

## 2009级高等数学A(1)期末考试试题

### 一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数  $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x^2+1}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , 则此函数为 【      】

- (A) 有界函数      (B) 奇函数      (C) 偶函数      (D) 周期函数

2. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\sin x} = 1$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时, 与  $\varphi(x)$  等价的无穷小量是 【      】

- (A)  $\ln(1-x)$       (B)  $\cos x - 1$       (C)  $\sqrt{1+2x} - 1$       (D)  $\sin |x|$

3. 设  $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处可导, 则应有 【      】

- (A)  $n=0$       (B)  $n>0$       (C)  $n=1$       (D)  $n>1$

4. 设有四个条件: (1)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, (2)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, (3)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, (4)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积. 它们之间的正确关系为 【      】

- (A)  $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$       (B)  $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)$   
(C)  $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$       (D)  $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)$

5. 设  $f(x)$  连续,  $a, b$  为常数, 则  $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y)dy =$  【      】

- (A)  $f(b-a)$       (B)  $f(a+b)$       (C)  $f(b+x) - f(a+x)$       (D)  $f(b-x) - f(a-x)$

### 二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

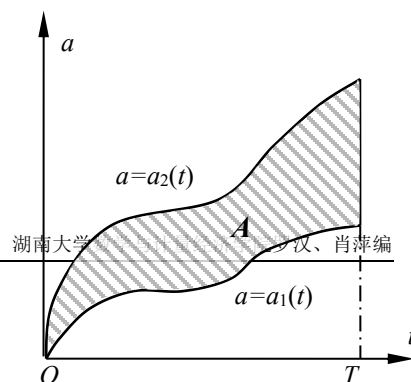
6. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \pi, & x \leq 0 \\ \frac{x}{\sin ax}, & x > 0 \end{cases}$  在点  $x=0$  连续, 则常数  $a =$ \_\_\_\_\_.

7. 设  $f(x) = xe^x$ , 则  $f^{(n)}(x)$  的极小值为\_\_\_\_\_.

8.  $f(x) = e^{2x}$  的带佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式为\_\_\_\_\_.

9. 微分方程  $xy'' + y' = 0$  的通解为\_\_\_\_\_.

10. 设两辆汽车从静止开始加速沿直线前进, 右图中两条曲线  $a=a_1(t)$  和  $a=a_2(t)$  分别是两车的加速度曲线, 则位于这两



条曲线和直线  $t=T (T>0)$  之间的图形 (阴影部分) 面积  $A$  所表示的物理意义为  $T$  时刻的\_\_\_\_\_.

三、计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$ .

12. 设函数  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ , 求导数  $y''$

13. 设函数  $y=y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t + \arctan t \\ y = t^3 + 6t \end{cases}$  所确定, 求二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

14. 求不定积分  $\int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx$ .

15. 已知  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ , 利用分部积分公式计算定积分  $\int_0^\pi f(x) dx$ .

16. 求微分方程  $y'' + y + \sin x = 0$  的通解.

四、应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设曲边梯形由曲线  $y = x + 1/x$  ( $x > 0$ ) 和直线  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $x=a+1$  所围成(其中  $a > 0$ ).

当  $a$  为何值时, 该曲边梯形的面积达到最小, 最小面积是多少?

18. 某车间的容积为  $10,000\text{m}^3$ , 其中一台设备会产生  $0.3\text{m}^3/\text{min}$  的  $\text{CO}_2$ . 为降低空气中  $\text{CO}_2$  的含量, 车间内有一台风量为  $1,500\text{m}^3/\text{min}$  的鼓风机将室外的新鲜空气( $\text{CO}_2$  含量  $0.04\%$ )抽入室内, 同时有排风扇以相同的风量将室内的空气外排. 若假定进入室内的新鲜空气与原有空气能迅速混合, 且每天开工时室内空气中的  $\text{CO}_2$  含量为  $0.12\%$ , (1) 求室内空气中  $\text{CO}_2$  含量的变化规律; (2) 问多长时间后能使  $\text{CO}_2$  含量降低至  $0.08\%$  以下? (3) 讨论室内  $\text{CO}_2$  含量的极限情况.

五、证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

19. 定积分具有性质: 若  $f(x)$  连续且为偶函数, 则  $\forall a > 0$ , 有  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

今设  $x_0$  为一常数, 有连续函数  $g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$  均满足  $g(x_0 - x) = g(x_0 + x)$ .

(1) 试将定积分的上述性质推广到上述函数  $g(x)$  的情形, 并叙述之; (2) 证明(1)的结论.

20. 设  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  内具有二阶连续导数, 且  $f''(x) \neq 0$ , 证明:

(1) 若给定  $(-1, 1)$  内的  $x \neq 0$ , 存在唯一的  $\theta \in (0, 1)$ , 使得  $f(x) = f(0) + xf'(\theta x)$ ;

(2) 对于  $(-1, 1)$  内任意的  $x \neq 0$ , 有  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$ .