Dérivation des fonctions composées

Rappel

Si $y = f(x)$ et $x = g(t)$, où f et g sont dérivables alors

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{dt}$$

La règle de dérivation en chaîne pour les fonctions de deux variables s'énonce

Théorème

Soit $z = f(x, y)$ une fonction différentiable de x et y, où $x = g(t)$ et $y = h(t)$ sont des fonctions dérivables de t.
Alors z est une fonction différentiable de t et on a

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Exemple 1

Calculer $\frac{dz}{dt}$ en $t = 0$ pour $z = x^2 y + 3xy^4$ si $x = \sin(2t)$ et $y = \cos(t)$.

Solution

$z = f(x,y) = x^2 y + 3xy^4$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)\cdot 2\cos(2t) + (x^2 + 12xy^3)\cdot(-\sin(t))$$

$$= 2(2xy + 3y^4)\cos(2t) - (x^2 + 12xy^3)\sin(t)$$

pour $t = 0$, on a $x = \sin(2(0)) = \sin(0) = 0$

$y = \cos(0) = 1$

D'où

$$\frac{dz}{dt}(0) = 2(2(0)(1) + 3(1)^4)\cos(0) - (0^2 + 12(0)(1)^3)\sin(0)$$

$$= 6$$

Exemple 2

Calculer le taux de variation du volume d'un cône circulaire droit lorsque sa hauteur est de 25 cm et croît de 0.2 cm/s et que son rayon est de 10 cm et croît de 0.1 cm/s.

Solution

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $r = 10$ cm , $h = 25$ cm

$\frac{dr}{dt} = 0.1$ cm/s $\quad \frac{dh}{dt} = 0.2$ cm/s

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\pi r h\right) \cdot \frac{dr}{dt} + \left(\frac{1}{3}\pi r^2\right) \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{2}{3}\pi(10)(25) \cdot (0.1) + \frac{1}{3}\pi(10)^2 \cdot (0.2)$$

$$= \frac{70\pi}{3} \text{ cm}^3/\text{s}.$$

<u>Exemple 3</u>

Soit $p(t) = f(g(t), h(t))$ où $f(x, y)$, $g(t)$ et $h(t)$ sont différentiables. Calculer $p'(2)$ à l'aide des données suivantes

$g(2) = 1$, $h(2) = -1$, $g'(2) = 3$, $h'(2) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = 3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 5$

<u>Solution</u>

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t), h(t)) \cdot \frac{dg}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), h(t)) \cdot \frac{dh}{dt}(t)$$

$$\frac{dp}{dt}(2) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(2), h(2)) \cdot \frac{dg}{dt}(2) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(2), h(2)) \cdot \frac{dh}{dt}(2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) \cdot (3) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) \cdot (2)$$

$$= (3) \cdot (3) + (5) \cdot (2) = 19$$

Règle de dérivation pour les fonctions de plusieurs variables

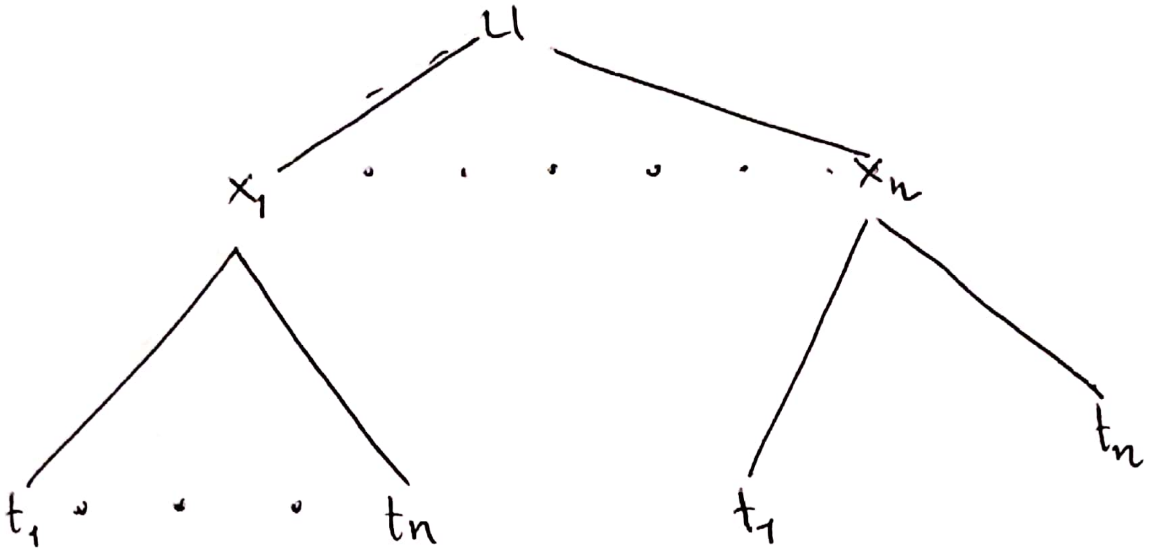
Supposons que u est une fonction différentiable de $x_1, \ldots, x_n$ et que $x_1, \ldots, x_n$ sont à leur tour des fonctions différentiables de $t_1, \ldots, t_n$. Alors on a

