Cours 13

Autres critères

1 Les séries alternées

Définition

Une série alternée est une série à termes alternativement positifs et négatifs. Elle est de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$$

où b_n est un nombre positifs pour tout $n \geq 1$.

Exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$$

Théorème : Critère des séries alternées (critère de leibniz)

Si la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, où $b_n > 0$ satisfait :

1°) $b_{n+1} \leq b_n$, à partir d'un certain rang

2°) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

alors elle est convergente. De plus, l'erreur d'approximation de sa somme s par la somme partielle s_k est

$$R_k = |s - s_k| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n \right| \leq b_{k+1}.$$

Exemple

a) La série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge car

$$\left.\begin{array}{l} 1°)\ \frac{1}{n+1} = b_{n+1} \leq b_n = \frac{1}{n},\ \forall\ n \geq 1 \\ 2°)\ \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \text{critère des séries alternées}$$

Pour trouver une approximation de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ à 0.01 près, on doit prendre $s_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ telle que $R_k \leq 0.01$.

Comme $R_k \leq b_{k+1}$ alors, on prend $b_{k+1} \leq 0{,}01$ c.à.d $\frac{1}{k+1} \leq 0.01$

D'où $k+1 \geq 100 \Rightarrow k = 99$

b) La série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$ est alternée mais

$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Donc on ne peut rien dire avec le critère des séries alternées.

Considérons la limite du terme général

$\lim_{n \to \infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$ n'existe pas.

Donc la série diverge selon le critère de divergence.

c) La série $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ est alternée. On va vérifier les deux critères pour les séries alternées

1°) $b_{n+1} \leq b_n$???

Considérons $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{\ln(x)}{2}}{x\sqrt{x}} < 0 \text{ si } 1 - \frac{\ln(x)}{2} < 0 \Leftrightarrow x > e^2 \simeq 7{,}38$$

Donc $b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n \geq 8$

2°) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$???

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \overset{R.H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$

<u>Conclusion</u> : la série converge d'après le test des séries alternées

2) Séries absolument convergentes

Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est dite <u>absolument convergente</u> si la série des valeurs absolues $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ est convergente.

<u>Exemple</u>

La série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente parce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente car étant une série de Riemann avec $p = 2 > 1$.

Théorème

Toute série absolument convergente est convergente

Application

Etudier la convergence des séries

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

Solution

a) On a :

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ est convergente car étant une serie de Riemann avec $p = 3 > 1$. Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$ est absolument convergente et par conséquent elle est convergente.

b) On a :

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann avec $p=2$)

D'après le test de comparaison, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right|$ est convergente c.à.d la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ est absolument convergente et par conséquent elle est convergente.

__Attention__ : Une série peut être convergente et non absolument convergente.

__Exemple__

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ est convergente (par le critère des séries alternées) mais n'est pas absolument convergente car

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec $p = 1$).

③ Test du quotient (critère de d'Alembert)

__Théorème__

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1°) Si $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, alors la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est absolument convergente et donc convergente

2°) Si $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente

3) Si $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, alors on ne peut pas conclure avec le test de d'Alembert.

Exemple

Etudier la convergence des séries suivantes

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{n!}$

Solution

a) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right|$$

$$= \left|\frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}\right| = \left|\frac{n^n}{(n+1)^n}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \quad \text{(exercice)}$$

Comme $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{e} < 1$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge d'après le critère de d'Alembert.

b) $a_n = \frac{(-n)^n}{n!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-(n+1))^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-n)^n}\right| = \left|\frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{-(n+1)(-(n+1))^n}{(-n)^n}\right|$$

$$= \left|\frac{n!}{(n+1)n!} \cdot \frac{-(n+1)(-(n+1))^n}{(-n)^n}\right|$$

$$= \left|-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (\text{exercice})$$

Comme $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e > 1$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n!}$ diverge d'après le test de d'Alembert.

(4) Critère de Cauchy

Théorème

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1°) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est absolument convergente et donc elle est convergente.

2) Si $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3°) Si $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, alors on ne peut pas conclure avec le critère de Cauchy.

Exemple

Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n-3}{3n+2}\right)^n$ converge

Solution

$$a_n = \frac{-2n-3}{3n+2}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left|\left(\frac{-2n-3}{3n+2}\right)^n\right|\right)^{1/n} = \frac{2n+3}{3n+2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Donc la série converge d'après le critère de Cauchy.