2010级高等数学A (1)期末考试试题

一、填空题（每小题**3**分，共**15**分）

1.函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的可去间断点为________________.

2. $f(x)=\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\ln(x+1)}$ 的定义域是________________.

3.若 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\arcsin x$，则 $x=$_________.

4.若 $f(x)=x(2x-1)(3x-2)...(2010x-2009)$，则 $f'(0)=$__________.

5.抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在曲率最大处的曲率为__________.

二、单选题（每小题**3**分，共**15**分）

1.下列结论中正确的是　　　　　　　　　　　　　　　　【　　】

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B,A\le B$，则对于充分大的自然数 n，有 $a_n\le b_n$

(B) 设 $a_n<b_n(n=1,2,...)$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则 $A<B$

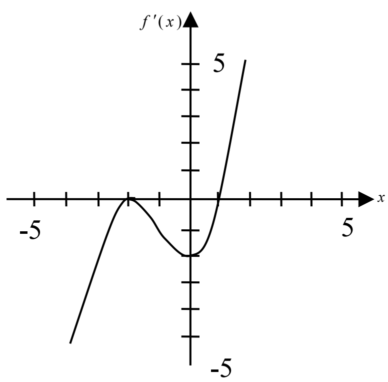
(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$　(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则对充分大的自然数 n，有 $a_n=A$.

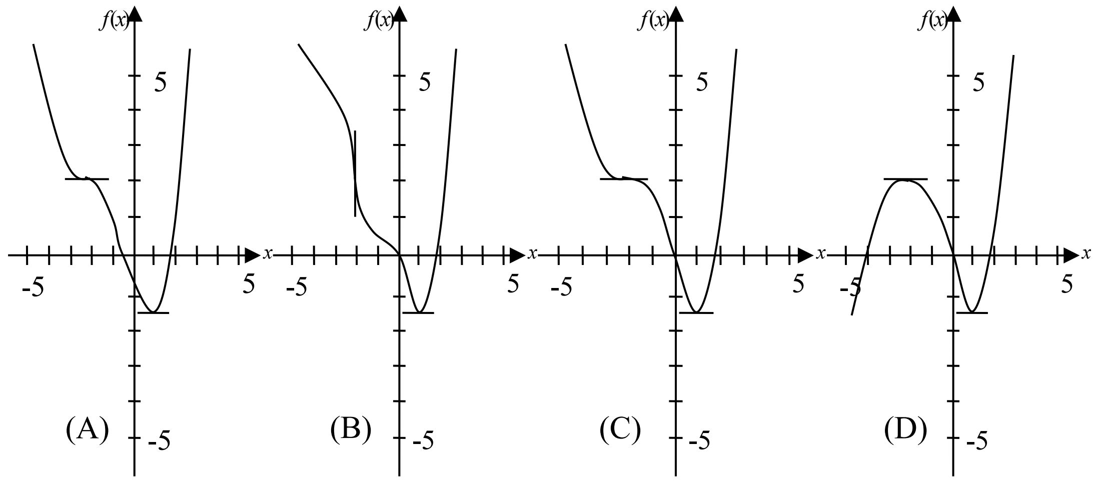
2. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，则 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=$　　　　　　　　【　　】

(A) $2(1-x^2)^2+C$　(B) $-2(1-x^2)^2+C$　(C) $\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　(D) $-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

3. 设函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 如右图所示，

由此，函数 $f(x)$ 的图形可能是　【　　】





4. 当 $x \to 0$ 时，$e^x + \ln(1-x) - 1$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n =$ 【　　】

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

5. 设 $f \in C[0,1]$ 且 $f(x) \ge 0$，记 $I_1 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,\ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x,\ I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x$，则下列不等式成立的是 【　　】

(A) $I_1 < I_2 < I_3$　　(B) $I_3 < I_1 < I_2$　　(C) $I_2 < I_3 < I_1$　　(D) $I_1 < I_3 < I_2$

三、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.　　2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \dfrac{1}{x^3}(e^{-t^2}-1)\mathrm{d}t$.

3. 计算积分 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x) = \left(\dfrac{e^x}{x}\right)'$.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x + t(1-t) = 0, \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定，求 $\mathrm{d}y\big|_{t=0}$.

四、（11 分）设 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b\sin x + c, & x \le 0, \\ \ln(1+x), & x > 0, \end{cases}$ 试问为 a,b,c 何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶导数存在？

五、（7 分）若 $f(x) = 2nx(1-x)^n$，记 $M_n = \max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$ (即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值),求 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$.

六、（8 分）（融化立方体冰块）某地为了解决干旱问题，需将极地水域拖来的冰山融化

提供淡水.假设冰山为巨大的立方体，其表面积成正比. 如果在最初的一小时里冰被融化掉九分之一的部分需多少小时？(结果精确到小数点后一位，不能使用计算器)

七、（10 分）过点 $(1,5)$ 作曲线 $\Gamma: y = x^3$ 的切线 L. 试求（1）切线 L 的方程；（2）Γ 与 L 所围平面图形 D 的面积；（3）图形 D 的 $x \geq 0$ 的部分绕 x 轴旋转一周所得立体的体积.

八、（8 分）利用定积分的换元法我们可以证明: 若 $f(u)$ 是连续函数，则有

$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$. 现要求将此结论推广到满足在 $[a,b]$ 上连续且关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 为偶函数 **(即对 $[a,b]$ 中的任何 x 有 $f(\frac{a+b}{2}-x)=f(\frac{a+b}{2}+x)$)** 的任意函数 $f(x)$ 的情形，请叙述并证明你的结论.

九、（6 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在内 (a,b) 可导, 且 $f(b)=0$,试证: 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)+\frac{f(\xi)}{(\xi-a)}=0$.