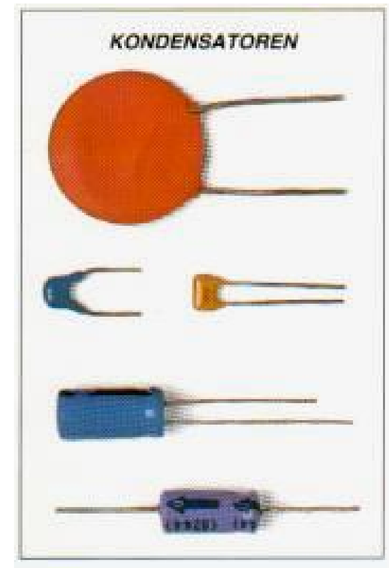
第12章　静电场中的导体和电介质



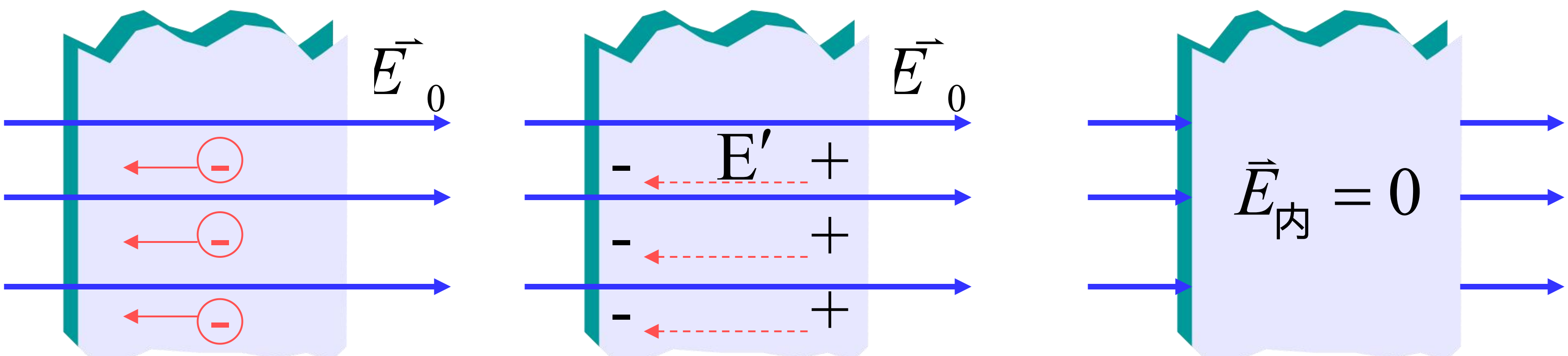
作业：练习册

§1 导体的静电平衡

一. 导体的静电平衡

1. 静电感应现象：

在静电场力作用下，导体中自由电子在电场力的作用下作宏观定向运动，使电荷产生重新分布的现象。

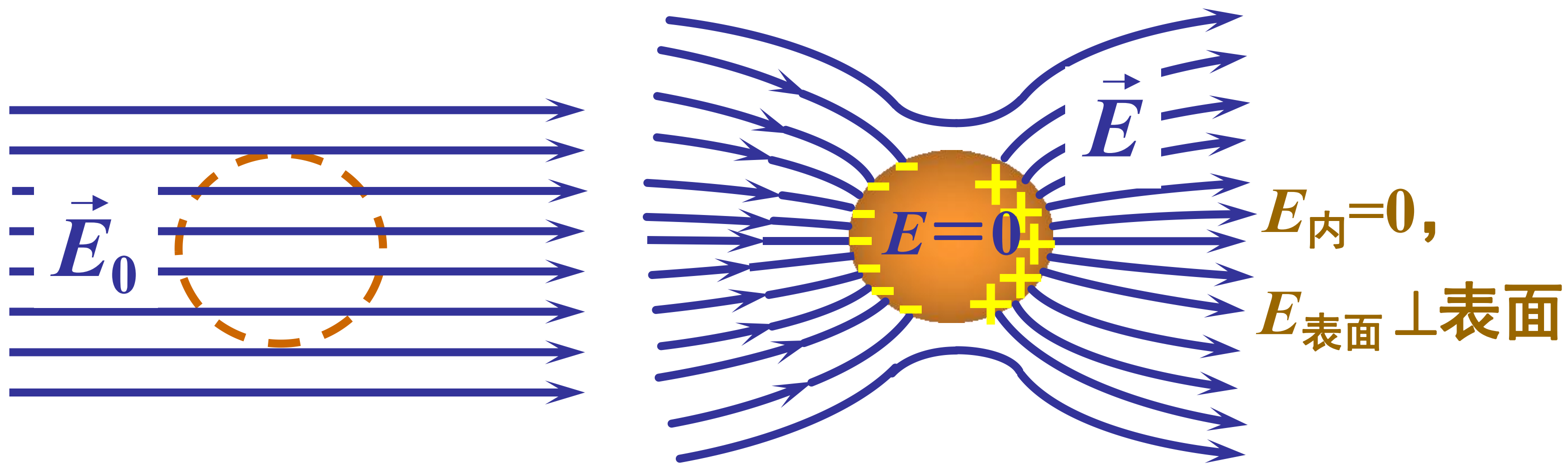


2. 静电平衡状态：

导体内部和表面无自由电荷的定向移动

——称电场和导体之间达到静电平衡

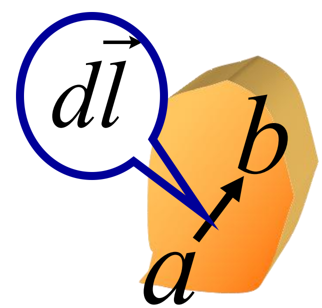
静电平衡的形成：



3. 静电平衡的条件：

导体内部 $E_{内}=0$， $E_{表面}\perp$表面。

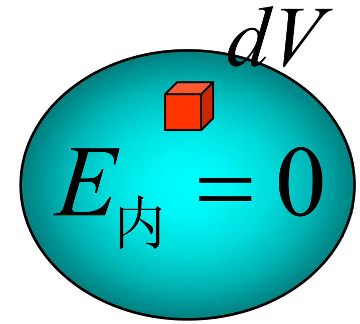
导体成为等势体，表面成为等势面。



证：在导体上任取两点 a 和 b

$$U_a - U_b = \int_{(a)}^{(b)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \boxed{U_a = U_b}$$

二. 静电平衡导体上的电荷分布



1. 导体内部净电荷处处为零，净电荷只能分布在表面上。

证明：在导体内任取体积元 dV

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{由高斯定理}} \sum_i q_i = \rho dV = 0$$

$\because$ 体积元任取 $\longrightarrow \rho = 0$ 即导体内无净电荷

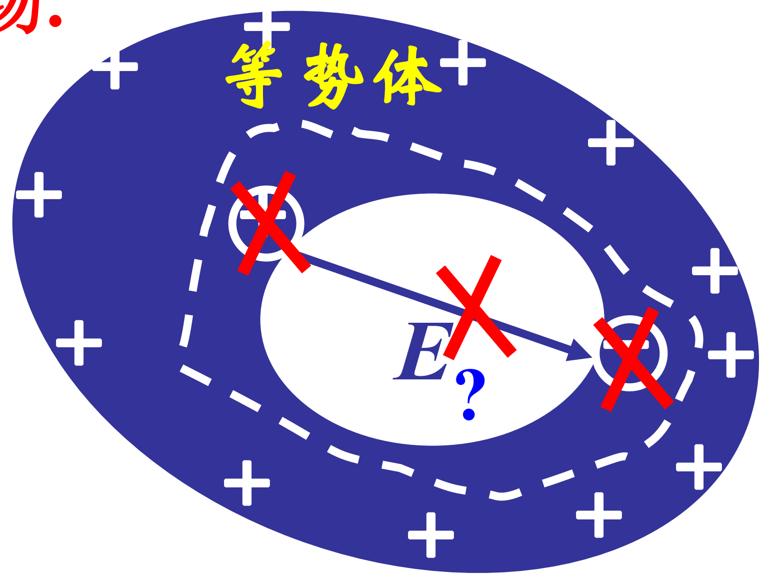
✓实心导体，电荷只分布在表面上。

✓有空腔的导体，又如何呢？

腔内无带电体

1) 内表面处处没有净电荷，电荷只分布在外表面上

2) 腔内无电场.



证明：在导体壳内作高斯面S，因为导体体内场强处处为零

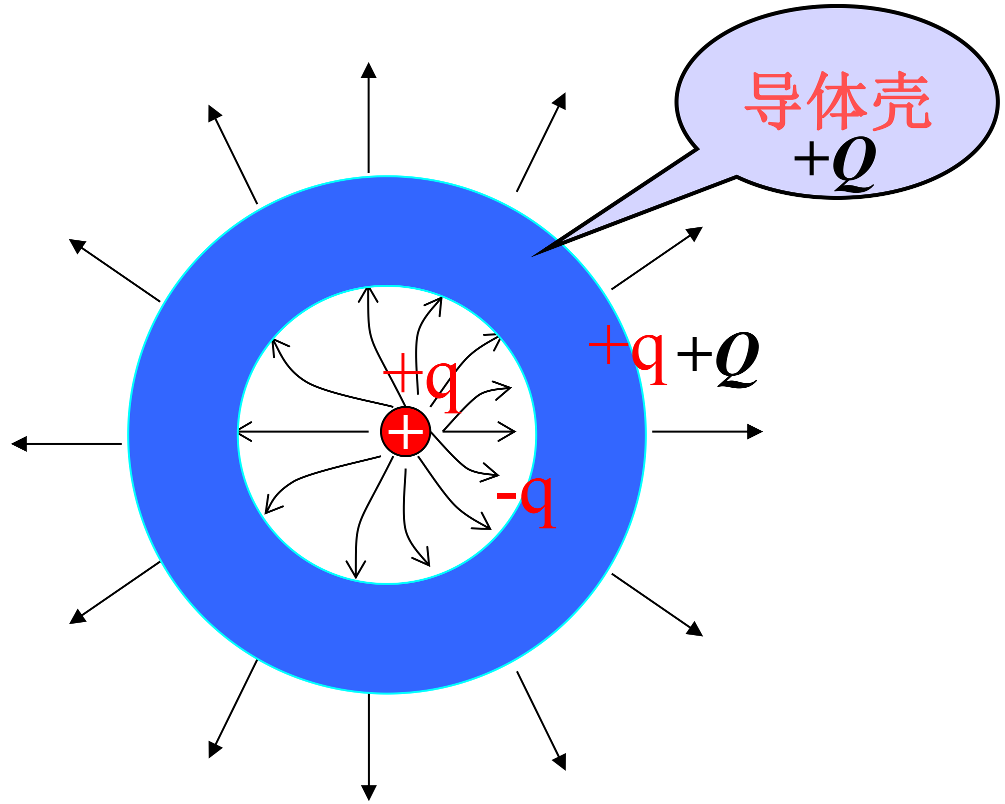
$$\therefore \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \longrightarrow \sum_i q_i = 0 \longrightarrow \sum Q_{内表面} = 0$$

