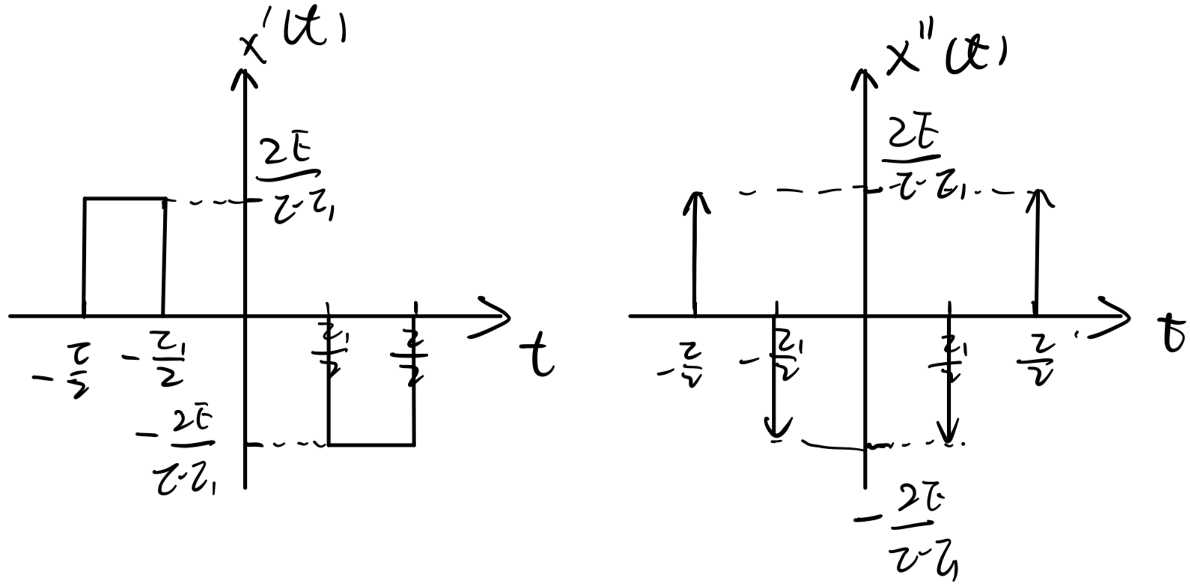

Figure 3: 求导图像

解：

对 $x(t)$ 分别求一、二阶导数，图像如上
由微分定理，

$$\mathcal{F}[\frac{d^2x(t)}{dt^2}] = (jw)^2X(jw) = -w^2X(jw)$$

由于 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$，故

$$\mathcal{F}[\frac{d^2x(t)}{dt^2}] = \frac{2E}{\tau-\tau_1}e^{\frac{jw\tau}{2}} + \frac{2E}{\tau-\tau_1}e^{-\frac{jw\tau}{2}} - \frac{2E}{\tau-\tau_1}e^{\frac{jw\tau_1}{2}} - \frac{2E}{\tau-\tau_1}e^{-\frac{jw\tau_1}{2}}$$

化简得

$$\begin{aligned}X(jw) &= -\frac{1}{w^2}\cdot\frac{2E}{\tau-\tau_1}(e^{\frac{jw\tau}{2}}+e^{-\frac{jw\tau}{2}}-e^{\frac{jw\tau_1}{2}}-e^{-\frac{jw\tau_1}{2}})\\ &= -\frac{1}{w^2}\cdot\frac{4E}{\tau-\tau_1}(cos\frac{w\tau}{2}-cos\frac{w\tau_1}{2})\\ &= \frac{1}{w^2}\cdot\frac{8E}{\tau-\tau_1}sin(\frac{w(\tau+\tau_1)}{4})sin(\frac{w(\tau-\tau_1)}{4})\\ &= \frac{E(\tau+\tau_1)}{2}Sa(\frac{w(\tau+\tau_1)}{4})Sa(\frac{w(\tau-\tau_1)}{4})\end{aligned}$$

$\tau=2\tau_1$ 时，$X(jw)=\frac{3E\tau_1}{2}Sa(\frac{3w\tau_1}{4})Sa(\frac{w\tau_1}{4})$

