高 等 数 学 A(1)试 卷
参 考 解 答

一、计 算 题 Ⅰ

1. 解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos 2x)}{\sin x-\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot(\frac{(2x)^2}{2})}{\tan x(\cos x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{(2x)^2}{2}}{x(-\frac{x^2}{2})}=-4$

2. 解： $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$

而 $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\le 1$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$

3. 解： $y'=b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{b-1}\dfrac{1}{a}\cdot\left(\dfrac{b}{x}\right)^{a}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x}+\left(\dfrac{x}{a}\right)^{b}\cdot a\left(\dfrac{b}{x}\right)^{a-1}\left(-\dfrac{b}{x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x}+\left(\dfrac{x}{a}\right)^{b}\left(\dfrac{b}{x}\right)^{a}\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)^{x}\ln\dfrac{a}{b}$

$$=\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}-\frac{a}{x}+\ln\frac{a}{b}\right)$$

4. 解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{t}+t\right)$

5. 解： 由 $\Delta y\approx dy=f'(x_0)\cdot\Delta x$，有 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$.

取 $f(x)=\cos x$， $x_0=\dfrac{\pi}{6}$， $\Delta x=-\dfrac{\pi}{180}$，则 有 $f'(x)=-\sin x$，

于是 $\cos 29^\circ=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{180}\right)\approx\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{180}\right)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right)\approx 0.866+0.009=0.875$$

二、计算题 Ⅱ

6. 解： 令 $x=\sin t(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$，则

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t dt}{1+\cos t}=\int\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt=t-\tan\frac{t}{2}+C=t-\frac{\sin t}{1+\cos t}+C$$

$$=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$$

7. 解： $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x dx}{x^2}=\int_1^{+\infty}\arctan x d(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\arctan x|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

8. 解： 由已知条件可得 $f(0)=0$，而 $f'(0)=\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}|_{x=0}=1$，故所求切线方程为 $y=x$.

9. 解：分离变量，原方程可化为 $\frac{1}{1+e^{-x}}dx=-\tan y dy$，

或 $$\frac{e^x}{1+e^x}dx=-\frac{\sin y}{\cos y}dy$$

两边积分，得 $\ln(1+e^x)=\ln|\cos y|+\ln C$，

于是原方程的通解为 $1+e^x=C\cos y$.

10. 解： 方程变形为 $y'+\frac{y}{x}=\sin x$，于是该方程为一阶线性方程;

求解得

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int\sin x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)=\frac{1}{x}(\int x\sin x dx+C)=-\cos x+\frac{\sin x}{x}+\frac{C}{x}$$

代入 $y(\frac{\pi}{2})=0$ 得 $C=-1$，从而 $y=-\cos x+\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{x}$

三、应 用 题.

11. 解：（1）设 t 时刻超速车位置 $x(t)$，警车位置 $y(t)$，两车距离为 $s(t)$，则有 $s^2=x^2+y^2$，

于是有 $2s\frac{ds}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$，即 $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{s}(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt})=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt})$

由 $x=0.6$，$y=0.8$，$ds/dt=-20$，$dy/dt=-70$，代入解得：$dx/dt=60$ km/h.

（2）由题意，经时间 t 后，警车到达 $y=0.8-70t$，违章车到达 $x=0.6+60t$，则两车距离为

$$s=\sqrt{(0.8-70t)^2+(0.6+60t)^2}=\sqrt{1-40t+8500t^2}$$

有 $\frac{ds}{dt}=\frac{-40+17000t}{2\sqrt{1-40t+8500t^2}}$，解得唯一驻点 $t=\frac{1}{425}$(h) ≈0.00235

即警车距路口 $y=0.8-70/425\approx0.6353$km 时，两车距离最近.

12. 解：由牛顿第二定律有 $m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\frac{ds}{dt}$

得二阶线性微分方程初值问题 $\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{ds}{dt}=g$，$s(0)=0, s'(0)=0$

解得其对应的线性齐次方程通解为 $s_1(t)=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}$

而原方程的一个特解为 $s_2(t)=\frac{mg}{k}t$， 于是 $s(t)=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}t$

且有 $s'(t)=-\frac{k}{m}C_2e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$

由初始条件得 $C_1+C_2=0,\ -C_2\frac{k}{m}+\frac{mg}{k}=0$， 故 $C_1=-\frac{m^2g}{k^2}$，$C_2=\frac{m^2g}{k^2}$，

于是 $$s(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$$

四、讨 论 和 证 明 题.

13. 解：(1) $S = S_1 + S_2 = \int_0^a (ax - x^2)dx + \int_a^1 (x^2 - ax)dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$

令 $S' = a^2 - \frac{1}{2} = 0$，解得唯一驻点 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$，

又 $S''(\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$，故 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$时使面积 $S_1 + S_2$达到最小；

(2) $V = \pi\int_0^a (a^2x^2 - x^4)dx + \pi\int_a^1 (x^4 - a^2x^2)dx = \frac{4\pi}{15}a^5 - \frac{\pi}{3}a^2 + \frac{\pi}{5}$

令 $V' = \frac{20\pi}{15}a^4 - \frac{2\pi}{3}a = \pi a(\frac{20}{15}a^3 - \frac{2}{3}) = 0$，解得唯一驻点 $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，

又 $V''(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}) > 0$，故 $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$时可使对应的图形绕 x 轴旋转一周得到的立体体积达到最小.

14. 证：右边第二项中的积分有

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx = \int_a^b (x-a)(x-b)df'(x)$$

$$= [(x-a)(x-b)f'(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)[2x-(a+b)]dx$$

$$= -\int_a^b [2x-(a+b)]df(x) = -\{[2x-(a+b)]f(x)\}_a^b + 2\int_a^b f(x)dx$$

$$= -(b-a)[f(a)+f(b)] + 2\int_a^b f(x)dx$$

故 $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$$