Université d'Ottawa
Faculté de génie

École de science informatique
et de génie électrique

University of Ottawa
Faculty of Engineering

School of Electrical Engineering
and Computer Science

ELG 3525

Analyse de signaux et systèmes

Professeur : Martin Bouchard

Examen final

Vendredi 17 décembre 2021, 14:00-17:0 (+10 min.)

Temps alloué : 180 minutes + 10 pour minutes pour numérisation et téléversement.

- Examen à livre ouvert (livres, notes de cours, calculatrices permises)
- Toute assistance provenant d'autres personnes est interdite.
- Pour chaque question, vous devez montrer/expliquer comment vous obtenez votre réponse.

Déclaration d'intégrité

Je comprends l'importance de l'intégrité professionnelle dans mes études et ma future carrière en génie ou en informatique. Je certifie par la présente que j'ai fait et ferai tout le travail pour cet examen entièrement par moi-même, sans assistance extérieure ni utilisation de sources d'information non autorisées. De plus, je ne fournirai aucune assistance aux autres.

Signature: **Numéro d'étudiant:**

Cette page doit être signée et retournée avec vos réponses scannées/photographiées.

Des feuilles de formules (tables de transformées et autres formules) vous sont fournies aux dernières pages de cet examen.

Total : 190 points

Pour chaque question, il y a 3 “versions” (numérotées 1,2,3), et la liste ci-dessous générée aléatoirement indique la “version” à laquelle vous devez répondre.

À partir des 4 (ou 5) derniers chiffres de votre numéro d’étudiant, notez les versions auxquelles vous devez répondre, et ne répondez qu’à ces versions.

4 (ou 5) de	Quest. 1	Quest. 2	Quest. 3	Quest. 4	Quest. 5	Quest. 6	Quest. 7	Quest. 8	Quest. 9	Quest. 10	Quest. 11
0451	1	2	2	2	1	2	2	3	3	3	2
0622	3	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2
0651	2	3	2	1	2	1	3	2	3	3	3
0819	2	2	3	1	1	2	1	2	2	2	1
0931	1	2	2	2	3	3	3	3	2	3	2
1672	1	2	3	3	3	3	1	2	2	2	1
1723	2	3	1	3	1	2	1	3	2	1	1
1764	2	1	1	2	1	1	3	1	1	1	3
1807	1	1	1	2	1	2	1	1	3	3	2
2137	1	3	3	2	3	2	1	1	1	3	3
2390	2	1	2	3	3	3	1	1	3	1	1
2454	2	2	1	2	2	3	1	3	2	1	2
2580	1	2	3	3	1	1	2	2	2	2	1
2980	3	3	2	3	1	1	1	2	1	3	2
3145	1	3	1	2	3	3	1	2	1	1	2
3565	3	2	3	2	3	3	3	1	1	1	2
3756	1	2	3	3	2	1	2	3	3	1	2
3862	3	1	3	1	2	2	3	1	2	3	2
3978	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
4216	2	2	1	3	3	3	3	2	1	1	3
4326	3	3	1	3	1	3	2	1	3	1	1
4334	3	2	3	1	3	3	1	3	1	1	3
4338	2	2	3	1	1	2	2	3	3	3	3
4551	1	2	1	3	2	2	1	3	3	3	3
4554	1	1	2	1	2	2	2	1	3	3	3
4667	3	2	2	2	2	3	3	3	2	3	2
4943	2	3	2	2	1	1	2	3	1	3	1
5071	2	3	2	3	3	3	1	1	3	3	1
5797	1	2	2	3	3	3	1	2	3	3	2
5897	1	3	2	3	2	2	3	2	3	2	1
6124	2	1	3	2	2	3	3	2	1	1	2
6231	3	1	1	2	1	2	1	2	2	1	2
6235	3	2	2	2	2	3	2	1	2	1	1
6527	2	1	3	1	1	3	1	2	1	3	1
6969	3	3	2	3	3	3	1	1	2	2	2
7380	3	3	2	2	2	3	3	2	1	3	2
7381	3	2	1	2	3	1	3	2	1	1	1
7470	2	1	1	1	2	3	3	2	2	1	2
7804	3	2	1	3	1	3	2	2	2	3	2
7834	1	2	1	3	1	2	1	1	2	1	2
8010	2	1	2	1	2	3	3	1	2	3	2
8270	2	1	2	3	3	2	1	2	3	2	2
8332	3	1	2	3	3	2	1	3	2	3	1
8514	3	2	3	2	3	1	3	1	2	2	1
8993	3	1	2	2	2	1	1	3	2	3	2
9318	1	3	3	2	1	2	2	1	1	2	3
9368	3	1	3	3	3	1	2	1	3	1	1
9435	3	1	2	3	2	2	1	3	1	3	1
9647	1	2	1	1	2	3	1	2	1	3	1
9680	2	2	2	2	2	2	2	1	3	3	1
22959	3	2	1	3	3	1	3	1	1	2	2
32959	2	3	3	2	3	1	2	1	2	1	2

