Limites et continuité

Définition

Soit f une fonction de deux variables. On dit que la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers (a,b) est L et on écrit

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

si $f(x,y)$ tend vers L lorsque (x,y) tend vers (a,b) le long de tout chemin qui passe par (a,b).

Exemple

Evaluer les limites suivantes si elles existent

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

b) $$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

c) $$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

Solution

a) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

posons $t = x^2+y^2$

Si $(x,y)\mapsto(0,0)$ alors $t = x^2+y^2 \longrightarrow (0)^2+(0)^2 = 0$

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$

$$= \lim_{t\to 0} \overset{\text{R.H.}}{} \frac{\cos(t)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

b) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

• le long de la droite $(0,y)$, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

• ~~Sur~~ le long de la droite $(x,0)$, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(x,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,y)} \neq \lim\limits_{(x,y)\to(x,0)}$

Donc la limite n'existe pas

c) $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$

On a :

$$0 \leq \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2}{x^2+y^2}3|y|$$

$$\leq 3|y| \Rightarrow$$

$$0 \leq \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} 3|y| = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Définition

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est continue au point $(a,b) \in D$ si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si elle est continue en chaque point de D.

Propriétés

Si $f(x,y)$ et $g(x,y)$ sont continues sur $\mathcal{D}$, alors

1°) $f(x,y)+g(x,y)$, $f(x,y)g(x,y)$ et $cf(x,y)$ avec $c \in \mathbb{R}$ sont aussi continues sur $\mathcal{D}$.

2°) De plus. $f(x,y)/g(x,y)$ est continue sur

$$\mathcal{D}' = \{(x,y) \in \mathcal{D} : g(x,y) \neq 0\}$$

3°) Enfin, $h(f(x,y))$ est continue sur $\mathcal{D}$ si $h(t)$ est continue sur l'image de f.

Exemple

$f(x,y) = x^2-y^2$ et $g(x,y) = x^2+y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

$\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathcal{D}' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\}$

$\sin\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ est continue sur $\mathcal{D}'$ car sinus est continue sur $\mathbb{R}$

Les dérivées partielles

Définition :

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables définie au

voisinage d'un point (a,b). La dérivée partielle de f (5)
par rapport à x au point (a,b) est

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

si cette limite existe. On la note $f'_x(a,b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

La dérivée partielle de f par rapport à y au point (a,b) est

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

si cette limite existe. On la note $f'_y(a,b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

En posant $u(x)=f(x,b)$, on trouve

$$f'_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$$

Donc $f'_x(a,b)$ est la dérivée de $f(x,b)$ au point $x=a$.
De même $f'_y(a,b)$ est la dérivée de $f(a,y)$ au point $y=b$.

<u>Règle</u> :

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables

- Pour calculer $f'_x(x,y)$, on dérive $f(x,y)$ par rapport à x en considérant y comme constante.

- Pour calculer $f'_y(x,y)$, on dérive $f(x,y)$ par rapport à y en considérant x comme constante.

Exemple

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes

1°) $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 - 2y^2$

2°) $f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$

Solution

1°) $f'_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^2 - 0 = 3x^2 + 2xy^2$

$f'_y(x,y) = 0 + 2x^2y - 2(2)y = 2x^2y - 4y$

2°)

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right)\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$= \frac{1}{1+y}\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right)\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$= \frac{-x}{(1+y)^2}\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

Interprétation géométrique

$f'_x(a,b)$ = pente du graphe de f au-dessus de la droite $y = b$ au point $(a\,b)$.

$f'_y(a,b)$ = pente du graphe de f au-dessus de la droite $x = a$ au point (a, b).

Autre interprétation

$f'_x(a,b)$ = taux de croissance de f par rapport à x au point (a,b).

$f'_y(a,b)$ = taux de croissance de f par rapport à y au point (a,b).

Exemple

- 1°) Donner la pente au graphe de $f(x,y) = xy^2$ le long de $y=1$ au point $(2, 1)$

Solution

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1^2 = 1.$$

2°) Donner le taux de croissance de $f(x,y) = xy^2$ par rapport à y au point $(2, 1)$. (8)

Solution

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2(2)(1) = 4.$$

Dérivées partielles des fonctions de plusieurs variables

Soit $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ une fonction de n variables. On définit la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ par

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\dots,a_i+h,\dots,a_n) - f(a_1,a_2,\dots,a_n)}{h}$$

On la note $f'_{x_i}(a_1,a_2,\dots,a_n)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,a_2,\dots,a_n)$

Exemple

Calculer les dérivées partielles de $f(x,y,z) = e^{xy}\ln(z)$

Solution :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy}\ln(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy}\ln(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xy}\cdot\frac{1}{z}$$

Scanned with CamScanner

Dérivées d'ordre supérieur

Les dérivées secondes sont les dérivées partielles des dérivées partielles.

$$\left(f'_x\right)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ est notée } f''_{xx} \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(f'_x\right)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ est notée } f''_{xy} \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
&\left(f'_y\right)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ est notée } f''_{yx} \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}
\end{aligned}\right\} \text{dérivées mixtes}$$

$$\left(f'_y\right)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ est notée } f''_{yy} \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Théorème

Supposons que f est définie au voisinage du point (a,b) et admette des dérivées partielles mixtes f''_{xy} et f''_{yx} continues au voisinage de (a,b) alors

$$f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b).$$

Exemple

$f(x,y) = \cos(x+y^2)$

$f'_x = -\sin(x+y^2)$ $\qquad$ $f''_{xy} = -\cos(x+y^2)(2y)$

$f'_y = -2y\sin(x+y^2)$ $\qquad$ $f''_{yx} = -\cos(x+y^2)(2y)$

Dérivée implicite

Une fonction peut être définie de manière implicite. Par exemple, la fonction $z(x,y)$ définie par

$$x^3+y^3+z^3+6xyz = 1$$

- Pour déterminer $\frac{\partial z}{\partial x}$, on dérivée les deux membres par rapport à x :

$$\partial_x(x^3+y^3+z^3+6xyz) = \frac{\partial}{\partial x}(1) \Rightarrow$$

$$3x^2+0+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+6yz+6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$(3z^2+6xy)\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2-6yz \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2+6yz}{3z^2+6xy} = -\frac{x^2+2yz}{z^2+2xy}$$

Pour déterminer $\frac{\partial z}{\partial y}$, on dérivee les deux membres par rapport à y :

$$\partial_y (x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) = \partial_y (1) \Rightarrow$$

$$0 + 3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$(3z^2 + 6xy) \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 6xz \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3y^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{y^2 + 2xy}$$