2020年高等数学A（1）期末考试参考答案

一．计算题I（本题共5小题，每小题6分，满分30分）

1．求极限

**解**：

2．设时，与是等价无穷小，求常数和

**解**：因为 ，

所以，

3．利用微分计算的近似值.

**解**：设函数  则

取 由于



利用上式可得



4．计算摆线一拱与轴围成的面积.

**解**： 所求面积

 则

5．求抛物线与轴所围图形绕轴旋转一周所得旋转体的体积.

**解**：旋转体体积



二．计算题II（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

6．求不定积分

**解**：设 则 所以



7.求定积分(为正整数).

**解**：易求得 有牛顿-莱布尼茨公式知：



8．求极限.

**解**：记 则



而



所以



9. 设函数，求.

**解**： 设函数，则



所以，

故



10．求微分方程的通解.

解： 对应的齐线性微分方程的特征方程为



其根为 

所以对应齐线性微分方程的通解为



由于是特征方程的单根，所以可设原方程的特解为



代入原方程可得



比较两端同次幂的系数，解得 由此求得一个特解为



从而所求方程的通解为



三．讨论题（本题共2小题，每小题7分，满分14分）

11. 讨论关于未知数的方程的非负实根个数(为实参数).

**解**：设函数

下面分不同的情形讨论.

1. 若 则显然，故无非负实数解.
2. 若 则显然，故的非负实数解为.
3. 若 则且，即函数在是严格单调增的连续函数. 另一方面，，由零点存在定理知：方程在中唯一的解，且该解为正.

综上所述，当时，原方程无非负实数解；当时，原方程存在唯一的非负实数解；当时，原方程存在唯一的非负实数解

12．设 讨论该函数的连续性与可导性.

**解**：易求得



显然连续当且仅当 即

 解得.

下面讨论的可导性，显然可导当且仅当连续，即，且

 即



综上所述，连续当且仅当，可导当且仅当

**四．应用题与证明题**（本题共2小题，每小题8分，满分16分）

13. 长为6m的均匀链条自水平桌面上向下滑动，链条与桌面的摩擦系数，假定在运动起始时，链条自桌上垂下部分已有1m. 试问需多长时间链条才能全部滑过桌面(最后结果用重力加速度表示).

**解**： 设链条线密度为千克/米,在(秒)时刻下垂米，此时留在桌面上的长度为米，整个链条所受的合外力牛，方向竖直向下，由牛顿第二运动定律可知：

化简及结合初始条件可得初值问题：

 （\*）

对应齐线性方程的特征方程为  特征根 并且非齐线性方程有特解，所以通解为



利用初值条件可得初值问题(\*)的解为



令 解得



因此，需经过秒链条才能全部滑过桌面.

14. 设在上具有三阶连续导数，证明存在实数，使得



**证明**：将在区间泰勒展开可得

，其中.

分别取，可得



上述两式相减可得：



若，则取即得结论；

若，由在上连续可知：存在实数位于之间，使得，从而

 即

