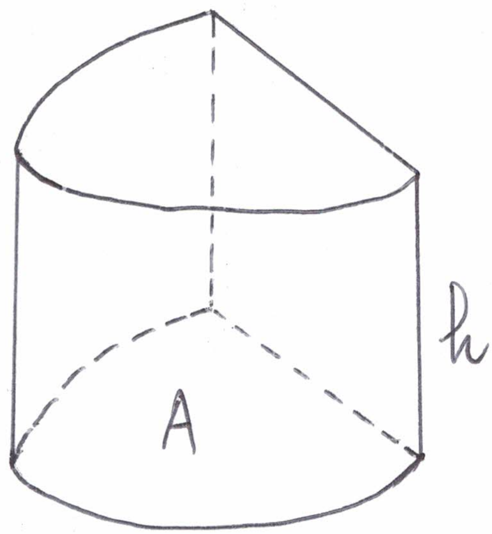
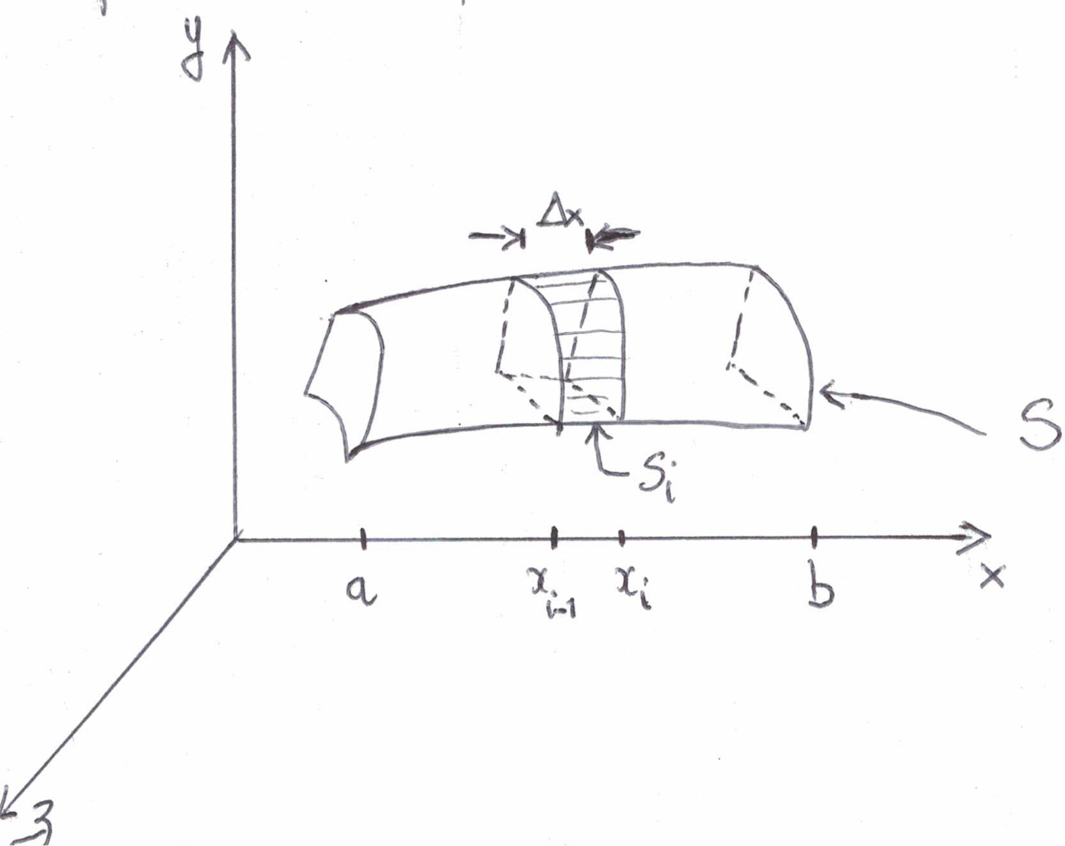
Les volumes

Considérons le solide de forme simple appelé cylindre (voir figure). Soit A l'aire de la base et h la hauteur



Volume $V = A.h$

Problème : Calculer le volume d'un solide S dans $\mathbb{R}^3$ compris entre les plans $x = a$ et $x = b$.



