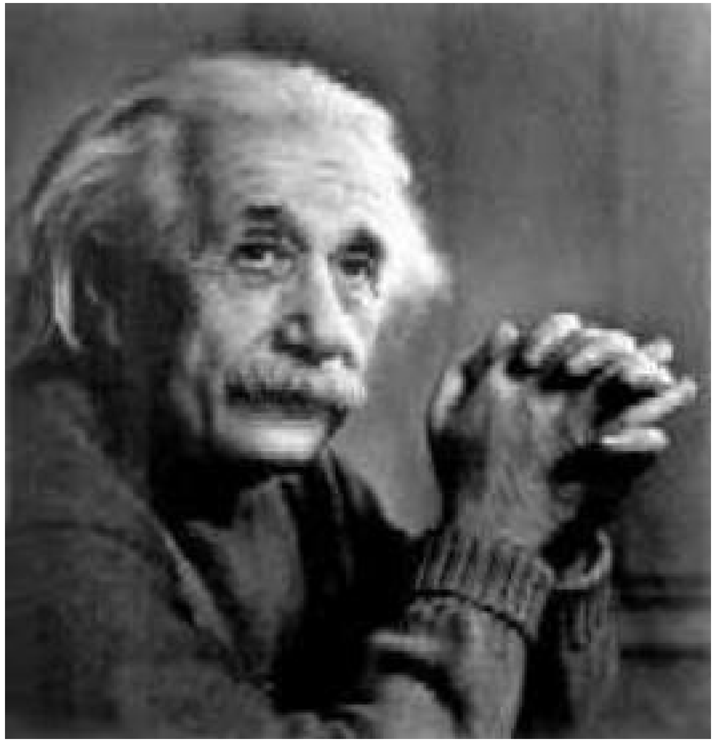
第16章 相对论基础

(*special relativity*)

§16-1 经典力学相对性原理与时空观
§16-2 狭义相对论基本原理
§16-3 狭义相对论的时空观
§16-4 洛仑兹变换 速度变换
§16-5 相对论动力学基础

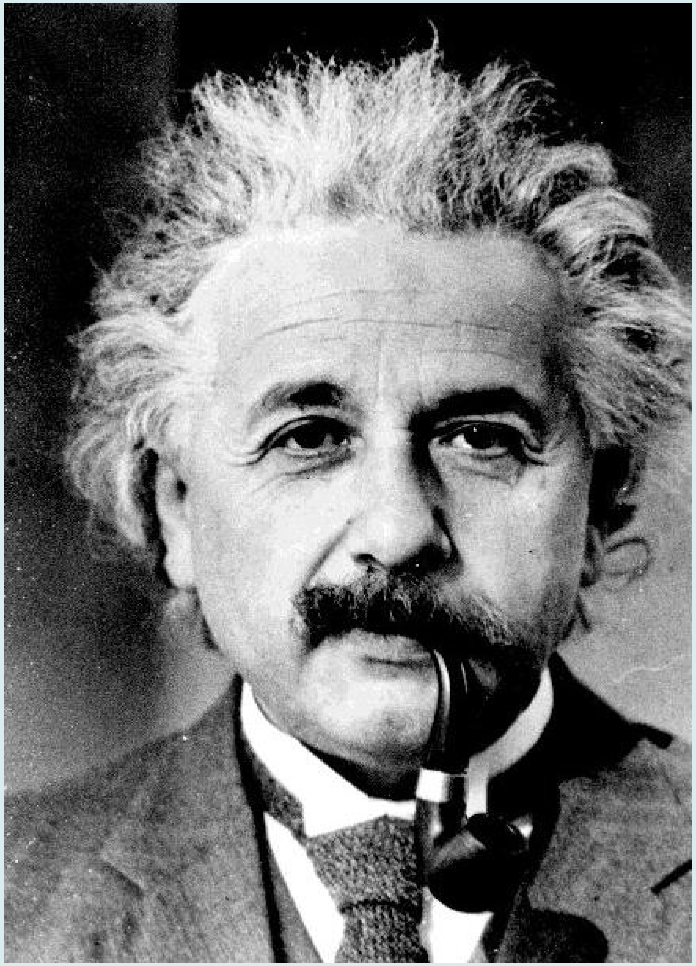
作业：练习册



爱因斯坦: Einstein

现代时空的创始人

二十世纪的哥白尼



1905
爱因斯坦奇迹年

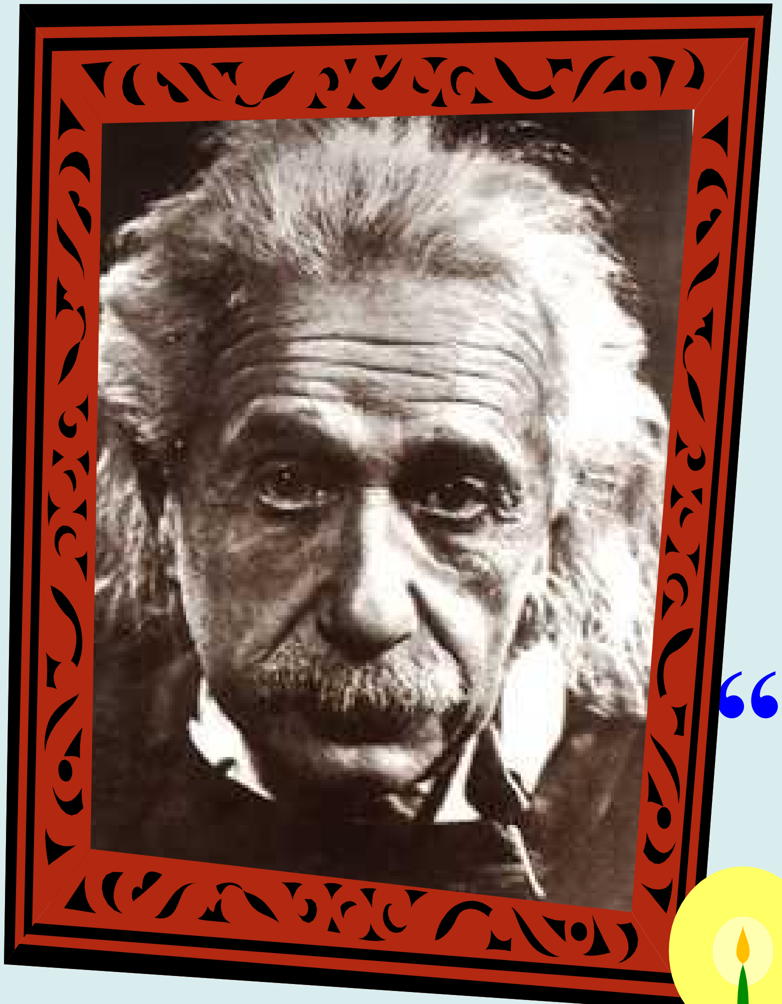
3月 提出光量子假说

4月 关于分子大小的测量

5月 关于布朗运动

6月《论动体的电动力学》

9月 《物体的惯性同它所含的能量有关吗？》 导致 $E = mc^2$



2005

世界物理年

爱因斯坦

“奇迹年”100周年

逝世50周年

相对论由爱因斯坦（Albert Einstein）创立，

它包括了两大部分：

狭义相对论（Special Relativity）（1905）

揭示了时间、空间与运动的关系。

广义相对论（general relativity）（1915-1916）

揭示了时间、空间与引力的关系。

重点是狭义相对论的时空观。

§1 经典力学相对性原理与时空观

1. 伽利略相对性原理

研究的问题:

在两个惯性系（实验室参考系S与运动参考系S'）中考察同一物理事件。

两组时空坐标之间的关系称为坐标变换。

事件：某一时刻发生在某一空间位置的事例。
例如：车的出站、进站，火箭的发射，导弹的爆炸，部队的出发，总攻的发起，城市的攻占。
在坐标系中，一个事件对应于一组时空坐标。

(1) 伽利略变换

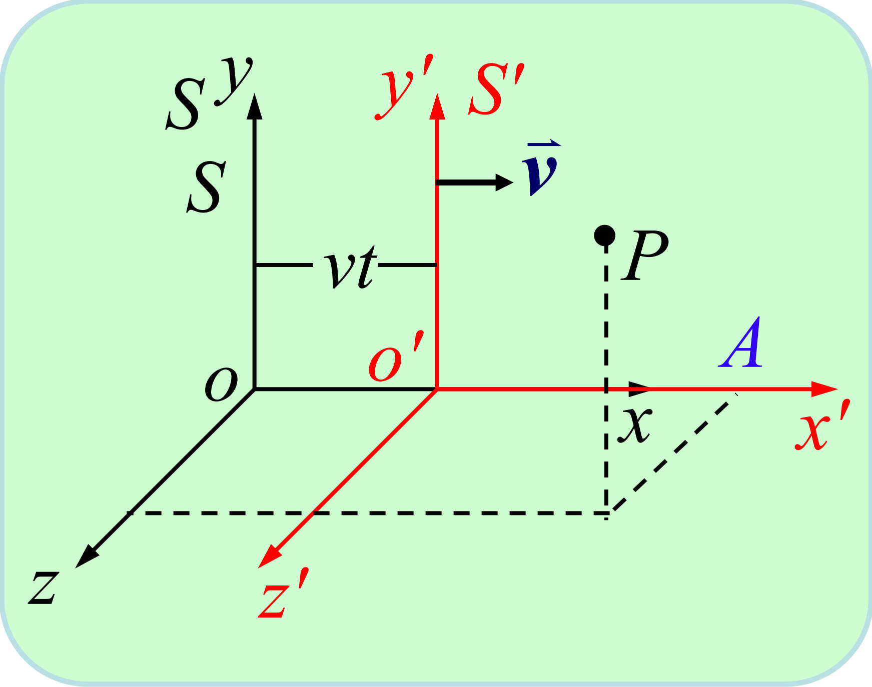
两惯性系，S' 相对S以速度$\vec{v}$ 匀速向正X方向运动

t =t'= 0 时，o 跟 o' 重合， P点时空坐标

S系 (x, y, z, t)

S' 系 (x', y', z', t')

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

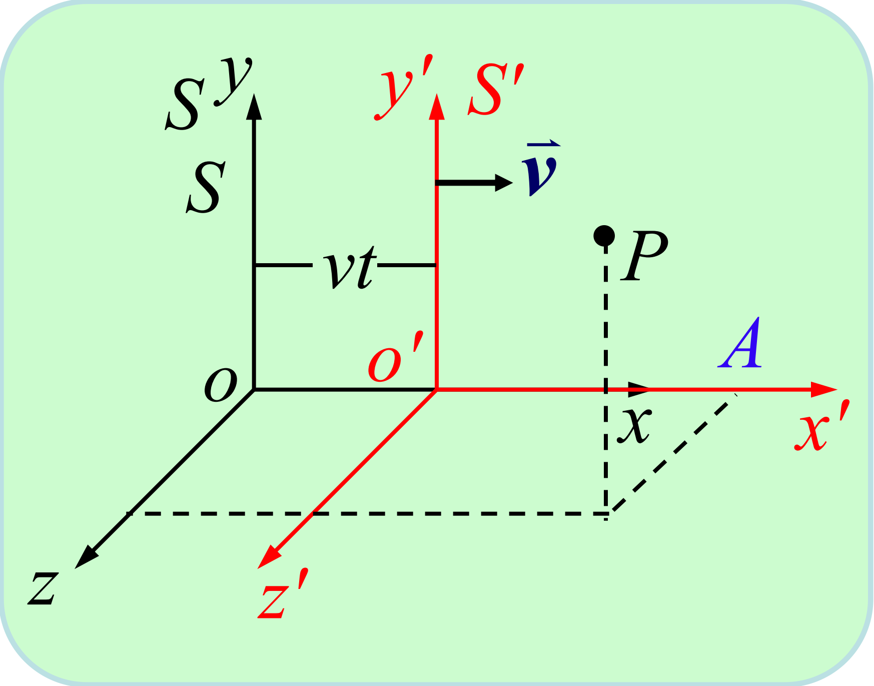


——伽利略坐标变换式

伽利略变换

正变换 $S' \to S$ 逆变换 $S \to S'$

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$



对时间再求导，得：

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} u_x = u'_x + v \\ u_y = u'_y \\ u_z = u'_z \end{cases}$$

