Universidad Politécnica de la Zona Metropolitana de Guadalajara

Ing. Diseño Industrial

Madrigal Barrera Debbie Rhebekka

Prof. Enrique Moran Garabito

Probabilidad y Estadística

''Apuntes''

09/ 01 / 20

Debbie Rhebekka Madrigal Barrera

Probabilidad y Estadística

Carlos Enrique Moran Garabito

- PC
- Matlab / Excel / R / Minitab
- Calculadora

- Liga Git Hub
  - ↳ Ap1. Ap2. Nombre1. Nombre2. Nombre 3
    - ↳ Tareas (33%)
      - ↳ Tarea 1
        - ↳ Nombretarea.docx
          Nombretarea.xls
          ⋮
      - ↳ Tarea 2
        - ↳ Nombretarea2.docx
          Nombretarea2.xls
          ⋮
    - ↳ Prácticas (34%)
      - ↳ Practica 1
        - ↳ NombrePractica1.docx
          ⋮
    - ↳ Ejercicios (33%)
      - ↳ Ejercicio 1 ~ pendiente
        - ↳ Nombre Ejercicio1.docx
          ⋮

15 / 01 / 20

Madrigal Barrera Debbie Rhebekka

PROBABILDAD

Qué es probabilidad:

Es la mayor o menor posibilidad de que ocurra un determinado suceso. En otras palabras, su noción viene de la necesidad de medir o determinar cuantitativamente la certeza o duda de que un suceso dado ocurra o no. Esta establece una relación entre el número de sucesos favorables y el número total de sucesos posibles.
La probabilidad está basada en el estudio de la combinatoria y es fundamento necesario de la estadística, además de otras disciplinas como matemática, física u otra ciencia. En ellas se aplica una teoría de probabilidades, la cual tiene como fin examinar las formas y medios para obtener esas medidas de certeza, así como encontrar los métodos de combinarlos cuando intervienen varios sucesos en un experimento aleatorio o prueba.
Cada uno de los resultados obtenidos al realizar un experimento recibe el nombre de suceso elemental. Se llama espacio muestral el conjunto de todos los sucesos elementales obtenidos, de forma que todo subconjunto del espacio muestral es un suceso. La probalidad propone modelos para los fenómenos aleatorios, es decir, los que se pueden predecir con certeza, y estudia sus consecuencias lógicas.

Aplicaciones:

21 / 01 / 20

Madrigal Barrera Debbie Rhebekka

Qué es promedio?

Promedio o moda, es fundamental en muchos estudios y cálculos estadísticos, y también tiene importancia específica sobretodo en estudios económicos y financieros.

En general podemos indicar que, es el valor que resulta de dividir la suma de todos los valores observados entre el número de datos considerados.

Cuál es la institución oficial en México que se encarga de recolectar, clasificar y analizar datos?

(INEGI) Instituto Nacional de Estadística y Geografía

21/01/20

Bibliografía

Nombre del libro: Fundamentos Básicos de Estadística

Año: Primera Edición 2018

Autor: Cecilia Salazar P.
Santiago del Castillo G.

ISBN: 978-9942-30-616-6

¿Qué es un intervalo y qué significa que sea abierto o cerrado?

Son los intervalos en los que se agrupan y ordenan los valores observados. Cada uno de estos intervalos está delimitado (acotado) por dos valores extremos que les llamamos límites. Los dos caracteres se lograran construyendo intervalos cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha; esto se simboliza a través del uso de corchetes y paréntesis respectivamente. Abierto ( ) Cerrado [ ].

Un intervalo de números reales es un conjunto de números correspondientes a una parte de la recta numérica, en consecuencia, un intervalo es un subconjunto del conjunto de los números reales.

Scribe

21/ 01 /20

Intervalo abierto: Es aquel en el que los extremos no forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.

Intervalo cerrado: Es aquel en el que los extremos si forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.

Bibliografía

Libro: Matemáticas I
1º Bachillerato
Textos Marea Verde
ISBN: -13: 978-84-606-9050-4
-10: 84-606-9050-4
Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya

21 / 01 / 20

ESTADISTICA Y PROBABILIDAD.

