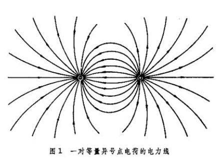
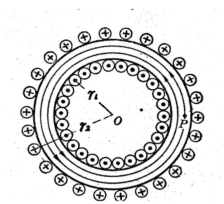
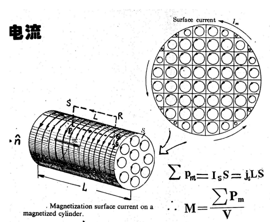
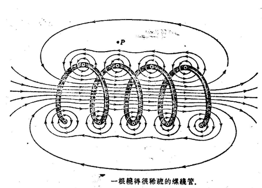
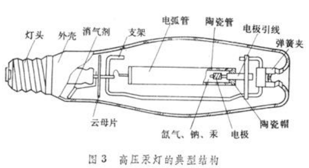
普通物理A2

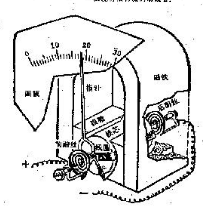












电 磁 学

（Electromagnetism）

▲ 电磁学研究的是电磁现象的基本概念和基本规律：

- 电荷、电流产生电场和磁场的规律；
- 电场和磁场的相互联系；
- 电磁场对电荷、电流的作用；
- 电磁场对物质的各种效应。

▲ 电磁学的教学内容:

- 静电学（真空、介质、导体）
- 稳恒电流的磁场 （真空、介质）
- 电磁场与电磁波

电磁学内容按性质来分, 主要包括“场”和“路”两部分. 这里我们侧重于从场的观点来进行阐述. “场”不同于实物物质, 它具有空间分布, 这样的对象从概念到描述方法, 例如对矢量场的描述方法及其基本特性——引入“通量”和“环流”两个概念及相应的通量定理和环路定理, 对初学者来说都是新的。

电磁学的学习特点

1. 与力学相比，电磁学的思路与学习方法不同

力学 → 牛顿运动定律 → 动量规律 功能规律

电磁学 → 电现象 磁现象 电生磁 磁生电 → 电磁场方程组

2. 与中学相比，加深了数学与物理的结合

高等数学的微积分、矢量代数的运用。

第11章　真空中的静电场

§11.1　电荷　库仑定律

§11.2　电场与电场强度

§11.3　高斯定理

§11.4　电势

§11.5　等势面与电势梯度

作业：练习册

静电场 —— 相对观测者静止的电荷产生的电场

§1　电荷　库仑定律

一、电荷的基本性质

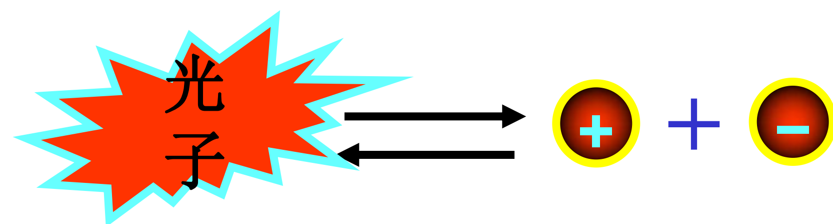
1. 两种电荷

2. 电荷守恒定律

在一个与外界没有电荷交换的系统内，不管发生什么物理过程，正负电荷代数和保持不变

高能光子与重原子核作用可以转化为电子偶；

电子偶也能湮没为光子。



3. 电荷量子化

物体带电量变化是不连续的，只能是元电荷 e 的整数倍。

$q = ne \qquad n = \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$　　　$e = 1.602\times10^{-19}$C(库仑)

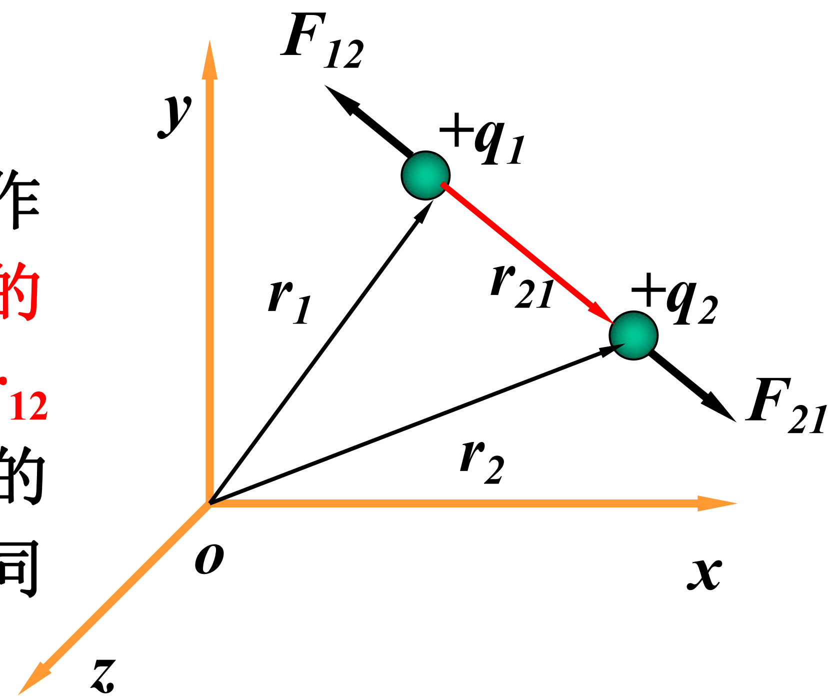
4. 电荷的相对论不变性

在不同的参照系内观察，同一个带电粒子的电量相同。

二、库仑定律, 静电力的叠加原理

1. 库仑定律

真空中两个静止点电荷之间相互作用力的大小与它们的电量q_1 和q_2的乘积成正比，与它们之间的距离r_{12}（或r_{21}）的平方成反比；作用力的方向沿着这两个点电荷的连线，同号相斥，异号相吸。



$$\boxed{\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{\vec{r}}_{21} = -\vec{F}_{12}}$$

国际单位制（SI）中：

F—N; q — C; r —m

实验定出： $k = 8.9880\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2} \approx 9.0\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$

▲ 库仑定律适用的条件：

- 真空中点电荷间的相互作用
- 施力电荷对观测者静止（受力电荷可运动）

▲ 有理化：引入常量ε_0，令 $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

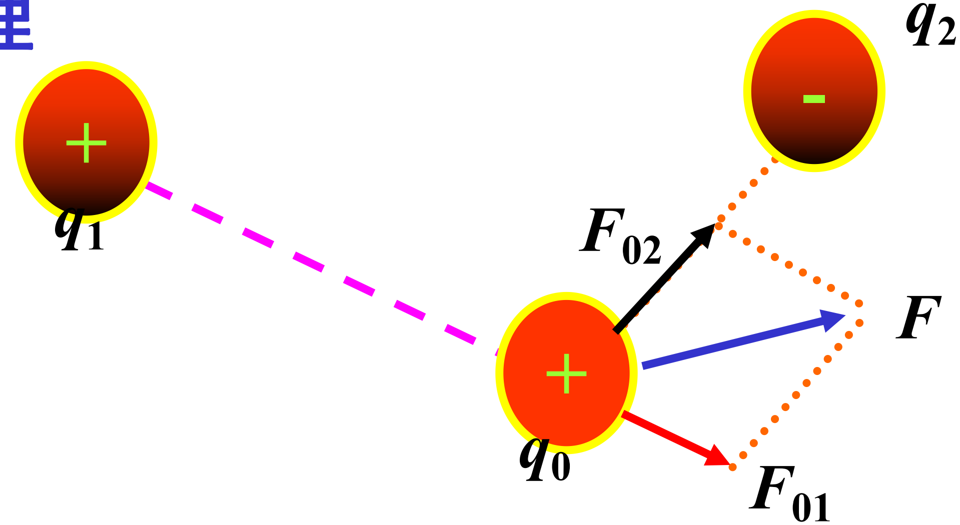
有：$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4\pi k}=8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}$

ε_0—真空介电常数

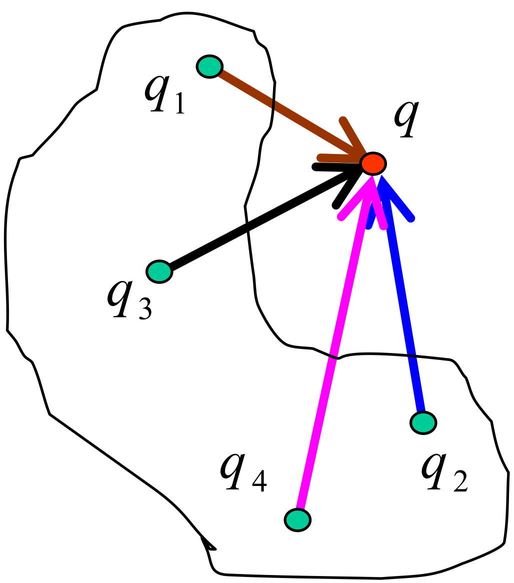
有理化后的库仑定律：

$$\boxed{\vec{F}_{21}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^2}\hat{\vec{r}}_{21}=-\vec{F}_{12}}$$

2. 静电力的叠加原理



$$\vec{F} = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02}$$



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q_0}{r_i^2} \hat{r}_i$$

库仑定律和叠加原理相配合，原则上可以求解静电学中的全部问题。

例11.1 氢原子中电子和质子的距离为5.3×10⁻¹¹m。求此二粒子间的静电力和万有引力各为多少？

解：根据库仑定律可得两粒子间静电力大小：

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2} = \frac{9.0\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{(5.3\times10^{-11})^2}$$

$$= 8.1\times10^{-8}\ (\mathbf{N})$$

根据万有引力定律可得两粒子间万有引力大小：

$$F_g = G\frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6.7\times10^{-11}\times9.1\times10^{-31}\times1.7\times10^{-27}}{(5.3\times10^{-11})^2}$$

$$= 3.7\times10^{-47}\ (\mathbf{N})$$

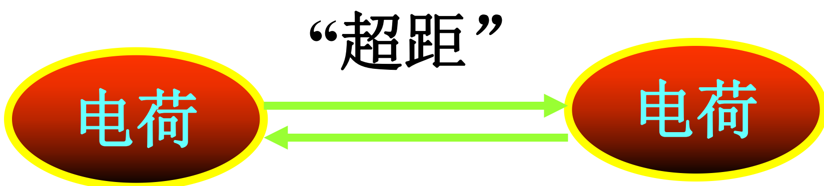
可以看出，氢原子中电子与质子的相互作用的静电力远大于万有引力，前者约为后者的10^{39}倍。

§2 电场与电场强度

一、电场：

1. 电场概念的引入

早期：电荷“超距”作用理论



直接给予，不需要中间物传递，也不需要时间

后来：法拉第提出“近距”作用

并提出**力线**和**场**的概念

通过电场给予，传播需要时间，其速度为光速

电荷周围存在由它产生的电场。

2. 电场的物质性体现在：

a. 电场中的带电体，受电场的作用力。

b. 移动带电体，电场力作功：场具有能量

c. 变化的电磁场以光速传播：场具有动量、质量

场和实物是物质存在的不同形式。

但实物具有不可入性，而场可以*叠加*。

二、电场强度

从力的角度研究电场

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

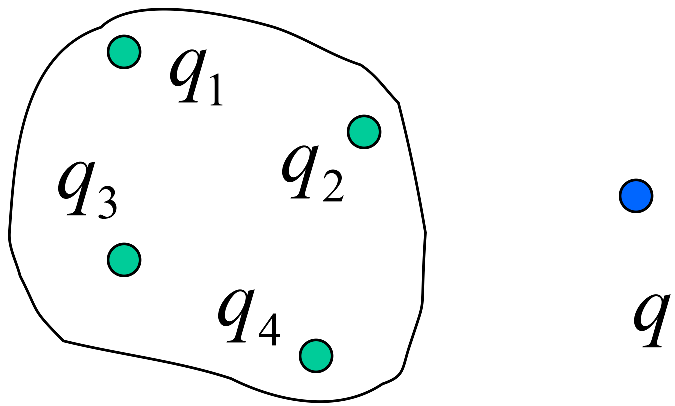
单位正电荷（检验电荷）在电场中某点所受到的力。

它与检验电荷无关，反映电场本身的性质。

注意: 电场强度是空间位置 矢量函数。 $\vec{E} = \vec{E}(r)$

三、场强的叠加原理：

电场中任何一点的总场强等于各个点电荷在该点各自产生的场强的矢量和。这就是场强叠加原理。



$$\vec{E}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{q}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\vec{F}_i}{q}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$$

四、场强的计算

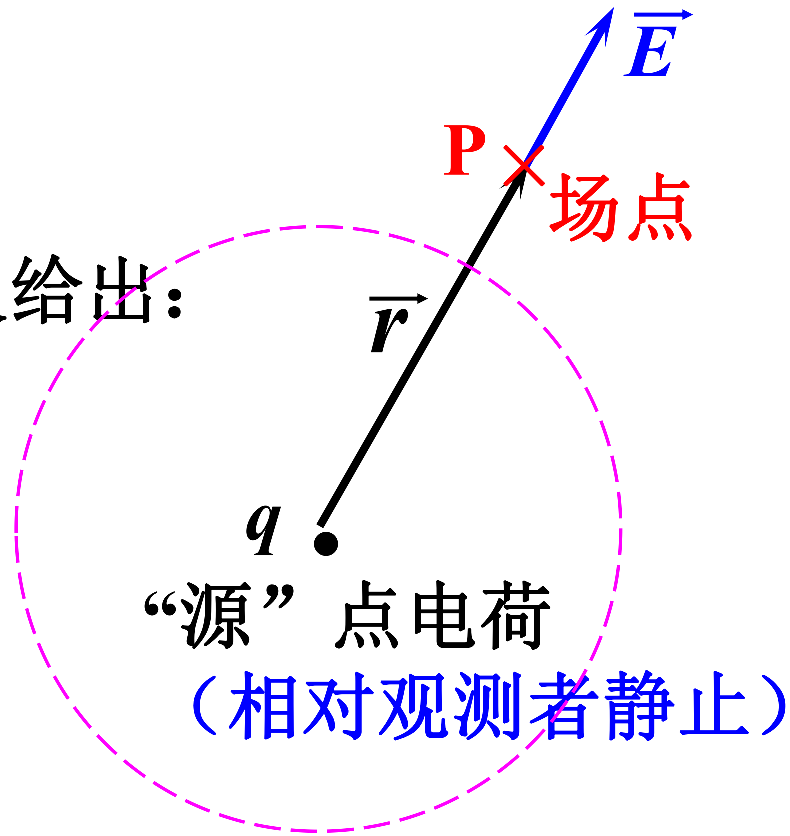
1. 点电荷的场强

由库仑定律和电场强度定义给出：

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}}$$

若$q>0$　　沿径矢方向

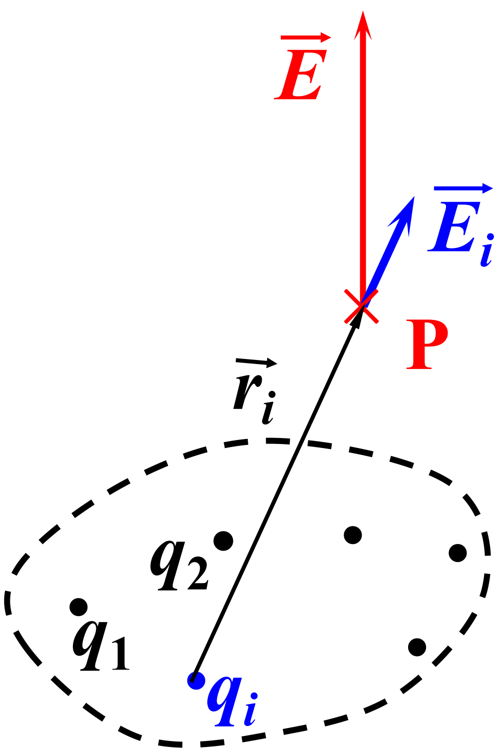
若$q<0$　　沿径矢反方向



点电荷电场强度分布的特点：**球对称性；**

$E\propto\frac{1}{r^2}$,但距点电荷等远的各点，E相等。

2. 点电荷系的场强



点电荷系

点电荷q_i 的场强：

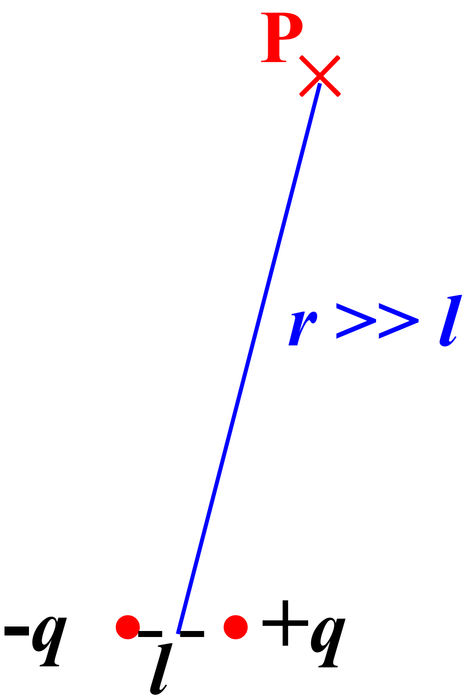
$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{\vec{r}}_i$$

