第四章习题一

1、判断下列集合关于指定的运算是否构成半群，独异点和群。

(1)a是实数，G={a^n|n是整数}，运算是普通的乘法。

(2)Q*为正有理数，运算是普通的乘法。

(3)Q*为正有理数，运算是普通的加法。

(4)一元实系数多项式的集合关于多项式的加法。

(5)一元实系数多项式的集合关于多项的乘法

(1) a是实数，G={a^n|n是整数}，运算是普通的乘法。

解：

封闭性：G中任取二个元素x与y，则$x=a^n,y=a^m$，则$x\times y=a^m\times a^n=a^{m+n}$，仍是a的(m+n)幂次方，即仍是G中的元素。

可结合性：G中任取三个元素x、y与z，则$x=a^m,y=a^n,z=a^p$，则三个元素相乘的结果$x\times y\times z=a^{m+n+p}$，显然满足可结合性。

单位元$e=1=a^0$.

逆元　$x=a^m$，则$x^{-1}=a^{-m}$.

所以是群。

(2)Q*为正有理数，运算是普通的乘法。

解：

封闭性：两个正有理数的乘积仍是正有理数。

可结合性：三个正有理数显然满足

单位元 e=1，1 是正有理数

逆元a=m/n，m与n都是正有理数，则其逆元为a^{-1}=n/m.

故为群。

(3) Q*为正有理数，运算是普通的加法。

封闭性：两个正有理数相加仍是正有理数

可结合性：显然满足

单位元：不存在，0 不是正有理数，故为半群。

逆元：逆元为负有理数。

(4)一元实系数多项式的集合关于多项式的加法

封闭性：多项式相加是系数相加，实系数相加仍是实系数，故仍为实系数多项式。

可结合性：三个多项式相加，实际上是系数相加，实数相加仍是满足可结合性。

单位元：0，即各项系数均为 0 的多项式，实际上就是数字 0。

逆元：各项系数的相反数，即为逆元。

(5)一元实系数多项式的集合关于多项的乘法

封闭性：是实系数相乘，指数相加，结果仍是实系数，故仍为实系数多项式。

可结合性：3 个多项式相乘，是系数相乘后再相加，指数相加，满足可结合性。

单位元：实数 1 为单位元，即多项式退化为常数 1。

逆元：两个多项式相乘为结果 1，(x+1) ×y=1，则 y=1/(1+x)，显然 1/(1+x)不是多项式，

因此不存在逆元。

2、在实数 R 中定义二元运算*：$a*b=a+b+ab$，证明$<R,*>$构成独异点。

证：

封闭性：a 与 b 是实数，则 a+b 是实数，ab 也是实数，(a+b)+ab 也是实数，故满足封闭性。

可结合律：任取三个实数 a,b,c，则$(a*b)*c=(a+b+ab)*c=(a+b+ab)+c+(a+b+ab)c=a+b+c+ab+ac+bc+abc$

$a*(b*c)=a*(b+c+bc)=a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)=a+b+c+bc+ab+ac+abc$

故$(a*b)*c= a*(b*c)$，所以满足可结合律。

单位元：$a*e=a$，则 $a+e+ae=a$，故 $e+ae=0$，故 $e(1+a)=0$，考虑到 a 的任意性，要使该式为 0，只有 $e=0$ 了，显然 $a*e=a+e+ae=a$，故 0 为单位元

$<R,*>$构成独异点。

逆元：$a*b=e$，即 $a*b=0$，即 $a+b+ab=0$，即$-a=b(1+a)$，故 $b=-a/(1+a)$，因此当 a+1 不为 0 时才有逆元，因此并不是所有的实数都有逆元。

