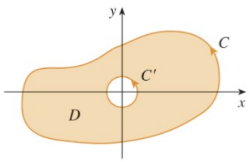

FIGURE 10

EXEMPLE 5 Soit $\vec{F}(x, y) = (-y\vec{i} + x\vec{j})/(x^2 + y^2)$. Montrons que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ pour toute courbe fermée simple entourant l'origine et orientée dans le sens positif.

SOLUTION Calculer directement l'intégrale est difficile puisque C est un chemin fermé **arbitraire** qui entoure l'origine. On considère plutôt un cercle C' centré à l'origine et de rayon a, orienté dans le sens antihoraire, où a est choisi suffisamment petit pour que C' soit complètement à l'intérieur de C (voir la figure 10). Soit D la région délimitée par C et C'. La frontière de D, orientée dans le sens positif, est $C \cup (-C')$ et la version générale du théorème de Green donne

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$
$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] dA = 0.$$

Par conséquent, $$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy,$$

c'est-à-dire que $$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Cette dernière intégrale se calcule facilement grâce à la paramétrisation $\vec{r}(t) = a \cos t\,\vec{i} + a \sin t\,\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$. On obtient

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

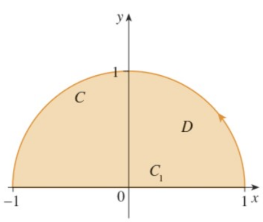

FIGURE 11

EXEMPLE 6 Calculons l'intégrale du champ $\vec{F}(x, y) = (2y - x^2)\vec{i} + (y^4 e^{y^2} - x)\vec{j}$ le long du demi-cercle C de rayon 1 centré à l'origine reliant le point (1, 0) au point (–1, 0).

SOLUTION On remarque que le calcul de l'intégrale le long de C est difficile à cause du terme $y^4 e^{y^2}$ dans la deuxième composante de $\vec{F}$. Par contre, si P et Q désignent les composantes de $\vec{F}$, alors l'expression $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 - 2 = -3$ est très simple, ce qui suggère d'utiliser le théorème de Green. Cependant, le théorème ne s'applique pas puisque la courbe C n'est pas fermée. Pour contourner cette difficulté, on « ferme » la courbe et on applique le théorème de Green. Soit C_1 le segment reliant le point (–1, 0) au point (1, 0) et $C_2 = C \cup C_1$ (voir la figure 11). La courbe C_2 est fermée, orientée dans le sens positif, et délimite une région D. On applique le théorème de Green à C_2 et D :

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D -3\,dA = -3 \text{ aire}(D) = -\frac{3}{2}\pi.$$

Pour obtenir l'intégrale de $\vec{F}$ sur C, on doit retrancher $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ à ce résultat. Le segment C_1 est paramétré par $x = x$, $y = 0$, $-1 \le x \le 1$, et on a $\vec{F}(x, 0) = -x^2\vec{i} - x\vec{j}$. L'intégrale est

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (-x^2\vec{i} - x\vec{j}) \cdot \vec{i}\,dx = -\int_{-1}^{1} x^2\,dx = -\frac{2}{3}.$$

Finalement,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{3}{2}\pi - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\pi.$$

Cette section se termine par l'utilisation du théorème de Green pour démontrer un résultat énoncé à la section précédente.

UNE ESQUISSE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6 DE LA SECTION 9.3

On suppose que $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ est un champ vectoriel sur un domaine simplement connexe D, que P et Q ont des dérivées partielles premières continues et que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ sur } D.$$

Si C est un chemin fermé dans D et si R est la région bornée par C, alors le théorème de Green donne

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R 0\,dA = 0.$$

Une courbe qui n'est pas simple se croise elle-même en au moins un point et peut être scindée en plusieurs courbes simples. On a montré que les intégrales curvilignes de $\vec{F}$ le long de ces courbes simples sont toutes nulles et, en additionnant ces intégrales, on voit que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ pour toute courbe fermée C. Par conséquent, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ est indépendante du chemin dans D, selon le théorème 3 de la section 9.3. Il s'ensuit que $\vec{F}$ est un champ vectoriel conservatif.

