De Motu Corporum (Liber Primus) (1713)

Author: Isaac Newton
Source: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Cambridge: 1713).
Published online: November 2009

<24>

DE
MOTU CORPORUM
LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

LEMMA I.

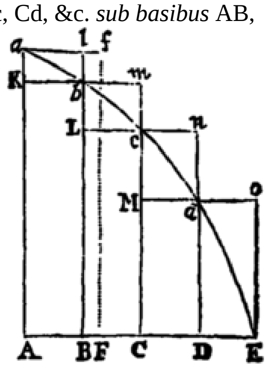
Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

Si negas; fiant ultimo inequales, & sit earum ultima differentia *D.* Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypothesin.

<25>

LEMMA II.

Si in Figura quavis AacE *rectis* Aa, AE, *& curva* AcE *comprehensa, inscribentur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *Figuræ lateri* Aa *parallelis comenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem Figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis*.



Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi *Kb* & altitudinum summa *Aa*, id est rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, sit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I) Figura inscripta & circumscripta & multo magis Figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q.E.D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam æqualitatis, ubi parallelogramomrum latitudines AB, BC, CD &c. *sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum*.

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia Figuræ inscriptæ & Figuræ circumscriptæ; at latitudine sua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum Figura curvilinea.

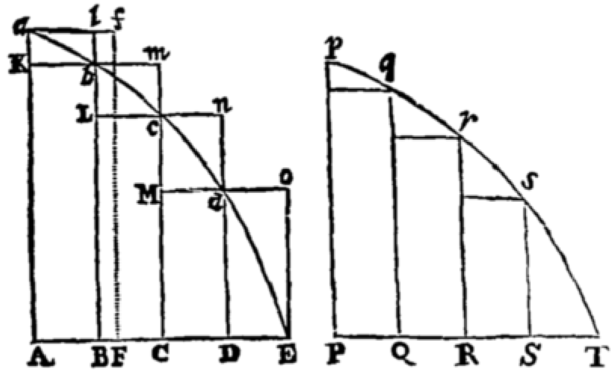
Corol. 2. Et multo magis Figura rectilinea, quæ chordis evanes <26> centium arcuum *ab, bc, cd, &c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum Figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & Figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ Figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE,*) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus Figuris AacE, PprT, *inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una Figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod Figuræ duæ* AacE, PprT, *sunt ad invicem in eadem illa ratione*.



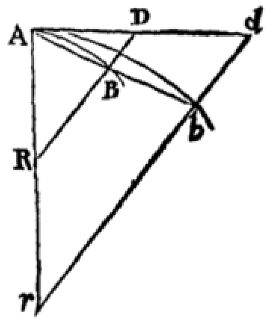
Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita Figura ad Figuram; existente nimirum Figura priore (per Lemma III) ad summam priorem, & Figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q.E.D.*

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras; erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus Figuris sumantur pa <27> rallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

LEMMA V.

Similium Figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ sunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA VI.



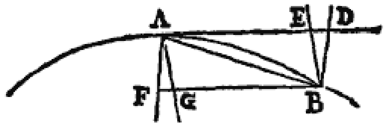
Si arcus quilibet positione datus AB *subtendatur chorda* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coeant; dico quod angulus* BAD, *sub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evanescet*.

Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus *AB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad ad punctum *A* non erit continua, contra hypothesin.

LEMMA. VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *AB* & *AD* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & secanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitque arcus *Ab* similis arcui *AB*. Et punctis *A, B* coeuntibus, angulus *dAb*, per Lemma superius, evanescet; adeoque rectæ semper finitæ *Ab, Ad* & arcus intermedius *Ab* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *AB, AD*, & arcus intermedius *AB* <28> evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q.E.D.*



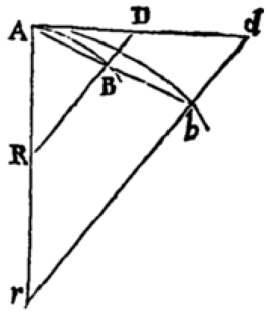
Corol. 1. Unde si per *B* ducatur tangenti parallela *BF*, rectam quamvis *AF* per *A* transeuntem perpetuo secans in *F*, hæc *BF* ultimo ad arcum evanescentem *AB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD* rationem semper habet æqualitatis ad *AD*.

Corol. 2. Et si per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE, BD, AF, AG*, secantes tangentem *AD* & ipsius parallelam *BF*; ratio ultima abscissarum omnium *AD, AE, BF, BG*, chordæque & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* AB, *chorda* AB *& tangente* AD,*triangula tria* ARB, ARB, ARD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*



Nam dum punctum B, ad punctum A accedit, intelligatur semper *AB, AD, AR* ad puncta longiqua *b, d* & *r* produci, ipsique *RD* paralella agi *rbd*, & arcui *AB* similis semper sit arcus *Ab*. Et coeuntibus punctis *A, B*, angulus *bAd* evanescet, & propterea triangula tria semper finita *rAb, rAb, rAd* coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *RAB, RAB, RAD* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q.E.D.*

Corol. Et hinc triangula illa in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

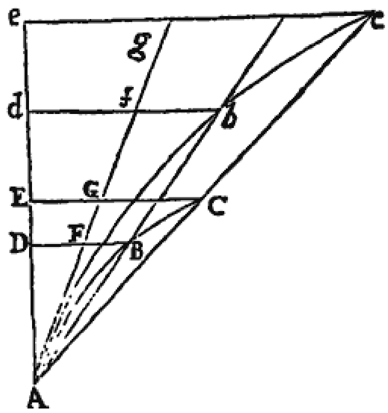
<29>

LEMMA IX.

Si recta AE *& Curva* ABC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C; *dein puncta* B, C *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*

Etenim dum puncta *B, C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *AD* produci ad puncta longiqua *d* & *e*, ut sint *Ad, Ae* ipsis *AD, AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db, ec* ordinatis *DB, EC* parallelæ quæ occurant ipsis *AB, AC* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva

Abc ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, que tangat curvam utramque in *A* & secet ordinatim applicatas *DB, EC, db, ec* in *F, G, f, g*. Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B, C* cum puncto A; & angulo *cAg* evanescente, coincident areæ curvilineæ *Abd, Ace* cum rectilineis *Afd, Age*: adeoque (per Lemma V) erunt in duplicata ratione laterum *Ad, Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *ABD, ACE*, & his lateribus latera *AD, AE*. Ergo & areæ *ABD, ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD, AE. Q.E.D.*



LEMMA X.

Spatia, quæ corpus urgente quacunque Vi finita describit, sive Vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augetur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione Temporum.

Exponantur tempora per lineas *AD, AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB, EC*, & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ *ABD, ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per Lemma IX) in duplicata ratione temporum *AD, AE. Q.E.D.*

<30>

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium Figurarum partes temporibus proportionalibus describentium Errores, qui viribus quibusvis æqualibus in partibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporium a Figurarum similium locis illis ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus absque viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes Figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directe & quadrata temporum inverse.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directe & vires inverse.

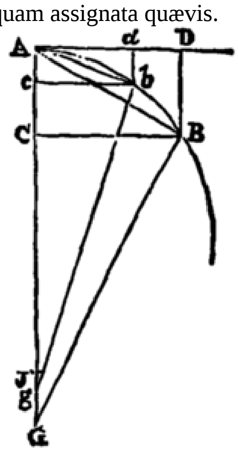
Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directe vel inverse: sensus est, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciproca. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directe vel inverse: sensus est, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directe & C directe & D inverse: sensus est, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $\mathrm{B} \times \mathrm{C} \times \frac{1}{\mathrm{D}}$, hoc est, A & $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{D}}$ sunt ad invicem in ratione data.

LEMMA XI.

Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicata subtensæ arcus contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille *AB*, tangens ejus *AD*, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, subtensa arcus *AB*. Huic subtensæ *AB* & tangenti *AD* perpendiculares erigantur *AG, BG*, <31> concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D, B, G*, ad puncta *d, b, g*, sitque *I* intersectio linearum *BG, AG* ultimo facta ubi puncta *D, B* accedunt usque ad *A*. Manifestum est quod distantia *G I* minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta *ABG, Abg* transeuntium) *AB quad.* æquale *AG* × *BD*, & *Ab quad.* æquale *Ag* × *bd*, adeoque ratio AB *quad.* ad *Ab quad.* componitur ex rationibus *AG* ad *Ag* & *BD* ad *bd*. Sed quoniam *GI* assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio *AG* ad *Ag* minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, adeoque ut ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* minus differat a ratione *BD* ad *bd* quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per Lemma I, ratio ultima *AB quad.* ad *Ab quad.* æqualis rationi ultimæ *BD* ad *bd. Q.E.D.*



Cas. 2. Inclinetur jam *BD* ad *AD* in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima *BD* ad *bd* quæ prius, adeoque eadem ac *AB quad.* ad *Ab quad. Q.E.D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus *D* non detur, sed recta *BD* ad datum punctum convergente, vel alia quacunque lege constituatur; tamen anguli *D,d* communi lege constitui ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, adeoque ultimo æquales erunt, per Lem. I. & propterea lineæ *BD, bd* sunt in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q.E.D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes *AD, Ad*, arcus *AB, Ab* & eorum sinus *BC, bc* fiant ultimo chordis *AB, Ab* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ *BD, bd*.

Corol. 2. Eorundum quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagitte quæ chordas bisecant & ad datum punctum convergunt. Nam saggitæ illæ sunt ut subtensæ *BD, bd*.

Corol. 3. Ideoque saggita est in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate describit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea *ADB, Adb* sunt ultimo in triplicata ratione laterum *AD, Ad*, inque sesquiplicata laterum *DB, db*; utpote in composita ratione laterum *AD*, & *DB, Ad* & *db* existentia. Sic & triangula *ABC, Abc* sunt ultimo in triplicata ratione laterum *BC, bc*. Rationem vero Sesquiplicatam voco triplicatæ subduplicatam, quæ nempe ex simplici & subduplicata componitur, quamque alias Sesquialteram dicunt.

<32>

Corol. 5. Et quoniam *DB*, *db* sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum *AD*, *Ad*: erunt areæ ultimæ curvilineæ *ADB*, *Adb* (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *ADB*, *Adb*; & segmenta *AB*, *Ab* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium *AD*, *Ad*; tum chordarum & arcuum *AB*, *Ab*.

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos Circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est, curvaturam ad punctum *A*, nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum *AI* finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest *DB* ut AD^3: quo in casu Circulus nullus per punctum *A* inter tangentem *AD* & curvam *AB* duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor Circularibus. Et simili argumento si fiat *DB* successive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c., habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat *DB* successive ut $AD^2, AD^{\frac{3}{2}}, AD^{\frac{4}{3}}, AD^{\frac{5}{4}}, AD^{\frac{6}{5}}, AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum Circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}, AD^{\frac{11}{5}}, AD^{\frac{9}{4}}, AD^{\frac{7}{3}}, AD^{\frac{5}{2}}, AD^{\frac{8}{3}}, AD^{\frac{11}{4}}, AD^{\frac{14}{5}}, AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & contenta. Præmisi vero hæc Lemmata ut effugerem tædium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum Indivisibilium. Sed quoniam durior est Indivisibilium hypothesis; & propterea methodus illa minus Geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum <33> evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui breuitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum Indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium Lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attigit, nullam esse. Et responsio facilis est. Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est quacum esse (vel augeri & minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, Problema est vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex Indivisibilibus, contra quam *Euclides* de Incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonstravit. Verum hæc Objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero <34> transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Igitur in sequentibus, siquando facili rerum imaginationi consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

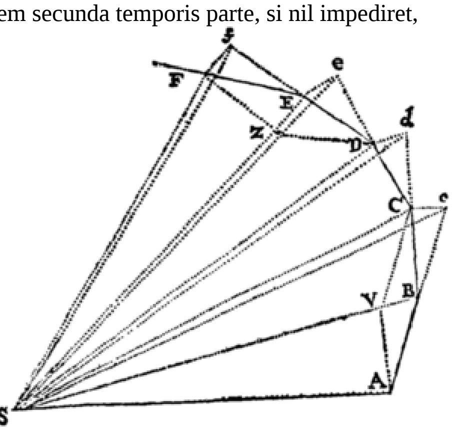
SECTIO II.

De Inventione Virium Centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I.) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*; adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat viscentripeta impulsu unico sed magno, effaciatque corpus a recta *Bc* declinet & pergat in recta *BC*. Ipsi S *BS* parallela agatur *cC*, occurrens *BC* in *C*; & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1.) reperietur in *C*, in <35> eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*; & triangulum *SBC*, ob parallelas *SB*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atque adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis centripeta successive agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ in eodem plano; & triangulum *SCD* triangulo *SBC* & *SDE* ipsi *SCD* & *SEF* ipsi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis *SADS*, *SAFS* inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter *ADF*, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: adeoque vis centripeta, qua corpus de tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; areæ vero quævis descriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q.E.D.*



Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciproce ut perpendiculum a centro illo in Orbis tangentem rectilineam demissum. Est enim velocitas in locis illis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ut sunt bases æqualium triangulorum *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*; & hæ bases sunt reciproce ut perpendicula in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successive descriptorum chordæ *AB*, *BC* compleantur in parallelogrammum *ABCU*, & hujus diagonalis *BU* in ea positione quam ultimo habet ubi arcus illi infinitum diminuuntur, producator utrinque; transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ *AB*, *BC* ac *DE*, *EF* compleantur in parallelogramma *ABCU*, *DEFZ*; vires in *B* & *E* sunt ad invicem in ultima ratione diagonalium *BU*, *EZ*, ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus *BC* & *EF* componuntur (per Legum Corol. 1.) ex motibus *Bc*, *BU* & *Ef*, *EZ*: atqui *BU* & *EZ*, ipsis *Cc* & *Ff* æquales, in Demonstratione Propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in B & *E*, ideoque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus a motus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bisecant <36> ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium de quibus egimus in Corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eædem sunt ad vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum Parabolicorum quos projectilia eodem tempore describunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum Corol. IV, ubi plana in quibus corpora moventur, una cum centris virium quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano descripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem. (per Leg. 1.) Et vis illa qua corpus de cursu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD* &c. circa punctum immobile *S* temporibus æqualibus æqualia describere, agit in loco *B* secundum lineam parallelam ipsi *cC* (per Prop. XL Lib. I Elem. & Leg. II.) hoc est, secundum lineam *BS*; & in loco *C* secundum lineam ipsi *dD* parallelam, hoc est, secundum lineam *SC*, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q.E.D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est sive quiescat superficies in qua corpus describit figuram curvilineam, sive moveatur eadem una cum corpore, figura descripta & puncto suo *S* uniformiter in directum.

Corol. 1. In Spatiis vel Mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum rediorum; sed inde declinant in consequentia seu versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio accelaratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In Mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant a concursu radiorum versus plagam in quam fit motus

<37>

Scholium.

Urgeri potest corpus a vi centripeta composita ex pluribus viribus. In hoc casu sensus Propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro si vis aliqua agat perpetuo secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet corpus deflectere a plano sui motus: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum *L* & corpus alterum *T*: & (per Legum Corol. VI.) si vi nova, quæ æqualis & contraria sit illi qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* describere circa corpus alterum *T* areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. 1.) corpus illud alterum *T* sibimet ipsi jam relictum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id est, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* describere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (sive simplici, sive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium secundum, composita,) qua corpus prius *L* urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproxime.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproxime ad <38> corpus alterum *T*, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus *L* radio ad alterum corpus *T* ducto describit areas quæ, cum temporibus collatæ, sunt valde inæquales; & corpus illud alterum *T* vel quiescit vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum *T* tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius agentis in corpus illud alterum *T* agentis.

Scholium

Quoniam æquabilis arearum descriptio Index est Centri, quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo & in orbita sua retinetur: quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem, ut Indicem Centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circalos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. II. & Corol. II. Prop. I; & sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis descriptorum sinus versi per Corol. IV. Prop. I; hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. VII: & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, & diamteri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Igitur, cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum: hoc est, ut cum Geometris loquar, vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse.

<39>

Corol. 2. Et, cum tempora periodica sint in ratione composita ex ratione radiorum directe & ratione velocitatum inverse, vires centrepetæ sunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; hoc est, in ratione composita ex ratione radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverse.

Corol. 3. Unde, si tempora periodica æquantur & propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol. 4. Si & tempora periodica & velocitates sint in ratione subduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter se: & contra.

Corol. 5. Si tempora periodica sint ut radii & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

Corol. 6. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicata radiorum & propterea velocitates reciproce in radiorum ratione subduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum: & contra.

Corol. 7. Et universaliter, si tempus periodicum sit ut Radii *R* potestas quælibet R^n, & propterea velocitas reciproce ut Radii potestas R^{n-1}; erit vis centripeta reciproce ut Radii potestas R^{2n-1}: & contra.

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex Demonstratione præcedentium ad hosce casus applicata. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & distantias corporum a centris pro radiis usurpando.

Corol. 9. Ex eadem demonstratione consequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius proportionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scholium.

Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cælestibus (ut seorsum colligerunt etiam nostrates *Wrennus, Hockius & Hallæus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicata ratione distantiarum a centris, decrevi susius in sequentibus exponere.

<40>

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea Gravitatis. Nam si corpus in circulo Terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem, ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus Corol. IX. Et hujusmodi propositionibus *Hugenius*, in eximio suo Tractatu *de Horologio Oscillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur Polygonum laterum quotcunque. Et si corpus in Polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis qua singulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas: adeoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si Polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium; adeoque, si Polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, qua corpus urget circulum: & huic æqualis est vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

PROPOSITIO. V. PROBLEMA I.

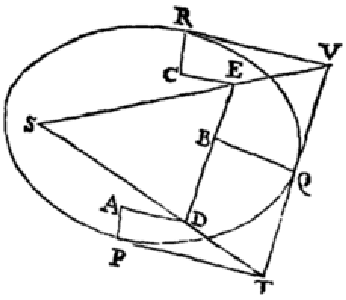
Data quibuscunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres *PT, TQV, VR* in punctis totidem *P, Q, R,* concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA, QB, RC,* velocitatibus corporis in punctis illis *P, Q, R* a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id est, ita ut sit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A, B, C* ad angulos rectos ducantur *AD, DBE, EC* concurrentia in *D* & *E*: Et actæ *TD, VE* concurrent in centro quæsito *S*.

<41>

Nam perpendicula a centro *S* in tangentes *PT, QT* demissa (per Corol. 1. Prop. I) sunt reciproce, ut velocitates corporis in punctis *P* & *V*; adeoque per constructionem ut perpendicula *AP, BQ* directe, id est ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta *S, D, T*, sunt in una recta. Et simili argumento puncta *S, E, V* sunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD, VE* versatur. *Q.E.D.*

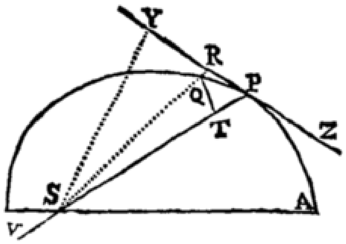
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.



Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in Orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quàm minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centrepeta in medio arcus, ut sagitta directe & tempus bis inverse.

Nam sagitta dato tempore est ut vis (per Corol. 4 Prop. I,) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illa duplicata (per Corol. 2 & 3, Lem. XI,) adeoque est ut vis semel & tempus bis.Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directe & tempus bis inverse. *Q.E.D.*

Idem facile demonstratur etiam per Corol. 4 Lem. X.



*Corol.*1.Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* describat lineam curvam *APQ*, tangat verò recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis Curvæ puncto *Q* agatur *QR* distantiæ *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad distantiam illam *SP:* vis centripeta erit reciproce ut solidum $\frac{SP\,quad. \times QT\,quad.}{QR}$ si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimò fit ubi coeunt puncta *P* & *Q*. Nam *QR* æqualis <42> est sagittæ dupli arcus *QP*, in cusjus medio est *P*, & duplum trianguli *SQP* sive $SP \times QT$, tempori quo arcus iste duplus describitur proportionale est, ideoque pro temporis exponente scribi potest.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciprocè ut solidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, si modo *SY* perpendiculum sit a centro virium in Orbis tangentem *P R* demissum. Nam rectangula $SP \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

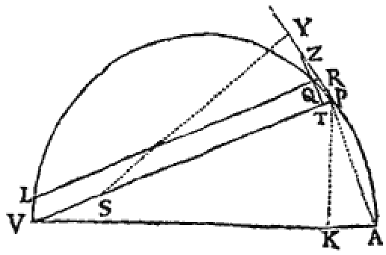
Corol. 3. Si Orbis vel circulus est, vel angulum contactus cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum contactus *P*; & si *PV* chorda sit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut solidum $SYq \times PV$. Nam *PV* est $\frac{QPq}{QR}$.

Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum *SY* per Corol. 1 Prop. 1.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea *APQ*, & in ea detur etiam punctum *S* ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis *P* a cursu rectilineo perpetuò retractum in figuræ illius perimetro detinebitur eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $SYq \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis sequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia Circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

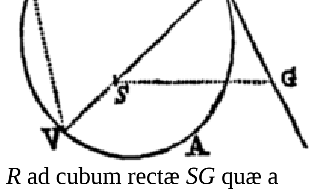


Esto Circuli circumferentia *VQPA*, punctum datum ad quod vis ceu ad centru suu tendit *S*, corpus in circumferentia latum *P*, locus proximus in quem movebitur *Q*, & circuli tangens ad locum priorem *PRZ*. Per punctum *S* ducatur chorda *PV*, & acta circuli diametro *VA* jungatur *AP*, & ad *SP* demittatur perpendiculum *QT*, quad prductum occurrat tengenti *PR* in *Z*, <43> ac denique per punctum *Q* agatur *LR* quæ ipsi *SP* parallela sit & occurrat tum circulo in *L* tum tangenti *PZ* in *R*. Et ob similia triangula *ZQR, ZTP, VPA*; erit *RP quad.* hoc est *QRL* ad *QT quad.* ut *AV quad.* ad *PV quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\,quad.}{AV\,quad.}$ æquatur *QT quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\,quad.}{QR}$, & punctis *P* & *Q* coeuntibus, scribatur *PV* pro *RL*. Sic fiet $\frac{SP\,quad. \times PV\,cub.}{AV\,quad.}$ æquale $\frac{SP\,quad. \times QT\,quad.}{QR}$ Ergo (per Corol. 1 & Prop VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SP\,q \times PV\,cub.}{AV\,quad}$ id est, (ob datum *AV quad.*) reciproce ut quadratum distantiæ seu altitudinis *SP* & cubus chordæ *PV* conjunctim. *Q.E.I.*

Idem aliter.

Ad tangentem *PR* productam demittatur perpendiculum *SY*, & ob similia triangula *SYP, VPA*; erit *AV* ad *PV* ut *SP* ad *SY*, ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale *SY*, & $\frac{SP\,quad. \times PV\,cub.}{AV\,quad.}$ æquale $SY\,quad. \times PV$. Et propterea (per Corol.3 & 5 Prop.VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV\,cub.}{AVq}$ hoc est, ob datam *AV*, reciproce ut $SPq \times PV\,cub.$ *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc si punctum datum *S* ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad *V*; erit vis centripeta reciproce ut quadrato cubus altitudinis *SP*.

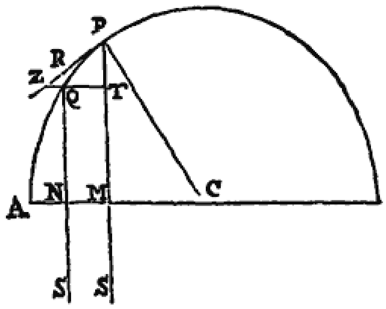


Corol. 2. Vis qua corpus *P* in circulo *APTV* circum virium centrum *S* revolvitur, est ad vim qua corpus idem *P* in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum *R* revolvi potest, ut $RP\,quad. \times SP$ ad cubum rectæ *SG* quæ a primo virium centro *S* ad orbis tangentem *PG* ducitur, & distantiæ corporis a secundo virium centro parallela est. Nam, per constructionem hujus Propositionis, vis prior est ad vim posteriorem, ut $RPq \times PT\,cub.$ ad $SPq \times PV\,cub.$ <44> id est, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\,cub. \times PV\,cub.}{PT\,cub.}$ sive (ob similia triangula *PSG, TPV*) ad *SG cub.*

Corol. 3. Vis, qua corpus *P* in Orbe quocunque circum virium centrum *S* revolvitur, est ad vim qua corpus idem *P* in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum *R* revolvi potest, ut $SP \times RPq$ contentum utique sub distantia corporis a primo virium centro *S* & quadrato distantiæ ejus a secundo virium centro *R* ad cubum rectæ *SG* quæ a primo virium centro *S* ad orbis tangentem *PG* ducitur, & corporis a secundo virium centro distantiæ *RP* parallela est. Nam vires in hoc Orbe, ad ejus punctum quodvis *P*, eædem sunt ac in Circulo ejusdem curvaturæ.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA. III.

Moveatur corpus in Circulo PQA: *ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*



A Circuli centro *C* agatur semidiameter *CA* parallelas istas perpendiculariter secans in *M* & *N*, & jungantur *CP*. Ob similia triangula *CPM*, *PZT* & *PZQ* est *CPq* ad *PMq* ut *PRq* ad *QTq* & ex natura Circuli *PRq* æquale est rectangulo $QR \times RN + QN$ sive coeuntibus punctis *P*, *Q* rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo est *CPq* ad *PM quad.* ut $QR \times 2PM$ ad *QT quad.* adeoque $\frac{QT\,quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\,cub.}{CP\,quad.}$,& $\frac{QT\,quad. \times SP\,quad.}{QR}$, æquale $\frac{2PM\,cub. \times SP\,qu.}{CP\,quad.}$. Est ergo (per Corol. 1 & 5 Prop VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM\,cub. \times SP\,quad.}{CP\,quad.}$ hoc est (neglecta ratione determinata $\frac{2SP\,quad.}{CP\,quad.}$) reciproce ut *PM cub. Q.E.I.*

Idem facile colligitur etiam ex Propositione præcedente.

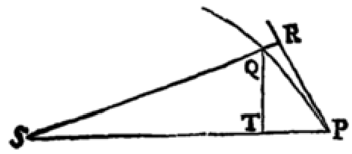
<45>

Scholium.

Et simili argumento corpus movebitur in Ellipsi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in Spirali PQS *secante radios omnes* SP SQ, *&c. in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis.*



Detur angulus indefinite parvus *PSQ*, & ob datos omnes angulos dabitur specie figura *SPQRT*. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque $\frac{QT\,quad.}{QR}$ ut *QT*, hoc est ut *SP*. Mutetur jam utcunque angulus *PSQ*, & recta *QR* angulum contactus *QPR* subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipsius *PR* vel *QT*. Ergo manebit $\frac{QT\,quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc est ut *SP*. Quare $\frac{QT\,q. \times SP\,q}{QR}$ est ut *SP cub.* adeoque (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut cubus distantiæ *SP*. *Q.E.I.*

Idem aliter.

Perpendiculum *SY* in tangentem demissum, & circuli Spiralem tangentis chorda *PV* sunt ad altitudinem *SP* in datis rationibus; ideoque *SP cub.* est ut $SY\,q \times PV$, hoc est (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) reciproce ut vis centripeta

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia, circa datæ Ellipseos vel Hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta, esse inter se æqualia.

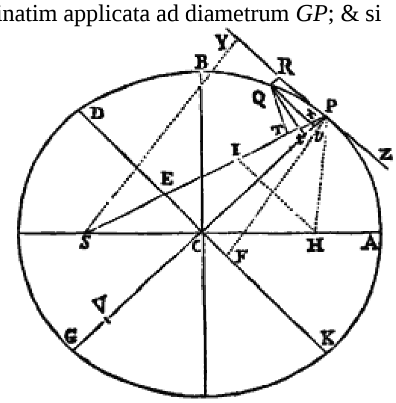
Constat ex Conicis.

<46>

PROPOSITIO X. PROBLEMA. V.

Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.

Sunto *CA*, *CB* semiaxes Ellipseos; *GP*, *DK* diametri conjugatæ; *PF*, *Qt* perpendicula ad diametros; *Qv* ordinatim applicata ad diametrum *GP*; & si compleatur parallelogrammum *QvPR*, erit (ex Conicis) *PvG* ad *Qv quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad.* & (ob similia triangula *Qvt*, *PCF*) *Qv quad.* est ad *Qt quad.* ut *PC quad.* ad *PF quad.* & conjunctis rationibus, *PvG* ad *Qt quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad.* & *PC quad.* ad *PF quad.* id est *vG* ad $\frac{Qt\,quad.}{Pv}$ ut *PC quad.* ad $\frac{CD\,q \times PF\,q}{PC\,q}$. Scribe *QR* pro *Pv*, & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis *P* & *Q* coeuntibus, $2PC$ pro *vG*, & ductis extremis & mediis in se mutuo, fiet $\frac{QT\,quad. \times PC\,q}{QR}$ æquale $\frac{2BC\,q \times CA\,q}{PC}$. Est ergo (per Corol. 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BC\,q \times CA\,q;}{PC}$ id est (ob datum $2BC\,q \times CA\,q$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directe ut distantia *PC. Q.E.I.*



Idem aliter.

In *PG* ab altera parte puncti *t* posita intelligatur *tu* æqualis ipsi *tv*; deinde cape *uV* quæ sit ad *vG* ut est *DC quad.* ad *PC quad.* Et quoniam ex Conicis est *Qv quad.* ad *PvG*, ut *DC quad.* ad *PC quad:* erit *Qv quad.* æquale $Pv \times uV$. Unde quadratum chor <47> dæ arcus *PQ* erit æquale rectangulo *VPv*; adeoque Circulus qui tangit Sectionem Conicam in *P* & transit per punctum *Q*, transibit etiam per punctum *V*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus ejusdem erit curvaturæ cum sectione conica in *P*, & *PV* æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis qua corpus *P* in Ellipsi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in *PFq* (per Corol. 3 prop. VI.) hoc est (ob datum $2DCq$ in *PFq*) directe ut *PC. Q.E.I.*

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis a centro Ellipseos: & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in Circulo, in quem utique Ellipsis migrare potest.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipsibus similibus æqualia sunt per Corol. 3 & 8, Prop. IV: in Ellipsibus autem communem habentibus axem majorem, sunt ad invicem ut Ellipseon areæ totæ directe & arearum particulæ simul descriptæ inverse; id est, ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverse; hoc est, ut axes illi minores directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverse; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipsis, centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola; & vis ad centrum infinite distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est Theorema *Galilæi*. Et si coni sectio Parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam versa. Et quemadmodum in Circulo vel Ellipsi, si vires tendunt ad centrum figuræ in Abscissa positum, hæ vires augendo vel diminuendo Ordinatas in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis Ordinatarum ad Abscissam, semper augetur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempra periodica maneant æqualia: sic etiam in figuris universis, si Ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione qucunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in Abscissa positum tendentes augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.

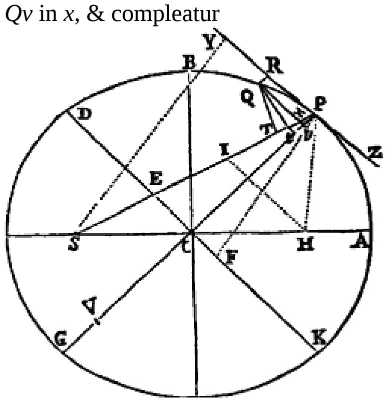
<48>

SECTIO III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.



Esto Ellipseos umbilicus *S*. Agatur *SP* secans Ellipseos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem esse semiaxi majori *AC*, eo quod acta ab altero Ellipseos umbilico *H* linea *HI* ipsi *EC* parallela, (ob æquales *CS*, *CH*) æquentur *ES*, *EI*, adeo ut *EP* semisumma sit ipsarum *PS*, *PI*, id est (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipsorum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & Ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2BC\,quad.}{AC}$) dicto *L*, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut *QR* ad *Pv*; id est ut *PE* seu *AC* ad *PC*; & $L \times Pv$ ad *GvP* ut *L* ad *Gv*; & *GvP* ad *Qv quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad*; & (per Corol. 2 Lem. VII.) *Qv quad.* ad *Qx quad*, punctis *Q* & *P* coeuntibus, est ratio æqualitatis; & *Qx quad.* seu *Qv quad.* est ad *QT quad.* ut *EP quad.* ad *PF quad*, id est ut *CA quad.* ad *PF quad.* sive (per Lem XII.) ut *CD quad.* ad *CB quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ sit ad *QT quad.* ut $AC \times L \times PC\,q. \times CD\,q.$ seu $2CB\,q. \times PC\,q. \times CD\,q.$ ad $PC \times Gv \times CD\,q. \times CB\,q.$ sive ut $2PC$ ad *Gv*. <49> Sed, punctis *Q* & *P* coentibus, æquantur $2PC \& Gv$. & *Gv*. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & *QT quad.* æquantur. Ducantur hæc a qualia in $\frac{SP\,q.}{QR}$ & fiet $L \times SP\,q.$ æquale $\frac{SP\,q. \times QT\,q.}{QR}$ Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SP\,q.$ id est, reciproce in ratione duplicata distantiæ *SP. Q.E.I*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum Ellipseos tendens, qua corpus *P* in Ellipsi illa revolvi potest, sit (per Corol. 1 Prop. X) ut *CP* distantia corporis ab Ellipseos centro *C*; ducatur *CE* parallela Ellipseos tangenti *PR*: & vis qua corpus idem *P*, circum iliud quodvis Ellipseos punctum *S* revolvi potest, si *CE* & *PS* concurrant in *E*, erit ut $\frac{PE\,cub.}{SP\,q}$ (per Corol. 3 Prop. VII,) hoc est, si puntum *S* sit umbilicus Ellipseos, adeoque *PE* detur, ut *SP q* reciproce. *Q.E.I.*

Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus ceteros demonstratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA. VII.

Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto *CA*, *CB* semi-axes Hyperbolæ; *PG*, *KD* diametri conjugatæ; *PF*, *Qt* perpendicula ad diametros; & *Qv* ordinatim applicata ad diametrum *GP*. Agatur *SP* secans tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QRPx*. Patet *EP* æqualem esse semiaxi transverso *AC*, eo quo, acta ab altero Hyperbolæ umbilico *H* linea *HI* ipsi *EC* parallela, ob æquales *CS*, *CH*, æquentur *ES*, *EI*; adeo ut *EP* semidifferentia sit ipsarum *PS*, *PI*, id est (ob parallelas *IH PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipsarum *PS*, *PH*, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*. Et Hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BC\,q}{AC}$) dicto *L*, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut *QR* ad *Pv*, id est, ut *PE* seu *AC* ad *PC*; Et $L \times Pv$ ad *GvP* ut *L* <50> ad *Gv*; & *GvP* ad *Qv quad.* ut *PC q.* ad *CDq*; & (per Corol. 2. Lem. VII.)*Qv quad.* ad *Qx quad.*, punctis *Q* & *P* coeuntibus fit ratio æqualitatis; & *Qx quad.* seu *Qv quad.* est ad *QTq.* ut *EPq.* ad *PFq*, id est ut *CAq*, ad *PFq*, sive (per Lem. XII.) ut *CDq.* ad *CBq:* & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad *QTq.* ut $AC \times LPCq \times CDq$ seu $2CB\,q \times PC\,q \times CD\,q \times$ ad $PC \times Gv \times CB\,quad.$ sive ut $2PC$ ad *Gv*. Sed punctis *P* & *P* coeuntibus æquantur $2PC \& Gv$. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & *QTq.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\,q}{QR}$. & fiet $L \times SP\,q.$ æquale $\frac{SP\,q \times QT\,q}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SP\,q$, id est reciproce in ratione duplicata distantiæ *SP. Q.E.I.*

<51>

Idem aliter.

