Cours 9

Suites et Séries

1 Suites

Définition

Une suite est une énumération infinie de nombres écrits dans un ordre défini

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

Le nombre a_1 est appelé le premier terme, a_2 est le deuxième terme ---- a_n est le n-ième terme de la suite et est aussi appelé le terme général.

La suite $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ est notée par $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ou par $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Exemple

$\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$ est la suite $\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots\}$

La suite de terme général $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \geq 1$ est

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

Définition

Une suite $\{a_n\}$ a pour limite L et l'on écrit

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \longrightarrow L \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty$$

si a_n tend vers L lorsque n devient grand. On dit que L est la limite de $\{a_n\}$ ou que $\{a_n\}$ converge vers L.

On dit que $\{a_n\}$ diverge si elle n'admet pas de limite.

Théorème

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Si $a_n = f(n)$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$

Exemple

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est définie sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Donc $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

Théorème : loi des limites pour les suites

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ et $c \in \mathbb{R}$, alors

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (c a_n) = cA$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$

En plus si $B \neq 0$ alors

4°) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+3}{n^2-n+1}$

Solution

On factorise par le terme de plus grande puissance

$$\frac{n^2+2n+3}{n^2-n+1} = \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1$$

Théorème du sandwich pour les suites

Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ et si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 --- \times n}{\underbrace{n \times n \times n \times n ---- \times n}_{n \text{ fois}}}$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n} < \frac{1}{n} \times 1 \times 1 \cdots \times 1 = \frac{1}{n}$$

On a : $\underset{\downarrow\\ 0}{0} \leq \frac{n!}{n^n} \leq \underset{\downarrow\\ 0}{\frac{1}{n}}$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$