le long de l'axe des y pour revenir jusqu'à l'origine. Utilisez le théorème de Green pour calculer le travail effectué sur cette particule par le champ de forces $\vec{F}(x, y) = (\sin x)\vec{i} + (\sin y + xy^2 + \frac{1}{3}x^3)\vec{j}$.

CS **19-20** Utilisez le théorème de Green comme à l'exemple 6 pour simplifier le calcul de l'intégrale curviligne $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

19. $\vec{F}(x, y) = (x^2 + xy^2)\vec{i} + \left(\cos(y^3) + x^2 y\right)\vec{j}$, C est la courbe constituée des segments allant de (2, 0) à (2, 1), de (2, 1) à (–2, 1) et de (–2, 1) à (–2, 0).

20. $\vec{F}(x, y) = \left(y + \cos(x)\right)\vec{i} + \left(x + \sin(y)\right)\vec{j}$, C est le demi-cercle paramétré par $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

21-25 À l'aide d'une des formules 5, calculez l'aire de la région décrite.

21. La région D délimitée par la courbe, appelée **astroïde**, paramétrée par $\vec{r}(t) = \cos^3(t)\vec{i} + \sin^3(t)\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

22. La région D délimitée par la boucle de la **cubique de Tschirnhausen**, paramétrée par $\vec{r}(t) = (1 - 3t^2)\vec{i} + (t - 3t^2)\vec{j}$.

23. La région D délimitée par les deux boucles de la **lemniscate de Gerono**, paramétrée par $\vec{r}(t) = \sin(t)\vec{i} + \sin(t)\cos(t)\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

24. La région D bornée par la **chaînette**, paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \ln(t)\vec{i} + \left(t + \frac{1}{t}\right)\vec{j}$$

avec $\frac{1}{2} \le t \le 2$, et la droite horizontale $y = 2$.

25. La région sous une arche de la **cycloïde** $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

26. Si un cercle C de rayon 1 roule le long de la circonférence du cercle $x^2 + y^2 = 16$, un point fixe P sur C décrit une courbe appelée **épicycloïde**, d'équations paramétriques $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \sin t - \sin 5t$. Représentez l'épicycloïde et utilisez les formules 5 pour calculer l'aire qu'elle délimite.

27. a) Soit le segment de droite C reliant le point (x_1, y_1) au point (x_2, y_2). Montrez que

$$\int_C x\,dy - y\,dx = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

b) Les sommets d'un polygone sont, dans l'ordre antihoraire, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Montrez que l'aire du polygone défini par ces points est

$$A = \frac{1}{2}\Big[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)\Big].$$

c) Calculez l'aire du pentagone de sommets (0, 0), (2, 1), (1, 3), (0, 2) et (–1, 1).

28. Soit une région D bornée par une courbe fermée simple C dans le plan xy. Utilisez le théorème de Green pour démontrer que les coordonnées du centroïde $(\bar{x}, \bar{y})$ de D sont

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx,$$

où A est l'aire de D.

29. Utilisez l'exercice 28 pour trouver le centroïde d'un quart de cercle de rayon a.

30. Utilisez l'exercice 28 pour trouver le centroïde d'un triangle de sommets (0, 0), $(a, 0)$ et (a, b), où $a > 0$ et $b > 0$.

31. Une plaque mince et plane, de densité constante $\rho(x, y) = \rho$, occupe une région dans le plan xy bornée par une courbe fermée simple C. Montrez que ses moments d'inertie par rapport aux axes sont

$$I_x = -\frac{\rho}{3}\oint_C y^3\,dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3}\oint_C x^3\,dy.$$

32. Utilisez l'exercice 31 pour trouver le moment d'inertie d'un disque circulaire de rayon a et de densité constante ρ par rapport à un diamètre. (Comparez avec l'exemple 4 de la section 6.5.)

33. Utilisez la méthode de l'exemple 5 pour calculer $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où

$$\vec{F}(x, y) = \frac{2xy\,\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j}}{(x^2 + y^2)^2}$$

et C est n'importe quelle courbe fermée simple orientée dans le sens positif qui entoure l'origine.

34. Calculez $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y)\vec{i} + (3x - y^2)\vec{j}$ et C est la courbe orientée dans le sens positif qui délimite une région D dont l'aire est égale à 6.

35. Soit le champ vectoriel $\vec{F}$ de l'exemple 5. Montrez que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ pour toute courbe simple fermée ne passant pas par l'origine et n'entourant pas l'origine.

36. Terminez la démonstration du cas particulier du théorème de Green en démontrant l'équation 3.

37. Utilisez le théorème de Green pour démontrer la formule de changement de variables pour une intégrale double (voir la formule 9 de la section 7.5) pour le cas où $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dx\,dy = \iint_S \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

Ici, R est la région du plan xy qui correspond à la région S dans le plan uv par la transformation donnée par $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$.

(*Suggestion :* Remarquez que le membre de gauche est $A(R)$ et appliquez la première partie de l'équation 5. Convertissez l'intégrale curviligne sur ∂R en une intégrale curviligne sur ∂S et appliquez le théorème de Green dans le plan uv.)

CHAPITRE

10 LES INTÉGRALES DE SURFACE ET L'ANALYSE VECTORIELLE DANS L'ESPACE