

## 2012 年高数 A2 7 月考卷

第 1~12 题每题 6 分，共 72 分.

1. 设  $u$  轴与三坐标轴正向构成相等的锐角，求空间向量  $a = (4, -3, 2)$  在  $u$  轴上的投影.

2. 一平面  $\pi$  过球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y - 2z$  的球心，并垂直于直线  $l: \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$  求该平面与该球面的交线在  $xOy$  坐标面上的投影.

3. 设曲面  $\Sigma$  是由  $yOz$  平面上的双曲线  $z^2 - 4y^2 = 2$  绕  $z$  轴旋转而成，曲面上一点  $M$  处的切平面  $\Pi$  与平面  $x + y + z = 0$  平行，分别写出曲面  $\Sigma$  和切平面  $\Pi$  的方程.

4. 设函数  $z = xf(xy + \frac{y}{x})$ ，其中  $f$  二阶可微，求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

5. 设方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$  确定函数  $z = z(x, y)$ ，求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

8. 设  $D: x^2 + y^2 \leq 9$ ，计算二重积分  $\iint_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy$ .

6. 已知  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^4 + 3$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 4xy^3$ , 求函数  $f(x, y)$ .

7. 计算累次积分  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3} dx$ .

9. 设  $L$  为曲线  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 其周长为  $a$ , 计算曲线积分  $\oint_L (3x^2 + 4y^2 + 2xy) ds$ .

10. 设  $\Sigma$  为介于  $z=0$  和  $z=h$  之间的圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$ , 计算  $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$ .

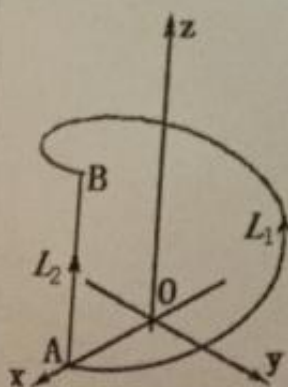
11. 设曲面  $\Sigma: x^2 + y^2 = z$  ( $0 \leq z \leq h$ ) 的法方向与  $z$  轴正向的夹角为钝角, 求流体速度场  $v = (x + y + z)k$  在单位时间内流过该曲面  $\Sigma$  的流量.

12. 设一个密度均匀的半球体占有空间区域  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ , 试求该球体质心的坐标.

第 13, 14 题每题 9 分, 第 15 题 10 分, 共 16 分.

13. 设有一座山的方程为  $z = 75 - x^2 - y^2 + xy$ ,  $M(x_0, y_0)$  是山脚  $z = 0$  (即等高线  $x^2 + y^2 - xy = 75$  上) 的点. (1) 问  $z$  在点  $M(x_0, y_0)$  处沿什么方向的增长率最大, 若记此增长量的最大值为  $\varphi(x_0, y_0)$ , 试求出  $\varphi(x_0, y_0)$ ; (2) 现欲利用此山开展攀岩活动, 为此需要在山脚处找一坡度最陡的位置作为攀岩的起点, 即在上述等高线上找一点  $M$ , 使得上述增长率最大, 试确定该起点的位置.

14. 如图, 设力场  $F = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}$ , (1) 求一质点由  $A$  沿圆柱螺线  $L_1$  到  $B$  时, 力  $F$  所做的功, 其中螺线  $L_1$  的方程为:  $x = a\cos t, y = a\sin t, z = \frac{c}{2\pi}t$ ; (2) 求该质点



由  $A$  沿直线  $L_2$  到  $B$  时, 力  $F$  所做的功; (3) 简述上面所求结果不相等的原因; 就一般情况而言,  $F$  是否可以满足一定的条件使其由  $A$  到  $B$  所做的功相等? 这个条件是什么?

15. 若  $L$  为平面上任一不经过原点的逆时针圆周, 试计算积分  $\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2}$  的值.