

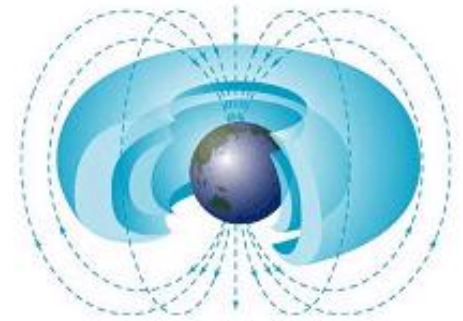
第13章 稳恒电流的磁场

- § 13.1 电流密度矢量 电动势
- § 13.2 磁场
- § 13.3 毕奥—萨伐尔定律
- § 13.4 安培环路定理
- § 13.5 磁场对载流导线的作用力
- § 13.6 带电粒子在电磁场中运动

作业：练习册



司南勺
最早的指南器具



§ 1 电流、电流密度矢量

一. 电流

电流—电荷的定向运动。

载流子—电子、质子、离子、空穴。

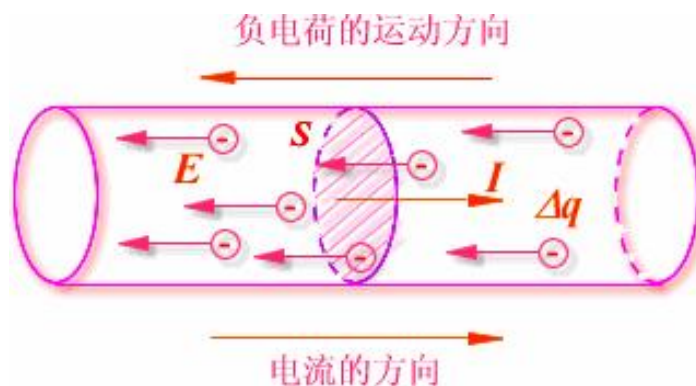
二. 电流强度

单位时间通过导体**某一横截面**的电量。

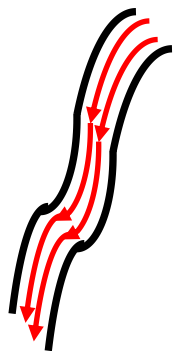
$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

方向：正电荷运动的方向

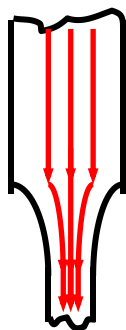
单位：安培 (A)



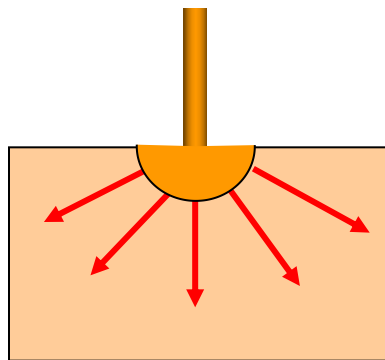
几种典型的电流分布



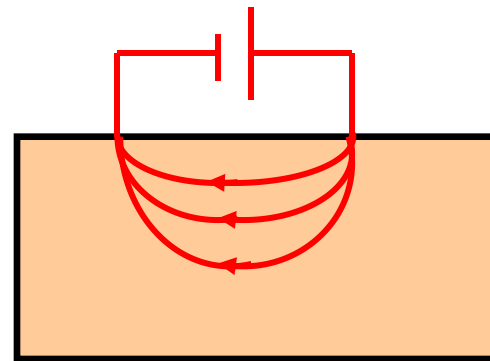
粗细均匀的
金属导体



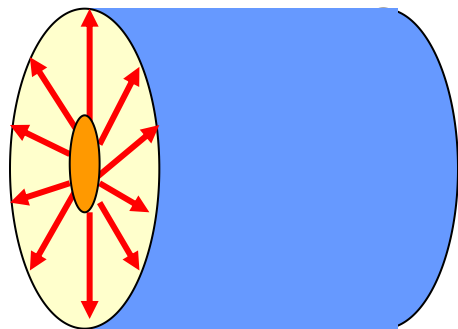
粗细不均匀的
金属导线



半球形接地电极
附近的电流



电阻法勘探矿藏
时的电流



同轴电缆中的
漏电流

电流强度对电流的描述比较粗糙：

如对横截面不等的导体， I 不能反映不同截面处及同一截面不同位置处电流流动的情况。

引入**电流密度矢量**—描写空间各点电流大小和方向的物理量。

三. 电流密度 (Current density)

某点的电流密度

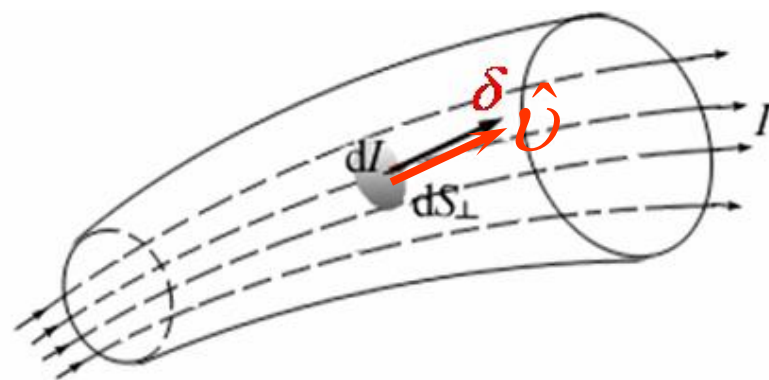
方向：该点正电荷定向运动的方向。

大小：通过垂直于该点正电荷运动方向的单位面积上的电流强度。

$$\delta = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

导体内每一点都有自己的 δ ，

$$\delta = \delta(x, y, z)$$



\hat{u} — P 处正电荷定向移动速度方向上的单位矢量

即导体内存在一个 δ 场 — 称电流场。

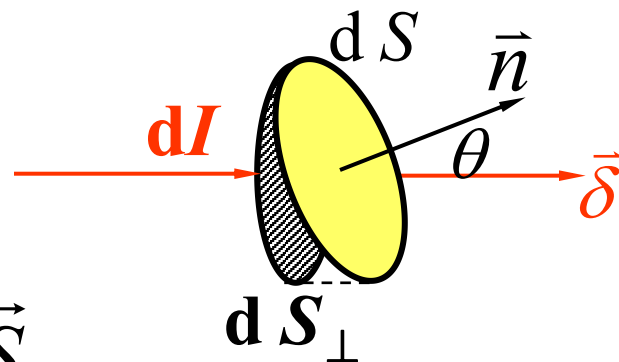
电流线：类似电力线，在电流场中可画电流线。

$$\delta = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

四. 电流密度和电流强度的关系

(1) 通过面元 dS 的电流强度

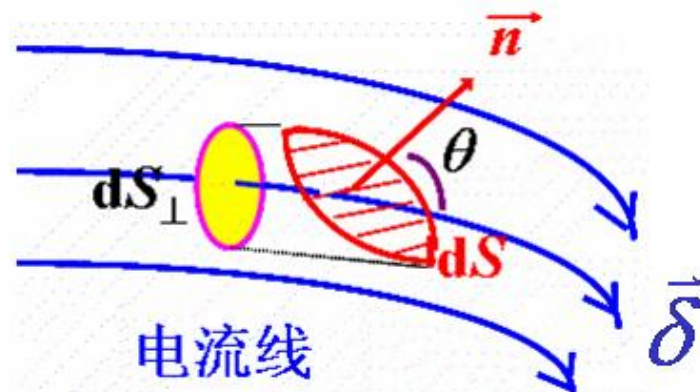
$$dI = \delta dS_{\perp} = \delta dS \cos \theta = \vec{\delta} \cdot d\vec{S}$$



(2) 通过电流场中任一面积 S 的电流强度

$$I = \iint_S \vec{\delta} \cdot d\vec{S}$$

电流强度是通过某一面积的电流密度的通量



电荷的运动可形成电流，也可引起空间电荷分布的变化

在电流场内取一闭合面 S ，当有电荷从 S 面流入和流出时，则 S 面内的电荷相应发生变化。

由电荷守恒定律，单位时间内由 S 流出的净电量应等于 S 内电量的减少

$$\oiint_S \vec{\delta} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_{\text{内}}}{dt}$$

——电流连续性方程

恒定电流情况下，电荷分布不随时间变化

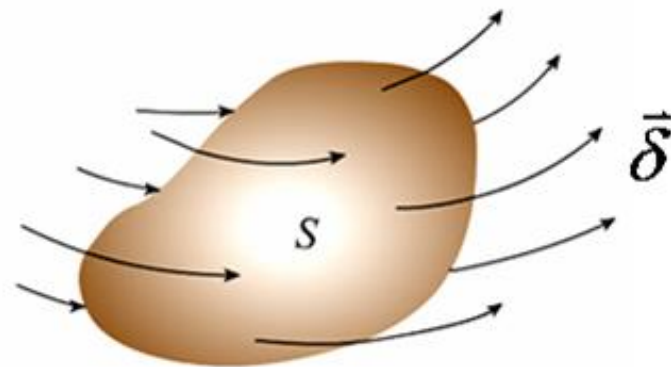
$$\frac{dq_{\text{内}}}{dt} = 0$$

五、恒定（稳恒）电流条件：

$$\oiint_S \vec{\delta} \cdot d\vec{S} = 0$$

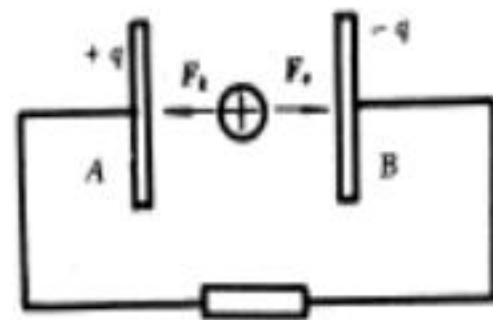
即电流是闭合的，电流线是闭合曲线。

稳恒电流必须形成闭合回路。



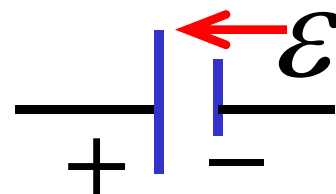
六. 电动势

产生持续的稳恒电流不能单靠静电场，必须有非静电力把正电荷从负极搬到正极。



1. 电源：是一种提供非静电力的装置

2. 电动势：把单位正电荷从负极板经电源内部搬至正极板，电源非静电力做的功。



$$\mathcal{E} = \int_{-in}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

标量

内电路

非静电场强：

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_k}{q}$$

非静电力

\mathcal{E} 大小与电源结构有关，与外电路无关。

七. 欧姆定律的微分形式

在导体的电流场中设想
取出一小圆柱体（长 $d\mathbf{l}$
、横截面 $d\mathbf{S}$ ）

由欧姆定律

$$dU = dI \cdot R$$

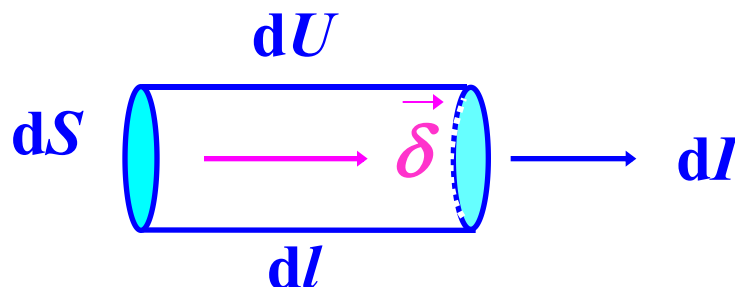
$$Edl = \delta dS \cdot (\rho dl / dS)$$

$$\delta = (1/\rho)E$$

$$\delta = \sigma E$$

$$\text{电导率: } \sigma = 1/\rho$$

dU —小柱体两端的电压
 dI —小柱体中的电流强度



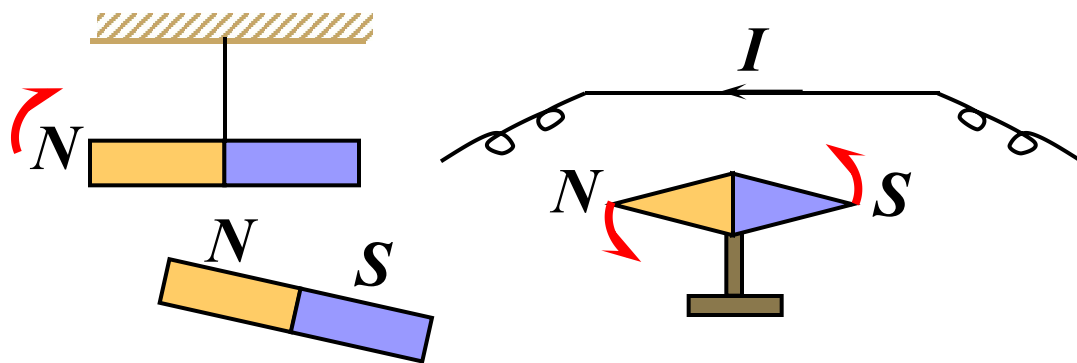
导体中任一点电流密度的
方向(正电荷运动方向)和
该点场强方向相同, 有

$$\vec{\delta} = \sigma \vec{E}$$

欧姆定律的
微分形式

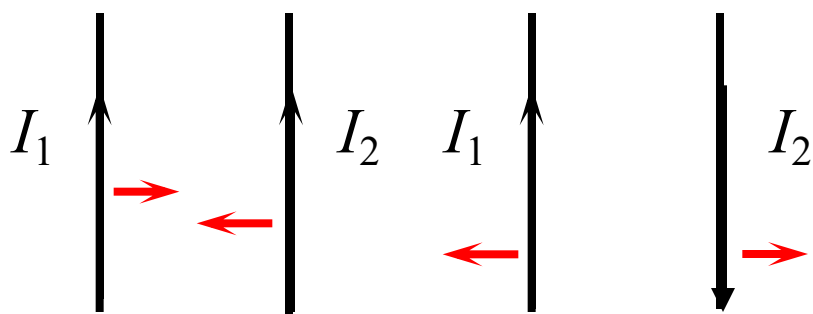
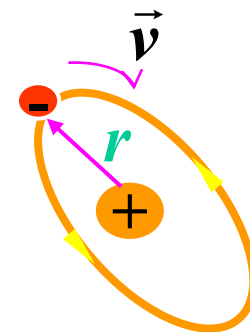
§ 2 磁场 磁场的高斯定律