频谱图如下：

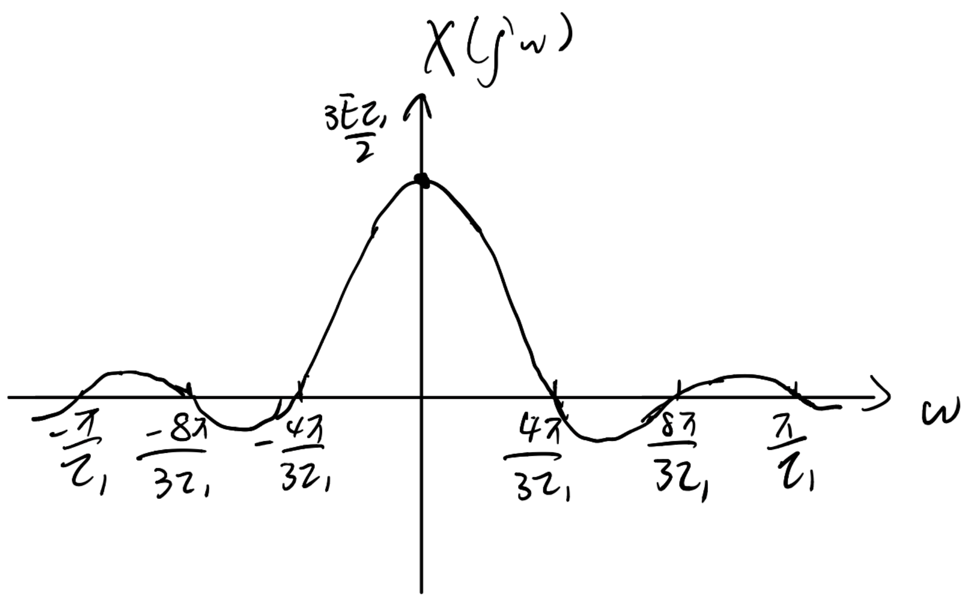

Figure 4: 第八题频谱图

九. 若已知 $\mathcal{F}[x(t)] = X(j\omega)$，利用傅里叶变换的性质确定下列信号的傅里叶变换。

(1) $tx(2t)$

(2) $(t-2)x(t)$

(3) $(t-2)x(-2t)$

(4) $t\frac{dx(t)}{dt}$

(5) $x(1-t)$

(6) $(1-t)x(1-t)$

(7) $x(2t-5)$

解：

(1)、记 $x_1(t) = x(2t), X_1(jw) = \mathcal{F}[x_1(t)]$
由尺度变换特性，$X_1(jw) = \frac{1}{2}X(\frac{jw}{2})$
再由频域微分特性，$\mathcal{F}[tx_1(t)] = j \cdot \frac{dX_1(jw)}{dw}$
化简可得 $\mathcal{F}[tx(2t)] = \frac{1}{2} \cdot j \cdot \frac{dX(\frac{jw}{2})}{dw}$
(2)、由线性性，$\mathcal{F}[(t-2)x(t)] = \mathcal{F}[tx(t)] - 2\mathcal{F}[x(t)]$
由频域微分特性，$\mathcal{F}[tx(t)] = j\frac{dX(jw)}{dw}$
化简可得 $\mathcal{F}[(t-2)x(t)] = j\frac{dX(jw)}{dw} - 2X(jw)$
(3)、由线性性，$\mathcal{F}[(t-2)x(-2t)] = \mathcal{F}[tx(-2t)] - 2\mathcal{F}[x(-2t)]$
化简得 $\mathcal{F}[(t-2)x(-2t)] = \frac{1}{2} \cdot j \cdot \frac{dX(-\frac{jw}{2})}{w} - X(-\frac{jw}{2})$
(4)、由时域微分特性 $\mathcal{F}[\frac{dx(t)}{dt}] = jw \cdot X(jw)$
记 $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}, X_1(jw) = \mathcal{F}[x'(t)] = jw \cdot X(jw)$
故 $\mathcal{F}[tx'(t)] = j \cdot \frac{dX_1(jw)}{dw}$
化简得到 $\mathcal{F}[t\frac{dx(t)}{dt}] = -X(jw) - w\frac{dX(jw)}{dw}$
(5)、先沿 $x(t)$ 轴翻转，再平移，故 $\mathcal{F}[x(1-t)] = X(-jw)e^{-jw}$
(6)、令 $x_1(t) = x(1-t)$，所求变换为 $\mathcal{F}[x_1(t)] - \mathcal{F}[tx_1(t)]$
先求 $X_1(jw) = \mathcal{F}[x_1(t)] = X(-jw)e^{-jw}$
故 $\mathcal{F}[tx_1(t)] = j \cdot \frac{dX_1(jw)}{dw}$
化简整理得 $\mathcal{F}[(1-t)x(1-t)] = -j \cdot e^{-jw} \cdot \frac{dX(-jw)}{dw}$
(7)、先平移五个单位，再做压缩变换，故 $\mathcal{F}[x(2t-5)] = \frac{1}{2}X(j\frac{w}{2})e^{-\frac{5jw}{2}}$