腔内有带电体

$$Q_{\substack{\text{腔内}\\\text{表面}}} = -q$$

$$Q_{\substack{\text{腔外}\\\text{表面}}} = q + Q$$

（Q是导体壳本身带的电量）



由导体内场强为零和高斯定理：内表面带与腔内带电体等量反号电荷。

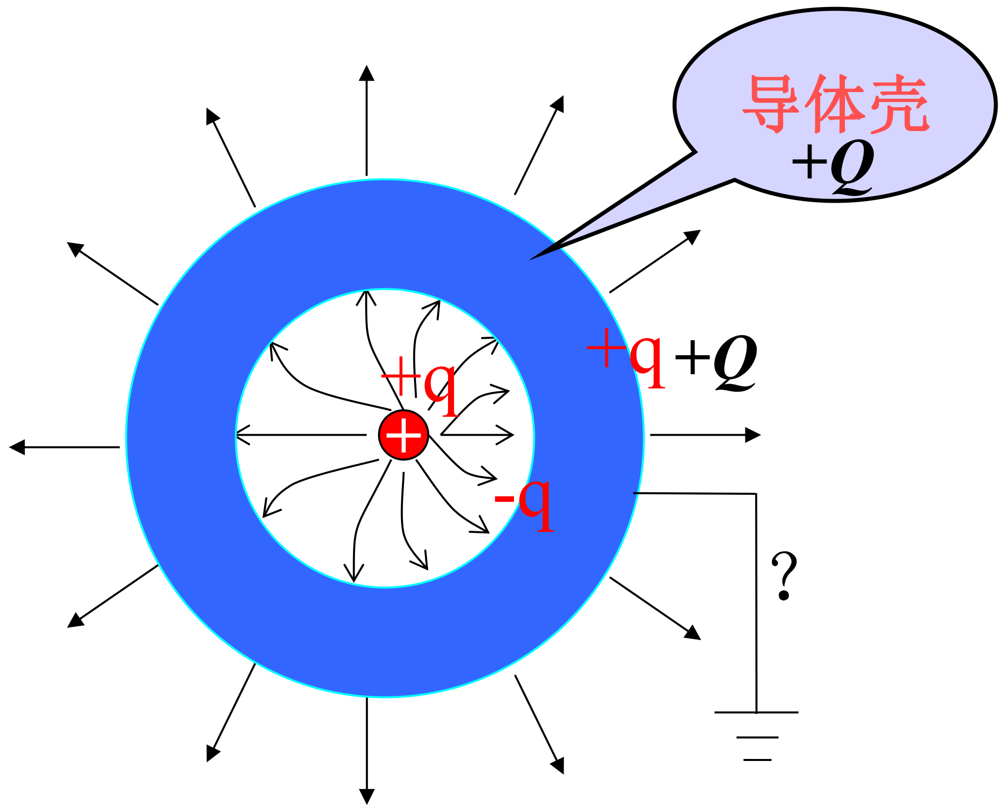
导体空腔内有带电体时的电场分布

①腔内的电场

1) 与电量q 有关

2) 与空腔内带电体、几何因素、介质有关。

3) 腔内的场与腔外(包括腔的外表面)电荷的电量及分布无关



②腔外电场

受腔内电量q 的影响。

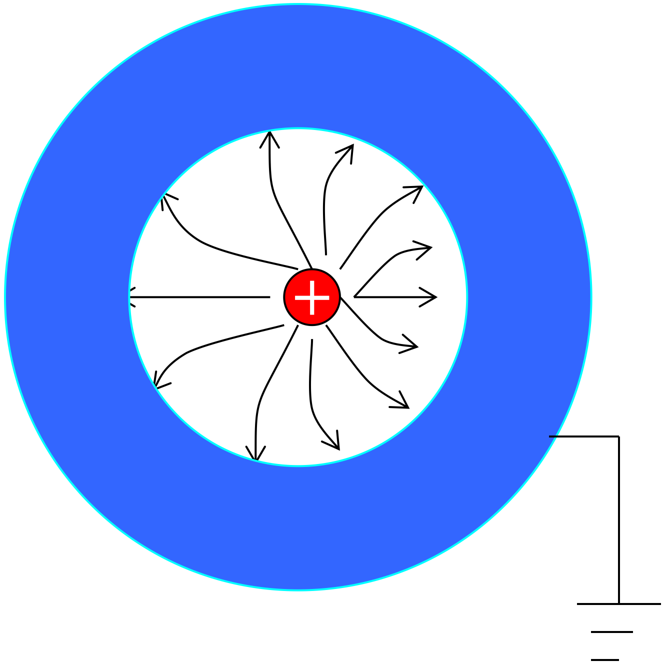
静电屏蔽---接地导体壳

腔内场

只与内部带电量及内部几何条件及介质有关

腔外场

只由外部带电量和外部几何条件及介质决定



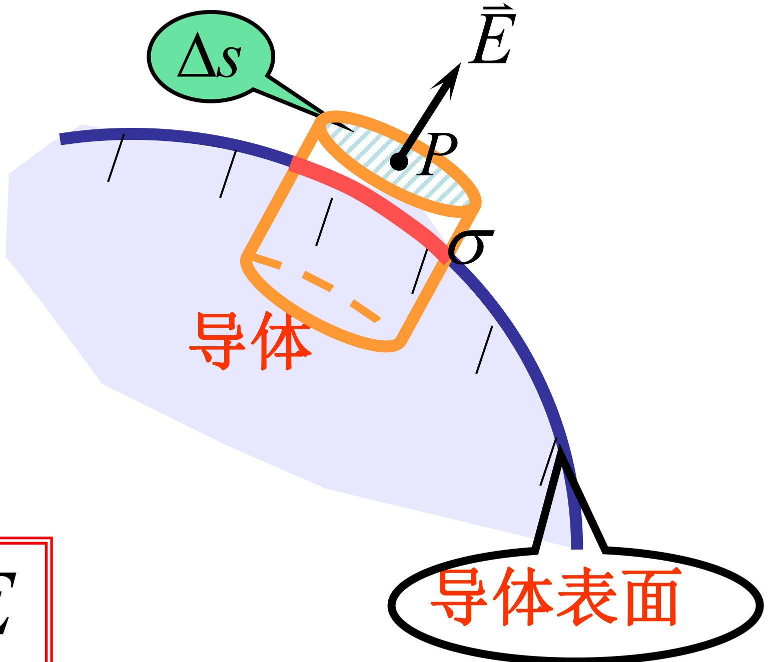
静电屏蔽:

腔内、腔外的场互不影响的现象

2. 静电平衡导体表面上各处的电荷面密度与相应表面外侧紧邻处的电场强度大小成正比。

设导体表面电荷面密度为σ

设P是导体外紧靠导体表面的一点，电场强度为$\vec{E}$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S} 0\cdot d\vec{S} + \int_{\text{侧面}}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

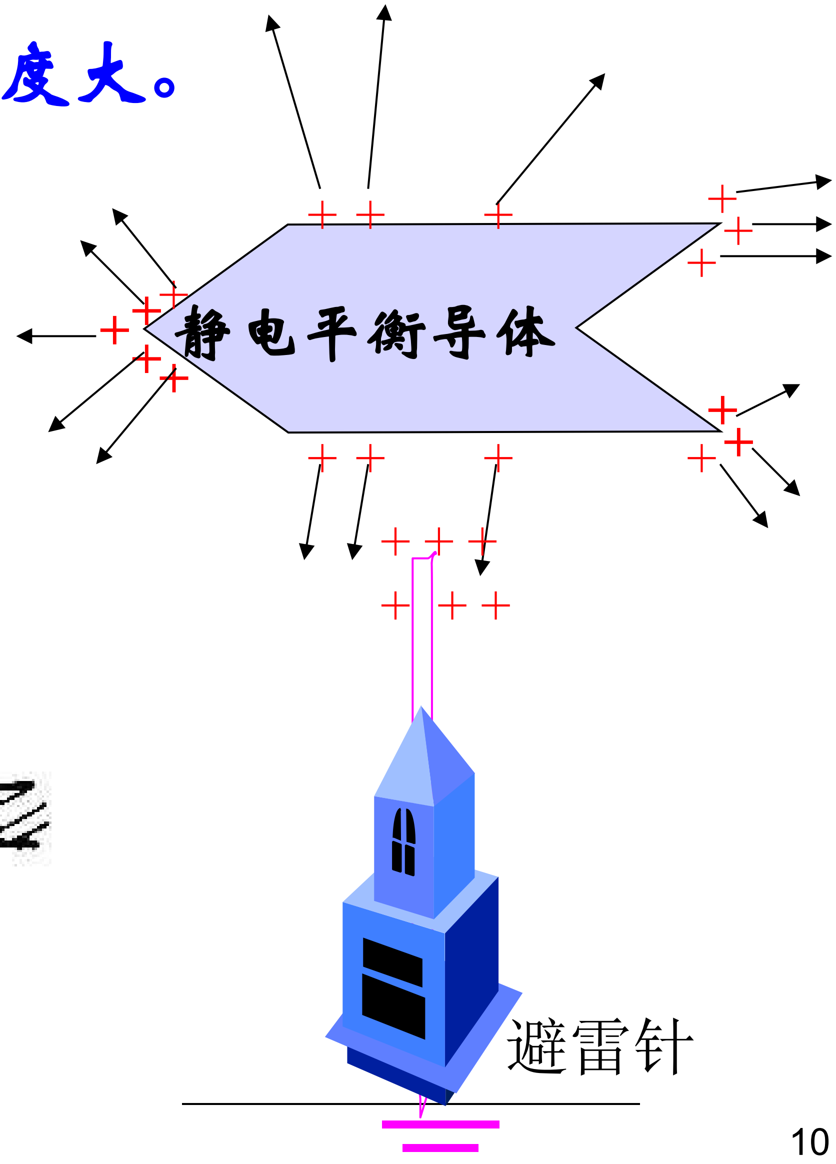
$$= E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

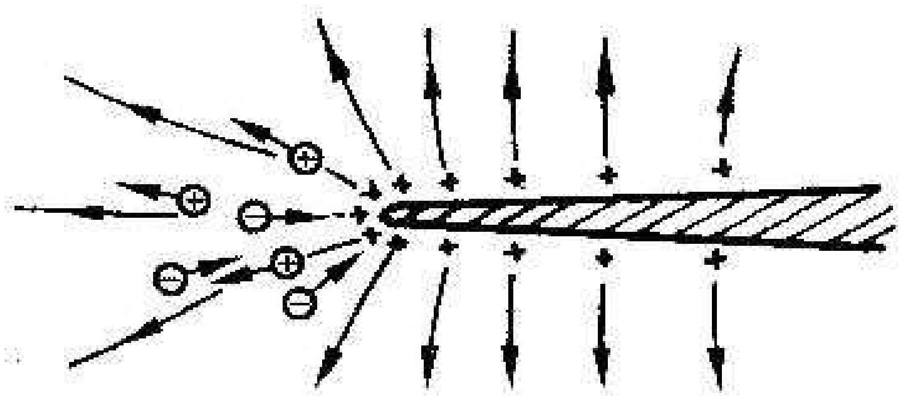
$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\sigma = \varepsilon_0 E}$$