Question 1 **/15**

Version 1) Écrivez un code Matlab (approximatif) pour trouver la réponse impulsionnelle du système LTI suivant et pour afficher le résultat:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2x(t)$$

Version 2) Écrivez un code Matlab (approximatif) pour trouver la réponse en fréquence (amplitude) du système LTI suivant et pour afficher le résultat:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2x(t)$$

Version 3) Écrivez un code Matlab (approximatif) pour calculer la somme de convolution des deux signaux suivants et pour afficher le résultat:

$$x_1[n] = \begin{matrix} \{1, 2, 3, 4\} & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{matrix} \qquad x_2[n] = \begin{matrix} \{1, -1, -1\} & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{matrix}$$

Question 2 **/20**

Trouvez la transformée de Fourier $X(j\omega)$ pour le signal suivant :

Version 1) $x(t) = e^{-|t-10|} \quad -\infty < t < \infty$

Version 2) $x(t) = \dfrac{d}{dt}\left(e^{-(\frac{2\pi}{5}t+4)} u(t) \right)$

Version 3) $x(t) = e^{2t}u(-t+5) + e^{(t-5)}u(t-10)$

Question 3 **/20**

Trouvez la réponse impulsionnelle, la réponse en fréquence et la sortie du système LTI suivant lorsque l'entrée suivante est appliquée :

Version 1) $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$ $\quad x(t) = e^{-2t}u(t)$

Version 2) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$ $\quad x(t) = e^{-5t}u(t)$

Version 3) $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$ $\quad x(t) = e^{-t}u(t)$

Question 4 **/20**

Trouvez la réponse impulsionnelle, la réponse en fréquence et la sortie du système LTI suivant lorsque l'entrée suivante est appliquée :

Version 1) $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+2x[n-1]$ $\qquad x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$

Version 2) $y[n]-\frac{1}{5}y[n-1]=x[n]+\frac{1}{3}x[n-1]$ $\qquad x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$

Version 3) $y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]+x[n-1]$ $\qquad x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$

Question 5 **/10**

Si $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$, déterminez la transformée de Fourier de :

Version 1) $x[-n+5]$

Version 2) $x[n] * x[n-5]$ (convolution)

Version 3) $x[n]e^{j(\frac{\pi}{2}n+\sqrt{5})}$

Question 6 **/10**

Déterminez la sortie lorsque l'entrée suivante est appliquée au système décrit par :

Version 1) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]$ $x[n] = (-1)^n \quad -\infty < n < \infty$

Version 2) $y[n] - \frac{1}{5}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$ $x[n] = e^{-j\frac{2\pi}{5}n} \quad -\infty < n < \infty$

Version 3) $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$ $x(t) = \cos(3t) \quad -\infty < t < \infty$

Question 7 **/20**

Tracez un schéma-bloc représentant le système suivant, de même qu'un 2e schéma-bloc montrant la décomposition du système en deux sous-systèmes d'ordre 1.

Version 1) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

Version 2) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 1x(t)$$

Version 3) $$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] + 4x[n-1] + 3x[n-2]$$

Question 8 **/15**

Version 1) Trouvez la réponse impulsionnelle (temps continu) d'un filtre LTI à phase linéaire dont la réponse en phase à $\omega = \pi$ est $\angle H(j\omega) = 4\pi$.

Version 2) Trouvez l'équation de différence (temps discret) d'un filtre LTI à phase linéaire dont la réponse en phase à $\omega = \pi$ est $\angle H(e^{j\omega}) = 4\pi$.

