

诚信应考,考试作弊将带来严重后果!

湖南大学课程考试试卷 闭卷

课程名称: 离散数学; 课程编码: CS04001 试卷编号: A; 考试时间: 110 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
应得分	12	13	13	12	13	12	12	13			100
实得分											
评卷人											

一、构造公式 $(s \leftrightarrow \neg q) \wedge (s \rightarrow (p \wedge \neg q))$ 的真值表, 写出其主析取范式, 主合取范式。

Handwritten solution for the first problem:

真值表:

s	p	q	$(s \leftrightarrow \neg q)$	$(s \rightarrow (p \wedge \neg q))$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

主析取: $m_{001} \vee m_{011} \vee m_{110}$
 $\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg s \wedge p \wedge \neg q) \vee (s \wedge p \wedge \neg q)$

主合取: $M_{000} \vee M_{100} \vee M_{101}$
 $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge s)$

主析取: s, p, q
 $M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{111}$
 $\Leftrightarrow (\neg s \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg s \vee p \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg p \vee q) \wedge (s \vee p \vee q)$

主合取: s, p, q
 $M_{000} \wedge M_{100} \wedge M_{001} \wedge M_{011} \wedge M_{111}$
 $\Leftrightarrow (p \vee q \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee s) \wedge (p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$

一、请将以下文字转换为命题逻辑, 并用等值演算或真值表求解。如果黄六上场则

杨云不上场，如果董你球员上场则刘飞或(不可兼或)吴用上，杨与吴同上或同不上，请问满足这些要求的上场方案有哪些？提示：H 表示黄六上场，Y 表示杨云上场，D 表示董你上场，F 表示刘飞上场，W 表示吴用上场。

三、在预测某次选举结果时，3 位记者预测的结果：

记者 1 说：大明是主任，杨六是副主任

记者 2 说：陈月妹是主任，大明不是主任

记者 3 说：杨六是主任，陈月妹是副主任

最后结果是：每个人对了一半。参选人数超过 3 人，主任只有 1 个，副主任可以为 2 个，选举结果如何？ M_1, Y_1, C_1 表示大明、杨六、陈月妹是主任； M_2, Y_2, C_2 表示大明、杨六、陈月妹是副主任；请将 3 位记者的话用命题公式表达出来，将“每个人对了一半”也用命题公式表达出来，然后用拟真值表解答此题，不能使用其他方式求解。

记者 1	记者 2	记者 3	命题公式	备注
✓	×	×	$M_1 \wedge \neg Y_2 \wedge \neg C_1 \wedge \neg M_1 \wedge Y_1 \wedge \neg C_2 = 1$	$M_1 = Y_1 = 1$ 两个主任不行
✓	×	✓	$M_1 \wedge \neg Y_2 \wedge \neg C_1 \wedge \neg M_1 \wedge \neg Y_1 \wedge \neg C_2 = 1$	$M_1 = C_1 = 1$ 两个主任
✓	×	✓	$M_1 \wedge \neg Y_2 \wedge \neg C_1 \wedge \neg M_1 \wedge Y_1 \wedge \neg C_2 = 0$	
✓	×	✓	$M_1 \wedge \neg Y_2 \wedge \neg C_1 \wedge \neg M_1 \wedge \neg Y_1 \wedge \neg C_2 = 0$	
×	✓	×	$\neg M_1 \wedge Y_2 \wedge \neg C_1 \wedge \neg M_1 \wedge Y_1 \wedge \neg C_2 = 0$	
×	✓	×	$\neg M_1 \wedge Y_2 \wedge \neg C_1 \wedge \neg M_1 \wedge \neg Y_1 \wedge \neg C_2 = 0$	
×	✓	✓	$\neg M_1 \wedge Y_2 \wedge \neg C_1 \wedge \neg M_1 \wedge Y_1 \wedge \neg C_2 = 0$	
×	✓	✓	$\neg M_1 \wedge Y_2 \wedge \neg C_1 \wedge \neg M_1 \wedge \neg Y_1 \wedge \neg C_2 = 0$	
×	×	✓	$\neg M_1 \wedge \neg Y_2 \wedge \neg C_1 \wedge \neg M_1 \wedge Y_1 \wedge \neg C_2 = 1$	$Y_1 = Y_2 = 1$ 主任副主任
×	×	✓	$\neg M_1 \wedge \neg Y_2 \wedge \neg C_1 \wedge \neg M_1 \wedge \neg Y_1 \wedge \neg C_2 = 1$	$Y_2 = 1, C_2 = 1$ 副主任, 副主任

