

提醒：请诚信应考，考试违规将带来严重后果！

教务处填写：

2020年1月1日

考试用

# 湖南大学课程考试试卷

课程名称：高等数学 A(1)；课程编码：GE03025；

试卷编号：A；考试形式：闭卷；考试时间：120 分钟。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
应得分	15	56	20	9							100
实得分											
评卷人											

(请在答题纸内作答！)

## 一、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 数列  $\{x_n\}$  有界是数列  $\{x_n\}$  收敛的\_\_\_\_\_ (在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个填入)条件.
2. 函数  $y = \frac{1}{\tan x}$  的间断点是\_\_\_\_\_.
3. 抛物线  $y = x^2$  在其顶点处的曲率半径  $\rho =$ \_\_\_\_\_.
4. 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  的水平渐近线方程为\_\_\_\_\_.
5. 心形线  $r = 1 + \cos \theta$  的全长为\_\_\_\_\_.

## 二、计算题(每小题 8 分，共 56 分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x(1 - \sqrt{1 - x^2})}$ .
2. 设  $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$  确定函数  $y = y(x)$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$ ,  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$ .
3. 求  $f(x) = x \ln(x-1)$  在  $x_0 = 2$  处的带有佩亚诺余项或拉格朗日余项的 3 阶泰勒公式.
4. 求  $\int \frac{2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x} dx$

5. 求  $\int_{-2}^2 \min\{|x|, x^2\} dx$ .

6. 计算  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}} dx$ .

7. 求微分方程  $y'' + y = x - \cos 2x$  的通解.

三、应用题(第一小题 12 分, 第二小题 8 分, 共 20 分)

1. 设抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  经过原点, 当  $0 < x \leq 1$  时,  $y \geq 0$ . 又已知该曲线与直线  $x=1, y=0$  所围平面图形面积为  $\frac{1}{3}$ . 试确定  $a, b, c$ , 使该平面图形绕  $x$  轴旋转一周所生成的旋转体体积最小, 并求出最小值.

2. 一曲线通过点  $(2,3)$ , 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 建立该曲线所对应的微分方程, 并求这条曲线方程.

四、证明题(9 分)

设奇函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(1)=1$ , 证明:

- (1) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 1$ ;  
(2) 存在  $\eta \in (-1, 1)$ , 使得  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ .