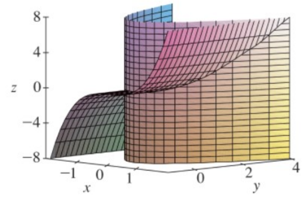
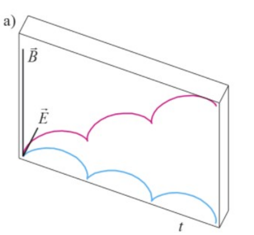


FIGURE 11

Certains logiciels de calcul symbolique représentent une courbe paramétrée en l'inscrivant dans un tube pour en donner une image plus claire. Une telle représentation permet de voir si une partie de la courbe passe devant ou derrière une autre partie de la courbe. Par exemple, la figure 13 montre la représentation de la courbe de la figure 12 b), qui a été obtenue à l'aide de la commande `tubeplot` de Maple.

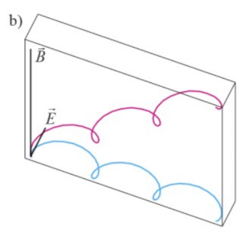
On a vu que l'hélice, une courbe paramétrée, est utilisée dans le modèle de l'ADN. Un autre exemple remarquable d'une courbe paramétrée est la trajectoire d'une particule chargée positivement dans des champs électrique et magnétique $\vec{E}$ et $\vec{B}$ orthogonaux. Selon la vitesse initiale de la particule à l'origine, sa trajectoire est une courbe dans l'espace dont la projection sur le plan horizontal est une cycloïde (voir la figure 12 a)) ou une courbe dont la projection est une **trochoïde** (voir la figure 12 b)).

a)



$\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j} + t\vec{k}$

b)



$\vec{r}(t) = (t - \frac{3}{2}\sin t)\vec{i} + (1 - \frac{3}{2}\cos t)\vec{j} + t\vec{k}$

FIGURE 12

La trajectoire d'une particule chargée dans des champs électrique et magnétiques orthogonaux.

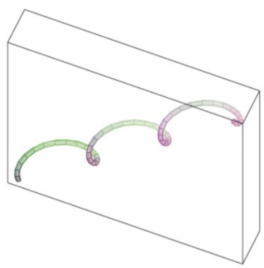


FIGURE 13

Exercices 8.1

1-2 Trouvez le domaine de la fonction vectorielle.

1. $\vec{r}(t) = \ln(t+1)\vec{i} + \dfrac{t}{\sqrt{9-t^2}}\vec{j} + 2^t\vec{k}$

2. $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \ln t\,\vec{j} + \dfrac{1}{t-2}\vec{k}$

3-6 Calculez la limite.

3. $\lim\limits_{t\to 0}\left(e^{-3t}\vec{i} + \dfrac{t^2}{\sin^2 t}\vec{j} + \cos 2t\,\vec{k}\right)$

4. $\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{t^2-t}{t-1}\vec{i} + \sqrt{t+8}\,\vec{j} + \dfrac{\sin \pi t}{\ln t}\vec{k}\right)$

5. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1+t^2}{1-t^2}\vec{i} + (\tan^{-1} t\,\vec{j}) + \dfrac{1-e^{-2t}}{t}\vec{k}$

6. $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-t}\,\vec{i} + \dfrac{t^3+t}{2t^3-1}\vec{j} + \left(t\sin\dfrac{1}{t}\right)\vec{k}$

7-14 Représentez la courbe paramétrée. Indiquez par une flèche le sens de parcours.

7. $\vec{r}(t) = \sin t\,\vec{i} + t\,\vec{j}$

8. $\vec{r}(t) = (t^2-1)\,\vec{i} + t\,\vec{j}$

9. $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (2-t)\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$

10. $\vec{r}(t) = \sin \pi t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \cos \pi t\,\vec{k}$

11. $\vec{r}(t) = 3\vec{i} + t\,\vec{j} + (2-t^2)\vec{k}$

12. $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + \vec{k}$

13. $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + t^4\,\vec{j} + t^6\,\vec{k}$

14. $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k}$

15-16 Tracez les projections de la courbe sur les trois plans de coordonnées. Utilisez ces projections pour vous aider à tracer la courbe.

15. $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + 2\cos t\,\vec{k}$ **16.** $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$

17-20 Trouvez une fonction vectorielle représentant le segment de droite qui relie P à Q, ainsi que les équations paramétriques du segment.