基本磁现象



磁体—磁体
磁体—电流
电流—电流

} 存在磁力



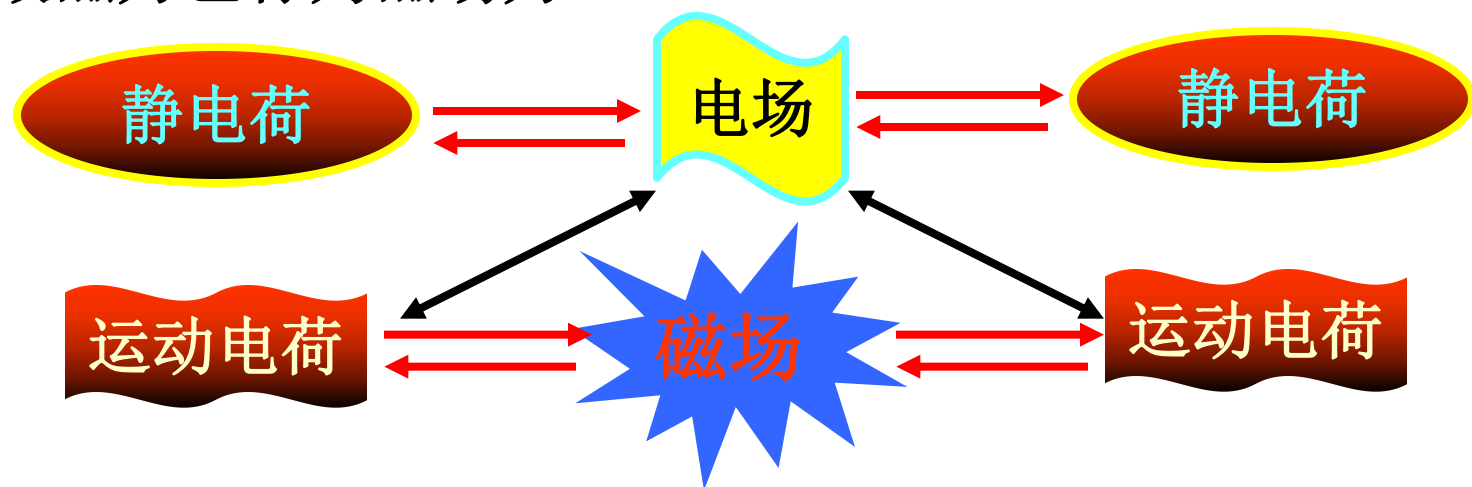
导线中：定向运动的电荷
磁体中：分子电流

磁力是运动电荷间的相互作用。

一. 磁场

任何运动电荷或电流，均在周围空间产生**磁场**。

电流或运动电荷之间相互作用的**磁力**是通过**磁场**而作用的，故磁力也称为磁场力。



磁场对外的重要表现：

- (1) 磁场对引入其中的运动电荷或载流导体有磁力作用。
- (2) 载流导体在磁场中移动时，磁场力对载流导体做功。
- (3) 磁场具有叠加性。

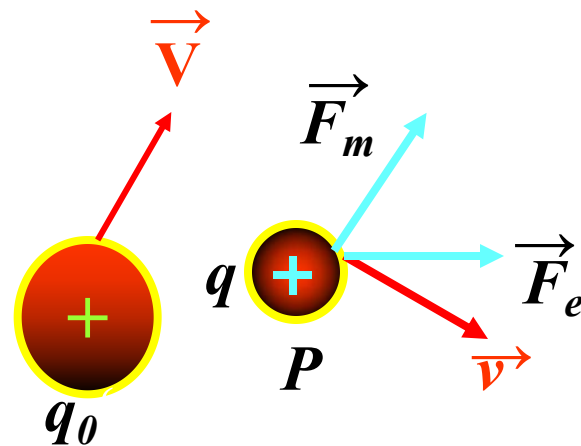
二. 磁感应强度矢量 \vec{B}

磁感应强度 \vec{B} 的地位与电场中的电场强度 \vec{E} 相当。

一运动电荷在另一运动电荷周围既受电场力又受磁力的作用。

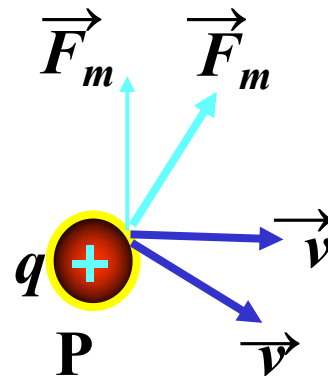
$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad \text{——电场力}$$

q 所受的磁力如何？

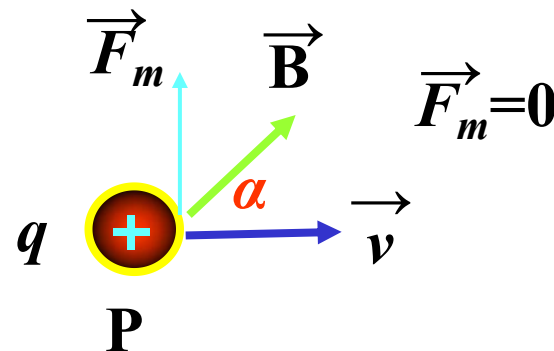


实验结果表明：

(1)当检验电荷以**同一速率 v** 沿**不同方向**通过磁场某点 P 时，电荷 q 所受磁力的大小和方向是不同的，但**磁力的方向**却总是**与电荷运动方向垂直**；



(2)在磁场中的P点处存在着一个**特定的方向**，当电荷沿这特定方向（或其反方向）运动时，**磁力为零**，可以定义这特定方向（或其反方向）为**P点磁场方向**。



(3)设P点磁场方向与检验电荷运动方向的夹角为 α ，实验发现磁力 F_m 正比于 $q v_{\perp}$ ，比值 $F_m / (q v_{\perp})$ 是个常量。

定义矢量函数

磁感应强度：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{大小: } B = \frac{F_m}{qv_{\perp}} = \frac{F_m}{qv \sin \alpha} \\ \text{方向: 磁力为零的方向} \end{array} \right.$$

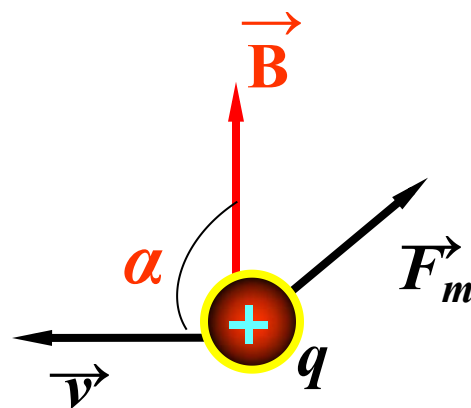
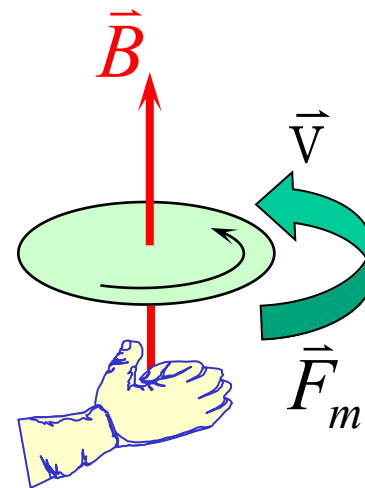
磁感应强度：
$$B = \frac{F_m}{qv_{\perp}} = \frac{F_m}{qv \sin \alpha}$$

单位 (SI): 特斯拉

1特斯拉 = 1牛顿 · 秒/ 库仑 · 米

\vec{B} 的方向:

由正电荷所受力的方向出发, 按右手螺旋法则, 沿小于 π 的角度转向正电荷运动速度 \vec{v} 的方向, 这时螺旋前进的方向便是该点 \vec{B} 的方向。



三.磁场的高斯定理（磁通连续原理）

静电场中，高斯定理： $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q$ 环路定理： $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

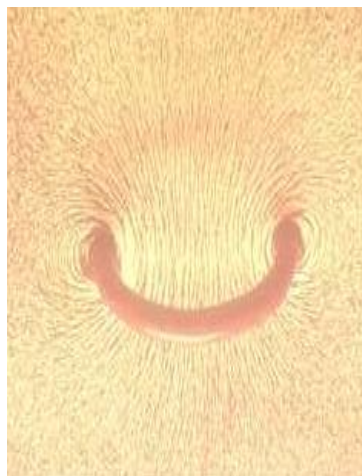
静电场的**电力线**发自正电荷止于负电荷，**有头有尾，不闭合**。

为形象描述磁场分布情况,用一些假想的**有方向的闭合曲线**——磁感应线代表磁场的强弱和方向。

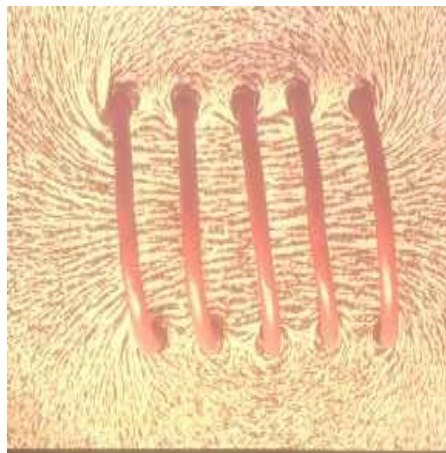
各种典型的磁感应线(磁力线)的分布:



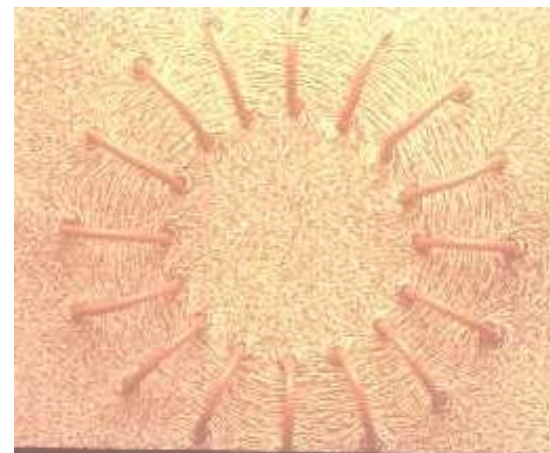
直线电流的
磁感线



圆形电流的
磁感线



直螺线管电流
的磁感线



环形螺线管电
流的磁感线

电通量 → 磁通量 类比法

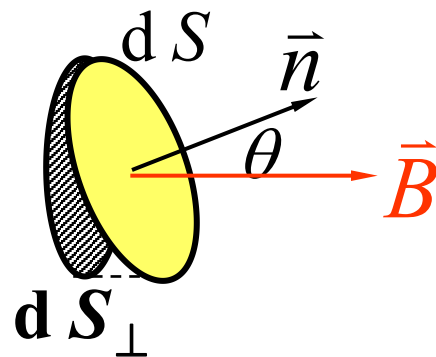
用磁力线的疏密表示磁场的强弱，磁力线的切线方向表示磁场的方向。

\vec{B} 可以看成是单位面积上的磁通量。

磁通量： 穿过磁场中任一给定曲面的磁感线总数。

单位： 韦伯——Wb;
 $1\text{Wb}=1\text{T} \times \text{m}^2$

通过任意 dS 面的磁通量



$$d\Phi_B = B dS_{\perp} = B dS \cos \theta = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

通过任意 S 面的磁通量

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

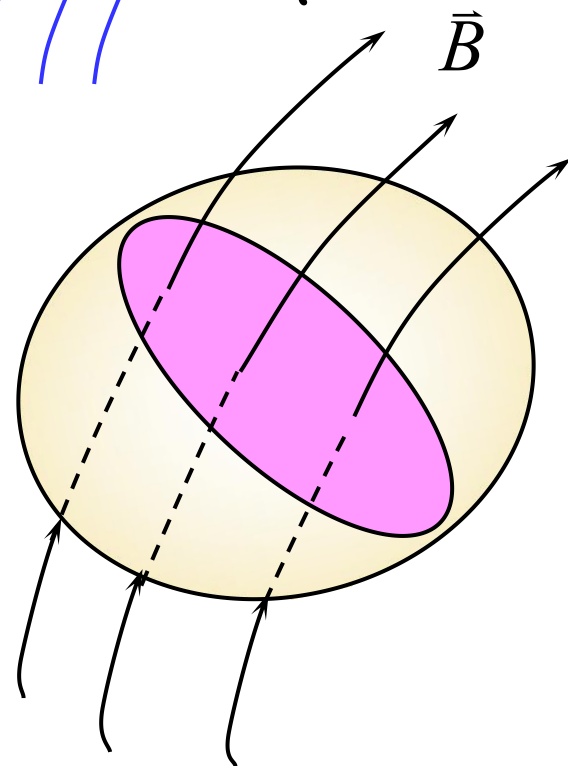
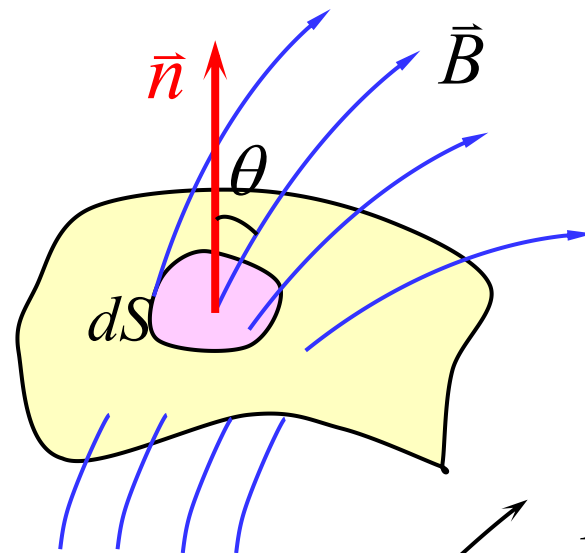
磁力线是无头无尾的**闭合**曲线。

通过任意封闭曲面的磁通量等于零。

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

——**磁场的高斯定律**

磁场是无源场。



§ 3 毕奥—萨伐尔定律

一、表述：电流元 $I d\vec{l}$ 在空间 P 点产生的磁场 $d\vec{B}$ 为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 C^2} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad \text{—真空磁导率}$$

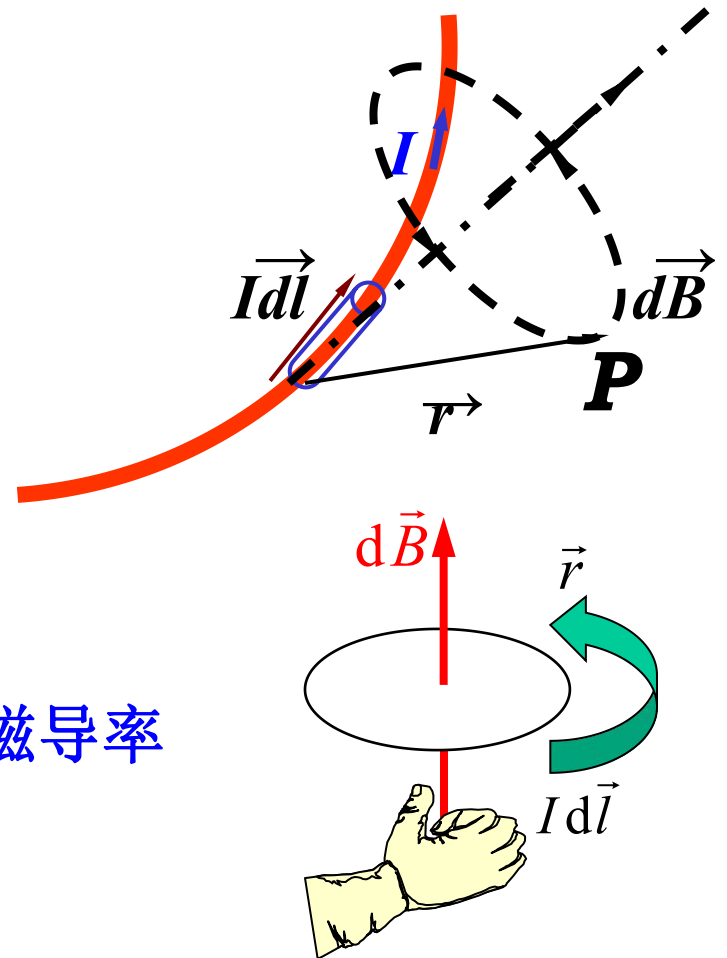
磁场方向满足右手螺旋法则：

根据叠加原理，可求出任一电流产生的磁场分布

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}$$

一般

$$B \neq \int dB$$



注意

(1) 毕奥—萨伐尔定律不是直接从实验中总结出来的规律，而是根据电流产生磁场的实验数据间接概括出来的。

(2) 电流元不能在它自身方向上激发磁场。

(3) 电流元的磁场的磁感应线都是圆心在电流元轴线上的同心圆，通过任何封闭曲面的磁通量都等于零。

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{——磁通连续定理}$$

或磁场高斯定律

二. 毕奥—萨伐尔定律的应用

解题步骤:

1. 将电流分成电流元 $\rightarrow I d\vec{l}$

然后, 从毕奥—萨伐尔定律求出 $d\vec{B}$

2. 从 $\vec{B} = \int_L d\vec{B}$ 求解, 因各电流元产生的 $d\vec{B}$ 方向不一定相同, 要将矢量积分化成标量积分, 便于求解;

建立适当的坐标系, 求出 $d\vec{B}$ 的分量式 dB_x, dB_y, dB_z ;

3. $B_x = \int dB_x, B_y = \int dB_y, B_z = \int dB_z$;

$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ 指明 \vec{B} 的方向。

或者用矢量式表示 $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$

例13.1 求直线电流的磁场. (真空中直线段长 L , 电流为 I , 求距直线为 a 处 P 点的磁感应强度)