$Y_1 = Y_2 = 1$ 是否选中都给分，不作要求，有学生没看黑板上的提示

四、求 $(\exists x)(\neg((\exists y)P(x,y)) \rightarrow ((\exists z)Q(z) \rightarrow R(x)))$ 的前束范式。

$$\begin{aligned}
 & \neg \exists x (\neg ((\exists y)P(x,y)) \rightarrow ((\exists z)Q(z) \rightarrow R(x))) \\
 & \Leftrightarrow \exists x (\neg \neg ((\exists y)P(x,y)) \wedge \neg ((\exists z)Q(z) \rightarrow R(x))) \quad (\text{量词否定}) \\
 & \Leftrightarrow \exists x ((\exists y)P(x,y)) \wedge (\forall z \neg Q(z) \vee R(x)) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y \forall z ((P(x,y)) \vee (\neg Q(z) \vee R(x))) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y \forall z (P(x,y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))
 \end{aligned}$$

五、每个学习努力并且方法得当的人学习成绩就好，每个学习成绩好的学生会考上研究生，我

们班有些同学学习努力并且学习方法得当，所以我们肯定有人会考上研究生。论域为我们班的同学。 $H(x)$ 表示 x 学生学习努力， $M(x)$ 学生 x 学习方法得当， $G(x)$ 学生 x 成绩好， $Y(x)$ 表示学生 x 考上研究生。将此段文字用谓词公式表达出来，并用谓词逻辑的推理规则进行推理。

$$\exists x (H(x) \wedge M(x) \rightarrow G(x)), \forall x (G(x) \rightarrow Y(x))$$

$$\Rightarrow \exists x (Y(x))$$

- ① $\exists x (H(x) \wedge M(x))$ (p)
- ② $H(c) \wedge M(c)$ (① \exists -消去)
- ③ $H(c)$ (② $A \wedge B \Rightarrow A$)
- ④ $M(c)$ (② $A \wedge B \Rightarrow B$)
- ⑤ $\forall x (H(x) \wedge M(x) \rightarrow G(x))$ (p)
- ⑥ $H(c) \wedge M(c) \rightarrow G(c)$ (⑤ \forall -消去)
- ⑦ $G(c)$ (④⑥ MP)
- ⑧ $\forall x (G(x) \rightarrow Y(x))$ (p)
- ⑨ $G(c) \rightarrow Y(c)$ (⑧ \forall -消去)
- ⑩ $Y(c)$ (⑦⑨ MP)
- ⑪ $\exists x Y(x)$ (⑩ \exists -引入)

六、请用谓词等值演算证明“并不是所有的男生都比所有女生的编程能力强”与“有些男生比有些女生的编程能力弱”的含义相当。 $B(x)$ 表示男生, $G(x)$ 表示女生, $H(x)$ 表示是人类, $P(x,y)$ 表示 x 比 y 编程能力强。“能力弱”在此处表示“能力强的否定(不要在此处纠结)”。

$$\begin{aligned}
 & \neg \forall x \forall y ((B(x) \wedge G(y)) \wedge H(x) \wedge H(y) \rightarrow P(x, y)) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (H(x) \wedge B(x) \wedge H(y) \wedge G(y) \wedge \neg P(x, y)) \\
 & \text{2. } \Leftrightarrow \exists x \exists y \neg (B(x) \wedge H(x) \wedge H(y) \wedge G(y) \rightarrow P(x, y)) \quad (\text{德}) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y \neg (\neg (B(x) \wedge H(x) \wedge H(y) \wedge G(y)) \vee P(x, y)) \quad (\rightarrow \text{等价}) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg \neg (B(x) \wedge H(x) \wedge H(y) \wedge G(y)) \wedge \neg P(x, y)) \quad (\text{德}) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \exists y (B(x) \wedge H(x) \wedge H(y) \wedge G(y) \wedge \neg P(x, y)) \quad (\neg \neg A \Leftrightarrow A)
 \end{aligned}$$