由叠加原理，点电荷系的总场强：

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{\vec{r}}_i$$

例：电偶极子的场强

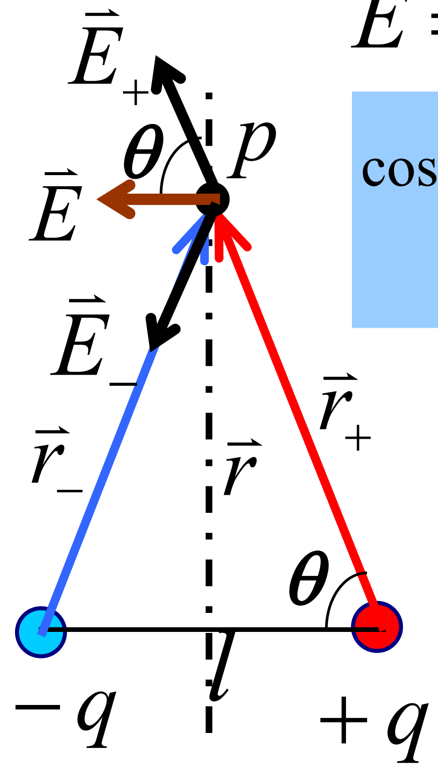
电偶极子：一对靠得很近的等量异号的点电荷所组成的电荷系



电偶极子是个相对的概念，它也是一种实际的物理模型（如有极分子）。

例题11.2： 求电偶极子中垂线上离电偶极子甚远处（$r>>l$）任一点的场强。

$$\vec{E}=\vec{E}_{+}+\vec{E}_{-}$$



$$\cos\theta=\frac{l/2}{(r^2+\frac{l^2}{4})^{\frac{1}{2}}}$$

解： $E_{+}=E_{-}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+\frac{l^2}{4})}$

$$E=E_{+}\cos\theta+E_{-}\cos\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\bullet\frac{ql}{(r^2+\frac{l^2}{4})^{3/2}}$$

因 $r>>l$，上式可近似为：

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\bullet\frac{ql}{r^3}$$

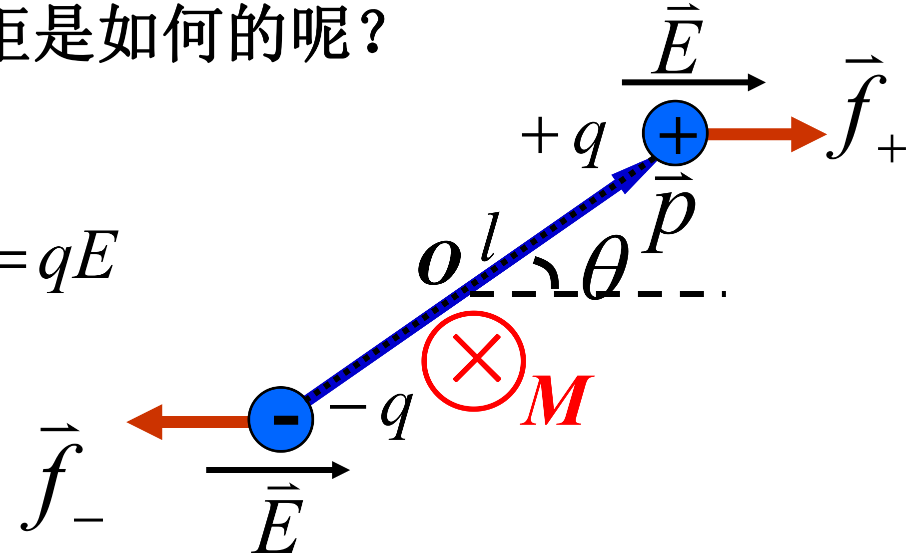
$$\vec{E}=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

用 $\vec{l}$ 表示从 $-q$ 到 $+q$ 的矢量，定义电偶极矩（电矩）为：

$$\boxed{\vec{P}=q\vec{l}}$$

电偶极子在均匀电场中静止时所受的力和力矩是如何的呢？

$$\vec{F} = q\vec{E}$$



解：正负电荷受力：$\left|\vec{f}_+\right| = \left|\vec{f}_-\right| = qE$

$$\therefore \vec{F}_{合} = \left|\vec{f}_+ + \vec{f}_-\right| = 0$$

系统质心速度不变，因两力不在同一直线上，故有力矩作用。

各力对质心的力矩

$$\vec{M} = 2\times\frac{\vec{l}}{2}\times q\vec{E} = q\vec{l}\times\vec{E} = \vec{p}\times\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{P}\times\vec{E}}$$

该力矩总是使电矩转向场强的方向

$\theta = 0,\ \pi$ 时，

$\vec{M} = 0$

3. 任意带电体（连续带电体）电场中的场强：

（1） 将带电体分成很多元电荷 **d*q***, 先求出它产生的场强的大小 **d*E*** 和方向

（2）按坐标轴方向分解，求得 $\mathrm{d}E_x, \mathrm{d}E_y, \mathrm{d}E_y$

（3） （对带电体）积分，可得总场强：

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x \quad E_y = \int \mathrm{d}E_y \quad E_z = \int \mathrm{d}E_z \qquad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

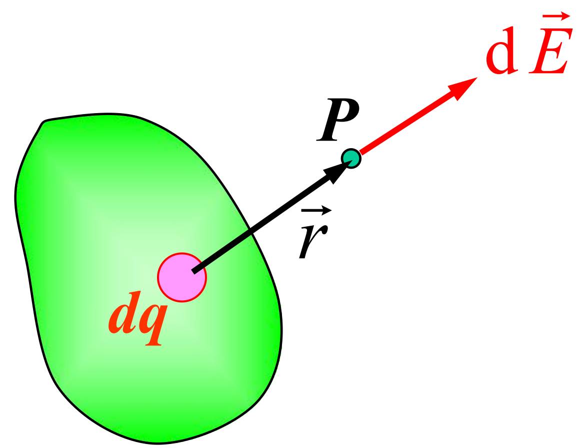
注意：直接对d*E* 积分是常见的错误　一般 $E \neq \int \mathrm{d}E$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}q &= \rho\,\mathrm{d}V \\ \mathrm{d}q &= \sigma\,\mathrm{d}S \\ \mathrm{d}q &= \lambda\,\mathrm{d}l \end{aligned}}$$

$\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta V} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$ 体密度

$\sigma = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta S} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$ 面密度

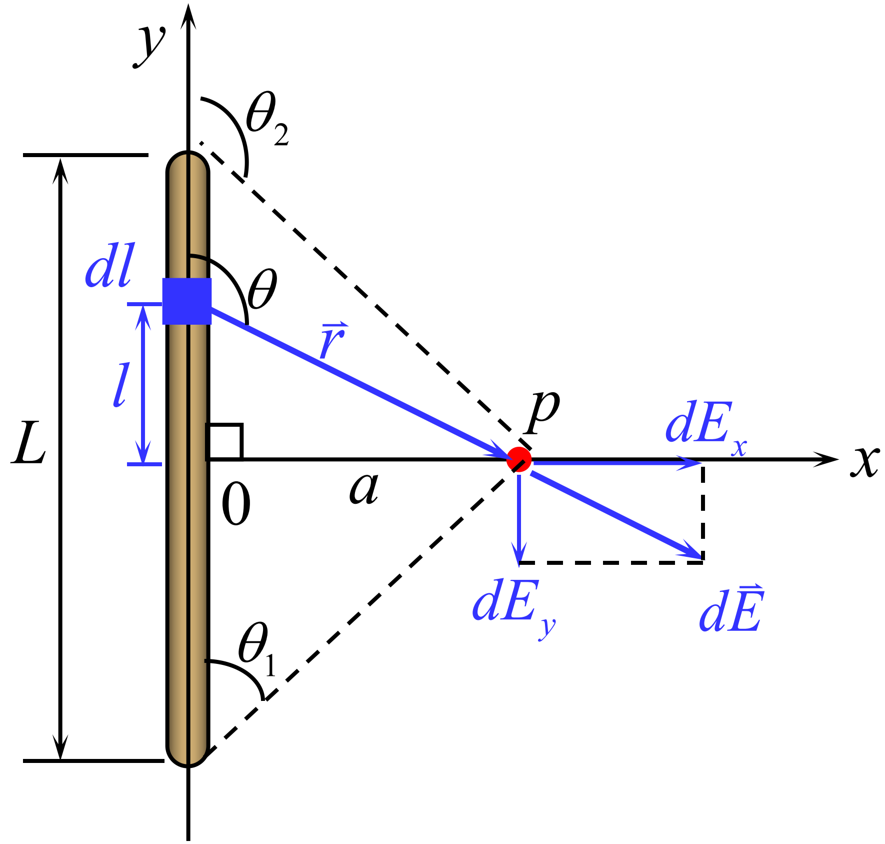
$\lambda = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta l} = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$ 线密度



例11.3： 计算均匀带电荷直线(棒)在任意一点 *p* 的场强。

(已知 L, $\lambda > 0$, a)

解： $dq = \lambda dl$



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2}$$

$$dE_x = dE \sin\theta$$

$$dE_y = -dE\cos(\pi - \theta)$$

$$= dE\cos\theta$$

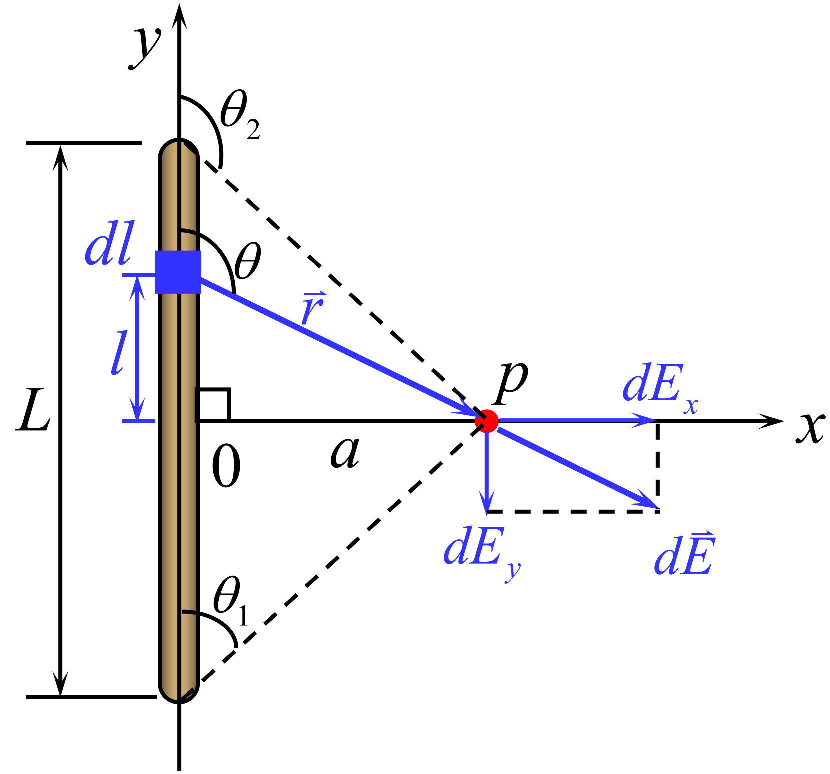
$$l = a\,\mathrm{ctg}(\pi - \theta)$$

$$dl = a\csc^2\theta d\theta.$$

$$r^2 = a^2\csc^2\theta.$$

$$\therefore dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \cdot d\theta$$

$$\mathrm{d}E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot \mathrm{d}\theta$$



$$\mathrm{d}E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta d\theta$$

$$E_y = \int_L dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_x = \int_L dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$\vec{E}$的大小和方向可由 E_x, E_y确定.

