② Méthode d'Euler

Problème : On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \qquad (*)$$

Idée d'Euler :

Soit $h > 0$, très petit

$$y(x) \simeq y_0 \text{ si } x_0 \leq x \leq x_0 + h$$

$$\frac{dy}{dx}(x) = F(x,y) \simeq F(x_0, y_0) \text{ pour } x_0 \leq x \leq x_0 + h$$

$$\frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \simeq F(x_0, y_0) \quad \text{pour } x_0 \leq x \leq x_0 + h$$

$$y(x) \simeq y(x_0) + (x - x_0) F(x_0, y_0) \quad \text{pour } x_0 \leq x \leq x_0 + h$$

$$y(x_0 + h) \simeq y(x_0) + h F(x_0, y_0)$$

Méthode d'Euler :

Pour résoudre l'équation différentielle $(*)$ par la méthode d'Euler, il faut :

1°) Choisir un pas $h > 0$, petit.

2°) Discrétiser l'espace en posant

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + h + h = x_0 + 2h$$

$$x_3 = x_2 + h = x_0 + 2h + h = x_0 + 3h$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_0 + nh \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3°) Approximer $y(x_n)$ par y_n où

$$y_1 = y_0 + h\,F(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + h\,F(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + h\,F(x_2, y_2)$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n-1} + h\,F(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

<u>Exemple 1</u>

Calculer des valeurs approchées de la solution de l'équation différentielle $y' = x + y$, $y(0) = 1$ par pas de $h = 0.1$ sur $[0, 1]$.

<u>Solution</u> :

Les données sont :

$h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $F(x,y) = x + y$

<u>formule d'Euler</u> :

$$y_n = y_{n-1} + h F(x_{n-1}, y_{n-1}) \;, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

On a :

$x_0 = 0.$

$y_0 = 0$

$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$
$$= 1 + 0.1(0+1) = 1.1$$

$x_2 = x_0 + 2h = 0 + 2(0.1) = 0.2$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$
$$= 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1)$$
$$= 1.22$$

$x_3 = x_0 + 3h = 0 + 3(0.1) = 0.3$

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2)$$
$$= 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22)$$
$$= 1.362$$

$\vdots$

$x_{10} = x_0 + 10h = 0 + 10(0.1) = 1$

$$y_{10} = y_9 + hF(x_9, y_9)$$
$$= 3.187$$

<u>Note</u> :

Plus h est petit, meilleure est l'approximation

3 Equations différentielles à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à variables séparables est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \qquad (2)$$

En posant $h(y) = \frac{1}{f(y)}$, $f(y) \neq 0$, alors l'équation (2) devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \Rightarrow h(y)dy = g(x)\,dx$$

Afin de résoudre cette équation, on intègre les deux membres de l'équation

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Exemple 1

1) Résoudre l'équation différentielle $y' = x^2 y$

2) Déterminer la solution qui satisfait $y(1) = 2$

3) Estimer $y(1.03)$ par la méthode d'Euler en procédant par pas de $h = 0.01$ pour la solution avec $y(1) = 2$.

Solution

1°) $y' = x^2 y$

→ On écrit l'équation sous la forme séparée :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = x^2\,dx$$

→ On intègre les deux membres :

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow$$

$$|y| = e^{\frac{1}{3}x^3 + C} = e^{C} e^{\frac{1}{3}x^3} = A e^{\frac{1}{3}x^3} \Rightarrow$$

$$y = \pm A e^{\frac{1}{3}x^3} = B e^{\frac{1}{3}x^3}$$

2°)

$$y(1) = 2 \Rightarrow B e^{\frac{1}{3}(1)^3} = 2$$

$$\Rightarrow B = 2e^{-\frac{1}{3}}$$

D'où

$$y(x) = 2e^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}x^3} = 2e^{\frac{1}{3}(x^3-1)}$$

3°) $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $h = 0.01$, $F(x,y) = x^2 y$

Euler :

$$y_n = y_{n-1} + h\,F(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad , n = 1, 2, 3, \ldots$$

$x_1 = x_0 + h = 1 + 0.01 = 1.01$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h\,F(x_0, y_0) \\ &= 2 + 0.01\left((1.01)^2 (2)\right) \\ &= 2.02 \end{aligned}$$

$x_2 = x_0 + 2h = 1 + 2(0.01) = 1.02$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h\,F(x_1, y_1) \\ &= 2.02 + 0.01\left((1.02)^2 (2.02)\right) \\ &= 2.04061 \end{aligned}$$

$x_3 = x_0 + 3h = 1 + 3(0.01) = 1.03$

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + h\,F(x_2, y_2) \\ &= 2.04061 + 0.01\left((1.03)^2 (2.04 \right. \\ &= 2.06184 \end{aligned}$$

Donc $y(1.03) \simeq y_3 = 2.06184$

La valeur exacte est $y(1.03) = 2\,e^{\frac{1}{3}\left((1.03)^3 - 1\right)} \simeq 2.06278$

