'De motu sphæricorum corporum in fluidis'

Author: Isaac Newton

Source: MS Add. 3965.7, ff. 40-54, Cambridge University Library, Cambridge, UK

Published online: September 2010

<40r>

**De motu sphæricorum Corporum
in fluidis.**

Def. 1. Vim centripetam appello qua corpus attrahitur vel impellitur versus punctum aliquod quod ut centrum spectatur.

Def. 2. Et vim corporis seu corpori insitam qua id conatur perseverare in motu suo secundum lineam rectam.

Def. 3. Et resistentiam quæ est medij regulariter impedientis.

Def. 4. Exponentes quantitatum sunt aliæ quævis quantitates proportionales expositis.

Lex 1. Sola vi insita corpus uniformiter in linea recta semper pergere si nil impediat.

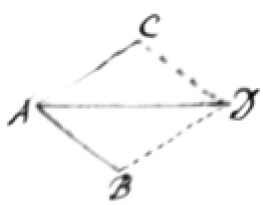
Lex 2. Mutationem status movendi vel quiescendi proportionalem esse vi impressæ et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Lex 3. Corporum dato spatio inclusorum eosdem esse motus inter se sive spatium illud quiescat sive moveat id perpetuò et uniformiter in directum absque motu circulari.

Lex 4. Mutuis corporum actionibus commune centrum gravitatis non mutare statum suum motus vel quietis. Constat ex Lege 3

Lex 5. Resistentiam medij esse ut medij illius densitas et corporis moti sphærica superficies & velocitas conjunctim.

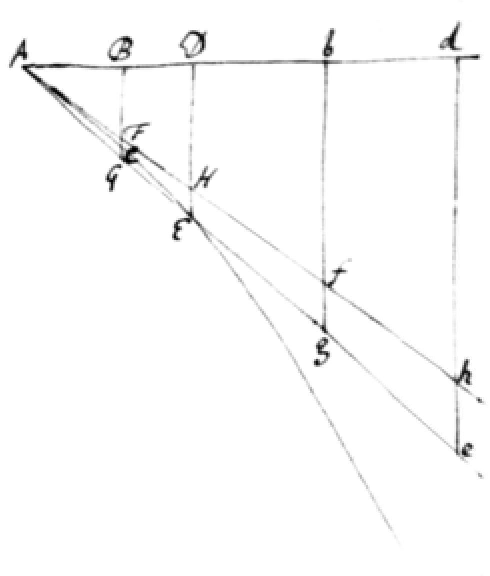
Lemma 1 Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere quo latera separatis.



Si corpus dato tempore vi sola M ferretur ab A ad B et vi sola N ab A ad C, compleatur parallelogrammum ABDC et vi utraque feretur id eodem tempore ab A ad D. Nam quoniam vis M agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis per Legem 2 nihil mutabit celeritatem accedendi ad lineam illam BD vi altera impressam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD sive vis AC imprimatur sive non, atque adeò in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa BD. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea CD, et proinde in utriusque lineæ concursu D reperiri necesse est.

Lemma 2 Spatium quod corpus urgente quacunque vi centripeta ipso motus initio describit, esse in duplicata ratione temporis.

<41r>



Exponantur tempora per lineas AB, AD datis Ab Ad proportionales, et urgente vi centripeta æquabili exponentur spatia descripta pea areas rectilineas ABF ADH perpendiculis BF, DH et rectâ quavis AFH terminatas ut exposuit Galilæus. Vrgente autem vi centripeta inæquabili exponantur spatia descripta per areas ABC, ADE curva quavis ACE quam recta AFH tangit in A, comprehensas. Age rectam AE parallelis BF, bf, dh occurrentem in G, g, e, et ipsis bf, dh occurrat AFH producta in f et h. Quoniam area ABC major est area ABF minor area ABG et area curvilinea ADEC major area ADH minor area ADEG erit area ABC ad aream ADEG major quam area ABF ad aream ADEG minor quam area ABG ad aream ADH hoc est major quam area Abf ad aream Ade minor quam area Abg ad aream Adh. Diminuantur jam lineæ AB, AD in ratione sua data usque dum puncta ABD coeunt et linea Ae conveniet cum tangente Ah, adeoque ultimæ rationes Abf ad Ade et Abg ad Adh evadent eædem cum ratione Abf ad Adh. Sed hæc ratio est dupla rationis Ab ad Ad seu AB ad AD ergo ratio ABC ad ADEC ultimis illis intermedia jam fit dupla rationis AB ad AD id est ratio ultima evanescentium spatiorum seu prima nascentium dupla est rationis temporum.

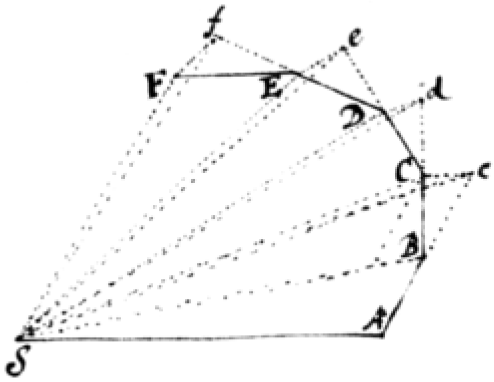
Lemma 3. Quantitates differentijs suis proportionales sunt continuè proportionales. Ponatur A ad A — B, ut B ad B — C & C ad C — D &c et dividendo fiet A ad B ut B ad C et C ad D &c

Lemma 4. Parallelogramma omnia circa datam Ellipsin descripta, esse inter se æqualia. Constat ex Conicis.

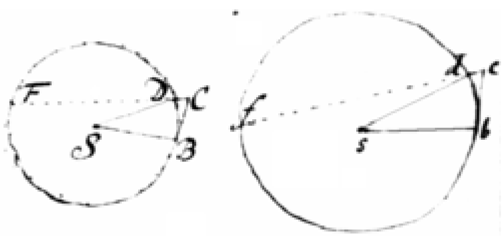
De motu corporum in medijs non resistentibus

Theorema 1. Gyrantia omnia radijs ad centrum ductis areas temporibus proportionales describere.