3. 孤立导体处于静电平衡时，表面曲率大处，面电荷密度大——电场强度大。

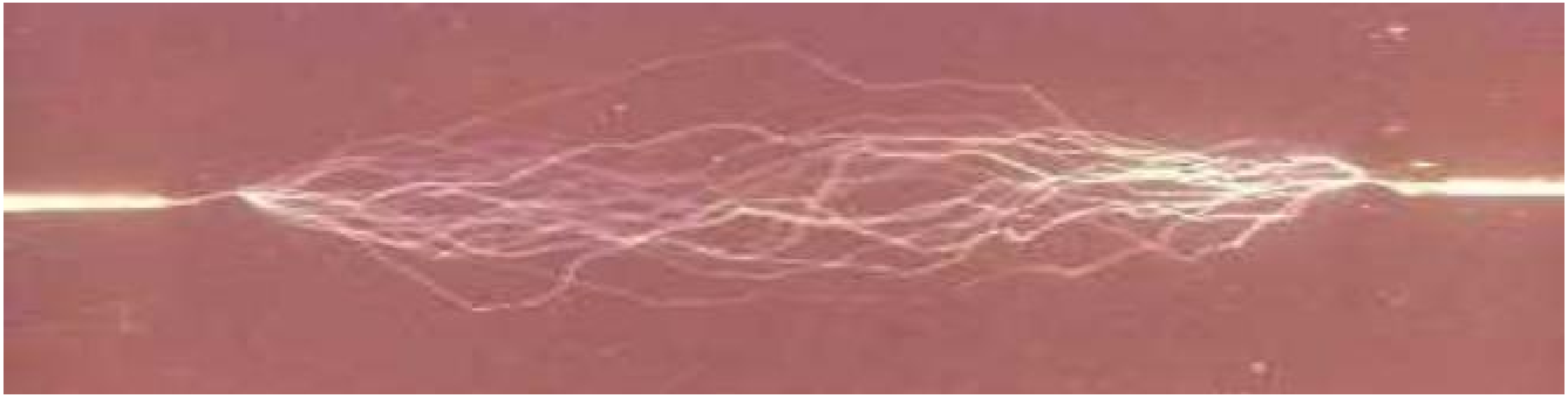
带电的尖端电场强，使附近的空气电离，因而产生放电。

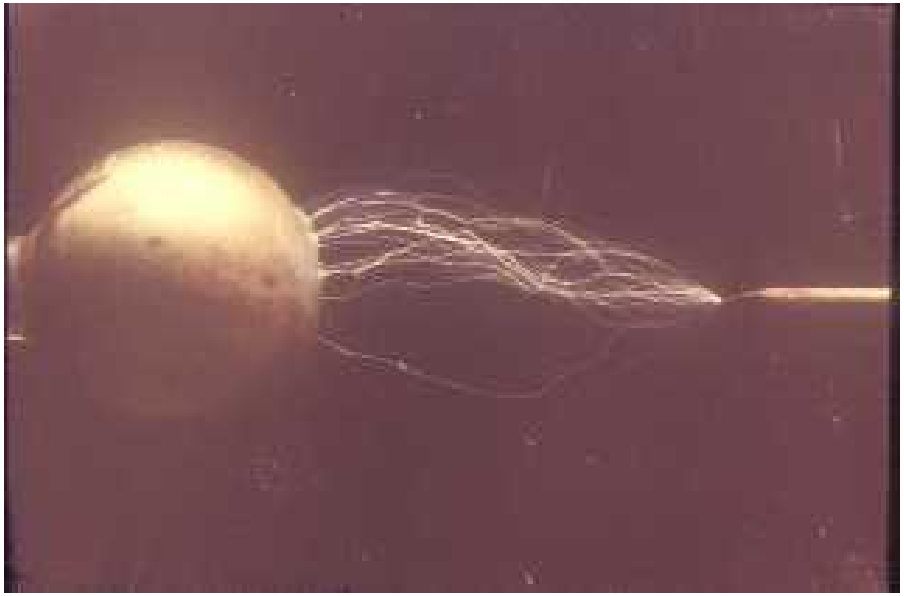


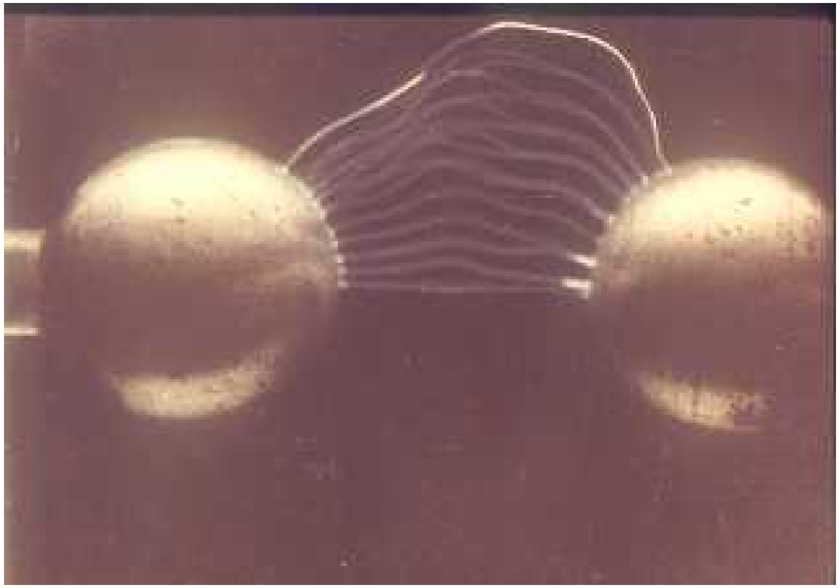


尖端放电

空气中的直流高压放电图片：







三. 有导体存在时静电场的分析与计算

原则:

1. 静电平衡的条件

$$\boxed{E_{内} = 0} \qquad \boxed{U = c}$$

2. 基本性质方程

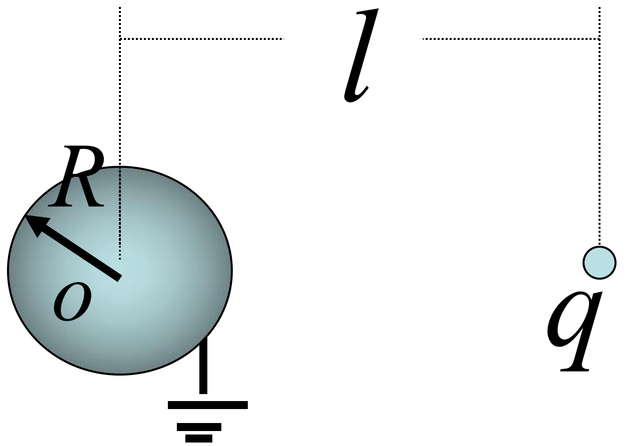
$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

3. 电荷守恒定律

$$\boxed{\sum_i Q_i = c}$$

例12.1 接地导体球附近有一点电荷q, 如图所示。

求:导体上感应电荷的电量



解: 接地, 即 $U=0$

设:感应电量为q'

由导体是个等势体 知o点的电势为0, 即 $U_o=0$

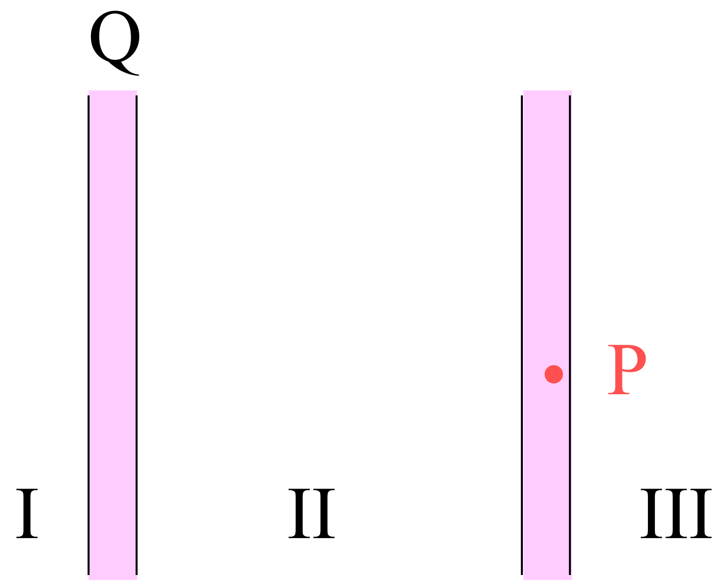
由电势叠加原理有关系式:

$$\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}=0 \quad\Longrightarrow\quad q'=-\frac{R}{l}q$$

例1 一大金属平板面积为S,带电量Q，当在其附近平行放置另一块大金属板，此板不带电。（忽略金属板的边缘效应）求：

1. 静电平衡下, 金属板的电荷分布及周围空间的电场分布。

2. 若把第二块金属板接地，以上结果如何?

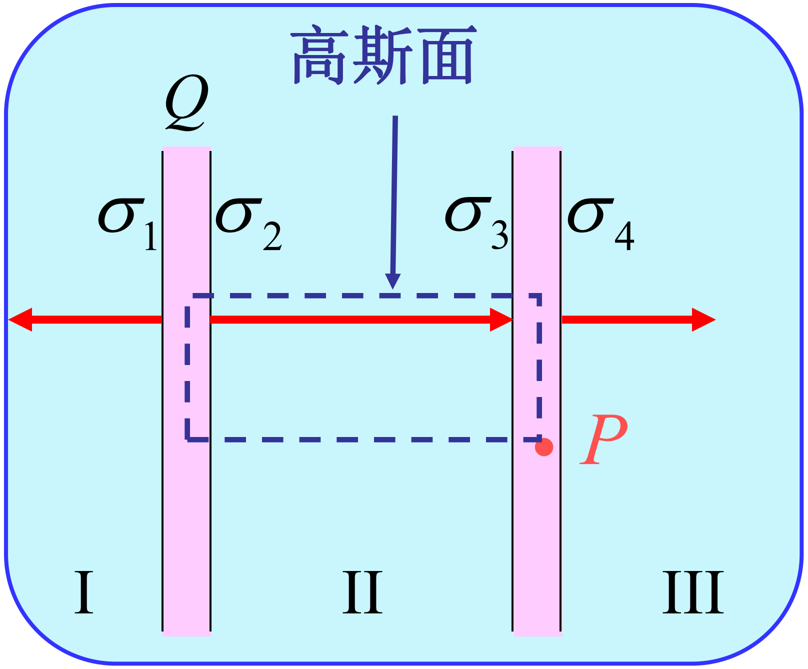


解：1. 根据电荷守恒

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S}$$

$$\sigma_3 + \sigma_4 = 0$$

根据高斯定律有 $\sigma_2 + \sigma_3 = 0$



$$E_P = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

静电平衡条件 $E_p = 0$

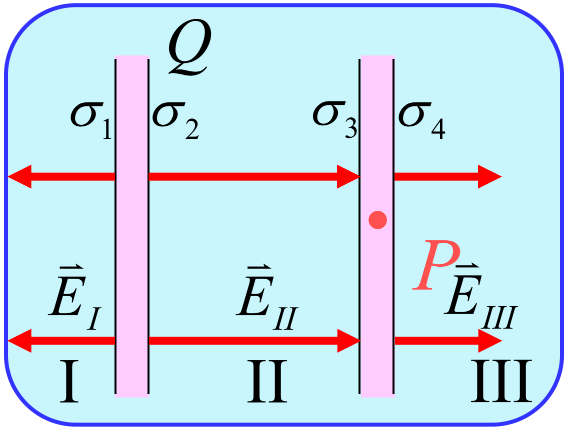
$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

