Cours 18

Les fonctions de plusieurs variables

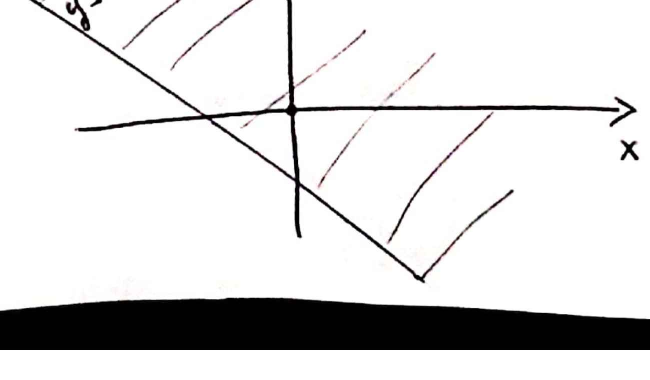
Définition :

Une fonction de deux variables est une règle f qui associe à chaque point (x,y) d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ un nombre réel $f(x,y)$.

- L'ensemble D est appelé le domaine de f.
- Le nombre réel $f(x,y)$ est appelé l'image de $(x,y) \in D$ par f
- L'ensemble $\{f(x,y) \in \mathbb{R} : (x,y) \in D\}$ est appelé l'image de f.
- On écrit souvent $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pour désigner une fonction de domaine D.

Exemple

$f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+y+1}{2}}$ définit une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ où le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y+1 \geq 0\}$



Définition

Les courbes de niveau d'une fonction f sont des courbes d'équations $f(x,y) = k$ où k est une constante. Autrement dit, la courbe de niveau k de f est le sous-ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = k\}$$

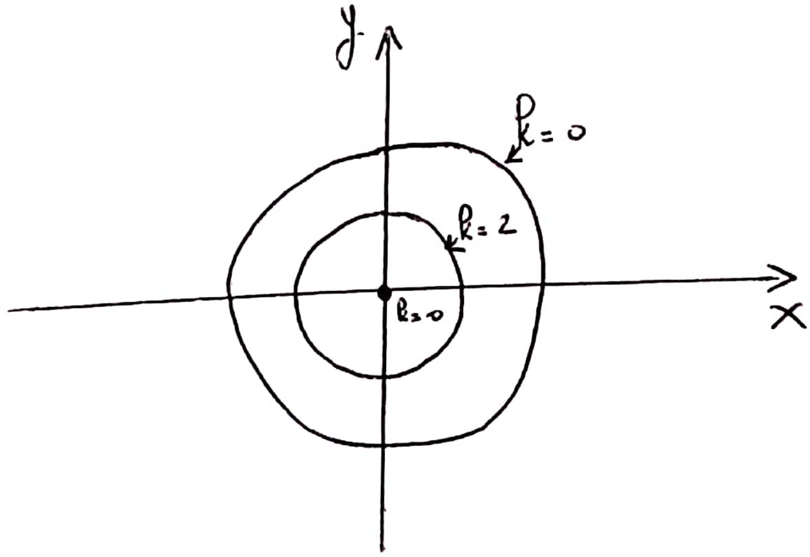
Exemple

Tracer les courbes de niveau de la fonction $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

Solution :

$f(x,y) = k \iff \sqrt{9-x^2-y^2} = k \iff x^2+y^2 = 9-k^2$, avec $9-k^2 \geqslant 0$

Ce sont des cercles de centre $(0,0)$ et de rayon $r = \sqrt{9-k^2}$



Définition

Le graphe d'une fonction f d'une seule variable est une courbe C d'équation $y = f(x)$, tandis que le graphe d'une fonction f de deux variables est une surface S d'équation $z = f(x,y)$.

Pour tracer le graphe d'une fonction de deux variables, on peut s'aider :

- des courbes de niveau $f(x,y) = k$ avec k constante
- des traces $z = f(k,y)$ dans les plans $x = k$
- des traces $z = f(x,k)$ dans les plans $y = k$.

Exemple 1 :

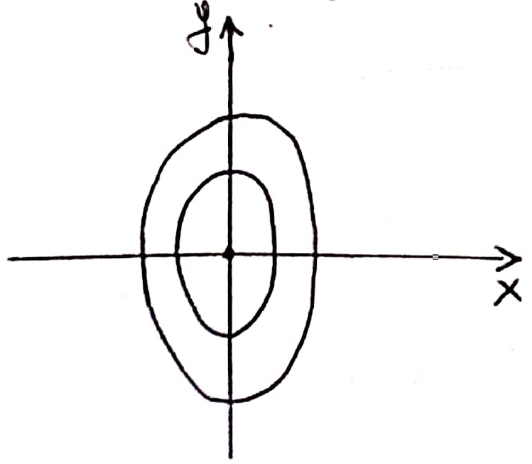
Déterminer l'allure du graphe de $f(x,y) = 4x^2 + y^2$