Dividatur tempus in partes æquales, et prima temporis parte describat corpus vi insita rectam AB. Idem secunda temporis parte si nil impediret [a][1] rectà pergeret ad c <42r> describens lineam Bc æqualem ipsi AB adeo ut radijs AS, BS, cS ad centrum actis confectæ forent æquales areæ ASB, BSc. Verum ubi corpus venit ad B agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatque corpus a recta Bc deflectere et pergere in recta BC. Ipsi BS parallela agatur cC occurrens BC in C et completa secunda temporis parte [b][2] corpus reperietur in C. Iunge SC et triangulum SBC ob parallelas SB, Cc æquale erit triangulo SBc atque adeo etiam triangulo SAB. Simili argumento si vis centripeta successivè agat in C, D, E &c faciens corpus singulis temporis momentis singulas describere rectas CD, DE, EF &c triangulum SCD triangulo SBC et SDE ipsi SCD et SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ describuntur. Sunto jam hæc triangula numero infinita et infinitè parva, sic, ut singulis temporis momentis singula respondeant triangula, agente vi centripeta sine intermissione, et constabit propositio.



Theorem. 2. Corporibus in circumferentijs circulorum uniformiter gyrantibus vires centripetas esse ut arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum.



Corpora B, b in circumferentijs circulorum BD, bd gyrantia simul describant arcus BD, bd. Sola vi insita describerentur tangentes BC, bc his arcubus æquales. Vires centripetæ sunt quæ perpetuò retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias, atque adeo hæ sunt ad invicem ut spatia ipsis superata CD, cd, id est productis CD, cd ad F et f ut $\frac{BC^{quad}}{CF}$ ad $\frac{bc^{quad}}{cf}$ sive ut $\frac{BD^{quad.}}{\frac{1}{2}CF}$ ad $\frac{bd^{quad.}}{\frac{1}{2}cf}$. Loquor de spatijs BD, bd minutissimis inque infinitum diminuendis sic ut pro $\frac{1}{2}$CF, $\frac{1}{2}$cf scribere liceat circulorum radios SB, sb. Quo facto constat Propositio.

Cor 1. Hinc vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum.

Cor 2. Et reciprocè ut quadrata temporum periodicorum applicata ad radios .

Cor 3. Vnde si quadrata temporum periodicorum sunt ut radij circulorum vires centripetæ sunt æquales, Et vice versa

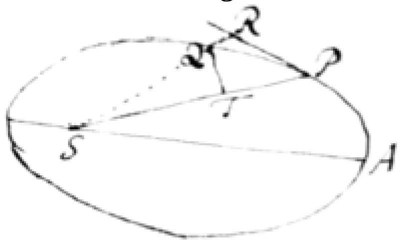
<43r>

Cor 4. Si quadrata temporum periodicorum sunt ut quadrata radiorum vires centripetæ sunt reciprocè ut radij: Et vice versa

Cor 5 Si quadrata temporum perïodicorum sunt ut cubi radiorum vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum: Et vice versa.

Schol. Casus Corollarij quinti obtinet in corporibus cœlestibus. Quadrata temporum periodicorum sunt ut cubi distantiarum a communi centro circum quod volvuntur. Id obtinere in Planetis majoribus circa solem gyrantibus inque minoribus circa Iovem jam statuunt Astronomi.

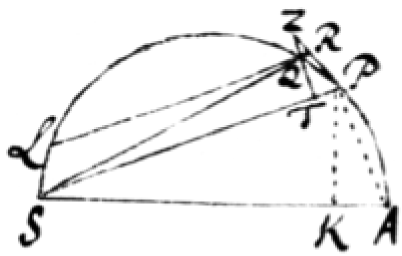
Theor. 3. Si corpus P circa centrum S gyrando, describat lineam quamvis curvam APQ, et si tangat recta PR curvam illam in puncto quovis P et ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur QR distantiæ SP parallela ac demittatur QT perpendicularis ad distantiam SP: dico, quod vis centripeta sit reciprocè ut solidum $\frac{SP^{quad.}\times QT^{quad.}}{QR}$, si modò solidi illius ea semper sumatur quantitas quæ ultimò fit ubi coeunt puncta P et Q.



Namque in figura indefinitè parva QRPT lineola nascens QR dato tempore est ut vis centripeta et data vi ut a[3] quadratum temporis atque adeo neutro dato ut vis centripeta et quadratum temporis conjunctim, id est ut vis centripeta semel et area SQP tempori proportionalis (vel duplum ejus SP $\times$ QT) bis. Applicetur hujus proportionalitatis pars utraque ad lineolam QR et fiet unitas ut vis centripeta et $\frac{SP^q\times QT^q}{QR}$ conjunctim, hoc est vis centripeta reciprocè ut $\frac{SP^q\times QT^q}{QR}$ Q. E. D.

Corol. Hinc si detur figura quævis et in ea punctum ad quod vis centripeta dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ quæ corpus in figuræ illius perimetro gyrare faciet. Nimirum computandum est solidum $\frac{SP^q\times QT^q}{QR}$ huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematîs sequentibus.

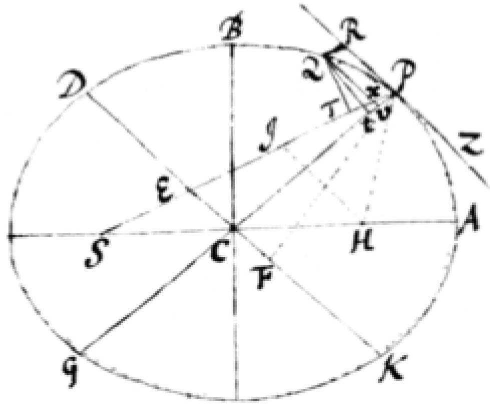
Prob. 1. Gyrat corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum aliquod in circumferentia.