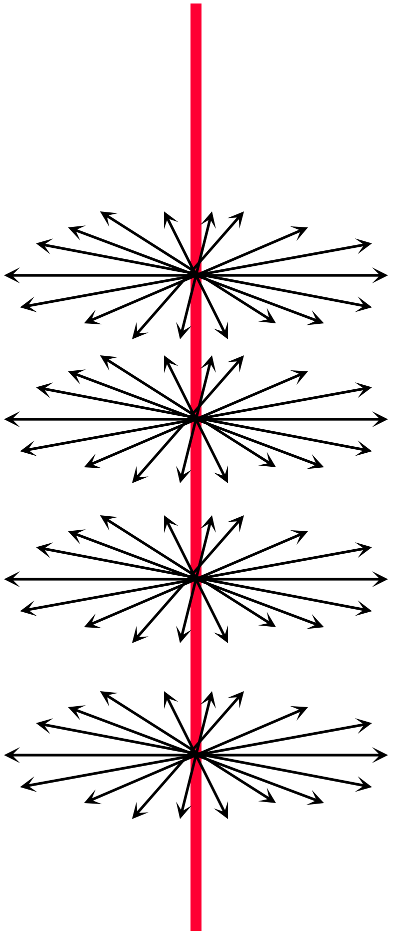
讨论

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

若 $L \to \infty$, $\theta_1 \to 0$, $\theta_2 \to \pi$,

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} \qquad E_y = 0$$



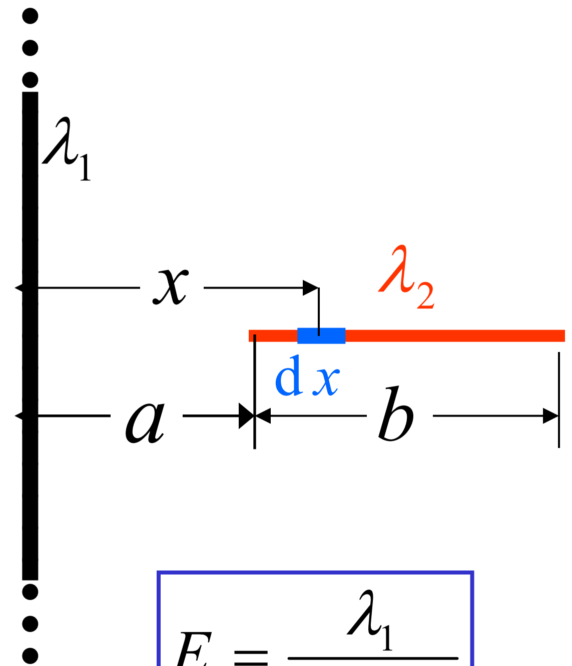
$L \to \infty$,

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

无限长均匀带电直线的场强

随堂小议

均匀带电长直线（电荷线密度为λ_2）长度为b，与另一均匀带电长直线（电荷线密度为λ_1）共面放置，如图所示，求该均匀带电直线受的电场力。



$$\boxed{E=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

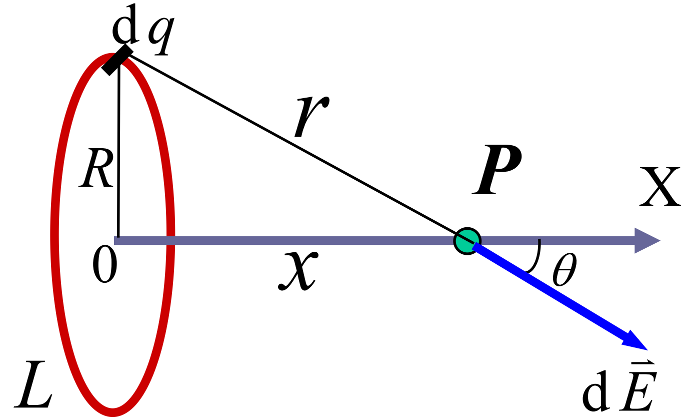
解：取dx

$$\mathrm{d}F=E\,\mathrm{d}q$$

$$=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 x}\lambda_2\,\mathrm{d}x$$

$$F=\int_a^{a+b}\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 x}\lambda_2\,\mathrm{d}x=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+b}{a}$$

练习： 求均匀带电圆环轴线上一点的场强。设圆环带电量为 q，半径为R。



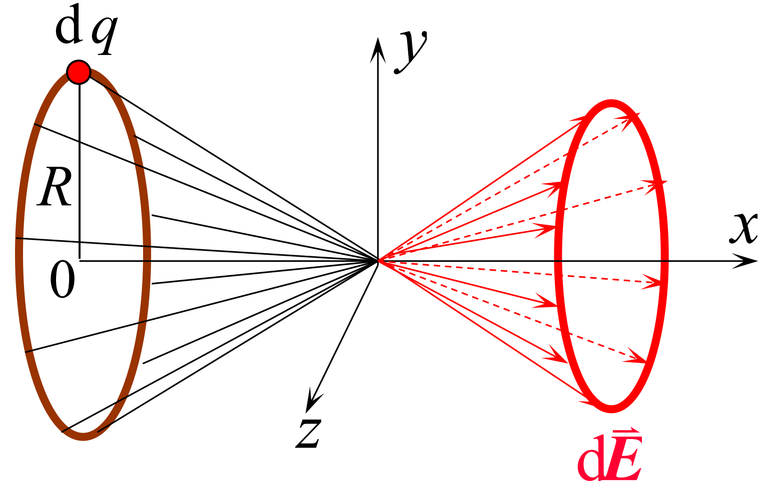
解： $\mathrm{d}E = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\quad \mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta$

由对称性 $\quad E_y = E_z = 0$

$$E = \int_L \mathrm{d}E_x = \int_L \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_L \mathrm{d}q$$

$$E = \frac{\cos\theta \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

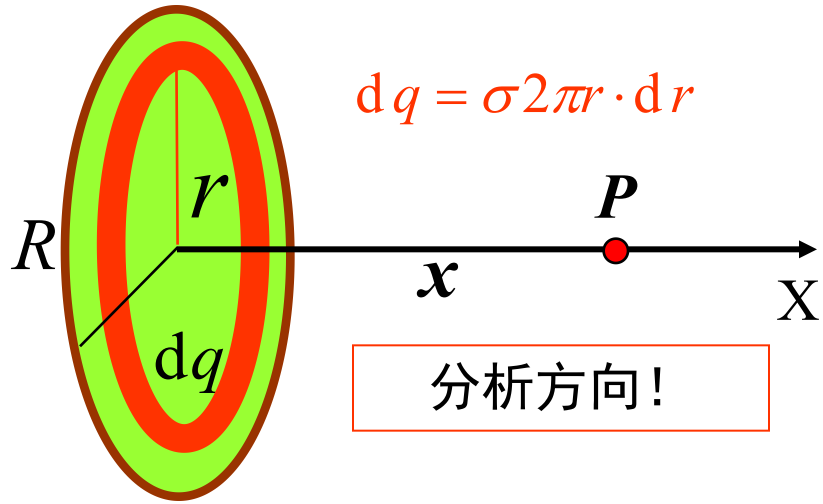


讨论：$x >> R$ $\quad E \simeq \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$

当dq 位置发生变化时，它所激发的电场矢量构成了一个圆锥面。

相当于点电荷激发的电场。

练习：求均匀带电圆盘轴线上一点的场强。 设圆盘带电量为 q ，半径为 R。



解：$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}qx}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$E_x(p)=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}]$$

讨论：

1.当 $x \ll R$,

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

相当于无限大带电平面附近的电场，可看成是均匀场，场强垂直于板面，正负由电荷的符号决定。

讨论：2.当 $x \gg R$

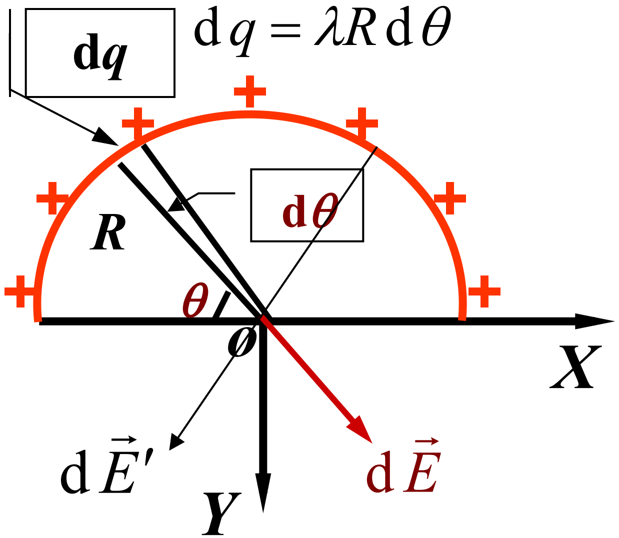
$$E\approx\frac{\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

远离带电圆面处，相当于点电荷的场强

[附录]泰勒展开：

$$\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}=(1+\frac{R^2}{x^2})^{-1/2}=1-\frac{1}{2}(\frac{R}{x})^2+\ldots..$$

练习： 计算半径为R均匀带电量为q 的半圆环中心o点的场强。



$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{R^2}$$

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\,\mathrm{d}\theta}{R}\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\sin\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\,\mathrm{d}\theta}{R}\sin\theta$$

$$E_x=\int\mathrm{d}E_x=\int_0^{\pi}\frac{\lambda\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

或者分析对称性！

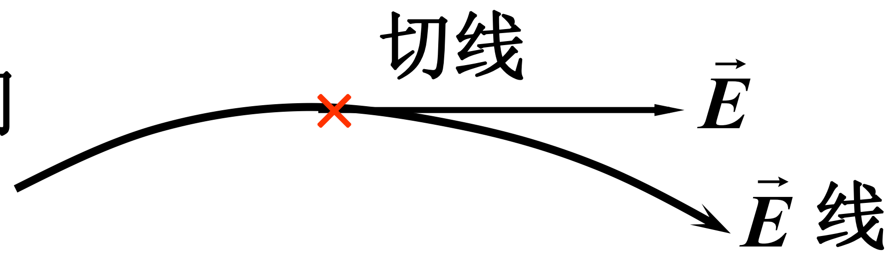
$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=\int_{\theta 0}^{\pi}\frac{\lambda\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$\vec{E}=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\vec{j}$$

§3 高斯定理

一、电力线

用一些假想的有方向的空间曲线形象描述场强分布。

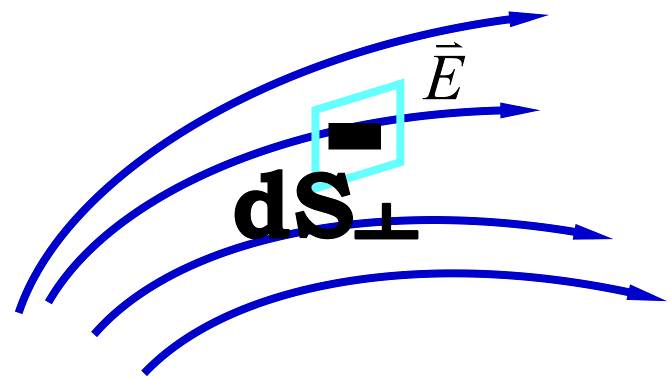


1.规定：

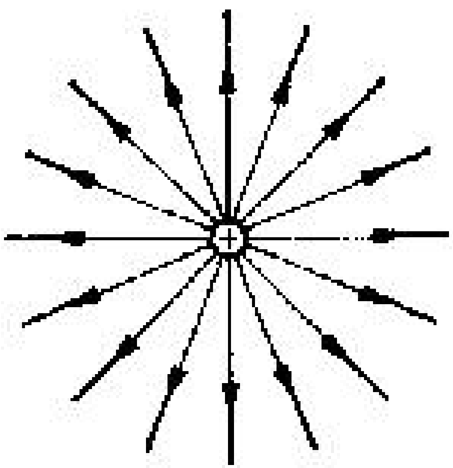
(1)曲线上任一点的切线方向代表该点的场强方向；

(2)垂直通过某点单位面积上的电场线数目代表该点的场强的大小。

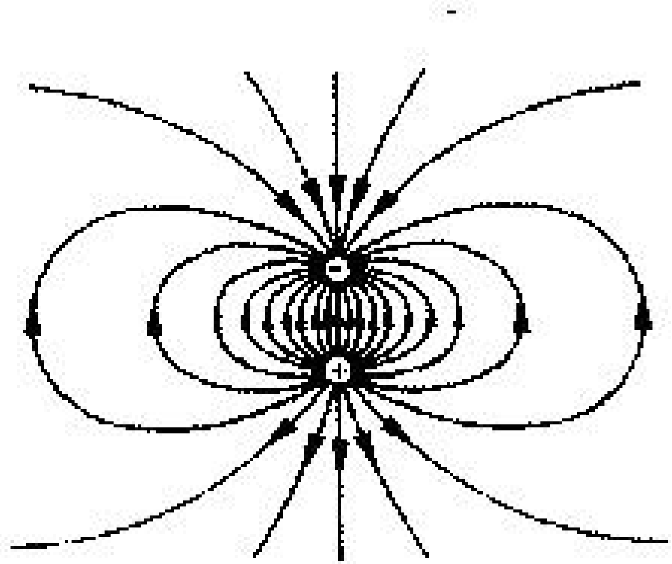
$$E=\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}S_\perp}$$



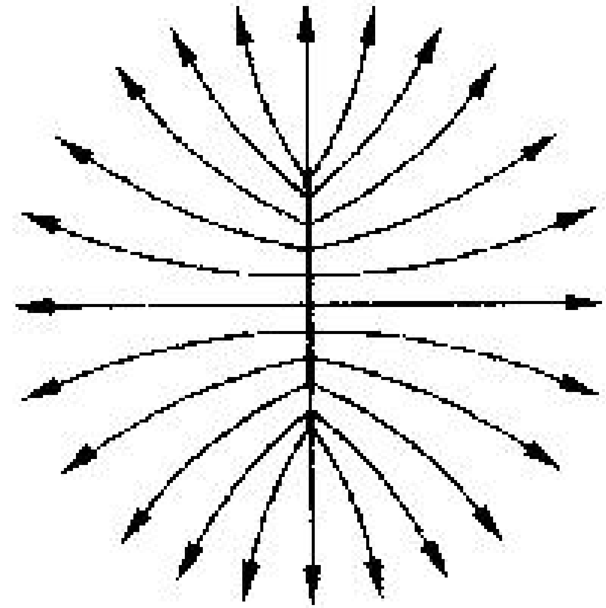
几种电荷的 $\vec{E}$ 线分布：



带正电的点电荷



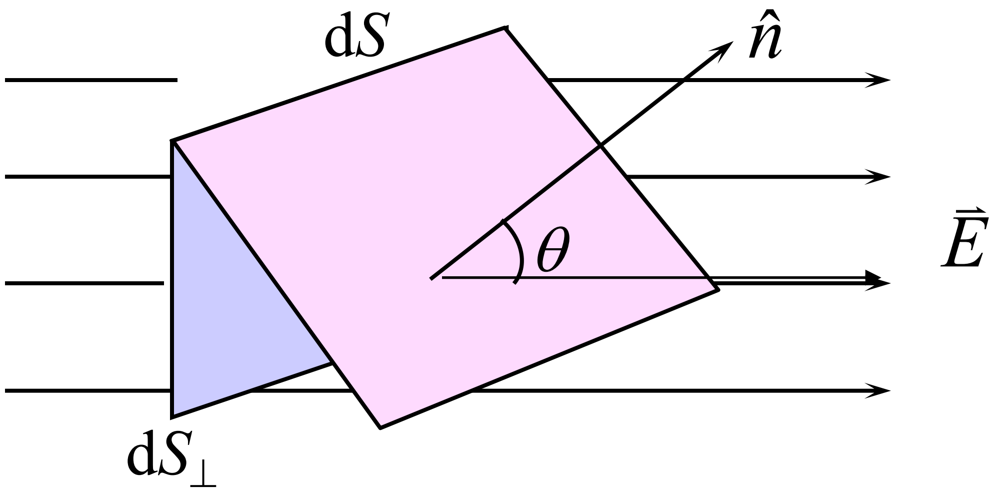
电偶极子



均匀带电的直线段

二、电通量

1 概念—— 通过某一曲面的电场线条数。单位：N m²/C。



$$\mathrm{d}S_\perp = \mathrm{d}S\cos\theta$$

定义：面积元矢量

$$d\vec{S} = dS \cdot \hat{n}$$

大小即面元的面积。

方向取其法线方向。

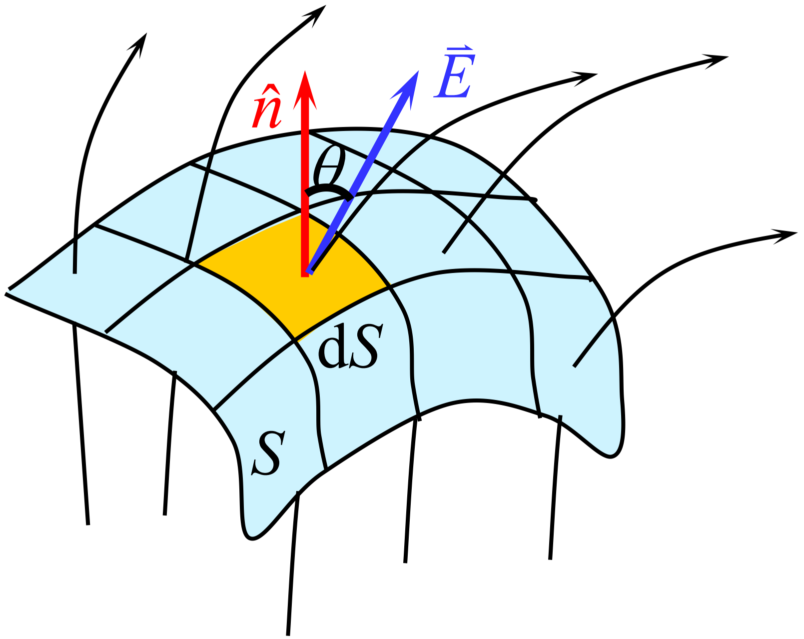
2 计算

（1）面积元与$\vec{E}$垂直　$d\Phi_e = EdS_\perp$

（2）面积元与$\vec{E}$不垂直　$d\Phi_e = EdS\cos\theta$

$0 \le \theta < \pi/2$，$\mathrm{d}\Phi_e$ 为正；　$\pi/2 < \theta \le \pi$，$\mathrm{d}\Phi_e$ 为负