Tenemos en un grupo de 72 personas que practican uno de estos deportes: futbol basquetbol, tenis, natación, gimnasia.
Se pregunta a cada uno de ellos que deporte practican, consiguiendo la sig. tabla

F	B	F	F	T	G	B	N
B	B	N	F	F	T	T	N
G	B	T	B	F	F	T	T
F	F	T	B	G	F	G	T
F	T	T	B	F	G	N	T
F	B	N	F	B	N	T	G
N	F	F	F	B	B	T	N
T	B	N	F	F	B	B	T
F	B	B	T	F	F	B	T

B	18	25 %
F	22	30 %
G	6	08 %
N	9	12.5 %
T	17	23.5 %
TOTAL	72	100 %

23 / 01 / 20

Madrigal Barrera Debbie Rhebekka

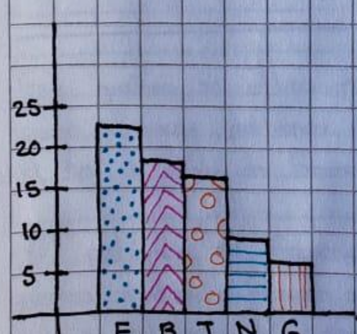
HISTOGRAMA

Es una representación gráfica de la información contenida en una tabla de distribución de frecuencias. Generalmente una grafica ayuda a la visualización de los datos más facilmente que una tabla. El histograma de frecuencias: Consiste en representar con una barra rectangular con frecuencia.

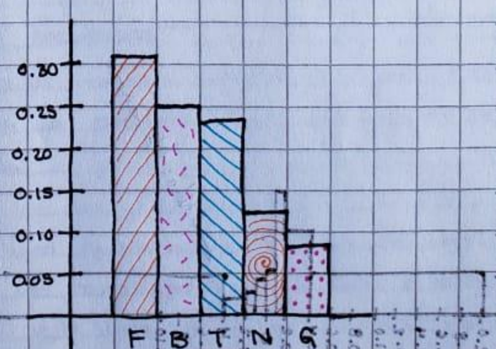
Histograma de frecuencias relativas: representar con una barra rectangular.

Cada frecuencia relativa es:

Categoria	Frec.	Frec. relativa
Futbol	22	$22/72 = 0.306$
Basquetbol	18	$18/72 = 0.25$
Tenis	17	$17/72 = 0.236$
Natación	9	$9/72 = 0.125$
Gimnasia	6	$6/72 = 0.083$



Histograma de frecuencias



Histograma de frecuencias relativas

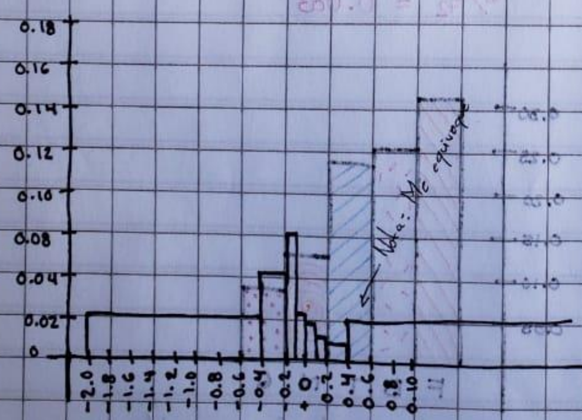
23 / 01 / 20

Pasos para la construcción de un histograma de frecuencias

1. En el eje horizontal se marcan las categorías cuyos nombres se colocan en intervalos de separación constante.
2. Para cada categoría se traza un rectángulo con la altura igual a su frecuencia (o frec. relativa) todos los rectángulos deben tener el mismo ancho.
3. En el eje vertical se marca la escala de valores.

ejemplo 2

Intervalo	Frec. relativa	Longitud
(-2.0, -0.4)	0.023	1.6
(-0.4, -0.2)	0.055	0.2
(-0.2, -0.1)	0.097	0.1
(-0.1, 0)	0.250	0.1
(0, 0.1)	0.189	0.1
(0.1, 0.2)	0.139	0.1
(0.2, 0.4)	0.116	0.2
(0.4, 2.0)	0.171	1.6



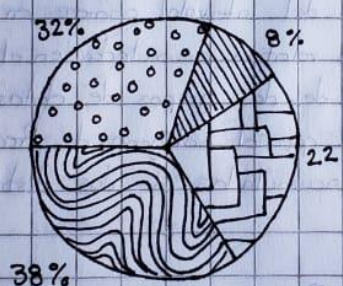
28/ 01 / 20

Madrigal Barrera Debbie Rhebekka
PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

Gráfica Circular

Estos gráficos nos permiten ver la distribución interna de los datos que representan un hecho, en forma de porcentajes sobre un total.