Esto circuli circumferentia SQPA, centrum vis centripetæ S, corpus in circumferentia latum P, locus proximus in quem movebitur Q. Ad SA diametrum et SP demitte perpendicula PK,QT <44r> et per Q ipsi SP parallelam age LR occurrentem circulo in L et tangenti PR in R, et coeant TQ, PR in z. Ob similitudinem triangulorum zQR, zTP, SPA erit RP^q (hoc est QRL) ad QT^q ut SA^q ad SP^q. Ergo $\frac{QRL\times SP^q}{SA^q}=QT^q$. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP^q}{QR}$ et punctis P et Q coeuntibus scribatur SP pro RL. Sic fiet $\frac{SP^{qc}}{SA^q}=\frac{QT^q\times SP^q}{QR}$. Ergo a[4] vis centripeta reciproce est ut $\frac{SP^{qc}}{SA^q}$, id est (ob datum SA^q) ut quadrato–cubus distantiæ SP. Quod erat inveniendum.

Schol. Cæterum in hoc casu et similibus concipiendum est quod postquam corpus pervenit ad centrum S, id non amplius redibit in orbem sed abibit in tangente. In spirali quæ secat radios omnes in dato angulo vis centripeta tendens ad spiralis principium est in ratione triplicata distantiæ reciprocè, sed in principio illo recta nulla positione determinata spiralem tangit.

Prob. 2. Gyrat corpus in Ellipsi veterum: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.



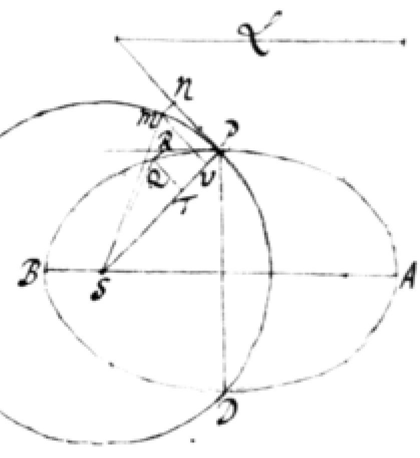
Sunto CA, CB semi–axes Ellipseos, GP, DK diametri conjugatæ, PF, Qt perpendicula ad diametros QV ordinatim applicata ad diametrum GP et QVPR parallelogrammum. His constructis erit C ex Conicis) PVG ad QV^q ut PC^q ad CD^q et QV^q ad Qt^q ut PC^q ad PF^q et conjunctis rationibus PVG ad Qt^q ut PC^q ad CD^q et PC^q ad PF^q, id est VG ad $\frac{Qt^q}{PV}$ ut PC^q ad $\frac{CD^q \times PF^q}{PC^q}$. Scribe QR pro PV a[5] et $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P et Q coeuntibus) 2PC pro VG et ductis extremis et medijs in se mutuò fiet $\frac{Qt^q \times PC^q}{QR} = \frac{2BC^q \times CA^q}{PC}$. Est b[6] ergo vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BC^q \times CA^q}{PC}$ id est (ob datum $2BC^q \times CA^q$) ut $\frac{1}{PC}$, hoc est directè, ut distantia PC. Q. E. I.

Prob. 3. Gyrat corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Esto Ellipseos superioris umbilicus S. Agatur SP secans Ellipseos diametrum DK in E et lineam QV in X et compleatur parallelogrammum QXPR.. Patet EP æqualem esse semi–axi majori AC eò, quod actâ ab altero Ellipseos umbilico H linea HI ipsi EC parallela, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI, adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH quæ conjunctim axem totum 2AC adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et Ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2BC^q}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times PV$ ut QR ad PV id est ut PE (seu AC) ad PC et $L \times PV$ ad <45r> GVP ut L ad GV et GVP ad QV^q ut CP^q ad CD^q. et QV^q ad QX^q punctis Q et P coeuntibus fit ratio æqualitatis et QX^q seu QV^q est ad QT^q ut EP^q ad PF^q id est ut CA^q ad PF^q sive a[7] ut CD^q ad CB^q. et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad QT^q ut AC ad $PC + L$ ad $GV + CP^q$ ad $CD^q + CD^q$ ad CB^q, id est ut $AC \times L$ (seu $2BC^q$) ad $PC \times GV + CP^q$ ad CB^q, sive ut 2PC ad GV. Sed punctis Q et P coeuntibus æquantur 2PC & GV Ergo et $L \times QR$, QT^q æquantur. Ducatur pars utraque in $\frac{SP^q}{QR}$ et fiet $L \times SP^q = \frac{SP^q \times QT^q}{QR}$. Ergo b[8] vis centripeta reciprocè est ut $L \times SP^q$ id est reciprocè in ratione duplicata distantiæ SP. Q. E. I.

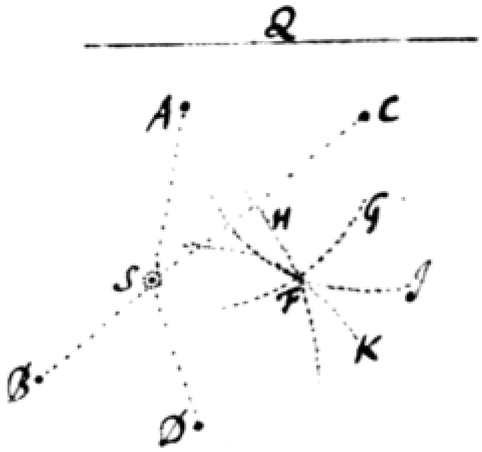
Schol. Gyrant ergo Planetæ majores in Ellipsibus habentibus umbilicum in centro solis, et radijs ad solem ductis describunt areas temporibus proportionales, omnino ut supposuit Keplerus. Et harum Ellipseon latera recta sunt quantitas $\frac{QT^q}{QR}$, quæ ultimò fit ubi coeunt puncta P et Q.