编程题报告

Problem 1

1.1 当 τ 趋向于 0 时，信号变为幅度为 A，周期为 T_0 的冲激信号

1.2 先计算傅里叶级数

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-0.5T_0}^{0.5T_0} x(t)e^{-jnwt}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-0.5\tau}^{0.5\tau} Ae^{-jnwt}dt \\ &= \frac{A\tau}{T_0}Sa(0.5nw\tau) \end{aligned}$$

故 $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jnwt} = \frac{A\tau}{T_0}Sa(0.5nw\tau)$

两边同时作傅里叶变换得到

$$X(jw) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot 2\pi\delta(w - n\frac{2\pi}{T_0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T_0}Sa(0.5nw\tau)\cdot 2\pi\delta(w-n\frac{2\pi}{T_0})$$

1.3 取 $A = 1, T_0 = 1ms, \tau = \frac{T_0}{10} = 0.1ms$ 绘图结果如下:

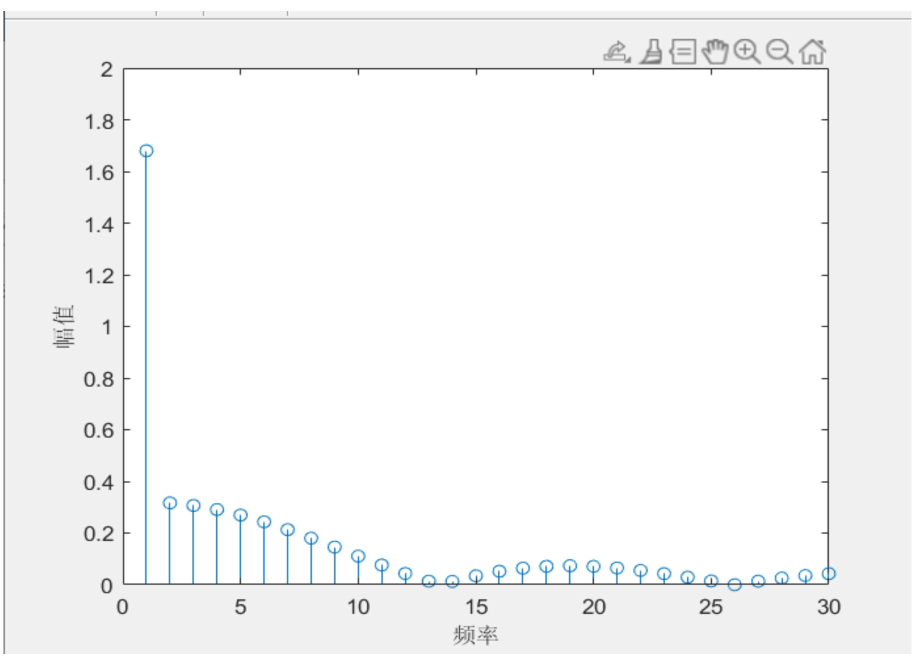

Figure 5: 编程题一频谱图

首先，我们知道冲激信号的傅里叶变换依然是冲激信号，对于 $\tau \to 0$ 的情况，在图中可见只在零点附近振幅较大，之后快速衰减到趋近于 0，可以粗略视为冲激信号，这也正好印证了 1.1 的回答。

Problem 2

2.1

(1). 随着 D 的增大，mse 不断减小。我选取 D 从 5000 到 100000，以 5000 为间隔绘制了 D 与对应的 MSE 的图像（用折线连接），其结果也是符合描述的