Solution

1°) On choisit des points $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ qui déterminent une partition de $[a,b]$ en n intervalles $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ..., $[x_{n-1},x_n]$ de même longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

2°) On note S_i la portion de S entre $x = x_{i-1}$ et $x = x_i$

$Vol(S_i) = A(x_i^*)\Delta x$ où x_i^* est n'importe quel point dans $[x_{i-1}, x_i]$ et $A(x_i)$ est l'aire de la section de S par le plan P_x perpendiculaire à $\vec{Ox}$ et passant par $(x_i,0,0)$.

3°) $$Vol(S) = \sum_{i=1}^{n} vol(S_i) \simeq \sum_{i=1} A(x_i^*)\Delta x$$

Pour $n \to \infty$ ~~alors~~ $\Delta x \longrightarrow 0$ et par suite

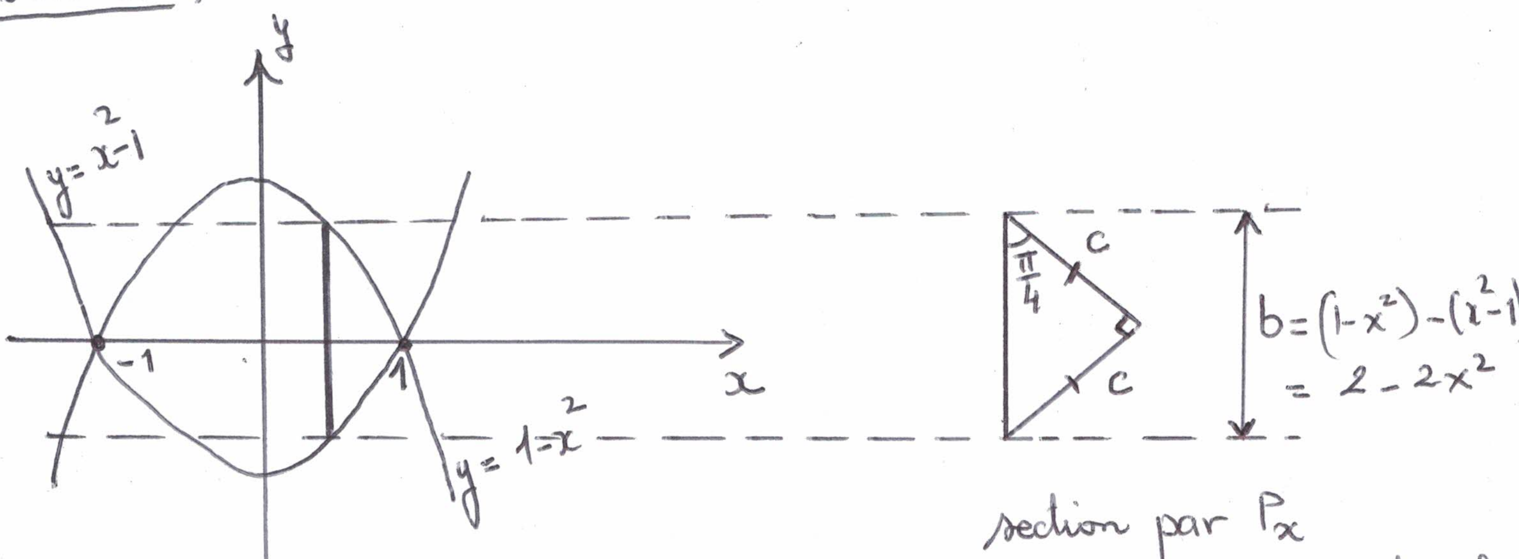
$$vol(S) = \int_a^b A(x)\,dx$$

Exemple 1

Calculer le volume du solide à fond plat dont la base dans le plan xy est la région bornée délimitée par $y = 1 - x^2$ et $y = x^2 - 1$ et dont les sections perpendi-

culaires à l'axe des x sont des triangles isocèles rectangles
avec l'hypothénuse dans le plan xy.

