《高等数学 A(1)》试卷 A 参考解答

一. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若曲线 $xy=a$ 与直线 $y=2x-1$ 相切，则常数 $a=$ $\underline{-\frac{1}{8}}$.

2. 已知点 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{e^{2x}+k}{x}$ 的第一类间断点，则常数 $k=$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

3. 曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率为 $\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}}$.

4. 函数 $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x}$ 的单调减少区间为 $\underline{[-2,0)\cup(0,2]}$ 或 $\underline{(-2,0)\cup(0,2)}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & 1\le x\le 2, \\ 0, & x<1 或 x>2, \end{cases}$ 则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=$ $\underline{\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \frac{1}{4}[x^2(2\ln x-1)+1], & 1<x\le 2, \\ 2\ln 2-\frac{3}{4}, & x>2 \end{cases}}$.

二. 计算题（每小题 6 分，共 42 分）

6. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x^2\sin 3x}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x^2\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{3x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{3x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+x})}$

(2 分)

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\overset{L法则}{=}\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1}{18}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\frac{1}{18}$$

(3 分) (5 分) (6 分)

7. 设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{2t} \\ y=t-\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ 所确定的函数，计算二阶导数 $y''(1)$.

解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-t}}{2\mathrm{e}^{2t}}$, (2 分)

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{-e^{-t}\cdot 2e^{2t}-4e^{2t}(1+e^{-t})}{(2e^{2t})^2}\dfrac{1}{2e^{2t}}=\dfrac{-6e^{t}-4e^{2t}}{8e^{6t}}=-\dfrac{3}{4}e^{-5t}-\dfrac{1}{2}e^{-4t}$, (5 分)

又当 x=1 时，t=0，于是 $y''(1)=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{4}$. (6 分)

8. 将函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^2(1+\dfrac{1}{n})^{nx}$ 展开成带佩亚诺（Peano）余项的 7 阶麦克劳林（Maclaurin）公式，并求 $f^{(7)}(0)$.

解： $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^2(1+\dfrac{1}{n})^{nx}=x^2\lim\limits_{x\to 0}[(1+\dfrac{1}{n})^{n}]^{x}=x^2e^{x}$, (2 分)

故 $f(x)=x^2e^x=x^2(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^5))=x^2+x^3+\dfrac{x^4}{2!}+\cdots+\dfrac{x^7}{5!}+o(x^7)$, (5 分)

且 $f^{(7)}(0)=7!\cdot\dfrac{1}{5!}=42$. (6 分)

9. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

解： $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x$ (2 分)

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\left.\dfrac{1}{\cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{4}-2+\sqrt{2}$

(4 分) (6 分)

这里 $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

10. 求不定积分$\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x$，其中 $a>0$.

解：令$x=a\sec t, t\in(0,\frac{\pi}{2})$，有$\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，则

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\int a^2\sec t\tan^2 t\mathrm{d}t=\int a^2\sec t(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t=a^2(\int \sec^3 t\mathrm{d}t-\int \sec t\mathrm{d}t),$$

而$\int \sec^3 t\mathrm{d}t=\int \sec t\cdot \mathrm{d}\tan t=\sec t\tan t-\int \tan t\mathrm{d}\sec t=\sec t\tan t-\int \tan^2 t\sec t\mathrm{d}t$

$$=\sec t\tan t-\int \sec t(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t=\sec t\tan t-\int \sec^3 t\mathrm{d}t+\int \sec t\mathrm{d}t,$$

有$\int \sec^3 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sec t\tan t+\frac{1}{2}\int \sec t\mathrm{d}t$， (3 分)

由解 1 的$\int \sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1$ (5 分)

有 $\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x=a^2(\int \sec^3 t\mathrm{d}t-\int \sec t\mathrm{d}t)=\frac{a^2}{2}\sec t\tan t-\frac{a^2}{2}\int \sec t\mathrm{d}t$

$$=\frac{a^2}{2}\sec t\tan t-\frac{a^2}{2}\ln|\sec t+\tan t|+C_2=\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}-\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_2$$

即 $\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$. (6 分)

11. 设$f(x)$为连续函数，且满足$f(x)=\frac{1+\sin x}{1+x^2}-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$，求极限$\lim_{x\to\infty}f(x)$.