Theor. 4. Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ a centro, quadrata temporum periodicorum in Ellipsibus sunt ut cubi transversorum axium.

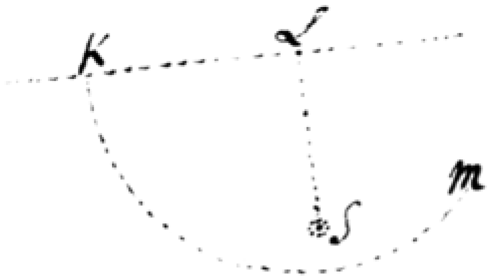


Sunto Ellipseos axis transversus AB, axis alter BD latus rectum L, umbilicus alteruter S. Centro S intervallo SP describatur circulus PMD. Et eodem tempore describant corpora duo gyrantia arcum Ellipticum PQ et circularem PM, vi centripeta ad umbilicum S tendente. Ellipsin et circulum tangant PR, PN in puncto P. Ipsi PS agantur parallelæ QR, MN tangentibus occurrentes in R et N. Sint autem figuræ PQR, PMN indefinitè parvæ sic ut (per Schol. Prob. 3) fiat $L \times QR = QT^q$ et $2SP \times MN = MV^q$. Ob communem a centro S distantiam SP et inde æquales vires centripetas ·[9] sunt MN et QR æquales. Ergo QT^q ad MV^qest ut L ad 2SP, et QT ad MV ut medium proportionale inter L et 2SP seu PD ad 2SP. Hoc est area SPQ ad aream SPM ut area tota. Ellipseos ad aream totam circuli. Sed partes arearum singulis momentis genitæ sunt ut areæ SPQ et SPM atque adeo ut areæ totæ et proinde per numerum momentorum multiplicatæ simul evadent totis æquales. Revolutiones igitur eodem tempore in Ellipsibus perficiuntur ac in circulis quorum diametri sunt axibus transversis Ellipseon æquales. Sed (per Cor. 5 Theor. 2) quadrata <46r> temporum periodicorum in circulis sunt ut cubi diametrorum. Ergo et in Ellipsibus Q. E. D.

Schol. Hinc in systemate cœlesti ex temporibus periodicis Planetarum innotescunt proportiones transversorum axium Orbitarum. Axem unum licebit assummere. Inde dabuntur cæteri. Datis autem axibus determinabuntur Orbitæ in hunc modum. Sit S locus solis seu Ellipseos umbilicus unus A, B, C, D loca Planetæ observatione inventa et Q axis transversus Ellipseos. Centro A radio Q – AS describatur circulus FG et erit Ellipseos umbilicus alter in hujus circumferentia. Centris B, C, D, &c intervallis Q – BS, Q – CS, Q – DS &c describantur itidem alij quotcunque circuli et erit umbilicus ille alter in omnium circunferentijs atque adeo in omnium intersectione communi F. Si intersectiones omnes non coincidunt, sumendum erit punctum medium pro umbilico. Praxis hujus commoditas est quod ad unam conclusionem eliciendam adhiberi possint ut inter se expeditè comparari observationes quamplurimæ. Planetæ autem loca singula A,B,C,D &c ex binis observationibus, cognito Telluris orbe magno invenire docuit Halleus. Si orbis ille magnus nondum satis exactè determinatus habetur, ex eo propè cognito, determinabitur orbita Planetæ alicujus, puta Martis, propius: Deinde ex orbita Planetæ per eandem methodum determinabitur orbita telluris adhuc propius: Tum ex orbita Telluris determinabitur orbita Planetæ multò exactiùs quam priùs: Et sic per vices donec circulorum intersectiones in umbilico orbitæ utriusque exactè satis conveniant.



Hac methodo determinare licet orbitas Telluris, Martis, Iovis et Saturni, orbitas autem Veneris et Mercurij sic. Observationibus in maxima Planetarum a sole digressione factis, habentur orbitarum tangentes. Ad ejusmodi tangentem KL demittatur a Sole perpendiculum SL centroque L et intervallo dimidij axis Ellipseos describatur circulus KM. Erit centrum Ellipseos in hujus circumferentia, adeoque descriptis hujusmodi pluribus circulis reperietur in omnium intersectione. Cognitis tandem orbitarum dimensionibus, longitudines horum Planetarum postmodum exactiùs ex transitu suo per discum solis determinabuntur.

