

MAT 2784A - Automne 2019 - Devoir #1
Dû le 27 Septembre 27 à 10:00 AM

Nom

Solution

Prénom

Numéro d'étudiant

- SVP utilisez le format suivant pour soumettre votre devoir..
- Vous pouvez utiliser l'endos des page si celle-ci ne vous suffisent pas.

Question 1. [9 points] Résoudre les P.V.I. suivants.

1. $\frac{y}{\cos x} y' = x(1+y^2)$, $y(0) = 0$

2. $2x^2 + y^2 + xyy' = 0$, $x > 0$, $y(1) = 1$

3. $\underbrace{(y^3 + 3x^2 \cos y)dx}_{M(x,y)} + \underbrace{(3xy^2 - x^3 \sin y)dy}_{N(x,y)} = 0$, $y(1) = 0$

1- ÉDO séparable : $\frac{y dy}{1+y^2} = x \cos x \stackrel{\text{Intégrer}}{\Rightarrow} \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = x \sin x + \cos x + C$
 $\ln(1+y^2) = 2x \sin x + 2 \cos x + C \Leftrightarrow 1+y^2 = e^{2x \sin x + 2 \cos x + C}$
 $\Leftrightarrow \boxed{y^2 = e^{2x \sin x + 2 \cos x} - 1}$ qui est la S.G., où $D = e^C$.

Maintenant, on a $y(0) = 0 \Rightarrow 0^2 = D e^{2(0) \sin(0) + 2 \cos(0)} - 1 \Leftrightarrow D e^2 = 1$

$\Leftrightarrow D = e^{-2}$. D'où la S.U. est :

$$\boxed{y^2 = e^{2x \sin x + 2 \cos x - 2} - 1}$$

N.B.: Les deux solutions sont implicites. $\frac{1}{2}$

2. Cette ÉDO est équivalente à : $(\underbrace{2x^2 + y^2}_{M(x,y)}) dx + \underbrace{xy dy}_{N(x,y)} = 0$

C'est une ÉDO à coefficients homogènes, car : $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 M(x, y)$
de degré 2 en x et y . et $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 N(x, y)$.

On pose $y = ux \Rightarrow dy = u dx + x du$ et l'ÉDO devient

$$(2x^2 + u^2 x^2) dx + u x^2 (u dx + x du) = 0$$

$\Leftrightarrow 2x^2(1+u^2) dx + u x^3 du = 0$ qui est séparable.

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x} dx = \frac{u}{1+u^2} du \stackrel{\substack{\text{Intégrer} \\ x>0}}{\Leftrightarrow} -2 \ln(x) + C = \frac{1}{2} \ln(1+u^2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^{-2}) + C = \ln((1+u^2)^{1/2}) \Leftrightarrow x^{-2} \cdot D = (1+u^2)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow u^2 = D^2 x^{-4} - 1. \text{ Mais } u = y/x \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = K x^{-4} - 1 ; K = D^2.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y^2 = K x^{-2} - x^2}$$
 qui est la S.G. (implicite).

Mais $y(1) = 1 \Rightarrow 1^2 = K (1)^{-2} - (1)^2 \Leftrightarrow K = 2$. D'où la S.U. : $\boxed{y^2 = 2x^{-2} - x^2}$

Page additionnelle

3- On a: $M_y = 3y^2 - 3x^2 \sin y = N_x$. Donc c'est une EDO exacte

Donc $F(x,y) = \int M(x,y) dx = xy^3 + x^3 \cos y + g(y)$

Mais $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \Leftrightarrow 3xy^2 - x^3 \sin y + g'(y) = 3xy^2 - x^3 \sin y$
 $\Leftrightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$; on prend $C = 0$.

Donc $F(x,y) = xy^3 + x^3 \cos y$.

