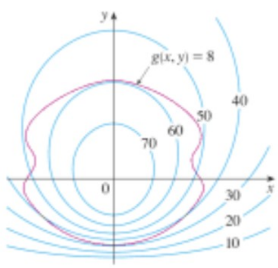
Les problèmes d'optimisation avec plusieurs contraintes d'inégalité se posent fréquemment dans la pratique. Toutefois, dans ce cas, les techniques de résolution dépassent le contenu de cet ouvrage; elles sont étudiées dans un cours avancé sur l'optimisation.

Exercices 5.3

1. La figure ci-dessous présente un diagramme de courbes de niveau de f et une courbe d'équation $g(x, y) = 8$. Estimez le maximum et le minimum de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = 8$. Expliquez votre raisonnement.



2. Tracez le cercle $x^2 + y^2 = 4$ et des courbes de niveau de la fonction $f(x, y) = y$ pour trouver le maximum de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 4$.

3. Tracez le cercle $x^2 + y^2 = 1$ et des courbes de niveau de la fonction $f(x, y) = x + y$ pour trouver le maximum de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

4. a) À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur, tracez le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Sur le même graphique, tracez plusieurs courbes de la forme $x^2 + y = c$ jusqu'à ce que vous obteniez deux courbes tangentes en un point du cercle. Comment interprétez-vous les valeurs de c pour ces deux courbes?

b) Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extremums de la fonction $f(x, y) = x^2 + y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. Comparez vos réponses à celles de la partie a).

5-21 Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour trouver le maximum et le minimum de la fonction sous les contraintes données.

5. $f(x, y) = x^2 - y^2;\ x^2 + y^2 = 1$

6. $f(x, y) = 3x + y;\ x^2 + y^2 = 10$

7. $f(x, y) = xy;\ 4x^2 + y^2 = 8$

8. $f(x, y) = xe^y;\ x^2 + y^2 = 2$

9. $f(x, y, z) = 2x + 2y + z;\ x^2 + y^2 + z^2 = 9$

10. $f(x, y, z) = e^{xyz};\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 24$

11. $f(x, y, z) = xz + y^2;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$

12. $f(x, y, z) = \ln(x^2+1) + \ln(y^2+1) + \ln(z^2+1);$
$x^2 + y^2 + z^2 = 12$

13. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\ x^4 + y^4 + z^4 = 1$

14. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$

15. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t;\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

16. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n;\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

17. $f(x, y, z) = x - z;\ x + 2y + z = 1,\ 2x^2 + 2y^2 = 9$

18. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\ x - y = 1,\ y^2 - z^2 = 1$

19. $f(x, y, z) = x + y + z;\ x^2 + z^2 = 2,\ x + y = 1$

20. $f(x, y, z) = z;\ x^2 + y^2 = z^2,\ x + y + z = 24$

21. $f(x, y, z) = yz + xy;\ xy = 1,\ y^2 + z^2 = 1$

22. Trouvez la valeur minimale de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ sous la contrainte $x + 2y + 3z = 10$. Montrez que f n'admet pas de valeur maximale sous cette contrainte.

23. La méthode des multiplicateurs de Lagrange suppose que les extremums existent, mais ce n'est pas toujours le cas. Montrez que le problème consistant à trouver la valeur minimale de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$ peut être résolu à l'aide des multiplicateurs de Lagrange, mais que f n'admet pas de valeur maximale sous cette contrainte.

24-31 À l'aide des multiplicateurs de Lagrange, estimez les valeurs optimales de la fonction f de l'exercice indiqué, sous la ou les nouvelles contraintes données.

24. Exercice 5, contrainte $x^2 + y^2 = 1{,}05$

25. Exercice 7, contrainte $4x^2 + y^2 = 7{,}9$

26. Exercice 9, contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8}{3}$

27. Exercice 11, contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 4{,}5$

28. Exercice 15, contrainte $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = \frac{9}{10}$

29. Exercice 16, contrainte $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1{,}1$

30. Exercice 17, contraintes $x + 2y + z = 1{,}05$ et $2x^2 + 2y^2 = 9{,}15$

31. Exercice 21, contraintes $xy = 0{,}99$ et $y^2 + z^2 = 1{,}04$

32-41 Trouvez les extremums globaux de f, s'ils existent, sur la région décrite par l'inégalité.

32. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5,\ x^2 + y^2 \leq 16$