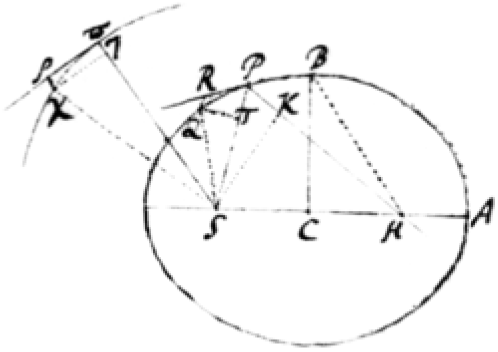


<47r>

Cæterum totum cœli Planetarij spatium vel quiescit (ut vulgò creditur) vel uniformiter movetur in directum et perinde Planetarum commune centrum gravitatis (per Legem. 4) vel quiescit vel una movetur. Vtroque in casu motus Planetarum inter se (per Legem 3) eodem modo se habent, et eorum commune centrum gravitatis respectu spatij totius quiescit, atque adeo pro centro immobili systematis totius Planetarij haberi debet. Inde verò systema Copernicæum probatur a priori. Nam si in quovis Planetarum situ computetur commune centrum gravitatis hoc vel incidet in corpus solis vel ei semper proximum erit. Eo solis a centro gravitatis errore fit ut vis centripeta non semper tendat ad centrum illud immobile et inde ut planetæ nec moveantur in Ellipsibus exactè neque bis revolvant in eadem orbita. Tot sunt orbitæ Planetæ cujusque quot revolutiones, ut fit in motu Lunæ et pendet orbita unaquæque ab omnium Planetarum motibus conjunctis, ut taceam eorum omnium actiones in se invicem. Tot autem motuum causas simul considerare et legibus exactis calculum commodum admittentibus motus ipsos definire superat in fallor vim omnem humani ingenij. Omitte minutias illas et orbita simplex et inter omnis errores mediocris erit Ellipsis de qua jam egi. Si quis hanc Ellipsis ex tribus observationibus per computum trigonometricus (ut solet) determinare tentaverit, hic minus caute rem aggressus fuerit. Participabunt observationes illæ de minutijs motuum irregularium hic negligendis adeoque Ellipsim de justa sua magnitudine et positione (quæ inter omnes errores mediocris esse debet) aliquantulum deflectere facient, atque tot dabunt Ellipses ab invicem discrepantes quot adhibentur observationes trinæ. Conjungendæ sunt igitur et una operatione inter se conferendæ observationes quamplurimæ, quæ se mutuò contemperent et Ellipsin positione et magnitudine mediocrem exhibeant.

Prob. 4 Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ a centro, et cognita vis illius quantitate, requiritur Ellipsis quam corpus describet de loco dato cum data celeritate secundum datam rectam emissum.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea sit quæ corpus $\overline{\omega}$ in circulo πχ centro S intervallo quovis S$\overline{\omega}$ descripto gyrare faciat. De loco P secundum lineam PR emittatur corpus P, <48r> et mox inde cogente vi centripeta deflectat in Ellipsin PQ. Hanc igitur recta PR tanget in P. Tangat itidem recta πρ circulum in ω sitque PR ad ωρ ut prima celeritas corporis emissi P ad uniformem celeritatem corporis $\overline{\omega}$. Ipsis SP et Sω parallelæ agantur RQ et ρχ hæc circulo in χ illa Ellipsi in Q occurrens, et a Q et χ ad SP et Sω demittantur perpendicula QT et χτ. Est RQ ad ρχ ut vis centripeta in P ad vim centripetam in $\overline{\omega}$ id est ut S$\overline{\omega}^{quad.}$, ad $SP^{quad.}$, adeoque datur illa ratio. Datur etiam ratio QT ad RP et ratio RP ad Sω seu χτ et inde composita ratio QT ad χτ. De hac ratione duplicata auferatur ratio data QR ad χρ et manebit data ratio $\frac{QT^q}{QR}$ ad $\frac{\chi\tau^q}{\chi\rho}$, id est (per Schol. Prob. 3) ratio lateris recti Ellipseos ad diametrum circuli. Datur igitur latus rectum Ellipseos. Sit istud L. Datur præterea Ellipseos umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH et dabitur positione linea PH in qua umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpendiculo SK et erecto semiaxe minore BC est [a][10]

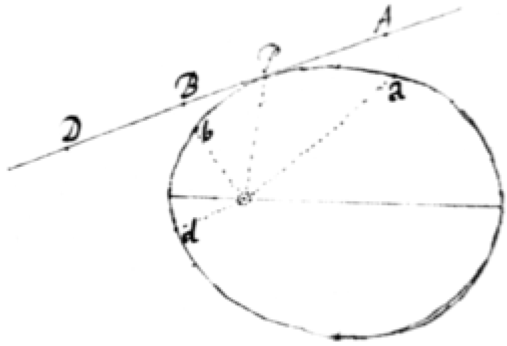


$$SP^q - 2KPH + PH^q = SH^q = 4CH^q$$
$$= 4BH^q - 4BC^q = \overline{SP+PH}^{quad.} - L \times \overline{SP+PH} = SP^q + 2SPH + PH^q - L \times \overline{SP+PH}$$

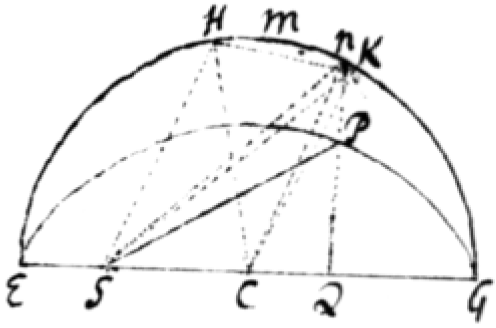
. Addantur utrobique $2KPH + L \times SP + PH - SP^q - PH^q$ et fiet $L \times SP + PH = 2SPH + 2KPH$ seu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Vnde datur umbilicus alter H. Datis autem umbilicis una cum axe transverso $SP + PH$, datur Ellipsis. Q. E. I.

Hæc ita se habent ubi figura Ellipsis est. Fieri enim potest ut corpus moveatur in Parabola vel Hyperbola. Nimirum si tanta est corporis celeritas ut sit latus rectum L æquale $2SP + 2KP$, figura erit Parabola umbilicum habens in puncto S et diametros omnes parallelas lineæ PH. Sin corpus majori adhuc celeritate emittitur movebitur id in Hyperbola habente umbilicum unum in puncto S alterum in puncto H sumpto ad contrarias partes puncti P et axem transversum æqualem differentiæ linearum PS et PH.