—伽利略速度变换

对时间再求导，得： $a'_x = a_x, a'_y = a_y, a'_z = a_z$

在不同的惯性参考系中考察同一对象，其加速度总是相同的。

（2）伽利略的相对性原理　　在两个惯性系中

空间坐标是相对的　　$x' = x - vt$

速度是相对的　　$u' = u - v$

加速度是绝对的　　$a' = a$

伽利略

$S:\quad \vec{F}\quad m\quad \vec{a}\qquad \vec{F} = m\vec{a}$

$S':\quad \vec{F}'\quad m'\quad \vec{a}'\qquad \vec{F}' = m'\vec{a}'$

牛顿力学中：　相互作用力是客观的，分析力与参考系无关。质量的测量与运动无关。

宏观低速物体的力学规律在任何惯性系中形式相同。

或 牛顿力学规律在伽利略变换下形式不变。

如：动量守恒定律　$S:\ m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20}$

$S':\ m'_1\vec{v}'_1 + m'_2\vec{v}'_2 = m'_1\vec{v}'_{10} + m'_2\vec{v}'_{20}$

2.经典力学时空观

据伽利略变换，可得到经典时空观

（1）同时的绝对性

在同一参照系中，两个事件同时发生 $t_1 = t_2$

据伽利略变换，在另一参照系中， $t_1' = t_2'$

在其他惯性系中，两个事件也一定同时发生。

（2）时间间隔的测量是绝对的

在同一参照系中，两个事件先后发生，其间隔为

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

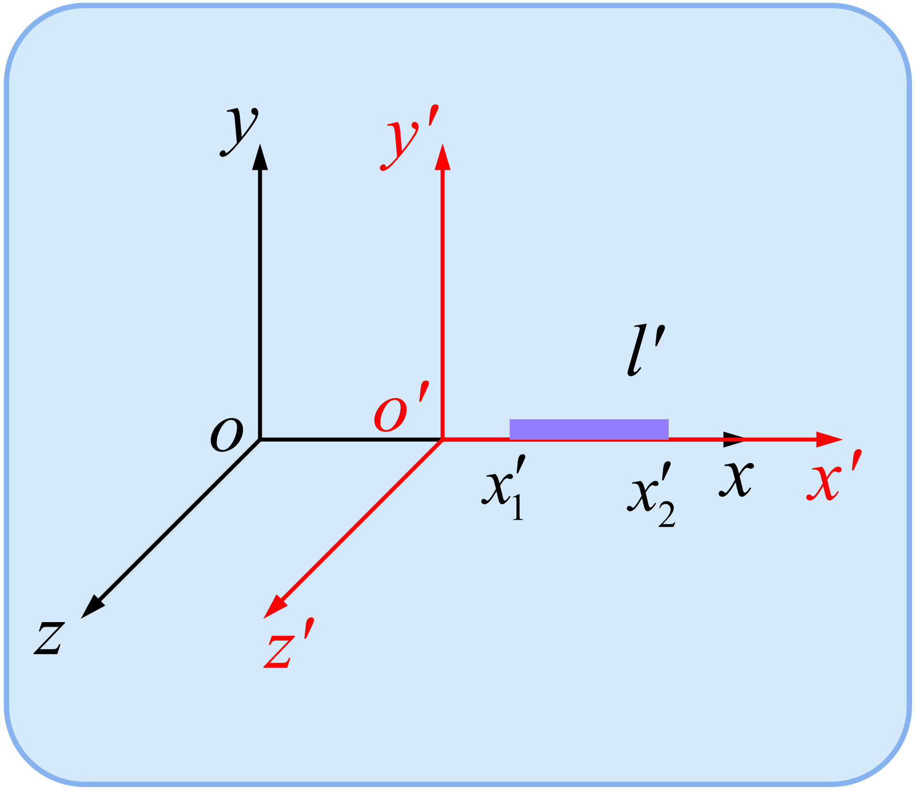
据伽利略变换， $t = t'$ 在另一参照系中，

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \Delta t$$

在其他惯性系中，两个事件的时间间隔不变。

(3) 空间的测量也是绝对的

对 S' 系(l' 在 S' 系上静止)



$$l' = x_2' - x_1'$$

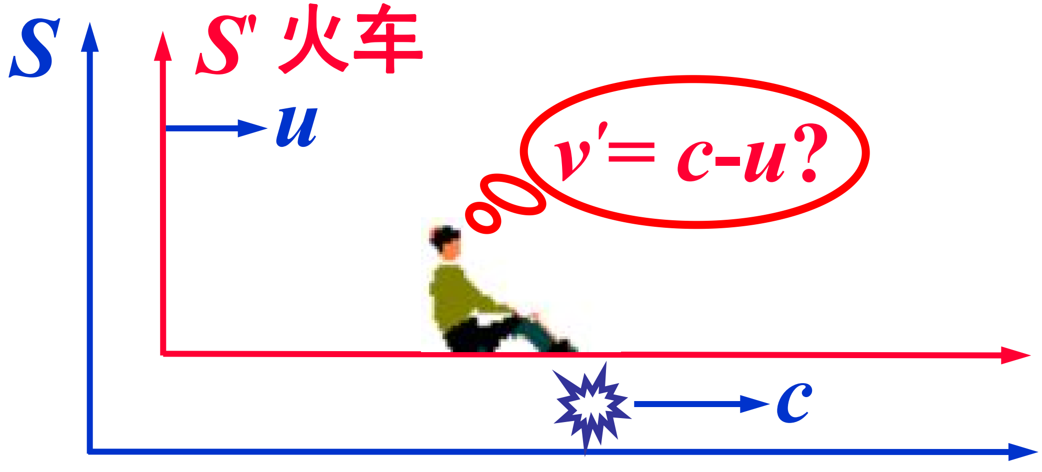
对 S 系

$$l = x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$$

(同时测量$t_2 = t_1$)

时间和空间可以脱离运动而存在，时间和空间是相互独立的，即经典力学认为时间和空间是一种不依赖于观察者的绝对的东西——绝对时空观。

§ 2　狭义相对论基本原理



“追光实验”

按照伽利略变换

$$v' = c - u$$

思考：光的传播速度，真的与参考系有关吗？

一. 牛顿力学的困难

1） 光速c是常量——不论从哪个参考系中测量

2） 电磁场方程组不服从伽利略变换

电磁学理论给出真空中电磁波的传播速度为： $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

其中ε_0和μ_0都是与参考系无关的常数。

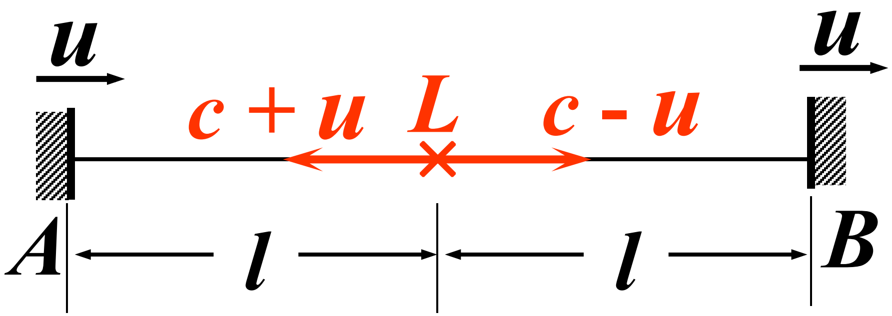
真空中光速与参考系无关（即与光源的运动和观察者的运动无关），不服从伽利略变换。

1983年国际规定：真空中的光速为物理常数

$$c = 299\,792\,458\ \mathrm{ms}^{-1}$$

1m是光在真空中1/299792458秒内所经过的距离。

迈克耳逊—莫雷（Michelson-Morlay）实验：



$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{l}{c-u} - \frac{l}{c+u}$$

设 $u << c$，则 $\Delta t \approx 2l\dfrac{u}{c^2}$。

应该存在一个时间差.

1887年，迈克耳孙—莫雷实验却得到了“零”结果！

用足够精度的光学仪器来找这个时间差，始终未找到。

迈克耳逊 1852-1931
德裔美国物理学家，同莫雷·爱德华一起证明以太这一假设的电磁波媒介的不存在，因其光谱学和气象学的研究获1907年诺贝尔奖。

爱因斯坦的观点：

（1）相对以太的运动不存在，→以太不存在→绝对静止不存在。

（2）真空中的光速是一个恒量，它和参照系的运动状态无关。

本质：否定了绝对静止、否定了加利略变换

→经典力学的时空观。

二、狭义相对论的基本原理 (基本假设)

爱因斯坦提出：**《论动体的电动力学》1905**

（1）一切物理规律在任何惯性系中形式相同

—— 相对性原理

（2）在真空中的任何惯性参考系中，光沿任意方向的传播速度都为 c，与发射体的运动状态无关

—— 光速不变原理

一切物理规律　　力学规律

讨论

1）爱因斯坦的理论是牛顿理论的发展

2）观念上的变革

国际单位制

牛顿力学

时间标度
长度标度
质量的测量

与参考系无关

速度与参考系有关

（相对性）

狭义相对论力学

光速不变 →

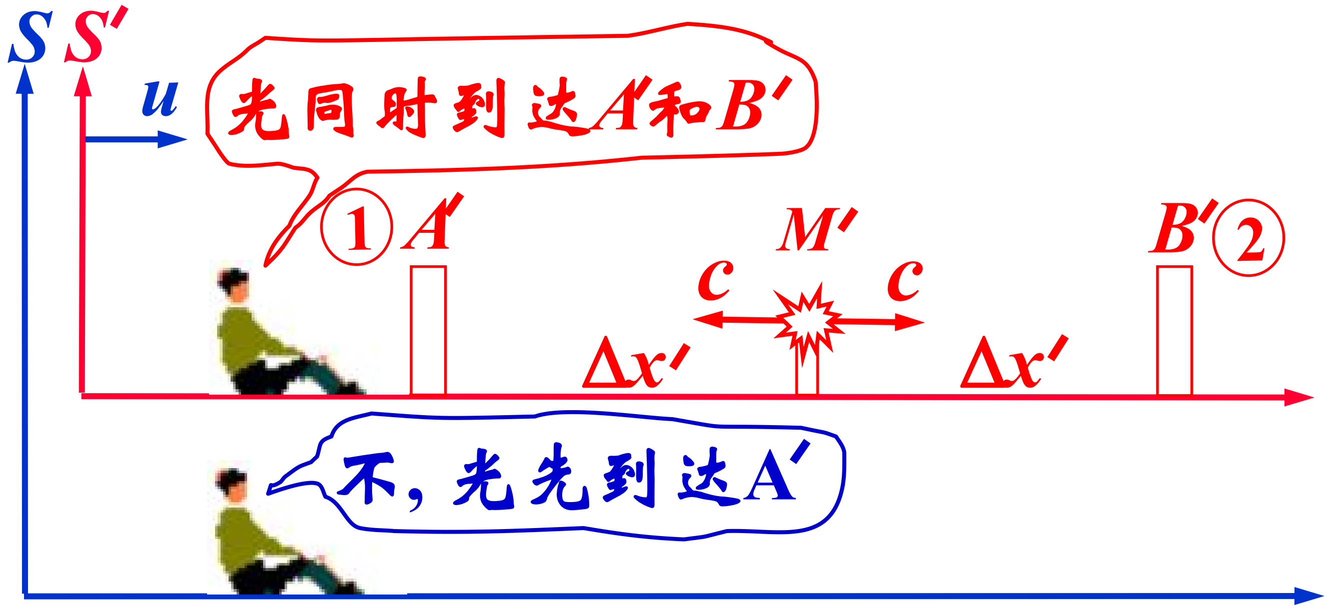
长度、时间测量的相对性

爱因斯坦从考虑同时的相对性开始导出了一套新的时空变换公式——洛仑兹变换。

§3 狭义相对论的时空观

1.‘同时’的相对性

光速不变 → 同时性的相对性



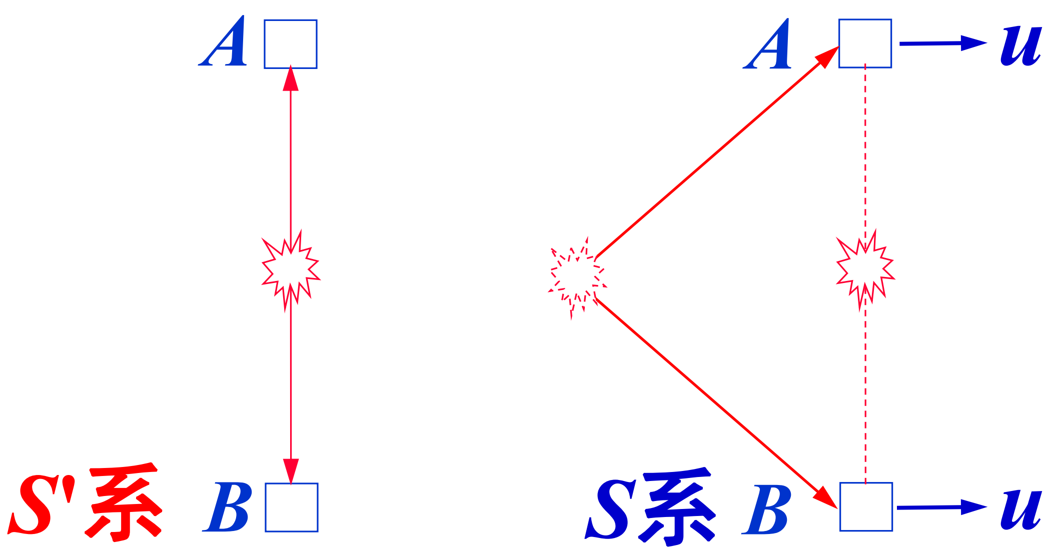
理想的闪光实验

在*S*系中观测，事件1先发生，闪光先到达*A*′点，

即：在运动后方的事件先发生。

对不同参考系，沿相对速度方向配置的同样的两个事件之间的时间间隔是不同的。时间的量度是相对的。

但是，沿垂直于相对运动方向上发生的两个事件的同时性是绝对的



2. 时间间隔测量的相对性 时间膨胀

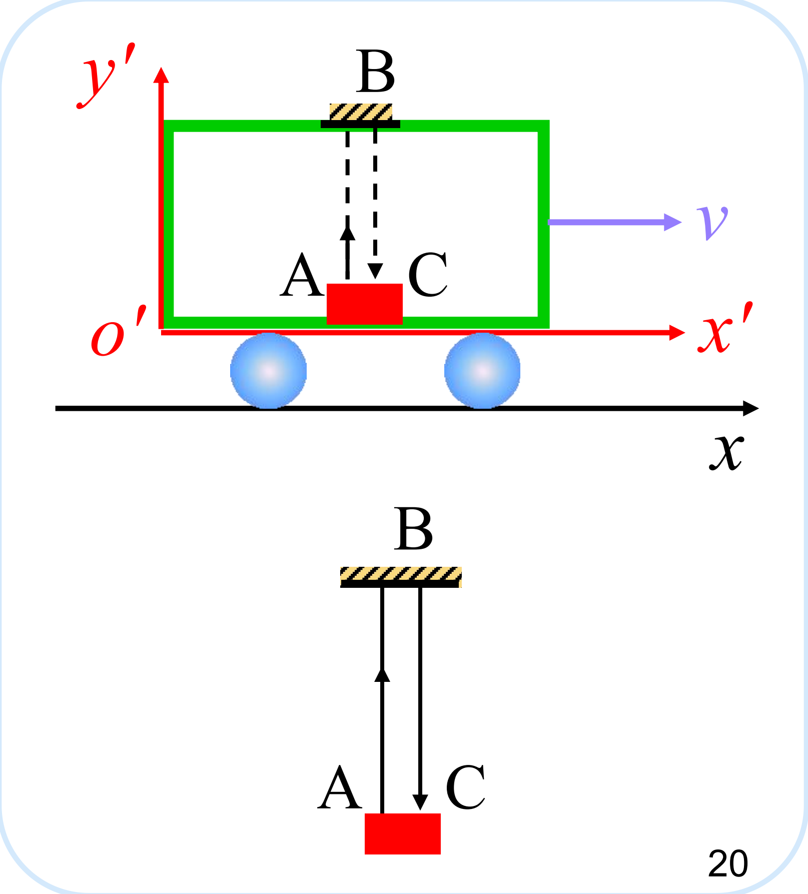
S' 系观察：光讯号从A → B — C(A)

