第3章 线性方程组

- 上一章利用行列式理论解决了一类特殊的线性方程组（方程个数与未知量个数相等且系数行列式不为零）的求解问题. 本章讨论一般的线性方程组，即形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \qquad (*)$$

的方程组有解的条件；有解时解的个数及如何求解；当有无穷多解时解的结构问题.

方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$ (*)中，

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$代表n个**未知量**;s为方程的个数;
- $a_{ij}(i=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,n)$为方程组的**系数**；
  $b_j(j=1,2,\ldots,s)$为**常数项**;当常数项$b_j(j=1,2,\ldots,s)$全为零时，称方程组为**齐次线性方程组**；否则为**非齐次线性方程组**.
- 若以$x_i=c_i\ (i=1,2,\ldots,n)$代入方程组后，方程组中每个方程都成为恒等式，称有序数组$(c_1, c_2, \ldots, c_n)$为该方程组的**一个解**；而该方程组的解的全体称为它的**解集合**；
- 若两个方程组有相同的解集合，称它们是**同解的**.

本章内容

- 消元法
- n 维向量空间
- 向量组的线性相关性
- 矩阵的秩
- 线性方程组有解判别定理
- 线性方程组解的结构

§3.1　高斯消元法

• 高斯消元法是中学所讲的用消元法解二元、三元线性方程组的发展. 基本思想是：逐次把方程组中一部分方程变成含未知量较少的方程，直到得到一个一元一次方程，进而求出方程组的解.

- 高斯消元法与线性方程组的初等变换
- 矩阵及其初等变换
- 线性方程组的解的问题

问题的解决过程突出了矩阵的初等行变换、矩阵的行最简形式等概念的重要性. 展示了矩阵这一数学工具在处理某些数学问题上的优越性.

1. 高斯消元法与线性方程组的初等变换

引例 解线性方程组 $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 2 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 & (2) \\ 2x_1 + \quad x_2 + 2x_3 = 5 & (3) \end{cases}$

解

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 2 & (1) \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 & (2) \\ 2x_1 + \quad x_2 + 2x_3 = 5 & (3) \end{cases} \xrightarrow[(1)\times\frac{1}{2}]{\substack{(2)-(1) \\ (3)-\frac{1}{2}\times(1)}} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ \quad 4x_2 - \quad x_3 = 2 & (2) \\ \quad 2x_2 - \quad x_3 = 4 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(2)\leftrightarrow(3)]{(2)-2\times(3)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad 2x_2 - \quad x_3 = 4 \\ \qquad\qquad x_3 = -6 \end{cases}$$

将$x_3=-6$逐次回代可求得方程组的解为(9,−1,−6).

消元法解方程组实际上是对方程组反复施行了三种变换：

(i) 互换两个方程位置； (ii) 以非零常数k乘以某一个方程;
(iii)把一个方程的k倍加到另一个方程.

定义：称三种变换

(i) 互换两个方程位置；

(ii) 以非零常数k乘以某一个方程;

(iii)把一个方程的k倍加到另一个方程.

称为线性方程组的**初等变换**.

线性方程组的初等变换的重要意义体现在以下方面.

定理：初等变换不改变方程组的解.

证　仅证(iii)的情形.考虑

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \qquad (*)$$

为简单起见，不妨设把第二个方程的k倍加到第一个方程，得

$$\begin{cases}(a_{11}+ka_{21})x_1+(a_{12}+ka_{22})x_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})x_n=b_1+kb_2\\ \qquad a_{21}x_1+\qquad a_{22}x_2+\cdots+\qquad a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad a_{s1}x_1+\qquad a_{s2}x_2+\cdots+\qquad a_{sn}x_n=b_s\end{cases}\qquad (**)$$

设$(c_1, c_2, \ldots, c_n)$为(*)的任一解, 代入(*)得恒等式:

$$\begin{cases}a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1\\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}c_1+a_{s2}c_2+\cdots+a_{sn}c_n=b_s\end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} (a_{11}+ka_{21})c_1+(a_{12}+ka_{22})c_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})c_n=b_1+kb_2 \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}c_1+a_{s2}c_2+\cdots+a_{sn}c_n=b_s \end{cases} \quad *$$

可见$(c_1,c_2,\ldots,c_n)$也为(**)的解；同理可证(**)的任一解也为也为(*)的解. 因此**(**)与(*)同解.** ‖

由引例可见,对方程组施行初等变换,只是系数和常数项在变,与未知量$x_1,x_2,\ldots,x_n$无关. 因此可以擦去未知量，只写出其系数和常数项——**一张数表**：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}$$

消元法解方程组的过程就是对数表中的行作变换的过程；一个方程组对应着一张数表

也就是说，线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s
\end{cases}
$$

和$s \times (n+1)$的数表建立了一一对应关系：

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s
\end{bmatrix}
$$

2. 矩阵及其初等变换

(1)**矩阵的定义** 数域P上的$s\times n$个数排成的s行（横的）n列（纵的）的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

称为数域P上的$s\times n$矩阵(matrix).一般用大写字母A、B…表示.为明确起见,也可以表示成 $A_{s\times n}$ 或$A=(a_{ij})_{s\times n}$；a_{ij}称为矩阵的元素,它位于数表中第i行、第j列. i—元素的行标；j—元素的列标. 如

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}, B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}, C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1}, D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

特别地，有如下概念

- 方阵:$s=n$时，$A=(a_{ij})_{s\times n}$ 称为n级方阵；而$|A|$称为n级方阵A的行列式；
- 行矩阵 : $s=1$时, $A=(a_{ij})_{s\times n}$称为行矩阵, 也称为行向量；

  列矩阵 : $n=1$时, $A=(a_{ij})_{s\times n}$称为列矩阵, 也称为列向量；
- 零矩阵:元素全为零的矩阵,记作$O_{s\times n}$ 或O；
- 单位矩阵:主对角线元素都是1,其余元素均为0的n级方阵称为n级单位矩阵，记作E_n 或者I_n.
- 矩阵相等:已知矩阵$A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$.若$a_{ij}= b_{ij}$，则称A与B相等，记作A=B.
- 增广矩阵与系数矩阵:线性方程组(*)的全部系数和常数项按原来的顺序构成的矩阵,称为方程组(*)的增广矩阵；全部系数构成的矩阵,称为方程组(*)的系数矩阵；分别记作 A 和 A.

系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}, \overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{array}\right]$$

增广矩阵

- 行阶梯形矩阵： 若$s\times n$矩阵A足下面两个条件：

  (i)元素全为零行位于矩阵的下方；

  (ii)各个非零行的首个非零元的列标随行标的增大而严格增大.

  则称矩阵A为行阶梯形矩阵(row echelon matrix)

- 行最简形矩阵: 若行阶梯形矩阵A的首个非零元都是1,且其所在列的其余元素均为零,则称A为行最简形(row reduced echelon matrix)

- 标准形： 首个非零元都是1,且其所在行与列的其余元素均为零的行最简形称为标准形(normal form).

例如

行阶梯形矩阵

行最简形矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&4&1&3&4\\0&7&-2&1&1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&4\\0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&-8\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

标准形矩阵

(2)矩阵的初等变换

每一个线性方程组对应着一个矩阵——增广矩阵,将引例的方程组用增广矩阵表示,消元过程可表示如下:

$$\begin{cases} 4x_1-2x_2+6x_3=2 & (1) \\ 4x_1+2x_2+6x_3=4 & (2) \\ 2x_1+\ \ x_2+2x_3=5 & (3) \end{cases} \qquad \overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{(3)-\frac{1}{2}\times(1)}]{(2)-(1)} \begin{cases} 4x_1-2x_2+6x_3=2 & (1) \\ 4x_2 \qquad\quad =2 & (2) \\ 2x_2-\ \ x_3=4 & (3) \end{cases} \xrightarrow[r_3-\frac{1}{2}r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(3)-\frac{1}{2}(2)]{\frac{1}{2}\times(1)} \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 4x_2 \qquad\quad =2 \\ -x_3=3 \end{cases} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2-2r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

行阶梯形矩阵

回代求解过程则表现为：

$$\xrightarrow[(2)\leftrightarrow(3)]{(2)-2\times(3)}\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1 & (1)\\ \quad 4x_2 \quad =2 & (2)\\ \quad -x_3=3 & (3)\end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 3\end{array}\right]$$

行最简形矩阵

$$\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{21}{4} & (1)\\ x_2=\dfrac{1}{2} & (2)\\ x_3=-3 & (3)\end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \dfrac{21}{4}\\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{array}\right]$$

定义：称以下三种变换为矩阵的初等行变换.

