SOLUTION L'aire est

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+(2x)^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^2 u^2\sqrt{1+u^2}\,du \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{u}{8}(1+2u^2)\sqrt{1+u^2} - \frac{1}{8}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^2 \\ &\approx 3{,}81. \end{aligned}$$

L'intégrale a été calculée à l'aide de la formule 22 des tables d'intégrales (page de référence 6).

Exercices 10.1

-2 Déterminez si les points P et Q sont sur la surface donnée.

1. $\vec{r}(u,v) = (u+v)\vec{i} + (u-2v)\vec{j} + (3+u-v)\vec{k}$
 $P(4,-5,1)$, $Q(0,4,6)$

2. $\vec{r}(u,v) = (1+u-v)\vec{i} + (u+v^2)\vec{j} + (u^2-v^2)\vec{k}$
 $P(1,2,1)$, $Q(2,3,3)$

-6 Identifiez la surface correspondant à la fonction vectorielle donnée.

3. $\vec{r}(u,v) = (u+v)\vec{i} + (3-v)\vec{j} + (1+4u+5v)\vec{k}$

4. $\vec{r}(u,v) = u^2\vec{i} + u\cos v\vec{j} + u\sin v\vec{k}$

5. $\vec{r}(s,t) = s\cos t\vec{i} + s\sin t\vec{j} + s\vec{k}$

6. $\vec{r}(s,t) = 3\cos t\vec{i} + s\vec{j} + \sin t\vec{k}$, $-1 \le s \le 1$

-12 À l'aide d'un ordinateur, tracez la surface paramétrée. Imprimez la figure obtenue et marquez les courbes correspondant à u constant et celles qui correspondent à v constant.

7. $\vec{r}(u,v) = u^2\vec{i} + v^2\vec{j} + (u+v)\vec{k}$, $-1 \le u \le 1$, $-1 \le v \le 1$

8. $\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v^3\vec{j} - v\vec{k}$, $-2 \le u \le 2$, $-2 \le v \le 2$

9. $\vec{r}(u,v) = u^3\vec{i} + u\sin v\vec{j} + u\cos v\vec{k}$, $-1 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$

0. $\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + \sin(u+v)\vec{j} + \sin v\vec{k}$, $-\pi \le u \le \pi$, $-\pi \le v \le \pi$

1. $x = \sin v$, $y = \cos u \sin 4v$, $z = \sin 2u \sin 4v$, $0 \le u \le 2\pi$, $-\pi/2 \le v \le \pi/2$

2. $x = \cos u$, $y = \sin u \sin v$, $z = \cos v$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$

3-18 Associez les équations aux graphiques I à VI et justifiez vos associations. Quelle famille de courbes correspond à u constant? À v constant?

3. $\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + v\vec{k}$

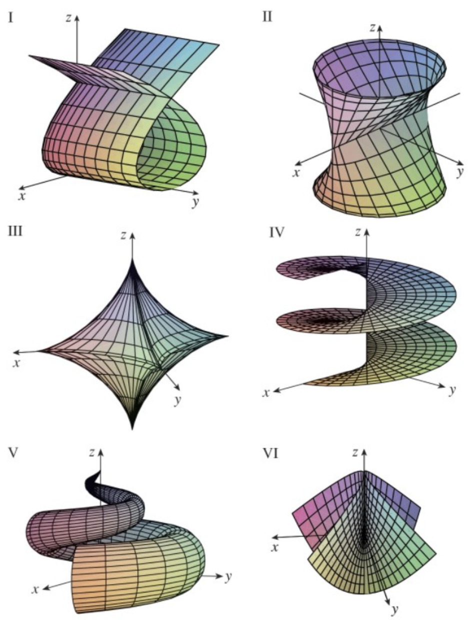
4. $\vec{r}(u,v) = uv^2\vec{i} + u^2v\vec{j} + (u^2-v^2)\vec{k}$

15. $\vec{r}(u,v) = (u^3-u)\vec{i} + v^2\vec{j} + u^2\vec{k}$

16. $x = (1-u)(3+\cos v)\cos 4\pi u$, $y = (1-u)(3+\cos v)\sin 4\pi u$, $z = 3u + (1-u)\sin v$

17. $x = \cos^3 u \cos^3 v$, $y = \sin^3 u \cos^3 v$, $z = \sin^3 v$

18. $x = \sin u$, $y = \cos u \sin v$, $z = \sin v$



19-26 Trouvez une représentation paramétrique de la surface.