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

时间 $\Delta t'$ 可由A 处同一只钟测量出来。

同一地点发生(同一只钟测量)的两事件的时间间隔

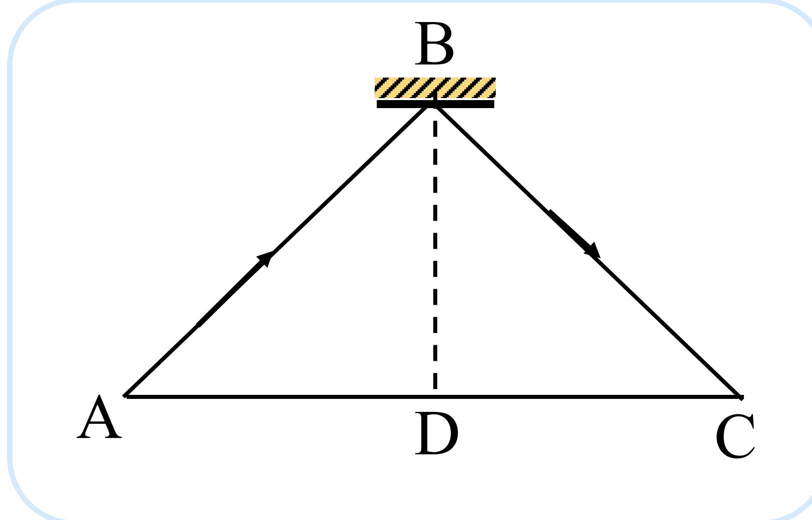
——本征时间(固有时间)（原时） $\tau_o = \Delta t'$



S 系观察：

$$\Delta t = \frac{2AB}{c}$$

$$\boxed{\Delta t' = \frac{2h}{c}}$$



$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{DB})^2$$

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + h^2 = \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\Delta t'\right)^2$$

测时　原时

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

动钟变慢

——测时比原时长 时间延缓效应

对称情况下，时间延缓是相对的。

在一个惯性系中观测，运动惯性系中的任何过程（包括物理、化学和生命过程）的节奏变慢。

在求解涉及同地发生的事件的问题时，为了计算方便一般应该：先确定哪个是原时（同地时），然后再找出对应的测时。

例题飞船以 $u=9\times10^3\,\mathrm{ms^{-1}}$（32400km/h）的速率相对地面飞行。飞船上的钟走了 5 秒，问用地面上的钟测量经过了几秒？

定义事件　原时 $\Delta t'=5\,\mathrm{s}$　测时=?

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{5}{\sqrt{1-\left(\frac{9\times10^3}{3\times10^8}\right)^2}}=5.000000002\,s$$

低速情况，时间延缓效应很难发现！

3. 长度测量的相对性 长度收缩

***S* 系:**

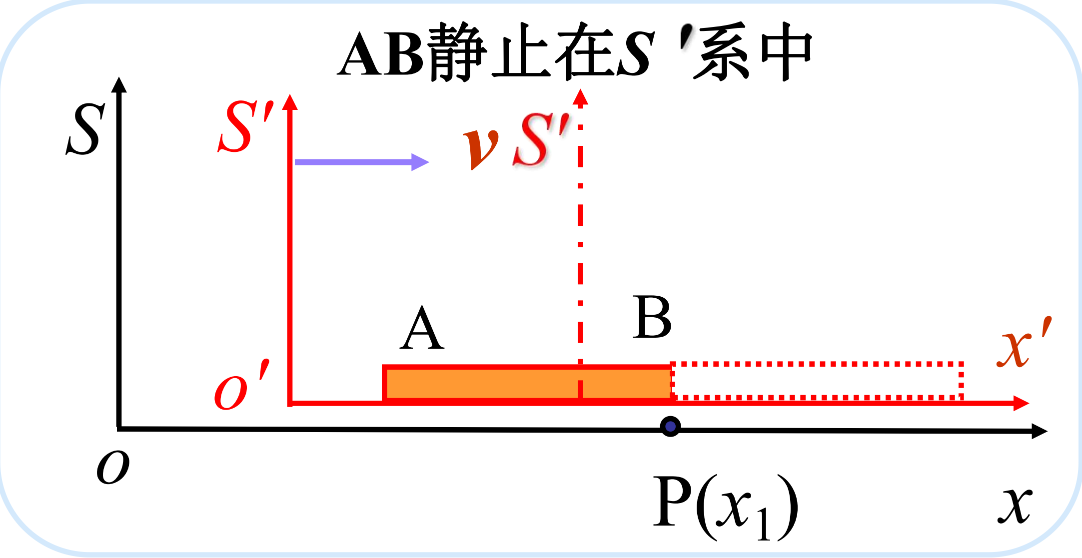
t时刻AB坐标：B: x_1

t+Δt时刻AB坐标：

A : $x_A = x_1$

B: $x_B = x_1 + v\,\Delta t$

AB长: $\Delta l = v\Delta t$



$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

***S′* 系:**

P点从B爬至A: 所花时间 Δt'

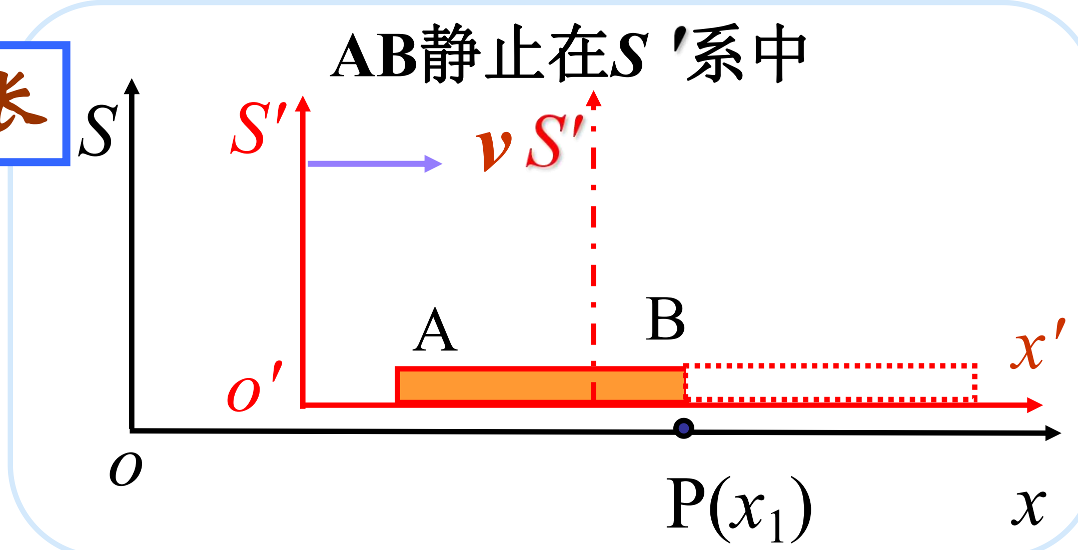
AB长: $\Delta l' = v\Delta t'$

$$\boxed{\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

原长，固有长，本征长

$$\Delta l = \Delta l' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

测长



原长最长，测长比原长短——长度收缩效应

长度收缩是相对的：在S'系中看，S系中静止杆也变短了。

【思考】与运动方向垂直的长度收缩吗？

$$\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

【例】长度为5m的飞船，相对地面的速度为$9\times10^3 ms^{-1}$，在地面测量飞船长度（测长）为

$$\Delta l = 5\times\sqrt{1-(9\times10^3 / 3\times10^8)^2} \text{ m}$$
$$= 4.999999998 \text{ m}$$

长度收缩效应也很难测出。

求有关问题时—先确定哪个是原长，再找测长。

4. 时空相对性的说明

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Delta l = \Delta l'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

(1) 运动要影响时间和长度测量，这说明时间和空间与物质的运动不可分割。

(2) 当 $v << c$： $\Delta t \simeq \Delta t'$ $\Delta l \simeq \Delta l'$

即绝对时间和绝对空间的经典力学是在 $v << c$ 的一种近似，对于高速领域 (可与光速比拟)，必须考虑相对论效应。

例： 已知μ 介子静止寿命τ_o =2×10^{-6} s ,μ子在海拔几千米高处运动速率u=0.998c,故按经典力学μ介子在寿命期内仅走过600米左右,因此不可能到达海平面,而实际上在海平面上能观察到许多μ子,如何用相对论解释此现象?

解:设地球为参照系所建的坐标系为S,μ介子为参照系S'

则在S系测得μ子的寿命为

$$\tau = \gamma\tau_o = \frac{2\times10^{-6}}{\sqrt{1-0.998^2}} = 31.7\times10^{-6}(s)$$

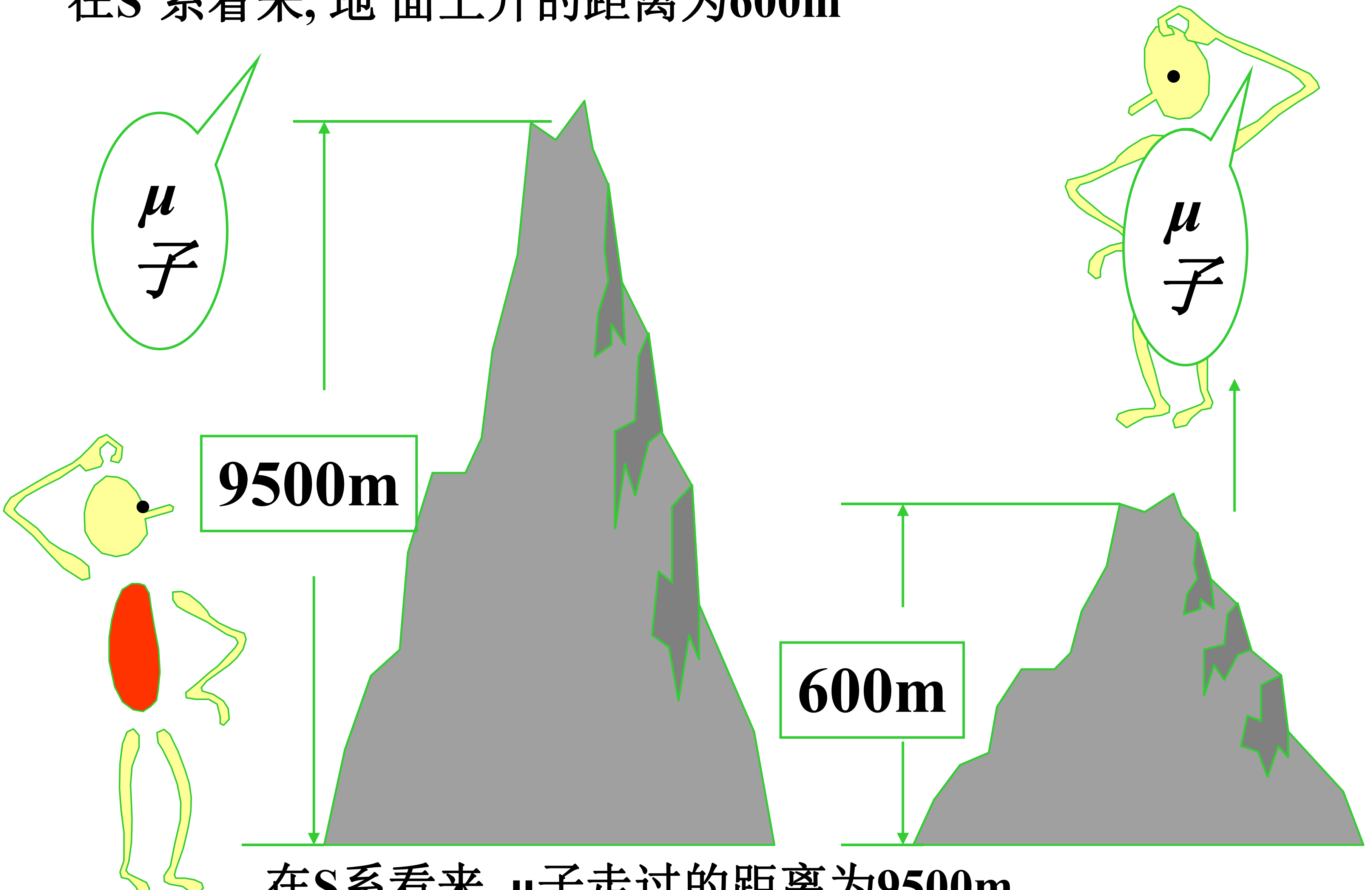
故在S系看来, μ子走过的距离为

$$l_o = u\tau = 0.998\ \times3\times10^8\times31.7\times10^{-6} = 9500\ (m)$$

故在S'系看来, 地 面上升的距离为

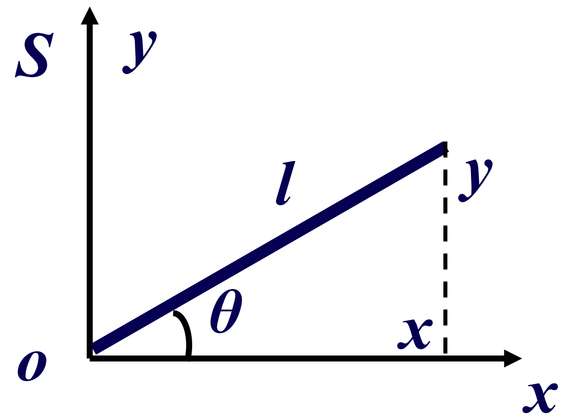
$$l' = 2\times10^{-6}\times0.998\ \times3\times10^8 = 600\ (m)$$