<u>Exemple 2</u> :

Résoudre $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}(y^2 - 1) \quad , y(0) = 3$

<u>Solution</u>

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(y^2 - 1) \Rightarrow \frac{2}{y^2 - 1}\,dy = dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{2}{y^2 - 1}\,dy = \int dt$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y-1}\, dy - \int \frac{1}{y+1}\, dy = \int dt$$

$$\Rightarrow \ln|y-1| - \ln|y+1| = t + C \qquad , \ C = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = t + c$$

$$\Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = Ae^{t} \quad , \ A = \text{constante}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1+Ae^{t}}{1-Ae^{t}}$$

$$y(0) = 3 \Rightarrow \frac{1+Ae^{0}}{1-Ae^{0}} = 3 \Rightarrow \cancel{A}\,1 + A = 3 - 3A$$

$$\Rightarrow A = 1/2$$

D'où

$$y(t) = \frac{2 + e^{t}}{2 - e^{t}}$$

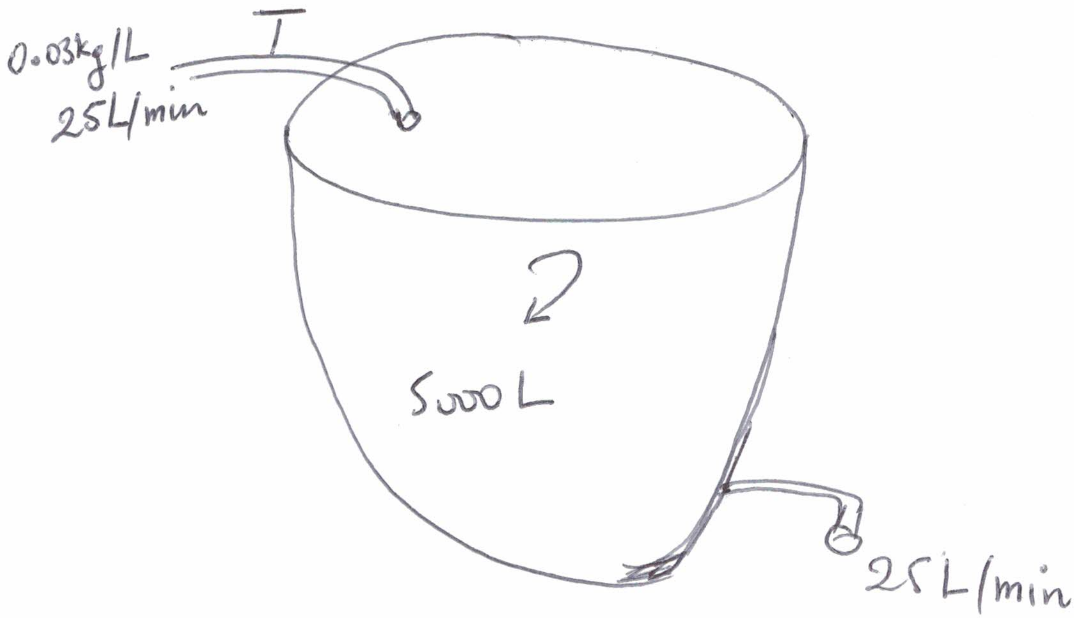
4) Problèmes de mélanges

Exemple

Une citerne contient 20 Kg de sel dissous dans 5000 L d'eau. On y verse de la saumure qui contient 0.03 Kg de sel par litre à un taux de 25 L/min. La solution est constamment brassée et évacuée à un même taux de 25 L/min.

Déterminer la quantité $Q = Q(t)$ de sel dans la citerne après t minutes (en Kg)

Solution



Soit $Q = Q(t)$ la quantité de sel dans la citerne à l'instant t. Le taux de variation de la quantité de sel est

$$\frac{dQ}{dt} = (\text{débit de sel à l'entrée}) - (\text{débit de sel à la sortie})$$

$$= (\text{taux entrant}) - (\text{taux sortant})$$

$$= 0.03 \times 25 - \frac{Q(t)}{5000} \times 25$$

$$= 0.75 - \frac{Q(t)}{200}$$

$$= \frac{150 - Q(t)}{200}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{150 - Q(t)}{200}$$

On va résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{dQ}{150 - Q(t)} = \frac{dt}{200} \Rightarrow \int \frac{dQ}{150 - Q(t)} = \int \frac{dt}{200}$$

$$\Rightarrow -\ln|150 - Q(t)| = \frac{t}{200} + C$$

$$\Rightarrow |150 - Q(t)| = A e^{-\frac{t}{200}}$$

$$\Rightarrow Q(t) = 150 + B e^{-\frac{t}{200}}$$

Comme $Q(0) = 20$ alors on a

$$150 + B = 20 \Rightarrow B = 130$$

D'où

$$Q(t) = 150 - 130 e^{-\frac{t}{200}}$$