Collations for the History of the Infinitesimal Analysis

Author: Isaac Newton

Source: MS Add. 3968, ff. 113r-144v, Cambridge University Library, Cambridge, UK

<113r>

termini residui semper habebunt forman illam quam perprœcedentem Regulam habere debent.

Hæc Regula eodem modo demonstratur ubi tres vel plures habentur quantitates indeterminatæ x, y, z &c.

Hactenus Manuscriptum illud vetus. Inde vero hæc descripsi ut vera Lemmatis hujus origo pateret & quale esset methodi meæ fundamentum illud quod anno 1676 literis transpositis, celavi sententiam in Scholio præcedente expositam involventibus, id est sententiam: <u>Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa.</u>

In Epistolis meis 10 Decem. 1672 & 24 Octob. 1676 datis, dixi quantitates surdas methodum meam non morari, et hanc rem exemplo explicui in Analysi mea prædicta. Substitatur utique in æquatione pro quantitate radicali symbolum quodvis, tractetur symbolum ut quantitas radicalis et ejus fluxio.

♀ < insertion from f 114r > ♀Si fluxiones pro fluentibus habeantur, operatione repetita prodibunt earium fluxiones, id est, fluentium primarum fluxiones secundœ, & sic deinceps in infinitum. Fluxionibus autem secundis et momentis secundis in hisce Principiorum Libris nonnunquam usus sum, In Lib. II, Prop. X exempl. 1, fluxionem secundam Curvaturæ vocavi variationem variationis ejus, & in ejus dem Libri Prop XIV Cas. 3, momentum secundum Areœ vocavi differentiam momentorum ejus. Momentorum secundorum subsidio Demonstrationem illam Propositionis Keplerianæ quam in Lib. I Prop. XI descripsi, utique locutus sum in Epistola mea 10 Decem 1672 ad Collinium data, ut et variationem Curvaturæ de qua egi in Tractatu quem anno 1671 composui, et curvaturam maximam vel minimam de qua egi in eodem Tractatu ut et in Manuscripto prædicto quem scripsi mense Octobri annis 1666; in quo etiam literis punctatis nonnunquam usus sum. < text from f 113r resumes >

Computationes per fluentium momenta sæpe contrahuntur resolvendo fluentem uno temporis momento fluendo auctam, in seriem convergentem, ut fit in Scholio ad Prop. XCIII Lib. I. Nam termini seriei proportionales sunt fluxionibus et momentis, secundus terminus fluxioni primæ et momento primo, tertius fluxioni secundæ et momento secundo, & sic deinceps; et multiplicati respective per terminos hujus seriei $1\ .\ 1\times 2\ .\ 1\times 2\times 3\ .\ 1\times 2\times 3\times 4\ .$ &c vertuntur in momenta, deinde divisi per terminos hujus $o\ .\ oo\ .\ o^3\ .\ o^4$. &c vertuntur in fluxiones. Et ob hanc methodorum affinitatem et harmoniam eas conjunxi et ex utraque Analysin unam generalem ab initio conflavi, ut supra.

Ad eandem Analysin pertinet etiam artificium ducendi Curvam per puncta quotcunque data, et ea ratione interpolandi Series quascunque. Nam si verbi gratia Series aliqua vel fluentium vel fluxionum habeantur, sed fluentes vel fluxiones in intermedijs seriei locis non habeantur: per interpolationem Seriei habeburitur eœdem in locis quibuscunque. deinde ex lege fluentium sic inventa prodibit lex fluxionum per methodum nostram, et contra. Artificij autem describendi Curvam per puncta data memini in Epistola prædicta, 24 Octobris 1676 data.

Atque hecterus de Analysi qua usus sum in investigatione rerum quas in hosce Principiorum Libris composui.

<115r>

termini residui semper habebunt formam illam quam per præcedentem Regulam habere debent.

Hæc Regula eodem modo demonstratur ubi tres vel plures habentur quantitates indeterminatæ x, y, z, &c.

Hactenus Manuscriptum illud vetus. In alio Manuscripto

Maij 16, 1666 composito, methodum solvendi Problemata per motum complexus fui Propositionibus seotem quarum ullima est Regula jam descripta eliciendi velocitates motum crescendi vel decrescendi ex æquatione quatitates crescentes vel decrescentes involvente. Et in allo Manuscripto quod mense Octobri ejusdem anni composui, descripsi easdem Propositiones septem et octavam addidi. Septimam vero sequentibus adauxi.

Si in equatione quavis occurat

Hæc autem annis 1665 et 1666 a me inventa fuisse Barrovius noster per ea tempora Lucasianus Matheseos apad Cantabrigenses Professor, idoneus est testis Et ejus testimonium Collinius noster in Epistola sua ad. D Strode 26 Iulij 1672 sic protulit. Mense

Septembri – – – – – obtineri queant hactenus Collinius. Ide**{s}** Collinius in Epistola sua ad Iacobum Gregorium 25 Novemb. 1669 dixit Newtonum antequam ederetur Mercatoris Logarithmotechnia hanc methodum adinvenisse eamque ad omnes Curvas generaliter et ad Circulum diversimode applicuisse. Et in Epistola ad Davidem Gregorium Iacobi fratrem 11 Aug. 1676 data, affirmavit Serierum infinitarum doctriam a Newtono biennium ante excogitatam fuisse quam ederetur Mercatoris Logarithmotechnia, & generaliter omnibus figuris applicatam. Hæc vero Collinium a Barrovio didicisse crudas. Et cum hæc omnia ad Tractatum de Analysi per Æquationes numero terminorum infinitas spectent, et . Barrovius eundem legerat & intellexerat, inde discas non solum methodum serierum sed etiam Analysin omnem in tractatu illo expositam jam anno 1666 inventam et generalem redditam fuisse, meque ex eo tempore methodum fluxionum et methodum serierum in unam generalem Analysin conjunxisse.

In Tractatu quem Anno 1671 conscripsi, primùm docui reductionem quantitatum in series convergentes per divisiones & extractiones radicum tam affectarum quam simplicium. Et his præmissis methodum fluxionum exposui et ad solutionem Problematum applicui Propositionibus multis quarum duæ primæ erant hæ.

Prob. 1 Relatione quantitatum fluentium inter se data, fluxionum relationem determinare.

<115v>

Prob. 2. Exposita Æquatione fluxiones quantitatum involvente invenire relationem quantitatum inter se.

Horum Problematum solutiones in hoc Manuscripto pluribus prosecutus sum ut fundamentum methodi meæ generalis, ex methodo serierum et methodo fluxionum compositæ; deinde per hanc methodum docui solutiones aliorum Problematum.

Hæc omnia ex veteribus Manuscriptis protuli ut vera Lemmatis hujus origo pateret et quale esset methodi meæ fundamentum illud quod anno 1676 literis transpositis celavi sententiam in Scholio præcedente expositam involventibus, id est, sententiam, Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versa; et quod Scholium illud verbis fusioribus enarratum ita sonabit

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo G.G. Leibnitio anno 1676 intercedebant, cum significarem me compotem esse Methodi determinandi Maximas et Minimas, ducendi Tangentes, quadrandi figuras curvilineas, solvendi inversas de Tangentibus Problemata, inveniendi areas Curvarum in Seriebus quæ finitæ evadunt ubi area per finitam æquationem exhiberi potest, comparandi areas curvarum cum areis Sectionum Conicarum aliarumve figurarum simplicissimarum cum quibus comparari possunt, & omnia fere Problemata solvendi si forte numeralia quædam Diophantæis similia excipiantur, et hanc methodum in terminis surdis æque ac in rationalibus procedere, et methodum tangentium Slusij ex eadem primo intuitu profluere et me anno 1671 de hac methodo Tractatum scripsisse, et fundamentum ejus satis obvium esse, sed quoniam explicare non vacaret, me literis transpositis hanc sententiam involventibus Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versa; fundamentum illud celasse ‡ < insertion from f 116r > ‡ Cum insuper ex literis Gregorij et meis datis 5 Sept. 1670 & 10 Decem 1672 & ad ipsum mense Iunio Anni 1676 missis, methodum Tangentium Slusij tam ex Methodo Tangentium Barrovij quam ex mea tanquam Corollarium prompte profluere didicisset hanc methodum esse particule quoddam vel potius Corollarium methodi meæ: generalis et quomodo difficultates quantitatum surdarum inter computandum effugerem in Analysi mea vidisset: Vir Clarissimus — < text from f 115v resumes > : Vir Clarissimus mense Iunio anni sequentis, postquam in methodum similem ope præcedentium incidisset vel saltem incidere potuisset, rescripsit se quoque in ejusmodi methodum incidisse et methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum et notarum formulis, et ex ijs quæ de methodo mea didicisset affinitatem inter methodos simul agnovit.

Si fluxiones pro fluentibus habeantur ——— usus sum.

Computationes per fluentiam momenta ——— conflavi ut supra.

Ad eandem Analysis —— 24 Octobris 1676 data.

Atque hactenus ———— composui.

Cum vero hæc spectent ad Tractatum de Analysi per series quem Barrovius legerat intellexerat et ad Collinium **{miserat}**, et methodus in hoc Tractatu tradita pergat per series et fluxiones conjunctim & ejus Area figuræ accurata si possibile sit sin unimus infinite vero propinqua prodire dicatur, et Series quarum ope hoc fit inventæ fuerunt per methodum fluxionum at in Epistola mea 24 Octob 1676 ad Oldenburgum data traditur: unde discas Analysim in Tractatu illo expositam quæ ex methodis serierum et fluxiorum componitur, a me annis aliquot antequam Tractatus ille ad Collinium mitteretur, inventam et generalem reditam fuisse.

Et simili methodo inveni Solidum minimæ resistentiæ, quod ipse Leibnitus primum fuit specimen in Lucem editum an] Sed et considerando momenta prima ut quantitates fluentes inveni solidum resistentiæ minimæ cujus memini in Scholio ad Prop. XXXIV Lib. II. Et Leibnitus ipse fatetur hoc fuisse specimen primum hujus methodi

<117r>

In Propositionibus ② investigandis quantitas o ut particula temporis infinite parva vel momentum ejus (ubi dictum vel) spectatur & calculus compendij causa per approximationes sæpe procedit, & quantitas 0 ut plurimum subintelligitur. In ① demonstrandis, quantitas 0 est temporis vel quantitatis cujuscunque alternus uniformiter fluentis indefinite parva sed finita tamen, & calculus totus in finitis quantitatibus per Geometriam Euclidis accurate peragitur: et finito calculo, quantitas o diminuitur et evanescit et ex ultimis quantitatum rationibus veritas Propositionis demonstrandæ (methodo Archimedea) colligitur. ④ Et ubi in æquationibus finitis res non succedit, hæ in infinitas reducuntur, idque vel per Regulam Binomij in principio Epistolæ ad Oldenburgum 13 Iunij 1676 datæ expositam et exemplis illustratam, vel per extractionem radicis vel quantitatis fluentis ex æquatione affecta sive æquatio fluxionem non involvat, ut in Epistola illa & Compendio prædicto exponitur sive eadem fluxionem involvat ut in eadem epistola affirmatur & in schemate a D. Wallisio edito [in secundo Operum ejus Volumine p. 394] ostenditur et exemplo illustratur. Vel denique gradatim assumendo terminos seriei investigandæ eosque tanquam cognitos tractando donec ex conditionibus Problematis determinari possint ut in eadem Epistola affirmatur ③ In hujusmodi calculis sæpe pergitur a quantitatibus fluentibus ad fluxiones, sæpe regreditur a fluxionibus ad fluentes idque vel per tres Regulas initio prædicti compendij positas, vel per alias figurarum Quadraturas in Tractatu de quadratura Curvarum expositas. Nam Propositiones ejus Libri prope omnes spectant ad inversam methodum fluxionum & in Epistola prædicta anno 1676 scripta tanquam in Tractatu ante quinquennium scripta comprehensæ memorantur 5 Et ubi Curvæ per Analysin quadrari non possint methodum invenit describendi Curvam Parabolici generis per terminos Ordinatarum qua pro lubitu acceditur ad quæsitum ut affirmatur etiam in eadem Epistola. Et hæcusque Newtonus per ea tempora methodos suas provexerat.

Collinius vero, postquam Compendium prædictum a D. Barrovio acceperat, cœpit amicos suos de methodo serierum ibi descripta per literas ædmonere & hujus generis literæ plures in Commercio Epistolico impressæ extant. Et Iacobus Gregorius ex serie aliqua quam a Collinio acceperat, postquam multum olei & operæ in ista serie expiscanda impenderat, incidit in methodum serierum Newtoni sub finem anni 1670, & communicatis subinde cum Collinio seriebus pluribus a se computatis, licentiam ipsi dedit easdem cum amicis suis communicandi, & Collinius perinde series quas vel a Newtono vel a Gregorio acceperat liberrime communicabat.

Interea: D. Leibnitius Londinum profectus, moram ibi traxit & anno 1671 Hypothesin suam Physicam novam ibi edidit & Regiæ Societati dicavit, & in Epistola dedicatoria meminit commercij quod cum Societate illa mediante D. Oldenburgo habebat. Sub initio autem anni 1673 mense Martio migravit inde Lutetiam Parisiorum & in Gallia mansit usque ad mensem Octobrem anni 1676. Anno vero 1663 ineunte cum sibi methodum esse ex quodam differentiarum genere colligendi terminos <118r> serierum numeralium & a Pellio reprehenderetur quasi methodum Moutoni sibi arrogaret, Apollogiam scripsit ad D Oldenburgum 3 Feb. datam contendens quod ex schedis suis monstrare posset inventionem suam et inveniendi modum et occasionem, & se quædam momenti maximi addidisse Moutono & Reginaldo indicta, & his argumentis suffultus a coinventoris jure minime discessit.

Deinde anno 1674 Literas duas ad Oldenburgum dedit Parisijs 15 Iulij et 26 Octobris, asserens in priore se Theorema habere cujus ope Area circuli vel sectoris ejus dati exacte exprimi potest per seriem quandam numerorum rationalium continue productam in infinitum, & in posteriore eadem fusius repetendo & affirmando se invenisse seriem numerorum valde simplicium cujus summa exacte æquatur circumferentiæ circuli posito Diametrum esse unitatem. Et quod eadem methodo etiam Arcus cujuslibet cujus sinus datur geometrice exhiberi per ejusmodi seriem valor posset, nullo ad integræ circumferentiæ dimensionem recursu: ut adeo necesse non sit, Arcus rationem ad circumferentiam nosse. Quod in hac Epistola methodus vocatur in priore dicitur Theorema. Ibi dicit se Theorema habere cujus ope Area circuli vel sectoris ejus dati exacte exprimi potest per seriem numerorum rationalium: hic dicit se methoum habere cujus ope vel Area circuli et ejusdem circumferentia vel Arcus quilibet per ejusmodi seriem exprimi potest idque licet ratio arcus ad circumferentiam totam non noscatur, si modo sinus hujus ratio arcus detur. Theorema igitur habuit quo arcus quilibet cujus sinus datur, in serie numerorum rationalium exhiberi posset, et ope Theorematis hujus Aream circuli vel Sectoris ejus dati in serie numerorum rationalium exhibere noverat; Si ratio arcus ad circumferentiam non innotesceret, habebatur arcus solus, si ratio illa innotesceret habebatur etiam circumferentia tota. Theorema autem quo arcus quilibet cujus sinus datur in serie numerorum rationalium haberi potest ejusmodi est. Sit radius=1 & $\mathrm{sinus} = \mathrm{x}$, et arcus erit $\mathrm{x} + \frac{1}{6}\mathrm{x}^3 + \frac{3}{40}\mathrm{x}^5 + \frac{5}{112}\mathrm{x}^7 + \frac{35}{1152}\mathrm{x}^9 + \&\mathrm{c}$. Hujus Theorematis demonstrationem D. Leibnitius per literas suas 12 Maij 1676 ad Oldenburgum datas postea quæsivit a Collinio, ideoque Theorema aliunde acceperat. Ab hoc Theoremate deduxerat series numerales sed Theorema ipsum demonstrare nondum potuit.

Interea Oldenburgus literis D. Leibnitij respondendo, in Epistola 8 Decembris 1674 data, generalem descriptionem dedit methodi serierum a Newtono & Gregorio exercitæ, & in epistola 15 Aprilis anno 1675 data series plures a Collinio acceptas ad D. Leibnitium misit in quibus erat series prædicta pro arcu cujus sinus datur & series alia pro arcu cujus tangens datur. Et D. Leibnitius 12 Maij 1675 rescripsit in hæc verba. Literas tuas multa fruge Algebraica repertas accepi pro quibi tibi et doctissimo Collinio gratias ago. Cum nunc prætur ordinarias curas Merchanicis imprimis negotijs distrahar, non potui examinare series quas misistis, ac cum meis comparare Vibi fecero perscribam tibi sententiam meam. Nam aliquot jam anni sunt quod inveni meas via quadam sic satis diversas fuisse D. Leibnitius hic agnoscit. Acceperat ulique Theomata generalia quorum Demonstrationes ignorabat, invenerat series memerorum rationalium ex Theoremate pro arcu cujus sinus datur.

