De Motu Corporum (Liber Secundus) (1726)

Author: Isaac Newton
Source: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (London: 1726).
Published online: December 2009

<230>

DE

MOTU CORPORUM
LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentia amissus est ut spatium movendo confectum.

NAm cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc est, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. *Q.E.D.*

Corol. Igitur si corpus, gravitate omni destitutum, in spatiis liberis sola vi insita moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continue proportionales.

Sit A ad $A-B$ ut B ad $B-C$ & C ad $C-D$, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q.E.D.*

<231>

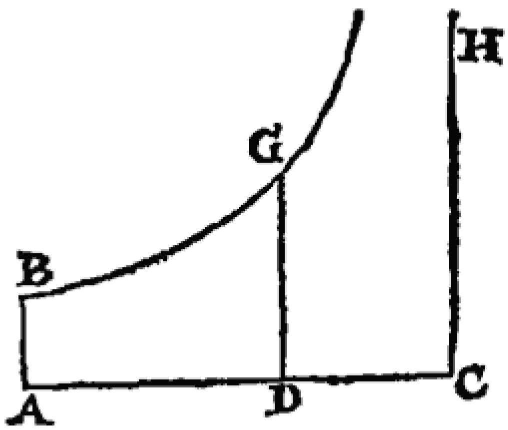
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem sola vi insita per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometrica, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per lem. I. lib. II.) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continua, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter se iisdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compositæ inter se eædem sunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam casu continue proportionales. *Q.E.D.*

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ, (per prop. I. lib. II.) & propterea etiam ut totæ. *Q.E.D.*

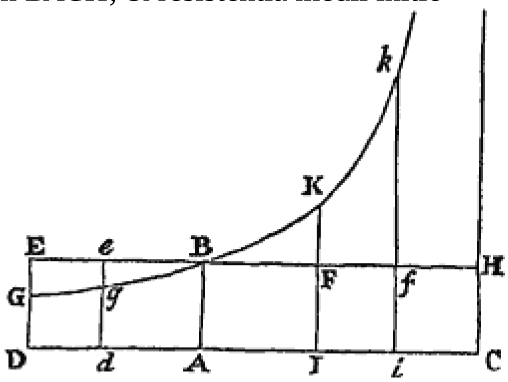
Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ (per prop. I. lib. II.) & propterea etiam ut totæ. *Q.E.D.*



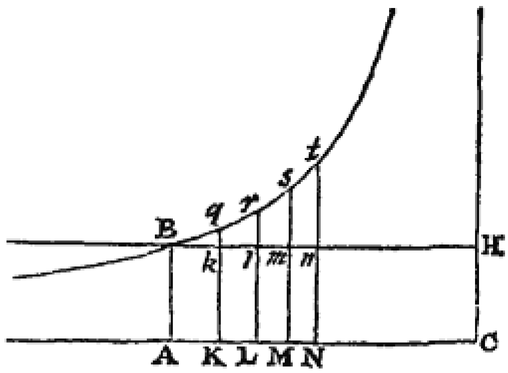
Corol. Hinc si asymptotis rectangulis *AC, CH* describatur hyperbola *BG*, sintque *AB, DG* ad asymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC:* exponi potest tempus per aream *ABGD*, & spatium <232> eo tempore descriptum per lineam *AD*. Nam si area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta *DC* in ratione geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ *AC* æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eadem ratione.

PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui, dum in medio similari recta ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.



Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & resistentia medii initio ascensus per rectangulum *BADE* sumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Asymptotis rectangulis *AC, CH*, per punctum *B* describatur hyperbola secans perpendicula *DE, de* in *G, g*; & corpus ascendendo tempore *DGgd* describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*; tempore *ABKI* spatium descensus *BFK*, atque tempore *IKki* spatium descensus *KFfk*; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED, ABed*, nulla, *ABFI, ABfi* respective; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BACH*.



Resolvatur enim rectangulum *BACH* in rectangula innumera *Ak, Kl, Lm, Mn*, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, *Ak, Al, Am, An*, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentia medii principio singulorum temporum æquali <233> um. Fiat *AC* ad *AK* vel *ABHC* ad *ABkK* ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt *ABHC, KkHC, LlHC, MmHC*, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (per motus legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula *Ak, Kl, Lm, Mn*, &c; & propterea (per lem. I. lib. II.) in progressione geometrica. Quare si rectæ *Kk, Ll, Mm, Nn*, &c. productæ occurrant hyperbolæ in *q, r, s, t*, &c. erunt areæ *ABqK, KqrL, LrsM, MstN*, &c. æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. Est autem area *ABqK* (per corol. 3. lem. VII. & lem. VIII. lib. I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad $\frac{1}{2}kq$ seu *AC* ad $\frac{1}{2}AK$, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areæ *qKLr, rLMs, sMNt*, &c. sunt ad areas *qklr, rlms, smnt*, &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq, qKLr, rLMs, sMNt*, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq, qklr, rlms, smnt*, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per hypothesin) velocitatibus, atque ideo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, & erunt areæ *Bkq, Blr, Bms, Bnt*, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ *ABqK, ABrL, ABsM, ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis *ABrL*, describit spatium *Blr*, & tempore *LrtN* spatium *rlnt*. *Q.E.D.* Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad vim resistentiæ, qua in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione arithmetica, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu, atque etiam earundem differentia in descensu decrescit in progressione geometrica.

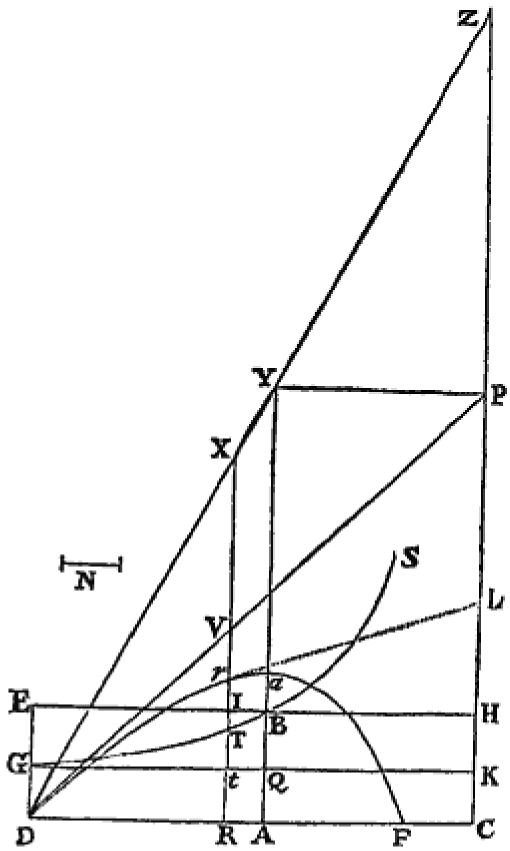
Corol. 3. Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eadem progressione geometrica.

<234>

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem resistentiam velocitati proportionalem patientis.



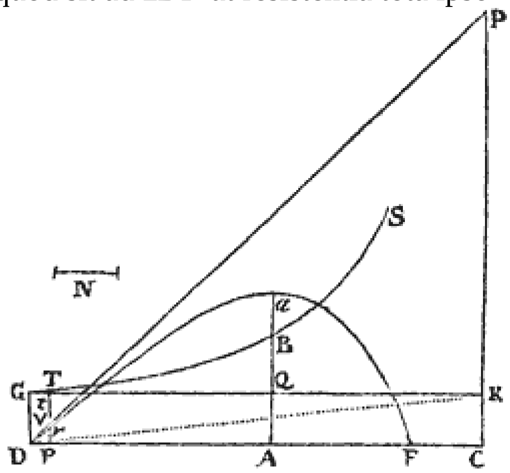
Eloco quovis *D* egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A*, ut sit *DA* ad *AC* ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP* ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis *DC, CP* describatur hyperbola quævis *GTBS* secans perpendicula *DG, AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* secet *AB* in *Q*. Capiatur linea N in ratione ad *QB* qua *DC* sit ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod hyperbolæ in *T*, & rectis *EH, GK, DP* in *I, t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem <235> $\frac{tGT}{\mathrm{N}}$, vel quod perinde est, cape *Rr* æqualem $\frac{GTIE}{\mathrm{N}}$; & projectile tempore *DRTG* perveniet ad punctum *r*, describens curvam lineam *DraF*, quam punctum *r* semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem *a* in perpendiculo *AB*, & postea semper appropinquans ad asymptoton *PC*.. Estque velocitas ejus in puncto quovis *r* ut curvæ tangens *rL.Q.E.I.*

Est enim N ad *QB* ut *DC* ad *CP* seu *DR* ad *RV*, ideoque *RV* æqualis $\frac{DR\times QB}{\mathrm{N}}$, & *Rr* (id est $RV-\mathrm{Vr}$ seu $\frac{DR\times QB-\mathrm{tGT}}{\mathrm{N}}$) æqualis $\frac{DR\times AB-RDGT}{\mathrm{N}}$. Exponatur jam tempus per aream *RDGT*, & (per legum Corol. 2.)distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus descripta, erit (per prop. II. hujus) ut linea *DR*, altitudo vero (per prop. III. hujus) ut area $DR\times AB-RDGT$, hoc est, ut linea *Rr*. Ipso autem motus initio area *RDGT* aequalis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa *Rr* (seu $\frac{DR\times AB - DR\times AQ}{N}$) tunc est ad *DR* ut $AB - AQ$ seu *QB*) ad N, id est, ut *CP* ad *DC*; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur *Rr* semper sit ut altitudo, ac *DR* semper ut longitudo, atque *Rr* ad *DR* sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut *Rr* semper sit ad *DR* ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea *DraF*, quam punctum *r* perpetuo tangit. *Q.E.D.*

Corol. 1. Est igitur *Rr* æqualis $\frac{DR\times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque si producatur *RT* ad *X* ut sit *RX* æqualis $\frac{DR\times AB}{N}$; (id est, si compleatur parallelogrammum *ACPY*, jungatur *DY* secans *CP* in *Z*, & producatur *RT* donec occurrat *DY* in *X*;) erit *Xr* æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Corol 2. Unde si capiantur innumeræ *CR*, vel, quod perinde est, innumeræ *ZX* in progressione geometrica; erunt totidem *Xr* in <236> progressione arithmetica. Et hinc curva *DraF* per tabulam logarithmorum facile delineatur.

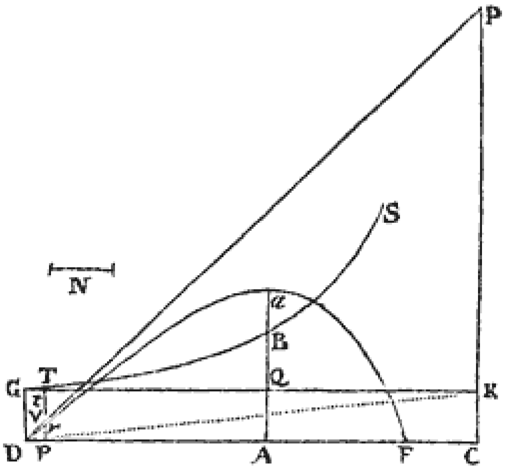
Corol. 3. Si vertice *D*, diametro *DG* deorsum producta, & latere recto quod sit ad 2*DP* ut resistentia tota ipso motus initio ad vim gravitatis, parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco *D* secundum rectam *DP*, ut in medio uniformi resistente describat curvam *DraF*, ea ipsa erit quacum exire debet de eodem loco *D*, secundum eandem rectam *DP*, ut in spatio non resistente describat parabolam. Nam latus rectum parabolæ hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV\,quad.}{Vr}$; & *Vr* est $\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR\times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, si duceretur, hyperbolam *GTS* tangeret in *G*, parallela est ipsi *DK*, ideoque *Tt* est $\frac{CK\times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB\times DC}{CP}$. Et propterea *Vr* est $\frac{DRq\times CK\times CP}{2DCq\times QB}$, id est (ob proportionales *DR* & *DC*, *DV* & *DP*) $\frac{DVq\times CK\times CP}{2DPq\times QB}$, & latus rectum $\frac{DV\,quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq\times QB}{CK\times CP}$, id est (ob proportionales *QB* & *CK*, *DA* & *AC*) $\frac{2DPq\times DA}{AC\times CP}$, ideoque ad 2*DP*, ut $DP\times DA$ ad $CP\times AC$; hoc est, ut resistentia ad gravitatem. *Q.E.D.*



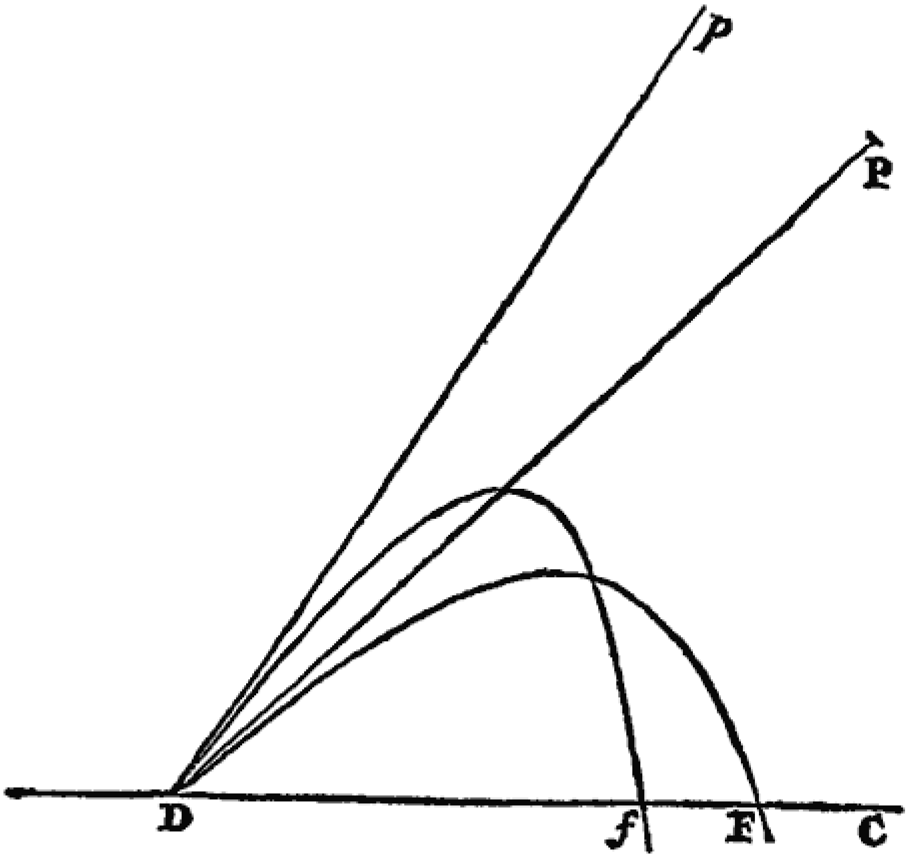
Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis *D*, data cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam *DP* projiciatur; & resistentia medii ipso motus initio detur: inveniri potest curva *DraF*, quam corpus idem describet. Nam ex data velocitate datur latus rectum parabolæ, ut notum est. Et sumendo 2*DP* ad latus illud rectum, ut est vis gravitatis ad vim resistentiæ, datur *DP*. Dein <237> secando *DC* in *A*, ut sit $CP\times AC$ ad $DP\times DA$ in eadem illa ratione gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum *A*. Et inde datur curva *DraF*.

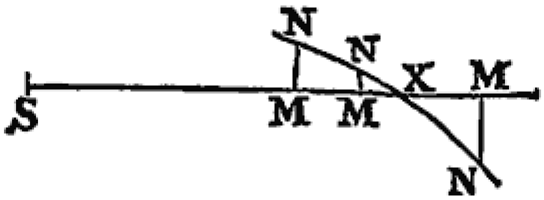
Corol. 5. Et contra, si datur curva *DraF*, dabitur & velocitas corporis & resistentia medii in locis singulis *r*. Nam ex data ratione $CP\times AC$ ad $DP\times DA$, datur tum resistentia medii sub initio motus, tum latus rectum parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis *rL*, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis *r*.

Corol. 6. Cum autem longitudo $2DP$ sit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad resistentiam in *D*; & ex aucta velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa simplici, ideoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo *CDP* mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.



Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam *DraF* ex phænominis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco *D*, secundum angulos diversos *CDP*, *CDp* & cognoscantur loca *F*, *f*, ubi incidunt in horizontale planum *DC*. Tum, assumpta quacunque longitudine pro *DP* vel *Dp*, fingatur quod resistentia in *D* sit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis *SM*. <238> Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta *DP*, inveniantur longitudines *DF*, *Df*, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ *SM*, & negativæ





ad alteram; & per puncta *N, N, N* agatur curva regularis *NNN* secans rectam *SMMM* in *X*, & erit *SX* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo *DF* per calculum; & longitudo, quæ sit ad assumptam longitudinem *DP*, ut longitudo *DF* per experimentum cognita ad longitudinem *DF* modo inventam, erit vera longitudo *DP*. Qua inventa, habetur tum curva linea *DraF* quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.

<239>

Scholium.

Cæterum, resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, hypothesis est magis mathematica quam naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, resistentiæ corporum sunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicata ratione major; estque resistentia (per motus leg. II & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege resistentiæ.

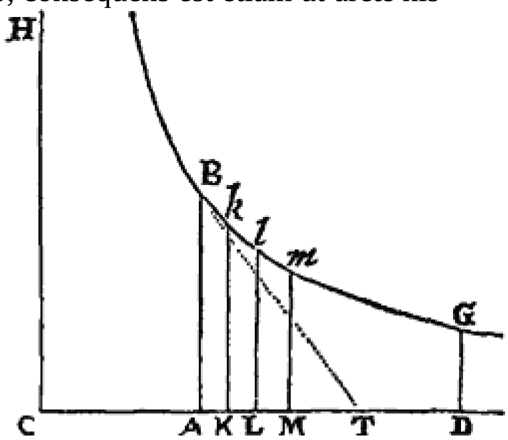
SECTIO II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita per medium similare movetur; tempora vero sumantur in progressione geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione geometrica inverse; & quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia medii, & resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ *AK, KL, LM,* &c. in recta *CD* sumptæ, & erigantur perpendicula *AB,* <240> *Kk, Ll, Mm,* &c. hyperbolæ *BklmG,* centro *C* asymptotis rectangulis *CD, CH* descriptæ, occurrentia in *B, k, l, m,* &c. & erit *AB* ad *Kk* ut *CK* ad *CA*, & divisim $AB - Kk$ ad *Kk* ut *AK* ad *CA*, & vicissim $AB - Kk$ ad *AK* ut *Kk* ad *CA*, ideoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, cum *AK* & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt *AB* & *Kk*, ut *ABq*. Et simili argumento erunt $Kk - Ll$, $Ll - Mm$, &c. ut *Kk quad. Ll quad.* &c. Linearum igitur *AB, Kk, Ll, Mm* quadrata sunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiæ, similis erit ambarum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut areæ his lineis descriptæ sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis *AK* exponatur per lineam *AB*, & velocitas initio secundi *KL* per lineam *Kk*, & longitudo primo tempore descripta per aream *AKkB*; velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes *Ll, Mm*, &c. & longitudines descriptæ per areas *Kl, Lm*, &c. Et composite, si tempus totum exponatur per summam partium suarum *AM*, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum *AMmB*. Concipe jam tempus *AM* ita dividi in partes *AK, KL, LM*, &c. ut sint *CA, CK, CL, CM*, &c. in progressione geometrica; & erunt partes illæ in eadem progressione, & velocitates *AB, Kk, Ll, Mm*, &c. in progressione eadem inversa, atque spatia descripta *Ak, Kl, Lm*, &c. æqualia. *Q.E.D.*



Corol. 1. Patet ergo quod, si tempus exponatur per asymptoti partem quamvis *AD*, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam *AB*; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam *DG*, & spatium totum descriptum per aream hyperbolicam adjacentem *ABGD*; necnon spatium, quod corpus aliquod eodem tempore *AD*, velocitate prima *AB*, in medio non resistente describere posset, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur spatium in medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi *AB* in medio <241> non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica *ABGD* ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam resistentia medii, statuendo eam ipso motus initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *AC*, in medio non resistente, generare posset velocitatem *AB*. Nam si ducatur *BT* quæ tangat hyperbolam in *B*, & occurrat asymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipsi *AC*, & tempus exponet, quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam *AB*.

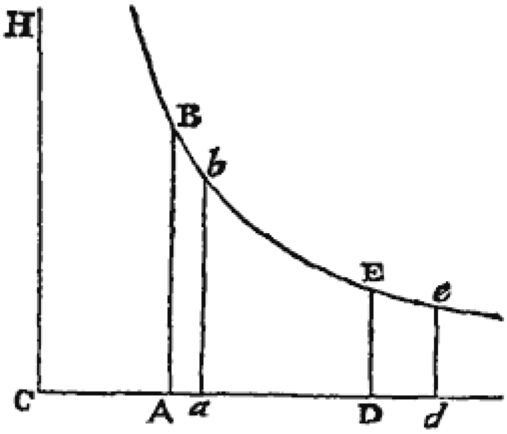
Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceversa, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus *AC*, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis *AB:* & inde datur punctum *B* per quod hyperbola, asymptotis *CH, CD*, describi debet; ut & spatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in medio similari resistente describere potest.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus, quæ sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Asymptotis rectangulis *CD, CH* descripta hyperbola quavis *BbEe* secante perpendicula *AB, ab, DE, de,* in *B, b, E, e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB, DE*, & tempora per lineas *Aa, Dd*. Est ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per hypothesin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc est, spatia descripta æquan <242> tur inter se, & velocitates primæ *AB, DE* sunt ultimis *ab, de*, & propterea dividendo partibus etiam suis amissis *AB-ab, DE-de* proportionales. *Q.E.D.*



PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora sphærica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus, quæ sunt ut motus primi directe & resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debebit resistentia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & resistentia inverse. Quare temporum particulis in ea ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, ideoque retinebunt velocitates velocitatibus suis primis semper proportionales. Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia, quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicata ratione diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas & massa conjunctim, id est, ut velocitas & cubus diametri; resistentia (per hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc propositionem) est in ratione priore directe & ratione posteriore inverse, id est, ut diameter directe & velocitas inverse; ideoque spatium, tempori & velocitati proportionale, est ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquiplicata diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquiplicata ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes <243> motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & si resistentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut D^n & E^n: spatia quibus globi, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac sub initio.

Corol. 4. Quod si globi non sint homogenei, spatium a globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc propositionem) augetur in ratione motus directe, ac spatium descriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et si globi moveantur in mediis diversis; spatium in medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ, & spatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque in arithmetica per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum; in geometria per inventionem vel contentorum &

laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, sine additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & similes. Has quantitates, ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; & earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finita <244> rum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Lateris autem cujusque generantis coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur *a*, *b*, *c*, &c. momentum vel mutatio rectanguli AB fuerit $a\mathrm{B}+b\mathrm{A}$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $a\mathrm{BC}+b\mathrm{AC}+c\mathrm{AB}$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{A}^{\frac{3}{2}}$, $\mathrm{A}^{\frac{1}{3}}$, $\mathrm{A}^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2a\mathrm{A}$, $3a\mathrm{A}^2$, $4a\mathrm{A}^3$, $\frac{1}{2}a\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}a\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}a\mathrm{A}^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}a\mathrm{A}^{-\frac{1}{3}}$, $-a\mathrm{A}^{-2}$, $-2a\mathrm{A}^{-3}$, & $-\frac{1}{2}a\mathrm{A}^{-\frac{3}{2}}$ respective. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $\mathrm{A}^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}a\mathrm{A}^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ $\mathrm{A}^2\mathrm{B}$ momentum fuerit $2a\mathrm{AB}+b\mathrm{A}^2$; & genitæ $\mathrm{A}^3\mathrm{B}^4\mathrm{C}^2$ momentum $3a\mathrm{A}^2B^4\mathrm{C}^2+4b\mathrm{A}^3\mathrm{B}^3\mathrm{C}^2+2c\mathrm{A}^3\mathrm{B}^4\mathrm{C}$; & genitæ $\frac{\mathrm{A}^3}{\mathrm{B}^2}$ sive $\mathrm{A}^3\mathrm{B}^{-2}$ momentum $3a\mathrm{A}^2\mathrm{B}^{-2}-2b\mathrm{A}^3\mathrm{B}^{-3}$: & sic in cæteris. Demonstratur vero lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $12a$ & $12b$, fuit $\mathrm{A}-\frac{1}{2}a$ in $\mathrm{B}-\frac{1}{2}b$, seu $\mathrm{AB}-\frac{1}{2}a\mathrm{B}-\frac{1}{2}b\mathrm{A}+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $\mathrm{A}+\frac{1}{2}a$ in $\mathrm{B}+\frac{1}{2}b$ seu $\mathrm{AB}+\frac{1}{2}a\mathrm{B}+\frac{1}{2}b\mathrm{A}+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $a\mathrm{B}+b\mathrm{A}$. Igitur laterum incrementis totis *a* & *b* generatur rectanguli incrementum $a\mathrm{B}+b\mathrm{A}$. *Q.E.D.*

Cas. 2. Ponatur AB semper æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (per cas. 1.) erit $g\mathrm{C}+c\mathrm{G}$, id est (si pro G & *g* scribantur AB & $a\mathrm{B}+b\mathrm{A}$) $a\mathrm{BC}+b\mathrm{AC}+c\mathrm{AB}$. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunque. *Q.E.D.*

<245>

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; & ipsius A^2, id est rectanguli AB, momentum $a\mathrm{B}+b\mathrm{A}$ erit $2a\mathrm{A}$, ipsius autem A^3, id est contenti ABC, momentum $a\mathrm{BC}+b\mathrm{AC}+c\mathrm{AB}$ erit $3a\mathrm{A}^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est $na\mathrm{A}^{n-1}$. *Q.E.D.*

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{\mathrm{A}}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{\mathrm{A}}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{\mathrm{A}}$ ducto in *a* erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{\mathrm{A}}$ seu ipsius A^{-1} est $\frac{-a}{\mathrm{A}^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{\mathrm{A}^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{\mathrm{A}^n}$ ductum in A^n una cum $\frac{1}{\mathrm{A}^n}$ in $na\mathrm{A}^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{\mathrm{A}^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{na}{\mathrm{A}^{n+1}}$. *Q.E.D.*

Cas. 5. Et cum $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ in $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ erit *a*, per cas. 3: ideoque momentum ipsius $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2}a\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $\mathrm{A}^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque $ma\mathrm{A}^{m-1}$ æquale $nb\mathrm{B}^{n-1}$, & $ma\mathrm{A}^{-1}$ æquale $nb\mathrm{B}^{-1}$ seu $nb\mathrm{A}^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\frac{m}{n}a\mathrm{A}^{\frac{m-n}{n}}$ æquale *b*, id est, æquale momento ipsius $\mathrm{A}^{\frac{m}{n}}$. *Q.E.D.*

Cas. 6. Igitur genitæ cujuscunque $\mathrm{A}^m\mathrm{B}^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, una cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $ma\mathrm{A}^{m-1}\mathrm{B}^n+nb\mathrm{B}^{n-1}\mathrm{A}^m$; idque sive dignitatum indices *m* & *n* sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multipli <246> cati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut −2A**{,}** −B, D, 2E, 3F.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

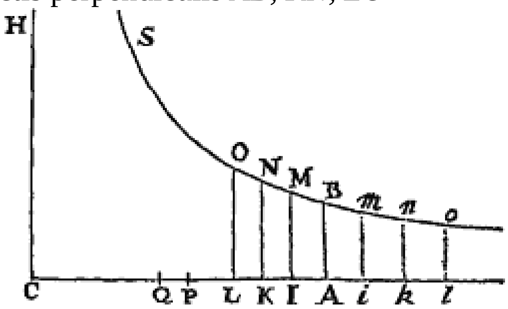
Scholium.