解:
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

因各电流元产生的磁场方向相同, 磁场方向垂直纸面向里, 故只求标量积分。

$$B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

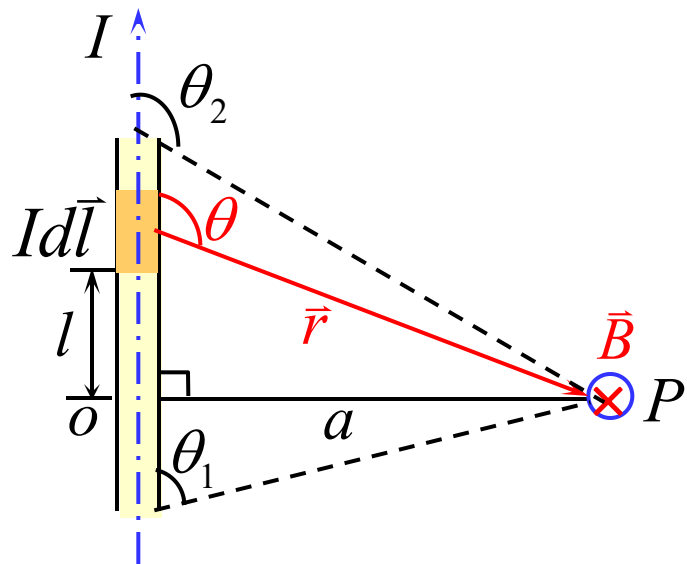
$$r = a / \sin \theta$$

由几何关系有:

$$l = -a \operatorname{ctg} \theta \quad dl = a \csc^2 \theta d\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \csc^2 \theta \sin \theta d\theta}{a^2 \csc^2 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{a} \sin \theta d\theta$$

$$B = \int_L dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$



讨论

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

1. 导线无限长,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

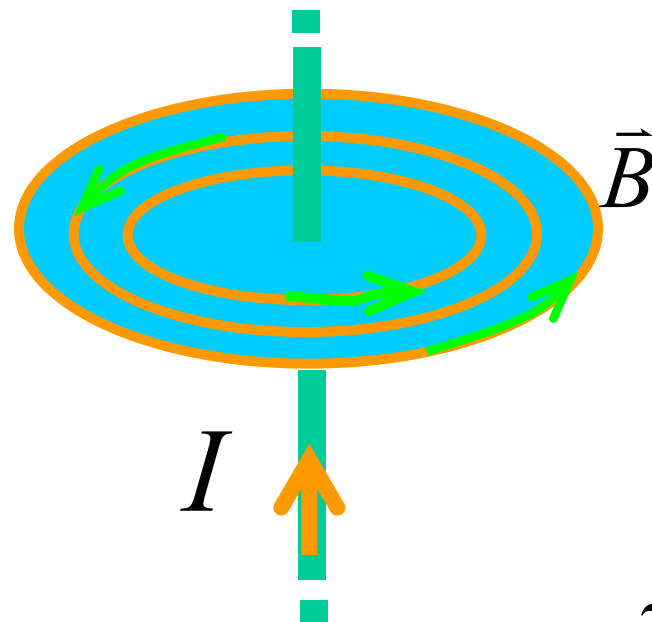
2. 半无限长,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

3. 在电流延长线上,

$$B = 0$$

磁感应强度 \vec{B} 的方向，
与电流成右手螺旋关系，
拇指表示电流方向，四指
给出磁场方向。

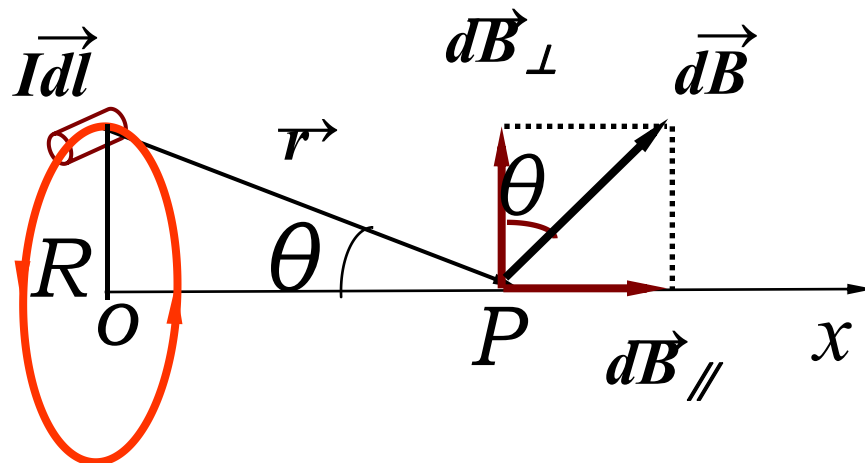


例13.2 一圆形载流导线，电流强度为 I ，半径为 R 。求圆形导线轴线上磁场的分布。

解：取电流元 $I d\vec{l}$

在场点 P 的磁感强度为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$



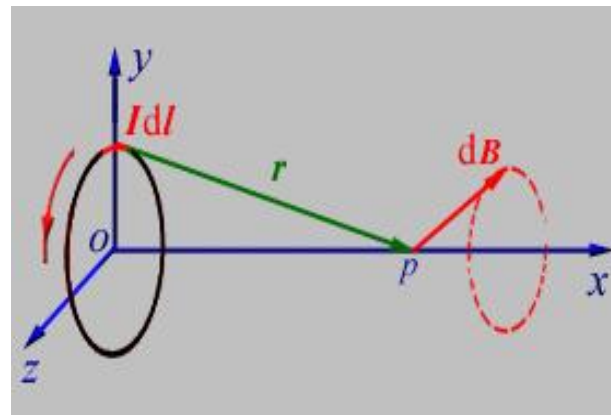
各电流元磁场方向不同，分解成 $d\vec{B}_\perp, d\vec{B}_\parallel$

因圆电流具有对称性，其电流元的 $d\vec{B}_\perp$ 逐对抵消，P点的磁感应强度大小为：

$$B = \int_L dB_\parallel = \int_L dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I dl}{r^2} \sin \theta$$

$$= \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

方向：沿 x 轴正方向。



讨论

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

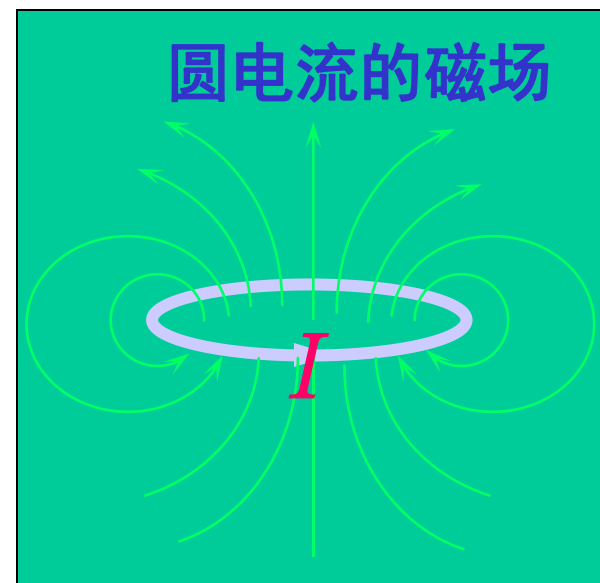
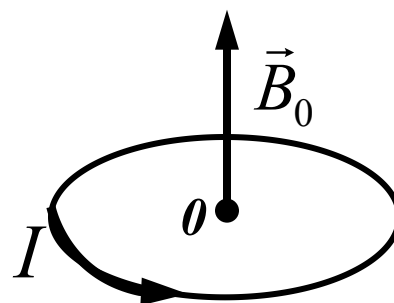
1. 当线圈由 N 匝绕成时，则磁场加强 N 倍；

2. 在圆心处, $x = 0$.

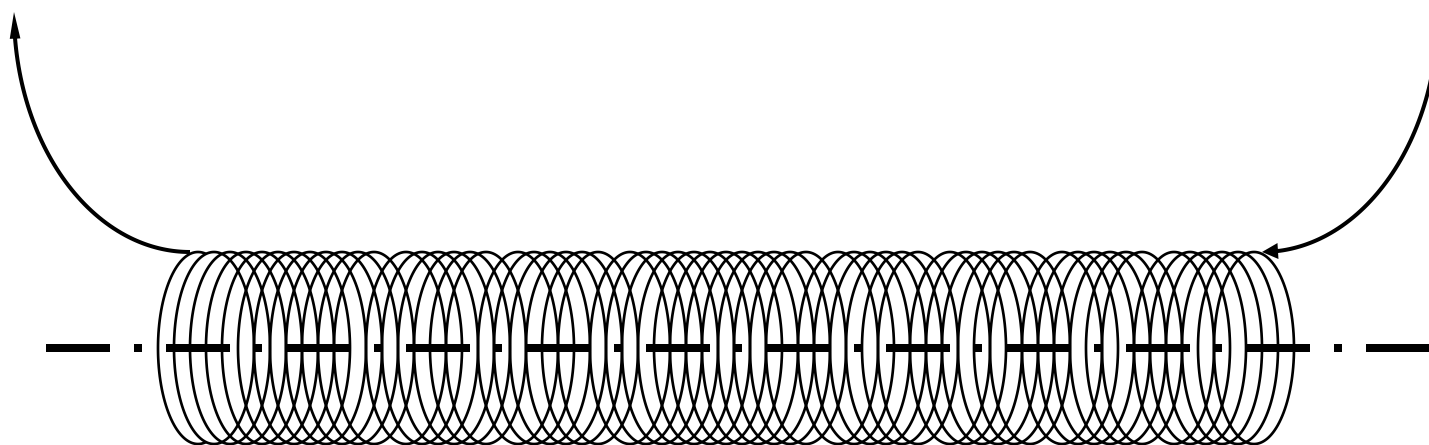
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

3. 若, $x \gg R$. 即轴上离圆心很远处

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2x^3} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi x^3}$$



例13.3 如图所示是一均匀密绕螺线管，管的长度为 L ，半径为 R ，单位长度上绕有 n 匝线圈，通有电流 I 。求螺线管轴线上的磁场。



解：宽为 dl 的圆电流 $dI = nI dl$, 在 P 处产生的磁场

$$dB = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$l = R \cot \theta,$$

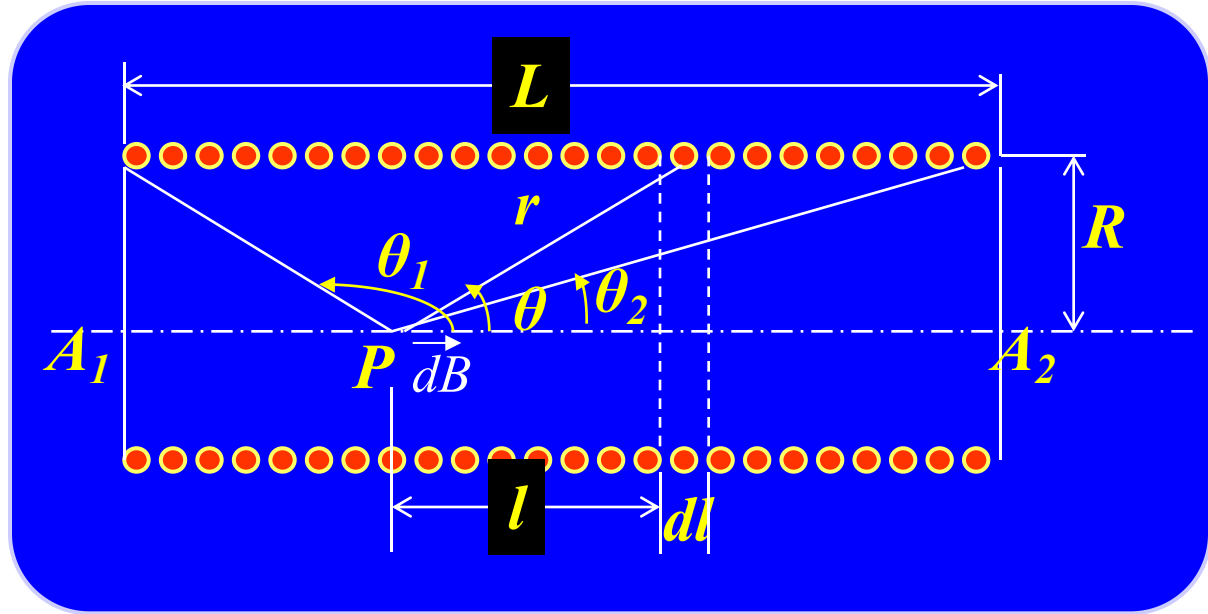
$$dl = -R \csc^2 \theta d\theta,$$

$$r^2 = R^2 + l^2$$

$$= R^2 (1 + \cot^2 \theta) = R^2 \csc^2 \theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 R^2 nI \cdot (-R \csc^2 \theta) d\theta}{2R^2 \csc^3 \theta} = \frac{\mu_0 nI}{2} (-\sin \theta) d\theta$$

$$B = \int_L dB = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\frac{\mu_0 nI}{2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 nI}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$



$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

讨论

1. 当管子“无限长”时, $\theta_1 \rightarrow \pi$, $\theta_2 \rightarrow 0$

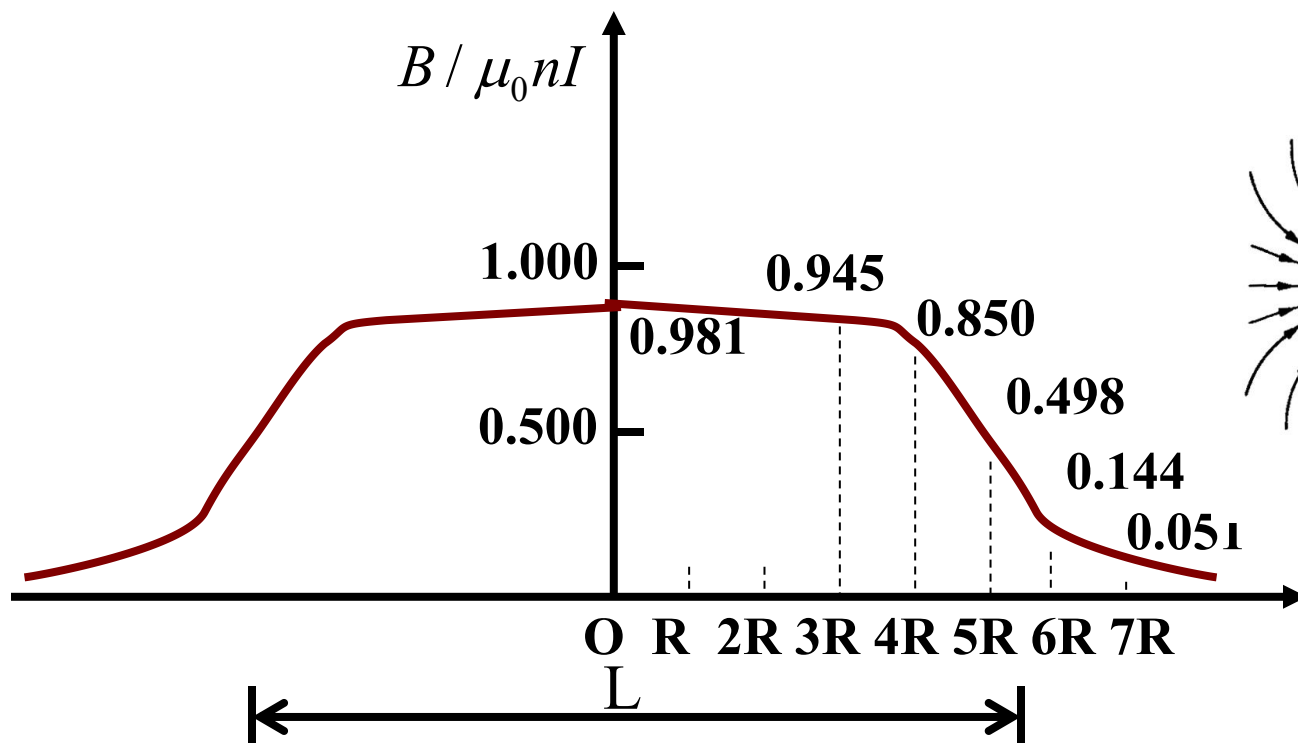
$$B = \mu_0 n I$$

2. 管子端点处, 如左端点, $\theta_1 \rightarrow \pi/2$; $\theta_2 \rightarrow 0$

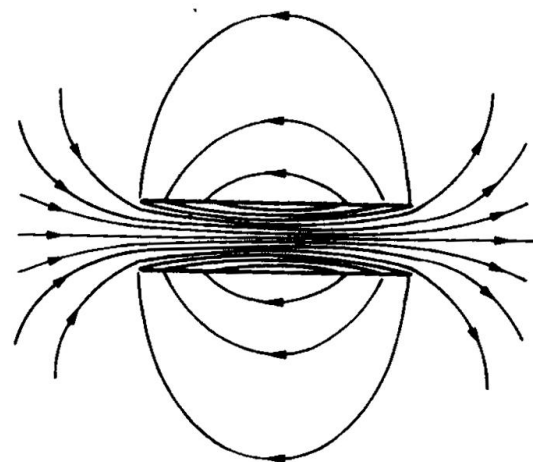
$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}$$

