

**MAT 2784A - Automne 2019 - Devoir #1**  
**Dû le 27 Septembre 27 à 10:00 AM**

Nom

*Solution*

Prénom

Numéro d'étudiant

- **SVP** utilisez le format suivant pour soumettre votre devoir..
- Vous pouvez utiliser l'endos des page si celle-ci ne vous suffisent pas.

Question 1. [9 points] Résoudre les P.V.I. suivants.

1.  $\frac{y}{\cos x} y' = x(1+y^2)$ ,  $y(0) = 0$
2.  $2x^2 + y^2 + xyy' = 0$ ,  $x > 0$ ,  $y(1) = 1$
3.  $\underbrace{(y^3 + 3x^2 \cos y) dx}_{M(x,y)} + \underbrace{(3xy^2 - x^3 \sin y) dy}_{N(x,y)} = 0$ ,  $y(1) = 0$

1- ÉDO séparable :  $\frac{y}{1+y^2} dy = x \cos x \xrightarrow{\text{Intégrer}} \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = x \sin x + \cos x + C$   
 $\Leftrightarrow \ln(1+y^2) = 2x \sin x + 2 \cos x + C \Leftrightarrow 1+y^2 = e^{2x \sin x + 2 \cos x + C}$   
 $\Leftrightarrow \boxed{y^2 = D e^{2x \sin x + 2 \cos x} - 1}$  qui est la S.G, où  $D = e^C$ .

Maintenant, on a  $y(0) = 0 \Rightarrow 0^2 = D e^{2(0) \sin(0) + 2 \cos(0)} - 1 \Leftrightarrow D e^2 = 1$   
 $\Leftrightarrow D = e^{-2}$ . D'où la S.U. est :

$$\boxed{y^2 = e^{2x \sin x + 2 \cos x - 2} - 1}$$

N.B: Les deux solutions sont implicites.  $\nabla$

2. Cette ÉDO est équivalente à :  $\underbrace{(2x^2 + y^2) dx}_{M(x,y)} + \underbrace{xy dy}_{N(x,y)} = 0$

C'est une ÉDO à coefficients homogènes, car :  $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 M(x, y)$   
 de degré 2 en  $x$  et  $y$ . et  $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 N(x, y)$ .

On pose  $y = ux \Rightarrow dy = u dx + x du$  et l'ÉDO devient

$$(2x^2 + u^2 x^2) dx + u x^2 (u dx + x du) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2(1+u^2) dx + u x^3 du = 0 \text{ qui est séparable.}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x} dx = \frac{u}{1+u^2} du \xrightarrow[\text{x>0}]{\text{Intégrer}} -2 \ln(x) + C = \frac{1}{2} \ln(1+u^2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^{-2}) + C = \ln((1+u^2)^{1/2}) \Leftrightarrow x^{-2} \cdot D = (1+u^2)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow u^2 = D^2 x^{-4} - 1. \text{ Mais } u = y/x \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = K x^{-4} - 1 ; K = D^2.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y^2 = K x^{-2} - x^2} \text{ qui est la S.G. (implicite).}$$

Mais  $y(1) = 1 \Rightarrow 1^2 = K(1)^{-2} - (1)^2 \Leftrightarrow K = 2$ . D'où la S.U. :  $\boxed{y^2 = 2x^{-2} - x^2}$

Page additionnelle

3- On a:  $M_y = 3y^2 - 3x^2 \sin y = N_x$ . Donc c'est une ÉDO exacte

Donc  $F(x, y) = \int M(x, y) dx = xy^3 + x^3 \cos y + g(y)$

Mais  $F_y = N(x, y) \Leftrightarrow 3xy^2 - x^3 \sin y + g'(y) = 3xy^2 - x^3 \sin y$   
 $\Leftrightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$ ; on prend  $C = 0$ .

Donc  $F(x, y) = xy^3 + x^3 \cos y$ .

D'où la S.G. est  $\boxed{xy^3 + x^3 \cos y = K}$

Avec  $y(1) = 0$ , on trouve :

$$(1)(0^3) + (1)^3 \cos(0) = \boxed{K = 1}$$

et donc on a la S.U

$$\boxed{xy^3 + x^3 \cos y = 1}$$

Question 2. [12 points] Résoudre les P.V.I. suivants.

