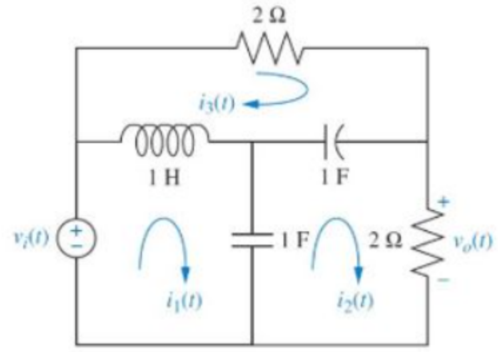
DEVOIR 2 - ELG 3555

GBEGBE DECAHO
300094197
Uottawa - W24

Question 1

Trouvez le modèle d'état du réseau illustré dans la figure ci-dessous, si la sortie est $v_0(t)$.



Loi des mailles

* maille 1 : $v_i(t) = \frac{d}{dt} i_1 - \frac{d}{dt} i_3 + v_{c_1}(t)$

* maille 2 : $v_{c_1}(t) = v_{c_2}(t) + v_0(t)$ avec $v_0 = 2 i_2(t)$

* maille 3 : $2 i_3(t) = v_{c_2}(t) + \frac{d}{dt} i_1 - \frac{d}{dt} i_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 - i_2 = \frac{C \cdot dv_{c_1}}{dt} \\ i_2 - i_3 = \frac{C \cdot dv_{c_2}}{dt} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Pour maille 1

$i_2 = i_1 - i_3 \Rightarrow v_i(t) = \frac{di_2}{dt} + v_{c_1}(t)$

$$\Rightarrow \frac{di_2}{dt} = v_i(t) - v_{c_2}(t)$$

$\Rightarrow$ Pour maille 2

$v_{c_1}(t) = v_{c_2}(t) + v_0(t) \Rightarrow v_0(t) = v_{c_1}(t) - v_{c_2}(t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(v_{c_1}(t) - v_{c_2}(t)\right) = \frac{2di_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} v_{c_1} = i_1 - i_2 \; ; \; \frac{d}{dt} v_{c_2} = i_2 - i_3$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{v_{c_1} - v_{c_2}}{2}$$

* Pour la Supermaille

$$v_i(t) = 2 i_3(t) + v_{c_1}(t) - v_{c_2}(t)$$

$$\Rightarrow v_i = v_{c_1} - v_{c_2} - \frac{2 d v_{c_2}}{dt} + v_{c_1} - v_{c_2}$$

$$= 2 v_{c_1} - 2 v_{c_2} + \frac{2 d v_{c_2}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_{c_2}}{dt} = \frac{1}{2} v_i + v_{c_2} - v_{c_1}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_{c_1}}{dt} = \frac{dv_{c_2}}{dt} + i_2$$

$$= i_2 + v_{c_1} - v_{c_2} - \frac{1}{2} v_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di_2}{dt} = v_i(t) - v_{c_1}(t) \\ \frac{dv_{c_1}}{dt} = i_2 + v_{c_1} - v_{c_2} - \frac{1}{2} v_i \\ \frac{dv_{c_2}}{dt} = v_{c_2} - v_{c_1} + \frac{1}{2} v_i \end{cases}$$

finalement comme modèle d'état.

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_2 \\ \dot{v}_{c_1} \\ \dot{v}_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ v_{c_1} \\ v_{c_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1/2 \end{bmatrix} v_i$$

Pour $y(t) = v_0$, on a $v_0 = v_{c_1} - v_{c_2}$

$$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ v_{c_1} \\ v_{c_2} \end{bmatrix}$$

Question 4

Trouvez la fonction de transfert du système G(s)=Y(s)/R(s) pour le système représenté dans le modèle d'état suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 0 & 5 & 3 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

On sait que : $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \Leftrightarrow G(s) = C\left[sI - A\right]^{-1} B + D$