14-1 亥姆霍兹线圈磁场分布

载流直螺线管轴线上的磁场分布



载流直螺线管磁感应线分布示意图



§ 4 安培环路定理

静电场：

高斯定理： $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q$

环路定理： $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

静电场的电力线发自正电荷止于负电荷，
有头有尾，不闭合。

磁场的高斯定理 $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

在恒定电流的磁场中，磁感应
强度 B 矢量沿任一闭合路径 L 的
线积分（即环路积分），等于什么？

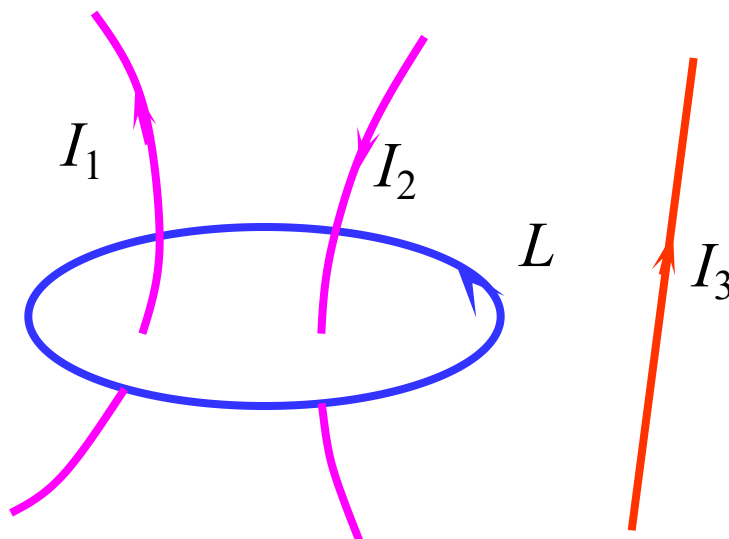
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = ?$$

一. 安培环路定理

在稳恒电流的磁场中，磁感应强度 \mathbf{B} 矢量沿任一闭合路径 L 的线积分（即环流），等于该路径 L 所包围的各电流强度的代数和的 μ_0 倍。

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L\text{内})} I_i$$

——安培环路定理



$$\sum_{(L\text{内})} I_i = I_1 - I_2$$

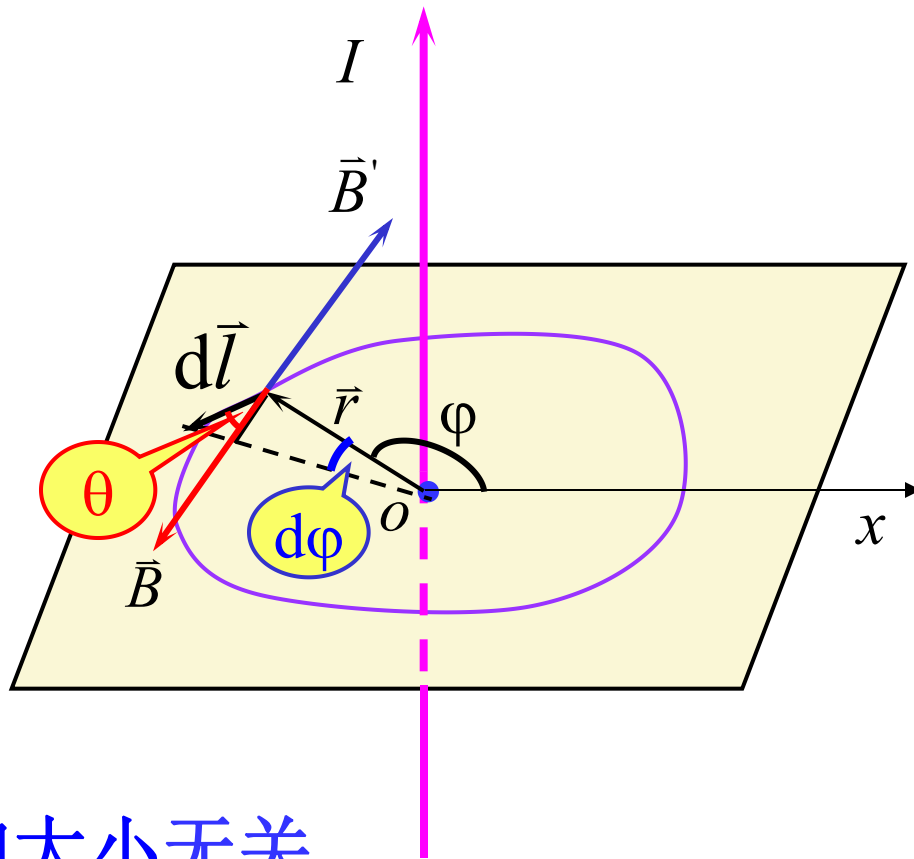
注意电流方向的规定！

1. 在无限长直线电流磁场中

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos \theta dl = ?$$

$$dl \cos \theta = r d\varphi$$

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r \cdot d\varphi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \mu_0 I \end{aligned}$$



该结果与回路的形状和大小无关.

若电流 I 反向, 或电流不变磁场反向, 则有

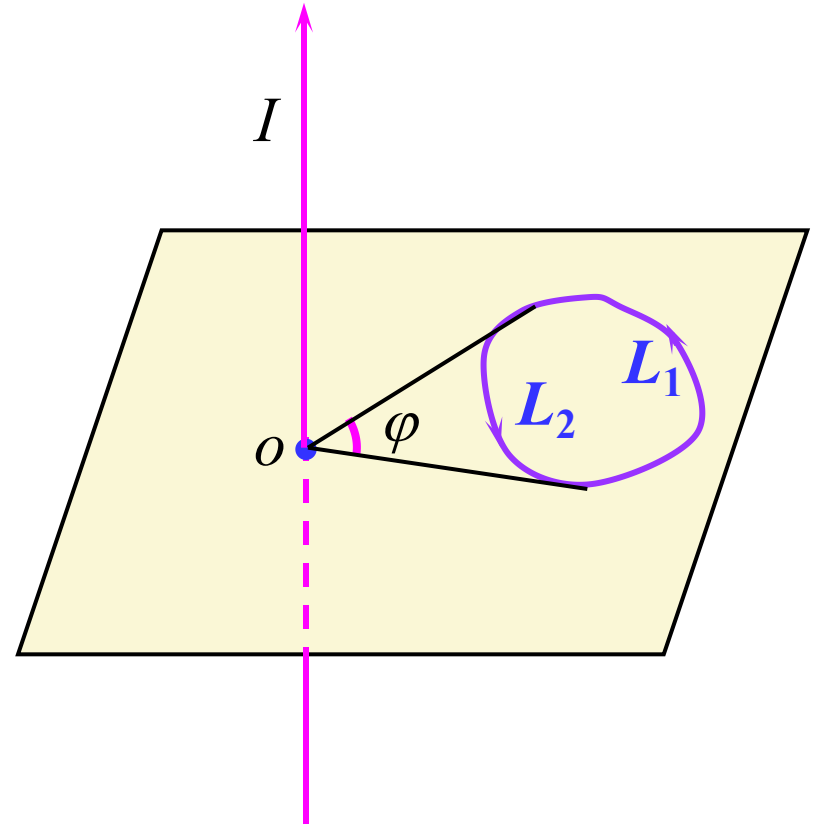
$$\oint_L \vec{B}' \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$$

2. 如果回路不包围电流呢？

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

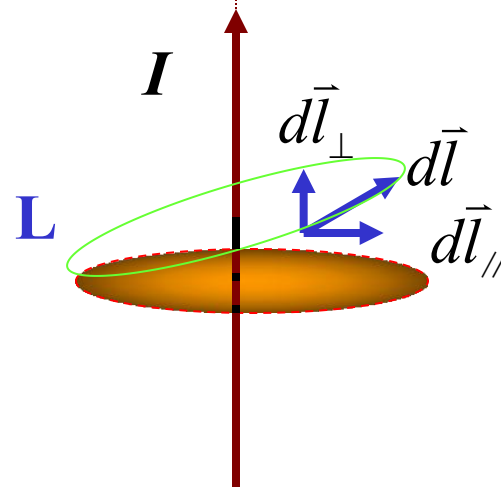
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{L_1} d\varphi + \int_{L_2} d\varphi \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi - \varphi) = 0$$



3. 如果闭合曲线回路L不在垂直于直导线的平面内 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = ?$

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_L \vec{B} \cdot (d\vec{l}_{//} + d\vec{l}_{\perp}) \\ &= \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}_{//} + \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}_{\perp} \\ &= \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}_{//} = \mu_0 I\end{aligned}$$



4. 推广: 如果与回路套合有 n 条载流导线, 确定回路绕行方向后, 根据磁场叠加原理可以得到

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \left(\sum_{i=1}^n \vec{B}_i \right) \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \oint_L \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{内}}} \text{——安培环路定理}$$

几点注意：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{内}}$$



1. 电流符号的规定：按右螺旋法则, 四指绕回路 L 绕行方向, 电流流向与姆指方向相同, 则为正; 反之为负。

2. 安培环路定理只适用于稳恒电流产生的磁场.

稳恒电流本身总是闭合的, 因此安培环路定理仅仅适用于闭合的载流导线。

3. \vec{B} 是回路内外所有电流共同产生的总磁场.

4. $\sum I_{\text{内}}$: 回路内所包围电流的代数和.

回路外的电流对 \vec{B} 有贡献, 对 \vec{B} 的环流无贡献.

二. 安培环路定理的应用

应用安培环路定理的解题步骤:

- (1) 分析磁场的对称性;
- (2) 过场点选择适当的路径, 使得 \vec{B} 沿此环路的积分易于计算: \vec{B} 的量值恒定, \vec{B} 与 $d\vec{l}$ 的夹角处处相等;
- (3) 求出环路积分;
- (4) 用右手螺旋定则确定所选定的回路包围电流的正负, 最后由磁场的安培环路定理求出磁感应强度 \vec{B} 的大小。

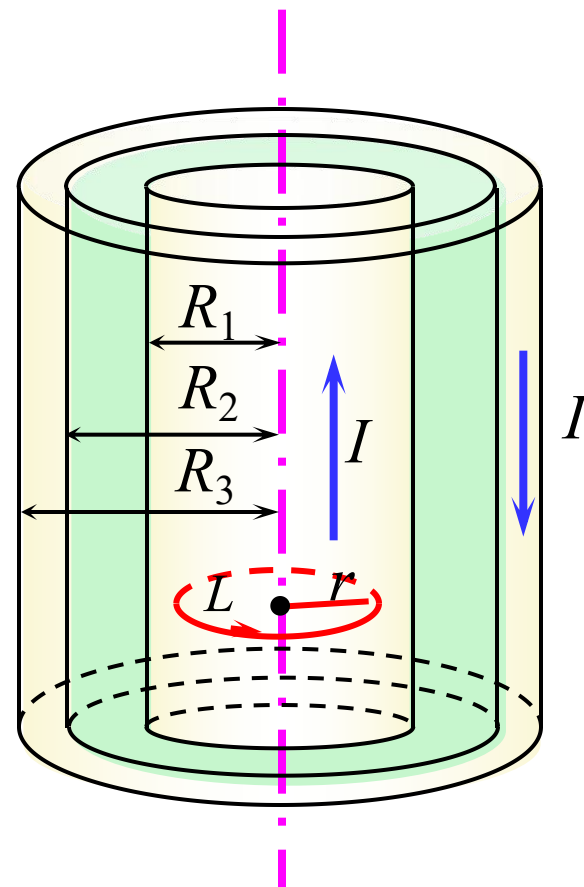
例13.4 求无限长同轴电缆的磁场. 设同轴电缆的内导体圆柱半径为 R_1 , 外导体圆筒内外半径分别为 R_2 、 R_3 , 电缆载有电流 I , 求各区域之磁场分布 (设电流均匀分布)

解: $0 < r < R_1$ 时,

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r \cdot B = \mu_0 I'$$

$$I' = \pi r^2 \frac{I}{\pi R_1^2}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}.$$

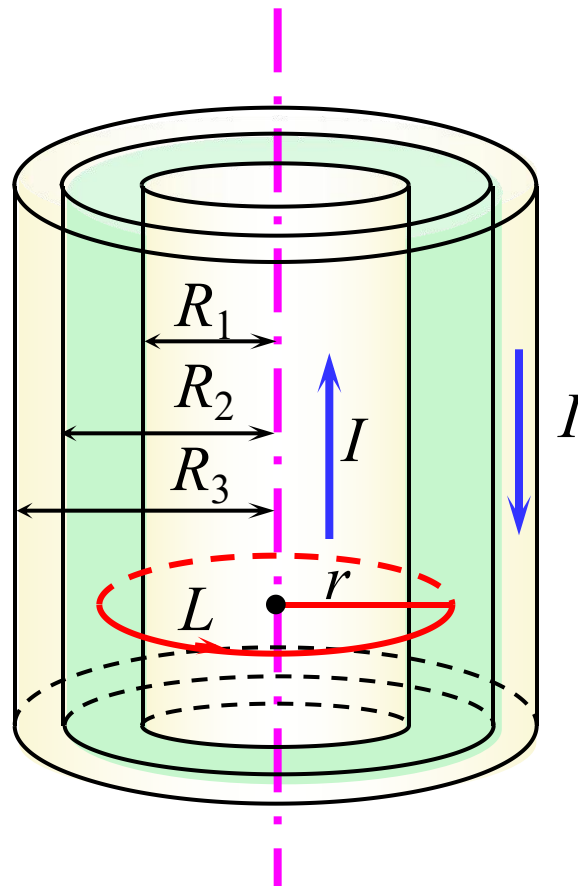


$R_1 < r < R_2$ 时,

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



$R_2 < r < R_3$ 时,

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I''$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I''$$

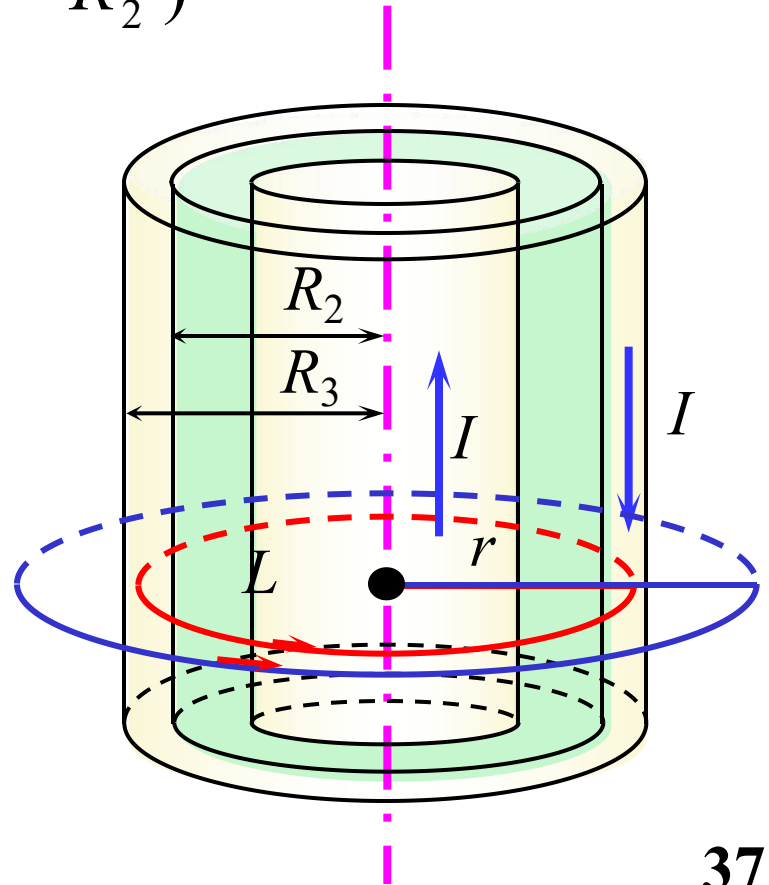
$$I'' = I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \cdot \pi(r^2 - R_2^2)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$r > R_3$ 时,

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$B = 0$$



例13.5 如图的环状螺线管叫螺绕环，设环的内外半径分别为 R_1 、 R_2 ，环上均匀密绕 N 匝线圈，线圈中通有电流 I 。

解： 1) 管内磁场

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r \cdot B = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

