第二节　边缘分布

一、边缘分布函数

二、离散型随机变量的边缘分布律

三、连续型随机变量的边缘分布

四、小结

一、边缘分布函数

问题:已知 (X,Y) 的分布, 如何确定 X,Y 的分布?

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},\ F(x)=P\{X\le x\},$$

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)=F_X(x)$$

(X,Y)关于X的边缘分布函数.

定义 设 $F(x,y)$ 为随机变量 (X,Y) 的分布函数，则 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$.

令 $y\to\infty$, 称 $P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)$ 为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数 .

记为 $F_X(x)=F(x,\infty)$.

同理令 $x\to\infty$,

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=P\{X<\infty,Y\le y\}=P\{Y\le y\}$$

为随机变量 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数.

二、离散型随机变量的边缘分布律

定义 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$

记
$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \ i = 1,2,\cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1,2,\cdots.$$

因此得离散型随机变量关于X和Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

例1 已知下列分布律求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$
1	$\frac{12}{42}$	$\frac{6}{42}$

解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$
0	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注意

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布

例2 一整数 N 等可能地在 $1,2,3,\cdots,10$ 十个值中取一个值. 设 $D=D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数，$F=F(N)$ 是能整除 N 的素数的个数. 试写出 D 和 F 的联合分布律，并求边缘分布律 .

解

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

由此得 D 和 F 的联合分布律与边缘分布 布律：

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$1/10$	0	0	0	$1/10$
1	0	$4/10$	$2/10$	$1/10$	$7/10$
2	0	0	0	$2/10$	$2/10$
$P\{D=i\}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$	1

或将边缘分布律表示为

D	1	2	3	4
p_k	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$

F	0	1	2
p_k	$1/10$	$7/10$	$2/10$

三、连续型随机变量的边缘分布

定义 对于连续型随机变量 (X, Y)，设它的概率密度为 $f(x,y)$，由于

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,dv\right] du,$$

记

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy,$$

称其为随机变量 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度.

同理可得 Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\,du\right]dv,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx.$$

Y 的边缘概率密度.

例3 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

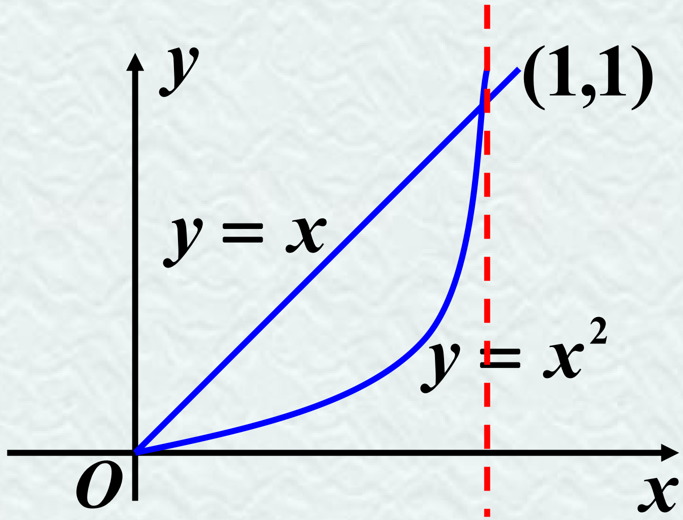
求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$

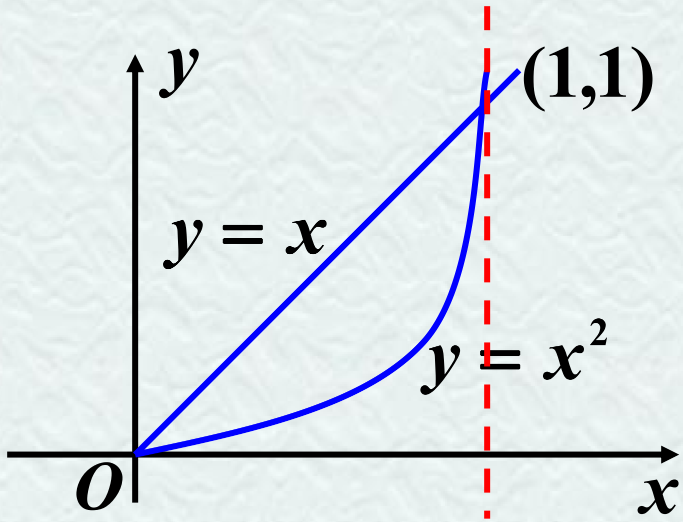
当 $0\le x\le 1$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_{x^2}^{x}6\,\mathrm{d}\,y$$



$= 6(x - x^2).$



当 $x < 0$ 或 $x > 1$时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

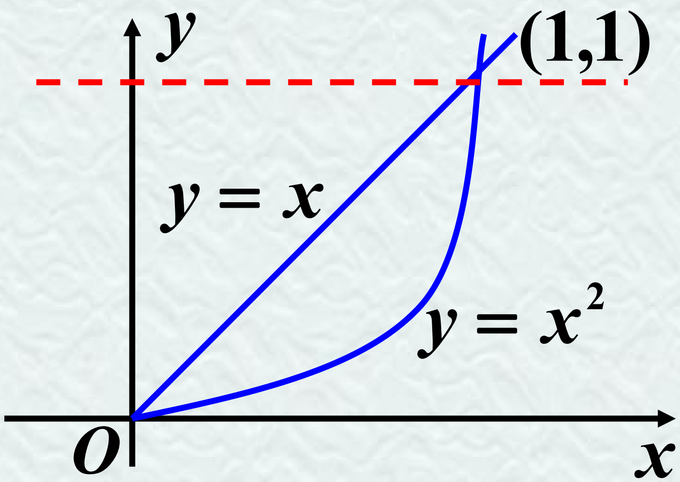
因而得 $$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $0 \le y \le 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_y^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x$$

$$= 6(\sqrt{y} - y).$$



当 $y < 0$ 或 $y > 1$时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0.$

得 $f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

例4 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty,$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数,且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,$

$-1<\rho<1.$

试求二维正态随机变量 的边缘概率密度.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$

由于 $\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\dfrac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$

$$=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\mathrm{d}y,$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$

则有 $$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

即 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

同理可得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且都不依赖于参数 ρ.

请同学们思考

边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布一定是二维正态分布吗?

答 不一定. 举一反例以示证明.

令 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),$$

显然, (X,Y) 不服从正态分布 ,但是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布不一定是二维正态分布.

四、小结

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x\,.$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y.$$

$$F_Y(x)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{d}\,y.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x.$$

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布