In epistola quadam ad D. *J. Collinium* nostratem 10 Decem. 1672 data, cum descripsissem methodum tangentium quam suspicabar eandem esse cum methodo *Slusii* tum nondum communicata; subjunxi: *Hoc est unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modo ad ducendum tangentes ad quasvis curvas sive geometricas sive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliasve curvas respicientes, verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de curvitatibus, areis, longitudinibus, centris gravitatis curvarum &c. neque (quemadmodum* Huddenii *methodus de maximis & minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti qua æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas*. Hactenus epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus scripseram. Methodi vero hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando cor <247> *pus descendit) investigentur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressione geometrica.*

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam *AC*; resistentia per lineam indenfinitam *AK*; vis absoluta in descensu corporis per differentiam *KC*; velocitas corporis per lineam *AP*, quæ sit media proportionalis inter *AK* & *AC,* ideoque in subduplicata ratione resistentiæ; incrementum resistentiæ data temporis particula factum per lineolam *KL,* & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam *PQ*; & centro *C* asymptotis rectangulis *CA, CH* describatur hyperbola quævis *BNS*, erectis perpendiculis *AB, KN, LO* occurrens in *B, N, O*. Quoniam *AK* est ut *APq*, erit hujus momentum *KL* ut illius momentum 2*APQ:* id est, ut *AP* in *KC*; nam velocitatis incrementum *PQ* (per motus leg. II.) proportionale est vi generanti *KC*. Componatur ratio ipsius *KL* cum ratione ipsius *KN*, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut *AP*. Atqui areæ hyperbolicæ *KNOL* ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, est æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evanescens est ut *AP*. Componitur igitur area tota hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI, IMNK, KNOL*, &c. & vires absolutæ *AC, IC, KC, LC*, &c. erunt in progressione geometrica. *Q.E.D.* Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi, imnk, knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC, iC, kC, lC*, &c. sunt continue proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC, kC, iC, AC, IC, KC, LC,* &c. erunt continue proportionales. *Q.E.D.*



Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis <248> & resistentia medii per lineas *AC, AP* & *AK* respective; & vice versa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea *AC*.

Corol. 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicata ratione, quam habet vis gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

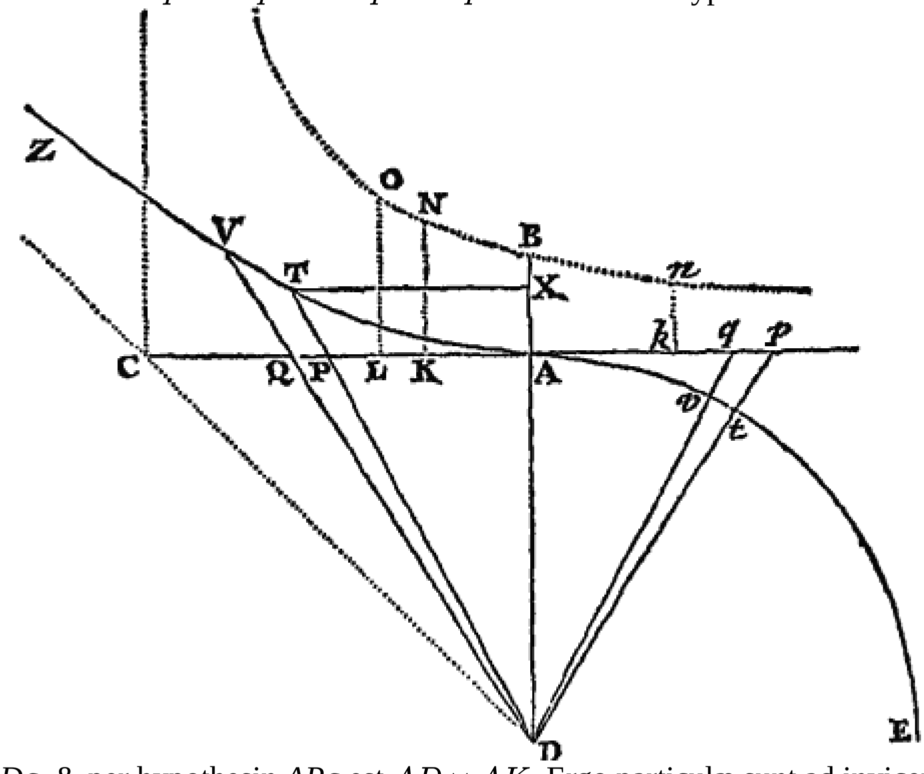
PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Positis jam demonstratis, dico quod, si tangentes angulorum sectoris circularis & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum ut sector circuli, & tempus omne descendendi a loco ut sector hyperbolæ.

Rectæ *AC*, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur *AD*. Centro *D* semidiametro *AD* describatur tum circuli quadrans *AtE*; tum hyperbola rectangula *AVZ* axem habens *AX*, verticem principalem *A*, & asymptoton *DC*. Ducantur *Dp*, *DP*, & erit sector circularis *AtD* ut tempus omne ascendendi ad locum summum; & sector hyperbolicus *ATD* ut tempus omne descendendi a loco summo: Si modo sectorum tangentes *Ap, AP* sint ut velocitates.

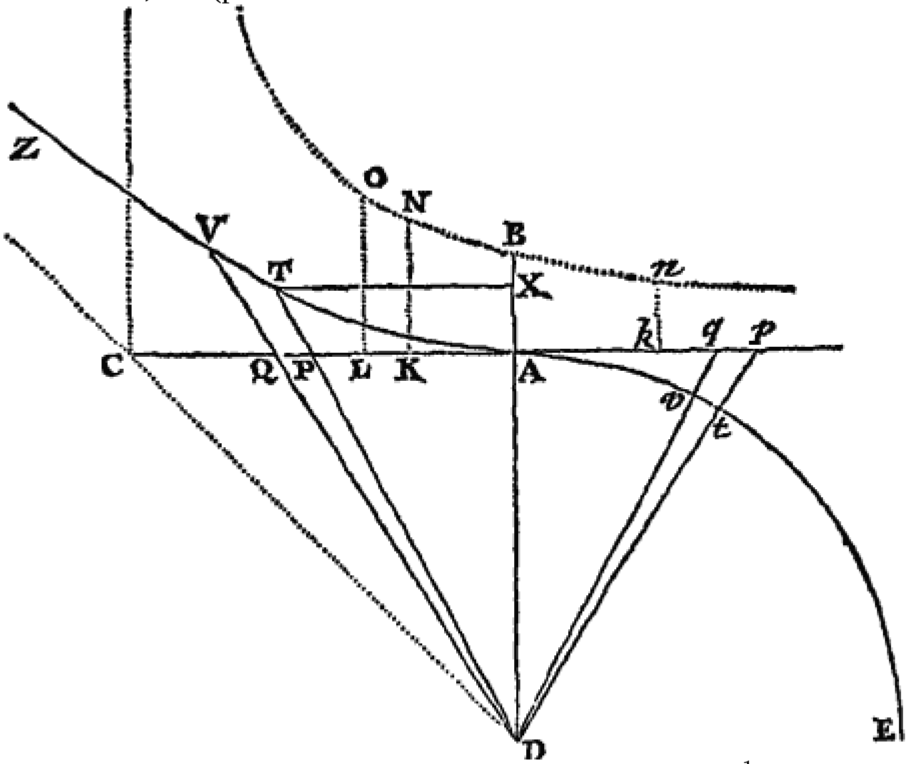
Cas 1. Agatur enim *Dvq* abscindens sectoris *ADt* & trianguli *ADp* momenta, seu particulas quam minimas simul descriptas *tDv* & *qDp*. Cum particulæ illæ, ob angulum communem *D*, sunt in duplicata ratione laterum, erit particula *tDv* ut $\frac{qDp \times tD\ quad.}{pD\ quad.}$, id est, ob datam *tD*, ut $\frac{qDp}{pD\ quad.}$. Sed *pD quad.* est $AD\ quad. + Ap\ quad.$ id est, $AD\ quad. + AD \times Ak$, seu $AD \times Ck$; & *qDp* est $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo sectoris particula *tDv* est ut $\frac{pq}{Ck}$; id est, <249> ut velocitatis decrementum quam minimum *pq* directe, & vis illa *Ck* quæ velocitatem diminuit inverse; atque ideo ut particula temporis decremento respondens. Et componendo fit summa particularum omnium *tDv* in sectore *ADt*, ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescentis *Ap* particulis amissis *pq* respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus *ADt* est ut tempus totum ascendendi ad locum summum. *Q.E.D.*

Cas. 2. Agatur *DQV* abscindens tum sectoris *DAV*, tum trianguli *DAQ* particulas quam minimas *TDV* & *PDQ*; & erunt hæ particulæ ad invicem ut *DTq* ad *DPq*, id est (si *TX* & *AP* parallelæ sint) ut *DXq* ad *DAq* vel *TXq* ad *APq*, & divisim ut $DXq - TXq$ ad $DAq - APq$. Sed ex natura hyperbolæ



$DXq - TXq$ est *ADq*, & per hypothesin *APq* est $AD \times AK$. Ergo particulæ sunt ad invicem ut *ADq* ad $ADq - AD \times AK$; id est, ut *AD* ad $AD - AK$ seu *AC* ad *CK:* ideoque sectoris particula *TDV* est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideo ob datas *AC* & *AD*, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directe, utque vis generans incrementum inverse; atque ideo ut particula temporis incremen <250> to respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis *AP* particulæ *PQ* generantur, ut summa particularum sectoris *ADT*, id est, tempus totum ut sector totus. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si *AB* æquetur quartæ parti ipsus *AC*, spatium quod corpus tempore quovis cadendo describit, erit ad spatium, quod corpus velocitate maxima *AC*, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area *ABNK*, qua spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream *ATD*, qua tempus exponitur. Nam cum sit *AC* ad *AP* ut *AP* ad *AK*, erit (per corol. I.



lem. II hujus) *LK* ad *PQ* ut 2*AK* ad *AP*, hoc est, ut 2*AP* ad *AC*, & inde *LK* ad $\frac{1}{2}PQ$ ut *AP* ad $\frac{1}{4}AC$ vel *AB*; est & *KN* ad *AC* vel *AD* ut *AB* ad *CK*; itaque ex æquo *LKNO* ad *DPQ* ut *AP* ad *CK*. Sed erat *DPQ* ad *DTV* ut *CK* ad *AC*. Ergo rurfus ex æquo *LKNO* est ad *DTV* ut *AP* ad *AC*; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum *ABNK* & *ATD* momenta *LKNO* & *DTV* sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideoque <251> areæ totæ ab initio genitæ *ABNK* & *ATD* ut spatia tota ab initio descensus descripta. *Q.E.D.*

Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quod spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore descriptum, ut est area *ABnk* ad sectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum *APD* ad sectorem hyperbolicum *ATD*. Nam velocitas in medio non resistente foret ut tempus *ATD*, & in medio resistente est ut *AP*, id est, ut triangulum *APD*. Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum *ApD* ad sectorem circularem *AtD*; sive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Est igitur tempus quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem *AP* acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam *AC* in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ut sector *ADT* ad triangulum *ADC:* & tempus, quo velocitatem *Ap* in medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus *At* ad ejus tangentem *Ap*.

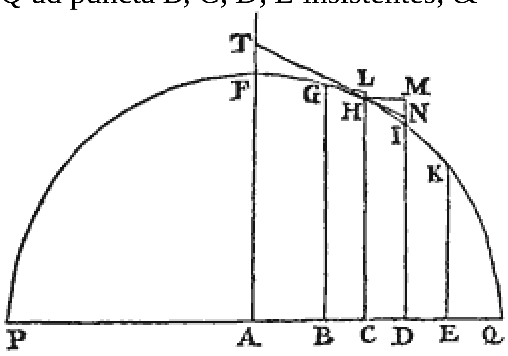
Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima (per corol. 2. & 3. theor. VI. lib. II.) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo sectorem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas *AP* vel *Ap*, tum area *ABNK* vel *ABnk*, quæ est ad sectorem *ADT* vel *ADt* ut spatium quæsitum ad spatium quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter describi potest.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

<252>

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.



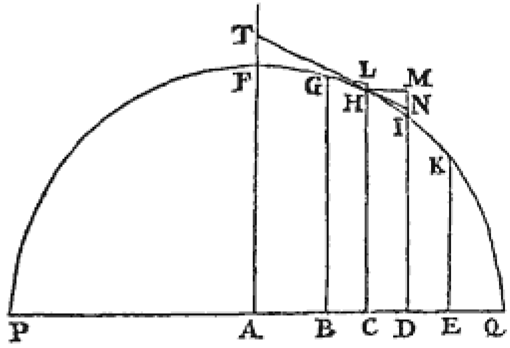
Sit *PQ* planum illud plano schematis perpendiculare; *PFHQ* linea curva plano huic occurens in punctis *P* & *Q*; *G, H, I, K* loca quatuor corporis in hac curva ab *F* ad *Q* pergentis; & *GB, HC, ID, KE* ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ, & lineæ horizontali *PQ* ad puncta *B, C, D, E* insistentes; & sint *BC, CD, DE* distantiæ ordinatarum inter se æquales. A punctis *G* & *H* ducantur rectæ *GL, HN* curvam tangentes in *G* & *H*, & ordinatis *CH, DI* sursum productis occurrentes in *L* & *N*, & compleatur parallelogrammum *HCDM*. Et tempora, quibus corpus describit arcus *GH, HI*, erunt in subduplicata ratione altitudinum *LH, NI*, quas corpus temporibus illis describere posset, a tangentibus cadendo; & velocitates erunt ut longitudines descriptæ *GH, HI* directe & tempora inverse. Exponantur tempora per T & *t*, & velocitates per $\frac{GH}{\mathrm{T}}$ & $\frac{HI}{t}$; & decrementum velocitatis tempore *t* factum exponetur per $\frac{GH}{\mathrm{T}} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentia corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & spatium *NI* cadendo describente, generat velocitatem, qua duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ut *Galilæus* demonstravit; id est, velocitatem $\frac{2NI}{t}$*:* at in corpore arcum *HI* describente, auget arcum illum <253> sola longitudine $HI - HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex resistentia sola oriundum, nempe $\frac{GH}{\mathrm{T}} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{\mathrm{T}} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{\mathrm{T}} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad 2*NI*.

Jam pro abscissis *CB, CD, CE* scribantur $-o,\ o, 2o$. Pro ordinata *CH* scribatur P, & pro *MI* scribatur series quælibet $\mathrm{Q}o + \mathrm{R}oo + \mathrm{S}o^3 +$ &c. Et seriei termini omnes post primum, nempe $\mathrm{R}oo + \mathrm{S}o^3 +$&c. erunt *NI*, & ordinatæ *DI, EK*, & *BG* erunt $\mathrm{P} - \mathrm{Q}o - \mathrm{R}oo - \mathrm{S}o^3 -$ &c. $\mathrm{P} - 2\mathrm{Q}o - 4\mathrm{R}oo - 8\mathrm{S}o^3 -$ &c. & $\mathrm{P} + \mathrm{Q}o - \mathrm{R}oo + \mathrm{S}o^3 -$ &c. respective. Et quadrando differentias ordinatarum $BG - CH$ &$CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum *BC, CD*, habebuntur arcuum *GH, HI* quadrata $oo + \mathrm{QQ}oo - 2\mathrm{QR}o^3 +$ &c. & $oo + \mathrm{QQ}oo + 2\mathrm{QR}o^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+\mathrm{QQ}} - \frac{\mathrm{QR}oo}{\sqrt{1+\mathrm{QQ}}}$, & $o\sqrt{1+\mathrm{QQ}} + \frac{\mathrm{QR}oo}{\sqrt{1+\mathrm{QQ}}}$ sunt arcus *GH* & *HI*. Præterea si ab ordinata *CH* subducatur semisumma ordinatarum *BG* ac *DI*, & ab ordinata *DI* subducatur semisumma ordinatarum *CH* & *EK*, manebunt arcuum *GI* & *HK* sagittæ $\mathrm{R}oo$ & $\mathrm{R}oo + 3\mathrm{S}o^3$. Et hæ sunt lineolis *LH* & *NI* proportionales, ideoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & *t:* & inde ratio $\frac{t}{\mathrm{T}}$ est $\sqrt{\frac{\mathrm{R}+3\mathrm{S}o}{\mathrm{R}}}$ seu $\frac{\mathrm{R}+\frac{3}{2}\mathrm{S}o}{\mathrm{R}}$; & $\frac{t \times GH}{\mathrm{T}} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{\mathrm{T}}$, *GH, HI, MI* & *NI* valores jam inventos, evadit $\frac{3\mathrm{S}oo}{2\mathrm{R}}\sqrt{1+\mathrm{QQ}}$. Et cum 2*NI* sit 2R*oo*, resi <254> stentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3\mathrm{S}oo}{2\mathrm{R}}\sqrt{1+\mathrm{QQ}}$ ad 2R*oo*, id est, ut $3\mathrm{S}\sqrt{1+\mathrm{QQ}}$ ad 4RR.

Velocitas autem ea est, quacum corpus de loco quovis *H*, secundum tangentem *HN* egrediens, in parabola diametrum *HC* & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+\mathrm{QQ}}{\mathrm{R}}$ habente, deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea medii densitas est ut resistentia directe & quadratum velocitatis inverse, id est, ut $\frac{3\mathrm{S}\sqrt{1+\mathrm{QQ}}}{4\mathrm{RR}}$ directe & $\frac{1+\mathrm{QQ}}{\mathrm{R}}$ inverse, hoc est, ut $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}\sqrt{1+\mathrm{QQ}}}$. *Q.E.I.*

Corol. 1. Si tangens *HN* producatur utrinque donec occurrat ordinate cuilibet *AF* in *T:* erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+\mathrm{QQ}}$, ideoque in superioribus pro $\sqrt{1+\mathrm{QQ}}$ scribi potest. Qua ratione resistentia erit ad gravitatem ut $3\mathrm{S}\times HT$ ad $4\mathrm{RR}\times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{\mathrm{R}}}$, & medii densitas erit ut $\frac{\mathrm{S}\times AC}{\mathrm{R}\times HT}$.



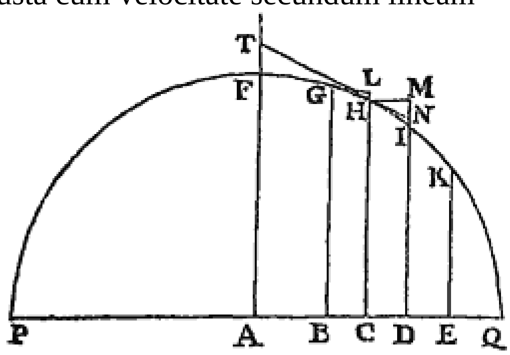
Corol. 2. Et hinc, si curva linea *PFHQ* definiatur per relationem inter basem seu abscissam *AC* & ordinatim applicatam *CH*, ut moris est; & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos seriei terminos expedite solvetur, ut in exemplis sequentibus.

Exempl. 1. Sit linea *PFHQ* semicirculus super diametro *PQ* descriptus, & requiratur medii densitas quæ faciat ut projectile in hac linea moveatur.

Bisecetur diameter *PQ* in *A*; dic *AQ, n; AC, a; CH, e;,* & *CD, o:* & erit *DIq* seu $AQq-ADq=nn-aa-2ao-oo$, seu <255> $ee-2ao-oo$, & radice per methodum nostram extracta, fiet $DI=e-\frac{ao}{e}-\frac{oo}{2e}-\frac{aaoo}{2e^3}-\frac{ao^3}{2e^3}-\frac{a^3o^3}{2e^5}-$ &c. Hic scribatur *nn* pro $ee+aa$, & evadet $DI=e-\frac{ao}{e}-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{anno^3}{2e^5}-$ &c.

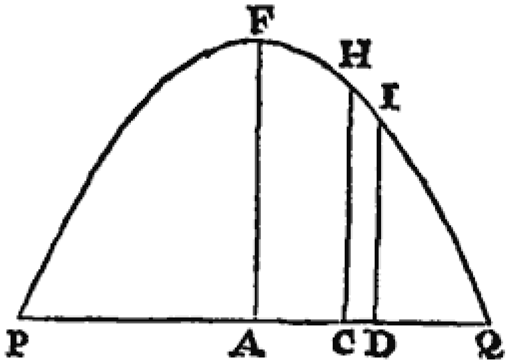
Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinite parva *o* non extat; secundum, in quo quantitas illa est unius dimensionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium est; & sic in infinitum. Et primus terminus, qui hic est *e*, denotabit semper longitudinem ordinatæ *CH* insistentis ad initium indefinitæ quantitatis *o*. Secundus terminus, qui hic est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter *CH* & *DN*, id est, lineolam *MN*, quæ abscinditur complendo parallelogrammum *HCDM*, atque ideo positionem tangentis *HN* semper determinat; ut in hoc casu capiendo *MN* ad *HM* ut est $\frac{ao}{e}$ ad *o*, seu *a* ad *e*. Terminus tertius, qui hic est $\frac{nnoo}{2e^3}$, designabit lineolam *IN*, quæ jacet inter tangentem & curvam, ideoque determinat angulum contactus *IHN* seu curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si lineola illa *IN* finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium una cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi possunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum serierum in solutione problematum, quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam series $e-\frac{ao}{e}-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{anno^3}{2e^5}-$ &c. cum serie $\mathrm{P}-\mathrm{Q}o-\mathrm{R}oo-\mathrm{S}o^3-$ &c. & perinde pro P, Q, R & S scribatur *e*, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, pro $\sqrt{1+\mathrm{QQ}}$ scribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ seu $\frac{n}{e}$, & prodibit medii densitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc est, (ob datam *n*) ut $\frac{a}{e}$, seu <256> $\frac{AC}{CH}$, id est, ut tangentis longitudo illa *HT*, quæ ad semidiametrum *AF* ipsi *PQ* normaliter insistentem terminatur: & resistentia erit ad gravitatem ut 3*a* ad 2*n*, id est, ut 3*AC* ad circuli diametrum *PQ:* velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare si corpus justa cum velocitate secundum lineam ipsi *PQ* parallelam exeat de loco *F*, & medii densitas in singulis locis *H* sit ut longitudo tangentis *HT*, & resistentia etiam in loco aliquo *H* sit ad vim gravitatis ut 3*AC* ad *PQ*, corpus illud describet circuli quadrantem *FHQ*. Q.E.I.



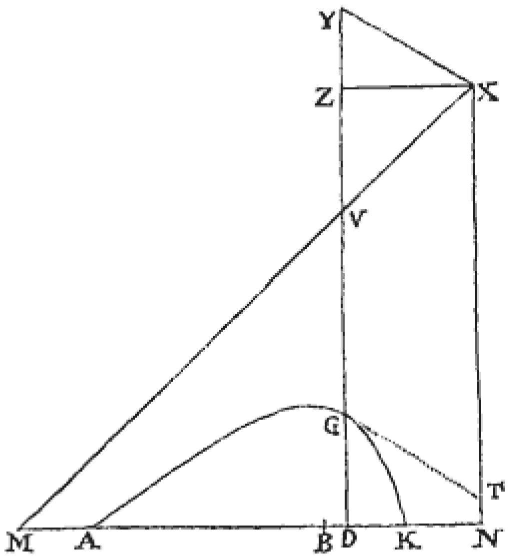
At si corpus idem de loco *P*, secundum lineam ipsi *PQ* perpendicularem egrederetur, & in arcu semicirculi *PFQ* moveri inciperet, sumenda esset *AC* seu *a* ad contrarias partes centri *A*, & propterea signum ejus mutandum esset & scribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus ascendendo a *P* describat circuli quadrantem *PF*. Ad hunc effectum deberet corpus a medio impellente accelerari, non a resistente impediri.

Exempl. 2. Sit linea *PFQ* parabola, axem habens *AF* horizonti *PQ* perpendicularem, & requiratur medii densitas, quæ faciat ut projectile in ipsa moveatur.

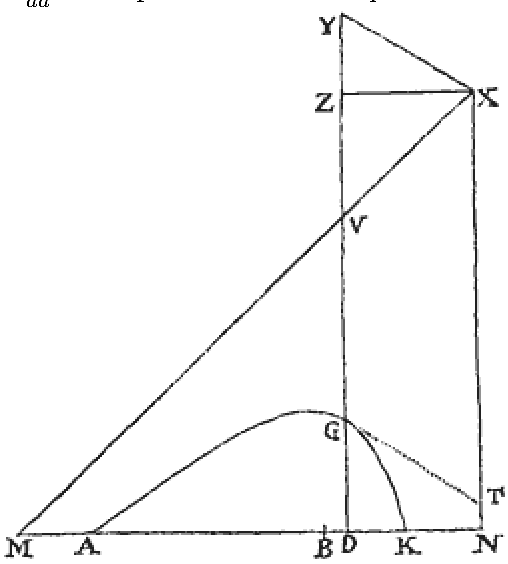


Ex natura parabolæ, rectangulum *PDQ* æquale est rectangulo sub ordinata *DI* & recta aliqua data: hoc est, si dicantur recta illa *b; PC, a; PQ, c; CH, e;* & *CD, o*; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale est rectangulo *b* in *DI*, ideoque *DI* æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Q*o*, tertius <257> item terminus $\frac{oo}{b}$ pro R*oo*. Cum vero plures non sint termini, debebit quarti coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}\sqrt{1+\mathrm{QQ}}}$, cui medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nulla igitur medii densitate movebitur projectile in parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. *Q.E.I.*

Exempl. 3. Sit linea *AGK* hyperbola, asymptoton habens *NX* plano horizontali *AK* perpendicularem; & quæratur medii densitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hac linea.



Sit *MX* asymptotos altera, ordinatim applicatæ *DG* productæ occurrens in *V*; & ex natura hyperbolæ, rectangulum *XV* in *VG* dabitur. Datur autem ratio *DN* ad *VX*, & propterea datur etiam rectangulum *DN* in *VG*. Sit illud *bb:* & completo parallelogrammo *DNXZ*; dicatur *BN, a; BD, o; NX, c*; & ratio data *VZ* ad *ZX* vel *DN* ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit *DN* æqualis $a-o$, *VG* æqualis $\frac{bb}{a-o}$, *VZ* æqualis $\frac{\frac{m}{n}}{a-o}$, & *GD* seu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet *GD* æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro Q*o*, tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ <258> pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}, \frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ scribendæ sunt in regula superiore pro Q, R & S. Quo facto prodit medii densitas ut $\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id est, si in *VZ* sumatur *VY* æqualis *VG*, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum *XZ* & *ZY* quadrata. Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet 3*XY* ad 2*YG*; & velocitas ea est, quacum corpus in parabola pergeret verticem *G*, diametrum *DG*, & latus rectum $\frac{XY\,quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii densitates in locis singulis *G* sint reciproce ut distantiæ *XY*, quodque resistentia in loco aliquo *G* sit ad gravitatem ut 3*XY* ad 2*YG*; & corpus de loco *A*, justa cum velocitate emissum, describet hyperbolam illam *AGK*. *Q.E.I.*

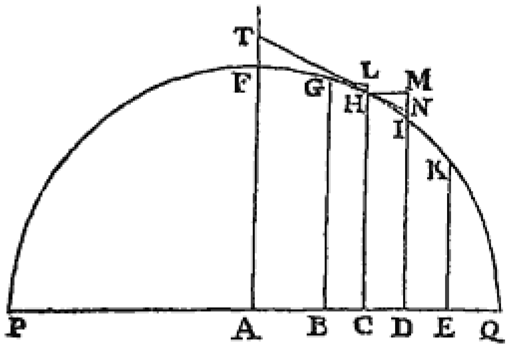


Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea *AGK* hyperbola sit, centro *X*, asymptotis *MX*, *NX* ea lege descripta, ut constructo rectangulo *XZDN* cujus latus *ZD* secet hyperbolam in *G* & asymptoton ejus in *V*, fuerit *VG* reciproce ut ipsius *ZX* vel *DN* dignitas aliqua $DN^{n:}$ cujus index est numerus *n:* & quæratur medii densitas, qua projectile progrediatur in hac curva.

Pro *BN, BD, NX* scribantur A, O, C respective, sitque *VZ* ad *XZ* vel *DN* ut *d* ad *e*, & *VG* æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit *DN* æqua <259> lis A − O, $VG=\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$, $VZ=\frac{d}{e}\overline{A-O}$, & *GD* seu $NX-VZ-VG$ æqualis $C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$. Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbb}{A^{n+1}}O+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet *GD* æqualis $C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O-\frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^n+3}bbO^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ usurpandus est pro Q*o*, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde medii densitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis *G*, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, ideoque si in *VZ* capiatur *VY* æqualis $n\times VG$, densitas illa est reciproce ut *XY*. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipsarum *XZ* & *ZY* quadrata. Resistentia autem in eodem loco *G* fit ad gravitatem ut 3S in $\frac{XY}{A}$ ad 4RR, id est, *XY* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est, quacum corpus projectum in parabola pergeret, verticem *G*, diametrum *GD* & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2XY\,quad.}{\overline{nn+n}\,\mathrm{in}\,VG}$ habente. *Q.E.I.*

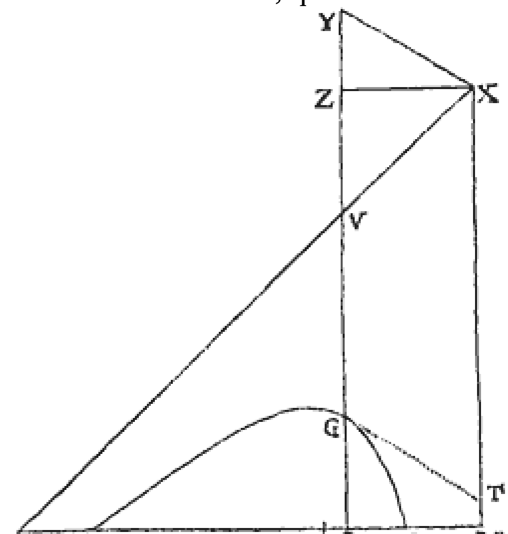
Scholium.