Los gráficos circulares son adecuados para recalcar la magnitud relativa de los componentes del total. Consiste en dividir un circuito en sectores cuyas superficies sean proporcionales a las cantidades correspondientes a cada categoría. Dado que los sectores circulares dependen de su ángulo central, éstos se determinan estableciendo la proporcionalidad respecto a 360°, que es el ángulo de la circunferencia.

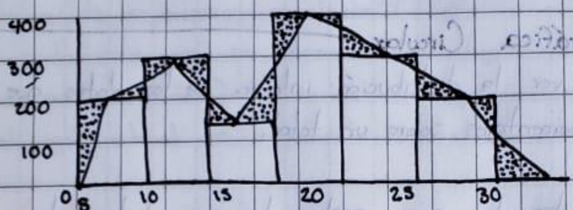


Polígono de frecuencias

Este gráfico se utiliza para el caso de variables cuantitativas, tanto discretas como continuas, partiendo del diagrama de columnas, barras o histograma, según el tipo de tabla de frecuencia manejada.

El polígono de frecuencias es la línea quebrada que resulta de unir los puntos medios o marcas de clase de las caras opuestas a la base de cada intervalo o rectángulo. El origen y final de la línea en el eje, es con valor de frecuencia cero, para cerrar la curva.

Esta línea representa al total de los casos, que son el 100% o que vale la unidad en términos de probabilidad.



Frecuencia Acumulada

Organización de datos agrupados.

Indica cuantos casos hay por debajo o arriba de un determinado valor o límite de clase. El intervalo (o el límite superior del intervalo) aparece en el eje horizontal y la frecuencia absoluta acumulada o relativa acumulada en el eje vertical. Esta gráfica facilita la comparación de dos grupos de datos de forma visual y de manera mucho más efectiva que el polígono de frecuencia, puesto que permite comparar los porcentajes acumulados de dos distribuciones con respecto al mismo intervalo.

Ojiva

Cuando se trata de relacionar observaciones en un mismo aspecto para dos colectivos diferentes no es posible ejecutar comparaciones sobre la base de la frecuencia, es necesario tener una base estándar, la frecuencia relativa.
La ojiva representa gráficamente la forma en que se acumulan los datos y permiten ver cuantos observaciones se hallan por arriba o debajo de ciertos valores.
Es útil para obtener una medida de los cuartiles, deciles, percentiles.

28 / 01 / 20

Bibliografía:

- Guía para la presentación de gráficos estadísticos
  Lima, agosto 2009
  INEI, Centro de Investigación y Desarrollo
- Universidad Complutense MADRID
  Convocatoria 2015
  Departamento: Sociología IV
  Carlos de la Puente Viedma
  Estadística y Gráficos
- Caballero, Wilfredo Introducción a la Estadística
  Serie Libros y Materiales Educativos N°28
  1 edición San José, Costa Rica
  IICA, 1981
- Capítulo IV.5 Distribución de Frecuencias acumuladas
  pdf.

Muy Bien
28/01/20

Scribe

TEMA CONJUNTOS

Conjunto

Colección de objetos que poseen una característica común. Estos objetos que integran el conjunto se denomina elementos del conjunto.

Formas de expresar un conjunto

a) Extensión (números explícitamente expresados)

ej.

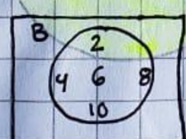
$B = (2, 4, 6, 8, 10)$ ← Se lee: B está formado por números naturales, pares, menores o iguales a 10.

b) Compresión (lo caracterizamos por una propiedad o condición que relaciona todos los elementos)

ej.

