

Séries entièresDéfinition

Une série entière centrée en a est une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

où x est une variable et les c_n sont des constantes appelées coefficients de la série

Son domaine de convergence est l'ensemble des x pour lesquels la série converge.

Cas particulier: pour $a=0$, on obtient la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Exemple

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ est une série entière centrée en 0.

C'est une série géométrique de raison $r=x$.

Elle converge si $|r|=|x| < 1$ et diverge si $|r|=|x| \geq 1$.

(2)

Son domaine de convergence est $]-1, 1[$.

2°) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + \dots$ est une série entière centrée en $a = 2$.

C'est une série géométrique de raison $r = x-2$.

Elle converge si $|r| = |x-2| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}$$

Elle diverge si $|r| = |x-2| \geq 1$.

Son domaine de convergence est $]1, 3[$.

Théorème

Le domaine de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ est un intervalle centré en a . Il y a 3 cas possibles :

- 1°) La série ne converge qu'en $x = a$ (domaine = $\{a\}$)
- 2°) La série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ (domaine = \mathbb{R})
- 3°) Il existe $R > 0$ tel que la série converge pour $|x-a| < R$ et diverge pour $|x-a| > R$.

(domaine = $]a-R, a+R]$ ou $[a-R, a+R]$ ou $[a-R, a+R]$ ou $[a-R, a+R]$)

→ On dit que le rayon de convergence de la série est 0 dans le cas (1), le rayon est ∞ dans le cas (2) et le rayon est R dans le cas (3).

→ On utilisera le test du quotient (critère de d'Alembert) pour déterminer le rayon de convergence.

→ Aux extrémités de l'intervalle, on doit toujours utiliser un autre test.

Exemple

Déterminer le rayon et l'intervalle de convergence de chacune des séries suivantes :

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

Solution

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

Le terme général de la série est $a_n = (-3)^n \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

(4)

On utilise le test du quotient

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(-3)^{n+1} (x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n (x-1)^n} \right| \\ &= \left| \frac{(-3)^{n+1}}{(-3)^n} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right| \\ &= \left| -3 \cdot (x-1) \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \right| \\ &= 3|x-1| \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 3|x-1| \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}} = 3|x-1|$$

D'après le test du quotient la série

- converge si $3|x-1| < 1 \Leftrightarrow x \in]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}[$
- diverge si $3|x-1| > 1 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$ et $x > \frac{4}{3}$

Le rayon de convergence est $\frac{1}{3}$

Il reste à étudier la convergence aux extrémités.

→ pour $x = \frac{2}{3}$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{(-1/3)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge}$$

(Riemann avec } p = \frac{1}{2} \text{)

→ pour $x = \frac{4}{3}$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{(1/3)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ converge}$$

(Série alternée, Test de Leibniz)

Donc l'intervalle de convergence est $\left] \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right]$.

2.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

$$a_n = \frac{x^n}{(2n)!}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{x^n} \right|$$

$$= \left| \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \cdot x \right| = \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0 \quad (6)$$

D'après le test du quotient, la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Son rayon de convergence est ∞ et son intervalle de convergence est \mathbb{R} .