解：方程两边在[−1, 1]上积分: $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1+\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x$， (2 分)

得 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x-2\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+0+2\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ (4 分)

于是$3\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，或$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$，故得 $f(x)=\frac{1+\sin x}{1+x^2}-\frac{\pi}{6}$， (5 分)

从而 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+\sin x}{1+x^2} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$. (6 分)

12. 求微分方程问题 $(1+x^2)\mathrm{d}y - (\arctan x - y)\mathrm{d}x = 0$， $y(0)=0$ 的特解.

解：方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{1+x^2} y - \frac{\arctan x}{1+x^2} = 0$，这是一个一阶线性方程， (1 分)

其通解为 $y = e^{-\int \frac{1}{1+x^2}dx}\left[\int \frac{\arctan x}{1+x^2} e^{\int \frac{1}{1+x^2}dx}\mathrm{d}x + C\right] = e^{-\arctan x}\left[\int \frac{\arctan x}{1+x^2} e^{\arctan x}\mathrm{d}x + C\right]$ (3 分)

$= e^{-\arctan x}\left[\int \arctan x e^{\arctan x}\mathrm{d}\arctan x + C\right] = e^{-\arctan x}\left[\arctan x \cdot e^{\arctan x} - e^{\arctan x} + C\right]$

$= \arctan x - 1 + Ce^{-\arctan x}$, (5 分)

代入初始条件有 C=1，故 $y = \arctan x + e^{-\arctan x} - 1$ (6 分)

三. 应用题（每小题 9 分，共 27 分）

13. 若连续函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t) f(t)\mathrm{d}t$，求该函数 $f(x)$.

解：方程化为 $f(x) = \sin x - x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$， (1 分)

两边对 x 求导，便有 $f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - xf(x) + xf(x) = \cos x - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$， (2 分)

再一次对 x 求导， $f''(x) = -\sin x - f(x)$，得二阶线性微分方程:

$$y'' + y = -\sin x$$

且从上两式得初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1$. (4 分)

该微分方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$，故有特征根 $r_{1,2} = \pm i$，于是有齐次方程的通解: $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (6 分)

又自由项为 $-\sin x$，故 $\lambda \pm i\omega = \pm i$ 是特征根，设原方程特解为 $y^* = x(A\cos x + B\sin x)$

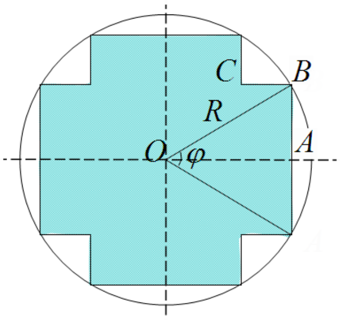
代入原方程得 $-2A\sin x + 2B\cos x = -\sin x$，比较便得 $A = \frac{1}{2}, B = 0$，

于是有特解 $y^* = \frac{1}{2}x\cos x$， (8 分)

从而原方程通解为 $y = Y + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\cos x$，

再由初始条件得 $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}$，于是所求函数为 $y = f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + x\cos x)$． (9 分)

14. 一个对称的正十字图形（如图所示），其外接圆的半径为 R，正十字形的边长所张的圆心角为 φ. 问当 φ 为多少时，该十字图形的面积最大，并求其最大面积.