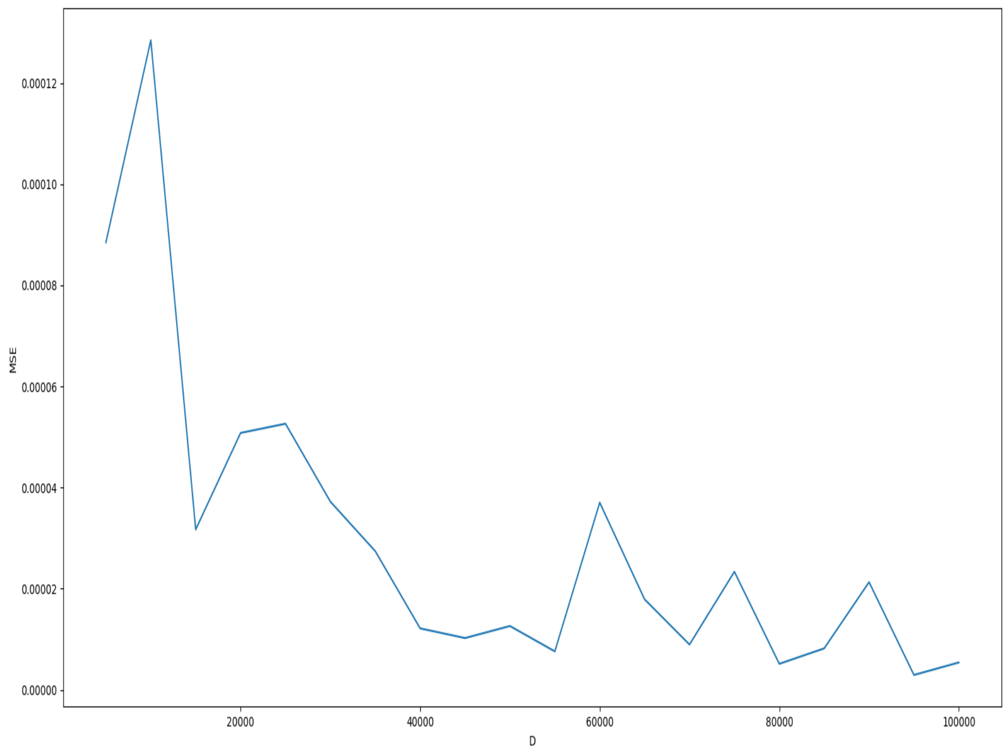

Figure 6: D-MSE 图像

(2).D 对 RBF kernel 的速度没有影响，因为 RBF kernel 使用高斯函数不涉及采样过程，对 RFF kernel 的速度有影响，随着采样次数 D 的增加，RFF kernel 的运行时间自然会增加。

