Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

**Examen Final- MAT1722-3X– Printemps-Été 2019**

**Professeur : M'hammed Mountassir**
**29 Juillet 2019**

Nom et Prénom de l'étudiant(e) : --------------------------------------------------------
Numéro d'étudiant(e): ---------------------------------------------------

Solution

- Durée: 180 minutes.
- **Seules les calculatrices de base** TI-30, TI-30X, TI 34X, Casio FX-300X et Casio 260X sont autorisées.
- **Examen à livre fermé.**
- L'examen comporte 12 questions à choix multiples (chacune notée sur 2 points) et 4 questions à développement.
- Les solutions aux questions à développement doivent être claires et vous devez préciser toutes les étapes de vos calculs.
- Il est interdit de se servir de téléphone cellulaire, de dispositifs électroniques ou de notes de cours. Les téléphones et les gadgets électroniques doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez les laisser dans vos poches. Sinon, on pourrait vous demander de quitter la salle de l'examen immédiatement. Ça sera aussi le cas POUR TOUTE ACTIVITÉ SUSPECTE.

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature :.........................................

585, av. King-Edward
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Avenue
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

## Recopiez vos réponses pour les questions à choix multiples dans ces cases:

1. B 2. B 3. C 4. D 5. E 6. F 7. X 8. C 9. A 10. E

11. C 12. A

| Question | Question1 à 12 | Q13 | Q14 | Q15 | Q16 | Note globale |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Note | /24 | /6 | /7 | /6 | /7 | /50 |

**QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES : Encerclez la lettre correspondante à votre réponse.**

**Question1:** Déterminer l'aire de la région entre la courbe de $y = -x^2 + x$ et la courbe $y = 2x^2 - 3x$ sur l'intervalle [-1 ; 1] **(Encerclez la bonne réponse)**

A) 1 $\boxed{\text{B) 2}}$. C) 3 D) 4 E) 5 F) 6

$-x^2+x = 2x^2-3x \Rightarrow 3x^2-4x=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=4/3$

$A = \int_{-1}^{0}(3x^2-4x)\,dx + \int_0^1(-3x^2+4x)\,dx = 3-1 = 2.$

**Question2** : Soit R la région délimitée par les courbes $y = -x^2 + 2x$ et $y = x$. Un solide $S$ admet R comme base et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés. Alors le volume du solide $S$ est donné par une des intégrale suivante : **(ne pas calculer l'intégrale).**

A) $\int_0^1((-x^2+2x)^2 - x^2)dx$

→ B) $\int_0^1((-x^2+2x) - x)^2\,dx$

C) $\pi\int_0^1((-x^2+2x)^2 - x^2)\,dx$

D) $2\pi\int_0^1((-x^2+2x)^2 - x^2)\,dx$

E) $\int_0^1 x((-x^2+2x) - x)dx$

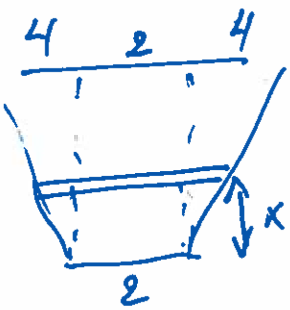
F) $\pi\int_0^1((-x^2+x) - x)^2\,dx$

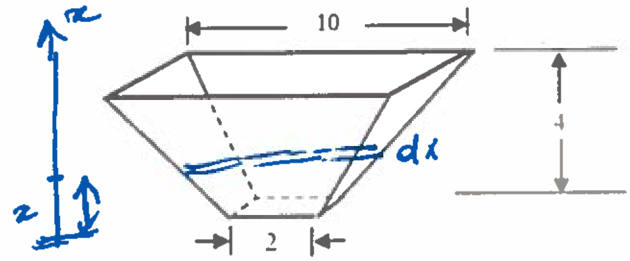
$-x^2+2x = x \Rightarrow x=0$ ou $x=1$.
le côté de la section perpendiculaire à l'axe des x aura comme longueur $a = -x^2+2x-x$.