Interea per transmutationem figurarum Barrovianis similem incidit in demonstrationem quandam Theorematis pro Arcu cujus Tangens datur et opusculum de hac Quadratura compositum ab amicis ab illo tempore tectum materia sub manibus crescente Nam in Actis Eruditorum mensis Aprilis Anno 1691 {pa}g 178 ita scripsit: Iam anno 1675 compositum habebam opusculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tempore lectum; sed quod materia <119r> sub manibus crescente limare ad editionem non vacavit postquam aliæ occupationes supervenere; præsertim cum nunc prolixius exponere vulgari more quæ Analysis nostra nunc paucis exhibet, non satis operæ pretium videatur. Sensus est quod opusculum anno 1675 & deinceps ab amicis lectum, materia sub manibus crescente ad Editionem limare non vacavit, donec aliæ occupationes supervenere quæ magis impedimento fuerunt: deinde inventa Analysi differentiali, prolixius exponere vulgari more quæ Analysis illa nova paucis exhibet, non satis operæ pretium videbatur. Sub finem anni 1676 & initium sequentis. D. Leibnitius per Angliam et Hollandiam domum redibat et aliæ occupationes mox supervenere: ideoque inventa est Analysis differentialis post Annum 1676 completum.

Cum D. Leibnitius series duas earum quas ab Oldenburgo acceperat, a Collinio per Mohrum quendam denuo accepisset, & se prius accepisse oblitus esset: postulavit ille Demonstrationem harum serierum per literas 12 Maij 1676 ad Oldenburgum datas. Cum, inquit, Georgius Mohr Danus, in Geometria et Analysi versatissimus nobis attulerit communicatum sibi a doctissimo Collinio vestro expressionem relationis inter arcum & sinum per infinitas series sequentes: Posito sinu x arcu z, radio 1

$\mathrm{z} = \mathrm{x} + \frac{1}{6}\mathrm{x}^3 + \frac{3}{40}\mathrm{x}^5 + \frac{5}{112}\mathrm{x}^7 + \frac{35}{1152}\mathrm{x}^9 + \&\mathrm{c}$

$\mathrm{x} = \mathrm{z} - \frac{1}{6}\mathrm{z}^3 + \frac{1}{120}\mathrm{z}^5 - \frac{1}{5040}\mathrm{z}^7 + \frac{1}{362880}\mathrm{x}^9 - \&\mathrm{c}$

Hæc, inquam, cum nobis attulerit ille quæ mihi valde ingeniosa videntur, & posterior imprimis series elegantiam singularem habeat, ideo rem gratam mihi feceris Vir Clarissime si demonstrationem transmiseris. Habebis vicissim mea ab his longe diversa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc annis ad te perscripsisse credo, demonstratione tamen non addita quam nunc polio Demonstrationem hic intelligit seriei pro arcu cujus tangens datur. Anno superiore compositum habebat opusculum Quadraturæ Arithmeticæ per hanc seriem. Demonstrationem hujus seriei jam promittit, eamque poliebat vulgari more ut post apparuit, ideoque Analysin differentialem nondum invenerat.

Sub finem anni 1665 Iacobus Gregorius emortuus est & quæ cum amicis communicaverat in unum corpus sollicitante D. Leibnitio collecta sunt, et extat Collectio manu Collinij exarata cum hoc Titulo. Excerpta ex Gregorij epistolis cum D. Lebinitio communicanda tibique [i.e. Oldenburgo] postquam perlegerit ille reddenda. In hac Collectione Episola Gregorij ad Collinium 15 Feb. 1671 data & in Commercio Epistolico impressa p 25, in qua Gregorius seriem pro arcu cujus tangens datur communicaverat. Habetur et Epistola Newtoni ad Collinium 10 Decem Missa fuit hæc Collectio ad Lebnitium post 14 Iunij & ante 11 Aug. 1676. Missam fuisse dicit Collinius in Epistola 11 Aug. 1676 data. Communicanda erat cum amicis Mathematicis, & remittenda, et D. Tschurnhausius in Epistola 1 Sept 1676 Parisijs data, se vidisse videtur insinuare videtur his verbis. Similia porro quæ in hac re [id est in Methodo serierum Newtoni] præstitit eximius Geometra Gregorius memoranda certe sunt, et quidem optime famæ ipsius consulturï, <120r> qui ipsius relicta Manuscripta luci publicæ ut exponantur operam navabunt. Certe quæ in hac re Gregorius, præstiterat, Tschurnhausius non aliunde cognoscere potuit et memoranda vocare ac digna luce publica quam ex collectione scriptorum ejus a se visa.

Cum D. Leibnitius demonstrationem quandam Theorematis pro inveniendo arcu cujus tangens datur invenisset, & postulasset ab Oldenburgo & Collinio demonstrationem Theorematis pro arcu cujus sinus datur ut et Theorematis pro sinu cujus arcus datur; id est Methodum quo Newtonus series illas invenisset: Oldenburgus et Collinius Newtonum enixe rogarunt ut ipse methodum suam describeret cum D. Leibnitio communicandum; & Newtonus subinde methodum suam descripsit in Epistola 13 Iunij 1676 data, et sub finem epistolæ dixit Analysin per æquationes infinitas ad omnia pene problemata (si numeralia quædam Diophanteis similia excipiantur) sese extendere: non tamen omnino universalem evadere nisi per ulteriores quasdam methodos eliciendi series infinitas: id est per methodos in fluxionibus fundatis.

<121r>

Historia brevis methodi serierum ex Monumentis antiquis deductam, Ex Epistola D Iacobi Gregorij ad D Collins 15 Februarij Anno 167$\frac{0}{1}$ data, cujus habetur Autographum.

Ex quo Epistolam ad te dedi, tres a te accepi, unam Decem. 15 alteram Decem. 24, tertiam Ianuarij nuper elapsi datam.

Quod attinet Newtoni methodum universalem aliqua ex parte, ut opinor, mihi innotescit tam quoad Geometricas quam Mechanicas Curvas. Nihilo tamen minus ob series ad me missas gratias habeo, quas ut remunerem, mitto quæ sequuntur.

Sit radius=r, Arcus=a, Tandens=t, Secans=s,

Et erit $\mathrm{a} = \mathrm{t} - \frac{\mathrm{t}^3}{3\mathrm{r}^2} + \frac{\mathrm{t}^5}{5\mathrm{r}^4} - \frac{\mathrm{t}^7}{7\mathrm{r}^6} + \frac{\mathrm{t}^9}{9\mathrm{r}^8} + -\&\mathrm{c}$

Eritque $\mathrm{t} = \mathrm{a} + \frac{\mathrm{a}^2}{3\mathrm{r}^3} + \frac{2\mathrm{a}^5}{15\mathrm{r}^4} + \frac{17\mathrm{a}^7}{315\mathrm{r}^6} + \frac{62\mathrm{a}^9}{2835\mathrm{r}^8} + \&\mathrm{c}$

Et $\mathrm{s} = \mathrm{r} + \frac{\mathrm{a}^2}{2\mathrm{r}} + \frac{5\mathrm{a}^4}{24\mathrm{r}^3} + \frac{61\mathrm{a}^6}{720\mathrm{r}^5} + \frac{277\mathrm{a}^8}{8064\mathrm{r}^7} + \&\mathrm{c}$ NB Exemplar hujus Epistolæ missum fuit Lutetiam Parisiorum mense Iunio 1676 cum D. Leibnitio communicandum. Versabatur autem D. Leibnitius in Anglia annis 1671, 1672 & 1673 usque ad mensem Martium.

Ex Epistolis quinqque quæ leguntur in Libro Epistolarum Regiæ Societatis N. 7. pag. 93, 110, 216, 235, 189, et quarum prima et quinta secunda reperiuntur

Ex prima 15 Iulij 1674 Leibnitij ad Oldenburgum data impressæ in Tomo tertio Operum mathematicorum Wallisij.

Alia mihi Theoremata sunt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile est cujus ope Area Circuli vel sectoris ejus dati exacte exprimi potest per seriem quandam numerorum rætionalium continue productam in infinitum.

Ex secunda quæ fuit Leibnitij ad Oldenburgum 26 Octob 1674 data.

Ratio Diametri ad circumferentiam exacte a me exhiberi potest per rationem non quidem memeri ad numerum (id enim foret absolute invenisse) sed per rationem Numeri ad totam quandam seriem Numerorum rationalium valde simplicem & Regularem. Eadem methodo [id est eodem Theoremate generali]. etiam Arcus cujuslibet cujus sinus datur, Geometrice exhiberi per ejusmodi seriem valor potest, nullo ad integræ circumferentiæ dimensionem recursu: ut adeo necesse non sit Arcus rationem ad circumferentiam nosse.

Ex tertia quæ fuit Oldenburgi ad Leibnitium 15 Apr. 1675 data

Posita pro radio unitate, datoque x pro sinu ad inveniendum z arcum series hæc est.

$\mathrm{z} = \mathrm{x} + \frac{1}{6}\mathrm{x}^3 + \frac{3}{40}\mathrm{x}^5 + \frac{5}{112}\mathrm{x}^7 + \frac{35}{1152}\mathrm{x}^9 + \&\mathrm{c}$ in infinitum. Et extracta radice hujus æquationis methodo symbolica, si dederis z pro arcu ad inveniendum x sinum series hæc est

$x = z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}x^9 + \&c$ Atque hæc series facile continuatur in infinitum. Prioris beneficio ex sinu 30^{grad} Ceulinij numeri facile struuntur.

Consimiliter si ponas radium R et B sinum arcus Zona inter diametrum et Chordam illi parallelam est

$= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \&c$. Atque eadem series mutatis signis termini secundi quarti et sexti &c inservit assignandæ areæ Zonæ æquilateris Hyperbolæ,

$= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \&c$.

Rursum dato Radio R et sinu verso sive sagitta a, ad inveniendam aream segmenti resect{o} a chorda pone b^2 pro $2Ra$, et erit segmentum <121v> $= \frac{4ba}{3} - \frac{2a^3}{5b} - \frac{a^5}{14b^3} - \frac{a^7}{36b^5} - \frac{5a^9}{352b^7} - \&c$ Et arcus integer=
$= 2b + \frac{a^2}{3b} + \frac{3a^4}{20b^3} + \frac{5a^6}{56b^5} + \frac{35a^8}{576b^7} + \&c$

Duæ hæ series D. Gregorio debentur, quas exhibuit ex eo tempore quo usus est hac methodo; quod ab ipso aliquot post annis factum, postquam scilicet intellexerat D. Newtonum generatim eam applicasse. Exinde quoque ad nos misit Series similes ad Tangentes naturales ex earundem Arcubus, et conversim obtinendum Ex. gr. pone Radium$= r$, arcum a, tangentem t; erit
$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \&c$
Et conversim ex tangente invenire arcum ejus
$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} + -\&c$.

Atque hoc factum cum vides, facile credideris posse eadem Methodo æque facile ex arcu &c.

NB Hanc Epistolam D. Leibnitius se accepisse per Epistolam sequentem agnovit sed subinde celavit & oblivioni tradidit, nulla ejus deinceps vel in Epistolis vel in Actis eruditorum vel alibi mentione unquam facta;

Ex quarta quæ fuit Leibnitij ad Oldenburgum 20 Maij, 1675, & cujus Autographum extat.

Literas tuas multa fruge Algerbraica refertas accepi pro quibus tibi et doctissimo Collinio gratias ago. Cum nunc præter ordinarias Curas mechanicis imprimis negotijs distrahar non potui examinare series quas misistis ac cum meis comparare. Vbi fecero perscribam tibi sententiam meam. Nam aliquot jam anni sunt quod inveni meas via sic satis singulari.

NB Series acceptas a suis diversas esse D. Leibnitius hic agnovit, non ausus eas sibi jam vindicare.

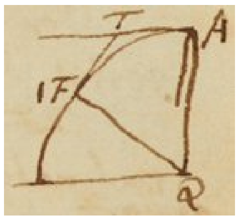
Ex quinta quæ fuit Leibnitij ad Oldenburgum Parisij 28 Decemb. 1675 data, & & cujus autographum extat.

Habebis et a me — meam Quadraturam circuli ejusque partium per seriem Numerorum rationalium infinitam, dequa aliquoties scripsi & quam jam plusquam biennio abhinc Geometris hic communicavi.

NB Series de qua aliquoties scripsit (sc. in Epistolis 15 Iulij & 26 Octob 1674) dat arcum ex sinu. Hanc anno 1673 Geometris in Gallia ut suam se communicasse hic dicit. Eandem ab Oldenburgo ut seriem Newtoni mense Aprili præcedente accepit suam esse in Literis mensis Maij non ausus {se} dicere.. Seriem quæ dat arcum ex tangente, quamque hoc anno ab Oldenburgo accepit ut supra, Geometris in Gallia ut suam ante finem ejusdem anni communicavit ut ipse de se in Actis Eruditorum Mensis Aprilis Anni 1691 pag 178 testatus est his verbis. Iam anno 1675 compositum habebam opusculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tempore Lectum. Eodem anno Ia. Gregorius emortuus est. Anno proximo D. Leibnitius postulavit ab Oldenburgo et Collinio methodum Newtoni investigandi seriem quæ dat Arcum ex sinu & seriem reciprocam quæ dat sinum ex arcu; idque per Epistolam sequentem.

Ex Epistola .... desiderio meo. NB. Oblitus est jam D. Leibnitius se series hasce ante annum a D. Oldenburgo accepisse, et unam earum anno 1674 sibi vindicasse

Ex Epistola D. Leibnitij ad D. Oldenburgum, 27 Aug. 1676 data, & a D. Wallisio in lucem edita



Sit QAIF Sector duabus rectis in Centro Q concurrentibus, & curva Conica AIF ad verticem A sive axis extremum perveniente comprehensus. Tangenti verticis AT occurrat tangens IFT Ipsum AT vocemus t, et rectangulum sub semi-latere recto in semilatus transversum sit Vnitas. Erit Sector Hyperbolæ, Circuli vel Elipseos per semilatus transversum divisus $= \frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \&c$ signo ambiguo ± valente + in Hyperbola, - in Circulo vel Ellipsi. Vnde posito quadrato circumscripto 1 erit Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c$. Quæ expressio, jam Triennio abhinc & ultra a me communicata amicis haud dubie omnium possibilium simplicissima est maximeque afficiens mentem. —

Vicissim ex seriebus Regressuum pro Hyperbola hanc inveni Qui seriem

<122v>

Historia brevis methodi serierum ex Monumentis antiquis deducta.

methodum serierum a Newtono in Analysi per æquationes numero terminorum infinitas descriptam D. Barrovius mense Iulio anni 1669 ad D. Collinio misit & Collinius Series in eadem descriptas mox communicavit cum amicis. D. Gregorius sub finem anni 1670 in eandem methodum incidit & initio anni sequentis series plures cum D. Collinio per Epistolas communicavit & licentiam simul dedit easdem cum amicus communicandi. D Leibnitius in Anglia versabatur annis 1671 1672 & 1673 usque ad mensem Martium, deinde Lutetiam Parisiorum profectus, seriem Newtoni pro Arcu ex sinu dato ut suam communicare cæpit sed methodum inveniendi hanc seriem postea quæsivit a Collinio per literas suas ad Oldenburgum datas Interea series plures is a Collinio per Literas Oldenburgi accepit, et cum earum aliquam per transmutationem quandam figurarum demonstrare didicisset eandem ut suam eodem anno communicavit, celatis Oldenburgi Literis.

Et mox [3]series [2]quasdam [1]alias a Newtono acceptas ad se transferre conatus est licet methodum perveniendi ad easdem nondum intelligeret. Monumenta ex quibus hæc desumpta sunt jam subjungimus.

NB Methodus vel Theorema generale de quo agitur in hisce duabus Epistolis, dat seriem pro Sectore vel Arcu ex sinu assumptos, Et ubi ratio Sectoris ad Circulum totum vel Arcus ad Circumferentiam totam habetur, dat etiam circulum totum vel circumferentiam totam. Et hæc est series numerorum rationalium de qua agitur in his Epistolis.

NB. D. Leibnitius series suas ab acceptis diversas esse seque easdem ante annos aliquot invenisse hic asserit, sed series ab acceptis diversas nondum protulit.

NB. D. Leibnitius series acceptas a suis diversas esse hic fatetur, seque suas ante annos aliquot invenisse dicit; at series pro circulo ab acceptis diversas nondum protulit.

demonstrare didicit ante finem anni hujus, idque per transmutationem quandam figurarum, ac Demonstrationem mox communicavit ut ipse in Actis Eruditorum &c.

NB. Hæc scripsit D. Leibnitius quasi series de quibus hic agitur anno superiore ab Oldenburgo minime accepisset & quasi aliquot abhinc Ann**{i}**s scripsis set ad Oldenburgum de serie pro Arcu ex Tangente cujus demonstrationem nunc poliebat. Hoc prætextu seriem pro Arcu ex Tangente ut suam remisit ad Oldenburgum per Epistolam sequentem.

