1、解：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n[(\frac{2}{3})^n+1]}{3^{n+1}[(\frac{2}{3})^{n+1}+1]}=\dfrac{1}{3}$

（3 分）　（5 分）

2、解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}[\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3]}$　(1 分)

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{a^x+b^x+c^x}}=e^{\frac{\ln a+\ln b+\ln c}{3}}=e^{\frac{\ln(abc)}{3}}=\sqrt{abc}$

（4 分）　（5 分）

3、解：$y'=f'(\sin x^2)\cdot\cos x^2\cdot 2x+2\sin f(x)\cdot\cos f(x)\cdot f'(x)$

（2 分）　（4 分）

$=2x\cos x^2 f'(\sin x^2)+\sin(2f(x))\cdot f'(x)$　（5 分）

4、解：应用隐函数求导方法，$y'=e^y+xe^y y'$，　（1 分）

于是　$y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$，　（2 分）

从而

$$y''=\frac{e^y\cdot y'(1-xe^y)-e^y(-e^y-xe^y\cdot y')}{(1-xe^y)^2}=\frac{e^y\cdot y'+e^{2y}}{(1-xe^y)^2}=\frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$$

（4 分）　（5 分）

5、解：$\displaystyle\int\frac{3x+1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x+4\int\frac{1}{(x-1)^2+4}\mathrm{d}x$　（1 分）

$\displaystyle=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-2x+5)}{x^2-2x+5}+\int\frac{1}{(\frac{x-1}{2})^2+1}\mathrm{d}x$　（3 分）

$\displaystyle=\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)+\arctan\frac{x-1}{2}+C$　（5 分）

6、解：作换元 $x=\dfrac{1}{u}$，有　（1 分）

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{-u}{\sqrt{1+u^2}}du=-\sqrt{1+u^2}\,\Big|_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(2 分)　　(4 分)　　(5 分)

7、解： 取 $q=x$，则依题意有（1 分）

$$\int_p^x f(x)dx=\sqrt{x^2-p^2}$$（3 分）

而 $$f(x)=(\sqrt{x^2-p^2})'=\frac{x}{\sqrt{x^2-p^2}}.$$（5 分）

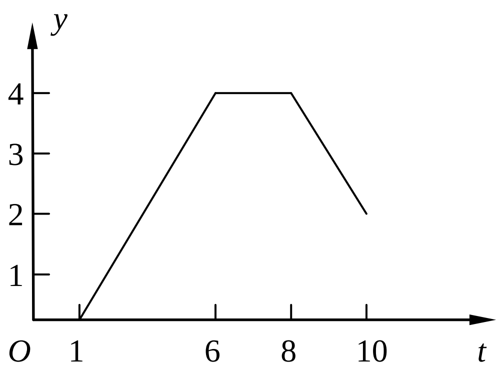
8、解：在[1, 6]上， $f(t)=\frac{4}{5}(t-1)$，（1 分）

在[6, 8]上，$f(t)=4$，

在[8, 10]上， $f(t)=-t+12$，（2 分）

于是有 $\int_1^{10} f(t)dt=10+8+6=24$（4 分）

故平均运动速度为 24/(10−1)=8/3.（5 分）



9、解：将 $f(x)$作奇延拓和周期为 2π的延拓，再将展开的级数限制在[0, π]上，而

$a_n=0,(n=0,1,2,\cdots)$，（1 分）

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx dx=\frac{2(1-\cos\frac{n\pi}{2})}{n\pi},(n=1,2,\cdots)$$（3 分）

于是 $$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin nx,\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$$

（4 分）　　（5 分）

10、解： 显然 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})$$（2 分）

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ 收敛，故原级数收敛，（4 分）

且部分和有 $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2})=1-\frac{1}{(n+1)^n}\to 1$，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$（7 分）

11、解：方程变形为 $y'+\frac{y}{x}=\cos 2x$，于是该方程为一阶线性方程；（2 分）

求解得 $$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int\cos 2x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)=\frac{1}{x}(\int x\cos 2x dx+C)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4x}\cos 2x+\frac{C}{x}$$

（3 分）　　（5 分）

代入 $y(\frac{\pi}{2})=0$ 得 $C=\frac{1}{2}$， 从而 $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4x}\cos 2x+\frac{1}{2x}$ （7 分）

12、解：由 $r^2+1=0$ 得特征根 $r_{1,2}=\pm i$，故对应的齐次方程通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$，（2 分）

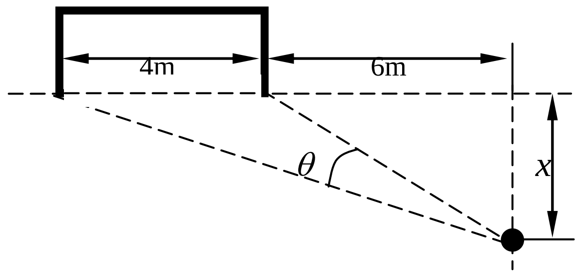
对应 $f_1(x)=e^x$，可设特解为：$y_1^*=Ae^x$ ，解得 $A=\frac{1}{2}$； （4 分）