Exercices 9.4

1-4 Calculez l'intégrale curviligne selon deux méthodes : a) directement ; b) en utilisant le théorème de Green.

1. $\oint_C y^2\,dx + x^2 y\,dy$, C est le rectangle de sommets (0, 0), (5, 0), (5, 4) et (0, 4).

2. $\oint_C y\,dx - x\,dy$, C est le cercle centré à l'origine et de rayon 4.

3. $\oint_C xy\,dx + x^2 y^3\,dy$, C est le triangle de sommets (0, 0), (1, 0) et (1, 2).

4. $\oint_C x^2 y^2\,dx + xy\,dy$, C est constituée des segments de droites allant de (1, 1) à (0, 1) et de (0, 1) à (0, 0), et de l'arc de la parabole $y = x^2$ allant de (0, 0) à (1, 1).

5-10 Utilisez le théorème de Green pour calculer l'intégrale curviligne le long de la courbe orientée dans le sens positif.

5. $\int_C ye^x\,dx + 2e^x\,dy$, C est le rectangle de sommets (0, 0), (3, 0), (3, 4) et (0, 4).

6. $\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, C est le triangle de sommets (0, 0), (2, 1) et (0, 1).

7. $\int_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + (2x + \cos y^2)\,dy$, C est la frontière de la région bornée par les paraboles $y = x^2$ et $x = y^2$.

8. $\int_C y^4\,dx + 2xy^3\,dy$, C est le cercle $x^2 + 2y^2 = 2$.

9. $\int_C y^3\,dx - x^3\,dy$, C est le cercle $x^2 + y^2 = 4$.

10. $\int_C (1 - y^3)dx + (x^3 + e^{y^2})dy$, C est la frontière de la région comprise entre les cercles $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 9$.

11-14 Utilisez le théorème de Green pour calculer $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (Vérifiez l'orientation de la courbe avant d'appliquer le théorème.)

11. $\vec{F}(x, y) = (y \cos x - xy \sin x)\vec{i} + (xy + x \cos x)\vec{j}$, C est le triangle allant de (0, 0) à (0, 4) à (2, 0) à (0, 0).

12. $\vec{F}(x, y) = (e^{-x} + y^2)\vec{i} + (e^{-y} + x^2)\vec{j}$, C est constituée de l'arc de la courbe $y = \cos x$ allant de $(-\pi/2, 0)$ à $(\pi/2, 0)$ et du segment de droite allant de $(\pi/2, 0)$ à $(-\pi/2, 0)$.

13. $\vec{F}(x, y) = (y - \cos y)\vec{i} + (x \sin y)\vec{j}$, C est le cercle $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ orienté dans le sens horaire.

14. $\vec{F}(x, y) = (\sqrt{x^2 + 1})\vec{i} + (\arctan x)\vec{j}$, C est le triangle allant de (0, 0) à (1, 1) à (0, 1) à (0, 0).

LCS 15-16 Vérifiez le théorème de Green en utilisant un logiciel de calcul symbolique pour calculer l'intégrale curviligne et l'intégrale double.

15. $P(x, y) = x^3 y^4$, $Q(x, y) = x^5 e^4$, C est constituée du segment de droite allant de $(-\pi/2, 0)$ à $(\pi/2, 0)$ suivi de l'arc de la courbe $y = \cos x$ allant de $(\pi/2, 0)$ à $(-\pi/2, 0)$.

16. $P(x, y) = 2x - x^3 y^5$, $Q(x, y) = x^3 y^8$, C est l'ellipse $4x^2 + y^2 = 4$.

17. Utilisez le théorème de Green afin de calculer le travail effectué par la force $\vec{F}(x, y) = x(x + y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ pour déplacer une particule à partir de l'origine le long de l'axe des x jusqu'à (1, 0), puis le long d'un segment de droite jusqu'à (0, 1) et, enfin, jusqu'à l'origine le long de l'axe des y.

18. Une particule part de l'origine, se déplace le long de l'axe des x jusqu'à (5, 0) puis le long du quart de cercle $x^2 + y^2 = 25$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ jusqu'au point (0, 5), puis