(i) 互换矩阵的两行（$r_i \leftrightarrow r_j$）；

(ii) 以非零数k乘矩阵某行的所有元素（kr_i）；

(iii)把矩阵某一行所有元素的k倍加到另一行对应的元素上去（r_i+kr_j）.

相应的三种列变换称为矩阵的初等列变换.

（$c_i \leftrightarrow c_j$， kc_i， c_i+kc_j）

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换

- 引例表明：利用矩阵的初等行变换将方程组的增广矩阵化为了行阶梯形；再继续施行初等行变换就将其化成了行最简形；而由行最简形则直接"读出"了原方程组的解.

综上所述，得到用消元法解方程组的步骤：

(1) 写出方程组的增广矩阵，对其施行初等行变换化为行阶梯形——消元过程；

(2) 继续对行阶梯形矩阵施行初等行变换化成行最简形，从而直接写出原方程组的解——回代过程.

这种解线性方程组的方法称为**高斯消元法**.

问题：是否任何矩阵都可以经过一系列初等行变换化成行阶梯形以至行最简形?

定理：任何一个矩阵A都可以经过一系列初等行变换化成行阶梯形矩阵.

证：若$\mathbf{A=O}$，则$\mathbf{A}$已是行阶梯形矩阵.

不妨设$A=(a_{ij})_{s\times n}\neq\mathbf{O}$，对其行数s用归纳法.

显然，s=1时结论成立.

假设对s-1 行的矩阵都可以经过一系列初等行变换化成行阶梯形矩阵. 以下考虑s行的矩阵$A=(a_{ij})_{s\times n}$.

若A的第一列元素不全为零，不妨设$a_{11}\neq 0$(否则可互换两行使$a_{11}\neq 0$)，此时有

记为A_1

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=2,\ldots,n]{r_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}r_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{2n}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ o & a_{s2}-\frac{a_{s1}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{sn}-\frac{a_{s1}}{a_{11}}a_{1n} \end{bmatrix}$$

若A的第一列元素全为零，考虑第二列.若第二列元素不全为零，不妨设$a_{12}\neq 0$. 此时有

记为A_2

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=2,\dots,n]{r_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23}-\dfrac{a_{22}}{a_{12}}a_{13} & \cdots & a_{2n}-\dfrac{a_{22}}{a_{12}}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{s3}-\dfrac{a_{s2}}{a_{11}}a_{13} & \cdots & a_{s2}-\dfrac{a_{s2}}{a_{12}}a_{1n} \end{bmatrix}$$

由于A_1 、A_2都是s-1 行的矩阵，由归纳法假设，它们都可以经过一系列初等行变换分别化成行阶梯形矩阵J_1，J_2. 因此A可以经过初等行变换化成下述形式的矩阵之一：

都是行阶梯形

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & J_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & J_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

由归纳法原理，命题得证.

- 推论1：任何一个矩阵A都可以经过一系列初等行变换化成行最简形矩阵.

证：由定理知，任何一个矩阵A都可以经过一系列初等行变换化成行阶梯形矩阵J.利用第(ii)种初等行变换可以将每一行的首个非零元变成1, 再从倒数第一个非零行开始, 用第(iii)种初等行变换将每一行的首个非零元1所在的列的其余元素都化成0，从而得到行最简形矩阵. ‖

- 推论2：方程组(*)必与一个简化阶梯形方程组(与行最简形矩阵对应的方程组)同解.

证：由方程组与增广矩阵的对应关系及推论1即得.

例1 化矩阵为行阶梯形、行最简形. $A=\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\2&4&3&5\\-1&-2&6&-7\end{bmatrix}$

解

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\2&4&3&5\\-1&-2&6&-7\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\0&0&5&-3\\0&0&5&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+(-1)r_3}\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\0&0&5&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}=A_1$$

行阶梯形

行最简形

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_2}\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\0&0&1&\frac{-3}{5}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&\frac{17}{5}\\0&0&1&\frac{-3}{5}\\0&0&0&0\end{bmatrix}=A_2$$

例2 解线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2-7x_3=-8 \\ 2x_1+5x_2+4x_3=4 \\ 3x_1+7x_2+2x_3=3 \\ x_1+4x_2-12x_3=-15 \end{cases}$

解 对增广矩阵施行初等行变换：

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -12 & -15 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 18 & 20 \\ 0 & -2 & 23 & 27 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{r_3-2r_2\\ r_4+r_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 18 & 20 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 18 & 20 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)r_2]{-\frac{1}{13}r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -18 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1+7r_3]{r_2+18r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-3r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

行阶梯形

行最简形

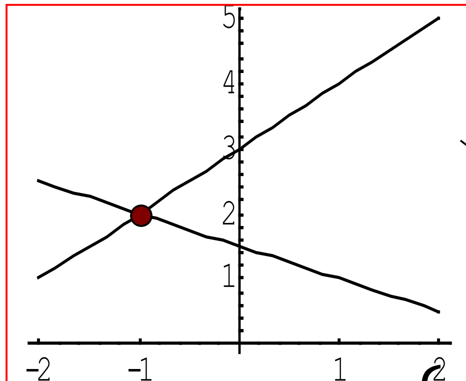
方程组的解为： $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-2 \\ x_3=1 \end{cases}$

3. 线性方程组解的问题

考虑二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

例如

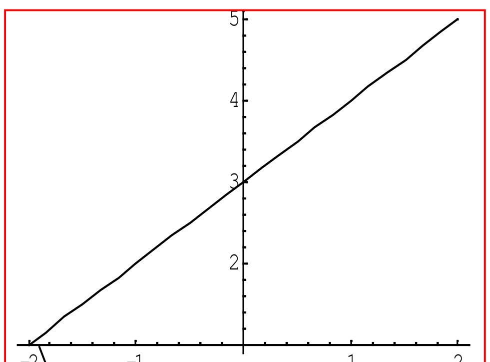
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$



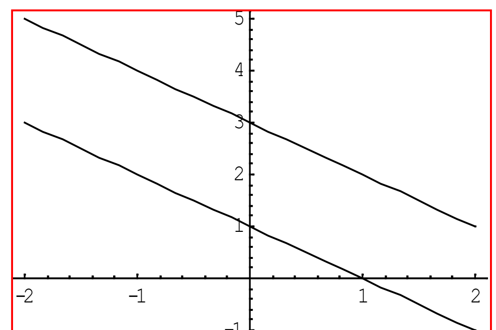
方程组有惟一解情形

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$



方程组有无穷多解情形



方程组无解情形

方程组解有无穷多解时，解的表示方法：

由$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 = -6 \end{cases}$ 得同解方程组 $x_1 - x_2 = -3$

自由变量(自由未知量)

有 $x_1 = x_2 - 3$

方程组的一般解为： $x_1 = x_2 - 3$ (x_2为自由变量).

令 $x_2 = c, c \in R$

得方程组的解 $\begin{cases} x_1 = -3 + c \\ x_2 = \quad\quad c \end{cases}$ $c \in R$

参数形式通解

$\begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 1. \end{matrix}$

特别地,取c=0,c=1 得方程组的解

方程组的特解

综上讨论，二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

解的情形为：有唯一解、无解、有无穷多解.

问题：对一般线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$ (*)

解的情况如何？

由上一段的推论2知：每一个方程组都与其阶梯形方程组或简化阶梯形方程组同解. 故只须讨论其阶梯形方程组或简化阶梯形方程组解的情形.