解得：

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = -\sigma_3 = \frac{Q}{2S}$$

电场分布

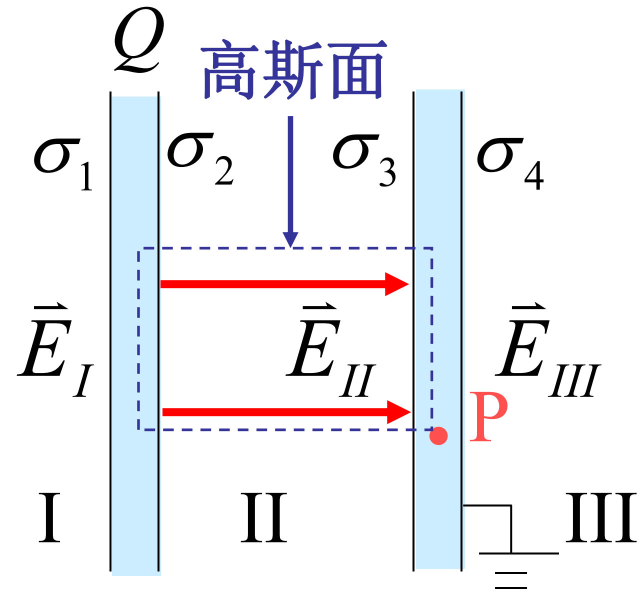
$$\because \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{e}_n$$



	大小	方向
I区	$E_{I} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{2\varepsilon_o S}$	←
II区	$E_{II} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{2\varepsilon_o S}$	→
III区	$E_{III} = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{2\varepsilon_o S}$	→

2. 如果第二块板接地，则U_4=0

故 $E_{III}=\dfrac{\sigma_4}{\varepsilon_o}=0$　　即σ_4=0



根据电荷守恒: $\sigma_1+\sigma_2=\dfrac{Q}{S}$

根据高斯定律: $\sigma_2+\sigma_3=0$

$$E_P=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}$$

静电平衡条件: $E_p=0$　即　$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$

解得　$\sigma_1=\sigma_4=0,\quad \sigma_2=\dfrac{Q}{S}\quad \sigma_3=-\dfrac{Q}{S}$

$$E_{\mathrm{I}}=0;\quad E_{\mathrm{II}}=\frac{Q_1}{\varepsilon_o S},\rightarrow;\quad E_{\mathrm{III}}=0$$

与例题13.2相比较

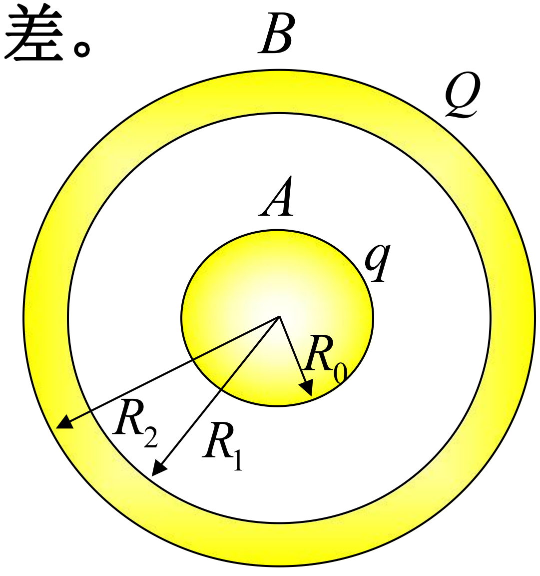
【练习】金属球 A 与金属球壳 B 同心放置，已知球 A 半径为 R_0，带电为 q；金属壳 B 内外半径分别为 R_1，R_2，带电为 Q。

求：1）球 A 和壳 B 的电量分布，

2）球 A 的电势 U_r，球壳内、外表面的电势；

3）球 A 与球壳的电势差；

4）若球壳接地，再求球 A 与球壳的电势差。



解：

1）导体带电在表面，球 A 的电量只可能在球的表面。

壳 B 有两个表面，电量可能分布在内、外两个表面。

由于 A、B 同心放置，仍维持球对称。

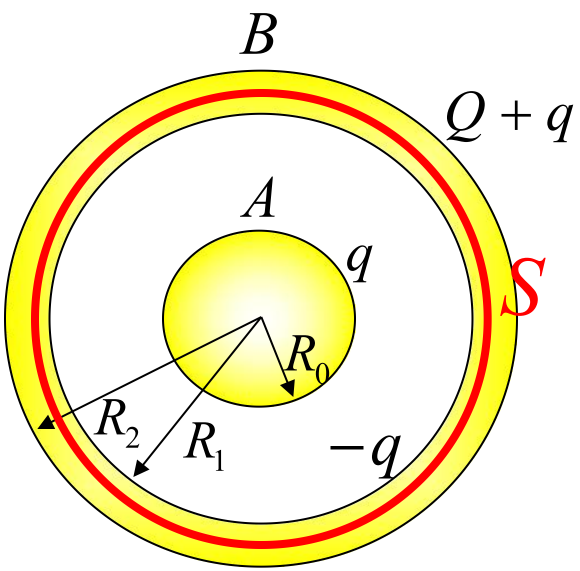
$\therefore$ 电量在表面均匀分布。

球*A*均匀分布着电量 *q*

相当于一个均匀带电的球面

壳*B*上电量的分布：由高斯定理和电量守恒定律确定.

在*B*内紧贴内表面作高斯面*S*



$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

高斯定理 $\Rightarrow \sum_i q_i = 0 \Rightarrow Q_{B内} = -q$

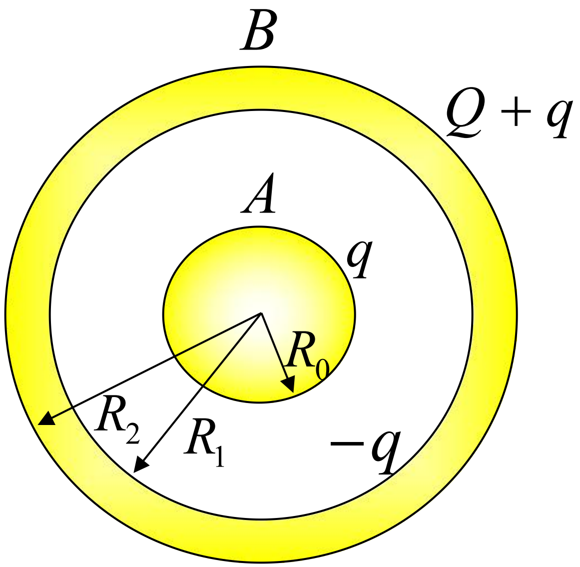
电荷守恒定律 $\Rightarrow Q_{B外} = Q + q$

2) 球A和壳B的电势U_A、U_B 。

等效:在真空中三个均匀带电的球面

利用叠加原理

$$U_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$



球壳B内外表面的电势分别为:

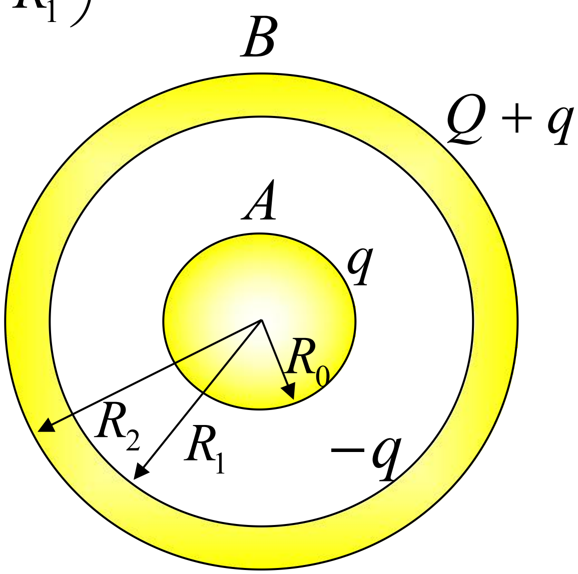
$$U_{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_1} + \frac{q+Q}{R_2}\right) = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$U_{R_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_2} - \frac{q}{R_2} + \frac{q+Q}{R_2}\right) = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

球壳内外表面的电势相等。

$$U_A=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\qquad U_B=U_{R_2}=U_{R_1}=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

（3）两球的电势差为：$U_A-U_B=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_0}-\dfrac{1}{R_1}\right)$



（4）若外球壳接地，则球壳外表面上的电荷消失。两球的电势分别为

$$U_A=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_1}\right)$$

$$U_B=U_{R_1}=U_{R_2}=0$$

两球电势差仍为：$U_A-U_B=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_0}-\dfrac{1}{R_1}\right)$