$\Rightarrow V = \int_0^1 (-x^2+2x-x)^2\,dx$

B

**Question3:** Une piscine dont la forme est une pyramide tronquée inversée comme illustrée dans la figure ci-dessous est remplie d'eau. Le haut de la piscine est un carré dont chacun des côtés mesure 10 mètres, le bas de la piscine est un carré dont chacun des côtés mesure 2 mètres et la profondeur de la piscine est de 4 mètres. Soit $x$, la distance entre une tranche horizontale de la piscine et le bas de la piscine dont l'épaisseur est $dx$, alors le poids de cette tranche est $dP(x) = \rho g(2x+2)^2 dx$ où $g$ est l'accélération de la gravité et $\rho\ \left(\frac{kg}{m^3}\right)$ est la densité de l'eau. Alors le travail nécessaire pour pomper tout l'eau de la piscine par un orifice placé à 1 mètre au-dessus du niveau supérieur de la piscine est donné par une des formules suivantes, Laquelle? **(on ne vous demande pas de la calculer)**




A) $g\rho\int_0^5 (2x+2)^2(5-x)\,dx$
B) $g\rho\int_1^5 (2x+2)^2(5-x)\,dx$
C) $g\rho\int_0^4 (2x+2)^2(5-x)dx$
D) $g\rho\int_0^5 (2x+2)^2(x+1)dx$
E) $g\rho\int_1^5 (2x+2)^2(x+1)dx$
F) $g\rho\int_0^4 (2x+2)^2(x+1)dx$

Si on prend une tranche d'épaisseur dx à une distance x. son volume sera

$dV = A(x)dx = (2x+2)^2 dx$

$\Rightarrow$ son poids est

$dP(x) = \rho g\, dV = \rho g (2x+2)^2 dx$

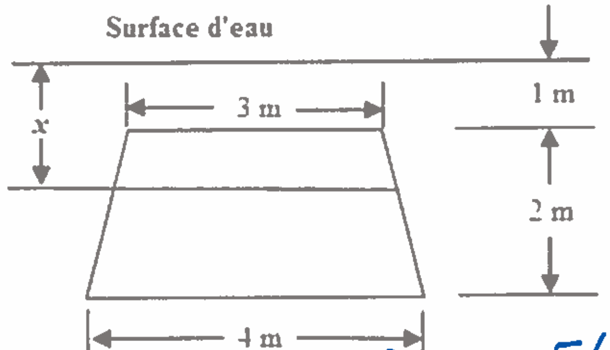
la distance qui la sépare de l'orifice est $D = (1+4) - x = 5 - x$.

$\Rightarrow$ le travail nécessaire pour vider cette tranche est $dW = (dP)(D) = \rho g (2x+2)^2 (5-x) dx$.

$$\Rightarrow W = \rho g \int_0^4 (2x+2)^2 (5-x) dx$$

**Question 4:** Une surface trapézoïde est submergée verticalement dans l'eau dans l'eau dont la densité est égale à $\rho(\frac{kg}{m^3})$, telle que le haut de la surface soit à une profondeur d'un mètre sous l'eau (comme indiqué dans le graphique).

la pression qui s'exerce sur cette tranche est $P(x) = \rho g D(x) = \rho g x$.




la force qui s'exerce sur cette tranche est $F(x) = P(x) A(x) = \frac{1}{2}(x+5)\rho g x\,dx$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2}\rho g \int_1^3 x(x+5)\,dx. \quad (D)$$

Soit x la distance séparant une tranche horizontale de cette surface (dont l'épaisseur est $dx$) et la surface de l'eau ; alors la surface de cette tranche est $A(x) = \frac{1}{2}(x+5)dx$. Alors la force en Newtons agissant sur cette surface est donnée par l'une des formules suivantes. Laquelle? **(on ne vous demande pas de la calculer).**

A) $\frac{1}{2}\rho g \int_1^3 (x-1)(x+5)dx$
B) $\frac{1}{2}\rho g \int_0^2 (x-1)(x+5)dx$
C) $\frac{1}{2}\rho g \int_0^3 (x-1)(x+5)dx$
D) $\frac{1}{2}\rho g \int_1^3 x(x+5)dx$
E) $\frac{1}{2}\rho g \int_0^2 x(x+5)dx$
F) $\frac{1}{2}\rho g \int_0^3 x(x+5)dx$

