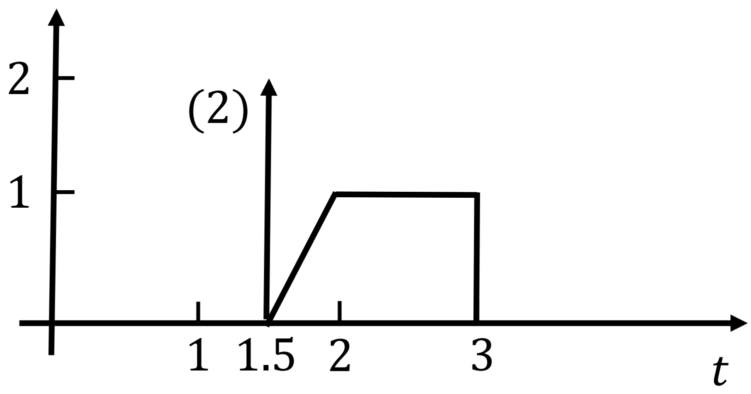

Figure 1: $f(5-2t)$ 波形图

一. 给出下列各时间函数的波形图:

(1) $f_1(t) = \sin(\omega t) \cdot u(t)$

(2) $f_2(t) = \sin\left[\omega(t-t_0)\right] \cdot u(t)$

(3) $f_3(t) = \sin\left[\omega(t)\right] \cdot u(t-t_0)$

(4) $f_4(t) = \sin\left[\omega(t-t_0)\right] \cdot u(t-t_0)$

解:

本题绘图见最后一页附录 A

(1) 将 $sint$ 将横坐标变为原来的 $1/w$ 倍，去掉 $x<0$ 的部分

(2) 将 $sint$ 将横坐标变为原来的 $1/w$ 倍，然后右移 t_0 个单位，去掉 $x<0$ 的部分

(3) 将 $sint$ 的横坐标变为原来的 $1/w$ 倍，然后去掉 $x<t_0$ 的部分

(4) 将 $sint$ 将横坐标变为原来的 $1/w$ 倍，然后右移 t_0 个单位，去掉 $x<t_0$ 的部分

二. 已知 $f(5-2t)$ 的波形如图 1所示，画出 $f(t)$ 的波形图。

解:

本题绘图见最后一页附录 B

$f(5-2t)$ 是由 $f(t)$ 先沿 y 轴作 180° 反转，然后进行压缩，最后右移 2.5 个单位而来，故 $f(t)$ 的图像如下：

三. 分别求下列周期信号的周期 T：

(1) $\cos(10t) - \cos(30t)$

(2) e^{j10t}

(3) $[5\sin(8t)]^2$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[u(t-nT) - u(t-nT-T)\right]$($n$ 为正整数)

解:

(1)$cos(10t)$ 的周期 $T_1 = \frac{\pi}{5}$，$cos(30t)$ 的周期 $T_2 = \frac{\pi}{15}$，T_1/T_2 为有理数，故 $cos(10t) - cos(30t)$ 的周期为 T_1, T_2 的最小公倍数，即 $T = \frac{\pi}{5}$

(2) 由欧拉公式，$e^{j10t} = cos(10t) + jsin(10t)$，故周期为 $T = \frac{\pi}{5}$

(3)$[5sin(8t)]^2 = 25sin^2(8t)$，由二倍角公式，
$25sin^2(8t) = \frac{25}{2}(1 - cos(16t))$，故周期 $T = \frac{\pi}{8}$

(4) 令 $f(t) = u(t-nT) - u(t-nT-T)$

显然 $f(t)$仅在$nT \le t < nT + T$ 时值为 1，其他时间为 0

对于 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f(t)$，对某个 t 其中只有一项非 0

当 $t \in [0, T)$ 时，第 0 项为 1，其余各项为 0，信号值为 1
当 $t \in [T, 2T)$，第 1 项为-1，其余各项为 0，信号值为-1
类似的，有 $t \in [2kT, (2k+1)T), k = 0, 1, 2..$ 时，值为 1
$t \in [(2k+1)T, (2k+2)T), k = 0, 1, 2..$ 时，值为-1
故该信号周期为 $2T$

四. 应用冲激信号的抽样特性，求下列表示式的函数值：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-t)\delta(t)dt$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u(t-\frac{t_0}{2})dt$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u(t-2t_0)dt$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-t}+t)\delta(t+2)dt$