（3）非均匀电场　任意曲面



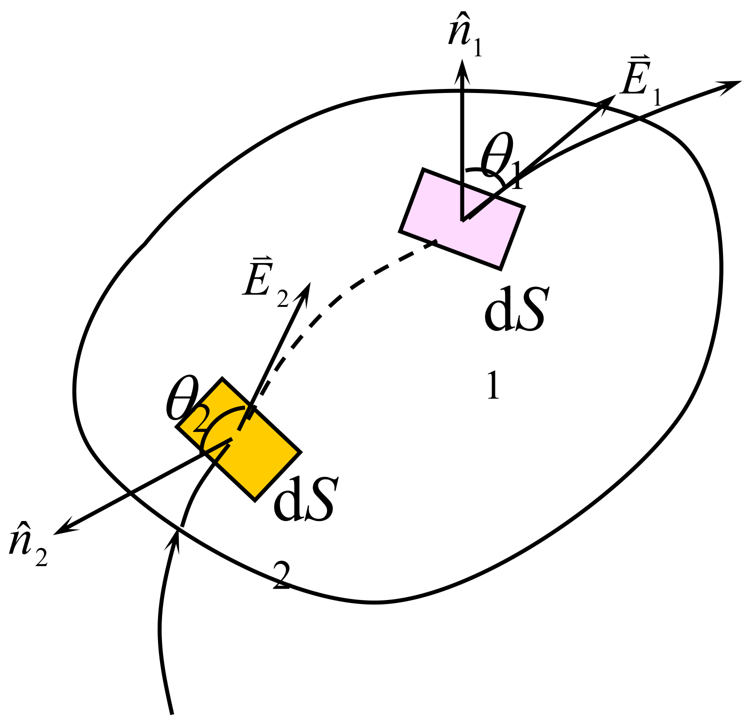
$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

闭合曲面： $$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

对于封闭曲面(规定外法线方向为正）



穿出：$0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_e > 0$

穿入：$\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi, \quad \mathrm{d}\Phi_e < 0$

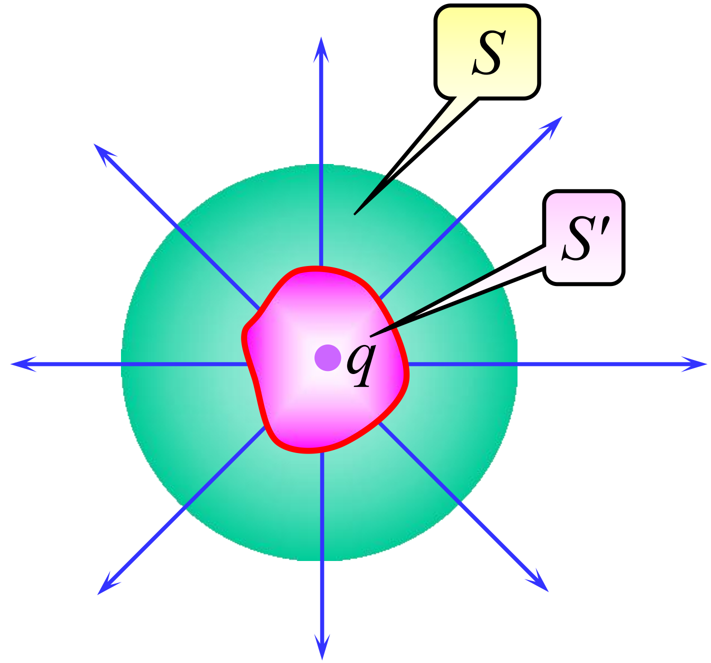
通过整个封闭曲面的电通量就等于穿出和穿入该封闭曲面的电力线的条数之差.

三、 高斯定理

1). 讨论点电荷 q 的电场.

(1) 曲面包围点电荷 q .

通过球面的电通量



$$\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}S$$

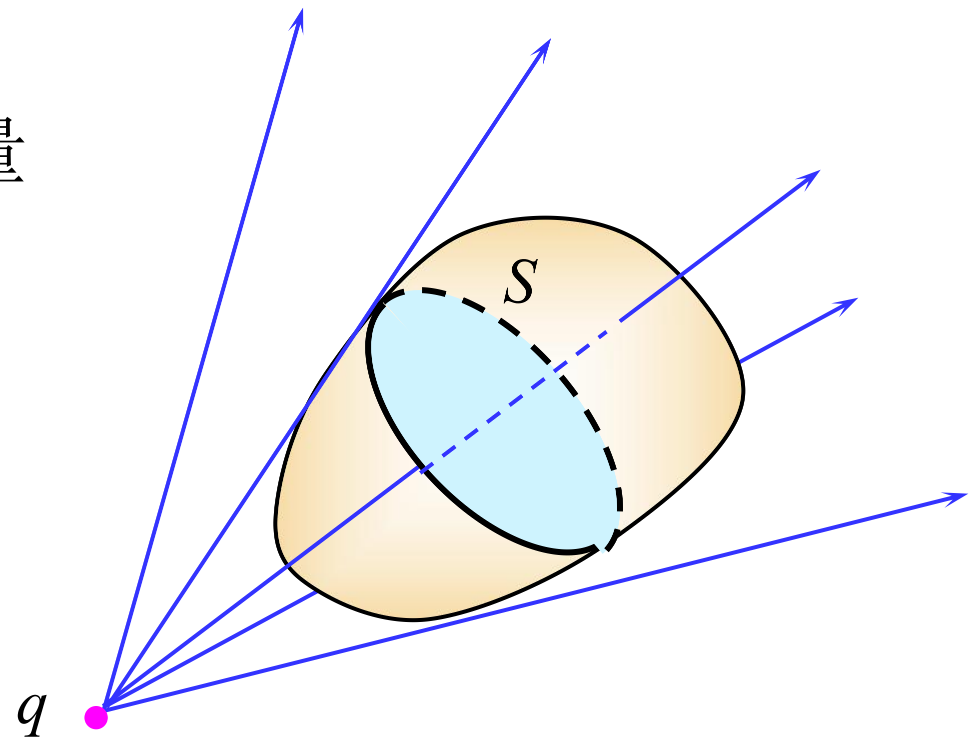
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oint_s \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

显然, 通过任意包围点电荷 q 的闭合面的电通量都等于 q/ε_0 .

(2) 曲面不包围点电荷 q .

通过曲面 S的电通量

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

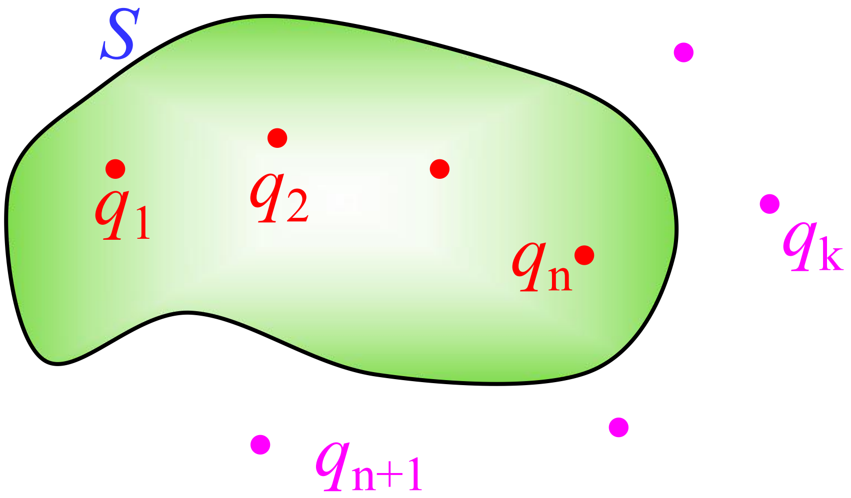


2). 讨论点电荷系的电场

$q_1, \cdots, q_n, \cdots, q_k$. 构成一电荷系.

曲面内: $q_1, q_2, \cdots, q_n$.

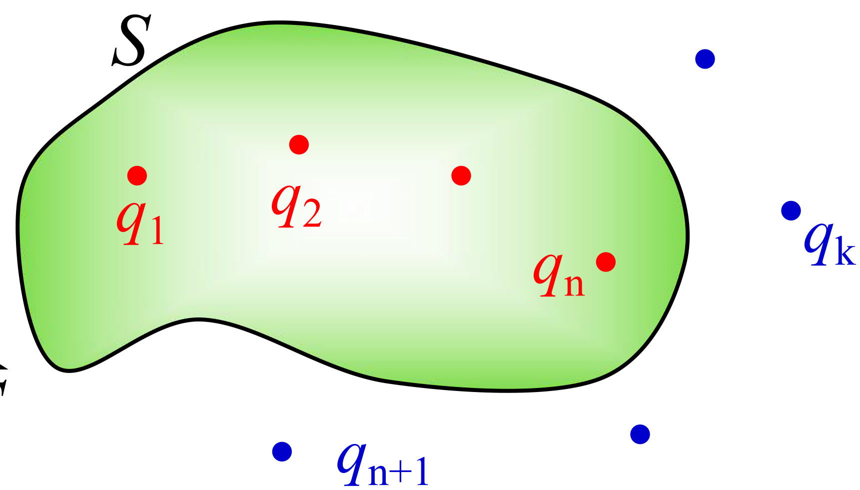
曲面外: $q_{n+1}, \cdots, q_k$.



空间任意一点的电场

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{k} \vec{E}_i$$

通过曲面 **S** 的电通量



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

内 $$= \oint_S \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \cdots + \oint_S \vec{E}_n \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

外 $$+ \oint_S \vec{E}_{n+1} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \cdots + \oint_S \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

封闭曲面内q_i产生的电通量为 $\Phi_{ei} = q_i / \varepsilon_0$;

封闭曲面外q_i产生的电通量为 $\Phi_{ei} = 0$

通过封闭曲面的电通量为:

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \underline{\underline{\sum_i q_{内}}}$$

封闭曲面内所有电荷的电量的代数和

高斯定律：在真空中的静电场内，通过任意封闭曲面的电通量等于该封闭曲面所包围的电荷电量代数和的$1/\varepsilon_0$倍.

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{内}$$

$\sum_i q_{内}$ —— 在封闭曲面内所有电荷的电量的代数和.

注意：虽然电通量只与高斯面内电荷有关，但是面上电场却与面内、面外电荷都有关。

高斯定理表明静电场是有源场，电荷就是静电场的源。

电场线不能形成闭合曲线。

高斯定理和库仑定律的关系

① 高斯定理和库仑定律二者并不独立。高斯定理可以由库仑定律和场强叠加原理导出。反过来，把高斯定理作为基本定律也可以导出库仑定律。

② 两者在物理涵义上并不相同。库仑定律把场强和电荷直接联系起来, 在电荷分布已知的情况下由库仑定律可以求出场强的分布。而高斯定理将场强的通量和某一区域内的电荷联系在一起，在电场分布已知的情况下，由高斯定理能够求出任意区域内的电荷。

③ 库仑定律只适用于静电场, 而高斯定理不但适用于静电场和静止电荷, 也适用于运动电荷和变化的电磁场。

四. 高斯定理的应用举例

只有当电荷和电场分布具有某种对称性时, 才可用高斯 定律求场强.

利用高斯定律解 $\vec{E}$ 较为方便

步骤:（1）由电荷分布对称性分析电场的对称性

（2）据电场分布的对称性选择合适的闭合曲面

（3）应用Gauss定律计算场强.

关键: 选取合适的闭合曲面（Gauss 面）.

常见的电荷分布的对称性：

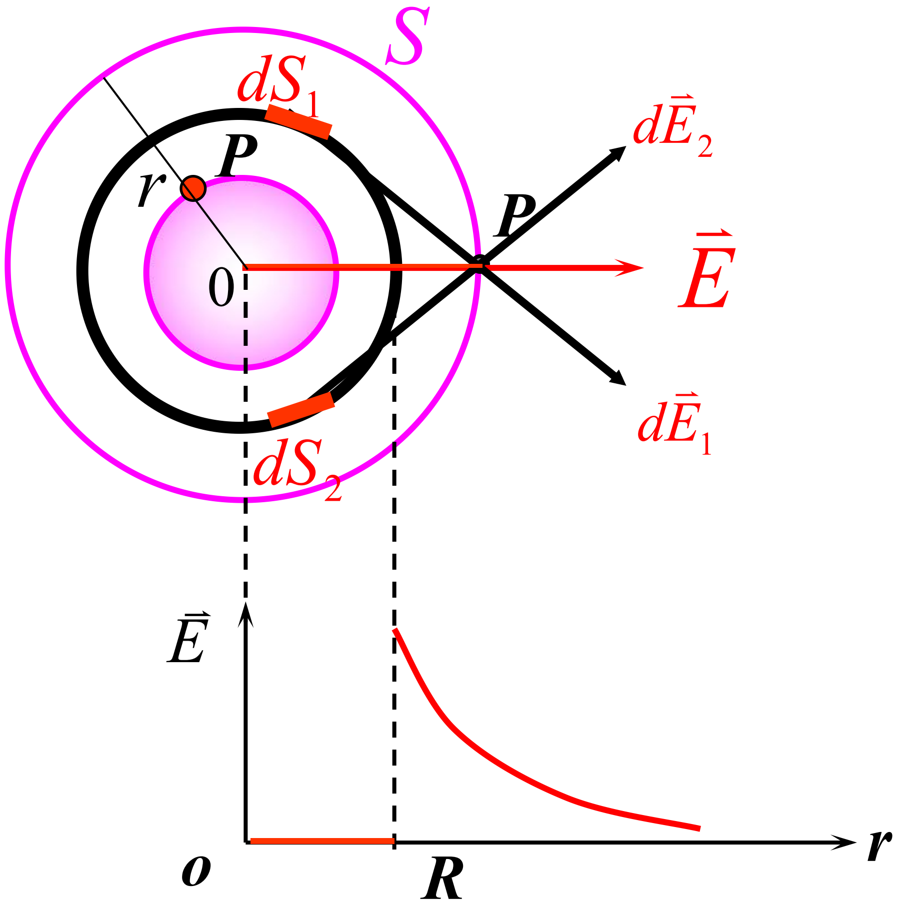
	球对称	柱对称	面对称
均匀带电的	球体 球面 (点电荷)	无限长 柱体 柱面 带电线	无限大 平板 平面