$B = (x \mid x$ es un número par y $x \leq 10)$

c) Diagrama Venn - Euler



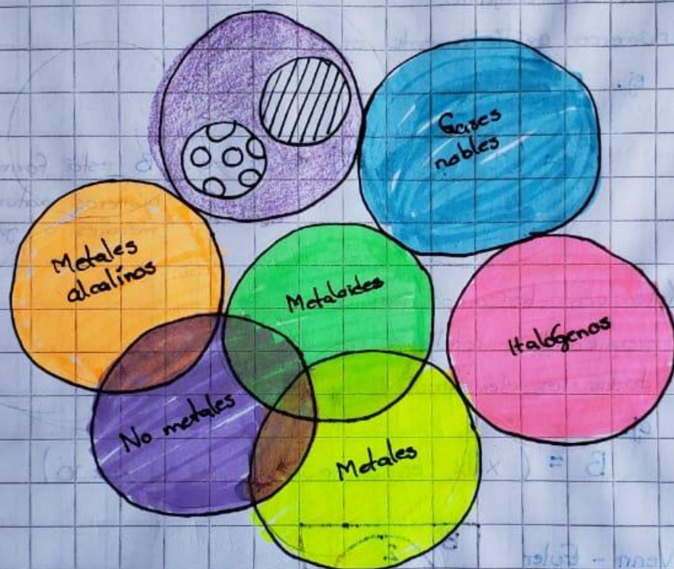
Busca en tabla periódica y representala en diagramas de Venn. Recuerda que la tabla se organiza a partir de propiedades de los elementos. Deben quedar claras estas propiedades en la representación.

30 / 01 / 20

DIAGRAMA DE VENN

Tabla periódica de los elementos

Familias:



Lantánidos

Actínidos

Metales de transición

30 / 01 / 20

- Define los conjuntos numéricos siguientes:
  - Naturales $\mathbb{N}$
  - Reales $\mathbb{R}$
  - Racionales $\mathbb{Q}$
- ¿Que es un binomio?
- ¿Que quiere decir que un número sea par o impar?
- ¿Que es un conjunto numerable y porque es el conjunto de los numeros reales no lo es?

Naturales

Los números naturales son, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Llamamos $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, es decir:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Reales

Los números reales surgen como necesidad de resolver ciertas ecuaciones que no tienen solución en el conjunto de los números racionales.

Si x es un número racional, entonces

$$x^2 \neq 2.$$

Racionales

Puede representarse como el cociente de dos enteros con denominador distinto de cero. Pueden ser fracciones o decimales.

Alude a ración o parte de un todo.

Binomio

Es aquella expresión algebraica que ostenta dos términos.

Ejemplo: $x^2 - 3y$ ó $5a + \sqrt{3}$

Scribe

Par o Impar

Los números pares se pueden dividir exactamente en dos grupos

Ejemplos: 2, 4, 6, 8, 10, 20, ...

Los números impares siempre terminan con un dígito del 1, 3, 5, 7 ó 9.

Conjunto númerable

Un conjunto es númerable cuando es igual a $\emptyset$ o existe una aplicación inyectiva en $\mathbb{N}$ (números naturales). Un conjunto es númerable cuando es equipotente a un subconjunto de $\mathbb{N}$

Porque un conjunto de números reales no lo es

Porque no se puede poner en correspondencia biunívoca con los números naturales, ó, los naturales y los reales no pueden emparejarse.

Bibligrafía:

Libro: Los Números de los Naturales a los Complejos
2010
Autor Juan Manuel Kirschenbaum
Colección "Las Ciencias Naturales y la Matemática"
ISBN 978-950-00-0748-1

30 / 01 / 20

Conjunto Universo o Universal

Aquel donde se seleccionan los elementos para formar otros conjuntos simbolicamente se denota con la letra $\mathcal{U}$. En los diagramas Venn se representa con un rectángulo.

Conjuntos iguales o equivalentes (=)

Dos conjuntos A y B son iguales o equivalentes si contienen los mismos elementos del universo. Por otro lado $A \neq B$ si no contienen los mismos elementos, y se llaman diferentes.

Conjunto vació (∅)

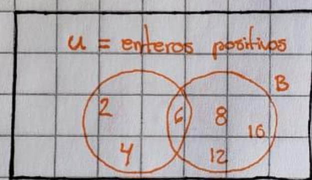
Un conjunto es vacío si no contiene elementos.

