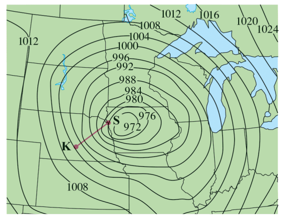
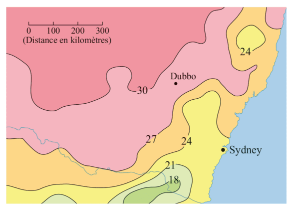
Exercices 4.4

1. La figure ci-dessous montre les courbes de niveau de la pression atmosphérique de l'Iowa, en millibars (mb) à 6 h le 10 novembre 1998. Une dépression de 972 mb se déplace sur le nord-est. La distance le long du segment de droite en rouge de K (Kearney, au Nebraska) à S (Sioux City, en Iowa) est de 300 km. Estimez la valeur de la dérivée de la fonction de pression à Kearney dans la direction de Sioux City. Quelles sont les unités de la dérivée dans cette direction ?



2. Le diagramme de courbes de niveau montre la température maximale moyenne durant le mois de novembre 2004 (en degrés Celsius). Estimez la valeur de la dérivée de cette fonction de température à Dubbo, dans l'État de la Nouvelle-Galles du Sud, dans la direction de Sydney. Quelles sont les unités de cette dérivée ?



3. Un tableau de valeurs de l'indice de refroidissement éolien $E = f(T, v)$ est donné à la question 3 des exercices 4.1 (p. 156). Utilisez ce tableau pour estimer la valeur de $f_{\vec{u}}(-20, 30)$, où $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$.

4-6 Trouvez la dérivée de f au point indiqué dans la direction donnée par l'angle θ.

4. $f(x, y) = x^2y^3 - y^4$, $(2, 1)$, $\theta = \pi/4$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = x\sin(xy)$, $(2, 0)$, $\theta = \pi/3$

7-10

a) Trouvez le gradient de f.

b) Évaluez le gradient au point P.

c) Trouvez le taux de variation de f en P dans la direction du vecteur $\vec{u}$.

7. $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$, $P(-6, 4)$, $\vec{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j})$

8. $f(x, y) = y^2/x$, $P(1, 2)$, $\vec{u} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + \sqrt{5}\,\vec{j})$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, $P(3, 0, 2)$, $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\vec{u} = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$

11-17 Trouvez la dérivée de la fonction au point donné dans la direction du vecteur $\vec{v}$.

11. $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $(3, 4)$, $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

12. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(2, 1)$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $(2, 1)$, $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$

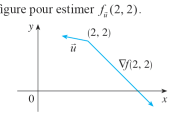
14. $g(r, s) = \arctan(rs)$, $(1, 2)$, $\vec{v} = 5\vec{i} + 10\vec{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, $(3, 2, 6)$, $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

17. $g(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{3/2}$, $(1, 1, 2)$, $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{k}$

18. Utilisez la figure pour estimer $f_{\vec{u}}(2, 2)$.



19. Trouvez la dérivée de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ en $P(2, 8)$ dans la direction de $Q(5, 4)$.

20. Trouvez la dérivée de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ en $P(1, -1, 3)$ dans la direction de $Q(2, 4, 5)$.

21-26 Trouvez le taux de variation maximal de f au point donné, puis indiquez dans quelle direction le taux de variation est maximal.

21. $f(x, y) = y^2/x$, $(2, 4)$

22. $f(p, q) = qe^{-p} + pe^{-q}$, $(0, 0)$

23. $f(x, y) = \sin(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

26. $f(x, y, z) = \tan(x + 2y + 3z)$, $(-5, 1, 1)$

27. a) Montrez qu'en un point $\vec{x}$, une fonction différentiable f décroît le plus rapidement dans le sens opposé au vecteur gradient, c'est-à-dire dans la direction de $-\nabla f(\vec{x})$.