物理中的微元法及微分思想

左之睿

【摘要】在物理中，微分方程在求解问题时可谓是相当常用，而其正是微元法在数学上的体现。

【关键词】微元法、微分方程

在日常的物理学习中，遇到各类物理问题时，直接分析整体可能会有较大的麻烦甚至连分析都难以进行，此时先从局部出发，研究整个体系某一部分的特征，然后再对其加以推广，得到整体的某种特性可能会是更好的解决办法。这种通过分析体系微小部分或者微小物理过程的方法就称为微元法。这种方法在物理中应用极为广泛。

1 微元法的基础

1.1 数学处理

之所以对一个微小量进行讨论，我们的目的常常是要研究其对于整个体系所作出的贡献。比如计算一个边长为 x 的立方体的密度，在不讨论微元时我们有 $\rho=m/x^3$，而边长改变 dx 时则有 $\rho+d\rho=m/(x+dx)^3=\rho/(1+dx/x)^3$，注意到此时 dx/x 远远小于 1，所以问题就可以转变为对函数 $f(t)=1/(1+t)^3=1/(1+3t+3t^2+t^3)$ 的处理，其中 $t=dx/x$，忽略高阶小项，可得 $f(t)=1-3t$，回代该结果，有 $d\rho=-3(dx/x)*\rho$，就得到了立方体密度随长度的变化。此处的处理使用了二项式展开，实际操作时可能并非如此简单，通常我们使用 Taylor 公式将函数展开成多项式再进行处理。

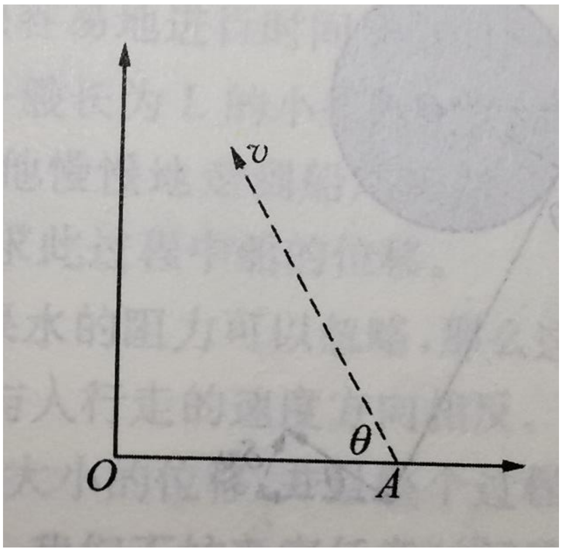
1.2 微小物理过程

除了通过对微小量的讨论得知整个体系的变化，微元法也可以应用于对短时间内发生的物理过程的讨论，研究问题时，在某一时间段内被研究的物理量可能一直处于变化中，而对其中某个微小的过程研究时则可以得知其微小变化的规律，进而对整个时间段内其变化规律进行更好的分析。这种对于微小物理过程的分析，不仅在运动学中有较多的应用，在热学、电学中同样发挥着重要的作用。

2 应用举例

2.1 运动学分析示例

如图所示，质点 1 从 A 出发，沿如图直线以 v 匀速运动，质点 2 从 O 出发，速率为 u，方向一直指向质点 1。OA=d，求二者相遇所需时间和 u 要满足的条件。



初看此题可能会较难入手，因为质点 2 的运动方向时刻在发生改变.此时取质点 1 参考系进行探讨，在质点 1 参考系中，不妨设质点 2 在任意位置的速度由与 x 轴夹角为 θ 的 v 和始终朝向 A 的速度 u(设其与 x 轴夹角为 φ)组成。从某点开始的一段短时间 dt 内，质点 2 在平行于 v 的方向上运动了 $dx1=vdt+u\cos(\theta+\phi)dt$，同时与 A 点距离缩短了 $dx2=udt+v\cos(\theta+\phi)dt$。而在追及的全过程中，我们有方程 $\sum dx1=vt+u\sum\cos(\theta+\phi)dt=d\cos\theta$

$\sum dx2=ut+v\sum\cos(\theta+\phi)dt=d$，联立可解得 t=……。

而需要 u 所满足的条件可从 t 的表达式中得出，即 $u>v$，至此，这个问题就算是结束了。可见，微元法在运动学上给我们带来的便利是巨大的。

2.2 热学分析示例

除了运动学，微元法在热学上也同样发挥着不可忽视的作用。我们再看一道题目：一个卡诺热机工作于两个相同的金属块之间，我们知道他对外做功会存在某个最大值，我们设两金属块热容均为 C，初温分别

为 T_1，T_2（$T_1 > T_2$），求此最大功。

在卡诺机的工作过程中，高温和低温热源的温度一直在发生变化。因此，我们讨论其中的某个微小过程来考察吸热放热、做功以及温度变化之间的关系。

在任意一个时刻，设高温热源为 t_1，低温热源 t_2，热机吸热 dq_1，放热 dq_2，做功 dw，可列出如下方程：$dq_1=-Cdt_1$，$dq_2=Cdt_2$，由卡诺定理，可得 $dt_2/t_2=-dt_1/t_1$，即 $t_1dt_2+t_2dt_1=d(t_1t_2)=0$，由此可知温度之积始终为常量。设末态温度均为 T，则 $T^2=T_1T_2$，$T=\sqrt{T_1T_2}$.

由卡诺定理，$dw/dq_1=1-t_2/t_1$，

$$dw=dq_1(1-T_1T_2/t_1^2)=Cdt_1(1-T_1T_2/t_1^2)$$

积分，得

$W=-\int Cdt_1(1-T_1T_2/t_1^2)$，积分上限为 T，下限为 T_1，最终求得 $W=C(T_1+T_2-2\sqrt{T_1T_2})$

3 总结

结合以上两个例题，不难发现，在很多直接考虑整体过程较为复杂的物理问题中，使用微元法对其中某个微小过程进行分析，最终再对整体得出结论是一个卓有成效的办法。在物理学习的过程中，倘若能对微元法及其蕴含的微分思想多加以理解、应用，相信会解决更多初看很棘手的物理问题。

参考文献

[1] 王洪年，微元法在物理解题中的应用数例，2012

[2] 王鸿嘉，“小角度近似”方法及其在物理解题中的应用，物理通报，2003