# Copy of a Letter from Newton to Henry Oldenburg, dated 24 October 1676

**Author:** Isaac Newton

**Source:** MS Add. 3977.4, Cambridge University Library, Cambridge, UK

**Published online:** September 2012

<1r>

Vir digni{sime}

{Quanta cum voluptate legi Epistolas} **{illeg}**rissimorum Clarissimorum virorum D. Leibni{tij & D. Tschurnhausij vix dixerim. Perele}gans Sane est Leibnitij methodus perveni{endi ad series convergentes, & satis ostendisse}t ingenium Authoris etsi nihil aliud scripsisset. Sed qu{æ} al{ibi per Epistolam sparguntur suo} nomine dignissima, efficiunt etiam ut ab eo speremus maxima. Diversitas {mod}orum quibus eodem tenditur, eò magis placuit, quod mihi tres methodi perveniendi ad ejusmodi series innotuere, adeò ut novam nobis communicandam vix expectarem. Unam e meis priùs descripsi, jam addo aliam. illam scilicet quâ primùm incidi in has series: nam incidi in eas antequam scirem divisiones et extractiones radicum quibus jam utor. et hujus explicatione pendendum est fundamentum Theorematis sub initio Epistolæ prioris positi quod D. Leibnitius a me desiderat.

Sub initio studiorum meorum Mathematicorum ubi incideram in opera Celeberrimi Wallisij nostri, considerando series quarum intercalatione ipse exhibet aream circuli, et Hyperbolæ, utpote quod in serie curvarum quarum basis sive axis communis sit x, et ordinatim applicatæ, $\overline{1-\mathrm{xx}}|^{\frac{0}{2}}$ . $\overline{1-\mathrm{xx}}|^{\frac{1}{2}}$ . $\overline{1-\mathrm{xx}}|^{\frac{2}{2}}$ . $\overline{1-\mathrm{xx}}|^{\frac{3}{2}}$ . $\overline{1-\mathrm{xx}}|^{\frac{4}{2}}$ . $\overline{1-\mathrm{xx}}|^{\frac{5}{2}}$ . &c . si areæ alternarum quæ sunt $\mathrm{x}$ . $\mathrm{x}-\frac{1}{3}\mathrm{x}^3$ . $\mathrm{x}-\frac{2}{3}\mathrm{x}^3+\frac{1}{5}\mathrm{x}^5$ . $\mathrm{x}-\frac{3}{3}\mathrm{x}^3+\frac{3}{5}\mathrm{x}^5-\frac{1}{7}\mathrm{x}^7$ &c interpolari possent, haberemus areas intermediarum quarum prima $\overline{1-\mathrm{xx}}|^{\frac{1}{2}}$ est circulus: ad has interpolandas notabam, quod in omnibus primus terminus esset x, quodque secundi termini $\frac{0}{3}\mathrm{x}^3$ . $\frac{1}{3}\mathrm{x}^3$ . $\frac{2}{3}\mathrm{x}^3$ . $\frac{3}{3}\mathrm{x}^3$ &c essent in Arithmeticâ progressione, & proinde quod duo primi termini serierum intercalandarum deberent esse $\mathrm{x}-\frac{\frac{1}{2}\mathrm{x}^3}{3}$ . $\mathrm{x}-\frac{\frac{3}{2}\mathrm{x}^3}{3}$ . $\mathrm{x}-\frac{\frac{5}{2}\mathrm{x}^3}{3}$ &c . Ad reliquas intercalandas considerabam quod denominatores $1$ . $3$ . $5$ . $7$ &c erant in arithmeticâ progressione, adeoque solæ numeratorum coefficientes numerales restabant investigandæ. Hæ autem in alternis datis areis erant figuræ potestatum numeri 11 nempe harum $\overline{11}|^0$ . $\overline{11}|^1$ . $\overline{11}|^2$ . $\overline{11}|^3$ . $\overline{11}|^4$ . hoc est primò 1. dein 1 , 1 . tertiò 1 . 2 . 1 . quarto 1 . 3 . 3 . 1 . quinto 1 . 4 . 6 . 4 . 1 . Quærebam itaque quomodo in his seriebus ex datis duabus primis figuris reliquæ derivari possent, et inveni quod positâ secundâ figura m, reliquæ producerentur per continuam multiplicationem terminorum hujus seriei $\frac{\mathrm{m}-0}{1}\times\frac{\mathrm{m}-1}{2}\times\frac{\mathrm{m}-2}{3}\times\frac{\mathrm{m}-3}{4}\times\frac{\mathrm{m}-4}{5}$ &c . Exempli gratia sit $\mathrm{m}=4$, et erit $4\times\frac{\mathrm{m}-1}{2}$ hoc est 6 tertius terminus, & $6\times\frac{\mathrm{m}-2}{3}$ hoc est 4 quartus, et $4\times\frac{\mathrm{m}-3}{4}$ hoc est 1 quintus, & $1\times\frac{\mathrm{m}-4}{5}$ . hoc est 0 sextus, quo series in hoc casu terminatur. Hanc regulam itaque applicui ad series interserendas et cùm pro circulo secundus terminus esset $\frac{\frac{1}{2}\mathrm{x}^3}{3}$, posui $\mathrm{m}=\frac{1}{2}$, et prodierunt termini $\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}-1}{2}$

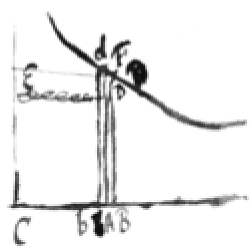
sive $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{8}\times\frac{\frac{1}{2}-2}{3}$ sive $+\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}\times\frac{\frac{1}{2}-3}{4}$ sive $-\frac{5}{128}$ & sic in infinitum. Unde cognovi desideratam aream segmenti circularis esse $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$ &c. Et eadem ratione prodierunt etiam interserendæ areæ reliquarum curvarum, ut et area Hyperbolæ et cæterarum alternarum in hac serie $\overline{1+xx}|^{\frac{0}{2}}$ , $\overline{1+xx}|^{\frac{1}{2}}$ $\overline{1+xx}|^{\frac{2}{2}}$ . $\overline{1+xx}|^{\frac{3}{2}}$ &c. Et eadem est ratio intercalandi alias series idque per intervalla duorum pluriumve terminorum simul deficientium. .

Ubi verò hæc didiceram mox considerabam terminos $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$ . $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$ . $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$ . $\overline{1-xx}|^{\frac{6}{2}}$ &c hoc est $1$ . $1-xx$ . $1-2xx+x^4$ . $1-3xx$ . $+3x^4-x^6$ &c eodem modo interpolari posse ac areas ab ipsis generatas: et ad hoc nihil aliud requiri quam omissionem <1v> denominatorum $1$ , $3$ , **{**$5$ , $7$ &c. in terminis exprimentibus areas;**}** hoc est coefficientes terminorum qua**{**ntitatis intercalandæ $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$**}**$x^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ vel generaliter **{**$\overline{1-xx}|^{m}$, prodire per continuam **}** multiplicationem terminorum hujus seriei **{** $m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}$ &c**}** Adeo ut e.g. $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ valeret **{**$1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4$**}**$-\frac{1}{16}x^6$ &c et $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ valeret $1-\frac{3}{2}xx+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6$ &c et $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$ &c. Sic itaque innotuit mihi generalis reductio radicalium in infinitas series per regulam illam quam posui initio Epistolæ prioris antequam scirem extractionem radicum. Sed hac cognita non potuit altera me diu latere: nam ut probarem has operationes multiplicavi $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$ &c in se, et factum est $1-xx$ terminis reliquis in infinitum evanescentibus per continuationem seriei. Atque ita $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$ &c bis in se ductum produxit etiam $1-xx$. Quod ut certa fuit harum conclusionum demonstratio, sic me manu duxit ad tentandum e converso, num hæ series quas sic constitit esse radices quantitatis $1-xx$ non possent inde extrahi more Arithmetico. et res bene successit. Operationis forma in quadraticis radicibus hæc erat.

$$
\begin{array}{l}
1-xx \quad \big( \; 1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6 \;\; \&c \\
\underline{1\qquad} \\
0-xx \\
\underline{\quad -xx+\frac{1}{4}x^4 \quad} \\
\qquad\quad -\frac{1}{4}x^4 \\
\qquad\quad \underline{-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{64}x^8} \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{64}x^8 \; .
\end{array}
$$

His perspectis neglexi penitus interpolationem serierum et has operationes tanquam fundamenta magis genuina solummodo adhibui. Nec latuit reductio per divisionem, res utique facilior. Sed et resolutionem affectarum ǽquationum mox aggressus sum eamque obtinui. Unde simul ordinatim applicatæ, segmenta axium aliæque quælibet rectæ ex areis curvarum vel arcubus datis innotuere. Nam regressio ad hæc nihil indigebat præter resolutionem æquationum quibus areæ vel arcus ex datis rectis dabantur.