Eadem ratione qua prodiit densitas medii ut $\frac{S\times AC}{R\times HT}$ in corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quæli <260> bet V^n prodibit densitas medii ut
$\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}\times\overline{\frac{AC}{HT}}^{n-1}$



Et propterea si curva inveniri potest ea lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}^{n-1}$: corpus movebitur in hac curva in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas simpliciores.

Quoniam motus non sit in parabola nisi in medio non resistente, in hyperbolis vero hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius accedit ad hyperbolas hasce quam ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, sed quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta vero non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quam hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum sic deducentur.



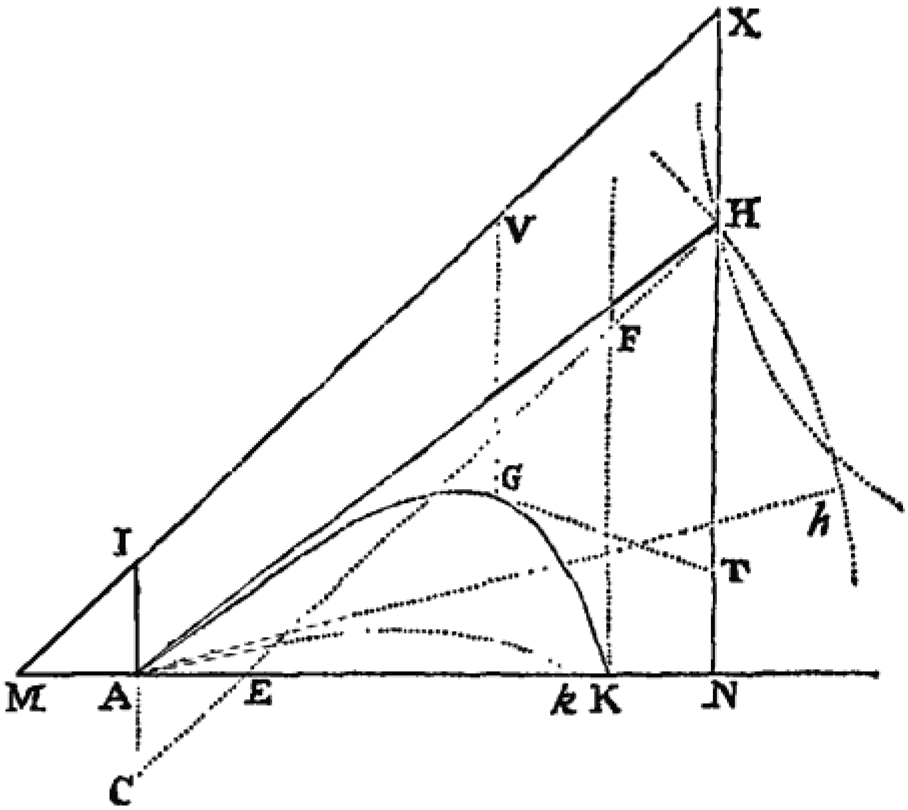
Compleatur parallelogrammum *XYGT*, & recta *GT* tanget hyperbolam in *G*, ideoque densitas medii in *G* est reciproce ut tangens *GT*, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut *GT* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *GV*.

<261>

Proinde si corpus de loco *A* secundum rectam *AH* projectum describat hyperbolam *AGK*, & *AH* producta occurrat asymptoto *NX* in *H*, actaque *AI* eidem parallela occurrat alteri asymptoto *MX* in *I:* erit medii densitas in *A* reciproce ut *AH*, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad gravitatem ut *AH* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *AI*. Unde prodeunt sequentes regulæ.

Reg. 1. Si servetur tum medii densitas in *A*, tum velocitas quacum corpus projicitur, & mutetur angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH, AI, HX*. Ideoque si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *NAH* expedite determinari potest.

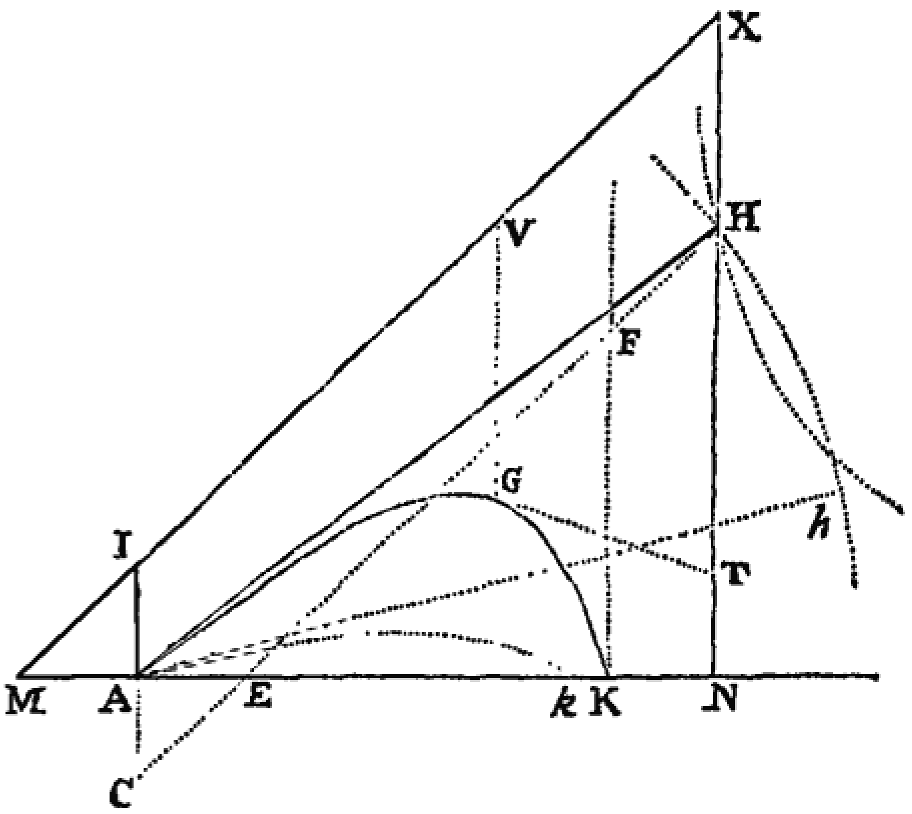
Reg. 2. Si servetur tum angulus *NAH*, tum medii densitas in *A*, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; servabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicata ratione velocitatis reciproce.



Reg. 3. Si tam angulus *NAH*, quam corporis velocitas in *A*, gravitasque acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in *A* ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque; augebitur proportio *AH* ad *AI* in eadem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$*:* & prop <262> terea minuetur *AH* in eadem ratione, & *AI* minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine fit minor, vel medii densitas major, vel resistentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

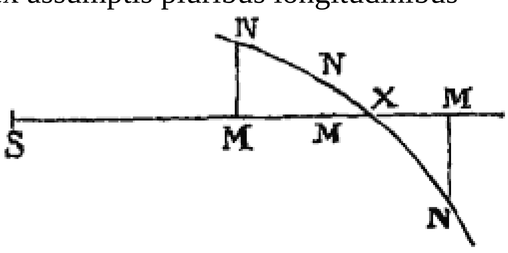
Reg. 4. Quoniam densitas medii prope verticem hyperbolæ major est quam in loco *A*; ut habeatur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad tangentem *AH* inveniri, & densitas in *A* augeri in ratione paulo minore quam semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium *GT*.

Reg. 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & describenda sit figura *AGK:* produc *HN* ad *X*, ut sit *HX* ad *AI* ut $n+1$ ad 1, centroque *X* & asymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* describatur hyperbola, ea lege, ut sit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.



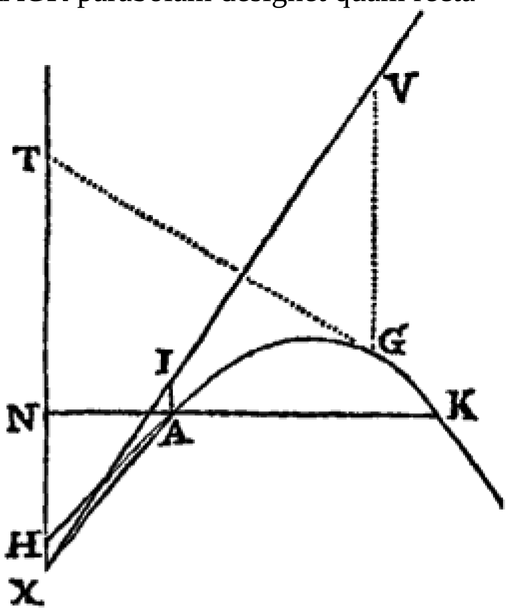
Reg. 6. Quo major est numerus *n*, eo magis accuratæ sunt hæ hyperbolæ in ascensu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus descensu ad *K*; & contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si hyperbola sit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* transeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* asymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & sumatur *NK* ipsi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc <263> hyperbolam ex phænominis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diversis *HAK*, *hAK*, incidantque in planum horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo *AI*, assume utcunque longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* sit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte assumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem assumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda sunt plura puncta *N*, & per omnia agenda curva linea regularis *NNXN*, secans rectam *SMMM* in *X*. Assumatur demum *AH* æqualis abscissæ *SX*, & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *AH*, ut longitudo *AK* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudines *AI* & *AH*, quas invenire oportuit. Hisce vero datis dabitur & resistentia medii in loco *A*, quippe quæ sit ad vim gravitatis ut *AH* ad 2*AI*. Augenda est autem densitas medii per reg. 4. & resistentia modo inventa, si in eadem ratione augeatur, fiet accuratior.



Reg. 8. Inventis longitudinibus *AH*, *HX*; si jam desideretur positio rectæ *AH*, secundum quam projectile, data illa cum velocitate emissum, incidit in punctum quodvis *K:* ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *AC*, *KF* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorsum tendat, & æquetur ipsi *AI* seu $\frac{1}{2}HX$. Asymptotis *AK*, *KF* describatur hyperbola, cujus conjugata transeat per punctum *C*, centroque *A* & intervallo *AH* describatur circulus secans hyperbolam illam in puncto *H*; & projectile secundum rectam *AH* emissum incidet in punctum *K.Q.E.I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in circulo descripto. Agatur *CH* occurrens ipsis *AK* & *KF*, illi in *E*, huic in *F*; & ob parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, <264> & propterea etiam æqualis *KN*. Sed *CE* est ad *AE* ut *FH* ad *KN*, & propterea *CE* & *FH* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in hyperbolam asymptotis *AK*, *KF* descriptam, cujus conjugata transit per punctum *C*, atque ideo reperitur in communi intersectione hyperbolæ hujus & circuli descripti. *Q.E.D.* Notandum est autem quod hæc operatio perinde se habet, sive recta *AKN* horizonti parallela sit, sive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodque ex duabus intersectionibus *H, H* duo prodeunt anguli *NAH, NAH;* & quod in praxi mechanica sufficit circulum semel describere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad punctum *C*, ut ejus pars *FH*, circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis sit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *AK* sitæ.

Quæ de hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad parabolas. Nam si *XAGK* parabolam designet quam recta *XV* tangat in vertice *X*, sintque ordinatim applicatæ *IA, VG* ut quælibet abscissarum *XI, XV* dignitates XI^n, XV^n; agantur *XT, GT, AH*, quarum *XT* parallela sit *VG*, & *GT, AH* parabolam tangant in *G* & *A:* & corpus de loco quovis *A*, secundum rectam *AH* productam, justa cum velocitate projectum, describet hanc parabolam, si modo densitas medii, in locis singulis *G*, sit reciproce ut tangens *GT*. Velocitas autem in *G* ea erit quacum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabola conica verticem *G*, diametrum *VG* deorsum productam, & latus rectum $\frac{2GTq}{nn-n\times \mathrm{VG}}$ habente. Et resistentia in *G* erit ad vim gravitatis ut *GT* ad $\frac{2nn-2n}{n-2}VG$. Unde si *NAK* lineam horizontalem designet, & manente tum densitate medii in *A*, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH, AI, HX*, & inde datur parabolæ vertex *X*, & positio rectæ *XI*, & sumendo *VG* ad *IA* ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta *G*, per quae projectile transibit.



<265>

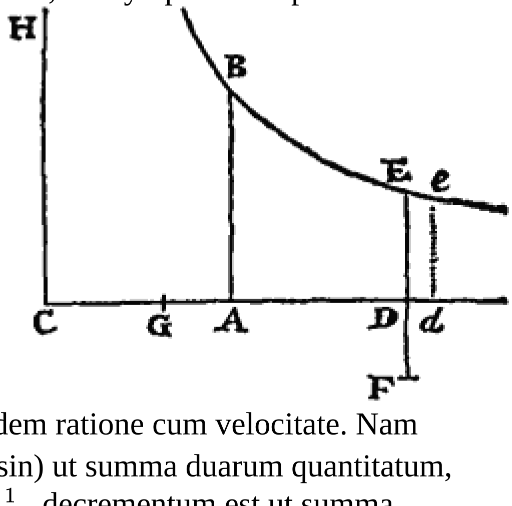
SECTIO III.

De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

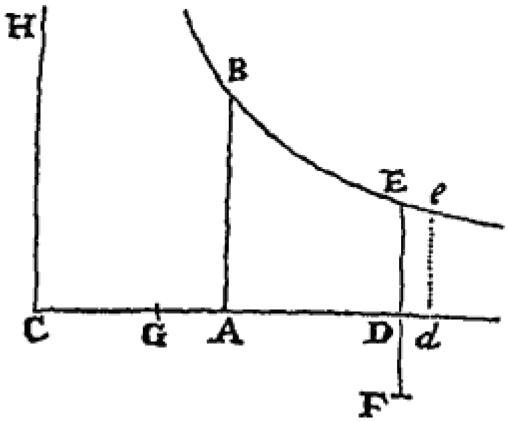
Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmetica; quantitates velocitatibus reciproce proportionales, data quadam quantitate auctæ, erunt in progressione geometrica.

Centro *C*, asymptotis rectangulis *CADd* & *CH*, describatur hyperbola *BEe*, & asymptoto *CH* parallelæ sint *AB, DE, de*. In asymptoto *CD* dentur puncta *A, G:* Et fi tempus exponatur per aream hyperbolicam *ABED* uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem *DF*, cujus reciproca *GD* una cum data *CG* componat longitudinem *CD* in progressione geometrica crescentem.



Sit enim areola *DEed* datum temporis incrementum quam minimum, & erit *Dd* reciproce ut *DE*, ideoque directe ut *CD*. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus lem. II) est $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore *ABED* per additionem datarum particularum *EDde* uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc <266> est (per hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{1}{GDq}$: proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas *GD*, ipsi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis, quantitate data *CG* augeatur; summa *CD*, tempore *ABED* uniformiter crescente, crescet in progressione geometrica. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur si, datis punctis *A*, *G*, exponatur tempus per aream hyperbolicam *ABED*, exponi potest velocitas per ipsius *GD* reciprocam $\frac{1}{GD}$.

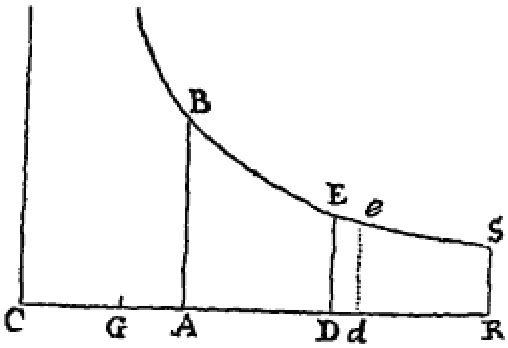


Corol. 2. Sumendo autem *GA* ad *GD* ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis *ABED*, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione geometrica.

In asymptoto *CD* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *RS*, quod occurrat hyperbolæ in *S*, exponatur descriptum spatium per aream hyperbolicam *RSED*; & velocitas erit ut longitudo *GD*, quæ cum data *CG* componit longitudinem *CD* in progressione geometrica decrescentem, interea dum spatium *RSED* augetur in arithmetica.



<267>

Etenim ob datum spatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decrementum est ipsius *GD*, erit reciproce ut *ED*, ideoque directe ut *CD*, hoc est, ut summa ejusdem *GD* & longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula *DdeE* describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim, id est, directe ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas; ideoque directe ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ *GD*, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ semper erunt quantitates decrescentes; nimirum velocitas & linea *GD. Q.E.D.*

Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, spatium descriptum erit ut area hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et si utcunque assumatur punctum *R*, invenietur punctum *G* capiendo *GR* ad *GD*, ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis *RSED* descriptum. Invento autem puncto *G*, datur spatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum (per prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore, & per hanc propositionem detur spatium ex data velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contra.

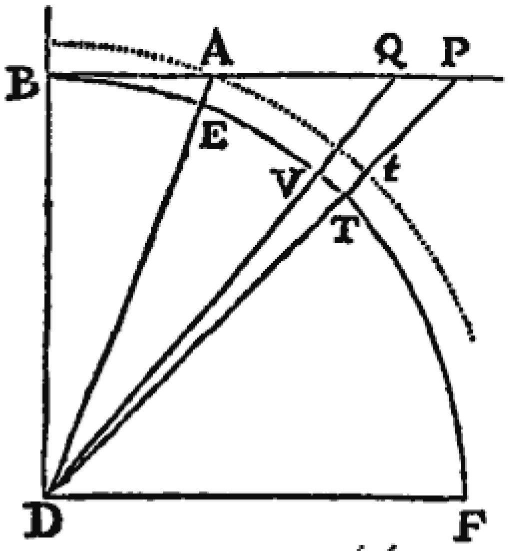
PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum recta ascendit vel descendit; & quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata: dico quod, si circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

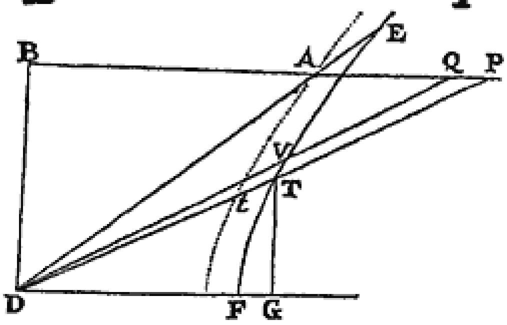
Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque *D* & semidiametro quovis *DB* describatur circuli quadrans *BETF*, & <268> per semidiametri *DB* terminum *B* agatur infinita *BAP*, semidiametro *DF* parallela. In ea detur punctum *A*, & capiatur segmentum *AP* velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars altera sit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia tota in ut $AP\,quad. + 2BAP$. Jungantur *DA*, *DP* circulum secantes in *E* ac *T*, & exponatur gravitas per *DA quad.* ita ut sit gravitas ad resistentiam ut *DAq* ad $APq + 2BAP$: & tempus ascensus totius erit ut circuli sector *EDT*.

Agatur enim *DVQ*, abscindens & velocitatis *AP* momentum *PQ*, & sectoris *DET* momentum *DTV* dato temporis momento respondens; & velocitatis decrementum illud *PQ* erit ut summa virium gravitatis *DAq* &

resistentiæ $APq + 2BAP$, id est (per prop. 12. lib. 2. elem.) ut *DP quad.* Proinde area *DPQ*, ipsi *PQ* proportionalis, est ut *DP quad.* & area *DTV*, quæ est ad aream *DPQ* ut *DTq* ad *DPq*, est ut datum *DTq*. Decrescit igitur area *EDT* uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori ascensus totius proportionalis est. *Q.E.D.*

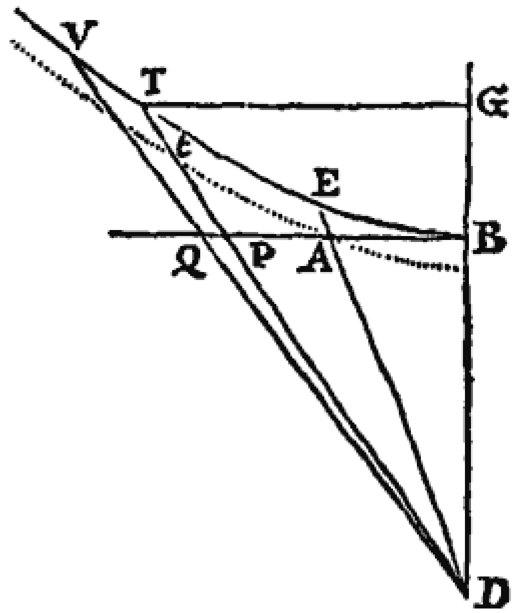


Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem *AP* ut prius, & resistentia ponatur esse ut $APq + 2BAP$, & si vis gravitatis minor sit quam quæ per *DAq* exponi possit; capiatur *BD* ejus longitudinis, ut sit $ABq - BDq$ gravitati proportionale, sitque *DF* ipsi *DB* perpendicularis & æqualis, & per verticem *F* describatur hyperbola *FTVE*, cujus semidiametri conjugatæ sint *DB* & *DF*, quæque secet *DA* in *E*, & *DP*, *DQ* in *T* & *V;* & erit tempus ascensus totius ut hyperbolæ sector *TDE*.



Nam velocitatis decrementum *PQ*, in data temporis particula factum, est ut summa resistentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, id est, ut $BPq - BDq$. Est autem area *DTV* ad aream *DPQ* ut *DTq* ad *DPq*; ideoque, si ad *DF* demittatur perpendiculum *GT*, ut *GTq* seu $GDq - DFq$ <269> ad *BDq*, utque *GDq* ad *BPq*, & divisim ut *DFq* ad $BPq - BDq$. Quare cum area *DPQ* sit ut *PQ*, id est, ut $BPq - BDq$; erit area *DTV* ut datum *DFq*. Decrescit igitur area *EDT* uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum *DTV*, & propterea tempori proportionalis est. *Q.E.D.*

Cas. 3. Sit *AP* velocitas in descensu corporis, & $APq + 2BAP$ resistentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, existente angulo *DBA* recto. Et si centro *D*, vertice principali *B*, describatur hyperbola rectangula *BETV* secans productas *DA*, *DP* & *DQ* in *E*, *T* & *V*; erit hyperbolæ hujus sector *DET* ut tempus descensus.



Nam velocitatis incrementum *PQ*, eique proportionalis area *DPQ*, est ut excessus gravitatis supra resistentiam, id est, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ seu $BDq - BPq$. Et area *DTV* est ad aream *DPQ* ut *DTq* ad *DPq*, ideoque ut *GTq* seu $GDq - BDq$ ad *BPq*, utque *GDq* ad *BDq*, & divisim ut *BDq* ad $BDq - BPq$. Quare cum area *DPQ* sit ut $BDq - BPq$, erit area *DTV* ut datum *BDq*. Crescit igitur area *EDT* uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori descensus proportionalis est. *Q.E.D.*

Corol. Si centro *D* semidiametro *DA* per verticem *A* ducatur arcus *At* similis arcui *ET*, & similiter subtendes angulun *ADT:* velocitas *AP* erit ad velocitatem, quam corpus tempore *EDT*, in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli *DAP* ad aream sectoris *DAt*; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in medio non resistente, tempori, atque ideo sectori huic proportionalis est; in medio resistente est ut triangulum; & in medio utroque, ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris & trianguli.

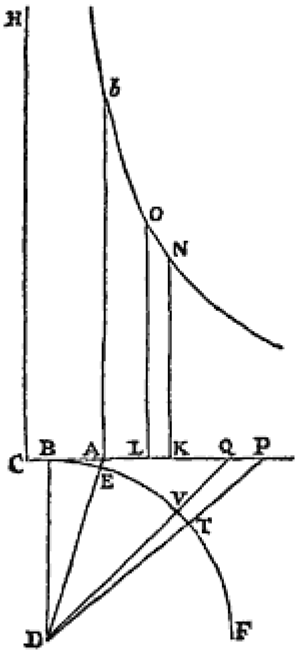
Scholium.

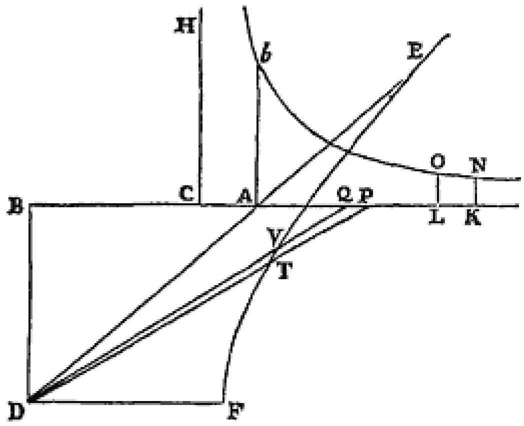
Demonstrati etiam posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis minor est quam quæ exponi possit per *DAq* seu $ABq + BDq$, <270> & major quam quæ exponi possit per $ABq - BDq$, & exponi debet per *ABq*. Sed propero ad alia.

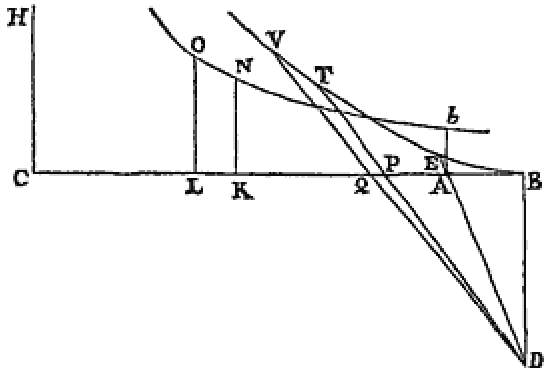
PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione geometrica.

Capiatur *AC* (in fig. tribus ultimis) gravitati, & *AK* resistentiæ







proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti *A* si cor <271> pus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur *Ab*, quæ sit ad *DB* ut *DBq* ad 4*BAC:* & descripta ad asymptotos rectangulas *CK*, *CH* hyperbola *bN*, erectaque *KN* ad *CK* perpendiculari, area *AbNK* augebitur vel diminuetur in progressione arithmetica, dum vires *CK* in progressione geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ *AbNK* supra aream *DET*.

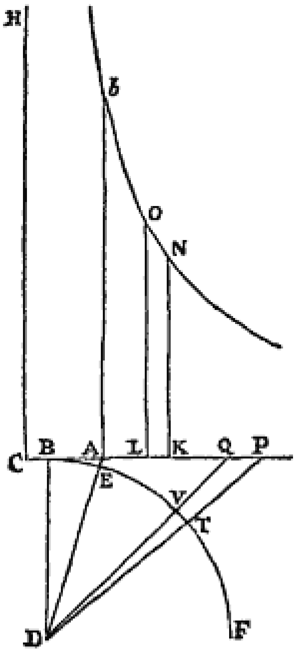
Nam cum *AK* sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur *AK* æqualis $\frac{APq+2BAP}{\mathrm{Z}}$; & (per hujus lemma II.) erit ipsius *AK* momentum *KL* æquale $\frac{2APQ+2BA\times PQ}{\mathrm{Z}}$ seu $\frac{2BPQ}{\mathrm{Z}}$, & areæ *AbNK* momentum *KLON* æquale $\frac{2BPQ\times LO}{\mathrm{Z}}$ seu $\frac{BPQ\times BD\ cub.}{2\mathrm{Z}\times CK\times AB}$.

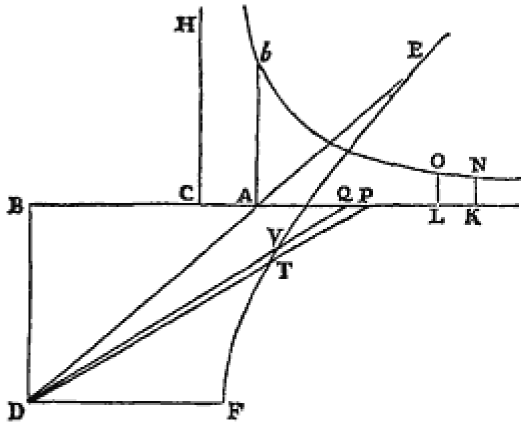
Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq + BDq$ existente *BET* circulo, (in figura prima) linea *AC*, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq+BDq}{\mathrm{Z}}$, & *DPq* seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times \mathrm{Z} + AC \times \mathrm{Z}$ seu $CK \times \mathrm{Z}$; ideoque area *DTV* erit ad aream *DPQ* ut *DTq* vel *DBq* ad $CK \times \mathrm{Z}$.

