

□

课题练习. 利用此定理计算例 4.7 中随机变量 X 的期望 $E(X) = 2/3$.

根据上述定理有如下推理:

推论4.1. 对随机变量 X 和连续函数 $g(x)$, 有

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx = \int_0^{+\infty} P(g(X) > t)dt.$$

定义4.4. 设连续随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt$ 收敛, 称之为随机变量 X 的方差, 记为 $Var(X)$, 即

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt.$$

其等价性定义为

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt \right)^2.$$

性质4.4. 对任意常熟 a, b 和随机变量 X , 有 $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

4.2 常用连续型随机变量

本章介绍三种常用连续型随机变量.

4.2.1 均匀分布(uniform distribution)

给定区间 $[a, b]$, 考虑一个随机变量 X , 其落入区间 $[a, b]$ 内任何一个点的概率相等.

定义4.5. 若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{其它,} \end{cases}$$

称 X 服从区间 $[a, b]$ 上的均匀分布, 记 $X \sim U(a, b)$.

对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x) \geq 0$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^{+\infty} f(t)dt = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 1.$$

均匀分布的几何解释: 若 $X \sim U(a, b)$, 则 X 落入 $[a, b]$ 内任一子区间的概率与该区间的长度成正比, 与该区间的位置无关.

根据分布函数的定义可知 $X \sim U(a, b)$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

定理4.3. 若 $X \sim U(a, b)$, 则

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Proof. 根据期望和方差的定义有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt = \frac{a+b}{2} \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b t^2 dt = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}, \end{aligned}$$

从而得到方差

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

□

例4.8. 设随机变量 $\xi \sim U(-3, 6)$, 试求方程 $4x^2 + 4\xi x + (\xi + 2) = 0$ 有实根的概率.

解. 易知随机变量 ξ 的概率密度函数

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{9} & x \in [-3, 6] \\ 0 & \text{其它} \end{cases},$$

设事件 A 表示方程有实根, 于是有

$$\begin{aligned} P(A) &= P((4\xi)^2 - 4 \times 4 \times (\xi + 2) \geq 0) \\ &= P((\xi + 1)(\xi - 2) \geq 0) = P(\xi \leq -1) + P(\xi \geq 2) \\ &= \int_{-3}^{-1} \frac{1}{9} dt + \int_2^6 \frac{1}{9} dt = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

□

课题练习. 已知随机变量 $X \sim U(0, 1)$, 对任意 $\lambda > 0$ 求 $E[\lambda^{\max(X, 1-X)}]$.

4.2.2 指数分布

定义4.6. 给定常数 $\lambda > 0$, 若随机变量 X 的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记 $X \sim e(\lambda)$.

指数分布一般用于时间等待等实际问题. 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x) \geq 0$, 进一步有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^{\infty} = 1.$$

对于指数函数的分布函数: 当 $x \leq 0$ 时有 $F(x) = 0$; 当 $x > 0$ 时,

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

定理4.4. 若随机变量 $X \sim e(\lambda)$, 则

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Proof. 根据连续函数的定义有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = [-te^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} [e^{-\lambda t}]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}, \\ E(X^2) &= \lambda \int_0^{\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt = [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2te^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

于是得到 $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1/\lambda^2$. □

下面研究指数分布的一个重要性质: 指数分布的无记忆性.

定理4.5. 给定常数 $\lambda > 0$, 若随机变量 $X \sim e(\lambda)$, 则对任意 $s > 0, t > 0$, 有

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s).$$

Proof. 根据指数分布函数的性质: 对任意 $x > 0$, 有 $P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$, 从而直接验证 $P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$. □

指数分布是唯一具有无记忆性的连续型随机变量.

例4.9. 打一次公用电话所用时间 $X \sim e(1/10)$, 如果某人刚好在你前面使用公用电话, 求你需等待 10 ~ 20 分钟的概率.

解. 根据指数分布函数有

$$P(10 \leq X \leq 20) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.2325.$$

□

4.2.3 正态分布

定义4.7. 给定 $u \in (-\infty, +\infty)$ 和 $\sigma > 0$, 如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

称 X 服从参数为 (μ, σ^2) 的正态分布 (Normal distribution), 又被成为高斯分布 (Gaussian distribution), 记 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

特别地, 若 $\mu = 0$ 和 $\sigma = 1$, 称 $\mathcal{N}(0, 1)$ 为标准正态分布, 其密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x) \geq 0$, 进一步有

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} d\frac{r^2}{2} = 2\pi, \end{aligned}$$

这里使用极坐标变换, 由此可证 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 1$.

