DEVOIR 3 - ELG 3555

GBEGBE DECAHO
300094197
UOttawa - W24

Question 1

Pour cheque système décrit ci-dessous trouvez une expression pour :

$$[\dot{x}] = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}[x] + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \qquad [\dot{x}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}[x] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$[y] = [5 \quad 1][x] \qquad [y] = [1 \quad 2 \quad 0][x]$$

Système A — Système B

a) L'équation différentielle du système (remarque : les conditions initiales sont nulle, c.i.=0)
b) Réponse y(t)
c) Réponse Y(s)
d) Fonction de transfert du système, G(s)
e) L'équation caractéristique du système

a) Equation différentielle du système

Système A

• Trouvons la fonction de transfert :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C = [5 \;\; 1]$$

On sait que : $T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D$

• $(sI-A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & -3 \\ +4 & s+2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow s^2 + 2s + s + 2 + (-3\times 4)$

$\Rightarrow \det(sI-A) = s^2 + 3s + 14$

• $(sI-A)^T = \begin{bmatrix} s+1 & 4 \\ -3 & s+2 \end{bmatrix}$ et $\operatorname{adj}(sI-A) = \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -4 & s+1 \end{bmatrix}$

• $(sI-A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -4 & s+1 \end{bmatrix}}{s^2+3s+14}$

• $C(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -4 & s+1 \end{bmatrix}}{s^2+3s+14} = \frac{[(5(s+1)-4) \quad (15+s+1)]}{s^2+3s+14} = \frac{[(5s+6) \quad (s+16)]}{s^2+3s+14}$

• $C(sI-A)^{-1}B = \frac{[(5s+6) \quad (s+16)]}{s^2+3s+14}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{[3(5s+6) \quad (s+16)]}{s^2+3s+14} = \frac{[(15s+18) \quad (s+16)]}{s^2+3s+14}$

L'expression de la fonction de transfert est :

$$\boxed{G(s) = \frac{16s + 34}{s^2+3s+14}}$$

• L'équation caractéristique du système est :

$$\boxed{s^2 + 3s + 14}$$

• A partir de G(s) trouvons l'éq diff. $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{y(s)}{u(s)}$

$$\boxed{\frac{d^2}{dt}y + 3\frac{dy}{dt} + 14\,y(t) = 16\frac{dx}{dt} + 34\,x(t)}$$

Reponse de $y(s)$ On sait que $G(s) = \frac{y(s)}{X(s)}$

• $y(s) = G(s) \cdot X(s) \Rightarrow y(s) = \frac{16s+34}{s^2+3s+14} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \times \frac{16s+34}{(s+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{47}}{2}i)(s+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{47}}{2}i)}$

$$\Rightarrow \boxed{y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{47}}{2}i} + \frac{K_3}{s+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{47}}{2}}}$$

$\Rightarrow$ Reponse de $y(t)$: TL

$\Rightarrow$ Laplace $\begin{cases} \frac{1}{s} \Rightarrow u(t) & \text{T. 2.1 n°2} \\ \frac{1}{s+a} \Rightarrow e^{-at}u(t) & \text{T 2.1 n°5} \end{cases}$

$$y(t) = K_1\,u(t) + K_2\,e^{-(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{47}}{2}j)t}u(t) + K_2\,e^{-(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{47}}{2}j)t}u(t)$$

$$\boxed{(t) = K_1 + K_2\,e^{-(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{47}}{2}j)t} + K_3\,e^{-(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{47}}{2}j)t}}$$

Système B

• Trouvons la fonction de transfert :

$$[\dot{x}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}[x] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$[y] = [1 \;\; 2 \;\; 0][x]$$

On a $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $C = [1 \;\; 2 \;\; 0]$

On a : $T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -2 & -3 \\ 0 & s-6 & -5 \\ -1 & -4 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = s(s-6)(s-2) + (-2)(-5) + (-3)(s-6) - 20s$$

$$\Delta = s^3 - 8s^2 - 11s + 28 \qquad \Rightarrow \boxed{\det(sI-A) = s^3 - 8s^2 - 11s + 28}$$

$$(sI-A)^T = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 \\ -2 & s-1 & -4 \\ -3 & -5 & s-2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Adj(sI-A) = \begin{bmatrix} s^2-8s-8 & 2s+8 & 3s-8 \\ 5 & s^2-2s-3 & 5s \\ s-6 & 4s+2 & s^2-6s \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1} = C\frac{Adj(sI-A)}{\det(sI-A)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2-8s-8 & 2s+8 & 2s-8 \\ 5 & s^2-2s-3 & 5s \\ s-6 & 4s+2 & s^2-6s \end{bmatrix}}{s^3-8s^2-11s+28} = \frac{\begin{bmatrix}(s^2-8s+2) & (2s^2-2s+2) & (13s-8)\end{bmatrix}}{s^3-8s^2-11s+28}$$

$$C(sI-A)^{-1}B = \frac{\begin{bmatrix}(s^2-8s+2) & (2s^2-2s+2) & (13s-8)\end{bmatrix}}{s^3-8s^2-11s+28}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s^2+11s-6}{s^3-8s^2-11s+28}$$