由结果可以看出，不管外球壳接地与否，两球的电势差恒保持不变。当q为正值时，小球的电势高于球壳；当q为负值时，小球的电势低于球壳。

§2 电介质极化

电介质的微观图像

分类：$\begin{cases}\text{有极分子} & -\ + \\ \text{无极分子} & \pm\end{cases}$

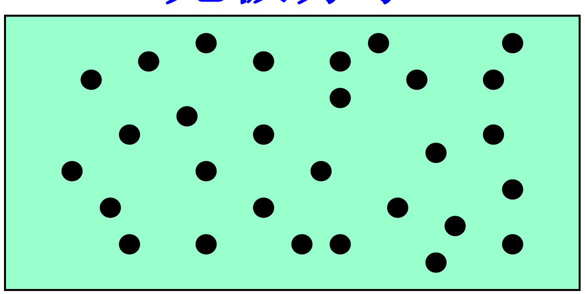
分子电偶极矩

$$\vec{P}_{分} = q\vec{l}$$

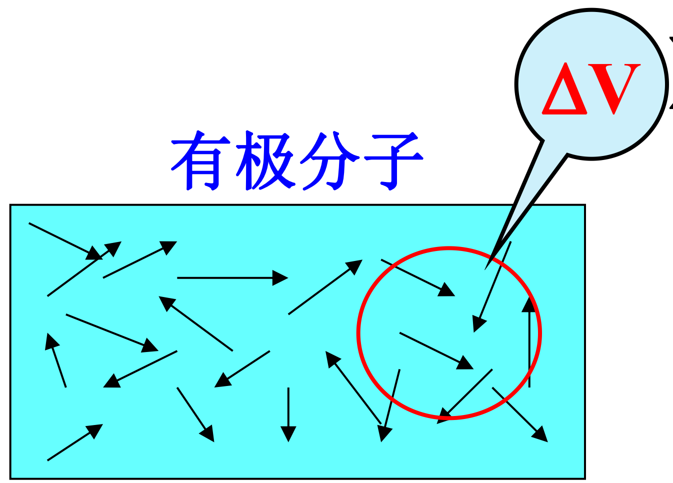
无外场时： $\sum_{\Delta V} \vec{P} = 0$

$\sum \vec{P}_{分} = ?$

无极分子

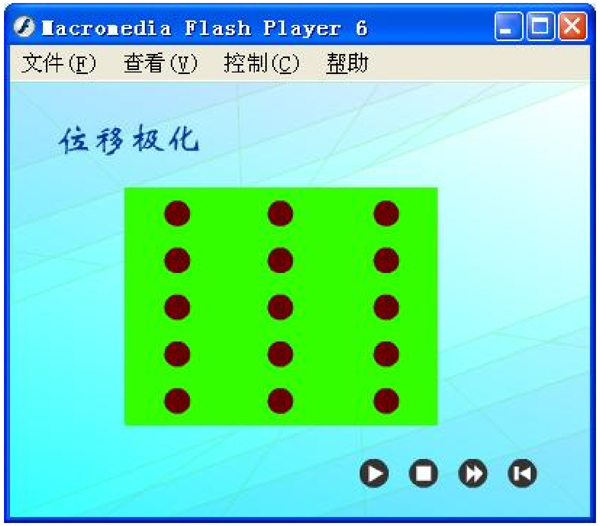


有极分子

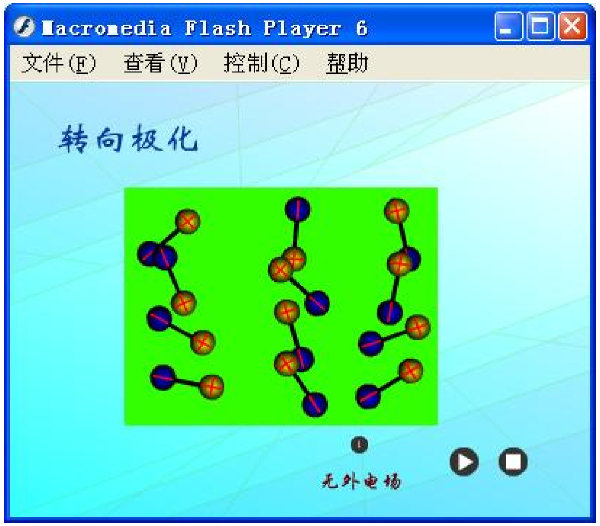


一. 电介质的极化

有电场时 $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$



非极性(无极)分子介质
位移极化



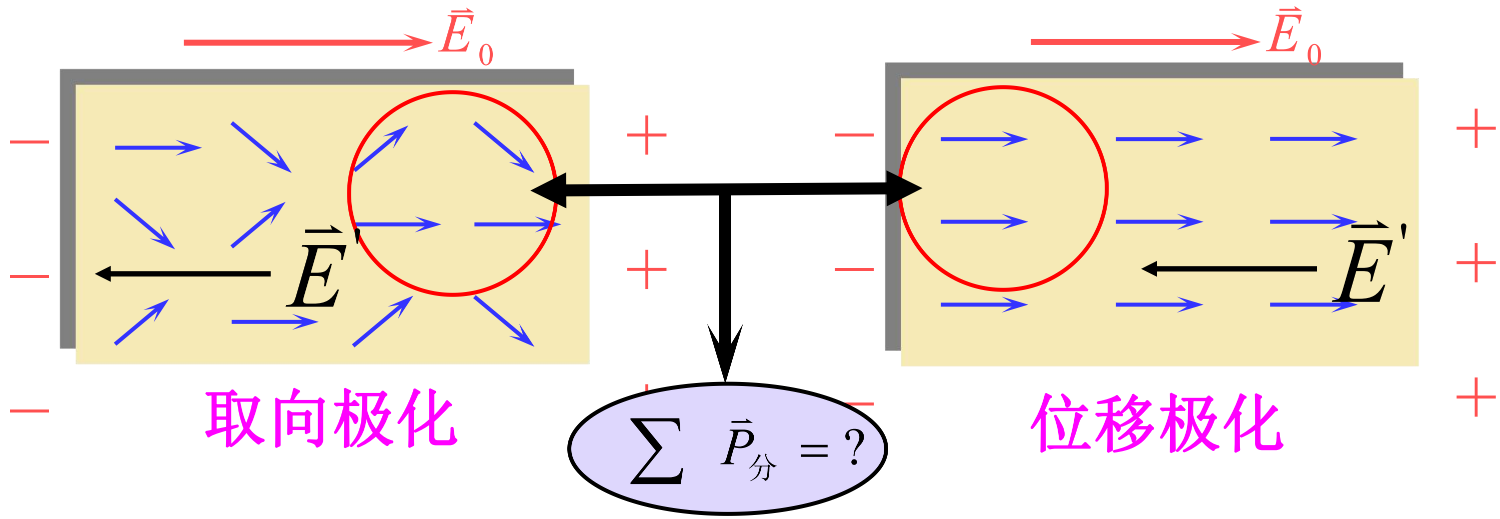
极性(有极)分子介质
取向极化

对取向极化的说明:

①由于热运动, $\vec{p}$ 不是都平行于 $\vec{E}$;

②有极分子也有位移极化，不过在静电场中主要是取向极化，但在高频场中，位移极化反倒是主要的了。

均匀电介质在静电场中



电介质极化： 在外电场作用下，电介质产生一附加电场或电介质表面出现束缚电荷的现象。

介质内电场： $\boxed{\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_0}$

$\longrightarrow \vec{E}_0$

$\longleftarrow \vec{E}'$

电介质极化特点：内部场强一般不为零。

电介质的击穿： 若E_0很强，电介质分子正负电荷被拉开变成自由电荷，大量自由电荷的产生，其绝缘性能遭破坏而变成导体。

电介质的介电强度（击穿强度）： 电介质材料所能承受的不被击穿的最大电场强度。

极化状态： 各分子电偶极矩矢量和不会完全相互抵消。

二、极化强度 (Polarization intensity）

—表征电介质极化程度

电极化强度： 电介质中某点附近单位体积内分子电偶极矩的矢量和

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$$

单位：C/m^2

ΔV— 宏观小、微观大的体积元

均匀极化： 电介质各处极化强度P大小和方向都相同。

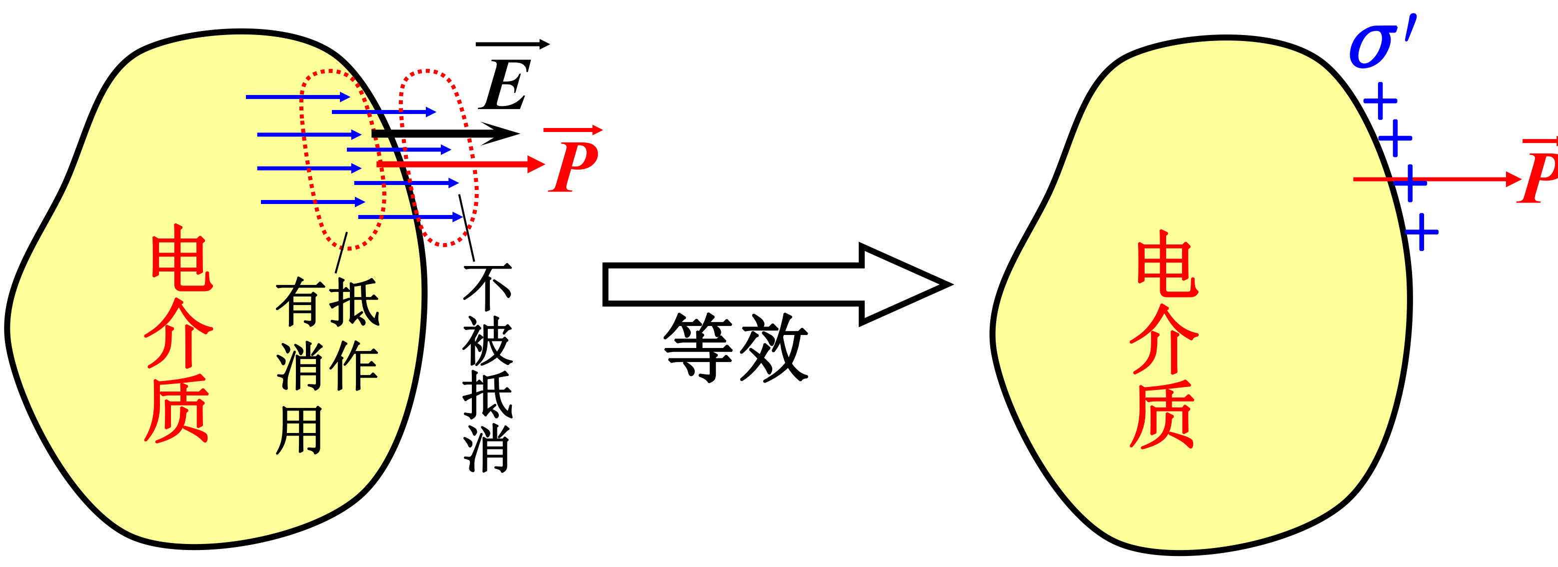
三. 极化强度矢量与极化电荷面密度的关系

以均匀的位移极化为例：

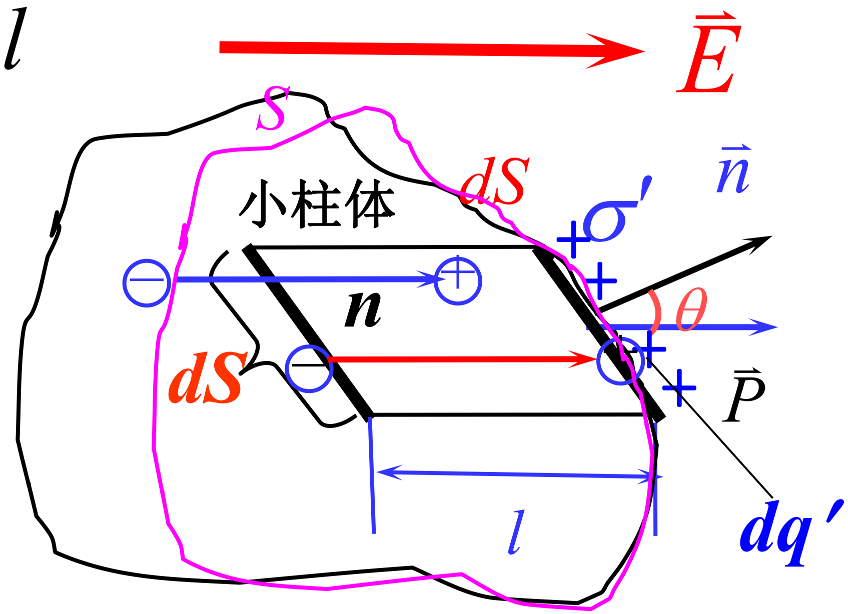
每个分子的正电荷重心相对于其负电荷重心都有一个位移*l*，各个分子的感应电矩都相同，电介质的极化强度为

$$\vec{P}=n\vec{p}_{分子}=nq\vec{l}$$

n —单位体积内的分子数



$$\vec{p}_{分子} = q\vec{l},\quad \vec{P} = n\vec{p}_{分子} = nq\vec{l}$$



表面 dS 出现的束缚电荷：

$$\mathrm{d}q' = n\cdot(\mathrm{d}S\cdot l\cdot\cos\theta)q$$
$$= nql\cos\theta\cdot\mathrm{d}S$$
$$= P\cdot\cos\theta\cdot\mathrm{d}S = \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