若： $R_2 - R_1 \ll r$. $R_1 \approx R_2 \approx r$

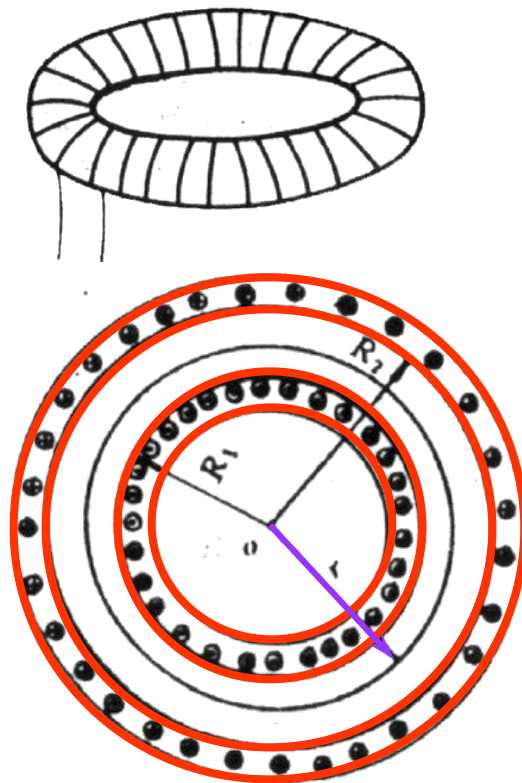
$$B = \mu_0 n I \quad (n = N / 2\pi r)$$

2) 管外磁场： $B = 0$

3) 保持 $n = N / 2\pi r$ 不变，

令内半径 $R_1 \rightarrow \infty$

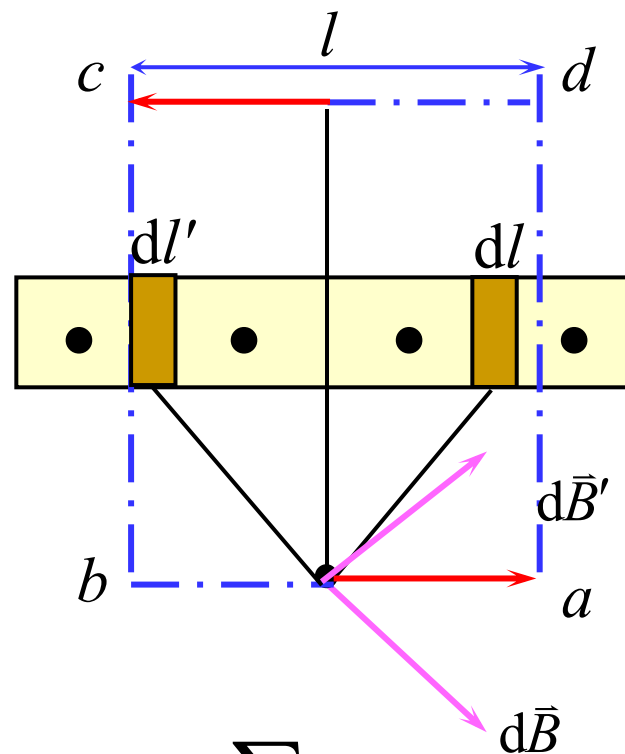
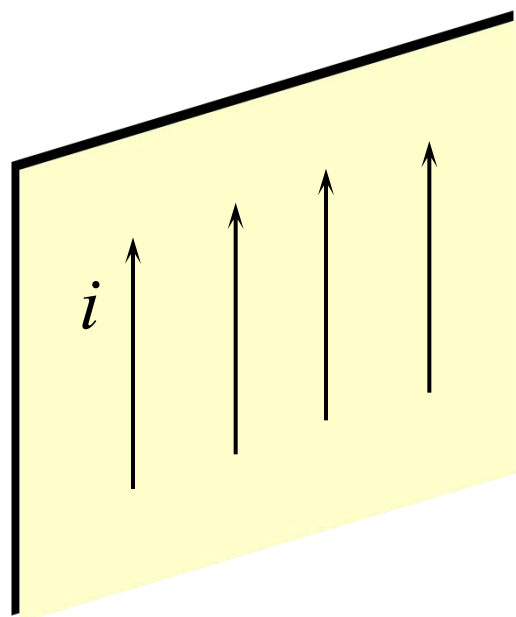
螺绕环 \rightarrow 无限长直螺线管



无限长直螺线管管内磁场仍为：

$$B = \mu_0 n I$$

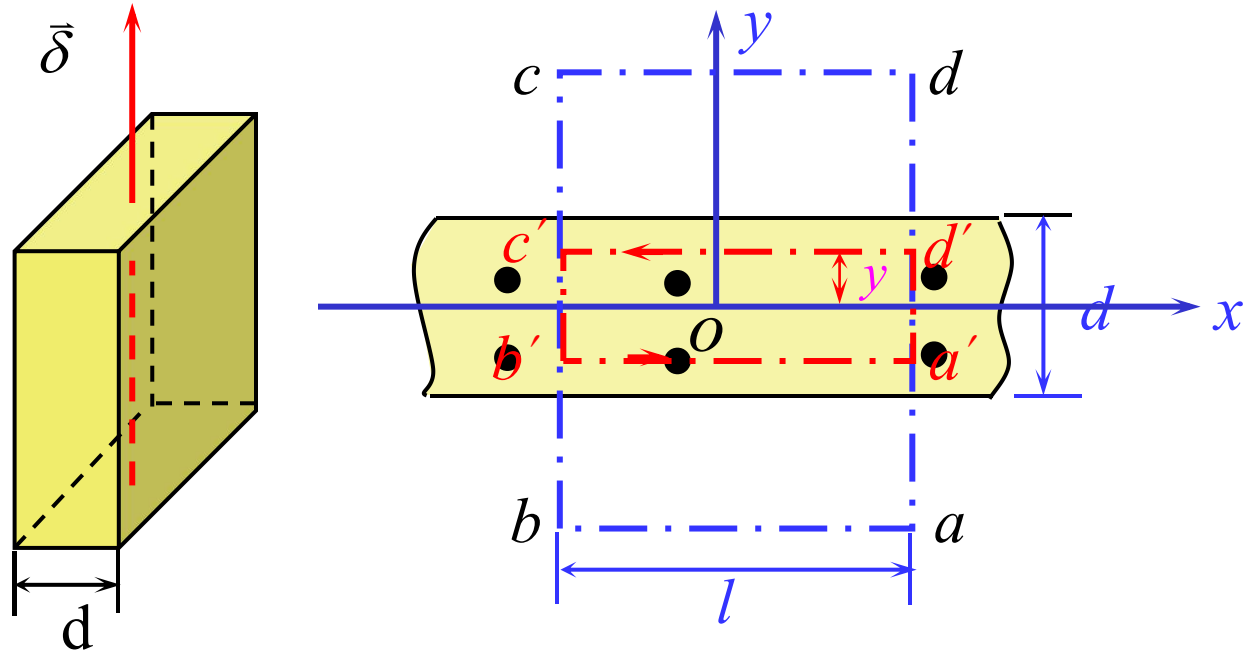
例13.6 ★ 无限大平面电流的磁场 (面电流密度 i)



解:
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \overline{ab} + 0 + B \cdot \overline{cd} + 0 = \mu_0 \sum I_{\text{内}}$$

即
$$B \cdot 2l = \mu_0 l \cdot i \quad \therefore B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

★ 无限大均匀载流平板的磁场 (电流面密度 δ , 平板厚度 d)



板外:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \overline{ab} + 0 + B \cdot \overline{cd} + 0 = \mu_0 \sum I_{\text{内}}$$

$$\text{即 } B \cdot 2l = \mu_0 \delta \cdot l \cdot d \quad \therefore B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \delta d$$

$$\text{板内: } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2l = \mu_0 \delta \cdot (l \cdot 2y) \quad \therefore B = \mu_0 \delta y$$

小结：利用安培环路定理求磁场的分布

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i \quad \oint_L B \cos \theta dl = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i$$

若能找到某个回路L使之满足：

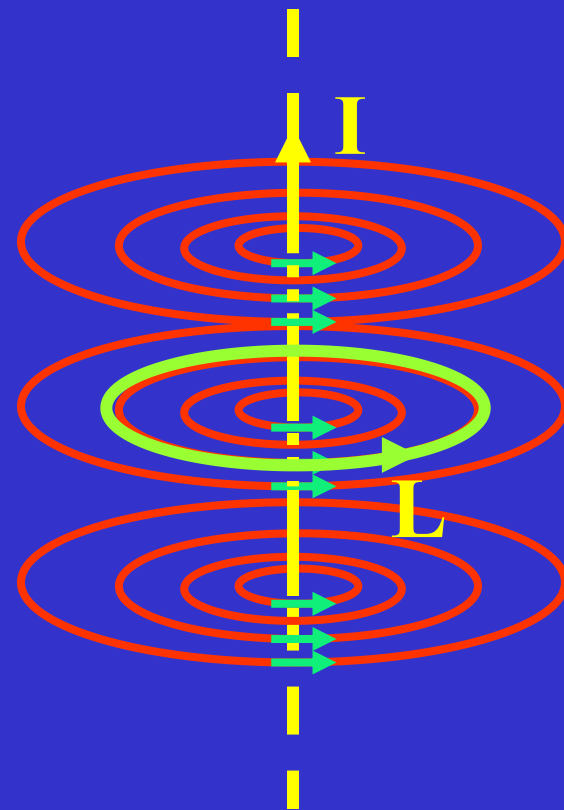
$$B \cos \theta \oint_L dl = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i$$

$$B = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i / \cos \theta L$$

环路L通常要满足：

1) L上的 \vec{B} 大小相等，方向相同。
(或 \vec{B} 与 $d\vec{l}$ 平行或垂直。)

2) 环路的长度便于计算； 3) 环路上的 \vec{B} 为所求。



§ 5 磁场对载流导线的作用力

一. 磁场对载流导线的作用力——安培力

$$\boxed{d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}}$$

整个载流导线所受的安培力:

$$\vec{F} = \int_L d\vec{F} = \int_L Id\vec{l} \times \vec{B}$$

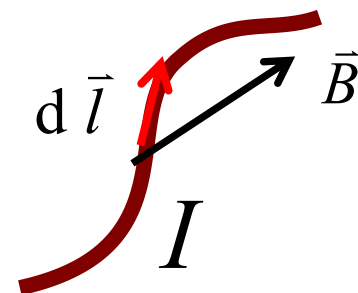
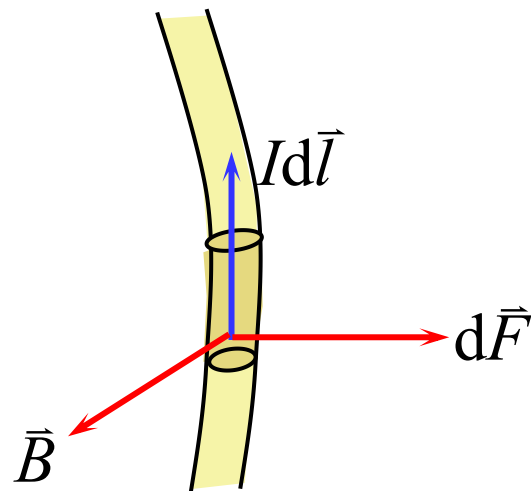
注意是矢量积分

如果导线上各电流元所受的力 $d\vec{F}$ 的方向不一致, 计算时, 应建立坐标系, 先求 $d\vec{F}$ 沿各坐标轴投影的积分:

直角坐标系: $F_x = \int_L dF_x$, $F_y = \int_L dF_y$, $F_z = \int_L dF_z$;

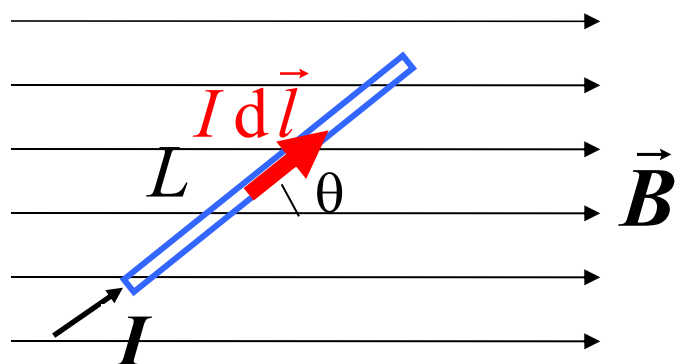
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad \text{指明 } \vec{F} \text{ 的方向。}$$

或者用矢量式表示 $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$.



$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$$

例：



取 $I d\vec{l}$

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

大小： $dF = I dl B \sin\theta$

方向： \otimes

且导线上各电流元所受力的方向一致。

$$F = \int_L IB \sin\theta dl = IB \sin\theta \int_L dl = IBL \sin\theta,$$

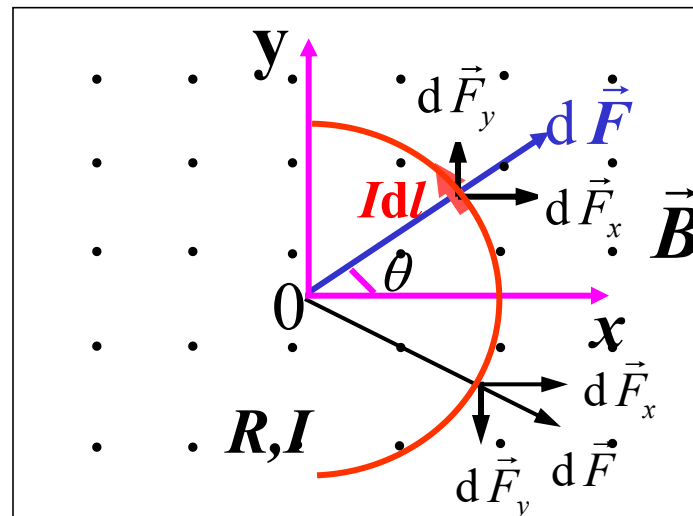
方向： \otimes

例：在磁感强度为 B 的均匀磁场中，通过一半径为 R 的半圆导线中的电流为 I 。若导线所在平面与 B 垂直，求该导线所受的安培力。

解： $dF = I dl B$

$$dF_x = dF \cos \theta = IB dl \cos \theta \\ = IB \cos \theta R d\theta \quad (dl = R d\theta)$$

$$dF_y = dF \sin \theta = IB dl \sin \theta \\ = IB \sin \theta R d\theta$$

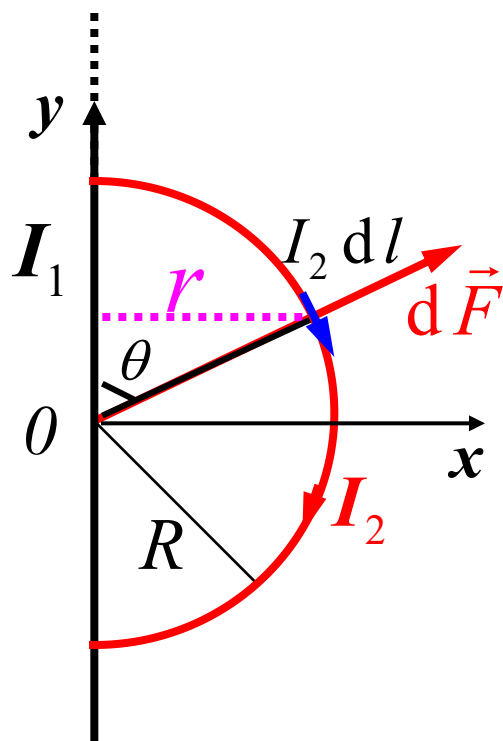


$$F_x = \int dF_x = BIR \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = 2BIR \quad \text{由对称性可知: } F_y = 0$$

$$\text{或 } F_y = \int dF_y = BIR \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin \theta d\theta = 0 \quad \vec{F} = F_x \vec{i} = 2BIR \vec{i}$$

结果表明：该半圆形载流导线上所受的力与其两个端点相连的直导线所受到的力相等。

例. 无限长直电流 I_1 位于半径为 R 的半圆电流 I_2 直径上, 半圆可绕直径边转动, 如图所示。求半圆电流 I_2 受到的磁力。



$$(dl = R d\theta)$$

$$(r = R \sin \theta)$$

解: 取 $I_2 dl$

$$dF = I_2 dl B_1 \quad B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad \otimes$$

$$dF_x = dF \sin \theta, \quad dF_y = dF \cos \theta$$

$$dF_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl \sin \theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} d\theta$$

$$F_x = \int_0^\pi dF_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^\pi d\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2}$$