为方便起见，设方程组(*)的增广矩阵经初等变换化成的行最简形为：

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{行（列）变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) 当$d_{r+1}\neq 0$时，方程组(*)无解；

(ii) 当$d_{r+1}=0$时，方程组(*)有解.

若$r=n$,易得方程组(*)的唯一解 $\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = d_n \end{cases}$.

若$r<n$, 有

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - c_{1,r+2}x_{r+2} - \cdots - c_{1,n}x_n \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - c_{2,r+2}x_{r+2} - \cdots - c_{2,n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - c_{r,r+2}x_{r+2} - \cdots - c_{r,n}x_n \end{cases}$$

此时，任意给定$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$的一组值,按上式依次代入，就能唯一地确定$x_1, x_2, \cdots, x_r$的值，即可求出方程组的一组解，从而方程组有无穷组解

方程组的一般解（通解）
(含有自由未知量形式的解)

自由未知

综上所述，有如下结论：

定理：线性方程组 (*)的解的情况只有三种可能：无解、有唯一解、有无穷多解. 方程组(*)的增广矩阵利用初等行变换化成行阶梯形,若最后一个非零行的首个非零元位于第n+1列,则方程组无解；否则有解.在有解的情况下,若非零行的个数r等于未知量的个数n,方程组有唯一解；若非零行的个数r小于未知量的个数n(有自由未知量),方程组有无穷多个解.

• **推论**：齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

中,若$s<n$,则它必有非零解（无穷多个解）.

事实上,增广矩阵利用初等行变换化成行阶梯形后,非零行的个数$r \leq s < n$(未知量的个数),方程组有无穷多个解.

例3 解下列线性方程组

$$(1)\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=2 \\ 3x_1-x_2+2x_3=3 \\ 4x_1+2x_2-x_3=2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1-x_2-x_3-3x_4=-2 \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=4 \\ -4x_1+4x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

解 对增广矩阵施行初等行变换：

$$(1)\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -10 & 11 & -3 \\ 0 & -10 & 11 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -10 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

思考：此时还有必要继续化简直到化成行最简形吗？

该方程组无解.

解 对增广矩阵施行初等行变换:

$$(2)\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&-3&-2\\1&-1&1&5&4\\-4&4&1&0&-1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+4r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&-3&-2\\0&0&2&8&6\\0&0&-3&-12&-9\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{3})\times r_3]{\frac{1}{2}\times r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&-3&-2\\0&0&1&4&3\\0&0&1&4&3\end{array}\right]\xrightarrow[r_1+r_2]{r_3-r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&1&1\\0&0&1&4&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

得同解方程组为 $\begin{cases}x_1-x_2+\quad x_4=1\\ \qquad\quad x_3+4x_4=3\end{cases}$

思考:自由未知量的选取方式是否唯一?

方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1=1+x_2-x_4\\x_3=3-\quad 4x_4\end{cases}\quad(x_2,x_4\text{为自由未知量}).$$

例4 解下列齐次线性方程组

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 3x_1-x_2-4x_3=0 \\ 4x_1+9x_2-4x_3=0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵施行初等行变换：

$$(1)A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 4 & 9 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3+7r_2 \\ r_4-r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 61 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程组有唯一零解：

$$x_1=x_2=x_3=0.$$

解　对系数矩阵施行初等行变换：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{4})\times r_2]{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_4=0\\x_3=0\end{cases}$

方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_4\\x_3=0\end{cases}\quad(x_2,x_4\text{为自由未知量}).$$

例5（综合训练）

当a、b取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ 7x_1+2x_2-2x_3+4x_4=a \\ 7x_1-x_2+x_3+5x_4=b \end{cases}$$

有解？有解时求其通解.

解 对增广矩阵施行初等行变换：

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -2 & 4 & a \\ 7 & -1 & 1 & 5 & b \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-7r_2]{\substack{r_1-2r_2 \\ r_3-7r_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -3 & a-14 \\ 0 & 6 & -6 & -2 & b-14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-8\end{array}\right]$$

当a=5,b=8时方程组有无穷多解，此时继续化简至行最简形：

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{3}r_2]{r_1+\frac{1}{3}r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 2/3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1/3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1+\dfrac{2}{3}x_4=1\\ x_2-x_3-\dfrac{1}{3}x_4=-1\end{cases}$

方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 \quad -\dfrac{2}{3}x_4 \\ x_2 = -1 + x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 \end{cases} (x_3, x_4\text{为自由未知量}).$$

思考与练习

解方程组：

$$(1)\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

习题

P154

1(2)、（4）、（6）；

习题

P.155 2.（2）；3.；4.；6.；9.；11.（1）；13.; 16.; 18.(1);

习题

P.157　19.(3);20.(3),(4);22.;23.;26.;

§3.2 n维向量空间

在上节,我们用消元法求解线性方程组,问题似已得到圆满解决. 但实践中有时需要我们对求解问题有更深入、更直观和宏观的认识： 能否在理论上直接给出方程组是否有解的判定；行最简形矩阵中的r 的本质是什么？ 消元的步骤不同是否会得出不同的r? 有解时, 解是否可以如克拉默法则一样有一般公式?

为解决这些问题，需要进一步讨论方程组中各方程之间的关系.本节及下一节为我们解决这些问题奠定了重要的理论基础.

显然，每一个n元方程都和一个有序数组相对应.因此，讨论方程组中方程之间的关系归结为讨论有序数组之间的关系.

1.n维向量的概念

定义： 数域P中的n个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{或} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为数域 P上的一个n维向量.(一般称前者为行向量，称后者为列向量).

a_i称为向量的第 i个分量（$i = 1, 2, \cdots, n$）.

向量通常用小写字母$a, b, \cdots$,或者α，β来表示.

相关概念

(1)设向量$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$,称向量$\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$为$\alpha$的负向量,记作$-\alpha$;

(2)称所有分量均为0的向量为零向量,记作0;

(3)称若干个同维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$构成的集合为向量组;

(4)向量组$\varepsilon_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,$\cdots$, $\varepsilon_n=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

称为n维单位坐标向量组(n维单位向量组),每个ε_i均称作n维单位坐标向量.

向量相等

如果n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$对应的分量都相等，即

$$a_i=b_i\ (i=1,2\ldots,n)$$

称α与β相等，记作$\alpha=\beta$.

2. n维向量的线性运算

加法：$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$

$\alpha-\beta=(a_1-b_1,a_2-b_2,\ldots,a_n-b_n)$

数乘：$k\alpha=(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n)$

运算性质：设α,β,γ均为n维向量,k,l为常数，则:

（1） $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

（2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

（3） $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

（4） $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

（5）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

（6） $\alpha+0=\alpha$

（7） $\alpha+(-\alpha)=0$

（8）$1\alpha=\alpha$

n维向量之间总能进行线性运算,其结果仍是n维向量.

3. n维向量空间 ： 定义了加法与数乘运算的数域P上的所有n维向量构成的集合，称为数域P上的n维向量空间.

R^n空间是一个特殊的集合、特殊的向量组,其特点：

（1）该集合非空；

（2）在该集合上定义两种运算：加法和数乘；

（3）该集合对于两种运算是封闭的，即

$\forall \alpha$、$\beta \in R^n$,则$\alpha + \beta \in R^n$

对$\forall \alpha \in R^n, \forall k \in R$,则$k\alpha \in R^n$

实际上，任给一个向量集合V，只要它满足如上三个条件，那么集合 V就构成一个向量空间.

§3.3　向量组的线性相关性

- 线性组合 线性表示 等价
- 向量组的线性相关性

  定义、线性相关性判定及性质
- 向量组的极大无关组、 秩

§3.3　向量组的线性相关性

1.线性组合 线性表示 等价

(1)线性组合与线性表示：设有向量α及$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$，如果有数域P中的数$k_1,k_2,\ldots,k_s$，使

$$\alpha = k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_s\beta_s$$

则称向量α是向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$的线性组合，也称向量$\alpha$可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$线性表出或线性表示.