NB D. Leibnitius hic seriem pro arcu ex Tangente se anno superiore ab Oldenburgo accepisse agnoscere debuisset ut id Newtono innotuisset. Hoc

NB D. Seriem pro arcu cujus tangens datur hic descriptam D: Leib se anno superiore ab Oldenburgo accepisse agnoscere debuisset ut id Newtono innotesceret. Cum hoc non fecerit candor ejus in dubium merito vocatur. Dicit quidem se ante tres annos id est anno 1673 seriem hanc cum amicis communicasse: quod verum esse potuit. Sed non dicit se Demonstrationem ejus ante tres annos cum amicis communicasse. Demonstrationem anno superiore communicare cœpit ut ex ipsius verbis supra notavimus. Et qui seriem ante tres annos habuit, demonstrationem vero ante tres annos non habuit, seriem aliunde habuit. D. Leibnitius utique in Anglia diversabatur annis 1671, 1672, & initio anni 1673 Collinius toto hoc tempore Series Newtoni & Gregorij cum amicis mathematice doctis liberrime communicabat. Et D. Leibnitius cum ijsdem commercium habi**{ui}**t deinde Leibnitius anno 1673 in Galliam profectus hujusmodi seriem aliquam vel forte plures cum amicis ibi communica cœpit sed sine demonstrationibus. Anno 1674 gloriabatur in Literis ad Oldenburgum datis se seriem quandam habere pro circumferentia circuli vel etiam pro arcu quovis cujus sinus datur licet ratio arcus ad circumferentiam totam non innotesceret. Vnicam tantum seriem pro circumferentia circuli tunc jactabat; non eam quæ prodit ex tangente data sed eam quæ prodit ex sinu dato; demonstrationem vero postea quæsivit ab Oldenburgo utroque nondum habuit. Si seriem quæ prodit ex tangente tunc demonstrare potuisset, certe hanc prætulisset. Vtramque accepit ab Oldenburgo mense Aprili anni 1675, neutram tunc sibi vindicare ausus est, sed series acceptas a suis, distinxit, et Ab eo tempore seriem pro arcu ex sinu dato sibi arrogare desit. At in demonstrationem quandam particularem seriei pro arcu ex tangente data jam incidens, eandem communicavit cum Gallis eodem anno, et vi demonstrationis hujus eandem ut suam remisit Oldenburgo et Newtono & in lucem tandem emisit celata Epistola qua ipsam ab Oldenburgo acceperat. Vt D. Leibnitius <122r> jus habeat in hanc seriem, probandum est ipsum eandem habuiss antequam accepit ab Oldenburgo, eandem demonstrare potuisse ante annum 1675, eandem et habuisse et demonstrare potuisse ante annum 1671. Aliter jus in eandem non habebit nisi ex dono Collinij et Oldenburgi. Non sufficit candorem D. Leibnitij allegare. Nemo prose ipso testis esse potest. Nemo candidus hoc postulabit contra leges gentium. Probando sunt quæ ipse pro se affirmat: præsertim cum in hac ipsa novissimæ Epistola, is series quasdam alias a Newtono acceptas et abque methodo Regressuum minime inveniendas, ad se traducere conatus fuit, & Newtonum tamen in eadem e**{pist}** mox rogavit ut is explicaret quomodo in Methodo Regressuum se gerat, ut cum ex Logarithmo quærit Numerum. Seriem quæ ex Logarithmo dat Numerum suam esse voluit & mox sui oblitus quærit Methodum qua series hæc ipsa inveniri potuisset. Methodum vero Regressuum duplicem Newtonus in literis proximis 24 Octob 1676 datis exposuit & D. Leibnitius his lectis & relectis tandem anno 1671 Iulij 12^{mo} respondit, se quoque [2]methodo [1]Regressuum altera aliquando usum in veteribus suis schedis reperire: sed cum in exemplo quod forte in manus suas sumpserat, nihil prodijsset elegans, solita impatientia eam porro adhibere neglexisse. Series itaque prædictas per hanc Regressuum methodum minime invenerat. Probandum est quod methodum ipsam olim invenerat. Vir prudens, Vir modestus, Vir candidus Vir justus proprio testimonio de Inventoris jure lites minime movebit. D. Leibnitius jus suum in methodum Serierum aut probare debet aut renunciare.

Methodum vero Regressuum Newtonus duplicem in literis proximis 24 Octob. 1676 datis exposuit, addiditque inversa de Tangentibus Problemata esse in potestate aliaque illis difficiliora ad quæ solvenda usus esset duplici [serierum] methodo una concinniori, alia generaliori. Et utramque complexus est hac sententia. Vna methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione Seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari possunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad eruendos terminos assumptæ seriei.

Leibnitius vero anno proximo Literis hisce lectis et relectis respondit quod altera duarum Methodorum Regressuum se quoque aliquando usum in veteribus schedis reperit: sed cum in exemplo quod forte in manus suas sumpserat, nihil prodijsset elegans, solita impatientia eam porro adhibere neglexisse. Series itaque prædictas per hanc Regressuum methodum minime inveneerat. Probandum est quod methodum ipsam olim inveneerat, quodque methodum quæ consistit in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita invenerat ante annum 1677. Vir prudens, Vir modestus, Vir candidus, Vir justus proprio nixus testimonio de Inventonis jure lites minime movebit. D. Lebnitius si candidus si probus haberi velit jus suum in methodum serierum aut probare debet aut renunciare.

<123r>

Historia brevis Methodi serierum ex Monumentis antiquis desumpta.

Methodum Serierum a Newtono in ejus Analysi per Æquationes numero terminorum infinitas descriptam D. Barrovius mense Iulio Anni 1669 ad D. Collinium misit & D. Collinius series in eadem descriptas mox communicare cæpit cum amicis. D. Iacobus Gregorius Abredonenis acceptis aliquot seriebus, sub finem anni 1670 in eandem methodum incidit & initio anni sequentis series plures cum D. Collinio per Epistolas communicavit eique licentiam simul dedit easdem cum amicis communicandi. D. Leibnitius in Anglia versabatur Annis 1671, 1672 & 1673 usque ad Mensem Martium, deinde Lutetiam Parisiorum profectus, seriem Newtoni pro Arcu ex sinu dato ut suam communicare cœpit, sed methodum inveniendi hanc seriem postea quæsivit a Collinio per literas suas ad Oldenburgum datas. Interea series plures is a Collinio per Literas Oldenburgi accepit, et cum earum aliquam per transmutationem quandam figurarum demonstrare didicisset eandem ut suam eodem anno communicavit celatis Oldenburgi Litteris. Et alias quasdam series a Newtono mox acceptas ad se transferre conatus est, licet methodum perveniendi ad easdem nondum didicisset. Ex quibus omnibus patet inventionem methodi serierum ad D. Leibnitium nullatenus pertinere. Monumenta ex quibus hæc desumpta sunt jam sequuntur.

Ex Epistola D. Iacobi Gregorij ad D. Collins 15 Februarij Anno 167$\frac{0}{1}$ data, cujus extat Autographum.

Ex quo Epistolam ad te dedi, tres a te accepi, unam Decem 15, alteram Decem. 24, tertiam 21 Ianuarij nuper elapsi datam. Quod attinet Newtoni methodum universalem, aliqua ex parte, ut opinor, mihi innotescit, tam quoad Geometricas quam Mechanicas Curvas. Nihilo tamen minus ob series ab me missas gratias habeo, quas ut remunerem, mitto quæ sequuntur.

Sit Radius r, Arcus a, Tangens t, secans s, et erit
$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} + - \&c$. Eritque
$t = a + \frac{a^3}{3r^3} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \&c$. Et
$s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7} + \&c$

NB. Exemplar hujus Epistolæ missum fuit Lutetiam Parisorum mense Iunio Anni 1676, cum D. Leibnitio communicandum, qui utique postulaverat ut Collectanea Gregorij anno superiore emortui eo mitterentur.

Ex Epistolis quinque quæ leguntur in Libro Epistolarum Regiæ Societatis N. 7, pag. 93, 110, 216, 235 & 189; et quarum prima secunda et quinta reperiuntur impressæ in Tomo tertio Operum Mathematicorum Wallisij.

Ex primæ quæ fuit Leibnitij ad Oldenburgum 15 Iulij 1674 data

Alia mihi Theorema sunt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile est, cujus ope Area Circuli vel sectoris ejus dati exacte exprimi potest per seriem quandam numerorum rationalium continue productam in infinitum.

Ex secunda quæ fuit D. Leibnitij ad D. Oldenburgum 26 Octob. 1674 data

Ratio Diametri ad Circumferentiam exacte a me exhiberi potest per rationem non quidem Numeri ad Numerum (id enim foret absolute invenisse) sed per rationem Numeri ad totam quandam seriem Numerorum rationalium valde simplicem & Regularem. Eadem methodo [id est, eodem Theoremate generali] etiam arcus cujuslibet cujus sinus datur, Geometrice exhiberi per ejusmodi seriem valor potest, nullo ad <123v> integræ circumferentiæ dimensionem recursu: ut ædeo necesse non sit Arcus rationem ad circumferentiam nosse.

NB. Methodus vel Theorema generale de quo agitur in hisce duabus Epistolis dat seriem pro Sectore vel Arcu ex sinu assumpto, et ubi ratio Sectoris ad Circulum totum vel Arcus ad Circumferentiam totam habetur, dat etiam Circulum totum vel Circumferentiam totam. Et hæc est Series numerorum rationalium de agitur in his Epistolis.

Ex Epistola tertia quæ fuit Oldenbergi ad Leibnitium 15 Apr. 1675 data.

Posita pro radio unitate, datoque x pro sinu, ad inveniendum z arcum, series hæc est. $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \&c$ in infinitum. Et extracta radice hujus æquationis methodo symbolica, si dederis z pro arcu, ad inveniendum x sinum series hæc est, $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 + \&c$. Atque hæc series facile continuatur in infinitum. Prioris beneficio ex sinu $30^{\mathrm{grad.}}$ Ceulenij numeri facile struuntur.

Consimiliter si ponas radium R et B sinum arcus, Zona inter diametrum et chordam illi parallelam est $= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \&c$. Atque eadem series mutatis signis termini secundi quarti et sexti &c inservit assignandæ areæ Zonæ æquilateris Hyperbolæ $= 2RB + \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} + \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} + \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \&c$

Rursum dato Radio R et sinu verso sive sagitta a, ad inveniendam aream segmenti resecti a chorda, pone b^2 pro $2Ra$, et erit segmentum $= \frac{4ba}{3} - \frac{2a^3}{5b} - \frac{a^5}{14b^3} - \frac{a^7}{36b^5} - \frac{5a^9}{352b^7} - \&c$ Et arcus integer$= 2b + \frac{a^3}{3b} + \frac{3a^4}{20b^3} + \frac{5a^6}{56b^5} + \frac{35a^8}{576b^7} + \&c$.

Duæ hæ series D. Gregorio debentur, quas exhibuit ex eo tempore quo usus est hac methodo; quod ab ipso aliquot post annis factum, post quam scilicet intellexerat D. Newtonum generatim eam applicasse. Exinde quoque ad nos misit series consimiles ad Tangentes naturales ex earundem arcubus, et conversim, obtinendum. Ex. gr. Pone radium$= r$, arcum a, tangentem t; erit $t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \&c$. Et conversim ex tangente invenire arcum ejus, $a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \&c$

Atque hoc factum cum vides, facile credideris, posse eadem methodo æque facile ex Arcu inveniri Sinum vel Tangentum Logarithmicum absque inventione naturalis et conversim. Pronum quoque tibi fuerit credere Methodum hanc applicari posse ad rectificationem quarumlibet Curvarum particulatim vero ad lineam Quadratricem, & ad inveniendam Aream illius Figuræ: id quod antehac nulla demum cum methodo fuit præstitum. &c.

NB. Hanc Epistolam D. Leibnitius se accepisse agnovit per Epistolam sequentem , sed eandem subinde celavit quasi non accepisset; nulla ejus deinceps vel in Epistolis vel in Actis Eruditorum vel alibi mentione unquam facta.

Ex Epistola quarta, quæ fuit D Leibnitij ad D Oldenburgum cum Newtono communicanda quæque dabatur 20 Maij 1675 & cujus Autographum extat.

Literas tuas multa fruge Algebraica refertas accepi pro quibus tibi et doctissimo Collinio gratias ago. Cum nunc præter ordinarias curas mechanicis imprimis negotijs distrahar non potui examinare series quas misistis ac cum meis comparare. Vbi fecero perscribam tibi sententiam meam. Nam aliquot jam anni sunt quod inveni meas via sic satis singulari

NB. D. Leibnitius series acceptas a suis diversas esse hic fatetur, seque suas ante annos aliquot invenisse dicit, at series pro circulo ab acceptis diversas nondum protulit.

<124r>

Ex Epistola quinta quæ fuit D. Leibnitij ad D. Oldenburgum quæque Parisijs 28 Decem 1675 data fuit et cujus autographum extat.

Habebis et a me — meam Quadraturam Circuli ejusque partium per seriem numerorum rationalium infinitam, de qua aliquoties scripsi et quam jam plusquam biennio abhinc Geometris hic communicavit.

NB. Series de qua aliquoties scripsit (sc. in Epistolis 15 Iulij & 26 Octob. 1674) dat arcum ex sinu ut supra. Hanc se anno 1673 Geometris in Gallia ut suam communicasse hic dicit. Seriem quæ dat Arcum ex Tangente, quamque hoc Anno acceperat ab Oldenburgo ut supra, & suam esse tunc minime noverat, demonstrare didicit ante finem anni hujus idque per transmutationem quandam figurarum ac Demonstrationem mox communicavit cum amicis ut ipse in Actis Eruditorum Mensis Aprilis Anni 1691 pag. 178 testatus est his verbis. Iam anno 1675 compositum habebam Opusculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tempore lectum. Eodem anno D. Iacobus Gregorius emortuus est. Anno proximo D. Leibnitius postulabat ab Oldenburgo et Collinio methodum Newtoni investigandi seriem quæ dat arcum ex sinu & seriem reciprocam quæ dat sinum ex Arcu; idque per Epistolam sequentem.

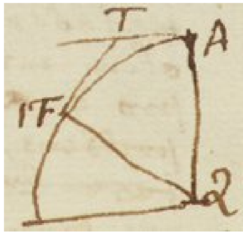
Ex Epistola D. Leibnitij ad Oldenburg, Parisijs 12 Maij Anno 1676 data, cujus Autographum in Scrinijs Regiæ Societatis asservatur, cum Notis manu Oldenburgi in tergo scriptis.

Cum Georgius Mohr Danus in Geometria et Analysi versatissimus nobis attulerit communicatam sibi a Doctissimo Collinio vestro expressionem relationis inter Arcum et Sinum per Infinitas Series sequentes: Posito Sinu x Arcu z Radio 1
$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \&c$
$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \&c$
Hæc INQVAM, cum nobis attulerit illæ, quæ mihi valde ingeniosa videntur, et posterior imprimis series elegantiam quandam singularem habeat, ideo rem gratam mihi feceris, vir clarissime, si demonstrationem transmiseris. Habebis vicissim mea ab his longe diversa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc Annis ad te perscripsisse credo, Demonstratione tamen non addita quam nunc polio. Oro ut Cl. Collinio multam a me salutem dicas: is facile tibi materiam suppeditabit satisfaciendi desiderio meo.

NB. Hæc scripsit D. Leibnitius quasi series de quibus hic agitur, anno superiore ab Oldenburgo minime accepisset, et quasi aliquot abhinc annis scripsisset ad Oldenburgum de serie pro Arcu ex Tangente cujus seriei demonstrationem nunc poliebat. Hoc prætextu seriem illam ut suam remisit ad Oldenburgum per Epistolam sequentem

Ex Epistola D. Leibnitij ad D. Oldenburgum 27 Aug. 1676, data, et a Wallisio in lucem edita.

Sit QAIF Sector duabus rectis in centro Q concurrentibus, et Curva conica AIF ad verticem A sive Axis extremum perveniente comprehensus. Tangenti verticis AT occurrat Tangens IFT. Ipsum AT vocemus t, et rectangulum sub semi-latere recto in semilatus transversum sit Vnitas. Erit Sector Hyperbolæ, Circuli, vel Ellipseos per semilatus transversum divisus $= \frac{t}{1} \pm \frac{t3}{3} + \frac{t5}{5} \pm \frac{t7}{7}\&c$. signo <124v> ambiguo ± valente + in Hyperbola, - in Circulo vel Ellipsi. Vnde posito quadrato circumscripto 1, erit Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \&c$. Quæ expressio, jam triennio abhinc et ultra a me communicata amicis haud dubie omnium possibilium simplicissima est, maximeque afficiens mentem. &c



Vicissim ex seriebus Regressuum pro Hyperbola hanc inveni. Si sit numerus aliquis Vnitate minor $1-\mathrm{m}$, ejusque Logarithmus Hyperbolicus l. Erit $\mathrm{m}=\frac{1}{1}-\frac{\mathrm{ll}}{1\times 2}+\frac{\mathrm{l}^3}{1\times 2\times 3}-\frac{\mathrm{l}^4}{1\times 2\times 3\times 4}+$ &c. Si numerus sit major unitate, ut $1+\mathrm{m}$ tunc pro eo inveniendo mihi etiam prodijt Regula quæ in Newtoni Epistola expressa est; scilicet erit $\mathrm{n}=\frac{1}{1}+\frac{\mathrm{l}^2}{1\times 2}+\frac{\mathrm{l}^3}{1\times 2\times 3}+\frac{\mathrm{l}^4}{1\times 2\times 3\times 4}+\&c$. Quod Regressum ex Arcubus attinet incideram ego directe in Regulam quæ ex dato Arcu sinum complementi exhibet &c

Sed desideraverim ut Clarissimus Newtonus nonnulla quoque amplius explicet; ut — quomodo in Methodo Regressuum se gerat, ut cum ex Logarithmo quærit Numerum. Neque enim explicat quomodo id ex methodo sua derivetur.

