

2017级高等数学A(1)期末考试试题

一、计算题 I (每题 6 分, 共 30 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos 2x)}{\sin x - \tan x}$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

3. 设 $a > 0, b > 0$, 且 $y = \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{a}{b}\right)^x$, 求 y' .

4. 设参数方程 $x = \ln(1+t^2), y = t - \arctan t$ 确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

5. 利用微分计算 $\cos 29^\circ$ 的近似值(计算时保留到小数第三位).

二、计算题 (第 6~8 题, 每小题 6 分, 第 9~10 题, 每小题 7 分, 共 32 分)

6. 求不定积分 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x^2}}$.

7. 计算积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{x^2}$.

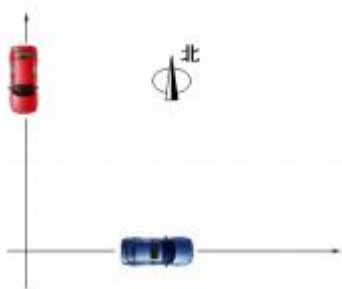
8. 已知曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0, 0)$ 处有相同切线, 求出该切线方程.

9. 求解微分方程 $\cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0$.

10. 求解微分方程问题 $xy' + y = x \sin x, y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

三、应用题 (每小题 10 分, 共 20 分)

11. 如图, 一辆追逐违章汽车的警车正从正北往正南驶向一个直角路口, 而违章车已拐过路口向正东驶去. (1) 当警车距离路口 0.8km 而违章车离路口向东 0.6km 时, 警察用雷达测得两车之间的距离正以 20km/h 的速度缩小. 若此时警车的行驶速度为 70km/h, 此时违章车的速度是多少? (2) 若两车继续保持上述速度行驶, 警察到达路口前, 在什么位置两车之间的距离最近?



12. 一艘质量为 m 的潜艇, 从水面上由静止开始铅直下沉, 若所受阻力与下沉的速度成正比(比例系数记为 k), 求下沉的速度 s 与时间 t 之间的函数关系 $s(t)$.

四. 证明与讨论题(每小题 8 分, 共 16 分)

13. 设直线 $y = ax(0 < a < 1)$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的图形的面积为 S_1 , 它们与直线 $x = 1$ 围成的图形的面积为 S_2 . (1) 当 a 为何值时可使面积 $S_1 + S_2$ 达到最小? (2) 当 a 为何值时可使面积 $S_1 + S_2$ 对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所成立体的体积达到最小?

14. 设 $f''(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 证明

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx .$$