在S’系看来, 地 面上升的距离为600m



在S系看来, μ子走过的距离为9500m

例题：一根直杆在S 系中观测静长为l , 与x 轴的夹角为θ, S'系沿S 系的x 轴正向以速度v 运动。问S'系中观测此杆与x'轴的夹角是多少？



解：长度收缩只发生在相对运动方向

$$y' = y$$

$$x' = x\sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$\tan\theta' = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

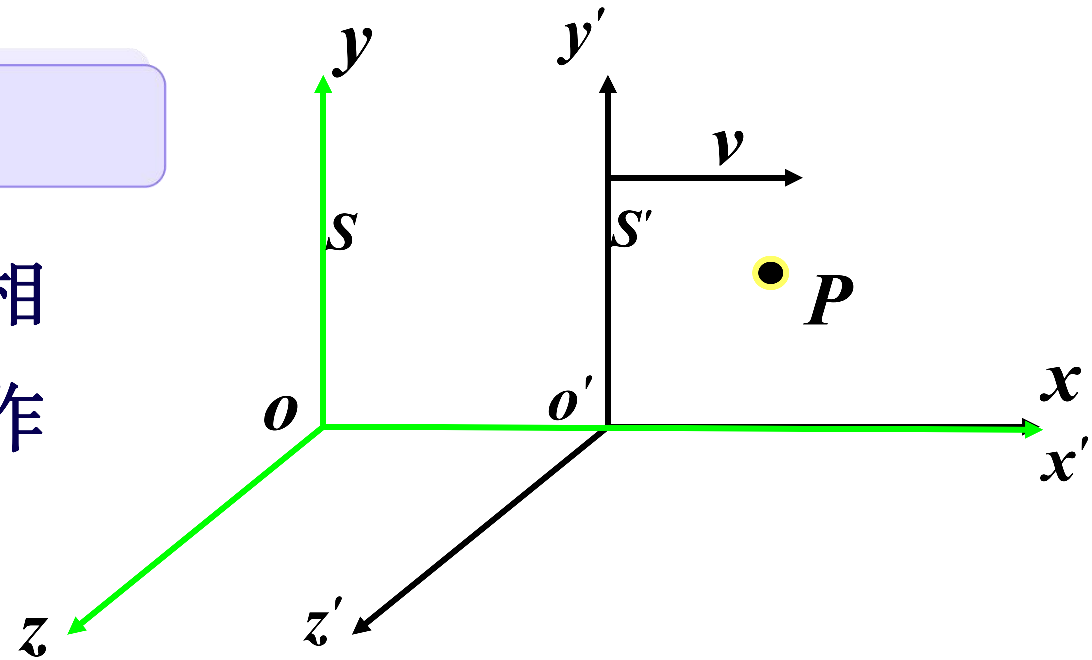
$$\theta' = \tan^{-1}\frac{\tan\theta}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

§4 洛仑兹变换 速度变换

目的：寻找适合光速不变原理的新的时空变换。

一、洛仑兹坐标变换

设S'系以速度v相对于S系沿x轴正向作匀速直线运动。



以两坐标系原点o、o'重合为记时起点，此时$t=t'=0$。

空间有一质点P： S系中坐标是(x, y, z, t)，

S'系中坐标是(x', y', z', t')。

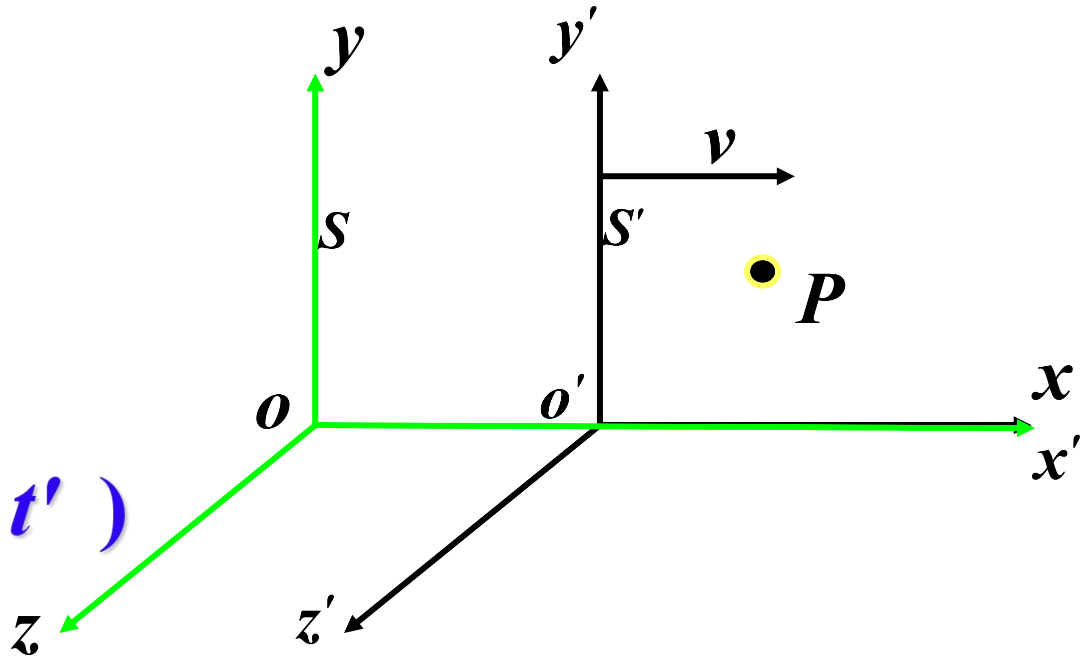
P点的时空坐标

S系 (x, y, z, t)

S'系 (x', y', z', t')

$y = y'$

$z = z'$



x、x' 之间的关系如下：

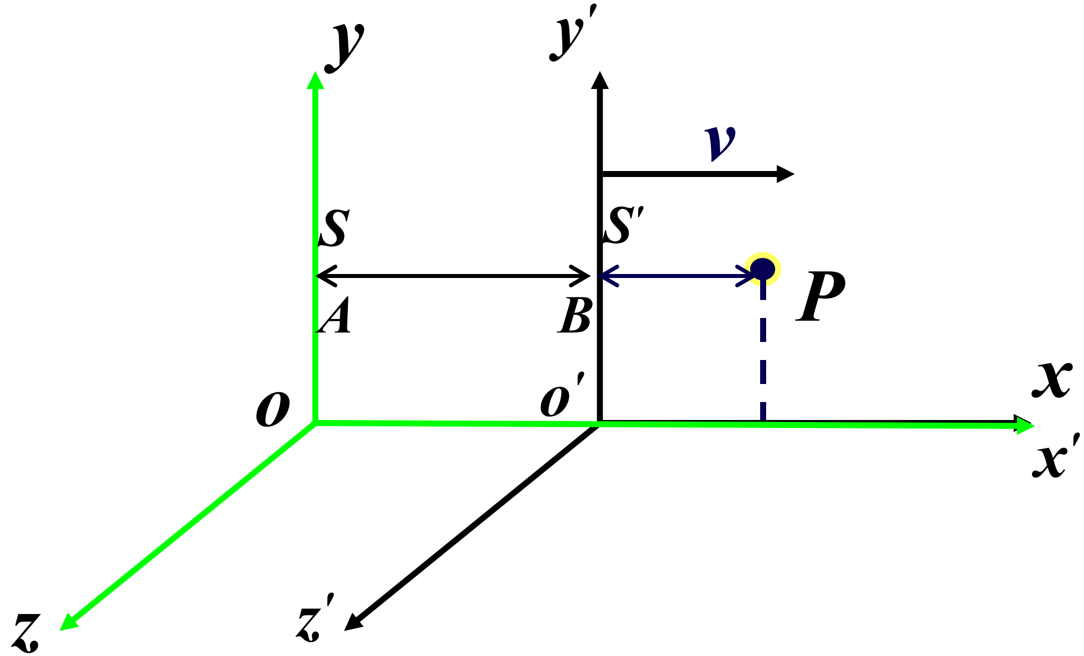
S系中：

$$x = AB + BP$$

$$= vt + BP$$

$$= vt + x'\sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

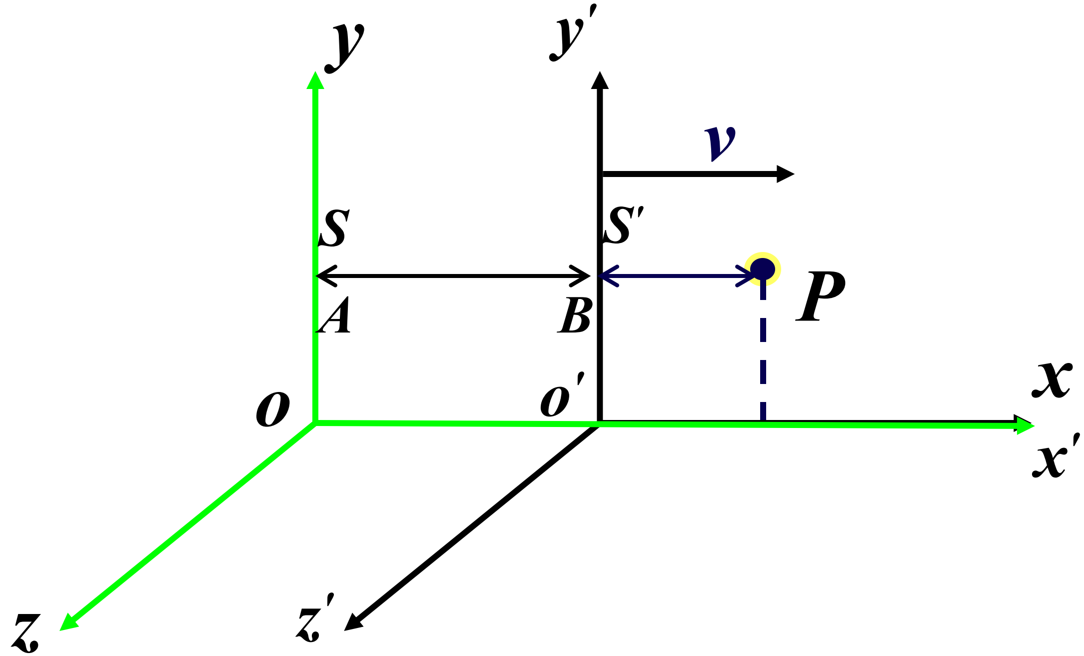
$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}}$$



BP在S'系中长为x'(固有长度),S'相对于S系运动，根据长度收缩, 在S系中测量BP长度为

$$x'\sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



$$x' = AP - AB$$

$$= AP - vt'$$

$$= x\sqrt{1-v^2/c^2} - vt'$$

***AP*在*S*系中长为*x*（固有长度），*S'*相对于*S*系运动，根据长度收缩，在*S'*系中测量 *AP* 长度为**

$$x\sqrt{1-v^2/c^2}$$

消去*x'*，得

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

洛仑兹坐标变换 逆变换式

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

洛仑兹变换式：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

I. 当 $v << c$ 时，洛仑兹变换过渡到伽利略变换。

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

II. $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 为实数，

故 $v \le c$，

物体速度不能超光速。

III. 验证长度收缩和时间膨胀公式（自证）

IV. 时序的相对性

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

S中看：如 A先发生，B后发生

即t_2 (后) > t_1(先)

S'中看：根据$x_2 - x_1$、u的不同值，有三种不同情况

$t'_2 - t'_1 > 0$，即$t'_2 > t'_1$， A先B后 (正序)

$t'_2 - t'_1 = 0$，即$t'_2 = t'_1$， A、B 同时

$t'_2 - t'_1 < 0$，即$t'_2 < t'_1$， A后B先 (倒序)

这说明在S '中看来，时间顺序有可能 颠倒过来。

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

两小孩的出生完全是两独立事件

[例]地球上，

在甲地 x_1处 时刻 t_1 出生一小孩 小甲

在乙地 x_2处 时刻 t_2 出生一小孩 小乙

若甲乙两地相距 $x_2 - x_1 = 3000$公里

$t_2 - t_1 = 0.006$秒，即甲先乙后(甲---哥， 乙---弟)