Inveniatur vis quæ tendit ab Hyperbolæ centro *C*. Prodibit hæc distantiæ *CP* proportionalis. Inde vero (per Corol. 3 Prop. VII.) vis ad umbilicum *S* tendens erit ut $\frac{PE\,cub}{SP\,q}$, hoc est, ob datam *PE*, reciproce ut *SP q. Q.E.I.*

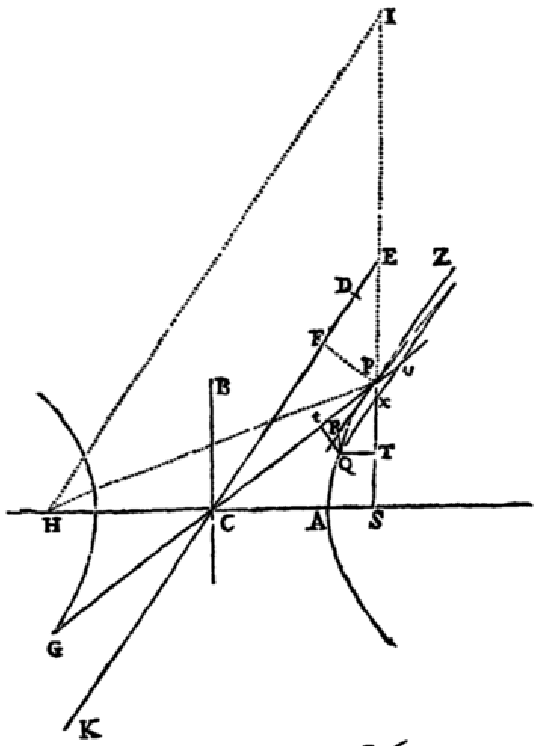
Eodem modo demonstratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam versa, movebitur in Hyperbola conjugata.

LEMMA XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.



Sit enim *APQ* Parabola, *S* umbilicus ejus, *A* vertex principalis, *P* punctum contactus, *PO* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *PM* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN* linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN*, & ob æquales *MS* & *SP*, *MN* & *NP*, *MA* & *AO*, parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*, & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A* & simile triangulis æqualibus *SNM*, *SNP*: Ergo *PS* est ad *SN* ut *SN* ad *SA*. *Q.E.D.*

Corol. 1. *PSq.* est ad *SNq.* ut *PS* ad *SA*.

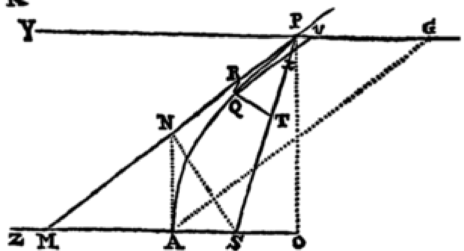
Corol. 2. Et ob datam *SA*, est *SNq.* ut *PS*.

<52>

Corol. 3. Et concursus tangeis cujsvis *PM* cum recta *SN*, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam *AN*, quæ Parabolam tangit in vertice principali.

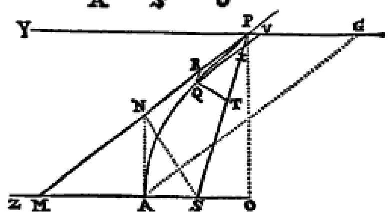
PROPOSITIO. XIII. PROBLEMA. VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.



Maneat constructio Lemmatis, sitqque *P* corpus in perimetro Parabolæ, & a loco *Q* in quem corpus proxime movetur, age ipsi *SP* Parallelam *QR* & perpendicularem *QT*, necnon *Qv* tangenti parallelam & occurentem tum diametro *YPG* in *v*, tum distantiæ *SP* in *x*. Jam ob similia triangula *Pxv*, *SPM* & æqualia unius latera *SM*, *SP*, æqualia sunt alterius latera *Px* seu *QR* & *Pv*. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ *Qv* æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri *Pv*, id est (per Lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$ seu $4PS \times QR$; & punctis *P* & *Q* coeuntibus, ratio *Qv* ad *Qx* (per Corol. 2 Lem. VII.) fit æqualitatis. Ergo *Qxquad.* eo in casu, æquale est rectangulo $4PS \times QR$. Est autem (ob similia triangula *QxT, SPN*) *Qxq.* ad *QTq.* ut *PSq.* ad *SNq.* hoc est (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut *PS* ad *SA*, id est ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per Prop. IX. Lib. V Elem.) *QTq.* & $4AS \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq.}{QR}$, & fiet $\frac{SPq. \times QTq.}{QR}$ æquale $SPq. \times 4SA$: & propterea (per Corol. 1 & 5 prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $SPq. \times 4SA$, id est, ob datam $4SA$, reciproce in duplicata ratione distantiæ *SP*. *Q.E.I.*

<53>



Corol. 1. Ex tribus novissimis Propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P, secundum lineam quamvis rectam *PR*, quacunque cum velocitate exeat de loco *P*, & vi centripeta quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico & puncto contactus & positione tangentis, describi potest sectio Conica quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta: & Orbes duo se mutuo tangentes, eadem vi centripeta describi non possunt.

Corol. 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco suo *P*, ea sit, qua lineola *PR* in minima aliqua temporis particula describi possit, & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium *QR*: movebitur hoc corpus in Conica aliqua sectione, cujus latus rectum principale est quantitas illa $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi lineolæ *PR*, *QR* in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipsin, & casum excipio ubi corpus recta descendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciproce in duplicata ratione distantiæ locorum a centro; dico quod Orbium Latera recta principalia sunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore describunt.

Nam, per Corol. 2. Prop. VIII, Latus rectum *L* æquale est quantitati $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi coeunt puncta *P* & *Q*. Sed linea minima *QR*, dato tempore, est ut vis centripeta generans, hoc est (per Hypothesin) reciproce ut *SPq*. Ergo $\frac{QTq.}{QR}$ est ut $QTq. \times SPq.$ hoc est, latus rectum *L* in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. *Q.E.D.*

<54>

Corol. Hinc Ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus, est in ratione composita subduplicata ratione lateris recti & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$ ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iisdem positis, dico quod Tempora periodica in Ellipsibus sunt in ratione sesquiplicata majorum axium.

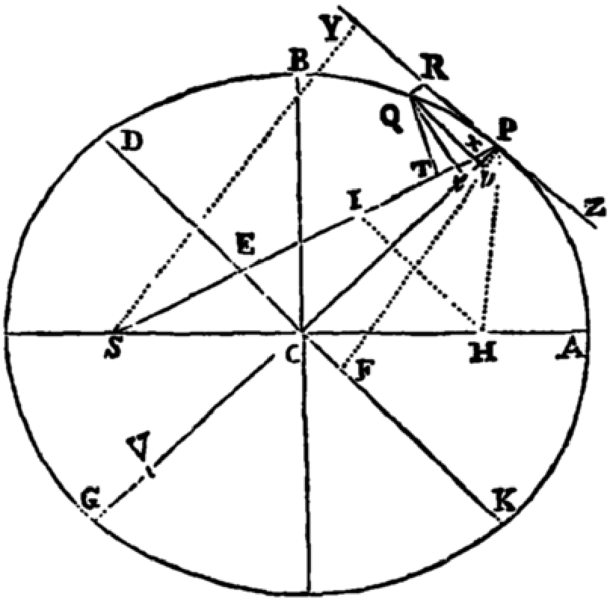
Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & sesquiplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Prop. XIV. est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquiplicata ratio majoris axis æqualis rationi periodici temporis. *Q.E.D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipsibus eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod Velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendiculorum inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico *S* ad tangentem *PR* demitte perpendiculum *SY* & velocitas corporis *P* erit reciproce in subduplicata ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus *PQ* in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens *PR*, id est (ob proportionales *PR* ad *QT* & *SP* ad *SY*) ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, sive ut *SY* reciproce & $SP \times QT$ directe; estque <55> $SPQT$ ut area dato tempore descripta, id est, per Prop XIV. in subduplicata ratione lateris recti. *Q.E.D.*



Corol. 1. Latera recta principalia sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse & subduplicata ratione laterum rectorum directe. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

Corol. 3. Ideoque velocitas in Conica sectione, in maxima vel minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in Circulo in eadem à centro distantia, in subduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

Corol. 4. Corpurum in Ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem quæ corporum gyrantium in Circulis ad easdem distantias; hoc est (per Corol 6. Prop. IV.) reciproce in subduplicata ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semi-axes minores; & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverse cum subduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio subduplicata distantiarum inverse.

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diversis, quarum <56> latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem

Corol. 6. In Parabola, velocitas est reciproce in subduplicata ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ, in Ellipsi magis variatur, in Hyperbola minus, quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2 Lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in subduplicata ratione distantiæ. In Hyperbola perpendiculum minus variatur, in Ellipsi magis.

Corol. 7. In Parabola, velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam, est ad velocitatem corporis revolventis in Circulo ad eandem a centro distantiam, in subduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium secundum, velocitas in vertice Parabolæ est in hac ratione, & per Corollaria sexta hujus & Propositionis quartæ, servatur eadem proportio in omnibus distantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam distantiam, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major.

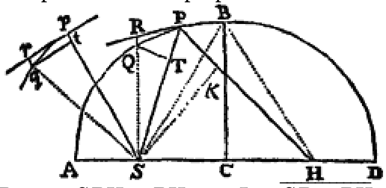
Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica est ad velocitatem gyrantis in Circulo in distantia dimidii lateris recti principalis Sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demissum. Patet per Corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc Circulo sit ad velocitatem gyrantis in Circulo quovis alio, reciproce in subduplicata ratione distantiarum, fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica sectione ad velocitatem gyrantis in Circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA. IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur Linea quam corpus describit, de loco dato, cum data velocitate, secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea sit quæ corpus *p* in orbita quavis data *pq* gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco *p*. <57> De loco *P*, secundum lineam *PR*, exeat corpus *P*, cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Conisectionem *PQ*. Hanc igitur recta *PR* tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *pr* Orbitam *pq* in *p*, & si ab *S* ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale Conisectionis ad latus rectum principale Orbitæ, in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atque adeo datur. Sit istud *L*. Datur præterea Conisectionis umbilicus *S*. Anguli *RPS* complementum ad duos rectos fiat angulus *RPH*, & dabitur positione linea *PH*, in qua umbilicus alter *H* locatur. Demisso ad *PH* perpendiculo *SK*, erigi intelligatur semiaxis conjugatus *BC*, & erit



$SP\,q. - 2KPH + PH\,q. = SH\,q. = 4CH\,q. = 4BH\,q. - 4BC\,q. = \overline{SP + PH}\!: quad. - L \times \overline{SP + PH} = SP\,q. + 2SPH + PH\,q. - L \times \overline{SP + PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SP\,q - PH\,q + L \times \overline{SP + PH}$, & fiet L $\times\ \overline{SP + PH} = 2SPH + 2KPH$, seu $SP + PH$ ad *PH* ut $2SP + 2KP$ ad *L*. Unde datur *PH* tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in *P* velocitas, ut latus rectum *L* minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit *PH* ad eandem partem tangentis *PR* cum linea *PS*, adeoque figura erit Ellipsis, & ex datis umbilicis *S*, *H*, & axe principali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum *L* æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo *PH* infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens *SH* parallelum lineæ *PK*, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo *P* exeat, capienda erit longitudo *PH* ad alteram partem tangentis, adeoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum *SP* & *PH*, & inde dabitur. *Q.E.I.*

Corol. 1 Hinc in omni Conisectione ex dato vertice principali *D*, latere recto *L*, & umbilico *S*, datur umbilicus alter *H* capiendo *DH* ad *DS* ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4SP$. Nam proportio $SP + PH$ ad *PH* ut $2SP + 2KP$ ad *L*, <58> in casu hujus Corollarii, fit $DS + DH$ ad *DH* ut 4 DS ad *L*, & divisim *DS* ad *DH* ut 4 $DS - L$ ad *L*.

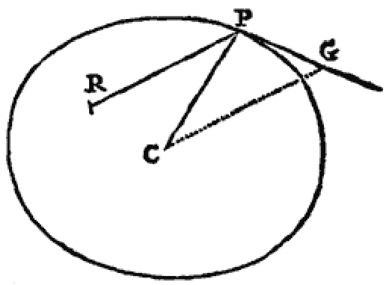
Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali *D*, invenietur Orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam *DS*, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in Circulo, ad distantiam *DS* gyrantis: (Per Corol. 3. Prop. XVI.)dein *DH* ad *DS* ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4 DS.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunque Conica, & ex Orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest Orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.

Si corpus *P* vi centripeta ad punctum quodcunque datum *R* tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque Sectionis conicæ cujus centrum sit *C*, & requiratur Lex vis centripetæ: ducatur *CG* radio *RP* parallela, & Orbis tangenti *PG* occurens in *G*; & vis illa (per Corol. 1 & Schol. Prop. X, & Corol. 3 Prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$



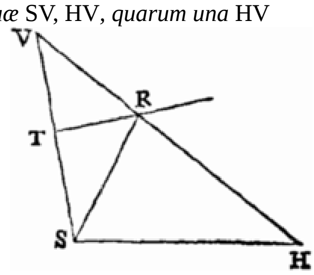
<59>

SECTIO IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab Ellipseos vel Hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqs sit axi transverso figuræ, altera* SV *a perpendiculo* TR *in se demisso bisecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *sectionem Conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*



Secet enim perpendiculum *TR* recatm *HV* productam, si opus fuerit, in *R*; & jungatur *SR*. Ob æquales rectas *TS*, *TV*, æquales erunt & rectæ *SR*, *VR* & anguli *TRS*, *TRV*. Unde punctum *R* erit ad Sectionem Conicam, & perpendiculum *TR* tanget eandem: & contra. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

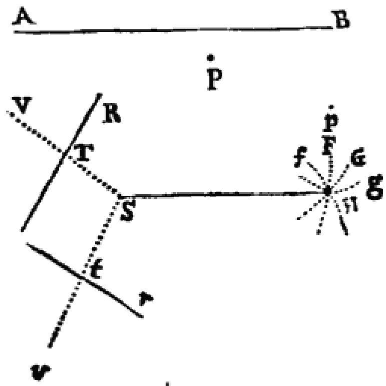
Datis umbilico & axibus principalis describere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione dats contingent.

Sit *S* communis umbilicus figuraram; *AB* longitudo axis transversi Trajectoriæ cujusvis; *P* punctum per quod Trajectoria debet transire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro *P* intervallo $AB - SP$, si orbita sit Ellipsis, vel $AB + SP$, si ea sit Hyperbola, describatur circulus *HG*. Ad tangentem *TR* demittatur perpendiculum *ST*, & producatur idem ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*; centroque *V* & intervallo *AB* describatur circulus *FH*. Hac <60> methodo sive dentur duo puncta *P, p*, sive duæ tangentes *TR, tr*, sive punctum *P* & tangens *TR*, describendi sunt circuli duo. Sit *H* eorum intersectio communis, & umbilicis *S, H*, axe illo dato describatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria descripta (eo quod $PH + SP$ in Ellipsi, & $PH - SP$ in Hyperbola æquatur axi) transibit per punctum *P*, & (per Lemma superius) tanget rectam *TR*. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo *P, p*, vel tanget rectas duas *TR, tr. Q.E.F.*

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA. XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

Sit *S* umbilicus, *P* punctum & *TR* tangens Trajectoriæ describendæ. Centro *P*, intervallo *PS* describe circulum *FG*. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem *ST*, & produc eam ad *V*, ut fit *TV* æqualis *ST*. Eodem modo describendus est alter circulus *fg*,si datur alterum punctum *p*;

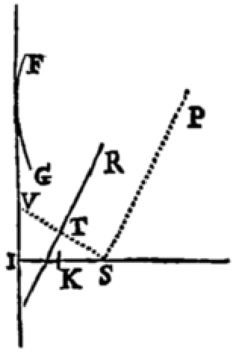


vel inveniendum alterum punctum *v*, si datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta *IF* quæ tangat duos circulos *FG*, *fg* si dantur duo puncta *P*, *p*, vel transeat per duo puncta *V*,*v*, si dantur duæ tangentes *TR*, *tr*, vel tangat circulum *FG* & transeat per punctum *V*, si datur punctum *P* & tangens *TR*. Ad *FI* demitte perpendicularem *SI*, eamque biseca in *K*; & axe *SK*, vertice principali *K* describatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola ob æquales *SK* & *IK*, *SP* & *FP* transibit per punctum *P*; & (per Lemmatis XIV. Corol. 3.) ob æquales *ST* & *TV* & angulum rectum *STR*, tanget rectam *TR*. *Q.E.F.*

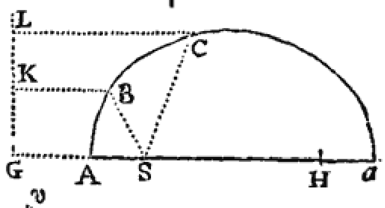
<61>

PROPOSITIO XX. PROBLEMA. XII.

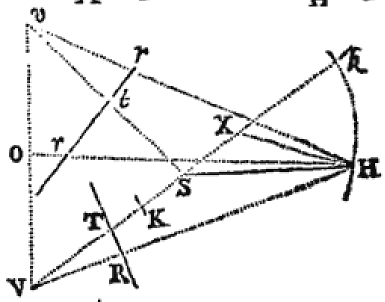
Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis specie datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.



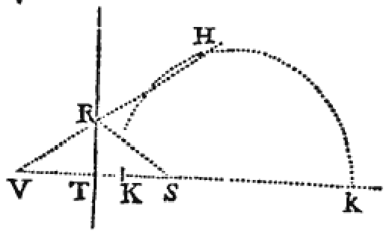
Cas. 1. Dato umbilico *S*, describenda sit Trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam Trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, describe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eosdem in *K* & *L*, dmitte perpendiculum *SG*, idemque seca in *A* & *a*, ita ut sit *SA* ad *AG* & *Sa* ad *aG*, ut est *SB* ad *BK*, & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, describatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter Figuræ descriptæ, & cum sit *SA* ad *AG* ut *Sa* ad *aG*, erit divisim $Sa - SA$ seu *SH* ad $aG - AG$ seu *Aa* in eadem ratione, adeoque in ratione quam habet axis principalis Figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; & propterea Figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. Cumque sint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eadem ratione, transibit hæc Figura per puncta *B*, *C*, ut ex Conicis manifestum est.



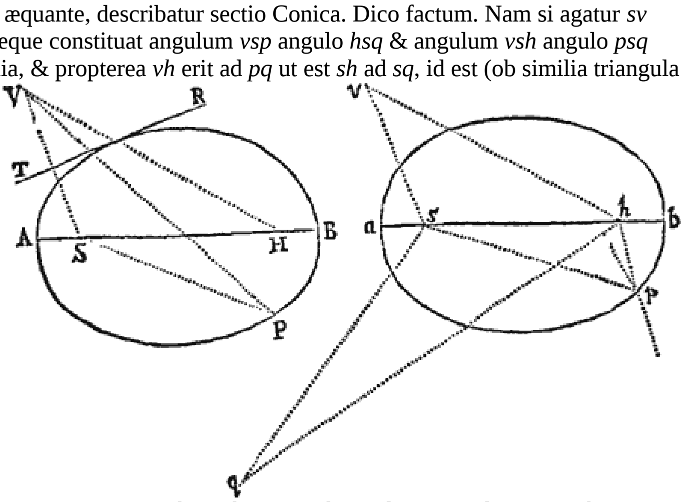
Cas. 2. Dato umbilico *S*, describenda sit Trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut sint *TV*, *tv* æquales *TS*, *ts*. Biseca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam seca in *K* & *k* ita, ut sit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut est Trajectoriæ describendæ axis principalis ad umbilicorum distantiam. Super diametro *Kk* describatur circulus secans *OH* in *H*; & umbilicis *S*, *H*, axe principali ipsam *VH* æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Nam biseca *Kk* in *X*, & junge *HX*, *HS*, *HV*, *Hv*. Quoniam est *VK* ad *KS* ut *Vk* ad *kS*; & composite ut $VK + Vk$ ad $KS + kS$; divisimque <62> ut $Vk - VK$ ad $kS - KS$, id est ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, adeoque ut *VX* ad *HX* & *HX* ad *SX*, similia erunt triangula *VXH*, *HXS*, & propterea *VH* erit ad *SH* ut *VX* ad *XH*, adeoque ut *VK* ad *KS*. Habet igitur Trajectoria descriptæ axis principalis *VH* eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam *SH*, quam habet Trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilcorum distantiam, & propterea ejusdm est speciei. Insuper cum *VH*, *vH* æquentur axi principali, & *VS*, *vS* a rectis *TR*, *tr* perpendiculariter bisecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam descriptam tangere. *Q.E.F.*



Cas. 3. Dato umbilico *S* describenda sit Trajectoria quæ rectam *TR* tanget in puncto dato *R*. In rectam *TR* demitte perpendicularem *ST*, & produc eandem ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*. Junge *VR*, & rectam *VS* infinite productam seca in *K* & *k*, ita ut sit *VK* ad *SK* & *Vk* ad *Sk* ut Ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum; circuloque super diametro *Kk* descripto, secetur producta recta *VR* in *H*, & umbilicis *S*, *H*, axe principali rectam *VH* æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Namque *VH* esse ad *SH* ut *VK* ad *SK*, atque adeo ut axis principalis Trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in Casu secundo, & propterea Trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describenda; rectam vero *TR* qua angulus *VRS* bisecatur, tangere Trajectoriam in puncto *R*, patet ex Conicis. *Q.E.F.*



Cas. 4. Circa umbilicum *S* describenda jam sit Trajectoria *APB*, quæ tangat rectam *TR*, transeatque per punctum quodvis *P* extra tangentem datum, quæque similis sit Figuræ *apb*, axe principali *ab* & umbilicis *s*, *h* descriptæ. In tangentem *TR* demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*. Angulis autem *VSP*, *SVP* fac angulos *hsq*, *shq* æquales; centroque *q* & intervallo quod sit ad *ab* ut *SP* ad *VS* describe circulum secantem Figuram *apb* in *p*. Junge *sp* & age *SH* quæ sit ad *sh* ut est *SP* ad *sp*, quæque angulum *PSH* angulo *psh* & angulum *VSH* angulo *psq* æquales constituat. Denique umbilicis *S*, *H*, & axe principali *AB* distantiam *VH* æquante, describatur sectio Conica. Dico factum. Nam si agatur *sv* quæ sit ad *sp* ut est *sh* <63> ad *sq*, quæque constituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt similia, & propterea *vh* erit ad *pq* ut est *sh* ad *sq*, id est (ob similia triangula

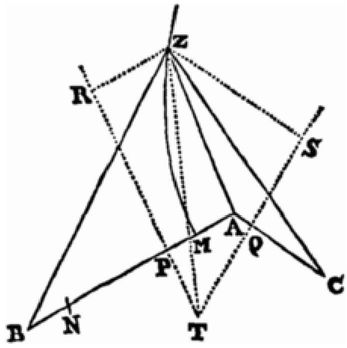


VSP, *hsq*) ut est *VS* ad *SP* seu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro ob similia triangula *VSH*. *vsh*, est *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id est, axis Conicæ sectionis jam descriptæ ad ilius umbiliorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea Figura jam descripta similis est Figuræ *apb*. Transit autem hæc Figura per punctum *P*, eo quod triangulum *PSH* simile sit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipsis axi & *VS* biscatur perpendiculariter a recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. *Q.E.F.*

LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. 1. Sunto puncta illa data *A, B, C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet: Ob differentiam linearum *AZ, BZ*, locabitur punctum *Z* in Hyperbola cujus umbilici sunt *A* & *B*, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM*. <64> ad *MA* ut est *MN* ad *AB*, & erecta *PR* perpendiculari ad *AB*, demissoque *ZR* perpendiculari ad *PR*; erit, ex natura hujus Hyperbolæ *ZR* ad *AZ* ut est *MN* ad *AB*. Simili discursu punctum *Z* locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt *A, C* & principalis axis differentia inter *AZ* & *CZ*, ducique potest *QS* ipsi *AC* perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut est differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipsarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; ideoque rectæ *RP, SQ* concurrant in *T*, & agatur *TZ*, figura *TRZS*, dabitur specie, & recta *TZ* in qua punctum *Z* alicubi locatur, dabitur positione. Eadem methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt *B* & *C* & axis principalis differentia rectarum B*BZ, CZ*, inveniri potest alia recta in qua punctum *Z* locatur. Habitis autem duobus Locis rectilineis, habetur punctum quæsitum *Z* in eorum intersectione. *Q.E.I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *AZ* & *BZ* æquantur, punctum *Z* locabitur in perpendiculo bisecante distantiam *AB*, & locus alius rectilineus invenietur ut supa. *Q.E.I.*

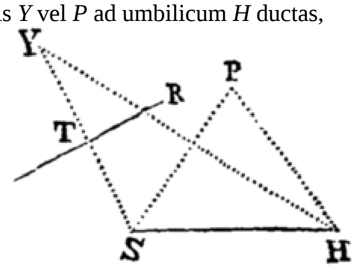
Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum *Z* in centro Circuli per puncta *A, B, C* transeuntis. *Q.E.I.*

Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per Librum. Tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII.

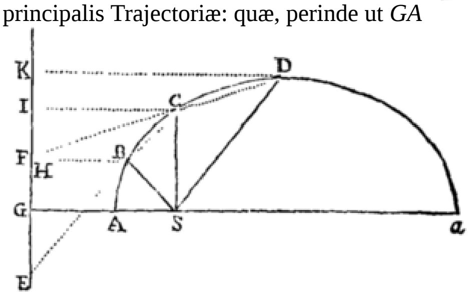
Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

Detur umbilicus *S*, punctum *P*, & tangens *TR*, & inveniendus sit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *Y*, ut sit *TY* æqualis *ST*, & erit *YH* æqualis axi principali. Junge *SP, HP*, & erit *SP* differentia inter *HP* & axem principalem. Hoc modo si dentur plures tangen <65> tes *TR*, vel plura puncta *P*, devenietur semper ad lineas totidem *YH*, vel *PH*, a dictis punctis *Y* vel *P* ad umbilicum *H* ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus *SP* differunt ab iisdem, atque adeo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma superius, datur umbilicus ille alter *H*. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est *YH*; vel, si Trajectoria Ellipsis est, $PH + SP$; sin Hyperbola, $PH - SP$) habetur Trajectoria. *Q.E.I.*



Scholium.

Casus ui dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta *B, C, D*. Junctas *BC, CD* produc ad *E, F*, ut sit *EB* ad *EC* ut *SB* ad *SC*,& *FC* ad *FD* ut *SC* ad *SD*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales *SG, BH*, inque *GS* infinite producta cape *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut est *HB* ad *BS*; & erit *A* vertex, & *Aa* axis principalis Trajectoriæ: quæ, perinde ut *GA* minor, æqualis vel major fuerit quam *AS*, erit Ellipsis, Parabola vel Hyperbola; puncto *a* in primo casu cadente ad eandem partem lineæ *GF* cum puncto *A*; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *GF*. Nam si demittantur ad *GF* perpendicula *CI, DK*; erit *IC* ad *HB* ut *EC* ad *EB*, hoc est, ut *SC* ad *SB*; & vicissim *IC* ad *SC* ut *HB* ad *SB*, sive ut *GA* ad *SA*. Et simili argumento probabitur esse *KD* ad *SD* in eadm ratione. Jacent ergo puncta *B, C, D* in Conisectione cica umbilicum *S* ita descripta, ut rectæ omnes ab umbilico *S* ad singula Sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula a punctis iisdem ad rectam *GF* demissa in data illa ratione.



Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit Clarissimus Geometra *De la Hire*, Conicorum suorum Lib. VIII. Prop XXV.

<66>

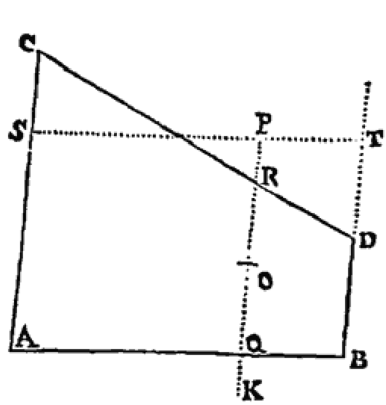
SECTIO V.

Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

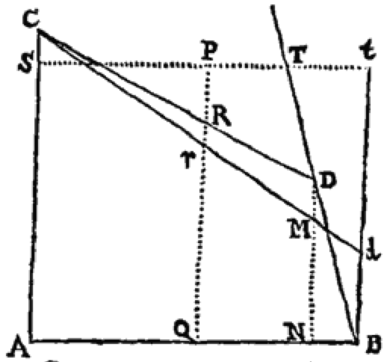
Si a datæ conicæ sectionis puncto quovis P, *ad Trapezii alicujus* ABCD, *in Conica illa sectione inscripti, latera quatuor infinite producta* AB, CD, AC, DB, *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* $\mathrm{PQ} \times \mathrm{PR}$, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* $\mathrm{PS} \times \mathrm{PT}$ *in data ratione.*

Cas. 1. Ponamus primo lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque insuper latera duo ex oppositis, puta *AC* & *BD*, sibi invicem parallela. Et recta quæ bisecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ sectionis, & bisecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* bisecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K* ut sit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A, B, P*, & *K* sint ad Conicam sectionem, & *PK* secet *AB* in dato angulo, erit (per Prop. 17 & 18 Lib. III Conicorum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *QK* & *PR* æquales sunt, utpote æqualium *OK, OP*, & *OQ, OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & $PQ \times PR$ æqualia sunt; atque adeo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum *AQB*, hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in data ratione. *Q.E.D.*



<67>

Cas. 2. Ponamus jam Trapezii latera opposita *AC* & *BD* non esse parallela. Age *Bd* parallelam *AC* & occurrentem tum rectæ *ST* in *t*, tum Conicæ sectioni in *d*. Junge *Cd* secantem *PQ* in *r*, & ipsi *PQ* parallelam age *DM* secantem *Cd* in *M* & *AB* in *N*. Jam ob similia triangula *BTt, DBN*; est *Bt* seu *PQ* ad *Tt* ut *DN* ad *NB*. Sic & *Rr* est ad *AQ* seu *PS* ut *DM* ad *AN*. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum *PQ* in *Rr* est ad rectangulum *PS* in *Tt*, ita rectangulum *NDM* est ad rectangulum

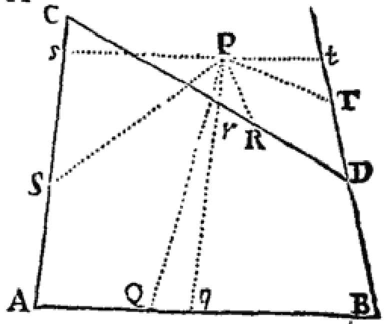


ANB, & (per Cas. 1) ita rectangulum *PQ* in *Pr* est ad rectangulum *PS* in *Pt*, ac divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum $PS \times PT$. *Q.E.D.*

Cas. 3. Ponamus denique lineas quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* non esse parallelas lateribus *AC*, *AB*, sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age *Pq*, *Pr* parallelas ipsi *AC*; & *Ps*, *Pt* parallelas ipsi *AB*; & propter datos angulos triangulorum *PQq*, *PRr*, *PSs*, *PTt*, dabuntur rationes *PQ* ad *Pq*, *PR*, ad *Pr*, *PS*, ad *Ps* & *PT* ad *Pt*; atque adeo rationes compositæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per superius demonstrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data est: Ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q.E.D.*

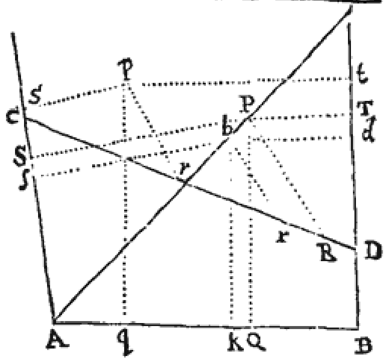
LEMMA XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera Trapezii $\mathrm{PQ} \times \mathrm{PR}$ *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* $\mathrm{PS} \times \mathrm{PT}$ *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam sectionem circa Trapezium descriptam.*



<68>

Per puncta *A, B, C, D* & aliquod infinitorum punctorum *P*, puta *p*, concipe Conicam sectionem describi: dico punctum *P* hanc semper tangere. Si negas, junge *AP* secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in *P* si fieri potest, puta in *b*. Ergo si ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ *pq, pr, ps, pt* & *bk, br, bſ, bd*; erit ut $bk \times br$ ad $bſ \times bd$ ita (per Lem. XVII) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$ & ita (per Hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem Trapeziorum *bkAſ, PQAS*, ut *bk* ad *bſ* ita *PQ* ad *PS*. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit *br* ad *bd* ut *PR* ad *PT*. Ergo Trapezia æquiangula *Drbd, DRPT* similia sunt, & eorum diagonales *Db, DP* propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in intersectionem rectarum *AP, DP* adeoque coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunque sumatur, incidit in assignatam Conicam sectionem. *Q.E.D.*



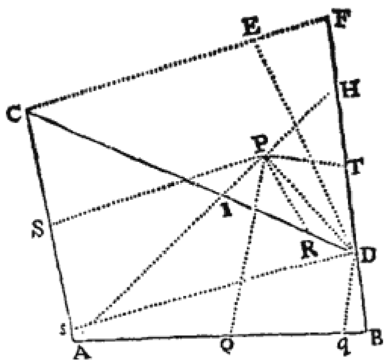
Corol. Hinc si rectæ tres *PQ, PR, PS* a puncto communi *P* ad alias totidem positione datas rectas *AB, CD, AC*, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ ad quadratum tertii *PS quad.* in data ratione: punctum *P*, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conica quæ tangit lineas *AB, CD* in *A* & *C* & contra. Nam coeat linea *BD* cum linea *AC* manente positione trium *AB, CD, AC*; dein coeat etiam linea *PT* cum linea *PS*: & rectangulum $PS \times PT$ evadet *PS quad.* rectæque *AB, CD* quæ curvam in punctis *A* & *B, C* & *D* secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangent.