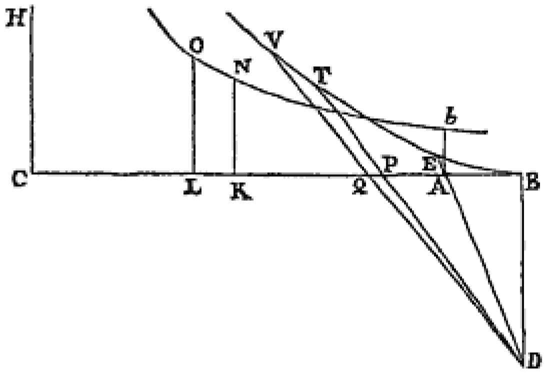
Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut $ABq - BDq$, linea *AC* (in figura secunda) erit $\frac{ABq-BDq}{\mathrm{Z}}$, & *DTq* erit ad *DPq* ut *DFq* seu *DBq* ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times \mathrm{Z} + AC \times \mathrm{Z}$ seu $CK \times \mathrm{Z}$. Ideoque area *DTV* erit ad aream *DPQ* ut *DBq* ad $CK \times \mathrm{Z}$.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut $BDq - ABq$, & linea *AC* (in figura tertia) æquetur $\frac{BDq-ABq}{\mathrm{Z}}$ erit area *DTV* ad aream *DPQ* ut *DBq* ad $CK \times \mathrm{Z}$: ut supra.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hac ratione; si pro area *DTV*, qua momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, <272> erit area *DPQ*, id est, $\frac{1}{2}BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times \mathrm{Z}$ ad *BDq*. Atque inde fit $PQ \times BD\ cub.$ æquale $2BD \times m \times CK \times \mathrm{Z}$, & areæ *AbNK* momentum *KLON* superius inventum, fit $\frac{BP\times BD\times m}{AB}$. Auferatur æreae *DET* momentum *DTV* seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$; & propterea







ob datum $\frac{BD\times m}{AB}$ ut velocitas *AP*, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud, proportionalibus momentis crescen <273> tia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. *Q.E.D.*

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream *DET* ad lineam *ED*, dicatur *M*; & longitudo alia *V* sumatur in ea ratione ad longitudinem *M*, quam habet linea *DA* ad lineam *DE:* spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium, quod corpus in medio non resistente e quiete cadendo eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD\times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in medio non resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut V^2; & ob datas *BD* & *AB* ut $\frac{BD\times V^2}{AB}$. Hæc area æqualis est areæ $\frac{DAq\times BD\times M^2}{DEq\times AB}$, & ipsius *M* momentum est *m*; & propterea hujus areæ momentum est $\frac{DAq\times BD\times 2M\times m}{DEq\times AB}$. Hoc autem momentum est ad momentum differentiæ arearum prædictarum *DET* & *AbNK*, viz. ad $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$, ut $\frac{DAq\times BD\times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2}BD\times AP$, sive ut $\frac{DAq}{DEq}$ in *DET* ad *DAP*; ideoque, ubi areæ *DET* & *DAP* quam minimæ sunt, in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD\times V^2}{AB}$, & differentiæ arearum *DET* & *AbNK*, quando omnes hæ areæ quam minimæ sunt, æqualia habent momenta; ideoque sunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam spatia in medio utroque in principio descensus vel fine ascensus simul descripta accedant ad æqualitatem; ideoque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD\times V^2}{AB}$, & arearum *DET* & *AbNK* differentia; & præterea cum spatium in medio non resistente sit perpetuo ut $\frac{BD\times V^2}{AB}$, & spatium in medio resistente sit perpetuo ut arearum *DET* & *AbNK* differentia: necesse est, ut spatia in medio utroque, in æqualibus quibuscunque temporibus descripta, sint ad invicem ut area <274> illa $\frac{BD\times V^2}{AB}$, & arearum *DET* & *AbNK* differentia. *Q.E.D.*

Scholium.

Resistentia corporum sphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex densitate medii. Et resistentiæ partem illam, quæ oritur ex densitate fluidi diximus esse in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, est uniformis, sive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim vi uniformi seu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicata velocitatis. Sed sufficit aditum patefecisse ad hanc speculationem in propositionibus VIII. & IX. quæ præcedunt, & eorum corollariis. In iisdem utique pro corporis ascendentis resistentia uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, substitui potest resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus sola vi insita movetur; & corpore recta ascendente addere licet hanc uniformem resistentiam vi gravitatis; eandemque subducere, quando corpus recta descendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicata velocitatis. Et viam aperui in propositionibus præcedentibus XIII. & XIV. in quibus etiam resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis substitui potest, vel cum eadem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

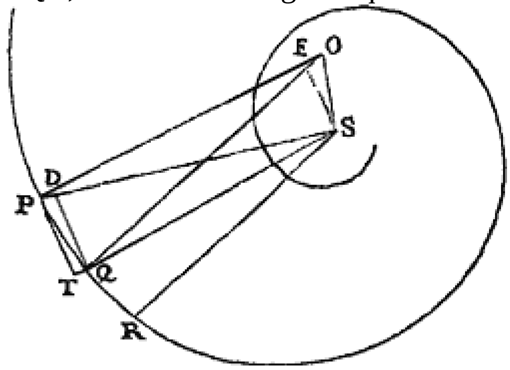
SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis resistentibus.

LEMMA III.

Sit PQR *spiralis quæ secet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* SQ *in* T; *& ad spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* <275> O, *jungatur* SO. *Dico quod si puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* $\mathrm{TQ} \times 2\mathrm{PS}$ *ad* PQ*quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ, OQR* subducantur anguli æquales *SPQ, SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS, OQS*. Ergo circulus qui transit per puncta *O, S, P* transibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *PQ* tanget spiralem, ideoque perpendiculariter secabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in semicirculo rectus. *Q.E.D.*

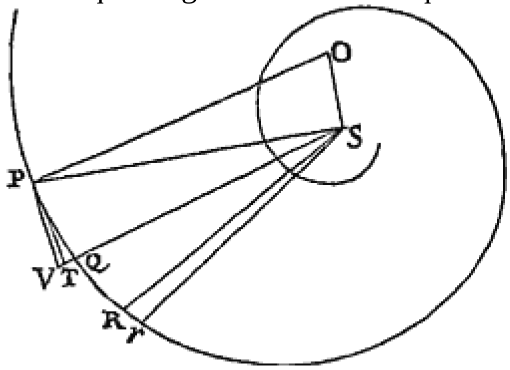


Ad *OP* demittantur perpendicula *QD, SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, seu 2*PO* ad 2*PS*; item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PO*; et ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PS*. Unde fit *PQq* æquale $TQ \times 2PS$. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

Si medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicata ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore lemmate, & producatur *SQ* ad *V*, ut sit *SV* æqualis *SP*. Tempore quovis, in medio resistente, describat corpus arcum quam minimum *PQ*, & tempore duplo arcum quam minimum *PR*; & decrementa horum arcuum ex resistentia oriunda, sive defectus ab arcubus, qui in medio non resistente <276> iisdem temporibus describerentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Est itaque decrementum arcus *PQ* pars quarta decrementi arcus *PR*. Unde etiam, si areæ *PSQ* æqualis capitaur area *QSr*, erit decrementum arcus *PQ* æquale dimidio lineolæ *Rr*; ideoque vis resistentiæ & vis centripeta sunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & *TQ* quas simul generant. Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in *P*, est reciproce ut *SPq*, & (per lem. X. lib. I.) lineola *TQ*, quæ vi illa generatur, est in ratione composita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus *PQ* describitur (nam resistentiam in hoc casu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$, id est (per lemma novissimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicata temporis, ideoque tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & corporis velocitas, qua arcus *PQ* illo tempore describitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc est, in subduplicata ratione ipsius *SP* reciproce. Et simili argumento, velocitas qua arcus *QR* describitur, est in subduplicata ratione ipsius *SQ* reciproce. Sunt autem arcus illi *PQ* & *QR* ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicata ratione *SQ* ad *SP*, sive ut *SQ* ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos *SPQ, SQr* & æquales areas *PSQ, QSr*, est arcus *PQ* ad arcum *Qr* ut *SQ* ad *SP*. Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus *PQ* ad arcum *Rr* ut *SQ* ad



$SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2}VQ$. Nam punctis *P* & *Q* coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ est æqualitatis. Quoniam decrementum arcus *PQ*, ex resistentia oriundum, sive hujus duplum *Rr*, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim; erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem *PQ* ad *Rr*, ut *SQ* ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis *P* & *Q* coeuntibus, *SP* & *SQ* coincidunt, & angulus *PVQ* fit rectus; & ob similia triangula *PVQ*, *PSO*, fit *PQ* <277> ad $\frac{1}{2}VQ$ ut *OP* ad $\frac{1}{2}OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, id est, in ratione densitatis medii in *P* & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in *P* ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur spiralis, & ob datam rationem *OS* ad *OP*, densitas medii in *P* erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciproce ut distantia a centro *SP*, corpus gyrari potest in hac spirali. *Q.E.D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis *P* ea semper est, quacum corpus in medio non resistente eadem vi centripeta gyrari potest in circulo, ad eandem a centro distantiam *SP*.

Corol 2. Medii densitas, si datur distantia *SP*, est ut $\frac{OS}{OP}$, sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde spiralis ad quamlibet medii densitatem aptari potest.

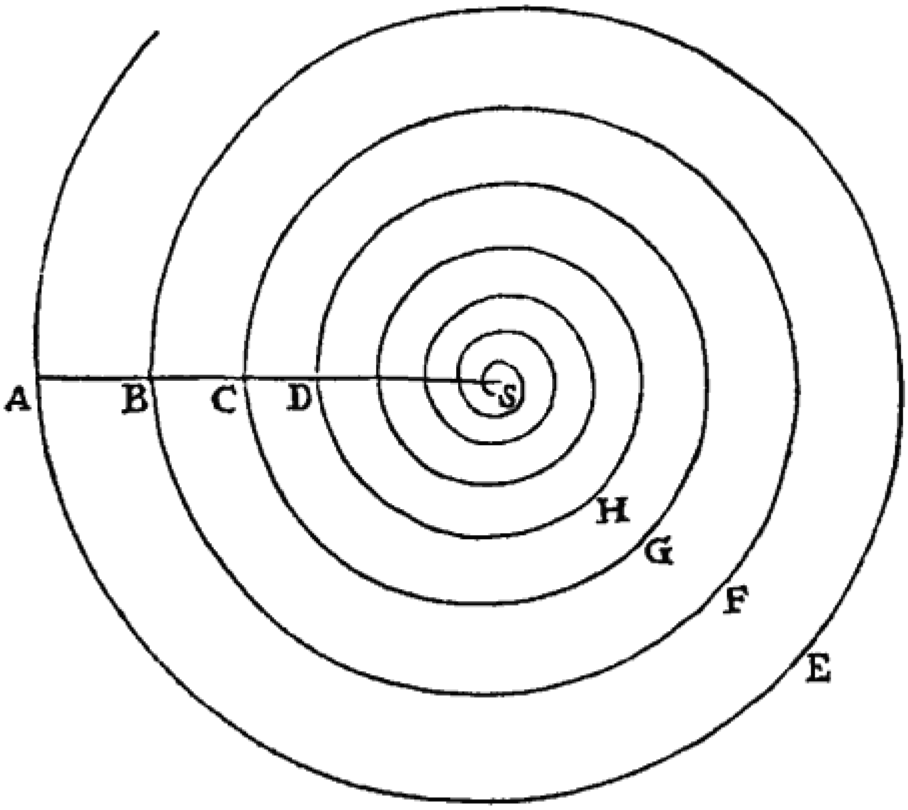
Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis *P*, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad *OP*. Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & *TQ* sive ut $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$, hoc est, ut $\frac{1}{2}VQ$ & *PQ*, seu $\frac{1}{2}OS$ & *OP*. Data igitur spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & viceversa ex data illa proportione datur spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ, & spiralis conveniet cum linea recta *PS*, inque hac recta corpus descendet ad centrum ea cum velocitate, quæ sit ad velocitatem, qua probavimus in superioribus in casu parabolæ (theor. X. lib. I.) descensum in medio non resistente fieri, in subduplicata ratione unitatis ad numerum bianrium. Et tempora descensus hic erunt reciproce ut velocitates, atque ideo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas eadem est in spirali *PQR* atque in recta *SP*, & longitudo spiralis ad longitudinem rectæ *PS* est in data ratione, nempe in ratione *OP* ad <278> *OS*; tempus descensus in spirali erit ad tempus descensus in recta *SP* in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro *S* intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo circuli; & manentibus hisce circulis, mutetur utcunque angulus quem spiralis continet cum radio *PS:* numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in spriali a circumferentia ad circumferentiam, complere potest, est ut $\frac{PS}{OS}$, sive ut tangens anguli illius quem spiralis continet cum radio *PS;* tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id est, ut secans anguli ejusdem, vel etiam reciproce ut medii densitas.

Corol. 7. Si corpus, in medio cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in curva quacunque *AEB* circa centrum illud fecerit, & radium primum *AS* in eodem angulo secuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in *A* reciproce in subduplicata ratione distantiarum a centro (id est, ut *AS* ad mediam proportionalem inter *AS*



& *BS*) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones *BFC, CGD* &c. facere, & intersectionibus distinguet radium *AS* in partes *AS, BS, CS, DS,* &c. continue proportionales. Revolutionum <279> vero tempora erunt ut perimetri orbitarum *AEB, BFC, CGD,* &c. directe, & velocitates in principiis *A, B, C,* inverse; id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}AS$ ad *AB* quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro *S,* intervallis continue proportionalibus *SA, SB, SC,* &c. describe circulos quotcunque, & statue numerum revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio proposito, ut medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium *AS,* ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: Atque etiam ut sunt eorundem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

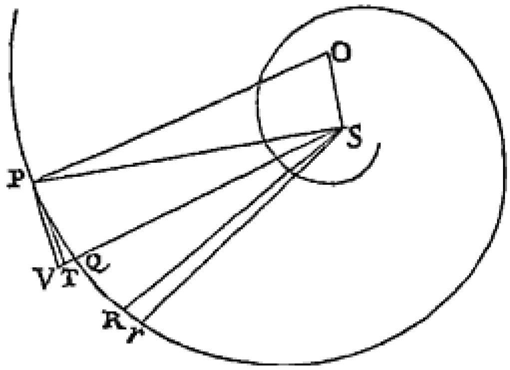
Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ad formam ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi spiralibus peragantur.

<280>

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum propositione superiore. Nam si vis centripeta in *P* sit reciproce ut distantiæ *SP*, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index est $n+1$: colligetur ut supra, quod tempus, quo corpus describit arcum quemvis *PQ*, erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$; & resistentia in *P* ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^n}$, sive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$, ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc est, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$ reciproce ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas sit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, densitas in *P* erit reciproce ut *SP*.



Corol. 1. Resistentia est ad vim centripetam, ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad *OP*.

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciproce ut *SP cub.*, erit $1-\frac{1}{2}n = o$; ideoque resistentia & densitas medii nulla erit, ut in propositione nona libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii *SP* cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutabitur.

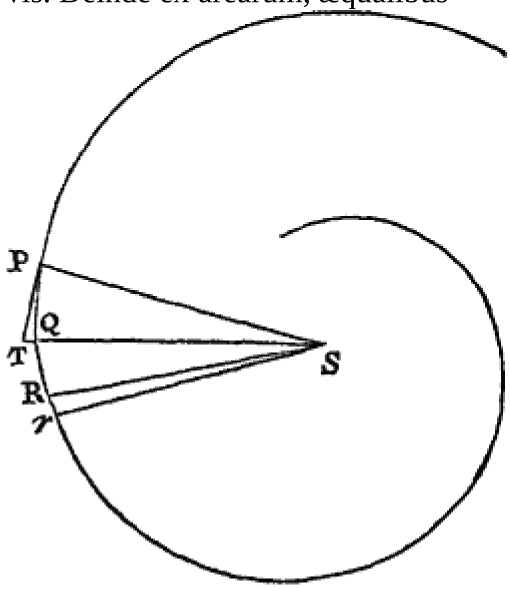
Scholium.

Cæterum hæc propositio & superiores, quæ ad media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, <281> ut medii ex uno corporis latere major densitas quam ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in mediis, quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire & vim centripetam & medii resistentiam, qua corpus in data spirali, data velocitatis lege, revolvi potest.

Sit spiralis illa *PQR*. Ex velocitate, qua corpus percurrit arcum quam minimum *PQ*, dabitur tempus, & ex altitudine *TQ*, quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum *PSQ* & *QSR*, differentia *RSr*, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac densitas medii.



PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Data lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, qua corpus datam spiralem describet.

Ex vi centripeta invenienda est velocitas in locis singulis, deinde <282> ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; ut in propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc problemata aperui in hujus propositione decima, & lemmate secundo; & lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detenere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

SECTIO V.

De densitate & compressione fluidorum, deque hydrostatica.

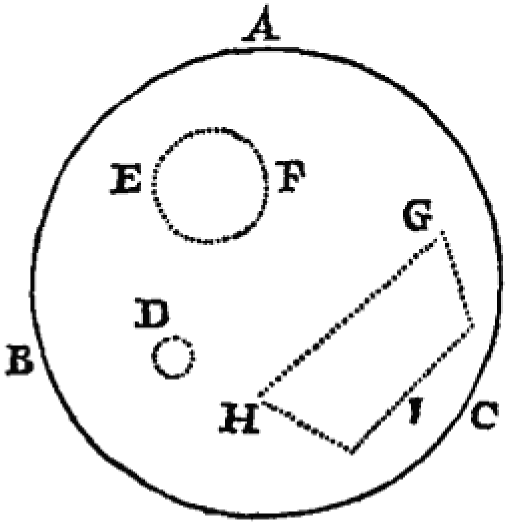
Definitio fluidi.

Fluidum est corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile movetur inter se.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (seposita condensationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & sine omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.

Cas. 1. In vase sphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atque hoc ideo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum con <283> densetur; contra hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra hypothesin. Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q.E.D.*



Cas. 2. Dico jam, quod fluidi hujus partes omnes sphaericæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *EF* pars sphærica fluidi, & si hæc undique non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per casum eundem primum, & additione pressionis novæ movebuntur de locis suis, per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod sphæra *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q.E.D.*

Cas. 3. Dico præterea quod diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphaericæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus legem III. Sed &, per casum secundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eadem vi. *Q.E.D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt a partibus sphæricis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas sphæricas æqualiter premunt, per casum 3. & vicissim ab illis æqualiter premuntur, per motus legem tertiam. *Q.E.D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuo æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est quod fluidi cujuscunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q.E.D.*

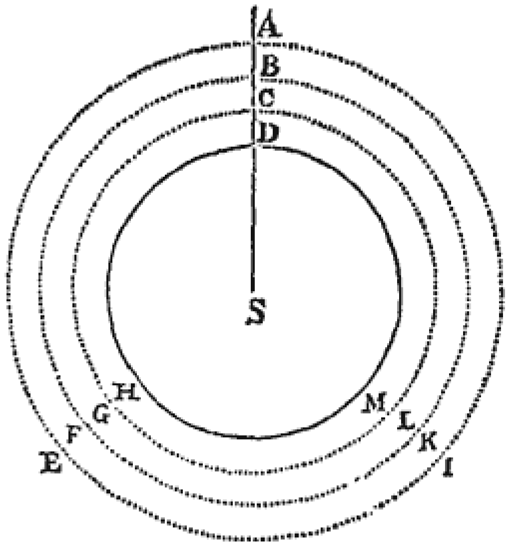
Cas. 6. Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem pressioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido fluidum non sustinebit pressionem <284> fortiorem ex uno latere quam ex alio, sed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quam primum a parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad æqualitatem, in momento temporis, absque motu locali: & subinde partes fluidi, per casum quintum, se mutuo prement æqualiter, & quiescent inter se. *Q.E.D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt, nisi quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

Prop. XX. THEOREMA XV.

Si fluidi sphærici, & in æqualibus a centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.



Sit *DHM* superficies fundi, & *AEI* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *BFK, CGL* distinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *AE* vi simplici gravitatis propriæ, qua & omnes orbis supremi partes & superficies secunda *BFK* (per prop. XIX.) pro mensura sua æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ <285> addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione, pro mensura sua, & insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione tripla, urgetur superficies tertia *CGL*. Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta, & sic deinceps. Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (si modo orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q.E.D.* Et simili argumentatione patet propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quavis assignata distantiæ a centro, ut & ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantiis eadem semper est pressionis quantitas, sive superficies pressa sit horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive fluidum, a superficie pressa sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

Corol. 3. Eadem demonstratione colligitur etiam (per prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modo excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; <286> sive fluido libere innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquesceret & indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet vel descenderet vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet vel descenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui (per cas. 5. prop. XIX.) jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod specifice gravius est quam fluidum sibi contiguum subsidebit, & quod specifice levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est gravitas: altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas absoluta est vis tota qua corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est, inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impedientia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in aëre sunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab aëris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quam excessus verorum ponderum supra pondus aëris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparative levia sunt, non vere, quia descendunt in vacuo. Sic & in aqua corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparative & <287> apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ vel ab ea superatur. Quæ vero nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in sensu vulgi non gravitant in aqua. Nam similis est horum casuum demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

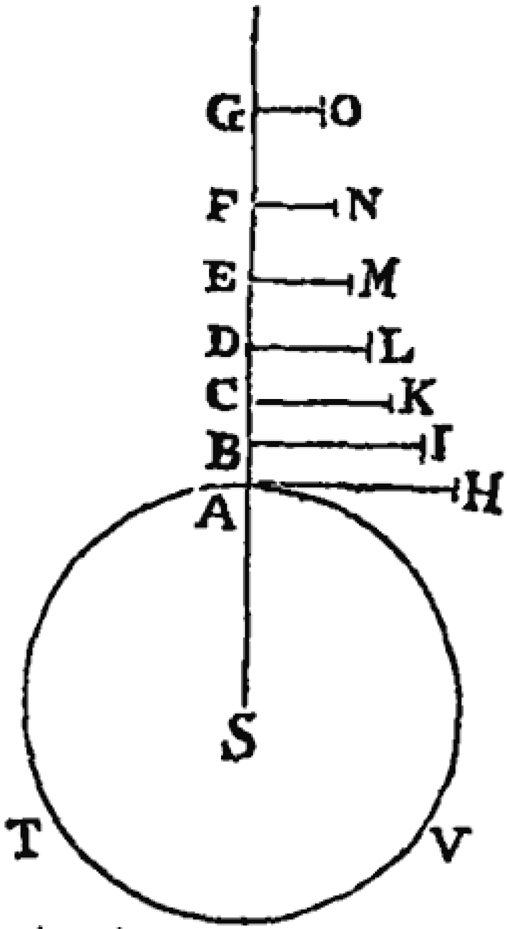
Corol. 8. Proinde si medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius; differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum figuras externas, patet insuper (per corollarium prop. XIX.) quod non mutabunt situm patium internarum inter se: proindeque, si animalia immergantur, & sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora a compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum systematis fluido comprimente circundati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta distantiis suis a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continue proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continue proportionales.

Designet *ATV* fundum sphæricum cui fluidum incumbit, *S* centrum, *SA, SB, SC, SD, SE, SF*, &c. distantias continue propor <288> tionales. Erigantur perpendicula *AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c.* quæ sint ut densitates medii in locis *A, B, C, D, E*; & specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab *A* ad *B*, a *B* ad *C*, a *C* ad *D*, &c. factis per gradus decrementis in punctis *B, C, D*, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines *AB, BC, CD*, &c. conficient pressiones *AH, BI, CK*, &c. quibus fundum *ATV* (juxta theorema XV.) urgetur. Sustinet ergo particula *A* pressiones omnes *AH, BI, CK, DL*, pergendo in infinitum; & particula *B* pressiones omnes præter primam *AH*; & particula *C* omnes præter duas primas *AH, BI*; & sic deinceps: ideoque particulæ primæ *A* densitas *AH* est ad particulæ secundæ *B* densitatem *BI* ut summa omnium $AH+BI+CK+DL$, in infinitum, ad summam omnium $BI+CK+DL$, &c. Et *BI* densitas secundæ *B* est ad *CK* densitatem tertiæ *C*, ut summa omnium $BI+CK+DL$, &c. ad summam omnium $CK+DL$, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis *AH, BI, CK*, &c. proportionales, atque ideo continue proportionales (per hujus lem. I.) proindeque differentiæ *AH, BI, CK*, &c. summis proportionales, sunt etiam continue proportionales. Quare cum densitates in locis *A, B, C*, &c. sint ut *AH, BI, CK*, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per saltum, & ex æquo in distantiis *SA, SC, SE* continue proportionalibus, erunt densitates *AH, CK, EM* continue proportionales. Et eodem argumento, in distantiis quibusvis continue proportionalibus *SA, SD, SG*, densitates *AH, DL, GO* erunt continue proportionales. Coeant jam puncta *A, B, C, D, E*, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo *A* ad summitatem fluidi continua reddatur, & in distantiis quibusvis continue

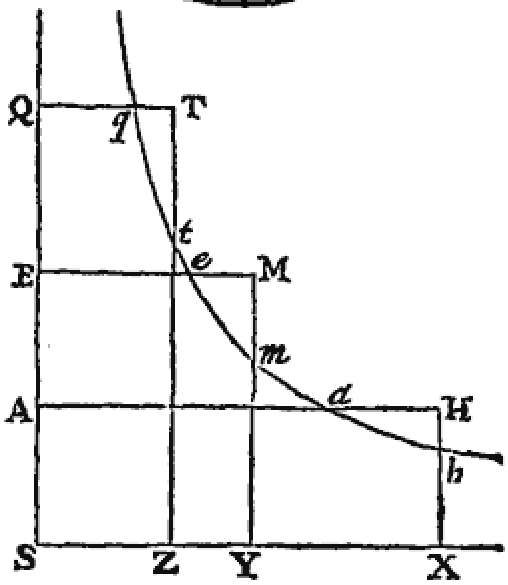


proportionalibus *SA, SD, SG,* densitates *AH, DL, GO,* semper existentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q.E.D.*

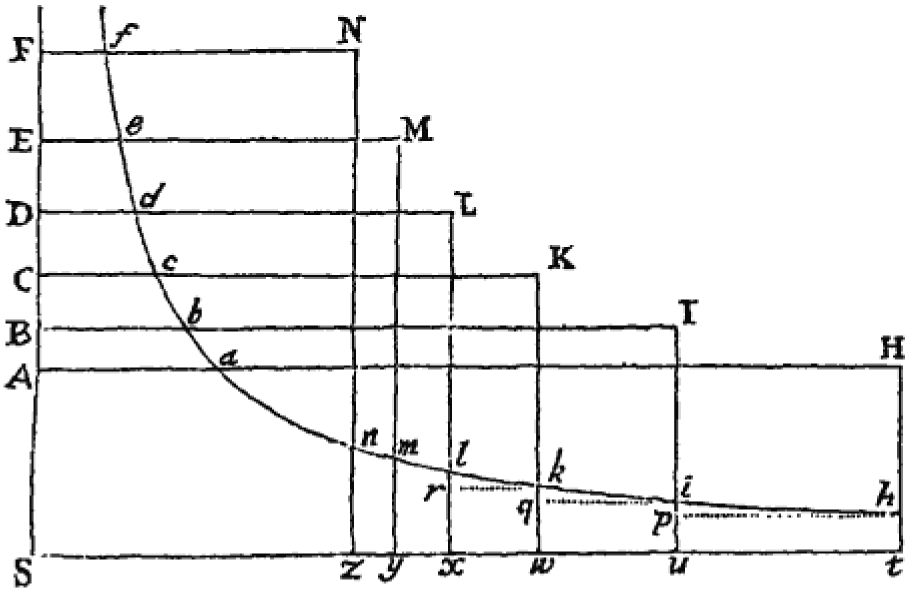
Corol. Hinc si detur densitas fluidi in duobus locis, puta *A* & <289> *E,* colligi potest ejus densitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, asymptotis rectangulis *SQ, SX*, describatur hyperbola secans perpendicula *AH, EM, QT* in *a, e, q,* ut & perpendicula *HX, MY, TZ,* ad asymptoton *SX* demissa, in *h, m,* & *t*. Fiat area *YmtZ* ad aream datam *YmhX* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abscindet lineam *QT* densitati proportionalem. Namque si lineæ *SA, SE, SQ* sunt continue proportionales, erunt areæ *EeqQ, EeaA* æquales, & inde areæ his proportionales *YmtZ, XhmY* etiam æquales, & lineæ *SX, SY, SZ,* id est, *AH, EM, QT* continue proportionales, ut oportet. Et si lineæ *SA, SE, SQ* obtinent alium quemvis ordinem in serie continue proportionalium, lineæ *AH, EM, QT,* ob proportionales areas hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia serie quantitatum continue proportionalium.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ sumantur in progressione musica, densitates fluidi in his distantiis erunt in progressione geometrica.