飞船上看，

若$u = 0.6c$ 可得$t'_2 - t'_1 = 0$， 甲乙同时出生不分哥弟

若$u = 0.8c$ 可得$t'_2 - t'_1 < 0$，甲后乙先， 甲---弟 乙---哥

时序可以颠倒

V. 因果关系的绝对性

S中：若 事件1---因(先)，2---果(后) 即: $t_2 - t_1 > 0$

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - v/c^2\,(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Longrightarrow t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[1 - \frac{v}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right]$$

令 $$v_S = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

<u>信号速度</u>

即事件1发生后，发出一信号，经($t_2 - t_1$)时间传播($x_2 - x_1$)距离到达2处， 触发事件2发生

信号---一些物体、无线电波、光波等 $v_s \le c$

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{u}{c^2} v_S\right)$$

有 $t'_2 - t'_1$ 和 $t_2 - t_1$ 同号

$\therefore S'$中和S中时序相同

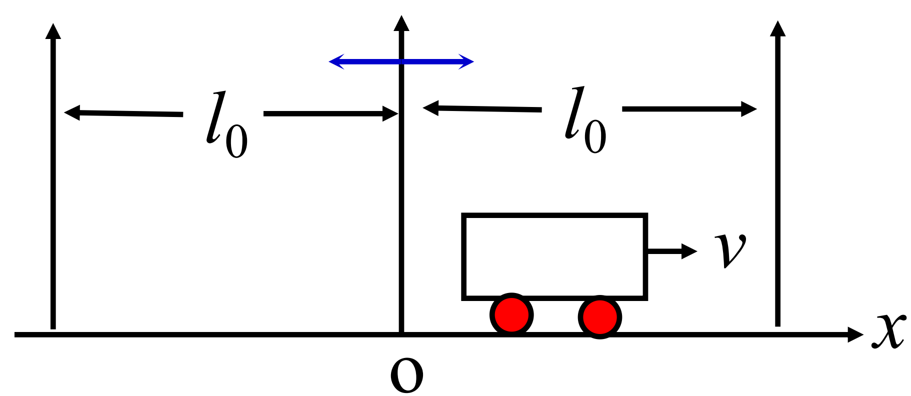
结论：有因果律联系的两事件的时序不会颠倒！

例 火车对地以v的速度作匀速直线运动，某时刻车上观察者发现路旁建筑物上避雷针溅起电火花，电光向前向后传播到达在同一直线上且与建筑物等高等距的两铁塔，地面观察塔与建筑物水平距离为l_0，求车上观察者测得电光到达两铁塔的时间差？

解：考察电光到达前后两铁塔两件事。地面S系，时空坐标为(x_1,t_1)、(x_2, t_2)；火车S′系，时空坐标为(x_1',t_1')、(x_2',t_2')。

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

$$t' = \frac{t - \frac{\upsilon}{c^2}x}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$



$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{\upsilon}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{-\frac{2\upsilon l_0}{c^2}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{-2\upsilon l_0}{c\sqrt{c^2-\upsilon^2}}$$

负号表示：在车上观察，电光先到达前面的铁塔。

例：甲乙两人所乘飞行器沿x轴作相对运动。甲测得两个事件的时空坐标为 x_1=6×10^{4}m，y_1=z_1=0，t_1=2×10^{-4}s；x_2=12×10^{4}m，y_2=z_2=0， t_2=1×10^{-4} s，若乙测得这两个事件同时发生于t' 时刻，问：

(1) 乙对于甲的运动速度是多少？

(2) 乙所测得的两个事件的空间间隔是多少？

解 (1) 设S系被固定在飞行器甲上，以飞行器乙为参考系S'，乙相对甲的运动速度为u，乙所测得的这两个事件的时间间隔是 $t_2' - t_1' = 0$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

按题意，代入已知数据，有，

$$0 = \frac{(1\times10^{-4} - 2\times10^{-4}) - \frac{u}{c^2}(12\times10^4 - 6\times10^4)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

由此解得乙对甲的速度为 $u = -\frac{c}{2}$

根据洛仑兹变换 $x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(x - ut)$

可知，乙所测得的两个事件的空间间隔是

$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = 5.20\times10^4 m$$

二、洛仑兹速度变换

S 系 的速度 (u_x, u_y, u_z)

S' 系 的速度 (u'_x, u'_y, u'_z)

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx' = \dfrac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\left(\dfrac{dx}{dt} - v\right)dt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{(u_x - v)dt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \dfrac{dt - \dfrac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\left(1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt}\right)dt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)dt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

正变换

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} u_y \\ u'_z = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} u_z \end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}} \\ u_y = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}} u'_y \\ u_z = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}} u'_z \end{cases}$$

作相对运动的两个惯性系中所测得的运动物体的速度，不仅在相对运动的方向上的分量不同，而且在垂直于相对运动方向上的分量也不同。

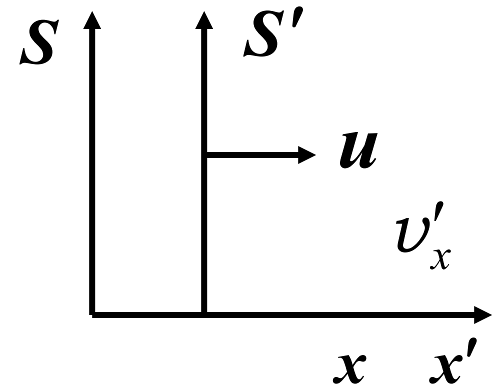
若在 S‘系中光沿 x’ 方向, 传播速度为 $u'_x = c$

S 系中测得光速 u_x:
$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \dfrac{cv}{c^2}} = c$$

符合光速不变原理。

例：设想一飞船以**0.80*c*** 的速度在地球上空飞行，如果这时从飞船上沿速度方向抛出一物体，物体相对飞船速度为**0.90*c*** 。
问：从地面上看，物体速度多大?

经典力学：$\mathbf{0.8}C+\mathbf{0.9}C=\mathbf{1.7}C$



解：选飞船参考系为S'系，
地面参考系为S系.

$u=0.80c \qquad \upsilon'_x=0.90c$

$$\upsilon_x=\frac{\upsilon'_x+u}{1+\dfrac{u}{c^2}\upsilon'_x}=\frac{0.90c+0.80c}{1+0.80\times0.90}=0.99c$$

小结

在狭义相对论中讨论运动学问题的思路如下：

1、确定两个作相对运动的惯性参照系；

2、确定所讨论的两个事件；

3、表示两个事件分别在两个参照系中的时空坐标或其时空间隔；

4、用洛仑兹变换讨论。

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

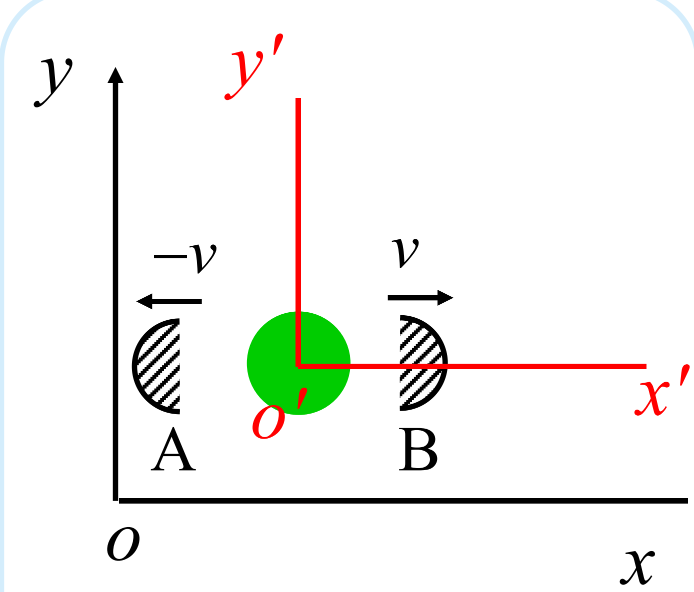
§5　相对论动力学

根据狭义相对性原理，以数学形式表示的物理定律，在一切惯性系中，都具有相同的形式，即通过洛仑兹变换从一个惯性系换算到另一个惯性系时，物理定律的数学形式保持不变。

一、质速关系

S' 系

一粒子静止在 o' 点，某一时刻分裂成质量相同的两块(A, B)，



分别沿 x' 轴的正、反方向运动，根据动量守恒定律速率都为 v 。

S 系以 $-v$的速率沿 $-x'$方向运动

(以S系看，S' 系以v速度向x正方向运动)

S 系 A不动，B运动，速度 u_B。

S 系： $$u_B=\frac{v'_x+u}{1+\frac{v'_x u}{c^2}}=\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} \quad ① \quad (v'_x=v, u=v)$$

根据动量守恒定律（S系） $Mv=m_B u_B$

$M=m_A+m_B$(分裂前后质量守恒) $$(m_A+m_B)v=m_B u_B \quad ②$$

从①式可得 $v=\frac{c^2}{u_B}\left[1-\sqrt{1-\frac{u_B^2}{c^2}}\right]$ **代入②可得** $m_B=\frac{m_A}{\sqrt{1-\frac{u_B^2}{c^2}}}$

对 S 系：m_A是静止质量 $m_A=m_0=m_{B0}$

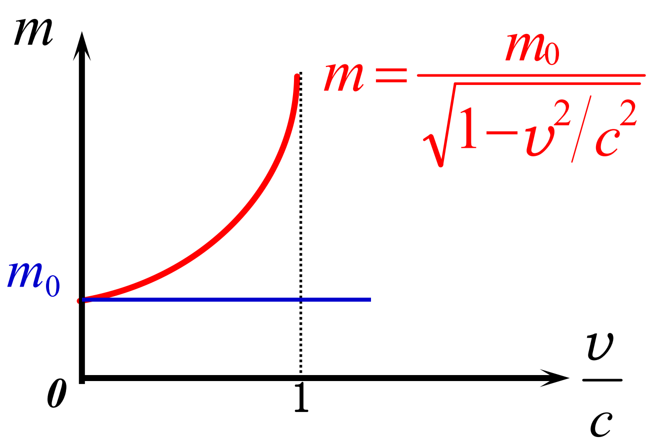
m_B是运动的，速率 $u_B=v$

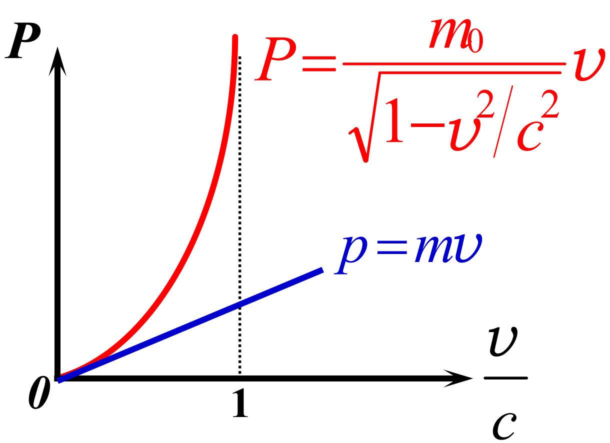
由此得相对论质量： $$\boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$ **m_0——静止质量**

相对论质量：$\boxed{m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}}$

相对论动量：$\boxed{\vec{p}=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\vec{\upsilon}}$

m_0——静止质量





(1) $v\to c,\ m\to\infty$ 物体不能以超光速运动.

(2) $\dfrac{v}{c}\to 0,\ m=m_0$ 低速时m可看成恒量,回到经典力学.

二、相对论动能

$$E_k = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \frac{d(m\vec{u})}{dt} \cdot d\vec{r} = \int d(m\vec{u}) \cdot \vec{u} \quad ①$$

式中 $$d(m\vec{u}) \cdot \vec{u} = (dm)\vec{u} \cdot \vec{u} + m d\vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$= u^2 dm + \frac{m}{2} d(\vec{u} \cdot \vec{u}) = u^2 dm + mudu$$

由 $\boxed{m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}}$ 可得 $$m^2 u^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2$$

对上式两边微分，并整理得

$$u^2 dm + mudu = c^2 dm$$

①式变为 $\boxed{E_k = \int_{m_0}^{m} c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2}$ —相对论动能

讨论

$$E_K = mc^2 - m_0c^2$$

1）与经典动能形式完全不同

若电子速度为 $\upsilon = \frac{4}{5}c$ $\quad E_K = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) = \frac{2}{3}m_0c^2$

2）当 $\upsilon \ll c$ 时,可以证明:

$$E_K = mc^2 - m_0c^2 \Rightarrow E_K = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2$$

又回到了牛顿力学的动能公式。

附数学展开式: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \cdots\cdots \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}$

