

2018级高等数学A(1)期末考试试题与解答

一. 计算题 I(本题共 5 小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{e^x}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$.

2. 设 $x \rightarrow 0$ 时, $2^x - 1$ 与 Ax 是等价无穷小, 求常数 A .

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2e^x + a, & x < 0, \\ x^2 + bx + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 求 a, b 的值.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} - xy = 1$ 所确定, 求 $y''(0)$.

5. 利用微分计算 $\sin 31^\circ$ 的近似值.(计算时保留到小数点第三位).

二. 计算题 II(本题共 5 小题, 每小题 8 分, 满分 40 分)

6. 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

7. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx$.

8. 设曲线 C 的极坐标方程为 $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3} (a > 0)$, 求曲线 C 的全长.

9. 过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形, 求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体体积.

10. 设可微函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 求 $f(x)$.

三. 讨论题(本题共 2 小题, 每小题 7 分, 满分 14 分)

11. 讨论方程 $\ln x = ax (a > 0)$ 的实根个数.

12. 函数 $y = f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数, 且 $f''(x) \neq 0$. 设 ξ 是函数 $y = f(x)$

在 $(0,b) \subset (-1,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到的“中值”, 讨论极限 $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\xi}{b}$ 是否存

在, 若存在求出极限值, 若不存在, 说明理由.

四. 应用题与证明题 (本题共 2 小题, 每小题 8 分, 满分 16 分)

13. 质量均匀的链条挂在一无摩擦的钉子上, 运动开始时链条的一边下垂 8 米, 另一边下垂 10 米, 求整个链条滑过钉子所需时间.(结果用重力加速度 g 表示).

14. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 具有连续导数 $g'(x) > 0$, 且

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. 证明: 在 (a, b) 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2)$.