例如：$\alpha=(1,2),\beta_1=(1,4),\beta_2=(0,2)$，有$\alpha=\beta_1-\beta_2$

易知：

零向量是任意向量组的线性组合；

任一向量可由单位坐标向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$线性表示.

(2) 向量组等价

设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ (I)

及

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ (II)

1. 如果向量组(I)中每个向量α_i (i=1,2,…,t)均可由向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$线性表示, 则称向量组(I)可以由向量组(II)线性表示.

2. 若向量组(I)与向量组(II)可以相互线性表示,则称这两个向量组等价.

等价性：是两个向量组之间的一种关系，具有

自反性：任何一个向量组都与其自身等价;

对称性：若向量组(I)与 (II)等价,则(II)与(I) 等价.

传递性：若向量组(I)与 (II)等价,(II)与(III) 等价,则(I)与 (III)等价.

例1 向量β 能否由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示？若可以，试求出一组表示系数.

（1）$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$;

（2）$\beta=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$;

(3)$\beta=\begin{pmatrix}2\\8\\-2\\0\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\\6\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\-6\end{pmatrix}$.

解 (1) 考虑 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 即非齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_2+k_3=1, \\ k_1+k_2=1, \\ -k_1+2k_3=1. \end{cases}$$

等价于以k_1,k_2,k_3为未知量的非齐次线性方程组是否有解

对方程组的增广矩阵进行初等行变换, 得

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

方程组有唯一解: $\begin{cases} k_1=1 \\ k_2=0 \\ k_3=1\ . \end{cases}$

向量β 可由α_1, α_2, α_3线性表示,且

$$\beta=1\alpha_1+0\alpha_2+1\alpha_3\ .$$

解 (2) 考虑 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

对方程组的增广矩阵进行初等行变换, 得

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{3}{2}r_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

方程组无解，向量β 不能由α_1, α_2, α_3线性表示.

解 (3) 令 $\overline{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 2\\ 2 & -4 & 0 & 8\\ -2 & 4 & 3 & -2\\ 3 & -6 & -6 & 0\end{bmatrix}$

由

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -3 & -6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得同解方程组 $\begin{cases}k_1-2k_2=4\\ k_3=2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k_1=4+2k_2\\ k_3=2\end{cases}$

令k_2=0, 得k_1=4， k_3=2，此时有$\beta=4\alpha_1+0\alpha_2+2\alpha_3$.

这是无穷多种表达式之中的一个

思考与练习

1. 向量β 能否由其余向量线性表示？若可以，试求出一组表示系数.

（1）$\beta=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};$

（2）$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-8\\0\end{pmatrix}.$

2. $a_1, a_2, \ldots, a_n$是互不相等的数,且$\alpha_i=(1, a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{n-1})$ $i=1,2,\ldots,n$.试证任一n维向量均可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表示，且表示法唯一.

2.向量组的线性相关性

(1)定义：设有向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ (s≥1),若有不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_s$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+ k_s\alpha_s=0 \qquad (*)$$

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关;否则称为线性无关. 即当且仅当 $k_1=k_2=\ldots=k_s=0$ 时(*)式成立, 则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关. 易知

(i)含有零向量的向量组线性相关;

(ii)单个的非零向量组线性无关;

(iii)两个向量线性相关⇔对应分量成比例;

(iv)n维基本向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$线性无关;

(v) 线性无关向量组的部分向量组也线性无关;

(vi) 线性相关向量组中部分向量组未必线性相关;

另一形式的定义：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ (s≥2)中至少有一个向量可以由其余向量线性表示,则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关;否则称为线性无关.

s≥2时，两个定义等价.即

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ (s≥2) 线性相关⇔ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 中至少有一个向量可以由其余向量线性表示.

例1 讨论下列向量组的线性相关性.

$$（1）\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\-1\end{pmatrix};$$

$$（2）\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-8\\0\end{pmatrix}.$$

解 (1) 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，得齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2k_1+4k_2+2k_3=0 \\ -k_1-2k_2-k_3=0 \\ 3k_1+5k_2+4k_3=0 \\ k_1+4k_2-k_3=0 \end{cases}$$

等价于以k_1,k_2,k_3为未知量的齐次线性方程组是否有非零解

对方程组的系数矩阵进行初等行变换, 得

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程组有非零解$(-3, 1, 1)$，即$-3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$，因此向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关.

解 (2) 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，得齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1+k_2+2k_3=0 \\ 2k_1 \qquad -8k_3=0 \\ -k_1+2k_2 \qquad =0 \end{cases}$$

方法1

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

方程组有唯一零解(0, 0, 0), 因此向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

方法2

$$\because |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=32\neq 0$$

例2 向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 试证： $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$也线性无关.

证：设有数 k_1, k_2, k_3使

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0 \quad (*)$$

整理得 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,得

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \end{cases}$$

即当且仅当$k_1=k_2=k_3=0$ 时(*)式 成立；因此向量组

$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$线性无关.

(2)线性相关性定理

定理1 设向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \qquad (I),$$

其中 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i = 1, 2, \cdots, s.$

由此构造新向量组:

$$\beta_1, \ \beta_2, \cdots, \ \beta_s \qquad (II),$$

其中 $\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, a_{i,n+1}, \cdots, a_{i,n+k}),$

$$= (\alpha_i, \ a_{i,n+1}, \cdots, a_{i,n+k}) \ i = 1, 2, \cdots, s$$

则若向量组 (I) 线性无关，那么向量组 (II) 也必然线性无关.

证：**(以s=2,n=3为例证明)设**

$\alpha_1=(a_{11},a_{12},a_{13}),\alpha_2=(a_{21},a_{22},a_{23})$线性无关.

添加分量后为

$$\boldsymbol{\beta_1=(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}),\beta_2=(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})}$$

考虑$k_1\beta_1+k_2\beta_2=0$,必有$k_1=k_2=0$，即

$$\begin{cases} k_1a_{11}+k_2a_{21}=0 \\ k_1a_{12}+k_2a_{22}=0 \\ k_1a_{13}+k_2a_{23}=0 \\ k_1a_{14}+k_2a_{24}=0 \end{cases}$$仅有零解

否则，有不全为0的k_1,k_2使$\begin{cases} k_1a_{11}+k_2a_{21}=0 \\ k_1a_{12}+k_2a_{22}=0 \\ k_1a_{13}+k_2a_{23}=0 \end{cases}$

即$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$有非零解，与条件矛盾.

因此 β_1,β_2**线性无关**.

现在证明一般的情况

设有向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \qquad (I),$$

其中 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i = 1, 2, \cdots, s.$

由此构造新的向量组

$$\beta_1, \ \beta_2, \cdots, \ \beta_s \qquad (II),$$

其中 $\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, a_{i,n+1}, \cdots, a_{i,n+k}),$

$$= (\alpha_i, \ a_{i,n+1}, \cdots, a_{i,n+k}) \ i = 1, 2, \cdots, s$$

由(I)线性无关证明（II）也线性无关.

用反证法，若β_1，$\beta_2,\cdots$，β_s线性相关，则有不全为零的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$$

$$\Rightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

而由于$k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为零，与α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s线性无关矛盾.因此β_1，$\beta_2,\cdots$，β_s线性无关.

这就是说：对于一组线性无关的向量组，每个向量增加若干个分量后，组成的向量组仍然线性无关；对于一组线性相关的向量组，每个向量去掉若干个分量后，组成的向量组仍然线性相关.就是

低维无关,则高维无关 ;反之,高维相关,则低维相关

定理2;若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关,而$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta$线性相关,则$\beta$必可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性表示,且表示法唯一.