Scholium.

Nomen Conicæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut sectio tam Rectilinea per verticem Coni transiens, quam Circularis basi parallela includatur. Nam si punctum *p* incidi in rectam, qua quævis ex punctis quatuor *A, B, C, D* junguntur, Conica sectio <69> vertetur in geminas Rectas, quarum una est recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si Trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ, PR, PS, PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinubus angulorum *S, T*, in quibus duæ ultimæ *PS, PT* ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum *Q, R*, in quibus duæ primæ *PQ, PR* ducuntur. Cæteris in casibus Locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sections Conicæ. Vice autem Trapezii *ABCD* substitui potest Quadrilaterum cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & e punctis quatuor *A, B, C, D* possunt unum vel duo abire in infinitum, eoque pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu Sectio Conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEMMA XIX.

Invenire punctum P, *a quo si rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT *ad alias totidem positione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *singulæ ad singulas in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,* $\mathrm{PQ} \times \mathrm{PR}$, *sit ad rectangulum sub aliis duabus,* $\mathrm{PS} \times \mathrm{PT}$, *in data ratione.*

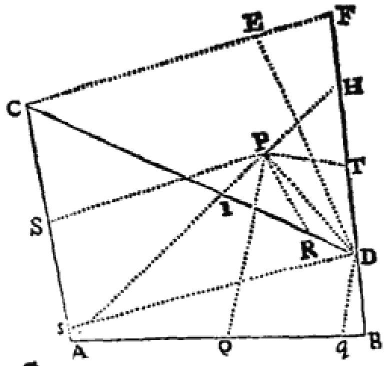


Lineæ *AB, CD*, ad quas rectæ duæ *PQ, PR*, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis *A, B, C, D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in qua velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppositas *BD, CD*, nimirum *BD* in *H* & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* <70> ad *PS*, adeoque ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc a data ratione $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *R*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH* atque adeo punctum *P. Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc etiam ad Loci punctorum infinitorum *P* punctum quodvis *D* tangens duci potest. Nam chorda *PD* ubi puncta *P* ac *D* conveniunt, hoc est, ubi *AH* ducitur per punctum *D*, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium *IP* & *PH* invenietur ut supra. Ipsi igitur *AD* duc parallelam *CF*, occentem *BD* in *F*, & in ea ultima ratione sectam in *E*, & *DE* tangens erit, propterea quod *CF* & evanescens *IH* parallelæ sunt, & in *E* & *P* similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium *P* definiri potest. Per quodvis punctorum *A, B, C, D*, puta *A*, duc Loci tangentem *AE* & per aliud quodvis punctum *B* du tangenti parallelam *BF* occurrentem Loco in *F*. Invenietur autem punctum *F* per Lem. XIX. Biseca *BF* in *G*, & acta indefinita *AG* erit positio diameter ad quam *BG* & *FG* ordinatim applicantur. Hæc *AG* occurrat Loco in *H*, & erit *AH* latus transversum, ad quod latus rectum est ut *BGq.* ad *AGH*. Si *AG* nullibi occurrit Loco, linea *AH* existente infinita, Locus erit Parabola & latum rectum ejus ad diametrum *AG* pertinens erit $\frac{BG\,q.}{AG}$ Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit ubi puncta *A* & *H* sita sunt ad easdem partes ipsius *G*: & Ellipsis, ubi *G* intermedium est, nisi forte angulus *AGB* rectus sit & insuper *BG quad.* æquale rectangulo *AGH*, quo in casu Circulus habebitur.

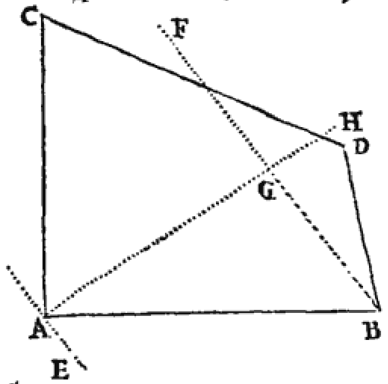
Atque ita Problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incæpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.



<71>

LEMMA XX.

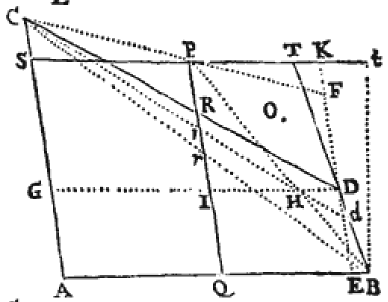
Si parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppositis* A *&* P *tangit sectionem quamvis Conicam in punctis* A *&* P; *& lateribus unius angulorum illorum infinite productis* AQ, AS, *occurrit eidem sectioni Conicæ in* B *&* C; *a punctis autem occursuum* B *&* C *ad quintum quodvis sectionis Conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T *&* R: *erunt semper abscissæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor* A, B, C, P, *transeuntem.*



Cas. 1. Jungantur *BP*, *CP* & a puncto *D* agantur rectae duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipsi *AB* parallela sit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela sit ipsi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*,*K*,*E*: & erit (per Lemma XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data. Sed est *PQ* ad *DE* (seu *IQ*) ut *PB* ad *HB*, adeoque ut *PT* ad *DH*; & vicissim *PQ* ad *PT* ut *DE* ad *DH*. Est & *PR* ad *DF* ut *RC* ad *DC*, adeoque ut (*IG* vel) *PS* ad *DG*, & vicissim *PR* ad *PS* ut *DF* ad *DG*; & conjunctis rationibus sit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque adeo in data ratione. Sed dantur *PQ* & *PS* & propterea ratio *PR* ad *PT* datur. *Q.E.D.*

Cas. 2. Quod si *PR* & *PT* ponantur in data ratione ad invicem, tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data, adeoque punctum *D* (per Lemma XVIII.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta *A*, *B*, *C*, *P*. *Q.E.D.*

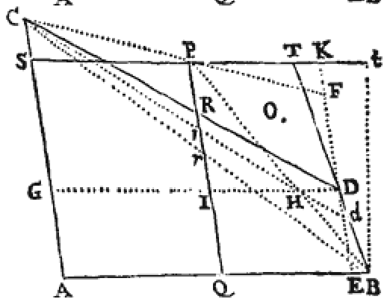
<72>



Corol. 1. Hinc si agatur *BC* secans *PQ* in *r*, & *PT* capiatur *Pt* in ratione ad *Pr* quam habet *PT* ad *PR*: erit *Bt* tangens Conicæ sectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B* ita ut, chorda *BD* evanescente, *BT* tangens evadet; & *CD* ac *BT* coincident cum *CB* & *Bt*.

Corol. 2. Et vice versa si *Bt* sit tangens, & ad quodvis Conicæ sectionis punctum *D* conveniant *BD*, *CD*; erit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*. Et contra, si sit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*: convenient *BD*, *CD* ad Conicæ sectionis punctum aliquod *D*.

Corol. 3. Conica sectio non secat Conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ Conicæ sectiones per quinque puncta *A*, *B*, *C*, *P*, *O*; easque secet recta *BD* in punctis *D*, *d*, & ipsam *PQ* secet recta *Cd* in *r*. Ergo *PR* est ad *PT* ut *Pr* ad *PT*; unde *PR* & *Pr* sibi invicem æquantur, contra Hypothesin.

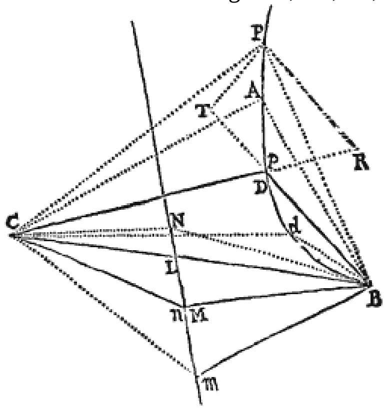


LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C, *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur; dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem Conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versa, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant Sectionem Conicam per data puntca* B,C,A *transeuntem, & sit angulus* DBM *semper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *semper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

<73>

Nam in recta *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*, incidat punctum mobile *D* in immotum *P*. Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipsis *BD*,*CD* in *T* & *R*, & facientes angulum *BPT* æqualem angulo *BNM*, & angulum *CPR* æqualem angulo dato *CNM*. Cum ergo (ex Hypothesi) æquales sint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*; aufer communes *NBD* & *NCD*,& restabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCM* & *PCR*: adeoque triangula *NBM*, *PBT* similia sunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* est ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Sunt autem puncta *B*,*C*,*N*,*P* immobilia. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeque datam rationem inter se; atque adeo, per Lemma XX, punctum *D* (perpetuus rectarum mobilum *BT* & *CR* concursus) contingit sectionem Conicam, per puncta *B*, *C*, *P* transeuntem. *Q.E.D.*

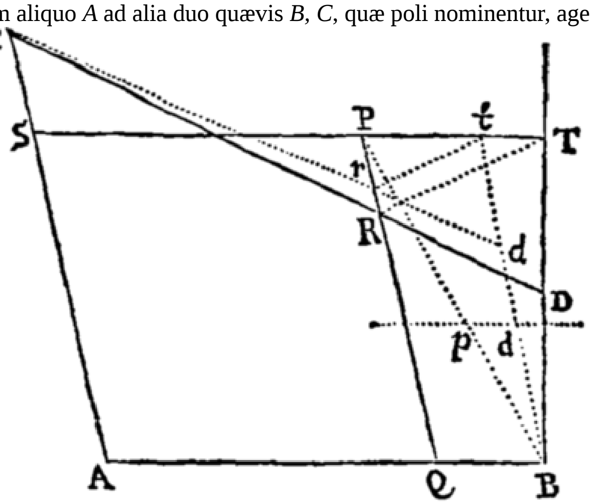


Et contra, si punctum mobile *D* contingat sectionem Conicam transeuntem per data puncta *B*,*C*,*A*, & sit angulus *DBM* semper æqualis angulo dato *ABC*, & angulus *DCM* semper æqualis angulo dato *ACB*, & ubi punctum *D* incidit successive in duo quævis sectionis puncta immobilia *p*, *P*, punctum mobile *M* incidat successive in puncta duo immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N* agatur Recta *nN*, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, si fieri potest, versetur punctum *M* in linea aliqua Curva. Tanget ergo punctum *D* sectionem Conicam per puncta quinque *B*,*C*,*A*,*p*,*P*, transeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam Curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum *D* sectionem Conicam per eadem quinque puncta *B*,*C*,*A*,*p*,*P* transeuntem, ubi pun <74> ctum *M* perpetuo tangit lineam Rectam. Ergo duæ sectiones Conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lem. XX. Igitur punctum *M* versari in linea Curva absurdum est. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque *A*,*B*,*C*,*P*,*D*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B, C*, quæ poli nominentur, age rectas *AB, AC*

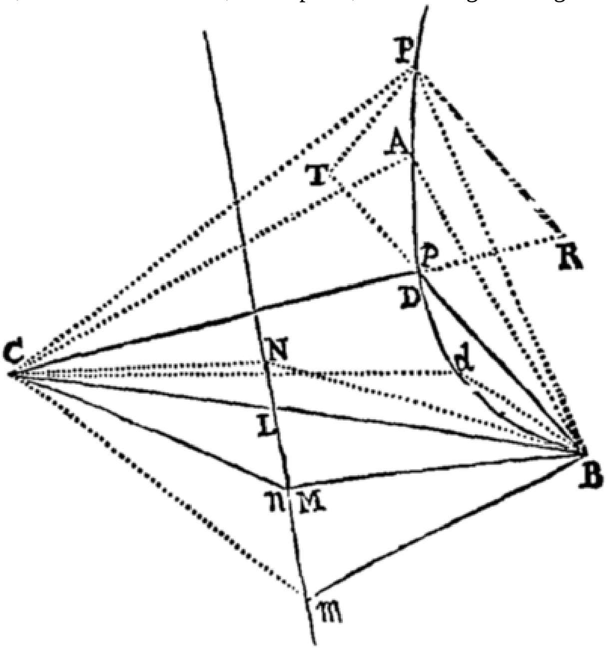


hisque parallelas *TPS, PRQ* per punctum quartum *P*. Deinde a polis duobus *B, C* age per punctm quintum *D* infinitas duas *BDT, CRD*, novissime ductis *TPS, PRQ* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurentes in *T* & *R*. Denique de rectis *PT, PR*, acta recta *tr* ipsi *TR* parallela, abscinde quasis *Pt*, *Pr* ipsis *PT*, *PR* proportionales; & si per earum terminos *t, r* & polos *B, C* actæ *Bt, Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in Trajectoria quæsita. Nam punctum illud *d* (per Lem. XX) versatur in Conica Sectione per puncta quatuor *A,B,C,P* transeunte; &, lineis *Rr, Tt* evanescentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Transit ergo sectio Conica per puncta quinque *A,B,C, P,D. Q.E.D.*

<75>

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A, B, C*; &, circum duo eorum *B, C* ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC, ACB*, applicentur crura



BA, CA primo ad punctum *D*, deinde ad punctum *P*, & notentur puncta *M, N* in quibus altera crura *BL, CL* casu utroque se decussant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos *B, C*, ea lege utcrurum *BL, CL*, vel *BM, CM* intersectio, quæ jam sit *m* incidat semper in rectam illam infinitam *MN* & crurum *BA, CA*, vel *BD, CD* intercetio, quæ jam sit *d* Trajectoriam quæsitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d* per Lem. XXI, continget sectionem Conicam per puncta *B, C* transeuntem; & ubi punctum *m* accedi ad puncta *L, M, N*, punctum *d* (per constructione) accede ad pua *A, D, P*. Describetur itaque sectio Conica transiens per puncta quinque *A, B, C, P, D. Q.E.F.*

Corol. 1. Hinc rectæ expedite duci potest quæ Trajectoriam quæsitam, in puncto quovis dato *B, C* continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *Bd* evadet tangens quæsita.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum Centra, Diametri & Latera recta inveniri possunt, ut in Corollario secundo Lemmatis XIX

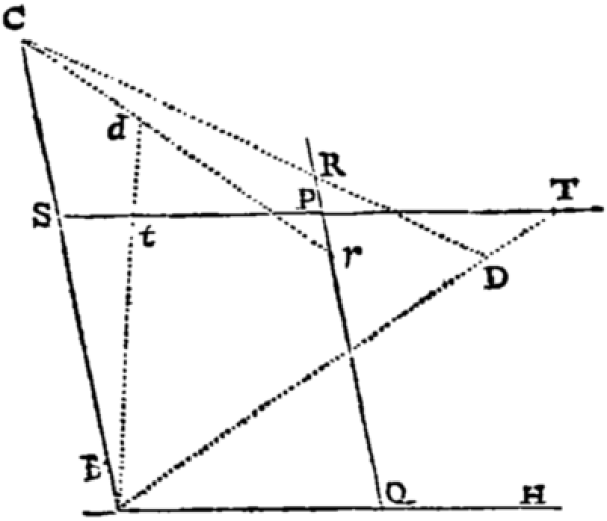
Scholium.

Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo *BP*, & in ea, si opus est, producta capiendo *Bp* ad *BP* ut est *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *p*d ipsi *SPT* parallelam, inque ea capiendo semper *p*d æqualem *Pr*; & agendo rectas *B*d, *Cr* concurrentes in *d*. Nam cum sint *Pr* ad *Pt*, *PR* ad *PT, pB* ad *PB, p*d ad *Pt* in eadem ratione; erunt *pd* & *Pr* semper æqua <76> les. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditissime, nisi mavis Curvam, ut in casu constructoine secunda, describere Mechanice.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere quæ per data quatour puncta transibit, & rectam contingent positione datam.

Cas. 1. Dentur tangens *HB*, punctum contactus *B*, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *BC*, & agendo *PS* parallelam*BH*, & *PQ* parallelam *BC*, comple parallelogrammum *BSPQ*.

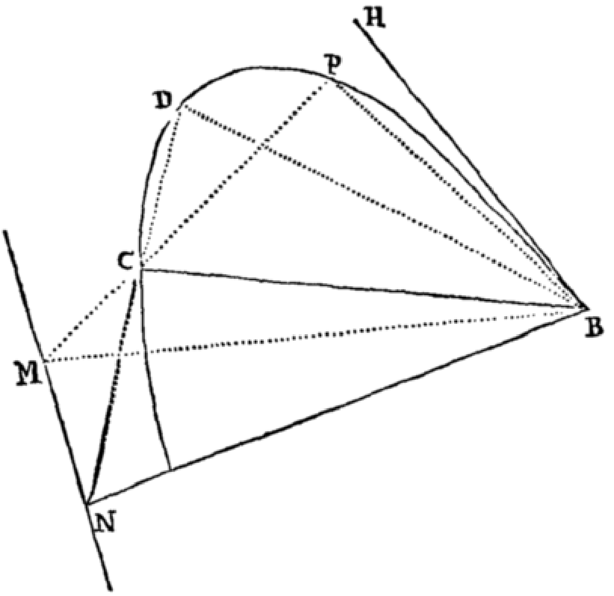


Age *BD* secantem *SP* in *T*, & *CD* secantem *PQ* in *R*. Denique, agendo quamvis *tr* ipsi *TR* parallelam, de *PQ*, *PS* abscinde *Pr*, *Pt* ipsis *PR*, *PT* proportionales respective; & actarum *Cr*, *Bt* concursus *d* (per Lem. XX) incidet semper in Trajectoriam describendam.

<77>

Idem aliter.

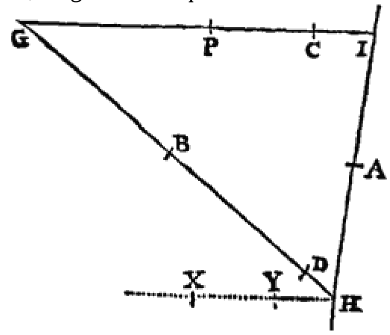
Revolvatur tum angulus magnitudine datus *CBH* circa polum *B*, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus *DC* circa polum *C*. Notentur pucta *M*, *N* in quibus anguli crus *BC* secat radium illum ubi crus alterum *BH* concurrit cum eodem radio in punctis *P* & *D*. Diende ad actam infinitam *MN* concurrant



perpetuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *BC*, & cruris alterius *BH* concursus cum radio delineabit Trajectoriam quæsitam.

Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo suo situ fiet tangens *BH*, atque adeo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis Delineabit igitur cruris *BH* concursus cum radio sectionem Conicam per puncta *C*, *D*, *P* transeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto *B*. *Q.E.F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, *P* extra tangentem *HI* sita. Junge bina lineis *BD*, *CP* concurrentia in *G*, tangen <78> tique occurrentibus in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut sit *HA* ad *AI*, ut est rectangulum sub media proportionali inter *CG* & *GP* & media proportionali inter *BH* & *HD*, ad rectangulum sub media proportionali inter *DG* & *GB* & media proportionali inter *PI* & *IC*; & erit *A* punctum contactus. Nam si rectæ *PI* parallela *HX* Trajectoriam secet in punctis quibusvis *X* & *Y*: erit (ex Conicis) punctum *A* ita locandum, ut fuerit *HA quad.* ad *AI quad.* in ratione composita ex ratione rectanguli *XHY* ad rectangulum *BHD* seu rectanguli *CGP* ad rectangulum *DGB* & ex ratione rectanguli *BHD* ad rectangulum *PIC*. Invento autem contactus puncto *A*, describetur Trajectoria ut in casu primo. *Q.E.F.* Capi autem potest punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter describi.

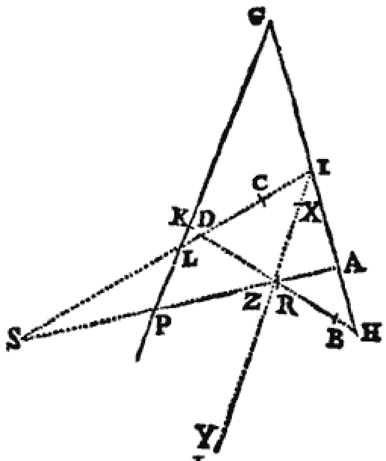


PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Per punctorum duo quævis *B*, *D* age rectam infinitam *BD* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K*. Deinde etiam per alia duo quævis *C*, *D* age infinitam *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & *S*, ut sit *HR* ad *KR* ut est media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut est media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* <79> & *LD*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K* & *H*, *I* & *L*, vel extra eadem: dein age *RS* secantem tangentes in *A*

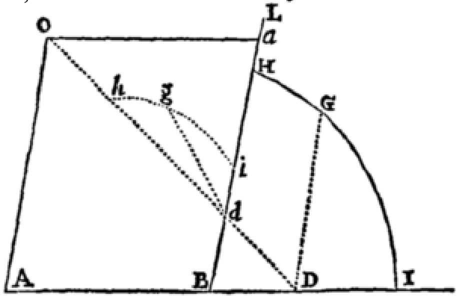
& *P*, & erunt *A* & *P* puncta contractuum. Nam si *A* & *P* supponantur esse puncta contractuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I*, in tangente alterutra *HI* situm, agatur recta *IY* tangenti alteri *KL* parallela, quæ occurrat curvæ in *X* & *Y*, & in ea sumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*: erit, ex Conicis, rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*, id est (per constructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad*: atque adeo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex Conicis) rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad*: adeoque *IZ* ad *IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P, Z* & *A* in una recta, adeoque puncta *S*, *P* & *A* sunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactuum *A* & *P* in recta *RS*. Hisce autem inventis, Trajectoria describetur ut in casu primo Problematis superioris. *Q.E.F.*



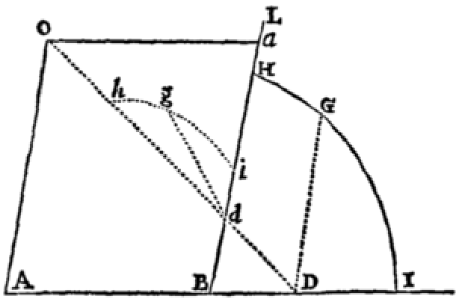
LEMMA XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Transmutanda sit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis positione datam *AB* secantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur quævis *GD*, ipsi *OA* parallela. Deinde a puncto aliquo *O* in linea *OA* dato, ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipsi *BL* occurrens in *d*, & a puncto occursus erigatur recta *dg*, datum quemvis angulum cum recta *BL* continens, atque eam habens rationem ad *Od* quam habet *GD* ad *OD*; & erit *g* punctum in figura nova *hgi* puncto *G* respondens. Eadem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figura novæ. <80> Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratia nominemus *DG* ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; *AD* abscissam primam, *ad* abscissam novam; *O* polum, *OD* radium abscindentem, *OA* radium ordinatum primum, & *Oa* (quo parallelogrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.



Dico jam quod, si punctum *G* tangit rectam lineam positione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam positione datam. Si punctum *G* tangit Conicam sectionem, punctum *g* tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic Circulum annumero. Porro si punctum *G* tangit Lineam tertii ordinis Analytici, punctum *g* tanget Lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum: Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis Analytici quas puncta *G, g* tangunt. Etenim ut est *ad* ad *OA* ita sunt *Od* ad *OD*, *dg* ad *DG*, & *AB* ad *AD*; adeoque *AD* æqualis est $\frac{OA \times AB}{\text{ad}}$, & *DG* æqualis est $\frac{OA \times dg}{\text{ad}}$. Jam si punctum *G* tangit rectam Lineam, atque adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam *AD* & ordinatam *DG* habetur, indeterminatæ illæ *AD* & *DG* ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{\text{ad}}$ pro *AD*, & $\frac{OA \times dg}{\text{ad}}$ pro *DG*, producetur æquatio nova, in qua abscissa nova *ad* & ordinata nova *dg* ad unicam tantum dimensionem ascendent, atque adeo quæ designat Lineam rectam. Sin *AD* & *DG* (vel earum alterutra) ascendebant ad duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem *ad* & *dg* ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ *ad*, *dg* in æquatione secunda & *AD*, *DG* in prima ascendent semper ad eundem dimensionum numerum, & propterea Lineæ, quas puncta *G, g* tangunt, sunt ejusdem ordinis Analytici.



<81>

Dico præterea quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam translata tanget lineam illam curvam in figura nova: & contra. Nam si Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata accedent ad invicem & coibunt in figura nova, atque adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur simul, evadent curvarum tangentes in figura utraque. Componi possent harum assertionum Demonstrationes more magis Geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum a quibus conflatur intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo, lineam quamvis rectam quæ per concursum convergentium transit: id adeo quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ sunt quæ ad punctum infinite distans tendunt. Postquam autem Problema solvitur in figura nova, si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur solutio quæsita.

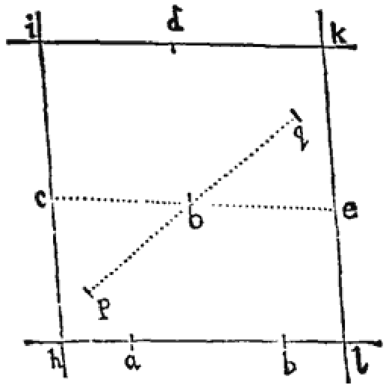
Utile est etiam hoc Lemma in solutione Solidorum Problematum. Nam quoties duæ sectiones Conicæ obvenerint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmutare licet aerum alterum, si Hyperbola sit vel Parabola, in Ellipsin: deinde Ellipsis facile mutatur in Circulum. Recta item & sectio Conica in constructione Planorum Problematum, vertuntur in Rectam & Circulum.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam describere quæ per data duo puncta transibit & rectas tres continget positione datas.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per Lemma superius, in figuram novam. In <82> hac figura tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo transeunti. Sunto *hi, kl* tangentes illæ duæ parallelæ, *ik* tangens tertia, & *hl* recta huic parallela transiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ Conica sectio in hac figura nova transire debet, & parallelogrammum *hikl* complens. Secentur rectæ *hi*, *ik*, *kl* in *c*, *d*, *e*, ita ut sit *hc* ad latus quadratum rectanguli *ahb*, *ic* ad *id*, & *ke* ad *kd* ut est summa rectarum *hi* & *kl* ad summam trium linearum quarum prima est recta *ik*, & alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum *ahb* & *alb*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex Conicis, sunt *hc* quadratum ad rectangulum *ahb*, & *ic* quadratum ad *id* quadratum, & *ke* quadratum ad *kd* quadratum, & *el* quadratum ad rectangulum *alb* in eadem ratione; & propterea *hc* ad latus quadratum ipsius *ahb*, *ic* ad *id*, *ke* ad *kd*, & *el* ad latus quadratum ipsius *alb* sunt in subduplicata illa ratione, & composite, in data ratione omnium antecedentium *hi* & *kl* ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli *ahb* & recta *ik* & latus quadratum rectanguli *alb*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inversas operationes Lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per casum Probl. XIV, describetur

Trajectoria. *Q.E.F.* Ceterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, Problema impossibile est.



PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

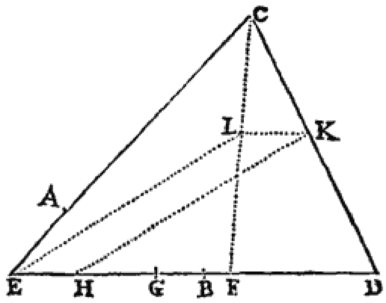
Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infini <83> ta, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per Lem. XXII) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitque *p* punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum *O* agatur *pq*, & existente *Oq* æquali *Op*, erit *q* punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis XXII operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Prob. XVII. *Q.E.F.*

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ AC, BD *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* CD, *qua puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione data in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in recta positione data.*

Concurrant enim rectæ *AC*, *BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut est *BD* ad *AC*, sitque *FD* semper æqualis datæ *EG*; & erit ex constructione *EC* ad *GD*, hoc est, ad *EF* ut *AC* ad *BD*, adeoque in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum *EFC*. Secetur *CF* in *L* ut sit *CL* ad *CF* in ratione *CK* ad *CD*; &, datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum *EFL*; proindeque punctum *L* locabitur in recta *EL* positione data. Junge *LK*, & similia erunt triangula *CLK*, *CFD*; & ob datam *FD* & datam rationem *LK* ad *FD*, dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*, & erit semper *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi illius latere positione dato *HK*. *Q.E.D.*

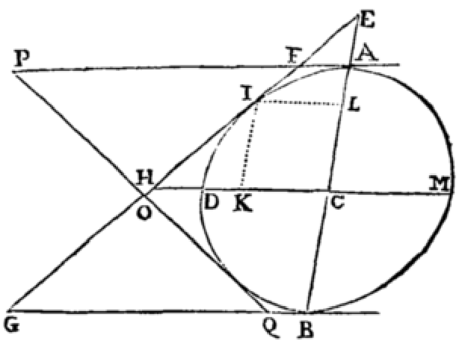


<84>

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque Conisectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod Sectionis semidiameter hisce duabus parallela, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ Conisectionem *ADB* tangentes in *A* & *B; EF* recta tertia Conisectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; sitque *CD* semidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod *AF*, *CD*, *BG* sunt continue proportionales.



Nam si diametri conjugatæ, *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H*, seque mutuo secent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; erit, ex natura Sectionum Conicarum, ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *LC*, & ita divisim *EC-CA* ad *CA-CL*, seu *EA* ad *AL*, & composite *EA* ad *EA+AL* seu *EL* ut *EC* ad *EC+CA* seu EB; adeoque (ob similitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*) *AF* ad *LI* ut *CH* ad *BG*. Est itidem, ex natura Sectionum Conicarum *LI* (seu *CK*) ad *CD* ut *CD* ad *CH*; atque, adeo ex æquo perturbate, *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, seque mutuo secent in *O*; erit (ex æquo perturbate) *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, & divisim ut *FP* ad *GQ*, atque adeo ut *FO* ad *OG*.

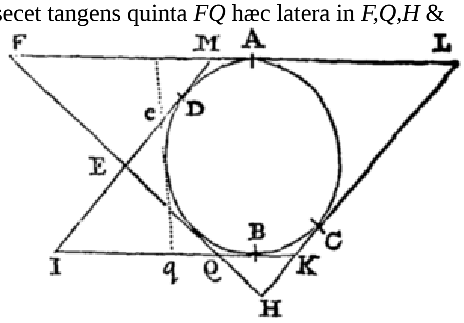
Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ* per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum Figuræ & puncta contactuum *A*, *B* transeuntem.

<85>

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant Sectionem quamcunque Conicam, & abscindatur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium, est ad abscissarum aletram.

Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* sectionem Conicam in *A*,*B*,*C*,*D*, & secet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F*,*Q*,*H* & *E*; sumantur autem laterum *MI*, *KI* abscissæ *ME*, *KQ*, vel laterum *KL*, *ML* abscissæ *KH*, *MK*: dico quod sit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*, & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per Corollarium Lemmatis superioris, est *ME* ad *EI* ut (*AM* seu) *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q.E.D.* Item *KH* ad *HL* ut (*BK* seu) *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q.E.D.*



Corol. 1. Hinc si datur parallelogramum *IKLM*, circa datam Sectionem Conicam descriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$.

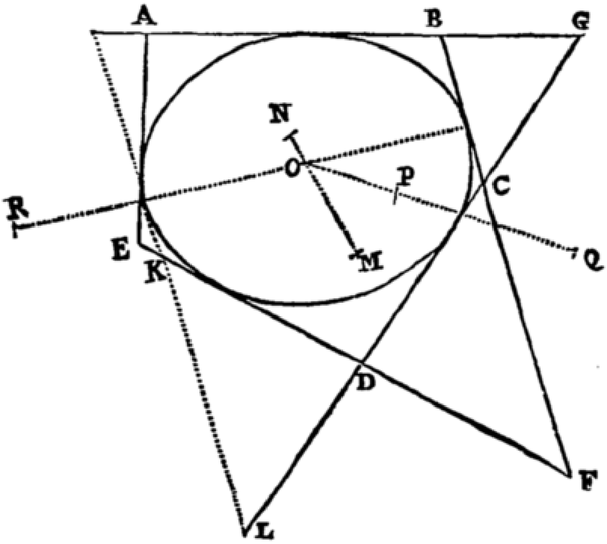
Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens *eq* tangentibus *KI*, *MI* occurrens in *q* & *e*; rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque *KQ* ad *Me* ut *Kq* ad *ME*, & divisim ut *Qq* ad *Ee*.

Corol. 3. Unde etiam si *Eq*, *eQ* jungantur & bisecentur, & recta per punca bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit *Qq* ad *Ee* ut *KQ* ad *Me*, transibit ea <86> dem recta per medium omnium *Eq*, *eQ*, *MK*; (per Lem. XXIII) & medium rectæ *MK* est centrum Sectionis.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas continget.

Dentur positione tangentes *ABG*, *BCF*, *GCD*, *FDE*, *EA*. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ *ABFE* diagonales *AF*, *BE* biseca, & (per Corol. 3. Lem. XXV) recta *MN* per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Rursus Figuræ quadrilateræ *BGDF*, sub aliis quibusvis quatuor

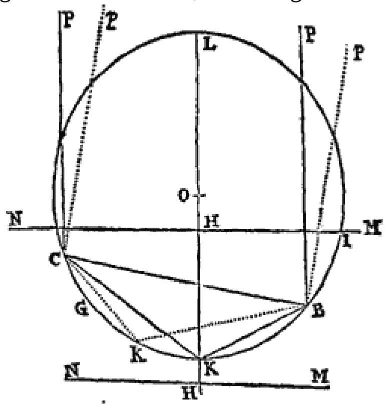


tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *BD*, *GF* biseca in *P* & *Q:* & recta *PQ* per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud *O*. Tangenti cuivis *BC* parallelam age *KL*, ad eam distantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur, & acta *KL* tanget Trajectoriam describendam. Secet hæc tan <87> gentes alias quasvis duas *GCD*, *FDE* in *L* & *K*. Per harum tangentium non parallelarum *CL*, *FK* cum parallelis *CF*, *KL* concursus *C* & *K*, *F* & *L* age *CK*, *FL* concurrentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta secabit tangentes parallelas *CF*, *KL* in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per 1. Probl. XIV. Trajectoriam describere. *Q.E.F.*

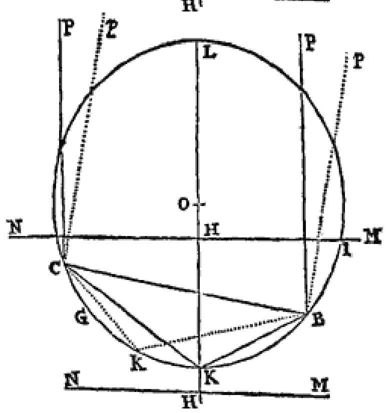
Scholium.

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Asymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atque constructiones Problematis XIV & Casus primi Problematis XV vertentur in constructiones Problematum ubi Asymptoti dantur.

Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In constructione & figura Lemmatis XXI, fac ut angulorum mobilium *PBN*, *PCN* crura *BP*, *CP*, quorum concursu Trajectoria describebatur, sint sibi invicem parallela, eumque servantia situm revolvantur circa polos suos *B*, *C* in figura illa. Interea vero describant altera angulorum illorum crura *CN*, *BN*, concursu suo *K* vel *k*, Circulum *IBKGC*. Sit Circuli hujus centrum *O*. Ab hoc centro ad Regulam *MN*, ad quam altera illa crura *CN*, *BN* interea concurrebant <88> dum Trajectoia describebatur, demitte normalem *OH* Circulo occurrentem in *K* & *L*. Et ubi crura illa altera *CK*, *BK* concurrunt ad punctum illud *K* quod Regulæ propius est, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius *L*. Unde si detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.



Axium vero quadrata sunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituantur poli *C*, *B*, tertium dabit angulos mobiles *PCK*, *PBK*; his autem datis describi potest Circulus *I B K G C*. Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, adeoque ipsa *OH*. Centro *O* & intervallo *OH* describe alium circulum, & recta quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum *CK*, *BK*, ubi crura prima *CP*, *BP* concurrunt ad quartum datum punctum erit Regula illa *MN* cujus ope Trajectoria describetur. Unde etiam vicissim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis Sectione Conica inscribi potest.



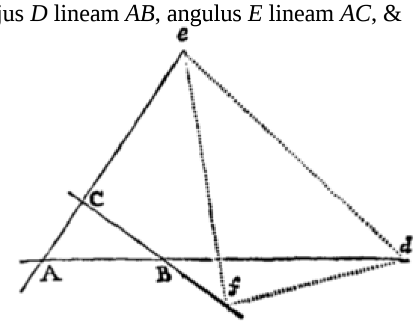
Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ specie datæ datis punctis & tangentibus, describi possunt. Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam Conisectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam Conisectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

<89>

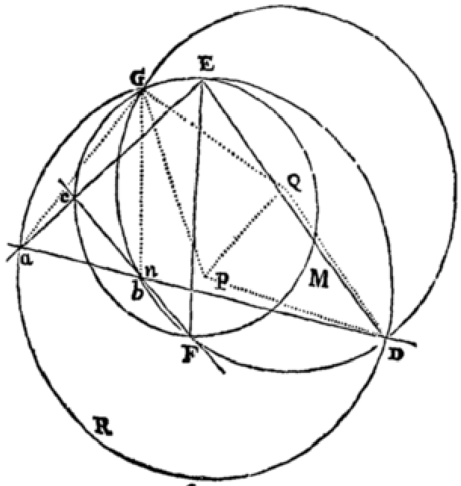
LEMMA XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF* describe tria circulorum segmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales respective. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF* ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in *G*, sintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* describe circulum, qui secet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* secans circulum secundum *DFG* in *b*, tum *aE* secans cir <90> culum tertium *EMF* in *c*. Et compleatur figura *ABCdef* similis & æqualis figuræ *abcDEF*. Dico factum.



Agatur enim *Fc* ipsi *aD* occurrens in *n*, & jungantur *aG*, *bG*, *QG*, *QD*, *PD*. Ex constructione est angulus *EaD* æqualis angulo *CAB*, & angulus *acF* æqualis angulo *ACB*, adeoque triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* seu *FnD* angulo *ABC*, adeoque angulo *FbD* æqualis est; & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, qui dimidius est anguli ad centrum *GPD*, æqualis est angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQP*, qui dimidius est complementi anguli ad centrum *GQD*, æqualis est complemento ad duos rectos anguli circumferentiam *GbD*, adeoque æqualis angulo *Gba*; suntque ideo triangula *GPQ*, *Gab* similia; & *Ga* est ad *ab* ut *GP* ad *PQ*; id est (ex constructione) ut *Ga* ad *AB*. Æquantur itaque *ab* & *AB*; & propterea triangula *abc*, *ABC*, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde, cum tangant insuper trianguli *DEF* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc* respective, compleri potest Figura *ABCdef* Figuræ *abcDEF* similis & æqualis, atque eam complendo solvetur Problema. *Q.E.F.*

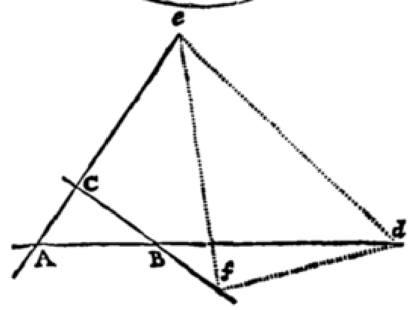


<91>

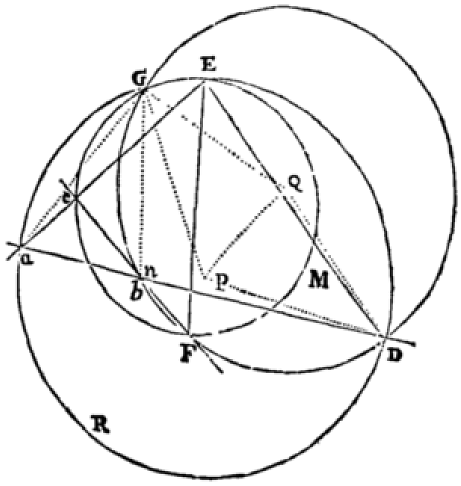
Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe Triangulum *DEF*, puncto *D* ad latus *EF* accedente, & lateribus *DE*, *DF* in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *DE*, rectis positione datis *AB*, *AC*, & pars data *DF* rectis positione datis *AB*, *BC* interponi debet; & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur Problema.

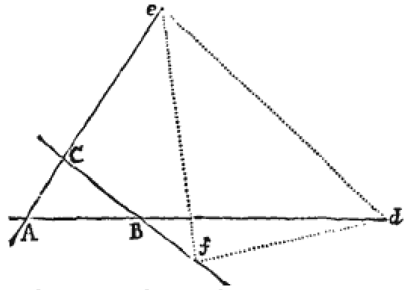
PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

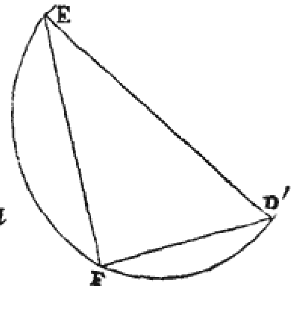
Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.



Describenda sit Trajectoria quæ sit similis & æqualis Lineæ curvæ *DEF*, quaque a rectis tribus *AB*, *AC*, *BC* positione dais, in







partes datis hujus partibus *DE* & *EF* similes & æquales secabitur.

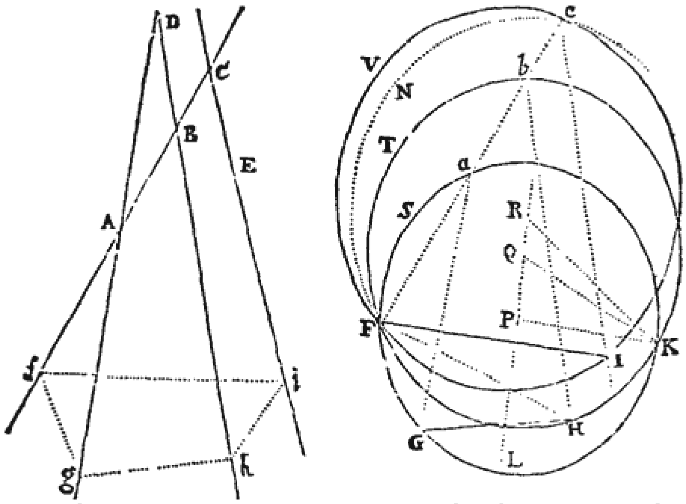
Age rectas *DE, EF, DF*, & trianguli hujus *DEF* pone angulos *D, E, F* ad rectas illas positione datas (per Lem. XXVI) Dein circa triangulum describe Trajectoriam Curvæ *DEF* similem & æqualem. *Q.E.F.*

<92>

LEMMA XXVII.

Trapezium specie datum describere cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistent.

Dentur positione rectæ quatuor *ABC, AD, BD, CE*, quarum prima secet secundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & describendum sit Trapezium *fghi* quod sit Trapezio *FGHI*



simile, & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC*, cæterique anguli *g, h, i* cæteris angulis datis *G, H, I* æquales tangant cæteras lineas *AD, BD, CE* respective. Jungatur *FH* & super *FG, FH, FI* describantur totidem circulorum segmenta *FSG, FTH, FVI*; quorum primum *FSG* capiat angu <93> lum æqualem angulo *BAD*, secundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBD*; ac tertium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum *FG, FH, FI*, ut literarum *FSGF* idem sit ordo circularis qui literarum *BADB*, utque literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBDC*, & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos integros, sitque *P* centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum secundi *FTH*. Jungatur & utrinque producatur *PQ*, & in ea capiatur *QR* in ea ratione ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P, Q, R* idem sit ordo atque literarum *A, B, C*: centroque *R* & intervallo *RF* describatur circulus quartus *FNc* secans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* secans circulum primum in *a* & secundum in *b*. Agantur *aG, bH, cI*, & Figuræ *abcFGHI* similis constituatur Figura *ABCfghi*: Eritque Trapezium *fghi* illud ipsum quod constituere oportebat.

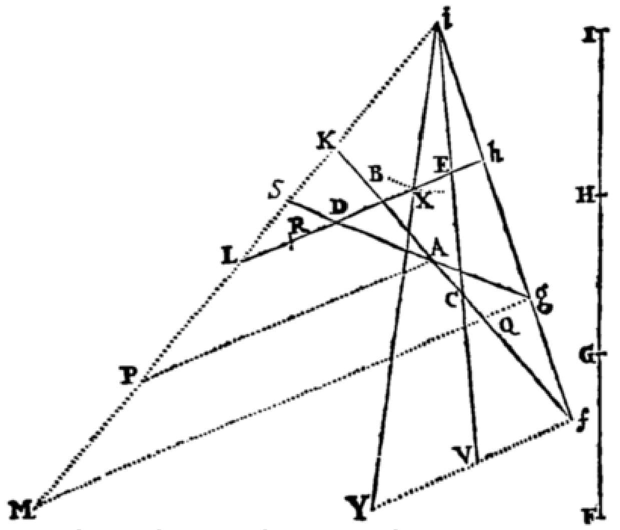
Secent enim circuli duo primi *FSG, FTH* se mutuo in *K*. Jungantur *PK, QK, RK, aK, bK, cK* & producatur *QP* ad*L*. Anguli ad circumferentias *FaK, FbK, FcK* sunt semisses angulorum *FPK, FQK, FRK* ad centra, adeoque angulorum illorum dimidiis *LPK, LQK, LRK* æquales. Est ergo Figura *PQRK* Figuræ *abcK* æquiangula & similis, & propterea *ab* est ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id est, ut *AB* ad *BC*. Angulis insuper *FaG, FbH, FcI* æquantur *fAg, fBh, fCi* per constructionem. Ergo Figuræ *abcFGHI* Figura similis *ABCfghi* compleri potest. Quo facto Trapezium *fghi* constituetur simile Trapezio *FGHI* & angulis suis *f,g,h,i* tanget rectas *ABC, AD, BD, CE*. *Q.E.F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli *FGH, GHI* usque eo, ut rectæ *FG, GH, HI* in directum jaceant, & in hoc casu construendo Problema, ducetur recta *fghi* cujus partes *fg, gh, hi*, rectis quatuor positione datis *AB* & *AD, AD* & *BD, BD* & *CE* interjectæ, erunt ad invicem ut linea *FG, GH, HI*, eundemque servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditius.

<94>

Producantur *AB* ad *K*, & *BD* ad *L*, ut sit *BK* ad *AB* ut *HI* ad *GH*; & *DL* ad *BD* ut *GI* ad *FG*; & jungatur *KL* occurrens rectæ *CE* in *i*. Producatur *iL* ad *M*, ut sit *LM* ad *iL* ut *GH* ad *HI*, & agatur tum *MQ* ipsi *LB* parallela rectæque *AD* occurrens in *g*, tum *gi* secans *AB, BD* in *f, h*. Dico factum.

Secet enim *Mg* rectam *AB* in *Q*, & *AD* rectam *KL* in *S*, & agatur *AP*, quæ sit ipsi *BD* parallela & occurat *iL* in *P*, & erunt *Mg* ad *Lh* (*gi* ad *hi, Mi* ad *Li, GI* ad *HI, AK* ad *BK*) & *AP* ad *BL* in eadem ratione. Secetur *DL* in *R* ut sit



DL ad *RL* in eadem illa ratione, & ob proportionales *gS* ad *gM*, *AS* ad *AP*, & *DS* ad *DL*; erit ex æquo ut *gS* ad *Lh* ita *AS* ad *BL* & *DS* ad *RL*; & mixtim, *BL-RL* ad *Lh-BL* ut *AS-DS* ad *gS-AS*. Id est *BR* ad *Bh* ut *AD* ad *Ag*, adeoque ut *BD* ad *gQ*. Et vicissim *BR* ad *BD* ut *Bh* ad *gQ*, seu *fh* ad *fg*. Sed ex constructione linea *BL* eadem ratione secta fuit in *D* & *R* atque linea *FI* in *G* & *H*: ideoque est *BR* ad *BD* ut *FH* ad *FG*. Ergo *fh* est ad *fg* ut *FH* ad *FG*. Cum igitur sit etiam *gi* ad *hi* ut *Mi* ad *Li*, id est, ut *GI* ad *HI*, patet linas *FI*, *fi* in *g* & *h*, *G* & *H* similiter sectas esse. *Q.E.F.*

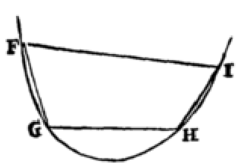
<95>

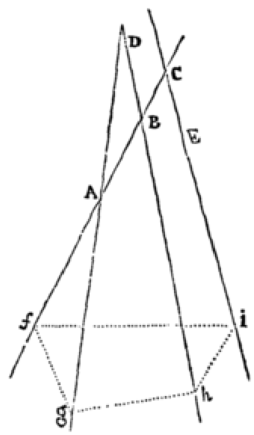
In constructione Corollarii hujus postquam ducitur *LK* secans*CE* in *i*, producere licet *iE* ad *V*, ut sit *EV* ad *Ei* ut *FH* ad *HI*, & agere *Vf* parallelam ipsi *BD*. Eodem recidit si centro *i*, intervallo *IH*, describatur circulus secans *BD* in *X*, producatur *iX* ad *Y*, ut sit *iY* æqualis *IF*, & agatur *Yf* ipsi *BD* parallela.

Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* & *Wallisius* olim excogitarunt.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.



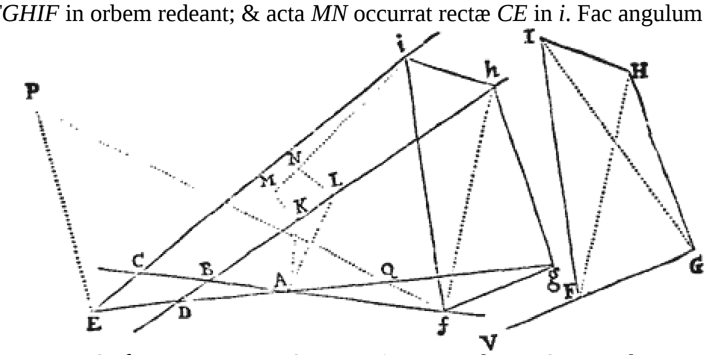


Describenda sit Trajectoria *fghi*, quæ similis sit Lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes *fg*, *gh*, *hi* illius partibus *FG*, *GH*, *HI* similes & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI*, describatur (Per Lem. XXVII.) Trapezium *fghi* quod sit Trapezio *FGHI* simile & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas positione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc Trapezium describatur Trajectoria curvæ linæ *FGHI* consimilis.

<96>

Scholium.

Construi etiam potest hoc Problema ut sequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* constituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, sitque ad *AK* ut est *HI* ad *GH*; & *LN* constituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, sitque ad *AL* ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND* eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*,



sitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *QPf*, quæ cum recta *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem sit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & si super linea *fi* eodem quoque literarum ordine constituatur Trapezium *fghi* Trapezio *FGHI* simile, & circumscribatur Trajectoria specie data, solvetur Problema.

Hactenus de Orbibus inveniendis. Superest ut Motus corporum in Orbibus inventis determinemus.

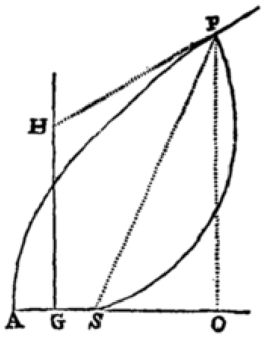
<97>

SECTIO VI.

De Inventione Motuum in Orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moti invenire locum ad tempus assignatum.



Sit *S* umbilicus & *A* vertex principalis Parabolæ, sitque $4AS \times M$ æquale area Parabolicæ *AP S*, quæ radio *SP*, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca *AS* in *G*, erigeque perpendiculum *GH* æquale 3 *M*, & Circulus centro *H*, intervallo *HS* descriptus secabit Parabolam in loco qusito *P*. Nam, demissa ad axem perpendiculari *PO* & ducta *PH*, est

$AG\,q + GH\,q \left(= HP\,q = \overline{AO - AG}\colon quad. + \overline{PO - GH}\colon quad.\right) = AO\,q + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2GH \times PO \left(= AO\,q + PO\,q - 2GAO\right) = AOq + \frac{1}{4}PO\,q$. Pro $AO\,q$ scribe $AO \times \frac{PO\,q}{4AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS \left(= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO+3AS}{6} \times PO = \frac{4AO-3SO}{6} \times PO = \text{areæ } \overline{APO - SPO}\right) = \text{areæ} APS$. Sed *GH* erat 3*M*, & inde $\frac{4}{3}HG \times AS$ est $4AS \times M$. Ergo area *APS* æqualis est abscindenæ$4AS \times M$. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc *GH* est ad *AS*, ut tempus quo corpus descripsit arcum *AP* ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem *A* & perpendiculum ad axem ab umbilico *S* erectum.

Corol. 2. Et circulo *ASP* per corpus movens perpetuo transeunte, velocitas puncti *H* est ad velocitatem quam corpus habuit <98> in vertice *A*, ut 3 ad 8; adeoque in ea etiam ratione est linea *GH* ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab *A* ad *P*, ea cum velocitate quam habuit in vertice *A*, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum *AP*. Junge *AP* & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ *GH* occurrens in *H*.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat Figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per œquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque semper ea cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra Ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet Spiralem gyris infinitis. Jam si areæ Ovalis a recta illa abscissæ incrementum per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis est, adeoque omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum Spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta Spiralem secat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua incersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, adeoque ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam Circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenitur nisi per æquationem duarum dimensionum, qua intersectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum sectionum Conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, qua omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque & propterea eadem semper concsusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere. <99> Unde etiam intersectiones Sectionum Conicarum & Curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & intersectiones duarum Curvarum tertiæ potestatis, quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. Id nisi necessario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & plusquam Solida ad Solida. Loquor hic de Curvis potestate irreducibilibus. Nam si æquatio per quam Curva definitur, ad inferiorem potestatem reduci possit: Curva non erit unica, sed ex duabus vel pluribus composita, quarum intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt. Ad eundem modum intersectiones binæ rectarum & sectionum Conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum; ternæ rectarum & Curvarum irreducibilium tertiæ potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & Curvarum irreducibilium quartæ potestatis per æquationes dimensionum quatuor, & sic in infinium. Ergo rectæ & Spiralis intersectiones numero infinitæ, cum Curva hæc sit simplex & in Curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus omnes possunt simul exhiberi. Est enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam si a polo in rectam illam secantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud una cum secante revolvatur circa polum, intersectiones Spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & Spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De Ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjgatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

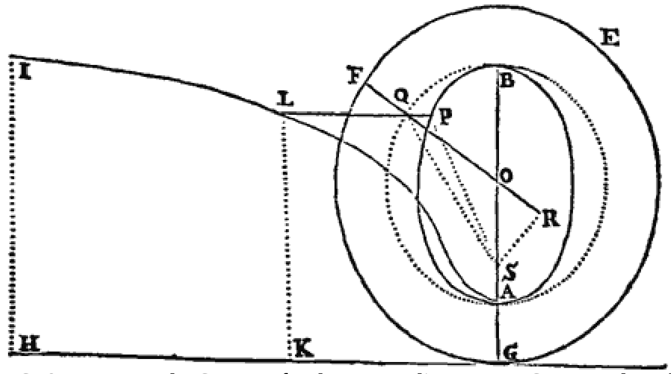
<100>

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore per æquationem finitam; & propterea per descriptionem Curvarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream iitur Ellipseos tempori proportionalem abscindo per Curvam Geometrice irrationalem ut sequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos *APB* sit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, *O* centrum, sitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G* ut sit *OG*ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque

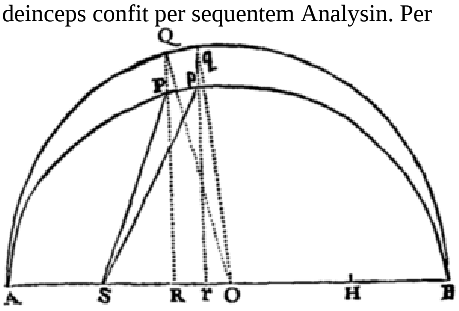


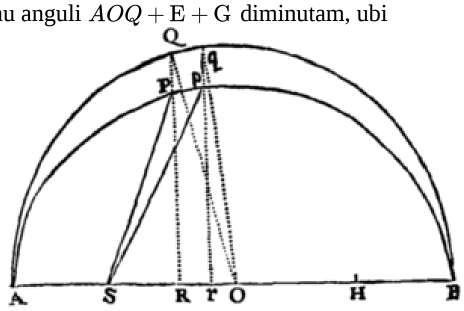
O & intervallo *OG* describe circulum *EFG*, & super regula *GH*, ceu fundo, progrediatur Rota *GEF* revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo *A* describendo Trochoidem *ALI*. <101> Quo facto, cape *GK* in ratione ad Rotæ perimetrum *GEFG*, ut est tempus quo corpus progrediendo ab *A* descripsit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens Trochoidi in *L*, & acta *LP* ipsi *KG* parallela occurret Ellipsi in corporis loco quæsito *P*.

Nam centro *O*, intervallo *OA* describatur semicirculus *AQB*, & arcui *AQ* occurrat *LP* producta in *Q*, junganturque *SQ*, *OQ*. Arcui *EFG* occurrat *OQ* in *F*, & in eandem *OQ* demittatur perpendiculum *SR*. Area *APS* est ut area *AQS*, id est, ut differentia inter sectorem *OQA* & triangulum *OQS*, sive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, hoc est, ob datam $\frac{1}{2}OQ$, ut differentia inter arcum *AQ* & rectam *SR*, adeoque (ob æqualitatem datarum rationum *SR* ad sinum arcus *AQ*, *OS* ad *OA*, *OA* ad *OG*, *AQ* ad *GF*, & divisim *AQ*-*SR* ad *GF*- sin. arc. *AQ*) ut *GK* differentia inter arcum *GF* & sinum arcus *AQ*. *Q.E.D.*

Scholium.

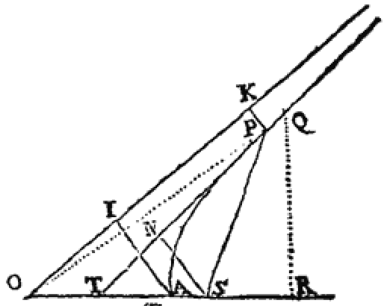
Cæterum, cum difficilis sit hujus Curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57,29578, quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia *SH* ad Ellipseos diametrum *AB*; tum etiam longitudo quædam *L*, quæ sit ad radium in eadem ratione inverse. Quibus semel inventis, Problema deinceps confit per sequentem Analysin. Per constructionem quamvis (vel utcunque conjecturam faciendo) cognoscatur corporis locus *P* proximus vero ejus loco *p*. Demissaque ad axem Ellipseos ordinatim applicata *PR*, ex proportione diametrorum Ellipseos, dabitur Circuli circumscripti *AQB* ordinatim applicata *RQ*, quæ sinus est anguli *ACQ* existente *AO* radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus tempori porpor <102> tionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos, ut est tempus quo corpus descripsit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli *AOQ* ad radium, & angulus E ad angulum $\mathrm{N} - AOQ + \mathrm{D}$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli *AOQ* diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum augulus F ad angulum B, ut est sinus anguli $ACQ + \mathrm{E}$ ad radium, tum angulus G ad angulum $\mathrm{N} - AOQ - \mathrm{E} + \mathrm{F}$ ut est longitudo L ad Longitudinem eandem cosinu anguli $AOQ + \mathrm{E}$ diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli $ACQ + \mathrm{E} + \mathrm{G}$ ad radium; & angulus I ad angulum N-*AOQ*-E-G+H, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $AOQ + \mathrm{E} + \mathrm{G}$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus *AOq* æqualis angulo *AOQ*+E+G+I &c. et ex cosinu ejus *Or* & ordinata *pr*, quæ est ab sinum ejus *qr* ut Ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. Siquando angulus N-*AOQ*+D negativus est, debet signum + ipsius E ubique mutari in -, & signum - in +. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I, ubi anguli N-*AOQ*-E+F, & N-*AOQ*-E-G+H negativi prodeunt. Convergit autem series infinita *AOQ*+E+G+I+&c. quam celerrime, adeo ut vix uniquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area *APS* sit ut differentia inter arcum *AQ* & rectam ab umbilico *S* in Radium *OQ* perpendiculariter demissam.



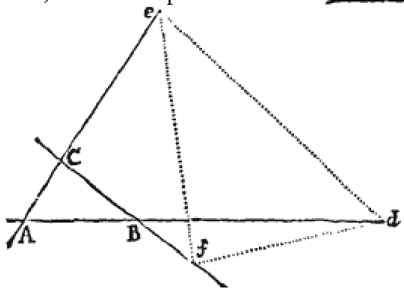


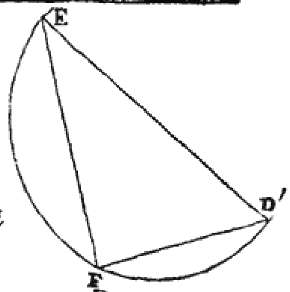
Non dissimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus Centrum *O*, Vertex *A*, Umbilicus *S* & Asymtotos *OK*. Cog <103> noscatur quantitas areæ *APS* tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de positione rectæ *SP*, quæ aream illam *APS* abscindat veræ proximam. Jungatur *OP*, & ab *A* & *P* ad Asymptoton agantur *AI*, *PK* Asymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area *AIKP*, eique æqualis area *OPA*, quæ subducta de triangulo *OPS* relinquet aream abscissam *APS*. Applicando areæ *A* & abscissæ *APS* differentiam $2APS - 2A$ vel $2A - 2APS$ ad lineam *SN*, quæ ab umbilico *S* in tangentem *PT* perpendicularis est, orietur longitudo chordæ *PQ*. Inscribatur autem chorda illa *PQ* inter *A* & *P*, si area abscissa *APS* major sit area abscindenda A, secus ad puncti *P* contrarias partes: & punctum *Q* erit locus corporis accuratior. Et computatione repetita invenietur idem accuratior in perpetuum.

Atque his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum usibus Astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus *AO*, *OB*, *OD* semiaxibus Ellipseos, & L ipsius latere recto, ac D differentia inter semiaxem minorem *OD* & lateris recti semissem $\frac{1}{2}$L; quære tum angulum Y, cujus finus sit ad Radium ut est rectangulum sub differentia illa D, & semisumma axium *AO*+*OD* ad quadratum axis majoris *AB*; tum angulum Z, cujus finus sit ad Radium ut est duplum rectangulum sub umbilicorum distantia *SH* & differentia illa D ad triplum



quadratum semiaxis majoris *AO*. His angulis semel inventis; locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus *BP* descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V (primam medii motus æquationem) ad angulum Y (æquationem maximam primam) ut est sinus dupli anguli T ad Radium; <104> atque angulum X (æquationem secundam) ad angulum Z (æquationem maximam secundam) ut est cubus sinus anguli T ad cubum Radii. Angulorum T, V, X vel summæ T+X+V, si angulus T recto minor est, vel differentiæ T+X-V, si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP* (motum medium æquatum;) &, si *HP* occurrat Ellipsi in *P*, acta *SP* abscindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X (in minutis secundis, si placet, positorum) figuras duas tersve primas invenire sufficit. Sed & satis accurata est ad Theoriam Planetarum. Nam in Orbe vel Martis ipsius,cujus Æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *BSP* & distantia *SP* in promptu sunt per *Wardi* methodum notissimam.





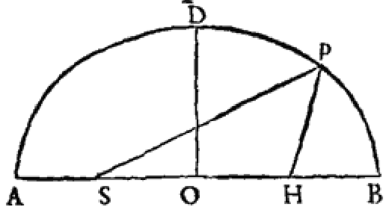
Hactenus de Motu corporum in lineis Curvis. Fieri autem potest ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi Motus spectant, pergo jam exponere.

<105>

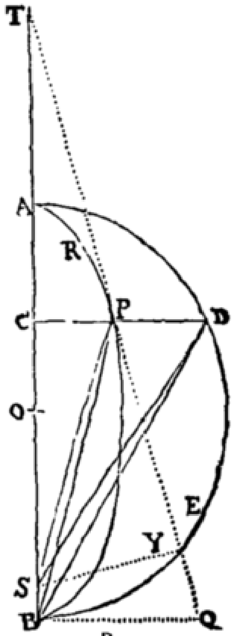
SECTIO VII.

De Corporum Ascensu & Descensu Rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.



Posito quod Vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, Spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus describit.



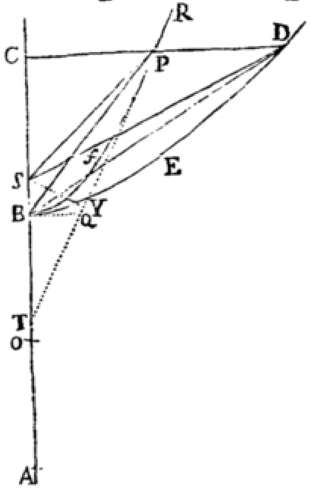
Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter describet id, per Corol. 1. Prop. XIII, Sectionem aliquam Conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit Sectio illa Conica *ARPB* & umbilicus *S*. Et primo si Figura illa Ellipsis est, super hujus axe majore *AB* describatur Semicirculus *ADB*, & per corpus decidens transeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actisque *DS, PS* erit area *ASD* areæ *ASP* atque adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo Ellipseos, & semper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: &, Orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, descendet corpus in ecta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque Spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q.E.I.*

<106>

Cas. 2. Si Figura illa *RPB* Hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem *AB* Hyperbola rectangula *BED:* & quoniam areæ *CSP, CBfP, SPfB* sunt ad areas *CSD, CBED, SDEB*, singulæ ad singulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis est tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus *PB* cum recta *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto descensu describit lineam *CB. Q.E.I.*

Cas. 3. Et simili argumento si figura *RPB* Parabola est, & eodem vertice principali *B* describatur alia Parabola *BED*, quæ semper maneat data interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea *CB*; fiet segmentum Parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* descendet ad centrum *S* vel *B*. *Q.E.I.*

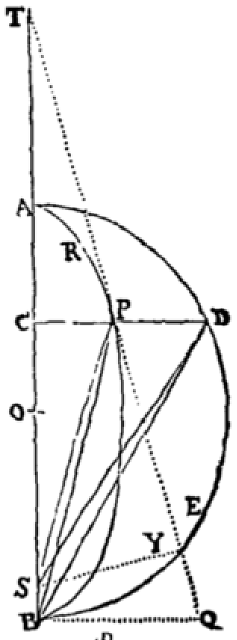
PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.



Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *Circulum describentis, in subduplicata ratione quam* AC, *distantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad Figuræ semidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$AB.

Bisecetur *AB*, communis utriusque Figuræ *RPB, DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT* quæ tangat Figuram *RPB* in *P*,atque <107> etiam secet communem illam diametrum *AB* (si opus est productam) in *T*; sitque *SY* ad hanc rectam, & *BQ* ad hanc diametrum perpendicularis, atque Figuræ *RPB* latus rectum ponatur L. Constat per Cor. 9. Prop. XVI, quod corporis in linea *RPB* circa centrum *S* moventis velocitas in loco quovis *P* sit ad velocitatem corporis intervallo *SP* circa idem centrum Circulum describentis in subduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad *SY* quadratum. Est autem ex Conicis *ACB* ad *CPq* ut 2*AO* ad L, adeoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad *SY quad*. Porro ex Conicis est *CO* ad *BO* ut *BO* ad *TO*, & composite vel divisim ut *CB* ad *BT*. Unde dividendo vel componendo fit *BO*-vel+*CO* ad *BO* ut *CT* ad *BT*, id est *AC* ad *AO* ut *CP* ad *BQ*; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum Figuræ *RPB* latitudo *CP*, sic ut punctum *P* coeat cum puncto, *C*, punctumque *S* cum puncto *B*, & linea *SP* cum linea *BC*, lineaque *SY* cum linea *BQ*; & corporis jam recta descendentis in linea *CB* velocitas fiet ad velocitatem corporis centro *B* intervallo *BC* Circulum describentis, in subduplicata ratione ipsius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad *SYq*, hoc est (neglectis æqualitatis rationibus *SP* ad *BC* & *BQq* ad *SYq*) in subduplicata ratione *AC* ad *AO* sive $\frac{1}{2}AB$. *Q.E.D.*

Corol. 1. Punctis *B* & *S* coeuntibus, fit *TC* and *TS* ut *AC* ad *AO*.



Corol. 2. Corpus ad datam a centro distantiam in Circulo quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam a centro distantiam.

<108>

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

Si Figura BED *Parabola est, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli sui* BC *Circulum uniformiter describere potest.*

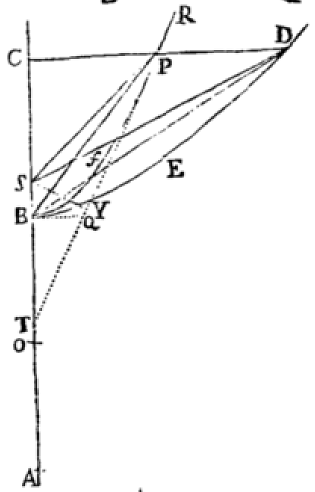
Nam corporis Parabolam *RPB* circa centrum *S* describentis velocitas in loco quovis *P* (per Corol. 7. Prop. XVI) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli *SP* Circulum circa idem *S* uniformiter describentis. Minuatur Parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus Parabolicus *PfB* cum recta *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & interuallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & constabit Propositio. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

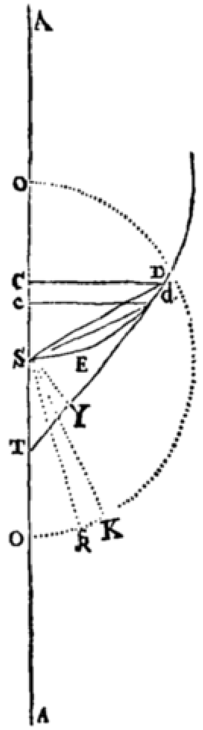
Iisdem positis, dico quod area Figuræ DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti Figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*

Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo describere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in Circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* describere. Erigantur perpendicula *CD, cd* occurrentia Figuræ *DES* in *D, d*. Jungantur *SD, Sd, SK, Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *SY*.