Eo tempore pestis ingruens coegit me hinc fugere et alia cogitare. Addidi tamen subinde condituram quandam Logarithmorum ex area hyperbolæ, quam hic subjungo. Sit dFD Hyperbola cujus centrum C, vertex F, & quadratum interjectum CAFE $=1$. In CA cape AB, Ab hinc inde $=\frac{1}{10}$ sive 0.1, & erectis perpendiculis BD, bd ad Hyperbolam terminatis, erit Semisumma Spatiorum AD et Ad $=0.1+\frac{0.001}{3}+\frac{0.00001}{5}+\frac{0.0000001}{7}$ &c et semidifferentia $=\frac{0.01}{2}+\frac{0.0001}{4}+\frac{0.000001}{6}+\frac{0.00000001}{8}$ &c. Quaæ reductæ sic se habent,



| | | |
|---|---|---|
| 0.100000000000 | 0.0050000000000 | |
| 333333333 | 250000000 | |
| 2000000 | 1666666 | |
| 142857 | 12500 | <2r> |
| 1111 | 100 | |
| 9 | 1 | |

{0.100335477310 0.0050251679267 }
Horu{m summa 0.1053605156577 e}st Ad et differentia 0.0953101798 043 est AD {et eadem ratione positi}s AB, Ab hinc inde $= 0.2$, obtinebitur $\mathrm{Ad} = 0.2231435${51} 3142, et $\mathrm{AD} = 0.1823215567939$. Habitis sic Logarithmis Hyperbolicis numerorum quatuor decimalium 0.8, 0.9, 1.1, & 1.2. cùm sit $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$, et 0.8 et 0.9 sint minores unitate, adde Logarithmos illorum ad duplum Logarithmi 1.2, et habebis 0.6931471805597 Logarithmum hyperbolicum numeri 2. cujus triplo adde Logarithmum 0.8, siquidem sit $\frac{2\times2\times2}{0.8} = 10$, et habebis 2.3025850929933 Logarithmum numeri 10, indeque per additionem simul prodeunt Logarithmi numerorum 9 et 11; adeoque omnium primorum horum $2\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 11$ Logarithmi in promptu sunt. Insuper ex sola depressione numerorum superioris computi per loca decimalia, et additione obtinentur Logarithmi decimalium 0.98, 0.99, 1.01, 1.02, ut et horum 0.998, 0.999, 1.001, 1.002, & inde per additionem et substractionem prodeunt Logarithmi primorum $7\ .\ 13\ .\ 17\ .\ 37\ \ \&c$ . Qui una cum superioribus per Logarithmum numeri 10 divisi evadunt veri Logarithmi in Tabulam inserendi. Sed hos postea propius obtinui.

Pudet dicere ad quot figurarum loca has computationes otiosus eo tempore perduxi. Nam tunc sanè nimis delectabar inventis hisce. Sed ubi prodijt ingeniosa illa N. Mercatoris Logarithmotechnia (quem suppono sua primum invenisse) cœpi ea minùs curare, suspicatus vel eum nosse extractionem radicum æquò ac divisionem fractionum, vel alios saltem, divisione patefacta, inventuros reliqua priusquam ego ætatis essem maturæ ad scribendum. Eo ipso tamen tempore quo liber iste prodijt communicatum est per amicum D. Collinsio , compendium quoddam methodi harum serierum in quo significaveram areas, et longitudines curvarum omnium et solidorum superficies et contenta ex datis rectis vice versa ex his datis rectas determinari posse, et methodum ibi indicatam illustraveram diversis seriebus. Suborta deinceps inter nos epistolari consuetudine, D. Collinsius vir in rem mathematicam promovendam natus, non destitit suggerere ut hæc publici juris facerem: et ante annos quinque cum suadentibus amicis concilium cœperam edendi tractatum de refractione Lucis, et coloribus quem tunc in promptu habebam; cœpi de his seriebus iterum cogitare, et tractatum de ijs etiam conscripsi, ut utrumque simul ederem. Sed ex occasione Telescopij Catadioptrici epistola ad te missâ. quâ breviter explicui conceptus meos de natura lucis, inopinatum quiddam effecit ut mei interesse sentirem ad te festinanter scribere de impressione istius Epistolæ. Et subortæ statim per diversorum epistolas Objectionibus aliisque refertas crebræ interpellationes me prorsus a consilio deterruerunt, et efficerunt ut me arguerem imprudentiæ quod umbram captando eatenus perdideram quietem meam rem prorsus substantialem.

Sub id tempus Gregorius ex unica tantùm serie quadam e meis quam D. Collinsius ad eum transmiserat, post multam considerationem ut ad Collinsium rescripsit pervenit ad eandem methodum & tractatum de ea reliquit quem speramus ab amicis ejus editum iri, siquidem pro <2v> ingenio quo polle{bat non potuit non adjicere de suo mu}lta quæ rei mathematicæ interest ut non pere{ant ipse autem tractatum meum} non penitus absolveram ubi destiti a proposito, {neque in hunc usque diem mens rediit ad} reliqua adjicienda. Deerat quippe pars illa qua decr{everam explicare modum solve}ndi Problemata quæ ad Quadraturas reduci nequeunt licet {aliquid de fundame}nto ejus posuissem.

Cæterum in tractatu isto series infinitæ non magnam partem obtinebant Alia haud pauca congessi, inter quæ erat methodus ducendi tangentes quam Solertissimus Slusius ante annos duos tresve tibi communicavit, de quâ tu, suggerente Collinsio, rescripsisti eandem mihi etiam innotuisse. Diversa ratione in eam incidimus. Nam res non eget demonstratione prout ego operor. Habito meo fundamento nemo potuit tangentes aliter ducere, nisi volens de recta viâ deviaret. Quinetiâ non hic hæretur ad æquationes radicalibus unam vel utramque indefinitam quantitatem involventibus utcunque affectas, Sed absque aliquâ talium æquationum reductione (quæ opus plerumque redderet immensum) tangens confestim ducitur. et eodem modo se res habet in quæstionibus de Maximis et Minimis, alijsque quibusdam de quibus jam non loquor. Fundamentum harum operationum satis obvium quidem, quoniam jam non possum explicationem ejus prosequi sic potius celavi.

6accdæ13eff7i3l9n4o4qrr4s8f12vx. Hoc fundamento conatus sum etiam reddere speculationes de Quadratura curvarum simpliciores, pervenique ad Theoremata quædam generalia. et ut candide agam ecce primum Theorema.

Ad Curvam aliquam sit $dz^{\theta}\times\overline{e+fz^{\eta}|}^{\lambda}$ ordinatim applicata termino diametri seu basis z normaliter insistens: ubi literæ d, e, f denotant quaslibet quantitates datas, & θ, η, λ indices potestatum sive dignitatum quantitatum quibus affixæ sunt. Fac $\frac{\theta+1}{\eta}=r.\ \lambda+r=s.\ \frac{d}{\eta f}\times\overline{e+fz^{\eta}|}^{\lambda+1}=Q.$ & $r\eta-\eta=\pi$, & area Curvæ erit $Q$ in $\frac{z^{\pi}}{s}-\frac{r-1}{s-1}\times\frac{eA}{fz^{\eta}}+\frac{r-2}{s-2}\times\frac{eB}{fz^{\eta}}-\frac{r-3}{s-3}\times\frac{eC}{fz^{\eta}}+\frac{r-4}{s-4}\times\frac{eD}{fz^{\eta}}$ &c literis A , B , C , D &c denotantibus terminos proximè antecedentes, nempe A terminum $\frac{z^{\pi}}{s}$, B terminum $-\frac{r-1}{s-1}\times\frac{eA}{fz^{\eta}}$ &c. Hæc series ubi r fractio est vel numerus negativus continuatur in infinitum: ubi vero r integer est et affirmativus continuatur ad tot terminos tantùm quot sunt unitates in eodem r, et sic exhibet geometricam quadraturam Curvæ. Rem exemplis illustro.

Ex. 1. Proponatur Parabola cujus ordinatim applicata sit $\sqrt{az}$. Hæc in formam regulæ reducta fit $z^{0}\times\overline{0+az^{1}|}^{\frac{1}{2}}$. Quare est $d=1.\ \theta=0.\ e=0.\ f=a.\ \eta=1.$ Adeoque $r=1.\ s=1\frac{1}{2}.\ Q=\frac{1}{a}\times\overline{az|}^{\frac{3}{2}}.\ \pi=0.$ et area quæsita $\frac{1}{a}\times\overline{az|}^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$, hoc est, $\frac{2}{3}z\sqrt{az}$. Et sic in genere si $cz^{\eta}$ ponatur ordinatim applicata, prodibit area $\frac{c}{\eta+1}z^{\eta+1}$ **{.}**

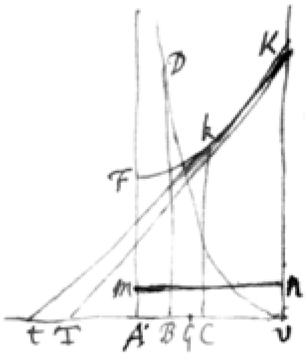
Ex 2. Sit ordinatim applicata $\frac{a^{4}z}{c^{4}-2cczz+z^{4}}$ hæc per reductionem fit $a^{4}z\times\overline{cc-zz|}^{-2}$, vel etiam $a^{4}z^{-3}\times\overline{-1+ccz^{-2}|}^{-2}$. In priori casu est $d=a^{4}.\ \theta=1.\ e=cc.\ f=-1.\ \eta=2.\ \lambda=-2.$ Adeoque $r=1.$ $s=-1.\ Q=\frac{a^{4}}{-2}\times\overline{cc-zz|}^{-1}$ hoc est $=\frac{-a^{4}}{2cc-2zz}.\ \pi=0.$ Et area curvæ $=Q$ in $\frac{z^{0}}{-1}$ id est $=\frac{-a^{4}}{2cc-2zz}$. In secundo autem casu est $d=a^{4}.\ \theta=-3\ e=-1.\ f=cc.\ \eta=-2.\ \lambda=-2.\ r=1.\ s=-1.$ $Q=\frac{a^{4}}{-2cc}\times\overline{-1+ccz^{-2}|}^{-1}$ id est $=\frac{-a^{4}zz}{2c^{4}-2cczz}.\ \pi=0.$ Et Area $=Q$ in $\frac{z^{0}}{1}$ hoc est $=\frac{a^{4}zz}{2c^{4}-2cczz}$. Area his casibus diversimodè <3r> exh**{**ibetur computatur a diversis**}** finibus quorum assignatio per hos inven**{**tos valores arearum facilis est.**}**

Exempl**{**um 3. Sit ordinatim applicata $\frac{a^{5}}{z^{5}}\times$**}**$\sqrt{bz+zz}$, hoc est per reductionem ad debitam **{**formam vel $a^{5}z^{-\frac{9}{2}}\times\overline{b+z|}^{\frac{1}{2}}$ **}** vel $a^{5}z^{-4}\times\overline{1+bz^{-1}|}^{\frac{1}{2}}$. Et erit in priori casu **{**$d=a^{5}.\ \theta=-\frac{9}{2}.$**}** $e=b.\ f=1.\ \eta=1.$ $\lambda=\frac{1}{2}$ adeoque $r=-\frac{7}{2}$ &c. Quare cum r non sit numerus affirmativus, procedo ad alterum casum. Hic est $d=a^{5}.\ \theta=-4.\ e=1.\ f=b.\ \eta=-1.\ \lambda=\frac{1}{2}.$ adeoque $r=3.\ s=3\frac{1}{2}.\ Q=\frac{a^{5}}{-b}\times\overline{1+bz^{-1}|}^{\frac{3}{2}}$, seu $=-\frac{a^{5}z+a^{5}b}{bzz}\sqrt{zz+bz},\ \pi=-2.$ Et area $=Q$ in $\frac{z^{-2}}{3\frac{1}{2}}-\frac{2}{2\frac{1}{2}}\times\frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}\ b}+\frac{1}{1\frac{1}{2}}\times\frac{z}{2\frac{1}{2}}\times\frac{z^{0}}{3\frac{1}{2}\ b\ b}$ hoc est $=\frac{-30bb+24bz-16zz}{105bbzz}\times\frac{a^{5}z+a^{5}b}{bzz}\sqrt{zz+bz}$.