当 $a=-1$ 时，$a*b=0$ 为$-1+b-b=0$，即$-1=0$，而这是矛盾，故 $a=-1$ 时没有逆元。

3、$S=\{a,b,c\}$，S 上的*运算定义为：$x*y=x$，证明 S 关于*构成半群

证明：

封闭性：当 x,y 是 S 的元素时，$x*y=x$ 仍是 S 的元素，故满足封闭性。

可结合性：当 x,y,z 是 S 的元素时，注意到运算后的结果为第一个元素，则可知$(x*y)*z=(x*y)=x$，同样 $x*(y*z)=x$，故$(x*y)*z= x*(y*z)$

单位元：若 $x*e=e*x=x$，则根据*运算的定义可知，$x*e=x$ 即为第一个元素，而 $e*x=e$ 即为第一个元素，则 $x=e$，即集合中只有一个元素时，这是不可能的，所以不可能含有单位元，只能构成半群。

4、设 $V=<\{a,b\},*>$是半群，且 $a*a=b$，证明：(a) $a*b=b*a$，(b)$b*b=b$

(a)的证明

(1) $a*b=a*(a*a)$　　因为 $b=a*a$

(2)$a*(a*a)=(a*a)*a$　　因为满足结合律

(3)$(a*a)*a=b*a$　　因为 $a*a=b$

(4)$a*b=b*a$　　因为(1)(2)(3)

(b)的证明

因为 V 是封闭的，故$\{a*a,b*b,a*b,b*a\}\subseteq\{a,b\}$

又 $a*a=b,a*b=b*a$，故集合$\{a*a,b*b,a*b,b*a\}=\{b,b*b,a*b\}\subseteq\{a,b\}$

a*b 只能是 a 或 b 中某一个。

当 $a*b=a$ 时，两边同乘 a 可知 $a*(a*b)=a*a$，故$(a*a)*b=a*a$，故 $b*b=b$

当 $a*b=b$ 时，两边同乘 a 可知 $a*(a*b)=a*b$，故$(a*a)*b=a*b$，故 $b*b=b$

5、设 Z 是整数集合，在 Z 上定义二元运算°为：$x°y=x+y-2$，是否构成群？

解：Z

封闭性：$x°y=x+y-2\in Z$ 是整数，故封闭

可结合律：$(x°y)°z=(x°y)+z-2=(x+y-2)+z-2=x+y+z-4$

$x\circ(y\circ z)=x+(y\circ z)-2=x+(y+z-2)-2=x+y+z-4$

故满足结合律

单位元 $x\circ e= e\circ x=x$，则 $x+e-2=e+x-2=x$，故 $e=2$。

逆元 $x\circ y=y\circ x=e$，则 $x+y-2=y+x-2=2$，故 $x+y-2=2$，故 $y=4-x$

$x^{-1}=4-x$

故构成群。

6、设 G=<a>是 15 阶群循环群，(1)求 G 的所有生成元，(2)求出 G 的所有子群。

解：$G=\{a^0,a^1,a^2,\ldots,a^{14}\}$

由定理 10.11 可知，n阶循环群，对于任何小于n而与n互素的自然数r，a^r是是G的生成元。

n=15，小于 15 而与 15 互素的整数是 1,2,4,7,8,11,13,14

故其生成元有$a^1,a^2,a^4,a^7,a^8,a^{11},a^{13},a^{14}$.

由 Lagrang 定理可知，G 的子群的阶必是 n 的因素数，

而 15 的因素数是 1,3,5,15，而 1 与 15 是平凡子群，即{e}与G本身，因此只考虑非平凡的 3 阶与 5 阶子群，且$a^{15}=e$

再由定理 10.12 可知，n 阶循环群，对于 n 的每个正因子，G 恰有一个 d 阶子群，

因此 G 只有一个 3 阶子群与一个 5 阶子群。

3 阶子群的生成元是$a^{15/3}=a^5$，即为$\{e,a^5,a^{10}\}$

5 阶子群的生成元是$a^{15/5}=a^3$，即为$\{e,a^3,a^6,a^9,a^{12}\}$

∀∃∨∧¬ √×→↔⇒⇔