Gbegbe Decaho Jacques

300094197

Uottawa

MAT 2784

Examen mi-session 1

Question 4

Soit $f(x) = x^5 + 6x - 5$ sur $[0,1]$ f est continue sur $[0,1]$, c'est un polynome

a) $f(a)f(b) \Rightarrow f(0)f(1) = (0^5 + 6(0) - 5)(1^5 + 6(1) - 5) = (-5)(2) = -10 < 0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une racine $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$.

b) soit $g(x) = x$ et $f(x) = 0$

on pose $g(x) = x - f(x)$ avec $x = c$ qui est un point fixe

$\Rightarrow$ pour $x_{n+1} = g(x_n) = x_n - f(x_n)$,

$g'(x) = x' - f'(x) = g'(x) = 1 - f'(x)$ d'où $|g'(x)| < 1$ donc pour un certain

$x_0 \in [a,b]$, g converge en ce point sur l'intervalle.

c) la méthode du point fixe.

$f'(x) = 5x^4 + 6$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^5 + 6x - 5}{5x^4 + 6}$$

$=$

n	x_n
0	0,7800
1	0,7840
2	0,7840

$\left.\begin{matrix} 0,7840 \\ 0,7840 \end{matrix}\right\}$ stop!

Conclusion la solution à 4 décimales de la racine de $f(x)$ est $\boxed{c = 0,7840}$

Question 1

$$\underbrace{(-3y^2\cos x - 4xy)}_{M}dx + \underbrace{(2 - 9y\sin x - 4x^2)}_{N}dy = 0 \quad , \quad y(0) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = -6y\cos x - 4x \\ N_x = -9y\cos x - 8x \end{array}\right\} M_y \neq N_x \text{ donc l'EDO n'est pas exacte.}$$

$$M_y - N_x = -6y\cos x - 4x + 9y\cos x + 8x$$

$$= 3y\cos x + 4x$$

$$= \frac{M(x,y)}{-y}$$

$$\Rightarrow \frac{M_y - N_x}{M} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \text{facteur d'intégration.}$$

on pose $\mu = \mu(x) = e^{-\int g(y)dy} = e^{-\int -\frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y$

. on obtient une nouvelle EDO :

$$\Rightarrow (-3y^3\cos x - 4xy^2)dx + (2y - 9y^2\sin x - 4x^2y)dy = 0$$

$$M_y^* = -9y^2\cos x - 8xy = N_x^* = -9y^2\cos x - 8xy.$$

$M_y^* = N_x^* \Rightarrow$ EDO est exacte.

$$\int M^*(x,y)\,dx = -3y^3\sin x - 2x^2y^2 + g(y)$$

$$F_y = N = -9y^2\sin x - 4x^2y + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + K$$

donc la SG est : $\boxed{-3y^3\sin x - 2x^2y^2 + y^2 = C}$

Pour $y(0) = 1 \Rightarrow -3(1)^3\underbrace{\sin(0)}_{0} - 2\underbrace{(0)}_{0}(1) + \underbrace{(1)^2}_{1} = C \Rightarrow C = 1$

La S.U est : $\boxed{-3y^3\sin x - 2x^2y^2 + y^2 = 1}$

Question 3

b) $y'' - 8y' + 16y = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4(16) = 64 - 64 \Rightarrow \Delta = 0$

donc l'EDO admet une solution double.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-(-8)}{2} = -4$

$\Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$

donc sa SG est : $\boxed{C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

c) $y'' - 4y' + 5y = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(5) = 16 - 20 = -4 \Rightarrow \Delta = 4i^2$

$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{4 - 2i}{2}$ $\quad = \frac{4 + 2i}{2}$

donc $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

$\lambda_1 = 2 - i$ $\quad \lambda_2 = 2 + i$

$\Rightarrow y = C_1 x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) + C_2 x^\alpha \sin(\beta \ln(x))$

d'où la SG est : $\boxed{C_1 x^2 \cos(-\ln(x)) + C_2 x^2 \sin(2 \ln(x))}$

a) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$, $x > 0$

d'après Euler Cauchy, son equation caractéristique est sous la forme.

$m^2 + (a-1)m + b = 0$ avec $a = 3$ et $b = 4$.

$\Rightarrow m^2 + (3-1)m + 4 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 4 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4(4) = 4 - 16 = -12 = 12i^2$

$\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{3}$

Question 3 (suite)

$m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $= \frac{-2+i2\sqrt{3}}{2}$

$m_1 = -1-i\sqrt{3}$ $\quad$ $m_2 = -1+i\sqrt{3}$ $\quad$ avec $m_1 = \alpha + i\beta = \overline{m_2}$

$\Rightarrow y = C_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) + C_2 x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)$

donc la SG est : $\boxed{C_1 x^{-1} \cos(-\sqrt{3}\ln(x)) + C_2 x^{-1} \sin(-\sqrt{3}\ln(x))}$

Question 2

$y' + \frac{3}{x} y = x^4 y^2,\ x>0 \quad ,y(1) = \frac{1}{2}$

Cela revient à dire d'après l'EDO de Bernoulli

$y' + p(x) y = g(x) y^a.$

en substituant $u = y^{1-a}$, on obtient $u' + \underbrace{(1+a) f(x)}_{f(x)} u = \underbrace{(1-a) g(x)}_{r(x)}$

$\Rightarrow u' + (1+2) f(x) u = (1-2) g(x)$

$\Rightarrow u' + 3 f(x) u = -g(x).$

$\Rightarrow y = \frac{\int r(x) u\, dx}{u} = \frac{\int r(x) e^{\int f(x) dx} dx}{e^{\int f(x) dx}} = \frac{\int (x^4 y^2) e^{\int \frac{3}{x} dx} dx}{e^{\int \frac{3}{x} dx}} = \frac{\int (x^4 y^2) \ln|x^3| dx}{\ln|x^3|}$

SG $\boxed{y = \frac{x^3 y^2 - \ln|x| \cdot x^4 y^2 + K}{\ln|x^3|}}$

$(x^4 y^2) \ln|x^3|$ par partie

$\frac{1}{3}\frac{3x^2}{x^3} \leftarrow \ln|x^3|$

$x^4 y^2 \rightarrow 4x^3 y^2$

$ab - \int a b'$

$\ln \frac{3x^2}{3x^3} x x^4 y^2 - \int \frac{1}{x} \cdot 4x^3 y^2$

$= x^3 y^2 - \ln|x| \cdot x^4 y^2 + K$