1）均匀带电球面的电场分布 (*R*, *q*)

解：电荷分布球对称性 ⇒

电场分布球对称性，

方向沿径向。

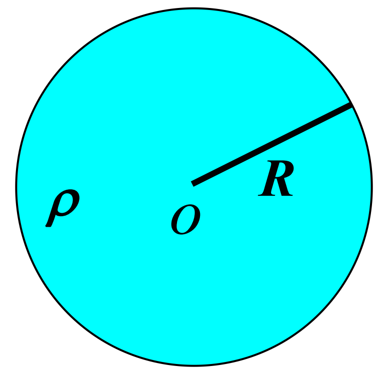


$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2} \ (\boldsymbol{r} > \boldsymbol{R}) \\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \ \ (\boldsymbol{r} < \boldsymbol{R}) \end{cases}$$

2）均匀带电球体的电场分布

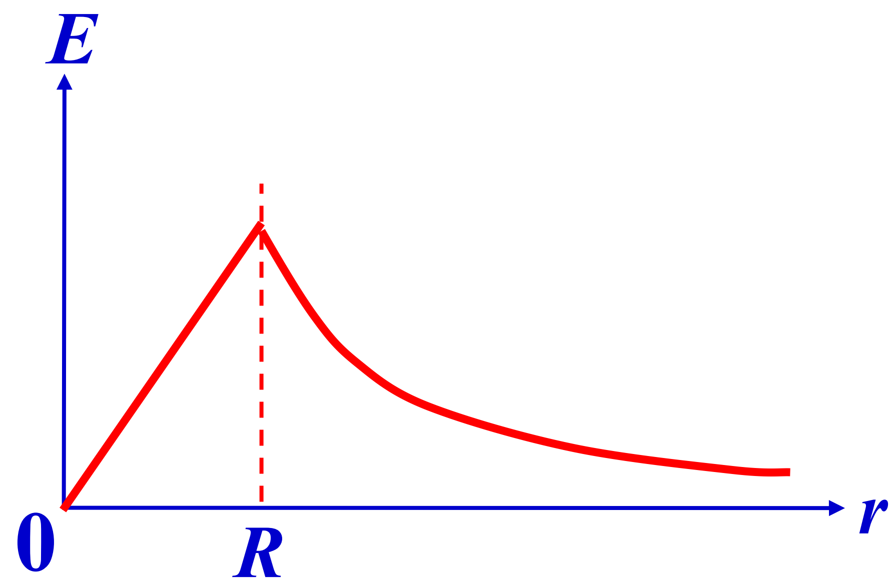


球体内：

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}\hat{r}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

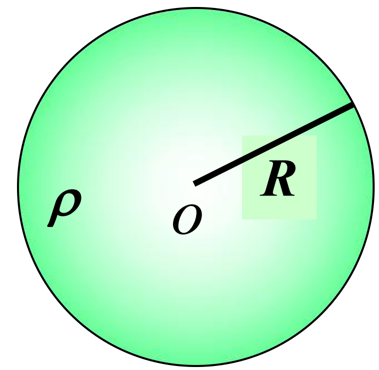
球体外：

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



思考

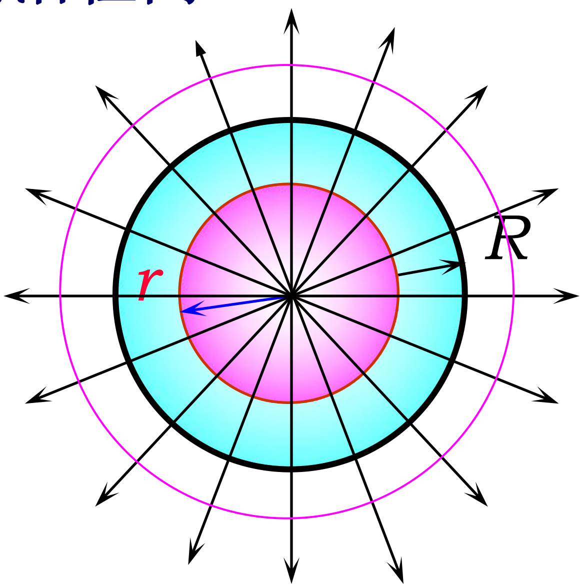
真空中半径为R,电荷电量体密度为$\rho(r)=kr$ (k是常量)球体，其场强又分布如何？



$$\vec{E}=\begin{cases} \dfrac{k}{4\varepsilon_0}r^2 & (r<R) \\ \dfrac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2} & (r>R) \end{cases}$$

[练习]均匀带电球体的电场（球半径为R，体电荷密度为ρ）。

解：电场分布也应有球对称性，方向沿径向。



作同心且半径为r的高斯面

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

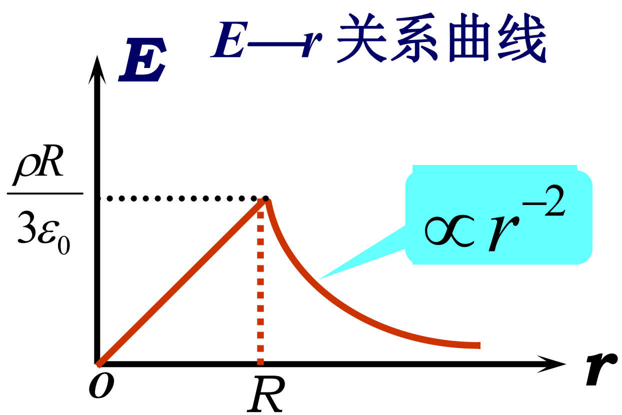
$$E = \frac{\sum q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$r < R$时，高斯面内电荷

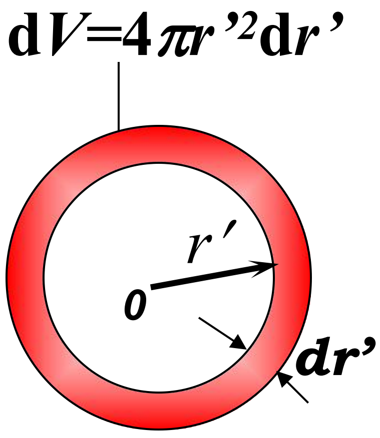
$$\sum q = \int \rho \mathrm{d}V = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$$

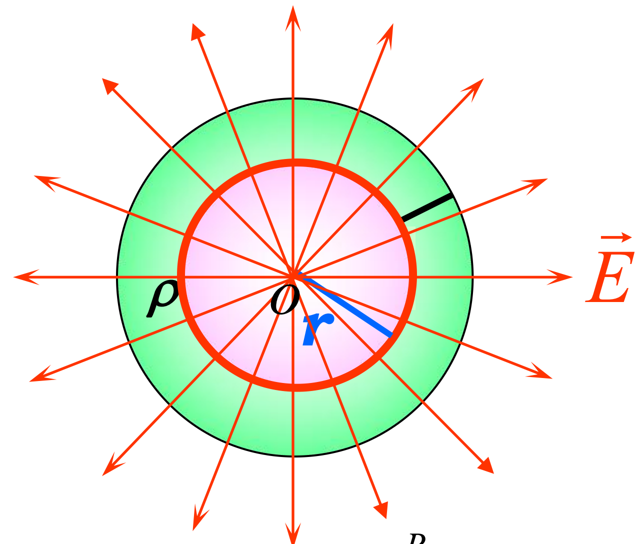
$r > R$时，高斯面内电荷

$$\sum q = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \qquad E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$



[练习] 计算真空中半径为R, 电荷电量体密度为$\rho(r)=kr$（k是常量）球体的场强分布。





$$\oint\!\!\!\oint_{S_{内}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{S_{内}} \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r kr' 4\pi r'^2 dr'$$

$$\oint\!\!\!\oint_{S_{外}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R kr 4\pi r^2 dr$$

$$E4\pi r^2 = \frac{4\pi k}{4\varepsilon_0} r^4 \qquad E_{r<R} = \frac{k}{4\varepsilon_0} r^2 \qquad E_{r>R} = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

3）无限长均匀带电直线的电场分布.(线电荷密度为 λ)

•对称性的分析　•取合适的高斯面

•计算电通量

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

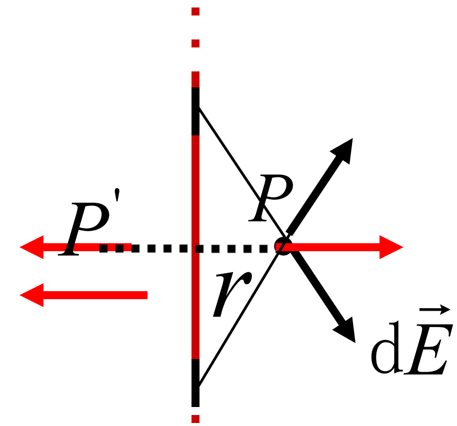
$$= \oint_{\text{侧}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{\text{上底}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{\text{下底}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

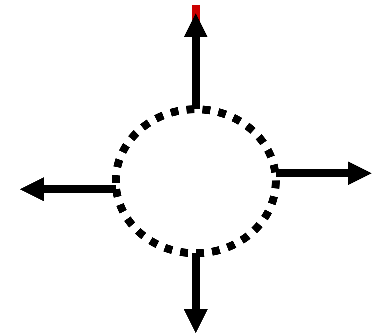
$$= \oint_{\text{侧}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 2\pi r l$$

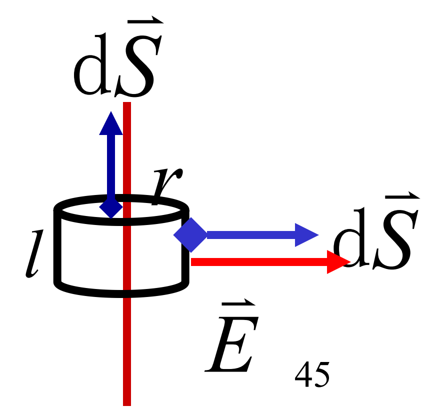
•利用高斯定律解出*E*

$$E\cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{内}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot(\lambda l)$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

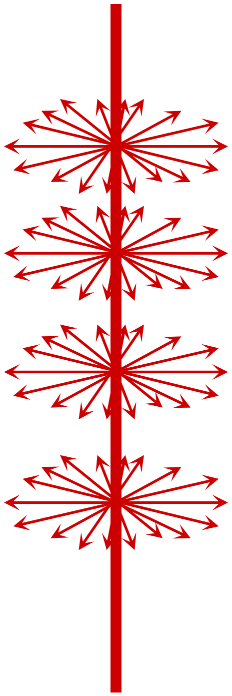






无限长带电直线场的分布是：

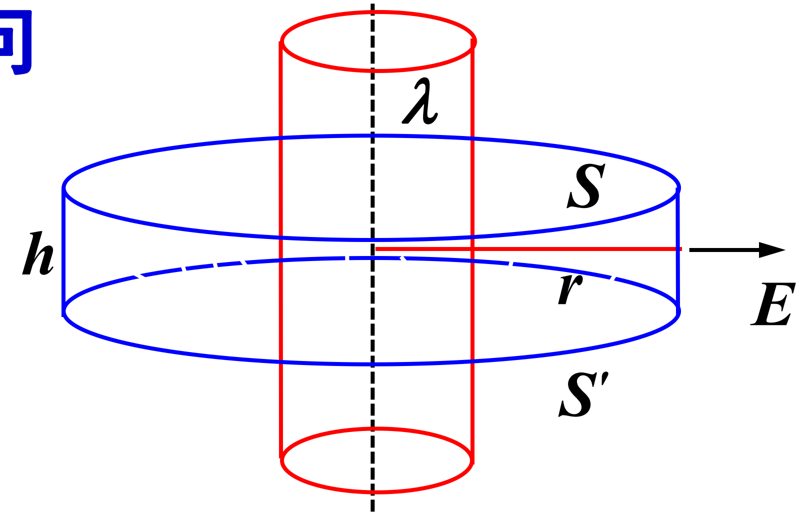
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$



4）无限长圆柱面（线电荷密度λ）的电场分布

解.（1）场强轴对称沿径向

（2）选半径r高h的同轴圆柱面为高斯面



（3）柱面外

$$E2\pi rh+\iint_{S}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\iint_{S'}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\lambda h/\varepsilon_0$$

$$E2\pi rh=\lambda h/\varepsilon_0$$

$$\boxed{E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},\quad (r>R)}$$

（4）圆柱面内

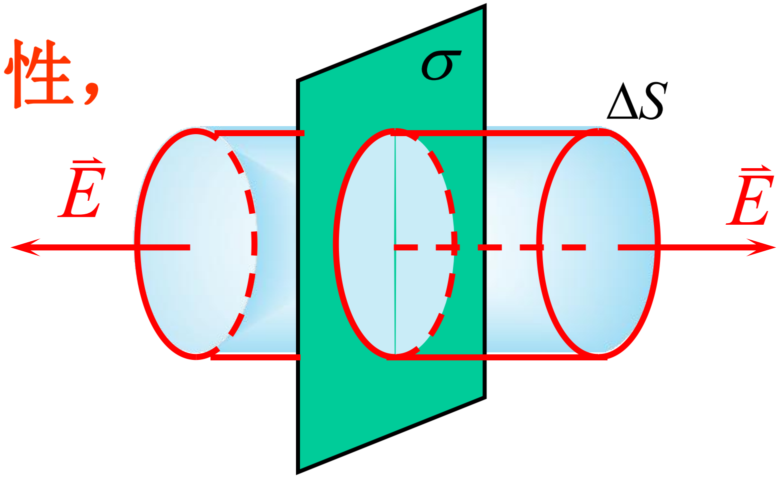
$$E=0,\quad (r<R)$$

课后练习：

若为无限长带电圆柱体(*R*,体密度为$\rho(r)=kr$ (*k*是常量)), 其场强如何分布?