Version 3) Trouvez le délai de groupe du filtre avec réponse impulsionnelle

$$h[n] = \begin{matrix} \{-1, 4, -1, 4, -1\} & n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{matrix} .$$

Question 9 **/20**

Pour les systèmes suivants :

- tracez le diagramme de Bode (amplitude seulement)
- déterminez si la réponse impulsionnelle aura des oscillations.

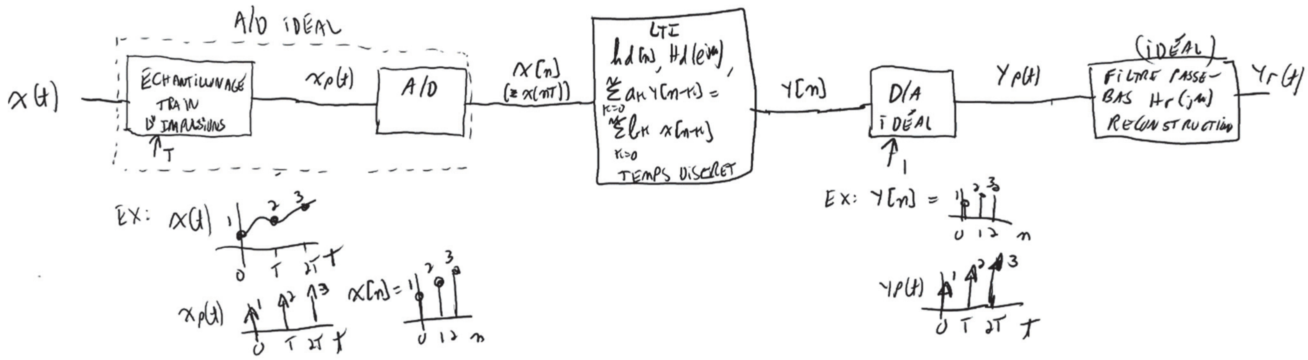
Version 1) $$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega}\left(\frac{100}{100 + j\omega}\right)\left(\frac{(j\omega)^2 + 40j\omega + 100}{100}\right)$$

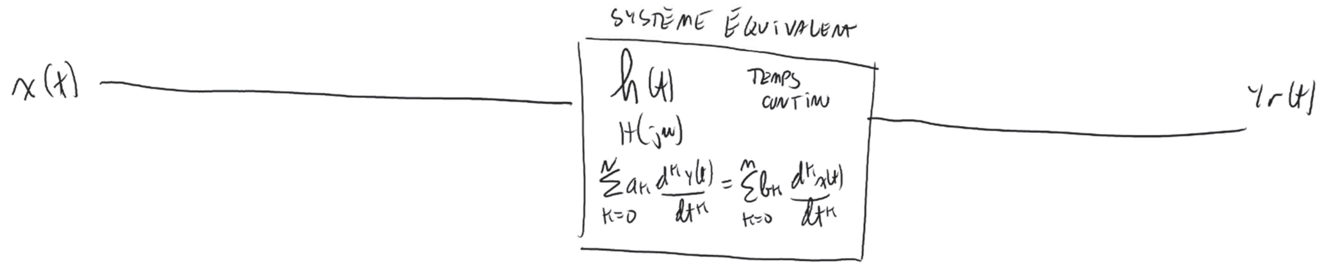
Version 2) $$H(j\omega) = \frac{1000}{j\omega}\left(\frac{10 + j\omega}{1}\right)\left(\frac{10000}{(j\omega)^2 + 400j\omega + 10000}\right)$$

Version 3) $$H(j\omega) = j\omega\left(\frac{1}{10 + j\omega}\right)\left(\frac{100 + j\omega}{1}\right)\left(\frac{1}{1000 + j\omega}\right)$$

Question 10 /20

Pour le système suivant :





Version 1) Trouvez $H(jw)$ (système équivalent temps continu) si le système en temps discret est $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+2x[n-1]$.

Version 2) Trouvez $h[n]$ pour le système en temps discret si $H(jw)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_s/4=\pi/(2T)\\ 0 & |\omega|\geq\omega_s/4=\pi/(2T)\end{cases}$

($H(jw)$ est le système équivalent temps continu).

