27-34 Calculez l'intégrale double.

27. $\iint_R x \sec^2 y \, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \pi/4\}$

28. $\iint_R (y + xy^{-2}) \, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$

29. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1} \, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, -3 \le y \le 3\}$

30. $\iint_R \frac{\tan\theta}{\sqrt{1-t^2}} \, dA$, $R = \{(\theta, t) \mid 0 \le \theta \le \pi/3, 0 \le t \le \frac{1}{2}\}$

31. $\iint_R x \sin(x+y) \, dA$, $R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

32. $\iint_R \frac{x}{1+xy} \, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

33. $\iint_R ye^{-xy} \, dA$, $R = [0, 2] \times [0, 3]$

34. $\iint_R \frac{1}{1+x+y} \, dA$, $R = [1, 3] \times [1, 2]$

35-36 Dessinez le solide dont le volume est donné par l'intégrale itérée.

35. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y) \, dx \, dy$

36. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2) \, dy \, dx$

37. Calculez le volume du solide sous le plan $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ et au-dessus du rectangle $R = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$.

38. Calculez le volume du solide sous le paraboloïde hyperbolique $z = 3y^2 - x^2 + 2$ et au-dessus du rectangle $R = [-1, 1] \times [1, 2]$.

39. Calculez le volume du solide sous le paraboloïde elliptique $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ et au-dessus du rectangle $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

40. Calculez le volume du solide borné par la surface $z = x^2 + xy^2$ et les plans $z = 0$, $x = 0$, $x = 5$ et $y = \pm 2$.

41. Calculez le volume du solide borné par la surface $z = 1 + x^2 ye^y$ et les plans $z = 0$, $x = \pm 1$, $y = 0$, et $y = 1$.

42. Calculez le volume du solide dans le premier octant borné par le cylindre $z = 16 - x^2$ et le plan $y = 5$.

43. Calculez le volume du solide borné par le paraboloïde $z = 2 + x^2 + (y-2)^2$ et les plans $z = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ et $y = 4$.

44. Esquissez le solide compris entre la surface $z = 2xy/(x^2+1)$ et le plan $z = x + 2y$, et borné par les plans $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et $y = 4$. Calculez ensuite son volume.

LCS **45.** À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, calculez la valeur exacte de l'intégrale $\iint_R x^5 y^3 e^{xy} \, dA$, où $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Ensuite, utilisez ce logiciel pour dessiner le solide dont le volume est donné par l'intégrale.

LCS **46.** Dessinez le solide compris entre les surfaces $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ et $z = 2 - x^2 - y^2$ pour $|x| \le 1$, $|y| \le 1$. Approximez le volume de ce solide avec quatre décimales exactes à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique.

47-48 Calculez la valeur moyenne de f sur le rectangle donné.

47. $f(x, y) = x^2 y$, les sommets de R sont $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$ et $(1, 0)$.

48. $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}$, $R = [0, 4] \times [0, 1]$

49-50 Utilisez la symétrie pour calculer l'intégrale double.

49. $\iint_R \frac{xy}{1+x^4} \, dA$, $R = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

50. $\iint_R (1 + x^2 \sin y + y^2 \sin x) \, dA$, $R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

LCS **51.** Calculez les intégrales itérées à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \, dy \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \, dx \, dy$$

Vos réponses contredisent-elles le théorème de Fubini? Expliquez les résultats que vous avez obtenus.

52. a) En quoi les théorèmes de Fubini et de Clairaut se ressemblent-ils?

b) Soit la fonction $f(x, y)$ continue sur $[a, b] \times [c, d]$ et

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t) \, dt \, ds$$

pour $a < x < b$, $c < y < d$. Montrez que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

53. À partir de la définition de l'intégrale double, montrez que $\iint_R k \, dA = k(b-a)(d-c)$, où k est une constante et $R = [a, b] \times [c, d]$.

54. Soit $R = [0, \frac{\pi}{4}] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Utilisez l'inégalité 14 pour montrer que

$$0 \le \iint_R \sin^2 x \cos^2 y \, dA \le \frac{\pi^2}{64}$$

6.2 LES INTÉGRALES DOUBLES SUR DES DOMAINES GÉNÉRAUX

Pour les intégrales simples, le domaine d'intégration est toujours un intervalle. Dans le cas des intégrales doubles, on veut pouvoir intégrer une fonction f non seulement sur des rectangles, mais aussi sur des régions D de formes plus générales, comme celle