(6) $\int_{-\infty}^{\infty}(t+\sin t)\delta(t-\frac{\pi}{6})dt$

(7) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\left[\delta(t)-\delta(t-t_0)\right]dt$

解：

(1) $f(-t_0)$

(2) $f(t_0)$

(3) 1(值为 $u(\frac{t_0}{2})$，此处假设 $t_0>0$，第 (4) 问同)

(4) 0(值为 $u(-t_0)$)

(5) e^2-2

(6) $\pi/6+1/2$

(7) $1-e^{-jwt_0}$

五. 判断下列系统是否是线性的、时不变的、因果的，并说明理由：

(1) $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

(2) $y(t)=x(t)u(t)$

(3) $y(t)=\sin\left[x(t)\right]u(t)$

(4) $y(t)=x(1-t)$

(5) $y(t)=x(2t)$

(6) $y(t)=x^2(t)$

(7) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

(8) $y(t)=\int_{-\infty}^{5t} x(\tau)d\tau$

解:

(1) 线性: 是, 对于输入 $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$, 系统的输出为 $\alpha\frac{dx_1(t)}{dt}+\beta\frac{dx_2(t)}{dt}$
时不变：是，因为 $x(t-t_0)\rightarrow y(t-t_0)$
因果的：是，响应不依赖于未来的信号

(2) 线性：是，对于输入 $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$，系统输出为 $\alpha x_1(t)u(t)+\beta x_2(t)u(t)$
时不变：不是，比如 $x(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有值，输出与输入的关系随输入作用于系统的时间起点而改变
因果的：是，响应不依赖于未来的信号

(3) 线性：不是，如 $x(t)=t$，输入 $2x(t)$，输出为 $sin[2t]u(t)$ 而非 $2sin(t)u(t)$
时不变：不是，如 $x(t)=t$ 时，输出与输入的关系随输入作用于系统的时间起点而改变
因果的：是，响应不依赖于未来的信号

(4) 线性：是，输入 $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$，输出为 $\alpha x_1(1-t)+\beta x_2(1-t)$
时不变：是，因为 $y(t)=x(1-t)\Rightarrow y(t-t_0)=x(1-(t-t_0))$
因果的：不是，如 $y(0)$ 依赖 $x(1)$

(5) 线性：是, 输入 $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$，输出为 $\alpha x_1(2t)+\beta x_2(2t)$
时不变：是，因为 $y(t-t_0)=x(2(t-t_0))$
因果的：不是，如 $y(1)$ 依赖 $x(2)$

(6) 线性：不是，如对于 $x(t)=t$，输入 $2x(t)$ 时输出为 $4t^2$ 而非 $2t^2$
时不变：是，输出与输入的关系不会因为输入作用于系统的时间起点而改变
因果的：是，响应不依赖于未来的信号

(7) 线性：是，积分具有线性性
时不变：是，输出与输入的关系不会因为输入作用于系统的时间

起点而改变
因果的：是，响应不依赖于未来的信号

(8) 线性：是，积分具有线性性
时不变：是，输出与输入的关系不会因为输入作用于系统的时间起点而改变
因果的：不是，响应需要依赖未来的信号

六. 已知系统相应的齐次方程及其对应的 0_+ 状态条件，求系统的零输入响应：

(1) $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+2\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=0$，给定：$y(0_+)=1, y'(0_+)=2$

(2) $\frac{d^2}{dt^2}y(t)+2\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=0$，给定：$y(0_+)=1, y'(0_+)=2$

(3) $\frac{d^3}{dt^3}y(t)+2\frac{d^2}{dt^2}y(t)+\frac{d}{dt}y(t)=0$，给定：$y(0_+)=y'(0_+)=0, y''(0_+)=1$

解：

(1) 特征方程为 $\alpha^2+2\alpha+2=0$
解得 $\alpha_1=-1+j, \alpha_2=-1-j$
故零输入响应
$y_{zi}(t)=A_1e^{(-1+j)t}+A_2e^{(-1-j)t}=e^{-t}(A_1cost+A_2sint)$
$y_{zi}(0_+)=1, y'_{zi}(0_+)=2$
解得 $A_1=1, A_2=3$
所以零输入响应为 $y_{zi}(t)=e^{-t}(cost+3sint)$