如下是在 D=500 时取 x_dim=100,200,300,400,500,600,700,800,900 时两个 $kernel\_fn$ 的运行时间。

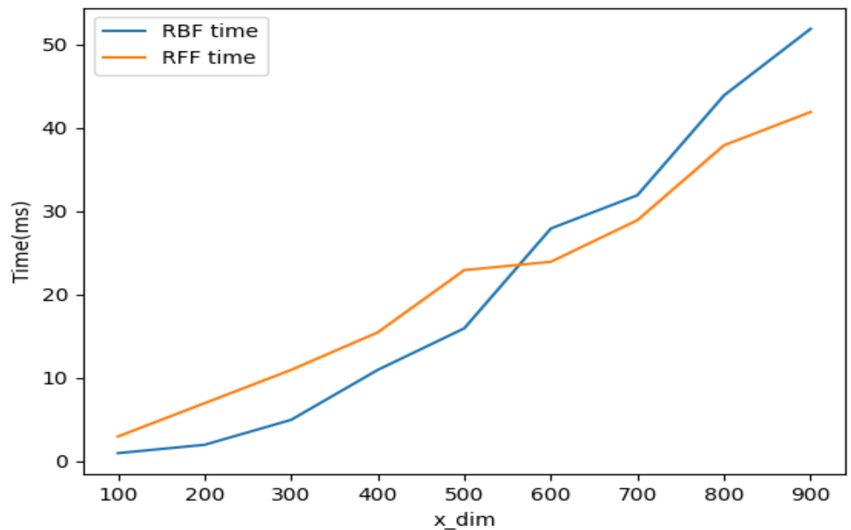

Figure 7: x dim-Time

可见，RFF 确实能够提高核函数的计算速度, 精度上损失也较小。

2.2

(1).linear kernel 和 RBF kernel 的划分结果分别如下图所示。

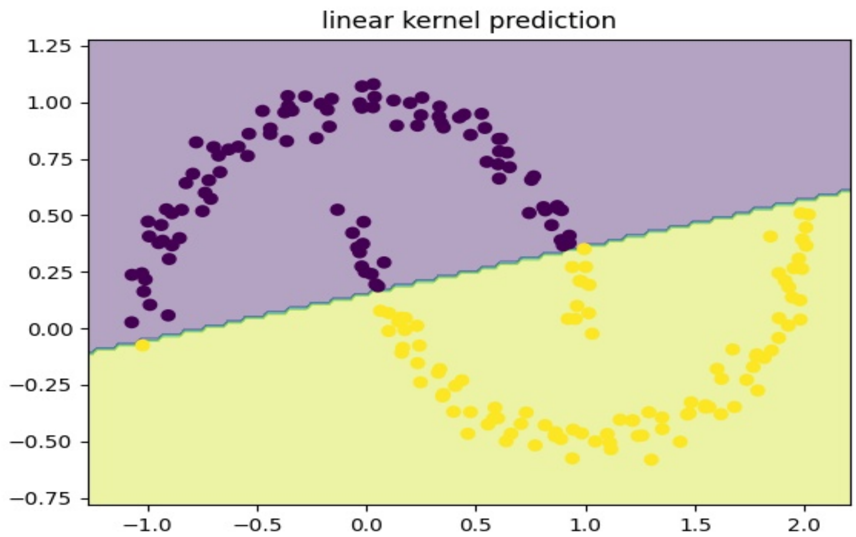

Figure 8: linear kernel 效果图

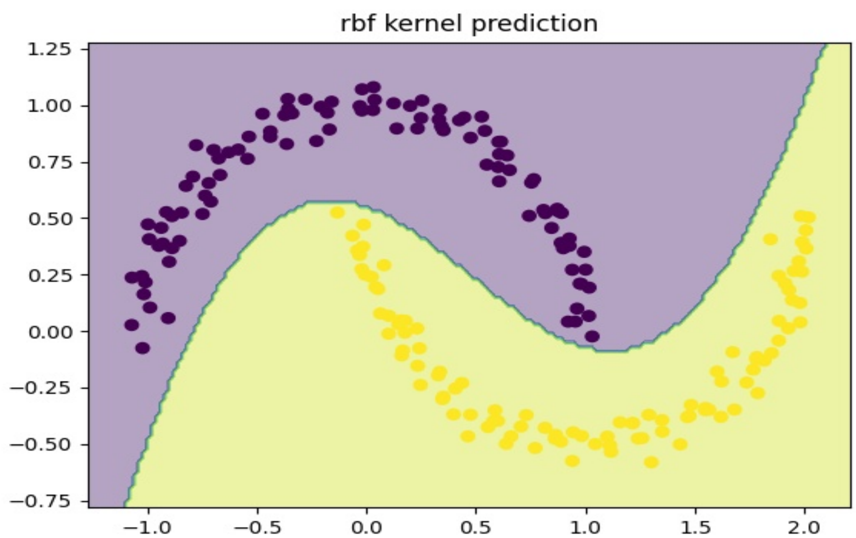

Figure 9: RBF kernel 效果图

由图片可见，RBF kernel 明显效果更加优异

(2). 下图是 RFF kernel 进行分类的效果图 (取 D=500)，可见，由于 RFF kernel 本质上就是对 RBF kernel 的近似，这二者划分出来的效果相似度很高，并且都显著优于 linear kernel