5）无限大均匀带正电平面的电场分布(已知σ)

解：电场分布也应有面对称性，方向沿法向。



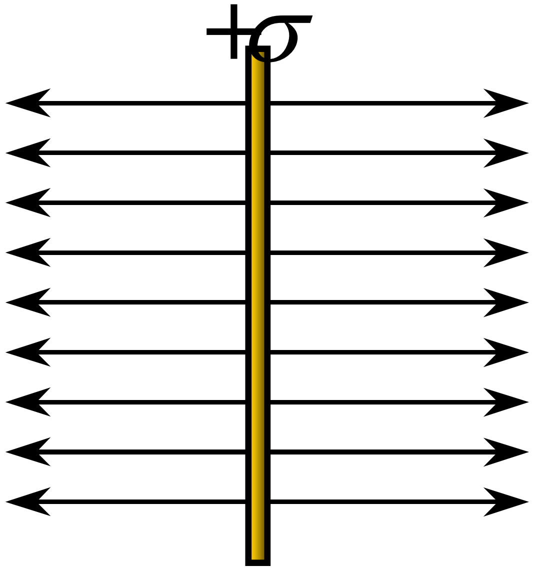
$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint_{\text{两底}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint_{\text{侧}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

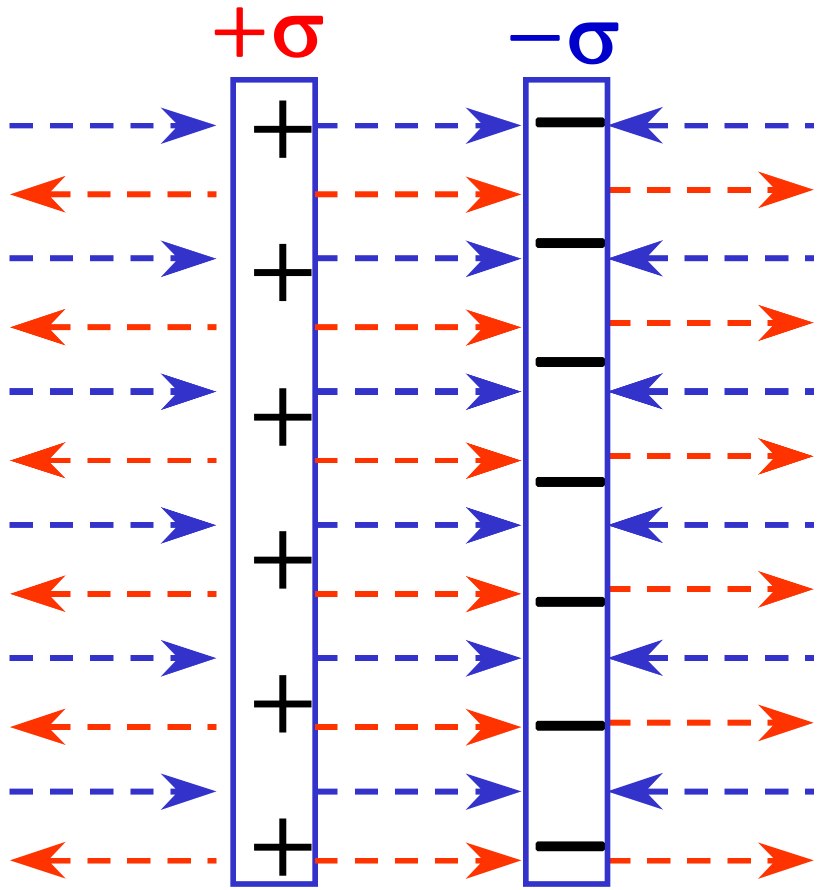
$$= 2E\cdot\Delta S + 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma\cdot\Delta S)$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

方向与平面垂直。



与板垂直的均匀场



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

【思考】带等量异号电荷的两个无限大平板之间的电场为 σ/ε_0 ，板外电场为 0 。

讨论：

1、电荷分布无对称性，只用高斯定理能求场强分布吗？

$\rho(x_0, y_0, z_0)$　　$\vec{E}(x, y, z) = ?$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(S)} q_i$$

不能。但这不在于数学上的困难。

高斯定理只是静电场两个基本定理之一，与下面讲的环路定理结合，才能完备描述静电场。

2、对所有平方反比的有心力场，高斯定理都适用。

引力场场强：$\vec{g} = -\dfrac{Gm}{r^2}\hat{r}$

通过闭合曲面通量：$\oiint_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi G\sum_i m_i$

总结：

场的观点　场强叠加原理

点电荷场叠加（任意电荷分布）→电场分布

高斯定理（电荷分布有对称性）→电场分布

$\boxed{\text{小结}}$ 应用高斯定理求场强的要点：

适用对象：有球、柱、平面对称的某些电荷分布。

方法要点：（1）分析 $\vec{E}$ 的对称性；

（2）选取高斯面的原则：

1）需通过待求 $\vec{E}$ 的区域；

2）在 S 上待求 $\vec{E}$ 处，$\vec{E} \mathbin{//} \mathrm{d}\vec{s}$ 且等大，

使得 $\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = E\int \mathrm{d}s$，其余处必须有

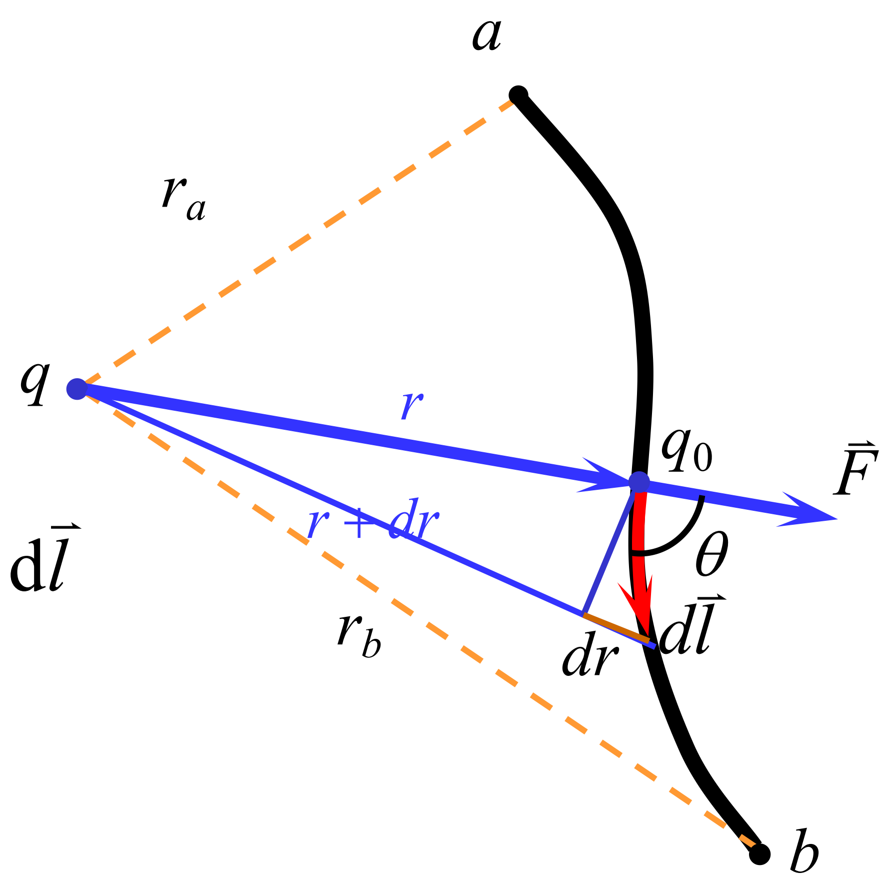
$$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \begin{cases} \text{或} \quad E = 0, \\ \text{或} \quad \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{s}\,。 \end{cases}$$

§4 电势

一. 静电场的保守性

1. 点电荷的电场

计算把q_0从a点移到b点电场力所作的功



$$A_{ab}=\int_{(a)}^{(b)}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{(a)}^{(b)}q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

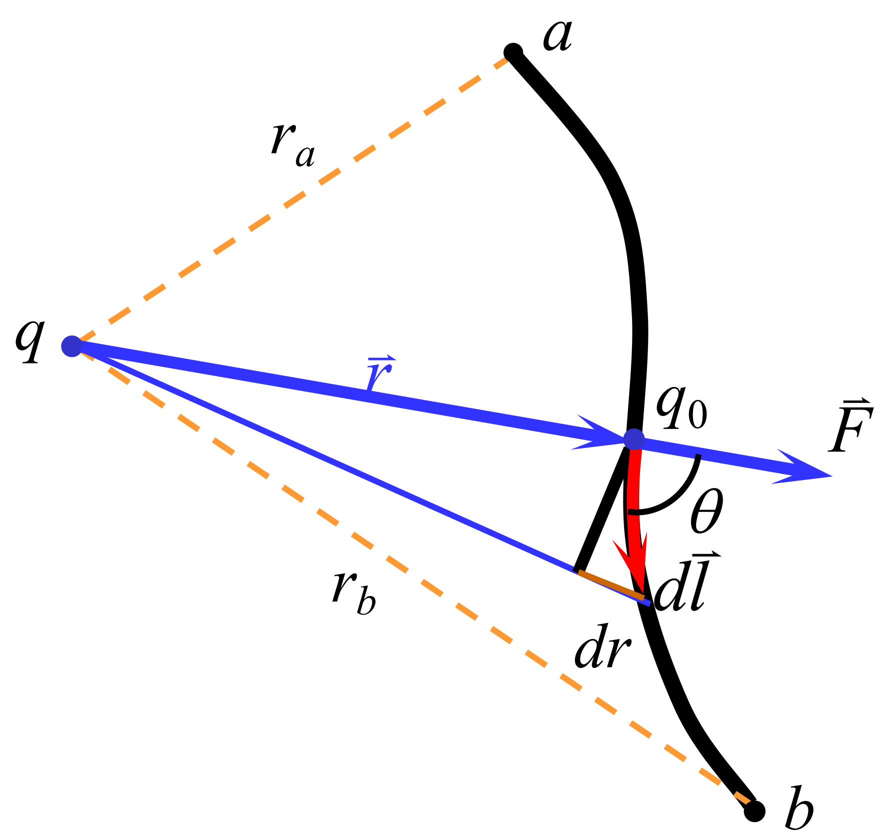
$$\therefore\quad \frac{A_{ab}}{q_0}=\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$ ——电场强度$\vec{E}$沿路径ab的线积分

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r},$$

$$\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=E\cos\theta dl=E\mathrm{d}r$$

$$A_{ab}=q_0\int_{r_a}^{r_b}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$



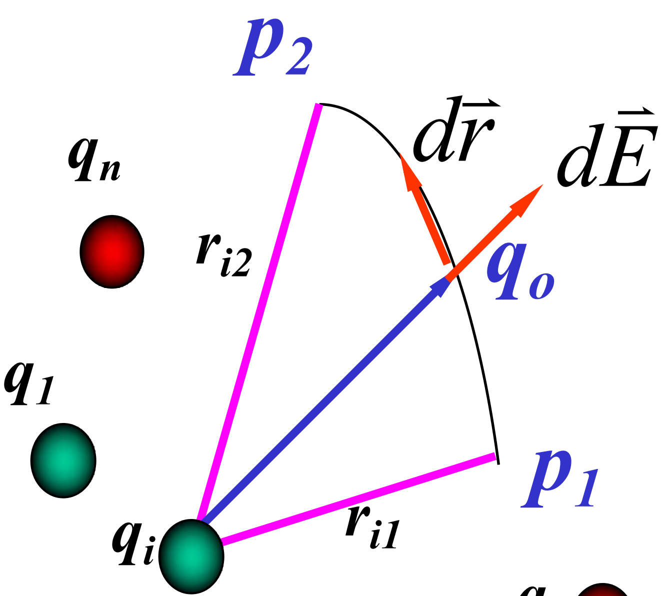
显然，<u>在点电荷形成的电场中，电场力作功与路径无关，只与路径的起点终点位置有关，故静电场力是保守力。</u>

2. 任意带电体系的电场

任何带电体系均可看作由 n 个点电荷 $q_1 \cdots q_n$ 组成的点电荷系

· $$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

$$A_{ab} = q_0 \underbrace{\int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{\text{与路径无关}} = q_0 \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{(a)}^{(b)} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{\text{与路径无关}}$$

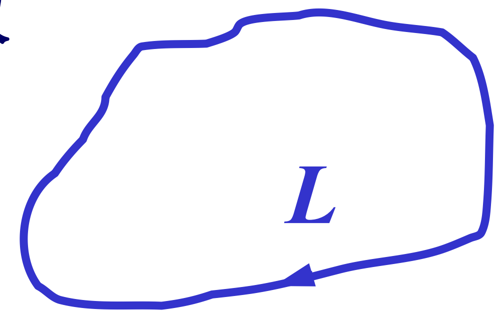


结论： 试验电荷在任意给定的静电场中移动时，电场力对q_0做的功仅与试验电荷的电量及路径的起点和终点位置有关，而与具体路径无关。

静电场是保守场，静电场力是保守力。

3. 静电场的（安培）环路定理 — 保守性的表述

电场力做功与路径无关，故



$$A = q_0 \oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

即 $$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

静电场强沿任意闭合路径的积分等于零

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$

——静电场的环路定理

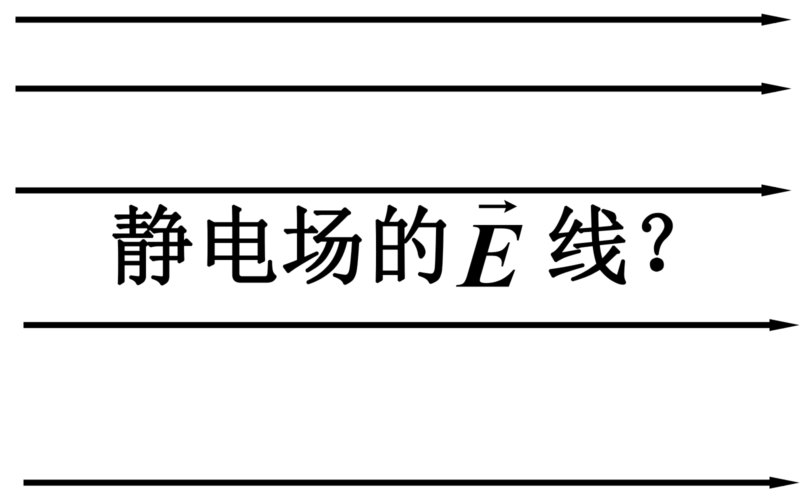
环路定理说明静电场为无旋场！

○高斯定理与环路定理完备描述静电场

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S)} q_i$$ （对任意电场都成立）

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$ （只对静电场成立）

【思考】静电场的电场线平行但不均匀分布是否可能？



二. 电势能　电势

引　力、引力场、引力势、引力势能
库仑力、静电场、静电势、静电势能

1. 电势能

由环路定理知，静电场是保守场。保守场必有相应的势能，对静电场则为电势能。静电力的功，等于静电势能的减少。

$$A_{ab}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\Delta E=W_a-W_b$$

若选b为静电势能的零点（也即参考点），用“0”表示，则

$$W_a=q_0\int_a^{"0"} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

2. 电势

某点电势能W_a与q_0之比只取决于电场，定义为该点的电势

$$\boxed{U_a=\frac{W_a}{q_0}=\int_a^{参考点}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

参考点的选取是任意的。

单位 (SI) . 伏特 (V) 1V = 1J/C

电势零点的选取

- 电荷分布在有限范围——选无穷远为电势零点

通常选地球为无穷远电势零点。

- 电荷分布到无限远时，电势零点不能选在无限远。

3. 电势差:

电场中两点电势之差 $U_{AB}=U_A-U_B=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

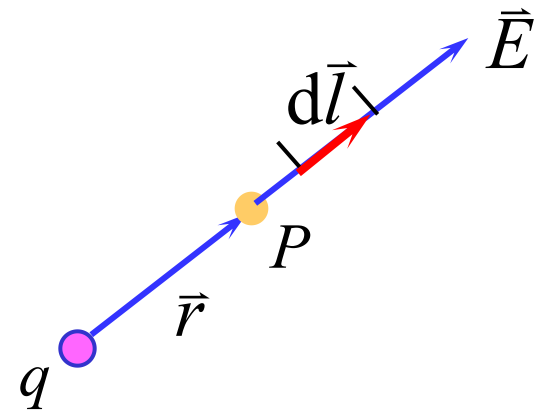
电势差与零电势的参考点选择无关。

静电场力的功与电势差的关系:

$$A_{AB}=\int_A^B q_o\vec{E}\cdot d\vec{l}=-q_0(U_B-U_A)$$

三、几种带电体的电势分布

1、静止点电荷的电势分布

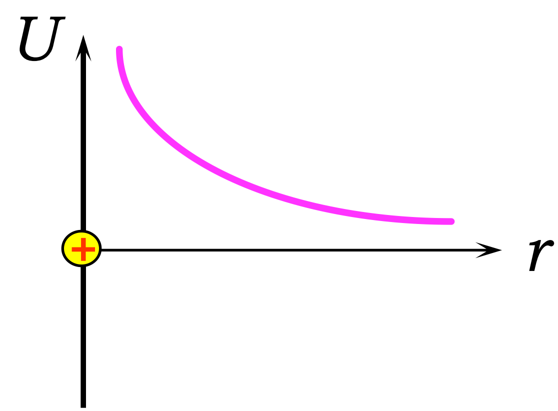


取无限远作为电势零点.