Version 3) Trouvez $H(jw)$ (système équivalent temps continu) si le système en temps discret a une réponse impulsionnelle $h[n]=(-0.9)^n u[n]$.

Question 11 **/20**

Trouvez la fonction de transfert $H(s)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système suivant, compte tenu de la condition spécifiée.

Version 1) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+\dfrac{dy(t)}{dt}-6y(t)=2\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)$ système stable

Version 2) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy(t)}{dt}-4y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)$ système causal

Version 3) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}-\dfrac{dy(t)}{dt}-6y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+3x(t)$ système anti-causal

Propriétés – Séries de Fourier temps continu (C.T.F.S.)

Définitions: $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ $\quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ $a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$ $x(t)$ périodique de période T sec.,   fréquence angulaire fondam. $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$ rad./sec. $x(t) \xleftrightarrow{C.T.F.S.} a_k \quad y(t) \xleftrightarrow{C.T.F.S.} b_k$ Si $x(t) \xrightarrow{LTI} y(t)$ alors $b_k = a_k H(j\omega)\big\|_{\omega=k\omega_0}$
Linéarité: $Ax(t)+By(t) \xleftrightarrow{C.T.F.S.} A\,a_k + B\,b_k$
Décalage: $x(t-t_0) \xleftrightarrow{C.T.F.S.} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$
Facteur d'échelle: $x(\alpha t) \xleftrightarrow{C.T.F.S.} a_k$ ($\alpha > 0$, période T/α)   **Renversement:** $x(-t) \xleftrightarrow{C.T.F.S.} a_{-k}$
Conjugaison: $x^*(t) \xleftrightarrow{C.T.F.S.} a_{-k}^*$ $x^*(-t) \xleftrightarrow{C.T.F.S.} a_k^*$
Symétries: si $x(t)$ réel: $a_k = a_{-k}^*$, $\|a_k\| = \|a_{-k}\|$, $\angle a_k = -\angle a_{-k}$ $x(t)$ réel et pair : a_k réel et pair $a_k = a_{-k}$ $x(t)$ réel et impair: a_k imaginaire et impair $a_k = -a_{-k}$
Convolution périodique: $\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \xleftrightarrow{C.T.F.S.} T\,a_k\,b_k$
Modulation: $x(t)y(t) \xleftrightarrow{C.T.F.S.} a_k * b_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$ $e^{jm\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{C.T.F.S.} a_{k-m}$
Dérivation: $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{C.T.F.S.} jk\omega_0 a_k$
Intégration: $\int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{C.T.F.S.} \frac{a_k}{jk\omega_0}$ (si $a_0 = 0$)
Parseval: $\frac{1}{T}\int_T \|x(t)\|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|a_k\|^2$

Table de séries de Fourier en temps continu (C.T.F.S.)

$x(t)$ périodique, période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}$ sec.	coefficients séries de Fourier a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$ ailleurs
$\cos(\omega_0 t)$	$a_1, a_{-1} = 1/2$ $a_k = 0$ ailleurs
$\sin(\omega_0 t)$	$a_1, a_{-1} = 1/(2j)$ $a_k = 0$ ailleurs
$\begin{cases} 1 & \|t\| < T_1 \\ 0 & T_1 < \|t\| < T/2 \end{cases}$ (périodique T)	$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$ $k \neq 0$ $a_0 = \frac{2T_1}{T} = \frac{T_1\omega_0}{\pi}$
1	$a_0 = 1$ $a_k = 0$ ailleurs
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$	$a_k = \frac{1}{T}$

Propriétés – Séries de Fourier temps discret (D.T.F.S.)