Schol. Iam vero beneficio soluti hujus Problematis Cometarum orbitas definire concessum est, et inde revolutionum tempora, & ex orbitarum magnitudine, excentricitate, Aphelijs, inclinationibus ad planum Eclipticæ et nodis inter–se collatis cognoscere an idem Cometa ad nos sæpius redeat. Nimirum ex quatuor observationibus <49r> locorum Cometæ, juxta Hypothesin quod Cometa movetur uniformiter in linea recta, determinanda est ejus via rectilinea. Sit ea APBD, sintque A, P, B, D loca cometæ in via illa temporibus observationum, et S locus Solis. Ea celeritate qua Cometa uniformiter percurrit rectam AD finge ipsum emitti de locorum suorum aliquo P et vi centripeta mox correptum deflectere a recto tramite et abire in Ellipsi Pbda. Hæc Ellipsis determinanda est ut in superiore Problemate. In ea sunto a, P, b, d loca Cometæ temporibus observationum. Cognoscantur horum locorum e terra longitudines et latitudines. Quanto majores vel minores sunt his longitudines et latitudines observatæ tantò majores vel minores observatis sumantur longitudines et latitudines novæ, id adeo ut correctiones respondeant erroribus.. Ex his novis inveniatur denuò via rectilinea cometæ et inde via Elliptica ut prius. Et loca quatuor nova in via Elliptica prioribus erroribus aucta vel diminuta jam congruent cum observationibus quam proxime. At si errores etiamnum sensibiles manserint potest opus totum repeti. Et nè computa Astronomos molestè habeant suffecerit hæc omnia per descriptionem linearum determinare.



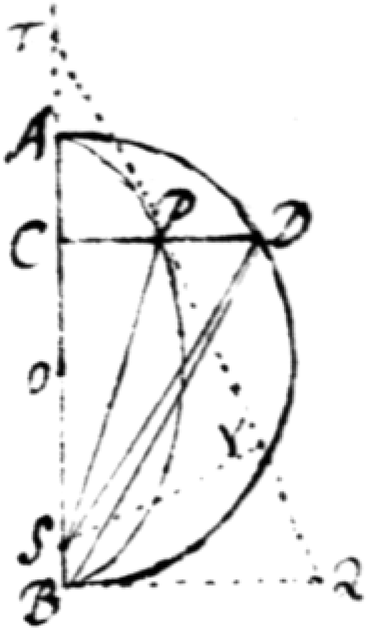
Verùm areas aSP, PSb, bSd temporibus proportionales assignare difficile est. Super Ellipseos axe majore EG describatur semicirculus EHG. Sumatur angulus ECH tempori proportionalis. Agatur SH eique parallela CK circulo occurrens in K. Iungatur HK est circuli segmento HKM (per tabulam segmentorum vel secus) æquale fiat triangulum SKN. Ad EG demittatur perpendiculum NQ, et in eo capiatur PQ ad NQ ut est Ellipseos axis minor ad axem majorem et erit punctum P in Ellipsi atque acta recta SP abscindet aream Ellipseos EPS tempori proportionalis. Namque area HSNM triangulo SNK aucta et huic æquali segmento HKM diminuta fit triangulo HSK id est triangulo HSC æquale. Hæc æqualia addita areæ ESH, facient areas æquales EHNS & EHC. Cùm igitur Sector EHC tempori proportionalis sit et area EPS areæ EHNS, erit etiam area EPS tempori proportionalis



<50r>

Prob. 5. Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ a centro, spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus describit.

Si corpus non cadit perpendiculariter describet id Ellipsin puta APB cujus umbilicus inferior puta S congruet cum centro. Id ex jam demonstratis constat. Super Ellipseos axe majore AB describatur semicirculus ADB et per corpus decidens transeat recta DPC perpendicularis ad axem, actisque DS, PS, erit area ASD areæ ASP atque adeò etiam tempori proportionalis. Manente axe AB minuatur perpetuò latitudo Ellipseos, et semper manebit area ASD tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum et orbita APB jam coincidente cum axe AB et umbilico S cum axis termino B descendet corpus in recta AC et area ABD evadet tempori proportionalis. Definietur itaque spatiū AC quod corpus de loco A perpendiculariter cadendo tempore dato describit si modò tempori proportionalis capiatur area ABD et a puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC.Q.E.F.



Schol. Hactenus motum corporum in modijs non resistentibus exposui, id adeo ut motus corporum cœlestium in æthere determinarem. Ætheris enim puri resistentia quantum sentio vel nulta est vel perquam exigua. Valide resistit argentum vivum, longè minùs aqua, aer verò longè adhuc ininùs. Pro densitate sua quæ ponderi fere proportionalis est atque adeo (pene dixerim) pro quantitate materiæ sue crasse resistunt hæc media. Minuatur igitur aeris materia crassa et in eadem circiter proportione minuatur medij resistentia usque dum ad ætheris tenuitatem perventum sit. Celeri cursu equitantes vehementer aeris resistentiam sentiunt, at navigantes exclusis e mari interiore ventis nihil omninò ex æthere præter fluente patiuntur. Si aer liberè interflueret particulàs corporum et sic ageret, non modo in externam totius superficiem, sed etiam in superficies singularum partium, longè major foret ejus resistentia. Interfluit æther liberrimè nec tamen resistit sensibiliter. Cometas infra orbitam Saturni descendere jam sentiunt Astronomi saniores quotquot distantias eorum ex orbis magni parallaxi præterpropter colligere norunt: hi igitur celeritate immensa in omnes cœli nostri partes indifferenter feruntur, nec tamen vel crinem seu vaporem capiti circundatum resistentia ætheris impeditum et abreptum amittunt. Planetæ verò jam per annos millenos in motu suo perseverarunt, <51r> tantum abest ut impedimentum sentiant.

Demonstratis igitur legibus reguntur motus in cœlis. Sed et in aere nostro, se resistentia ejus non consideratur, innotescunt motus projectilium per Prob. 4. et motus gravium perpendiculariter cadentium per Prob. 5. posito nimirum quod gravitas sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ a centro terræ. Nam virium centripetarum species una est gravitas; et computanti mihi prodijt vis centripeta qua luna nostra detimetur in motu suo menstruo circa terram, ad vim gravitatis his in superficie terræ, reciprocè ut quadrata distantiarum a centro terræ quamproximè. Ex horologij oscillatorij motu tardiore in cacumine montis præalti quàm in valte liquet etiam gravitatem ex aucta nostra a terræ centro distantia diminui, sed qua proportione nondum observatum est.