Solution

Domaine $D = \mathbb{R}^2$

i) Courbes de niveau

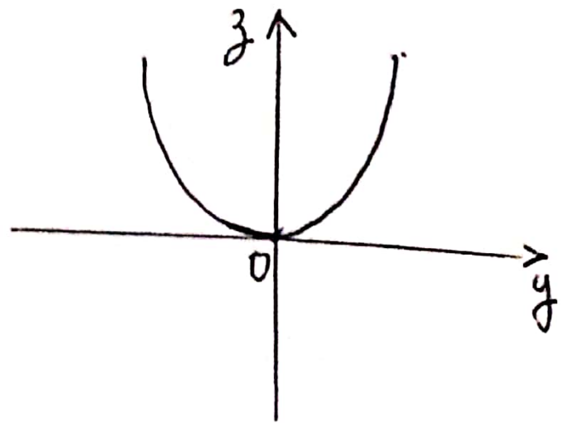
$f(x,y) = k \iff 4x^2 + y^2 = k$ sont des ellipses pour $k \geq 0$



ii) Trace dans le plan $x = 0$

$z = f(0,y) = 4(0)^2 + y^2 = y^2$

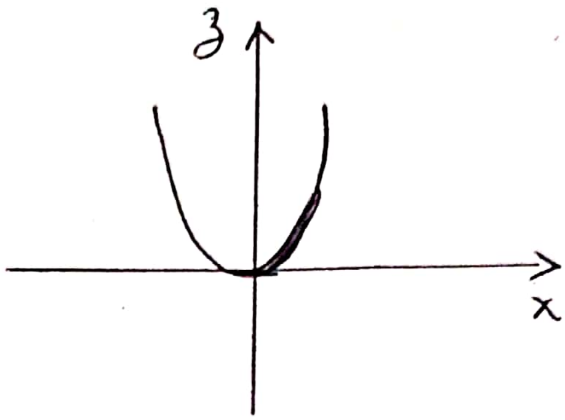
$z = y^2$ est une parabole



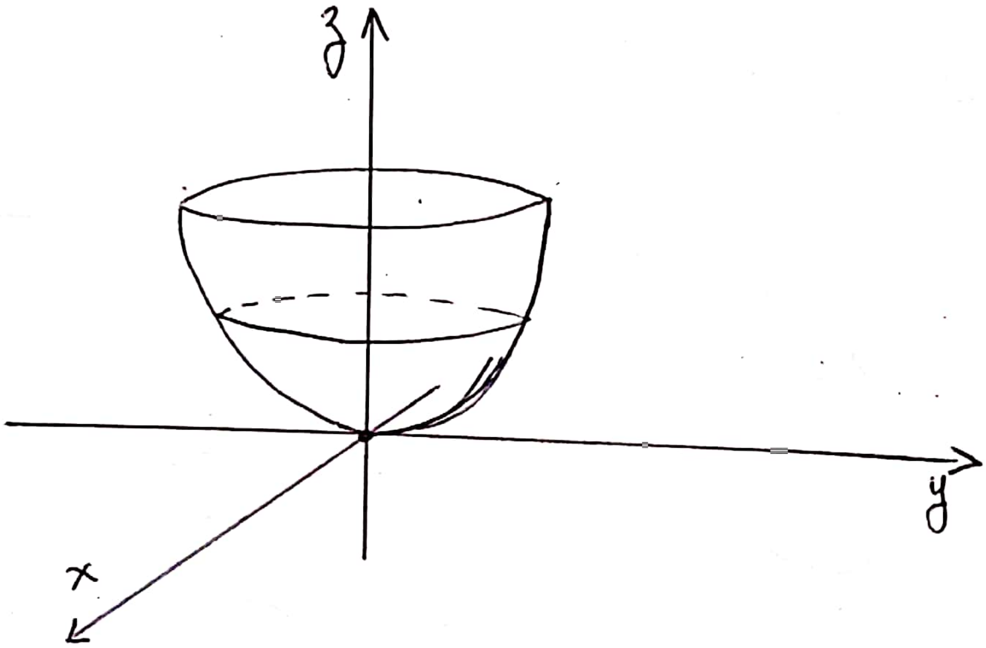
iii) Trace dans le plan $y = 0$

$z = f(x,0) = 4x^2 + (0)^2 = 4x^2$

$z = 4x^2$ est une parabole



iv) Graphe de f



Exemple 2

Déterminer l'allure du graphe de $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Solution

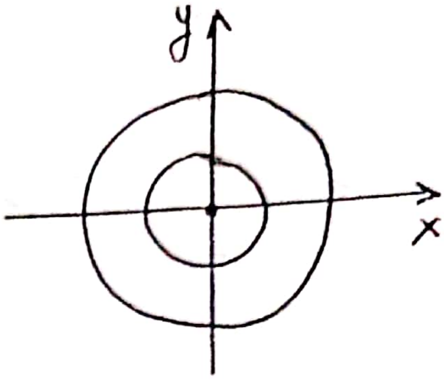
i) Domaine $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 9\}$

c'est l'intérieur du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3.