Exempl. 4 Sit denique ordinatim applicata $\frac{bz^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{c^{3}-3accz^{\frac{2}{3}}+3aacz^{\frac{4}{3}}-a^{3}z^{2}}}$ Hæc ad formam Regulæ reducta fit $bz^{\frac{1}{3}}\times\overline{c-az^{\frac{2}{3}}|}^{-\frac{3}{5}}$. Indeque est $d=b.\ \theta=\frac{1}{3}.\ e=c.\ f=-a.\ \eta=\frac{2}{3}.\ \lambda=-\frac{3}{5}.\ r=2.\ s=\frac{7}{5}.\ Q=\frac{3b}{-2a}\times$ $\times\overline{c-az^{\frac{2}{3}}|}^{\frac{2}{5}}.\ \pi=\frac{2}{3}.$ Et area $=Q\times\frac{5z^{\frac{2}{3}}}{7}-\frac{5}{2}\times\frac{5c}{-7a}$, id est $-\frac{30abz^{\frac{2}{3}}+75bc}{28aa}\times\overline{c-az^{\frac{2}{3}}|}^{\frac{2}{5}}$. Quod si res non successisset in hoc casu, existente r vel fractione vel numero negativo, tunc tentassem alterum casum purgando terminum $-az^{\frac{2}{3}}$ in ordinatim applicata a coefficiente $z^{\frac{2}{3}}$, hoc est reducendo ordinatim applicatam ad hanc formam $bz^{-\frac{1}{15}}\times\overline{-a+cz^{-\frac{2}{3}}|}^{-\frac{3}{5}}$. et si r in neutro casu fuisset numerus integer et affirmativus conclusissem curvam ex earum numero esse quæ non possunt Geometricè quadrari. Nam quantum animadverto, hæc Regula exhibet in finitis æquationibus areas omnium Geometricam quadraturam admittentium Curvarum, quarum ordinatim applicatæ constant ex potestatibus, radicibus, vel quibuslibet dignitatibus binomij cujuscunque.

At quando hujusmodi Curva aliqua non potest Geometricè quadrari sunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum Conicis Sectionibus vel saltem cum alijs figuris simplicissimis quibuscum potest comparari ad quod sufficit etiam hoc ipsum unicum jam descriptum Theorema. pro trinomijs etiam et alijs quibusdam Regulas quasdem continuavi. Sed in simplicioribus vulgoque celebratis figuris vix aliquid relatu dignum reperi quod evasit aliorum conatus, nisi fortè longitudo Cissoidis ejusmodi censeatur. Ea sic construitur.

Sit VD Cissois, AV diameter circuli ad quem aptatur, V vertex, AF Asymptotos ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demissum. Cum semiaxe $\mathrm{AF}=\mathrm{AV}$, et semiparametro $\mathrm{AG}=\frac{1}{3}\mathrm{AV}$ describatur Hyperbola FkK, et inter AB et AV sumpta AC media proportionali, erigantur ad C et V perpendicula Ck et VK Hyperbolæ occurrentia in k et K et agantur rectæ KT et kt tangentes Hyperbolam in eisdem K et k et occurrentes AV, in T ac t, et ad AV <3v> constituatur rectangulum **{**AVnm æquale spatio TK,**}** kt; et Cissoidis VD longitudo erit sex**{**tupla altitudinis Vn demonstrat**}**io perbrevis est, sed ad infinitas series redeo.




Quamvis multa restent **{**investiganda circa modos**}** approximandi, et diversa serierum genera quæ possunt **{**ad id conducere, tamen**}** vix cum D. Tschurnhausio speraverim dari posse aut simpliciora aut magis generalia fundamenta reducendi quantitates ad hoc genus serierum de quo agimus quam sunt divisiones, et extractiones radicum quibus Leibnitius et ego utimur: saltem non generaliora quia pro quadraturâ et Euthunsi Curvarum ac similibus, nullæ possunt dari series ex hisce simplicibus terminis Algebraicis, unicam tanta indefinita quantitatem involventibus constantes quas non licet hac methodo colligere nam non possunt esse plures hujusmodi convergentes series ad idem determinandum quàm sunt indefinitæ quantitates ex quarum potestatibus series conflentur, et ego quidem ex adhibita quacunque indefinita quantitate seriem novi colligere et idem credo Leibnitio in potestate esse. nam quamvis mea methodo liberum sit eligere pro conflanda serie quantitatem quamlibet indefinitam a qua quæsitum dependeat, et methodus quam ipse nobis communicavit determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum quibus opus commodè deduci potest ad fractiones qu**{**æ**}** per solam divisionem evadant series infinitæ: tamen aliæ quæcunque indefinitæ quantitates pro seriebus conflandis adhiberi possunt per methodum istam quâ affectæ æquationes resolvuntur, dummodo resolvantur in proprijs terminis hoc est conficiendo seriem ex solis terminis **{**quos**}** æquatio involvit. Præterea non video cur dicatur his divisionibus et extractionibus Problemata resolvi per accidens siquidem hæ operationes eodem modo se habeant ad hoc genus Algebræ ac vulgares operationes Arithmeticæ ad Algebram vulgo notam. Quod autem ad simplicitatem methodi attinet, nolim fractiones et radicales absque præviâ reductione semper resolvi in series infinitas. Sed ubi perplexæ quantitates occurrunt tentandæ sunt omnimodæ reductiones, sive id fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo quantitates indefinitas, sive per methodum transmutatoriam Leibnitij aut alio quocunque modo qui occurrat. Et tunc resolutio in series per divisionem et extractionem optimè adhibebitur. Hic autem præcipuè intendum est ut Denominatores fractionum et quantitates in vinculo radicum reducantur ad quam paucissimas et minimè compositas, et ad tales etiam quæ in seriem abeant citissimè convergentem, etsi radices neque convertantur in fractiones, neque deprimantur. Nam per regulam initio alterius Epistolæ, extractio altissimarum radicum æque simplex et facilis est ac extractio radicis quadraticæ vel divisio. et series quæ per divisionem eliciuntur solent minimè omnium convergere. Hactenus de seriebus, unicam indefinitam quantitatem involventibus locutus sum. Sed possunt etiam perspecta methodo series ex duabus vel pluribus assignatis definitis quantitatibus pro arbitrio confici. Quinetiam beneficio ejusdem methodi possunt series ad omnes figuras efformari Gregorianis ad Circulum et Hyperbolam editis affines, hoc est quarum ultimus terminus exhibebit quæsitam aream. Sed

[Editorial Note 1]

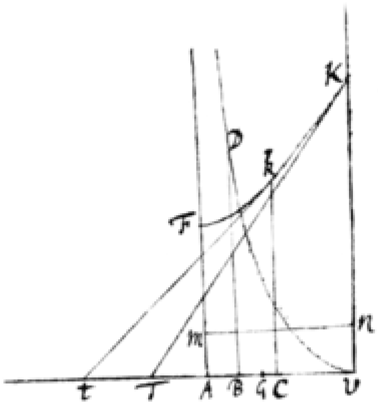
<4r>

$\pi=0$. **{**Et Area $=$ Q in $\frac{z^0}{1}$ hoc est**}** $=\frac{a^4zz}{2c^4-2cczz}$. Area his casibus diversimode e**{**xhibetur computatur**}** a diversis finibus, quorum assignatio per hos **{**inventos valores arearum fa**}**cilis est.

Ex. 3. {Sit ordinatim applicata} $\frac{a^5}{z^5}\times\sqrt{bz+zz}$ hoc est per reductionem ad debitam {formam vel $a^5z^{-\frac{9}{2}}$} $\times\overline{b+z}|^{\frac12}$, vel $a^5z^{-4}\times\overline{1+bz^{-1}}|^{\frac12}$. Et erit in priori {casu $d=a^5$.} $\theta=-\frac92$. $e=b$. $f=1$. $\eta=1$. $\lambda=\frac12$. adeoque $r=-\frac72$ &c. Quare cùm r non sit numerus affirmativus, procedo ad alterum casum. Hic est $d=a^5$. $\theta=-4$. $e=1$. $f=b$. $\eta=-1$. $\lambda=\frac12$. adeoque $r=3$. $s=3\frac12$. $Q=\frac{a^5}{-b}\times\overline{1+bz^{-1}}|^{\frac32}$, seu $=-\frac{a^5z+a^5b}{bzz}\sqrt{zz+bz}$, $\pi=-2$. Et area $=$ Q in $\frac{z^{-2}}{3\frac12}-\frac{2}{2\frac12}\times\frac{z^{-1}}{3\frac12\ b}+\frac{1}{1\frac12}\times\frac{z}{2\frac12}\times\frac{z^0}{3\frac12\ b\ b}$ hoc est $=\frac{-30bb+24bz-16zz}{105bbzz}\times\frac{a^5z+a^5b}{bzz}\sqrt{zz+bz}$.