- la fonction de transfert est :

$$\boxed{G(s) = \frac{2s^2+11s-6}{s^3-8s^2-11s+8}} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

- L'équation caractéristique du système est :

$$\boxed{s^3 - 8s^2 - 11s + 8}$$

- L'équation différentielle est donc :

$$\boxed{\frac{d^3}{dt^3}y - 8\frac{d^2}{dt^2}y - 11\frac{d}{dt}y + 8y = 2\frac{d^2}{dt^2}u + 11\frac{d}{dt}u - 6u}$$

- Reponse $y(s)$

$$y(s) = G(s).\,u(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{2s^2+11s-6}{s^3-8s^2-11s+8} = \frac{1}{s}\cdot\frac{2s^2+11s-6}{(s-9.111)(s-0.534)(s+1.645)}$$

$$\boxed{y(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s-9.111} + \frac{K_2}{s-0.534} + \frac{K_3}{s+1.645}}$$

- Reponse $y(t)$

TL :
$$\begin{cases} \frac{1}{s} = u(t) & T2.1 \text{ n}^\circ 2 \\ \frac{1}{s+a} = e^{-at}u(t) & T2.1 \text{ n}^\circ 5 \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = K_0 + K_1 e^{+9.111t} + K_2 e^{+0.534t} + K_3 e^{-1.645t}}$$

Question 2

La modèle d'état d'un système est présenté dans la forme générale suivantes :

$$[\dot{x}] = [A][x] + [B]u(t)$$

$$[y] = [C][x] + [D]u(t)$$

a) En considérant des conditions initiales non-zéro ($c.i. \neq 0$), trouvez les transformations de Laplace respectives (utilisez T2.1 et T2.2).

b) En utilisant vos résultats dans la partie (a), trouvez la réponse Y(s) du système décrit ci-dessous :

$$[\dot{x}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}[x] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} sin(3t)$$

$$[y] = [1 \quad 2][x]$$

$$[x(0)] = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Remarque : noter que $r(t) = \sin(3t)$, est les conditions initiales du système ne sont pas nulles.

a) Trouvons les TL respectives.

En utilisant T2.1 et T2.2
on a :

$\rightarrow [\dot{x}] = [A][x] + [B]u(t)$

$$Sx(s) - x(0^-) = Ax(s) + BU(s)$$
$$x(s)(sI - A) = Bu(s) + x(0^-)$$

$$\boxed{x(s) = (sI - A)^{-1}[BU(s) + x(0^-)]}$$

$\rightarrow [y] = [C][x] + [D]u(t)$

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}[BU(s) + x(0^-)] + DU(s)$$

$$\boxed{y(s) = C(sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x(0^-)\right] + DU(s)}$$

b) Grâce aux résultats de la partie (a). Trouvons la réponse $Y(s)$ du système

$$[\dot{x}] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}}_{A}[x] + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \sin(3t)$$

avec $r(t) = \sin(3t)$, conditions initiales nulles

$$[y] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{C}[x] \qquad [x(0)] = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 3 & s+1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (s-1)(s+1) - (-2)(3)$

$\Rightarrow s^2 + s - s - 1 + 6 \Rightarrow s^2 + 5 \Rightarrow \boxed{\det(sI - A) = s^2 + 5}$

$$Adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{Adj(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix}}{s^2 + 5}$$

$BU(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$ avec $U(s) = \sin(3t)$ avec le tableau T2.1 : n°6 : $\sin \omega t \, u(t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$\Rightarrow BU(s) = \frac{3}{s^2+9}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow BU(s) + x[0] = \frac{3}{s^2+9}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3s^2+30}{s^2+9} & \frac{s^2+12}{s^2+9} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x(s) = (sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x(0^-)\right]$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -3 & s-1 \end{bmatrix}}{s^2+5} \begin{bmatrix} \frac{3s^2+30}{s^2+9} & \frac{s^2+12}{s^2+9} \end{bmatrix} \Rightarrow X(s) = \frac{\begin{bmatrix} \frac{3s^3+5s^2+30s+54}{s^2+9} & \frac{s^3-10s^2+12s-102}{s^2+9} \end{bmatrix}}{s^2+5}$$

Vu que $y(s) = C\,x(s) + D\cancel{R(s)}$ $\to 0$ car $D = 0$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{\begin{bmatrix} \frac{3s^3+5s^2+30s+54}{s^2+9} & \frac{s^3-10s^2+12s-102}{s^2+9} \end{bmatrix}}{s^2+5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{[3s^3+2s^3+5s^2-20s^2+30s+24s+54-204]}{(s^2+5)(s^2+9)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(s) = \frac{5s^3 - 15s^2 + 54s - 150}{s^4 + 14s^2 + 45}}$$