由对称性 $F_y = 0$ $\vec{F}_{\text{合}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \vec{i}$

参看例13.7

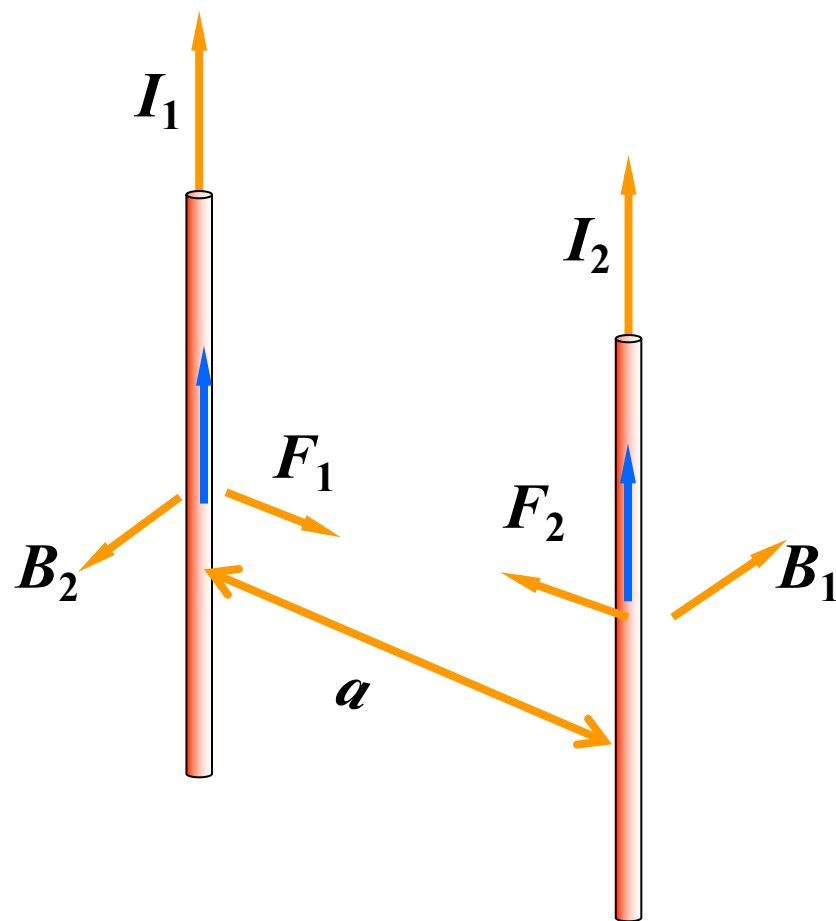
二. 平行长直载流导线间的相互作用力 $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

导线单位长受力

$$F_1 = I_1 B_2 \quad B_2 = \frac{\mu_o I_2}{2\pi a};$$

$$F_2 = I_2 B_1 \quad B_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi a};$$

$$F_1 = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a} = F_2$$



当 I_1 和 I_2 方向相同时，两导线相吸；相反时，则相斥

三. 均匀磁场对平面载流线圈的作用

ab 和 cd 边受力均为:

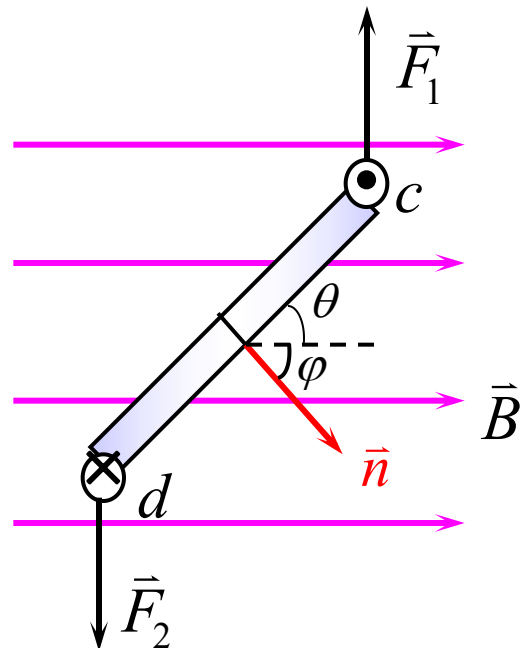
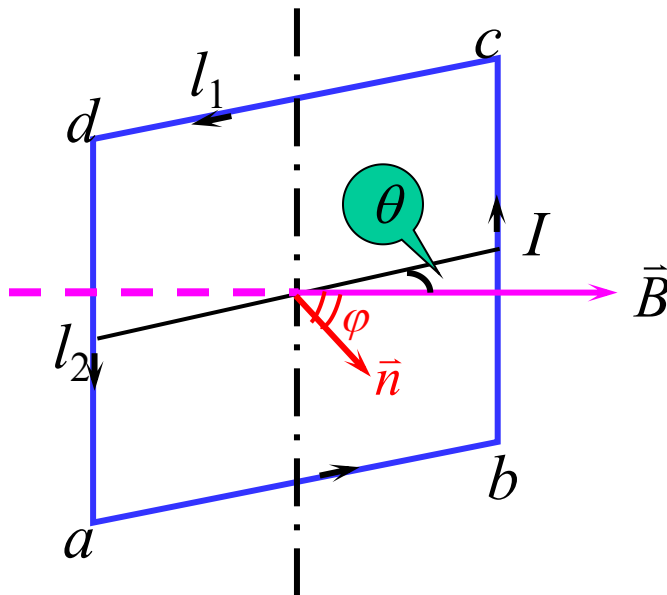
$$F_1 = IBl_1 \sin \theta$$

是一对平衡力

ad 和 bc 边受力均为:

$$F_2 = IBl_2$$

但不在同一直线上



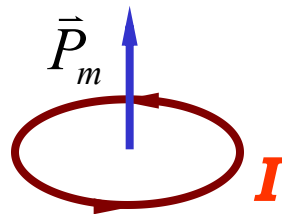
其力偶矩为: $M = F_2 \cdot l_1 \cos \theta = BI l_2 \cdot l_1 \sin \varphi = BIS \sin \varphi$

定义磁矩

$$\vec{P}_m = IS \vec{n}$$

磁力矩

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$



磁力矩 M 使磁矩 P_m 朝磁场 B 方向旋转。

磁矩与电偶极矩的特性对比：

电偶极矩

$$\vec{P}_e = q\vec{l}$$

$$\vec{M} = \vec{P}_e \times \vec{E}$$

在均匀电场中 $\vec{F}_{\text{合}} = 0$

磁矩

$$\vec{P}_m = I\vec{S}$$

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$

在均匀磁场中 $\vec{F}_{\text{合}} = 0$

例13.8 一半径为 R ，电荷面密度为 σ 的圆盘，绕过盘心 O 并与盘面重直的轴以角速度 ω 旋转，求其在与盘面平行的匀强磁场中所受的力矩。

解： $dq = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$

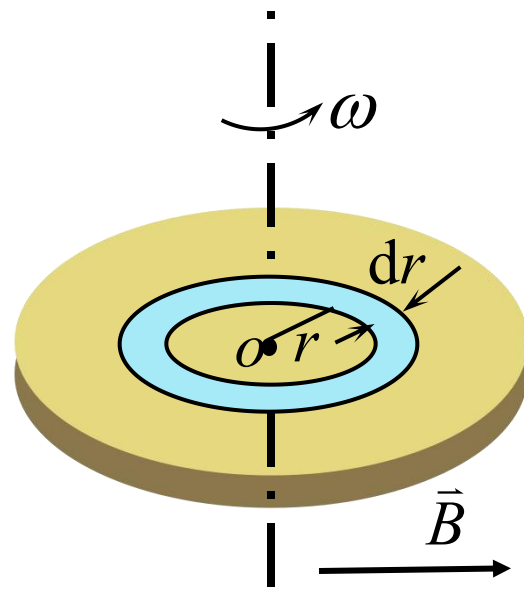
旋转时产生的环形运动电流为：

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \sigma \cdot 2\pi r dr = \omega \sigma r dr$$

其磁矩为： $dP_m = dI \cdot \pi r^2 = \pi \omega \sigma r^3 dr$

$$\therefore P_m = \int dP_m = \int_0^R \omega \pi \sigma r^3 dr = \frac{\pi}{4} \omega \sigma R^4$$

所受磁力矩为： $M = P_m B = \frac{\pi}{4} \omega \sigma B R^4$



四. 磁力的功

1. 平动的情形

$$F = BIl$$

$$dA = F \cdot dx = BIl dx$$

$$= BIdS = Id(BS) = Id\Phi$$

2. 转动的情形

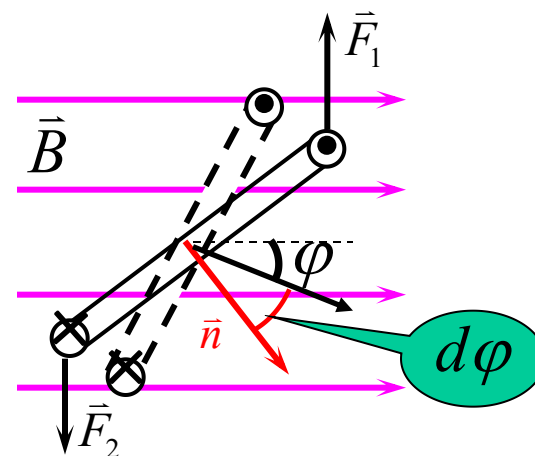
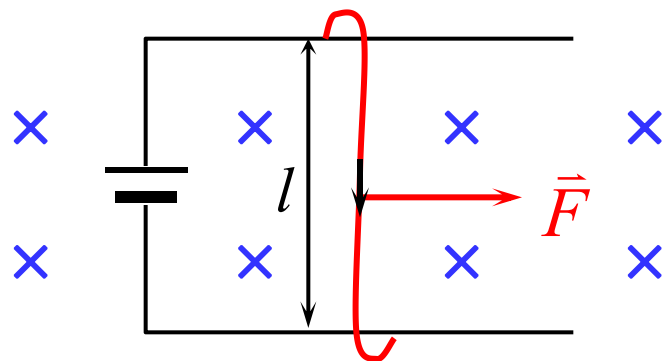
$$dA = -Md\varphi = -BIS \sin \varphi d\varphi$$

$$= BIS d(\cos \varphi) = Id(BS \cos \varphi) = Id\Phi$$

$$A = \int dA = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi$$

$$\xrightarrow{\text{若 } I \text{ 恒定}} = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$

Φ_1 与 Φ_2 分别表示线圈在 φ_1 和 φ_2 时通过线圈的磁通量。



例13.9 半径为R的半圆形载流线圈，电流强度为I，可绕直径OO'转动，放置于均匀磁场中，求：(1)线圈所受的最大磁力矩；(2)线圈从图示位置转过45°时，磁力矩做功为多少？

解：1) $\because \vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$

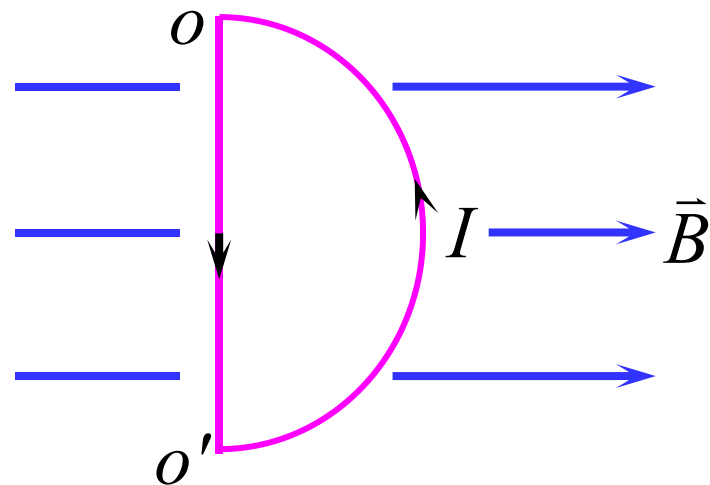
$$\therefore M_{\max} = P_m B = SIB = \frac{1}{2} \pi R^2 IB$$

2) $\Phi = B \cdot S \cos \varphi$

当 φ 从 $\varphi_1=90^\circ$ 转到 $\varphi=45^\circ$ ：

$$\Phi_1 = 0; \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} \pi R^2 B \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^2 B$$

磁力矩做功： $A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi R^2 IB$



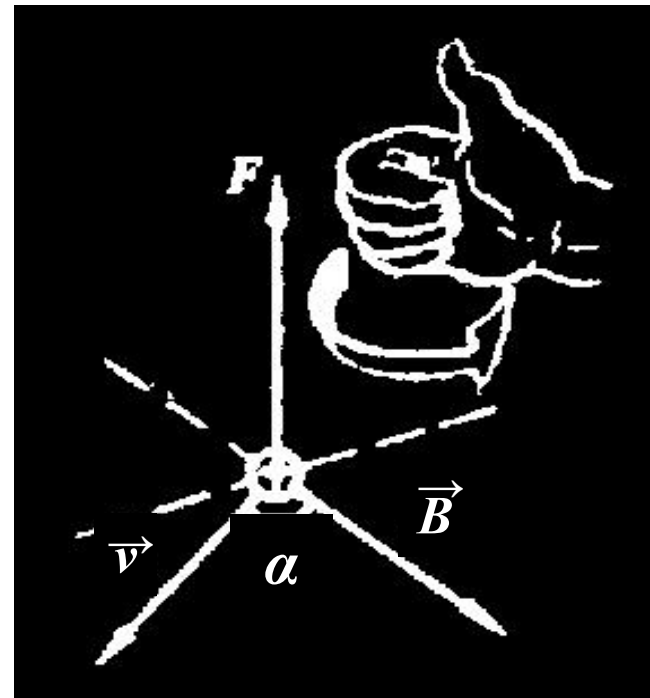
§ 6 带电粒子在磁场中的运动

一. 洛伦兹力 (14-2)

$$f_m = qvB \sin \alpha$$

方向垂直于点电荷 q 的速度 \vec{v} 与磁感应强度 \vec{B} 组成的平面，并成右手螺旋法则，其数学矢量式为：

$$\vec{f}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$



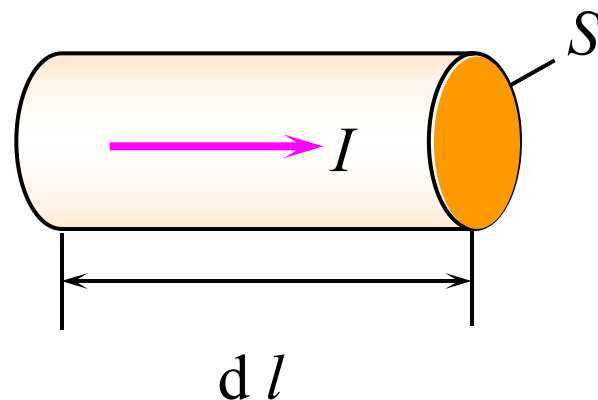
注意：磁场力的方向垂直于粒子的运动速度，这一事实说明磁力只能改变带电粒子的运动方向，而不会改变其速度大小，因此磁场力对运动电荷所作的功恒等于零，即洛伦兹力对运动电荷不做功，这是磁场力的一个重要特征。

洛伦兹力可由安培力导出

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

$$I = nqvS \quad (\text{设 } q > 0)$$



$$d\vec{F} = nqvSd\vec{l} \times \vec{B} \quad (\because v \text{ 与 } dl \text{ 方向相同, } vd\vec{l} = \vec{v}dl)$$

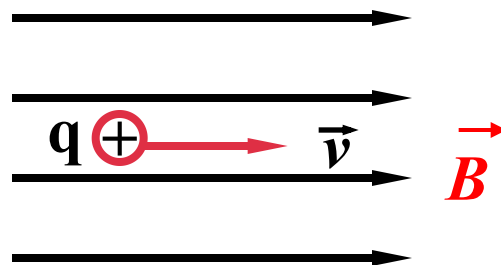
$$= nSdlq\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{又 } \because dN = nSdl \quad \therefore \vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dN} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

