算法基础 2023 春　　Homework 5

任课老师：陈雪 & 邵帅　　due: June 5, 16:00

作业要求：说明思路与符号，清晰简洁的伪代码，必要的时间复杂度分析和必要的正确性分析。可以直接调用基本的数据库和已讨论过的算法/程序（如排序、找中位数、二分查找等）。

问题 1 (30 分)**.**

1. 给定二分图，设计算法找出最大匹配。分析时间复杂度与正确性。
2. 给定二分图，请找出它的最大独立集，给出时间复杂度并提供严格的正确性分析。提示：考虑最小割与最大独立集的关系。

问题 2 (20 分)**.** 给定有向图 $G=(V,E)$ 以及 $f: E \to \mathbb{R}^+$ 与 $g: V \to \mathbb{R}^+$，其中 f 代表经过边 e 的代价，g 代表访问节点 v 的收益。设计算法找出有向环 C 使得收益比最大 $\frac{\sum_{v\in C} g(v)}{\sum_{e\in C} f(e)}$。分析时间复杂度与正确性。

问题 3 (25 分)**.** 给定（无向）图 $G=(V,E)$ 以及 $f: E \to \mathbb{R}^+$ 表示每条边的距离。已知下列线性规划问题可用于求解 (s,t)-最短路径。

$$\max d_t$$

suject to

$$d_s = 0,$$
$$d_v \le d_u + f((u,v)) \quad \forall (u,v) \in E,$$
$$d_v \ge 0 \quad \forall v \in V.$$

给出上述线性规划问题的对偶问题，并尝试通过最小费用流问题 (Min-Cost Flow) 解释该对偶问题可用于求解 (s,t)-最短路径。

问题 4 (25 分)**.** 考虑如下的线性规划问题 P:

$$\max c^T x$$

subject to

$$a_i^T \le b_i \text{ for } 1 \le i \le m',$$
$$a_i^T = b_i \text{ for } m'+1 \le i \le m,$$
$$x_j \ge 0 \text{ for } 1 \le j \le n',$$
$$x_j \in \mathbb{R} \text{ for } n'+1 \le j \le n.$$

将上述问题表示成 $\max c'^T x'$ subject to $A'x \le b'$, $x' \ge 0$ 的标准形式，并给出其对偶问题 D。继续给出 D 的对偶问题，并证明其等于 P。