解：建立直角坐标系如图，则由对称性，只需考虑第一象限内图形的面积最大即可. 因 $OA=R\cos\frac{\varphi}{2}$，$AB=R\sin\frac{\varphi}{2}$，从而有

$CB=OA-AB=R(\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2})$，于是第一象限内的图形面积为

$S = OA^2 - CB^2 = R^2(\sin\varphi - \sin^2\frac{\varphi}{2})$． (4 分)

求导有 $\frac{dS}{d\varphi} = R^2(\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi)$，令 $\frac{dS}{d\varphi} = 0$，可解得 $\tan\varphi = 2$，即 $\varphi = \arctan 2$． (6 分)

由实际问题背景知 S 必有最大值，故当取 $\varphi = \arctan 2$ 时，$S_{\max} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R^2$， (8 分)

从而对应的整个十字图形的最大面积为 $4S = 2(\sqrt{5}-1)R^2$． (9 分)

15. 已知某容器内表面形状可视为由曲线段 $y = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ x^2 - 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$，（单位：m）绕 y 轴旋转一周所成. (1) 求该容器的容积，(2) 若该容器盛满水，求将水全部提升到高出容器 1m 的地方所做的功.（水的密度 $\rho=10^3\text{kg/m}^3$，重力加速度 $g=9.8\text{m/s}^2$）

解：(1) 容器的容积为 $V = \int_0^3 \pi x^2 \mathrm{d}y = \pi\int_0^3 (1+y)\mathrm{d}y = \frac{15}{2}\pi$ （m^3）； (4 分)

(2) 利用微元法， $\mathrm{d}W = (1+3-y)\cdot\rho g\cdot\pi x^2\mathrm{d}y$，

其中 $\rho=10^3\text{kg/m}^3$ 为水的密度，$g=9.8\text{m/s}^2$ 为重力加速度， (7 分)

从而将全部的水提升到高出容器 1m 的地方所做的功为

$$W=\int_0^3 \mathrm{d}W=\int_0^3 \pi\rho g(1+y)(4-y)\mathrm{d}y=\frac{33}{2}\pi\rho g=5.07738\times 10^5(J)$$ (9 分)

四. 证明与讨论题（每小题 8 分，共 16 分）

16. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续且单调增加，$a>0$. (1) 证明$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

(2) 试列举一个函数，使得上述不等式的等号成立.

证：（1）令 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$， (3 分)

因 $f(x)$在$[a,b]$上连续，故 $F(x)$ 在$[a,b]$上可导，于是

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]dt$$

又 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加，则当 $a\le t\le x$ 时，有 $f(x) \geqslant f(t)$,

由积分的保号性知 $F'(x)\ge 0$，$a\le x\le b$，从而 $F(x)$ 在$[a,b]$上单调增加， (5 分)

又由于 $F(a)=0$，故当 $a\le x\le b$ 时，应有 $F(x) \geqslant F(a)=0$，特别地有 $F(b)\geqslant 0$，即

$F(b)=\int_a^b tf(t)dt-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt\ge 0$，不等式证毕. (6 分)

（2）取 $f(x)=C$（C 为常数），便可使上式的等号成立. (8 分)

17. 设函数 $f(x)$ 对一切实数 x 满足关系式 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$,

(1) 若 $f(x)$ 在点 $x=c$ ($c\neq 0$) 处有极值，问它是极大值还是极小值？为什么？

(2) 若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有极值，问它是极大值还是极小值？为什么？

解：（1）由 $f(x)$可导，且在点 $x=c$ ($c\neq 0$)处有极值，故 $f'(c)=0\ (c\neq 0)$， （2 分）

将 x=c 代入关系式，有 $cf''(c)+3c[f'(c)]^2=1-\mathrm{e}^{-c}\Rightarrow f''(c)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-c}}{c}>0$（无论 c 为正负），故 $f(c)$是函数 $f(x)$的极小值;（4 分）

（2）由 $f(x)$二阶可导，又在点 x=0 处有极值，故 $f'(0)=0$ ，且 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$，

于是 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}f''(x)$，（6 分）

将关系式代入得 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-e^{-x}}{x}-3[f'(x)]^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}=1>0$，

故 $f(0)$也是函数 $f(x)$的极小值.（8 分）