下面考虑正太分布概率密度 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 的图形:

- 1) 关于直线 $x = \mu$ 对称, 即 $f(\mu - x) = f(\mu + x)$.
- 2) 当 $x = \mu$ 时取最大值 $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.
- 3) 概率密度函数的二阶导数

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^5} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ((x-\mu)^2 - \sigma^2),$$

可得其拐点为 $x = \mu \pm \sigma$. 根据

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0,$$

可得渐近线为 $y = 0$.

- 4) 当 σ 固定时, 改变 μ 的值, $f(x)$ 沿 x 轴左右平行移动, 不改变其形状.
- 5) 当 μ 固定时, 改变 σ 的值, 根据 $f(x)$ 的最大值 $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 可知: 当 σ 越小, 图形越陡, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ 落入 μ 附近的概率越大; 反之 σ 越大, 图形越平坦, X 落入 μ 附近的概率越小.

定理4.6. 若 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1);$$

若 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 则 $Y = \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Proof. 若 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 随机变量 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X - \mu \leq y\sigma] = P[X \leq y\sigma + \mu] = \int_{-\infty}^{\mu+y\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

令 $x = (t - \mu)/\sigma$, 代入得到分布函数

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

由此可得 $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. 若 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 则

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sigma X + \mu \leq y) = P(X \leq (y - \mu)/\sigma) = \int_{-\infty}^{(y-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

令 $t = (x - \mu)/\sigma$, 代入得到

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

□

定理4.7. 若 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则

$$E(X) = \mu \quad \text{和} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

特别地, 若 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 则 $E(X) = 0$ 和 $\text{Var}(X) = 1$.

Proof. 若 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 根据期望的定义有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0$$

因为奇函数在对称的区间上积分为 0. 进一步有

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t de^{-t^2/2} = \left[te^{-t^2/2} \right]_{t=-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1.$$

如果 $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $(Y - \mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 于是有

$$\begin{aligned} 0 &= E((Y - \mu)/\sigma) = (E(Y) - \mu)/\sigma \Rightarrow E(Y) = \mu, \\ 1 &= \text{Var}((Y - \mu)/\sigma) = \text{Var}(Y)/\sigma^2 \Rightarrow \text{Var}(Y) = \sigma^2. \end{aligned}$$

□

下面给出正太分布的估计:

定理4.8. 若 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{1}{2} e^{-\epsilon^2/2};$$

[Mill 不等式] 若 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \min \left\{ 1, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\epsilon^2/2}}{\epsilon} \right\}.$$

Proof. 对第一个不等式, 我们有

$$\begin{aligned} P(X \geq \epsilon) &= \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x+\epsilon)^2/2} dx \\ &\leq e^{-\epsilon^2/2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} e^{-\epsilon^2/2}. \end{aligned}$$

对于 Mill 不等式, 根据 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的概率密度 $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ 有 $f'(x) = xf(x)$, 进一步可得

$$P(|X| \geq \epsilon) = 2 \int_{\epsilon}^{\infty} f(t)dt = 2 \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{tf(t)}{t}dt \leq 2 \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f'(t)}{\epsilon}dt = \frac{2}{\epsilon} [f(t)]_{\epsilon}^{+\infty} = \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\epsilon^2/2}.$$

□

若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, 根据 Mill 不等式有

$$P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \geq 3\right) \leq \min\left\{1, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{3e^{4.5}}\right\} = 0.0030,$$

由此可得若 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, 则有

$$P(u - 3\sigma \leq X \leq u + 3\sigma) \geq 99.7\%,$$

因此在工程应用中, 一般通常认为

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \approx 1.$$

正太分布 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

由此可知其分布函数无闭式解, 可将 $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ 转为为标准正太分布 $\mathcal{N}(0, 1)$, 设 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的分布函数为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

可以通过查表或计算机计算.

例4.10. 如果 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 求概率 $P(a \leq X \leq b)$.

解. 将 $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ 转为为标准正太分布 $\mathcal{N}(0, 1)$, 即

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

□

4.3 随机变量的函数的分布

前面研究了连续型随机变量, 实际中我们可能对随机变量的函数更感兴趣.

设 X 为随机变量, $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为一函数, 则 $Y = g(X)$ 也是一随机变量, 本节主要研究连续型随机变量函数. 设 X 为连续型随机变量, 其密度函数为 $f_X(x)$, 设 $Y = g(X)$ 是 X 的函数, 也可看作随机变量, 问题: 如何求解 $f_Y(y)$?

求解思路: