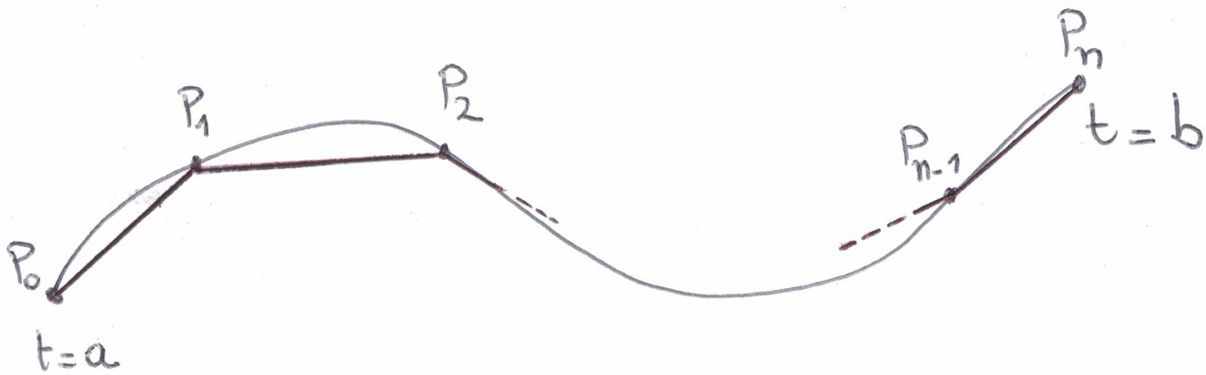
Cours 5 ① **Longueur d'un arc de courbe**

Problème :

Déterminer la longueur de l'arc de courbe

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad , \quad a \le t \le b$$



Solution :

1) On divise $[a,b]$ en n sous-intervalles

$$[\underset{\substack{\| \\ a}}{t_0}, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, \underset{\substack{\| \\ b}}{t_n}]$$

de même longueur $\Delta t = \frac{b-a}{n}$

2) On pose $P_i = (f(t_i), g(t_i))$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.

Alors la longueur d'arc est

$$L \simeq \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{P_{i-1}P_i}|$$

où $|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}|$ = distance entre P_{i-1} et P_i

$$= \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t$$

$$\simeq \sqrt{f'(t_i)^2 + g'(t_i)^2}\, \Delta t$$

D'où

$$L \simeq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(t_i)^2 + g'(t_i)^2}\, \Delta t$$

3°) Lorsque $n \to \infty$, on a $\Delta t \to 0$ et on trouve

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

pourvu que f et g admettent des dérivées continues sur $[a, b]$.

$$\text{Longueur d'arc} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

<u>Note</u> :
Si des portions de la courbe sont parcourues plusieurs fois pour $a \leq t \leq b$, leurs longueurs sont comptées autant de fois

<u>Exemple 1</u>
Calculer la longueur de la courbe

$$x = t^2, \; y = t^3$$

entre les points $(1,1)$ et $(4,8)$

Solution

Ici t varie de 1 à 2

$$\Rightarrow \text{Longueur d'arc} = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt$$

$$= \int_1^2 t\sqrt{4+9t^2}\, dt$$

On pose $u = 4+9t^2 \Rightarrow du = 18t\,dt$

Lorsque t passe de $t=1$ à $t=2$, u passe de $u = 4+9 = 13$ à $u = 4+36 = 40$

$$\Rightarrow L = \int_{13}^{40} \sqrt{u}\, \frac{du}{18} = \frac{1}{18} \left. \frac{u^{3/2}}{3/2} \right|_{13}^{40} = 7.63$$

Cas particulier

- Pour une courbe $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, on utilise x comme paramètre :

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

- De même, si la courbe était donnée par l'équation $x = f(y)$, $a \leq y \leq b$ alors la longueur de l'arc serait donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$$

Exemple

Calculer la longueur de l'arc de $y = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{x})$ pour $0 \leq x \leq 1$.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \simeq 1.175$$

