Solutionnaire (Volet 1).

1. (a) Mohammed a oublié son mot de passe de 4 chiffres. Il se rappèlle seulement que son mot de passe contient 4 différents chiffres (exple 1234) Il choisit au hasard 4 différents chiffres, quelle est la probabilité qu'il forme le mot de passe correct?

Soit A : Mohammed forme le mot de passe correct"

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{1}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = 0{,}0002$$

(b) Un professeur divise 9 étudiants en deux groupes. Le groupe I avec 4 étudiants et le groupe II avec 5 étudiants. Quelle est la probabilité que John, Tom et Peter soient dans le même groupe?

Soit B : John, Tom et Peter dans le même groupe.

G_1 : "être dans le groupe 1"
G_2 : "être dans le groupe 2"

$$P(B) = P(G_1) + P(G_2)$$
$$= \frac{\binom{3}{3}\binom{6}{1}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{6}{2}}{\binom{9}{5}} \simeq 0{,}1667$$

2. Soit une expérience aléatoire avec $P(A) = 0,35$, $P(B) = 0,73$ et $P(A \cap B) = 0,14$, Déterminer

   (a) $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,94$$

   (b) $P(A' \cap B)$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,59$$

   (c) $P(A \cap B')$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0,21$$

   (d) $P(A' \cup B')$

$$P(A' \cup B') = P\left((A \cap B)'\right) = 1 - P(A \cap B) = 0,86$$

3. Si dans une expérience aléatoire, on a $P(A) = 0,65$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,24$, les événements A et B sont-ils independents?

$$P(A)\,P(B) = 0,26 \neq P(A \cap B) = 0,24$$

Donc A et B sont <u>dépendants</u>

4. Dans une étude impliquant des sujets alcooliques, on estime ques 42% ont des pères alcooliques et 8% ont des mères alcooliques et 48% ont au moins des deux parents alcooliques. Quelle est la probabilité que si on choisit un sujet au hasard :

Soit A: Mère alcoolique et B: " Père alcoolique

(a) Qu'il ait les deux parents alcooliques ?

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}02$$

(b) Qu'il ait sa mère alcoolique mais pas son père?

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}06$$

(c) Qu'il ait sa mère alcoolique sachant que son père l'est aussi?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}02}{0{,}42} = 0{,}0476$$

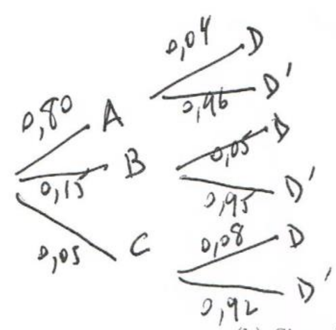
(d) Qu'il ait sa mère alcoolique sachant que son père ne l'est pas?

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{0{,}06}{1 - 0{,}42} = 0{,}1034$$

5. Supposons qu'une compagnie A fabrique 80% des électrocardiographes, qu'une compagnie B en fabriques 15% et qu'une compagnie C en fabrique les 5% restant. Les électrocardiographes fabriqués par la compagnie A ont un taux de défectuosité de 4%, ce taux de défectuosité est de 5% pour la compagnie B et de 8% pour la compagnie C.

D : Défectueuse

(a) Si on choisit au hasard une machine électrocardiographe et qu'on la trouve défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle soit fabriquée par la compagnie A?



$$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)\,P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)}$$

$$= \frac{(0{,}04)(0{,}8)}{(0{,}04)(0{,}8) + (0{,}05)(0{,}15) + (0{,}08)(0{,}05)} = 0{,}7356$$

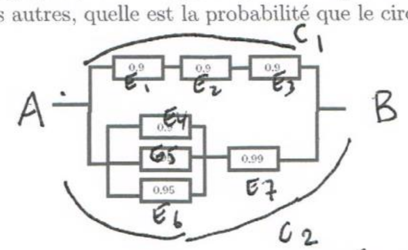
(b) Si on choisit au hasard une machine électrocardiographe. Déterminer la probabilité qu'elle soit fabriquée par la compagnie A et qu'elle soit non défectueuse.

$$P(A\cap D') = P(D'|A)\,P(A)$$

$$= (0{,}96)(0{,}8) = 0{,}768$$

6. Le circuit suivant est opérationnel seulement si le courant de gauche vers la droite. Les probabilités que chaque composante fonctionne apparait sur le graphique. On suppose que les composantes sont indépendantes les unes des autres, quelle est la probabilité que le circuit fonctionne?

G : le courant passe de A vers B



$P(G) = P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1)P(C$

or $P(C_1) = (0,9)^3 = 0,729$ et $P(C_2) = P((E_4 \cup E_5 \cup E_6) \cap E_7)$

$P(C_2) = P(E_4 \cup E_5 \cup E_6)\, P(E_7)$

$P(C_2) = [1 - P(E_4' \cap E_5' \cap E_6')]\, P(E_7) = 0,9897525$ donc $\underline{P(G) = 0,997}$

7. Soit la fonction suivante

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

(a) Vérifier que c'est une fonction de masse.

Toutes les probabilités sont ≥ 0 et leur somme $= 1$
$\Rightarrow$ c'est une fonction de masse des probabilités

(b) Calculer $P(X \leq 2)$

$P(X \leq 2) = 1$

(c) Calculer $P(X > -2)$

$P(X > -2) = 1 - P(X = -2) = \frac{7}{8}$

(d) Calculer $P(-1 \leq X \leq 1)$ $= \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

(e) Calculer $P(X \leq 1 \ ou \ X > 1)$

$= P(X \leq 1) + P(X > 1) = 1$

(f) Déterminer la fonction de distribution cumulative.

X	-2	-1	0	1	2
$F(a) = P(X \leq a)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$1.$

(g) Calculer la moyenne et la variance de la variable aléatoire X.

$E(X) = \mu_X = 0$

$E(X^2) = \sum_{k \in Supp\, X} k^2 P(X=k) = \frac{12}{8}$

donc $Var(X) = \sigma_X^2 = \frac{12}{8}$