Définitions: $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n] e^{-j(k\frac{2\pi}{N})n}$ $\quad x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j(k\frac{2\pi}{N})n}$ $a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]$ $x[n]$ périodique de période N échantillons (fréquence angulaire fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ rad./éch.) $x[n] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} a_k \quad y[n] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} b_k$ Si $x[n] \xrightarrow{LTI} y[n]$ alors $b_k = a_k H(e^{j\omega})\Big\|_{\omega = k\frac{2\pi}{N}}$
Périodicité: $x[n] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} a_k = a_{k+N}$
Linéarité: $Ax[n] + By[n] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} Aa_k + Bb_k$
Décalage: $x[n-n_0] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0} a_k$
Renversement: $x[-n] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} a_{-k}$
Conjugaison: $x^*[n] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} a^*_{-k}$ $x^*[-n] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} a^*_k$
Symétries: si $x[n]$ réel : $a_k = a^*_{-k}$, $\|a_k\| = \|a_{-k}\|$, $\angle a_k = -\angle a_{-k}$ $x[n]$ réel et pair : a_k réel et pair $a_k = a_{-k}$ $x[n]$ réel et impair: a_k imaginaire et impair $a_k = -a_{-k}$
Convolution périodique: $\sum_{m=<N>} x[m] y[n-m] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} N a_k b_k$
Modulation: $x[n]y[n] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} \sum_{l=<N>} a_l b_{k-l}$ $e^{jm\frac{2\pi}{N}n} x[n] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} a_{k-m}$
Accumulation : $\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{D.T.F.S.} \frac{1}{\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)} a_k$ (si $a_0 = 0$)
Parseval: $\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \|x[n]\|^2 = \sum_{k=<N>} \|a_k\|^2$
Dualité : Si $x[n] \xleftrightarrow{DTFS} a_k$ alors $a[n] \xleftrightarrow{DTFS} \frac{1}{N} x_{-k}$

Table de séries de Fourier en temps discret (D.T.F.S.)

$x[n]$ périodique, période N éch.	coefficients séries de Fourier a_k (périodiques de période N)
$e^{j\omega_0 n}$	Si $x[n]$ périodique avec $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$: $a_k = 1 \quad k = m, m \pm N, m \pm 2N, \ldots$ $a_k = 0$ ailleurs
$\cos(\omega_0 n)$	Si $x[n]$ périodique avec $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$: $a_k = 1/2$ $k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \ldots$ $a_k = 0$ ailleurs
$\sin(\omega_0 n)$	Si $x[n]$ périodique avec $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$: $a_k = 1/(2j)$ $k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \ldots$ $a_k = 0$ ailleurs
$\begin{cases} 1 & \|n\| \le N_1 \\ 0 & N_1 < \|n\| \le N/2 \end{cases}$ (périodique N , N pair)	$a_k = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}k(N_1 + 1/2)\right)}{N\sin(\frac{\pi}{N}k)}$ $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ $a_k = (2N_1+1)/N \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$
1	$a_k = 1 \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ $a_k = 0$ ailleurs
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-mN]$	$a_k = \frac{1}{N}$

Propriétés – Transformée de Fourier en temps continu (C.T.F.T.)

Définitions: $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ ω en rad./sec. $X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\ a_k\delta(\omega-k\omega_0)$ si $x(t)$ périodique $x(t)\xleftrightarrow{CTFT}X(j\omega) \quad y(t)\xleftrightarrow{CTFT}Y(j\omega)$
Linéarité: $ax(t)+by(t)\xleftrightarrow{CTFT}aX(j\omega)+bY(j\omega)$
Décalage: $x(t-t_0)\xleftrightarrow{CTFT}e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
Facteur d'échelle: $x(at)\xleftrightarrow{CTFT}\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{j\omega}{a})$ **Renversement:** $x(-t)\xleftrightarrow{CTFT}X(-j\omega)$
Conjugaison: $x^*(t)\xleftrightarrow{CTFT}X^*(-j\omega)$ $x^*(-t)\xleftrightarrow{CTFT}X^*(j\omega)$
Symétries: si $x(t)$ réel : $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$, $\lvert X(j\omega)\rvert=\lvert X(-j\omega)\rvert$, $\angle X(j\omega)=-\angle X(-j\omega)$ $x(t)$ réel et pair : $X(j\omega)$ réel et pair $X(j\omega)=X(-j\omega)$ $x(t)$ réel et impair: $X(j\omega)$ imag., impair $X(j\omega)=-X(-j\omega)$
Convolution: $x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau \overset{CTFT}{\leftrightarrow} X(j\omega)Y(j\omega)$
Modulation: $x(t)y(t)\overset{CTFT}{\leftrightarrow}\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta$ $e^{j\omega_0 t}x(t)\xleftrightarrow{CTFT}X(j(\omega-\omega_0))$ $\cos(\omega_0 t)x(t)\xleftrightarrow{CTFT}\frac{1}{2}X(j(\omega-\omega_0))+\frac{1}{2}X(j(\omega+\omega_0))$
Dérivation: $\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{CTFT}j\omega X(j\omega)$
Intégration: $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\xleftrightarrow{CTFT}\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(j0)\delta(\omega)$
Dérivation en fréq.: $tx(t)\xleftrightarrow{CTFT}j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
Intégration en fréq.: $-\frac{1}{jt}x(t)+\pi x(0)\delta(t)\xleftrightarrow{CTFT}\int_{-\infty}^{\omega}X(j\eta)d\eta$
Parseval: $\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert X(j\omega)\rvert^2d\omega$
Dualité : Si $x(t)\xleftrightarrow{CTFT}X(j\omega)$ alors $X(t)\xleftrightarrow{CTFT}2\pi\ x(-j\omega)$