Ex. 4. Sit denique ordinatim applicata $\frac{bz^{\frac13}}{\sqrt[5]{c^3-3accz^{\frac23}+3aacz^{\frac43}-a^3zz}}$. Hæc ad formam Regulæ redacta fit $bz^{\frac13}\times\overline{c-az^{\frac23}}|^{-\frac35}$. Indeque est $d=b$. $\theta=\frac13$. $e=c$. $f=-a$. $\eta=\frac23$. $\lambda=-\frac35$. $r=2$. $s=\frac75$. $Q=\frac{3b}{-2a}\times\times\overline{c-az^{\frac23}}|^{\frac25}$, $\pi=\frac23$. Et area $=Q\times\frac{5z^{\frac23}}{7}-\frac52\times\frac{5c}{-7a}$, id est $-\frac{30abz^{\frac23}+75bc}{28aa}\times\overline{c-az^{\frac23}}|^{\frac25}$. Quod si res non successisset in hoc casu, existente r vel fractione vel numero negativo, tunc tentassem alterum casum purgando terminum $-az^{\frac23}$ in ordinatim applicata a coefficiente $z^{\frac23}$, hoc est reducendo ordinatim applicatam ad hanc formam $bz^{-\frac{1}{15}}\times\overline{-a+cz^{-\frac23}}|^{-\frac35}$. Et si r in neutro casu fuisset numerus integer & affirmativus, conclusissem curvam ex earum numero esse quæ non possunt geometricè quadrari. Nam quantum animadverto, hæc Regula exhibet in finitis æquationibus areas omnium geometricam quadraturam admittentium Curvarum, quarum ordinatim applicatæ constant ex potestatibus, radicibus, vel quibuslibet dignitatibus binomij cujuscunque.

At quando hujusmodi Curva aliqua non potest Geometricè quadrari, sunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum Conicis Sectionibus, vel saltem cum alijs figuris simplicissimis quibuscum potest comparari. Sic et pro trinomijs & alijs quibusdam Regulas quasdem concinnavi. Sed in simplicioribus vulgoque celebratis figuris vix aliquid relatu dignum reperi quod evasit conatus aliorum, nisi fortè longitudo Cissoidis ejusmodi censeatur. Ea verò sic construitur.




Sit VD Cissois, AV diameter circuli ad quem aptatur, V vertex, AF Asymptoton ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demissum. Cum semiaxe $AF=AV$, et semiparametro $AG=\frac13 AV$, describatur Hyperbola FkK, et inter AB et AV sumpta AC media proportionali, erigantur ad C et V perpendicula Ck et VK Hyperbolæ occurrentia in k et K et agantur rectæ KT et kt tangentes Hyperbolam in ijsdem K et k et occurrentes AV in T ac t, et ad AV constituatur rectangulum AVnm æquale spatio TKkt; et Cissoidis VD longitudo erit sextupla altitudinis Vn. Demonstratio perbrevis est. Sed ad infinitas series redeo.

Vix cum D. Tschunhausio speraverim dari posse aut simpliciora aut magis generalia fundamenta reducendi quantitates ad has serieres quam sunt divisiones et extractiones radicum quibus Leibnitius & ego <4v> utimur: saltem {non generaliora quia pro} quadratura et eutheunsi curvaru{m ac similibus, nullæ possunt} dari series ex hisce simplicibus terminis {Algebraicis, unicam tanta indefinita quantitatem involventibus constantes quas} non licet hac methodo colligere. Nam non {possunt esse plures hujusmodi conve}rgentes series pro eodem quæsito determinando **{illeg}** quantitates ex quarum potestatibus series con{flentur, et e}go quidem ex adhibita quacunque indefinita quantitate (lineam rectam intelligo quon**{illeg}** cujus longitudine area determinatur seriem novi colligere et idem credo Leibnitio in potestate esse. Nam quamvis mea methodo liberum sit eligere pro conflanda serie quantitatem quamlibet indefinitam a qua quæsitum dependeat, et methodus quam ipse nobis communicavit determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum quibus opus commodè deducitur ad fractiones quæ per solam divisionem evadunt series infinitæ: tamen aliæ quæcunque indefinitæ quantitates pro seriebus conflandis adhiberi possunt per methodum istam qua affectæ æquationes resolvuntur, dummodo resolvantur in proprijs terminis, hoc est conficiendo seriem ex solis terminis quos æquatio involvit. Præterea non video cur dicatur his divisionibus et extractionibus Problemata resolvi per accidens, siquidem hæ operationes eodem modo se habeant ad hoc genus Algebræ, ac vulgares operationes Arithmeticæ ad Algebram vulgo notam. Quod verò ad simplicitatem methodi attinet nolim fractiones et radicales absque prævia reductione semper resolvi in series infinitas. Sed ubi perplexæ quantitates occurrunt tentandæ sunt omnimodæ reductiones, sive id fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo quantitates indefinitas, sive per methodum transmutatoriam Leibnitij aut alio quocunque modo qui occurrat: et tunc resolutio in series per divisionem et extractionem optimè adhibetur. Dum verò locutus sum de prævijs reductionibus, non intendo ut radices semper deprimantur, ad humiliores vel reducantur ad fractiones, Nam per Regulam initio alterius Epistolæ positam, extractio altissimarum radicum æque simplex et facilis est ac extractio radicis quadraticæ vel divisio, et series quæ per divisionem eliciuntur solent minùs convergere: Et proinde requiro tantum ut denominatores fractionum et quantitates in vinculo radicum reducantur ad quam paucissimas et minimè compositas, et ad tales etiam quæ in seriem abeant citissimè convergentem. Hactenus de seriebus unicam indefinitam quantitatem involventibus locutus sum: sed possunt etiam perspectâ methodo series ex duabus vel pluribus assignatis definitis quantitatibus pro arbitrio confici. Quinetiam beneficio ejusdem methodi possunt series ad omnes figuras efformari Gregorianis ad Circulum et Hyperbolam editis persimiles; hoc est quarum ultimus terminus exhibebit quæsitam aream. Sed calculum hic onerosiorem nolim lubens subire. Præsertim cum In hacce rerum varietate hoc nobis desit, ut ante calculum semper sciamus eligere meliora, et in series citissimè omnium convergentes incidere.

Ex eo quod D. Tschurnhausius desiderat in nostris seriem pro determinando arcu ex data Tangente, credo eum vix animadvertisse solutionem Problematis istius per meam methodum neutiquam difficiliorem esse quam determinationes arcuum ex sinu recto et verso quas <5r> posui: **{illeg}** **{**desc**}**riptionem omnium particularium sed in **{illeg}** **{illeg}**am et alteram in diversis rerum generibus **{illeg}** conducere ad ostendandam universalitatem **{illeg}** computi ad contenta et superficies solidorum (qu**{illeg}** **{illeg}** ferè generis ac difficultatis) posui tantùm con**{illeg}** **{illeg}** segmenti cujusdam Elliptici: ad cujus computi methodum Gregorius etiam de suo pervenit, & seriem ad me transmitti curavit. Similiter ad curvas Mechanicas instantia in Quadratrice sufficere videbatur: & ad areas Geometricarum curvarum delegi astronomicum Problema Kepleri, missis facilioribus et elegantioribus seriebus quibus segmenta conicarum Sectionum exhibentur: Et hoc Problema non nisi in unico casu solvi; cùm tamen diversæ ejusmodi series ad diversas partes Ellipseos aptari deberent siquis inde vellet computare Tabulas Astronomicas. Sed et ad sectionem angulorum in data ratione (quod est Problema cæteris nobilius) dedi tantum instantiam in sectione per chordas, propterea quod series pro sectione per sinus versos & tangentes vel per sinus rectas et versos **{**mixtum**}{**mixtis**}** eruuntur. Et proinde non est quod hæreatis ad omissionem præfatæ seriei: cujus computum utique ex facillimis est, & quæ (meo saltem judicio) utilitate cedit istis quas posuit. Illud enim revera simplicius est quod Problema minore labore solvit. Sic quamvis hæc æquatio $x^3 - x = 1$ appareat simplicior hacce $yy - 2y\sqrt{\frac{81}{25} - \sqrt{}20} = \sqrt{}20$, tamen in confesso est posteriorem revera simpliciorem esse propterea quod radicem ejus y Geometra facilius eruit. Et eadem rationem series pro obtinendis arcubus circuli, vel (quod eodem recidit) pro obtinendo sectore per sinum rectum versumve simpliciores haberi debent quam series pro obtinendo eodem sectore per Tangentem. Nam si e.g. posito radio 1 velis arcum $45^{gr}$ ex tangente eruere ad usque 15 loca figurarum, opus esset 5000000000000000 terminis circiter, huius seriei $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c si integros terminos ejus semper adjeceris, vel dimidio numero seriei $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195}$ &c quorum computo milleni anni requirerentur. At si eundem arcum ex sinu recto ad eundem locorum numerum velis computare, quadraginta termini seriei huius $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \overline{1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896}}$ &c sufficerent: quorum computatio vix ultra duos tresve dies ut conjicio requireret. Et tamen hic non est optimus modus computandi totam peripheriam. Nam series ex sinu recto triginta graduum vel ex sinu verso sexaginta graduum conflata, multò citiùs dabit arcum suum, cujus sextuplum vel duodecuplum; est tota peripheria. Neque minori labore eruitur area totius Circuli ex segmento cujus sagitta est quadrans diametri. Ejus computi specimen siquidem ad manus est, visum fuit apponere; & una adjungere aream Hyperbolæ quæ eodem calculo prodit.