七、求出[100,200]能被5或6或7整除数的整数的个数。

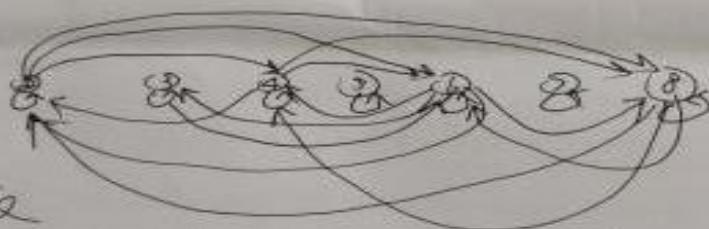
$$\begin{aligned}
 & \text{七 } [1 \sim 100] \text{ 能整除 } A_5, A_6, A_7 \text{ 的个数} \\
 & A_5 = \frac{100}{5} = 20 \quad A_5 \cap A_6 = \frac{100}{5 \times 6} = \frac{20}{6} = 3 \quad A_5 \cap A_6 \cap A_7 = \frac{100}{5 \times 6 \times 7} = 0 \\
 & A_6 = \frac{100}{6} = 16 \quad A_5 \cap A_7 = \frac{100}{5 \times 7} = \frac{20}{7} = 2 \\
 & A_7 = \frac{100}{7} = 14 \quad A_6 \cap A_7 = \frac{100}{6 \times 7} = \frac{14}{7} = 2 \\
 & |A_5 \cup A_6 \cup A_7| = (20 + 16 + 14) - (3 + 2 + 2) - 0 = 43 \\
 & [1 \sim 200] \text{ 区间} \\
 & A_5 = \frac{200}{5} = 40 \quad A_5 \cap A_6 = \frac{200}{5 \times 6} = \frac{40}{6} = 6 \quad A_5 \cap A_6 \cap A_7 = \frac{200}{5 \times 6 \times 7} = 0 \\
 & A_6 = \frac{200}{6} = 33 \quad A_5 \cap A_7 = \frac{200}{5 \times 7} = \frac{40}{7} = 5 \\
 & A_7 = \frac{200}{7} = 28 \quad A_6 \cap A_7 = \frac{200}{6 \times 7} = \frac{100}{21} = 4 \\
 & |A_5 \cup A_6 \cup A_7| = (40 + 33 + 28) - (6 + 5 + 4) = 101 - 15 = 86 \\
 & \text{答案} = 86 - 43 + 1(100 \text{ 是 } 5 \text{ 的倍数}) = 44
 \end{aligned}$$

八、 $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，关系 R 是 $A \times A$ 中 $\{\langle x, y \rangle \mid x \text{ 与 } y \text{ 的最大公约数大于 } 1\}$ 的序偶的集合，请写 R 所有序偶，并给出关系矩阵、关系图，判断该关系是否为自反、反自反、对称、反对称、可传递关系。

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle : \gcd(x, y) > 1 \}$$

$$= \{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 6, 2 \rangle, \langle 6, 3 \rangle, \langle 6, 4 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 6, 8 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 8, 2 \rangle, \langle 8, 4 \rangle, \langle 8, 6 \rangle, \langle 8, 8 \rangle \}$$

$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$


① 自反

② $\gcd(x, y) = \gcd(y, x) > 1$ 最大公约数大于1的数对都是R. M_R 转置图同原图对称

③ 不可传递

④ 不可传递 $\langle 3, 6 \rangle, \langle 6, 4 \rangle$ 虽然都是R, 但 $\langle 3, 4 \rangle \notin R$
 $\langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 6 \rangle$ 是, 但 $\langle 2, 6 \rangle \notin R$