(2) 特征方程为 $\alpha^2+2\alpha+1$
解得 $\alpha_1=\alpha_2=-1$
故零输入响应
$y_{zi}(t)=(A_1t+A_2)e^{-t}$
代入 0_+ 状态条件，解得 $A_1=3, A_2=1$
故零输入响应为 $y_{zi}(t)=(3t+1)e^{-t}$

(3) 特征方程为 $\alpha^3+2\alpha^2+\alpha=0$

解得 $\alpha_1=0,\alpha_2=\alpha_3=-1$

故零输入响应

$y_{zi}(t)=(A_1t+A_2)e^{-t}+A_3$

代入 0_+ 状态条件，解得 $A_1=A_2=-1,A_3=1$

故零输入响应 $y_{zi}(t)=(-t-1)e^{-t}+1$

七. 求下列各个函数 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 的卷积 $x_1(t)*x_2(t)$：

(1) $x_1(t)=u(t),x_2(t)=e^{-at}u(t)$

(2) $x_1(t)=\delta(t),x_2(t)=\cos(\omega t+45°)$

(3) $x_1(t)=(1+t)\left[u(t)-u(t-1)\right],x_2(t)=u(t-1)-u(t-2)$

(4) $x_1(t)=\cos(\omega t),x_2(t)=\delta(t+1)-\delta(t-1)$

(5) $x_1(t)=e^{-at}u(t),x_2(t)=(\sin t)u(t)$

解：

$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$

$(1)x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$

$$=\begin{cases}0 \ t<0\\ \frac{1}{a}-\frac{1}{a}e^{-at} \ t\geq 0\end{cases}$$

$(2)x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)cos(w(t-\tau)+45°)d\tau$

$=cos(wt+45°)$

$(3)x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau)[u(\tau)-u(\tau-1)][u(t-\tau-1)-u(t-\tau-2)]d\tau$

当 $0\leq\tau<1$ 并且 $t-1\leq\tau<t-2$ 时，卷积才不为 0，故卷积结果如下：

$$=\begin{cases}0 \ t<1\text{或者}t>3\\ \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2} \ 1\leq t<2\\ -\frac{1}{2}t^2+t+\frac{3}{2} \ 2\leq t\leq 3\end{cases}$$

$(4) x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} cos(w\tau)[\delta(t-\tau+1) - \delta(t-\tau-1)]d\tau$
$= cos(w(t+1)) - cos(w(t-1))$

$(5) x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau)sin(t-\tau)u(t-\tau)d\tau$
$$= \begin{cases} 0 \ t < 0 \\ \frac{e^{-at} - cost + asint}{1+a^2} \ t \geq 0 \end{cases}$$

八. 设 $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$ 和 $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$，计算下列各卷积:

(1) $y_1[n] = x[n] * h[n]$
(2) $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$
(3) $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

解:

$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

$(1) y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\delta[k]+2\delta[k-1]-\delta[k-3])(2\delta[n-k+1]+2\delta[n-k-1])$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}(2\delta[k]\delta[n-k+1] + 2\delta[k]\delta[n-k-1] + 4\delta[k-1]\delta[n-k+1]$

$+4\delta[k-1]\delta[n-k-1] - 2\delta[k-3]\delta[n-k+1] - 2\delta[k-3]\delta[n-k-1])$

$= -2\delta[n-4] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n] + 2\delta[n+1]$

$$= \begin{cases} -2 \ n = 4 \\ 2 \ n = 1, 2, -1 \\ 4 \ n = 0 \\ 0 \ \text{其他} \end{cases}$$

$(2) y_2[n] = y_1[n+2]$

$= -2\delta[n-2] + 2\delta[n] + 2\delta[n+1] + 4\delta[n+2] + 2\delta[n+3]$

$= \begin{cases} -2 \ n = 2 \\ 2 \ n = -3, 0, -1 \\ 4 \ n = -2 \\ 0 \ 其他 \end{cases}$

(3)

$y_3[n] = \begin{cases} -2 \ n = 6 \\ 2 \ n = 3, 1, 4 \\ 4 \ n = 2 \\ 0 \ 其他 \end{cases}$

九. 已知输入 $x[n]$ 和单位脉冲响应为 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$，$h[n] = u[n+2]$，求输出 $y[n] = x[n] * h[n]$，并画出 $y[n]$。

