DEVOIR 10 - ELG 3555

GBEGBE DECAHO
300094197
UOTTAWA - W24

Question 1 :

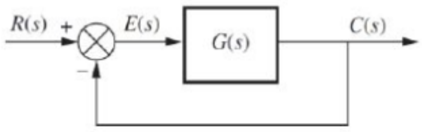
Un système décrit par sa fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+3)(s+7)}$$

a un taux de dépassement de 10% ($\%OS = 10\%$). L'erreur du système est $e_{ss}(\infty) = 0.5048$.
Compensez le système pour améliorer l'erreur en régime permanent d'un facteur 4.

Remarque :
Écrivez votre réponse finale en termes de K (c'est-à-dire ne trouvez pas la valeur exacte du gain K).

Rappel :

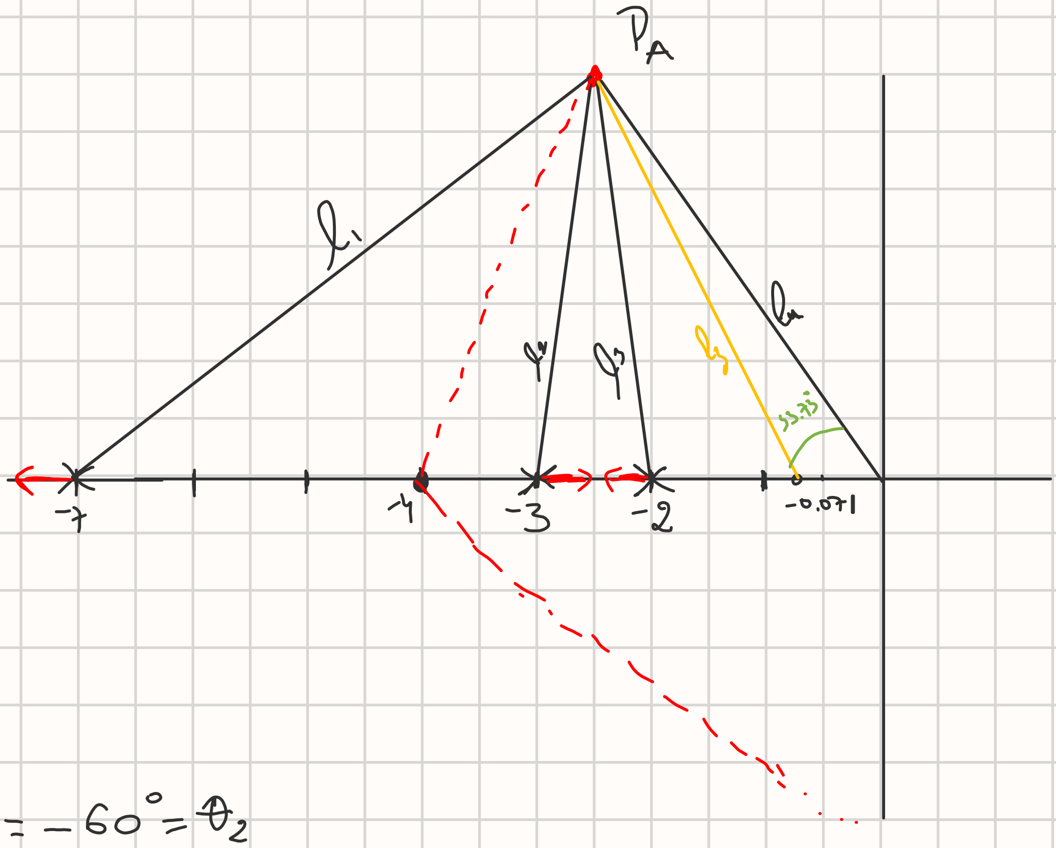


Soit erreur attendu $e_{ss}(\infty) = \frac{0.5048}{4}$

$K_{snc} = \frac{1}{|G(s)||H(s)|}$ où $H(s) = 1$

$= |(s+2)(s+3)(s+7)|$

$\Rightarrow G(s)_{snc}$ $\begin{cases} \text{Zeros : } \infty \quad \infty \quad \infty \\ \text{pôles : } -2 \quad -3 \quad -7 \end{cases}$



$\Rightarrow \sigma_a = \frac{\sum P_f - \sum Z_f}{\# P_f - \# Z_f} = \frac{-2-3-7-0}{3-0} = -4$

$\Rightarrow \theta_a = \frac{(2K+1)(180)}{3} \Rightarrow \begin{cases} K=-1 = \frac{-180}{3} = -60° = \theta_2 \\ K=0 = \frac{180}{3} = 60° = \theta_1 \\ K=1 = \frac{3\times 180}{3} = 180° = \theta_3 \end{cases}$

Avec $P_{A_{SNC}} = -2.472 \pm 3.373j$

• le taux de dépassement : $\%OS = 10\%$

donc le système est d'ordre 0 $\Rightarrow \tan\theta = \frac{-\pi}{\ln(0.1)} = 1.3644 \Rightarrow \boxed{\theta = 53.75°}$

• Les points de séparation :

$\frac{dK}{ds} = \frac{d(s^3+12s^2+41s+42)}{ds} = \underline{3s^2+24s+41}$ $\quad \Delta = 84 \quad S_1 = \frac{-12+\sqrt{21}}{3} = -2.472$ ✓ $\quad S_2 = \frac{-12-\sqrt{21}}{3} = -5.528$ ✗

$\tan\theta = \frac{|Im|}{|\sigma_a|} \Rightarrow |Im| = |\sigma_a| \tan\theta = 1.3644 \times 2.472$
$= \pm 3.373$

$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{1+K_p}$ avec $K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{K}{(2)(3)(7)} = \frac{K}{42}$

$$\Rightarrow e_{ss}(\infty) = \frac{42}{42 + K_{snc}} \Rightarrow K_{snc} = \frac{-42\, e_{ss}(\infty) + 42}{e_{ss}(\infty)} = \frac{-42(0.5048) + 42}{0.5048}$$

$$\boxed{K_{snc} = 41.20}$$

$$K_{P_0} = \frac{41.20}{42} = 0.98095$$

Pour améliorer l'erreur, on aura besoin d'un compensateur lagging

$$\Rightarrow \frac{Z_C}{P_C} = \frac{K_{P_N}}{K_{P_0}} \Rightarrow e_{ss_{sc}}(\infty) = \frac{e_{ss}(\infty)_{snc}}{4} = \frac{1}{1 + K_{P_N}}$$

on peut trouver K_{P_N}

$$K_{P_N} = \frac{1 - e_{ss_{sc}}}{e_{ss_{sc}}} = \frac{4 - e_{ss_{snc}}}{e_{ss_{snc}}} = \frac{4 - 0.5048}{0.5048} = 6.924$$

et donc, $Z_C = \dfrac{K_{P_N} \times P_C}{K_{P_0}} = \dfrac{6.924 \times 0.01}{0.98095} = \boxed{0.071}$

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{s + 0.071}{s + 0.01}$$

Trouvons K_c

$$K_{sc} = \frac{\Pi l_p}{\Pi l_z} = \left(\frac{|s + 0.071|}{|s+2||s+3||s+7||s+0.01|} \right)^{-1} \Rightarrow \begin{cases} |s+0.071| = \sqrt{(-2.472+0.071)^2 + (3.372)^2} = 4.139 \\ |s+2| = \sqrt{(-2.472+2)^2 + (3.372)^2} = 3.405 \\ |s+3| = \sqrt{(-2.472+3)^2 + (3.372)^2} = 3.413 \\ |s+7| = \sqrt{(-2.472+7)^2 + (3.372)^2} = 5.646 \\ |s+0.01| = \sqrt{(-2.472+0.01)^2 + (3.372)^2} = 4.175 \end{cases}$$

$$K_{sc} = \left(\frac{4.139}{5.646 \times 3.413 \times 3.405 \times 4.175} \right)^{-1}$$

$$\boxed{K_{sc} = 66.184}$$

$$\Rightarrow K_C = 1.606$$

finalement :

$$\boxed{G_{sc}(s) = \frac{66.184\,(s + 0.071)}{(s+0.01)(s+2)(s+3)(s+7)}}$$

Question 2 :

Un système de rétroaction unitaire avec fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+7)}$$

a une réponse en boucle fermée d'un facteur de d'amortissement de 0.59118 ($\zeta = 0.59118$).

a) Trouvez l'erreur d'état stable pour un système non compensé avec entrée de rampe.

b) Concevez un compensateur de retard pour améliorer l'erreur en régime permanent d'un facteur de 2.

a) Trouvons l'erreur d'état stable.