Donc la S.G. est
$$\boxed{xy^3 + x^3 \cos y = K}$$

Avec $y(1) = 0$, on trouve

$$(1)(0^3) + (1)^3 \cos(0) = \boxed{K = 1}$$

et donc on a la S.U

$$\boxed{xy^3 + x^3 \cos y = 1}$$

Question 2. [12 points] Résoudre les P.V.I. suivants.

$$1. \underbrace{(2+3xy+y^2)}_{M} dx + \underbrace{(x^2+xy)}_{N} dy = 0, \quad y(1) = -1.$$

$$2. \underbrace{(\ln(y^4)-y^2+4x\ln y)}_{M} dx + \underbrace{\left(\frac{4x}{y}-2y\right)}_{N} dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$3. \underbrace{(y+2xy^3+2xy^4e^y)}_{M} dx + \underbrace{(-3x+x^2y^4e^y-x^2y^2)}_{N} dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

1- On a: $M_y - N_x = (3x+2y) - (2x+y) = x+y = \frac{N(x,y)}{x}$

Donc $f(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x} \Rightarrow$ le facteur d'intégration

$\mu = e^{\int \frac{f(x)}{N} dx} = x$ et l'E.D.O suivante est exacte.

$$\underbrace{(2x+3x^2y+xy^2)}_{M^*} dx + \underbrace{(x^3+x^2y)}_{N^*} dy = 0$$

(Vérification: $M_y = 3x^2+2xy = N_x^* \quad \checkmark$)

Donc $F(x,y) = \int M^*(x,y) dx = x^2 + x^3y + \frac{x^2}{2}y^2 + g(y)$

Mais $F_y = N^* \Leftrightarrow x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + x^2y \Leftrightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$

On prend $C = 0$.

Donc $F(x,y) = x^2 + x^3y + \frac{x^2}{2}y^2$ et la S.G. est:

$$\boxed{x^2 + x^3y + \frac{x^2}{2}y^2 = K}$$

Avec $y(1) = -1 \Rightarrow (1)^2 + (1)^3(-1) + \frac{(1)^2}{2}(-1)^2 = \boxed{K = \frac{1}{2}}$, on a

la S.U. $\boxed{x^2 + x^3y + \frac{x^2}{2}y^2 = \frac{1}{2}}$

2- On a: $M_y - N_x = \left(\frac{4}{y} - 2y + \frac{4x}{y}\right) - \left(\frac{4}{y} - 0\right) = -2y + \frac{4x}{y} = N(x,y)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = 1 \Rightarrow$ le facteur d'intégration $\mu = e^x$ et l'E.D.O

s'écrit $e^x \underbrace{\left(\ln(y^4) - y^2 + 4x\ln(y)\right)}_{M^*} dx + e^x \underbrace{\left(\frac{4x}{y} - 2y\right)}_{N^*} dy = 0$

(Vérification: $M_y^* = e^x \left(\frac{4}{y} - 2y + \frac{4x}{y}\right) = N_x^* \quad \checkmark$)

$$F(x,y) = \int N(x,y) dy$$

Page additionnelle

Donc : $F(x,y) = \int e^x \left(\frac{4x}{y} - 2y \right) dy = 4x e^x \ln(y) - y^2 e^x + h(x)$

Mais $F_x = M^* \Leftrightarrow e^x \left(x \ln(y^4) - y^2 \right) + h'(x) = e^x \left(x \ln(y^4) - y^2 \right) + e^x (\ln(y^4)) + h'(x)$

$$= e^x \left(\ln(y^4) - y^2 + 4x \ln(y) \right)$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = C ; \text{ on prend } C = 0.$$

Donc la S.G est : $\boxed{e^x \left(x \ln(y^4) - y^2 \right) = K}$

Avec $y(0) = 1 \Rightarrow e^0 (0 \ln(1^4) - 1^2) = \boxed{K = -1}$, on a la S.G

$$\boxed{e^x \left(x \ln(y^4) - y^2 \right) = -1} .$$

3- On a : $M_y - N_x = (1 + 6xy^2 + 8xy^3 e^y + 2xy^4 e^y) - (-3 + 2xy^4 e^y - 2xy^2) = 4 + 8xy^2 + 8xy^3 e^y = 4M(x,y)$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{M_y - N_x}{M} = \frac{4}{y} \Rightarrow \text{le facteur d'intégration est :}$$

$$\mu = \mu(y) = e^{\int g(y) dy} = y^{-4} \text{ et l'ÉDO suivante est exacte :}$$

$$\underbrace{(y^{-3} + 2xy^{-1} + 2xe^y)}_{M^*} dx + \underbrace{(-3xy^{-4} + x^2 e^y - x^2 y^{-2})}_{N^*} dy = 0$$

(Vérification : $M_y^* = -3y^{-4} - 2x y^{-2} + 2x e^y = N_x^* \quad \checkmark$)