证：因$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，故有不全为零的数

$k_1,k_2,\cdots k_r,k$使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r+k\beta=0$$

则必有$k\neq 0$.若不然,则有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_r\alpha_r=0(k_1,k_2,\ldots,k_r\text{不全为零})$$

这与$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性无关矛盾.因此有

$$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\ldots-\frac{k_r}{k}\alpha_r.$$

唯一性:　　设另有$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_r\alpha_r$

两式相减，得

$$(l_1 + \frac{k_1}{k})\alpha_1 + (l_2 + \frac{k_2}{k})\alpha_2 + \dots + (l_r + \frac{k_r}{k})\alpha_r = 0$$

由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关，有

$$l_1 + \frac{k_1}{k} = l_2 + \frac{k_2}{k} = \dots = l_r + \frac{k_r}{k} = 0$$

即　　$$l_1 = -\frac{k_1}{k}, l_2 = -\frac{k_2}{k}, \dots, l_r = -\frac{k_r}{k}$$

唯一性得证.

定理3：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ (I)可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ (II)线性表示，且$r>s$,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$必线性相关.

证：(I)可由(II)线性表示，即

$$\alpha_i = t_{1i}\beta_1 + t_{2i}\beta_2 + \ldots + t_{si}\beta_s \quad (i = 1,2,\ldots,r)$$

下面证明有不全为零的$k_1, k_2, \ldots, k_r$使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r = 0.$$

也就是要证明齐次线性方程组

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r = \sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \sum_{j=1}^{s} t_{ji}\beta_j$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} t_{ji}k_i\right)\beta_j = 0$$

有非零解.

事实上由于$r>s$，知关于$k_1, k_2, \ldots, k_r$的齐次线性方程组

$$\begin{cases} t_{11}k_1 + t_{12}k_2 + \cdots + t_{1r}k_r = 0 \\ t_{21}k_1 + t_{22}k_2 + \cdots + t_{2r}k_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{s1}k_1 + t_{s2}k_2 + \cdots + t_{sr}k_r = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

一定有非零解. 因此有不全为零的$k_1, k_2, \ldots, k_r$，使

$$0 = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r} t_{ji}k_i\right)\beta_j = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r$$

即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$必 线性相关.　　‖

- **推论1：** 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ (I)可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ (II)线性表示, 且$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关，则必有 $r\leq s$.

  这是因为当向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关时，仅有全为零的$k_1, k_2, \ldots, k_r$使齐次线性方程组（*）成立，因此必须$r\leq s$，就是向量组（II）所含向量的个数必须不小于向量组（I） 所含向量的个数.

  这个推论也能表述：若一组线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ (I)可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ (II)线性表示，则必有 $r\leq s$.

- **推论2：** $n+1$个n维向量必线性相关.

设由$n+1$个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n+1}$组成向量组，而每个向量由$n$个分量.考虑关系式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n+1}\alpha_{n+1}=0.$$

这是一个$n\times(n+1)$的齐次线性方程组,一定存在非零解，即存在不全为零的$k_1,k_2,\cdots k_{n+1}$使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n+1}\alpha_{n+1}=0.$$

因此任何一组由$n+1$个n维的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n+1}$线性相关.

- **推论3：** 两个等价的线性无关向量组所含向量个数相同.

设两个等价的线性无关的向量组:

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r \text{与} \beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$$

由于线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$

线性表示，可知$r\le s$;

同样，线性无关组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$

线性表示，可知$s\le r$.因此$r=s$.

也就是说，两个等价的线性无关组所含向量的个数是相同的.

线性无关组性质归纳

线性无关的向量组有非常典型的特性，归纳起来：

设向量组$a_1, a_2, \cdots, a_s$线性无关，则

(1)向量组中任何向量都不能被其余向量线性表出；

(2)线性无关组的任何部分组仍然线性无关；

(3)若$k_i(i=1,2,\cdots,s)$不全为零, 则$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s \neq 0$;

(4)如果$a_1, a_2, \cdots, a_s$能够表出β, 则表出方式必唯一；

(5)如果$a_1, a_2, \cdots, a_s$由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性表出, 则$s \leq t$;

(6)等价的线性无关向量组所含向量个数必相等.

由于线性无关组的良好性质，对给定向量组，可设想从中提炼出它的一个线性无关的部分组，且使该部分组在表达功能上与原向量组又完全相同.

3. 向量组的极大无关组、秩

(1)向量组的极大无关组

定义： 设有向量组A,若其部分组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 满足

(1) $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关;

(2)向量组A中任何向量都可有这组向量线性表示.

则称部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$为向量组$A$的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

考察下列向量组的极大无关组：

（1）$\alpha_1=(0,0,0)$，$\alpha_2=(0,0,0)$

（2）$\alpha_1=(0,0,0)$，$\alpha_2=(1,0,0)$，$\alpha_3=(0,1,0)$

（3）$\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(0,1,0)$，$\alpha_3=(0,0,1)$

（4）$\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(0,1,0)$，$\alpha_3=(1,1,0)$

不难归纳：

(1)只包含零向量的向量组不存在极大无关组；

(2)含有非零向量的向量组必存在极大无关组；

(3)线性无关向量组的极大无关组即是该向量组本身；

(4)线性相关组的极大无关组所含向量数少于原向量组；

(5)向量组的极大无关组可能不唯一，但所含向量个数唯一

例1 证明

(1) n维基本向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$是$R^n$的极大无关组;

(2)R^n中任意n个线性无关的向量都是R^n的极大无关组.

证

(1)$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$显然线性无关;又$\forall\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$,

有 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$

依定义，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$是$R^n$的一个极大无关组 .

定理1：向量组与它的极大无关组等价；同一个向量组的两个最大无关组等价.

定理2：同一向量组的两个极大无关组所含向量个数相同.

(2)向量组的秩

定义：向量组的极大无关组所含向量个数称为向量组的秩(rank).

- 仅含零向量的向量组不存在极大无关组，规定秩为零；
- 任意含非零向量的向量组的秩至少为1；
- 线性无关向量组的秩即向量组所含向量个数；
- 在秩为r的向量组中，任意r个线性无关向量都是这个向量组的极大无关组.

定理：等价的向量组具有相同的秩.

§3.4　矩阵的秩（*rank*）

前面我们已经讲到向量组的一个重要概念，就是向量组的极大线性无关组，这个极大线性无关组所含向量的个数就定义为这个向量组的秩(*rank*).

我们可以把一个$s \times n$矩阵的每一行看成一个向量，那么这个矩阵是有s个n维的行向量组成；同样可把矩阵的每一列看成一个向量，则这个矩阵是有n个列向量组成.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}_{s\times n} \overset{\text{将}A\text{的每一行看成一个向量}}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{将}A\text{的每一列看成一个向量}}{=} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

这样我们给出定义

定义 矩阵行向量组的秩称为该矩阵的行秩；矩阵的列向量组的秩称为矩阵的列秩.

例如矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$,容易看出矩阵$A$的3个行向量是线性无关的，因此$A$ 的行秩是3，同样A的列秩也是3.

矩阵$B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$,容易看出$B$的前3个行向量组成的组是线性无关的，而4个行向量组成的组是线性相关的，因此B的行秩是3；同样B的4个列向量组成的向量组是线性相关，但第1、2、4列向量，或第1、3、4列向量组成的向量组是线性无关的，因此B的列秩是3.

前面例子中矩阵的行秩和列秩相等，其实这具有一般性.首先我们证明一个引理.

引理 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n &= 0 \end{cases} \qquad (*1)$$

的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}_{s\times n}$$

如果A的行秩$r<n$,那么它有非零解.

证明 以$a_1,a_2,\cdots,a_s$代表矩阵A的行向量组，因为它的行秩为r,所以它的极大线性无关组是由r个向量组成.不妨设$a_1,a_2,\cdots,a_r$是一个极大线性无关组.因此向量组$a_1,a_2,\cdots,a_r$与$a_1,a_2,\cdots,a_r,\cdots,a_s$是等价的.也就是说，方程组(*1)与方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\
\qquad\qquad \cdots & \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n & = 0
\end{cases}
\qquad (*2)
$$

可以互相线性表示，因而方程组(*1)与方程组（*2）同解，因为方程组（*2）是r个方程n个未知量（$r < n$)组成的齐次线性方程组，因此它一定有非零解.