Table de transformées de Fourier en temps continu (C.T.F.T.)

signal $x(t)$ typ. apériodique	$X(j\omega)$ (ω en rad./sec.)
si $x(t)$ est périodique, avec période $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{1}{f_0}$ sec.	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$
$\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<T_1\\ 0 & T_1<\lvert t\rvert<T/2\end{cases}$ (périodique T)	$2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{k}\delta(\omega-k\omega_0)$ $k\neq 0$ $\frac{4\pi T_1}{T}\delta(\omega)=2T_1\omega_0\delta(\omega)$ $k=0$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\omega_s\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_s) \quad \omega_s=\frac{2\pi}{T}$
$\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<T_1\\ 0 & \lvert t\rvert>T_1\end{cases}$	$\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$
$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \quad W>0$	$\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert\le W\\ 0 & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$e^{-at}u(t) \quad \mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$-e^{-at}u(-t) \quad \mathrm{Re}\{a\}<0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \quad \mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t) \quad \mathrm{Re}\{a\}<0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$
$\frac{1}{\mathrm{Im}\{a\}}e^{-\mathrm{Re}\{a\}t}\sin(\mathrm{Im}\{a\}t)u(t)$ $\mathrm{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{(j\omega+a)(j\omega+a^*)}$
$\frac{-1}{\mathrm{Im}\{a\}}e^{-\mathrm{Re}\{a\}t}\sin(\mathrm{Im}\{a\}t)u(-t)$ $\mathrm{Re}\{a\}<0$	$\frac{1}{(j\omega+a)(j\omega+a^*)}$

Propriétés – Transformée de Fourier en temps discret (D.T.F.T.)

Définitions:
$x[n] = x(nT) = x(t)\big|_{t=nT}$, où $T = 1/f_s = 2\pi/\omega_s$ est la période d'échantillonnage en sec., et n est un entier, ceci produit:

$$X_s(j\omega) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\,\omega_s)), \qquad X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega f_s)$$

où $X(j\omega)$ est la CTFT originale de $x(t)$, et $X(e^{j\omega})$ est la DTFT de $x[n]$ définie comme étant:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Périodicité: $x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$

Linéarité: $ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{DTFT} aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$

Décalage: $x[n-n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$ n_0 entier

Expansion, insertion de zéros:
$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{jk\omega})$ où k est un entier positif
$x_{(k)}[n] = x[n/k]$ si n est un multiple de k
$x_{(k)}[n] = 0$ sinon

Renversement: $x[-n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{-j\omega})$

Conjugaison: $x^*[n] \xleftrightarrow{DTFT} X^*(e^{-j\omega})$
$x^*[-n] \xleftrightarrow{DTFT} X^*(e^{j\omega})$

Symétries:
si $x[n]$ réel : $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$,
$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right|$, $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$
$x[n]$ réel et pair : $X(e^{j\omega})$ réel et pair $X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$
$x[n]$ réel, impair $X(e^{j\omega})$ imag., impair $X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega})$

Convolution:
$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

Modulation: $x[n]y[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
$e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

Accumulation:
$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - m2\pi)$$

Dérivation en fréq.: $nx[n] \xleftrightarrow{DTFT} j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