17. $P(2, 0, 0)$, $Q(6, 2, -2)$ **18.** $P(-1, 2, -2)$, $Q(-3, 5, 1)$

19. $P(0, -1, 1)$, $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ **20.** $P(a, b, c)$, $Q(u, v, w)$

21-26 Associez les équations paramétriques aux graphiques (étiquetés I à VI). Justifiez vos choix.

21. $x = t\cos t$, $y = t$, $z = t\sin t$, $t \geq 0$

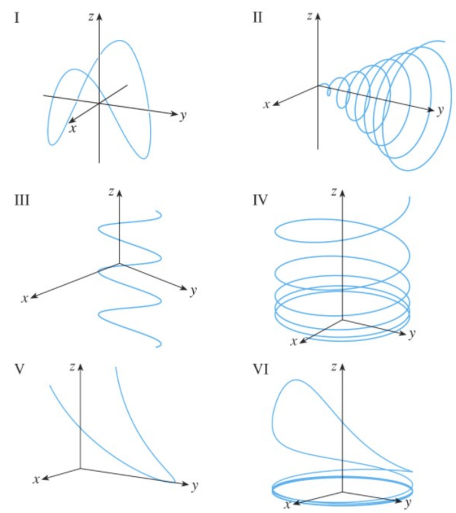
22. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1/(1+t^2)$

23. $x = t$, $y = 1/(1+t^2)$, $z = t^2$

24. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos 2t$

25. $x = \cos 8t$, $y = \sin 8t$, $z = e^{0,8t}$, $t \geq 0$

26. $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $z = t$



27. Montrez que la courbe d'équations paramétriques $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ est située sur le cône $z^2 = x^2 + y^2$. Utilisez cette information pour vous aider à tracer la courbe.

28. Montrez que la courbe d'équations paramétriques $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \sin^2 t$ est la courbe d'intersection des surfaces $z = x^2$ et $x^2 + y^2 = 1$. Utilisez cette information pour vous aider à tracer la courbe.

29. Trouvez trois surfaces différentes qui contiennent la courbe $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} + e^{2t}\,\vec{k}$.

30. Trouvez trois surfaces différentes qui contiennent la courbe $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + \ln t\,\vec{j} + (1/t)\,\vec{k}$.

31. En quels points la courbe $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (2t - t^2)\,\vec{k}$ coupe-t-elle le paraboloïde $z = x^2 + y^2$?

32. En quels points l'hélice $\vec{r}(t) = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ coupe-t-elle la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

33-37 À l'aide d'un ordinateur, représentez la courbe paramétrique. Assurez-vous de choisir un intervalle pour le paramètre et des points de vue qui permettent de bien représenter tous les aspects de la courbe.

33. $\vec{r}(t) = (\cos t \sin 2)t\,\vec{i} + (\sin t \sin 2t)\,\vec{j} + \cos 2t\,\vec{k}$

34. $\vec{r}(t) = te^t\,\vec{i} + e^{-t}\,\vec{j} + t\,\vec{k}$

35. $\vec{r}(t) = (\sin 3t \cos t)\,\vec{i} + \frac{1}{4}\,t\,\vec{j} + (\sin 3t \sin t)\,\vec{k}$

36. $\vec{r}(t) = (\cos(8\cos t)\sin t)\,\vec{i} + (\sin(8\cos t)\sin t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$

37. $\vec{r}(t) = \cos 2t\,\vec{i} + \cos 3t\,\vec{j} + \cos 4t\,\vec{k}$

38. Représentez la courbe d'équations paramétriques $x = \sin t$, $y = \sin 2t$, $z = \cos 4t$. Expliquez l'apparence de la courbe en montrant qu'elle est située sur un cône.

39. Représentez la courbe d'équations paramétriques

$$x = (1 + \cos 16t)\cos t$$
$$y = (1 + \cos 16t)\sin t$$
$$z = 1 + \cos 16t.$$

Expliquez l'apparence de la courbe en montrant qu'elle est située sur un cône.

40. Représentez la courbe d'équations paramétriques

$$x = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\sin t$$
$$z = 0{,}5\cos 10t.$$

Expliquez l'apparence de la courbe en montrant qu'elle est située sur une sphère.

41. Montrez que la courbe d'équations paramétriques $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passe par les points $(1, 4, 0)$ et $(9, -8, 28)$, mais non par le point $(4, 7, -6)$.

42-46 Donnez une paramétrisation de la courbe d'intersection des deux surfaces.

42. Le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et la surface $z = xy$

43. Le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et le plan $z = 1 + y$