Solution :



section par P_x
= triangle isocèle rectangle
d'hypothénuse $b = 2 - 2x^2$

c = coté adjaçant à l'angle droit

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = (2-2x^2)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{2}\,\text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2}c \times c = \frac{1}{2}\left(\frac{2-2x^2}{\sqrt{2}}\right)^2$$

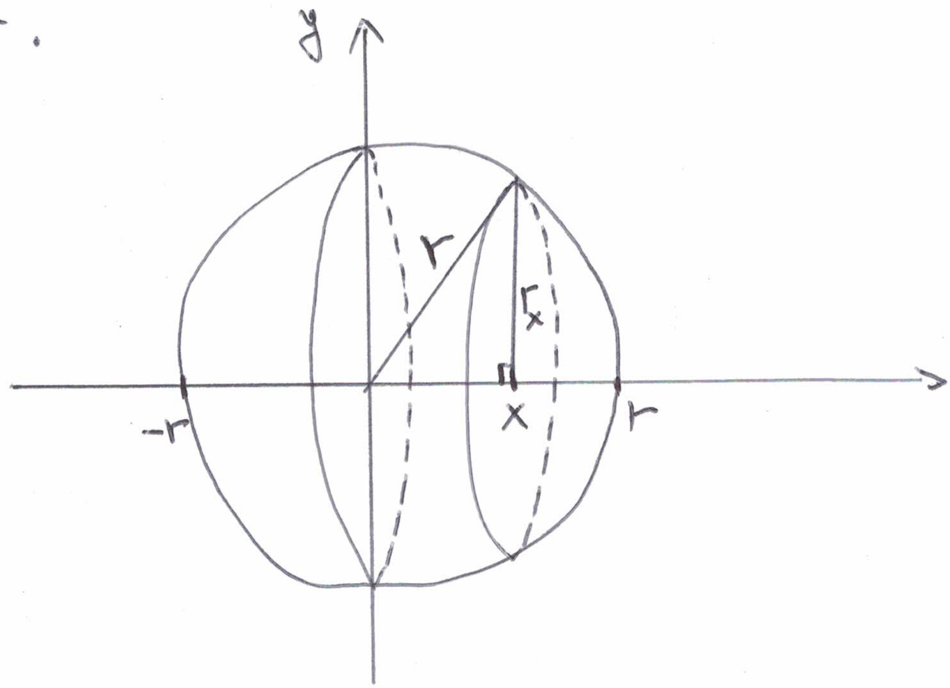
$$= \frac{1}{4}(2-2x^2) = 1 - 2x^2 + x^4$$

$$\text{Vol} = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \Big]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}$$

Exemple 3.

Calculer le volume de la sphère centrée au point $(0,0,0)$ et de rayon r.