<109>



Cas. 1. Jam si Figura *DES* Circulus est vel Hyperbola, bisecetur ejus transversa diameter *AS* in *O*, & erit *SO* dimidium lateris recti. Et quoniam est *TC* ad *TD* ut *Cc* ad *Dd*, & *TD* ad *TS* ut *CD* ad *SY*, erit ex æquo *TC* ad *TS* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed per Corol. Prop. XXXIII, est *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*, puta si in coitu punctorum *D, d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo *AC* est ad (*AO* seu) *SK* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis descendentis velocitas in *C* est ad velocitatem orporis Circulum intervallo *SC* circa centrum *S* describentis in subduplicata ratione *AC* ad (*AO* vel) *SK* (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis Circulum *OKk* in subduplicata ratione *SK* ad *SC* per Cor. 6. Prop. IV, & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola *Cc* ad arcum *Kk* in subduplicata ratione *AC* ad *SC*, id est in ratione *AC* ad *CD*. Quare est $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea *AC* ad *SK* ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$> æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2}SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2}SY \times Dd$, id est area *KSk* æqualis areæ *SDd*. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ *KSk*, *SDd*, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. *Q.E.D.*



Cas. 2. Quod si Figura *DES* Parabola sit, invenietur esse ut supra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut *TC* ad *TS*, hoc est ut 2 ad 1, adeoque $\frac{1}{4}CD \times Cc$ æqualem esse $\frac{1}{2}SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in *C* æqualis est velocitati qua Circulus intervallo $\frac{1}{2}SC$ uniformiter describi possit. (per Prop. XXXIV) Et hæc velocitas ad velocitatem qua Circulus radio *SK* describi possit, hoc est, lineola *Cc* ad arcum *Kk* (per Corol. 6. Prop. IV) est in subduplicata ratione *SK* ad $\frac{1}{2}Sc$, id est, in ratione *SK* ad $\frac{1}{2}CD$. Quare est $\frac{1}{2}SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4}CD \times Cc$, adeoque æquale $\frac{1}{2}SY \times Dd$, hoc est, area *KSk* æqualis areæ *SDd*, ut supra. *Q.E.D.*

<110>

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A *cadentis determinare Tempora descensus.*

Super diametro *AS* (distantia corporis a centro sub initio) describe Semicirculum *ADS*, ut & huic æqualem Semicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem constitue sectorem *OSK*. Patet per Prop. XXXV, quod corpus cadendo describet spatium *AC* eodem Tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum *S* gyrando, describere potest arcum *OK*. *Q.E.F.*

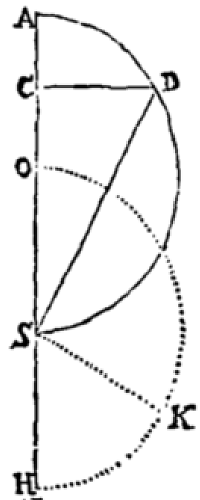
PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire Tempora ascensus vel descensus.

Exeat corpus de loco dato *G* secundum lineam *ASG* cum velocitate quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in Circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi posset, cape *GA* ad $\frac{1}{2}AS$. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite distat, quo in casu Parabola vertice *S*, axe *SC*, latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu Circulus, posteriore Hyperbola rectangula super diametro *SA* describi debet. Patet per Prop. XXXIII. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur Circulus *HKk*, & ad corporis ascendentis vel descendentis loca duo quævis *G, C*, erigantur perpendicula *GI, CD* occurrentia Conicæ Sectioni vel Circulo in *I* ac *D*. <111> Dein junctis *SI, SD*, fiant segmentis *SEIS, SEDS* sectores *HSK, HSk* æquales, & per Prop. XXXV, corpus *G* describet spatium *GC* eodem Tempore quo corpus *K* describere potest arcum *Kk*. *Q.E.F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Posito quod Vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum a centro, dico quod cadentium Tempora, Velocitates & spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respective proportionalia.



Cadat corpus de loco quovis *A* secundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, describatur Circuli quadrans *AE*, sitque *CD* sinus rectus arcus cujusvis *AD*; & corpus *A*, Tempore *AD*, cadendo describet Spatium *AC*, inque loco *C* acquriet Velocitatem *CD*.

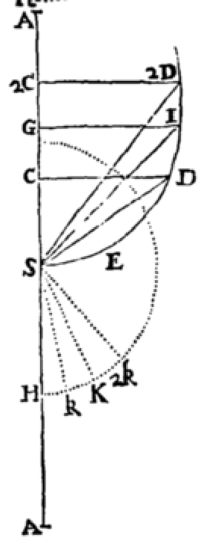
Demonstratur eodem modo ex Propositione X, quo Propositio XXXII, ex Propositione XI demonstrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia sunt Tempora quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt Tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. IV.) æquantur.

<112>

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.



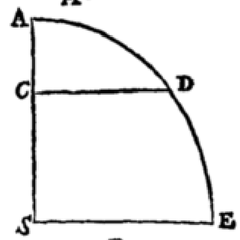
Posita cujuscunque generis Vi centripeta, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel descendentis tum Velocitas in locis singulis, tum Tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deque loco ejus *E* erigatur semper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipso motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis Velocitas in loco quovis *E* ut areæ curvilineæ *ABGE* latus quadratum. *Q.E.I.*

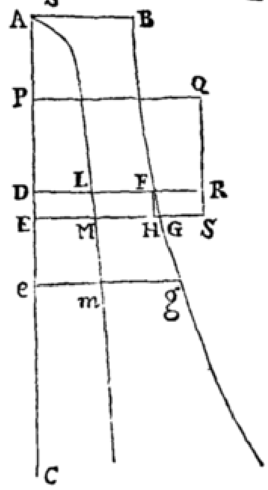
In *EG* capiatur *EM* lateri quadrato areæ *ABGE* reciproce proportionalis, & sit *ALM* linea curva quam punctum *M*perpetuotangit, & erit Tempus quo corpus cadendo describit lineam *AE* ut area curvilinea *ALME. Q.E.I.*

Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, sitque *DLF* locus lineæ *EMG* ubi corpus versabatur in *D*; & si ea sit vis centripeta, ut area *ABGE* latus quadratum sit ut descendentis velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in *D* & *E* scribantur V & V+I, erit area *ABFD* ut VV, & area *ABGE* ut VV + 2VI+II,, & divisim area *DFGE* ut 2VI+II, adeoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{\mathrm{2VI+II}}{DE}$, id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur,longitudo *DF* ut quantitas $\frac{\mathrm{2VI}}{DE}$, adeoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{\mathrm{I}\times\mathrm{V}}{DE}$. Est autem tempus quo <113> corpus cadendo describit lineolam *DE*, ut lineola illa directe & velocitas V inverse, estque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverse, adeoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{\mathrm{I}\times\mathrm{V}}{DE}$, hoc est, ut longitudo *DF*. Ergo Vis ipsi *DF* vel *EG* proportionalis facit corpus ea cum Velocitate descendat quæ sit ut areæ *ABGE* latus quadratum *Q.E.D.*

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* describatur, sit ut velocitas inverse adeoque ut areæ *ABFD* latus quadratum inverse; sitque *DL*, atque adeo area nascens *DLME*, ut idem latus quadratum inverse: erit tempus ut area *DLME*, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV) Tempus totum quo linea *AE* describitur ut area tota *AME*. *Q.E.D.*



Corol. 1. Si *P* sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi ui centripeta nota (qualis vulgo supponitur Gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunque cadens acquisivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ sit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *PDRQ*, eique æqualis abscindatur area *ABFD*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo *DRSE*, cum sit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut VV ad 2VI, adeoque ut $\frac{1}{2}$V ad I, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; fintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ *DF, DR*, adeoque ut areæ nascentes *DFGE, DRSE*; erunt (ex æquo) areæ totæ *ABFD, PQRD* ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.



Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque *D* data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut est latus quadratum rectanguli *PQRD* area curvilinea *DFge* vel aucti, si locus *e* est loco *D* inferior, vel diminuti, si is superior est, ad latus quadratum rectanguli solius *PQRD*, id est, ut $\sqrt{PQRD + \mathrm{vel} - DFge}$ ad $\sqrt{PQRD}$.

<114>

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex *PQRD*+vel-*DFge*, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam *PD* est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam *PE* in subduplicata ratione *PD* ad *PE*, id est (lineola *DE* jamjam nascente) in ratione *PD* ad $PD + \frac{1}{2}DE$ seu $2PD$ ad $2PD + DE$, & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam *DE* ut $2PD$ ad *DE*, adeoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream *DLME*; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam *DE* ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam *De* ut area *DLME* ad aream *DLme*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream *DLme*.

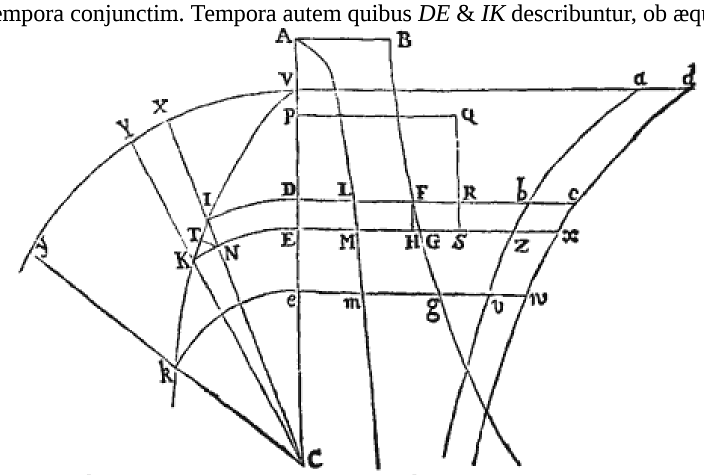
SECTIO VIII.

De Inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente Vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, suntque eorum Velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, Velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

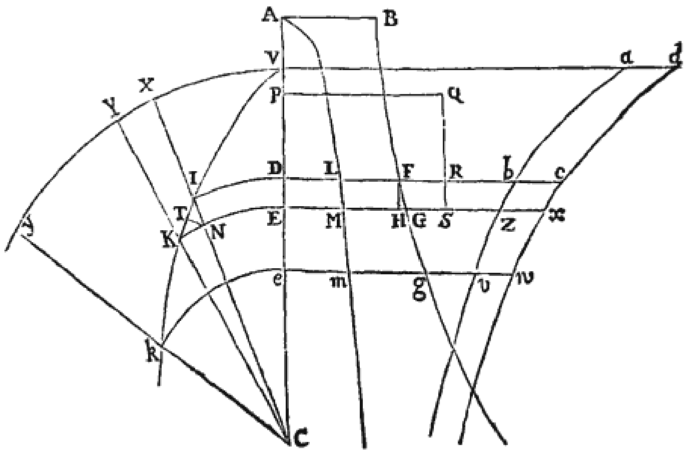
Descendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in linea curva *VIKk*. Centro *C* intervallis quibusvis describantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæque *VIK* in *I* & *K* occurentes. Jungatur *IC* occurrens ipsi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; sitque circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocita <115> tes æquales. Quoniam distantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & si vis una *IN* (per Legum Corol. 2.) resolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo secundum lineam *NT* corporis cursui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietque ipsum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera *IT*, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) sunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* describuntur, ob æqualitatem velocitatum



sunt ut viæ descriptæ *DE* & *IK*, adeoque accelerationes, in cursu corporum per lineas *DE* & *IK*, sunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id est ut *DE quad* & $IT \times IK$ *rectangulum*. Sed *rectangulum* $IT \times IK$ æquale est *IN quadrato*, hoc est, æquale *DE quadrato*; & propterea accelerationes in transitu corporum a *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur sunt cor <116> porum velocitates in *E* & *K* & eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiis. *Q.E.D.*

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si corpus vel funipendulum oscilletur, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque impedimento vasis absolute lubrici idem præstatur quod vi transversa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.



Corol. 2. Hinc etiam si quantitas P sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in Trajectoria quacunque revolvens, deque quovis Trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas A distantia corporis a centro in alio quovis Orbis puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius A dignitas quælibet $\mathrm{A}^{\mathrm{n}-1}$, cujus Index *n*-1 est numerus quilibet *n* unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{\mathrm{nP}^{\mathrm{n}} - \mathrm{nA}^{\mathrm{n}}}$, atque adeo datur. Namque velocitas ascendentis ac descendentis (per Prop. XXXIX) est in hac ipsa ratione.

<117>

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum Tempora motuum in Trajectoriis inventis.

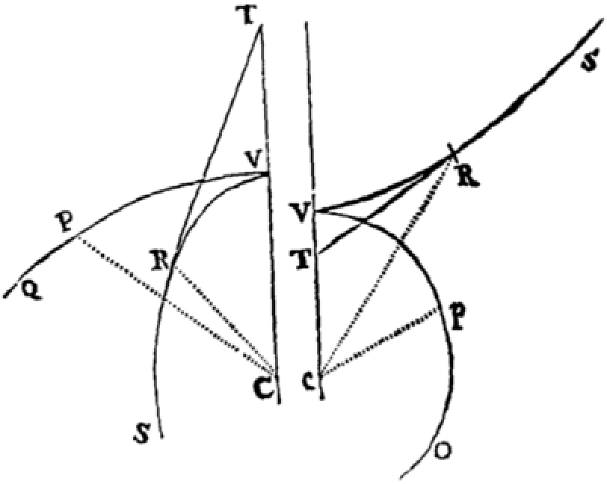
Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda sit Trajectoria *VITKk*. Detur Circulus *VXY* centro *C* intervallo quovis *CV* descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli *ID*,*KE* Trajectoriam secantes in *I* & *K* rectamque *CV* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* secantem circulos *KE*, *VY* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VXY* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab *V* per *I*, *T* & *K* ad *k*; sitque punctam *A* locus ille de qua corpus aliud cadere debet ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*; & stantibus quæ in Propositione XXXIX, lineola *IK*, dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas atque adeo ut latus quadratum areæ

ABFD, & triangulum *ICK* tempori proportionale dabitur, adeoque *KN* erit reciproce ut altitudo *IC*, id est, si detur quantitas aliqua *Q*, & altitudo *IC* nominetur A, ut $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}}$. Hanc quantitatem $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut est *IK* ad *KN*, & erit in omni casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad ZZ ut *IK q.* ad *KN q.* & divisim *ABFD*-ZZ ad ZZ ut *IN quad* ad *KN quad* adeoque $\sqrt{ABFD-\mathrm{ZZ}}$ ad (Z seu)$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}}$ ut *IN* ad *KN*, & propterea $\mathrm{A}\times KN$ æquale $\frac{\mathrm{Q}\times IN}{\sqrt{ABFD-\mathrm{ZZ}}}$. Unde cum $YX\times XC$ sit ad $\mathrm{A}\times KN$ ut *CXq* ad AA, erit rectangulum $YX\times XC$ æquale $\frac{\mathrm{Q}\times IN\times CX\ quad.}{\mathrm{AA}\sqrt{ABFD-\mathrm{ZZ}}}$. Igitur si in perpendiculo *DF* capiantur semper *Db*, *Dc* ipsis $\frac{\mathrm{Q}}{2\sqrt{ABFD-\mathrm{ZZ}}}$ & $\frac{\mathrm{Q}\times CX\ quad.}{2\mathrm{AA}\sqrt{ABFD-\mathrm{ZZ}}}$ æquales respective, & describantur curvæ lineæ *ab, cd* quas <118> puncta, *b, c* perpetuo tangunt; deque puncto *V* ad lineam *AC* erigatur perpendiculum *V a d* abscindens areas curvilineas *VDba*, *VDcd*, & erigantur etiam ordinatæ *Ez*, *Ex*: quoniam rectangulum $Db\times IN$ seu *DbzE* æquale est dimidio rectanguli $\mathrm{A}\times KN$, seu triangulo *ICK*; & rectangulum $Dc\times IN$ seu *DcxE* æquale est dimidio rectanguli $YX\times XC$, seu triangulo *XCY*; hoc est, quoniam, arearum *VDba*, *VIC* æquales semper sunt nascentes particulæ *DbzE*, *ICK*, & arearum *VDcd*, *VCX* æquales semper sunt nascentes particulæ *DcxE*, *XCY*, erit area genita *VDba* æqualis areæ genitæ *VIC*, adeoque tempori proportionalis, & area genita *VDcd* æqualis Sectori genito *VCX*. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco *V*, dabitur area ipsi proportionalis *VDba*, & inde dabitur corporis altitudo *CD* vel *CI*; & area *VDcd*, eique æqualis Sector *VCX* una cum ejus angulo *VCI*. Datis autem angulo *VCI* & altitudine *CI* datur locus *I*, in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimaeque corporum altitudines, id est Apsides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim Apsides in puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam *VIK*: id quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, adeoque ubi area *ABFD* æqualis est ZZ.

Corol. 2. Sed & angulus *KIN*, in quo Trajectoria alibi secat lineam illam *IC*, ex data corporis altitudine *IC* expedite invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut *KN* ad *IK*, id est, ut Z ad latus quadratum areæ *ABFD*.

Corol. 3. Si centro *C* & vertice principali *V* describatur Sectio quælibet Conica *VRS*, & a quovis ejus puncto *R* agatur Tangens *RT* occurrens axi infinite producto *CV* in puncto *T*; dein juncta *CR* ducatur recta *CP*, quæ æqualis sit abscissæ *CT*, angulumque *VCP* Sectori *VCR* proportionalem constituat; tendat autem ad centrum *C* Vis centripeta Cubo distantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco *V* justa cum velocitate secundum lineam rectæ *CV* perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum *P* perpetuo tangit; adeoque si Conica sectio *CVRS* Hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea Ellipsis sit, ascendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quacunque cum velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incæperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo ob <119> lique ascendere, Figura *CVRS* vel Hyperbola sit vel Ellipsis, inveniri potest Trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in data aliqua ratione. Sed &, Vi centripeta in centrifugam versa,

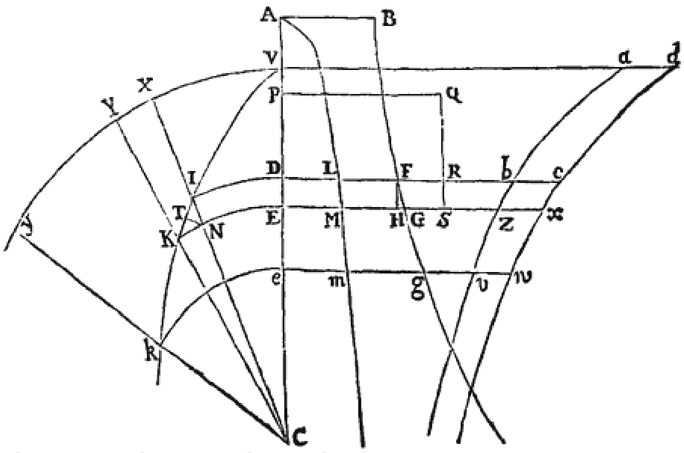


ascendet corpus oblique in Trajectoria *VPQ* quæ invenitur capiendo angulum *VCP* Sectori Elliptico *CVRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqualem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex Propositione præcedente, per Curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gratia missam facio.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Data lege Vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato data cum Velocitate secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus Propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco *I* secundum lineolam *IT*, ea cum Velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere posset in *D*: sitque hæc vis uniformis ad vim qua corpus <120> primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus versus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* describatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *ALMm, BFGg, abzv, dcxw*



ordinatim applicatæ *em, eg, ev, ew*. Ex dato rectangulo *PDRQ*, dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ *BFGg, ALMm*, per constructionem Problematis XXVII, & ejus *Corol.* 1. Deinde ex dato angulo *CIT* datur proportio nascentium *IK, KN*, & inde, per constructionem Prob. XXVIII, datur quantitas Q, una cum curvis lineis *abzv, dcxw:* adeoque completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eique æqualis Sector *XCy*, angulusque *ICk* & locus *k* in quo corpus tunc versabitur. *Q.E.I.*

Supponimus autem in his Propositionibus Vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undique eandem. Atque hactenus Motum corporum in Orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de Motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

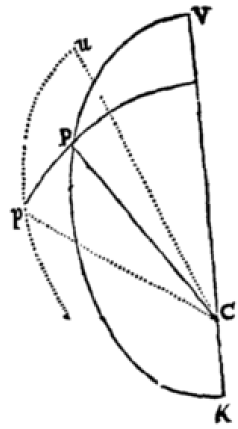
<121>

SECTIO IX.

De Motu Corporum in Orbibus mobilibus, deque motu Apsidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

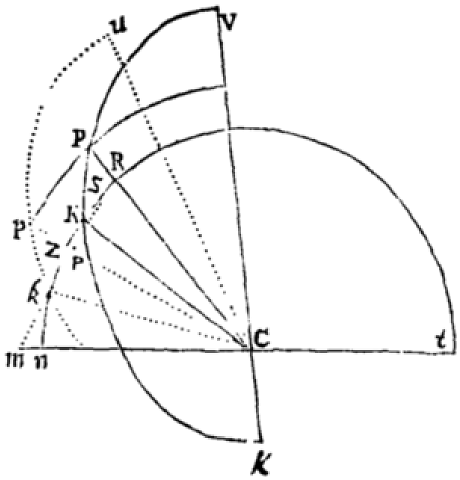
Efficiendum est ut corpus in Trajectoria quacunque circa centrum Virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eadem Trajectoria quiescente.



In Orbe *VPK* positione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* versus *K*. A centro *C* agatur semper *Cp*, quæ sit ipsi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem constituat; & area quam linea *Cp* describit erit ad aream *VCP* quam linea *CP* simul describit, ut velocitas lineæ describentis *Cp* ad velocitatem lineæ describentis *CP*; hoc est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, adeoque in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea *Cp* in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis Vi centripeta, revolvi possit una cum puncto *p* in curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque Figura *uCp* Figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* semper existens movebitur in <122> perimetro Figuræ revolventis *uCp*, eodemque tempore describet arcum ejus *up* quo corpus aliud *P* arcum ipsi similem & æqualem *VP* in Figura quiescente *VPK* describere potest. Quæratur igitur, per Corollarium quintum propositionis VI, Vis centripeta qua corpus revolvi possit in Curva illa linea quam punctum *p* describit in plano immobili, & solvetur Problema. *Q.E.F.*

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia Virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.



Partibus Orbis quiescentis *VP, PK* sunto similes & æquales Orbis revolventis partes *up, pk*; & punctorum *P, K* distantia intelligatur esse quam minima. A puncto *k* in rectam *pC* demitte perpendiculum *kr*, idemque produc ad *m*, ut sit *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC, KC* & *kC* semper æquantur, manifestum est quod linearum *PC, pC* incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis *P* & *p* existentium distinguantur motus singuli (per Legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas *PC, pC* determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis *PC, pC* perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis *p* erit ad motum transversum corporis *P*, ut motus angularis lineæ *pC*, ad motum angularem lineæ *PC*, id est, <123> ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Igitur eodem tempore quo corpus *P* motu suo utroque pervenit ad punctum *K*, corpus *p* æquali in centrum motu æqualiter movebitur a *p* versus *C*, adeoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea *mkr*, quæ per punctum *k* in lineam *pC* perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam a linea *pC*, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum *P* acquirit a linea *PC*, ut est motus transversus corporis *p* ad motum transversum corporis alterius *P*. Quare cum *kr* æqualis sit distantiæ quam corpus *P* acquirit a linea *pC*, sitque *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, hoc est, ut motus transversus corporis *p* ad motum transversum corporis *P*, manifestum est quod corpus *p* completo illo tempore reperietur in loco *m.* Hæc ita se habebunt ubi corpora *P* & *p* æqualiter secundum lineas *pC* & *PC* moventur, adeoque æqualibus Viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulum *pCn* ad angulum *pCk* ut est angulus *VCp* ad angulus *VCP*, sitque *nC* æqualis *kC*, & corpus *p* completo illo tempore revera reperietur in *n*; adeoque Vi majore urgetur quam corpus *P*, si modo angulus *mCp* angulo *kCp* major est, id est si Orbis *upk* vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus qua linea *CP* in consequentia fertur; & Vi minore si Orbis tardius movetur in antecedentia. Estque Virium differentia ut locorum intervallum *mn*, per quod corpus illud *p* ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro *C* intervallo *Cn* vel *Ck* describi intelligetur Circulus secans lineas *mr*, *mn* productas in *s* & *t*, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoque *mn* æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula *pCk*, *pCn* dentur magnitudine, sunt *kr* & *mr*, earumque differentia *mk* & summa *ms* reciproce ut altitudo *pC*, adeoque rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis *pC*. Est & *mt* directe ut $\frac{1}{2}mt$, id est, ut altitudo *pC*. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est lineola nascens *mn*, eique proportionalis Virium differentia reciproce ut cubus altitudinis *pC. Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis *P* & *p* vel *K* & *k*, est ad vim qua corpus motu Circulari revolvi possit ab *R* ad *K* eodem tempore quo corpus *P* in Orbe immobili describit arcum *PK*, ut lineola nascens *mn* ad sinum versum arcus nascentis *RK*, id est <124> ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad *rk* quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus *VCP* ad angulum *VCp*, ut GG-FF ad FF. Et propterea, si centro *C* intervallo quovis *CP* vel *Cp* describatur Sector circularis æqualis areæ toti *VPC*, quam corpus *P* tempore quovis in Orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus *P* in Orbe immobili & corpus *p* in Orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo descripta sit area *VPC*, uniformiter describere potuisset, ut GG-FF ad FF. Namque Sector ille & area *pCk* sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

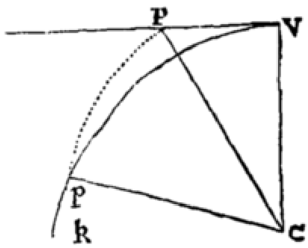
Corol. 2. Si Orbis *VPK* Ellipsis sit umbilicum habens *C* & Apsidem summam *V*; eique similis & æqualis ponatur Ellipsis *upk*, ita ut sit semper *pC* æqualis *PC*, & angulus *VCp* sit ad angulum *VCP* in data ratione G ad F; pro altitudine autem *PC* vel *pC* scribatur A, & pro Ellipseos latere recto ponatur 2R: erit vis qua corpus in Ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{\mathrm{FF}}{\mathrm{AA}} + \frac{\mathrm{RGG-RFF}}{\mathrm{A}cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipsi per quantitatem $\frac{\mathrm{FF}}{\mathrm{AA}}$, & vis in *V* erit $\frac{\mathrm{FF}}{CV quad.}$. Vis autem qua corpus in Circulo ad distantiam *CV* ea cum velocitate revolvi posset quam corpus in Ellipsi revolvens habet in *V*, est ad vim qua corpus in Ellipsi revolvens urgetur in Apside *V*, ut dimidium lateris recti Ellipseos ad Circuli semidiametrum *CV*, adeoque valet $\frac{\mathrm{RFF}}{CV cub.}$: & vis quæ sit ad hanc ut GG-FF ad FF, valet $\frac{\mathrm{RGG-RFF}}{CV cub.}$: estque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in *V* quibus corpus *P* in Ellipsi immota *VPK*, & corpus *p* in Ellipsi mobili *upk* revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A sit ad seipsam in altitudine *CV* ut $\frac{1}{\mathrm{A}cub.}$ ad $\frac{1}{CV cub.}$, eadem differentia in omne altitudine A valebit $\frac{\mathrm{RGG-RFF}}{\mathrm{A}cub.}$. Igitur ad vim $\frac{\mathrm{FF}}{\mathrm{AA}}$ qua corpus revolvi potest in Ellipsi immobili *VPK*, addatur excessus $\frac{\mathrm{RGG-RFF}}{\mathrm{A}cub.}$ & componetur vis tota $\frac{\mathrm{FF}}{\mathrm{AA}} + \frac{\mathrm{RGG-RFF}}{\mathrm{A}cub.}$ <125> qua corpus in Ellipsi mobili *upk* iisdem temporibus revolvi possit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, si Orbis immobilis *VPK* Ellipsis sit centrum habens in virium centro *C*; eique similis, æqualis & concentrica ponatur Ellipsis mobilis *upk*; sitque 2R Ellipseos hujus latus rectum principale, & 2T latus transversum sive axis major, atque angulus *VCp* semper sit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires quibus corpora in Ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{\mathrm{FFA}}{\mathrm{T}cub.}$ & $\frac{\mathrm{FAA}}{\mathrm{T}cub.} + \frac{\mathrm{RGG}-RFF}{\mathrm{A}cub.}$ respective.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur *T*, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id est radius Circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi potest, in loco *V* dicatur $\frac{\mathrm{VFF}}{\mathrm{TT}}$, atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *CP* nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP:* erit vis centripeta qua corpus idem eosdem motus in eadem Trajectoria *upk* circulariter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $\mathrm{X} + \frac{\mathrm{VRGG-VRFF}}{\mathrm{A}Cub.}$.

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi Orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCp*, qui sit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari potest in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta *VP*. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam <126> curvam *Vpk*. Est autem hæc Curva *Vpk* eadem cum Curva illa *VPQ* in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.



PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut Orbis, quem corpus in Ellipsi mobili (ut in Propositionis superioris Corol. 2, vel 3) revolvens, describit in plano immobili, accedat ad formam Orbis cujus Apsides requiruntur, & quærendo Apsides Orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum *V* Apsis summa, & scribantur T pro altitudine maxima *CV*, A pro altitudine quavis alia *CP* vel *Cp*, & X pro altitudinum differentia *CV-CP*; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum ejus *C* (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæque in Corollario 2. erat ut $\frac{\mathrm{FF}}{\mathrm{AA}} + \frac{\mathrm{RGG}-RFF}{\mathrm{A}cub.}$, id est ut $\frac{\mathrm{FFA+RGG}-RFF}{\mathrm{A}cub.}$, substituendo T-X pro A, erit ut $\frac{\mathrm{RGG-RFF}+TFF-FFX}{\mathrm{A}cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.*, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoque ut $\frac{\mathrm{A}cub.}{\mathrm{A}cub.}$, sive (scribendo T-X pro A in Numeratore) ut $\frac{\mathrm{T}cub.\mathrm{-3TTX+3TXX-X}cub.}{\mathrm{A}cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $\mathrm{RGG-RFF+TFF}$ ad T *cub.* ut -FFX ad $-3\mathrm{TTX}+3\mathrm{TXX}-\mathrm{X}cub.$ sive ut -FF ad $-3\mathrm{TT}+3\mathrm{TX}-\mathrm{XX}$. Jam cum Orbis ponatur Circulo quam maxime finitimus, coeat Orbis cum Circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infi <127> nitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut -FF ad $-3\mathrm{TT}$ seu GG ad TT ut FF ad 3TT & vicissim GG ad FF ut TT ad 3TT id est, ut 1 ad 3; adeoque G ad F, hoc est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum *VCP* (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atque adeo in Orbe immobili de quo agimus, ab Abside summa ad Apsidem imam descendendo conficiet angulum *VCp* graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id adeo ob similitudinem Orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi Orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in Orbe propemodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu $103gr.55m.23sec.$ ad centrum; perveniens ab Apside summa ad Apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{\mathrm{A}^{n}}{\mathrm{A}^{3}}$ ubi n-3 & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^{n} seu $\overline{\mathrm{T}-\mathrm{X}^{n}}$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $\mathrm{T}^{n}-\mathrm{nXT}^{n-1}+\frac{\mathrm{nn-n}}{2}\mathrm{XXT}^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $\mathrm{RGG}-\mathrm{RFF}+\mathrm{TFF}-\mathrm{FFX}$, fit $\mathrm{RGG}-\mathrm{RFF}+\mathrm{TFF}$ ad T^{n} ut $-\mathrm{FF}$ ad $-\mathrm{n}T^{n-1}+\frac{\mathrm{nn-n}}{2}X\mathrm{T}^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^{n} ut $-\mathrm{FF}$ ad $-\mathrm{nT}^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad *n*; adeoque G ad F, id est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, <128> ut 1 ad $\sqrt{\mathrm{n}}$. Quare cum angulus *VCP*, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam in Ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus *VCp*, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam, in Orbe propemodum Circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{\mathrm{n}}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apside ima ad apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est,ut A seu $\frac{\mathrm{A}^{4}}{\mathrm{A}^{3}}$, erit *n* æqualis 4 & $\sqrt{\mathrm{n}}$ æqualis 2; adeoque angulus inter Apsidem summam & Apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}gr.$ seu $90gr.$ Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad Apsidem imam, & completa alia quarta parte ad Apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione X. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{\mathrm{A}}$ seu $\frac{\mathrm{A}^{2}}{\mathrm{A}^{3}}$, erit *n* æqualis 2, adeoque inter Apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu $127gr.16m.45sec.$ & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apside summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut $\mathrm{A}^{\frac{11}{4}}$, adeoque directe ut $\frac{1}{\mathrm{A}^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{\mathrm{A}^{\frac{1}{4}}}{\mathrm{A}^{3}}$ erit *n* æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{\mathrm{n}}}gr.$ æqualis $360gr.$ & propterea corpus de Apside summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad Apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad Apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes *m* & *n* pro quibusvis indicibus dignitatum Altitudinis, & *b*, *c* pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam effe ut $\frac{\mathrm{bA}^{m}+\mathrm{cA}^{n}}{A\ cub.}$, id est, ut $\frac{\mathrm{b\ in\ }\overline{\mathrm{T}-\mathrm{X}}^{m}+\mathrm{c\ in\ }\overline{\mathrm{T}-\mathrm{X}}^{n}}{A\ cub.}$ seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut $\frac{\mathrm{bT}^{m}+\mathrm{cT}^{n}-mbXT^{m-1}-ncXT^{n-1}+\frac{mm-\mathrm{m}}{2}bXXT^{m-2}-\frac{nn-\mathrm{n}}{2}cXX^{2}\mathrm{T}^{n-2}\ \&\mathrm{c.}}{A\ cub.}$ <129> & collatis numeratorum terminis, fiet $\mathrm{RGG}-\mathrm{RFF}+\mathrm{TFF}$ ad $\mathrm{bT}^{m}+\mathrm{cT}^{n}$, ut $-\mathrm{FF}$ ad $-mbT^{m-1}-ncT^{n-1}+\frac{mm-\mathrm{m}}{2}bXT^{m-2}+\frac{nn-\mathrm{n}}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1}+cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1}+ncT^{n1}$, & vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1}+cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1}+ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam *CV* seu T Arithmetice per Unitatem, fit GG ad FF ut *b*+*c* ad *mb*+*nc*, adeoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{\mathrm{b+c}}$. Unde est G ad F, id est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{\mathrm{b+c}}}$. Et propterea cum angulus *VCP* inter Apsidem summam & Apsidem imam in Ellipsi immobili sit $180gr.$ erit angulus *VCp* inter easdem Apsides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{\mathrm{bA}^{m}+\mathrm{cA}^{n}}{A\ cub.}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{\mathrm{b+c}}{mb+nc}}$. Et eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{\mathrm{bA}^{m}-\mathrm{cA}^{n}}{A\ cub.}$, angulus inter Apsides invenietur graduum$180\sqrt{\frac{\mathrm{b-c}}{mb-nc}}$. Nec secus resolvetur Problema in casibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in Series convergentes denominatorem habentes A*cub.* Dein pars data numeratoris hujus RGG-RFF+TFF-FFX ad ipsius partem alteram non datam in eadem ratione ponendaæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque Unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu Apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad Apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $\mathrm{A}^{\frac{\mathrm{nn}}{\mathrm{mm}}-3}$, cujus In <130> dex est $\frac{\mathrm{nn}}{\mathrm{mm}}-3$. Id quod per Exempla secunda manifestum est. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in recessu a centro, decrescere non posse: Corpus tali vi revolvens deque Apside discedens, si cæperit descendere nunquam perveniet ad Apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens Curvam illam lineam de qua egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cæperit illud de Apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad Apsidem summam. Describet enim Curvam illam lineam de qua actum est in eodem Corol. & in Corol. 6, Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in recessu a centro, decrescit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apside discedens, perinde ut cæperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At si vis, in recessu a centro, vel decrescat in minori quam triplicata ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunque; Corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad Apsidem imam aliquando perveniet: & contra, si corpus de Apside ad Apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de Apside ad Apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apside summa ad Apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit *m* ad *n* ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoque $\frac{\mathrm{nn}}{\mathrm{mm}}-3$ valeat $\frac{1}{64}-3$ vel $\frac{1}{16}-3$ vel $\frac{1}{4}-3$ vel $\frac{4}{9}-3$: erit vis ut $\mathrm{A}\frac{1}{64}-3$ vel $\mathrm{A}\frac{1}{16}-3$ vel $\mathrm{A}\frac{1}{4}-3$ vel $\mathrm{A}\frac{4}{9}-3$, id est, reciproce ut $\mathrm{A}3-\frac{1}{64}$ vel $\mathrm{A}3-\frac{1}{16}$ vel $\mathrm{A}3-\frac{1}{4}$ vel $\mathrm{A}3-\frac{4}{9}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad Apsidem eandem immotam; erit *m* ad *n* ut 1 ad 1, adeoque $\mathrm{A}^{\frac{\mathrm{nn}}{\mathrm{mm}}-3}$ æqualis A^{-2} seu $\frac{1}{\mathrm{AA}}$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apsidem eandem redierit; erit *m* ad *n* ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoque $\mathrm{A}^{\frac{\mathrm{nn}}{\mathrm{mm}}-3}$ æqualis $\mathrm{A}\frac{16}{9}-3$ vel $\mathrm{A}\frac{9}{4}-3$ vel $\mathrm{A}9-3$ vel $\mathrm{A}16-3$; & propterea vis aut reciproce ut <131> $\mathrm{A}^{\frac{11}{9}}$ vel $\mathrm{A}\frac{3}{4}$, aut directe ut A^{6} vel A^{13}. Denique si Corpus pergendo ab Apside summa ad Apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoque Apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit *m* ad *n* ut $363^{gr.}$ ad $360^{gr.}$ sive ut 121 ad 120, adeoque $\mathrm{A}^{\frac{\mathrm{nn}}{\mathrm{mm}}-3}$ erit æquale $\mathrm{A}^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $\mathrm{A}^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciproce ut $\mathrm{A}^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $59\frac{1}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripeta quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per Exempla tertia) motus Apsidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in Ellipsi sit ut $\frac{1}{\mathrm{AA}}$, & vis extranea ablata ut *c*A, adeoque vis reliqua ut $\frac{\mathrm{A}-\mathrm{cA}^{4}}{\mathrm{A\ cub.}}$; erit (in Exemplis tertiis) *b* æqualis 1, *m* æqualis 1, *n* æqualis 4, adeoque angulus revolutionis inter Apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-\mathrm{c}}{1-4\mathrm{c}}}$. Ponatur vim illam extraneam esse 357,45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1; & &$180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, seu 180,7623, id est $180gr.\ 45m.\ 44s.$ Igitur corpus de Apside summa discedens, motu angulari $180\mathrm{gr}.\ 45\mathrm{m}.\ 44\mathrm{f}.$ perveniet ad Apsidem imam, & hoc motu duplicato ad Apsidem summam redibit: adeoque Apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet $1\mathrm{gr}.\ 31\mathrm{m}.\ 28\mathrm{s}.$

Hactenus de Motu corporum in Orbibus quorum plana per centrum Virium transeunt. Superest ut Motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui Motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure Motus corporum Viribus quibuscunque cen <132> tra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quasque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & Orbitas movendo describunt. Et eadem lege Motus corporum in superficiebus Curvis peractos subinde determinamus.