2 Valeur moyenne d'une fonction

La valeur moyenne d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a,b]$ est

$$f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple

Calculer la valeur moyenne de $\frac{1}{x^2+4}$ sur $[-1,1]$

$$f_{moy} = \frac{1}{1-(-1)} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{4+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\,\frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} \quad , u = \frac{x}{2} \ , \ du = \frac{dx}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{2du}{u^2+1} = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}(u)\Big|_{-1/2}^{1/2}$$

$$\approx 0{,}232$$

Théorème de la valeur moyenne pour intégrales

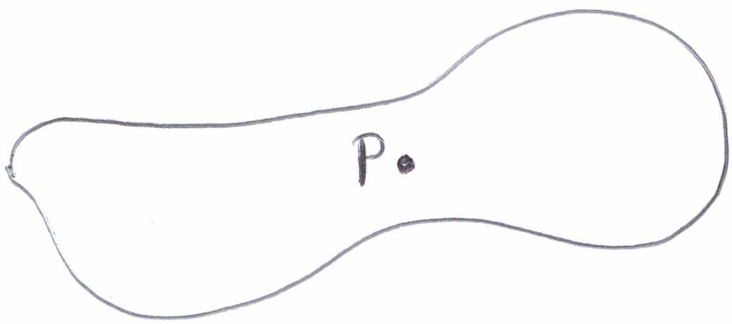
Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors il existe un nombre c dans $[a,b]$ tel que

$$f(c) = f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$

3 Moments et centres de masse

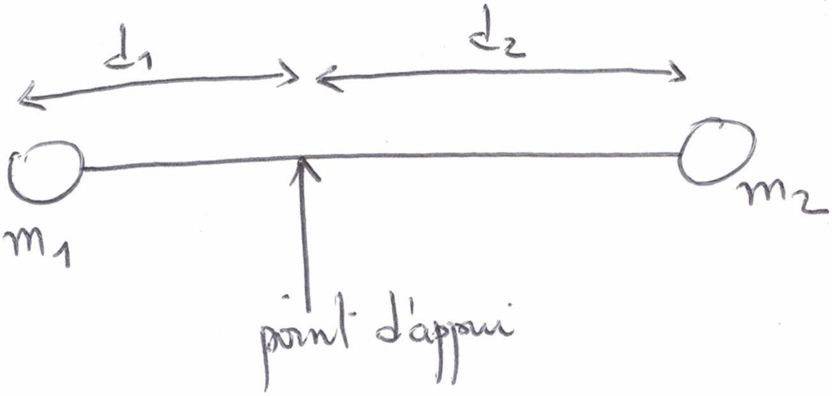
On veut situer le point P sur lequel doit reposer une fine plaque de n'importe quelle forme pour se tenir en équilibre.



Ce point est appelé le <u>centre de masse</u> de la plaque

<u>Problème</u>

Soient m_1 et m_2 deux masses fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable de part et d'autre d'un point d'appui à des distances d_1 et d_2 du point d'appui.



~~Le centre de masse~~

$\cancel{\bar{x} = m_1}$

Loi du Levier :

La tige est en equilibre lorsque

$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$

On place la tige le long de l'axe $\overrightarrow{Ox}$, avec m_1 en x_1 ; m_2 en x_2 et le centre de masse en $\overline{x}$.

Alors

$$\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Les nombres $m_1 x_1$ et $m_2 x_2$ sont appelés les moments des masses m_1 et m_2. ~~et l'équation où~~