ii) Courbes de niveau

$f(x,y) = k \iff \sqrt{9 - x^2 + y^2} = k$

$\iff x^2 + y^2 = 9 - k^2, \quad k \in [-3, 3]$

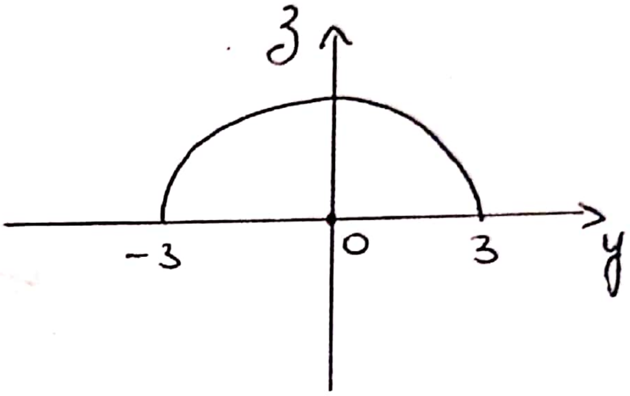


Cercles de centre $(0,0)$ et de rayon $r = \sqrt{9-k^2}$

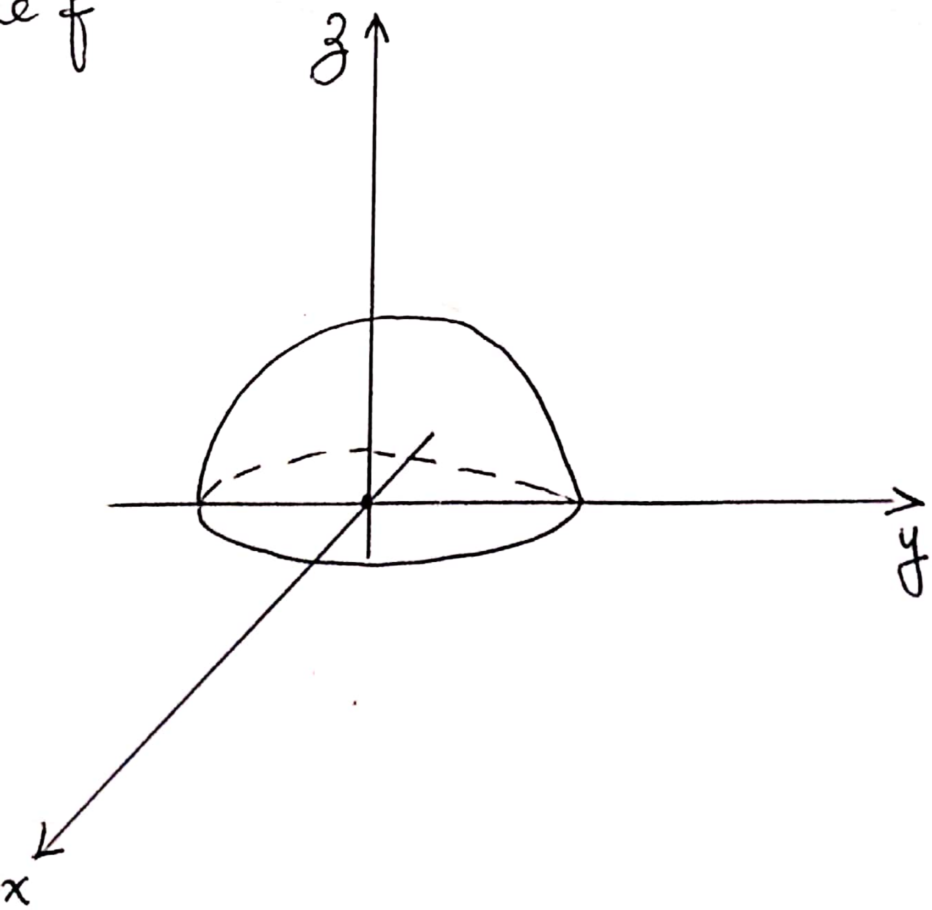
iii) Trace dans le plan $x = 0$

$z = f(0,y) = \sqrt{9-y^2}$

On a ~~une~~ parabole



iv) Graphe de f



Fonctions de plusieurs variables

Définition

Une fonction de n variables est une règle f qui associe à chaque point $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ un nombre réel $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. L'ensemble $\mathcal{D}$ s'appelle le domaine de f.

Définition

Les surfaces de niveau d'une fonction $f(x, y, z)$ de 3 variables sont des surfaces d'équations $f(x, y, z) = k$.