SECTIO X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, dèque Funipendulorum Motu reciproco.

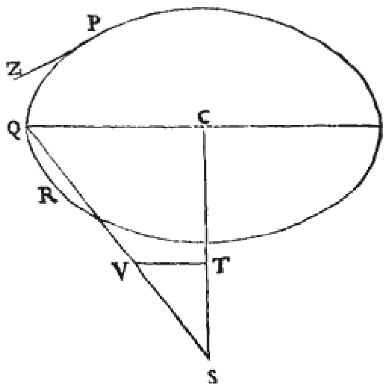
PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta, datoque tum Virium centro tum Plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur Motus corporis de loco dato, data cum Velocitate secundum rectam in Plano illo datam egressi.

Sit *S* centrum Virium, *SC* distantia minima centri hujus a Plano dato, *P* corpus de loco *P* secundum rectam *PZ* egrediens, *Q* corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & *PQR* Trajectoria illa, in Plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur *CQ QS*, & si in *QS* capiatur *SV* proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum *S*, & agatur *VT* quæ sit parallela *CQ* & occurrat *SC* in *T*: Vis *SV* resolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires *ST, TV*; quarum *ST* trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera *TV*, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directe versus punctum *C* in plano datum, adeoque facit illud in hoc plano perinde moveri ac si vis *ST* tolleretur, & corpus vi sola *TV* revolveretur circa centrum *C* in spatio libero. Data autem <133> vi centripeta *TV* qua corpus *Q* in spatio libero circa centrum datum *C* revolvitur, datur per Prop. XLII, tum Trajectoria *PQR* quam corpus describit, tum locus *Q* in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo *Q*; & contra. *Q.E.I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Posito quod Vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent Ellipses, & revolutiones Temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultro citroque discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem Temporibus absolvent.



Nam stantibus quæ in superiore Propositione, vis *SV* qua corpus *Q* in plano quovis *PQR* revolvens trahitur versus centrum *S* est ut distantia *SQ*; atque adeo ob proportionales *SV* & *SQ*, *TV* & *CQ*, vis *TV* qua corpus trahitur versus punctum *C* in Orbis plano datum, est ut distantia *CQ*. Vires igitur, quibus corpora in plano *PQR* versantia trahuntur versus punctum *C*, sunt pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur versus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iisdem Temporibus, in iisdem Figuris, in plano quovis *PQR* circa punctum *C*, atque in spatiis liberis circa centrum *S*; adeoque (per Corol. 2. Prop. X, & Corol. 2. Prop. XXXVIII) temporibus semper <134> æqualibus, vel describent Ellipses in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. *Q.E.D.*

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano describi, dein circa axes quosvis datos per centrum Virium transeuntes revolvi, & ea revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique ascendendo & descendendo currant ultro citroque peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque adeo in lineis curvis quarum revolutione curvae illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

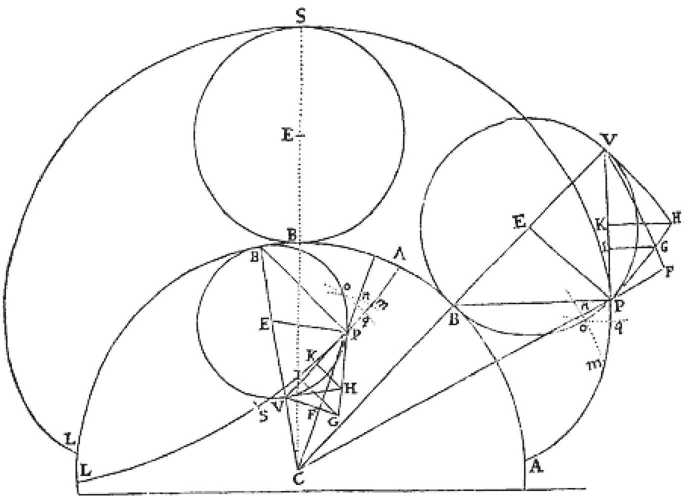
Si Rota Globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei, quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui Globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum Globi & Rotæ ad semidiametrum Globi.

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si Rota Globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui Globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum Globi & Rotæ ad semidiametrum Globi.

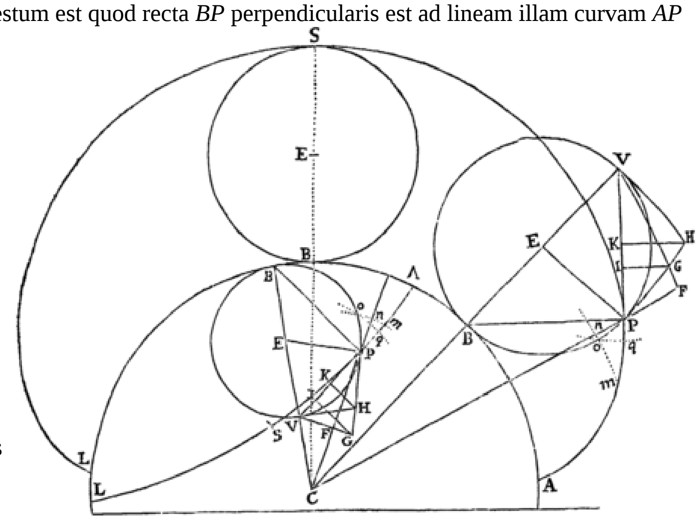
<135>

Sit *ABL* Globus, *C* centrum ejus, *BPV* Rota ei insistens, *E* centrum Rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro Rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo *ABL* ab *A* per *B* versus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud *P* in perimetro Rotæ datum interea describere Viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* via tota curvilinea descripta ex quo Rota Globum tetigit in *A*, & erit viæ hujus longitudo *AP* ad duplum



sinum versum arcus $\frac{1}{2}PB$, ut $2CE$ ad *CB*. Nam recta *CE* (si opus est producta) occurrat Rotæ in *V*, junganturque *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur Normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, secetque *PH* ipsam *VF* in *G*, & ad *VP* demittantur normales *GI*, *HK*. <136> Centro item *C* & intervallo quovis describatur circulus *nom* secans rectam *CP* in *n*, Rotæ perimetrum *Bp* in *o* & Viam curvilineam *AP* in *m*; centroque *V* & intervallo *Vo* describatur circulus secans *VP* productam in *q*.

Quoniam Rota eundo semper revolvitur circa punctum contactus *B*, manifestum est quod recta *BP* perpendicularis est ad lineam illam curvam *AP* quam Rotæ punctum *P* describit, atque adeo quod recta *VP* tanget hanc curvam in puncto *P*. Circuli *nom* radius sensim auctus vel diminutus æquetur tandem distantiæ *CP*; & ob similitudinem Figuræ evanescentis *Pnomq* & Figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evanescentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, <137> id est ratio mutationum omentaneorum curvæ *AP*, rectæ *CP*, arcus circularis *BP*, ac rectæ *VP*, eadem erit quæ linearum *PV*, *PF*, *PG*, *PI* respective. Cum autem *VF* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares sunt, angulique *HVG*, *VCF* propterea æquales; & angulus *VHP*, (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad *V* & *P* rectos) angulo *CEP* æqualis est, similia erunt triangula *VHG*, *CEP*; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *HV* seu *HP* & ita *KI* ad *KP*, & composite vel divisim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis consequentibus ut *CB* ad $2CE$ ita *PI* ad *PV*, atque ita adeo *Pq* ad *Pm*. Est igitur decrementum lineæ *VP*, id est incrementum lineæ *BV-VP* ad incrementum lineæ curvæ *AP* in data ratione *CB* ad $2CE$, & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines *BV-VP* & *AP*, incrementis illis genitæ, sunt in eadem ratione. Sed, existente *BV* radio, est *VP* co-sinus anguli *BVP* seu $\frac{1}{2}BEP$, adeoque *BV-VP* sinus versus ejusdem anguli; & propterea in hac Rota, cujus radius est $\frac{1}{2}BV$, erit *BV-VP* duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}BP$. Ergo *AP* est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}BP$ ut $2CE$ ad *CB*. *Q.E.D.*



Lineam autem *AP* in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc si describatur Cyclois integra *ASL* & bisecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus est sinus anguli *VBP*, existente *EB* radio) ut $2CE$ ad *CB*, atque adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri Cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ quæ est ad Rotæ diametrum *BV*, ut $2CE$ ad *CB*.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

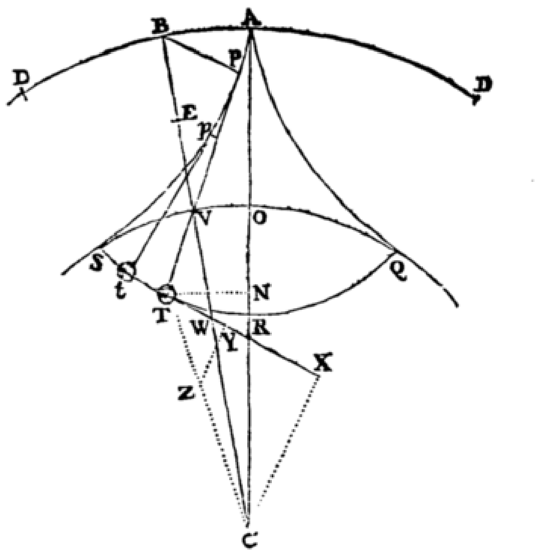
Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

Intra Globum *QVS*, centro *C* descriptum, detur Cyclois *QRS* bisecta in *R* & punctis suis extremis *Q* & *S* superficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* bisecans arcum *QS* in *O*, & producatur ea ad *A*, ut sit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* in <138> tervallo *CA* describatur Globus exterior *ABD*, & intra hunc globum a Rota, cujus diameter sit *AO*, describantur duæ Semicycloides *AQ*, *AS*, quæ Globum interiorem tangant in *Q* & *S* & Globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, Filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra Semicycloides *AQ*, *AS* oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo *AR*, Filum parte sui superiore *AP* applicetur ad Semicycloidem illam *APS* versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliqua *PT* cui Semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oscillabitur in Cycloide data *QRS*. *Q.E.F.*

Occurrat enim Filum *PT* tum Cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in V, agaturque *CV*; & ad Fili partem rectam *PT*, e punctis extremis *P* ac *T*, erigantur perpendicula *PB*, *TW*, occurrentia rectæ *CV* in *B* & *W*. Patet, ex constructione & genesi similium Figurarum *AS*, *SR*, perpendicula illa *PB*, *TW* abscindent de *CV* longitudines *VB*, *VW* Rotarum diametris *OA*, *OR* æquales. Est igitur *TP* ad *VP* (duplum sinum anguli *VBP* existente $\frac{1}{2}BV$ ra <139> dio) ut *BW* ad *BV*, seu $AO+OR$ ad *AO*, id est (cum sint *CA* ad *CO*, *CO* ad *CR* & divisim *AO* ad *OR* proportionales,) ut $CA+CO$ ad *CA* vel. si bisectur *BV* in *E*, ut $2CE$ ad *CB*. Proinde, per Corol. 1. Prop. XLIX, longitudo partis rectæ Fili *PT* æquatur semper Cycloidis arcui *PS*, & Filum totum *APT* æquatur semper Cycloidis arcui dimidio *APS*, hoc est (per Corol. 2. Prop. XLIX) longitudini *AR*. Et propterea vicissim si Filum manet semper æquale longitudini *AR* movebitur punctum *T* in Cycloide data *QRS*. *Q.E.D.*

Corol. Filum *AR* æquatur Semicycloidi *AS*, adeoque ad semidiametrum *AC* eandem habet rationem quam similis illi Semicylois *SR* habet ad semidiametrum *CO*.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.



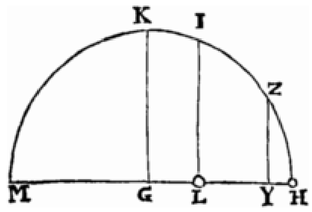
Si Vis centripeta tendens undique ad Globi centrum C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, & hac sola Vi agente corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis* QRS: *dico quod oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt Tempora*

Nam in Cycloidis tangentem *TW* infinite productam cadat perpendiculum *CX* & jungatur *CT*. Quoniam vis centripeta qua corpus *T* impellitur versus *C* est ut distantia *CT*, atque hæ (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directe a *P* distendit filum *PT* & per cujus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera *TX* urgendo corpus transversim seu versus *X*, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo *TX*, id est, (ob datas *CV*, *WV* iisque proportionales *TX*, *TW*,) ut longitudo *TW*, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX,) ut longitudo arcus Cycloidis *TR*. Pendulis igitur duabus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi *TR*, *tR*. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describen <140> dæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes atque adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumque vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eosdem arcus Cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea,cum Cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumque perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragant. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire & Velocitates Pendulorum in locis singulis, & Tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* Cycloidis arcum *RS* æquante, describe semicirculum *HKMG* semidiametro *GK* bisectum. Et si vis centripeta, distantiis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum *G*, sitque ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro Globi *QOS* (*Vide Fig. Prop.* L.) ad ipsius centrum tendente; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco supremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis describendis *TR*, *LG* semper proportionales, atque adeo, si æquantur *TR* ad *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa describere spatia *ST*, *HL* æqualia sub initio, adeoque subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare, per Prop. XXXVIII, tempus quo corpus describit arcum *ST* est ad tempus <141> oscillationis unius, ut arcus *HI* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *L*) ad semicirculum *HKM* (tempus quo corpus *H* perveniet ad *M*.) Et velocitas corporis penduli in loco *T* est ad velocitatem ipsius in loco infimo *R*, (hoc est, velocitas corporis *H* in loco *L* ad velocitatem ejus in loco *G*, seu incrementum momentaneum lineæ *HL* ad incrementum momentaneum lineæ *HG*, arcubus *HI*, *HK* æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata *LI* ad radium *GK*, sive ut $\sqrt{SR\ q. - TR\ q.}$ ad *SR*. Unde cum, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus descripti in oscillationibus universis. Quæ erant primo invenienda.



Oscillentur jam Funipendula corpora in Cycloidibus diversis intra Globos diversos, quorum diversæ sunt etiam Vires absolutæ, descriptis: &, si Vis absoluta Globi cujusvis *QOS* dicatur V, Vis acceratrix qua Pendulu urgetur in circumferentia hujus Globi, ubi incipit directe versus centrum ejus moveri, erit ut distantia Corporis penduli a centro illo & Vis absoluta Globi conjunctim, hoc est, ut $CO \times \mathrm{V}$. Itaque lineola *HY*, quæ sit ut hæc Vis acceleratrix $CO \times \mathrm{V}$, describetur dato tempore; &, si erigatur normalis *YZ* circumferentiæ occurrens in *Z*, arcus nascens *HZ* denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens *HZ* in subduplicata ratione rectanguli *GHY*, adeoque ut $\sqrt{\mathrm{GH \times CO \times V}}$. Unde Tempus oscillationis integræ in Cycloide *QRS* (cum sit ut semiperipheria *HKM*, quæ oscillationem illam integram denotat, directæ, utque arcus *HZ*, qui datum tempus similiter denotat, inverse) fiet ut *GH* directe & $\sqrt{\mathrm{GH \times CO \times V}}$ inverse, hoc est, ob æquales *GH* & *SR*, ut $\sqrt{\frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{CO \times V}}}$, sive (per Corol. Prop. L) ut $\sqrt{\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC \times V}}}$. Itaque Oscillationes in Globis & Cycloidibus omnibus, quibuscunque cum Viribus obsolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione longitudinis Fili directe, & subduplicata ratione distantiæ inter punctum suspensionis & centrum <142> Globi inverse, & subduplicata ratione Vis absolutæ Globi etiam inverse. *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc etiam Oscillantium, Cadentium & Revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si Rotæ, qua Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet Linea recta per centrum globi transiens, & Oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per Casum secundum) ad tempus semioscillationis in Cycloide quavis *QRS* ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AR}}$.

Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si Globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies Sphærica in planum, Visque centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois nostra abibit in Cycloidem vulgi. Isto autem in casu longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*: Et pendulum inter duas ejusmodi Cycloides in simili & æquali Cycloide temporibus æqualibus Oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & Descensus gravium, tempore Oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

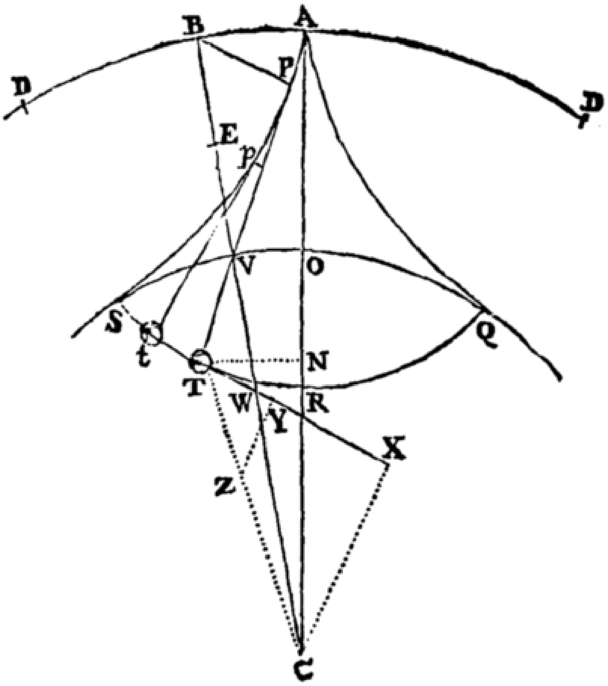
Aptantur autem Propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu Clavorum, perimetris suis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ suspensa, in Cycloidibus intra globos Oscillari debent, ut Oscillationes omnes evadant Isochronæ. Nam Gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decrescit in progressu a superficie Terræ, sursum quidem in duplicata ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

<143>

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Vires quibus corpora in datis curvis lineis Oscillationes semper Isochronas peragent.

Oscilletur corpus *T* in curva quavis linea *STRQ*, cujus axis sit *OR* transiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in corporis loco quovis *T* contingat, inque hac Tangente *TX*



capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam longitudo arcus illius ex Figurarum quadraturis (per Methodos vulgares) innotescit. De puncto *Y* educatur recta *YZ* tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit Vis centripeta proportionalis rectæ *TZ. Q.E.I.*

<144>

Nam si vis, qua corpus trahitur de *T* versus *C*, exponatur per rectam *TZ* captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires *TY*, *YZ*; quarum *YZ* trahendo corpus secundum longitudinem Fili *PT*, motum ejus nil mutat, vis autem altera *TY* motum ejus in curva *STRQ* directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc sit ut via describenda *TR*, accelerationes corporis vel retardationes in Oscillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. *Q.E.D.*

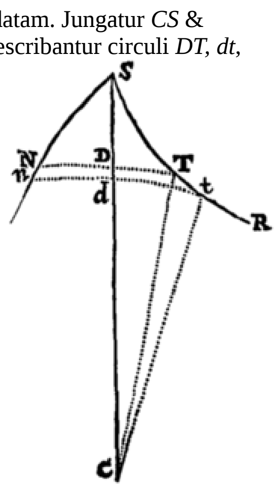
Corol. 1. Hinc si corpus *T* Filo rectilineo *AT* a centro *A* pendens, describat arcum circularem *STRQ*, & interea urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliqua, quæ sit ad vim uniformem Gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus sinum *TN*: æqualia erun Oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, similia erunt triangula *ATN*, *ZTY*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut *TY* ad *TN*; hoc est, (si Gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *AT*) vis TZ, qua Oscillationes evadent Isochronæ, erit ad vim Gravitatis *AT*, ut arcus *TR* ipsi *TY* æqualis ad arcus illius sinum *TN*.

Corol. 2. Igitur in Horologiis, si vires a Machina in Pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi Gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu *TR* & radio *AR* ad sinum *TN*, Oscillationes omnes erunt Isochronæ.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Tempora quibus corpora Vi qualibet centripeta in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum Virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

Descendat enim corpus de loco quovis *S* per lineam quamvis curvam *STtR*, in plano per virium centrum *C* transeunte datam. Jungatur *CS* & dividatur cadem in partes innumeras æquales, sitque *Dd* <145> partium illarum aliqua. Centro *C*, intervallis *CD*, *Cd* describantur circuli *DT*, *dt*, lineæ curvæ *STtR* occurrentes in *T* & *t*. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine *CS* dequa corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine *CT*, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus describit lineolam *Tt*, est ut lineolæ hujus longitudo (id est ut secans anguli *tTC*) directe, & velocitas inverse. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata *DN* ad rectam *CS* per punctum *D* perpendicularis, & ob datam *Dd* erit rectangulum $Dd \times DN$, hoc est area *DNnd*, eidem tempori proportionale. Ergo si *SNn* sit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, erit area *SNDS* proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam *ST*; proindeque ex inventa illa area dabitur Tempus. *Q.E.I.*

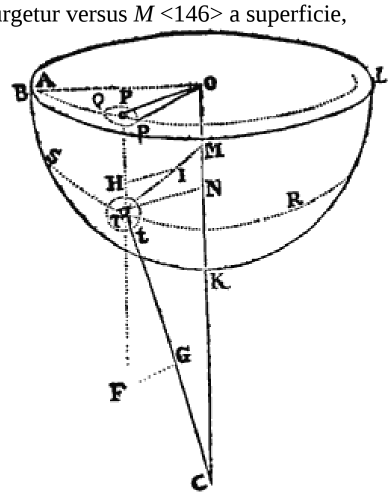


PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quacunque curva, cujus axis per centrum Virium transit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit *BSKL* superficies curva, *T* corpus in ea revolvens, *STtR* Trajectoria quam corpus in eadem describit, *S* initium Trajectoriæ, *OMNK* axis superficiei curvæ, *TN* recta a corpore in axem perpendicularis, *OP* huic parallela & æqualis a puncto *O* quod in axe datur educta, *AP* vestigium Trajectoriæ a puncto *P* in lineæ volubilis *OP* plano *AOP* descriptum, *A* vestigii initium puncto

S respondens, *TC* recta a corpore ad centrum ducta; *TG* pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum *C* proportionalis; *TM* recta ad superficiem curvam perpendicularis; *TI* pars ejus vi pressionis, qua corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus *M* <146> a superficie, proportionalis; *PHTF* recta axi parallela per corpus transiens, & *GF*, *IH* rectæ a punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demissæ. Dico jam quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo secundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quatenus secundum positionem plani factus, hoc est, motus puncti *P* quo Trajectoriæ vestigium *AP* in hoc plano describitur, idem est ac si vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus solis viribus *FG*, *HI* agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano *AOP*, vi centripeta ad centrum *O* tendente & summam virium *FG* & *HI* æquante, describeret curvam *AP*. Sed vi tali describetur area *AOP* (per Prop. I.) tempori proportionalis. *Q.E.D.*



Corol. Eodem argumento si corpus a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta *CO* data tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam *ST*; foret area *AOP* tempori semper proportionalis.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege Vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curva cujus axis per centrum illud transit; invenienda est Trajectoria quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, data cum Velocitate, versus plagam in superficie illa datam egressum.

<147>

Stantibus quæ in superiore Propositione constructa sunt, exeat corpus de loco *S* in Trajectoriam inveniendam *STtR*; & ex data ejus velocitate in altitudine *SC*, dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine *TC*. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, describat corpus Trajectoriæ suæ particulam *Tt*, sitque *Pp* vestigium ejus plano *AOP* descriptum. Jungatur *Op*, & Circelli centro *T* intervallo *Tt* in superficie curva descripti sit *PpQ* vestigium Ellipticum in eodem plano *OAPp* descriptum. Et ob datum magnitudine & positione Circellum, dabitur Ellipsis illa *PpQ*. Cumque area *POp* sit tempori proportionalis, atque adeo ex dato tempore detur, dabitur *Op* positione, & inde dabitur communis ejus & Ellipseos intersectio *p*, una cum angulo *OPp*, in quo Trajectoriæ vestigium *APp* secat lineam *OP*. Inde autem invenietur Trajectoriæ vestigium illud *APp*, eadem methodo qua curva linea *VIKk*, in Propositione XLI, ex similibus datis inventa fuit. Tum ex singulis vestigii punctis *P* erigendo ad planum *AOP* perpendicula *PT* superficiei curvæ occurrentia in *T*, dabuntur singula Trajectoriæ puncta *T*. *Q.E.I.*

SECTIO XI.

De Motu Corporum Viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui Motus corporum attractorum ad centrum Immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt & æquales, per Legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per Legum Corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia se mutuo attrahant) hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo Motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando Vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In Mathematicis enim jam versamur, & propterea missis disputationibus Physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

<148>

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

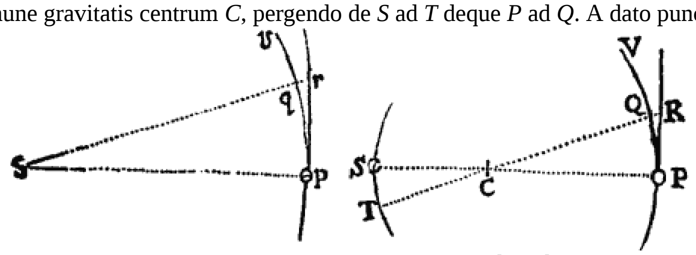
Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, Figuras similes.

Sunt enim distantiæ a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atque adeo in data ratione ad invicem, & componendo, in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, Figuras circum eosdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quiescunt vel motu quovis non angulari moventur) describunt omnino similes. Proinde similes sunt Figuræ quæ his distantiis circumactis describuntur. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest Figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, Viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora *S, P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T* deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipsis



SP, *TQ* æquales & parallelæ ducantur semper *sp, sq*; & Curva *pqv* quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, <149> describit, erit similis & æqualis Curvis quas corpora *S, P* describunt circum se mutuo: proindeque (per Theor. XX) similis Curvis *ST* & *PQV*, quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum *C*: id adeo quia proportiones linearum *SC, CP* & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per Legum Corollarium quartum, vel quiescit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quiescit, inque *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* similia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* Curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et ob similitudinem Figurarum *CPRQ*, *sprq*, erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, adeoque in data ratione. Proinde si vis qua corpus *P* versus corpus *S*, atque adeo versus centrum intermedium *C* attrahitur, esset ad vim qua corpus *p* versus centrum *s* attrahitur in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq*, per intervalla ipsis proportionalia *RQ*, *rq*; adeoque vis posterior efficeret ut corpus *p* gyraretur in Curva *pqv*, quæ similis esset Curvæ *PQV*, in qua vis prior efficit ut corpus *P* gyretur, & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem distantiarum *SP*, *sp*) sibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idque in subduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per Lemma decimum) spatia, ipso motus initio descripta, sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* esse ad velocitatem corporis *P* in subduplicata ratione distantiæ *sp* ad distantiam *CP*, eo ut temporibus quæ sint in eadem subduplicata ratione describantur arcus *pq*, *PQ*, qui sunt in ratione integra: Et corpora *P*, *p* viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia *C* & *s* Figuras similes *PQV*, *pqv*, quarum posterior *pqv* similis est & æqualis Figuræ quam corpus *P* circum corpus mobile *S* describit. *Q.E.D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium sextum, motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, adeoque corpora descri <150> bent circum se mutuo Figuras easdem ac prius, & propterea Figuræ *pqv* similes & æquales. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo Viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. X,) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Ellipses concentricas: & vice versa, si tales Figuræ describuntur, sunt Vires distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo Viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus describunt (per Prop. XI, XII, XIII) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Sectiones conicas umbilicum habentes in centro circum quod Figuræ describuntur. Et vice versa, si tales Figuræ describuntur, Vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S *&* P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium Tempus periodicum esse ad Tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis & Figuris quæ corpora circum se mutuo describunt Figuram similem & æqualem describentis, in subduplicata ratione corporis alterius* S, *ad summant corporum* S+P.

Namque, ex demonstratione superioris Propositionis, tempora quibus arcus quivis similes *PQ* & *pq* describuntur, sunt in subduplicata ratione distantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc est, in subduplicata ratione corporis *S* ad summam corporum *S+P*. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes *PQ* & *pq* describuntur, hoc est, tempora tota quibus Figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem subduplicata ratione. *Q.E.D.*

<151>

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S *&* P, *Viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revoluntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipseos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, Axis principalis erit ad Axem principalem Ellipseos, quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S+P *ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summan & corpus illud alterum* S.

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema superius) forent in subduplicata ratione corporis *S* ad summam corporum *S+P*. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipseos autem axis principalis (per Prop.XV.) minuetur in ratione cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio *S* ad *S+P* est triplicata; adeoque ad axem principalem Ellipseos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter *S+P* & *S* ad *S+P*. Et inverse, axis principalis Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut *S+P* ad primam duarum medie proportionalium inter *S+P* & *S*. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto Viribus iisdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantiæ corporum a centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum interme <152> dium, adeoque eædem sunt ac si a corpore intermedio manarent. *Q.E.D.*

Et quoniam data est ratio distantiæ corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam corporis ejusdem a corpore altero, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiæ unius ad eandem potestatem distantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujusvis, quæ ex una distantia & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera distantia & quantitatibus totidem datis datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, qua corpus unum ab altero trahitur, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiæ potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverse ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiæ hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitatibus datis similiter derivata. Hoc est Vis trahentis eadem erit Lex respectu distantiæ utriusque. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare Motus.

Corpora (per Theorema novissimum) perinde movebuntur ac si a corpore tertio, in communi gravitatis centro constituto, traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet per Hypothesin; & propterea (per Legum Corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per Probl. XXV,) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. *Q.E.I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum Velocitatibus exeunt, determinare Motus.