Posito axe transverso $= 1$ et sinu verso seu segmenti sagitta $= x$. Erit $\frac{1}{2}$ segmentum

$$\left.\begin{array}{l}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{array}\right\} = x^{\frac{1}{2}} \text{ in } \overline{\tfrac{2}{3}x \pm \tfrac{xx}{5} - \tfrac{x^3}{28} \pm \tfrac{x^4}{72}}\ \&c$$

. Hæc autem series sic in infinitum producitur. Sit

$2x^{\frac{3}{2}} = a.\ \frac{ax}{2} = b.\ \frac{bx}{4} = c.\ \frac{3cx}{6} = d.\ \frac{5dx}{8} = e.\ \frac{7ex}{10} = f.$ &c. Et erit $\frac{1}{2}$ segmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{circuli}\end{matrix}\right\} = \frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}$ &c , eorumque semisum <5v> ma $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \{ \frac{e}{11}$ &c et semidifferentia $\frac{b}{5}\} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13}$ &c. His ita præparatis su{ppono x esse $\frac{1}{4}$ quadrant}em nempe axis et prodit $a\left(\frac{1}{4}\right) = \{0.25.\ b\left(= \frac{ax}{2} = \frac{0.25}{1\times 8}\right) = 0.03125.\}\ c\left(= \frac{bx}{4} = \frac{0.03125}{2\times 8}\right) = 0.001953125.\ \{$ $d\left(= \frac{3cx}{6} = \frac{0.001953125}{8}\right) = 0.000244140625.\}$ Et sic procedo usque dum {venero ad} terminum depressimum qui potest ingredi opus. Deinde hos terminos per 3 , 5 , 7  9 , 11 &c divisos dispono in duas tabulas, ambiguos in unam et negativos in aliam et addo ut hic vides.

| | |
|---|---|
| +0.0833333333333333 | −0.0002790178571429 |
| ± 62500000000000 | 34679066051 |
| 271267361111 | 834465027 |
| 5135169396 | 26285354 |
| 144628917 | 961296 |
| 4954581 | 38676 |
| 190948 | 1663 |
| 7963 | 75 |
| 352 | 4 |
| 16 | 0.0002825719389575 |
| 1 | |
| 0.0896109885646618 | |

Dein a priori summa aufero posteriorem et restat 0.0893284166257043 area semi-segmenti Hyperbolici Addo etiam easdem summas & aggregatum aufero a primo termino duplicato 0.1666666666666666 et restat 0.0767731061630473 area semi-segmenti circularis. Huic addo triangulum istud quo completur in sectorem, hoc est triangulum $\frac{1}{32}\sqrt{3}$ seu 0.0541265877365274, Et habeo sectorem 60 graduum 0.1308996938995747, cujus sextuplum 0.7853981633974482, est area totius circuli, quæ divisa per $\frac{1}{4}$ quadrantem diametri dat totam peripheriam 3,1415926535897928. Si alias artes adhibuissem potui per eundem numerum terminorum seriei pervenisse ad multa plura loca figurarum puta viginti quinque aut amplius; sed animus fuit hic ostendere quid per simplex seriei computum præstari posset: quod sanè haud difficile est cùm in omni opere multiplicatores ac divisores magna ex parte non majores quam 11 & nunquam majores quam 41 adhibere opus sit.

Per seriem Leibnitij etiam, si ultimo loco dimidium termini adijciatur & alia quædam similia artificia adhibeantur, potest computum produci ad multas figuras. Sed optimus ejus usus est quando vel conjungitur cum duabus alijs persimilibus et citissime convergentibus seriebus, vel sola adhibetur ad computandum arcum $30^{\text{grad.}}$ posita tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim series illa evadit $\frac{1 - \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{5\times 9} - \frac{1}{7\times 27} + \frac{1}{9\times 81}\ \ \&c}{\sqrt{3}}$, quæ citò convergit. Vel si conjunges cum alijs seriebus, pone circuli diametrum =1 & $a = \frac{1}{2}$, et area totius circuli erit

$$\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \&c + \frac{a^2}{1}$$
$$+ \frac{a^5}{3} - \frac{a^8}{5} - \frac{a^{11}}{7} + \frac{a^{14}}{9} + \frac{a^{17}}{11} - \frac{a^{20}}{13} - \frac{a^{23}}{15} + \&c + \frac{a^4}{1} - \frac{a^{10}}{3} + \frac{a^{16}}{5} - \frac{a^{22}}{7} + \frac{a^{28}}{9} - \&c\ \ .$$

Hic consideravimus series quatenus adhibentur ad computandum totum circulum. Sed quando computandæ sunt partes ejus, tunc quælibet series habet proprium usum et in suo genere optimus est. Si datur Tangens haud recurrendum erit ad sinum aliquem ut inde computetur arcus, neque vice versa dato sinu quærenda erit Tangens. Series dato congruens est æquatio pro solvendo proprio problemata.

Credo Cl. Leibnitium dum posuit seriem pro determinatione cosinus ex arcu dato, vix animum advertisse seriei meam pro determinatione sinus versi ex eodem area, siquidem hæc idem sunt. Neque observasse videtur morem meum generaliter usurpandi li

<6r>

[Editorial Note 2]

cal{culum hic onerosiorem nolim lube}ns subire. Possunt denique series ex termin{is compositis eadem methodo constitui} Quemadmodum si sit $\sqrt{\mathrm{aa}-\mathrm{ax}+\frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{a}}}$ ordinatim {applicata curvæ alicujus pone} $\mathrm{aa}-\mathrm{ax}=\mathrm{zz}$ et ex binomio $\mathrm{zz}-\frac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{a}}$ extractâ radic{e prodibit $\mathrm{z}+\frac{\mathrm{x}^3}{2\mathrm{ax}}-\frac{\mathrm{x}^6}{8\mathrm{aaz}^3}$ } &c. cujus seriei omnes termini quadrari possunt per {Theorema jam} ante descriptum. Sed hæc minoris facio quod ubi series simplices non sunt satis tractabiles, aliam nondum communicatam methodum habeo qua pro lubitu acceditur ad qu{æ}situm. Ejus fundamentum est commoda expedita et generalis solutio hujus Problematis Curvam Geometricam describere quæ per data quodcunque puncta transibit. Docuit Euclides descriptionem Circuli per tria data puncta. Potest etiam Conica sectio describi per quinque data puncta & Curva trium dimensionum per octo data puncta, adeo ut in potestate habeam descriptionem omnium curvarum istius ordinis quæ per octo tantùm puncta determinantur. Hæc statim Geometricè fiunt nullo calculo interposito: Sed superius Problema est alterius generis. et quamvis prima fronte intractabile videatur; tamen res aliter se habet. est enim fere ex pulcherrimis quæ solvere desiderem.

Seriei a D. Leibnitio pro quadratura Conicarum Sectionum propositæ affinia sunt Theoremata quædam quæ pro comparatione Curvarum cum Conicis sectionibus in Catalogum dudum retuli. Possum utique cum Conicis sectionibus geometricè comparare curvas omnes numero infinitas quarum ordinatim applicatæ sunt $\frac{\mathrm{dz}^{\eta-1}}{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}+\mathrm{gz}^{2\eta}}$ vel $\frac{\mathrm{dz}^{2\eta-1}}{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}+\mathrm{gz}^{2\eta}}$ &c. Aut $\frac{\mathrm{dz}^{\frac{1}{2}\eta-1}}{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}+\mathrm{gz}^{2\eta}}$ vel $\frac{\mathrm{dz}^{\frac{3}{2}\eta-1}}{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}+\mathrm{gz}^{2\eta}}$ &c. Aut $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{z}}\sqrt{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}+\mathrm{gz}^{2\eta}}$ vel $\mathrm{dz}^{\eta-1}\times\sqrt{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}+\mathrm{gz}^{2\eta}}$ &c. Aut $\frac{\mathrm{dz}^{\eta-1}}{\sqrt{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}+\mathrm{gz}^{2\eta}}}$ vel $\frac{\mathrm{dz}^{2\eta-1}}{\sqrt{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}+\mathrm{gz}^{2\eta}}}$ &c. Aut $\frac{\mathrm{dz}^{\eta-1}\times\sqrt{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}}}{\mathrm{g}+\mathrm{hz}^{\eta}}$. vel $\frac{\mathrm{dz}^{2\eta-1}\times\sqrt{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}}}{\mathrm{g}+\mathrm{hz}^{\eta}}$ &c Aut $\frac{\mathrm{dz}^{\eta-1}}{\mathrm{g}+\mathrm{hz}^{\eta}\times\sqrt{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}}}$, vel $\frac{\mathrm{dz}^{2\eta-1}}{\mathrm{g}+\mathrm{hz}^{\eta}\times\sqrt{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}}}$ &c. Aut $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{z}}\sqrt{\frac{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}}{\mathrm{g}+\mathrm{hz}^{\eta}}}$ vel $\mathrm{dz}^{\eta-1}\times\sqrt{\frac{\mathrm{e}+\mathrm{fz}^{\eta}}{\mathrm{g}+\mathrm{hz}^{\eta}}}$ &c
Hic d, e, f, g significant quasvis datas quantitates cum suis signis + et − affectas, z axem vel basem Curvæ, et η, $2\eta$, $\frac{1}{2}\eta-1$, $\frac{3}{2}\eta-1$, $\eta-1$, $2\eta-1$ indices potestatum vel dignitatum z sive sint affirmativi, vel negativi, sive integri vel fracti; et singula bina Theoremata sunt duo primi termini seriei in infinitum progredientis. In tertio et quarto 4eg debet esse non majus quam ff nisi e et g sint contrarij signi in cæteris nulla est limitatio. Horum aliqua (nempe secundum, tertium, quartum, quintum et decimum tertium) ex areis duarum Conicarum Sectionum conjunctis constant. Alia quædam ut nonum decimum et duodecimum, sunt aliter satis composita: et omnia quidem in continuatione progressionum citò evadunt compositissima: adeò ut vix per transmutationes figurarum quibus Gregorius et alij usi sunt absque ulteriori fundamento inveniri posse putem. Ego equidem haud quicquam generale in his obtinere potui antequam abstraherem a contemplatione figurarum et rem totam ad simplicem considerationem solarum ordinatim applicatarum reducerem sed cum hæc et his generaliora sint in potestate, non dubitabitur credo de binomialibus longe facilioribus quæ in his continentur & prodeunt ponendo tantum literam aliquam e vel f $\mathrm{g}=0$, et $\eta=1$ vel 2: etsi series in quas ista resolvuntur non posuerim <6v> in epistola priori, inte{ntus non in omnia particularia enumer}anda, sed in illustrandam methodum p{er unam et alteram in singulis rerum} generibus instantiam quæ ad ostendendam ejus g{eneralitatem sufficere videbatu}r.