Parseval: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$

Dualité : Si $x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$ alors $X(t) \xleftrightarrow{CTFS} x_{-k}$

Table de transformées de Fourier en temps discret (D.T.F.T.)

signal $x[n]$ typ. apériodique	$X(e^{j\omega})$ (périodique 2π, ω en rad./éch.)
si $x[n]$ est périodique, avec période de N échantillons	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N})$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - l2\pi)$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - l2\pi) + \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0 - l2\pi)$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - l2\pi) - \frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0 - l2\pi)$
1	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - l2\pi)$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - m\frac{2\pi}{N})$
$\begin{cases} 1 & \left\|n\right\| \le N_1 \\ 0 & \left\|n\right\| > N_1 \end{cases}$	$\sin(\omega(N_1 + \frac{1}{2})) / \sin(\frac{\omega}{2})$
$\dfrac{\sin(Wn)}{\pi n}$ $\quad 0 < W < \pi$	$\begin{cases} 1 & 0 \le \left\|\omega\right\| \le W \\ 0 & W < \left\|\omega\right\| \le \pi \end{cases}$ périodique 2π
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k2\pi)$
$a^n u[n]$ $\quad \left\|a\right\| < 1$	$1/(1 - ae^{-j\omega})$
$-a^n u[-n-1]$ $\quad \left\|a\right\| > 1$	$1/(1 - ae^{-j\omega})$
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n]$ $\quad \left\|a\right\| < 1$	$\frac{1}{\left(1 - ae^{-j\omega}\right)^r}$
$\frac{-(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[-n-1]$ $\quad \left\|a\right\| > 1$	$\frac{1}{\left(1 - ae^{-j\omega}\right)^r}$
$r^{n+1}\sin(\theta(n+1))u[n]$ $0 \le r < 1 \quad 0 \le \theta \le \pi$	$\frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
$-(r^{n+1})\sin(\theta(n+1))u[-n-1]$ $r > 1 \quad 0 \le \theta \le \pi$	$\frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$

Propriétés – Transformée de Laplace bilatérale

Définitions:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

$$x(t)\xleftrightarrow{LT} X(s) \quad ROC_x \quad \sigma_l < \mathrm{Re}\{s\} < \sigma_r$$

$$y(t)\xleftrightarrow{LT} Y(s) \quad ROC_y$$

Linéarité: $ax(t)+by(t)\xleftrightarrow{LT} aX(s)+bY(s)$

$ROC_x \cap ROC_y$

Décalage: $x(t-t_0)\xleftrightarrow{LT} e^{-st_0}X(s)$ $\quad ROC_x$ inchangée

Facteur d'échelle: $x(at)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$ $\quad a$ est réel

$|a|ROC_x$, $s_k \to as_k$, $\quad a\sigma_l < \mathrm{Re}\{s\} < a\sigma_r \quad a>0$

$a\sigma_r < \mathrm{Re}\{s\} < a\sigma_l \quad a<0$

Renversement: $x(-t)\xleftrightarrow{LT} X(-s)$ $\quad ROC_x$ inversée

Conjugaison: $x^*(t)\xleftrightarrow{LT} X^*(s^*)$

ROC_x inchangée, $s_k \to s_k^*$

Symétrie: si $x(t)$ réel : $X(s)=X^*(s^*)$, $|X(s)|=|X(s^*)|$

Convolution: $x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \overset{LT}{\leftrightarrow} X(s)Y(s)$

$ROC_x \cap ROC_y$

Modulation: $e^{s_0 t}x(t)\xleftrightarrow{LT} X(s-s_0)$

ROC_x décalée à droite de $\mathrm{Re}\{s_0\}$

$s_k \to s_k + s_0$, $\quad \sigma_l + \mathrm{Re}\{s_0\} < \mathrm{Re}\{s\} < \sigma_r + \mathrm{Re}\{s_0\}$

Dérivation: $\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{LT} s\,X(s)$ $\quad ROC_x$ inchangée

Intégration: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}X(s)$

$ROC_x \cap (\mathrm{Re}\{s\}>0)$

Dérivation en fréq.: $-tx(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{dX(s)}{ds}$