NB. Seriem pro arcu cujus Tangens datur hic descriptam D. Leibnitius se anno superiore ab Oldenburgo accepisse agnoscere debuisset ut id Newtono innotesceret. Cum hoc non fecerit candor ejus in dubium merito vocatur. Dicit quidem se ante tres annos, id est anno 1673 seriem hanc cum amicis communicasse; quod versum esse potuit. Sed non dicit se Demonstrationem ejus ante tres annos cum amicis communicasse. Demonstrationem anno superiore communicare cœpit ut ex ipsius verbis supra notavimus: et qui seriem ante tres annos habuit Demonstrationem vero ante tres annos non habuit, seriem aliunde habuit. Vt D. Leibnitius jus habeat in hanc seriem, probandum est ipsum eandem habuisse antequam accepit ab Oldenburgo, eandem demonstrare potuisse ante annum 1675, eandem et habuisse et demonstrare potuisse ante annum 1671. Aliter jus nullum in eandem habebit nisi ex dono Collinij et Oldenburgi. Non sufficit candorem Leibnitij allegare. Nemo pro se ipso testi esse potest. Nemo candidus hoc postulabit contra leges gentium. Probanda sunt quæ ipse pro se affirmat: præsertim cum in hac ipsa Epistola, is series tres alias a Newtono acceptas, et absque metho{d}o Regressuum minime inveniendas, tanquam a se prius inventas sibi arrogare conatus fuit, et methodum Regressuum tamen nondum intellexit. Newtonum enim in eadem epistola mox rogavit ut is explicaret quomodo in methodo Regressuum se gerat ut cum ex Logarithmo quærat numerum seriem quæ ex Logarithmo dat Numerum, suam esse voluit, et mox sui oblitus quærit methodum qua series hæc ipsa inveniri potuisset.

Methodum vero Regressuum Newtonus duplicem in Literis proximis 24 Octob. datis exposuit, addiditque inversa de Tangentibus Problemata esse in potestate alique illis difficiliora, ad quæ solvenda usus esset duplici [serierum] methodo una concinniore, altera generaliori. Et utramque complexus est hac sententia Vna methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari possunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad eruendos terminos assumptæ seriei.

<125r>

D. Leibnitius vero anno proximo, Literis hisce lectis et relectis respondit quod se quoque aliquando usum esse altera [duarum methodorum] in veteribus schedis reperit: sed cum nihil prodijsset elegans, solita impatientia eam porro adhibere neglexisse. Series itaque tres prædictas, utpote elegantes, per hanc methodum Regressuum minime invenerat, methodum aliam Regressuum non habuerat. Sed nec ipsum hac methodo in veteribus schedis usum esse concedendum est. Ipse pro se testis esse non potest. Probandum est quod methodum aliquam Regressuum prius invenerat quam a Newtono acceperat. Nam licentia rapiendi aliorum inventa sub candoris prætextu, nemini concedendum est.

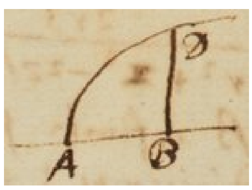
Tandem D. Leibnitius in Actis Eruditorum Anni 1693, pag 178 methodum Newtoni solvendi Problemata per assumptionem seriei pro quantitate qualibet incognita in lucem edidit ut suam & a Newtono primum inventam fuisse nondum agnovit. Certe Leibnitius Anno 1676 ubi scripsit multa esse Problemata quæ ad æquationes aut quadraturas reduci nequeunt, qualia sunt inversa Tangentium Problemata, hanc methodum non invenerat: Newtonus autem eandem hoc anno in Epistola prædicta descripsit ut supra.

Constat igitur quod D. Leibnitius nullum habeat jus in methodum serierum. Nam transmutatio figurarum quam jactat non est methodus serierum convergentium. Est Lemma quoddam ad inveniendum momentum areæ per seriem quadrandæ. Et hoc Lemma momentum dedit more vulgari, & post inventionem methodi differentialis nullius amplius fuit usus.

<126r>

Out of M^{r} Newton's Treatise de Analysi per æquationes infinitas. sent by D^{r} Barrow to M^{r} Collins the 31th of Iuly 1669.

♁ < insertion from f 127r > ♁ Methodum generalem quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum seriem mensuranda olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonstratam habes.



Basi AB Curvæ alicujus AD, sit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur $\mathrm{AB}=\mathrm{x}$, & $\mathrm{BD}=\mathrm{y}$, & sint a, b, c, &c quantitates datæ, & m, n numeri integri. Deinde

Reg I

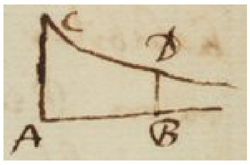
Si $\mathrm{ax}^{\frac{m}{n}}=\mathrm{y}$, erit $\frac{\mathrm{an}}{\mathrm{m+n}}\mathrm{x}^{\frac{\mathrm{m+n}}{\mathrm{n}}}=\text{areæ ABD}$. Vt si $\mathrm{x}^2=\mathrm{y}$, erit $\frac{1}{3}\mathrm{x}^3=\mathrm{ABD}$.

Reg II.

Si valor ipsius y ex pluribus ejusmodi terminis componitur, area etiam componetur ex areis quæ a singulis terminis emanant.

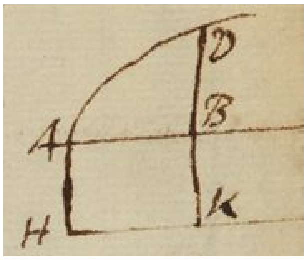
Vt si $11+\mathrm{xx}=\mathrm{y}$, ac dividend{o} $\mathrm{y}=1-\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^4-\mathrm{x}^6+\mathrm{x}^8-\&c$ per Regulam secundam, erit $\mathrm{ABDC}=\mathrm{x}-\frac{1}{3}\mathrm{x}^3+\frac{1}{5}\mathrm{x}^5-\frac{1}{7}\mathrm{x}^7+\frac{1}{9}\mathrm{x}^9-\&c$

And after several instances of finding the areas of Curves by infinite series he adds. Et hæc de Areis Curvarum investigandis dicta sufficiant &c. < text from f 126r resumes >



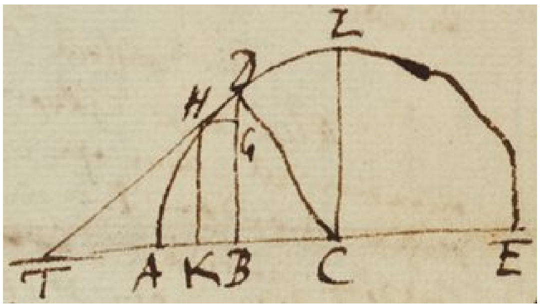
Et hæc de areis curvarum investigandis dicta sufficiant. Imò cum problemata omnia de Curvarum longitudine, de quantitate et superficis solidorum deque centro gravitatis, possunt eo tandem reduci ut quæratur quantitas superficiei planæ lineâ curvâ terminat**{æ}**, non opus est quicquam de ijs adjungere. In istis autem quo ego operor modo dicam brevissime

Sit ABD Curva quævis et AHKB rectangulum cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam areas ABD et AK describere; et quod BK(1) sit MOMENTVM quo AK(x) et BD(y) MOMENTVM quo ABD gradatim AVGETVR; et quod ex MOMENTO BD PERPETIM DATO, possis, per præcedentes regulas aream ABD ipso descriptam investigare, sive cum AK(x) MOMENTO 1 descripta conferre.



Iam qua ratione superficies ABD ex MOMENTO SVO PERPETIM DATO per præcedentes regulas ELICITVR, eâdem QVÆLIBET ALIA QVANTITAS EX MOMENTO SVO DATO ELICIETVR. Exemplo res fiet clarior

Sit ADLE circulus cujus arcus AD longitudo est indaganda. Duto tangente DHT et completo indefinite parvo rectangulo HGBK et posito $\mathrm{AE} = 1 = 2\,\mathrm{AC}$; erit ut BK sive GH momentum basis AB (x), ad HD momentum arcus AD∷BT.DT∷BD ($\sqrt{\mathrm{x}-\mathrm{xx}}$): DC($\frac{1}{2}$)∷1(BK): $\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}-\mathrm{xx}}}$ (DH) Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}-\mathrm{xx}}}$ sive $\frac{\sqrt{\mathrm{x}-\mathrm{xx}}}{2\mathrm{x}-\mathrm{xx}}$ est MOMENTVM arcus AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}\mathrm{x}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\mathrm{x}^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}\mathrm{x}^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}\mathrm{x}^{\frac{5}{2}} - \frac{35}{256}\mathrm{x}^{\frac{7}{2}} + \frac{83}{512}\mathrm{x}^{\frac{9}{2}} + +$&c. Quare per Regulam secundam, longitudo arcus AD est $\mathrm{x}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\mathrm{x}^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}\mathrm{x}^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}\mathrm{x}^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}\mathrm{x}^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}\mathrm{x}^{\frac{11}{2}} + \&\mathrm{c}$.



Non secus ponendo CB esse x et radium CA esse 1, invenies arcum LD esse $\mathrm{x} + \frac{1}{6}\mathrm{x}^3 + \frac{3}{40}\mathrm{x}^5 + \frac{5}{112}\mathrm{x}^7 + \&\mathrm{c}$

Sed notandum est quod unitas ista quæ pro momento ponitur est superficies cum de solidis & linea cum de superficiebus et punctum cum de **{**lineis**}** (ut in hoc exemplo) agitur.

And after some more instances of the use & extent of this method he adds Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc methodus isque varijs modis sese non extendit — Et quicquid vulgaris Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possibile) perficit hæc per æquationes infinitas semper perficiat: ut nil dubitaverim nomen Analysis etiam huic tribuere Ratiocinia quippe in hac non minus certa sunt quam in illa, nec æquationes minus exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines et rationis finitæ nec designare neque ita concipere possimus ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus: sicut radices surdæ finitarum æquationum nec numeris nec quavis arte Analytica ita possunt exhiberi ut alicujus quantitas a reliquis distincta exacte cognoscatur. Denique ad Analyticam merito pertinere censeatur cujus beneficio curvarum areæ, & longitudines & (id modo*a*[1] fiat) exacte et Geometrice [æquationibus scilicet infinitis in finitas migranti <126v> bus] determinentur. Sed ista narrandi non est locus.

Respicienti duo præ reliquis demonstranda occurrunt. Sit itaque curvæ alicujus Here write on to the words Quare e contra, si $\mathrm{ax}^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}} = \mathrm{y}$, erit $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}\mathrm{ax}^{\frac{\mathrm{m}+\mathrm{n}}{\mathrm{n}}} = \mathrm{z}$. Q.E.D.

Hinc in transitu notetur modus quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ sunt cognitæ, possunt inveniri; sumendo nempe quam libet æquationem pro relatione inter aream z et basem x ut inde quæratur applicata y [momentum scilicet areæ fluentis z]. Vt si supponas $\sqrt{\mathrm{aa}+\mathrm{xx}} = \mathrm{z}$, *b*[2]ex calculo invenies $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{Vaa+xx}} = \mathrm{y}$. Et sic de reliquis.

Let the Letter of Slusius about tangents in answer to $\mathrm{M_r}$ Collins, dated in 1672 or 1673 be added

Ex Epistola D. Leibnitij ad D. Oldenburgium data Lutetiæ Parisiorum 15 Iuly 1674.

Alia mihi Theoremata sunt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile est, cujus ope Area circuli vel sectoris ejus dati, exacte exprimi potest per seriem quandam Numerorum rationalium continue productam in infinitum. Sed et Methodos quasdam Analyticas habeo generales admodum et late fusas quas majoris facio quam Theoremata particularia et exquisita.

Ex Epistola D. Leibnitij ad D. Oldenburgium data Lutetiæ Parisiorum 26 Octob 1674

Ratio diametri ad circumferentiam exacte a me exhiberi potest per rationem non numeri ad numerum (id enim foret absolute invenisse;) sed per rationem Numeri ad totam quandam seriem numerorum rationalium valde simplicem & regularem. Eadem methodo etiam arcûs cujuslibet cujus sinus datur, Geometrice exhiberi per ejusmodi seriem valor potest.

Ex Epistola D. Leibnitij ad D. Oldenburgiam data Ian vel Feb 1675

Methodum celeberrimi Newtoni radices æquationum inveniendi per instumentum Credo differre a mea. Neque enim video, in mea, quid aut Logarithimi aut circuli concentrici conferant.

Scripsisti aliquoties, Vestrates omnium Curvarum dimensiones per appropinquationem dare. Velim nosse, an possint dare Geometrice Dimensionem Curvæ [absque] Ellipsos vel Hyperbolæ quadratura. This Epistole is copied in the books of the R. Society & was published by D. Wallis from another copy without a Date.

Ex Epistola D. Leibnitij ad D Oldenburgium data Paris. 28 Decem. 1675

Quod D. Tschurnhausium ad nos misisti fecisti pro amico. Multum enim ejus consuetudine delector &c

Habebis et a me Instrumentum Æquationes omnes Geometricas construendi unicum et meam quadraturam Circuli ejusque partium per seriem Numerorum rationalium infinitam; de qua aliquoties scripsi, et quam jam plusquam biennio abhinc Geometris hic communicavi.

<127r>

Out of M^r Newtons treatise de Analysi per Æquationes infinitas.

Out of M^r Newton's first Letter sent to M^r oldenbug 13 Iune 1676 & by M^r Oldenburgh to M^r Leibnitiz 26 Iune following

Ex his videre est quantum fines Analyseos per hujusmodi infinitas æquationes ampliantur: quippe quæ earum beneficio ad omnia pene dixerim, problemata (si numeralia Diophanti & similia excipias) sese extendit. Non tamen omnino universalis evadit nisi per ulteriores quasdam methodos eliciendi series infinitas. Sunt enim quædam problemata, in quibus non liceat ad Series Infinitas per divisionem vel Extractionem Radicum simplicium affectarumve, pervenire. Sed quomodo in istis casibus procedendum jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere quæ circa Reductionem Infinitarum Serierum in finitas ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius scribo quod hæ speculationes diu mihi fastidio esse cœperunt, adeo ut ab ijsdem jam per quinque fere annos abstinuerim.

Out of M^r Leibnits answer dated from Paris Aug 27 1676

Mercator Figuras rationales . . . . . ad infinitas series reducere docuit per Divisiones Newtonus autem per radicum extractiones. Mea methodus Corollarium est tantum doctrinæ generalis de Transformationibus cujus ope Figura proposita quælibet quacunque æquatione explicabilis transmutatur in aliam Analyticam æquipollerntem; talem ut, in ejus Æquatione, ordinatæ dimensio non ascendat ultra Cubum aut Quadratum, aut etiam simplicem Dignitatem, seu Infimum gradum. Ita fiet ut quælibet Figura vel per Extractionem rædicis Cubicæ vel Quadraticæ, Newtoni more; vel etiam methodo Mercatoris, per simplicem Divisionem ad series infinitas reduci queat . . . . AQCA sit quadrans Circuli: Radius $\mathrm{AQ} = \mathrm{r}$; Abscissa $\mathrm{A_1B} = \mathrm{x}$: Ordinata $\mathrm{{}_1B_1D} = \mathrm{y}$: Æquatio pro circulo $\mathrm{2rx - xx = yy}$. Ducatur recta $\mathrm{A_1D}$, producaturque donec ipsi QC etiam productæ occurrat in $\mathrm{{}_1N}$: et $\mathrm{Q_1N}$ <127v> vocetur z. Et erit $\mathrm{A_1B}$ seu $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{2r^3}}{\mathrm{r^2+x^2}}$: et $\mathrm{{}_1B_1D}$ sive $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{2zr^2}}{\mathrm{r^2+z^2}}$. Eodem modo, ducta $\mathrm{A_2D_2N}$: si $\mathrm{Q_2N = Z - B}$ (posita scilicet $\mathrm{{}_1N_2N = B}$) erit $\mathrm{A_2B} = \frac{\mathrm{2r^3}}{\mathrm{r^2+x^2-2z\beta+\beta^2}} - \frac{\mathrm{2r^3}}{\mathrm{r^2+z^2}}$. Sive posita β infinite parva (post destructiones & divisiones,) erit $\mathrm{{}_1B_2B} = \frac{\mathrm{4r^3z\beta}}{\mathrm{[2]r^2+z^2}}$. Habita ergo recta $\mathrm{{}_1B_1D}$, et recta $\mathrm{{}_1B_2B}$ habitur valor rectanguli $\mathrm{{}_1D_1B_2B}$, multiplicatis eorum valoribus in se invicem; habebitur inquam $\frac{\mathrm{8r^5zz\beta}}{\mathrm{[3]r^2+z^2}}$. pro valore Rectanguli $\mathrm{{}_1D_1B_2B}$.[3]

Sit jam Curvæ ${}_1P_2P_3P$ &c natura pro arbitrio assumpta talis, ut Ordinata ejus ${}_1N_1P$ (ex data Abscissa Q_1N {sioe} 2) sit $\frac{\mathrm{8r^5z^2}}{\mathrm{[3]r^2+z^2}}$. Ideo, quoniam $\mathrm{{}_1N_2N} = \beta$, erit rectangulum $\mathrm{{}_1P_1N_3N_3P_2P_1PP}$ æquale spatio Circulari respondenti $\mathrm{{}_1D_1B_3B_3D_2D_1D}$. Est autem quælibet Ordinata NP rationalis, ex data Abscissa QN; quia posita $\mathrm{QN} = 2$, Ordinata NP est $\frac{\mathrm{8r^5z^2}}{\mathrm{[3]r^2+z^2}}$ sive $\mathrm{8r^5z^2r^6 + 3r^4z^2 + 3r^2z^4 + z^6}$. Ergo ipsa per infinitam seriem Integrorum exprimi potest dividendo. Et spatium labibus Ordinalis comprehensum æquipollens circulari, infinita serie numerorum rationalium, methodo Mercatoris Quadrari potest.