Subconjunto (⊆)

Un conjunto A es subconjunto de otro conjunto B si todos los elementos de A están en B, por otro lado A es subconjunto de si mismo en B si A tiene todos los elementos de B pero no todos los de B están en A $(A \subset B)$

04 / 02 / 20

Considerar los conjuntos $A = \{x/x$ es un número positivo par menor a $7\}$ y $B = \{x/x$ es un número par mayor que 5 y menor que $13\}$ con $U = \{\mathbb{Z}\}$



unión

$C = A \cup B$

$C = \{6\}$

Debbie R. 06 / 02 / 20

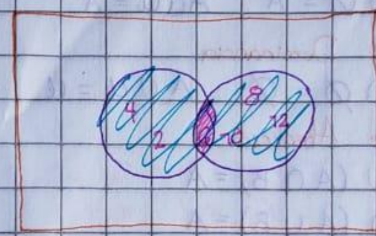
$\underbrace{A \cup B}_{\text{Unión}} = C$

$C = 2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12$

$\underbrace{A \cap B}_{\text{Intersección}} = C$

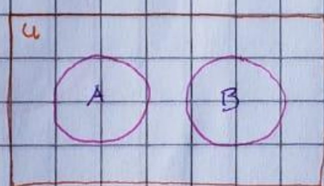
$C = 6$

$C = A + B$



Conjuntos disjuntos

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces son dos conjuntos disjuntos.



Teorema 3

Propiedades de la unión y la intersección.

Ley Conmutativa

$A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$

Ley Asociativa

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Ley Distributiva

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ley Idempotente

$A \cup A = A$ y $A \cap A = A$

Ley de Identidad

$A \cup \varnothing = A \quad A \cap \mathcal{U} = A$

Ley de Dominancia

$A \cap \varnothing = \varnothing \quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

Ley de Absorción

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Diferencia de Conjuntos (−)

Sean A y B dos conjuntos, la diferencia de A menos B es el conjunto

$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$

Complemento de Conjuntos

Sea A un conjunto de $\mathcal{U}$; entonces el complemento de A representado por A^c se define como $A^c = \mathcal{U} - A$

Teorema 4

Ley de doble complemento

$(A^c)^c = A$

Leyes Inversas

$A \cup A^c = \mathcal{U} \quad A \cap A^c = \varnothing$

Leyes de Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$

Cardinalidad (n)

Sea A un conjunto, la cardinalidad de A que se representa con $n(A)$ es el número de elementos que contiene A

Teorema

Cardinalidad de la unión y la intersección Si A y B son conjuntos

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

Debbie R.

06 / 02 / 20

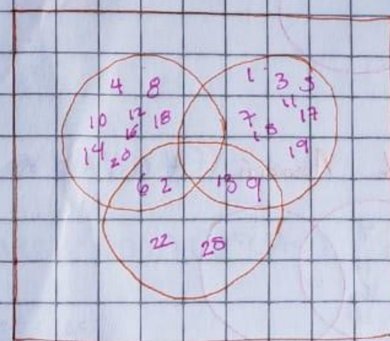
Sea $A = \{x / x$ números pares $x < 21\}$
(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20)

Sea $B = \{x / x$ números nones $x < 20\}$
(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19)

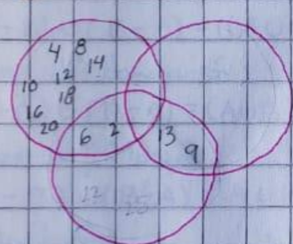
Sea $C = \{2, 6, 9, 13, 22, 25\}$

Demostración de la ley asociativa

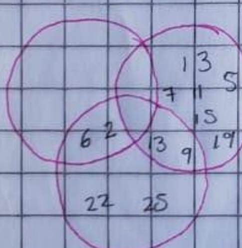
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \Longrightarrow$



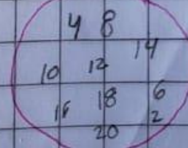
Ley Distributiva $A \cup (B \cap C)$



$A \cap (B \cup C)$



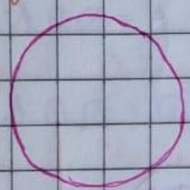
Ley Idempotente $A \cup A$ y $A \cap A = A$



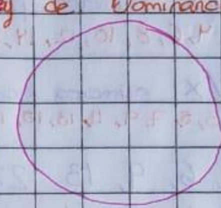
Scribe

06 / 02 / 20

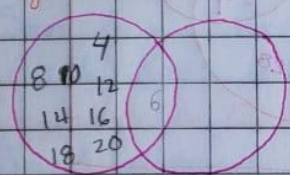
Ley de Identidad $A \cup \varnothing = A$