定理：矩阵的行秩与列秩相等.

证：设所考虑的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}_{s\times n}$，

A的行秩=r，A的列秩=r_1.

首先证明$r\le r_1$.以$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$表示A的行向量组,且不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ $(r\le s)$为其一个极大无关组, 由于$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关，因而齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_r\alpha_r=0$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{r1}x_r = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{r2}x_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{rn}x_r = 0 \end{cases}$$

也就是说，n个方程r个变量的齐次线性方程组（$r < n$) 只有零解.

因此该方程组对应的系数矩阵为

$$[\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_r^T] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{rn} \end{bmatrix}_{n\times r}$$

由于该方程组只有零解，根据引理，故它的行秩 $\geq r$.

（因若行秩 $< r$,就一定有非零解）. 又由于它的行向量中可以找到 r 个是线性无关的，譬如说向量组

$$(a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1}),(a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2}),\cdots,(a_{11},a_{21},\cdots,a_{rr})$$

线性无关.在这些向量上添上若干分量后所得向量组

$$(a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1},\cdots,a_{s1}),(a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2},\cdots,a_{s2}),\cdots,$$

$$(a_{1r},a_{2r},\cdots,a_{rr},\cdots,a_{sr}),$$

也线性无关.而这些向量正好是 A 的 r 个列向量,由它们的线性无关性可知矩阵 A 的列秩 r_1 至少是 r,也就是说 $r_1 \geq r$.

用同样的方法可证 $r \geq r_1$,这样就证明了行秩与列秩相等.

矩阵的行秩=矩阵的列秩

定义：矩阵的行秩与列秩统称为矩阵的**秩**，记作$r(A)$.

2.矩阵秩的求法

(1)矩阵的秩与行列式的关系

*k*级子式：在一个$s\times n$矩阵任意选定k行和k列，位于这些选定的行和列的交点上的k^2个元素按照原来的次序构成的k阶行列式，称为A的一个k级子式.

共$C_s^k \cdot C_n^k$个.

例如
$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

其中$|-3|,|1|$为一级子式；$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$为二级子式；

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$为三级子式.

定理:一矩阵的秩是r⇔矩阵中有一个r级子式不为零,同时所有的$r+1$级子式(如果有的话)全为零.

证明: (⇒) $r(A)=r$,所以A中任意$r+1$行都线性相关,A的任意$r+1$级子式的行向量也线性相关,即至少有某一行向量可由其余向量线性表示,因此这所有的r+1级子式全为零. 下面证

A中至少有一个r级子式不为零. 事实上,由于

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix},$$

的秩是r⇒A有r行线性无关,比如前r行;同时A有r列线性无关,比如前r列;从而由A的前r行、前r列构成的r级子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0;$$

($\Leftarrow$)因A的r+1级子式全为零，由行列式的按行(列)展开定理知：A的r+2级子式全为零，…, A的所有级数大于r的子式全为零.

设r(A)=t, 则$t \geq r$，否则由必要性知，A的r级子式全为零；同样地，t不能大于r，否则A至少有一个t($\geq r$+1)级子式不为零，与假定矛盾；因此$t = r$. ||

例1 求下列矩阵的秩.

$$(1) A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, (2) B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$(3) C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

解:(1)观察三级子式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$,知$r(A)=3$;

(2)观察知：B的三级子式全为0,而二级子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$,

所以r(B) =2.

(3)C的三级子式共4个全为0，

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$\Rightarrow r(C) < 3$;

但$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$，知$r(A)=2$.

显然，若A是一个$s\times n$的矩阵，则

$$rank(A)\le \min(s,n)$$

设A是一个n级方阵，且$rank(A)=n$,就说A是满秩的.

设A是一个$s\times n$级矩阵，若$rank(A)=s$,则说A是行满秩的，若$rank(A)=n$,则说A是列满秩的.

定理　　矩阵A的秩等于其转置矩阵A^T的秩，即

$$rank(A)=rank(A^T)$$

这是因为转置不会改变行列式的值，且A中每一个子式转置后都是A^T的子式.反之亦对.

小结：
(i)求矩阵的秩是从高阶到低阶逐个子式进行检验，如果所有$r+1$级子式均为零，而某个r级子式不为零，知$r(A)=r$;
(ii)行阶梯形矩阵的秩容易求出(等于阶梯形矩阵中非零行的个数).

- 问题：矩阵经初等变换可以化简，能否借助化简后的矩阵求出原矩阵的秩?

(2)矩阵的秩的求法——初等变换法

定理:

(i)矩阵的初等行(列)变换不改变矩阵的行(列)秩;

(ii)矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

证明:(i)设A的行向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$.若

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}\xrightarrow{r_i+kr_j}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i+k\alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}=B,$$

则易知A与B的行向量组等价. 于是，A的行秩等于B的行秩;同理可证其它情形.

同样可以证明矩阵的初等列变换不改变矩阵的列秩;

(ii)由(i)可见初等变换不改变矩阵的秩.

例2 求矩阵的秩.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -4 & -5 & 8\end{bmatrix}.$$

解:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -4 & -5 & 8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & -4 & 16\\ 0 & -3 & 12\\ 0 & 3 & -12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

故$r(A)=2.$

例3 求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩.

解 $\because$ B是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行，

$\therefore$ B 的所有 4 阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, $\quad \therefore \quad R(B)=3.$

例4 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，求该矩阵的秩.

解 $\because \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 计算$A$的3阶子式，

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \therefore R(A) = 2.$$

另解 对矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 做初等变换,

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

显然,非零行的行数为**2**,

$\therefore R(A)=2.$

此方法简单!

3. 极大无关组的求法

定理 如果矩阵$A_{m\times n}$ 经有限次初等行变换化为$B_{m\times n}$，则$A_{m\times n}$的列向量组与$B_{m\times n}$的列向量组具有相同的线性关系.

（方程组初等变换把方程组化为同解的方程组）

定理含义:

(1)向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$中部分组$A_0:\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关

$\Leftrightarrow$向量组$B:\beta_1,\cdots,\beta_n$中部分组$B_0:\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r}$线性无关;

(2)组A中有$\alpha_i=k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_n\alpha_n$

$\Leftrightarrow$ 组B中有$\beta_i=k_1\beta_1+\cdots+k_{i-1}\beta_{i-1}+k_{i+1}\beta_{i+1}+\cdots+k_n\beta_n$;

(3)向量组A的部分组$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$是$A$的最大无关组

$\Leftrightarrow$向量组B的部分组$\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r}$是$B$的最大无关组

例3 求向量组的秩，并指出一个极大无关组.

$\alpha_1=(3,1,-6,-4)^T, \alpha_2=(2,2,-3,-5)^T$，$\alpha_3=(1,-5,-6,8)^T$.

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量作矩阵A,并对其施行初等行变换:

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\1&2&-5\\-6&-3&-6\\-4&-5&8\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{\substack{r_1-3r_2\\r_3+6r_2\\r_4+4r_2}}\begin{bmatrix}1&2&-5\\0&-4&16\\0&-3&12\\0&3&-12\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+3r_2]{\substack{(-\frac{1}{4})\times r_2\\r_4+r_3}}\begin{bmatrix}1&2&-5\\0&1&-4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2.$

向量组α_1,α_2，α_3中任意两个向量组成的向量组都是极大无关组

例4 求向量组的一个极大无关组与秩，并将其余向量用极大无关组线性表示.

$$\alpha_1=(1,-1,-1,-3)^T,\alpha_2=(-1,1,-3,-1)^T,$$

$$\alpha_3=(-1,-3,1,-1)^T,\alpha_4=(-3,-1,-1,1)^T.$$

解： 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列向量作矩阵A,并对其施行初等行变换：

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-3\\-1&1&-3&-1\\-1&-3&1&-1\\-3&-1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&-3\\0&0&-4&-4\\0&-4&0&-4\\0&-4&-4&-8\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&-3\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&-4&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B$$

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为向量组的一个极大无关组，秩为3，且有$\alpha_4=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

思考与练习

求如下向量组的一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示.