19. Le plan contenant les vecteurs $\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{j} - \vec{k}$

20. Le plan passant par le point $(0, -1, 5)$ et contenant les vecteurs $2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ et $-3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$

21. La partie de l'hyperboloïde $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$ située devant le plan yz

22. La partie de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ située à gauche du plan des (x, z)

23. La partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ située au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$

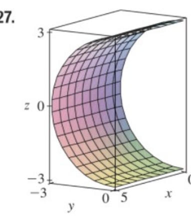
24. La partie du cylindre $x^2 + z^2 = 9$ située au-dessus du plan xy entre les plans $y = -4$ et $y = 4$

25. La partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ comprise entre les plans $z = 0$ et $z = 3\sqrt{3}$

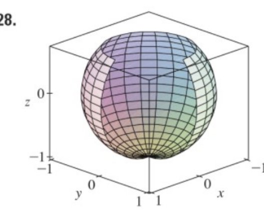
26. La partie du plan $z = x + 3$ à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 1$

LCS 27-28 À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, tracez un graphique qui ressemble à celui qui est présenté.

27.



28.



29. Trouvez les équations paramétriques de la surface obtenue par rotation de la courbe $y = 1/(1+x^2)$, $-2 \le x \le 2$, autour de l'axe des x et utilisez-les pour tracer la surface.

30. Trouvez les équations paramétriques de la surface obtenue par rotation de la courbe $x = 1/y$, $y \ge 1$, autour de l'axe des y et utilisez-les pour tracer la surface.

31. a) Que devient le tube en spirale de l'exemple 2 (voir la figure 5) si on remplace $\cos u$ par $\sin u$ et $\sin u$ par $\cos u$?
 b) Et si on remplace $\cos u$ par $\cos 2u$ et $\sin u$ par $\sin 2u$?

32. La surface d'équations paramétriques

$$x = 2\cos\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$y = 2\sin\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$z = r\sin(\theta/2)$$

avec $-\frac{1}{2} \le r \le \frac{1}{2}$ et $0 \le \theta \le 2\pi$, est appelée **ruban de Möbius**. Représentez cette surface de plusieurs points de vue. Qu... présente-t-elle d'inhabituel?

33-36 Trouvez une équation du plan tangent à la surfac... paramétrée donnée au point spécifié. Si vous disposez d'u... logiciel qui trace les surfaces paramétrées, utilisez-le pou... représenter la surface et le plan tangent.

33. $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$; $(2, 3, 0)$

34. $x = u^2 + 1$, $y = v^3 + 1$, $z = u + v$; $(5, 2, 3)$

35. $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + v\,\vec{k}$; $u = 1$, $v = \pi/3$

36. $\vec{r}(u,v) = \sin u\,\vec{i} + \cos u \sin v\,\vec{j} + \sin v\,\vec{k}$; $u = \pi/6$, $v = \pi/6$

37-38 Trouvez une équation du plan tangent à la surface para... métrée donnée au point spécifié. Représentez graphiquement l... surface et le plan tangent.

37. $\vec{r}(u,v) = u^2\vec{i} + 2u\sin v\,\vec{j} + u\cos v\,\vec{k}$; $u = 1$, $v = 0$

38. $\vec{r}(u,v) = (1-u^2-v^2)\vec{i} - v\,\vec{j} - u\,\vec{k}$; $(-1, -1, -1)$

39-50 Calculez l'aire de la surface.

39. La partie du plan $3x + 2y + z = 6$ située dans le premier octan...

40. La partie du plan paramétrée par $\vec{r}(u,v) = (u+v)\vec{i} + (2-3u)\vec{j} + (1+u-v)\vec{k}$ correspondant à $0 \le u \le 2$, $-1 \le v \le 1$

41. La partie du plan $x + 2y + 3z = 1$ située dans le cylindr... $x^2 + y^2 = 3$

42. La partie du cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$ compris entre le plan $y = ...$ et le cylindre $y = x^2$

43. La surface $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

44. La partie de la surface $z = 4 - 2x^2 + y$ située au-dessus d... triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$

45. La partie de la surface $z = xy$ située dans le cylindr... $x^2 + y^2 = 1$

46. La partie de la surface $x = z^2 + y$ située entre les plan... $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ et $z = 2$

47. La partie du paraboloïde $y = x^2 + z^2$ située à l'intérieur d... cylindre $x^2 + z^2 = 16$

48. L'hélicoïde paramétré par $\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + v\vec{k}$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$

49. La surface paramétrée par $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \le u \le ...$, $0 \le v \le 2$

50. La partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ située à l'intérieur d... cylindre $x^2 + y^2 = a^2$, où $0 < a < b$

51. Si l'équation d'une surface S est $z = f(x, y)$, o... $x^2 + y^2 \le R^2$, et si vous savez que $|f_x| \le 1$ et que $|f_y| \le 1$... que pouvez-vous dire au sujet de $A(S)$?