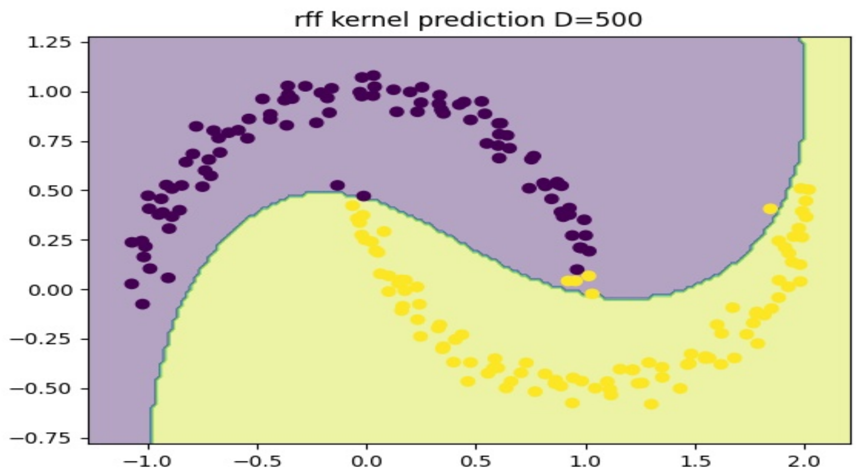

Figure 10: RFF kernel 效果图

(3). 分别取 D=500，5000，50000 进行划分，得到的图片如下：

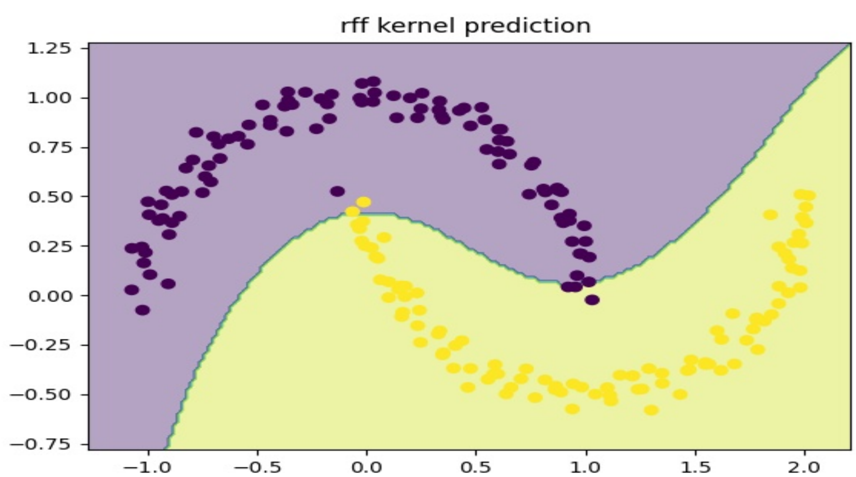

Figure 11: D=500 时 RFF kernel 效果图

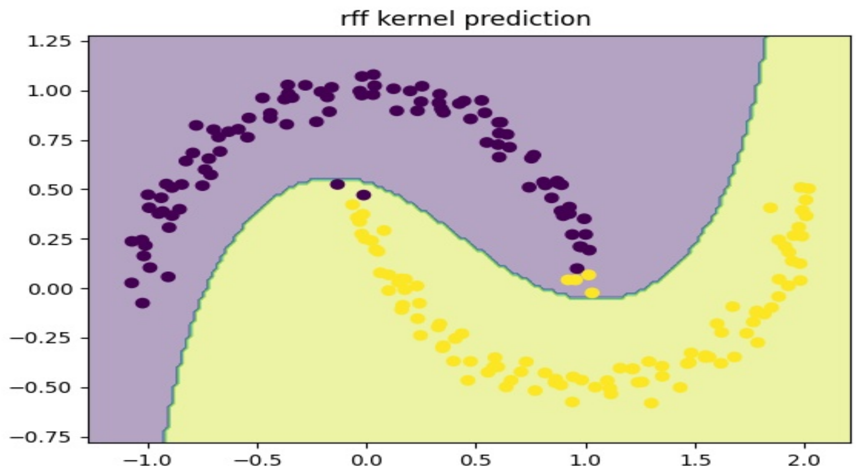

Figure 12: D=5000 时 RFF kernel 效果图

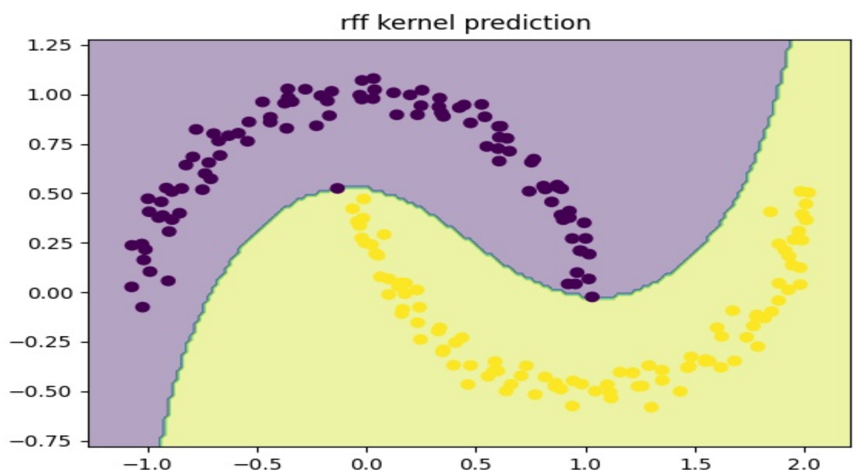

Figure 13: D=50000 时 RFF kernel 效果图

可见，D 越大，决策边界越准确。
当 D 很大时，需要花费更多的时间去做采样和矩阵乘法，自然会耗时更长

2.3

(1). 图像如下 (D=500)