**Question5 :** La valeur moyenne de la fonction $y = x\sqrt{4-x^2}$ sur l'intervalle $[0\,;2]$ est :

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{3}{8}$ C) 5/3 D) 3/5 $\boxed{\text{E) } 4/3}$ F) 3/4

$$VM_{[0,2]} = \frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^4 \sqrt{u}\,du = \frac{4}{3}$$

**Question 6:** La longueur de l'arc $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3x}$ $\quad pour \quad 1 \le x \le 2$ est :

A) $\frac{93}{48}$ B) $\frac{91}{48}$ C) $\frac{47}{24}$ D) $\frac{49}{24}$ E) $\frac{19}{12}$ $\boxed{\text{F) } \frac{23}{12}}$

$$y' = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3x^2} \to y'^2 = \frac{9}{16}x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{9x^4} \to 1 + y'^2 = \frac{9}{16}x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{9x^4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3x^2} \Rightarrow L = \int_1^2 \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3x^2}\right)dx = \frac{23}{12}$$

**Question 7:** Soit l'intégrale impropre suivante : $\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$. Quelle affirmation parmi les suivantes est VRAIE.

(A) Puisque $\frac{1}{x+\sqrt{x}} > \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur l'intervalle (0;1) et que $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ converge alors l'intégrale impropre de départ converge.

(B)Puisque $\frac{1}{x+\sqrt{x}} > \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur l'intervalle (0;1) et que $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ diverge alors l'intégrale impropre de départ diverge.

(C)Puisque $\frac{1}{x+\sqrt{x}} < \frac{2}{\sqrt{x}}$ sur l'intervalle (0;1) et que $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$ converge alors l'intégrale impropre de départ converge.

(D) Puisque $\frac{1}{x+\sqrt{x}} < \frac{2}{\sqrt{x}}$ sur l'intervalle (0;1) et que $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$ diverge alors l'intégrale impropre de départ diverge.

(E)Puisque $\frac{1}{x+\sqrt{x}} > \frac{1}{2x}$ sur l'intervalle (0;1) et que $\int_0^1 \frac{1}{2x}dx$ diverge alors l'intégrale impropre de départ diverge.

Test de comparaison.

**Question 8:** En appliquant la méthode d'Euler avec un pas $h = 0{,}05$ pour approximer $y(0{,}1)$ où $y(t)$ est la solution de l'équation différentielle $y' = (t+1)y^2$ avec $y(0) = 1$. Quelle est alors l'estimation de $y(0{,}1)$?

A) 1,015 B) 1,050 C) 1,108 D) 1,153 E) 1,175 F) 1,205

$y_{n+1} = y_n + h\,(t_n + 1)\,y_n^2.$

| $t_n$ | $y_n$ |
|---|---|
| $0 = t_0$ | $y_0 = 1$ |
| $t_1 = 0{,}05$ | $y_1 = 1 + 0{,}05\,(0+1)\,1^2 = 1{,}05$ |
| $t_2 = 0{,}1$ | $y_2 = 1{,}05 + 0{,}05\,(0{,}05+1)\,(1{,}05)^2 = 1{,}108$ |

**Question 9 :** Supposons que la série de MacLaurin d'une fonction est $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} x^n$. Alors la valeur de $f^{(5)}(0)$ est :

A) 40/11 B) 40/33 C) 1/33 D) 1/11 E) 120/11 F) 120/33

le coefficient de $x^5$ dans cette série est $c_5 = \frac{1}{2^5+1} = \frac{1}{33} = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}$

$\Rightarrow f^{(5)}(0) = \frac{5!}{33} = \frac{120}{33} = \frac{40}{11}$

**Question 10 :** La somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} + (-1)^n 3^n}{11^{n+1}}$ est .........

somme de deux géométriques convergents

C) 11/3 B) 11/14 C) 14/11 D) 3/11 E) 3/14 F) 14/3

$S_1 = \frac{\frac{1}{11}}{1 - \frac{4}{11}} = \frac{1/11}{7/11} = \frac{1}{7}$ et $S_2 = \frac{1/11}{1 + \frac{3}{11}} = \frac{1/11}{14/11} = \frac{1}{14}$

$S_1 + S_2 = \frac{3}{14}$

**Question 11 :** Soit la série entière suivante $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n\sqrt{n}}$. Quel est son intervalle de convergence?