Soit $sI = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 0 & 5 & 3 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$; $(sI - A)^T = \begin{bmatrix} (s-2) & -3 & +8 \\ 0 & (s-5) & -3 \\ 3 & 5 & (s+4) \end{bmatrix}^T$

$\Rightarrow (sI - A)^T \Rightarrow \begin{vmatrix} s-5 & 5 \\ -3 & s+4 \end{vmatrix} = (s^2 - s - 5)$

$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 8 & s+4 \end{vmatrix} = -3s - 52$

$\begin{cases} \begin{vmatrix} -3 & s-5 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -8s + 49 \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & s+4 \end{vmatrix} = 9 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} (s-2) & 3 \\ 8 & s+4 \end{vmatrix} = (s-2)(s+4) - 24 = s^2 + 2s - 32.$$

$$\begin{vmatrix} s-2 & 0 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -3(s-2) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ s-5 & 5 \end{vmatrix} = 3s - 5$$

$$\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5s + 1 \qquad \begin{vmatrix} s-2 & 0 \\ -3 & s-5 \end{vmatrix} = (s-2)(s-5)$$

La matrice devient

$$\mathrm{Adj}[sI - A] = \begin{bmatrix} (s^2-s-5 & 3s+52 & -8s+49 \\ -9 & s^2+2s-32 & s(s-2) \\ -3(s-5 & -5s+1 & s^2-7s+10 \end{bmatrix}$$

le determinant de celle ci est ouverte

$$\det(sI - A) = (s-2)\left[s^2 - 5s + 4s - 5\right]$$
$$= 120 - 24s - 27.$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{Ad}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

d'où $G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \times \dfrac{\mathrm{Adj}[sI - A]}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 0$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (s^2 - s - 5)(-27) + (-18)(s-5) & (3s+52) + 3(s^2+2s-32) + 6(\quad +1) \\ (-8s+49) + 9(s-2) + 6(s^2-7s+10) \end{bmatrix}}{\det} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{49s^2 - 349s + 552}{\det}$$

$$\Rightarrow \det = s^3 - 5s^2 + 4s^2 - 20s + 15s - 2s^2 + 10s - 8s + 40 - 30 - 27 - 24s + 120$$
$$= s^3 - 3s^2 - 27s + 157$$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{49s^2 - 349s + 552}{s^3 - 3s^2 - 27s + 157}}$$

Question 3

Écrivez une équation différentielle pour le système donnée ci-dessous :

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{s^5+2s^4+4s^3+s^2+4}{s^6+7s^5+3s^4+2s^3+s^2+5}} \longrightarrow C(s)$$

Trouver le modèle d'état du système et tracez la schéma-bloc respective.

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^5+2s^4+4s^3+s^2+4}{s^6+7s^5+3s^4+2s^3+s^2+5}$$

$$\Rightarrow C(s)\left[s^5+2s^4+4s^3+s^2+4\right] = R(s)\left[s^6+7s^5+3s^4+2s^3+s^2+5\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^6 r(t)}{dt^6} + \frac{7d^5 r(t)}{dt^5} + \frac{3d^4}{dt^4}r(t) + \frac{2d^3}{dt^3}r(t) + \frac{d^2}{dt}r(t) + 5r(t) = \frac{d^5 c(t)}{dt^5} + \frac{2d^4}{dt^4}c(t) + \frac{4d^3}{dt^3}c(t) + \frac{d^2}{dt}c(t) + 4c(t)}$$

② Modèle d'état.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^6+7s^5+3s^4+2s^3+s^2+5}} \xrightarrow{X(s)} \boxed{s^5+2s^4+4s^3+s^2+4} \longrightarrow C(s)$$

$$X(s) = R(s) \times \frac{1}{s^6+7s^5+3s^4+2s^3+s^2+5}$$

$$y(t) = c(t) \Rightarrow C(s) = s^5+2s^4+4s^3+s^2+4$$

$$= \overset{....}{x} + 2\dddot{x} + 4\dot{x} + 4x$$

$$= x^5 + 2x_4 + 4x_3 + 4x_1$$

$x_1 = x$
$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$
$x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}$
$x_4 = \dot{x}_3 = \ddot{x}_2 = \dddot{x}_1 = \dddot{x}$
$x_5 = \dot{x}_4 = \ddot{x}_3 = \dddot{x}_2 = \ddddot{x}_1 = \overset{....}{x}$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