Cæterum hæc Theo{remata dant series plusqu}am uno modo nam primum si ponatur $\mathrm{f}=0$ et $\eta=1$ {evadit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}+\mathrm{gzz}}$: unde} prodit series nobis communicata, sed si ponatur $2\mathrm{eg}=\mathrm{ff}$ et $\eta=1$, inde tandem obtinemus hanc seriem $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\&\mathrm{c}$ pro longitudine quadrantalis arcus cujus chorda est unitas, vel quod perinde est hanc $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}-\frac{1}{63}+\frac{1}{143}$ &c pro longitudine dimidii ejus. et has fortè quia æque simplices sunt ac alteræ, et magis convergunt, non repudiabitis. Sed ego rem aliter æstimo . Illud enim melius quod utilius est et problema minori labore solvit. Sic quamvis hæc æquatio $\mathrm{x}^3-\mathrm{x}=1$ appareat simplicior hacce $\mathrm{yy}-2\mathrm{y}\sqrt{\frac{81}{25}-\sqrt{20}}=\sqrt{20}$ tamen in confesso est posteriorem esse revera simpliciorem propterea quod radicem ejus y Geometra facilius eruit. et ob hanc rationem series pro obtinendis arcubus circuli, vel (quod eodem recidit) pro obtinendis sectoribus conicarum Sectionum, pro optimis habeo quæ componuntur ex potestatibus sinuum. Nam siquis vellet per simplex computum hujus seriei $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\&\mathrm{c}$ colligere longitudinem quadrantis ad viginti figurarum loca decimalia, opus esset 5000000000 terminis seriei circiter, ad quorum calculum milleni anni requirerentur: & res tardius obtineretur per tangentem 45 grad. juxta seriem nobis communicatam Sed adhibito sinu recto 45 grad quinquaginta quinque vel sexaginta termini hujus seriei $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\overline{1+\frac{1}{12}+\frac{3}{160}+\frac{5}{896}}$ &c sufficerent, quorum computatio tribus ut opinor vel quatuor diebus absolvi posset. Et tamen hic non est optimus modus computandi totam Peripheriam nam series ex sinu recto triginta graduum vel ex sinu verso sexaginta graduum conflata, multò citiùs dabit arcum suum cujus sextuplum vel duodecuplum est tota peripheria. Neque minori labore eruitur area totius Circuli ex segmento cujus sagitta est quadrans diametri. Ejus computi specimen, siquidem ad manus est, visum fuit apponere & unâ adjungere aream Hyperbolæ quæ eodem calculo prodit.

Posito axe transverso $= 1$, et sinu verso seu segmenti sagitta $= x$ erit semisegmentum $\left.\begin{array}{l}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{array}\right\} = x^{\frac{1}{2}}$ in $\overline{\frac{2}{3}x \pm \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72}}$ &c . Hæc autem series sic in infinitum producitur. Sit $2x^{\frac{3}{2}} = a.\ \frac{ax}{2} = b.\ \frac{bx}{4} = c.\ \frac{3cx}{6} = d.\ \frac{5dx}{8} = e.\ \frac{7ex}{10} = f$ &c et erit semisegm. $\left.\begin{array}{l}\text{Hyperbolæ}\\ \text{circuli}\end{array}\right\} = \frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}$ &c eorumque semisumma $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \frac{e}{11}$ &c et semidifferentia $\frac{b}{5} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13}$ &c. His ita præparatis suppono x esse $\frac{1}{4}$ quadrantem nempe axis et prodit $a\left(\frac{1}{4}\right) = 0.25$. $b\left(= \frac{ax}{2} = \frac{0.25}{1\times 8}\right) = 0.03125$. $c\left(= \frac{bx}{4} = \frac{0.03125}{2\times 8}\right) = 0.001953125$. $d\left(= \frac{3cx}{6} = \frac{0.001953125}{8}\right) = 0.000244140625$. Et sic procedo usque dum venero ad terminum depressimum qui potest ingredi opus. Deinde hos terminos per $3\ ,\ 5\ ,\ 7\quad 9\ ,\ 11$ &c respectivè divisos dispono in duas tabulas, ambiguos cum primo in unam et negativos in aliam et addo ut hic vides

| | |
|---:|---:|
| 0,0833333333333333 | 0,0002790178571429 |
| 62500000000000 | 34679066051 |
| 271267361111 | 834465027 |
| 5135169396 | 26285354 |
| 144628917 | 961296 |
| 4954581 | 38676 |
| 190948 | 1663 |
| 7963 | 75 |
| 352 | 4 |
| 16 | |
| 1 | |
| 0,0896109885646618 | 0,0002825719389575 |

<7r>

Tunc a {priori summa aufero posteriorem et} restat 0,0893284166257043 area semisegmenti Hyperbolici. Addo etiam easdem summas & aggregatum aufero a primo termino duplicato 0.1666666666666666, et restat 0.0767731061630473 area semisegmenti circularis &c {huic addo triangul}um istud quo completur in sectorem, hoc est triangulum $\frac{1}{32}\sqrt{3}${, seu 0,05412658}77365274, & habeo sectorem sexaginta graduum 0,1308996938995747, cujus sextuplum 0,7853981633974482 est area totius circuli, quæ divisa per $\frac{1}{4}$ quadrantem diametri dat totam peripheriam 3,1415926535897928. Si alias artes adhibuissem potui per eundem numerum terminorum seriei pervenisse ad multa plura loca figurarum, puta viginti quinque aut amplius; sed animus fuit hic ostendere quid per simplex seriei computum præstari posset: Quod sanè haud difficile est cùm in omni opere multiplicatores ac divisores magnâ ex parte non majores quàm 11 & nunquam majores quàm 41 adhibere opus sit.

Per seriem Leibnitij etiam si ultimo lo co dimidium termini adijciatur, et alia quædam similia artificia adhibeantur, potest computum produci ad multas figuras. ut et ponendo summam terminorum $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33}$ &c esse ad totam seriem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c , ut $1 + \sqrt{2}$ ad 2 Sed optimus ejus usus videtur esse quando vel conjungitur cum duabus alijs persimilibus et citissimè convergentibus seriebus, vel sola adhibetur ad computandum arcum 30 grad. posita tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim series illa evadit $\frac{1 - \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{5\times 9} - \frac{1}{7\times 27} + \frac{1}{9\times 81}\ \ \&c}{\sqrt{3}}$, quæ citò convergit vel si conjunges cum alijs seriebus, pone circuli diametrum $= 1$ & $a = \frac{1}{2}$ & area totius circuli erit $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \&c + \frac{aa}{1} + \frac{a^5}{3} - \frac{a^8}{5} - \frac{a^{11}}{7} + \frac{a^{14}}{9} + \frac{a^{17}}{11} - \&c + \frac{a^4}{1} - \frac{a^{10}}{3} + \frac{a^{16}}{5} - \frac{a^{22}}{7} + \frac{a^{28}}{9} + \&c$ .

Hic consideravimus series quatenus adhibentur ad computandum totum circulum. Sed quando computandæ sunt partes ejus, tunc quælibet series habet proprium usum & in suo genere optima est. Si datur Tangens satis parva, vel satis magna, non recurrendum erit ad sinum aliquem ut inde computetur arcus, neque vice versâ. Series dato congruens est æquatio pro solvendo proprio problemate.

Credo Cl. Leibnitium, dum posuit seriem pro determinatione cosinus ex arcu dato, vix animum advertisse ad seriem meam pro determinatione sinus versi ex eodem arcu siquidem hæc idem sunt. Neque observasse videtur morem meum generaliter usurpandi literas[Editorial Note 3] pro quantitatibus cum signis suis + et − affectis, dum dividit hanc seriem $\frac{z}{b}+\frac{zz}{2abb}+\frac{z^3}{6aab^3}+\frac{z^4}{24a^3b^4}+\&c$ . Nam cum area Hyperbolicâ BE hic

significata per z sit affirmativa vel negativa prout jaceat ex una vel altera parte ordinatim applicatæ BC; si area illa in numeris data sit l, & l substituatur in serie pro z, orietur vel $\frac{l}{b}+\frac{ll}{2abb}+\frac{l^3}{6aab^3}+\frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c vel $-\frac{l}{b}+\frac{ll}{2abb}-\frac{l^3}{6aab^3}+\frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c prout l sit affirmativa vel negativa. Hoc est posito $a=1=b$ et l logarithmo Hyperbolico: numerus ei correspondens erit $1+\frac{l}{1}+\frac{ll}{2}+\frac{l^3}{3}+\frac{l^4}{4}$ &c si l sit affirmativus, et $1-\frac{l}{1}+\frac{ll}{2}-\frac{l^3}{6}+\frac{l^4}{24}$ &c si l sit negativus. Hoc modo fugio multiplicationem Theorematum quæ alias in nimiam molem crescerent. Nam v.g. illud unicum Theorema quod supra posui pro quadratura Curvarum resolvendum esset in triginta duo Theoremata si pro signorum varietate multiplicaretur.

Præterea quæ habentur de inventione numeri unitate majoris per datum Logarithmum Hyperbolicum ope seriei $\frac{l}{1}-\frac{ll}{1\times2}+\frac{l^3}{1\times2\times3}-\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}+\&c$ potius quam ope seriei $\frac{l}{1}+\frac{ll}{1\times2}+\frac{l^3}{1\times2\times3}+\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}+\&c$ mihi quidem haud ita {eam} sunt. Nam si unus terminus adjiciatur amplius ad seriem posteriorem quam ad priorem posterior magis appropinquabit. Et certè minor est labor computare unam vel duas primas figuras adjecti hujus termini quam dividere unitatem per prodeuntem logarithmum Hyperbolicum ad multa figurarum loca extensum, ut inde obtineatur Logarithmus Hyperbolicus quæsitus. <7v> Utraque igitu{r series (si duas dicere fas sit) officio suo} fungatur Potest tamen $\frac{l}{1}+\frac{l^3}{1\times2\times3}+\{\frac{l^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\&c$ series ex dimidiá} parte terminorum constans optimè adhiberi siquidem hæ{c dabit semidifferentiam duorum} numerorum ex qua et rectangulo dato uterque datur. Sic & ex {serie $\frac{l}{1}+\frac{ll}{1\times2}+\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ } &c datur semisumma numerorum indeque etiam numeri. Unde prodit relatio serierum inter se quâ ex unâ datâ dabitur altera.

