

## Séries entières

### Définition

Une série entière centrée en  $a$  est une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots$$

où  $x$  est une variable et les  $c_n$  sont des constantes appelées coefficients de la série

Son domaine de convergence est l'ensemble des  $x$  pour lesquels la série converge.

Cas particulier: pour  $a=0$ , on obtient la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

### Exemple

10)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$  est une série entière centrée en 0.

C'est une série géométrique de raison  $r = x$ .

Elle converge si  $|r| = |x| < 1$  et diverge si  $|r| = |x| \geq 1$ .

(2)

Son domaine de convergence est  $]-1, 1[$ .

2°)  $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + \dots$  est une série entière centrée en  $a = 2$ .

C'est une série géométrique de raison  $r = x-2$ .

Elle converge si  $|r| = |x-2| < 1$  et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}$$

Elle diverge si  $|r| = |x-2| \geq 1$ .

Son domaine de convergence est  $]1, 3[$ .

### Théorème

Le domaine de convergence d'une série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$  est un intervalle centré en  $a$ . Il y a 3 cas possibles :

- 1°) La série ne converge qu'en  $x = a$  (domaine =  $\{a\}$ )
- 2°) La série converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$  (domaine =  $\mathbb{R}$ )
- 3°) Il existe  $R > 0$  tel que la série converge pour  $|x-a| < R$  et diverge pour  $|x-a| > R$ .

(domaine =  $]a-R, a+R[$  ou  $]a-R, a+R]$  ou  $[a-R, a+R[$  ou  $[a-R, a+R]$ )

→ On dit que le rayon de convergence de la série est 0 dans le cas (1), le rayon est  $\infty$  dans le cas (2) et le rayon est  $R$  dans le cas (3).

→ On utilisera le test du quotient (critère de d'Alembert) pour déterminer le rayon de convergence.

→ Aux extrémités de l'intervalle, on doit toujours utiliser un autre test.

### Exemple

Déterminer le rayon et l'intervalle de convergence de chacune des séries suivantes :

1°)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n (x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

2°)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

### Solution

1°)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Le terme général de la série est  $a_n = (-3)^n \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

On utilise le test du quotient

(4)

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-3)^{n+1} (x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n (x-1)^n} \right|$$

$$= \left| \frac{(-3)^{n+1}}{(-3)^n} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right|$$

$$= \left| -3 \cdot (x-1) \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \right|$$

$$= 3|x-1| \sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 3|x-1| \sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}} = 3|x-1|$$

D'après le test du quotient la série

- converge si  $3|x-1| < 1 \Leftrightarrow x \in ]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}[$
- diverge si  $3|x-1| > 1 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$  et  $x > \frac{4}{3}$

Le rayon de convergence est  $\frac{1}{3}$

Il reste à étudier la convergence aux extrémités.

(5)

→ pour  $x = \frac{2}{3}$ , on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{(-1/3)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge}$$

(Riemann avec  $p = \frac{1}{2}$ )

→ pour  $x = \frac{4}{3}$ , on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \frac{(1/3)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ converge}$$

(série alternée, Test de Leibniz)

Donc l'intervalle de convergence est  $\left] \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right]$ .

2.)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

$$a_n = \frac{x^n}{(2n)!}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{x^n} \right|$$

$$= \left| \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \cdot x \right| = \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

⑥

D'après le test du quotient, la série converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Son rayon de convergence est  $\infty$  et son intervalle de convergence est  $\mathbb{R}$ .