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r},$$

$$U_p=\int_{(P)}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{(P)}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l}=\int_{r}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$\boxed{U_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$



若 $q>0$, $U_p>0$, 离电荷越远, 电势越低;

若 $q<0$, $U_p<0$, 离电荷越远, 电势越高.

2、均匀带电球面的电势分布

（球面半径为***R***，总带电量为***q***）

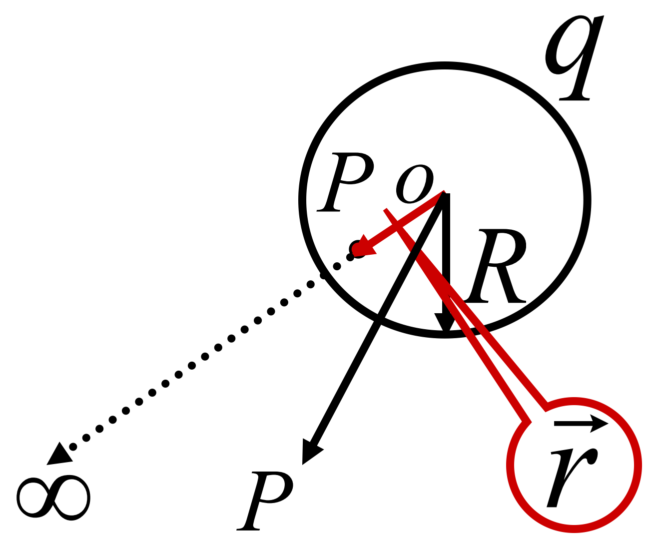
思路分析：

（1）确定电势零点——无穷远处；

（2）用高斯定律确定电场分布；

$r<R \qquad E=0$

$r>R \qquad \vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

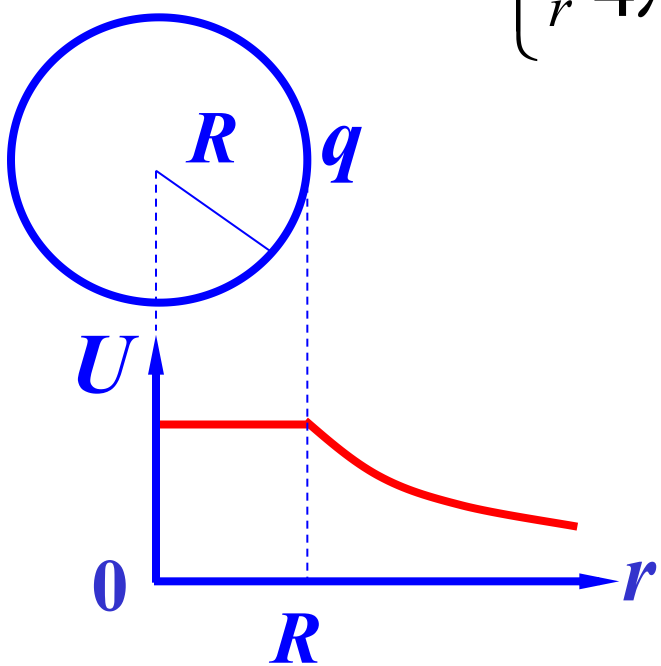


（3）确定电势分布；

E沿径向,选取沿半径方向的直线为积分路径.

均匀带电球面的电势分布

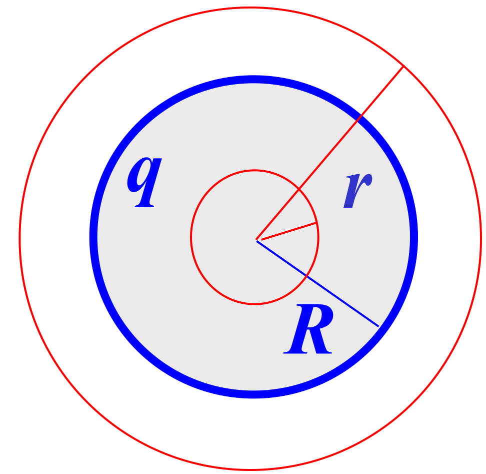
$$U(r)=\int_r^{\infty} E\mathrm{d}r=\begin{cases}\displaystyle\int_r^R 0\cdot\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r\leq R\\[2ex] \displaystyle\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r\geq R\end{cases}$$



球面内等电势，等于球面上的电势。

球面外点的电势等于处于球心的“点电荷”在该点的电势。

3、均匀带电球体的电势分布

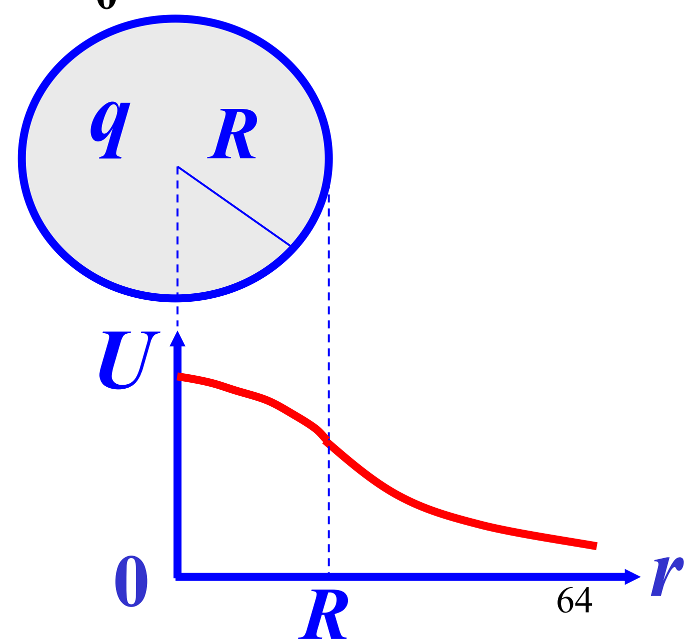


$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}\hat{r}, \quad r<R$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}, \quad r\geq R$$

$$r<R: \quad U(r) = \int_r^R E_1 \mathrm{d}r + \int_R^\infty E_2 \mathrm{d}r = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3R^2 - r^2\right)$$

$$U(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[3R^2 - r^2\right], & r<R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R \end{cases}$$

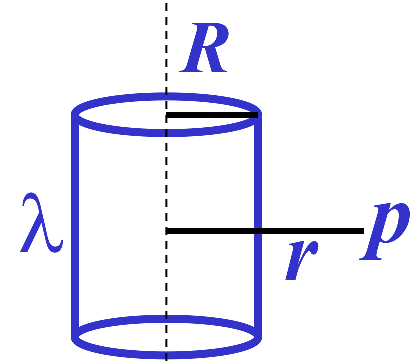


球心：$U(0) = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

4、无限长圆柱面（线电荷密度λ）的电势

电场分布： $E=0,\quad r<R$

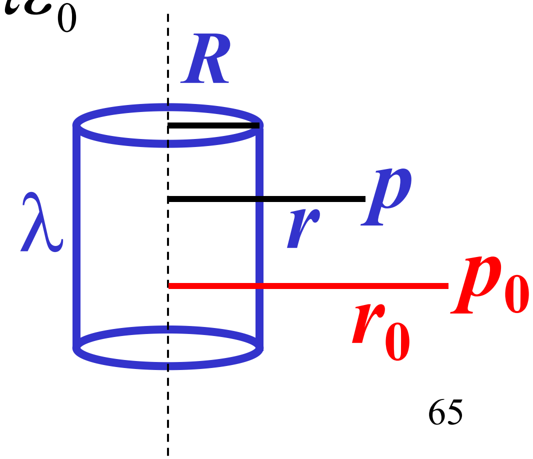
$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},\quad r>R$$



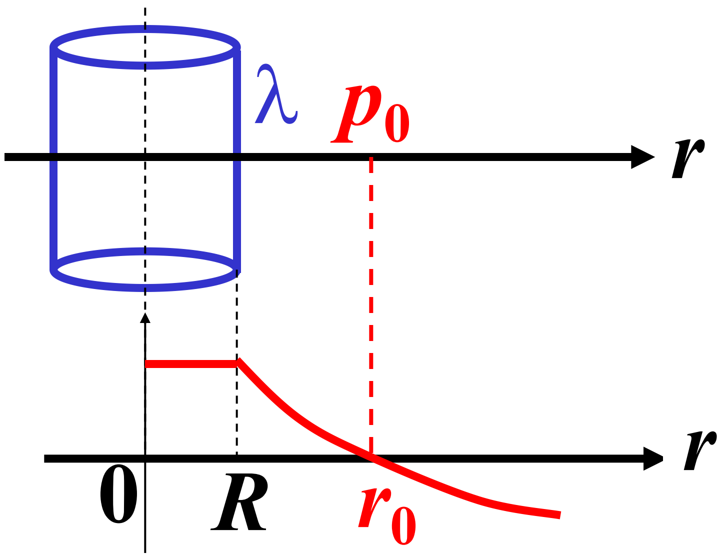
电势分布： 选 $p_0\,(r=r_0)$ 点为电势零点

$$r<R: U(r)=\int_r^{r_0}E\mathrm{d}r=\int_r^{R}0\cdot\mathrm{d}r+\int_R^{r_0}E\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{r_0}{R})$$

$$r>R: U(r)=\int_r^{r_0}E\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{r_0}{r})$$



$$U(r)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\dfrac{r_0}{R}), & r<R\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\dfrac{r_0}{r}), & r>R\end{cases}$$



电势零点不能选在无限远！

四. 电势的叠加原理

电场叠加原理 $\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$

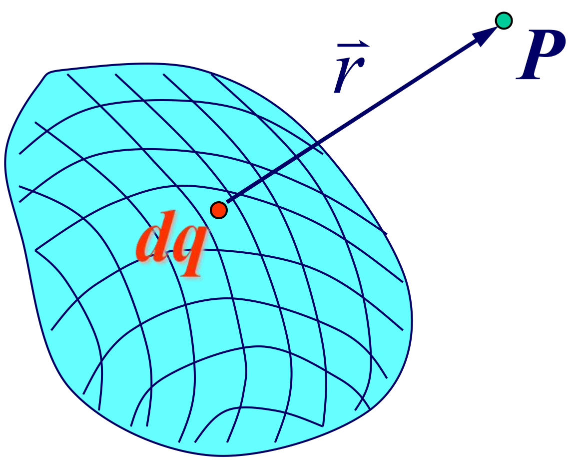
$$U_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_p^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\sum_{i=1}^{n}\int_p^{\infty}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\sum_{i=1}^{n}U_{ip}$$

电势叠加原理: 电荷系电场中任一点的电势等于每一个带电体单独存在时在该点所产生的电势的代数和.

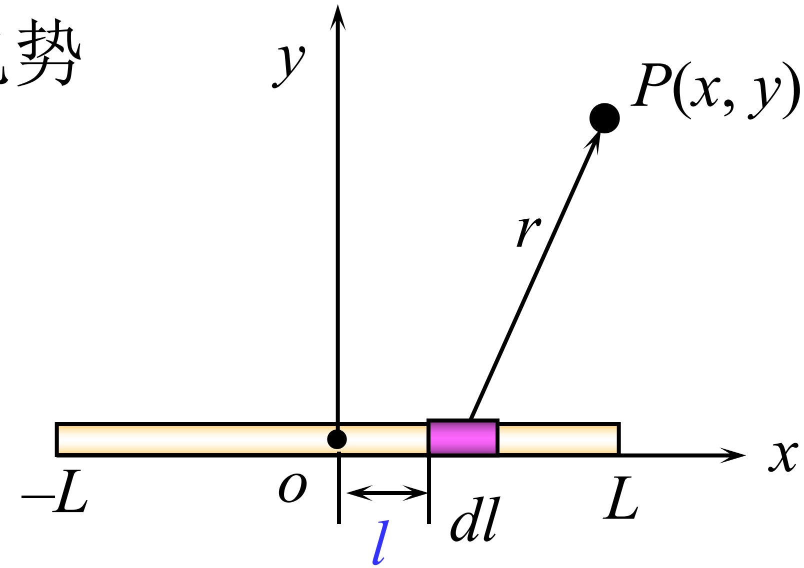
如果电荷是连续分布在有限空间，则电场中某点的电势

$$U=\int dU=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{r}$$

$$dq=\lambda dl、\sigma dS、\rho dV$$



例11.10 电量 q 均匀分布在长为$2L$的直线上, 求空间任一点 p 的电势



解: $$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q}{2L}\cdot \mathrm{d}l$$

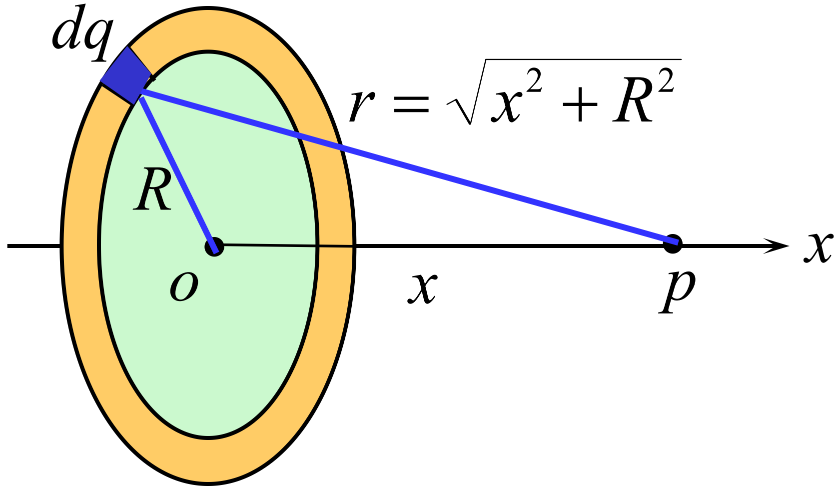
$$\mathbf{d}\boldsymbol{U} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{q}}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0 \boldsymbol{r}}$$

$$U = \int_L dU = \int_L \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dl}{r}$$

$$= \int_{-L}^{+L}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{\mathrm{d}(x-l)}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{x+L+\sqrt{(x+L)^2+y^2}}{x-L+\sqrt{(x-L)^2+y^2}}$$

[练习]求均匀带电细圆环轴线上任意一点 **p** 的电势。(已知 **R, q**)



解： $\mathrm{d}U=\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$U=\oint_L \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\oint_L \mathrm{d}q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

若$x=0$，则$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

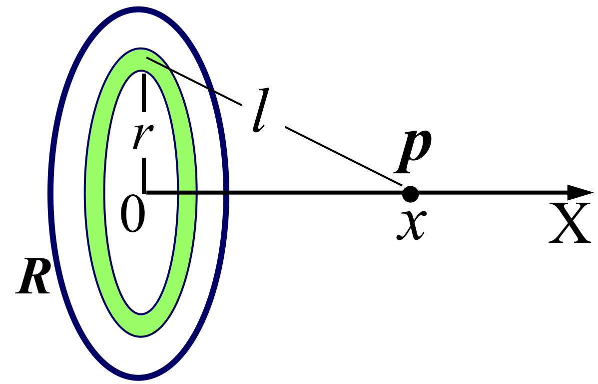
[思考]半径为R 的均匀带电薄圆盘轴线上的电势分布?