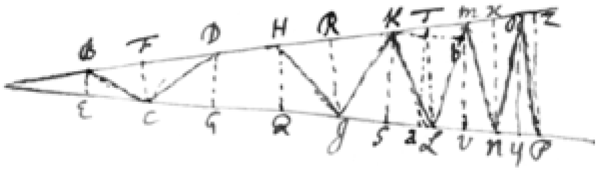
Theorema de inventione arcûs ex dato cosinu, ponendo radium 1, cosinum c, & arcum $\sqrt{6-\sqrt{24c+12}}$, minus appropinquat quàm prima fronte videtur. Posito quidem sinu verso v, error erit $\frac{v^3}{90}+\frac{v^4}{194}+\&c$. Potest fieri ut $120-27v$ ad $120-17v$ ita chorda $\left(\sqrt{2v}\right)$ ad arcum, et error erit tantum $\frac{61v^3\sqrt{20}}{44800}$ circiter qui semper minor est quam $5\frac{1}{4}$ minuta secunda, dum arcus non sit major quàm 45 gr. & singulis etiam bisectionibus diminuitur 128 vicibus

Series $\frac{a^3}{1\times2\times3}-\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$ &c applicari posset ad computationem Tabulæ segmentorum ut observat vir Clarissimus, sed res optimè absolvitur per Canonem sinuum. Utpote cognitâ quadrantis areâ, per continuas additionem nonæ partis ejus habebis sectores ad singulos decem gradus in semicirculo, dein per continuam additionem decimæ partis hujus habebis sectores ad gradus: et sic ad decimas partes graduum et ultra procedi potest. Eodem modo Leibnitius collegit seriem $\frac{a^3}{1\times2\times3}-\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ {.} Tunc, radio existente 1, ab uno quoque sectore et ejus complemento ad 180 gr aufer dimidium communis sinus recti & relinquentur segmenta in Tabulam referenda. Cæterum quamvis series hic non prosint, in alijs tamen locum obtinent; et quoniam hoc ad earum usum spectat, non gravabor in aliquibus attingere.

Constructionem Logarithmorum non aliunde peti debere, credetis fortè ex hoc simplici processu qui ab istis pendet. Per methodum supra traditam quærantur Logarithmi Hyperbolici numerorum 10, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02: id quod fit spatio unius et alterius horæ. dein divisis Logarithmis quatuor posteriorum per Logarithmum numeri 10, & addito indice 2, prodibunt veri Logarithmi numerorum 98, 99, 100, 101, 102, in Tabulam inserendi. Hi per dena intervalla interpolandi sunt, et exibunt Logarithmi omnium numerorum inter 980. & 1020 & omnibus inter 980 et 1000 iterum per dena intervalla interpolatis habebitur Tabula eatinus constructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium primorum numerorum et eorum multiplicium minorum quàm 100: ad quod nihil requiritur præter additionem et substractionem siquidem sit

$\sqrt{⑩}$ $\frac{9984\times1020}{9945}=2$. $\sqrt{④}$ $\frac{8\times9963}{984}=3$. $\frac{10}{2}=5$. $\frac{\sqrt{98}}{2}=7$. $\frac{99}{9}=11$. $\frac{1001}{7\times11}=13$. $\frac{102}{6}=17$. $\frac{988}{4\times13}=19$. $\frac{9936}{16\times27}=23$. $\frac{986}{2\times17}=29$. $\frac{992}{32}=31$. $\frac{999}{27}=37$. $\frac{984}{24}=41$. $\frac{989}{23}=43$. $\frac{987}{27}=47$. $\frac{9911}{11\times17}=53$. $\frac{9971}{13\times13}=59$. $\frac{9882}{2\times81}=61$. $\frac{9849}{3\times49}=67$. $\frac{994}{14}=71$. $\frac{9928}{8\times17}=73$. $\frac{9954}{7\times18}=79$. $\frac{996}{12}=83$. $\frac{9968}{7\times16}=89$. $\frac{9894}{6\times17}=97$ et habitis sic Logarithmis omnium numerorum minorum quàm 100, restat tantùm hos etiam semel atque iterum per dena intervalla interpolare.

Constructionis Tabulæ sinuum a qua pendet tota res Trigonometrica fundamentum optimum est continua additio dati anguli ad seipsum vel ad alium datum. Utpote in angulo addendo BAE inscribantur HI, IK, KL, LM, MN, NO, OP, <8r> &c {æquales radio AB: et ad opposita later}a demittantur perpendicula BE, HQ, {IR, KS, LT, MV, NX, OY, &c. et} angulorum HIQ, IKH, KLI, LMK &c differenti{æ erunt angulus A,} sinus HQ, {IR, KS &c. et cosinus} IQ, KR, LS, &c. {detur jam aliquis} eorum LMK. et cæteri sic eruentur. Ad SV, et MV demitte perpendicula Ta & Kb, et propter similia triangula ABE, TLa, KMb, ALT, AMV &c erit $\mathrm{AB}\ .\ \mathrm{BE} :: \mathrm{TL}\ .\ \mathrm{La}\left(=\frac{\mathrm{SL-LV}}{2}\right)\ .\ \mathrm{KT}\left(\frac{1}{2}\mathrm{KM}\right)\ .\ \frac{1}{2}\mathrm{Mb}\left(=\frac{\mathrm{MV-KS}}{2}\right)$. Et $\mathrm{AB}\ .\ \mathrm{AE} :: \mathrm{KT}\ .\ \mathrm{Sa}\left(=\ \frac{\mathrm{SL+LV}}{2}\right) :: \mathrm{TL}\ .\ \mathrm{Ta}\left(=\frac{\mathrm{KS+MV}}{2}\right)$. Unde dantur sinus et cosinus KS, MV, SL, LV, et simul patet ratio continuandi progressiones. Nempe $\mathrm{AB}\ .\ 2\mathrm{AE} :: \mathrm{LV}\ .\ \mathrm{TM} + \mathrm{MX} :: \mathrm{MX}\ .\ \mathrm{VN}+\mathrm{NY}$ &c $:: \mathrm{MV}\ .\ \mathrm{TL}+\mathrm{XN} :: \mathrm{XN} : \mathrm{MV}+\mathrm{OY}$ &c. Vel $\mathrm{AB}\ .\ 2\mathrm{BE} :: \mathrm{LV}\ .\ \mathrm{XN}-\mathrm{TL} :: \mathrm{MV}\ .\ \mathrm{TM}-\mathrm{MX} :: \mathrm{MX}\ .\ \mathrm{OY}-\mathrm{MV} :: \mathrm{XN}\ .\ \mathrm{VN}-\mathrm{NY}$ &c et retro $\mathrm{AB}\ .\ 2\mathrm{AE} :: \mathrm{LS}\ .\ \mathrm{KT}+\mathrm{RK}$ &c. + Pone ergo $\mathrm{AB}=1$, et fac $\mathrm{BE}\times\mathrm{TL}=\mathrm{La}$, $\mathrm{AE}\times\mathrm{KT}=\mathrm{Sa}$. $\mathrm{Sa}-\mathrm{La}=\mathrm{LV}$. $2\mathrm{AE}+\mathrm{LV}-\mathrm{TM}=\mathrm{MX}$, &c. Sed nodus est inventio sinus et cosinus anguli A. Et hic subveniunt series nostræ. Utpote cognito ex superioribus Quadrantalis arcus longitudine 1.57079 &c et simul quadrato ejus 2.4694 &c; divide quadratum hoc per quadratum numeri exprimentis rationem 90 $\mathrm{gr}$ ad angulum A: et quoto dicto z, tres vel quatuor primi termini huius seriei $1-\frac{\mathrm{z}}{2}+\frac{\mathrm{zz}}{24}-\frac{\mathrm{z}^3}{720}+\frac{\mathrm{z}^4}{40320}$ &c dabunt cosinum istius anguli A. Sic primo quæri potest angulus 5 $\mathrm{gr}$ et inde Tabula computari ad quinos gradus, ac deinde interpolari ad gradus vel dimidios gradus per eandem methodum: nam non convenit progredi per nimios saltus. Duæ tertiæ partes Tabulæ sic computatæ dant reliquam tertiam partem per additionem vel substractionem more noto, siquidem posito KT cosinu $60^{\mathrm{gr}}$ sit $\mathrm{AE}=\mathrm{SV}$ et $\mathrm{BE}=\mathrm{Mb}$. Tunc ad decimas et centesimas partes graduum pergendum est per aliam methodum, substitutis tamen prius Logarithmis sinuum inventorum si ejus generis Tabula desideretur.



Ad computum Tabularum Astronomicarum Kepleri posui fundamentum quoddam in alterâ Epistola. Ejus seriei tres primi termini et aliquando duo sufficiunt. Sed ad diversas partes Ellipseos diversæ ejusmodi series aptari debent. Vel potiùs tales series computandæ sunt quæ ex data area sectoris Ellipticæ BGE, immediatè exhibeant aream sectoris circuli cujus angulus est BEG, radius CB. Et habitis hisce, computum earum ad duos tres vel fortè quatuor terminos beneficio Logarithmorum haud gravius erit quam solita resolutio tot triangulorum in alijs Hypothesibus: imo forte minùs grave si series prius debitè concinnentur. siquidem unus Logarithmus e Tabula petitus determinet omnes istos terminos addendo ipsum et ejus multiplices ad Logarithmos datorum coefficientium in promptu habitos. Quæ de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias transferri possunt ubi ratiocinia Geometrica locum non obtinent. sufficit autem per has series computare triginta, vel viginti aut fortè pauciores terminos Tabulæ in debitis distantijs, siquidem termini intermedij facilè interseruntur per Methodum quandam quam in usu Calculatorum ferè hic descripsissem. Sed pergo ad alia.