Designet *S* centrum, & *SA, SB, SC, SD, SE* distantias in progressione geometrica. Erigantur perpendicula *AH, BI, CK,* &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis *A, B, C, D, E,* &c. & ipsius gravitates specfifcæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab *A* ad *B*, secundam a *B* ad *C*, tertiam a *C* ad *D,* &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB, BC, CD, DE,* &c. vel, quod perinde est, in distantias *SA, SB, SC,* &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes pressio <290> num $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro *S*, asymptotis *SA*, *Sx* describatur hyperbola quævis, quæ secet perpendicula *AH, BI, CK,* &c. in *a, b, c,* &c. ut & perpendicula ad asymptoton *Sx* demissa *Ht,Iu, Kw* in *h, i, k*; & densitatum differentiæ *tu, uw,* &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu *tp, uq,* &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut *Aa, Bb,* &c. Est enim, ex natura hyperbolæ, *SA* ad *AH* vel *St*, ut *th* ad *Aa,* ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale *Aa*. Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$



æquale *Bb*, &c. Sunt autem *Aa, Bb, Cc*, &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula *tp, uq*, &c. ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summæ rectangulorum $tp + uq$, vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta *zthn*, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum *A, B, C*, <291> &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ *zthn*, ideoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. Sumantur jam distantiæ quælibet, puta *SA, SD, SF* in progressione musica, & differentiæ $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ *thlx, xlnz* æquales erunt inter se, & densitates *St, Sx, Sz*, id est, *AH, DL, FN*, continue proportionales. *Q.E.D.*

Corol. Hinc si dentur fluidi densitates duæ quævis, puta *AH* & *BI*, dabitur area *thiu*, harum differentiæ *tu* respondens; & inde invenietur densitas *FN* in altitudine quacunque *SF*, sumendo aream *thnz* ad aream illam datam *thiu* ut est differentia $Aa - Ff$ ad differentiam $Aa - Cc$.

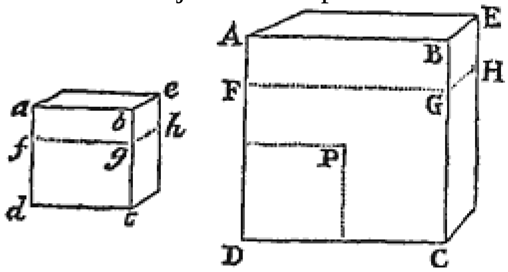
Scholium.

Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro, & quadratorum distantiarum *SA, SB, SC*, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SAq}$, $\frac{SA\,cub.}{SBq}$, $\frac{SA\,cub.}{SCq}$) sumantur in progressione arithmeca; densitates *AH, BI, CK*, &c. erunt in progressione geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SBcub.}$, $\frac{SAqq}{SCcub.}$, &c.) sumantur in progressione arithmetica; densitates *AH, BI, CK*, &c. erunt in progressione geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione arithmetica, densitates erunt in progressione geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicatæ rationi densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiæ. Fin <292> gatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ, densitas erit reciproce in sesquiplicata ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicata ratione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiæ, & densitas erit reciproce ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset. Cæterum per experimenta constat quod densitas aëris sit ut vis comprimens vel accurate vel saltem quam proxime: & propterea densitas aëris in atmosphæra terræ est ut pondus aëris totius incumbentis, id est, ut altitudo mercurii in baromentro.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versa, particulæ viribus quæ *sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt fluidum elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.*

Includi intelligatur fluidum in spatio cubico *ACE*, dein compressione redigi in spatium cubicum minus *ace*; & particularum similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, distantiæ erunt ut cuborum latera *AB, ab*; & mediorum densitates reciproce ut spatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In cubi majoris latere plano *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri plano cubi minoris *db*; & ex hypothesi, pressio, qua quadratum *DP* urget fluidum inclusum, erit ad pressionem, qua illud quadratum *db* urget fluidum inclusum, ut medii densitates ad invicem, hoc est, ut *ab cub.* ad *AB cub.* Sed pressio, qua quadratum *DB* urget fluidum inclusum, est ad pressionem, qua quadratum *DP* urget idem fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc est, ut *AB quad.* ad *ab quad*. Ergo, <293> ex æquo, pressio qua quadratum *DB* urget fluidum, est ad pressionem qua quadratum *db* urget fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH, fgh*, per media cuborum ductis, distinguatur fluidum in duas partes, & hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis *AC, ac*, hoc est, in proportione *ab* ad *AB*: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana *FGH, fgh* exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum *FGH* in cubo majore, sunt ad vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab* ad *AB*, hoc est, reciproce ut distantiæ particularum ad invicem. *Q.E.D.*



Et vice versa, si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantiæ, id est, reciproce ut cuborum latera *AB, ab*; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones laterum *DB, db* ut summæ virium; & pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et, ex æquo, pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id est, vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q.E.D.*

Scholium.

Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicata ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata desitarum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si *D* ponatur pro distantia, & *E* pro densitate fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index est numerus *n*; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index est numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam <294> laminan ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujusmodi particulis componentur fluida de quibus actum est in hac propositione. Quod si particulæ cujusque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis fluidi. An vero fluida elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, quæstio physica est. Nos proprietatem fluidorum ex ejusmodi particulis constantium mathematice demonstravimus, ut philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De motu & resistentia corporum Funependulorum.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia, dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem secundam manifestum est. Jam vero si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: ideoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque <295> ideo tempora directe & velocitates reciproce sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est, ut pondera & quadrata temporum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantitates materiæ æqualia sunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverse.

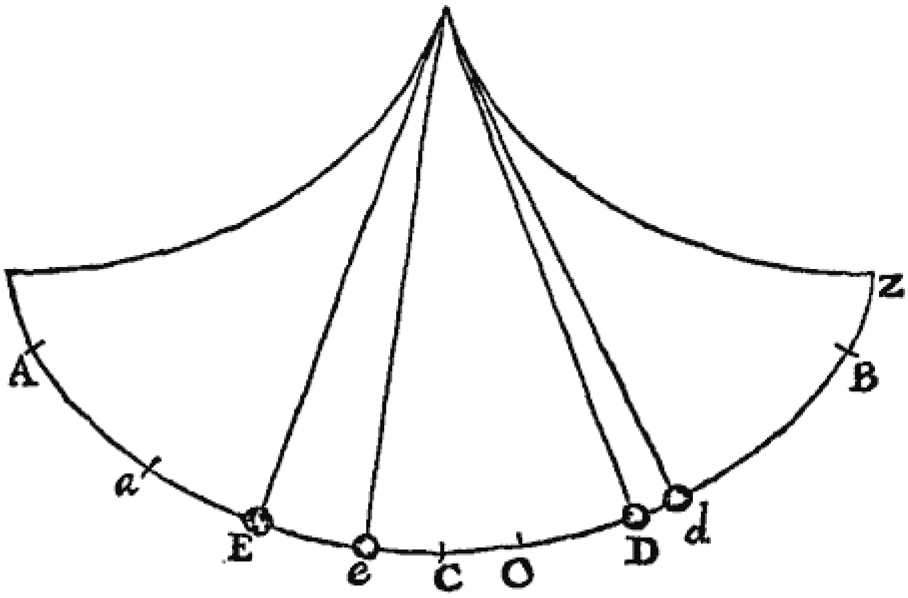
Corol. 6. Sed & in medio non resistente quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverse. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in medio quovis gravi, ut supra explicui; ideoque idem præstat in tali medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora Funependula quibus, in medio quovis, resistuntur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit *AB* cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in *C*, ita ut *C* sit <296> infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *CD* vel *Cd* vel *CE*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistentia sit ut momentum temporis, ideoque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem *CO*, & sumatur arcus *Od* in ratione ad arcum *CD* quam habet arcus *OB* ad arcum *CB:* & vis qua corpus in *d* urgetur in medio resistente, cum sit excessus vis *Cd* supra resistentiam *CO*, exponetur per arcum *Od*, ideoque erit ad vim, qua corpus *D* urgetur in medio non resistente, in loco *D*, ut arcus *Od* ad arcum *CD*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *OB* ad arcum *CB*. Proinde si corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B*, & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus *CB* & *OB*, erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eadem ratione. Sunto arcus illi *BD* & *Bd*, & arcus reliqui *CD, Od* erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipsis *CD, Od* proportionales manebunt



in eadem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* semper erunt ut arcus toti *CD*, *OB*, & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo *D*, *d* simul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in medio non resistente ad locum *C*, & alterum in medio resistente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* sint ut arcus *CB*, *OB*; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo simul describunt, in eadem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis qua corpus *D* in medio non resistente retardatur in *E* est ut *CE*, & vis qua corpus *d* in medio re <297> sistente retardatur in *e* est ut summa vis *Ce* & resistentiæ *CO*, id est ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in data illa ratione arcuum *CB* & *OB*; & propterea si sumantur arcus toti *AB*, *aB* in eadem ratione, corpora *D*, *d* simul describent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillaciones totæ, & arcubus totis *BA*, *Ba* proportionales sunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ simul describuntur. *Q.E.D.*

Corol. Igitur motus velocissimus in medio resistente non incidit in punctum infimum *C*, sed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus descriptus *aB* bisecatur. Et corpus subinde pergendo ad *a*, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo a *B* ad *O*.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum funependulorum, quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in cycloide sunt Isochronæ.

Nam si corpora duo, a centris suspensionum æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti; resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. *Q.E.D.*

<298>

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis resistitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A, B; & resistentia corporis in arcu A, erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B, in duplicata ratione velocitatum, id est, ut AA ad BB, quam proxime. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per propositionem superiorem. Ideoque resistentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra tempus in medio non resistente; & resistentia BB efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id est, ut arcus A & B *Q.E.D.*

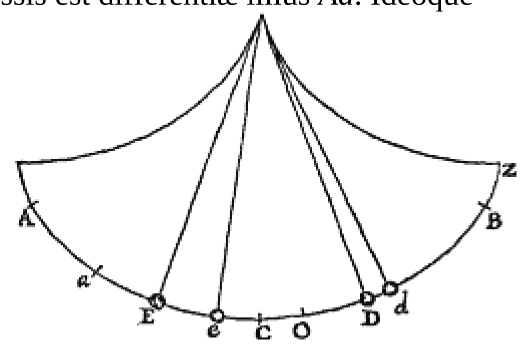
Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oscillationes breviores sunt magis isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo majora, propterea quod resistentia in descensu corporis qua tempus producitur, major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quam resistentia in ascensu subsequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum medii. Nam corporibus tardescentibus paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem a corporibus <299> accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque causa tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet *BC* arcum descensu descriptum, *Ca* arcum ascensu descriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & stantibus quæ in propositione XXV constructa & demonstrata sunt, erit vis qua corpus oscillans urgetur in loco quovis *D*, ad vim resistentiæ ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui semissis est differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis, qua corpus oscillans urgetur in cycloidis principio seu puncto altissimo, id est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id est (si arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, seu dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa. Q.E.D.*

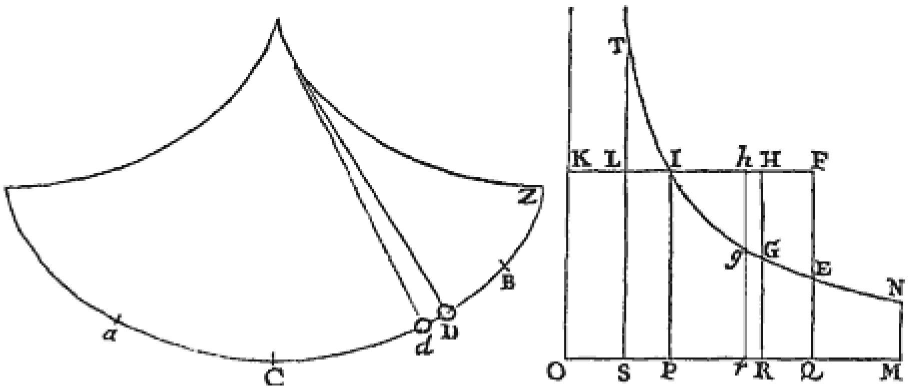


<300>

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicata ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit *Ba* arcus oscillatione integra descriptus, sitque *C* infimum cycloidis punctum, & *CZ* semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *OQ* in punctis *O, S, P, Q*, ea lege, ut (si erigantur perpendicula *OK, ST, PI, QE*, centroque *O* & asymptotis *OK, OQ* describatur hyperbola *TIGE* secans perpendicula *ST, PI, QE* in *T, I* & *E,* & per punctum *I* agatur *KF* parallela asymptoto *OQ* occurrens asymptoto *OK* in *K*, & perpendiculis *ST* & *QE* in *L* & *F*) fuerit area hyperbolica *PIEQ* ad aream hyperbolicam *PITS* ut arcus *BC* descensu corporis descriptus ad arcum



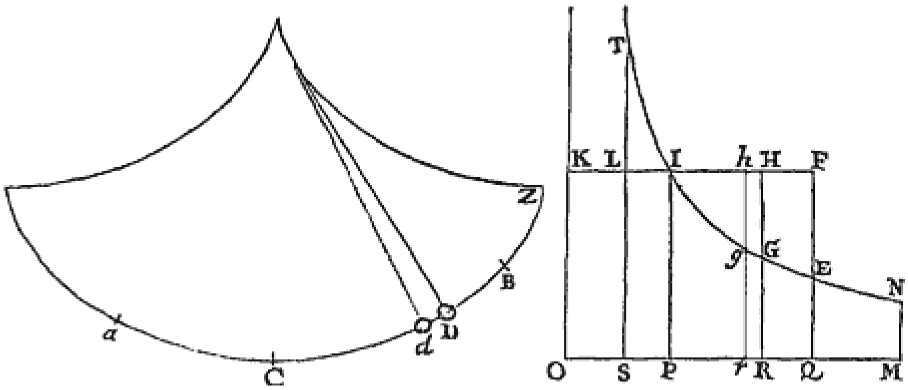
Ca ascensu descriptum, & area *IEF* ad aream *ILT* ut *OQ* ad *OC*. Dein perpendiculo *MN* abscindatur area hyperbolica *PINM* quæ sit ad aream hyperbolicam *PIEQ* ut arcus *CZ* ad arcum *BC* descensu descriptum. Et si perpendiculo *RG* abscindatur area hyperbolica *PIGR*, quæ sit ad aream *PIEQ* ut arcus quilibet *CD* ad arcum *BC* descensu toto descriptum; erit resistentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ ad aream *PINM*.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z, B, D, a* urgetur, sint ut arcus *CZ, CB, CD, Ca*, & arcus illi sint ut areæ <301> *PINM, PIEQ, PIGR, PITS*; exponatur tum arcus tum vires per has areas respective. Sit insuper *Dd* spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *RGgr* parallelis *RG, rg* comprehensam; & producatur *rg* ad *h*, ut sint *GHhg*, & *RGgr* contemporanea arearum *IGH, PIGR* decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ *PIGR* decrementum *RGgr* seu $Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad *RG*; ideoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ seu $OP \times PI$, hoc est (ob æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, *PIHR* & $PIGR + IGH$) ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad *OPIK*. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ dicatur *Y*, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, erit incrementum areæ *Y* ut $PIGR - Y$.

Quod si V designet vim a gravitate oriundam, arcui describendo *CD* proportionalem, qua corpus urgetur in *D*, & R pro resistentia ponatur; erit V – R vis tota qua corpus urgetur in *D*. Est itaque incrementum velocitatis ut V – R & particula illa temporis in qua factum est conjunctim: Sed & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directe & particula eadem temporis inverse. Unde, cum resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (per lem. II.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est, ut momentum spatii & V – R conjunctim; atque ideo, si momentum spatii detur, ut V – R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens *PIGR*, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR - \mathrm{Z}$.

Igitur area *PIGR* per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $PIGR - \mathrm{Y}$, & area Z in ratione $PIGR - \mathrm{Z}$. Et propterea si areæ Y & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis <302> subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id ideo quia si resistentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo *Ca*, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum *C*, resistentia citius evanescet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio motus ubi arcus *CD* arcui *CB* æquatur & recta *RG* incidit in rectam *QE*, & in fine motus ubi arcus *CD* arcui *Ca* æquatur & *RG* incidit in rectam *ST*. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incipit desinitque ubi nulla est, ideoque ubi



$\frac{OR}{OQ}IEF$ & IGH æqualia sunt: hoc est (per constructionem) ubi recta *RG* incidit successive in rectas *QE* & *ST*. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream *PINM* per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q.E.D.*

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}IEF$ ad aream *PINM*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* est ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - \mathrm{Y}$) evadit nullum.

<303>

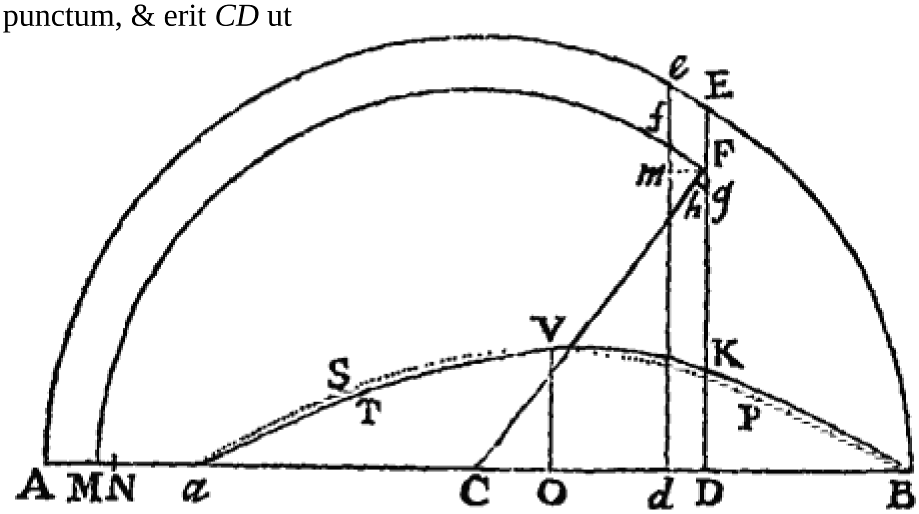
Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicata ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eadem cycloide sine omni resistentia oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc propositionem inveniendæ sunt, visum est propositionem sequentem subjungere.

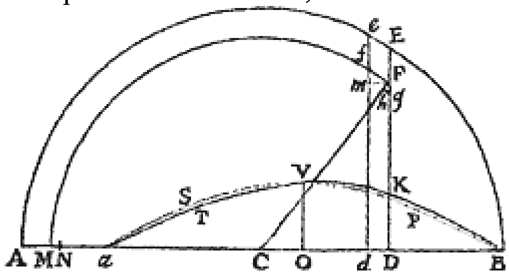
PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta aB *æqualis sit cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum, & arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* BKa *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Exponatur enim tum cycloidis arcus, oscillatione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem *aB*, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem *AB*. Bisecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræsentabit infimum cycloidis punctum, & erit *CD* ut



vis a gravitate oriunda, qua corpus in *D* secundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis <304> illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & si in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longitudinem penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit *DK* exponens resistentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* construatur semicirculus, *BEeA*. Describat autem corpus tempore quam minimo spatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, *de* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo a puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc (per prop. LII. lib. I.) Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa *DE, de;* sitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in medio resistente. Et si centro *C* & intervallo *CF* describatur circulus *FfM* occurrens rectis *de* & *AB* in *f* & *M*, erit *M* locus ad quem deinceps sine ulteriore resistentia ascenderet, & *df* velocitas quam acquireret in *d*. Unde etiam si *Fg* designet velocitatis momentum quod corpus *D*, describendo spatium quam minimum *Dd*, ex resistentia medii amittit; & sumatur *CN* æqualis *Cg:* erit *N* locus ad quem corpus deinceps sine ulteriore resistentia ascenderet, & *MN* erit decrementum ascensus ex velocitatis illius amissione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum *Fm*, & velocitatis *DF* decrementum *Fg* a resistentia *DK* genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum *fm* a vi *CD* genitum, ut vis generans *DK* ad vim generantem *CD*. Sed & ob similia triangula *Fmf, Fhg, FDC*, est *fm* ad *Fm* seu *Dd* ut *CD* ad *DF*; & ex æquo *Fg* ad *Dd* ut *DK* ad *DF*. Item *Fh* ad *Fg* ut *DF* ad *CF*; & ex æquo perturbate, *Fh* seu *MN* ad *Dd* ut *DK* ad *CF* seu *CM*; ideoque summa omnium $MN \times CM$ æqualis erit summæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile *M* erigi semper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ *CM*, quæ <305> motu continuo ducatur in totam longitudinem *Aa*; & trapezium ex illo motu descriptum sive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2}aB$ æquabitur summæ omnium $MN \times CM$, ideoque summæ omnium $Dd \times DK$, id est, areæ *BKVTa*. *Q.E.D.*



Corol. Hinc ex lege resistentiæ & arcuum *Ca*, *CB* differentia *Aa* colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam si uniformis sit resistentia *DK*, figura *BKTa* rectangulum erit sub *Ba* & *DK*; & inde rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & *Aa* erit æquale rectangulo sub *Ba* & *DK*, & *DK* æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum *DK* sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem penduli; omnino ut in prop. XXVIII. demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, figura *BKTa* ellipsis erit quam proxime. Nam si corpus, in medio non resistente, oscillatione integra describeret longitudinem *BA*, velocitas in loco quovis *D* foret ut circuli diametro *AB* descripti ordinatim applicata *DE*. Proinde cum *Ba* in medio resistente, & *BA* in medio non resistente, æqualibus circiter temporibus describantur; ideoque velocitates in singulis ipsius *Ba* punctis, sint quam proxime ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis *BA*, ut est *Ba* ad *BA*; erit velocitas in puncto *D* in medio resistente ut circuli vel ellipseos super diametro *Ba* descripti ordinatim applicata; ideoque figura *BKVTa* ellipsis erit quam proxime. Cum resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit *OV* exponens resistentiæ in puncto medio *O*; & ellipsis *BRVSa*, centro *O*, semiaxibus *OB*, *OV* descripta, figuram *BKVTa*, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est, *Aa* ad *OV* ut area semicirculi ad quadratum radii, sive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11}Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in *O* ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia *DK* sit in duplicata ratione velocitatis, figura *BKVTa* fere parabola erit verticem habens *V* & axem *OV*, ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & *OV* quam proxime. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & *Aa* æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & *OV*, ideoque *OV* æqualis $\frac{3}{4}Aa$: & propterea corporis oscillantis resistentia in *O* ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}Aa$ ad longitudinem penduli.

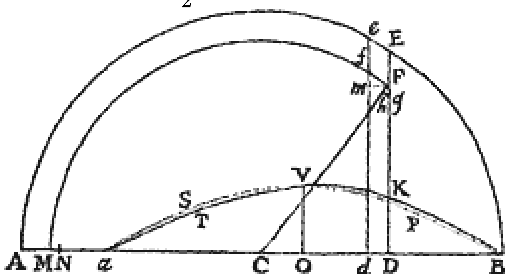
<306>

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum ellipsis vel parabola *BRVSa* congruat cum figura *BKVTa* in puncto medio *V*, hæc si ad partem alterutram *BRV* vel *VSa* excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur quam proxime.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu *descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.*

Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam medii, ideoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2}aB$ & arcuum illorum *CB*, *Ca* differentia *Aa* æqualis erat areæ *BKTa*. Et area illa, si maneat longitudo *aB*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *DK*; hoc est, in ratione resistentiæ, ideoque est ut longitudo *aB* & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub *Aa* & $\frac{1}{2}aB$ est ut *aB* & resistentia conjunctim, & propterea *Aa* ut resistentia. *Q.E.D.*



Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

<307>

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his propositionibus, per oscillationes pendulorum in mediis quibuscunque, invenire licet resistentiam mediorum. Aeris vero resistentiam investigavi per experimenta sequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinensium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi, ita ut inter uncum & centrum oscillationis globi distantia esset pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro suspensionis distans; & e regione puncti illius collocavi regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudines arcum a pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes quibus globus octavam motus sui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad distantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totaque oscillatione prima, ex descensu & ascensu subsequente composita, arcum digitorum fere quatuor: idem oscillationibus 164 amisit octavam motus sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripit arcum digitorum quatuor; amisit octavam motus partem oscillationibus 121, ita ut ascensu ultimo describeret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo descensu descripit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor; amisit octavam motus partem oscillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, respective. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ulti <308> mo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}, \frac{1}{242}, \frac{1}{69}, \frac{4}{71}, \frac{8}{37}, \frac{24}{29}$ partes digiti respective. Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicata ratione arcuum descriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione; & propterea (per corol. 2. prop. XXXI. libri hujus) resistentia globi, ubi celerius movetur, est in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum sit $\mathrm{AV}+\mathrm{BV}^{\frac{3}{2}}+\mathrm{CV}^2$. Cum velocitates maximæ sint in cycloide ut semisses arcuum oscillando descriptorum, in circulo vero ut semissium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores sint in cycloide quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundum chordas; tempora autem in circulo sint majora quam in cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ sunt ut resistentia & quadratum temporis conjunctim) easdem fore, quamproxime, in utraque curva: deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, una cum resistentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem sumendæ sunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo observatæ, velocitates vero maximæ ponendæ sunt arcubus dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto & sexto numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121}=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}$ in casu secundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}}=4\mathrm{A}+8\mathrm{B}+16\mathrm{C}$ in casu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}}=16\mathrm{A}+64\mathrm{B}+256\mathrm{C}$ in casu sexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem analyticam, fit $\mathrm{A}=0{,}0000916$, $\mathrm{B}=0{,}0010847$, & $\mathrm{C}=0{,}0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0{,}0000916\mathrm{V}+0{,}0010847\mathrm{V}\frac{3}{2}+0{,}0029558\mathrm{V}^2$: <309> & propterea cum (per corollarium propositionis XXX. applicatum ad hunc casum) resistentia globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}\mathrm{AV}+\frac{7}{10}\mathrm{BV}^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}\mathrm{CV}^2$ ad longitudinem penduli; si pro A, B & C scribantur numeri inventi, fiet resistentia globi ad ejus pondus, ut $0{,}0000583\mathrm{V}+0{,}0007593\mathrm{V}^{\frac{3}{2}}+0{,}0022169\mathrm{V}^2$ ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis & regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cum V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus globi in casu secundo ut 0,0030345 ad 121, in quarto ut 0,041748 ad 121, in sexto ut 0,61705 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120-\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum globi descripsit erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si globus descensu suo toto in medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirer posset. Est autem sinus ille versus in cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15,278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,61705 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem hydrostatico inveni quod pondus globi hujus lignei esset ad pondus globi aquei magnitudinis ejusdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213,4 in eadem ratione, erit resistentia globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus, ut 0,56752 ad 213,4 id est, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cum pon <310> dus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem digitorum 30,556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset; manifestum est quod vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$. Et propterea quo tempore globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $3\frac{7}{16}$, describere posset, eodem amitteret motus sui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripti tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum actava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Descensus Primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea globum plumbeum diametro digitorum 2, & pondere uncicarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem, sic ut inter centrum globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numeram oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30
Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabula priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & <311> septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respective, & generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione tertia $\frac{\frac{1}{2}}{193} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}$, in quinta $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4\mathrm{A} + 8\mathrm{B} + 16\mathrm{C}$, in septima $\frac{8}{30} = 16\mathrm{A} + 64\mathrm{B} + 256\mathrm{C}$. Hæ vero æquationes reductæ dant $\mathrm{A} = 0{,}001414$, $\mathrm{B} = 0{,}000297$, $\mathrm{C} = 0{,}000879$. Et inde prodit resistentia globi cum velocitate V moti in ea ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009\mathrm{V} + 0{,}000208\mathrm{V}^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659\mathrm{V}^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Est si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659\mathrm{V}^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217\mathrm{V}^2$ ad 121: & inde fit resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in 0,002217 ad $26\frac{1}{4}$ in 0,000659, id est, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo resistentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa resistentia subduci debet. Hanc accurate definire non potui, sed majorem tamen inveni quam partem tertiam resistentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod resistentiæ globorum, dempta fili resistentia, sunt quam proxime in duplicata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abest a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum resistentia fili in globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum oscillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum suspensionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli descensu a nodo descriptus, 32 dig. Arcus ascensu ultimo post oscillationes quinque ab eodem nodo descriptus 28 dig. Summa arcuum seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima seu differentia inter descensum & ascensum in <312> oscillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$ ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri a nodo descriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig.

oscillatione mediocri a centro globi descriptum; & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus descripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oscillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illa subduplicata, maneret vero arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0,4475. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia ista 0,4475 augeretur in duplicata illa ratione, ideoque evaderet 1,5295. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia penduli esset in duplicata ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1,5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat uniciarum 208, producit 318,136. Rursus ubi pendulum superius ex globo ligneo constructum, centro oscillationis, quod a puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus globi, quod erat uniciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396.