ROC_x inchangée

Table de transformées de Laplace bilatérales

Signal $x(t)$	Transformée de Laplace $X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	$\forall s$
$u(t)$	$1/s$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-u(-t)$	$1/s$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-a$
$\frac{1}{\mathrm{Im}\{a\}}e^{-\mathrm{Re}\{a\}t}\sin(\mathrm{Im}\{a\}t)u(t)$	$\frac{1}{(s+a)(s+a^*)}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-a$
$\frac{-1}{\mathrm{Im}\{a\}}e^{-\mathrm{Re}\{a\}t}\sin(\mathrm{Im}\{a\}t)u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)(s+a^*)}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-a$

Quelques propriétés – transformée de Laplace unilatérale

Définitions:

$$X(s)=\int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{st}dt \qquad x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

$$x(t)\xleftrightarrow{ULT} X(s) \qquad y(t)\xleftrightarrow{ULT} Y(s)$$

Linéarité: $ax(t)+by(t)\xleftrightarrow{ULT} aX(s)+bY(s)$

Dérivation:

$$\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{ULT} s\,X(s)-x(0^-)$$

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k}\overset{ULT}{\leftrightarrow} s^k X(s)-s^{k-1}x(0^-)-\ldots-s^0\left.\frac{dx^{k-1}(t)}{dt^{k-1}}\right|_{t=0^-}$$

Intégration: $\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{ULT}\frac{1}{s}X(s)$

Théorème valeur initiale: si $x(t)$ sans impulsion $\delta(t)$ ou singularité à $t=0$: $x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX(s)$

Théorème valeur finale: si $x(t)$ a une valeur finie à $t\to\infty$: $\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)$

Quelques formules

Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Sommations, séries géométriques

$$\sum_{k=n_1}^{\infty} a^k = \frac{a^{n_1}}{1-a} \quad |a|<1\,, \quad \sum_{k=n_1}^{n_2} a^k = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a} \quad \begin{matrix} a \neq 1 \\ n_2 \geq n_1 \end{matrix}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad |a|<1, \quad \sum_{k=0}^{n_1} a^k = \frac{1-a^{n_1+1}}{1-a} \quad \begin{matrix} a \neq 1 \\ n_1 \geq 0 \end{matrix}$$

Composantes paires ('even') et impaires ('odd')

$$x_e(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t) \quad x_o(t) = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(-t)$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[-n] \quad x_o[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[-n]$$

Convolutions

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Réponse $h(t)$ pour équations différentielles décrivant un système LTI (racines d'ordre 1)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$h(t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{s_k t} u(t) + \sum_{k=0}^{M-N} B_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}$$

Réponse $h[n]$ pour équations de différences décrivant un système LTI (racines d'ordre 1)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \alpha_k^n u[n] + \sum_{k=0}^{M-N} B_k \delta[n-k]$$

Systèmes LTI et fonctions propres

$$e^{st} \xrightarrow{LTI(cont.)} H(s)e^{st}$$

$$z^n \xrightarrow{LTI(discr.)} H(z)z^n$$

$$e^{j\omega t} \xrightarrow{LTI(cont.)} H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{LTI(discr.)} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

$$\cos(\omega t) \xrightarrow{LTI(cont.)} |H(j\omega)|\cos(\omega t + \measuredangle H(j\omega))$$

$$\cos(\omega n) \xrightarrow{LTI(discr.)} |H(e^{j\omega})|\cos(\omega n + \measuredangle H(e^{j\omega}))$$

Forme standard systèmes passe-bas d'ordre 1 et 2, temps continu

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \qquad H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

Forme standard systèmes récursifs d'ordre 1 et 2, temps discret

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad |a|<1$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}} \quad 0 \leq r < 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

Échantillonnage en temps continu

$$x_p(t) = x(t) \times p(t) \qquad x_d[n] = x(nT)$$

$$X_p(j\omega) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$$

$$X_d(e^{j\omega}) = X_p(j\omega f_s)$$

$$H_0(j\omega) = e^{-j\pi\omega/\omega_s}\, 2\sin(\pi\omega/\omega_s)/\omega \text{ (bloqueur ordre 0)}$$

Autres formules

$$\int_{x_1}^{x_2} xe^{ax}dx = \left[\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{d\,\mathrm{atan}(u)}{dx} = \frac{d\tan^{-1}(u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$