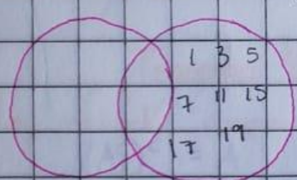
Ley de Dominancia $A \cap \varnothing = \varnothing$



Ley de Absorción $A \cup (A \cap B)$



$A \cap (A \cup B)$



$(A-B) \cup (B-A) = A \cup B - A \cap B$

Demostración

Sabemos que

$(A-B) = A \cap B^c$ y $(B-A) = B \cap A^c$

Por lo tanto

$(A-B) \cup (B-A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

Con las leyes distributivas se obtiene

$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup (B \cap A^c)) \cap (B^c \cup (B \cap A^c))$

Con mas leyes distributivas

$(A-B) \cup (B-A) = ((A \cup B) \cap (A \cup A^c)) \cap ((B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c))$

Con leyes inversas

$(A-B) \cup (B-A) = ((A \cup B) \cap u) \cap (u \cap (B^c \cup A^c))$

Leyes de dominación

$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c)$

Leyes de Morgan

$(A-B) \cup (B-A) = A \cup B \cap (A \cap B)^c$

Por lo tanto

$(A-B) \cup (B-A) = (A-B) \cup (B-A)$

Madrigal Barrera Debbie Rhebecka
Ing. Diseño Industrial
Probabilidad y Estadística
Prof. Garabito
Tema:

Diistriibuciiones

EJERCICIO 1

Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se les ha preguntado la cantidad de dinero que tienen en la cartera, obteniéndose una media muestral de 110 €. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 €.

a) Obtener un intervalo de confianza, al 90%, para la cantidad de dinero en la cartera de la población.

$1-\alpha = 0.90$
$\alpha = 1-0.90 = 0.10$
$z_\alpha/2 = z_{0.05} = 1,645$

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(100 - 1.645\frac{20}{\sqrt{100}}, 100 + 1.645\frac{20}{\sqrt{100}}\right) =$$
$$= (106,71, 113,29)$$

b) ¿Cuál es el error máximo cometido con la estimación anterior?

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3,29$$

c) Si deseamos que el error cometido con la estimación el mismo nivel de confianza, sea la décima parte del apartado anterior, ¿cuál ha de ser el tamaño de la muestra?

$$n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{20}{0,329}\right)^2 = 100^2 = 10\,000$$

$0,10 \cdot 3,29 = 0.329$

Scribe

La vida media de un determinado modelo de bombilla sigue una distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98% se obtiene el intervalo (388, 68, 407, 32) para la vida media. Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados.

Intervalo de confianza del 98%

$1-\alpha = 0.98$

$\alpha = 1-0.98 = 0.02$

$Z_{\alpha/2} = Z_{0.01} = 2.33$

$$\bar{X} = \frac{388,68 + 407,32}{2} = 398 \text{ días}$$

La media de la muestra es el punto medio del intervalo.

La amplitud del intervalo es:

$407.32 - 388,68 = 18,64$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{6}{\sqrt{n}} = \frac{18,64}{2} = 9.32$$

$$9.32 = 2.33 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}}$$

$$n = \left(\frac{2.33 \cdot 60}{9.32}\right)^2 = 15^2 = 225 \text{ bombillas}$$

EJERCICIO 2

El tiempo en minutos dedicado a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 min. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

91, 68, 39, 82, 55

70, 72, 62, 54, 67

a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.

Se determina la media: $(91+68+39+82+55+70+72+62+54+67) \div 10 = 66$

Como: $\alpha = 0.1 \quad 1-\alpha = 0.9$

Intervalo de confianza: $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(66 - 1.64\frac{15}{\sqrt{10}}, 66 + 1.64\frac{15}{10}\right)$

$= (58,22; 73,78)$.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%

Como $1-\alpha = 0.95$ entonces $P(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) = 0,95 \quad Z_{\alpha/2} = 1.96$

$\text{Error} = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} \geq Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\text{Error}} = 1.96 \cdot \frac{15}{5} = 5.88 \rightarrow n \geq 34.57$

El tamaño mínimo de la muestra es 35.