$A(x) =$ aire de la section par P_x

$=$ aire d'un cercle de rayon $r_x = \sqrt{r^2 - x^2}$

$= \pi(r^2 - x^2)$

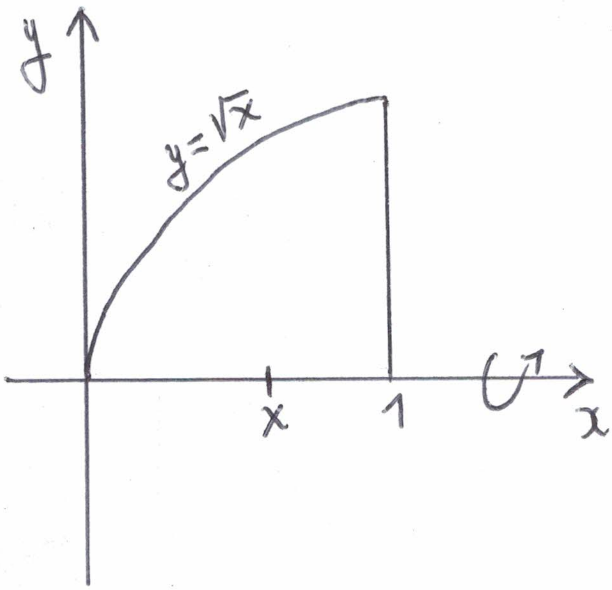
$$\Rightarrow \text{vol de la sphère} = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-r}^{r}$$

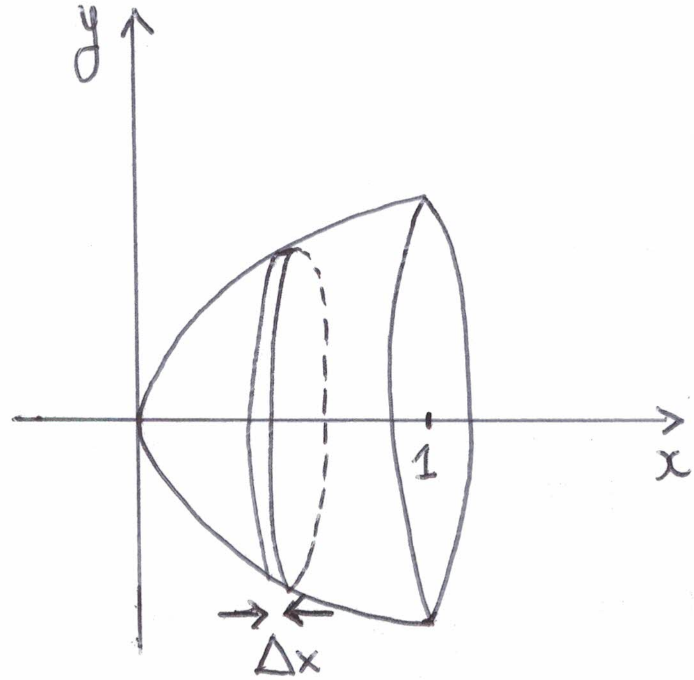
$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

Exemple 1

Calculez le volume du solide obtenu en faisant tourner autour de l'axe $\vec{Ox}$ la surface sous la courbe $y = \sqrt{x}$ pour x compris entre 0 et 1