Duxi autem differentias hasce in pondera globorum, ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, suntque ut resistentiæ directe & pondera inverse. Sunt igitur resistentæ ut numeri 318,136 & 49,396. Pars autem resistentiæ globi minoris, quæ est in duplicata ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam, ut 0,56752 ad 0,61675, id est, ut 45,453 ad 49,396; & pars resistentiæ globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; ideoque partes illæ sunt ut 318,136 & 45,453 quamproxime, id est, ut 7 & 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7,438 & 1, id est, ut globorum resistentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major est, quam quæ ex fili resistentia oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum; sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

<313>

Cæterum globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfecte sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minime sollicitus. Optarim itaque cum demonstratio vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si globi sumantur in proportione geometrica, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressione experimentorum coligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo resistentias diversorum fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, secique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere **{**$166\frac{1}{6}$**}** unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabula sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum	}	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum	}	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum	}	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum in aqua				$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oscillationum in aere		$85\frac{1}{2}$		287	535	" "	" "	" "	" "	

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amissi sunt. Erant quidem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; ideoque resistentia penduli in aqua est ad ejus resistentiam in aere <314> ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proprtio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $\mathrm{AV}+\mathrm{CV}^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum a globo, in aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $\mathrm{A}+\mathrm{C}=85\frac{1}{2}$ & $8\mathrm{A}+64\mathrm{C}=4280$ seu $\mathrm{A}+8\mathrm{C}=535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7\mathrm{C}=449\frac{1}{2}$ & $\mathrm{C}=64\frac{3}{14}$ & $\mathrm{A}=21\frac{2}{7}$: atque ideo resistentia, cum sit ut $\frac{7}{22}\mathrm{AV}+\frac{3}{4}\mathrm{CV}^2$, erit ut $13\frac{6}{11}\mathrm{V}+48\frac{9}{56}\mathrm{V}^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11}+48\frac{9}{56}$ seu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco resistentia penduli in aqua est ad resistentiæ partem illam in aere, quæ quadrato velocitates proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjucntim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aqua oscillantis resistentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate, in aere oscillantis, ut 850 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicata. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi, quod arca nimis angusta esset pro magnitudine globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustia sua nimis impediebat. Nam si globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Id tentabam construendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aqua, superior & major proxime supra aquam filo affixus esset, & in aere oscillando, adjuvaret motum pen <315> duli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in tabula sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias mediorum inter se, effeci etiam pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter globi penduli tertia pars digiti. Ad filum autem proxime supra mercurium affixus erat globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in fluido utroque seccessive oscillante, invenirem proportionem resistentiarum: & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argenti vivi in ea ratione ad resistentiam aquæ, quam habet neumerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine globi immersi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proxime. Non dico accurate. Nam fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quam liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam spiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in aere, in aqua seu dulci seu salsa, in spiritibus vini, terebinthi & salium, in oleo a fæcibus per destillationem liberato & calefacto, oleoque vitrioli & mercurio, ac metallis liquifactis, & siqui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrime in guttas decurrendo resolvantur, nullus <316> dubito quin regula allata satis accurate obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Denique cum nonnullorum opinio sit, medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eoreum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu suo superiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tensum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget. Huic ponderi addebam pondus aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere suo tendento filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad <317> locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insita pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque ideo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externa, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit 78B resistentia pyxidis plenæ in ipsius internis: ideoque pyxidis vacuæ resistentia tota $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam $\mathrm{A}+78\mathrm{B}$ ut 77 ad 78, & divisim $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ ad 77B, ut 77 ad 1, indeque $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic vero disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua causa latente oriatur, sed ab actione sola fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsus sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

<318>

SECTIO VII.

De motu fluidorum & resistentia projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri.

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incœptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus leg. I. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitan <319> tibus (per legum corollarium secundum) compositaeæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt (per corol. 1. & 8. prop. IV. lib. I. si modo centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque ad occursus suos primos, & propterea similes occursus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et si similes & similiter positæ systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque ideo spatia diametris suis proportionalia describere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistituntur in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifu <320> gis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiaeæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantiæ particularum correspondentium inverse & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directe: ideoque cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium systematum. *Q.E.D.* Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter earum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint fluida duo elastica ad modum aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in fluidis, & spatia similia ac diametris suis proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox resistentiam patitur, quæ est in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, augerenter in duplicata ratione velocitatis, resistentia foret in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in medio, cujus partes ab invicem distan <321> tes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur media tria *A, B, C* ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes mediorum *A* & *B* fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut *T* & *V*, illæ medii *C* ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor æqualia *D, E, F, G* in his mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; sitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G* in subduplicata ratione virium *T* ad vires *V:* resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *E*, & resistentia corporis *F* ad resistentiam corporis *G*, in velocitatum ratione duplicata; & propterea resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *F* ut resistentia corporis *E* ad resistentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet medium *B* ad formam & conditionem medii *C* pro lubitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentiæ corporum *D* & *F* sint ad invicem ut resistantiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velocissime moventur, resistantiæ sunt æquales quam proxime: & propterea cum resistentia corporis *F* sit in duplicata ratione velocitatis, erit resistentia corporis *D* in eadem ratione quam proxime.

Corol. 3. Corporis in fluido quovis elastico velocissime moti eadem fere est resistentia ac si partes fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum resistentiæ similium & æquivelocium corporum, in medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium & celerrime motorum corporum resistentiæ in fluido elastico ut quadrata diametrorum quam proxime.

<322>

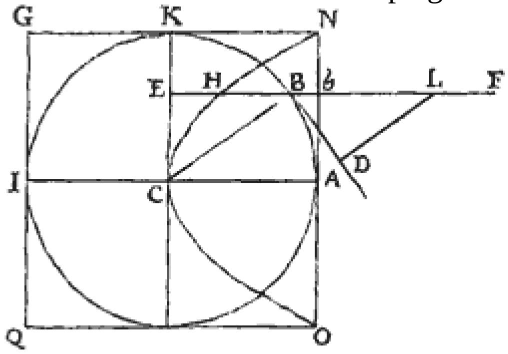
Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquivelocia, in mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus inpingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vicissim (per motus legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis fluidis elasticis, ubi velocissime moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proxime; sive fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex medii subtilitate resistentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar lanæ vel ramorum arborum, aut ex alia quavis causa, qua motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quam in superioribus corollariis.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

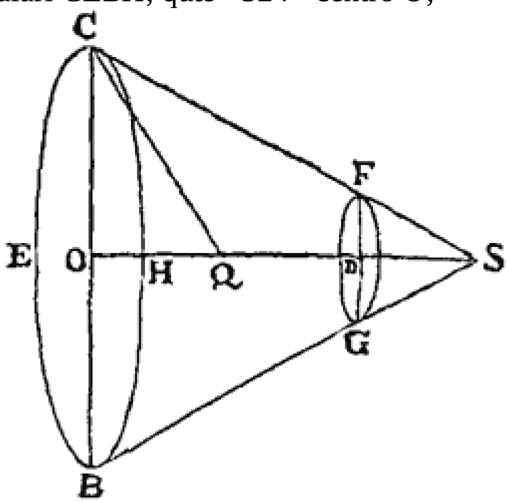
Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ab æquales ab invicem distantias libere dispositis constante, secundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri.

Nam quoniam actio medii in corpus eadem est (per legum corol. 5.) sive corpus in medio quiescente moveatur, five medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur a medio movente. Designet igitur *ABKI* corpus sphæricum centro *C* semidiametro *CA* descriptum, & incidant particulæ medii data cum velocitate in corpus illud sphæricum, secundum rectas ipsi *AC* parallelas: sitque *FB* ejusmodi recta. In ea capiatur *LB* semidiametro *CB* æqualis, & ducatur *BD* quæ sphæram tangat in *B*. In *KC* & *BD* demittantur perpendiculares *BE*, *LD*, & vis qua par <323> ticula medii, secundum rectam *FB* oblique incidendo, globum ferit in *B*, erit ad vim qua particula eadem cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa globum descriptum perpendiculariter feriret in *b*, ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam *FB* vel *AC*, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundum plagam determinationis suæ, id est, secundum plagam rectæ *BC* qua globum directe urget ut *BE* ad *BC*. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum secundum rectam *FB* oblique incidentis, ad movendum eundem secundum plagam incidentiæ suæ, est ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut *BE* quadratum ad *BC* quadratum. Quare si in *bE*, quæ perpendicularis est ad cylindri basem circularem *NAO* & æqualis radio *AC*, sumatur *bH* æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit *bH* ad *bE* ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. Et propterea solidum quod a rectis omnibus *bH* occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus *bE* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. Sed solidum prius est parabolois vertice *C*, axe *CA* & latere recto *CA* descriptum, & solidum posterius est cylindrus paraboloidi circumscriptus: & notum est quod parabolois sit semissis cylindri circumscripti. Ergo vis tota medii in globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in cylindrum. Et propterea si particulæ medii quiescerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri. *Q.E.D.*



Scholium.

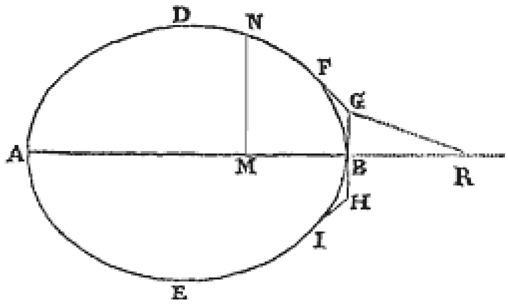
Eadem methodo figuræ aliæ inter se quoad resistentiam comparari possunt, eæque inveniri quæ ad motus suos in mediis resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si base circulari *CEBH*, quæ <324> centro *O*, radio *OC* describitur, & altitudine *OD*, construendum sit frustum coni *CBGF*, quod omnium eadem basi & altitudine constructorum & secundum plagam axis sui versus *D* progredientium frustorum minime resistatur: biseca altitudinem *OD* in *Q* & produc *OQ* ad *S* ut sit *QS* æqualis *QC*, & erit *S* vertex coni cujus frustum quæritur.



Unde obiter, cum angulus *CSB* semper sit acutus, consequens est, quod si solidum *ADBE* convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis *ADBE* circa axem *AB* facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, ea lege ut *GH* sit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eadem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI* graduum 135, solidum, quod convolutione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *AB* generatur, minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagam axis sui *AB* progrediatur, & utriusque terminus *B* præcedat. Quam quidem propositionem in construendis navibus non inutilem futuram esse censeo.

Quod si figura *DNFG* ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto quovis *N* ad axem *AB* demittatur perpendiculum *NM*, & a puncto dato *G* ducatur recta *GR* quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in *N*, & axem productum secet in *R*, fuerit *MN* ad *GR* ut *GR cub.* ad $4BR \times GBq$; solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem *AB* facta describitur, in medio raro prædicto ab *A* ver <325> sus *B* movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum solidum circulare.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.



Si medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus œqualibus & ad œquales ab invicem distantias libere dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eadem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem medio. Et ponamus quod particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maxima resiliant. Et cum resistentia globi (per propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia cylindri, & globus sit ad cylindrum ut duo ad tria, & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipsasque quam maxime reflectendo, duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri; & globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformiter progrediendo describit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum globi motum ut densitas medii ad densitatem globi. Et propterea globus resistentiam patitur, quæ sit ad vim qua totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

Cas. 2. Ponamus quod particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideoque resistentiam patitur duplo minorem quam in priore casu, & resistentia globi erit etiam duplo minor quam prius.

Cas. 3. Ponamus quod particulæ medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, sed mediocri aliqua resiliant a globo; & resi <326> stentia globi erit in eadem ratione mediocri inter resistentiam in primo casu & resistentiam in secundo. *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc si globus & particulæ sint infinite dura, & vi omnia elastica & propterea etiam vi omni reflexionis destituta: resistentia globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri possit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

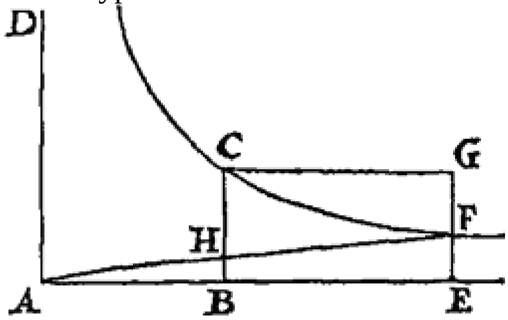
Corol. 2. Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicata ratione velociatatis.

Corol. 3. Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicata ratione diametri.

Corol. 4. Resistentia globi, cæteris paribus, est ut densitas medii.

Corol. 5. Resistentia globi est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velociatatis & duplicata ratione diametri & ratione densitas medii.

Corol. 6. Et motus globi cum ejus resistentia sic exponi potest. Sit *AB* tempus quo globus per resistentiam suam uniformiter continuatum totum suum motum amittere potest. Ad *AB* erigantur perpendicula *AD, BC*. Sitque *BC* motus ille totus, & per punctum *C* asymptotis *AD, AB* describatur hyperbola *CF*. Producatur *AB* ad punctum quodvis *E*. Erigatur perpendiculum *EF* hyperbolæ occurens in *F*. Compleatur parallelogrammum *CBEG*, & agatur *AF* ipsi *BC* occurens in *H*. Et si globus tempore quovis *BE*, motu suo primo *BC* uniformiter continuato, in medio non resistente describat spatium *CBEG* per aream parallelogrammi expositum, idem in medio resistente describet spatium *CBEF* per aream hyperpoblæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam *EF*, amissa motus ejus parte *FG*. Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponentur per longitudinem *BH*, amissa resistentiæ parte *CH*. Patent hæc omnia per corol. 1. & 3. prop. V. lib. II.



Corol. 7. Hinc si globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M: idem globus tempore *t* in medio resistente, per resisitentiam R in duplicata velocitatis ratione decrescentem, amittet motus sui M partem $\frac{t\mathrm{M}}{\mathrm{T}+t}$, ma <327> nente parte $\frac{\mathrm{TM}}{\mathrm{T}+t}$; & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore *t* descriptum, ut logarithmus numeri $\frac{\mathrm{T}+t}{\mathrm{T}}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 est ad numerum $\frac{t}{\mathrm{T}}$, propterea area hyperbolica *BCFE* est ad rectangulum *BCGE* in hac proportione.

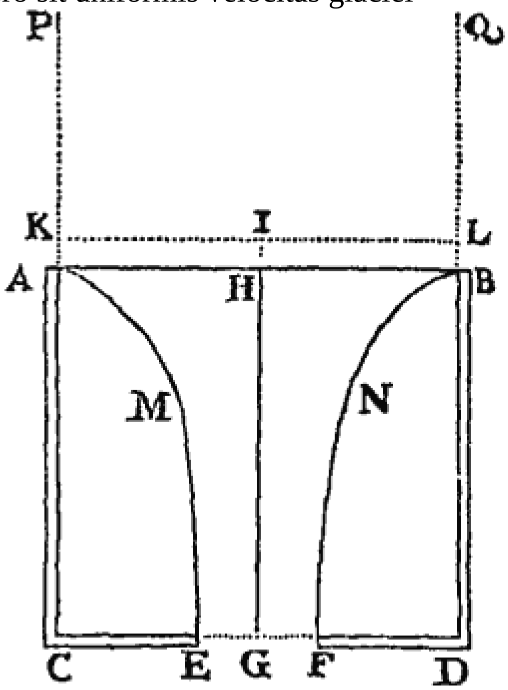
Scholium.

In hac propositione exposui resistentiam & retardationem projectilium sphæricorum in mediis non continuis, & ostendi quod hæc resistentia sit ad vim qua totus globi motus vel tolli possit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri suæ partes velocitate uniformiter continuata describat, ut densitas medii ad densitatem globi, si modo globus & particulæ medii sint summe elastica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis sit duplo minor ubi globus & particulæ medii sunt infinite dura & vi reflectendi prorsus destituta. In mediis autem continuis qualia sunt aqua, oleum calidum, & argentum vivum, in quibus globus non incidit immediate in omnes fluidi particulas resistentiam generantes, sed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, resistentia est adhuc duplo minor. Globus utique in hujusmodi mediis fluidissimis resistentiam patitur quæ est ad vim qua totus ejus motus vel tolli possit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas medii ad densitatem globi. Id quod in sequentibus conabimur ostendere.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium superius, *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei *APQB* ejusdem ese latitudinis <328> cum cavitate vasis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo descendere, & partes ejus quam primum attingunt superficiem *AB* liquescere, & in quam conversas gravitate sua defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* transire, idemque adæquate implere. Ea vero sit uniformis velocitas glaciei descendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *IH* acquirere potest; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela & lateribus glaciei occurens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *EF* ea erit quam aqua cadendo ab *I* & casu suo describendo altitudinem *IG* acquirere potest. Ideoque per theoremata *Galilæi* erit *IG* ad *IH* in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *AB*, hoc est, in duplicata ratione circuli *AB* ad circulum *EF*; nam hi circuli sunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipsos, eodem tempore &æquali quantitate, adæquate transeunt. De velocitate aquæ horizontem versus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non consideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæsionem suam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: sed motum horizonti parallelum, a cohæsione illa oriundum, hic non consideramus.

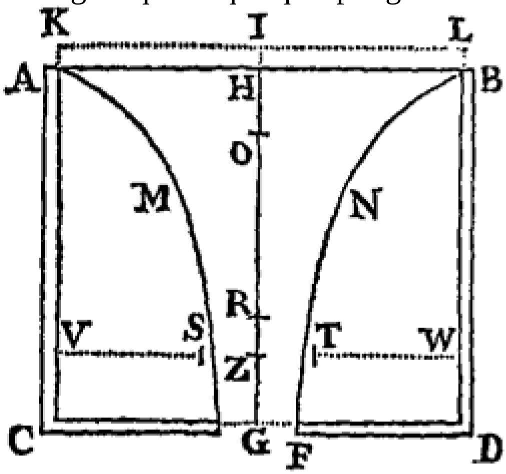


Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantum non tangat, vel, quod perinde est, si tangat & per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrime & sine omni resistentia labatur; hæc defluet per foramen *EF* eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus <329> generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liquescat jam glacies in vase; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, qui glacies in quam resoluta non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter; sed a lateribus vasis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; & cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quam in ipso foramine, existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proxime, si modo diametros recte dimensus sum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis affixi sic, ut vena illa egrederetur secundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquæ plenum esset, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti a foramine quam accuratissime mensurata, prodiit partium viginti & unius quadragesimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Aqua igitur transeundo per foramen, convergit undique, & postquam effluxit ex vase, tenuior redditur convergendo, & per attenuationem acceleratur donec ad distantiam semissis digiti a foramine pervenerit, & ad distantiam illam tenuior & celerior fit quam in ipso foramine in ratione 25×25 ad 21×21 seu 17 ad 12 quamproxime, id est in subduplicata ratione binarii ad unitatem circiter. Per experimenta vero constat quod quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vasis factum, dato tempore effluit, ea sit quæ cum velocitate prædicta, non per foramen illud, sed per foramen circulare, cujus diammeter est ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideo <330> que aqua illa effluens velocitatem habet deorsum in ipso foramine quam grave cadendo & casu suo describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirere potest quamproxime. Sed postquam exivit ex vase, acceleratur convergendo donec ad distantiam a foramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquisiverit majorem in ratione subduplicata binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & casu suo describendo totam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quamproxime.

In sequentibus igitur diameter venæ designetur per foramen illud minus quod vocavimus *EF*. Et plano foraminis *EF* parallelum duci intelligatur planum aliud superius *VW* ad distantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore *ST* pertusum; per quod utique vena cadat, quæ adæquate impleat foramen inferius *EF*, atque ideo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio problematis postulat quamproxime. Spatium vero, quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio problematis simplicior sit & magis mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & e vase per foramen *EF* in plano inferiore factum egrediebatur, motum suum perpetuo servet, & glacies quietem suam. In sequentibus igitur sit *ST* diameter foraminis circularis centro *Z* descripti per quod cataracta effluit ex vase ubi aqua tota in vase fluida est. Et sit *EF* diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquate transit, sive aqua exeat ex vase per foramen illud superius *ST*, sive cadat per medium glaciei in vase tanquam per infundibulum. Et sit diameter foraminis superioris *ST* ad diametrum inferioris *EF* ut 25 ad 21 circiter, & distantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis sit diametro foraminis minoris *EF*. Et velocitas aquæ e vase per foramen *ST* exeuntis ea erit in ipso <331> foramine deorsum quam corpus cadendo a dimidio altitudinis *IZ* acquirere potest: velocitas autem cataractæ utriusque cadentis ea erit in foramine *EF*, quam corpus cadendo ab altitudine tota *IG* acquiret.



Cas. 2. Si foramen *EF* non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, si modo eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore descendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem velocitatem acquirit in utroque casu, ut *Galilæus* demonstravit.

Cas. 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, ut intervallum inter superficies *AB* & *KL* quoad sensum evanescat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ex latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aquæ in vase stagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuisset. Facto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum & altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incideret in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter a perpendiculo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam sine resistentia, vena incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quinetiam aqua effluens, si sursum seratur, eadem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, nisi quatenus ascensus ejus ab aeris resistentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per prop. XIX. lib. 2.) & pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem & inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit eam esse, quam in hac propositione assignavi <332> mus, non solum ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.

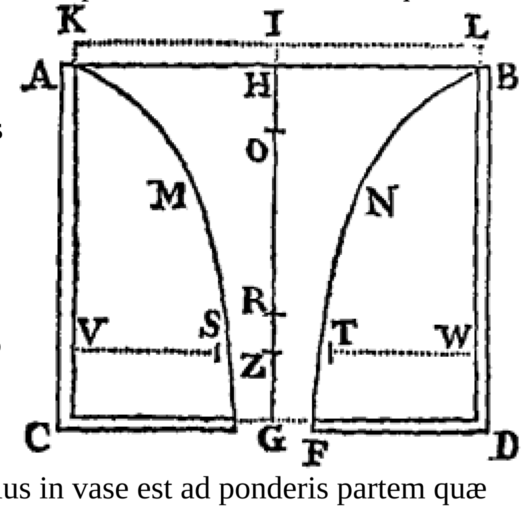
Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas sive figura foraminis fit circularis sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet a figura foraminis sed oritur ab ejus altitudine infra planum *KL*.

Cas. 6. Si vasis *ABDC* pars inferior in aquam stagnantem immergatur, & altitudo aquæ stagnantis supra fundum vasis sit *GR:* velocitas quacum aqua quæ in vase est, effluet per foramen *EF* in aquam stagnantem, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *IR* acquirere potest. Nam pondus aquæ omnis in vase quæ inferior est superficie aquæ stagnantis, sustinebitur in æquilibrio per pondus aquæ stagnantis, ideoque motum aquæ descendentis in vase accelerabit. Patebit etiam & hic casus per experimenta, mensurando scilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc si aquæ altitudo *CA* producatur ad *K*, ut sit *AK* ad *CK* in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli *AB:* velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *KC* acquirere potest.

Corol. 2. Et vis, qua totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualis est ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus basis est foramen *EF*, & altitudo 2*GI* vel 2*CK*. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere suo ab altitudine *GI* cadendo velocitatem suam, qua exilit, acquirere potest.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vase *ABDC* est ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut summa circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum *EF*. Sit enim *IO* media proportionalis inter *IH* & *IG*; & aqua per foramen *EF* egrediens, quo tempore gutta cadendo ab *I* describere posset altitudinem *IG*, æqualis erit cylindro cujus basis est circulus *EF* & altitudo est 2*IG*, id est, cylindro cujus basis est circulus *AB* & altitudo est 2*IO*, nam circulus *EF* est ad circulum *AB* in subduplicata ratione altitudinis *IH* ad al <333> titudinem *IG*, hoc est, in simplici ratione mediæ proportionalis *IO* ad altitudinem *IG:* & quo tempore gutta cadendo ab *I* describere potest altitudinem *IH*, aqua egrediens æqualis erit cylindro cujus basis est circulus *AB* & altitudo est 2*IH:* & quo tempore gutta cadendo ab *I* per *H* ad *G* describit altitudinum differentiam *HG*, aqua edrediens, id est, aqua tota in solido *ABNFEM* æqualis erit differentiæ cylindrorum, id est, cylindro cujus basis est *AB* & altitudo 2*HO*. Et propterea aqua tota in vase *ABDC* est ad aquam totam cadentem in solido *ABNFEM* ut *HG* ad 2*HO*, id est, ut $HO + OG$ ad 2*HO*, seu $IH + IO$ ad 2*IH*. Sed pondus aquæ totius in solido *ABNFEM* in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vase est ad ponderis partem quæ



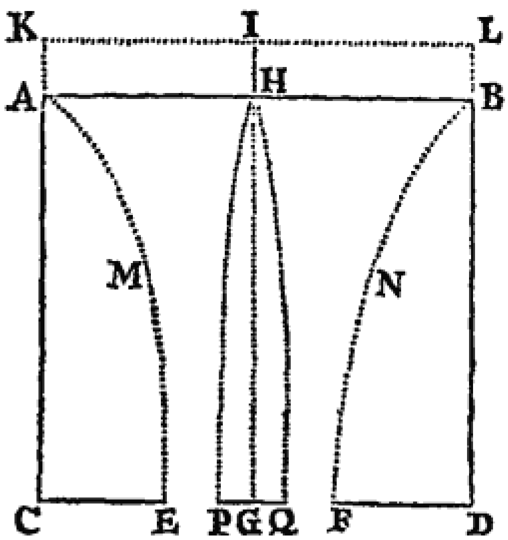
in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad 2*IH*, atque ideo ut summa circulorum *EF* & *AB* ad dplum circulum *EF*.

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vase *ABDC* est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circulorum *AB* & *EF* ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars, quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum minorem *EF*, sive ut area fundi ad duplam foramen.

Corol. 6. Ponderis autem pars, qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad summam circulorum *AB* & *EF*, sive ut circulus *AB* ad excessum dupli circuli *AB* supra fundum. Nam ponderis pars, qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad summam eorundem circulorum, per cor. 4: & pondus aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad differentiam circulorum *AB* & *EF*. Itaque ex æquo perturbate, ponderis pars, qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad summam circulorum *AB* & *EF* vel excessum dupli circuli *AB* supra fundum.

Corol. 7. Si in medio foraminis *EF* locetur circellus *PQ* centro *G* descriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille sustinet, majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus ba <334> sis est circellus ille & altitudo est *GH*. Sit enim *ABNFEM* cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens *GH* ut supra, & congelari intelligatur aqua omnis in vase, tam in circuitu cataractæ quam supra circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum non requiritur. Et sit *PHQ* columna aquæ supra circellum congelata, verticem habens *H* & altitudinem *GH*. Et finge cataractam hancce pondere suo toto cadere, & non incumbere in *PHQ* nec eandem premere, sed libere & sine frictione præterlabi, nisi forte in ipso glaciei vertice quo cataracta ipso cadendi initio incipiat esse cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata *AMEC*, *BNFD* convexa est in superficie interna *AME*, *BNF* versus cataractam cadentem, sic etiam hæc columna *PHQ* convexa erit versus cataractam, & propterea major cono cujus basis est circellus ille *PQ* & altitudo *GH*, id est, major tertia parte cylindri eadem base & altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere coni seu tertiæ partis cylindri illius majus est.



Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* sustinet, minor esse videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *HG*. Nam stantibus jam positis, describi intelligatur sphæroidis cujus basis est circellus ille & semiaxis sive altitudo est *HG*. Est hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *PHQ* cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maxime directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi *PQ* in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem, fit tenuior; & cum angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium sphæroidis. Eadem vero sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem sphæroidis sit infinite velocior quam ejus motus horizontem versus. Et quo minor est circellus *PQ* eo <335> acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus *PHQ* in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio spheroidis, seu duabus tertiis partibus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo *GH*. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* sustinet, æquale est ponderi cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$ quamproxime. Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera coni & hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen *EF*; hic sustinebit pondus aquè totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *GH*.

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$, ut *EFq* ad $EFq-\frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus *EF* ad excessum circuli hujus supra semissem circelli *PQ* quamproxime.

LEMMA IV.

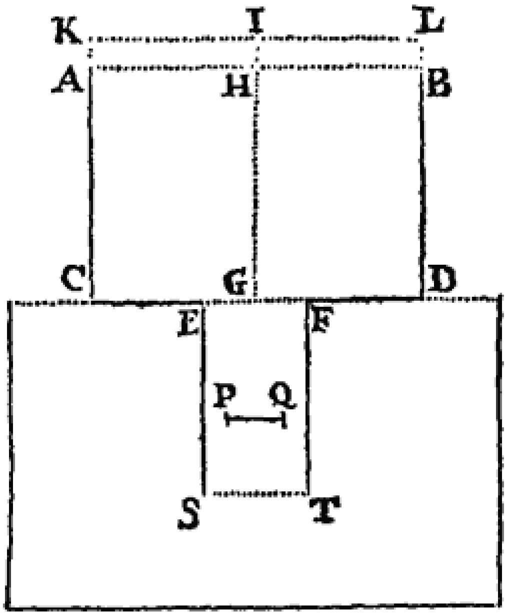
Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentia circuli eadem diametro descripti & eadem velocitate secundum lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

Nam latera cylindri motui ejus minime opponuntur: & cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in circulum vertitur.