1. 电介质表面极化电荷面密度

$$\boxed{\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P\cos\theta = \vec{P}\cdot\vec{n}}$$

$\vec{n}$ ——介质外法线方向

整个封闭S表面 出现的束缚电荷： $\oint \vec{P}\cdot d\vec{S} = q'$

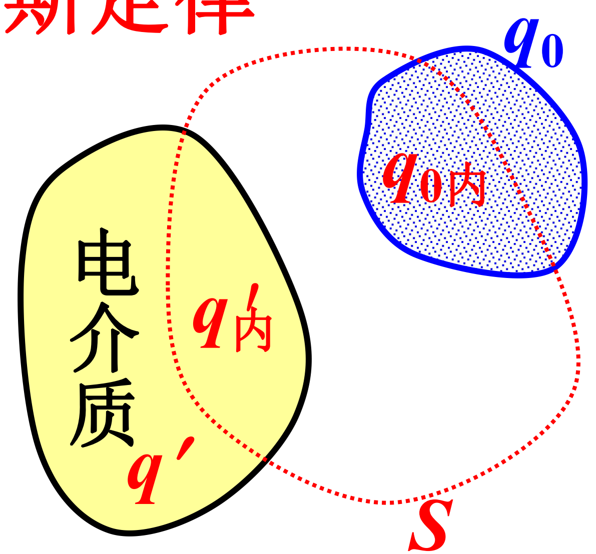
2. 根据电荷守恒定律知，S 所围体积内的极化电荷q'与P 的关系：

$$q'_{内} = \oint_S \mathrm{d}q' = -\oint_S \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

§3 电位移矢量 电介质中的高斯定律

一. 电位移矢量及其高斯定理

$$\left.\begin{array}{l} q_0 \rightarrow \vec{E}_0 \\ q' \rightarrow \vec{E}' \end{array}\right\} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$



$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_{0内} + \sum q'_{内}\right)$$

又 $\sum q'_{内} = -\oint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$，代入移项得

$$\oint_s \underline{(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_{0内}$$

定义：电位移矢量

$$\boxed{\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

故 $$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_{0内}}$$

通过电介质中任一闭合曲面的电位移通量等于该面包围的自由电荷的代数和—— **有介质时的高斯定理**

对$\vec{D}$的理解

(1) $\vec{D}$只和自由电荷有关吗?

$\vec{D}$的高斯定理说明$\vec{D}$在闭合面上的通量只和自由电荷有关，这不等于说$\vec{D}$只和自由电荷有关，$\vec{D}$既和自由电荷又和束缚电荷有关($\vec{E}$是空间所有电荷共同产生的)。

(2)电位移线

类似于电场线($\vec{E}$线)，在电场中也可以画出电位移线($\vec{D}$线);

由于闭合面的电位移通量等于被包围的自由电荷，所以$\vec{D}$线发自正自由电荷；止于负自由电荷。

$\vec{D}$，$\vec{E}$，$\vec{P}$三矢量之间的关系

对于各向同性电介质，实验表明

$$\vec{P} = x_e \varepsilon_0 \vec{E} \qquad (x_e\text{——电极化率})$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + x_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + x_e) \vec{E}$$

令$\varepsilon_r = 1 + x_e$ 　　(ε_r——相对介电常数)

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}}$$

($\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$——介电常数)

二、有电介质时电场、束缚电荷的计算

解题思路：$q_0 \Rightarrow \vec{D} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \sigma' \Rightarrow q'$

$$\boxed{\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0}$$

$q_0 \rightarrow \vec{D}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \\ \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}\end{array}}$$

$\vec{D} \rightarrow \vec{E}$

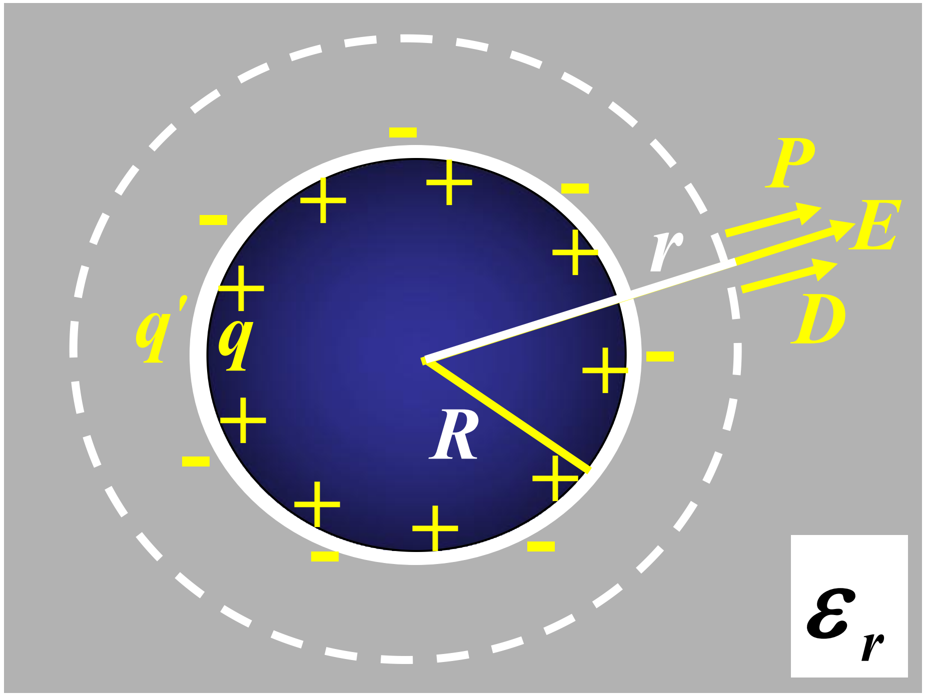
$\vec{E} \rightarrow \vec{P}$

$$\boxed{\sigma' = \vec{P}\cdot\hat{n}}$$

$\vec{P} \rightarrow \sigma'$

【例】一带正电的金属球浸在油中。求球外的电场分布和贴近金属球表面的油面上的束缚电荷。

解：D 的高斯定理



$$D \cdot 4\pi r^2 = q$$

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}$$

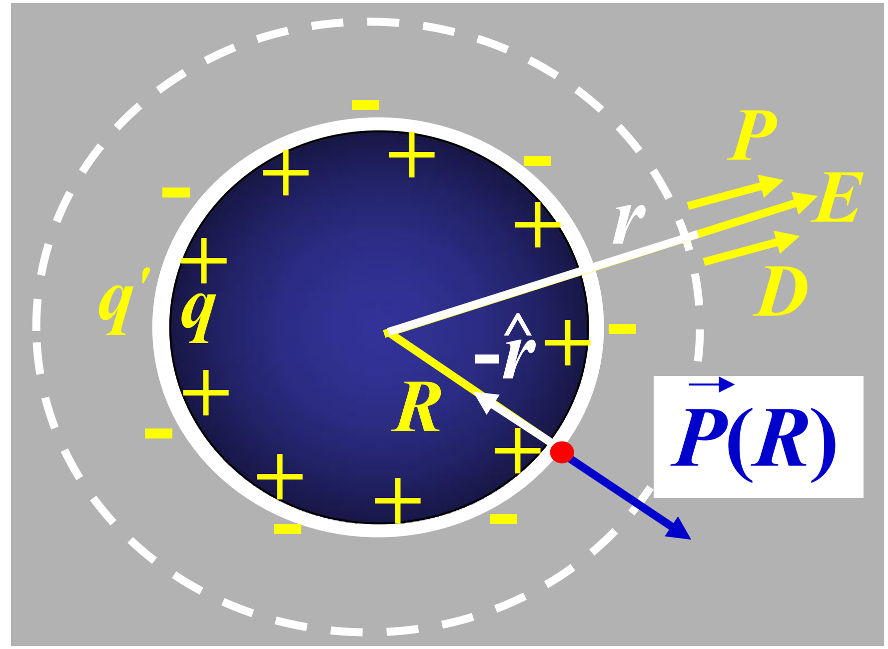
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} < E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}$$

$$=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}$$

$$=(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

电极化强度与*r*有关，是非均匀极化。



球表面的油面上的束缚电荷：

$$\sigma'=\vec{P}(R)\cdot(-\hat{r})=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{q}{4\pi R^2}$$

$$q'=4\pi R^2\cdot\sigma'=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})q$$

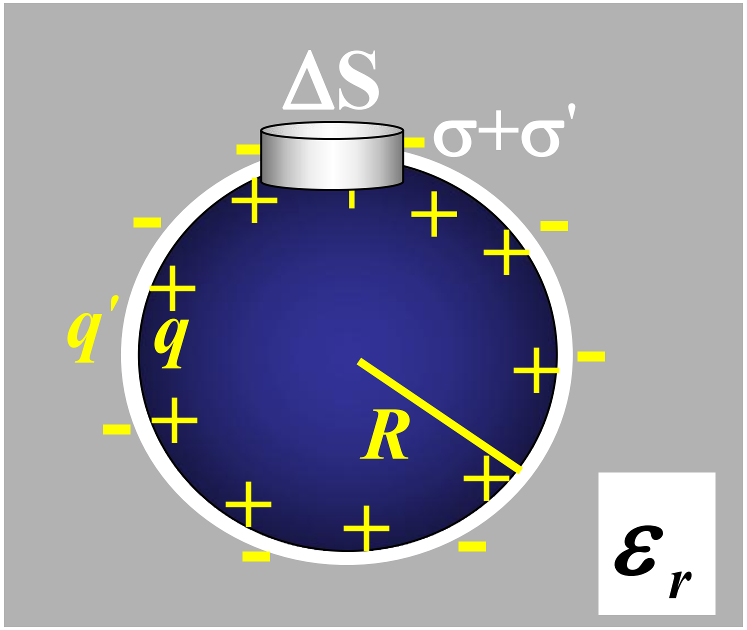
q'总与 q 反号，数值小于 q 。

另一解法：用 E 的高斯定理

$$\begin{cases} E = \dfrac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0} \\ \sigma' = \vec{P}\cdot(-\hat{r}) = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E \end{cases}$$

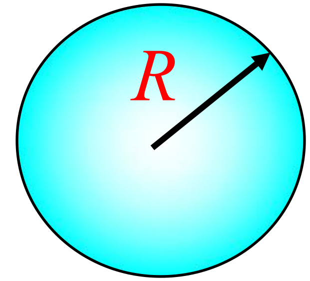
$$\sigma' = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\sigma$$

$$q' = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})q$$



§ 4 电容与电容器

一. 孤立导体的电容



任何孤立导体，***q* /*U***与 ***q***、***U***
均无关，定义为电容：

电容只与几何因素和
介质有关
固有的容电本领

$$\boxed{C=\frac{q}{U}}$$

电容单位：法拉（**F**）

$$1\text{F}=10^{6}\mu\text{F}=10^{9}\text{nF}=10^{12}\text{pF}$$

孤立导体球 $U=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R}$　　导体球电容 $C=\dfrac{q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R$

欲得到**1F**的电容，　孤立导体球的半径***R*** ?