Sed desideraverim ut Clarissimus Newtonus nonnulla quoque amplius explicet Vt originem Theorematis quod initio ponit: Item, Modum quo quantitates p, q, r in suis operationibus invenit; ac denique quomodo in methodo regress{io}num se gerat; ut cum ex Logarithmo quærit numerum. Neque enim explicat quomodo id ex Methodo sua derivetur.

Nondum mihi licuit ejus Literas qua merentur diligentia legere: quoniam tibi 2 vestigio respondere volui. Vnde non satis nunc quidem affirmare ausim annon nonulla eorum quæ suppressit ex sola earum lectione consequi possim. Sed optandum tamen foret ipsum ea potius supplere Newtonum.

Quod dicere videmini plerasque difficultates (exceptis Problematibus Didphantæis) ad series infinitas reduci: id mihi non videtur. sunt enim multa usque adeo mira & implexa, ut neque ab æquationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia sunt (ex multis alijs) Problemata methodi langentium inveræ Quæ etiam Cartesius in potestate non esse fassus est.[4]

<128bis(r)>

then the differential tho not necessary to the Method. For tho the second Volume of the works of Dr Wallis was published in the year 1693 yet the first Volume was not published till the year 1695 & the Editors of the Acta Eruditorum received both together & gave account of both in the year 1696. The Marquess de l'Hospital tells us that where Dr Barrow left off Mr Leibnitz went on & that he improved the Doctors method by shewing how to exclude fractions & surds, but he did not know that I gave Mr Leibnitz notice of this improvement in my Letters of 10 Decem 1672 & 24 Octob. 1676. Had he known this, he would not have said that Mr Leibnitz did me justice in acknowledging only that I found the method apart.

<128bis(v)>

Out of a Paper of M{illeg} Acta Eruditorum fo{illeg}

Qui calculum Barro**{illeg}** elementorum Calcul**{illeg}** adumbravit A inibi conttum ign ab e**{illeg}**

<128r>

1889. 760000

Out of a Letter of Mr Oldenburgh to Mr Leibnitz dated the 30th of September 1675, a copy of which is extant in the hand of Mr Oldenburgh, entred in the books of the R. Society N.7, p. 159 & which was written in answer to the former.

Scriptum quoddam Belgicum Belga quidam Georgius Moor vocatus . . . . Collinius ipsi communicavit.

[5]Out of a Letter of Mr Leibnitz to Mr Oldenburgh dated at Parish the 12th of May 1676 & found amongst the papers of the R. Society in the original hand of the author with notes on the back side in the hand of Mr Oldenburgh.

Cum Georgius Mohr Danus . . . . satisfaciendi desiderio meo.

Vpon the receipt of the Letter of Mr Leibnits dated the 12th of May Mr Oldenberg & Mr Collins sollicited Mr Newton for an account of his method of infinite series: Which occasioned his two Letters dated Iune 13th & October 24th 1676, with Mr Leibnits answers dated the first at Paris the $\frac{17}{27}$th of August 1676, the second at Hanover the 21th of Iune 1677, & a supplement to the second answer dated also at Hanover the 12th of Iuly 1677, & a Letter of Mr Collins to Mr Newton dated the 5t of March 167$\frac{6}{7}$, all printed by Dr Wallis.

Et Cassitrus ipse 3282590

[6]Out of a Letter of Mr Collins to Mr Oldenburgh to be sent to Mr Leibnitz at Paris: a copy of which was found in the hand writing of Mr Collins amongst his papers & dated the 14th of Iune 1676.

In answer to Mr Leibnitz Letter of the 12th of May .... was but as dawning to noon day.

[7]

[8]Out of a Letter of Mr Collins to Mr David Gregory the brother of Mr Iames Gregory newly deceased, dated the 11th of August 1676, a copy of which is extant in the handwriting of Mr Collins.

I have drawn up an account of the Letter commerce . . . . as himself acknowledgeth in his Letter of the 19th of December 1670.

Nam tarditas Penduli sub Æquatore defectum gravitatis arguit, et quo leviore est materia eo major esse debet altitudo ejus ut pondere suo materiam sub polis in æquilibrio sustineat

<128v>

0	3.7,47	56912	
10	3.7,52	56935	
20	3.7,69	56999	
30	3.7,95	57098	
40	3.8,27	57220	
49	3.8,56	57336	$13.72 :: \frac{1092}{1000} . 17\frac{1}{6}$ $\frac{103\times12}{13}$
50	3.8,60	57349	
60	3.8,92	57470	
70	3.9,17	57569	
80	3.9,34	57633	
90	3.9,40	57657	

Constat autem per hanc Tabulam

Iam vero Astronomi aliqi &c

Deinde anno 1682 &c

Posthæc D. Couplet filius &c

Annis proximis (1699 & 1700) D. Des Hayes

Ano 1704 P. Fenelleus invenit &c

Latutudo autem Paraibæ ..... & excessus Longitudinis &c

Observavit utique D. Picartus .... et inter hos limites quantitas mediocris est $2\frac{9}{40}$ linearum. Propter caloris locorum in zona torrida negligamus $\frac{9}{40}$ partes lineæ et manebit differentia duarum linearum

Et cum differentia illa ex hypothesi quod Terra ex materia uniformiter densa constat sit tantum $1\frac{95}{1000}$ lineæ: excessus altitudinis Terræ ad Æquatorem supra altitudinem ejus ad polos qui erat milliarium $17\frac{1}{6}$ jam aullus in ratione differentiarum fiet milliarium $31\frac{1}{3}$. Nam quo tardior est osculatio penduli sub æquat. eo minor est vis gravitatis, et quo minor est vis gravitatis sub æquatore eo altior debet esse materia ut pondus ejus æquale sit ponderi materiæ sub Polis. [Ex hypothesi vero quod Pendulum sub Æquatore ad minuta secunda oscillans superat. Pendulum isochronum sub Polis longitudine duarum linearum, longitudines Pendulorum isochronorum & mensuræ graduum in singulis Terræ regionibus eæ erunt quas Tab. sequens exhibet.]

<129r>

$57284\frac{1}{2}$

57284

0	0000	0,00	3.6,555	56515	7,46325	3 . 7,46	3.7,463	56907
5	015192	,0,2688	3.6,582		747792	3 . 7,48	7,478	56913
10	060307	,1,0642	3.6,662		752137.	3 . 7,52	7,521	56930
15	133975	,236841	3.6,792		759236	3 . 7,59	7,592	56957
20	253456	4,1284	3.6,968		768872	3 . 7,69	7689	56995
25	357212	6,3034	3.7,186		780751	7,81	7808	57041
30	500000	8,8230	3.7438	56858	7∟945	7,95	7945	57095
35	657980	1,1,6173	3.7,717		8∟0977	8,10	8098	57154
40	826352	1,4,493	3.80137		8∟2596	8,26	8260	57218
45	1000000	1,7,646	3.8,3201	57200	8∟427	843	8427	57283
50	1173648	2,0799	3.8,627		8∟5943	8.60	8,594	57348
55	1342020	2,3675	3.8,923		8∟7563	8,76	8,756	57412
60	1500000	2,64690	3.9202	57543	8∟90886	8,91	8,909	57471
65	1642788	28989	3.9,454		9,0465	9,05	9,046	57525
70	1766044	3,1164	3.9672		91653	9,17	9,165	57571
75	1866025	3,2928	3.9,848		92616	9,26	9,262	57602
80	1939693	3,4228	3.9,978		93326	933	9,333	57626
85	1984808	3,4923	3.10,058		93760	938	9,376	57653.
90	2000000	3,5292.	3.10,085	57886	3.9∟39073	939	9,391	57659
49	1139173		3.8,56567		8,56084	8,56	8,561	57335
48	1104528		3.8,50456		8,5274	8,53	8,528	57322
47	1069756		3.8,4423		84939	8,49	8,494	57309
46	1034900		3.8,38084	57222	8,4604	8,46	8,461	57296
45	10000000	1,7646.	3.8,3201	57200	3.8∟427	8,43	8,427	57283
48.50	1133399	2,0000	3.8,55555	57292	3.85555	8,56	8,556	57292

500000(44115

34645 11334

5774 2

45336

4664

30384(2683

22668

9156 7716 1304

90672 68804 1706

888 9156 573

7933

423

2139512 (18867

1006112 65555

90772 84423

440∟555

98392

$442\frac{1}{2}.436\frac{1}{2}$

7620

6806

82

442∟56 : : 57292   (7768407
2.15292 : 57292   30975
28646   34002   16,8540
14323   3027
57292   2655
257814   372   90465
5729   354   91653
43805463   1800   92616
177   3320
30   93762

131596   (116036
1825   172
6922
68804   1216
1416   826
34002   7933
76   327

2069800   (182529
9364   655555
90772   838084
2868   432
2268   8
600
5667
333
106

) 343752   (77704
30975   −2
34002   776∟84
30975   57292   57292
3027   −777   −77684
30975   56515   5651516
− 705
8845
1795
177
1.72465
57292

568585   2280000 . 5667 ∷ 440 $\frac{5}{9}$

5
120614   (10634   1652704   (14493
7274   418   5193
68004   45336
4936   6594
44336   10604
4958   102006
403

113917 (100506
000577 (201012
5696
074

7646
77684
543788
466104
310736
466104
593971864

776∟85
72465
543795
15537
3107
466
39
562944

440,55555
220277777
26433333
2643333
388388
249662839 (1∟09501
2166 8555
2052 160
114283
114

<128v>

72465
10923
72465
65218
1449
217
791536
746325
8254786
413176
192748
770992
578244
19725
9862
4931
79639442
746325
825964

<129r>

467912 (41284
45336
14552
11334
3218
2267
951
9067
443

2000000 (17646
8666 65555 2347296
79338 83201 22668 (207102
7322 80496 655555
68004 79338 8,62657
5216 1158
45336 244
6824

2209056 (1949005
10756
102006
55596
45336
10260
594

57292
5788597
5651516
11440113
5720056

362325
507255
14493
65228 57292
1449 563
41516657

57292
56777

26795 (23634 714424(630337 65944
22668 41 68004 5667
468 4127 34384 9274
4533 34002 34002 90772
147 7268 382 1968
6800 42 835
468 8 2

0.7646.104.

1,0923

7646

68814

(145817 1529

655555 229

8∟01372 1758

0∟835172

8555555

9390727

939073

10923 746325

4369 842699 1685398

1,1360 939073 842699

7463 1781772 746325

8∟599 890886 1589024

7945

2285667)249662833 (1∟092302

21096133 855555

20571003

525130 74632

457133

67997

6757

427

714424(623274

68804

26384

22668

3716

3400

316

89

1095.2000.17$\frac{1}{6}$.

3433333(31363

3285 6983

1483 6570

3883 413

3285

58086 20642

10923 10923

58086 20642

52277 185778

1162 4128

174 620

634473 2254726

746325 746325

809772 7.68872

5321
10923
54615
32769
2185
109
0.0.581213
746325
7.52137
1453
747778
746325
1467
7,47792

118205
10923
118205
1063845
23641
3546
12911537
746325
759236

31517
10923
31517
283653
6303
945
3442601
46325
7,80751

0∟1344
10923
1344
12096
269
40
146705

<129v>

That for encouraging the bringing wrought Plate into the Mint to be coined there shall be allowed after the rate of five[9] shillings & pence per ounce shtandard, the same being reduced to standard by the gross weight of the plate & the assay of the Ingots melted out of the same.

That her Majesty be pleased to give directions to the Master & Worker of her Mint to receive all such wrought plate as shall be brought to the Mint before the day & to give receipts {w}ent to such persons as shall bring the same, for the amount thereof according to the rate & price agreed by the House to be allowed for such wrought plate as shall be brought to the Mint to be coined, & that the same be immediately coined into shillings & six-pences.

That all such Receipts to be given by the Master of her Majesties Mint for any wrought Plate shall be accepted & taken for the full amount thereof in any payments to be made upon any Loans or any contributions upon any funds to be granted this session of P.

$24^{\mathrm{h}} = 1440' = 86400''. -236'' =:: 360 \times 17453292520$

1 7292123519
9 5629111671
6 43752741114
9 65629111671
5 36460617595 = arc
5 36460617595 = arc
3 21876370557 = arc
9 65629111671

14662230616∟1281741

22
1436223033∟81 = arc

531750653873

4785755884857
531750653873
319050212324
47857558849
2658753269
265875327
159525196
47857559

10473115457 =
0∟0523655∟7729 = sin vers

1047197551200
6283185307200(72921235∟17
7. 603148
251705
2 172328
793773
9 775476
182970
2 172328
106427
1 86164
202632
2 172328
303040
3 253492
445480
5 430820
14660
6044
6031
1

$$
\begin{array}{r}
510448646190 \\
14584247034 \\
6562911167 \\
145842470 \\
7292123 \\
1458425 \\
218764 \\
36461 \\
729 \\
550 \\
\hline
5317 \llcorner 50653873
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\underline{658382} \\
3950292 \\
329191 \\
526705 \\
19751 \\
5267 \\
132 \\
\hline
43346685
\end{array}
$$

seu linearum $181 \times 12 + 2\frac{1}{4} = 2174\frac{1}{4}$ & $\begin{array}{r} 0.20946230916 \\ 1.25677385496 \\ 7.54064312976 \end{array}$

217425000.754064

$229\frac{1}{2}.1.$

7540643) 21775186 (288∟77093
15081286
6693900
60325144
6613856
6032514
581332
527845
53487
7025
6786
239
226

2295)19695539 (8581∟934
18360 17∟164
1335539
11475 984
188039
18360
4439
2144
20655
785
6885
965
503 ad 504.

(503∟3
158486372(15880∟186666
$31∟5494\frac{2}{3}$)15774∟743333
105∟443333
946484
10,7949

30162572
22621929
2262193
301626
45244
4525
603
38
326861878

ut $125\frac{23}{60}$ ad $125\frac{53}{60}$

$125\frac{2}{5}$ ad $125\frac{9}{10}$.

$126\frac{2}{15} \times 125\frac{9}{10} \times 100$ ad $125\frac{2}{15} \times 125\frac{2}{5} \times 101$

101 ad 100 et 503 ad 504 id est ut 50803 ad 50400 seu 505 ad 505

ut 403 ad
50803

126,133333
31.53,3333
11352
15880∟18666
15848,6372
3∟1549466

125,133333 ×125∟4 × 101
31283333
500533
156917200
1569172
15848∟6372

57285∟5
5729578
28647890
40107046
1145710
11459156
45836624
2864789
286479
32822174052
196933044312
22345354
55389666

5729578
65
34377468
2864789
37242257
223453542

ut 9 ad 289

$3933.17\frac{1}{6} :: 228\frac{1}{2}$
39391 1599
2285
38
3814
3922

2285
159955
381
3922∟6

109)3433(31∟5
163
540
$1095.17\frac{1}{6} :: 2000$
343333(31∟4
3285
1483
438
438

432
$8\frac{4}{9}$
$440\frac{4}{9}$
$3083\frac{1}{9}$
$26426\frac{2}{3}$
$264266\frac{2}{3}$
$2202222\frac{2}{9}$
2280000)$2495998\frac{2}{3}$(1∟09035
2159 4736
2052 1∟094736
10798
684
114

403 ad 50400(12506
101 50024
2040
2015
250

<130r>

MSS[ti] veteres et Epistolæ in Commercio Epistolico impressio varijs quæstionibus ansam præbent, quales sunt quæ sequuntur.

1 Quis fuerit primus author seriei pro area Hyperbolæ quæ D. N. Mercatori a D. Leibnitio passim tribuitur

2 An D. N. Mercator primus fuerit inventor seriei infinitæ per divitionem perpetuam.

3 An recte fecerit Leibnitius qui totis viribus generalem reductionem fractionum in series infinitas & quadraturam figurarum per has series Newtono denegat.