三、相对论总能量

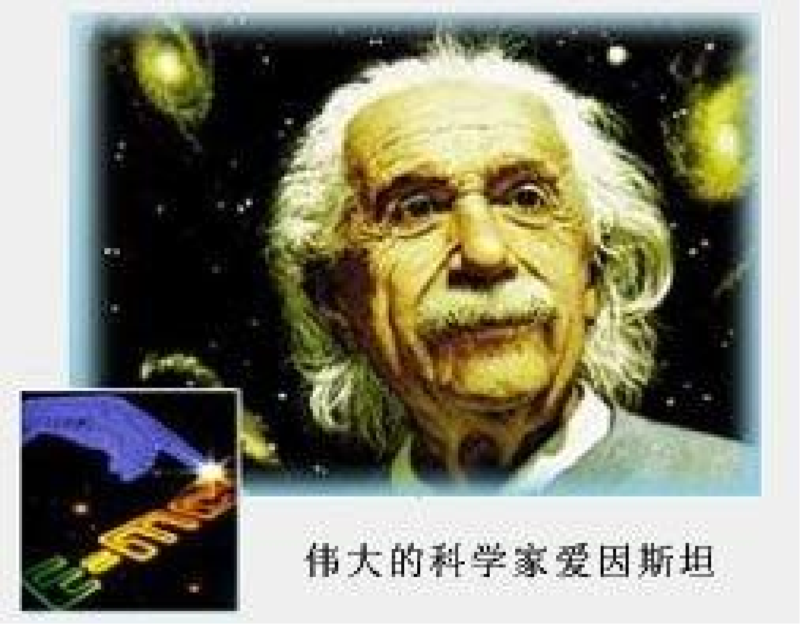
$$\boxed{E_K = mc^2 - m_0c^2}$$

E_K 动能

m_0c^2 静能

$$E = E_K + m_0c^2 = mc^2$$

$$\boxed{E = mc^2}$$



对一系统，最一般的能量守恒表为

$$\sum_i E_i = \sum_i (m_i c^2) = \text{常量}$$

可得

$$\sum_i m_i = \text{常量}$$

在历史上能量守恒和质量守恒是分别发现的两条相互独立的自然规律，在相对论中二者完全统一起来了。

讨论

$$E = mc^2$$

$$\boxed{E_{静} = m_0 c^2}$$

静能包括：内部各结构层次的粒子的动能及相互作用能。

任何宏观物体处于静止状态时，也蕴涵着相当可观的静能量。

$$\boxed{mc^2 = E_K + m_0 c^2}$$

能量守恒与质量守恒相连

动能增加必然以减少静能为代价

核反应中的基本关系

核反应中：

反应前：　静质量 m_{01}　总动能E_{K1}

反应后：　静质量 m_{02}　总动能E_{K2}

能量守恒：

$$m_{01}c^2 + E_{K1} = m_{02}c^2 + E_{K2}$$

因此：

$$E_{K2} - E_{K1} = (m_{01} - m_{02})c^2$$

总动能增量

总静止质量的减小
质量亏损

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2$$

核反应中释放的能量对应于一定的静质量亏损。

四、相对论能量和动量的关系

$E = mc^2$ $E_0 = m_0 c^2$

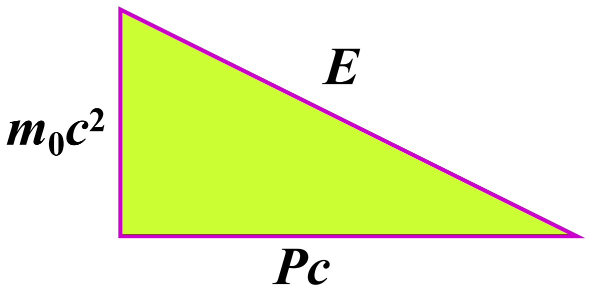
在相对论中：$p = mv = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v$ $E = mc^2 = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c^2$

由以上两式消去v 可得：

$$(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + m^2 v^2 c^2 \Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + P^2 c^2}$$

即相对论的动量能量关系式

以$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{Pc}$、$\boldsymbol{m_0c^2}$表示三角形的三边，可构成直角三角形。



动能为E_k的粒子：$E_k = E - E_0$

代入上式得：$E_k^2 + 2E_k m_0 c^2 = P^2 c^2$

$v \ll c \Rightarrow E_k \ll m_0 c^2$ 略去E_k^2

$$E_k = \frac{P^2}{2m_0}$$

回到了牛顿力学。

例：原子核的结合能。已知质子和中子的质量分别为：

$$M_P = 1.000728\,u,\ M_n = 1.000866\,u$$

两个质子和两个中子组成一氦核^4_2He，实验测得它的质量为M_A=4.000150u，试计算形成一个氦核时放出的能量。(1u=1.660×10-27kg)

解：两个质子和两个中子组成氦核之前，总质量为

$$M = 2M_P + 2M_n = 4.003188u$$

而从实验测得氦核质量M_A小于质子和中子的总质量M，这差额称$\Delta M = M - M_A$为原子核的质量亏损。 对于 ^4_2He 核

$$\Delta M = M - M_A = 0.03038\,u = 0.03038 \times 1.660 \times 10^{-27} kg$$

根据质能关系式得到的结论：物质的质量和能量之间有一定的关系，当系统质量改变ΔM 时，一定有相应的能量改变 $\Delta E = \Delta Mc^2$

由此可知，当质子和中子组成原子核时，将有大量的能量放出，该能量就是原子核的结合能。所以形成一个氦核时所放出的能量为

$$\Delta E = 0.03038 \times 1.660 \times 10^{-27} \times \left(3 \times 10^8\right)^2 J = 0.4539 \times 10^{-11} J$$

例: 设有两个静止质量都是m_0的粒子，以大小相同、方向相反的速度相撞，反应合成一个复合粒子。试求这个复合粒子的静止质量和运动速度u。

解：设两个粒子的速率都是υ，由动量守恒和能量守恒定律得

$$m\upsilon - m\upsilon = Mu \qquad 2mc^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = Mc^2 \qquad \beta = \frac{\upsilon}{c}$$

式中 M 和 u 分别是复合粒子的质量和速度。由动量守恒有$u=0$，即 $M=M_0$，而由能量守恒，得 $M_0 = \dfrac{2m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

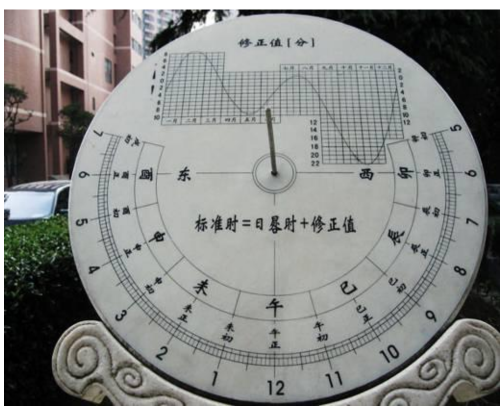
这表明复合粒子的静止质量 M_0 大于 $2m_0$，两者的差值

$$M_0 - 2m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - 2m_0 = \frac{2E_k}{c^2}$$

式中E_k为两粒子碰撞前的动能。由此可见，与动能相应的这部分质量转化为静止质量，从而使碰撞后复合粒子的静止质量增大了。

时空观的发展

时间　一个极其普通的事实和物理量，是从古到今就被人类真实地感知和广泛应用的自然规律。但是，时间的本质究竟是什么，为何是单向不可逆的，等等，在人类的科学理论和科学技术相当发达的现代，这是一个并非很小的小问题，而是一个仍然没有彻底解答的一个事关全局的大问题。



不同的时空观

牛顿的时间观：空间是绝对的，时间是绝对的，不受任何外界因素的影响，它持续不断地从过去进入未来。

相对论的时间观：空间是相对的，时间是相对的，取决于运动的参照系。

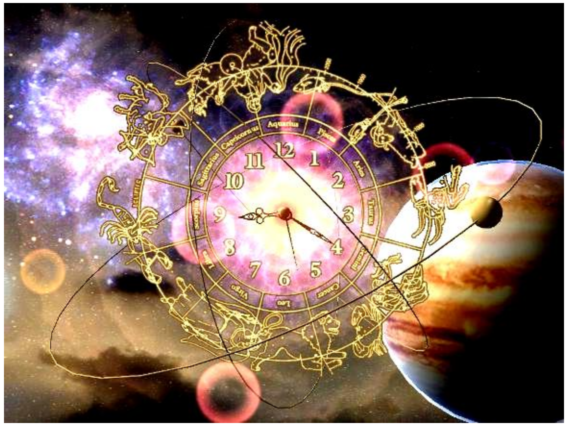
热力学的时间观：认为系统的熵总是不断地增大，进而给出了事件发生的时间箭头。 时间是单向不可逆的，存在时间之箭。

量子论的时间观：……

弦论的时间观：……

黑洞的时间观：……

宇宙学的时间观：……。



1927年海森伯首先提出了不确定关系。

并行的宇宙

它就不像人们以为的那样仅仅存在一个历史。相反地，宇宙应该拥有所有可能的历史，每种历史各有其存在的概率。

史蒂芬·霍金并不是惟一抱这种幻想的人。宇宙学家亚力山大·维勒金说：“有非常多的平行宇宙，在那里，戈尔(美国前副总统，后来在与小布什的总统竞选中落败)是美国的总统，而埃尔维斯·普雷斯利（摇滚巨星猫王)还活着。

霍金甚至还设想自己到了另一并行宇宙。然后，所发生的一切就如他在科幻小说《星际旅行》中所经历的一样：霍金和牛顿、爱因斯坦玩扑克，玛丽莲·梦露坐在他的旁边。“任何一个想得到的故事在宇宙中都有可能发生，”霍金说，“肯定有这样一个故事，在其中我和玛丽莲·梦露结婚了。”

霍金说：然而，到目前为止什么都没有发生。“这太遗憾了”。




时序的相对性、时空旅行的可能性（超光速）

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left[1 - \frac{u}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right]$$

霍金对相对论的主要修正是，时间虽然可以变快变慢，但决不能倒流，虚时间和实时间的最大夹角是 90 度，也就是互相垂直，不可能倒回去。巨大能量或质量造成的时空弯曲，可以使人跳到另一个宇宙历史中去，但不会回到过去。过去的已经过去了，已经结束了，已经消失了，永远也不会再来了。

科幻作家们好不容易接受了爱因斯坦的时间倒流，那至少还是个线性的，像是坐船逆流而上，可现在又被霍金更加复杂的多态虚宇宙搞糊涂了。但他们还是对霍金理论投入了巨大的热情，而哲学家们要跟上来，恐怕需要更长的时间了。

科幻作家的力作

《宇宙追击令》

宇宙不只有一个，有很多个
这是多重宇宙
我们能在各宇宙之间旅行
但是这种旅行受到严格的限制
你不只有一个
你有很多身份
同时活在多个平行宇宙中
这是一个平衡的系统……

上一世纪哲学曾经被物理学严重颠覆过，第一次是相对论提出的四维时空，认为时间可以变慢，甚至可以倒流；第二次是量子论提出的不确定关系和波粒二象性，认为物质和能量可以有多个状态同时存在。这严重破坏了哲学时空的连续性、唯一性、单向性、因果性等等规律。

霍金宇宙观更加大了对传统哲学时空观的打击力度，他结合了相对论的弯曲时空和量子论的多态时空，认为我们的宇宙是一个封闭的球形时空，而我们经历的宇宙历史，只是这个球形上的一条单向射线，球形时空上同时还存在许多个与我们的历史不相交的多态历史，对我们的时间来说，那些宇宙历史拥有“虚时间”，但并不影响我们这个历史中的“实时间”。

众所周知，物理学是几乎一切科学的基础，现代的天文学、化学、地质学、生物学、医学和哲学都是建立在现代物理学基础之上的，而物理学的基础被严重动摇后，其余科学包括哲学当然也必须跟着改写。


SPACE.COM
路漫漫其修远兮吾将上下而求索
Courtesy of John Catraham

本 章 基 本 要 求

1. 理解狭义相对论的两个基本假设；

2. 了解时间，空间跟物质运动之间的关系，时间膨胀和长度收缩（了解牛顿力学中的时空观和狭义相对论中的时空观以及二者的差异。）

3. 理解洛仑兹变换；

4. 理解狭义相对论中质量和速度的关系、质量和能量的关系。

例：甲乙两人所乘飞行器沿x轴作相对运动。甲测得两个事件的时空坐标为 $x_1=6\times10^4$m，$y_1=z_1=0$，$t_1=2\times10^{-4}$s；$x_2=12\times10^4$m，$y_2=z_2=0$，$t_2=1\times10^{-4}$ s，若乙测得这两个事件同时发生于t' 时刻，问：

(1) 乙对于甲的运动速度是多少？

(2) 乙所测得的两个事件的空间间隔是多少？

解 (1) 设S系被固定在飞行器甲上，以飞行器乙为参考系S'，乙相对甲的运动速度为u，乙所测得的这两个事件的时间间隔是 $t_2'-t_1'=0$

按题意，代入已知数据，有，

$$t'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)$$

$$0=\frac{(1\times10^{-4}-2\times10^{-4})-\frac{u}{c^2}(12\times10^4-6\times10^4)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

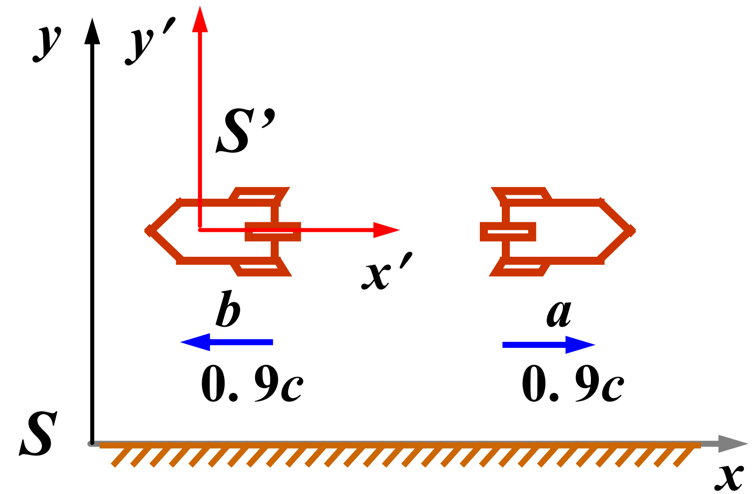
由此解得乙对甲的速度为 $u=-\frac{c}{2}$

根据洛仑兹变换 $x'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(x-ut)$

$$x_2'-x_1'=\frac{(x_2-x_1)-u(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=5.20\times10^4 m$$

可知, 乙所测得的两个事件的空间间隔是

例:在地面上测到有两个飞船a、b分别以+0.9c和−0.9c的速度沿相反的方向飞行,如图所示。求飞船a相对于飞船b的速度有多大。



如用伽里略速度变换进行计算,结果为:

$$v'_x = v_x - u = 0.9c + 0.9c = 1.8c > c$$

解　设S'系被固定在飞船b上,以地面为参考系S,

$$u = -0.9c,\ v_x = 0.9c,\ 求:\ v'_x$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + 0.9 \times 0.9} = \frac{1.80c}{1.81} = 0.994c$$

例：一短跑运动员，在地球上以10s的时间跑完了100m的距离，在对地飞行速度为0.8c的飞船上观察，结果如何？

解：以地球为S系，以飞船为S'系。

$\Delta t = 10s$，$\Delta x = 100\text{m}$，$u=0.8c$

飞船上观察运动员的运动距离为：

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{100-0.8c\times 10}{\sqrt{1-0.8^2}} \approx -4\times 10^9(\text{m})$$

运动员运动的时间为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x/c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{10-0.8\times 100/c}{0.6} \approx 16.67(\text{s})$$

根据洛仑兹坐标和时间变换公式

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$t' = \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

在飞船上看，地球以0.8c的速度后退，后退时间约为16.67s；运动员的速度远小于地球后退的速度，所以运动员跑步的距离约为地球后退的距离，即4×10^9m.

