附录1

Cantor-Bernstein-Schröder定理的证明

（集合在映射下的分解定理）[†] 若有$f:\ X \to Y,\ g:\ Y \to X$, 则存在分解

$$X = A \cup A^{\sim},\quad Y = B \cup B^{\sim}$$

其中$f(A) = B,\ g(B^{\sim}) = A^{\sim},\ A \cap A^{\sim} = \emptyset$以及$B \cap B^{\sim} = \emptyset$.

证明 对于X中的子集E，若满足(不妨假定$Y \setminus f(E) \neq \emptyset$)

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \emptyset,$$

则称E为X中的隔离集。现将一切X中的隔离集之全体记为Γ，且作其并集

$$A = \bigcup_{E \in \Gamma} E.$$

我们有$A \in \Gamma$.事实上，对于任意的$E \in \Gamma$，由于$A \supset E$，故从

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \emptyset$$

可知$E \cap g(Y \setminus f(A)) = \emptyset$.从而有$A \cap g(Y \setminus f(A)) = \emptyset$。这说明$A$是$X$中的隔离集且是$\Gamma$中最大元[††]。

现在令$f(A) = B,\ Y \setminus B = B^{\sim}$以及$g(B^{\sim}) = A^{\sim}$。首先知道

$$Y = B \cup B^{\sim}.$$

其次由于$A \cap A^{\sim} = \emptyset$，故又可得$A \cup A^{\sim} = X$，事实上，若不然，那末存在$x_0 \in X$，使得$x_0 \notin A \cup A^{\sim}$，现在作$A_0 = A \cup \{x_0\}$，由于

$$B = f(A) \subset f(A_0),\ \text{故知}\ B^{\sim} \supset Y \setminus f(A_0).$$

从而有$A^{\sim} \supset g(Y \setminus f(A_0))$. 这就是说，$A$与$g(Y \setminus f(A_0))$ 不相交，由此可得

$$A_0 \cap g(Y \setminus f(A_0)) = \emptyset,$$

这与A是Γ的最大元相矛盾。

[†]本引理是Banach建立的。Banach(1892-1945)对泛函分析，测度论，集合论，拓扑学，微分方程论，正交级数论等都有贡献。尤其对泛函分析贡献为最大，他是举世公认的泛函分析奠基者之一。

[††]指包含关系

(Cantor-Bernstein定理)[†]若集合X与Y的某个真子集对等，Y与X的某个真子集对等，则$X \sim Y$.

证明 由题设知存在单射f：$X \to Y$与单射$g: Y \to X$，根据映射分解定理知

$$X = A \cup A^{\sim},\ \ Y = B \cup B^{\sim},\ \ f(A) = B,\ \ g(B^{\sim}) = A^{\sim},$$

注意到这里的$f: A \to B$以及$g: A^{\sim} \to B^{\sim}$是一一映射，因而可作X到Y上的一一映射F如下：

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g^{-1}(x), & x \in A^{\sim} \end{cases}$$

这说明$X \sim Y$.

定理得特例: 设集合A, B, C满足下述关系：

$$C \subset A \subset B$$

若$B \sim C$，则$B \sim A$.

[†]本定理是Cantor提出的，而首先给予正确证明的是Bernstein。这里的证明方法属于Banach.