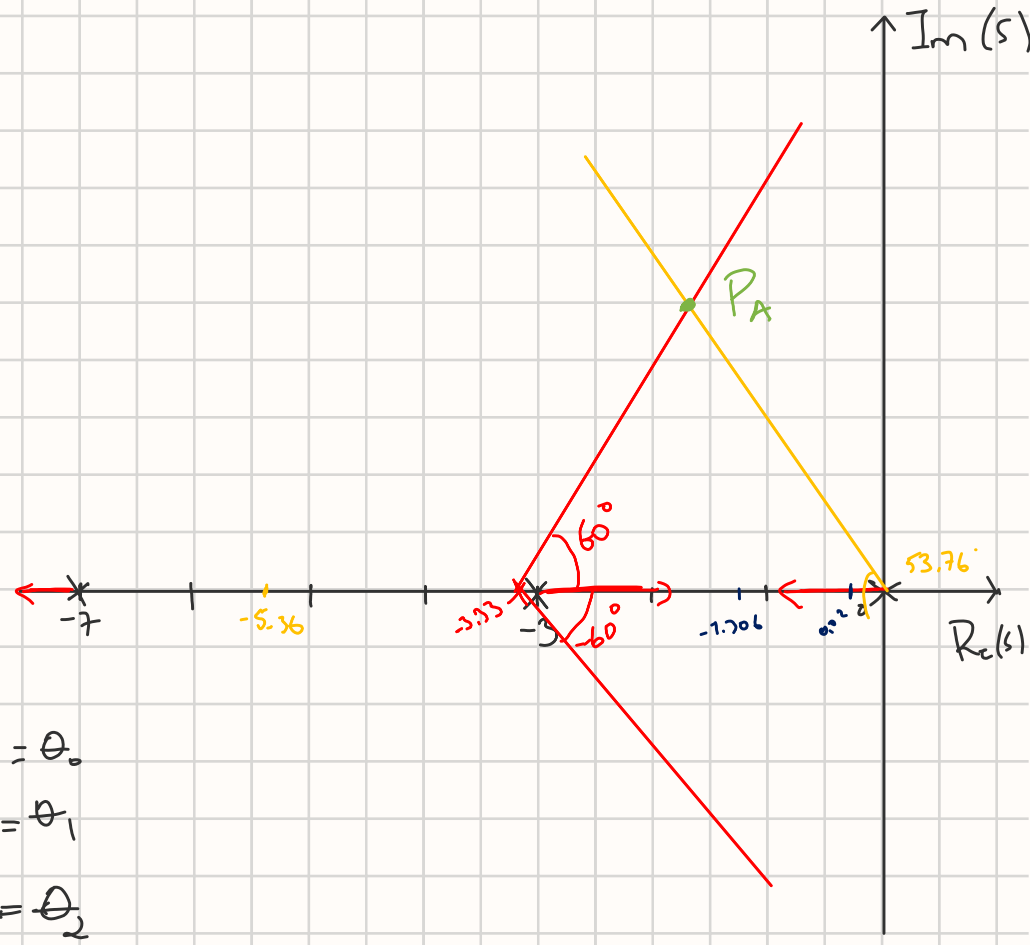
Le système étant d'ordre 1

$$K_0 = \lim_{s \to 0} s\,G(s) \Rightarrow K_{0_{SNC}} = \frac{K_{snc}}{21}$$

$$e_{ss}(\infty)_{snc} = \frac{1}{K_0} = \frac{21}{K_{snc}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{|G(s)|\,|H(s)|} = \frac{1}{|G(s)|} \quad \text{car } H(s) = 1$$

$$K = s(s+3)(s+7)$$



$$G(s)_{SNC} \begin{cases} \text{zero} : & \infty \quad \infty \quad \infty \\ \text{pôles} : & \phi \quad -3 \quad -7 \end{cases}$$

$$\sigma_a = \frac{\Sigma P_f - \Sigma z_f}{\# P_f - \# z_f} = \frac{0-3-7}{3-0} = -\frac{10}{3} = -3.33$$

$$\theta_a = \frac{(2K+1)\,180}{3} \Rightarrow \begin{cases} K = 0 = \frac{180}{3} = 60 = \theta_0 \\ K = -1 = \frac{-180}{3} = -60 = \theta_1 \\ K = 1 = \frac{180 \times 3}{3} = 180 = \theta_2 \end{cases}$$

$$K = s^3 + 10s^2 + 21s$$

• Les points de séparation :

$$\frac{dK}{ds} = 3s^2 + 20s + 21 \quad , \quad \Delta = 148 \quad s_1 = \frac{-10+\sqrt{37}}{3} = -1.306 \checkmark \quad , \quad s_2 = \frac{-10-\sqrt{37}}{3} = -5.361 \times$$