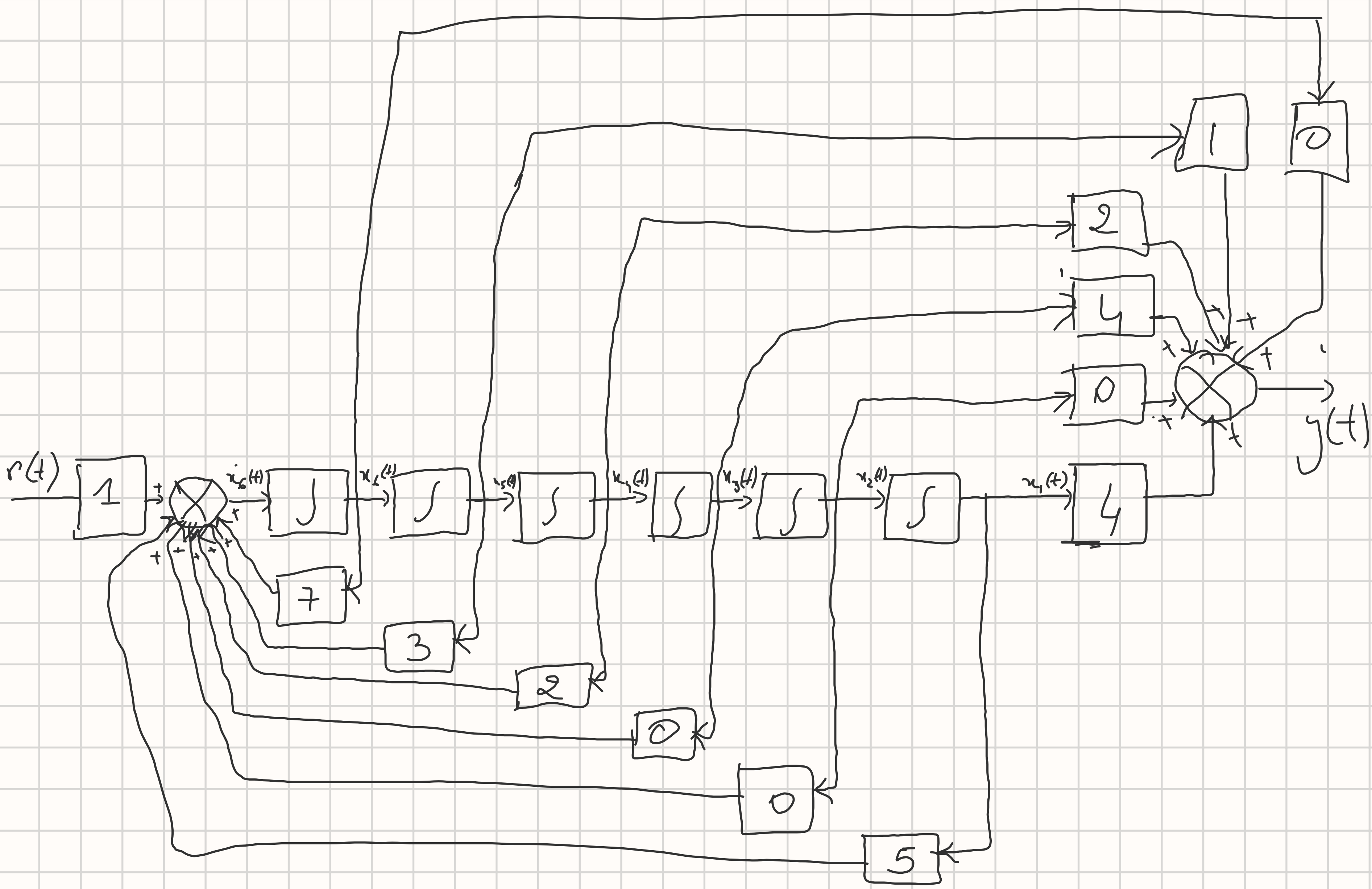
$$R(s) = X(s)\left[s^6+7s^5+3s^4+2s^3+s^2+5\right]$$

