

2011级高等数学A(1)期末考试试题

第1~9题每题5分，共45分.

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$.

2. 设常数 $a > 0, b > 0, c > 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$.

3. 设 $f(x)$ 可导, 且 $y = f[\sin(x^2)] + \sin^2[f(x)]$, 求导数 $\frac{dy}{dx}$.

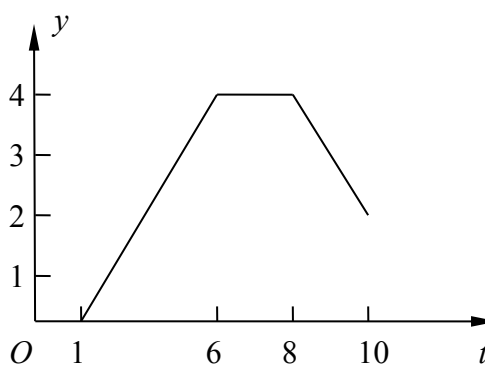
4. 设方程 $y = 1 + xe^y$ 确定函数 $y(x)$, 求导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

5. 求不定积分 $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+5} dx$.

6. 计算定积分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$.

7. 设由连续曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = p, x = q$ 以及 x 轴所围的曲边梯形面积为 $\sqrt{q^2 - p^2}$, 求函数 $f(x)$.

8. 若一物体沿直线运动, 物体的运动速度的变化曲线如下图 (单位 m/s), 求物体在这段位移过程中的平均速度.



9. 将函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$ 展开成正弦级数.

第10~12题每题7分，共21分.

10. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ 的收敛性, 若收敛求其和.

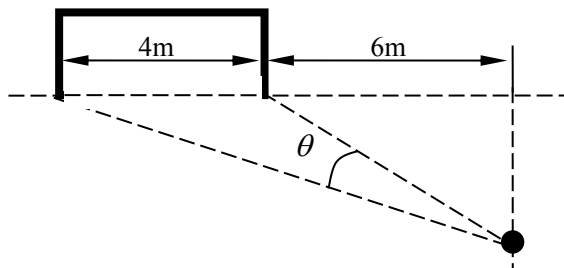
11. 求解微分方程问题 $x \frac{dy}{dx} + y = x \cos 2x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

12. 求解微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = e^x + \cos x$.

第 13,14 题每题 8 分, 共 16 分.

13. 假设足球场的球门宽度为 4 米, 一球员

沿垂直于底线的方向带球前进, 其行进路线与底线的交点距离右门柱 6 米, 问他在离底线几米的位置上将获得最大的射门张角 θ ?



14. 古埃及胡夫金字塔的塔基为 $230\text{m} \times 230\text{m}$ 的正方形, 塔高 146m , 建造金字塔所用的 230 多万块石料的平均密度为 3210kg/m^3 . (1) 运用积分方法计算金字塔的体积; (2) 建造时需要将石料从地面抬到所在高处, 试估算建成金字塔所作的总功.

第 15,16 题每题 9 分, 共 18 分.

15. 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且有 $F(x) = \int_0^x (2t - x)f(t)dt$. 试讨论:

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $F(x)$ 是否也是偶函数? (2) 若 $f(x)$ 是单调减函数, 则 $F(x)$ 是否也是单调减函数?

16. 设当 $x \in [0, 1]$ 时, $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内取得最大值, 试证明不等式

$$|f'(0)| + |f'(1)| \leq M.$$