习题讨论

1.宇宙飞船相对于地面以速度V作匀速直线飞行，某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光信号，经过Δt（飞船上的钟）时间后，被尾部的接收器接收。则由此可知飞船的固有长度为：

（A）C ·Δt　　　　（B）V·Δt

(C) $C\cdot\Delta t\cdot\sqrt{1-(v/c)^2}$

(D) $\dfrac{C\cdot\Delta t}{\sqrt{1-(v/C)^2}}$

[A]

2. 在某地发生两件事，与该地相对静止的甲测得时间间隔为4秒，若相对甲作匀速直线运动的乙测得时间间隔为5秒，则乙相对甲的运动速度是（C表示光速）：

（A）（4/5）•C　　（B）（3/5）•C

（C）（1/5）•C　　（D）（2/5）•C

$$\Delta t_0 = 4s, \Delta t = 5s$$

$$\Delta t_0 = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\Delta t,$$

$$V = \frac{3}{5}C$$

[B]

3. 一观察者测得一沿米尺长度方向匀速运动着的米尺的长度为0.5m，则此米尺以速度V= $\underline{\sqrt{0.75}C}$ m·s⁻¹接近观察者。

$$\boxed{\ell = \sqrt{1-(v/c)^2}\,\ell_0}$$

$$\ell = 0.5\text{m},$$

$$\ell_0 = 1\text{m}。$$

4.

（1）在速度**V=**$\underline{\quad \sqrt{3}C/2 \quad}$情况下粒子的动量等于非相对论动量的两倍。

（1）在速度**V=**$\underline{\quad \sqrt{3}C/2 \quad}$情况下粒子的动能等于它的静止能量。

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot v = 2m_0 v$$

$$E_k = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2$$

5. 设快速运动的粒子的能量E=3000MeV，而这种粒子在静止时的能量E_0=100MeV，若这种粒子的固有寿命为$\Delta t_0=2\times10^{-6}$s，求它运动的距离（真空中光速为$c=2.9979\times10^8$m/s）。

解：

$$E=\frac{m_0C^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{100\ MeV}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=3000\ MeV$$

$$\sqrt{1-(\mathrm{v}/\mathrm{c})^2}=\frac{1}{30} \qquad \mathrm{V}=2.997\mathrm{ms}^{-1}$$

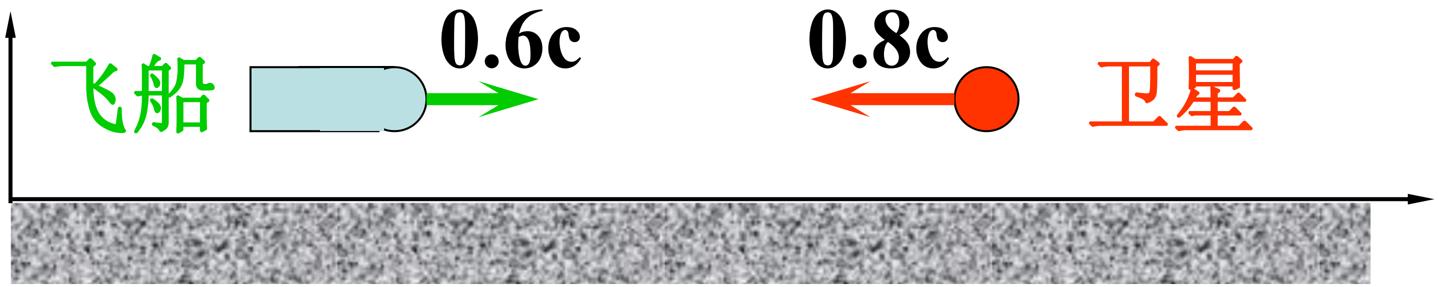
$$S=V\cdot\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=2.997\times2\times10^{-6}\times30$$

$$=1.85\times10^{-4}(m)$$

3.9.已知: 在地面上同时发现一艘飞船和一颗卫星

它们相对地面分别以0.6c、0.8c 的速度相向而行

在地面上观察，再有 5 秒两者就要相撞。

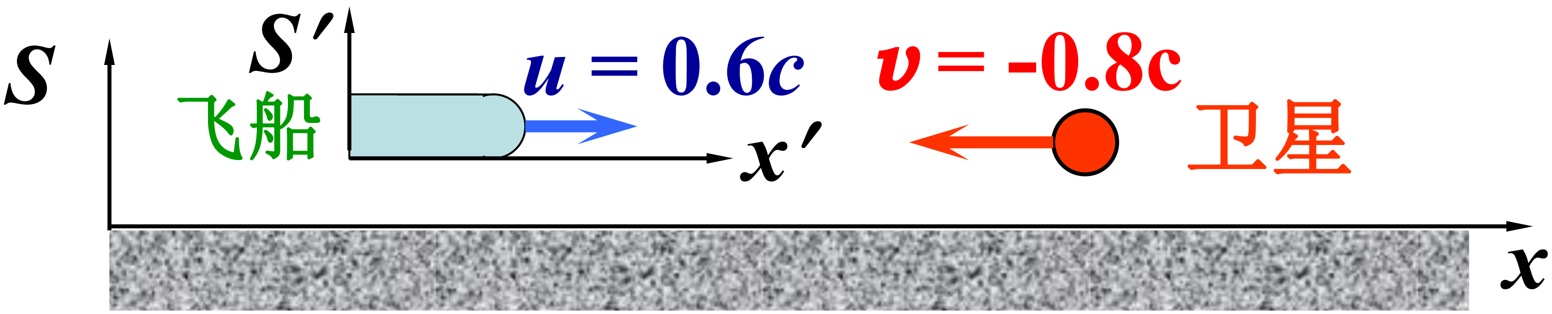


求在飞船上看:（1）卫星的速度多大?

（2）经过多少时间飞船将要和卫星相撞?

解：（1）在飞船上看卫星的速度

设地面为 S 系，飞船为 S' 系



如图示　根据洛伦兹速度变换

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2} v} = \frac{-0.8c - 0.6c}{1 + \frac{0.6c}{c^2} \times 0.8c} \approx -0.946c$$

（沿 $-x'$ 方向）

小于光速 c。

（2）飞船上看 再经过多少时间相撞？

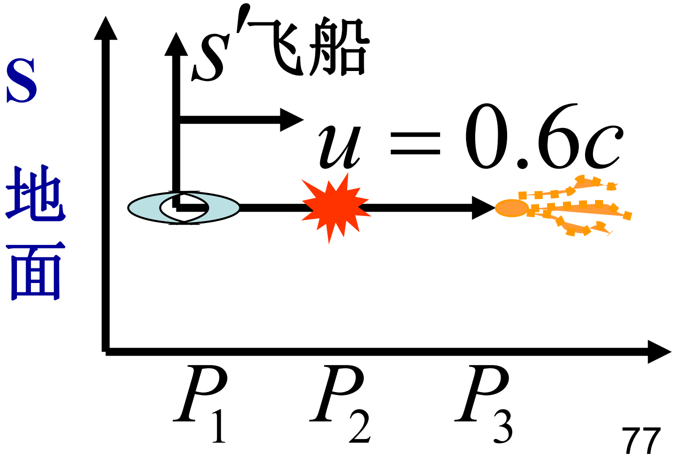
解法1 常规的做法

1）建坐标 确定事件

事件1 飞船经地面P_1处

事件2 两者相撞在地面的P_2处

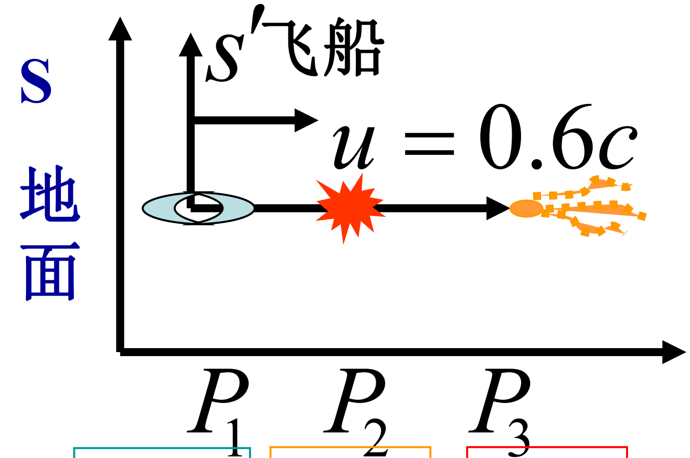
事件3 卫星经地面P_3处



1）确定事件

2）相应的时空坐标

3）根据题意确定已知和待求的量



P_1	P_2	P_3
x_1, t_1	x_2, t_2	x_3, t_3
x_1', t_1'	x_2', t_2'	x_3', t_3'

已知： $t_2 - t_1 = 5\text{s} \quad (t_3 = t_1)$

求： $t_2' - t_1'$

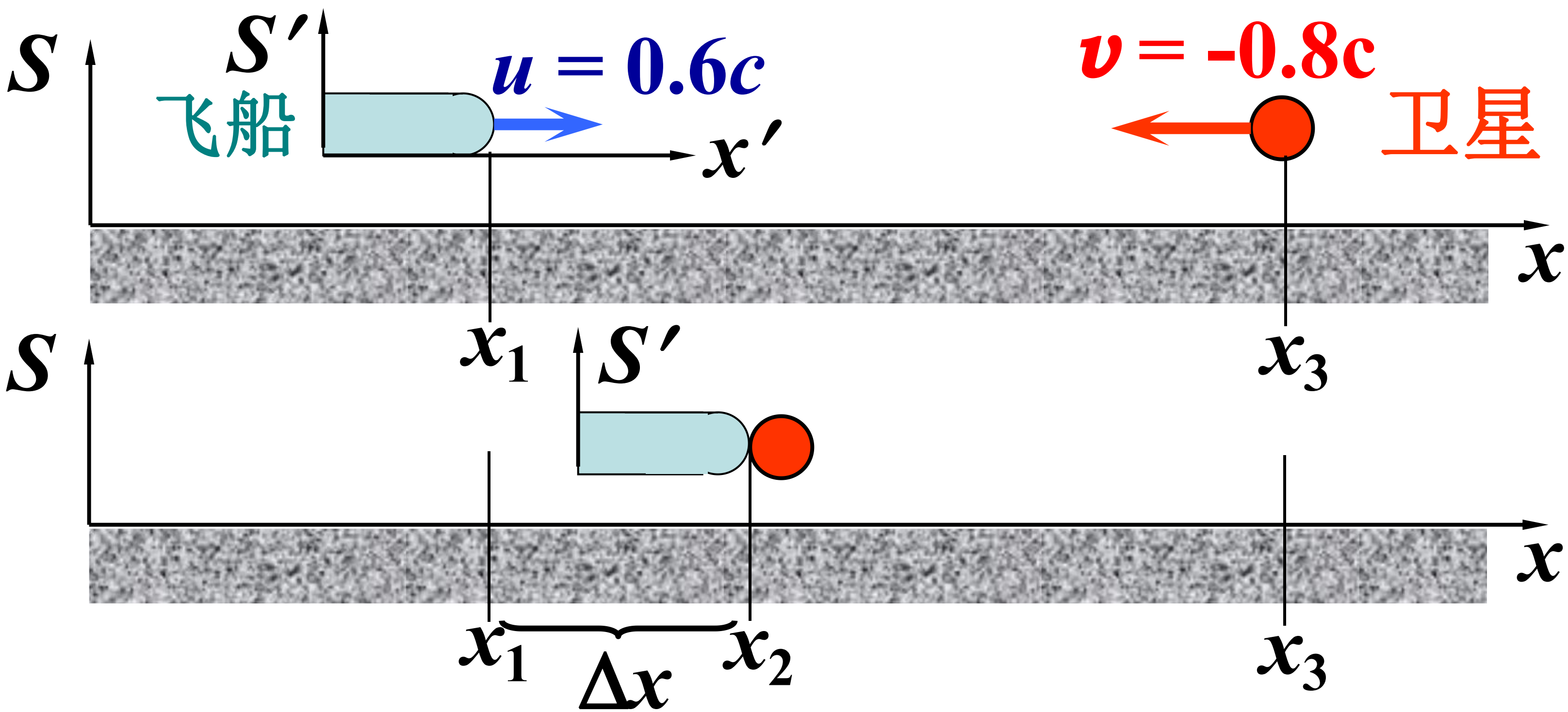
解：

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{= u(t_2 - t_1)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 4\text{s}$$