1.  $(2 + 3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0, \quad y(1) = -1.$

2.  $(\ln(y^4) - y^2 + 4x \ln y)dx + \left(\frac{1}{y} - 2y\right)dy = 0, \quad y(0) = 1.$

3.  $(y + 2xy^3 + 2xy^4 e^y)dx + (-3x + x^2 y^4 e^y - x^2 y^2)dy = 0, \quad y(0) = 1.$

1- On a:  $M_y - N_x = (3x + 2y) - (2x + y) = x + y = \frac{N(x,y)}{x}$

Donc  $f(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x} \implies$  le facteur d'intégration

$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$  et l'ÉDO suivante est exacte.

$(2x + 3x^2 y + xy^2)dx + (x^3 + x^2 y)dy = 0$

(Vérification:  $M_y^* = 3x^2 + 2xy = N_x^* \quad \checkmark$ )

Donc  $F(x,y) = \int M(x,y) dx = x^2 + x^3 y + \frac{x^2}{2} y^2 + g(y)$

Mais  $F_y = N^* \iff x^3 + x^2 y + g'(y) = x^3 + x^2 y \iff g'(y) = 0 \implies g(y) = C$

On prend  $C = 0$ .

Donc  $F(x,y) = x^2 + x^3 y + \frac{x^2}{2} y^2$  et la S.G. est:

$$x^2 + x^3 y + \frac{x^2}{2} y^2 = K$$

Avec  $y(1) = -1 \implies (1)^2 + (1)^3(-1) + \frac{(1)^2}{2}(-1)^2 = K = \frac{1}{2}$ , on a

la S.U.

$$x^2 + x^3 y + \frac{x^2}{2} y^2 = \frac{1}{2}$$

2- On a:  $M_y - N_x = \left(\frac{4}{y} - 2y + \frac{4x}{y}\right) - \left(\frac{4}{y} - 0\right) = -2y + \frac{4x}{y} = N(x,y)$

$\implies f(y) = \frac{M_y - N_x}{N} = 1 \implies$  le facteur d'intégration  $\mu = e^x$  et l'ÉDO

suivante est exacte  $e^x (\ln(y^4) - y^2 + 4x \ln y)dx + e^x \left(\frac{4x}{y} - 2y\right)dy = 0$

(Vérification:  $M_y^* = e^x \left(\frac{4}{y} - 2y + \frac{4x}{y}\right) = N_x^* \quad \checkmark$ )

$$F(x, y) = \int N^*(x, y) dy$$

Page additionnelle

Donc :  $F(x, y) = \int e^x \left( \frac{4x}{y} - 2y \right) dy = 4x e^x \ln(y) - y^2 e^x + h(x)$

$$= e^x (x \ln(y^4) - y^2) + h(x)$$
  
 Mais  $F_x = M^* \iff e^x (x \ln(y^4) - y^2) + e^x (\ln(y^4)) + h'(x) = e^x (x \ln(y^4) - y^2 + 4x \ln(y))$

$\iff h'(x) = 0 \implies h(x) = C ; \text{ on prend } C = 0.$

Donc la S.G est :  $\boxed{e^x (x \ln(y^4) - y^2) = K}$

Avec  $y(0) = 1 \implies e^0 (0 (\ln(1^4) - 1^2)) = \boxed{K = -1}$ , so la S.l

$\boxed{e^x (x \ln(y^4) - y^2) = -1}$

3- On a :  $M_y - N_x = (1 + 6xy^2 + 8xy^3 e^y + 2xy^4 e^y) - (-3 + 2xy^4 e^y - 2xy^2) = 4 + 8xy^2 + 8xy^3 e^y = 4M(x, y)$

$\implies g(y) = \frac{M_y - N_x}{M} = \frac{4}{y} \implies \text{le facteur d'intégration est :}$

$\mu = \mu(y) = e^{-\int g(y) dy} = y^{-4}$  et l'EDO suivante est exacte :

$\underbrace{(y^{-3} + 2xy^{-1} + 2xe^y)}_{M^*} dx + \underbrace{(-3xy^{-4} + x^2 e^y - x^2 y^{-2})}_{N^*} dy = 0$

(Vérification :  $M_y^* = -3y^{-4} - 2xy^{-2} + 2xe^y = N_x^* \checkmark$ )