$$\zeta = \cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(\zeta) = \cos^{-1}(0.59118)$$

$$\boxed{\theta \simeq 53.76^\circ}$$

$$I_m = \pm \tan\theta \times s_1 = \tan(53.76) \times 1.306$$

$$\boxed{= 1.784}$$

$$P_{A_{SNC}} = -1.306 \pm 1.782\,j$$

$$K_{snc} = |S|\,|S+3|\,|S+7| \Rightarrow \begin{cases} |S| = \sqrt{(-1.306+0)^2+(1{,}782)^2} = 2.209 \\ |S+3| = \sqrt{(-1.306+3)^2+(1{,}782)^2} = 2.459 \\ |S+7| = \sqrt{(-1.306+7)^2+(1{,}782)^2} = 5.966 \end{cases}$$

$$= 2.209 \times 2.459 \times 5.966$$

$$K_{snc} = 32.407$$

$$ess(\infty)_{snc} = \frac{21}{K_{snc}} = \frac{21}{32.407} = 0.648$$

$$\boxed{ess(\infty)_{snc} = 0.648}$$

b) Concevons un compensateur de retard

$$ess(\infty)_{sc} = \frac{ess(\infty)_{snc}}{2}$$

$$K_{v_0} = \frac{K_{snc}}{21} = \frac{32.407}{21} = 1.543$$

$$ess(\infty)_{sc} = \frac{1}{K_{vn}} = \frac{ess(\infty)_{snc}}{2} \Rightarrow K_{vn} = \frac{2}{0{,}648} = 3{,}086$$

$$\Rightarrow \frac{Z_c}{P_C} = \frac{K_{VN}}{K_{V_0}} \Rightarrow Z_c = 2 \times P_C = 0.02$$

$$G_c(s) = K_{lag}\,\frac{(s+0{,}02)}{(s+0{,}01)} \Rightarrow G_{sc}(s) = \frac{K_{sc}\,(s+0.02)}{s(s+3)(s+7)(s+0{,}01)}$$

$$\Rightarrow K_{sc} = \frac{1}{|G_{sc}(s)|} \quad \text{avec } H(s) = 1$$

$$= \frac{|S|\,|S+0{,}01|\,|S+3|\,|S+7|}{|S+0.02|} \Rightarrow \begin{cases} |S+0.01| = \sqrt{(-1.306+0{,}01)^2+1.784^2} = 2.205 \\ |S+0{,}02| = \sqrt{(-1.306+0{,}02)^2+1.782^2} = 2.199 \end{cases}$$

$$= \frac{2.209 \times 2.459 \times 5.966 \times 2.205}{2.199}$$

$$K_{sc} = 32.495$$

$$K_{lag} = \frac{K_{sc}}{K_{snc}} = \frac{32.495}{32.407} \Rightarrow \boxed{K_{lag} = 1.003}$$

finalement :

$$\boxed{G_c(s) = 1.003\,\frac{(s+0{,}02)}{(s+0{,}01)}}$$

Question 3 :

Considérez le système de rétroaction unitaire suivant avec un taux de dépassement de 10% ($\%OS = 10\%$), une erreur constante statique $Kp = 0.8388$, et une fonction de transfert comme suit :

$$G(s) = \frac{K}{(s+3)(s+5)(s+7)}$$

Concevez un compensateur qui donnera Kp = 20.

Soit $\frac{Z_c}{P_c} = \frac{K_{Pn}}{K_{P_0}} \Rightarrow Z_c = \frac{P_c \times K_{Pn}}{K_{P_0}} = \frac{0.01 \times 20}{0.8388}$

$$\Rightarrow \boxed{Z_c = 0.2384}$$

$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \frac{K_{snc}}{105} \Rightarrow K_{snc} = 105 \times K_{P_0} = \boxed{88.074}$

$$G_{sc}(s) = \frac{K_{sc}(s + 0.238}{(s+3)(s+5)(s+7)(s+0{,}01)}$$

$$\lim_{s \to 0} G_{sc}(s) = \frac{K_{sc} \times 0{,}238}{0.01 \times 105} = K_{sc} \times 0.2267$$

$K_{P_N} = K_{sc} \times 0{,}227 \Rightarrow K_{sc} = \frac{K_{Pn}}{0{,}227} = 88{,}235$

$K_{lag} = \frac{K_{sc}}{K_{snc}} = \frac{88{,}235}{88.074} = 1.002.$

finalement :

$$\boxed{G_c(s) = \frac{1.002\,(s + 0{,}2384)}{(s + 0{,}01)}}$$