二. 带电粒子在均匀磁场中的运动

1. $\vec{v} // \vec{B} \quad F = 0$

粒子将做匀速直线运动



2. $\vec{v} \perp \vec{B} \quad F = qvB$

$\vec{F} \perp \vec{v}$, 洛仑兹力起向心力的作用。

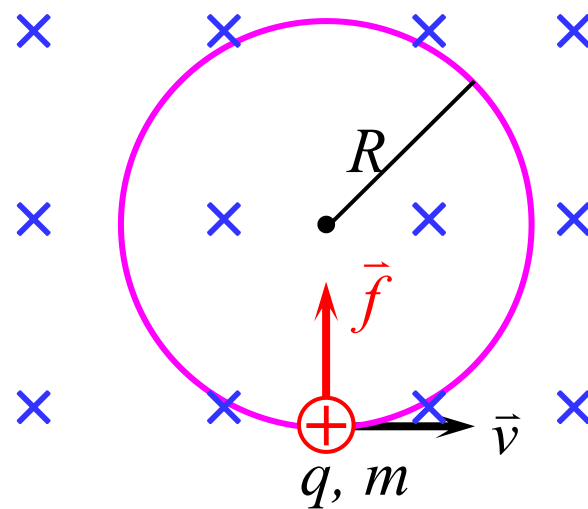
粒子将作圆周运动

圆周半径

周期

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$



注意:在匀强磁场中, R 与荷质比 q/m 成反比;与垂直于磁场方向的速率成正比.粒子绕圆形轨道运动的周期与速度无关。

3. \vec{v}, \vec{B} 夹角为 θ

$$v_x = v \cos \theta$$

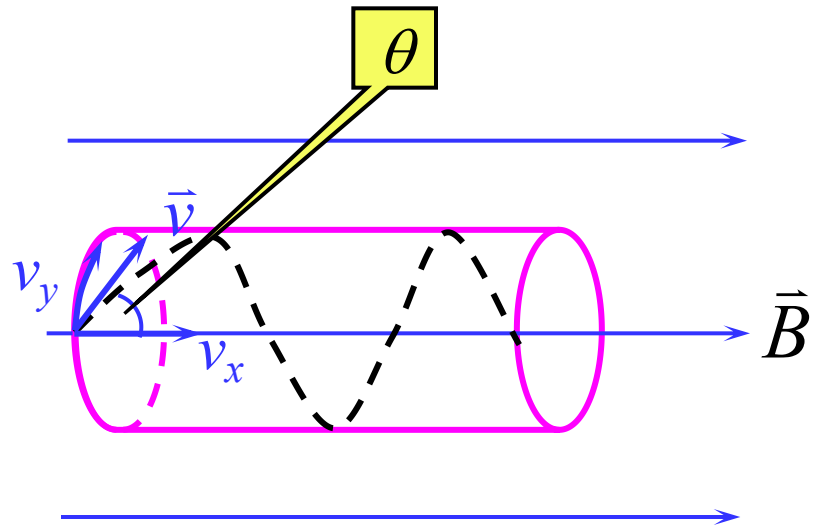
$$v_y = v \sin \theta$$

作螺旋运动

$$R = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$h = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}$$



磁场中的螺旋运动

——螺距

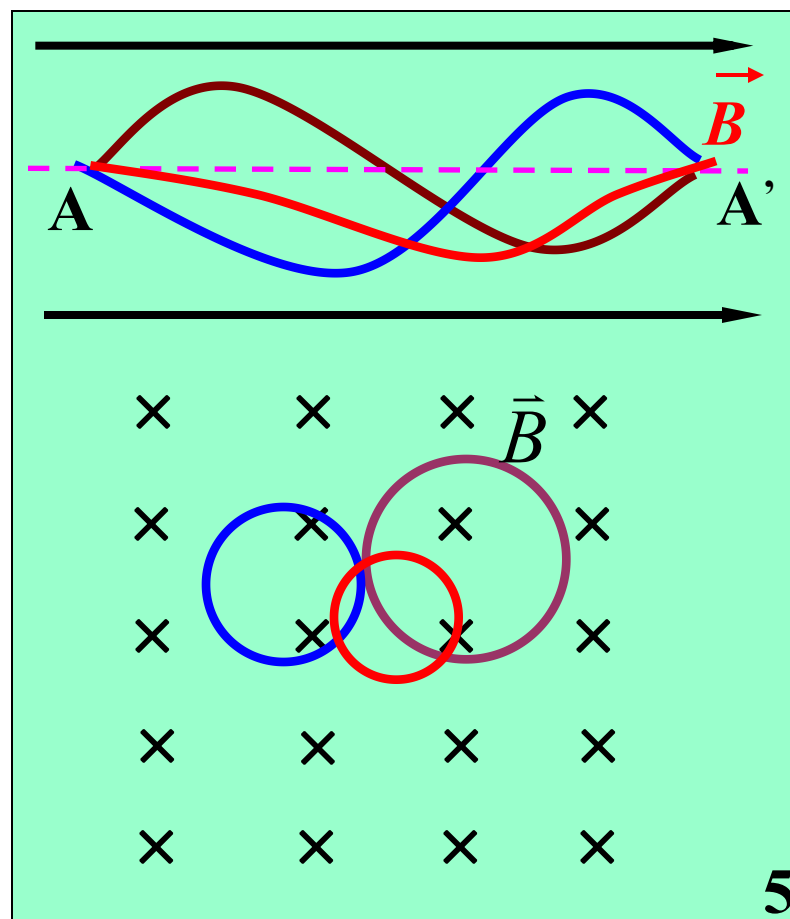
特别地，若一束粒子， θ 角很小，且初速率 v_0 近似相等。

$$v_{//} = v_0 \cos \theta \approx v_0$$

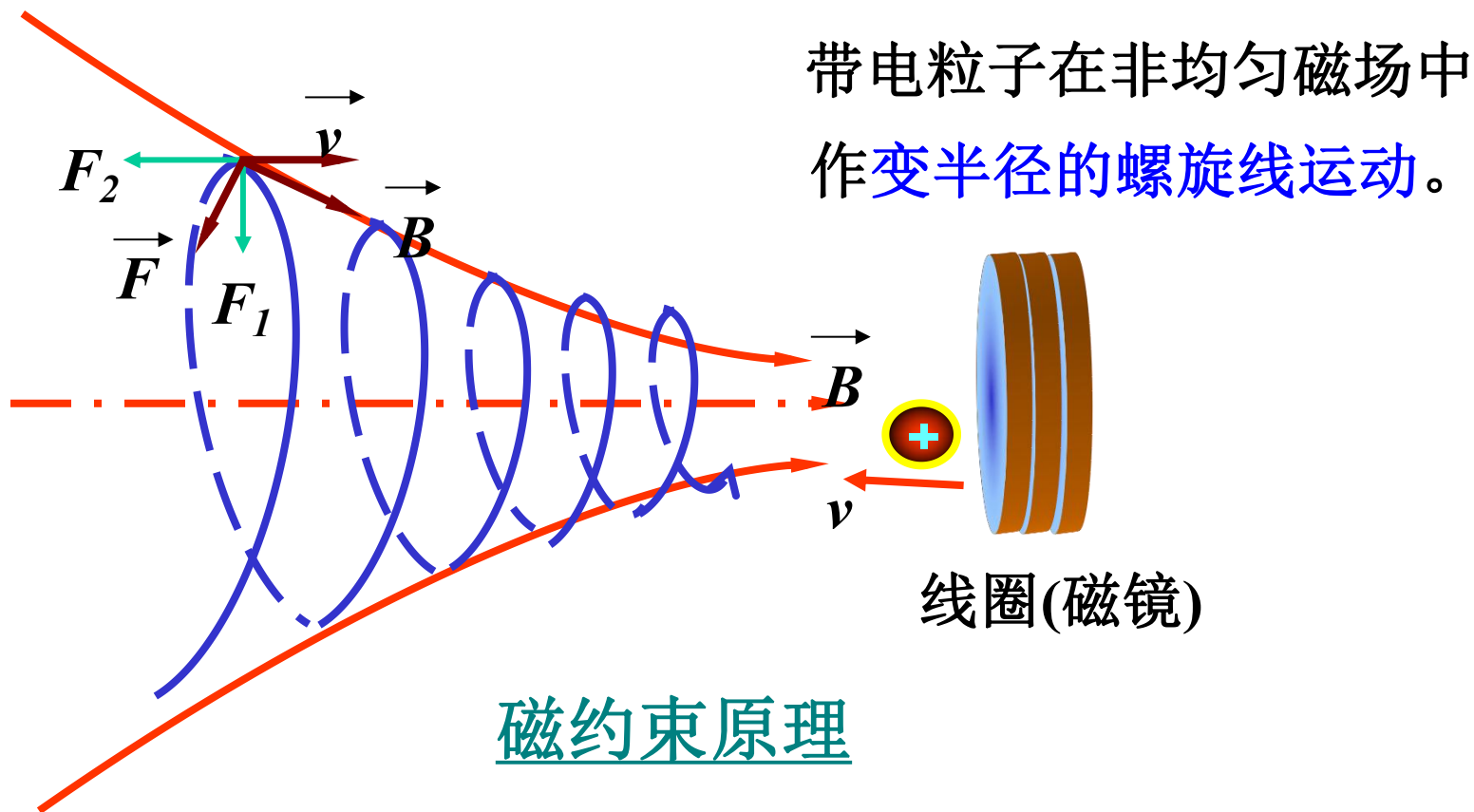
$$v_{\perp} = v_0 \sin \theta = v_0 \theta$$

磁聚焦

一束发散角不大的带电粒子束，若这些粒子沿磁场方向的分速度大小又几乎相同，它们有**相同的螺距**，经过一个周期它们将重新会聚在另一点。



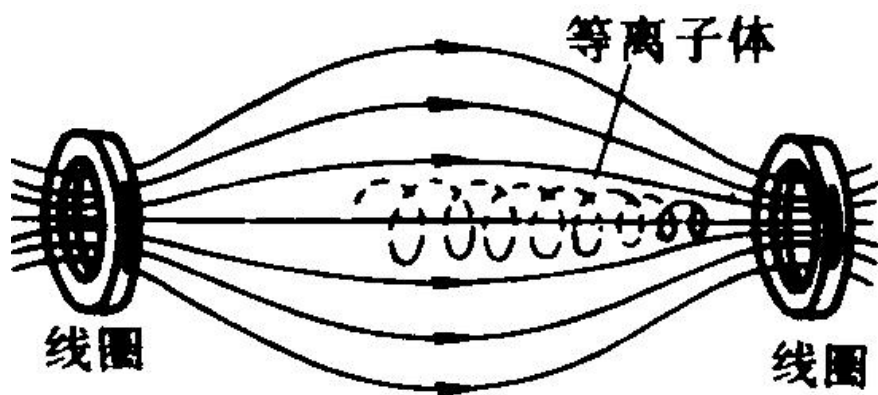
三. 带电粒子在非均匀磁场中的运动



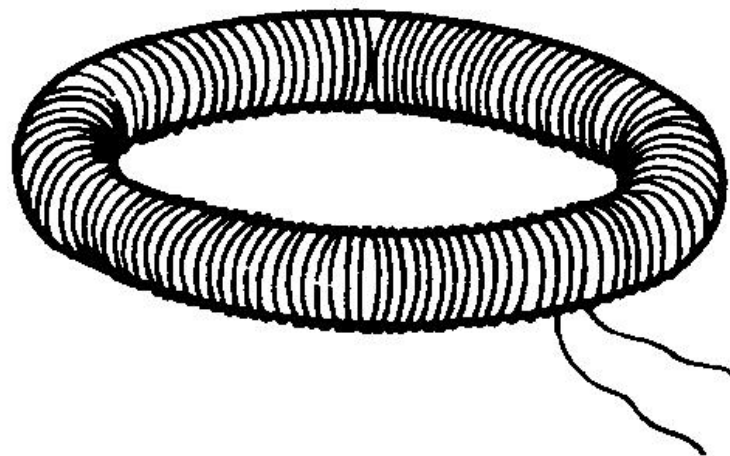
当粒子向磁场增强方向运动，粒子所受磁场力，恒有一指向磁场较弱方向的分力，阻止带电粒子向磁场较强方向运动。有可能使粒子沿此方向的速度逐渐减小到零，并迫使粒子掉向**反转**运动。

磁约束装置

1. 磁瓶

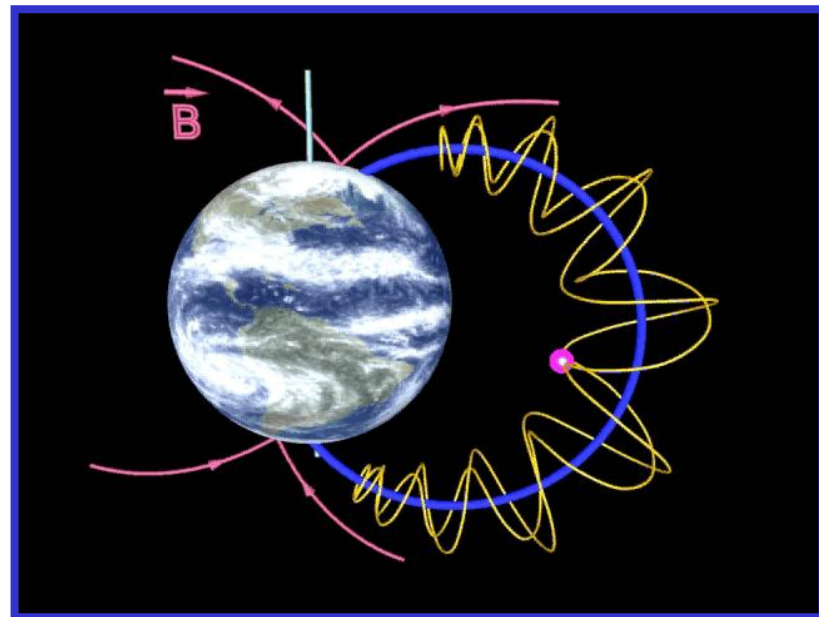
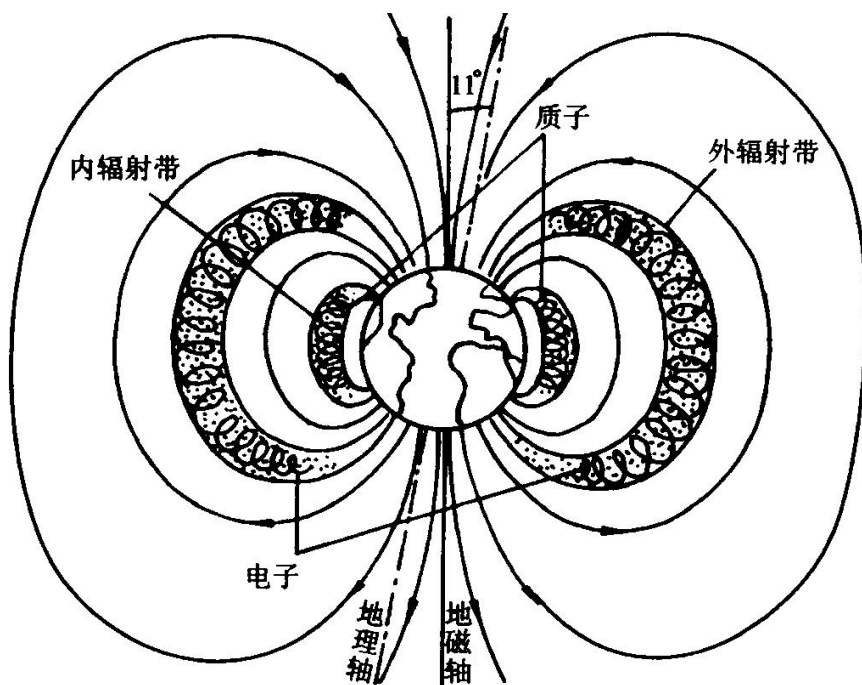


2. 环形磁约束结构



磁瓶在约束等离子体方面有重要意义,但它有一个缺点,就是总有一部分沿水平方向速度较大的粒子会从两端逃掉,采用环形结构,可以避免这个缺点。

宇宙空间也存在磁约束——范艾伦辐射带



地磁场，两极强，中间弱，能够捕获来自宇宙射线的带电粒子，在两极之间来回振荡。

1958年，探索者一号卫星在外层空间发现被磁场俘获的来自宇宙射线和太阳风的质子层和电子层——（Van Allen）**辐射带**。**内层**在距地面**800-4000Km**处，**外层**在**60000Km**处。