4 An recte D. Leibnitius se coinventorem esse voluit methodi differentialis M**{entem}**

5 Quis fuerit primus inventor seriei pro arcu circuli ex data Tangente.

6. An D. Leibnitius fuerit hujus seriei coinventor

7. Qua**{illeg}**an seriem D. Leibnitus habuerit anno 1674 pro area circuli.

8. Vtrum seriem illam D. Leibnitius invenerat vel aliunde acceperat.

9. An D. Leibnitius Propositionem invenit quod corpus in Ellipsi revolvens & areas tempori proportionales circum focum interiorem describens, attrahatur in centrum vi aliqua quæ sit reciproce ut quadratum distantiæ a centro.

10. Vnde factum est quod. cum Newtoni Principia mathematica anno 1686 ad societatem Regiam millerentur, anno 1687 ederentur & anno 1688 describerentur in Actis Eruditorum: D. Leibnitius Anno 1689 præcipuas Newtoni Propositiones, sub titulis Epistola de Lineis Opticis, schediasmatis de resistenti a Medij et motu Projecti**{illeg}**ium gravium in Medio resistente & Tentaminis de motuum cœlissium causis.

11. Quænam sit Analysis Vniversalis Newtoni

12. Quando fuit hæc Analysis inventa

13. Quænam fuerit Methodus differentialis L. et quando fuerit inventa.

14. Quomodo differunt hæ duæ Methodi ab invicem.

15. Quibus argumentis

Harum vero Quæstionum Resolutiones ex ijsdem MSS & epistolis sic deducuntur.

1 Edita est in Transactionibus Philosophicis Mensis Aprilis 1668 Quadratura Hyperbolæ a **{dc.}** Brunkero inventa per hanc seriem $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{7\times8}+$&c id est per hanc $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$ &c, conjunctis scilicet binis terminis. Mercator mox eandem aliter demonstravit.

2. D. Wallisius in opere Arithmetico Anno 1657 edito cap. 33 § 68 fractionem algebraicam $\frac{a}{1-r}$ uti $\frac{a}{1-r}$ per divisionem perpetuam reduc**{e}**rit in seriem $a+ar+ar^2+ar^3+ar^4$&c & Mercator per hanc ipsam divisionem quadravit Hyperbolam.

3 Mercator se methodic**{m}** generalem quadrandi curvas per divisionem invenisse nunquam professus est. Newtonus per impolationem serierum Wallisis invenit Regulam generalem reducendi dignitates binomiorum in series infinitas et per hanc Regulam quadravit Curvas omnes quæ per Divisiones quadrari possunt. et postea Divisionibus ut notioribus, non ut necessarijs, usus est. Gregorius quadraturam Curvarum per Divisiones licet litteris Collinij admonitus, vix tandem invenit.

<131r>

4. Laudem mercatur qui aliorum inventa novis methodis invenire possunt & inventores sunt novarum methodorum, sed inventoris primi jura per inventores recentiores imminui non debent. Commerc. p.

5 Iacobus Gregorius in Epistola ad Collinium 15 Feb 1671 data, pro inveniendo arcu a cujus tangens t datur seriem posuit $a=t-\frac{t^3}{3r^2}+\frac{t^5}{5r^4}-\frac{t^7}{7r^6}+\frac{t^9}{9r^8}$ &c radio circuli existente r. Hanc seriem cum alijs nonnullis Oldenburgus in Epistola anno 1675, 15 Apr. data, ad D. Leibnitium misit, & D. Leibnitius in Epistola 20 Maij proxime sequentis rescripsit se Literas Oldenburgi multa fruge Algebraica refertas accepisse, sed propter Mechanica negotia non potuisse examinare series quas acceperat ac cum suis comparare. Deinde cum Gregorius sub finem anni 1675 emortuus esset: Collinius ex Epistolis Gregorij quæ utiliora viderentur excerpsit et cum D. Oldenburgo communicavit sub hoc titulo: Extracts from M^r Gregories Letters to be sent M^r Leibnitz to peruse who is desired to return the same to you. sub finem autem epistolæ suæ 11 Aug. 1676 ad Fratrem emortui Collinius scripsit se Extracta illa Lutetiam Parisionem missa **{cup}**isse. Et D. Tschurnhausius in Epistolæ ad Oldenburgum Parisijs 1 Sept 1676 data, ad hæc Extracta a se visa alludens hæc habet: similia porro quæ in hæc re præstitit eximius ille Geometra Gregorius memoranda certe sunt, et quide optimæ famæ ipsius consulturi, qui ipsius relicta Manuscripta luci publicæ ut exponantur operam nababunt. Extant Extracta illa manu Collinij scripta et in ijsdem habetur epistola tota prædicta Gregorij 15 Feb. 1671 data. Hæc omnia D. Leibnitius in Actis Leipsicis agnoscere debuisset.

6. D. Leibnitius invenit transmutationem quandam figurarum cujus ope seriem prædictam per divisiones Wallisianas invenire potuisset. Sed Gregorius hanc seriem prius invenerat, et coinventor recentior non est admittendus.

7. D. Leibnitius in Epistola 15 Iulij 1674 ad Oldenburgum data scripsit se Theorema habere cujus ope Area circuli vel sectoris ejus dati exacte eprimi potest per seriem quandam Numerorum rationalium continue productam in infinitum. Dein in Epistola 26 Octob. 1674 ad Oldenburgum data, hæc fusius repetit, dicendo se invenisse seriem numerorum valde simplicum cujus summa exacte æquatur circumferentiæ circuli posito Diametrum esse unitatem. Et qd eadem methodo etiam Arcus cujuslibet cujus sinus datur Geometrice exhiberi per ejusmodi seriem valor potest, nullo ad integræ circumferentiæ dimensionem recursu. Vt adeo necesse non sit, arcus rationem ad circumferentiam nosse. Quod hic methodus vocats, priore Epistola Theorema dicitur. Methodum habet est Theorema cujus ope Area vel circul totius vel sectoris ejus dati ex sinu dato exprimi potest per seriem Numerorum rationalium, licet arcus ratio ad circumferentiam minime noscatur. Si arcus ratio ad circumferentiam noscatur habetur per hoc Theorema circumferentia tota, si ratio illa non noscatur, habetur saltem arcus vel sector in ejusmodi serie. Theorema autem quo arcus quilibet cujus sinus datur, in serie numerorum rationalium haberi potest, ejusmodi est. Sit radius = 1 & sinus = x, et arcus erit $\mathrm{x}+\frac{1}{6}\mathrm{x}^3+\frac{3}{40}\mathrm{x}^5+\frac{5}{112}\mathrm{x}^7+\frac{35}{1152}\mathrm{x}^9+\&\mathrm{c}$. Et

8. Hoc Theorema Newtonus anno 1669 cum Collinio & Collinius cum Gregorio, & amicis communicabat. Leibnitius Londini versabatur annis 1661, 1662, & 1663 usque ad mensem Martium, deinde Lutetiam Parisiorum migrabat. Theorema autem anno 1675 ab Oldenburgo accepit, et et sibi minime vindicabat, dein anno 1676 accepit idem a Mohro quodam & Demonstrationem ejus ab Oldenburgo et Collinio mox postulat pe**{**rtlia**}** Epistolam 12 Maij 1676 datam postulabat ab Oldenburgo et Collinio, ideoque anno 1674 <133v> aliunde acceperat, & ab hoc Theoremate deduxerat series numerales quas se invenisse jactabat.

9. Dicunt aliqui falsas esse Tentaminis Propositiones 11, 12 et 15 et D. Leibnitium ab his per calculum suum deduxisse Propositiones 19 et 20 ejusdem Tentaminis: talem autem calculum ad Propositiones prius inventas aptari quidem potuisse, non autem inventorem constituere

Epistola tota de lineis Opticis, & totum Schediasma de resistentia Medij

<130v>

10. Cum Newtonis Principia Mathematica anno 1686 ad societatem Regiam millererentur, & anno 1687 ederentur & anno 1688 in Actis Eruditorum in Epitomen redigerentur, & D. Leibnitius his lectis, componeret Epistolam de Lineis Opticis, Schediasma de resistentia Medij & motu projectilium gravium in Medio resistente, & Tentamen de motuum cœlestium causis componeret et in Actis Lipsicis anno 1689 imprimi curaret quasi ipse quoque præcipuas Newtoni de his rebus Propositiones invenisset idque diversa methodo qua vias novas Geometricas aperuisset; et librum Newtoni tamen nondum vidisset: quis fuerit harum Propositionum inventor primus censendus?

<131v>

Sir

Descriptio generalis methodi fluxionum

Schootonus in Notis ad Geometriam Cartesij Methodum Fermatij de maximis & minimis exemplo uno altero exposuit & quomodo perpendicula ad curros per hanc methodum ducenda sint hac methodo Fermatius pro quantitate indefinite parva utitur symbolo O. Idem Fecit Gregorius in methodo ducendi tangentes. Barrovius in methodo sua Tangentium, duas adhibuit quantitates indefinite parvas, nempe particulam Abscissæ et particulam Ordinatæ, quas vocat a et e Newtonus methodum ampliavit & ad omnia problematum genera applicuit, idque spectando quascunque et quotcunque indeterminatas quantitates ut fluentes, pronendo symbola quæcunque pro fluentibus alia quæcunque pro earum fluxionibus, & unitatem pro fluxione temporis, symbolum o pro momento temporis & symbola fluxionum in momentum o ductarum pro momentis quantitatum fluentium seu particulis momento temporis genitis.

<132r>

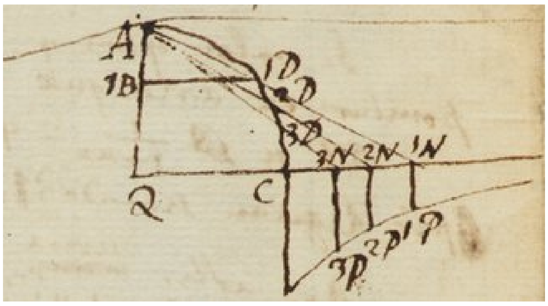
In Epistola quam Newtonus 13 Iunij 1676 ad Oldenburgum , Oldenburgus 26 Iunij ad Leibnitium misit, Newtonus methodum. serierum infinitarum descripsit, & addidit Analysin harum serierum beneficio ad omnia pene problemata (si numerali**{illeg}** quædam Diophantæis similia excipiantur) sese extendere præsertim per ulteriores quasdam methodos eliciendi series infinitas & reducendi series infinitas in æquationes finitas ubi rei natura tulerit. Leibnitius in Literis 27 Aug. 1676 respondit Id sibi non videri; esse enim multa usque multis alijs) Problemata methodi Tangentium inversæ. Deinde in Epistola

Deinde in Epistola 24 Octob. 1676 ad Oldenburgum data Newtonus respondit Inversa de Tangentibus Problemata esse in potestate, aliaque illis difficiliora: ad quæ solvenda usus esset duplici Methodo, una concinniori, altera generaliori: Vnam consistere in Extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus; alteram tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad eruendos terminos assumptæ seriei. Methodum priorem a Newtono acceptam Wallisius in secundo operum volumine anno 1693 edidit; alteram D. Leibnitius tandem assecutus est & in Actis Eruditorum exposuit anno 1689, pag 37 & anno pag . Porro Newtonus in eadem Epistola 24 Octob. 1676 data scripsit se proxime ante pestem ingruentem [quæ contigit annis 1665 & 1666] in methodum suam serierum infinitarum incidisse, et quo tempore Mercatoris Logarithmotechnia prodijsset, communicatum fuisse per D. Barrow (tunc Matheseos Professore Cantab) cum D. Collinio Compendium quoddam harum serierum et circa annum 1671 hortante Collinio se tractatum de his seriebus conscripsisse deque methodo alia quæ in hac sententia fundaretur. Data æquatione. quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire & vice versa: & hanc methodum facillime dare methodum flusij ducendi Tangentes, determinare maxima et minima, quantitates surdas non morari, quadraturas Curvarum reddere faciliores, & alia enodare. Et specimen hujus methodi dedit in serie quadam infinita pro quadrandis figuris curvilineis, quæ series quandoque abrumpitur & quadraturam exhibet in æquatione finita. Dixerat enim in Epistola superiore (13 Iun. 1676) methodum suam ad omnia pene Problemata sese extendere per ulteriores quasdam methodos eliciendi series infinitas & has series reducendi in æquationes finitas ubi rei natura tulerit et in hujus rei exemplum seriem prædictam jam protulit.

Ex his constat Newtonum per ea tempora methodum Analyticam generalem resolvendi problemata habuisse ex methodo serierum & methodo fluxionum compositam, quæ si res in finitis æquationibus non succederet, hæ in æquationes infinitas reducerentur, si æquationes finitæ ex conditionibus Problematis non prodirent, quærerentur infinitæ per methodum fluxionum, si æquationes a fluxionibus libera non prodirent quærerentur æquationes seu finitæ seu infinitæ quæ fluxiones involverent, et ex his si opus esset extraherentur latera fluentia æquationes autem inventæ seu finitæ seu infinitæ ad solutionem problematum per methodum fluxionum applicarentur, & æquationes infinitæ in finitas nonnunquam redirent.

Ad hanc methodum Newtonus respexit in Epistola ad Collinium 10 Decem. 1672 data, ubi methodum tangentium Slusianæ similem descripsit et addit: Hoc est unum particulare vel Corollarium potius methodi generalis quæ extendit se citra molestum ullum calculum non modo <132v> ad ducendum Tangentes ad quasvis Curvas sive Geometricas sive Mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliasve Curvas respicientes, verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora Problematam genera de Curvitatibus Areis Longitudinibus, Centris gravitatis Curvarum &c Neque quemadmotum Huddenij methodus de maximis et minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti qua æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas. His ultimis verbis alluditur ad Tractatum supradictum quem anno 1671 de methodis serierum & fluxionum composuerat.

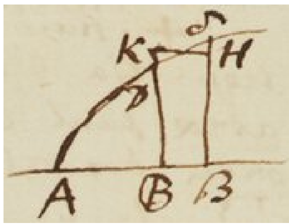
De methodo utraque inter se conjunctis compositum fuit etiam compendium prædictum quod D Barrovius anno 1669 cum Collinio communicavit. Editum fuit hoc compendium in Commerc. Epist. ex MS antiquo Collinij manu exarato & in scri**{n}**ijs ejus a Ionnsio reperto, una cum excerptis ex literis tribus Barrovij ad Collinium de hoc Compendio 20 Iulij 31 Iulij & 20 Aug. 1669 datis. et ex literis alijs haud paucis Collinij Oldenburgi Gregorij ad hoc Compendium spectantibus et ad Slusium, Gregorium, Bertetum, Borellum, Vernonem Strodum, missis, quorum vel autographa vel exemplaria in libro Societatis Regiæ quo conservantur Epistolæ descripta, vel manu Collinij exarata & a Consessu Arbitrorum Regiæ Societatis examinata fuerunt, et adhuc asservantur. Et in hoc Compendio methodus fluxionum sic paucis attingitur



Sit ABD Curva quævis, et AHKB rectangulum cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam areas ABD & AK describere, et quod BK(1) sit momentum quo AK(x) & BD(y) momentum quo ABD gradatim augetur et quod ex momento BD perpetim dato possis per prædictas Regulas, aream ABD ipso descriptam investigare, sive cum AK (x) momento 1 descripta conferre. Iam qua ratione superficies ABD ex momento suo perpetim dato per præcedentes Regulas elicitur, eadem quælibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Deinde exemplum proponitur inveniendi longitudinem arcus ex sinu verso in circulo cujus diameter est ponendo x pro sinu illo & 1 pro momento sinus, & inde inveniendo momentum arcus æquale $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$, et ex hoc momento deducit longitudinem arcus. Deinde addit: Sed notandum est quod unitas ista quæ pro momento ponitur & superficies cum de solidis et linea cum de superficiebus et punctum cum de lineis agitur. Nec vereor loqui de unitate in punctis sive lineis infinite parvis siquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ dum utuntur methodis indivisibiliam: Newtonus igitur punctum hic considerat ut particulam lineæ momento temporis descriptam & inde momentum vocat lineé, lineam considerat ut particulam superficiei momento temporis genitam et inde momentum vocat superficiei, et superficiem considerat ut particulam solidi momento temporis genitam et inde momentum vocat solidi. Vbi vero unitas pro momento ponitur subintelligenda est coefficiens infinite parva o. Concinnioris enim operationis gratia sæpe subintilligitur: at ubi aliquid demonstrandum venit, exprimitur, ut fit in demonstratione Regulæ primæ sub finem Compendij.

<133r>

Regula illa erat hujusmodi, si Curvæ alicujus Abscissa AB vocetur x & Ordinata rectangula BD sit y, & a sit quantitas quælibet data et m et n sint numeri, sitque $ax^{\frac{m}{n}} = y$ æquatio naturam curvæ definiens: Area hujus curvæ erit $\frac{m}{m+n}am^{\frac{m+n}{n}}$. Demonstratur vero in hunc modum. Sit area illa = z In abscissa producta sumatur longitudo aliqu parva BB. =o. erigatur Ordinata Bδ Producatur Ordinata BD ad K , et compleatur rectangulum BKHβ areé BDδβ æquale, & si BK dicatur υ rectangulum illud erit =oυ. Erit etiam abscissa $AB = x + o$ et area $AB\delta = z + o\upsilon$.