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_2}$$

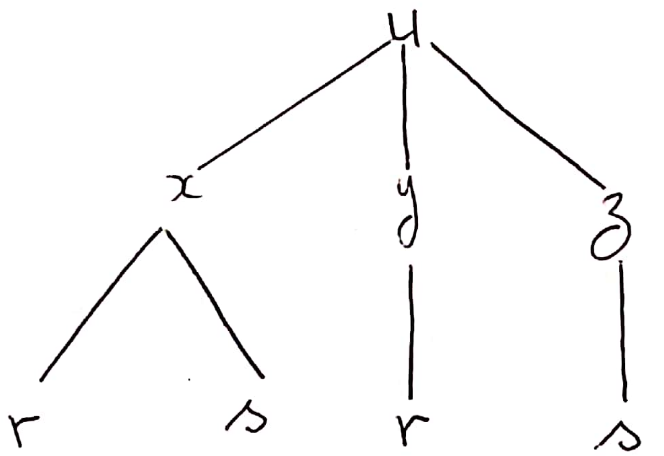
$$\vdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_n}$$



Exemple 1

Soit $u(x,y,z)$ où $x = x(r,s)$, $y = y(r)$ et $z = z(s)$



$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} (0) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} (0) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

Exemple 2

Soit $f(x,y)$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(r\cos(\theta))$$

Fonctions implicites

Théorème des fonctions implicites

Supposons que $F(x,y)$ soit une fonction différentiable au voisinage d'un point (a,b) et que

$$F(a,b) = 0 \quad \text{et} \quad F'_y(a,b) \neq 0$$

Alors l'équation $F(x,y) = 0$ définit implicitement y comme fonction de x c'est à dire $y = y(x)$ au voisinage du point (a,b) et

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Note :

$$F(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{dF}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow F'_x \frac{dx}{dx} + F'_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y}$$

Exemple

Montrer que l'équation $\ln(xy) + 4x - y = 0$ définit une courbe qui passe par $(x,y) = (\frac{1}{2}, 2)$.

Solution

On pose $F(x,y) = \ln(xy) + 4x - y$

$$F(\tfrac{1}{2}, 2) = \ln(\tfrac{1}{2} \cdot 2) + 4(\tfrac{1}{2}) - 2 = 0$$

$$F'_y(x,y) = \frac{x}{xy} - 1 \Rightarrow F'_y(\tfrac{1}{2}, 2) = \frac{1/2}{(1/2)\cdot 2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$F'_y(\tfrac{1}{2}, 2) \neq 0$$

D'après le théorème des fonctions implicites, $y = y(x)$ au voisinage de $(\frac{1}{2}, 2)$. En particulier $y(\frac{1}{2}) = 2$.

$$y'(\tfrac{1}{2}) = - \frac{F'_x(\frac{1}{2}, 2)}{F'_y(\frac{1}{2}, 2)} = \frac{8}{3}$$

Fonctions de 3 variables

Théorème des fonctions implicites

Supposons que $F(x,y,z)$ soit une fonction différentiable au voisinage d'un point (a,b,c) et que

$$F(a,b,c) = 0 \text{ et } F'_z(a,b,c) \neq 0$$

Alors l'équation $F(x,y,z) = 0$ définit implicitement z comme fonction de x et y, c'est à dire $z = z(x,y)$ au voisinage du point (a,b,c) avec $z(a,b) = c$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Exemple

Montrer que l'équation $x^3+y^3+z^3+6xyz = 1$ définit $z = z(x,y)$ au voisinage du point $(-3,1,-3)$.

Solution

On pose $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+6xyz-1$.

On a :

$$F(x,y,z) = 0$$

$$F(-3,1,-3) = -27+1-27+6(-3)(1)(-3) = 0$$

$F'_z(x,y,z) = 3z^2 + 6xy \rightarrow F'_z(-3,1,-3) = 3(-3)^2 + 6(-3)(1)$ 9

$\neq 0$

D'après le théorème des fonctions implicites, $z = z(x,y)$ au voisinage de $(-3,1,-3)$ et $z(-3,1) = -3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(-3,1) = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(-3,1) = -\frac{19}{3}$$