解：

本题绘图见最后一页附录 C

$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

故 $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{k-2} u[k-2]u[n-k+2]$

$= \sum_{k=2}^{n+2} (\frac{1}{2})^{k-2}$

$= 2 - (\frac{1}{2})^n (n \in N)$

当 $n \in N_-$ 时，$x[n] * h[n] = 0$

十. 考虑如图2所示的两个系统 S_1 和 S_2 的级联，其中 S_1 为因果 LTI，$\omega[n] = \frac{1}{2}\omega[n-1] + x[n]$，$S_2$ 为因果 LTI，$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta\omega[n]$。$x[n]$ 与 $y[n]$ 的关系由下面的差分方程给出：$y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n]$。

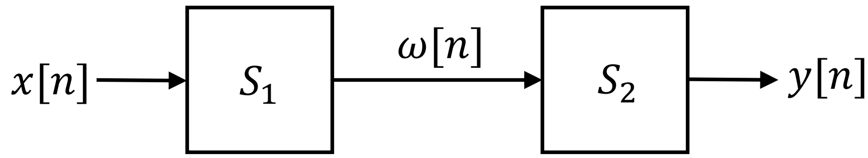

Figure 2: 系统 S_1 和 S_2 的级联

(1) 求 α 和 β

(2) 给出 S_1 和 S_2 级联后的单位脉冲响应

解：

(1) $y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n]$
$\rightarrow y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] + x[n]$
$\rightarrow (y[n] - \frac{1}{4}y[n-1]) - \frac{1}{2}(y[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2]) = x[n]$

考虑两个系统有 $w[n]-\frac{1}{2}w[n-1] = x[n]$ 和 $y[n]-\alpha y[n-1] = \beta w[n]$
故 $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = 1$

(2) 单位脉冲响应为两个系统的单位脉冲响应的卷积，故分别计算 S_1, S_2 的单位脉冲响应
对于 S_1，有 $h_1[n] = \frac{1}{2}h_1[n-1] + \delta[n]$
用递推法求解

$$h_1[0] - \frac{1}{2}h_1[-1] = 1$$

$$h_1[1] = \frac{1}{2}h_1[0]$$

$$\dots$$

解得 $h_1[n] = (\frac{1}{2})^n u(n)$

对于 S_2，有 $h_2[n]=-\frac{1}{8}h_2[n-2]+\frac{3}{4}h_2[n-1]+\delta[n]$
类似的可以用递推法解得 $h_2[n]=(\frac{1}{4})^n u(n)$
故级联后的单位脉冲响应为:
$h_1[n]*h_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_1[k]h_2[n-k]$
$=\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2})^{2n-k}=[2(\frac{1}{4})^n-(\frac{1}{8})^n]u(n)$