对应 $f_2(x)=\cos x$，可设特解为：$y_2^*=x(B\cos x+C\sin x)$，解得 $B=0,C=\frac{1}{2}$； （6 分）

于是由叠加原理，原方程的通解为

$$y=Y+y_1^*+y_2^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}x\sin x.$$ （7 分）

13、解：设该球员离底线 x 米，由内错角相等可得射门张角为



$$\theta=\arctan\frac{x}{6}-\arctan\frac{x}{10}，\ x>0;$$ （3 分）

求导得

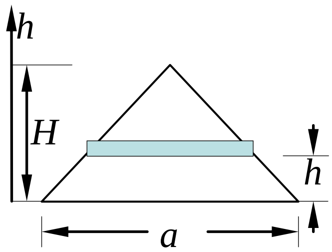
$$\theta'=\frac{6}{36+x^2}-\frac{10}{100+x^2}=\frac{240-4x^2}{(36+x^2)(100+x^2)},$$ （6 分）

令 $\theta'=0$ 可得唯一驻点 $x=2\sqrt{15}$， （7 分）

且 $x<2\sqrt{15}$ 有 $\theta'>0$； $x>2\sqrt{15}$ 有 $\theta'<0$，故 $x=2\sqrt{15}$ 为极大值点，亦是最大值点. 故当该球员距离底线 $x=2\sqrt{15}$m 时，射门的张角最大. （8 分）

14、解：

(1) 记塔基边长 a，塔高 H，建立高度坐标 h 轴，则高度 h 到 h+dh 处一层的体积为(如图) $[\frac{a}{H}(H-h)]^2dh$ （2 分）



于是金字塔体积

$$V=\int_0^H[\frac{a}{H}(H-h)]^2dh=\frac{a^2}{H^2}[-\frac{(H-h)^3}{3}]\Big|_0^H=\frac{1}{3}a^2H$$ （3 分）

代入数据算得 $V=(230)^2\times146/3=2574467\text{m}^3\approx2.57\times10^6\ \text{m}^3$ （4 分）

(2) 记石料密度 γ，则高度 h 到 h+dh 处一层的重量为 $\gamma g[\frac{a}{H}(H-h)]^2dh$，

将这一层向上抬高 h，所作的功为 $\gamma g[\frac{a}{H}(H-h)]^2hdh$ （6 分）

于是所做的总功 $W=\int_0^H\gamma g[\frac{a}{H}(H-h)]^2hdh=\frac{1}{12}\gamma ga^2H^2$ （7 分）

代入数据得 $W=3210\times9.81\times(230)^2\times(146)^2/12=2959062766470\text{J}\approx2.96\times10^{12}$ J

（8 分）

15、解：

(1) $F(-x)=\int_0^{-x}(2t+x)f(t)dt\overset{t=-u}{=}\int_0^{x}(-2u+x)f(-u)(-du)=\int_0^{x}(2u-x)f(-u)du$

$$=\int_0^{x}(2u-x)f(u)du=\int_0^{x}(2t-x)f(t)dt=F(x);$$ （4 分）

故 $F(x)$也是偶函数

(2) $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^{x}(2t-x)f(t)dt=\frac{d}{dx}\int_0^{x}2tf(t)dt-\frac{d}{dx}[x\int_0^{x}f(t)dt]$

$$=2xf(x)-\int_0^{x}f(t)dt-xf(x)=xf(x)-\int_0^{x}f(t)dt$$ （6 分）

$=xf(x)-xf(\xi)$ (积分中值定理，ξ 在 0 与 x 之间) （7 分）

这时若 $f(x)$是减函数，则不论 $x>0$ 或 $x<0$，都有 $x(f(x)-f(\xi))<0$，即 $F'(x)<0$，

从而 $F(x)$也是减函数. （9 分）

16、证： 设 $f(x)$ 在 $x_0\in(0,1)$ 取得最大值 $f(x_0)$，这时因为 $f(x_0)$ 在(0,1) 内取得，由 $f(x)$ 在(0,1)内可导，所以有 $f'(x_0)=0$ （2 分）

于是 $f'(x)$ 在$[0, x_0]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故有

$$f'(x_0)-f'(0)=f''(\xi)x_0,\ (0<\xi<x_0),$$

从而 $|f'(x_0)-f'(0)|=|f''(\xi)x_0|$， 即 $|f'(0)|\le Mx_0$ （*）; （5 分）

又 $f'(x)$ 在$[x_0, 1]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故也有

$$f'(1)-f'(x_0)=f''(\eta)(1-x_0),\ (x_0<\eta<1),$$

从而 $|f'(1)-f'(x_0)|=|f''(\eta)(1-x_0)|$，即 $|f'(1)|\le M(1-x_0)$ （**）; （7 分）

(*)+(**) 便得 $|f'(0)|+|f'(1)|\le Mx_0+M(1-x_0)=M$ （9 分）