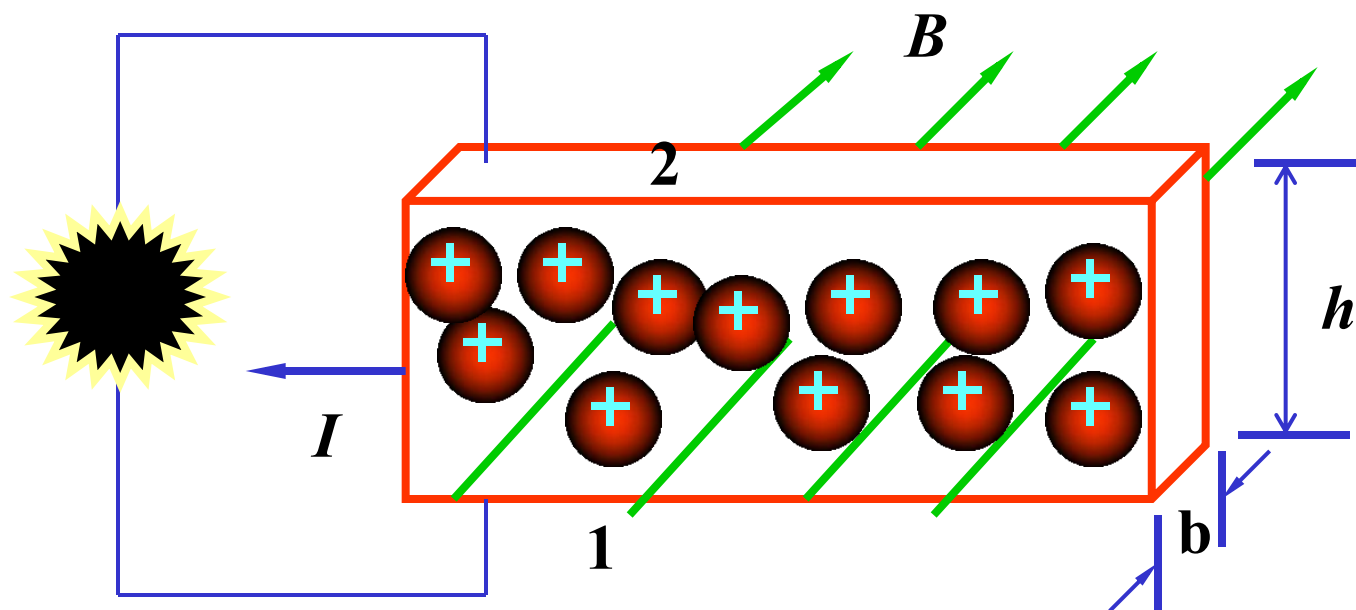
绚丽多彩的极光



在地磁两极附近，由于磁感线与地面垂直，外层空间入射的带电粒子可直接射入高空大气层内，它们和空气分子的碰撞产生的辐射就形成了极光。

四. 霍尔效应

1879年霍耳首先发现, 把一块载流导体沿垂直于磁场方向放置时如图所示, 则在既垂直于磁场方向又垂直于电流流向的方向上出现微弱的电势差, 这一现象称霍耳效应。这一电势差称霍耳电势差或霍耳电压。



为讨论问题方便, 假设电流是由正电荷的运动形成的。

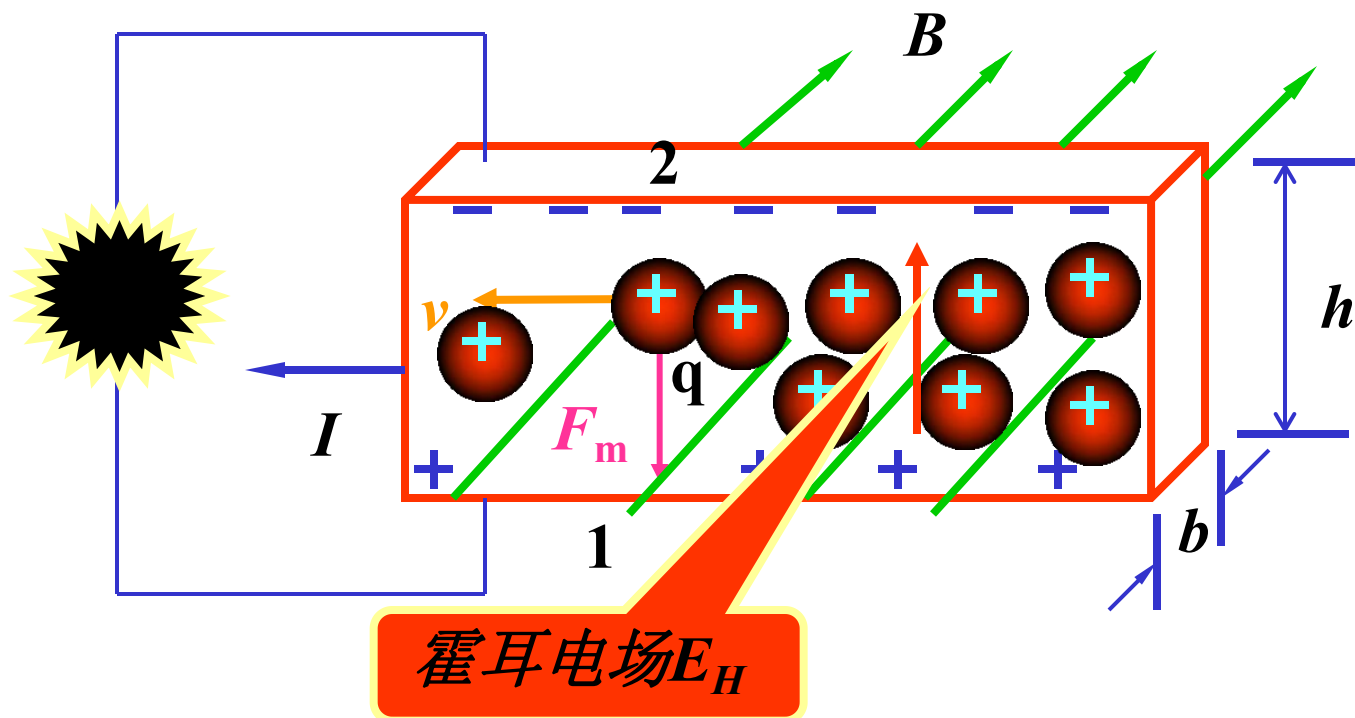
(1)实验现象说明: $U_1 - U_2 \propto \frac{IB}{b}$;

$$U_H = U_1 - U_2 = R_H \frac{IB}{b}$$

R_H 称为霍耳系数,它与导体的材料有关

(2)实验原理:

霍尔效应的解释



(3) 霍耳电压

电荷受磁场力

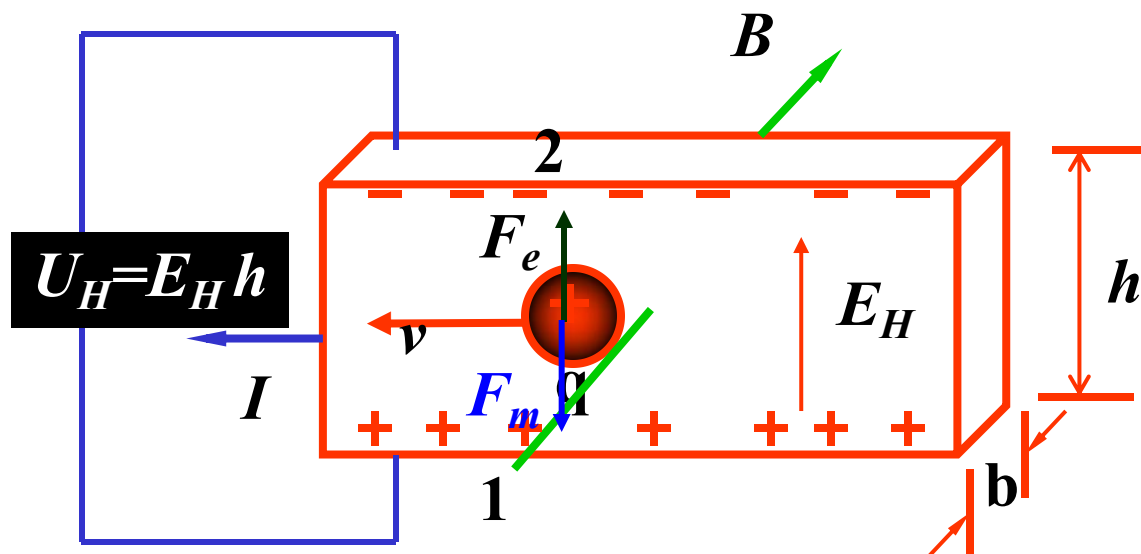
$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

电荷受电场力

$$\vec{F}_e = q\vec{E}_H$$

电荷受力平衡时,

$$qvB = qE_H$$



1与2表面间形成稳定的霍尔电压: $U_H = U_1 - U_2 = E_H h = vBh$

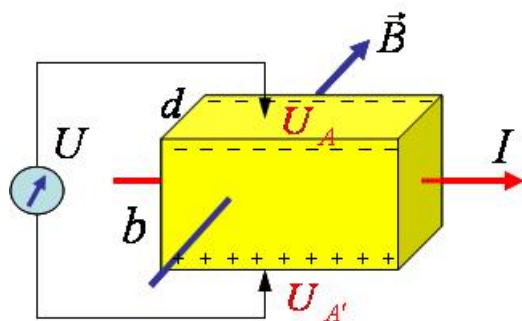
$$\because I = \frac{dQ}{dt} = nqvS = nqvhb \quad \therefore U_H = \frac{I}{nqhb} \cdot Bh = \frac{1}{nq} \frac{IB}{b}$$

$$\therefore R_H = \frac{1}{nq} \quad \text{——霍耳系数。}$$

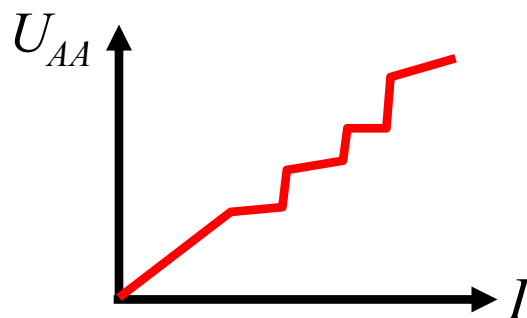
(4) 霍耳效应的应用:

测量载流子类型
测量载流子浓度
测量磁感应强度

因为半导体的载流子浓度小于金属电子的浓度且容易受温度、杂质的影响，所以霍耳系数是研究半导体的重要方法之一。

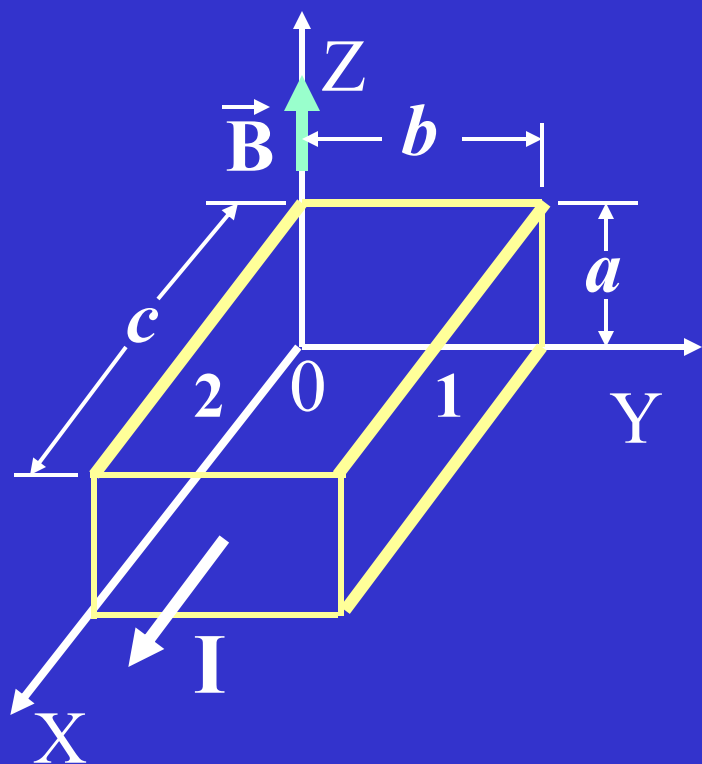


$$U_{AA'} = R_H \frac{IB}{d}$$

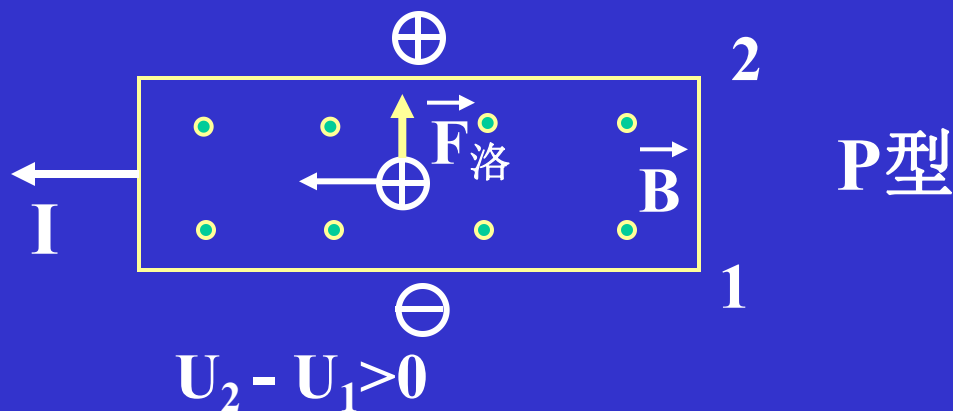


九十年代，发现量子霍耳效应，即曲线 $U_{AA'} \sim I$ 当 B, d, R_H 为常数时，出现台阶，而不为线性关系。理论上用量子力学解释尚不够。分数量子霍耳效应与分数电荷的存在与否有关。86年获诺贝尔奖金。

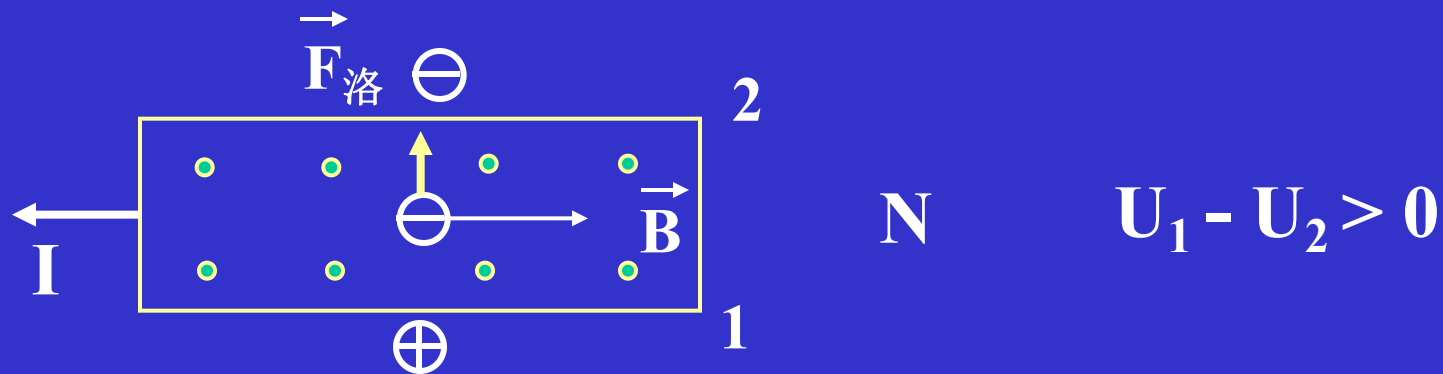
例14.10 一块半导体样品中电流 I 沿 X 轴正向，均匀磁场 B 沿 Z 轴正向。测得： $a=0.10\text{cm}$ ， $b=0.35\text{cm}$ ， $c=1.0\text{cm}$ ， $I=1.0\text{mA}$ ， $B=0.3\text{T}$ ， $U_{12}=6.55\text{ mV}$ 。(1)试问此半导体是 P 型还是 N 型？(2)求载流子浓度 n 为多少？



解：(1) $U_{12} = U_1 - U_2 > 0$



不可能是P型半导体



此半导体为 N 型半导体。

$$U_{12} = \frac{1}{nq} \frac{IB}{a} \quad a \text{ 为沿 } \vec{B} \text{ 方向半导体的厚度。}$$

$$n = \frac{IB}{U_{12}qa} = \frac{10^{-3} \times 0.3}{6.55 \times 10^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.1 \times 10^{-2}}$$

$$= 2.9 \times 10^{20} (\text{个} / m^3)$$