Quæ Cl. Leibnitius a me desiderat explicanda, ex parte supra descripsi. Quod verò attinet ad inventionem terminorum p, q, r, in extractione radicis affectæ, primum p sic eruo. Descripto angulo recto BAC, latera <8v> {ejusBA, AC divi}do in partes æquales {et inde norm}ales erigo distribuentes angu{lare spa}tium in æqualia parallelogram{ma vel} quadrata, quæ concipio de{n}ominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum specierum, puta x et y, regulariter ascendentium a termino A prout vides in fig. 1 inscriptas: ubi y denotat radicem extrahendam et x alteram indefinitam quantitatem ex cujus potestatibus series constituenda est. Deinde cùm æquatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliquâ: et Regulâ ad duo vel fortè plura ex insignitis parallelogrammis applicatâ quorum unum sit humillimum in columna sinistrâ juxta AB: et alia ad regulam dextrorsum sita, cæteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant: seligo terminos æquationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos et inde quæro quantitatem Quotienti addendam.

Sic ad extrahendam radicem y ex $y^6-5xy^5+\frac{x^3}{a}y^4-7a^2x^2y^2+6a^3x^3+bbx^4=0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo notâ aliqua $\ast$ ut vides in fig. 2. Dein applico Regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistrâ columna, eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio donec alium similiter vel fortè plura e reliquis signatis locis coeperit attingere, videoque loca sic attacta esse $x^3$, xxyy et $y^6$. E terminis itaque $y^6-7aaxxyy+6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (et insuper si placet reductis ad $v^6-7vv+6=0$ ponendo $y=v\sqrt{ax}$) quæro valorem y et invenio quadruplicem $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, ā $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino Quotientis accipere licet prout e radicibus quampiam extrahere decretum est. Sic æquatio $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$, quam resolvebam in priori epistola dat $-2a^3+aay+y^3=0$ et inde $y=a$ proximè. Cum itaque a sit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, et substituo $a+p$ pro y. Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ, sed ex ijs credo D. Leibnitius se proprio Marte extricabit. Subsequentes vero termini $q\ .\ r\ .\ s$, &c eodem modo ex æquationibus secundis, tertiis cæterisque eruuntur quo primus p e prima; sed cura leviori, quia cæteri termini valoris y solent prodire dividendo terminum involvente infimam potestatem indefinitæ quantitatis x per coefficientem radicis $p$, $q$, $r$, aut s.

Intellexti credo ex superioribus regressionem ab areis curvarum ad lineas rectas fieri per hanc extractionem radicis affectæ. Sed duo alij sunt modi quibus idem perficio eorum unus affinis est computationibus quibus colligebam approximationes sub finem alterius Epistol**{**æ**}**, et intelligi potest per hoc exemplum. **{**Propenatur**}** **{**Proponatur**}** æquatio ad aream Hyperbolæ $z=x+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$ &c et partibus ejus multiplicatis in se emerget $zz=xx+x^3+\frac{11}{12}x^4+\frac{5}{6}x^5$ &c. $z^3=x^3+\frac{3}{2}x^4+\frac{7}{4}x^5$ &c. $z^4=x^4+2x^5$ &c. $z^5=x^5$ &c. Iam de z aufer $\frac{1}{2}zz$ et restat $z-\frac{1}{2}zz=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{24}x^4-\frac{16}{60}x^5$ &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$ et fit $z-\frac{1}{2}zz+\frac{1}{6}z^3=x+\frac{1}{24}x^4+\frac{3}{40}x^5$ &c Aufero $\frac{1}{24}z^4$ et restat $z-\frac{1}{2}zz+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4=x-\frac{1}{120}x^5$ &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$ et fit $z-\frac{1}{2}zz+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5=x$ <9r> quam **{**proxime. Sive $x=z-\frac{1}{2}zz+\frac{1}{6}z^3$ **}**$-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$ &c.

Eo**{**dem modo series de una inde**}**finita quantitate in aliam transferri possunt. Quem**{**admodum si posito r radio cir**}**culi, x sinu recto arcus z, et $x+\frac{x^3}{6rr}+\frac{3x^5}{40r^4}+$ &c longit**{**udine arcus istius atque **}**hanc seriem e sinu recto ad tangentem vellem transferre: quæro longitudinem tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$ et reduco in infinitam seriem $x+\frac{x^3}{2rr}+\frac{3x^5}{8r^4}+$&c: Qua dicta t colligo potestates ejus $t^3=x^3+\frac{3x^5}{2rr}+$&c. $t^5=x^5+$&c. Aufero jam t de z, et restat $z-t=-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^5}{10}-$ &c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, et fit $z-t+\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{5}x^5+$ &c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, et restat $z-t+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5=0$ quamproxime. Quare est $z=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-$ &c. Sed siquis in usus Trigonometricos me jussisset exhibere expressionem arcus per Tangentem, eam non hoc circuitu sed directa methodo quæsivissem.

Per hoc genus computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus constantes: et radices affectarum æquationum magna ex parte extrahuntur, sed ad hunc posteriorem usum adhibeo potius methodum in alterâ epistola descriptam tanquam generaliorem, &, (Regulis pro elisione superfluorum terminorum habitis,) paulo magis expeditam. Pro regressione vero ab areis ad lineas rectas et similibus, possunt hujusmodi Theoremata adhiberi.

Theorem. 1. Sit $z=ay+byy+cy^3+dy^4+ey^5$ &c et vicissim erit $y=\frac{z}{a}-\frac{bzz}{a^3}+\frac{2bb-ac}{a^5}z^3+\frac{5abc-5b^3-aad}{a^7}z^4+\frac{3a^2c^2-21abbc+6aabd+14b^4-a^3e}{a^9}z^5+$&c. exempli gratia. Proponatur æquatio ad aream Hyperbolæ $z=y-\frac{yy}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}$ &c et substitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, et $\frac{1}{5}$ pro e, vicissim exurget $y=z+\frac{1}{2}zz+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+$&c.

Theorem. 2. Sit $z=ay+by^3+cy^5+dy^7+ey^9+$&c, et vicissim erit $y=\frac{z}{a}-\frac{bz^3}{a^4}+\frac{3bb-ac}{a^7}z^5+\frac{8abc-aad-12b^3}{a^{10}}z^7+\frac{55b^4-55abbc+10aabd+5aacc-a^3e}{a^{13}}z^9+$&c. exempli gratia Proponatur æquatio ad arcum circuli $z=y-\frac{y^3}{6rr}+\frac{3y^5}{40r^4}+\frac{5y^7}{112r^6}+$&c et substitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6rr}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c,

$\frac{5}{112r^6}$ pro d &c ; orietur $y = z - \frac{3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \&c$ . Alterum modum regrediendi ab areis ad lineas rectas celare statui.

Ubi dixi omnia pene Problemata solubilia existere, volui de ijs præsertim intelligi circa quæ Mathematici se hactenus occuparunt vel saltem in quibus ratiocinia mathematica locum aliquem **{**obtinerent**}** obtinere possunt. Nam alia sanè adeo perplexis conditionibus implicata excogitare liceat ut non satis comprehendere valeamus, et multò minus tantarum computationum onus sustinere quod ista requirerent. Attamen ne nimium dixisse videor, inversa de Tangentibus Problemata sunt in potestate aliaque illis difficiliora ad quæ solvenda usus sum duplici methodo, unâ concinniori alterâ generaliori: utramque visum est impresentia literis transpositis consignare. ne propter alios idem obtinentes, institutum in aliquibus mutare cogerer. 5accd et 10effh11i4l3m9n6oqqr8s11t9v3x: 11ab3cdd10e et g10ill4m7n6o3p3q6rss11t8vx, 3ac et 4egh5i4l4m5n8oq4r35614vaadd et eeeeeiijmmnnooprrrsssssttuu.

Inversum hoc Problema de tangentibus quando tangens inter punctum contactus et axem figuræ est datæ longitudinis, non indiget his methodis. Est tamen curva illa mechanica, cujus determinatio pendet ab area Hyperbola. Ejusdem generis est etiam Problema quando pars axis inter tangentem et ordinatim applicatam datur longitudine. Sed hos casus vix numeraverim <9v> inter ludos natur**{**æ. Nam si in triangulo rec**}**tangulo quod ab illa axis parte, et tangente **{**ordinatim applicata constitu**}**itur, relatio duorum quorumlibet laterum per **{**æquationem quamlibet defini**}**tur, Problema solvi potest absque mea methodo generali **{**sed ubi pars axis ad punct**}**um aliquod positione datum terminata ingreditur vinculum t**{**unc res aliter **}**se habere solet.

Communicatio Resolutionis affectarum æquationum per methodum Leibnitij pergrata erit, juxta et explicatio quomodo se gerat ubi indices potestatum sunt fractiones ut in hac æquatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}} y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$ $20 + x^{\frac{3}{7}}$ , aut surdæ quantitates ut in hac $\overline{\mathbf{x}^{\sqrt{2}} + \mathbf{x}^{\sqrt{7}}} \,|^{\sqrt{③}\frac{2}{3}} = y$ $\overline{\mathbf{x}^{\sqrt{2}} + \mathbf{x}^{\sqrt{7}}} \,|^{\sqrt{③}\frac{2}{3}} = y$, ubi $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ non designant coefficientes ipsius x sed indices potestatum seu dignitatum ejus et $\sqrt{③}\frac{2}{3}$ indicem dignitatis binomij $\mathbf{x}^{\sqrt{2}} + \mathbf{x}^{\sqrt{7}}$. Res credo mea methodo patet, aliter descripsissem. Sed meta tandem prolixæ huic Epistolæ ponenda est. Literæ sanè excellentissimi Leibnitij valde dignæ erant quibus fusius hocce responsum darem. Et volui hac vice copiosior esse quia credidi amœniora tua negotia severiori hocce scribendi genere non debere a me crebro interpellari.

[Editorial Note 1] Folios 4-5 are a revision, in Newton's hand, of a passage beginning with the last two lines of f. 2v, and running through ff. 3r, 3v, 6r, 6v and 7r of the document as currently paginated. The revised passage appears to have been inserted between two of the pages (ff. 3v and 6r) of the text it is intended to replace. It ends 'morem meum universaliter usurpandi li' and dovetails into the same text string in the fourth paragraph of f. 7r.

[Editorial Note 2] Here Newton's intervention ends and the original text resumes, following on directly from the end of f. 3v.

[Editorial Note 3] At this point, Newton's revised text on ff. 4-5 rejoins the main text.