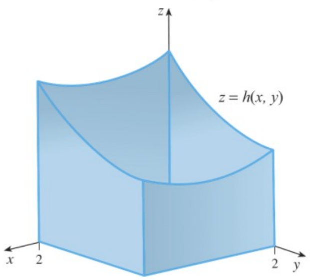
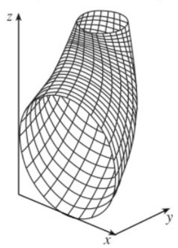
usieurs variables (2e éd.)... > Manuel

24. Un solide E est borné sur ses côtés pas les plans $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$, au-dessous par le plan $z=0$ et au-dessus par une surface $z=h(x, y)$. Soit S, la surface qui borne E. Le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z)=4x\vec{i}-3y\vec{j}+(2-z)\vec{k}$ à travers la face de S située dans le plan $x=2$ est de 10, et le flux à travers la face dans le plan $y=2$ est de 5. Calculez le flux de $\vec{F}$ à travers la surface $z=h(x, y)$.

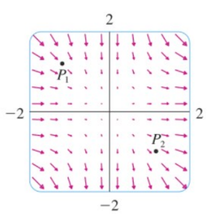


25. Une conduite a la forme de la surface S représentée. La frontière de S est constituée de deux cercles : un cercle C_1, de rayon 3, contenu dans le plan $y=0$; et un cercle C_2, de rayon 1, contenu dans le plan $z=4$. Le volume du solide borné par S et les deux disques délimités par C_1 et C_2 est de 12. Calculez le flux à travers S (orientée vers l'extérieur) du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z)=g(y, z)\vec{i}+8\vec{j}-(2z+3)\vec{k}$, où g est une fonction ayant des dérivées partielles continues.



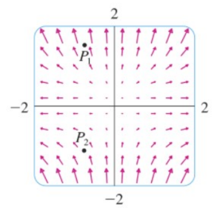
26. Soit $\vec{F}(x, y, z)=(ax-y)\vec{i}-(by-z)\vec{j}+(cz-x)\vec{k}$, où a, b et c sont des constantes strictement positives. Existe-t-il une surface fermée S telle que $\vec{F}$ est tangent à S en tout point.

27. Soit $\vec{F}$ le champ vectoriel représenté. Servez-vous de l'interprétation de la divergence trouvée dans cette section pour déterminer si div $\vec{F}$ est positive ou négative en P_1 et en P_2.



28. a) Considérez le champ vectoriel $\vec{F}$ représenté sur la figure et déterminez si les points P_1 et P_2 sont des sources ou des puits. Expliquez votre réponse en ne considérant que la figure.

b) On donne $\vec{F}(x, y)=x\vec{i}+y^2\vec{j}$. Vérifiez votre réponse à la partie a) à l'aide de la définition de la divergence.



LCS **29-30** Représentez le champ vectoriel et déterminez les points où div $\vec{F}>0$ et ceux où div $\vec{F}<0$. Calculez ensuite div $\vec{F}$ pour vérifier si votre réponse est valable.

29. $\vec{F}(x, y)=xy\vec{i}+(x+y^2)\vec{j}$

30. $\vec{F}(x, y)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}$

31. Vérifiez que div $\vec{E}=0$ pour le champ électrique

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{\varepsilon Q}{\|\vec{x}\|^3}\vec{x}.$$

32. Utilisez le théorème de flux-divergence pour calculer $\iint_S (2x+2y+z^2)\,dS$, où S est la sphère $x^2+y^2+z^2=1$.

33-38 Prouvez chacune des identités suivantes en supposant que S et E satisfont aux conditions du théorème de flux-divergence et que les fonctions scalaires et les composantes des champs vectoriels ont des dérivées partielles secondes continues.

33. $\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=0$, où $\vec{a}$ est un vecteur constant.

34. $V(E)=\frac{1}{3}\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, où $\vec{F}(x, y, z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

35. $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}=0$

36. $\iint_S f_{\vec{n}}\,dS=\iiint_E \nabla^2 f\,dV$

37. $\iint_S (f\nabla g)\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_E (f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g)\,dV$

38. $\iint_S (f\nabla g-g\nabla f)\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_E (f\nabla^2 g-g\nabla^2 f)\,dV$

39. Supposez que S et E satisfont aux conditions du théorème de flux-divergence et que f est une fonction scalaire aux dérivées partielles continues. Démontrez que

$$\iint_S f\vec{n}\,dS=\iiint_E \nabla f\,dV.$$

Ces intégrales de fonctions vectorielles sont des vecteurs définis en intégrant chaque fonction composante. (*Suggestion :* Commencez par appliquer le théorème de flux-divergence à $\vec{F}=f\vec{c}$, où $\vec{c}$ est un vecteur constant arbitraire.)

40. a) Soit f une fonction continue. Démontrez que si $\iiint_E f(x, y, z)\,dV=0$ quelle que soit la région E, alors $f(x, y, z)=0$ pour tout (x, y, z).

b) Soit C une courbe fermée simple et $S_1, S_2, \ldots, S_n$ des surfaces ayant C comme frontière commune. Les surfaces S_i sont toutes orientées de façon compatible avec l'orientation de C. Déterminez des conditions sur $\vec{F}$ qui font en sorte que les intégrales $\iint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{S}$ aient toutes la même valeur (autrement dit, l'intégrale est indépendante de la surface).

41. À la section 10.2, on a défini le **flux thermique** (ou flux de chaleur) à travers une surface S d'un corps dont la température est donnée par la fonction $T(x, y, z)$ comme étant l'intégrale $-K\iint_S \nabla T\cdot d\vec{S}$. Calculez de deux façons différentes le flux thermique à travers la surface d'une boule de rayon a centrée à l'origine, si sa température est donnée par $T(x, y, z)=z^2$.

42. Un solide occupe une région E de surface S et est immerg dans un liquide de densité constante ρ. On choisit un systèm de coordonnées telles que le plan xy coïncide avec la surfac du liquide et que les valeurs positives de z soient vers l bas du liquide. La pression à la profondeur z est alors d $p=\rho gz$, où g est l'accélération due à la gravité. La poussé verticale totale sur le solide causée par la répartition de l pression est donnée par l'intégrale de surface

$$\vec{F}=-\iint_S p\vec{n}\,dS,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal unitaire extérieur. Utilisez le résulta de l'exercice 39 pour montrer que $\vec{F}=-W\vec{k}$, où W est le poid du liquide déplacé par le solide. (Remarquez que $\vec{F}$ est orient vers le haut, puisque l'axe des z est orienté vers le bas.) C résultat est le principe d'Archimède : La poussée exercée su un corps immergé est égale au poids du liquide déplacé.