$\alpha_1 = (2,0,-1,1)^T, \alpha_2 = (1,1,-1,0)^T,$

$\alpha_3 = (1,-1,0,1)^T, \alpha_4 = (2,-1,-1,1)^T.$

答案

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

因此,$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$是向量组$A$的最大无关组，且

$\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2.$

例5 证明向量组A与向量组B等价.

$$A:\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(1,0,1,1)^T.$$

$$B:\beta_1=(2,-1,3,3)^T,\beta_2=(0,1,-1,-1)^T.$$

证: (法1)二者可以相互线性表示.事实上

$$C=[\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2]=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&1&3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$D=[\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2]=\begin{bmatrix}2&0&1&1\\-1&1&1&0\\3&-1&0&1\\3&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&0&1/2&1/2\\0&1&3/2&1/2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\beta_1=-\alpha_1+3\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$, 知$B$由$A$线性表出，且

$\alpha_1=\dfrac{1}{2}\beta_1+\dfrac{3}{2}\beta_2$, $\alpha_2=\dfrac{1}{2}\beta_1+\dfrac{1}{2}\beta_2$, 知$A$由$B$线性表出.

证: (法2)A与B为同一向量组的极大无关组.考虑向量组C： $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.由

$$[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

向量组C的秩为2.而α_1, α_2及β_1, β_2均线性无关, 所以同为向量组C的极大无关组.因此两向量组等价. ||

内 容 回 顾

向量组的极大无关组：

设有向量组A,若其部分组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 满足

(1) $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关;

(2) $\forall\alpha\in A$(如果有的话)，$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$，$\alpha$线性相关，

则称部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$为向量组$A$的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

向量组的秩： 向量组的极大无关组所含向量个数，称为向量组的秩.

定理： 等价的向量组具有相同的秩.

矩阵的秩： 矩阵的行秩与列秩统称为矩阵的秩，记作$r(A)$.

习题

P.155 2.（2）；3.；4.；6.；9.；11.（1）；13.; 16.; 18.(1);

§3.5 线性方程组有解判别定理

- 本节利用**n维向量**及**矩阵秩**的有关理论回答线性方程组是否有解这一问题的实质.
- 设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad (1)$$

引入向量$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$

方程组(1)可写为向量方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta \qquad (2)$$

定理(线性方程组有解判别定理) 线性方程组(1)有解⇔是它的系数矩阵与增广矩阵有相同的秩.

证 (⇒) 设(1)有解,即向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示，因此向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$等价，从而两向量组有相同的秩，亦即：

$$r(A)=r(\overline{A});$$

(⇐) 设(1)的系数矩阵与增广矩阵有相同的秩,即$r(A)=r(\overline{A})=r$, 即它们的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$与$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$有相同的秩.不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$的一个极大无关组，则它也是$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$的一个极大无关组,故向量$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性表示，从而可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示.

定理:线性方程组(1)有唯一解$\Leftrightarrow r(A)=r(A|\beta)=n$;

线性方程组(1)有无穷多解$\Leftrightarrow r(A)=r(A|\beta)<n$.

证：由$r(A)=r(A|\beta)=n$，知$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关,且向量$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示、表示式唯一，即线性方程组(1)有唯一解；反之亦然.

由$r(A)=r(A|\beta)<n$，知$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性相关,且向量$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示、表示式不唯一，即线性方程组(1)有无穷多解，反之亦然.

以上两个定理是直接从原方程组的系数和常数项去判断方程组的解的情况，这与§3. 1用阶梯形方程组去判断方程组的解的情况是一致的,这是因为那里出现的$0=d_{r+1}$(d_{r+1}是非零数)就是意味着增广矩阵不为零子式的最高阶数为r+1,而$r(\mathrm{A})=r$;反之，阶梯形方程组中不出现$0=d_{r+1}$(d_{r+1}是非零数)就是意味着$r(A)=r(A|\beta)$.

定理：系数矩阵为$A_{s\times n}$的齐次线性方程组恒有解，且

有唯一解$\Leftrightarrow r(A_{s\times n})=n$;

有无穷多解 (非零解)$\Leftrightarrow r(A_{s\times n})<n$.

推论：系数矩阵为$A_{n\times n}$的齐次线性方程组

有唯一解$\Leftrightarrow r(A_{s\times n})=n \Leftrightarrow |A|\neq 0$;

有无穷多解 (非零解)$\Leftrightarrow r(A_{s\times n})<n \Leftrightarrow |A|=0$.

例1 线性方程组是否有解？有解时求出其解.

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\
2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5 \\
x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 2
\end{cases}
$$

解 对增广矩阵施行初等行变换：

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-2&1&3\\2&-2&-3&3&5\\1&-1&-1&2&2\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-2&1&3\\0&0&1&1&-1\\0&0&1&1&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-2&1&3\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+2r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&3&1\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

因$r(A)=r(\overline{A})=2<4$,方程组有无穷多解,同解方程组为：

$$\begin{cases}x_1-x_2+\ 3x_4=1\\ \ x_3+x_4=-1\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=1+x_2-3x_4\\ x_3=-1\ -x_4\end{cases}$$

取x_2、x_4为自由未知量,令$x_2=c_1,x_4=c_2$，得一般解：

$$\begin{cases} x_1 = 1 + c_1 - 3c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = -1 \quad - c_2 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x_1 = 1 + 1c_1 - 3c_2 \\ x_2 = 0 + 1c_1 + 0c_2 \\ x_3 = -1 + 0c_1 - 1c_2 \\ x_4 = 0 + 0c_1 + 1c_2 \end{cases}$$

写作向量式,即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (c_1、c_2 \text{为任意常数}).$$

例2

k取何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k^2 \end{cases}$

（1）有唯一解？（2）无解？（3）有无穷多解？

有解时求其解.

解

系数矩阵A的行列式 $|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)^2(k+2)$

（1）当 $|A| \neq 0$，即$k \neq 1$且$k \neq -2$时，有唯一解;

依克拉默法则，计算得

$D_1 = -(k-1)^2(k+1)$，$D_2 = (k-1)^2$，$D_3 = (k-1)^2(k+1)^2$

得唯一解：$x_1=-\dfrac{k+1}{k+2}$，$x_2=-\dfrac{1}{k+2}$，$x_3=\dfrac{(k+1)^2}{k+2}$；

（2）当$k=-2$时，对增广矩阵作初等行变换：

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{array}\right]\xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3+r_2+r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}0&-3&3&-3\\1&-2&1&-2\\0&0&0&3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&-2\\0&-3&3&-3\\0&0&0&3\end{array}\right]$$

$r(A)=2\neq 3=r(\overline{A})$，则原方程组无解.

（3）当$k=1$时，对增广矩阵作初等行变换：

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$r(A)=r(\overline{A})=1<3$,方程组有无穷组解,同解方程组为：

$$x_1+x_2+x_3=1$$

取x_2、x_3为自由未知量,令$x_2=c_1,x_3=c_2$,得一般解：

$$\begin{cases}x_1=1-c_1-c_2\\x_2=c_1\\x_3=c_2\end{cases}\quad 即\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(c_1、c_2为任意常数).

§3.6 线性方程组解的结构

——解与解之间的关系

1.齐次线性方程组

考虑 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

(1)解向量的性质

若η_1，η_2均为(1)的解，则$\eta_1 + \eta_2$也是(1)的解；

若η为(1)的解，则对任意常数k，$k\eta$也是(1)的解.

解的线性组合仍然是解

(2)方程组(1)的解之结构

定义(齐次线性方程组的基础解系):设$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$为方程组(1) 的一组解，如果

(i) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$线性无关；

(ii)(1) 的任一解都能表示为$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$的线性组合，

则称$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$为(1)的一个基础解系.

定理：齐次线性方程组(1)有非零解的情况下,它有基础解系，且基础解系所含解向量的个数为$n-r$,其中 r 为其系数矩阵的秩.