Si jam vice Regulæ generalis assumatur ejus casus aliquis ut quod sit $\frac{2}{3}x\frac{3}{2} = z$, sive $\frac{4}{9}x^3 = zz + 3xxo + 3xo^2 + o^3 =$ (ex natura Curvae) $z^2 + 2zo\upsilon + o^2\upsilon^2$. Et sublatus æqualibus $\frac{4}{9}x^3$ et zz, reliquisque per o divisis restabit $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2z\upsilon + o\upsilon^2$. Si jam supponamus Bβ in infinitum diminui et evanescere sive o esse nihil, erunt o et y æquales & termini per o multiplicati evanescent, & restabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2z\upsilon$, sive $\frac{2}{3}xx\left(= zy\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, id est $x^{\frac{1}{2}} = y$. Quare e contra si sit $x^{\frac{1}{2}} = y$ erit $\frac{2}{3}x\frac{3}{2} = z$. Q.E.D. **{illeg}** Et notandum est quod in hac operatione quantitas Bβ seu o spectatur ut finita donec calculus ad finem perducatur, deinde evanescit et pro nulla habetur. Colligitur id ex verbis Si jam supponamus Bβ in infinitum diminui, et evanescere sive o esse nihil. Quantites o et oo jam. jam nascentes sunt ipsarum x et z momenta Sed hic spectantur ut finitæ donec computatio. **{**fini**}**atur Pro momentes habentur a N**{illeg}**et**{illeg}**o ubi aliquid investigandum est pro quantitatbus finitis ubi aliquid demonstrandum.

Si jam demonstranda proponatur Regula generalis $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$, sive ponendo $\frac{na}{m+n} = l$ & $m+n = p$, sit $cx^{\frac{p}{n}} = z$, vel $c^n x^p = z^n$; substituatur x+o pro x & z+oυ vel (quod perinde est) z+oy pro z, & prodibit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, $\&c = z^n + noyz^{n-1}$, &c: reliquis nempe terminis qui tandem evanescerent, omissis. Iam sublatis æqualibus $c^n x^p$ et z^n, reliquisque terminis per o divisis, restabit $c^n px^{p-1} = nyz^{n-1}$ ac dividendo per $c^n x^p = z^n$ prodibit $px^{-1} = \frac{ny}{2}$, sive $cx^{\frac{p}{n}}$ in px^{-1} . $cpx^{\frac{p-n}{n}} \left(= cx^{\frac{p}{n}} \times px^{-1} = zpx^{-1}\right) = ny$. Et restituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c et m+n pro p, hoc est m pro p−n et na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra si sit $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q.E.D. Iam vero in hac demonstratione notanda veniunt quæ sequuntur.

Quod series illa cujus termini duo primi hic ponuntur cæterique negliguntur ut inutiles, viz[t] $\overline{x+o}|^p = x^p + pox^{p-1} + \&c$ Vel $\overline{z+ov}|^n = z^n + noz^{n-1} + \&c$, eadem sit cum serie quæ describitur & exemplis illustratur in principio epistolæ Newtoni ad Oldenburgum 13 Iunij 1676 dati,

2 Quod Regula demonstratur per secundum terminum hujus seriei termino primo rejecto, et reliquis quæ secundum sequuntur evanescentibus et hoc perinde est ac si diceretur quod quantitate x qualibet fluente incrementum primum dignitatis ejus x^p sit ad incrementum synchronum. lateris x, ut pox^{x-1} ad o, seu px^{p-1} ad 1, Fundavit igitur Newtonus methodum momentorum in hujusmodi seriebus spectando secundum terminum jam nascentem ut momentum primi

3 In hac Demonstratione primo proponitur æquatio $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$ fluentes areas x×1 et z involventes & inde deducitur æquatio $ax^{\frac{m}{n}} = y$

<133v>

Ordinatas fluxionibus proportionales 1 et y involvens. Deinde ex hac æquatione data regreditur ad æquationem priorem. Et hic est primus gradus methodi fluxionum quam Newtonus designavit hac sententia: <u>Data æquatione quantitates quotcunque fluentes involvente fluxiones invenire et vice versa.</u>

4. Huic Demonstrationi Newtonus statim addit sequentia: <u>Huic in transitu motetur modus quo Curvæ quotcunque quarum areæ sunt cognitæ possunt inveniri; sumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & abscissam x ut inde quæratur Ordinata y. Ut si supponas $\sqrt{aa+xx} = z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+x}} = y$, et sic in reliquis</u>. Et hoc perinde est ac si Newttonus dixisset quenquam per methedum calculi in Demonstratione præcedente adhibiti posse ex Æquatione qualibet fluentes duas quantitates involvente fluxiones invenire. Et simile est argumentum de fluxionibus ex æquatione quotcunque fluentes quantitatis involvente. deducendis. Namque hoc Newtono per ea tempora innotuisse patet ex ejus Epistola ad Collinium data 10 Decem 1672 ubi dicit methodum suam quantitates radicales non morari; ut ex ejus Epistola 24 Octob 1676 ad Oldenburgum data ubi dicit se ante quinquennium (sc. annum 1671) ractatum de seriebus infinitis composuisse deque methodo quæ in hoc Problemate fundaretur: <u>Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxione invenire, & vice versa</u>.

Habuit igitur Newtonus per ea tempora methodum serierum & fluxionum cujus Elementa strinxerat in Compendio perdictæ & quam fusius exposuerat in Tractatu illo quem anno 1671 composuit

Quantitates ejuscunque generis considerabat ut motu continuo crescentes augescentes vel fluentes et earum particulas singulis temporis momentis genitas vel augmenta momentanea nominabat earum momenta nomine a momentis temporis desumpto, et velocitates crescendi vel fluendi nominabat earum fluxiones. Hæ fluxiones sunt quantitates finitæ; momenta sunt infinite parvæ. Quantitates fluentes designabat per symbola quæcunque, earum fluxiones per alia quæcunque symbola, fluxionem temporis per unitatem, momentum temporis per literam O momenta aliarum quantitatum per earum fluxiones in momentum temporis ductas, et fluxiones quantitatum uniformiter fluentium vel per unitates vel per alias quascunque datas. In Propositionibus investigandis

<134r>

— Newtonum circa Annum (ut Wallisius ait et ex MSS antiquis colligitur 1665 vel 1666, in methodum illam peregregiam Fluxionum incidisse, cujusque specimina quædam dedit in <u>Analysi</u> sua <u>per æquationes numero terminorum infinitas</u> quam Barrovius Anno 1669 ad Collinsium misit ut et in Epistola 10 Decem 1672 ad Collinsium missa. Circa initium quidem Anni 1670 D. Iohannes Collinsius literis ad Clarissimum virum D. Iacobum Gregorium conscriptis significavit D. Isaacum Newtonum methodi Quadraturarum generalis compotem esse, uti testatus est D. Dav. Gregorius in Exercitatione sua Geometrica Anno 1684 publicata. pag. tertia, et inter cæteros quidem Anno 1676 eandem in Epistola quadam ad celeberrimum Leibnitium misit & ejus beneficio Analysin ad omnia. fere Problemata sese extendere. significavit per alias quandam methodos generale orem reddi.

Eodem porro anno scil 1676 – – – – – – – – – fusius patebit.

Problema in quo fundabatur hæcce methodus literis quidem transpositis ad hunc modum celabat (6accdæ[13]eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx) quæque ordinatæ hanc conficiunt sententiam, <u>Data æquatione Fluentes quotcunque quantitates involvente invenire Fluxiones; et vice versa.</u>

Methodos etiam – – – – – – – – – <u>nequeant.</u>

Methodos denique – – – – – – – subministraverit

Mente Newtoni ex Epistolis ejus percepta, Vir celeberrimus D. Leibnitius anno proximo rescripsit se in parilem Methodum incidisse (ut ex ejus Epistola in tertio volumine Operum Wallisij videre licet.) cujus tamen explicationem (in cæteris suis inventis publicandis non raro nimis præproperus uti in Actis Erud. plus semel conspici queat) ad Annum usque 1684, distulerit

Tandem vero Newtonus Anno 1704 Tractatulum quem circa annum 1676 ex Tractatu antiquiore descripserat, redivivum publici juris fecerit; quemque circiter Annum 1691 Vir clariss Halleius et Ego Cantabrigiæ in manibus habuissemus, tum quidem prælo paratum & perlegendo (ab ijs quibus eundem mutuo dederat) obtritum, quemque postea revisendum repostulaverit, et ad Annum usque prædictum ejusdem publicationem distulerit.

+ p. 96 l. 11 lege quantitatis. Ib. l. 12. lege Fluxiones. Ib l 16 lege habuere. In Historia fluxionum p. 92 l 22 pro Mense Octobris lege Anno. pag. 93 l. 27 lege quam Gregorius. p. 94 l 30 lege D. Collins initio. p. 95 l. 1 lege perplura. l 10 pro Societatis Regiæ lege Consessus Arbitrorum delectorum a Societate Regia. l. 41 lege 10 Decem. 1672. + Cætera cum Author mortuus sit & Liber tribus abhinc omnis impressus fuerit, emendet Lector

<134v>

Hoc artificio deducebat Problemata ad æquationes fluxionales, & vicissim ex hujusmodi æquationibus (vel per Quaduram Curvilinearum vel per methodum serierum, vel per alias artes) fluentes deducebat.

<135r>

D. Isaacum Newtonum circa Annum (ut Wallisius ait, et ex MSS antiquis colligitur) 1665 vel 1666, in Methodum illam peregregiam Fluxionum incidisse, cujusque specimina quædam dedit in Analysi sua per æquationes numero terminorum infinitas quam Barrovius Anno 1669 ad Collinium misit, ut et in Epistola sua 10 Decem. 1672 ad Collinsium missa. Circa initium quidem Anni 1670 D. Iohannes Collinsius literis ad Clarissimum Virum D. Iacobum Gregorium conscriptis significavit D. Isaacum Newtonum Methodi Quadraturarum generalis compotem esse, uti testatus est D. Dav. Gregorius in Exercitatione sua Geometrica Anno 1684 publicata pag. tertia, et inter cæteros quidem anno 1676 eandem in Epistola quadam ad Celeberrimum Virum G. G. Leibnitium misit, et ejus beneficio Analysin ad omnia fere Problemata sese extendere significavit, sed absque alijs quibusdam methodis non omnino universalem evadere.

Eodem porro anno, scil. 1676 - - - - - - - - fusius patebit.

Problema in quo fundabatur hæcce methodus literis quidem transpositis ad hunc modum celabat (6accdæ13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx) quæque ordinatæ hanc conficiunt sententiam, Data æquatione Fluentes quotcunque quantitates involvente, invenire Fluxiones; et vice versa. Hoc artificio deducebat Problemata ad æquationes fluxionales, & vicissim ex hujusmodi æquationibus (vel regrediendo vel per Quadraturam Curvilinearum, methodumve serierum aut alias artes) fluentes deducebat.

Methodos etiam – – – – – – – – – separari nequeant.

Methodos denique – – – – – – – subministraverit.

Mente Newtoni ex Epistolis ejus percepta, Vir Celeberrimus D. Leibnitius anno proximo rescripsit se in parilem Methodum incidisse (ut ex ejus Epistola in tertio Volumine Operum Wallisij impressa videre licet) cujus tamen explicationem (in cæteris suis inventis publicandis non raro nimis præproperus, uti in Actis Erud. plus semel conspici queat) ad Annum usque 1684 distulerit.

Tandem vero Newtonus anno 1704 Tractatulum quem circa Annum 1676 ex Tractatu antiquiore descripserat, redivivum publici juris fecerit; quemque circiter Annum 1691 Vir Clariss. Halleius & Ego Cantabrigiæ in manibus habuissemus, tum quidem prælo paratum, et perlegendo (ab ijs quibus eundem mutuo dederat) obtritum, quemque postea revisendum repostulaverit, et ad annum usque prædictum ejusdem publicationem distulerit.

Newtonus ergo...

<136r>

2. Anno 1699 D. Fatius, qui eandem Methodum anno 1687 invenerat, & post annos novel vel decem Newtoni codices MSS eviderat, in Tractatu de Investigatione solidi rodundi in quod minima fiat Resistentia; scripsit Newtonum esse primum et pluribus annis vetustissimum hujus calculi Inventorem, ipsa rerum evidentia. se coactum agnoscere. Et Leibnitius hoc minime negavit.

1. Vbi primum Wallisius audivit Methodum differentialem in Hollandia celebrari Anno scilicet 1695, is in Præfatione ad Operum suorum Volumen primum dixit binis Newtonum literis Iunij 13 & Octob. 24 1676 ad Oldenburgium datis cum Leibnitio tum communicandis methodum hanc Leibnitio exposuisse, tum ante decem annos nedum plures [i.e. anno 1666 vel antea] ab ipso excogitatam. Quod moneo nequis causetur de hoc calculo Differentiali nihil a nobis dictume sse. Anno proximo Editores Actorum Lipsiensium in synopsi hujus libri partem horum verborum cit**{o}{ru}**nt, & Wallisius etiam ad Leibnitium 1 Decem 1696 de ijsdem verbis scripsit. Et neque Leibnitius neque Editores Actorum per ea tempora re**{illeg}** negarunt, neque conquesti sunt quod Wallisius hæc dixerat.

3. Anno 1704 Newtonus Opticam et Librum de Quadratura Figurarum edidit et in Præfatione dixit se incidisse paulatim Annis 1665 & 1666 in methodum Fluxionum qua hic usus est in Quadratura Curvarum. Et Wallisio jam mortuo Editores Actorum anno proximo in Synopsi horum Librorum scripserunt Leibnitium Inventorem esse Methodi, et pro differentijs igitur Leibnitianis D. Newtonum adhibere semperque [ex quo Methodum novit] adhibuisse Fluxiones, ijsque tum in suis Principijs Mathematicis, tum in alijs postea editis eleganter esse usum, quemadmodum & Honoratus Fabrius in sua Synopsi Geometrica motuum progressus Cavallerianæ methodo substituit. Post annos tres Keilius hæc verba reprehendit, & Leibnitius anno 1711 postulabat a Regia societ ut Keilius retractaret quod scripserat. Keilius rescripsit. Leibnitius se excusavit per ætatem ne responderet. In Actis Eruditorum circa hanc rem nihil cuiquam detractum esse, sed potius passim suum cuique tributum Ipsum et amicos suos credere Newtonum per se ad similia suis fundamenta pervenisse, ipsum tamen inventoris jura venire, in quibus sibi vindicandis non properaverat sed inventum nonum in annum presserat ut nemo ipsum præcucurrisse quæri possit. His verbis cum tamen Wallisius et Fatius Newtonem multis annis vetustiorem inventorem dixerent, Leibnitio & Menkenio per ea tempora non negantibus, jam Leibnitius jura inventoris sibi vindicat & Newtonum non præcucurrisse sed esse inventorem secundum. Ipse et amici ejus [olim] aliquoties ostenderare libenter ab ipsis credi Newtonum per se ad similia suis fundamenta pervenisse: jam Editores Actorum, scribendo quod Newtonus pro differentijs Leibnitianijs fluxiones semper ab initio adhibuit quemadmodum **{illeg}** Faber pro methodo Cavallerij motuum progressus substituit, suum cuique tribuissant.

<137v>

Anno 1689 mense Ian et Feb Leibnitius ex Newtoni Principijs mathematicis chartas tres alijs verbis synthetice compositas edidit, & sub finem secundæ addidit Et fortassis consideranti vias quasdem novas satis antea impeditas aperuisse videbimur. Omnia autem respondent nostræ Analysi Infinitorum, hoc est alculo summarum ac differentiarum (cujus elementa quædam in his Actis dedimus) communibus quoad licuit verbis hic expresso. This was the first instance published by M^r^ Leibnitz of solving the higher sort of Problemes. And henceforward the differential Method began to be cultivated

Mense Maio anni proximi Ioannes Iacobus Bernoullius Analysin dedit solutiones Problematis inveniendi Curvam æquabilis descensus, & proposuit Problema inveniendi Curvan Catenariam. Et Leibnitius adam. solvit mense Iulio & Iohannes idem solvit mense Decembri ejusdem anni, & solutiones lucem viderunt anno 1691 mense Iunio.

Eodem anno Ralphsonus noster & Halleius Librum MS de Quadratura Curvarum manibus suis triverunt, ut Ralphsonus in Historia fluxionum olim testatus est & Halleius adhuc testatur.

Anno 1692 Aug. 27 Newtonus Wallisio postulanti misit Propositionem primam ut et Quintam Libri de Quadraturis et eadem anno proximo in secundo Volumine operum ejus lucem viderunt. Eodem anno 1692 mense septembri, Leibnitius scripsit Quod [Ia. Bernoullius] inanit se fratremque in calculo meo plurimum profecisse, id agnosco, gratulorque non illis magis quam michi. Valde autem nose velim an ultra metas illas sint provecti ad quas ego per**{ven}**i.