$x_1 = x$
$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$
$x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}$
$x_4 = \dot{x}_3 = \ddot{x}_2 = \dddot{x}_1 = \dddot{x}$
$x_5 = \dot{x}_4 = \ddot{x}_3 = \dddot{x}_2 = \ddddot{x}_1 = \overset{....}{x}$
$x_6 = \dot{x}_5 = \ddot{x}_4 = \dddot{x}_3 = \ddddot{x}_2 = \overset{.....}{x}_1 = \overset{.....}{x}$

$$\dot{x}_6 = r - 7x_6 - 3x_5 - 2x_4 - 5x_1$$

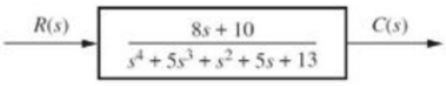
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & -2 & -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

Tracer du schéma bloc perspective.



Question 2

Considerez le système decrivez ci-dessous :



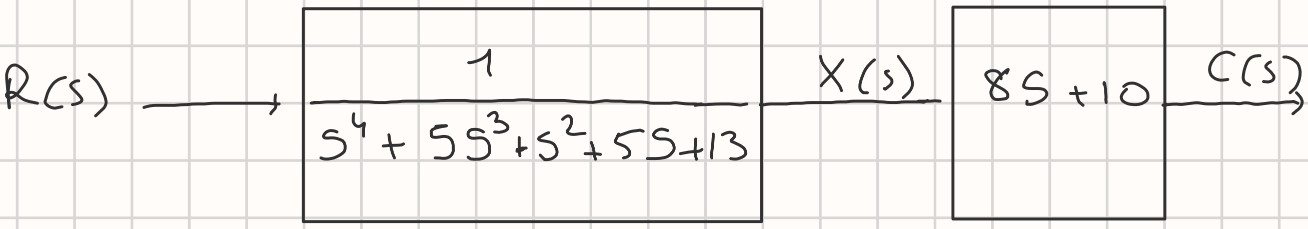
a) Trouver l'equation differentielle du sysyeme.
b) Trouvez le modèle d'état du système.
c) Tracez la schéma-bloc respective.

a) $G(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{8s+10}{s^4+5s^3+s^2+5s+13}$

$\Rightarrow C(s)\left[8s+10\right] = R(s)\left[s^4+5s^3+s^2+5s+13\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dc(t)}{dt} + 10c(t) = \frac{d^4}{dt^4}r(t) + 5\frac{d^3}{dt^3}r(t) + \frac{d^2}{dt^2}r(t) + 5\frac{d}{dt}r(t) + 13r(t)}$$

b) Modèle d'état du système.



$X(s) = R(s) \times \dfrac{1}{s^4+5s^3+s^2+5s+13}$

$y(t) = c(t) \Rightarrow C(s) = 8s+10$

$= 8\dot{x} + 10x$

$x_1 = x$

$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$

$c(t) = 8x_2 + 10x_1$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$R(s) = X(s)\left[s^4+5s^3+s^2+5s+13\right]$

$x_1 = x$

$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$

$x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1$

$x_4 = \dot{x}_3 = \ddot{x}_2 = \dddot{x}_1$

$\dot{x}_4 = r - 5x^4 - x_3 - 5x_2 - 13x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13 & -5 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

c) Tracer du schema bloc.

$$y = c(t) = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$