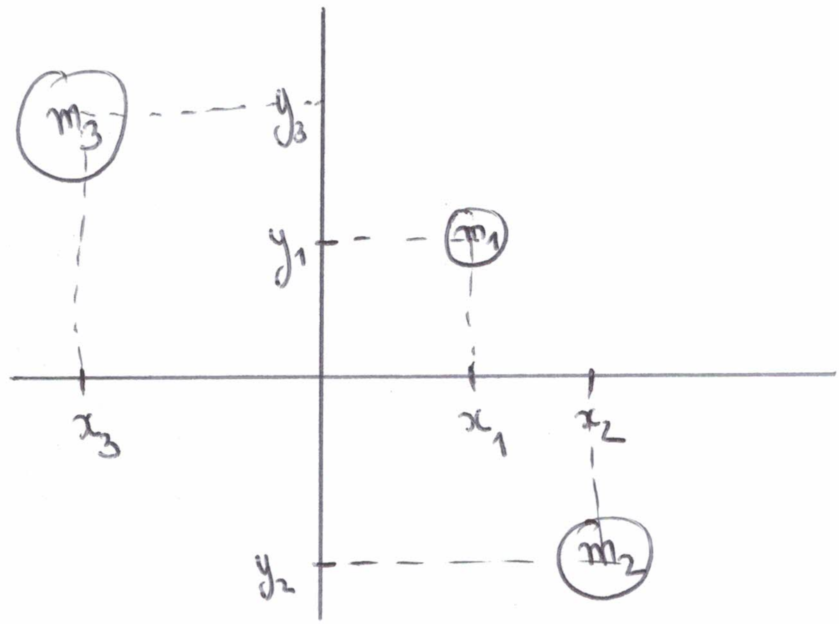
- De façon plus générale, en présence d'un système de n points matériels de masses $m_1, m_2, \ldots, m_2$ situées aux abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut montrer de façon analogue que le centre de masse du système est situé en

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \quad \text{où}$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i = \text{masse totale du système}$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \text{moment du système par rapport à l'origine}$$

• On envisage maintenant un système de n points matériels de masse $m_1, m_2, \ldots, m_n$ dispersés aux points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ du plan $\overrightarrow{Ox}$



On définit le moment par rapport à $\overrightarrow{Oy}$ par

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

et le moment du système par rapport à $\overrightarrow{Ox}$ par

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Les coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ du centre de masse sont :

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad \text{où}$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i = \text{masse totale}$$

Exemple

Déterminer les moments et le centre de masse d'un système de trois points de masse respectives 3, 4 et 8 localisées en $(-1,1)$, $(2,-1)$ et $(3,2)$

Solution : $M_y = \sum_{i=1}^{3} m_i x_i$

$$M_y = 3(-1) + 4(2) + 8(3) = 29$$

$$M_x = 3(1) + 4(-1) + 8(2) = 15$$

$$m = \sum_{i=1}^{3} m_i = 3 + 4 + 8 = 15$$

D'où

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1$$

Le centre de masse se trouve au point $\left(\frac{29}{15}, 1\right)$.

- Soit une tige reposant sur l'axe des x entre $x=a$ et $x=b$. Sa densité linéique $\rho = \rho(x)$ n'est pas uniforme :

(i) Sa masse est $m = \int_a^b \rho(x)\,dx$

(ii) Son moment par rapport à l'origine est $M = \int_a^b x\,\rho(x)\,dx$

(iii) Son centre de masse est situé en $\bar{x} = \dfrac{M}{m}$.

Exemple

Une tige repose sur l'axe des x entre $x=1$ et $x=3$.
Sa densité au point x est $\rho(x) = \frac{1}{x}$ (Kg/m)

$\Rightarrow$ Sa masse est $m = \int_1^3 \rho(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{x} = \ln(3)$

$\Rightarrow$ Son moment par rapport à l'origine est

$$M = \int_1^3 x\rho(x)\,dx = \int_1^3 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int_1^3 dx = 2$$

$\Rightarrow$ Son centre de masse est situé en $\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{2}{\ln(3)} \simeq 1.8$

- Soit une plaque de densité uniforme ρ occupant la région $a \le x \le b$ et $0 \le y \le f(x)$

(i) Sa masse $m = \int_a^b \rho f(x)\,dx$

(ii) Son moment par rapport à $\overrightarrow{Oy}$ est $M_y = \int_a^b \rho x f(x)\,dx$

(iii) Son moment par rapport à $\overrightarrow{Ox}$ est $M_x = \int_a^b \rho \frac{1}{2}(f(x))^2\,dx$

(iv) Son centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$