Donc  $F(x, y) = \int M^* dx = xy^{-3} + x^2 y^{-1} + x^2 e^y + g(y)$

Page additionnelle

$$\text{Mais } F_y = N^* \Leftrightarrow -3xy^{-4} - x^2y^{-2} + x^2e^y + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c \quad \text{on prend } c = 0$$

$$\text{Alors } F(x, y) = xy^{-3} + x^2y^{-1} + x^2e^y \text{ et d'où la S.G est}$$

$$\boxed{xy^{-3} + x^2y^{-1} + x^2e^y = K}$$

$$\text{Maintenant, } y(0) = 1 \Rightarrow (0 \cdot (1)^{-3} + (0^2)(1)^{-1} + (0^2)e^{-1}) = \boxed{K = 0}$$

d'où la S.U. :

$$\boxed{xy^{-3} + x^2y^{-1} + x^2e^y = 0}$$

**Question 3. [5 points]** Considérez la fonction  $f(x) = x^4 + 6x - 5$ .

- (a) ([1 point]) Montrez que  $f(x)$  admet une racine dans l'intervalle  $[0, 1]$ .
- (b) ([2 points]) Utilisez l'équation  $f(x) = 0$  pour obtenir une fonction  $g(x)$  telle que  $g(x) = x$  et qui vérifie les deux conditions de convergence de la suite de récurrence  $x_{n+1} = g(x_n)$ .
- (c) ([2 points]) Utilisez la méthode du **point fixe** pour approcher la racine de  $f(x)$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  à 5 décimales près avec  $x_0 = 0.75$ .

(a)  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ . Aussi  $f(0)f(1) = (-5)(2) = -10 < 0$ .  
(D'après le TVI) Il existe une racine dans  $[0, 1]$ .

(b) On a de  $f(x) = 0 \iff x = \frac{5 - x^4}{6}$ .

On pose  $g(x) = \frac{5 - x^4}{6}$ .

$g$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et  $g'(x) = -\frac{2}{3}x^3$

Donc  $|g'(x)| < \frac{2}{3} < 1$ , car  $0 \leq x \leq 1$   
( $= \frac{2}{3}x^3$ )

Donc la suite  $x_{n+1} = g(x_n)$  est convergente sur  $[0, 1]$ .

(c)

$n$	$x_n$
0	0.75000
1	0.78060
2	0.77145
3	0.77430
4	0.77343
5	0.77369
6	0.77361
7	0.77361

STOP !

$$x_1 = \frac{5 - (0.75)^4}{6} = 0.7806$$

$$x_2 = \frac{5 - (0.7806)^4}{6} = 0.7714$$

Conclusion : à 5 décimales près la solution de  $f(x) = 0$  sur  $[0, 1]$  est :

$$x = 0.77361$$

**Question 4. [4 points]**

- (a) ([2 point]) Utilisez la méthode de Newton pour estimer la valeur de  $\sqrt[4]{5}$  à 5 décimales près. Utilisez  $x_0 = 1.25$  et  $f(x) = x^4 - 5$ .
- (b) ([2 point]) Utilisez la méthode de Newton pour approcher l'abscisse du point d'intersection des courbes  $y = x^3$  et  $y = \cos(x)$  à 5 décimales près. Prendre  $x_0 = 1$ .

(a) (N.B.:  $x = \sqrt[4]{5} \Leftrightarrow x^4 = 5 \Leftrightarrow x^4 - 5 = 0$ . Donc l'existence de  $f(x) = x^4 - 5$ )  
On a  $f'(x) = 4x^3$ .

n	$x_n$
0	1.25000
1	1.57750
2	1.50155
3	1.49539
4	1.49535
5	1.49535

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.25 - \frac{(1.25)^4 - 5}{4(1.25)^3} = 1.5775$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5775 - \frac{(1.5775)^4 - 5}{4(1.5775)^3} = 1.50155$$

Donc  $\sqrt[4]{5} \approx 1.49535$  à 5 décimales près

(b) On a  $\cos x = x^3 \Leftrightarrow \cos x - x^3 = 0$ . Donc, on pose  $f(x) = \cos x - x^3$   
et on a  $f'(x) = -\sin x - 3x^2$ .

n	$x_n$
0	1
1	0.88033
2	0.86568
3	0.86547
4	0.86547

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{\cos(1) - 1^3}{-\sin(1) - 3(1)^2} = 0.88033$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = (0.88033) - \frac{\cos(0.88033) - (0.88033)^3}{-\sin(0.88033) - 3(0.88033)^2} = 0.86568$$

Donc le point d'intersection à 5 décimales près est :

$$x = 0.86547$$