算法基础 2023 春　　　　Homework 1

任课老师：陈雪 & 邵帅　　　　due: Mar 16, 23:59

问题 1 (20 分). 考虑如下的求幂次的算法

Algorithm 1 1.1

function POWER(n, k, q)
　Input: $n \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}^+, q \in \mathbf{Z}^+$
　Output: $n^k \mod q$
　$m = 1$
　for $i = 1$ to k **do**
　　$m = m \cdot n \mod q$
　end for
　return m
end function

给出该算法最紧的时间复杂度 (即用 Θ 符号)，它是线性时间的吗？如果不是，能否给出线性时间的算法。你需要说明给出算法的正确性。

问题 2 (20 分). (a) 假设现在有 n 个球将其分别随机投入 N 个盒子中，即每个球以 $\frac{1}{N}$ 的概率被投入到其中一个盒子中。假设 $N \geq n$. 试求每个盒子中至多有一个球的概率。

(b) 重复扔一枚不一定均匀的硬币，即该硬币会以 p 的概率正面朝上，试问第一次出现正面朝上的所扔硬币次数的期望是多少？

问题 3 (20 分). 默认所有整数运算的时间皆为 $O(1)$，给出辗转相除法的时间复杂度上界和详细分析过程。辗转相除法的伪代码如下：

Algorithm 2 Euclid's algorithm

function EUCLID(a, b)
　if $b = 0$ **then**
　　return a
　else
　　return EUCLID$(b, a \mod b)$
　end if
end function

问题 4 (40 分). 在课上我们观察到了 Shell Sort 的一个重要性质：
一旦对数组 A 调用了步长为 h 的选择排序，A 数组在 Shell Sort 的未来时刻总是有 (注：此处的未来时刻指调用 $\textsc{InsertionSort}(h')$ 之后，而不包括 $\textsc{InsertionSort}(h')$ 的进行过程中):

$$1 \le i \le n-h, A[i] \le A[i+h] \tag{1}$$

实际上，只需要对任意步长 h_1 和 h_2，证明先后调用 $\textsc{InsertionSort}(h_2)$ 和 $\textsc{InsertionSort}(h_1)$ 之后，$\forall i : A[i] \le A[i+h_2]$；然后归纳得到结果。

(a) 对任意的 h_1, h_2 严格证明以上性质 [25 分] — 对 $h_2 = 3, h_1 = 2$ 的严格证明可得 20 分。

(b) 对 Lecture 2 中 ShellSort 部分的 Lemma 1（见 bb.ustc.edu.cn），利用课堂上的框架，提供一个完整的严格证明 [15 分]。