<336>

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, est ad vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproxime.



Nam si vas *ABDC* fundo suo *CD* superificiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut sit *AK* ad *CK* in duplicata ratione quam habet excessus orificii canalis *EF* supra circellum *PQ* ad circulum *AB:* manifestum est (per cas. 5. cas. 6. & cor. 1. prop. XXXVI.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere potest.

Et (per corol. x. prop. XXXVI.) si vasis latitudo sit infinita, ut lineola *HI* evanescat & altitudines *IG*, *HG* æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut *EFq* ad $EFq-\frac{1}{2}PQq$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum *PQ* in quacunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia *EF, ST*, & ascendat circellus in fluido undique compresso & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis ut differentia circulorum *EF* & *PQ* ad circulum *PQ*, & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, hoc est, ad <337> velocitatem relativam aquæ descendentis qua præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum *EF* & *PQ* ad circulum *EF*, sive ut $EFq-PQq$ ad *EFq*. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, qua supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *IG* acquirere potest: & vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius (per legum corol. V.) id est, resistentia circelli ascendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut *EFq* ad $EFq-\frac{1}{2}PQq$ quamproxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *IG* acquirit, ut $EFq-PQq$ ad *EFq*.

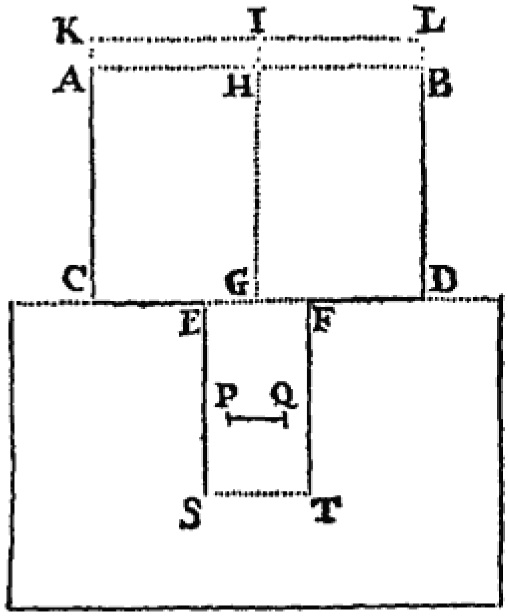
Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq-PQq$ & *EFq*, interque *Efq* & $EFq-\frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *IG* acquirere potest, resistentia vero ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo dimidium est altitudinis *IG*, a qua cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; & hac velocitate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem cylindri, hac velocitate secundum longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentia circelli (per lemma IV.) ideoque æqualis est vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, generari potest quamproxime.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis suæ describit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; ideoque vis illa, qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli possit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis est resistentiæ cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per lemma IV.

Si densitas cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & vis qua motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Resistentia itaque cylindri cujuscunque erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum <338> longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproxime. *Q.E.D.*

Fluidam autem comprimi debet ut sit continuum, continuum vero esse & non elasticum ut pressio omnis, quæ ab ejus compressione oritur, propagetur in instanti, & in omnes moti corporis partes æqualiter agendo resistentiam non mutet. Pressio utique, quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & resistentiam creat. Pressio autem quæ oritur a compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque resistentiam nec auget nec minuit. Certe actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque resistentiam in hac propositione descriptam minuere non potest: & fortior non erit in partes anticas quam in posticas, si modo propagatio ejus infinite velocior sit quam motus corporis pressi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum & non elasticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis mediorum.

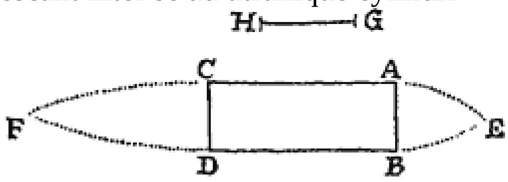


Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, sed cylindrus in medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: resistentia ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ semel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione densitatis medii ad densitatem cylindri.

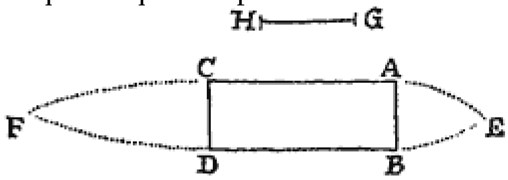
Corol. 3. Iisdem positis, & quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq-$ <339> $\frac{1}{2}PQq$ ad EFq semel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: resistentia cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

Scholium.

In hac propostione resistentiam investigavimus quæ oritur a sola magnitudine transversæ sectionis cylindri, neglecta resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen *EF*, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hac propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino pressæ, cedunt pressione & undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur & resistentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vase diminuit, id est, in ratione duplicata 25 ad 21 ciciter. Et quemadmodum, in propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maxima copia transirent per foramen *EF*, ponendo quod aqua omnis in vase quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret fine motu: sic in hac propositione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum cylindro, & sola maneat resistentia quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum est quod partes fluidi, quarum motus sunt obliqui & inutiles & resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque cylindri terminum, & cohæreant & cylindro jungantur. Sit *ABCD* rectangulum, & sint *AE* & *BE* arcus duo parabolici axe *AB* descripti, latere autem recto quod sit ad spatium *HG*, describendum a cylindro cadente dum velocitatem suam acquirit, ut *HG* ad $\frac{1}{2}AB$. Sint etiam *CF* & *DF* arcus alii duo parabolici, axe *CD* & latere <340> recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem *EF* generetur solidum cujus media pars *ABDC* sit cylindrus de quo agimus, & partes extremæ *ABE* & *CDF* contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant.



Et solidi *EACFDB*, secundum longitudinem axis sui *FE* in partes versus *E* progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hac propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim totus cylindri motus, interea dum longitudo 4*AC* motu illo uniformiter continuato describatur, vel tolli possit vel generari, quam densitas fluidi habet ad densitatem cylindri quamproxime. Et hac vi resistentia minor esse non potest quam in ratione 2 ad 3, per corol. 7. prop. XXXVI.



LEMMA V.

Si cylindrus, sphæra & sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur successive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam spatia inter canalem & cylindrum, sphæram, & sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqulia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quod aqua omnis supra cylindrum shpæram vel sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ transitum non requiritur, ut in corol. VII. prop. XXXVI. explicui.

<341>

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.

Patet per lemma V. & motus legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scholium.

Eadem est ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri potest; sed in his lemmatis corpora esse politissima supponimus, & medii tenacitatem & frictionem esse nullam, & quod partes fluidi, que motibus suis obliquis & superfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare possunt, quiescant inter se tanquam gelu constrictæ, & corporibus ad ipsorum partes anticas & posticas adhæreant, perinde ut in scholio propositionis præcedentis exposui. Agitur enim in sequentibus de resistentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis sectionibus transversis descripta, habere possunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam ascendat, ad posticam subsidat, præsertim si figura sint obtusa; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Et corpora in fluidis elasticis mota, si ante & post obtusa sint, fluidum paulo magis condensant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad posticam; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Sed nos in his lemmatis & propositionibus non agi <342> mus de fluidis elasticis, sed de non elasticis; non de insidentibus fluido, sed de alte immersis. Et ubi resistentia corporum in fluidis non elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantulum tam in fluidis elasticis, qualis est aer, quam superficiebus fluidorum stagnantium, qualia sunt maria & paludes.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim qua totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproxime.

Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem cylindri interna dum cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem cylindri est ad hanc vim quamproxime ut densitas fluidi ad densitatem cylindri vel globi per prop. XXXVII. & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri, per lem. V, VI, VII. *Q.E.D.*

Corol. 1. Globorum, in mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis, & duplicata ratione diametri, & ratione densitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quacum globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest globus idem, eodem pondere, sine resistentia cadendo & casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitatem fluidi. Nam globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisita, describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas globi ad densitatem fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore globus octo tertias diametri suæ eadem velocitate describit, ut densitas <343> fluidi ad densitatem globi: ideoque per hanc propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistentiæ, & propterea globum accelerare non potest.

Corol. 3. Data & densitate globi & velocitate ejus sub initio motus, ut & densitate fluidi compressi quiescentis in qua globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas globi & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum, per corol. VII. prop. XXXV.

Corol. 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem Corol. VII.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim qua totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orifici canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicata orificii canalis ad excessum hujus orificii supracirculum maximum globi, & ratione densitatis fluidi ad densitatem globi quamproxime.

Patet per corol. 2. prop. XXXVII. procedit vero demonstratio quemadmodum in propositione præcedente.

Scholium.

In propositionibus duabus novissimis (perinde ut in lem. V.) suppono quod aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, & cujus fluiditas auget resistentiam globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his propositionibus parvum erit & negligi potest, propterea quod convexa superficies globi totum officium glaciei faciat.

<344>

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phænomena

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio resistente, D diameter globi, F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}\mathrm{D}$ ut densitas globi ad densitatem medii, id est, ut A ad $\mathrm{A}-$, G tempus quo globus pondere B sine resistentia cadendo describit spatium F, & H velocitas quam globus hocce casu suo acquirit. Et erit H velocitas maxima quacum globus, pondere suo B, in medio resistente potest descendere, per corol. 2. prop. XXXVIII. & resistentia, quam globus ea cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: resistentia vero, quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus B in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per corol. 1. prop. XXXVIII.

Hæc est resistentia quæ oritur ab inertia materiæ fluidi. Ea vero quæ oritur ab elasticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, sic investigabitur.

Demittatur globus ut pondere suo B in fluido descendat; & sit P tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus G in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus N qui congruit logarithmo $0{,}4342944819\frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{G}}$, sitque L logarithmus numeri $\frac{\mathrm{N}+1}{\mathrm{N}}$: & velocitas cadendo acquisita erit $\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}+1}\mathrm{H}$, altitudo autem erit $\frac{2\mathrm{PF}}{\mathrm{G}}-1{,}3862943611\mathrm{F}+4{,}605170186\mathrm{LF}$. Si fluidum satis profundum sit, negligi potest terminus $4{,}605170186\mathrm{LF}$; & erit $\frac{2\mathrm{PF}}{\mathrm{G}}-1{,}3862943611\mathrm{F}$ altitudo descripta quamproxime. Patent hæc per libri secundi propositionem nonam & ejus corollaria, ex hypothesi quod globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, & ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

<345>

Ut corporis in fluido cadentis velocitas & descensus facilius innotescant, composui tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensus, secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maxima 100000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta, existente 2F spatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima describit, & quarta ex hibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maxima descripta. Numeri in quarta columna sunt $\frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{G}}$, & subducendo numerum 1,3862944-4,6051702L, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus a corpore, vi ponderis sui comparativi B, in vacuo cadente.

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo descripta in fluido.*	*Spatia motu maximo descripta.*	*Spatia cadendo descripta in vacuo.*
0,001 G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F

0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

<346>

Scholium.

Ut resistentias fluidorum investigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus seu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

Pondus globi in vacuo est $156\frac{13}{38}gran.$ & excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua est $79\frac{13}{38}gran.$ Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi in vacuo, ita densitas aquæ ad densitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad spatium 2F, quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, cadendo in vacuo describet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, sine resistentia cadendo in aqua describet digitos 95,219; & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicata ratione spatii F seu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* describet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quacum potest in aqua descendere. Est igitur tempus G 0″,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus describet spatium 2F digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. Subducatur spatium 1,3862944F seu 3,0676 *dig.* & manebit spatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vase amplissimo, tempore minutorum qua <347> tuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum orificii hujus supra semicirculum maximum globi & ex simplici ratione orificii ejusdem ad excessum ejus supra circulum maximum globi, id est, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur spatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aqua in hoc vase ligneo tempore minutorum quatuor secundorum per theoriam describere debuit quamproxime. Descripsit vero digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera seorsim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aqua, successive demittebantur; & unusquisque cecidit in aqua tempore minutorum secundorum quindecim, casu suo describens altitudinem digitorum 112.

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12} gran.$ excessus hujus ponderis supra pondus in aqua $71\frac{17}{48} gran.$ diameter globi 0,81296 *dig*. octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig*. spatium 2F 2,3217 *dig*. spatium quod globus pondere $5\frac{1}{16} gran.$ tempore 1″ sine resistentia cadendo describat 12,808 *dig*. & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest in aqua vi ponderis $5\frac{1}{16} gran.$ descendere, tempore 0″,301056 describet spatium 2,3217 *dig*. & tempore 15″ spatium 115,678 *dig*. Subducator spatium 1,3862944F seu 1,609 *dig*. & manebit spatium 114,069 *dig*. quod proinde globus eodem tempore in vase latissimo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0,895 *dig*. circiter. Et sic manebit spatium 113,174 *dig*. quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15″ describere debuit per theoriam quamproxime. Descripsit vero digitos 112 per experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 *gran*. in aere & 1 *gran*. in aqua, successive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, describentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minore proportioni resistentiæ, quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis tribuendum sit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel <348> manus globum demittentis, vel etiam erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aqua, incertum esse puto. Ideoque pondus globi in aqua debet esse plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cœpi, ut investigarem resistentias fluidorum, antequam theoria in propositionibus proxime præcedentibus exposita mihi innotesceret. Postea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cera & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aqua. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitus immersi quiescebant, demittebantur quam cautissime, ne impulsum aliquem a manu demittente acciperent. Ciciderunt autem successive temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento sæpius capto, globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua $132\frac{11}{40}$ *gran*. Diameter globi 0,99868 *dig*. Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig*. Spatium 2F 2,8066 *dig*. Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi, sine resistentia cadendo describit 9,88164 *dig*. Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maxima, quacum potest in aqua vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore 0″,376843 de <349> scribit spatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ spatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ seu oscillationum 50 spatium 186,1915 *dig*. Subducatur spatium 1,386294F, seu 1,9454 *dig*. & manebit spatium 184,2461 *dig*. quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semicirculum maximum globi, & simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; &

habebitur spatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vase tempore oscillationum 50 describere debuit per theoriam quamproxime. Descripsit vero spatium 182 digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}gran.$ in aere & $21\frac{1}{2}gran.$ in aqua sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproxime.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aqua sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aqua, sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum semisse.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproxime.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset primum descendente, & motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; & communicando, amittit partem motus <350> proprii quo descendere deberet: & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit semper a latere suo quod per oscillationem descendit, & recedendo appropinquat lateribus vasis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; & globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aqua, sæpius demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{3}$ quamproxime.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsum eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam vero cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{5}{9}$ quamproxime.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproxime.

<351>

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aqua, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64 & 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per hæc experimenta manifestum est quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, resistentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum; & hæc oscillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non nisi post plures oscillationes ab aqua ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur a fluido ad posticas suas partes; & si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem a tergo relinquent, nisi compresso fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (per prop. XXXII. & XXXIII.) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut resistentia sit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur a tergo, & defectu pressionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aqua, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in aere.

Exper. 13. A culmine ecclesiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, mense Junio 1710. globi duo vitrei simul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum *Londinensium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo huic tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum ope fili ferrei ad terram usque demissi ut tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum <352> illud ferreum tractum dimitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in tabula sequente.

	Globorum mercurio plenorum			*Globorum aere plenorum.*	
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	$8''\frac{1}{2}$
983	0,8	4−	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4+	641	5,2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam *Galilæi*) minutis quatuor secundis describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda sua devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbebant tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore 8″ 12‴, describendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ *gran*. seu $19\frac{3}{10}$ *gran*. ideoque pondus globi in vacuo est $502\frac{3}{10}$ *gran*. & hoc pondus est ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita sunt 2F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2F prodeunt 28 *ped*. 11 *dig*. Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$ ut supra, & pondere 483 *gran*. describit digitos 185,905, & eodem pondere 483 *gran*. etiam <353> in vacuo describit spatium F seu 14 *ped*. $5\frac{1}{2}$ *dig*. tempore 57‴ 58⁗, & velocitatem maximam acquirit quacum possit in aere descendere. Hac velocitate globus, tempore 8″ 12‴, describet spatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863F seu 20 *ped*. $0\frac{1}{2}$ *dig*. & manebunt 225 *ped*. 5 *dig*. Hoc spatium igitur globus, tempore 8″ 12‴, cadendo describere debuit per theoriam. Descripsit vero spatium 220 pedum per experimentum. Differentia insensibilis est.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci Tabulam sequentem.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum* 220.	*Spatia describenda per theoriam.*	*Excessus.*
510 *gran.*	5,1 *dig.*	8″ 12‴	226 *ped.* 11 *dig.*	6 *ped.* 11 *dig.*
642	5,2	7 42	230 9	10 9
599	5,1	7 42	227 10	7 10
515	5	7 57	224 5	4 5
483	5	8 12	225 5	5 5
641	5,2	7 42	230 7	10 7

Exper. 14. Anno 1719. mense Julio, D. Desaguliers hujusmodi experimenta iterum cepit, formando vesicas porcorum in orbem sphæricum ope sphæræ ligneæ concavæ, quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & hasce arefactas & exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejusdem turri rotunda fornicata, nempe ab altidudine pedum 272; & eodem temporis momento demittendo etiam globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui stantes in suprema parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii stantes in terra notabant differentiam temporum inter casum globi plumbei & casum vesicæ. Tempora autem mensurabantur pendulis ad dimidia minuta secunda oscillantibus. Et eorum qui in terra stabant unus habebat horologium cum elatere ad singula minuta secunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabre constructam cum pendulo etiam ad singula minuta secunda quater vibrante. Et similem machinam habebat unus eorum qui stabant in summitate templi. Et hæc instrumenta ita formabantur, <354> ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel sisterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum secundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo vesica cecidit. Tempora, quibus vesicæ quinque post casum globi plumbei prima vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}$″, $12\frac{3}{4}$″, $14\frac{5}{8}$″, $17\frac{3}{4}$″, & $16\frac{7}{8}$″, & secunda vice $14\frac{1}{2}$″, $14\frac{1}{4}$″, 14″, 19″, & $16\frac{3}{4}$″. Addantur $4\frac{1}{4}$″, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota, quibus vesicæ quinque ceciderunt, erant prima vice 19″, 17″, $18\frac{7}{8}$″, 22″, & $21\frac{1}{8}$″; & secunda vice, $18\frac{3}{4}$″, $18\frac{1}{2}$″, $18\frac{1}{4}$″, $23\frac{1}{4}$″, & 21″. Tempora autem in summitate templi notata, erant prima vice $19\frac{3}{6}$″, $17\frac{1}{4}$″, $18\frac{3}{4}$″, $22\frac{1}{8}$″, & $21\frac{5}{8}$″; & secunda vice 19″, $18\frac{5}{8}$″, $18\frac{3}{8}$″, 24″, & $21\frac{1}{4}$″. Cæterum vesicæ non semper recta cadebant, sed nonnunquam volitabant, & hinc inde oscillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata sunt & aucta nonnunquam dimidio minuti unius secundi, nonnunquam minuto secundo toto. Cadebant autem rectius vesica secunda & quarta prima vice; & prima ac tertia secunda vice. Vesica quinta rugosa erat & per rugas suas nonnihil retardabatur. Diametros vesicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuissimo bis circundato mensuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabula sequente, assumendo densitatem aëris esse ad densitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, & computando spatia quæ globi per theoriam describere debuerunt cadendo.

Vesicarum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum* 272.	*Spatia iisdem temporibus describenda per theoriam.*	*Differentia inter theor. & exper.*
128 *gran.*	5,28 *dig.*	19″	271 *ped.* 11 *dig.*	−0 *ped.* 1 *dig.*
156	5,19	17	272 0$\frac{1}{2}$	+0 0$\frac{1}{2}$
137$\frac{1}{2}$	5,3	18$\frac{1}{2}$	272 7	+0 7
97$\frac{1}{2}$	5,26	22	277 4	+5 4
99$\frac{1}{8}$	5	21$\frac{1}{8}$	282 0	+10 0

Globorum igitur tam in aëre quam in aqua motorum resistentia prope omnis per theoriam nostram recte exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis est.

<355>

In scholio, quod sectioni sextæ subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in aëre, aqua, & argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. Idem hic ostendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in aëre & aqua. Nam pendula singulis oscillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, & resistentia ab hoc motu oriunda, ut & resistentia fili quo pendulum suspendebatur, totam penduli resistentiam majorem reddiderunt quam resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum aqua, describendo longitudinem semidiametri suæ in aëre, amittere deberet motus sui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hac septima sectione expositam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, amittere deberet motus sui partem tantum $\frac{1}{4586}$, posito quod densitas aquæ sit ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob causas jam descriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in aëre, aqua & argento vivo oscillantium resistentiæ a causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, satis recte exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motus sui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus sub initio motus, & T tempus, quo globus velocitate V in vacuo describet spatium, quod sit ad spatium $\frac{8}{3}$D ut densitas globi ad densitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis suæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & describet spatium, quod sit ad spatium uniformi velocitate V eodem tempore descriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per <356> numerum 2,302585093 est ad numerum $\frac{t}{T}$, per corol. VII. prop. XXXV. In motibus tardis resistentia potest esse paulo minor, propterea quod figura globi paulo aptior sit ad motum quam figura cylindri eadem diametro descripti. In motibus velocibus resistentia potest esse paulo major, propterea quod elasticitas & compressio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed hujusmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum & similia fluida, per divisionem partium in infinitum, subtiliarentur & fierent media infinite fluida; tamen globis projectis haud minus resisterent. Nam resistentia, de qua agitur in propositionibus præcedentibus, oritur ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus essentialis est & quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur a tenacitate & frictione partium diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui resistentia, de qua hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia cœlestia, per quæ globi planetarum & cometarum in omnes partes liberrime & sine omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticas supra pressionem ad ejus partes posticas, & non minor esse potest in mediis infinite fluidis quam in aere, aqua & argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate sua, non tantum motum ciet in fluido, sed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea resistentia in omni fluido est ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor esse potest in æthere subtilissimo pro densitate ætheris, quam in aëre, aqua, & argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

<357>

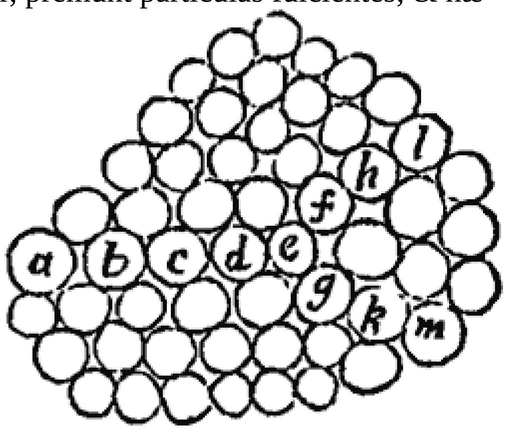
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

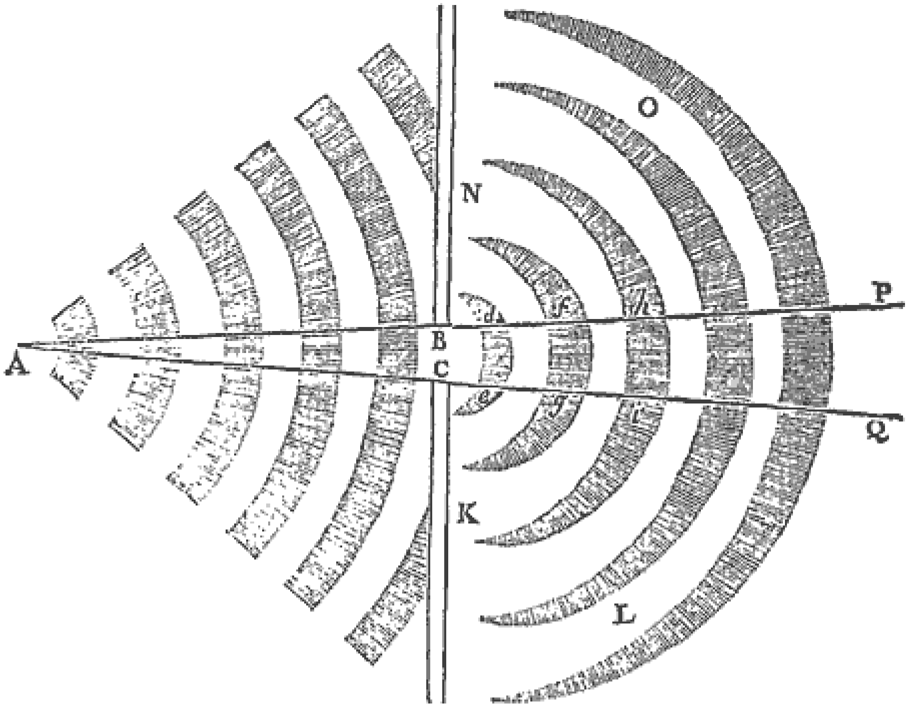
PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ *a, b, c, d, e* in linea recta, potest quidem pressio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique positas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q.E.D.*



Corol. Si pressionis, a dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quaquaversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit. Planis transversis *de, fg, hi* distinguatur conus *APQ* in frusta; & interea dum conus *ABC*, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius *degf* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fgih* in superficie *fg*, & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motus legem tertiam) quod fru <358> stum primum *defg*, reactione frusti secundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in superficie *fg*, quantum urget & premit frustum illud secundum. Frustum igitur *aegf* inter conum *Ade* & frustum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per corol. VI. prop. XIX.) figuram suam servare nequit, nisi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus *de, fg,* conabitur



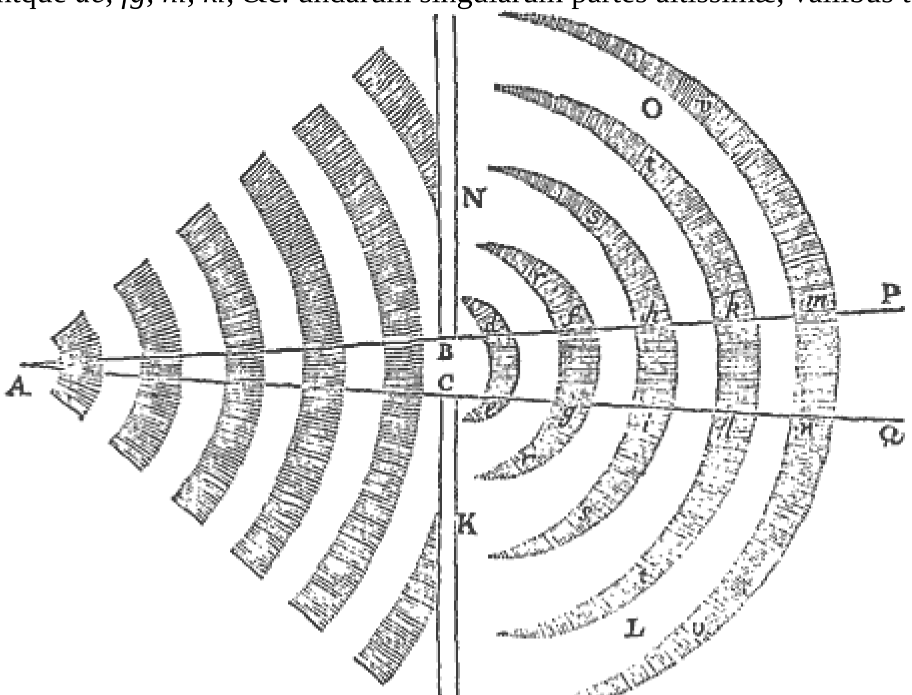
cedere ad latera *df, eg*; ibique (cum rigidum non sit, sed omnimodo fluidum) excurret ac dilatabitur, nisi fluidum ambiens adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera *df, eg* quam frustum *fghi* eodem impetu; & propterea pressio non minus propagabitur a lateribus *df, eg* in spatia *NO, KL* hinc inde, quam propagatur a superficie *fg* versus *PQ. Q.E.D.*

<359>

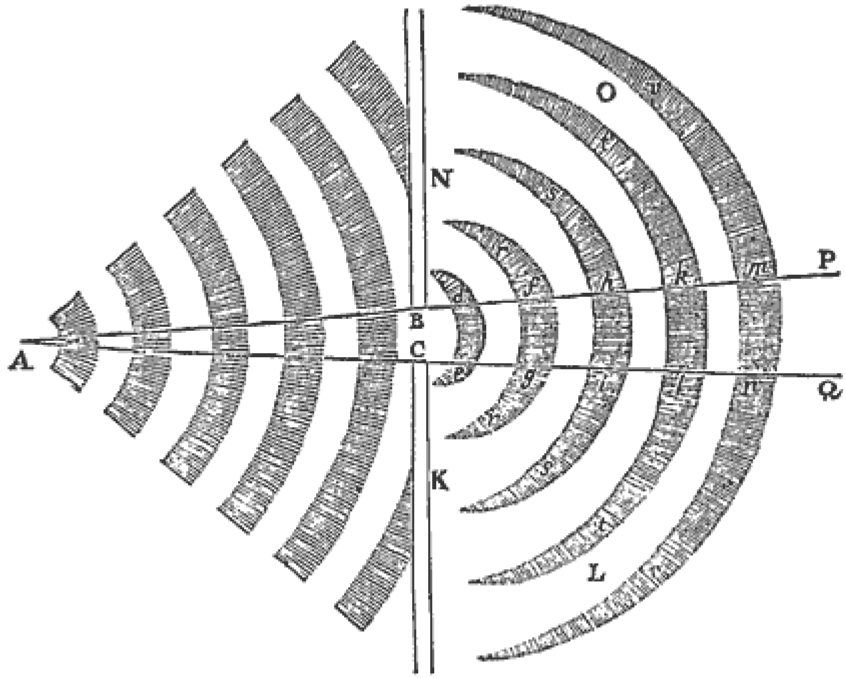
PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC*, pergatque, si fieri potest, in spatio conico *BCQP*, secundum lineas rectas divergentes a puncto *A*. Et ponamus primo quod motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque *de, fg, hi, kl,* &c. undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis



ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in fluidi partibus immotis *LK, NO,* defluet eadem de jugorum terminis *e, g, i, l,* &c. *d, f, h, k,* &c. hinc inde, versus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depressior est quam in fluidi partibus immotis *KL, NO*; defluet eadem de partibus illis immotis undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus *KL* & <360> *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* versus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ hinc inde versus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus *KL* & *NO* eadem velocitate qua undæ ipsæ ab *A* versus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr, shis, tklt, vmnv*, &c occupabitur. *Q.E.D.* Hæc ita se habere quilibet in aqua stagnante experiri potest.