[练习]半径为R的均匀带电薄圆盘轴线上的电势分布。

解： 以0为圆心，取半径为$r \to r+\mathrm{d}r$的薄圆环，

带电 $\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}s = \sigma \cdot 2\pi r \mathrm{d}r$

到P点距离



$$l = \sqrt{x^2 + r^2}$$

P点电势：

$$U = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}q}{l}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)$$

练习：两同心的均匀带电球面，内外半径分别为R_A和R_B，分别带有电量q_A和q_B。求：该带电体系的电势分布。

由已知的均匀带电球面电势分布和电势叠加原理可得

单独在某点的电势的和！

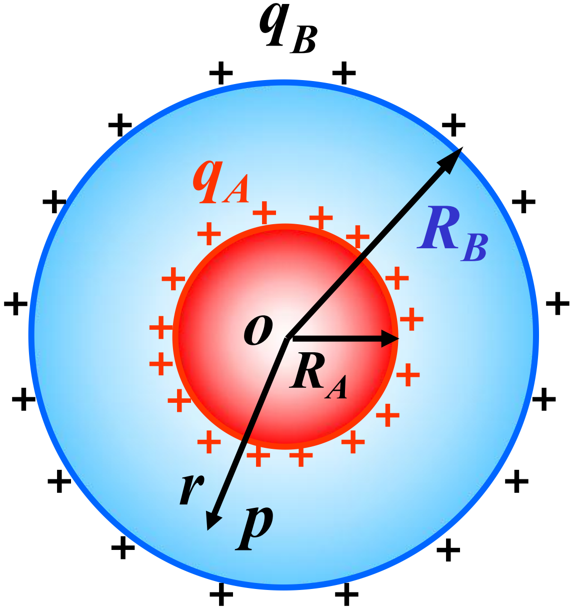
(1) 当$r \le R_A$时

$$U = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_o R_A} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_o R_B}$$

(2) 当R_A（$R_A \le r \le R_B$）时

$$U = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_o r} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_o R_B}$$

(3)当$r > R_B$时 $U = \dfrac{q_A + q_B}{4\pi\varepsilon_o r}$



§5 等势面与电势梯度

一. 等势面

在静电场中，电势相等的点所组成的面称为等势面。

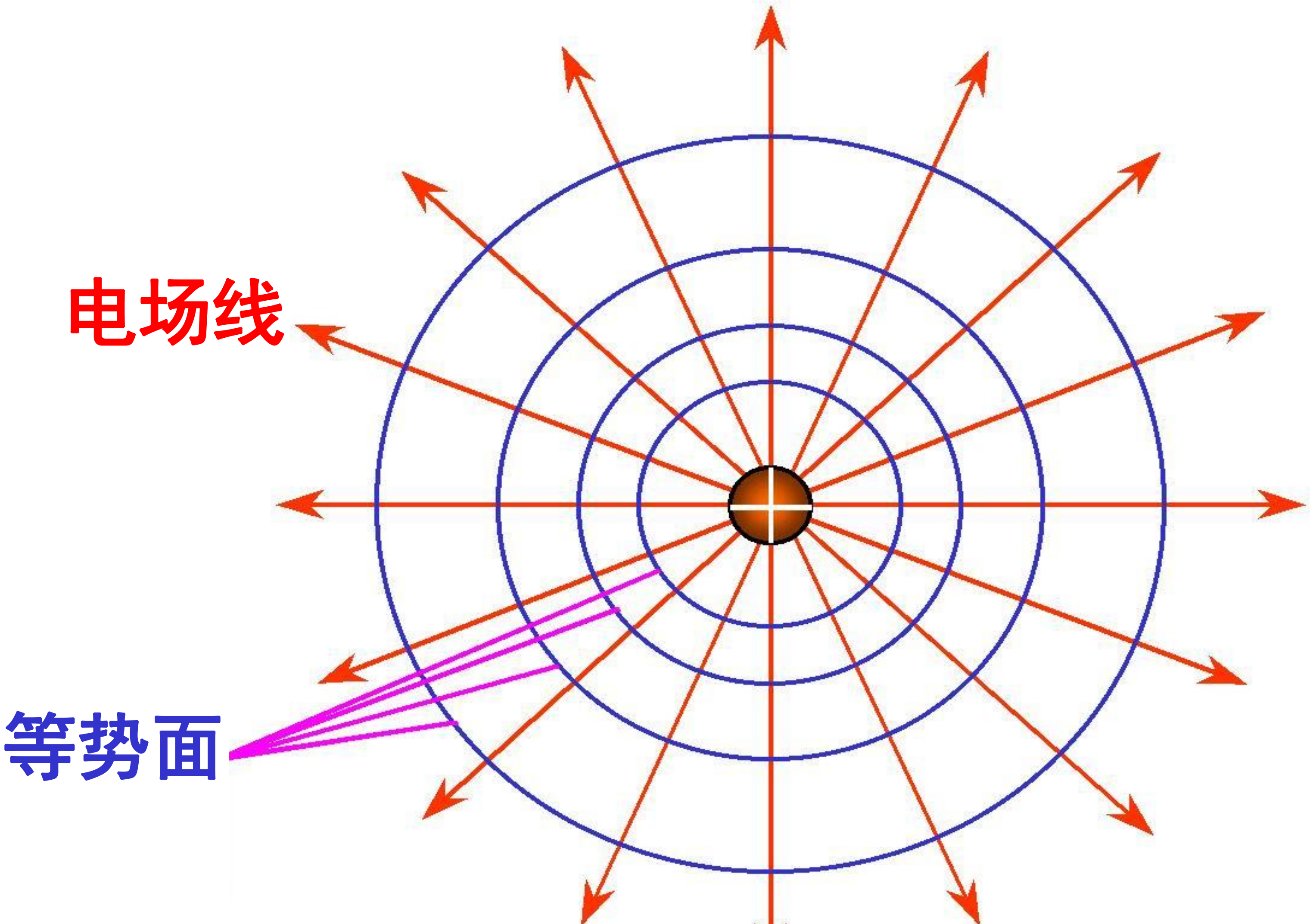
等势面画法规定：相邻两等势面间的电势间隔相等。

等势面特征：

1、电场线与等势面处处正交，并指向电势降低的方向。

2、两等势面相距较近处的场强大，相距较远处场强较小。

点电荷的等势面

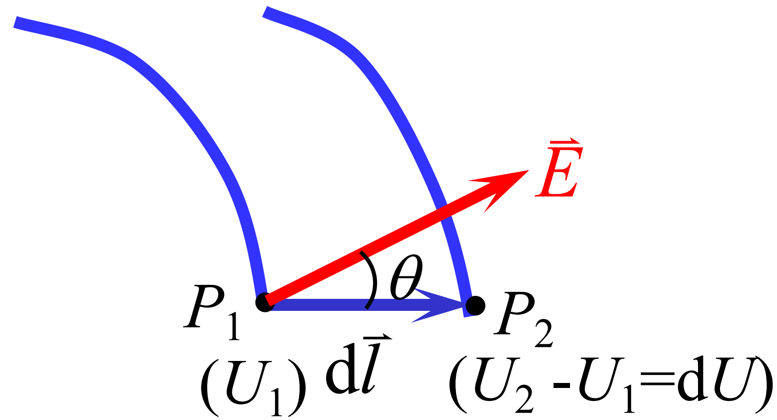


二. 电势梯度

空间任意两点 P_1, P_2, 相距 dl , 两处电势分别为U_1、U_2

$$U_1 - U_2 = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

即 $$-dU = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E\cos\theta dl$$



$$\boxed{E_l = E\cos\theta = -\frac{dU}{dl}}$$

当$\theta = 0$, cos θ =1时, 上式E_l有最大值，说明电势的空间变化率在电场强度方向上有最大值，此最大值称为电势梯度。电势梯度是一个矢量，其方向是该点附近电势升高最快的方向。

电势梯度 (grad$U$ 或 ∇U)

在直角坐标系中

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ E_Y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ E_Z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \therefore \vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

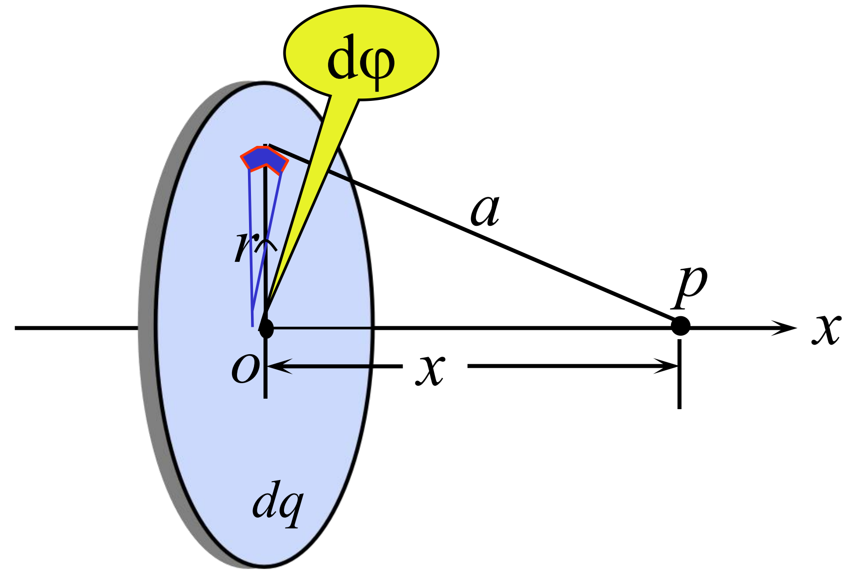
梯度算符 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$\boxed{\vec{E} = -gradU = -\nabla U}$ 对电势微分可求出场强。

例11.13 利用场强与电势的微分关系,求均匀带电圆盘轴线上任一点的场强.已知圆盘半径为*R*,电荷面密度为*σ*

解: $\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}s = \sigma r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma r d\varphi dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$



$$U = \int dU = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

根据对称知: $E = E_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$

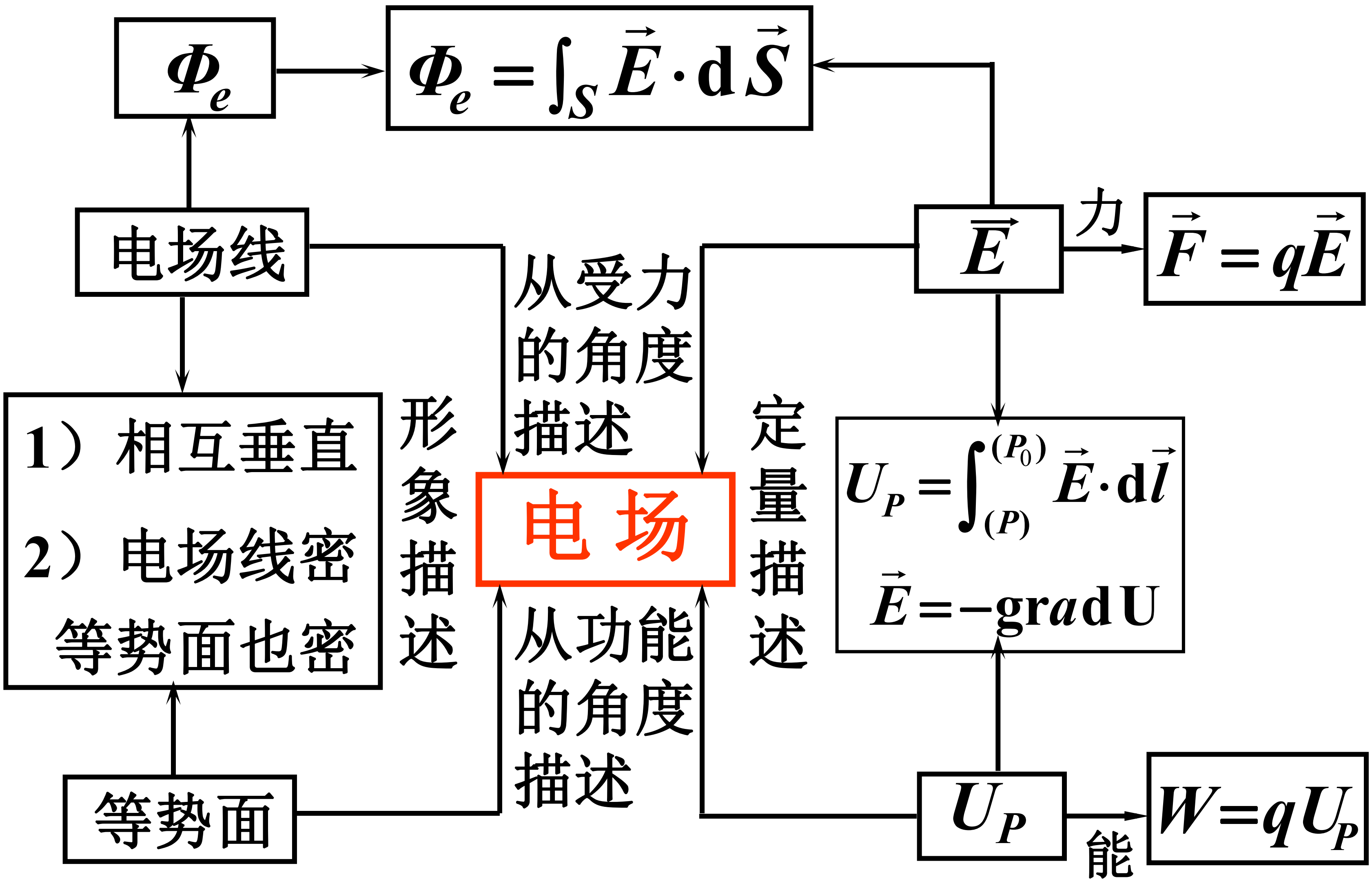
真空中静电场小结提纲

一. 线索（基本定律、定理）：

$$\left.\begin{array}{l}\text{库仑定律}\\ \vec{E}=\vec{F}/q_0\\ \vec{E}=\sum\vec{E}_i\end{array}\right]\rightarrow \vec{E}=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{\vec{r}}_i\rightarrow\left[\begin{array}{l}\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\dfrac{\sum q_{\text{内}}}{\varepsilon_0}\\ \oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0\end{array}\right.$$

还有电荷守恒定律，它时刻都起作用。

二. 基本物理量之间的关系：



三. 求场的方法：

1. 求$\vec{E}$

叠加法（补偿法）： $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$，

$$\vec{E}=\int_q \frac{\hat{\vec{r}}_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}q;$$

高斯定理法： $\oint_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$;

微分法： $\vec{E}=-\nabla U$， $E_l=-\frac{\partial U}{\partial l}$。

2.求U

场强积分法：$U_p = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$，

（$\vec{E}$分段，积分也要分段）；

叠加法（补偿法）：$U = \sum_i U_i$（零点要同）；

$$U = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}，\quad（U_\infty = 0）。$$

四.几种典型电荷分布的场强和电势：

点电荷；均匀带电薄球壳；均匀带电大平板；

均匀带电长直线；均匀带电长圆筒。