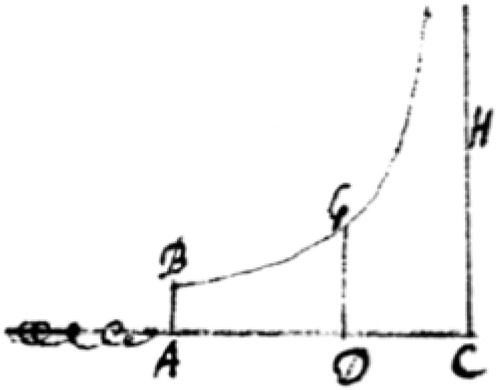
Cæterum projectitium motus in aere nostro referendi sunt ad immensum et revera immobile cœlorum spatium, non ad spatium mobile quod una cum terra et aere nostro convolvitur. et a rusticis ut immobile spectatur. Invenienda est Ellipsis quam projectile describit in spatio illo verè immobili et inde motus ejus in spatio mobili determinandus. Hoc pacto colligitur grave, quod de ædeficij sublimis vertice demittitur, inter cadendum deflectere aliquantulum a perpendiculo, ut et quanta sit illa deflexio et quam in partem. Et vicissim ex deflexione experimentis comprobata colligitur motus terræ. Cum ipse olim hanc deflexionem Clarissimo

Hookio significarem, is experimento ter facto rem ita se habere confirmavit, deflectente semper gravi a perpendiculo versus orientem et austrum ut in latitudine nostra boreali oportuit.

De motu corporum in medijs resistentibus.

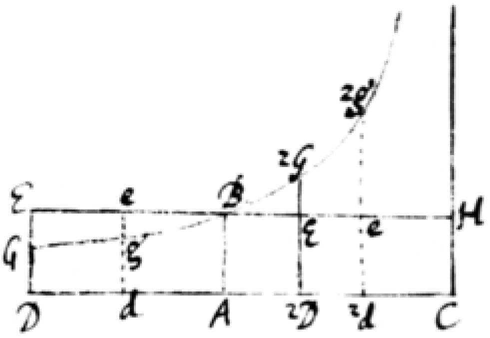
Prob. 6. Corporis sola vi insita per medium similare resistens delati motum definire.

Asymtotis rectangulis ADC, CH describatur Hyperbola secans perpendicula AB, DG in B, G. Exponatur tum corporis celeritas tum resistentia medij ipso motus initio per lineam AC datæ longitudinis, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitem DC, et tempus exponi potest per aream ABGD atque spatium eo tempore descriptum per lineam AD. Nam celeritati <52r> proportionalis est resistentia medij et resistentiæ proportionale est decrementum celeritatis, provide si tempus in partes æquales dividatur, celeritates ipsarum initijs erunt differentijs suis proportionales. Decrescit ergo celeritas in [a][11] proportione Geometrica dum tempus crescit in Arithmetica. Sed proportione priore decrescit linea DC et posteriore crescit area ABGD, ut notum est. Ergo tempus per aream et celeritas per lineam illam rectà expositur. Q. E. F. Porro celeritati atque adeo decremento celeritatis proportionale est incrementum spatij descripti sed et decremento lineæ DC proportionale est incrementum lineæ AD. Ergo incrementum spatij per incrementum lineæ AD, atque adeo spatium ipsū per lineam illam rectè exponitur. Q. E. F.

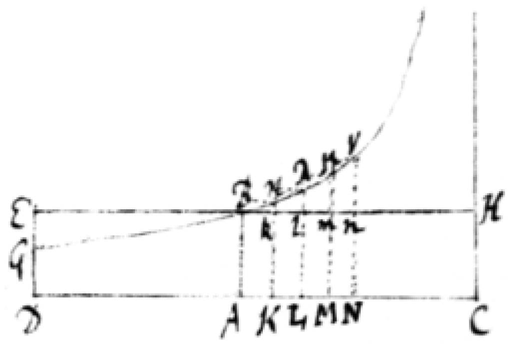


Prob. 7. Posita uniformi vi centripeta, motum corporis in medio similari rectà ascendentis ac descendentis definire.

Corpore ascendente exponatur vis centripeta per datum quod vis rectangulum BC et resistentia medij initio ascensus per rectangulum BD sumptum ad contrarias partes. Asymptotis rectangulis AC, CH, per punctum B describatur Hyperbola secans perpendicula DE, de in G, g et corpus ascendendo tempore DGgd describet spatium EGge, tempore DGBA spatium ascensus totius EGB, tempore AB^2G^2D spatium descensus Bg^2G atque tempore $2D^2G^2g^2d$ spatium descensus $2GEe^2g$: et celeritas corporis resistentiæ medij proportionalis, erit in horum temporum periodis ABED, ABed, nulla, ABE^2D, ABe2d; atque maxima celeritas quam corpus descendendo potest acquirere erit BC