Donc $F(x,y) = \int M^* dx = xy^{-3} + x^2 y^{-1} + x^2 e^y + g(y)$

Page additionnelle

$$\text{Mais } F_y = N^* \Leftrightarrow -3xy^{-4} - x^2y^{-2} + x^2e^y + g'(y) \\ \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c \text{ qui on prend } c = 0.$$

$$\text{Alors } F(x,y) = xy^{-3} + x^2y^{-1} + x^2e^y \text{ et donc la S.G est}$$

$$\boxed{xy^{-3} + x^2y^{-1} + x^2e^y = K}$$

$$\text{Maintenant, } y(0) = 1 \Rightarrow (0 \cdot (1)^{-3} + (0^2) \cdot (1)^{-1} + (0^2)e^{-1}) = \boxed{K = 0}$$

D'où la S.U. :

$$\boxed{xy^{-3} + x^2y^{-1} + x^2e^y = 0}$$

Question 3. [5 points] Considérez la fonction $f(x) = x^4 + 6x - 5$.

- ([1 point]) Montrez que $f(x)$ admet une racine dans l'intervalle $[0, 1]$.
- ([2 points]) Utilisez l'équation $f(x) = 0$ pour obtenir une fonction $g(x)$ telle que $g(x) = x$ et qui vérifie les deux conditions de convergence de la suite de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$.
- ([2 points]) Utilisez la méthode du **point fixe** pour approcher la racine de $f(x)$ dans l'intervalle $[0, 1]$ à 5 décimales près avec $x_0 = 0.75$.

(a) f est continue sur $[0, 1]$. Aussi $f(0)f(1) = (-5)(2) = -10 < 0$.
 (D'après le TVI) Il existe une racine dans $[0, 1]$.

(b) On a de $f(x) = 0 \iff x = \frac{5-x^4}{6}$.

On pose $g(x) = \frac{5-x^4}{6}$.

g est dérivable sur $[0, 1]$ et $g'(x) = -\frac{2}{3}x^3$

Donc $|g'(x)| < \frac{2}{3} < 1$, car $0 \leq x \leq 1$
 $\left(= \frac{2}{3}x^3 \right)$

Donc la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ est convergente sur $[0, 1]$.

(c)

n	x_n
0	0.75000
1	0.78060
2	0.77145
3	0.77430
4	0.77343
5	0.77369
6	0.77361
7	0.77361

STOP !

$$x_1 = \frac{5 - (0.75)^4}{6} = 0.7806$$

$$x_2 = \frac{5 - (0.7806)^4}{6} = 0.7714$$

Conclusion: à 5 décimales près La solution de $f(x) = 0$ sur $[0, 1]$ est :

$$\boxed{x = 0.77361}.$$

Question 4. [4 points]

(a) ([2 point]) Utilisez la méthode de Newton pour estimer la valeur de $\sqrt[4]{5}$ à 5 décimales près. Utilisez $x_0 = 1.25$ et $f(x) = x^4 - 5$.

(b) ([2 point]) Utilisez la méthode de Newton pour approcher l'abscisse du point d'intersection des courbes $y = x^3$ et $y = \cos(x)$ à 5 décimales près. Prendre $x_0 = 1$.

(a) (N.B.: $x = \sqrt[4]{5} \iff x^4 = 5 \iff x^4 - 5 = 0$. D'où l'existence de $f(x) = x^4 - 5$)

On a $f'(x) = 4x^3$.

n	x_n
0	1.25000
1	1.57750
2	1.50155
3	1.49539
4	1.49535
5	1.49535

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.25 - \frac{(1.25)^4 - 5}{4(1.25)^3} = 1.5775$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5775 - \frac{(1.5775)^4 - 5}{4(1.5775)^3} = 1.50155$

Stop!

D'où $\sqrt[4]{5} \approx 1.49535$ à 5 décimales près

(b) On a $\cos x = x^3 \iff \cos x - x^3 = 0$. Donc, on pose $f(x) = \cos x - x^3$

et on a $f'(x) = -\sin x - 3x^2$.

n	x_n
0	1
1	0.88033
2	0.86568
3	0.86547
4	0.86547

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{\cos(1) - 1^3}{-\sin(1) - 3(1)^2} = 0.88033$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = (0.88033) - \frac{\cos(0.88033) - (0.88033)^3}{-\sin(0.88033) - 3(0.88033)^2} = 0.86568$

Stop!

D'où le point d'intersection à 5 décimales près est :

$$x = 0.86547$$