A 第一题图片

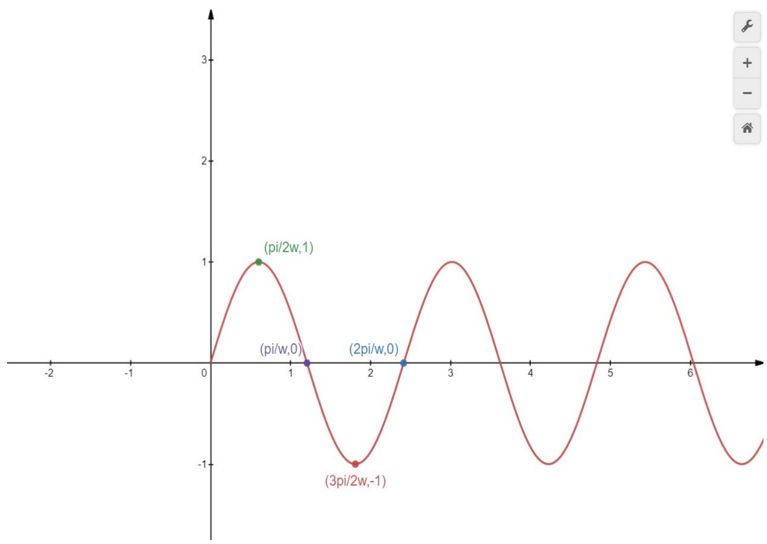

Figure 3: 第 (1) 问

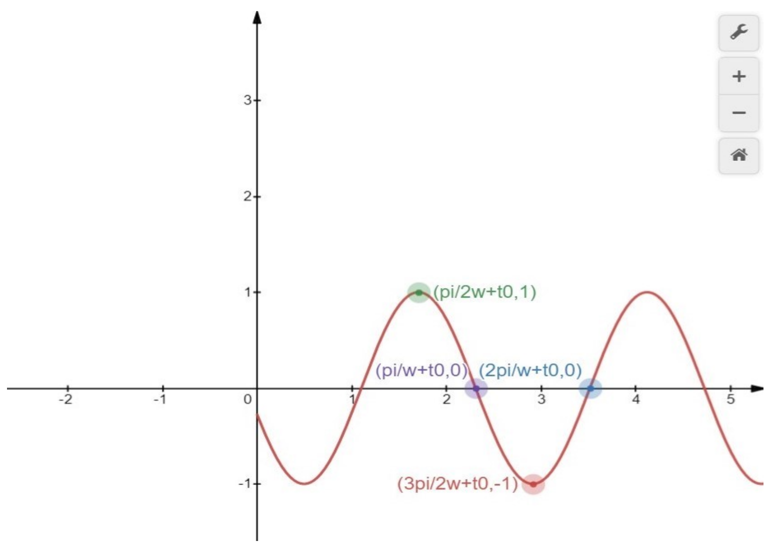

Figure 4: 第 (2) 问

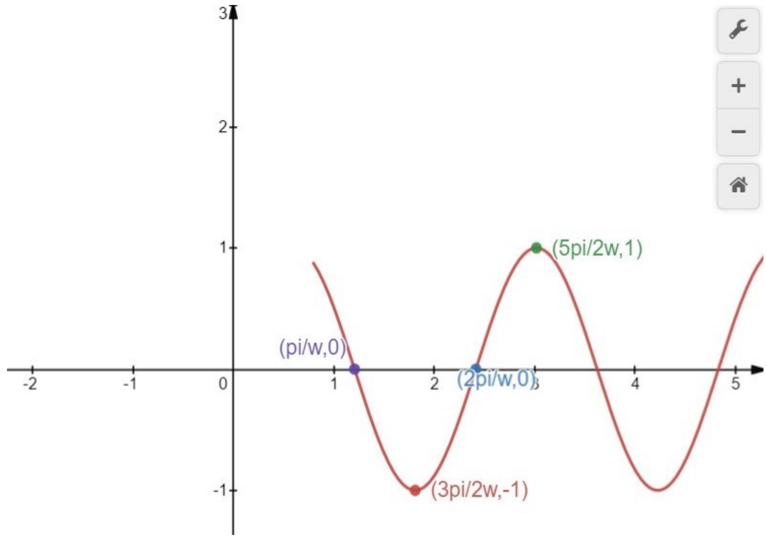

Figure 5: 第 (3) 问