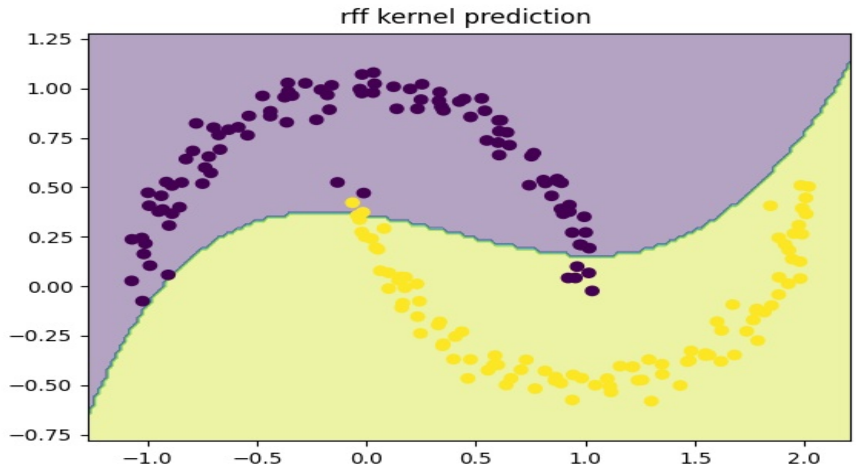

Figure 14: 更换 linear 之后的 RFF

比没使用 sklearn.svm.LinearSVC 的时候略有提升 (与 Figure11 相比多分对了 1 个样本)，正确率很接近 RBF 了

(2). 固定 D=10000，重复了 50 次分类，RBF 和 RFF 的 mse 图像如下：

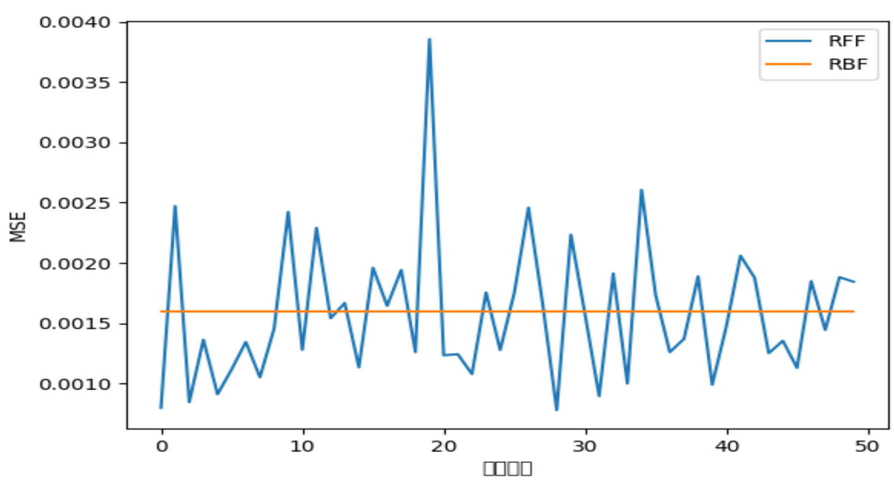

Figure 15: RFF,RBF 的 MSE 对比

可见，二者性能相近，均优于线性核

(3). 这一问中我不太明白该从何处计时算是训练、推理，因此无法给出确切的报告，不过关于速度差距的原因，我的猜测如下：

样本较多时，RBF 计算核矩阵的开销要大于 RFF，这使得 RBF 的

训练时间更长。

至于推理用时，个人猜测可能 RFF 略有优势，差距并不是很明显，因为核矩阵已经计算出来了，分类过程复杂度二者相近