Anno 1693 I. Bernoullius Marchionem Hospitalium multa docuit. Et Leibnitius ad Newtonum scripsit in hæc verba. Mirifice ampliaveras Geometriam tuis seriebus sed edito Principiorum opere ostendisti patere tibi quæ Analysi receptæ non subsunt. Conatus sum ego quoque Notis commodis adhibitis &c

Anno 1695 Celebratio Methodi differentialis in Hollandia ad aures Wallisij pervenit: qua occasione monuit moethodum illam Newtono ante annos 29 innotuisse.

Anno 1696 Marchio Hospitalius librum suum de infinite parvis edidit tribus scilicet annis postquam Wallisius methodum Newtoni inveniendi fluxiones primas secundas tertias aliasque ediderat.

<138r>

seruit D. Tschirnhautius: patet celeberrimum virum D. Isaacum Newtonum (circa annum, ut D. Wallisius in Præfatione ad Opera sua mathematica olim scripsit), 1665 & 1666) in methodum illam peregregiam fluxionum incidisse, cujusque . . . . in lucem emisit. Circa quidem anni 1670 . . . . . pag. tertio. Anno proximo (1671) Newtonus tractatum de hac methodo & methodo serierum conscripsit ut ipse in Epistola anno 1676 ad D. Leibnitium data testatus est. Anno 1672 Newtonus in Epistola ad Collinsium Data hanc methodum verbis generalibus descripsit & exemplo ducendi tangentes illustravit; Et **{explar}** hujus Epistolæ anno 1676 ad D. Leibnitium missa fuit. Eodem anno (1676 D. Newtonus eandem in dubus Epistolis ad D. Leibnitium missis nonnihil explicuit & partim exemplis illustravit partim literis transpositis ad hunc modum celatam impertivit (6accdæ13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx) quæque – – – – – – – et vice versa. Quo autem hæc tenderent perspexit Vir celeberrimus & anno sequente (1677) rescripsit se in parilem.

Tandem vero Anno 1704 tractatulum de hoc argumento publici juris fecit, quem ante annum 1676 composuerat ut ex iijs manifestum est quæ ex eodem desumpsit et in ejus Epistola secunda anno 1676 ad D. Leibnitium missa inservit, quemque circa Annum 1691 vir clarissimus Halleius & Ego Cantabrigiæ in manibus habuimus, tuam quidem perlegendo (ab ijs quibus eundem mutuo dederat) mulo obtritum.

<139v>

shall so long live not only — possess & enjoy the said Rangership Lodge Gardens & Park but also that for enabling her to keep the said house & gardens in repair & good order she may during her life possess & enjoy the said Mannour of Apscourt according to the intention of the said Testator &c

NB. At the time of making the Codicill, the great Canale & Walks about it were not begun nor designed.

And the said George Earl of Halifax doth for himself his Executors & Administrators covenan grant & agree to & with the said Catherine Barton that he the said Earl of Halifax shall at the request & will of the said Catherin Barton & at the common & equal charges of them both divide the said south & north Parks with a Pale or fence between them in such manner as they were heretofore divided when they were in the possession of different persons for hindring the passage of any other cattel besides the Deer out of either Park into the other.

Circa annum (ut Wallisius in Præfatione ad opere sua olim scripsit, 1665 & 1666

— et vice versa; eandemque in Epistola anno 1672 ad Collinsium scripta & postea cum D. Leibnitio communicata, verbis apertis descripsit et exemplo ducendi tangentes illustravit. Quo autem hæc truderent, perspexit

<140r>

Out of M^r Oldenbergs Answer to M^r Leibnitz dated 8 Dec 1674

24 — Quod de profectu in curvilinearum dimensione memoras bene se habet sed ignorare te nolim Curvarum dimetiendarum rationem & methodum a laudato Gregorio nec non ab Isaaco Newtono ad Curvas quaslibet tum mechanicas tum geometricas, quin et circulum se extende <140v> re ita scilicet ut si in aliqua Curva Ordinatam dederis, istius methodi beneficio possis lineæ Curvæ longitudinem, aream figuræ ejusdem centrum gravitatis, solidum rotundum ejusque superficiem sive erectam sive inclinatam, solidique rotundi segmenta secunda horumque omnium conversa invenire; quin et dato quolibet arcu in quadrato [Quadrante] Logarithmicum sinum tangentem vel secantem non cognito naturali & conversum computare. Quod vero ais neminem hactenus dedisse progressionem numerorum rationalium, cujus in infinitum continualæ summa sit æqualis circulo, id vero Tibi laudem fæliciter successisse de eo quidem tibi gratulori &c.

25 — Out of a Letter of M^r Leibnitz to M^r Oldenburg dated from Paris 30th March 1675.

Scribis Cl Newtonum vestrum habere methodum exhibendi quadraturas omnes omniumque curvarum, superficierum et solidorum ex revolutione genitorum dimensiones, & centrorum gravitatis inventiones, per approximationes scilicet, ita enim interpretor. Quæ methodus si est inversalis et commoda, meretur æstimari, nec dubito fore ingeniosissimo authore dignam. Addis tale quid Gregorio innotuisse.

*** 26 — Out of M^r Oldenburghs Answer dated at London 15th April 1675 & sent to M^r Leibnitz at Paris (I think by M^r Tschunhause.**

NB This answer was writ in English by Collins to M^r Oldenburg & dated April 10th & sent in Latin to M^r Leibnitz Apr 15. I want a copy of it in Latin.

* in another place

<141r>

<u>33</u> — Out of M^r Leibnitz's letter to M^r Oldenburgh dated at Paris 12 May, 1676.

— Cum Georgius Mohr Danus [alias Moor Belga] in Geometria et Analysi versatissimus nobis attulerit communicatam sibi Doctissimo Collinio vestro expressionem relationis inter arcum et sinum per infinitas series sequentes Posito sinu x, arcu z, radio 1.

$z\pi x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ &c

$x\pi z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 - \frac{1}{362880}z^9$ &c

Hæc, inquam, cum nobis attulerit ille, quæ mihi valde ingeniosa videtur, et posterior imprimis series elegantium quandam singularem habeat; ideo rem gratam mihi feceris, Vir Clarissime, si demonstrationem transmiseris. Habebis vicissim mea, ab his longe diversa, circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc annis ad te perscripsisse credo, demonstratione tamen non addita, quam nunc polio. Oro ut Cl^{mo} Collinio multam a me salutem dicas: is facile Tibi meteriam suppeditabit satis faciendi desiderio meo.

NB Upon the Receipt of this Letter 8th May St. v. M^r Oldenburgh & M^r Collins sollicited M^r Newton for an account of his Method of infinite series: which occasioned his two Letters dated Iune 13th & Octob 24th 1676, with M^r Leibnits answers dated at Paris $\overset{27}{17}$ August 1676 & 21 Iune 1677, all printed by D^r Wallis.

<142r>

{illeg} {M}^{r} Iames Bernoulli printed in the {illeg} Ianuary 1691.

{illeg}ianum (quem decennio ante [i.e. ante editionem **{illeg}** Leibnitiani] in Lectionibus suis Geometricis **{illeg}**actor, cujusque specimina sunt tota illa Propositionum **{illeg}**tarum farrago) intellexerit, alterum a Dn. L. inven**{illeg}**orare vix poterit; utpote qui in priori illo fundatus est, & **{illeg}**te in differentialium notatione & operationis aliquo compendio **{illeg}**o non differt.

Out of the Preface to the Analysis des Infinitement Petits published A: C. 1696.

M. Barrow n'en demeura pas là, il inventa aussi une espéce de calcul propre à cette méthode; mais il luy falloit aussi bien que dans cella de M. Descartes, ôter les fractions, & fair évanoüir lous les signes radicans pour s'en servir. Au défault de ce calcul est survenu celuy du célébre M. Leibnis; & ce scavant Géometre à commencé où M. Barrow & les autres avoient fini. Son calcul l'oa mené dans des pais jusqu' ici inconnus; et il y a fait des décovertes qui font l'elonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. M^rs^ Bernoulli ont été Les primiers qui so sont apperçus de la beauté de ce calcul: ils ont porté à une point qui les a mis en état de surmonter des difficultés qu'on n'auroit jamais osé tenter auparavant. And a little after. C'est encore une justice dûë au sçavant M. Newton, & que M. Leibnis luy a rendue luy même: Qu'il avoit aussi trové quelque chose de semblable au Calcul différentiel, comme il paroit par l'excellent Livre intitulé Philosophia naturalis principia Mathematica, qu'il nous donna en 1687, lequel est presque tout de ce calcul. Mais la Charactéristiq**{illeg}** de M. Leibnis rend le sien beaucoup plus facile & plus expéditif; outre qu'elle est d'un secours merveillous en bien des rencontres.

Out of a Paper of M^r^ Leibnitz published in the Iournal des Sçavans du 30 Aoust. 1694.

Il faut rendre cette justice à Mr. Newton (à qui Geometrie, l'Optique, & l'Astronomie out de grandes obligations;) qu'encore en ceci il a eu quelque chose de semblable en son chef, suivant ce qu'on a sçeu depuis. il est vray qu'il se sert d autres characteres: mais comms la characterisque **{mesme}** est, pour ainsi dire, une grand part de l'art d'inventer, je crois que la nôtres donnent plus d'overture.

NB. When M^r^ Leibnitz wrote the Paper above mentioned he had not seen the Notation by prickt letters, a notation more convenient

<143r>

Out of the Book of M^r^ Nicolas Fatio de Duillier intituled Investigatio Geometrica Solidi rotundi in quod minima fiat resistentia, & published in the year 1699.

Quæret forsan Cl. Leibnitius unde mihi cognitus sit iste Calculus quo utor. Ejus equidem fundamenta, ac plerasque Regulas, proprio Marte, Anno 1687, circa Mensem Aprilem et sequentes, alijque deinceps Annis, inveni; quo tempore neminem eo calculi genere, præter meipsum, uti putabam. Nec mihi minus cognitus foret si nondum natus esset Leibnitius. Alijs itaque glorietur discipulis, me certe non potest. Quod satis patebit si olim Literæ quæ inter Clarissimum Hugenium neque, interesserunt, publici juris fiant. Newtonum tamen primum ac pluribus Annis vetustissimum hujus Calculi Inventorem, ipsa rerum evidentia coactus agnosco: a quo utrum quicquam mutuatus sit Leibnitius secundus ejus Inventor, malo eorum quam meum sit judicium, quibus visæ fuerint Newtoni Literæ, alijque ejusdem Manuscripti Codices. Neque modestioris Newtoni silentium, aut prona Leibnitij sedulitas, Inventionem hujus Calculi sibi passim tribuentis, ullis imponet, qui ea pertreclarint quæ ipse evolvi, Instrumenta.

NB. D^r^ Fatio wrote this not as a judge but as a Witness. He related what he had seen, & his testimony is the stronger because it was against himself, & no answer has been returned to this testimony.

Out of the Introduction of M^r^ Iames Bernoulli to the third part of the Positions de Seriebus Infinitis Maintained by M^r^ Iames Herman & published at Basil in the year 1696.

Observarunt Geometræ plurimas dari quantitates, cujussmodi sunt pleræque lineæ Curvæ, et pleraque ab ijs comprehensa spatia quæ nullis numeris vel rationalibus vel surdis quantumvis compositis exprimi, h. e. quarum relationes ad alias datas sub nulla æquatione Algebraica definiti gradus cogi possent se quæ omnes æquationem gradus transcenderent; ac idcirco attendandum duxerunt, num quas uno aliquo numero effari non poterant, per seriem saltem infinitorum maxime rationalium, exprimere liceret, quibus ita continuo ad quæsitum accederetur, ut error tandem data quamvis quantitate minor fieret, totaque series exactum quæsiti valorem exhiberet. Inventum, quod, quantum constat, vergente demum hoc sæculo a Mercatore, Gregorio, Newtono, Leibnitio, in lucem productum fuit. Quid primi tres de his memoriæ prodiderunt, etiamnum ignoramus. Summus Geometra Leibnitius, qui rem haud dubie longissime provenit, inter alias series quas nobis in Aetis Lips. impertivit, unam inclio Actorum 1682. pro Circuli magnitudine dedit, sed methodum qua illuc pervenit, nusquam exposuit.

<144r>

Pag. 108. lin. 12, lin 40, & alibi lege Bernoulli.

Pag. 111 lin 2. pro habitu lege lubitu p. 112 lin ult pro Series lege Analysis.

p. 114. lin 18 read. a battel between what he calls my forlorn hope, & the army of his disciples in which he boasts himself happy, p. 115 l. 35 read 1673 p. 120. l. 7. read ea.

In Historia Fluxionum

p. 95 lin 10, pro Societatis Regiæ lege Concessus Arbitrorum delectorum a Societate Regia. Ib. lin 41 lege 10 Decem 1672 p. 94 l. 30. lege Collinius initio anni 1671 a Gregorio acceperat & anno 1675 mense cum D. Leibnitio communicaverat et D. Leibnitus eandem. Pag. 95 l. 1. Perplura. p. 93. l. 27 ea est quam

Pag. 108

p. 92. l. 17. ante annos 44 vel 45 hanc methodum invenisse, ac dignitates et subdignitates in speciebus designasse hoc modi vir[l] per $\overline{x+o}|^{\frac{m}{n}}$ in Seriem $x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} ox^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} oox^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{m^3-3mmn-2mn^3}{6n^3} ooox^{\frac{m-3n}{n}} + \&c$ conversam et fluxiones omnes exinde ad infinitum primas secundas &c per analogiam cum terminis hujus seriei designasse, uti in Epistola prima &c

<144v>

After the words of a **{**mademea**}{illeg}** **{**intente**}** The Committee in their Report affirmed that they had extracted from the ancient Letters Letter books & authentic Papers what relates to the Matter referred to them; all which Extracts delivered by them to the Society they beleived to be genuine & authentick. M^r Leibnitz with his usual candor accuses them for not printing the Letters entire (as well what did not relate to the matter referred to them, as what did relate to it,) as if it were not lawful to cite a Paragraph out of a book without citing the whole book. And he adds that out of partiality they omitted some things which made against me: But he has twice failed in his proof, & therefore he affirmed rashly what he did not know & his accusation is nothing else then railery. One while the Commercium Epistolicum is too little to b worth answering because the Letters should have been printed entire. Another while it is too bigg to be answered because to answer it would require another book as big & therefore the ancient authentic Letters, Letters books, & Manuscripts must be laid aside, & the Question be run off into a squabble about Philosophy & other matters & the great Mathematician, who in his Letter to M^r Leibnitz dated 7 Iune 1713, concealed his name that he might pass for an impartial Iudge; must now pull off his vizzard, & become a parti**{illeg}** in this squabble send a challenge by M^r Leibnitz to the Mathematicians in England: as if a Duell was a fitter way to decide the with then an appeal to antiquity, & Mathematicks it self must henceforward become the subject of Knight Errantry, & the Differential Method be the Dulcinea of the first Knights.

[1] NB < insertion from above the line of f 126v > Id est seribus in finitas æquationes (eo <127r> modo fiat) migrantibus <126v> Exempla habes taliu**{**m**}** serierum in <127r> Epistola Newtoni <126v> data 24 Octob. 1676, ubi dicit se <127r> ejusmodi series <126v> per methodum fluxionum inveni <127r> sse. < text from f 126r resumes >

[2] NB *b* Calculus ita se habet. Sint o et ov momenta ipsorum x et z ut supra et erit $aa+xx=zz$ et $aa+xx+{}^2xzo+oo=zz+ov+oovv$ et deletis æqualibus reliquisque per o divisus fit $2xo+o=2zv+ovv$ & deletis in finite parvis prodit $x=zv$ et $v=\frac{x}{z}=\frac{x}{\sqrt{aa+xx}}$. Et similibus computis ex data relatione inter abscissam & aream curvæ cujuscunque ad 1 applicatam, invenietur ordinata, id est ex data quavis æquatione fluentes quantitates involvente invenientur fluxiones.

[3] NB. Hæcce transmutationum methodus per methodum differentialem jam multum abbreviari et ellegantior reddi potest. Namque habilis $x=\frac{2r3}{r^2+z^2}$ $y=\frac{2zr2}{rr+zz}$, ex æquali**{illeg}**nt **{illeg}**ore per methodum illam fit $\frac{dx}{dz}=\frac{4r3z}{[2]rr+zz}$. Et ob æquales areas Q_1B_1DC & $C_1N_1P_3P$ est $NP\times dz={}_1B_1D\times dx$. seke $NP=\frac{yxdx}{dz}=\frac{8r^5z^2}{[3]rr+zz}.=\frac{8r^5z^2}{r^6+r^4z^2+r^2z^4+z^6}$. Mirum est quod Leibnitius methodum transmutationum per ambages hactenus tractavit si forte methodum differentialem jam invereat.

[4] NB M^r Leibnitz therefore had not as yet begun to apply differential Equations to inverse Problems of tangents.. But M^r Newton in his answer represents that he had two methods of solving these Problems by the fluxional Equations.

[5] 1

[6] 2

[7] 5

[8] 4

[9] 5