解法2 利用"原时"和""两地时"的关系

事件1：飞船被地面上观察到

事件2：飞船与卫星相撞



解法2 利用“原时”和”“两地时”的关系

事件1：飞船被地面上观察到

事件2：飞船与卫星相撞

这两事件在地面上的时间间隔是两地时 Δt,

在飞船上看是原时 $\Delta t'$

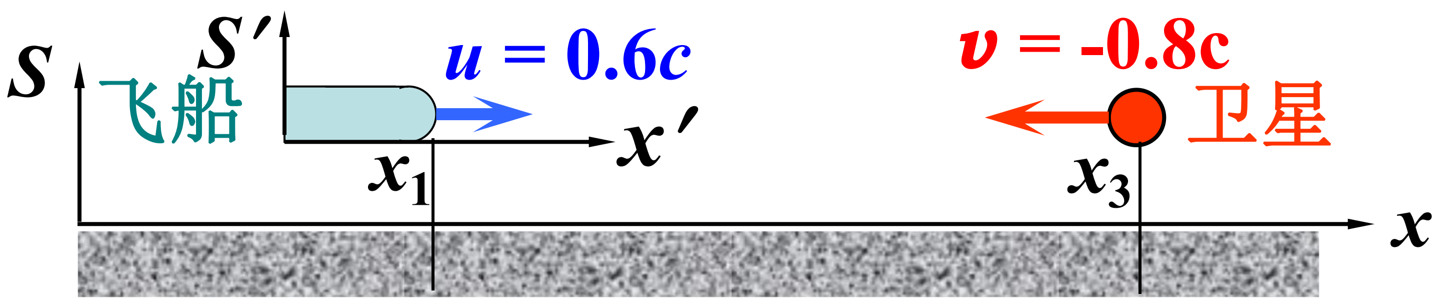
$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-u^2/c^2} = 5\sqrt{1-(0.6c/c)^2}$$

$$= 5\times 0.8 = 4\,\mathrm{s}$$

解法3　容易出错的做法 头脑得十分清醒

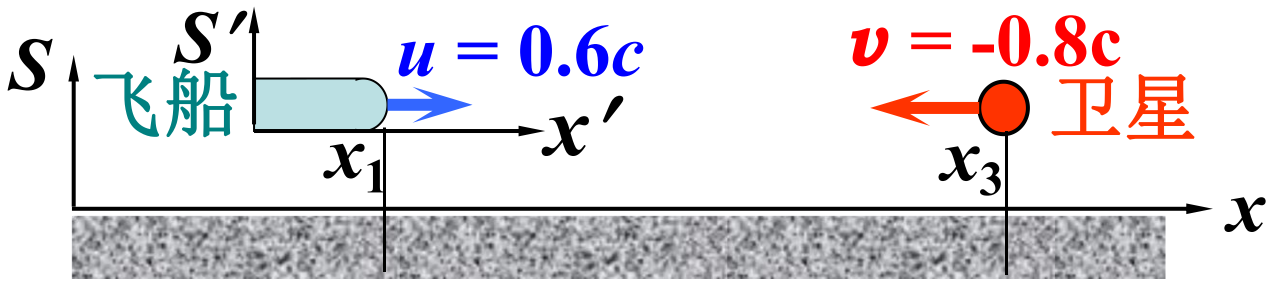
荆棘丛生　险途

事件1：地面发现飞船
事件3：地面发现卫星



在地面系中　事件1、3的距离是：

$$l = \Delta x_{31} = x_3 - x_1 = (0.6c + 0.8c) \cdot 5s = 7c \cdot s$$



在地面系中　事件1、3的距离是：

$$l=\Delta x_{31}=x_3-x_1=(0.6c+0.8c)\cdot 5s=7c\cdot s$$ √

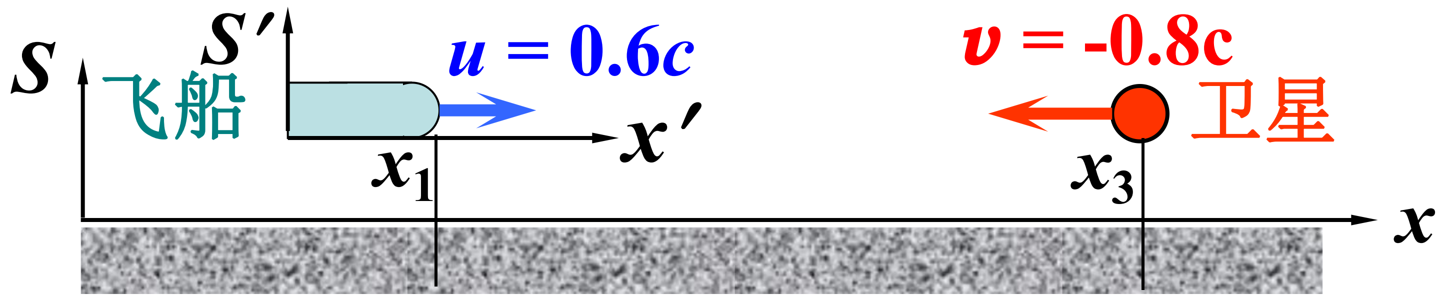
在飞船系中看 这段距离是Δx_{31} 的动长：

$$l'=\Delta x'_{31}=\Delta x_{31}\cdot\sqrt{1-u^2/c^2}=7\times 0.8=5.6c\cdot s$$ √?

在飞船系中卫星的速度是：　$v'=-0.946c$ √

$$\therefore \Delta t'=\frac{l'}{|v'|}\approx 5.6c\cdot \mathrm{s}/0.946c\approx 5.92\mathrm{s}\neq 4\mathrm{s}$$

错在何处？



另有人认为在飞船系中，

事件1、3并非同时

故$\Delta x'_{31}$不应是Δx_{31}的动长，

应由洛伦兹变换给出：

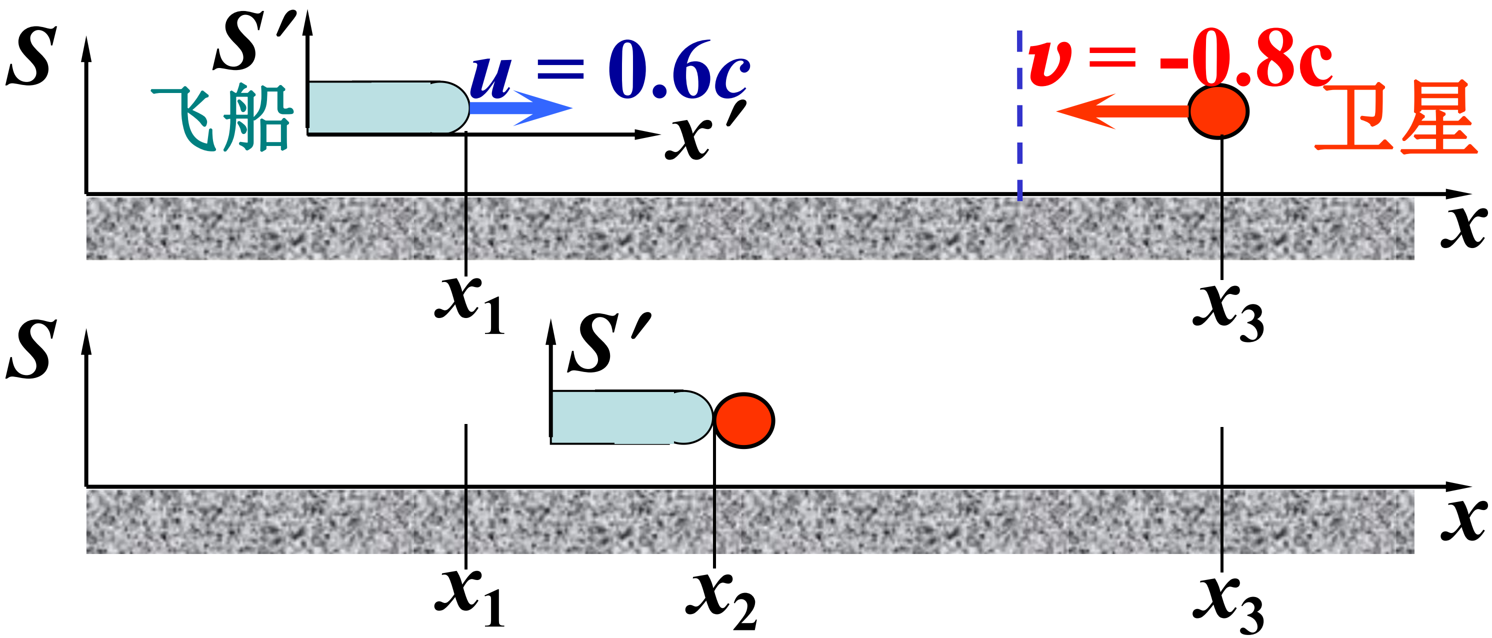
$$\Delta x'_{31} = \gamma(\Delta x_{31} - u\Delta t_{31}) = \gamma\Delta x_{31} = \gamma 7c\cdot s = 8.75c\cdot s \quad \surd$$

$$\therefore \qquad \Delta t' = \Delta x'_{31} / |v'| = 9.25s \neq 4s$$

问题又出在何处？

问题是：$\Delta x'_{31}$不是题目要求的飞船系中

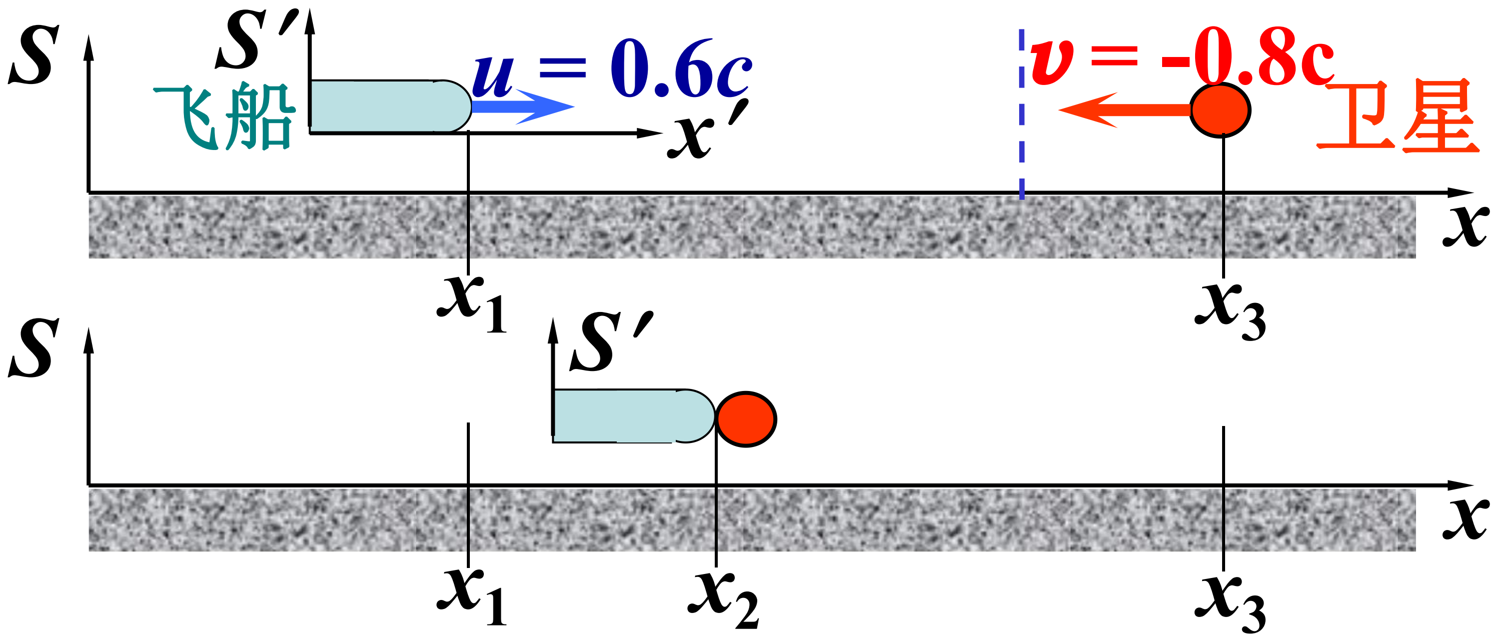
飞船要避免卫星与其相碰的那段距离



在飞船系中 事件1、3并非同时，时间差为：

$$\Delta t'_{31} = \gamma(\Delta t_{31} - \frac{u}{c^2}\Delta x_{31}) = -\gamma\frac{u}{c^2}\Delta x_{31} = -5.25\,\text{s}$$

“—”表明，在飞船系中事件3在先，早了5.25s



在飞船系中 事件1、3时间差：$\Delta t'_{31} = -5.25\ \mathrm{s}$

“—”表明，在飞船系中事件3在先，早了5.25s

飞船与卫星距离应为：$l' = \Delta x'_{31} - |\Delta t'_{31}| \cdot |v'|$

$$\therefore\ \Delta t' = l' / |v'| = 9.25 - 5.25 = 4\,\mathrm{s}$$ （同前）