Gbegbe Decaho MAT 2722

300094197 Examen final Uottawa

1- A 4- F 7- F

2- B 5- F 8- F

3- A 6- F

9) $\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^2 \, dV$ avec $E = (0, \frac{\pi}{2})$ $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1$

$x \leq 0, y \leq 0\}$

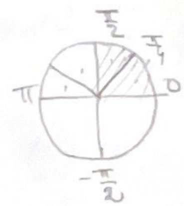
En Coordonnées sphériques

$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$ avec $dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$

$\rho \in [0,1]$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$



$$\int_0^1 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^4 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^1 \rho^6 \, d\rho \times \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 1 \, d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\rho^7}{7}\Big|_0^1 \times \theta \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \times (-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{7} \times \left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) \times \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(0)\right)$$

$$= \frac{1}{7} \times \frac{\pi}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{7} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2\pi - \pi\sqrt{2}}{28} = \boxed{\pi\left(\frac{1}{14} - \frac{\sqrt{2}}{28}\right)}$$

10) $\vec{F}(x,y,z) = -3y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ avec $S = x^2+y^2+(z-1)^2 = 2$

• $x^2+y^2+(z-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2z+1 = 2$ au dessus de $z=0$ un plan.

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2z = 1$

Comme $z=0$ est un plan $\Rightarrow x^2+y^2 = 1$ est un cercle de rayon 1.

$$\iint \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Paramétrisations de C

$$\begin{cases} \vec{r}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\ r'(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{F}(r(\theta)) = -3\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} + 0\,\vec{k})$

$\Rightarrow \vec{F}(r(\theta)) \cdot r'(\theta) = 3\sin^2\theta\,\vec{i} + \cos^2\theta\,\vec{j}$

$$\int \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} (3\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(2\pi - \frac{1}{2}\sin(4\pi)\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin(0)\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin 4\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}\times 2\pi + \frac{1}{2}\times 2\pi$$

$$= 3\pi + \pi =$$

$$\boxed{\int \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = 4\pi}$$

11) Trouvons et classifions les pts critiques de $f(x,y)=x^2y+2xy+\frac{1}{3}y^3-3y$

$f_x = 2xy+2y$ | $f_{xy} = 2x+2$ | $f_{xx} = 2y$

$f_y = x^2+2x+y^2-3$ | $f_{yx} = 2x+2$ | $f_{yy} = 2y$.

$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \Rightarrow (2y)(2y) - (2x+2)^2$

$\Delta = 4y^2 - 4x^2 - 8x - 4$

$\begin{cases} f_x = 2xy+2y \\ f_y = x^2+2x+y^2-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = (x+1)\,2y \\ f_y = x^2+2x+y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \text{ ou } 2y=0 \\ x=-1 \text{ ou } y=0 \end{cases}$

Si $y=0$, $f_y = x^2+2x-3=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x-1)(x+3)$

Les point sont : $(1,0)$ et $(-3,0)$

si $x=-1$, $f_y = 1-2+y^2-3 = y^2-4=0 \Rightarrow y=\pm 2$ 16 -

Les points sont $(-1,-2)$ et $(-1,2)$.

Classons les :

$f_{xx} = 2y$

$\Delta(a,b) = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b)$

Points (a,b)	$(1,0)$	$(-3,0)$	$-1,-2$	$(-1,2)$
$\Delta(a,b)$	-16	-16	16	16
$f_{xx}(a,b)$	0	0	-4	4

- On a des points selles en $(1,0)$ et $(-3,0)$
- On a un max global en $(-1,2)$ et un min global en $(-1,-2)$.

12) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 4y\vec{j} + z\vec{k}$ avec $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$ un cône

$z=0$ un plan en dessous

$\text{div}\,\vec{F} = 1+4+1 = 6$

Soit $z = 4 - r$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r = 4$

$z \in [0, 4-r]$

$r \in [0, 4]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{4-r} \text{div}\,\vec{F}\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{4-r} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\int_0^4 rz\Big|_0^{4-r} dr\,d\theta$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\int_0^4 4r - r^2\,dr\,d\theta$$

$$= 6\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta \times \int_0^4 4r - r^2\,dr\right)$$

$$= 6\left(2\pi \times \left(2r^2 - \frac{r^3}{3}\Big|_0^4\right)\right)$$

$$= 6\left(2\pi \times \left(32 - \frac{64}{3}\right)\right)$$

$$= 12\pi\left(32 - \frac{64}{3}\right)$$

$$= 12\pi \times \frac{32}{3}$$

$$\boxed{= \frac{384}{3}\pi}$$

$$\boxed{= 128\pi}$$

$16 \times 4 = 64$

$32 - \frac{64}{3}$

$96 - 64 = 32$

$\frac{32}{3}$

$32 \times 12 = 64 + 320 = 384$

$384 \div 3 = 128$

13) Enoncé un théorème

Soit C est une courbe orientée positivement, lisse par morceaux simple, formée par le plan et soit D la région bornée par C. si $(P(x,y))$ et $Q(x,y)$ ont des dérivées continues avec $\vec{F}(x,y) = P(x,y) + Q(x,y)$, alors

$$\boxed{\int_C^{+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dA}$$