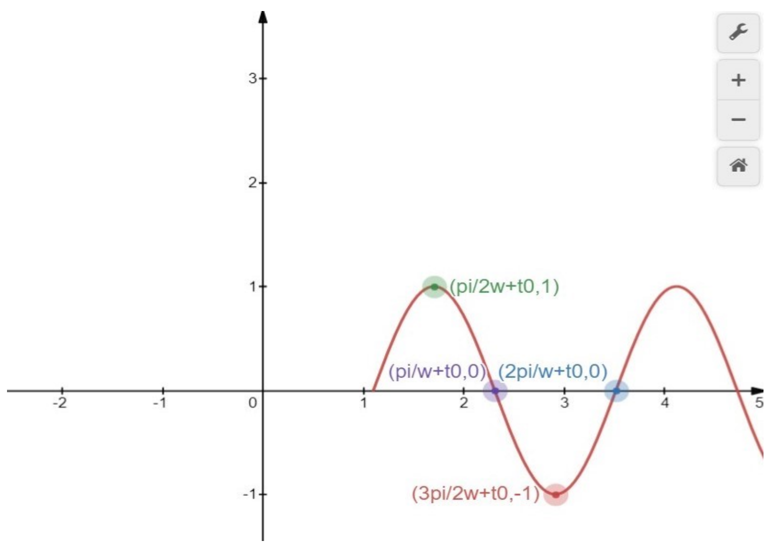

Figure 6: 第 (4) 问

B 第二题图片

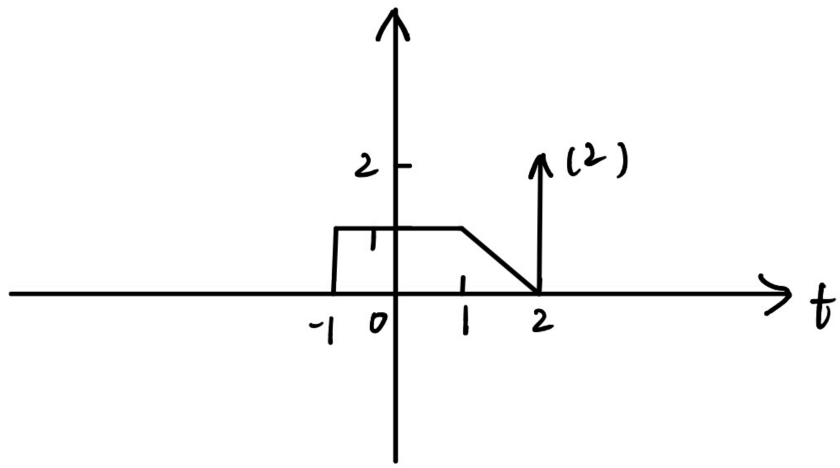

Figure 7: 第二题

C 第九题图片

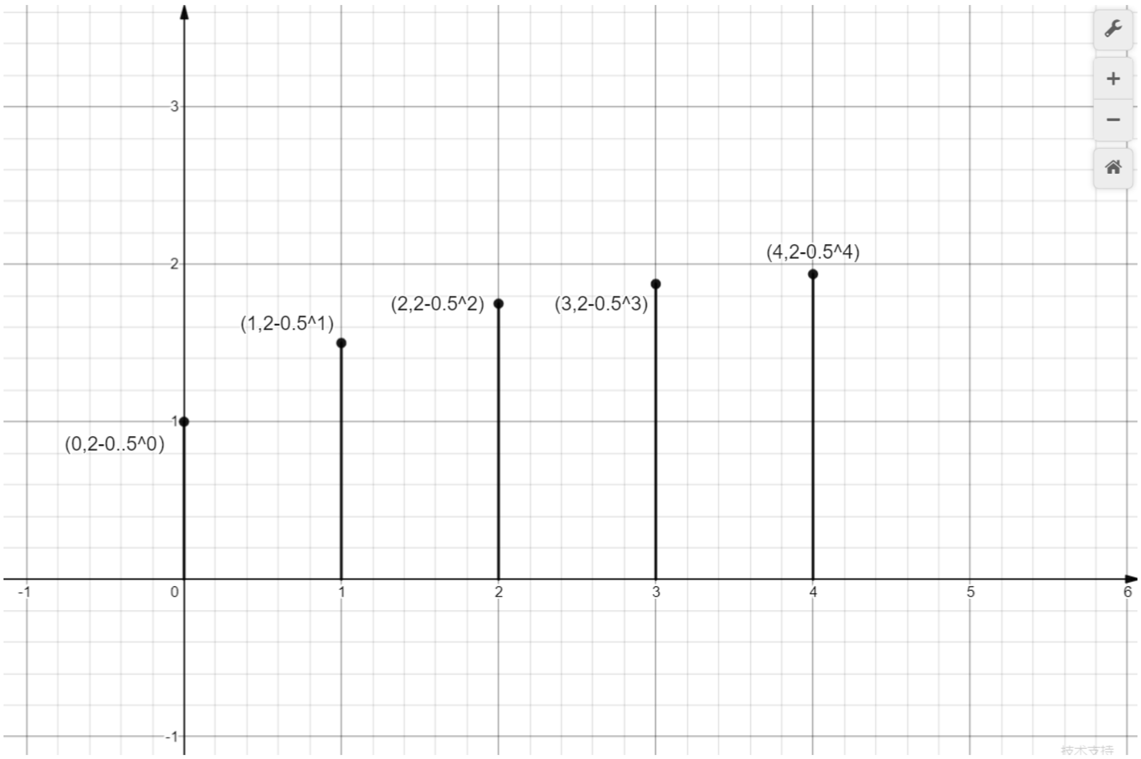

Figure 8: 第九题