由孤立导体球电容公式 $C=4\pi\varepsilon_0 R$

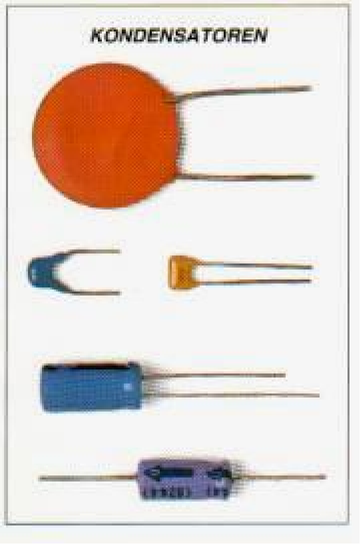
$$R=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^{9}(m)\approx10^{3}R_E$$

二. 电容器的电容

电容器：两相互绝缘的导体组成的系统。

电容器的两极板常带等量异号电荷。

电容器的电容：　$C=\dfrac{q}{U_1-U_2}$



几种常见电容器

$q \rightarrow$ 其中一个极板电量绝对值

$U_1 - U_2 \rightarrow$ 两板电势差

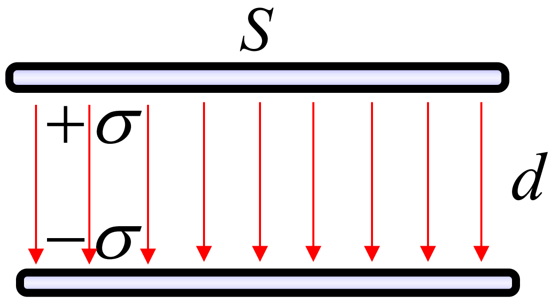
计算电容的一般方法：

先假设电容器的两极板带等量异号电荷，再计算出电势差，最后代入定义式。

$$Q \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \Delta U, \quad C=\frac{q}{\Delta U}$$

几种常见真空电容器及其电容

（1）平板电容器



$$\because \quad E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

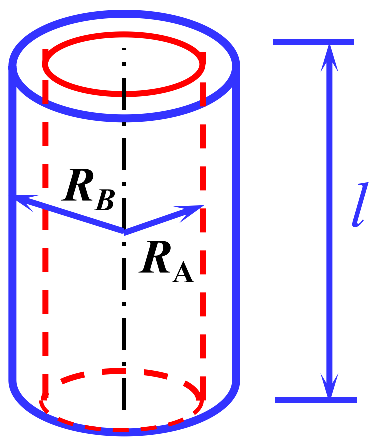
$$\therefore \quad U_+ - U_- = \int_+^- \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d \qquad \therefore \quad C_0 = \frac{q}{U_+ - U_-} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

（2）圆柱形电容器

$$\because \; E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad \therefore \; U_+ - U_- = \int_+^- \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

$$\therefore \quad C_0 = \frac{q}{U_+ - U_-} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln R_B / R_A}$$



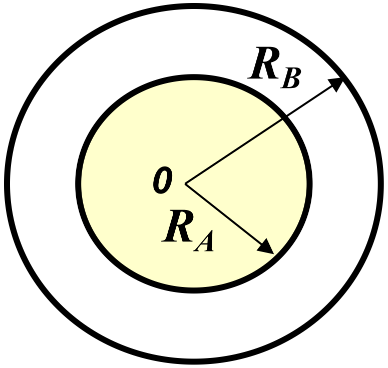
$(q = \lambda l)$

（3）球形电容器

$$U_+ - U_- = \int_+^- \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad \because E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

$$\therefore \quad C_0 = \frac{q}{U_+ - U_-} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$$



（4）电介质电容器

理论和实验证明

$$\boxed{C = \varepsilon_r C_0}$$

充满介质时电容 C　　相对介电常数 ε_r　　真空中电容 C_0

例 平行板电容器，极板间充满ε_r电介质，板上电荷面密度$\pm\sigma_0$。求 1. 介质中 $E = ?$ 2. $C_{介}/\ C_0 = ?$

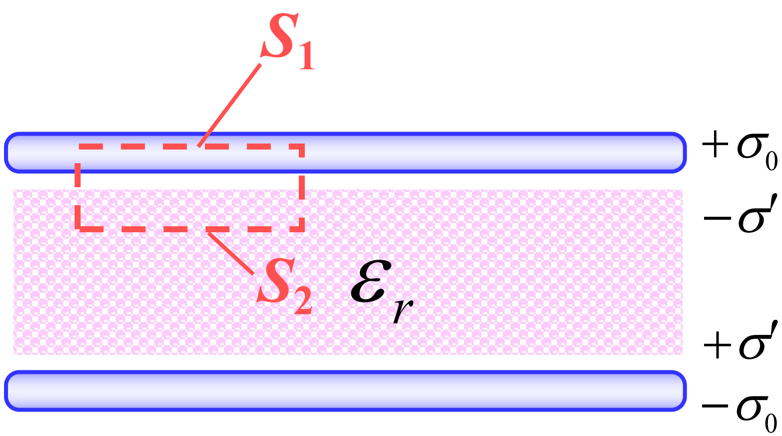
解： 1. $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D\cdot S_2 = \sigma_0 S_2$

$$D = \sigma_0$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

2. $U = E\cdot \mathrm{d} = \dfrac{E_0 \mathrm{d}}{\varepsilon_r} = \dfrac{U_0}{\varepsilon_r}$

$$C_{介} = \frac{Q_0}{U} = \varepsilon_r C_0$$



均匀各向同性电介质充满两个等势面之间

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

$$C_{介} = \varepsilon_r C_0$$

四. 电容器的串联和并联

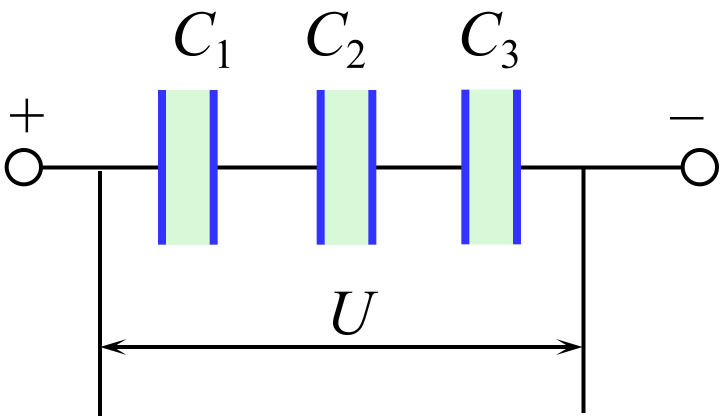
电容器的两个主要性能指标：电容大小和耐电（压）能力

1. 串联

$$q_1 = q_2 = \cdots q_n = q$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \cdots \boldsymbol{U}_n = \sum_i \boldsymbol{U}_i$$

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

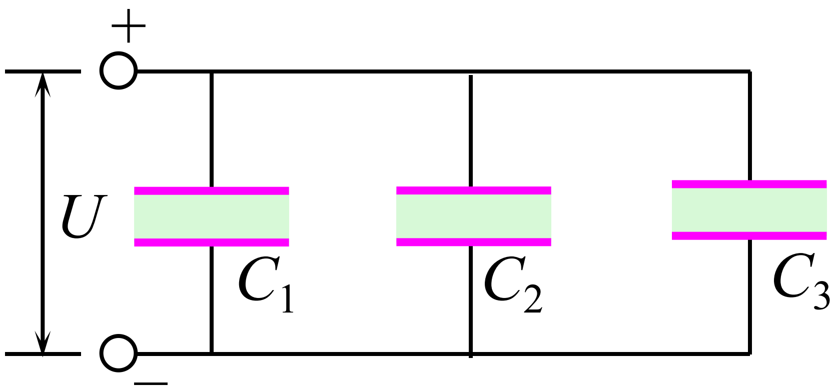


2. 并联

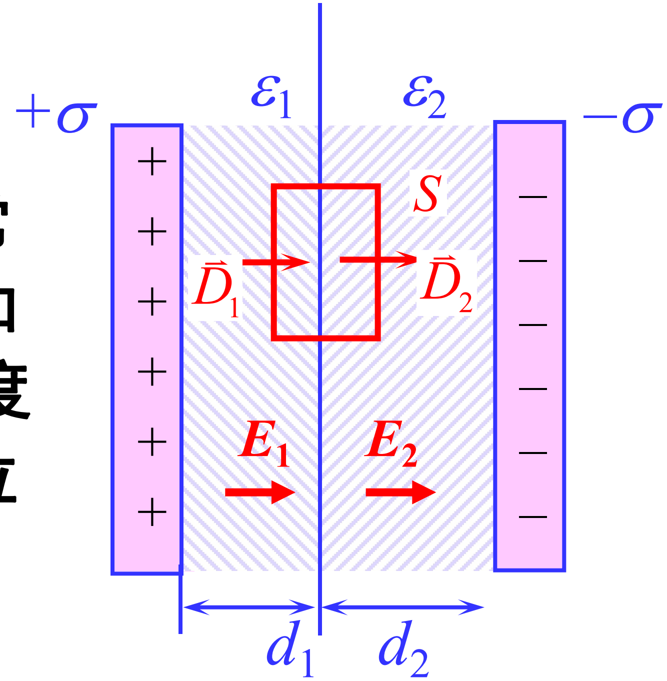
$$q = q_1 + q_2 + \cdots q_n = \sum_i q_i$$

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2 = \cdots \boldsymbol{U}_n = \boldsymbol{U}$$

$$C = \sum_i C_i$$



例：平行板电容器两极板面积为S，两板极之间充有两层电介质，介电常数分别为ε_1 和ε_2 ，厚度分别为d_1 和d_2 ，电容器两板极上自由电荷面密度为±σ。求（1）在各层电介质的电位移和场强，（2）电容器的电容。



解 （1）设场强分别为E_1 和E_2 ，电位移分别为D_1和D_2，E_1和E_2 与板极面垂直，都属均匀场。先在两层电介质交界面处作一高斯闭合面S_1，在此高斯面内的自由电荷为零。由电介质时的高斯定理得

$$\oiint_{S_1} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -D_1 S + D_2 S = 0$$

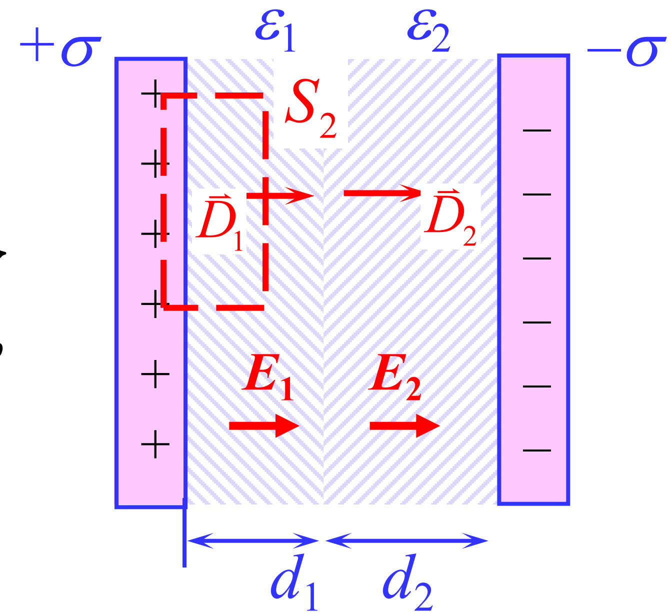
所以 $D_1 = D_2$

$$\because \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\therefore \frac{\vec{E}_1}{\vec{E}_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