Cas. 2. Ponamus jam quod *de, fg, hi, kl, mn* designent pulsus a puncto *A* per medium elasticum successive propagatos. Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphæricam occupet superficiem circa centrum *A* descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedant intervalla. Designent autem lineæ *de, fg, hi, kl*, &c. densissimas pulsuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus *KL* & *NO*, dilatabit sese tam versus spatia illa *KL, NO* utrinque <361> sita, quam versus pulsuum rariora intervalla; eoque pacto rarius semper evadens e regione intervallorum ac densius e regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur a perpetua relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; & pulsus eadem fere celeritate sese in medii partes quiescentes *KL, NO* hinc inde relaxare debent; pulsus illi eadem fere celeritate sese dilatabunt undique in spatia immota *KL, NO*, qua propagantur directe a centro *A*; ideoque spatium totum *KLON* occupabunt. *Q.E.D.* Hoc experimur in sonis, qui vel monte interposito audiuntur, vel in cubiculum per fenestram admissi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppositis, quam a fenestra directe propagati, quantum ex sensu judicare licet.

Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC:* & quoniam propagatio ista non fit, nisi quatenus partes medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem versus medii partes omnes quiescentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* transiit, dilatari incipiet & inde tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in medio vero non elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes medii sibi proximas, & urgendo compriment easdem & condensabunt; dein reditu suo sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant hasce medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii <362> partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatæ, ob motum suum progressivum, quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per medium propagati sese dilatabunt ad latera, per propositionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum supplet locum vis elasticæ.

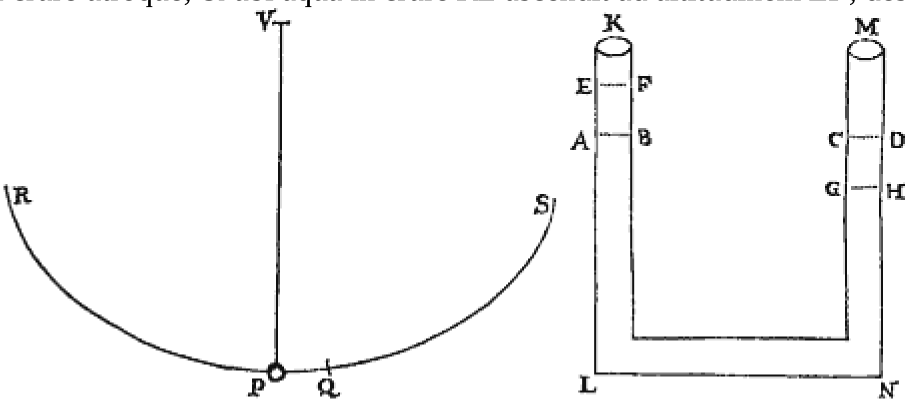
Quod si medium non sit elasticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi medium facillime cedit, hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quæ corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut medi <363> um, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q.E.D.*

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem, per medium ambiens, secundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione sola partium flammæ, sed a totius dilatatione derivari.

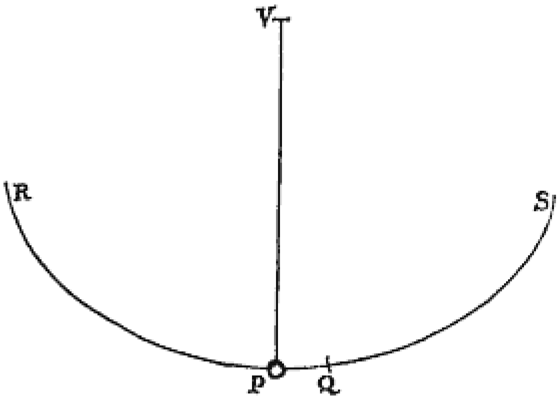
PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

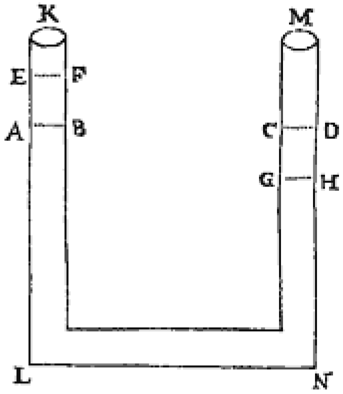
*Si aqua in canalis cruribus erectis*KL, MN *vicibus alternis ascendat & descendat; construatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.*

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando; & resistentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hic non considero. Designent igitur *AB*, *CD* mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure *KL* ascendit ad altitudinem *EF*, descenderit aqua



in crure *MN* ad altitudinem *GH*. Sit autem *P* corpus pendulum, *VP* filum, *V* punctum suspensionis, *RPQSS* cyclois quam pendulum describat, *P* ejus punctum infimum, *PQ* arcus altitudini *AE* æqua <364> lis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure *KL* ascendit ad *EF*, & in crure altero descendit ad *GH*, vis illa est pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea est ad pondus aquæ totius ut *AE* seu *PQ* ad *VP* seu





PR. Vis etiam, qua pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in cycloide (per corol. prop. LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia *PQ* a loco infimo *P*, ad cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia *AE, PQ* describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque, si aqua & pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis & descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum *Parisiensium* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicata.

<365>

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas est in subduplicata ratione latitudinum.

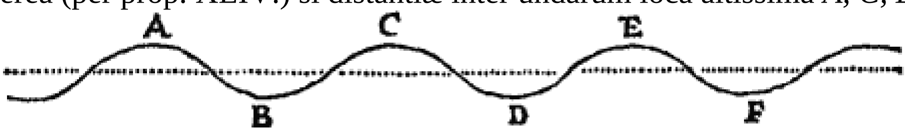
Consequitur ex constructione propositionis sequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

Constituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, æquetur latitudini undarum: & quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam, quæ vel vallibus imis, vel summis culminibus interjacet. Designet *ABCDEF* superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem; sintque *A, C, E,* &c. undarum culmina, & *B, D, F,* &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes *A, C, E,* &c. quæ nunc altissimæ sunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges observabit: & propterea (per prop. XLIV.) si distantiæ inter undarum loca altissima *A, C, E* &



infima *B, D, F* æquentur duplæ penduli longitudini; partes altissimæ *A, C, E*, tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, ideoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. *Q.E.I.*

<366>

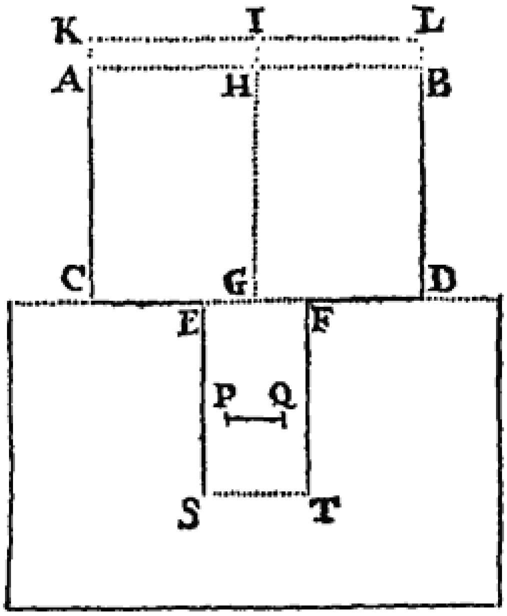
Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproxime.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicata ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod partes aquæ recta ascendunt vel recta descendunt; sed ascensus & descensus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac propositione non nisi quamproxime definitum esse affirmo.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis penduli.



Designent *AB, BC, CD,* &c. pulsuum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsuum ab *A* versus *B* propagati; *E, F, G* puncta tria physica medii quiescentis in recta *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *Ee, Ff, Gg* spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco singulis vibrationibus eunt & redeunt; *ε, φ, γ* loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF, FG* lineolas physicas seu medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatas in loca *εφ, φγ* & *ef,fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Bisecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* describatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis <367> unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSh*, si demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur *Eε* æqualis *PL* vel *Pl*, punctum physicum *E* reperiatur in *ε*. Hac lege punctum quodvis *E*, eundo ab *E* per *ε* ad *e*, & inde redeundo per *ε* ad *E*, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget cum oscillante pendulo. Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia *PHSh* capiantur æquales arcus *HI, IK* vel *hi, ik*, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ *EF, FG* ad pulsuum intervallum totum *BC*. Et demissis perpendiculis *IM, KN* vel *im, kn*; quoniam puncta *E, F, G* motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a *B* ad *C*; si *PH* vel *PHSh* sit tempus ab initio motus puncti *E*, erit *PI* vel *PHSi* tempus ab initio motus puncti *F*, & *PK* vel *PHSk* tempus ab initio motus puncti *G*; & propterea *Eε, Fφ, Gγ* erunt ipsis *PL, PM, PN* in itu punctorum, vel ipsis *Pl, Pn, Pm* in punctorum reditu, æquales respective. Unde *εγ* seu $EG + G\gamma - E\varepsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in reditu autem æqualis $EG + ln$. Sed *εγ* latitudo est seu expansio partis medii *EG* in loco *εγ*; & propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut $EG - LN$ ad *EG*; in reditu autem ut $EG + ln$ seu $EG + LN$ ad *EG*. Quare cum sit *LN* ad *KH* ut *IM* ad radium *OP*, & *KH* ad *EG* ut circumferentia *PHShP* ad *BC*, id est, si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum *BC*, ut *OP* ad V; & ex æquo *LN* ad *EG*, ut *IM* ad V: erit expansio partis *EG* punctive physici *F* in loco *εγ* ad expansionem mediocrem, quam pars illa habet in loco suo primo *EG*, ut $\mathrm{V} - IM$ ad V in itu, utque $\mathrm{V} + im$ ad V in reditu. Unde vis elastica puncti *F* in loco *εγ* est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco *EG*, ut $\frac{1}{\mathrm{V}-IM}$ ad $\frac{1}{\mathrm{V}}$ in itu; in reditu vero ut $\frac{1}{\mathrm{V}+im}$ ad $\frac{1}{\mathrm{V}}$. Et eodem argumento vires elasticæ punctorum <368> physicorum *E* & *G* in itu, sunt ut $\frac{1}{\mathrm{V}-HL}$ & $\frac{1}{\mathrm{V}-KN}$ ad $\frac{1}{\mathrm{V}}$; & virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{\mathrm{VV}-\mathrm{V}\times HL-\mathrm{V}\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{\mathrm{V}}$. Hoc est, ut $\frac{HL-KN}{\mathrm{VV}}$ ad $\frac{1}{\mathrm{V}}$, sive ut $HL-KN$ ad V, si modo (ob angustos limites vibrationum) supponamus *HL* & *KN* indefinite minores esse quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium est ut $HL-KN$, hoc est (ob proportionales $HL-KN$ ad *HK*, & *OM* ad *OI* vel *OP*, datasque *HK* & *OP*) ut *OM*; id est, si *Ff* bisecetur in Ω, ut Ωφ. Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum physicorum *ε* & *γ*, in reditu lineolæ physicæ *εγ* est ut Ωφ. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti *ε* supra vim elasticam puncti *γ*) est vis qua interjecta medii lineola physica *εγ* acceleratur in itu & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix lineolæ physicæ *εγ*, est ut ipsius distantia a medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per prop. XXXVIII. lib. I.) recte exponitur per arcum *PI*; & medii pars linearis *εγ* lege præscripta movetur, id est, lege oscillantis penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. *Q.E.D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola physica *εγ*, quamprimum ad locum suum primum redierit, quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione composita ex subduplicata ratione vis elastiæ directe & subduplicata ratione densitatis inverse; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his mediis æquentur inter se, sed motus in uno medio intensior sit: con <369> tractiones & dilationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verumtamen nisi contractiones & dilationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro physice accurata haberi potest. Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones & dilationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes itus & reditus suos per spatia contractionibus & dilationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proxime præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiæ seu longitudines sint majores in uno medio quam in altero; ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda est ut pulsuum latitudo; & in eadem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione composita ex ratione subduplicata materiæ & ratione subduplicata spatii, atque ideo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea sunt æquiveloces.

Cas. 3. In mediis igitur densitate & vi elastica paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicata ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicata ratione vis elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione composita ex ratione subduplicata densitatis medii inverse & ratione subduplicata vis elasticæ directe. *Q.E.D.*

Hæc propositio ulterius patebit ex constructione sequentis.

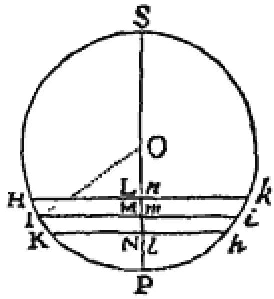
<370>

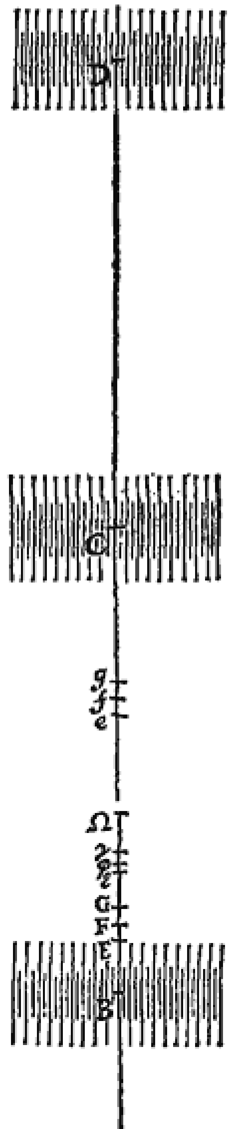
PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii densitate & vi elastica, invenire velocitatem pulsuum.

Fingamus medium ab incumbente pondere, pro more aëris nostri comprimi; sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis sit A: & quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio A descripti æquale.

Nam stantibus quæ in propositione XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica *EF*, singulis vibrationibus describendo spatium *PS*, urgeatur in extremis itus & reditus cujusque locis *P* & *S*, a vi elastica quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini *PS* æqualis est, oscillari posset: id adeo quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cum oscillationum tempora sint in subduplicata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis penduli, cujus longitudo est A, in subduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2}PS$ seu *PO* ad longitudinem A. Sed vis elastica, qua lineola physica *EG*, in locis suis extremis *P*, *S* existens, urgetur, erat (in demonstratione propositionis XLVII.) ad ejus vim totam elasticam ut $HL - KN$ ad V, hoc est (cum punctum <371> *K* jam incidat in *P*) ut *HK* ad V: & vis illa tota, hoc est pondus incumbens, quo lineola *EG* comprimitur, est ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem *EG*; ideoque ex æquo, vis qua lineola *EG* in locis suis *P* & *S* urgetur, est ad lineolæ illius pondus ut $HK \times \mathrm{A}$ ad $\mathrm{V} \times EG$, sive ut $PO \times \mathrm{A}$ ad VV, nam *HK* erat ad *EG* ut *PO* ad V. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa elastica, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in subduplicata ratione VV ad $PO \times \mathrm{A}$, atque ideo ad tempus oscillationis penduli cujus longitudo est A in subduplicata ratione VV ad $PO \times \mathrm{A}$, & subduplicata ratione *PO* ad A conjunctim; id est, in ratione integra V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam *BC*. Ergo tempus, quo pulsus percurrit spatium *BC*, est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut V ad A, id est, ut *BC* ad circumferentiam circuli cujus radius est A. Tempus autem, quo pulsus percurret spatium *BC*, est ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q.E.D.*





Corol. 1. Velocitas pulsuum ea est, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & casu suo describendo dimidium altitudinis A. Nam tempore casus hujus, cum velocitate cadendo acquisita, pulsus percurret spatium quod erit æquale toti altitudini A; ideoque tempore oscillationis unius ex itu & reditu compositæ percurret spatium æquale circumferentiæ circuli radio A descripti: est enim tempus casus ad tempus oscillationis ut radius circuli ad ejusdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A sit ut fluidi vis elastica directe & densitas ejusdem inverse; velocitas pulsuum erit in ratione composita ex subduplicata ratione densitatis inverse & subduplicata ratione vis elasticæ directe.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa erit pulsus unius latitudo. *Q.E.I.*

Scholium.

Spectant propositiones novissimæ ad motum lucis & sonorum. Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola (per prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aëris pulsus propagati, per prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica aquæ pluvialis & argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum aëris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera specifica aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem nostrum subjectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum *Anglicorum* 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti circumferentia est pedum 186768. Et cum pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum oscillationem ex itu & reditu compositam tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; pendulum pedes 29725 seu digitos 356700 longum oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $190\frac{3}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius secundi pedes 979.

<373>

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, per quam sonus utique propagatur in instanti. Cum pondus aëris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & sales sint fere duplo densiores quam aqua; si particulæ aeris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$ seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aëris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aëre latentes, cum sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus ille celerius propagabitur per solum aërem verum, idque in subduplicata ratione minoris materiæ. Ut si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri & una parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicata ratione 11 ad 10, vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus sonorum supra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore verno & autumnali, ubi aër per calorem temperatum rarescit & ejus vis elastica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condensatur, & ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicata ratione densitatis; & vicissim; æstivo tempore debet esse velocior.

Constat autem per experimenta quod soni tempore minuti unius secundi eundo, conficiunt pedes *Londinenses* plus minus 1142, *Parisienses* vero 1070.

Cognita sonorum velocitate innotescunt etiam intervalla pulsuum. Invenit utique *D. Sauveur*, factis a se experimentis, quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum *Parisiensium* plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti minus secundi centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum *Parisiensium* 1070, quos sonus tempore mi <374> nuti unius secundi percurrit; ideoque pulsus unus occupat spatium pedum *Parisiensium* quasi $10\frac{7}{10}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde versimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissime distamus a corporibus sonoris, quam cum proxime absumus, patet ex corollario propositionis XLVII. libri hujus. Sed & cur soni in tubis stenterophonicis valde augentur ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus a causa generante augeri solet. Motus autem in tubis dilatationem sonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo singulis recursibus impresso, magis augetur. Et hæc sunt præcipua phænomena sonorum.

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

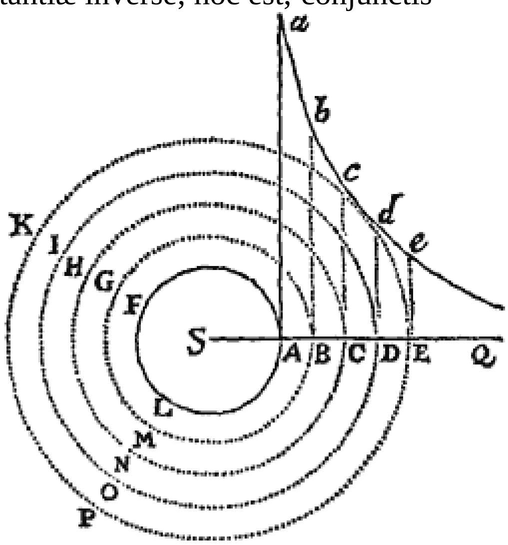
HYPOTHESIS.

R*Esistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes fluidi separantur ab invicem.*

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si cylindrus solidus infinite longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM, CHN, DIO, EKP*, &c. distinguatur <375> fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem, & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impressio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut superficierum distantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiæ inverse; hoc est, conjunctis rationibus, ut quadrata distantiarum inverse. Quare si ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa, Bb, Cc, Dd, Ee*, &c. ipsarum *SA, SB, SC, SD, SE*, &c. quadratis reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva hyperbolica; erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa, Bb, Cc, Dd, Ee*, id est, si ad constituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ*, &c. Et tempora motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis *D* reciproce ut area *DdQ*, hoc est (per notas curvarum quadraturas) directe ut distantia *SD. Q.E.D.*



Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciproce ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo: erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecus impressa motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

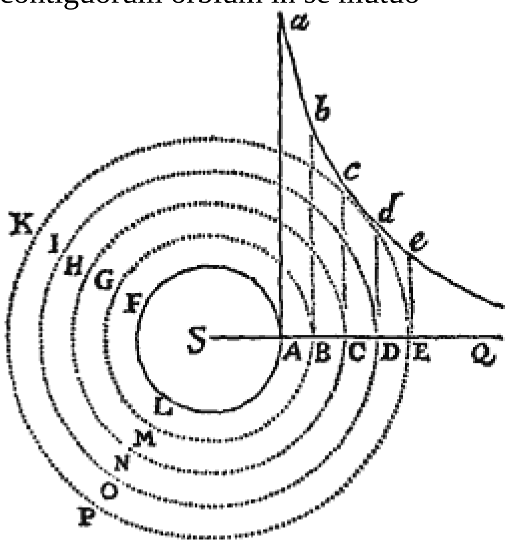
Quæ omnia in aqua profunda stagnante experiri licet.

<377>

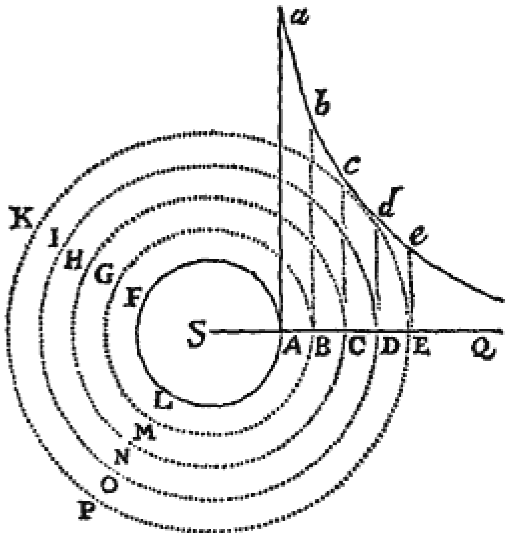
PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum a centro sphæræ.

Cas. 1. Sit *AFL* sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM, CHN, DIO, EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ, erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impressio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut quadrata distantiarum superficierum a centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiæ inverse; hoc est, conjunctis rationibus ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa, Bb, Cc,* <378> *Dd, Ee,* &c. ipsarum *SA, SB, SC, SD, SE,* &c. cubis reciproce proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa, Bb, Cc, Dd, Ee:* id est (si ad constituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ,* &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis *DIO* reciproce ut area *DdQ*, hoc est, per notas curvarum quadraturas, directe ut quadratum distantiæ *SD*. Id quod volui primo demonstrare.



Cas. 2. A centro sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet a globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto attritus annulorum ad latera nullus est; neque ideo motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum a centro globi. Quod volui secundo demonstrare.



<379>

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolute & uniformiter fluidam; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt, aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q.E.D.* Cæterum cum motus circularis, & inde orta vis centrifuga, major sit ad eclipticam quam ad polos; debebit causa aliqua adesse qua particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam est, recedat semper a centro & per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro globi, & velocitates absolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actione perpetu communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui plane invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem a materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in ma <380> teriam vorticis. Sine tali principio necesse est ut globus & vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione, qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli eadem ratione, qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in se mutuo perpetuo movebuntur de locis suis, uti in corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto assignatam, paulatim requiescet & in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine accelera <381> tione & retardatione, quam sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum a centro vorticis. Alia nulla vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum inclusum, & globus servent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus erunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem, data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per corol. VIII. Et motus isti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum & vas accelerari, quam sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad statum motus in corollariis VIII. IX & X. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde vero si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur systema totum legibus mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quam eorum tempora periodica æquantur inter se, & systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

<382>

Scholium.

In his omnibus suppono fluidum ex materia quoad densitatem & fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes & æquales, ad æquales semper a se distantias, ubivis in fluido constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac pressione fit attritus partium fortior & separatio ab invicem difficilior; & per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est magis cohærebit & segnior erit, ideoque motum tardius recipiet & longius propagabit quam pro ratione superius assignata. Si figura vasis non sit sphaæica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum a centro quamproxime. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores, neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi a centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a spatiis angustioribus in latiora recedent paulo longius a centro, sed isto recessu tardescent; & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, & sic per vices tardescent & accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio vorticum innotescit per propositionis hujus corollarium sextum.

Proprietates autem vorticum hac propositione investigare conatus sum, ut pertentarem siqua ratione phænomena cœlestia per vortices explicari possint. Nam phænomenon est, quod planetarum circa jovem revolventium tempora periodica sunt in ratione sesquiplicata distantiarum a centro jovis; & eadem regula obtinet in planetis qui circa solem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in plane <383> tis utrisque quam accuratissime, quatenus observationes astronomicæ hactenus prodidere. Ideoque si planetæ illi a vorticibus circa jovem & solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum a centro motus: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquiplicatam reduci, nisi vel materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat a centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea est in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratia hypothesin talem initio sectionis hujus proposuerim ut, resistentia velocitati proportionalis esset, tamen resistentia in minori sit ratione quam ea velocitatis est. Quo concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quam duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per vortices explicari possit.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, & eadem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem & cursus determinationem moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contra, si vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur <384> inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium a centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in fluidum resolutum fit pars vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere a centro vorticis quam prius; ideoque vorticis vim illam, qua prius in orbita sua tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet a centro & revolvendo describet spiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi a centro vorticis æqualiter distantibus. *Q.E.D.*

Corol. 1. Ergo solidum quod in vortice revolvitur & in eundem orbem semper redit, relative quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet planetas a vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ secundum hypothesin *Copernicæam* circa solem delati revolvuntur in ellipsibus umbilicum habentibus in sole, & radiis ad solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa solem *S* descriptos, quorum extimus *CF* circulus fit soli concentricus, & interiorum duorum aphelia sint *A*, *B* & perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad solem ducto areas temporibus pro <385> portionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in orbe *BE*, tardius movebitur in aphelio *B* & velocius in perihelio *E*, secundum leges astronomicas; cum tamen secundum leges mechanicas materia vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quam in spatio latiore inter *D* & *F*; id est, in aphelio velocius quam in perihelio. Quæ duo repugnant inter se. Sic in principio signi virginis, ubi aphelium martis jam versatur, distantia inter orbes martis & veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio signi piscium ut ternarius ad binarium circiter, & propterea materia vorticis inter orbes illos in principio piscium debet esse velocior quam in principio virginis in ratione ternarii ad binarium. Nam quo angustius est spatium per quod eadem materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si terra in hac materia cœlesti relative quiescens ab ea deferretur, & una circa solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio piscium ad ejusdem velocitatem in principio virginis in ratione sesquialtera. Unde solis motus diurnus apparens in principio virginis major esset quam minutorum primorum septuaginta, & in principio piscium minor quam minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teste) apparens iste solis motus major sit in principio piscium quam in principio virginis, & propterea terra velocior in principio virginis quam in principio piscium. Itaque hypothesis vorticum cum phænomenis astronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo vero motus isti in spatiis liberis sine vorticibus peraguntur intelligi potest ex libro primo, & in mundi systemate plenius docebitur.