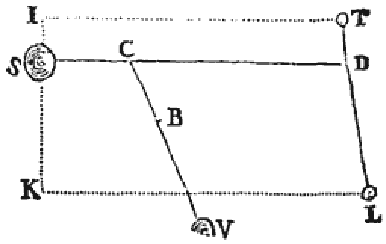
<153>

Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per Legum Corollarium quintum & Theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum una cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato, secundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus est motus per Problema nonum & vicesimum sextum: & habebitur simul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus est uniformis ille Systematis spatii & corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. *Q.E.I.*

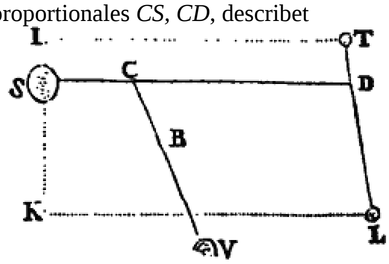
PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

Viribus quibus Corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centris: requiruntur Motus plurium Corporum inter se.

Ponantur imprimis corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Describent hæc (per Corollarium primum Theorematis XXI) Ellipses centra habentes in *D*, quarum magnitudo ex Problemate V, innotescit.



Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST, SL*, & ab ipsis vicissim trahatur. Vis *ST* (per Legum Cor. 2.) resolvitur in vires *SD, DT*; & vis *SL* in vires *SD, DL*. Vires autem *DT, DL*, quæ sunt ut ipsarum summa *TL*, atque adeo ut vires acceleratrices quibus corpora *T* & *L* se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori & posterior posteriori, componunt vires distantiis *DT* ac *DL* proportionales, ut prius, sed <154> viribus prioribus majores; adeoque (per Corol. 1. Prop. X. & Corol. 1 & 8. Prop. IV) efficiunt ut corpora illa describant Ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD*, actionibus motricibus $SD \times \mathrm{T}$ & $SD \times \mathrm{L}$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas *TI, LK*, ipsi *DS* parallelas, nil mutant situs earum ad invicem, sed faciunt ipsa æqualiter accedere ad lineam *IK*; quam ductam concipe per medium corporis *S*, & lineæ *DS* perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam *IK* accessus faciendo ut Systema corporum *T* & *L* ex una parte, & corpus *S* ex altera, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum *C*. Tali motu corpus *S* (eo quod summa virium motricium $SD \times \mathrm{T} \& SD \times \mathrm{L}$, distantiæ *CS* proportionalium, tendit versus centrum *C*) describit Ellipsin circa idem *C*; & punctum *D*, ob proportionales *CS, CD*, describet Ellipsin consimilem, e regione. Corpora autem *T* & *L* viribus motricibus $SD \times \mathrm{T}$ & $SD \times \mathrm{L}$, (prius priore, posterius posteriore) æqualiter & secundum lineas parallelas *TI* & *LK* (ut dictum est) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & sextum)circa centrum mobile *D* Ellipses suas describere, ut prius. *Q.E.I.*



Addatur jam corpus quartum *V*, & simili argumento concludetur hoc & punctum *C* Ellipses circa omnium commune centrum gravitatis *B* describere; manentibus motibus priorum corporum *T, L* & *S* circa centra *D* & *C*, sed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q.E.I.*

hæc ita se habent ubi corpora *T* & *L* trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum *B*, in plano immobili describunt. *Q.E.I.*

<155>

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum Vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse inter se in Ellipsibus; & radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proxime.

In Propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in Ellipsibus accurate. Quo magis recedit Lex virium a Lege ibi posita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest ut corpora secundum Legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in Ellipsibus accurate, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab Ellipsibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum) vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, absque errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipsibus, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usque donec error iste & actiones mutuæ sint datis quibusvis minores, atque adeo donec Orbes cum Ellipsibus quadrent, & areæ respondeant temporibus, absque errore qui non sit minor quovis dato. *Q.E.O.*

Cas. 2. Fingamus jam Systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuo revolventium corporum Systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut Systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum, <156> nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum; &, augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores sint quam datæ quævis, perseverabunt motus partium Systematis inter se absque erroribus qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, Systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipsim fortiore,) & Radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, absque ullis erroribus, nisi quas partium distantiæ (perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. *Q.E.O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

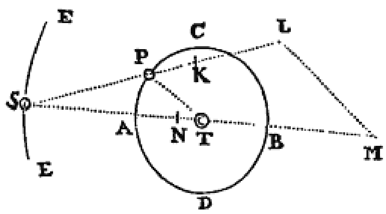
Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Systematis versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo: Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si Systematis hujus partes in Ellipsibus vel Circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod <157> eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissime, aut urgentur æqualiter & secundum lineas parallelas quamproxime.

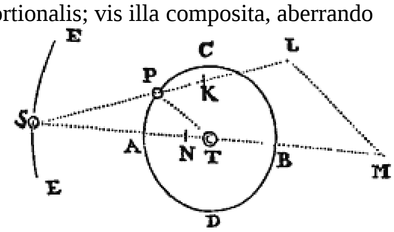
PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si corpora tria, quorum Vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum, se mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciproce ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & Figuram ad formam Ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quam si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonstratione Corollarii secundi Propositionis præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.



Cas. 1. Revolvantur corpora minora *P* & *S* in eodem plano circa maximum *T*, quorum *P* describat Orbem interiorem *PAB*, & *S* exteriorem *SE*. Sit *SK* mediocris distantia corporum *P* & *S*; & corporis *P* versus *S* attractio acceleratrix in mediocri illa distantia exponatur per eandem. In duplicata ratione *SK* ad *SP* capiatur *SL* ad *SK*, & erit *SL* attractio acceleratrix corporis *P* versus *S* in distantia quavis *SP*. Junge *PT*, eique parallelam age *LM* occurrentem *ST* in *M*, & attractio *SL* resolvetur (per Legum Corol 2.) in attractiones *SM, LM*. Et sic urgebitur corpus *P* vi acceleratrice triplici: <158> una tendente ad *T* & oriunda a mutua attractione corporum *T* & *P*. Hac vi sola corpus *P* circum corpus *T* sive immotum sive hac attractione agitatum, describere deberet & areas, radio *PT* temporibus proportionales, & Ellipsin cui umbilicus est in centro corporis *T*. Patet hoc per Prop. XI. & Corollaria 2 & 3 Theor. XXI. Vis altera est attractionis *LM*, quæ quoniam tendit a *P* ad *t*, superaddita vi priori coincidet cum ipsa, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per Corol. 3. Theor. XXI. At quoniam non est quadrato distantiæ *PT* reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idque eo magis quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Prop. XI, & per Corol. 2. Theor XXI) vis qua Ellipsis circa umbilicum *T* describitur tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ *PT* reciproce proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis *PAB* aberret a forma Ellipseos umbilicum habentis in *S*; idque eo magis quo major est aberratio ab hac proportione; atque adeo etiam quo major est proportio vis secundæ *LM* ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia *SM*, trahendo corpus *P* secundum lineam ipsi *ST* parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a *P* in *S*, quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atque adeo quæ faciet ut corpus *P*, radio *TP*, areas non amplius temporibus proportionales describat, atque aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de causa adaugebit, tum quod non dirigitur a *P* ad *T*, tum etiam quod non sit proportionalis quadrato distantiæ *PT*. Quibus intellectis, manifestum est quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod Orbis *PAB* tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipue vis tertia, sit minima, vi prima manente.



<159>

Exponatur corporis *T* attractio acceleratrix versus *S* per lineam *SN*; & si attractiones acceleratrices *SM*, *SN* æquales essent; hæ, trahendo corpora *T* & *P* æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per Legum Corol. 6.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio *SN* minor esset attractione *SM*, tolleret ipsa attractionis *SM* partem *SN*, & maneret pars sola *MN*, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio *SN* major esset attractione *SM*, oriretur ex differentia sola *MN* perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem *SN* reducitur semper attractio tertia superior *SM* ad attractionem *MN*, attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita *PAB* ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum *P* & *T* attractiones acceleratrices, factæ versus corpus *S*, accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio *SN* non est nulla, neque minor minima attractionum omnium *SM*, sed inter attractionum omnium *SM* maximam & minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neque multo minor attractione *SK. Q.E.D.*

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora *P, S* circa maximum *T* in planis diversis; & vis *LM*, agendo secundum lineam *PT* in plano Orbitæ *PAB* sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus *P* de plano Orbitæ suæ deturbabit. At vis altera *NM*, agendo secundum lineam quæ ipsi *ST* parallela est, (atque adeo, quando corpus *S* versatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ *PAB*;) præter perturbationem motus in Longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in Latitudinem, trahendo corpus *P* de plano suæ Orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum *P* & *T* ad invicem situ, erit ut vis illa generans *MN*, adeoque minima evadet ubi *MN* est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio *SN* non est multo major neque multo minor attractione *SK. Q.E.D.*

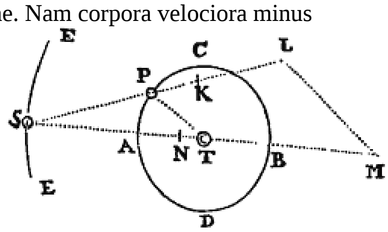
Corol. 1. Ex his facile colligitur quod, si corpora plura minora *P, S, R*, &c. revolvantur circa maximum *T*, motus corporis intimi *P* minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *T* pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atque cæteri a se mutuo.

<160>

Corol. 2. In Systemate vero trium corporum *T, P, S*, si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius describet prope Conjunctionem *A* & Oppositionem *B*, quam prope Quadraturas *C, D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit secundum lineam *PT* accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in antecedentia vel in consequentia dirigitur. Talis est vis *NM*. Hæc in transitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in antecedentia, motumque accelerat; dein usque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in consequentia usque ad *B*, & ultimo in antecedentia transeundo a *B* ad *C*.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppositione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior est in Quadraturis quam in Conjunctione & Oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *KL* vel *NM*, in Conjunctione & Oppositione, contraria est vi qua corpus *T* trahit corpus *P*, adeoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *T*.



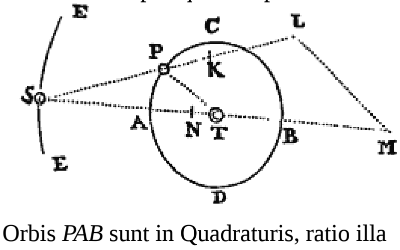
Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *T* in Quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Hæc ita se habent excluso motu Excentricitatis. Nam si Orbita corporis *P* excentrica sit: Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi Apsides sunt in Syzygiis; indeque fieri potest ut corpus *P*, ad Apsidem summam appellans, absit longius a corpore *T* in Syzygiis quam in Quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, qua corpus *P* retinetur in Orbe suo, augetur in Quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augeatur; est autem vis illa centripeta (per Corol. 2, Prop. IV.) in ratione composita ex ratione simplici radii *TP* directe & ratione duplicata tempo <161> ris periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis *KL*, adeoque tempus periodicum, si maneat Orbis radius *TP*, augeri, idque in subduplicata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in Radii hujus ratione sesquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus *P* minus semper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro *T*; & contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui *S*, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices; augebitur simul ac diminuetur Radius *TP* per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione composita ex ratione sesquiplicata Radii & ratione subduplicata qua vis illa centripeta corporis centralis *T*, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui *S*, diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmissis consequitur etiam quod Ellipseos a corpore *P* descriptæ Axis seu Apsidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, & in singulis corporis revolutionibus per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis qua corpus *P* urgetur in corpus *T* in Quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi centripeta qua corpus *T* trahit corpus *P*. Vis prior *LM*, si augeatur distantia *PT*, augetur in eadem fere ratione cum hac distantia, & vis posterior decrescit in duplicata illa ratione, adeoque summa harum virium decrescit in minore quam duplicata ratione distantiæ *PT*, & propterea (per Corol. 1. Prop. XLV) efficit ut Aux, seu Apsis summa, regrediatur. In Conjunctione vero & Oppositione, vis qua corpus *P* urgetur in corpus *T* differentia est inter vim qua corpus *T* trahit corpus *P* & vim *KL*; & differentia illa, propterea quod vis *KL* augetur quamproxime in ratione distantiæ *PT*, decrescit in majore quam duplicata ratione distantiæ *PT*, adeoque (per Corol. 1. Prop. XLV) efficit ut Aux progrediatur. In locis inter Syzygias & Quadraturas pendet motus Augis ex causa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis *KL* in Syzygiis sit quasi duplo major quam vis *LM* in Quadraturis, excessus in tota revolutione erit penes vim *KL*, transferetque Augem singulis revolutionibus in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Systema corporum duorum *T, P* corporibus pluribus *S, S, S* &c. in Orbe *ESE* consistentibus, undique cingi. Namque horum actioni <162> bus actio ipsius *T* minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicata distantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ *TP*, in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atque adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablatitiam *KL* seu *NM-LM*, progredientur velocius, inque Quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicata distantiæ diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiæ diminutæ, adeoque Orbem describeret Orbe Elliptico interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas, & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decrescat. Jam vero in Systemate corporum *T, P, S*, ubi Apsides Orbis *PAB* sunt in Quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, <163> & maxima fit ubi Apsides sunt in Syzygiis. Si Apsides constituantur in Quadraturis, ratio prope Apsides minor est & prope Syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velocissimus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter Apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in Apside



ima est ad vim in Apside summa in minore quam duplicata ratione distantiæ Apsidis summæ ab umbilico Ellipseos ad distantiam Apsidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apsides constituuntur in Syzygiis, vis in Apside ima est ad vim in Apside summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires *LM* in Quadraturis additæ viribus corporis *T* componunt vires in ratione minore, & vires *KL* in Syzygiis subductæ viribus corporis *T* relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in transitu inter Apsides, minima in Quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in transitu Apsidum a Quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetque Excentricitatem Ellipsieos; inque transitu a Syzygiis ad Quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in Latitudinem, fingamus planum Orbis *EST* immobile manere; & ex errorum exposita causa manifestum est quod, ex viribus *NM*, *ML*, quæ sunt causa illa tota, vis *ML* agendo semper secundum planum Orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in Latitudinem; quodque vis *NM* ubi Nodi sunt in Syzygiis, agendo etiam secundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpusque *P* de plano Orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu corporis a Quadraturis ad Syzygias, augetque vicissim eandem in transitu a Syzygiis ad Quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At si Nodi constituantur in Octantibus post Quadraturas, id est, inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligetur ex modo expositis quod, in transitu corporis *P* a Nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usque ad Quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuo in transitu per alios 45 gradus, usque ad Nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor est semper in Nodo subsequente quam in præce <164> dente. Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur quam diminuitur ubi Nodi sunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi Nodi sunt in Syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a Syzygiis ad Quadraturas, in singulis corporis ad Nodos appulsibus, diminuitur, fitque omnium minima ubi Nodi sunt in Quadraturis & corpus in Syzygiis: dein creseit iisdem gradibus quibus antea decreverat, Nodisque ad Syzygias proximas appulsis ad magnitudinem primam revertitur.

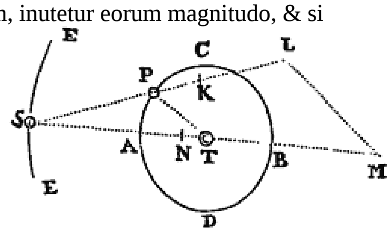
Corol. 11. Quoniam corpus *P* ubi Nodi sunt in Quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis sui, idque in partem versus *S*, in transitu suo a Nodo *C* per Conjunctionem *A* ad Nodum *D*; & in contrariam partem in transitu a Nodo *D* per Oppositionem *B* ad Nodum *C*; manifestum est quod in motu suo a Nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis sui plano primo *CD*, usque dum perventum est ad Nodum proximum; adeoque in hoc Nodo, longissime distans a plano illo primo *CD*, transit per planum Orbis *EST* non in plani illius Nodo altero *D*, sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus est Nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergent Nodi recedere in transitu corporis de hoc Nodo in Nodum proximum. Nodi igitur in Quadraturis constituti perpetuo recedunt; in Syzygiis (ubi motus in Latitudinem nil perturbatur) quiescunt; in locis intermediis, conditionis utriusque participes, recedunt tardius; adeoque, semper vel retrogradi vel stationarii, singulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis descripti Errores sunt paulo majores in Conjunctione corporum *P*, *S* quam in eorum Oppositione, idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cumque rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *S* tanta statuitur magnitudo ut circa ipsum revolvatur corporum duorum *T* & *P* Systema. Et ex aucto corpore *S* auctaque adeo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur,evadent errores illi omnes (paribus distantiis) majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus *S* circum Systema corporum *P* & *T* revolvitur.

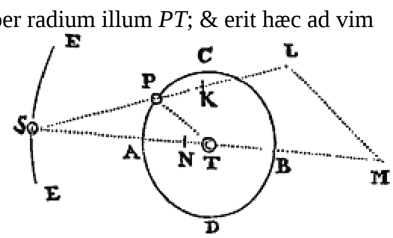
Corol. 14 Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum est, sint quamproxime ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc est, si detur tum distantia *PT*, tum corporis *S* vis absoluta, ut *ST cub.* reciproce; sint autem vires illæ *NM*, *ML* causæ errorum & effectuum omnium de quibus actum est in præcede <165> ntibus Corollariis: manifestum est quod effectus illi omnes, stante corporum *T* & *P* Systemate, & mutatis tantum distantia *ST* & vi absoluta corporis *S*, sint quamproxime in ratione composita ex ratione directa vis absolutæ corporis *S* & ratione triplicata inversa distantiæ *ST*. Unde si Systema corporum *T* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *S*, vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus erunt (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, si magnitudo corporis *S* proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *S* e corpore *T* spectati, & vice versa. Namque hæ rationes eædem sunt atque ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus Orbium *ESE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, inutetur eorum magnitudo, & si corporum *S* & *T* vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc est, vis corporis *T*, qua corpus *P* de recto tramite in Orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *S* qua corpus idem *P* de Orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo & eadem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.



Corol. 16. Unde, si dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & distantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires *NM*, *ML*, cæteris stantibus, sunt ut Radius *TP*, & harum effectus periodici (per Corol. 2, Lem. X) ut vires & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *T* spectati (id est, tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in Longitudinem & Latitudinem errores apparentes) sunt, in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis <166> revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14, & in quolibet corporum *T*, *P*, *S* Systemate, ubi *P* circum *T* sibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *T* apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverse. Et inde motus medius Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterque erit ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverse. Augendo vel minuendo Excentricitatem & Inclinationem Orbis *PAB* non mutantur motus Augis & Nodorum sensibilitur, nisi ubi eædem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea *LM* nunc major sit nunc minor quam radius *PT*, exponatur vis mediocris *LM* per radium illum *PT*; & erit hæc ad vim mediocrem *SK* vel *SN* (quam exponere licet per *ST*) ut longitudo *PT* ad longitudinem *ST*. Est autem vis mediocris *SN* vel *ST*, qua corpus *T* retinetur in Orbe suo circum *S*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *T*, in ratione composita ex ratione radii *ST* ad radium *PT*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *T* ad tempus periodicum corporis *T* circum *S*. Et ex æquo, vis mediocris *LM*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *T* (quave corpus idem *P* eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile *T* ad distantiam *PT* revolvi posset) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia *PT*, datur vis mediocris *LM*; & ea data, datur etiam vis *MN* quamproxime per analogiam linearum *PT*, *MN*.



Corol. 18. Iisdem legibus quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari Annulum fluidum, rotundum ac corpori T concentricum; & singulæ Annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis P per <167> agendo, propius accedent ad corpus T, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis S, quam in Quadraturis. Et Nodi Annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis S vel T, quiescent in Syzygiis; extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam Globum corporis T, ex materia non fluida constantem, ampliari & extendi usque ad hunc Annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore Corollario) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam superficies Globi, & sic fluet in alveo refluetque ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis S nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par est ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum suum (per Legum Corol. 5.) ut & Globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, per Legum Corol. 6. Accedat autem corpus S, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem LM trahet aquam deorsum in Quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad Syzygias; & vis KL trahet eandem sursum in Syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam ascendere usque ad Quadraturas.

Corol. 20. Si Annulus jam rigeat & minuatur Globus, cessabit motus fluendi & refluendi; sed Oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum Annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie sua contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusque Oscillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in Syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impressum usque dum Annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac ra <168> tione maximus decrescentis inclinationis motus fit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus post Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis, & maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem est ratio Globi Annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet enim vicem Annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, aucta utcunque Globi hujus vi centripeta, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si Globus juxta æquatorem vel depressior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu Nodorum innotescit constitutio Globi. Nimirum si Globus polos eosdem constanter servat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiscere; dein impetu quocunque oblique in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, quam in alium quemvis; perspicuum est quod is axem suum axisque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique, in eadem illa superficiei parte qua prius, impulsu quocunque novo; & cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est quod hi duo impulsus successive impressi eundem producent motum ac si simul impressi fuissent, hoc est eundem ac si Globus vi simplici ex utroque (per Legum Corol. 2.) composita impulsus fuisset, atque adeo simplicem, circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus absque primo generaret; atque adeo impulsuum amborum factorum in loca quæcunque: Generabunt hi eundem motum cir <169> cularem ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemiphærium æqualiter, & propterea Globum, quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum Globi, facietque polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describere. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Casu (per Corol. 21) Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per Corol. 20) Nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipsum ductis, describere potest.*

Nam corporis S attractiones versus T & P componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum C, quam in corpus maximum T, quæque quadrato distantiæ SC magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiæ ST: ut rem perpendenti facile constabit.

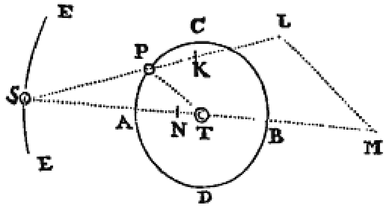
<170>

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P & T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*

Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum in quod corpus S conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quisceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus S ex una parte,

& commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII collatum cum demonstratis in Propos. LXIV & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio ubi commune trium centrum quiescit, hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: sitque major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *T*, moveri incipit & magis deinceps magisque agitatur.



<171>

Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ descriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directa & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahent agitentque, & Orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus Orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In Systemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente: erunt Absolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora* A, B, *quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B, C, D* versus *A*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiis; & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem secundam, septimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, sunt (per motus Legem tertiam) sibi invicem æqua <172> les. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B. Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula Systematis corpora *A, B, C, D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum Legem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In Systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri potest accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut sit in Magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem; sive conatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuo petentium, vel per Spiritus emissos se invicem agitantium, sive is ab actione Ætheris aut Aeris, Mediive cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem Impulsus, non species virium <173> & qualitates Physicas, sed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens, ut in Definitionibus explicui. In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus Physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere, & quales motus inde consequantur.

SECTIO XII.

De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

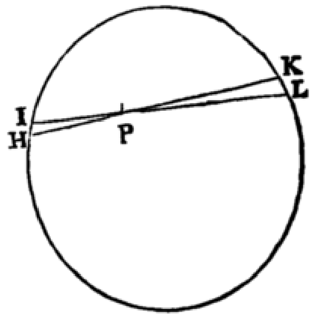
PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad Sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

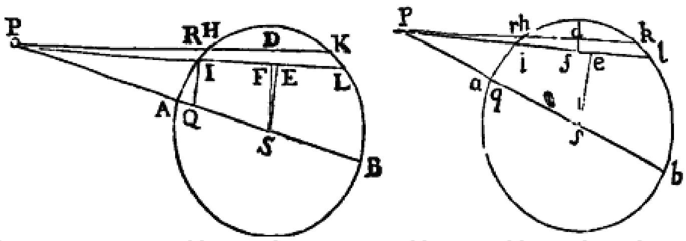
Sit *HIKL* superficies illa Sphærica, & *P* corpusculum intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (per Corol. 3. Lem. VII) similia, arcus illi erunt distantiis *HP*, *LP* proportionales; & superficiei Sphæricæ particulæ quævis, ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem <174> æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruunt. Et simili argumento, attractiones omnes per totam Sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum Sphæræ, vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.



Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ superficies Sphæricæ, centris *S, s*, diametris *AB, ab* descriptæ, & *P, p* corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ



PHK, PIL, phk, pil, auferentes a circulis maximis *AHB, ahb*, æquales arcus *HK, hk* & *HL, hl:* Et ad eas demittantur perpendicula *SD, sd; SE, se; IR, ir*; quorum *SD, sd* secent *PL, pl* in *F* & *f:* Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ, iq*. Evanescant anguli *DPE, dpe:* & (ob æquales *DS* & *ds, ES* & *es*,) lineæ *PE, PF* & *pe, pf* & lineolæ *DF, df* pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE, dpe* simul evanescentibus, est æqualitatis. His itaque constitutis, erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, & *pf* ad *pi* ut *df* vel *DF* ad *ri*; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut *RI* ad *ri*, hoc est (per Corol. 3. Lem. VII,) ut arcus *IH* ad arcum *ih*. Rursus *PI* ad *PS* ut *IQ* ad *SE*, & *ps* ad *pi* ut *se* vel *SE* ad *iq*; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut *IQ* ad *iq*. Et conjunctis rationibus $PI\ quad. \times pf \times ps$ ad $pi\ quad. \times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam <175> arcus *IH* convolutione semicirculi *AKB* circa diametrum *AB* describet, ad superficiem circularem, quam arcus *ih* convolutione semicirculi *akb* circa diametrum *ab* describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula *P* & *p*, sunt (per Hypothesin) ut ipsæ superficies applicatæ ad quadrata distantiarum suarum a corporibus, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2. resolutione virium) secundum lineas *PS, ps* ad centra tendunt, ut *PI* ad *PQ*, & *pi* ad *pq*; id est (ob similia triangula *PIQ* & *PSF, piq* & *psf*) ut *PS* ad *PF* & *ps* ad *pf*. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus *P* versus *S* ad attractionem corpusculi *p* versus *s*, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc est, ut *ps quad.* ad *PS quad.* Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum *KL, kl* descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut *ps quad.* ad *PS quad.*; inque eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies Sphærica, capiendo semper *sd* æquales *SD* & *se* æquales *SE*, distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum Sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad Sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, ac detur tum Sphæræ densitas, tum ratio diametri Sphæræ ad distantiam corpusculi a centro ejus; dico quod vis qua corpusculum attrahitur proportionalis erit semidiametro Sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a Sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & distantias eorum a Sphærarum centris proportionales esse diametris Sphærarum respective, Sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione composita ex ratione particularum directe & ratione duplicata distantiarum in <176> verse. Sed particulæ sunt ut Sphæræ, hoc est, in ratione triplicata diametrorum, & distantiæ sunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione posteriore bis inverse est ratio diametri ad diametrum. *Q.E.D.*

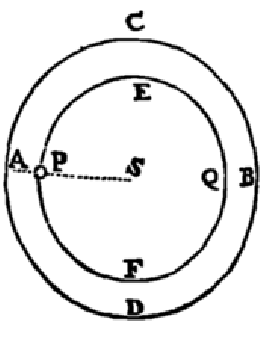
Corol. 1. Hinc si corpuscula in Circulis, circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva constantes, revolvantur; sintque distantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versa, si Tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

Corol. 3. Si ad Solidorum duorum quorumvis similium & æqualiter densorum puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: vires quibus corpuscula, ad Solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri Solidorum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad Sphæræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra Sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.



In Sphæra *ABCD*, centro *S* descripta, locetur corpusculum *P;* & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe Sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est, per Prop. LXX, quod Sphæricæ superficies concentricæ ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus *P*. Restat sola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Prop. LXXII, hæc est ut distantia *PS*. *Q.E.D.*

Scholium.

Superficies ex quibus solida componuntur, hic non sunt pure Mathematicæ, sed Orbes adeo tenues ut eorum crassitudo instar <177> nihili sit; nimirum Orbes evanescentes ex quibus Sphæra ultimo constat, ubi Orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per Puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur Sphæra in superficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantiæ corpusculi a centro, per Prop. LXXI. Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in Sphæram totam, in eadem ratione. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones sunt ut Sphæræ. Nam per Prop. LXXII, si distantiæ sunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione; &, distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est, in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra Sphæram homogeneam positum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem Sphæra ex particulis attractivis; decrescet vis particulæ cujusque in duplicata ratione distantiæ a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad Sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; dico quod Sphæra quævis alia similaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantiæ suæ a centro Sphæræ trahentis, (per Prop. LXXIV) & prop <178> terea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV) reciproce proportionalis quadrato distantiæ suæ a centro Sphæræ; adeoque huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. *Q.E.D.*

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, versus alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem III) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

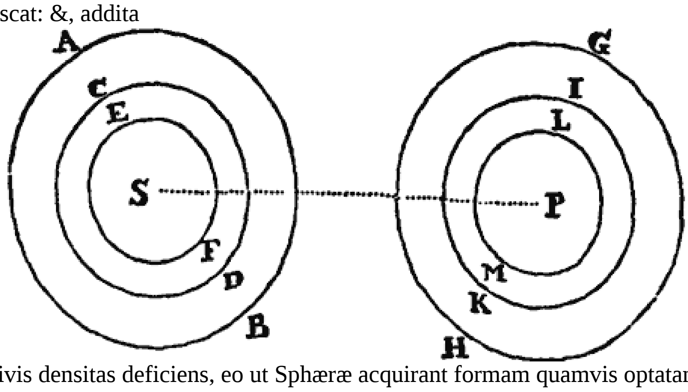
Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quod materiæ densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similares, & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicata ratione distantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum.

Sunto Sphæræ quotcunque concentricæ similares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam <179> densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per Prop. LXXV) trahent Sphæras alias quotcunque concentricas similares *GH*, *IK*, *LM*, &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias, hoc est, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum sic, ut materiæ densitas una cum vi attractiva, in progressu a circumferentia ad centrum, secundum Legem quamcunque crescat vel decrescat: &, addita



materia non attractiva, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum superius) in eadem illa distantiæ quadratæ ratione inversa. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si ejusmodi Sphæræ complures, sibi invicem per omnia similes, se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibusvis centrorum distantiis, ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque distantiis quibusvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, seu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque distantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriusque virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

Corol. 6. Si hujusmodi Sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintque distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt Tempora periodica.

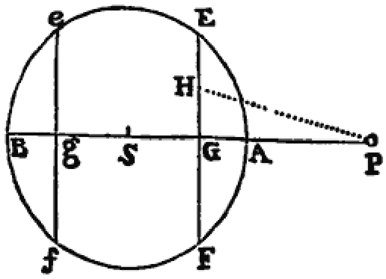
Corol. 7. Et vicissim, si Tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ, proportionales distantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.



Cas 1. Sit *AEBF* Sphæra, *S* centrum ejus, *P* corpusculum attractum, *PASB* axis Sphæræ per centrum corpusculi transiens, *EF, ef* plana duo quibus Sphæra secatur, huic axi perpendicularia & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphæræ; *Gg* intersectiones planorum & axis, & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpusculum *P*,secundum lineam *PH* exercita, est ut distantia *PH*; & (per Legum Corol. 2.) secuncundum lineam *PG*, seu versus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc est plani totius vis, qua corpusculum *P* trahitur versus centrum *S*, est ut numerus punctorum ductus in distantiam *PG:* id est, ut contentum sub plano ipso *EF* & distantia illa *PG*. Et similiter vis plani *ef*, qua corpusculum *P* <181> trahitur versus centrum *S*,est ut planum illud ductum in distantiam suam *Pg*, sive ut huic æquale planum *EF* ductum in distantiam illam *Pg*; & summa virium plani utriusque ut planum *EF* ductum in summam distantiarum *PG+Pg*, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam *PS*, hoc est, ut duplum planum *EF* ductum in distantiam *PS*, vel ut summa æqualium planorum *EF+ef* ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam *PS*, hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui *S* a corpusculo *P*. *Q.E.D.*

Cas. 2. Trahat jam corpusculum *P* Sphæram *AEBF*. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia *PS*. *Q.E.D.*

Cas 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris *P*; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantiæ inter centra Sphærarum. *Q.E.D.*

Cas. 4. Trahant Sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. *Q.E.D.*

Cas, 5. Locetur jam corpusculum *p* intra Sphæram *AEBF*; & quoniam vis plani *ef* in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia *pg*; & vis contraria plani *EF* ut contentum sub plano illo & distantia *pG*; erit vis ex utraque composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in *pS* distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Et simili argumento attractio planorum omnium *EF, ef* in Sphæra tota, hoc est, attractio Sphæræ totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in *pS* distantiam corpusculi a centro Sphæræ. *Q.E.D.*

Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris *p* componatur Sphæra nova, intra Sphæram priorem *AEBF* sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex Sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum *pS*. *Q.E.D.*

<182>

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcunque dissimilares & inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undique similares; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiæ inter centra Sphærarum.

Demonstratur ex Propositione præcedente, eodem modo quo Propositio LXXVII ex Propositione LXXV demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius in Propositionibus X & LXIV de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæricorum conditionis jam descriptæ, suntque corpora attracta Sphæræ conditionis ejusdem.

Scholium.

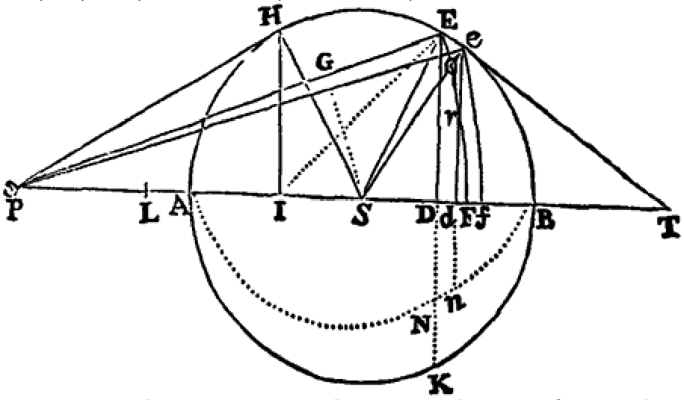
Attractionum Casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi Vires centripetæ decrescunt in duplicata distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque Casu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum Vires centripetas eadem Lege, in recessu a centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

LEMMA XXIX.