可见在这两层电介质中场强并不相等，而是和介电常数ε（或相对介电常数ε_r）成反比。

为了求出电介质中电位移和场强的大小，我们可另作一个高斯闭合面 S_2 ，如图中左边虚线所示，这一闭合面内的自由电荷等于正极板上的电荷，按有电介质时的高斯定理，得



$$\oiint_{S_2} \vec{D} \cdot \vec{S} = D_1 S = S\sigma$$

$$D_1 = \sigma \qquad D_1 = D_2$$

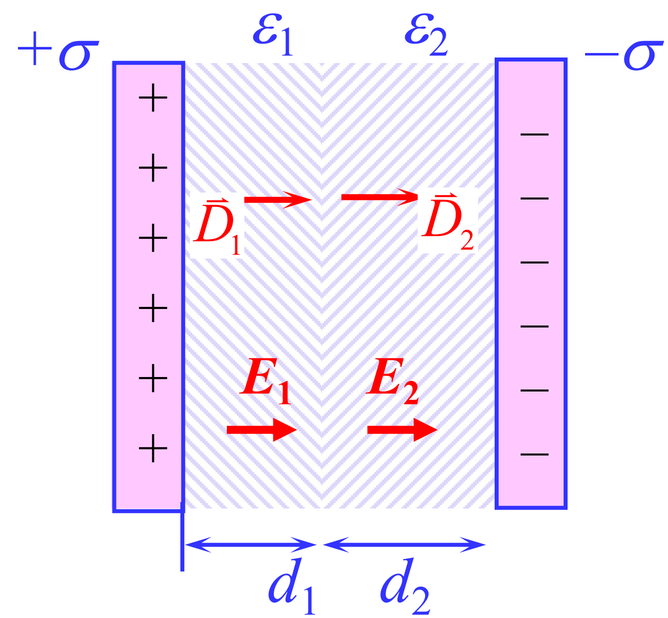
再利用 $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 , \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$

可求得 $E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_1} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \qquad E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}$

方向都是由左指向右。

（2）电容器的电容

解：正、负两极板*A*、*B* 间的电势差为



$$U_A - U_B = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$= \sigma\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right) = \frac{q}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$$

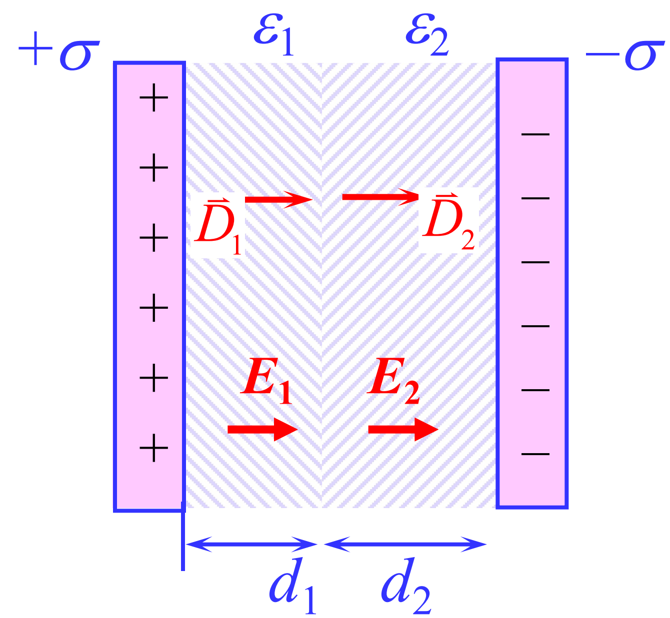
$q=\sigma S$ 是每一极板上的电荷，这个电容器的电容为

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}} = \frac{S\varepsilon_1\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}$$

可见电容和电介质的放置次序无关。上述结果可以推广到两极板间有任意多层电介质的情况（每一层的厚度可以不同，但其相互叠合的两表面必须都和电容器两极板的表面相平行）。

(2）电容器的电容

$$C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}}=\frac{S\varepsilon_1\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}$$



另解：

平行板电容器： $C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$

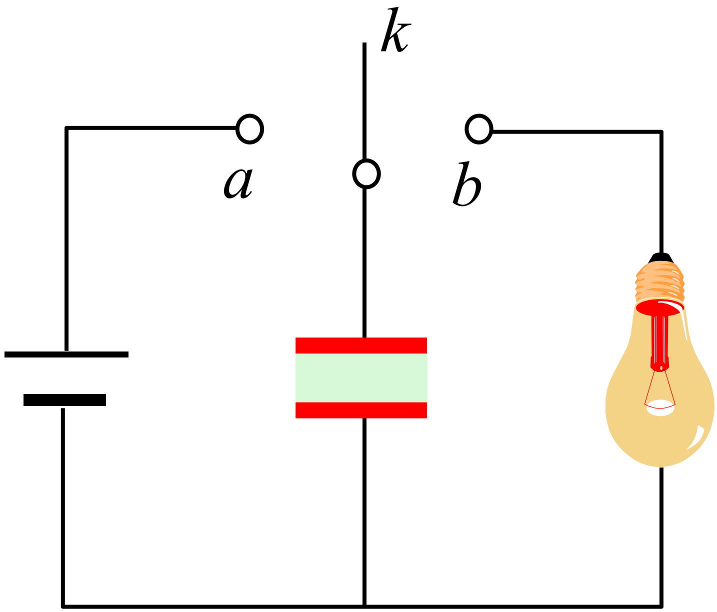
$$C=\varepsilon_r C_0=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}=\frac{\varepsilon S}{d} \qquad (\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r)$$

本例可看成两个电容器的串联 $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$

$$C=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}=\frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1 S}+\frac{d_2}{\varepsilon_2 S}}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}$$

§5 静电场的能量 电场能量密度

一.电容器储能



现象：灯泡会出一次强闪光。

应用：照相机上的闪光灯。

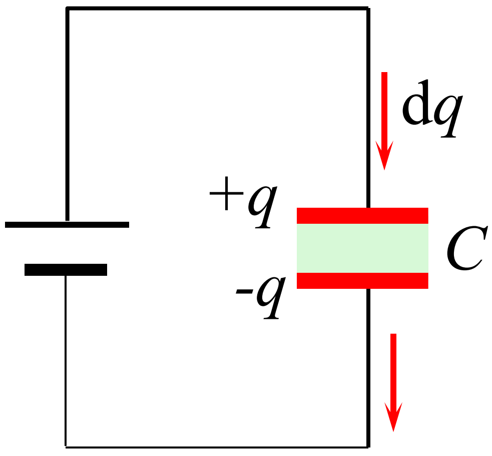
分析：能量转换

充电：电容器从电源获得能量。

放电：闪光灯从电容器获得能量。

设某时刻，极板上所带电量为q，板间电压$U=q/C$，移动dq电量，外力克服电场力所做功为

$$dW = U \cdot dq = \frac{q}{C} dq$$



电容器充电过程

整个充电过程　q：$0 \rightarrow Q$

所做的总功为

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \qquad (Q = CU)$$

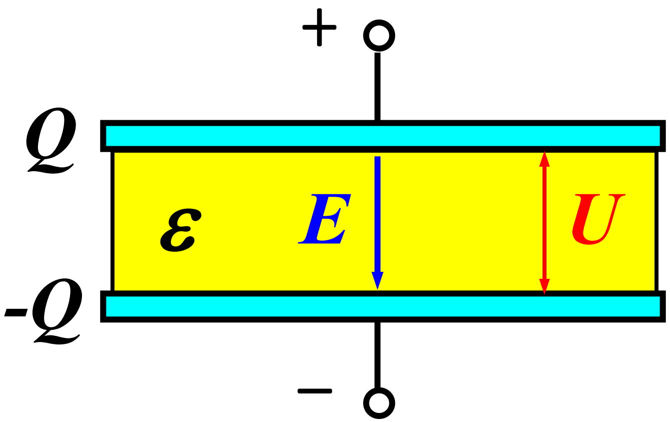
$$= \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$$

将正电荷由负极迁移到正极过程中电源反抗电场力作功，

转化为静电能（根本上说是电场的能量，分布在电场所在空间中）。

二. 有介质时静电场的能量密度

以平板电容器为例来分析：



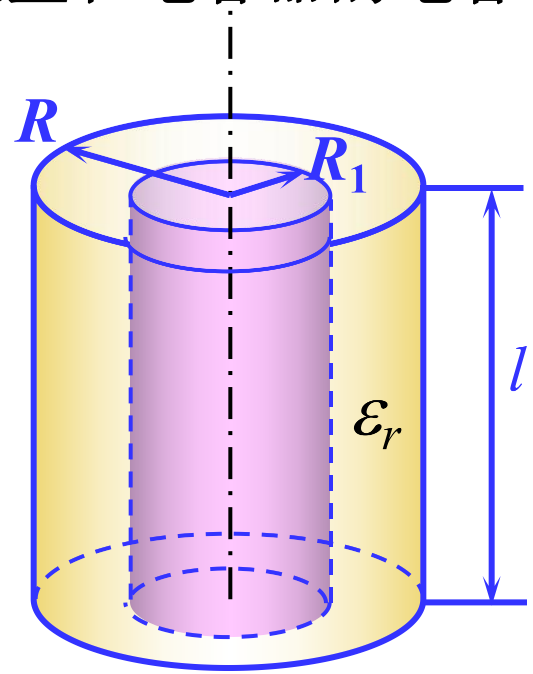
$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}\cdot(Ed)^2$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\cdot(S\cdot d)$$

电场能量密度： $w_e=\dfrac{W}{V}=\dfrac{W}{Sd}$

$$\boxed{w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}}$$

例. 某圆柱形电容器，长为l，带电量为Q，其间充满相对介电常数为ε_r的均匀电介质，求两极板间的总能量和电容器的电容



解：$R_1 < r < R_2$ 内　$E = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\cdot\dfrac{1}{r}$

$$\omega_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r l^2}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$\mathrm{d}V = 2\pi r l\cdot \mathrm{d}r$$

$$W = \int_v \omega_e \mathrm{d}V = \int_{R_1}^{R_2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$\because\quad W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}\qquad \therefore\ C = \dfrac{Q^2}{2W} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln R_2/R_1}$

求电容的另一种方法

小结：电容的计算方法

1.设 $Q \longrightarrow \vec{E} \longrightarrow U_{AB} \longrightarrow C = \dfrac{Q}{U}$

2.设 $Q \longrightarrow \vec{E} \longrightarrow W = \int_v \omega_e \mathrm{d}V \longrightarrow C = \dfrac{Q^2}{2W}$

3.电容器串,并联

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} \qquad C = \sum_i C_i$$