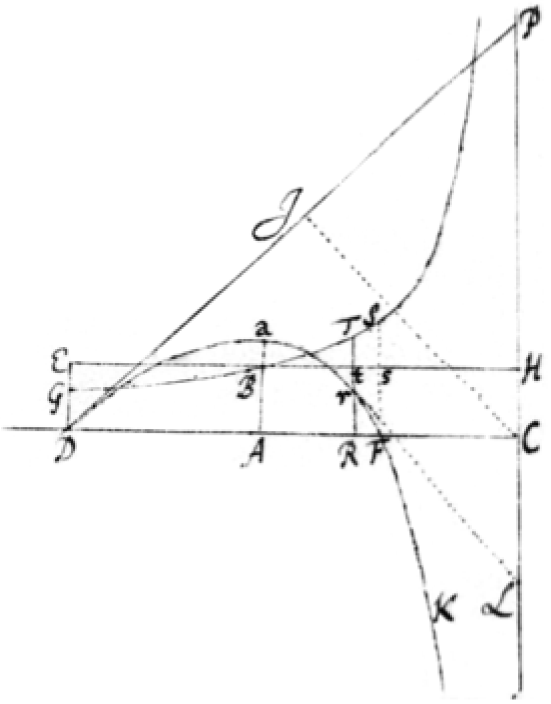
Resolvatur enim rectangulum AH in rectangula imnumera Ak, Kl, Lm, Mn &c quæ sint ut incrementa celeritatum æqualibus totidem temporibus facta et erunt nihil, Ak, Al, Am, An &c ut celeritates totæ atque adeo [a][12] ut resistentiæ medij in principio singulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK, vel ABHC ad ABkK ut vis centripeta ad resistentiam temporis secundi in principio deque vè centripeta subducantur resistentiæ et manebunt ABHC, KkHC, LlHC, NnHC &c ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur atque adeo ut incrementa celeritatur, id est ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn &c & [b][13] proinde in progresione geometrica. Quare si rectæ Kk, Ll, Mm, Nn productæ occurrant Hyperbolæ in κ, λ, μ ν &c erunt areæ ABκK, KκλL, LλμM, MμνN &c æquales adeoque tum temporibus æqualibus tum viribus centripetis semper æqualibus analogæ. <53r> Est autem areæ ABκK ad aream Bkκ ut Kκ ad $\frac{1}{2}$kκ seu AC ad $\frac{1}{2}$AK hoc est ut vis centripeta ad resistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areæ κKLλ λLMμ, μMNν &c sunt ad areas κklλ, λlmμ, μmnν &c ut viram centripeta ad resistentias in medio tem{po}ris secundi tertij quanti &c. Proinde cum areæ æquales AKκ, λLMμ, μMNν &c sint viribus centripetis analogæ, erunt areæ Bkκ, κklλ, λlmμ, μmnν &c resistentijs in medio singulorum temporum, hoc est celeritatibus atque adeo descriptis spatijs analogæ. Sumantur analogarum summæ et erunt areæ Bkκ, BLλ, Bmμ, Bnν &c spatijs totis descriptis



analogæ nec non areæ ABκK, ABλL, ABμM, ABνN &c temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis ABλL describit spatium BLλ, et tempore Lλμn spatium λlnν, Q. E. D. Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. Q. E. D.

Schol. Beneficio duorum novissimorum problematum innotescunt motus projectilium in aere nostro, ex hypothesi quod aer iste similaris sit quodque gravitas uniformiter & secundum lineas parallelas agat. Nam si motus omnis obliquus corporis projecti distinguatur in duos, unum ascensus vel descensus alterum progressus horizontalis: motus posterior determinabitur per problema sextum, prior per septimum ut fit in hoc diagrammate.

Ex loco quovis D ejaculetur corpus secundum lineam quamvis rectam DP, & per longitudinem DP exponatur ejusdem celeritas sub initio motus. A puncto P ad lineam horizontalem DC demittatur perpendiculum PC, ut et ad DP perpendiculum Cg, ad quod sit DA ut est resistentia medij ipso motus initio ad vim gravitatis. Erigatur perpendiculum AB cujusvis longitudinis et completis parallælogrammis DABE, CABH, per punctum B asymptotis DC, CP describatum Hyperbola secans DE in G. Capiatur linea N ad EG ut est DC ad CP et ad rectæ DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT quod occurrat Hyperbolæ in T et rectæ EH in t, in eo cape $Rr = \frac{DRtE - DRTBG}{N}$ et projectile tempore DRTBG perveniet ad punctum r, describens curvam lineam DarFK quam punctū r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, et postea semper appropinquas Asymptoton PCL. Estque celeritas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL.



Si proportio resistentiæ aeris ad vim gravitatis nondum innotescit: cognoscantur (ex observatione aliqua) anguli ADP, AFr in quibus curva DarFK secat lineam horizontalem DC. <54r> Super DF constituatur rectangulum DFsE altitudinis cujusvis, ac describatur Hyperbola rectangula ea lege ut ejus una Asymptotos sit DF, ut areæ DFsE, DFSBG æquentur et ut sS sit ad EG sicut tangens anguli AFr ad tangentem anguli ADP. Ab hujus Hyperbolæ centro C ad rectam DP demitte perpendiculum CI ut et a puncto B ubi ea secat rectam Es, ad rectam DC, perpendiculum BA, et habetitur proportio quæsita DA ad CI, quæ est resistentiæ medij ipso motus initio ad gravitatem projectilis. Quæ omnia ex prædemonstratis facilì eruuntur. Sunt et alij modi inveniendi resistentiam aeres quos lubens prætereo. Postquam autem inventa est hæc resistentia in uno casu, capienda est ea in alijs quibusvis ut corporis celeritas et supericies sphærica conjunctim, (Nam projectile sphæricum esse passim suppono;) vis autem gravitatis innotescit ex pondere. Sic habebitur semper proportio resistentiæ ad gravitatem seu lineæ DA ad lineæm CI. Hac proportione et angulo ADP determinatur specie figura DarFK LP: et capiendo longitudinem DP proportionalem celeritati projectilis in loco D determinatur eadem magnitudine sic ut altitudo Aa maximæ altitudini projectilis et longitudo DF longitudini horizontali inter ascensum et easum projectilis semper sit proportionalis, atque adeo ex longitudine DF in agro semel mensurata semper determinet tum longitudinem illam DF tum alias omnes dimensiones figuræ DaFK quam projectile describit in agro. Sed in colligendis hisce dimensionibus usurpandi sunt logarithmi pro area Hyperbolica DRTBG.

Eadem ratione determinantur etiam motus corporum gravitate vel levitate & vi quacunque simul et semel impressa moventium in aqua.

[1] a Lex 1.

[2] b Lem. 1.

[3] a Lem. 2.

[4] a Cor. Theor. 3.

[5] a Lem 4

[6] b Cor. Theor. 3

[7] a per Lem: 4

[8] b Cor. Th. 3.

[9] . Lex 2

[10] a

[11] a Lem. 3

[12] a Lex 5

[13] b Lem. 3