证明：设$r(A)=r$,并设左上角的r阶子式不为零，则(1)与下列方程组同解：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n
\end{cases}
\quad (2)
$$

- 若$r=n$,此时方程组只有零解，不存在基础解系；
- 若$r<n$,任给自由未知量$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$一组值，

由Gramer法则唯一地确定(2)的从而也是(1)的一个解 $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$

取$n-r$组数：

$$
\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

这就是说，给定一个（$x_{r+1} \quad x_{r+2} \quad \cdots \quad x_n)^T$,就可以根据(2）计算出唯一的（$x_1, x_2, \cdots, x_r)^T$,这样就得到方程组（1）的一个解（$x_1, x_2, \cdots, x_r, x_{r+1} \quad x_{r+2} \quad \cdots \quad x_n)^T$.

这样分别以下面$n - r$个向量代入

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

就可以得到$n - r$个线性无关的解向量.

即得到(2)的从而也是(1)的n-r个解：

$$\eta_1=\begin{pmatrix} b_{11}\\ \vdots \\ b_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix} b_{12}\\ \vdots \\ b_{r2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \cdots, \eta_{n-r}=\begin{pmatrix} b_{1,n-r}\\ \vdots \\ b_{r,n-r}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

则$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$为(1)的一个基础解系：

- 显然$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$线性无关；
- 下证(1) 的任一解可由$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$线性表示.

$$设\ \eta=\begin{pmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_r\\ c_{r+1}\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}为(1)的一个解.$$

由于$c_{r+1}\eta_1+c_{r+2}\eta_2+\ldots+c_n\eta_{n-r}=\begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ *\\ c_{r+1}\\ c_{r+2}\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$也是(1)的解,

且它与(1)的解η的最后n-r个分量相等，知它们的前r个分量也相等(前r个分量由后n-r个分量唯一确定)，从而有

$$\eta=c_{r+1}\eta_1+c_{r+2}\eta_2+\ldots+c_n\eta_{n-r}$$

即(1) 的任一解可由η_1, η_2, …, η_{n-r}线性表示.因此

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$$

为(1)的一个基础解系. ||

方程组(1)的一般解 (通解)为：

$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}$ ($k_1,k_2,\ldots,k_{n-r}$为任意常数)

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$为(1)的一个基础解系.

例1 求下列线性方程组的一个基础解系，并用基础解系表示全部解.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+4x_2-x_3-2x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

解： 对系数矩阵 施行初等行变换

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得$r(A)=2<4$,方程组有无穷组解,基础解系含$4-2=2$个向量.取x_2,x_4为自由未知量，得方程组的一般解

$$\begin{cases} x_1=-2x_2+x_4 \\ x_3=0 \end{cases} (x_2,x_4\text{为自由未知量}).\text{令}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

得方程组的一个基础解系：$\eta_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

方程组的全部解为

$$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2(k_1,k_2\text{为任意常数}).$$

(1)还有没有其它的基础解系？

(2)能否用其它方式确定基础解系？

例2 证明:与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

证 设$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$为(1)的一个基础解系, $\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_t$是一个与$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$等价的线性无关向量组(因等价的线性无关向量组所含向量个数相同,故而这两个向量组含相同个数的向量)只须证$\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_t$是解，且(1)任一解可由$\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_t$线性表示.

由于解的线性组合还是解，而每个α_i都可以表成$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$的线性组合，所以$\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_t$都是(1)的解.

对(1)的任一解η，η可由基础解系$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$线性表示，而$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$与$\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_t$等价，故$\eta$也可由$\alpha_1,\alpha_2, \ldots,\alpha_t$线性表示. ||

2.非齐次线性方程组

考虑
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \quad (3)$$

将(3)的常数项换成0，得到齐次线性方程组(1),称(1)为(3)的导出组.

(1)解向量的性质

若γ_1，γ_2均为(3)的解，则$\gamma_1-\gamma_2$是导出组(1)的解；

若γ为(3)的解,η是导出组(1)的解,则$\gamma+\eta$为(3)的解.

(2)方程组(3)的解之结构

定理： 设γ_0为线性方程组(3)的一个特解，则(3)的任一解γ都可表为

$$\gamma=\gamma_0+\eta$$

其中η为导出组(1)的一个解.

(3)的一般解(通解)为

$$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

这里γ_0 为非齐次线性方程组(3)的一个特解,η_1, η_2, …, η_{n-r}为其导出组(1) 的一个基础解系.

证明：设γ_0为线性方程组(3)的一个特解，则(3)的任一解γ可表为 $\gamma=\gamma_0+(\gamma-\gamma_0)$
其中$\eta=\gamma-\gamma_0$为导出组(1)的解. ‖

推论： 在线性方程组(3)有解的条件下，解是唯一的$\Leftrightarrow$导出组(1)只有零解.

例3 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+4x_2-x_3-2x_4=5 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=9 \end{cases}$$

用特解及导出组的基础解系表示一般解.

解：对增广矩阵 施行初等行变换

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&1&-1&1\\2&4&-1&-2&5\\5&10&1&-5&9\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行变换}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&-1&2\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$r(A)=r(\overline{A})=2<4$,方程组有无穷组解.

取x_2,x_4为自由未知量，得同解方程组：

$$\begin{cases}x_1=2-2x_2+x_4\\x_2=x_2\\x_3=-1\\x_4=x_4\end{cases}$$

方程组的一个特解 $\gamma_0=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$,导出组的一个基础解系为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

方程组的一般解为

$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$ (k_1,k_2为任意常数).

$r(A)=3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$为其三个解向量,且$\gamma_1=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\2\end{pmatrix},\gamma_2+\gamma_3=\begin{pmatrix}4\\6\\8\\0\end{pmatrix}$,

求该方程组的通解.

例4　四元非齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta \quad (*)$$

$r(A) = 3,$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$为$(*)$方程组的三个解向量,且$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \gamma_2 + \gamma_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$

求该方程组的通解.

解 因$n=4$，$r(A)=3$, 因此导出组的基础解系只包含

4-3个解向量.因此导出组的任一非零解均可作为基础解系.由于

而γ_2,γ_3是（*）的解，因此$\frac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_3)$也是 (*)的解,

$$从而\eta=\gamma_1-\frac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_3)=\begin{pmatrix}1\\-7\\-3\\2\end{pmatrix}$$

是导出组的非零解,即基础解系.

由非齐次线性方程组解的结构，得方程组的一般解：

$$\gamma=\gamma_1+k\eta\ (k为任意常数).$$

例5 证明方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解全是$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$的解的充要条件是$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$可由$a_1, a_2, \cdots, a_s$线性表示，其中$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn})$.

证明 由于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

与方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

同解，因此(1)和（2）由相同的基础解系，于是(1)和（2）的系数矩阵有相同的秩，也就是说(1)的系数向量系 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 与(2)的系数向量系 $a_1, a_2, \cdots, a_s$，b 由相同的秩.

故 b 可由 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性表示.

反之，若 b 可由 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性表示，设

$$b = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_s a_s$$

而令 $x = d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)^T$ 是（1）的解，即 $a_j d = 0, j = 1, 2, \cdots, n.$

于是推得

$$bd = (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_s a_s)d = \sum_{i=1}^{s} k_i a_i d = 0$$

也就是说 $x = d$ 是(1)的解，也是(2)的解.证毕

思考与练习

1.设四元非齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$

已知$r(A)=2$,而$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$为它的三个解向量,且

$\gamma_1=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\1\end{pmatrix},\gamma_3=\begin{pmatrix}-2\\6\\3\\2\end{pmatrix}$求该方程组的一般解.

2.解方程组(1)$\begin{cases}x_1-x_2-x_3-3x_4=0\\x_1-x_2+x_4=0\\4x_1-4x_2-x_3=0\end{cases}$ (2)$\begin{cases}x_1-x_2-x_3-3x_4=-2\\x_1-x_2+x_4=1\\4x_1-4x_2-x_3=1\end{cases}$.

习题

P.157 19.(3);20.(3),(4);22.;23.;26.;