Si describantur centro S *circulus quilibet* AEB, *& centro* P *circuli duo* EF, ef, *secantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *& ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, si distantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* Dd *ad lineam evanescentem* Ff *ea sit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

<183>

Nam si linea *Pe* secet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evanescente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob similia triangula *DTE*, *dte*, *DES*; erit *Dd* ad *Ee*, ut *DT* ad *TE*, seu *DE* ad

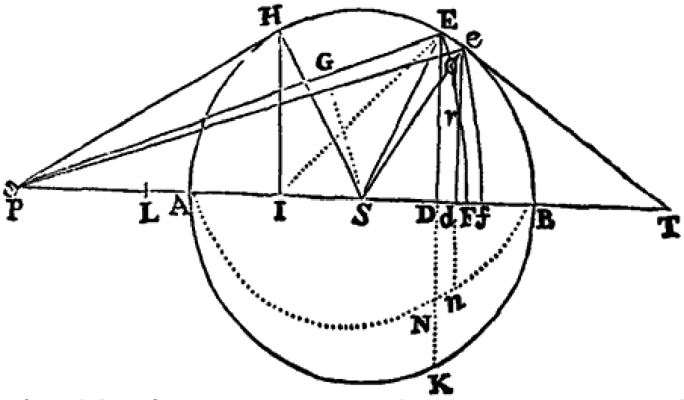


ES; & ob triangula *Eeq*, *ESG* (per Lem. VIII, & Corol. 3. Lem. VII) similia, erit *Ee* ad *eq* seu *Ff*, ut *ES* ad *SG*; & ex æquo, *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc est (ob similia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evanescens EFfe, *convolutione sui circa axem* PS, *describat solidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod Vis, qua solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione composita ex ratione solidi* DE$q \times$ Ff *& ratione vis qua particula data in loco* Ff *traheret idem corpusculum.*

Nam si primo consideremus vim superficiei Sphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & linea *de* ubivis secatur in *r*; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente Sphæræ radio *PE*, (uti demonstravit *Archimedes* in Lib. de *Sphæra* & *Cylindro*.) Et hujus vis secundum lineas *PE* vel *Pr* undique in superficie conica sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola *Dd* vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato Sphæræ radio *PE* & <184> lineola illa *Dd:* at secundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem minor, in ratione *PD* ad *PE*, adeoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea *DF* in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur *Dd*; & superficies *FE* dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, adeoque ut *DE quad.* Ducatur



jam superficies *FE* in altitudinem *Ff*; & fiet solidi *EFfe* vis exercita in corpusculum *P* ut $DEq \times Ff$: puta si detur vis quam particula aliqua data *Ff* in distantia *PF* exercet in corpusculum *P*. At si vis illa non detur, fiet vis solidi *EFfe* ut solidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad Sphæræ alicujus AEB, *centro* S *descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem* AB, *in quo corpusculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis singulis* D *perpendicula* DE, *Sphæræ occurentia in* E, *& in ipsis capiantur longitudines* DN, *quæ sint ut quantitas* $\frac{\mathrm{DE}q \times \mathrm{PS}}{\mathrm{PE}}$ *& vis quam Sphæræ particula sita in axe ad distantiam* PE *exercet in corpusculum* P *conjunctim: dico quod Vis tota, qua corpusculum* P *trahitur versus Sphæram, est ut area comprehensa sub axe Sphæræ* AB *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

<185>

Etenim stantibus quæ in Lemmate & Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem Sphæræ *AB* dividi in particulas innumeras æquales *Dd*, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas *EFfe*; & erigatur perpendiculum *dn*. Per Theorema superius, vis qua lamina *EFfe* trahit corpusculum *P* est ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad distantiam *PE* vel *PF* exercita conjunctim. Est autem per Lemma novissimum, *Dd* ad *Ff* ut *PE* ad *PS*, & inde *Ff* æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale *Dd* in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ *EFfe* est ut *Dd* in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam *PF* exercita conjunctim, hoc est (ex Hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens *DNnd*. Sunt igitur laminarum omnium vires in corpus *P* exercitæ, ut areæ omnes *DNnd*, hoc est, Sphæræ vis tota ut area tota *ABNA*. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, & fiat *DN* ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpusculum a Sphæra attrahitur, ut area *ABNA*.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut distantia corpusculi a se attracti, & fiat *DN* ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$: erit vis qua corpusculum *P* a Sphæra tota attrahitur ut area *ABNA*.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciproce ut cubus distantiæ corpusculi a se attracti, & fiat *DN* ut $\frac{DEq\times PS}{PEqq}$: erit vis qua corpusculum a tota Sphæra attrahitur ut area *ABNA*.

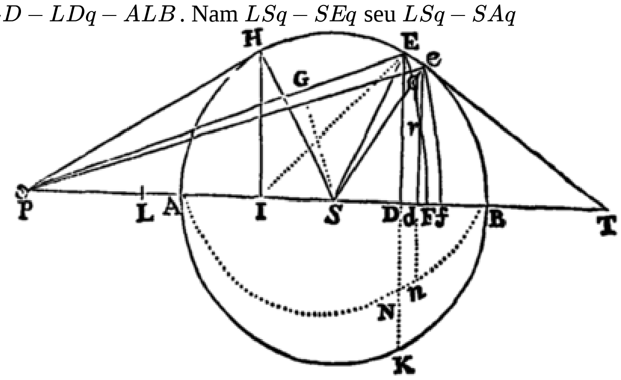
Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas *V*, fiat autem *DN* ut $\frac{DEq\times PS}{PE\times \mathrm{V}}$; erit vis qua corpusculum a Sphæra tota attahitur ut area *ABNA*.

<186>

PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est Area ABNA.

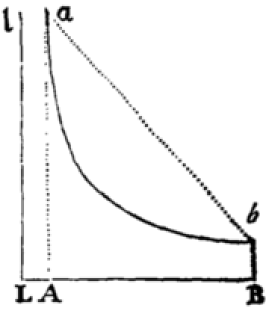
A puncto *P* ducatur recta *PH* Sphæram tangens in *H*, & ad axem *PAB* demissa normali *HI*, bisecetur *PI* in *L*; & erit (per Prop. 12, Lib. 2. Elem.) *PEq* æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Est autem *SEq* seu *SHq* (ob similitudinem triangulorum *SPH*, *SHI*) æquale rectangulo *PSI*. Ergo *PEq* æquale est contento sub $PS \& PS + SI + 2SD$, hoc est, sub $PS \& 2LS + 2SD$, id est, sub $PS \& 2LD$. Porro *DE quad* æquale est $SEq - SDq$, seu $SEq - LSq + 2SLD - LDq$ id est, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$



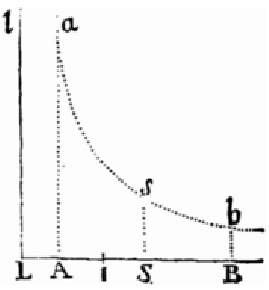
(per Prop. 6, Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo *ALB*. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro *DEq*; & quantitas $\frac{DEq\times PS}{PE\times V}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ *DN*, resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD\times PS}{PE\times V} - \frac{LDq\times PS}{PE\times V} - \frac{ALB\times PS}{PE\times V}$: ubi si pro *V* scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro *PE* medium proportionale inter $PS \& 2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innotescunt. *Q.E.F.*

<187>

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro V scribe distantiam *PE*, dein $2PS \times LD$ pro *PEq*, & fiet *DN* ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD} -$. Pone *DN* æqualem duplo ejus $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem *AB* describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita *LD* ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel descrescendo æquetur semper longitudini *LD*, describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream Hyperbolicam; quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam *ABNA*. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta, *L, A, B* erige perpendicula *Ll, Aa, Bb*, quorum *Aa* ipsi *LB*, & *Bb* ipsi *LA* æquetur. Asymptotis *Ll, LB*, per puncta *a, b* describatur Hyperbola *ab*. Et acta chorda *ba* claudet aream *aba* areæ quæsitæ *ABNA* æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\,cub}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro *PEq*; & fiet *DN* ut $\frac{SL\times ASq}{PS\times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB\times ASq}{2PS\times LDq}$, id est (ob continue proportionales *PS, AS, SI*) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB\times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem *AB*, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyper <188> bolicam; secunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB\times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB\times SI}{2LA} - \frac{ALB\times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima subducatur summa secundæ ac tertiæ, & manebit area quæsita *ABNA*. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta *L, A, S, B* erige perpendicula *Ll, Aa, Ss, Bb*, quorum *Ss* ipsi *SI* æquetur, perque punctum *s* Asymptotis *Ll, LB* describatur Hyperbola *asb* occurrens perpendiculis *Aa, Bb* in *a* & *b*; & rectangulum $2ASI$ subductum de area Hyperbolica *AasbB* relinquet aream quæsitam *ABNA*.



Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad singulas Sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicata ratione distantiæ a particulis; scribe $\frac{PEqq}{2AScub}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro *PE*, & fiet *DN* ut $\frac{SIq\times SL}{\sqrt{2\mathrm{SI}}} \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LDc}}}, -\frac{SIq}{2\sqrt{2\mathrm{SI}}} \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LD}}}, -\frac{SIq\times ALB}{2\sqrt{2\mathrm{SI}}} \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LDqc}}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem *AB*, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq\times SL}{\sqrt{2\mathrm{SI}}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2\mathrm{SI}}}$ in $\sqrt{\mathrm{LB}} - \sqrt{\mathrm{LA}}$; & $\frac{SIq\times ALB}{3\sqrt{2\mathrm{SI}}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA\,cub}} - \frac{1}{\sqrt{LB\,cub}}$. Et hæ post debitam reductionem, fiunt $\frac{2SIq\times SL}{LI}$, *SIq*, & $SIq + \frac{2SIcub}{LI}$. Hæ vero, subctis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4SIcub}{3LI}$. Igitur vis tota, qua corpusculum *P* in Sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SI\,cub}{PI}$, id est, reciproce ut $PS\,cub \times PI$. *Q.E.I.*

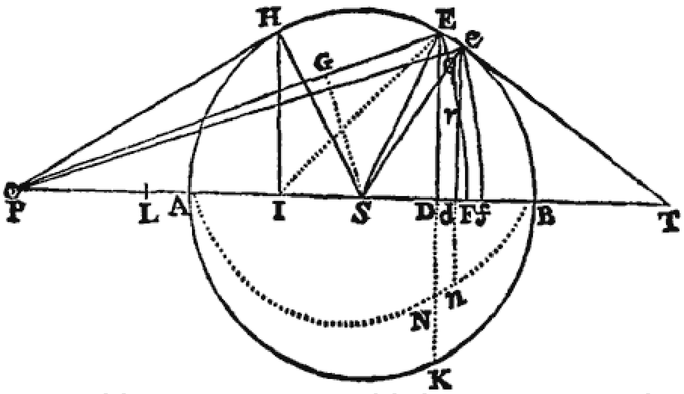
Eadem Methodo determinari potest Attractio corpusculi siti intra Sphæram, sed expeditius per Theorema sequens.

<189>

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In Sphæra centro S *intervallo* SA *descripta, si capiantur* SI, SA, SP *continue proportionales: dico quod corpusculi intra Sphæram in loco quovis* I *attractio est ad attractionem ipsius extra Sphæram in loco* P, *in ratione composita ex subduplicata ratione distantiarum a centro* IS, PS *& subduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut si vires centripetæ particularum Sphæræ sint reciproce ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione



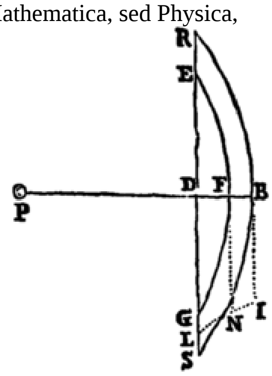
composita ex subduplicata ratione distantiæ *SI* ad distantiam *SP* & ratione subduplicata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione subduplicata distantiarum *SI*, *SP* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum Sphæræ sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in *I* sit ad attractionem in *P*, ut distantia *SP* ad Sphæræ semidiametrum *SA*: Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad inv <190> icem ut *SP quad* ad *SA quad:* Si in quadruplicata, ut *SP cub* ad *SA cub*. Unde cum attractio in *P*, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut $PS\ cub \times PI$, attractio in *I* erit reciproce ut $SAcub \times PI$, id est (ob datum *SA cub*) reciproce ut *PI*. Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco quovis *P*, ordinatim applicata *DN* inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur *IE*, ordinata illa ad alium quemvis locum *I*, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis *E* manantes, esse ad invicem in distantiis *IE*, *PE*, ut PE^n ad IE^n, (ubi numerus *n* designet indicem potestatum *PE* & *IE*) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula *SPE*, *SEI*, fit *IE* ad *PE* ut *IS* ad *SE* vel *SA*; pro ratione *IE* ad *PE* scribe rationem *IS* ad *SA*; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed *PS* ad *SA* subduplicata est ratio distantiarum *PS*, *SI*; & IE^n ad PE^n subduplicata est ratio virium in distantiis *PS*, *IS*. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione composita ex subduplicatis illis rationibus. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad ejus Segmentum quodcunque attrahitur.

Sit *P* corpus in centro Sphæræ, & *RBSD* Segmentum ejus plano *RDS* & superficie Sphærica *RBS* contentum. Superficie Sphærica *EFG* centro *P* descripta secetur *DB* in *F*, ac distinguatur Segmentum in partes *BREFGS*, *FEDG*. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profundi <191> tas *O*, & erit hæc superficies (per demonstata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times \mathrm{O}$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ esse reciproce ut distantiarum dignitas illa cujus Index est *n*; & vis qua superficies *FE* trahit corpus *P* erit ut $\frac{DF \times O}{PF^{n-1}}$. Huic proportionale sit perpendiculum *FN* ductum in *O*; & area curvilinea *BDLIB*, quam ordinatim applicata *FN* in longitudinem *DB* per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota qua Segmentum totum *RBSD* trahit corpus *P*. *Q.E.I.*



PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim qua corpusculum, extra centrum Sphæræ in axe Segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem Segmento.

A Segmento *EBK* trahatur corpus *P* (Vide Fig. Prop. LXXIX, LXXX, LXXXI) in ejus axe *ADB* locatum. Centro *P* intervallo *PE* describatur superficies Sphærica *EFK*, qua distinguatur Segmentum in partes duas *EBKF* & *EFKD*. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI, & vis partis posterioris per Prop. LXXXIII; & summa virium erit vis Segmenti totius *EBKD*. *Q.E.I.*

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad Leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit Propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob eorum in rebus Philosophicis aliqualem usum, subjungere.

<192>

SECTIO XIII.

De Corporum non Sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV) sit reciproce ut quadratum distantiæ attracti corporis a centro Sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusque Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur Propositio de corporibus Figurarum omnium. *Q.E.D.*

<193>

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI, in Exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus Orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra Orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materia æqualiter attractiva constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis similiter positas.

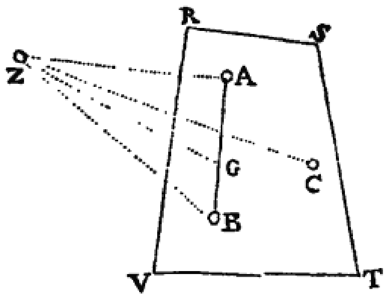
Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. *Q.E.D.*

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis <194> cujusvis distantiarum: attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* adeoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiæ a corporibus, ut *A* & *B:* attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$ id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$, id est, aquales. Si vires decrescunt in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\ cub}{Aqq.}$ & $\frac{B\ cub.}{Bqq.}$ id est, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium Corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi Globi ex materia consimili & æquali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.



Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpusculum aliquod *Z* viribus quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantiæ *AZ, BZ*; sin particulæ statuantur inæquales, sint ut hæ particulæ in distantias suas *AZ, BZ* respective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $\mathrm{A} \times AZ$&$\mathrm{B} \times BZ$. Jungatur *AB*, & secetur ea in *G* ut sit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*; <195> & erit *G* commune centrum gravitatis particularum *A* & *B*. Vis $\mathrm{A} \times AZ$ (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires $\mathrm{A} \times GZ$&$\mathrm{A} \times AG$, & vis $\mathrm{B} \times BZ$ in vires $\mathrm{B} \times GZ$&$\mathrm{B} \times BG$. Vires autem $\mathrm{A} \times AG$&$\mathrm{B} \times BG$, ob proportionales *A* ad *B* & *BG* ad *AG*, æquantur; adeoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $\mathrm{A} \times GZ$&$\mathrm{B} \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum *G*, & vim $\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}} \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ *A* & *B* consisterent in eorum communi gravitatis centro *G*, Globum ibi componentes.

Eodem argumento, si adjungatur particula tertia *C*; & componatur hujus vis cum vi $\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}} \times GZ$ tendente ad centrum *G*; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis Globi illius *G* & particulæ *C*; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum *A, B, C*; & eadem erit ac si Globus & particula *C* consisterent in centro illo communi, Globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque *RSTV* ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram Globi indueret. *Q.E.D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti *Z* idem erit ac si corpus attrahens *RSTV* esset Sphæricum: & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, qua corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in Globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atque Propositio superior.

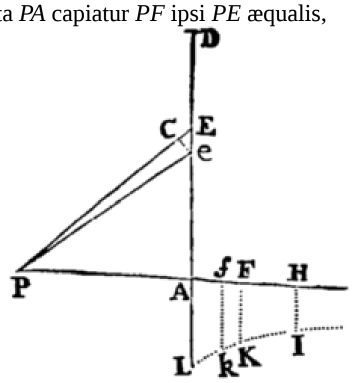
Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in Globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta: corpus attractum movebitur in Ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

<196>

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula Circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in quacunque distantiarum ratione: invenire vim qua corpusculum attrahitur ubivis positum in recta quæ plano Circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano cui recta *AP* perpendicularis est, describi intelligatur Circulus; & invenienda sit vis qua corpusculum quodvis *P* in eundem attrahitur. A Circuli puncto quovis *E* ad corpusculum attractum *P* agatur recta *PE*: In recta *PA* capiatur *PF* ipsi *PE* æqualis, & erigatur normalis *FK*, quæ sit ut vis qua punctum *E* trahit corpusculum *P*. Sitque *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem Circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpusculi *P* attractio in Circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. Q.E.I.



Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*, & in *PA* capiatur *PC*, *Pf* ipsi *Pe* æquales. Et quoniam vis, qua annuli punctum quodvis *E* trahit ad se corpus *P*, ponitur esse ut *FK*, & inde vis qua punctum illud trahit corpus *P* versus *A* est ut $\frac{AP\times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus *P* versus *A*, ut annulus & $\frac{AP\times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio *AE* & latitudine *Ee*, & hoc rectangulum (ob proportionales *PE* & *AE,Ee* & *CE*) æquatur rectangulo $PE\times CE$ seu $PE\times Ff$; erit vis qua annulus iste trahit corpus *P* versus *A*, ut $PE\times Ff \& \frac{AP\times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff\times FK\times AP$, sive ut area *FKkf* ducta in *AP*. Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in Circulo, qui centro *A* & in <197> tervallo *AD* describitur, trahunt corpus *P* versus *A*, est ut area tota *AHIKL* ducta in *AP*. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si vires punctorum descrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit *FK* ut $\frac{1}{PF\,quad.}$, atque adeo area *AHIKL* ut $\frac{1}{PA}-\frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi *P* in Circulum ut $1-\frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

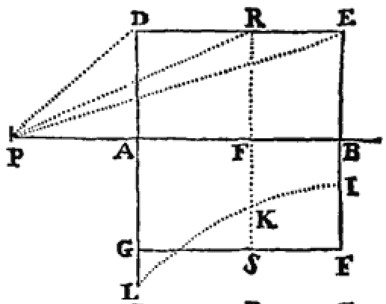
Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^{n}, hoc est, si sit *FK* ut $\frac{1}{\mathrm{D}^{\mathrm{n}}}$, adeoque area *AHIKL* ut $\frac{1}{PA^{\mathrm{n}-1}}-\frac{1}{PH^{\mathrm{n}-1}}$; erit attractio corpusculi *P* in Circulum ut $\frac{1}{PA^{\mathrm{n}-2}}-\frac{PA}{PH^{\mathrm{n}-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter Circuli augeatur in infinitum, & numerus *n* sit unitate major; attractio corpusculi *P* in planum totum infinitum erit reciproce ut $PA^{\mathrm{n}-2}$, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{\mathrm{n}-1}}$ evanescet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

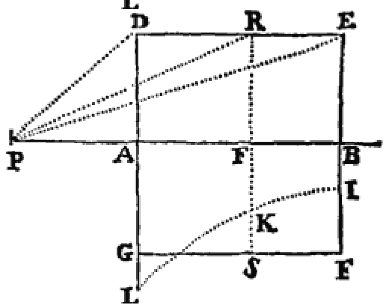
Invenire attractionem corpusculi siti in axe Solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quacunque distantiarum ratione decrescentes.

In Solidum *ADEFG* trahatur corpusculum *P*, situm in ejus axe *AB*. Circulo quolibet *RFS* ad hunc axem perpendiculari secetur hoc Solidum, & in ejus diametro *FS*, in plano aliquo *PALKB* per axem transeunte, capiatur (per Prop. XC) longitudo *FK* vi qua corpusculum *P* in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum *K* curvam lineam *LKI*, planis extimorum circulorum *AL* & *BI* occurrentem in *L* & *I*; & erit attractio corpusculi *P* in Solidum ut area *LABI*. *Q.E.I.*



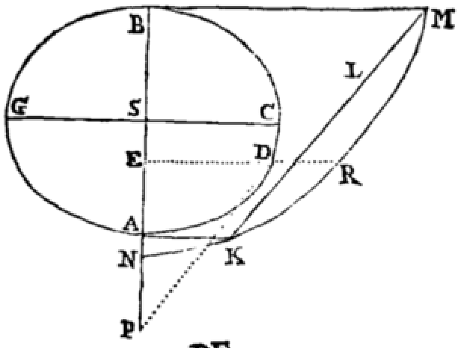
<198>

Corol. 1. Unde si Solidum Cylindrus sit, parallelogrammo *ADEB* circa axem *AB* revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproce ut quadrata distantiarum a punctis: erit attractio corpusculi *P* in hunc Cylindrum ut *AB-PE+PD*. Nam ordinatim applicata *FK* (per Corol. 1. Prop. XC) erit ut $1-\frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem *AB*, describit aream $1\times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem *PB*, describit aream 1 in $\overline{PE-AD}$ (in quod ex curvæ *LKI* quadratura facile ostendi potest:) & similiter pars eadem ducta in longitudinem *PA* describit aream 1 in $\overline{PD-AD}$, ductaque in ipsarum *PB*, *PA* differentiam *AB* describit arearum differentiam 1 in $\overline{PE-PD}$. De contento primo $1\times AB$ auferatur contentum postremum 1 in $\overline{PE-PD}$, & restabit area *LABI* æqualis 1 in $\overline{AB-PE+PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB-PE+PD$.

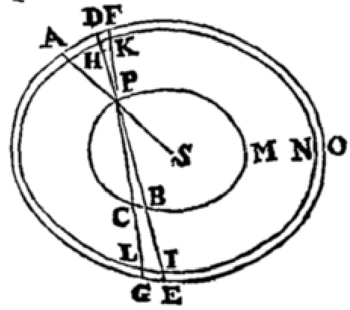


Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit qua Sphærois *AGBCD* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe suo *AB* situm. Sit *NKRM* Sectio Conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipsi *PE* perpendicularis, æquetur semper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata ista Sphæroidem secat. A Sphæroidis verticibus *A*,*B* ad ejus axem *AB* erigantur perpendicula *AK*, *BM* ipsis *AP*, *BP* æqualia respective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in *K* & *M*; & jungantur *KM* auferens ab eadem segmentum *KMRK*. Sit autem Sphæroidis centrum *S* & semidiameter maxima *SC:* & vis <199> qua Sphærois trahit corpus *P* erit at vim qua Sphæra, diametro *AB* descripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS\times CSq-PS\times KMRK}{PSq+CSq-ASq}$ ad $\frac{AS\ cub}{3PS\ quad}$. Et eodem computando fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem, in data quavis ejusdem diametro, collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quo facilius colligetur hoc argumento. Sit *AGOF* Sphærois attrahens, *S* centrum ejus & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur tum semidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* Sphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*: Sintque *PCM*, *HLN* superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus *P* & secet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, posterior secet easdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* sibi mutuo æquales; propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe



jam *DPF, EPG* designare Conos oppositos, angulis verticalibus *DPF, EPG* infinite parvis descriptos, & lineas etiam *DH, EI* infinite parvas esse; & Conorum particulæ Sphæroidum superficiebus abscissæ *DHKF, GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH, EI*, erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo *P*, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus Sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia *DPF, EGCB* in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus *P* in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires Coni *DPF* & segmenti Conici *EGCB*, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur corpus *P* a sola Sphæroide intima *PCBM*, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII) attractio ejus est ad vim, qua corpus *A* trahitur a Sphæroide tota *AGOD*, ut distantia *PS* ad distantiam *AS*. *Q.E.D.*



<200>

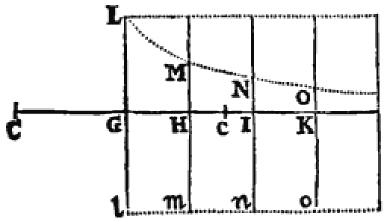
PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato Corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E Corpore dato formanda est Sphæra vel Cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI, & XCI) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si Solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a Solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod Solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.



Cas. 1. Sit *LGl* planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus versus *I*, inque plana innumera *mHM, nIN*, &c. ipsi *GL* parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum *C* extra Solidum. Agatur autem *CGHI* planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum Solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus *n* ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC) <201> vis qua planum quodvis *mHM* trahit punctum *C* est reciproce ut CH^{n-2}. In plano *mHM* capiatur longitudo *HM* ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut *HM*. Similiter in planis singulis *lGL, nIN, oKO*, &c, capiantur longitudines *GL, IN, KO*, &c. ipsis $CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}$, & c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis Solidi totius ut area *GLOK* in infinitum versus *OK* producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis Solidi totius est reciproce ut CG^{n-3}. *Q.E.D.*

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum *C* ex parte plani *lGL* intra Solidum, & capiatur distantia *CK* æqualis distantiæ *CG*. Et Solidi pars *LGloKO*, planis parallelis *lGL, oKO* terminata, corpusculum *C* in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum *C* sola vi Solidi ultra planum *OK* siti trahitur. Hæc autem vis (per Casum primum) est reciproce ut CK^{n-3}, hoc est (ob æquales *CG, CK*) reciproce ut CG^{n-3}. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si Solidum *LGIN* planis duobus infinitis parallelis *LG, IN* utrinque terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractiva Solidi totius infiniti *LGKO* vim attractivam partis ulterioris *NICO*, in infinitum versus *KO* productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam decrescet quam proxime in ratione potestatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproxime in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index potestatis prioris. De corpore exparticulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinite major quam attractio partis citerioris.

<202>

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. XXIX) motum corporis recta descendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, secundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, si quæratur Lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, solvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in Series convergentes. Ut si ad basem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel a basi fugatum, moveri possit in curva linea quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit: Suppono basem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ resolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn}OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ & c. atque hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{mm-mn}{2nn}OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem esse suppono. Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-mn}{nn}A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm-mn}{nn}B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat, existente $m = 2, \& n = 1:$ fiet vis ut data $2B^{\circ}$, adeoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m = 0 - 1, \&n = 1$; feit vis ut $2A^{-3}$ seu $2B^3$: adeoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed missis hujusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de Motu, quas nondum attigi.

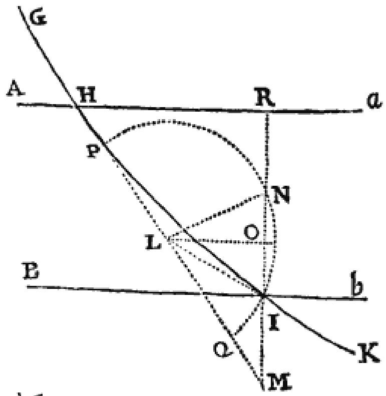
<203>

SECTIO XIV.

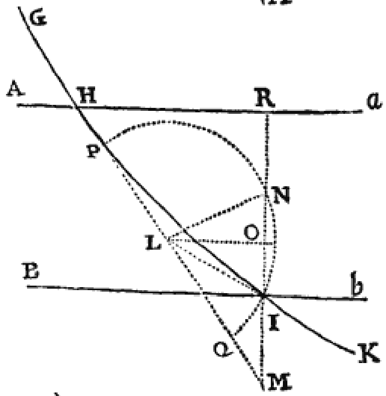
De Motu corporum minimorum, quæ Viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si Media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus Medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur: Sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.



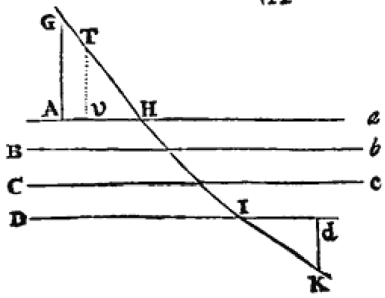
Cas. 1. Sunto *Aa*, *Bb* r plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *Aa* secundam lineam *GH*, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus Medium incidentiæ, eaque actione describat lineam curvam *HI*, & emergat secundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *Bb* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *GH* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *Aa* in *R*; & linea emergentiæ *KI* producta occurrat *HM* in *L*. Centro *L* intervallo *LI* describatur Circulus, <204> secans tam *HM* in *P* & *Q*, quam *MI* productam in *N*; & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstatis *Galilæi*) curva *HI* Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea *IM* æquale sit *HM* quadrato; sed & linea *HM* bisecabitur in *L*. Unde si ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, æquales erunt *MO*, *OR*; & additis æqualibus *ON*, *OI*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Proinde cum *IR* detur, datur etiam *MN*; estque rectangulum *NMI* ad rectangulum sub latere recto & *IM*, hoc est, ad *HMq*, in data ratione. Sed rectangulum *NMI* æquale est rectangulo *PMQ*, id est, differentiæ quadratorum *MLq* & *PLq* seu *LIq*; & *HMq* datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem *LMq:* ergo datur ratio *MLq-LIq* ad *MLq*, & divisim, ratio *LIq* ad *MLq*, & ratio dimidiata *LI* ad *ML*. Sed in omni triangulo *LMI*, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ *LMR* ad sinum anguli emergentiæ *LIR*. *Q.E.D.*



Cas. 2. Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, *AabB*, *BbcC*, &c. agitetur vi quæ sit in <205> singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; & per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo *Bb*, in data ratione; & hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum *Bb*, erit ad sinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic sinus ad sinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione; & sic in infinitum: & ex æquo, sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuatur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assignatam, continua reddatur; & ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.



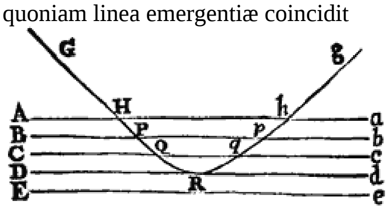
Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In GH capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et (per Legum Corol. 2) distinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. perpendicularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*; hoc est, æqualibus temporibus describet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id est, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc est (respectu radii *TH* vel *IK*) ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. *Q.E.D.*

<206>

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter plana parallela *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. describere arcus Parabolicos, ut supra; sintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano *Dd*, in spatium *DdeE:* & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum *Ee*. Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus Medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *Cc*, *Dd*, describendo arcum Parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilæi*) est in *R*; secabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emergetque tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. intervalla in infinitum minui &

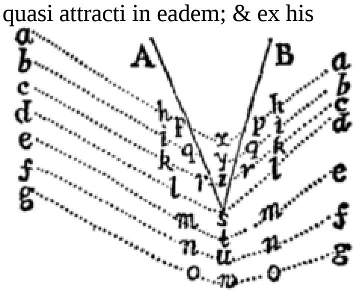


numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q.E.D.*

<207>

Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt Lucis reflexiones & refractiones,factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namque Lucem successive propagari & spatio quasi septem vel octo minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam constat per Phænomena Satellitum *Iovis*, Observationibus diversorum Astronomorum confirmata. Radii autem in aere existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissa, invenit, & ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *gowog, fnvnf, emtme, dlsld* sunt radii, arcubus *owo, nvn, mtm, lsl* versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzkc, biyib, ahxha* incidentibus ad *r, q, p*, & inter *k* & *z, i* & *y, h* & *x* incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est Propositiones sequentes in usus Opticos subjungere; interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed Trajectorias corporum Trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.

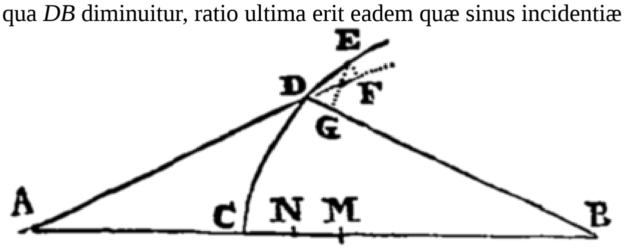


<208>

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione, quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit *A* locus a quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revoluta describat superficiem quæsitam; *D, E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF, EG* perpendicula in corporis vias *AD, DB* demissa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF* qua *AD* augetur, ad lineam *DG* qua *DB* diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio

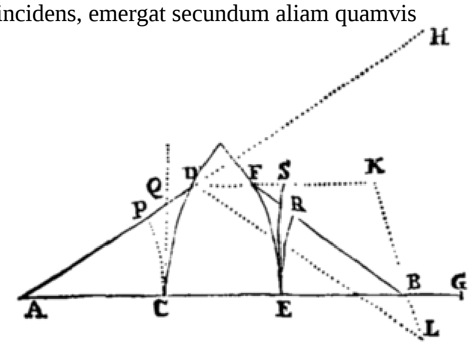


incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea si in axe *AB* sumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* transire debet, & capiatur ipsius *AC* incrementum *CM*, ad ipsius *BC* decrementum *CN* in data illa ratione; centrisque *A, B*, & intervallis *AM, BN* describantur circuli duo se mutuo secantes in *D:* punctum illud *D* tanget curvam quæsitam *CDE*, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q.E.I.*

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur Figuræ illæ omnes quas *Cartesius* in Optica & Geometria ad Refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* maximi fecerit & studiose celaverit, visum fuit hic propositione exponere.

<209>

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis *CD*, secundum lineam rectam *AD* lege quavis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur Lineæ curvæ *CP, CQ* ipsis *AD, DK* semper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD, QD*, atque adeo lineæ ipsæ *PD, QD*, incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem AB *descripta superficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* secet superficiem primam in *C* & secundam in *E*, puncto *D* utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficie secunda ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N; produc tum *AB* ad *G* ut sit *BG* ad *CE* ut M-N ad N, tum *AD* ad *H* ut sit *AH* æqualis *AG*, tum etiam *DF* ad *K* ut sit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* describe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipsique *DL* parallelam age *BF:* & punctum *F* tanget Lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta describet superficiem quæsitam. *Q.E.F.*

Nam concipe Lineas *CP, CQ* ipsis *AD, DF* respective, & Lineas *ER, ES* ipsis *FB, FD* ubique perpendiculares esse, adeoque *QS* ipsi *CE* semper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII) *PD* ad *QD* ut M ad N, adeoque ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*; <210> & divisim ut *DL-FB* seu *PH-PD-FB* ad *FD* seu *FQ-QD*; & composite ut *PH-FB* ad *FQ*, id est (ob æquales *PH* & *CG, QS* & *CE*) *CE+BG-FR* ad *CE-FS*. Verum (ob proportionales *BG* ad *CE* & M-N ad N) est etiam *CE+BG* ad *CE* ut M ad N: adeoque divisim *FR* ad *FS* ut M ad N, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII, superficies *EF* cogit corpus, in ipsam secundum lineam *DF* incidens, pergere in linea *FR* ad locum *B. Q.E.D.*

Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphærice figuratis & Aquam inter se claudentibus conflentur, fieri potest ut a refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diversa diversorum radiorum Refrangibilitas impedimento est, quo minus Optica per Figuras vel Sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.