A) [-3; 3] B) ]-3 ;3[ C) ]-3; 3] D) [-3; 3[ E) [-4; 3[ F)[-4;3]

**Question 12 :** L'équation du plan tangent au graphique de la fonction $z = xy^2 - 3x^2 - 2x - 2y$ au point $P(2;3)$ est :

A) $-5x + 10y - 24$ B) $-5x + 10y - 16$ C) $5x - 10y + 16$
D) $5x - 10y + 24$ E) $5x + 10y - 44$ F) $-5x - 10y + 36$

## PARTIE II : QUESTIONS À DÉVELOPPEMENT.

**Vous devrez donner tous les détails dans vos réponses.**

**Question 13 (6 points) :**

Déterminer la solution $y(t)$ de l'équation différentielle suivante :

$y' = (cost)(1-y^2)$ $lorsque$ $y(0) = 2$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t\,(1-y^2) \Rightarrow \frac{dy}{1-y^2} = \cos t\, dt.$$

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{1+y} + \frac{1}{2}\frac{dy}{1-y} = \cos t\, dt$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+y| - \frac{1}{2}\ln|1-y| = \sin t + C.$$

$$\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = 2\sin t + K.$$

$$\Rightarrow \frac{1+y}{1-y} = A\, e^{2\sin t} \longrightarrow y(0) = 2 \Rightarrow \frac{3}{-1} = A \Rightarrow A = -3$$

$$\frac{1+y}{1-y} = -3e^{2\sin t} \Longrightarrow \boxed{y(t) = \frac{1+3e^{2\sin t}}{3e^{2\sin t}-1}}$$

**Question 14 (7 points=3+4) :** Soit

$$z = f(x,y) = 3(x-1)^2 + 2(y-3)^2 + 7$$

(a) Déterminer l'équation du plan tangent à la courbe de cette fonction au point P(2 ; -2).

(b) Déterminer la dérivée directionnelle de cette fonction dans la direction du vecteur $\vec{u} = (-2; 3)$ et au point P(2 ; -2).

(a) $f(2;-2) = 3(1)^2 + 2(-5)^2 + 7 = 3 + 50 + 7 = 60.$

$f_x(x,y) = 6(x-1) \Rightarrow f_x(2;-2) = 6.$

$f_y(x,y) = 4(y-3) \Rightarrow f_y(2;-2) = -20.$

$\Rightarrow z_T = 60 + 6(x-2) - 20(y+2)$

$= 60 + 6x - 12 - 20y - 40 = 8 + 6x - 20y.$

(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas unitaire car $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

donc on doit le remplacer par $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow D_{\vec{v}} f(2,-2) = (6)\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right) + (-20)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$= \frac{-72}{\sqrt{13}}$

**Question 15 (2+2+2=6 points) :** Utiliser un critère approprié pour démontrer la convergence ou la divergence de chacune des séries suivantes :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{2n^2-1}$

$|u_n| \leq \frac{2}{2n^2-1} = v_n$ (Converge par le critère des polynômes

$\rightarrow$ $u_n$ est convergente

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2n+1}{3n-1})^n$

Critère de Cauchy

$R = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3} < 1$ (C

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\frac{2n+1}{3n-1})$

série alterneé ~~c~~ divergente

car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3} \neq 0$

**Question 16 (7 points) :** Déterminer l'intervalle de convergence et le rayon de convergence de la série des puissances :
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n\sqrt{n}}$.

$$u_n(x) = \frac{(x+1)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\;|x+1|}{3\sqrt{n+1}} = \frac{|x+1|}{3}$$

(1) Si $R < 1 \Rightarrow \frac{|x+1|}{3} < 1 \Rightarrow |x+1| < 3 \Rightarrow -3 < x+1 < 3$

$\Rightarrow -4 < x < 2$ (C)

(2) Si $R > 1 \Rightarrow x < -4$ ou $x > 2$ (D)

(3) Si $R = 1 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \Rightarrow u_n(-4) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ (C) (alternée)} \\ x = 2 \Rightarrow u_n(2) = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (D) (Riemann)} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{I} = [-4 ; 2[$

$\Rightarrow \underline{r = 3}$