⇒



→ Une section de ce solide au niveau x est un cercle de rayon $\sqrt{x}$

→ L'aire d'une telle section transversale est donnée par

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x.$$

→ Comme le solide est compris entre les plans $x = 0$ et $x = 1$ son volume vaut

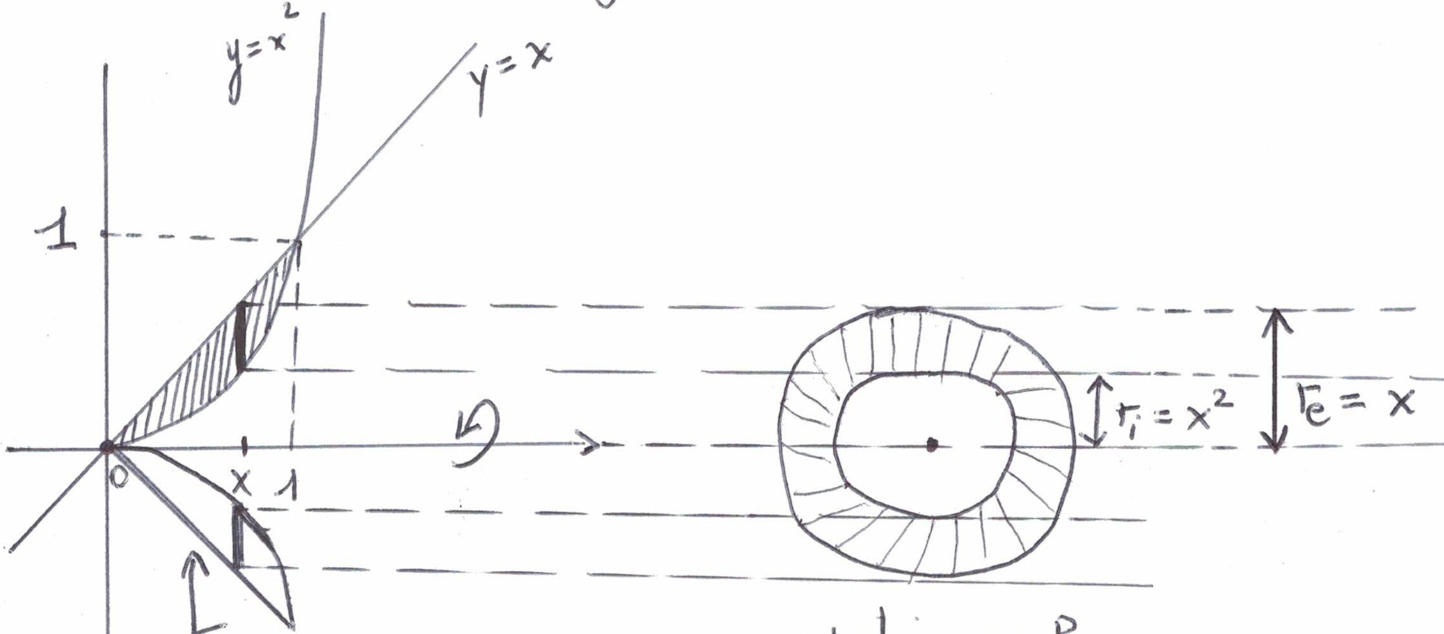
$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Solide de révolution

Exemple 2

Calculer le volume du solide de révolution obtenu par rotation autour de l'axe $\overrightarrow{Ox}$ de la région bornée R du plan délimitée par

$$y = x \text{ et } y = x^2.$$



coupe dans le plan xy

section par P_x
= anneau de rayon intérieur $r_i = x^2$ et de rayon extérieur $r_e = x$

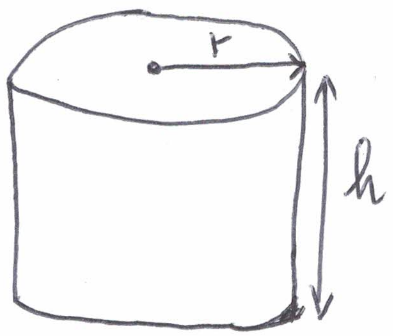
$$\begin{aligned} A(x) &= \text{aire d'un cercle de rayon } r_e - \text{aire d'un cercle de rayon } r_i \\ &= \pi r_e^2 - \pi r_i^2 \\ &= \pi x^2 - \pi (x^2)^2 \\ &= \pi (x^2 - x^4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{vol} = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi (x^2 - x^4)\,dx = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

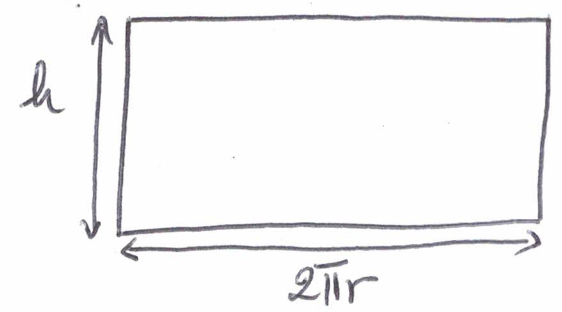
$$= \frac{2\pi}{15}$$

Décomposition en cylindre

La surface d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est S = circonférence $\times h = 2\pi r h$



cylindre

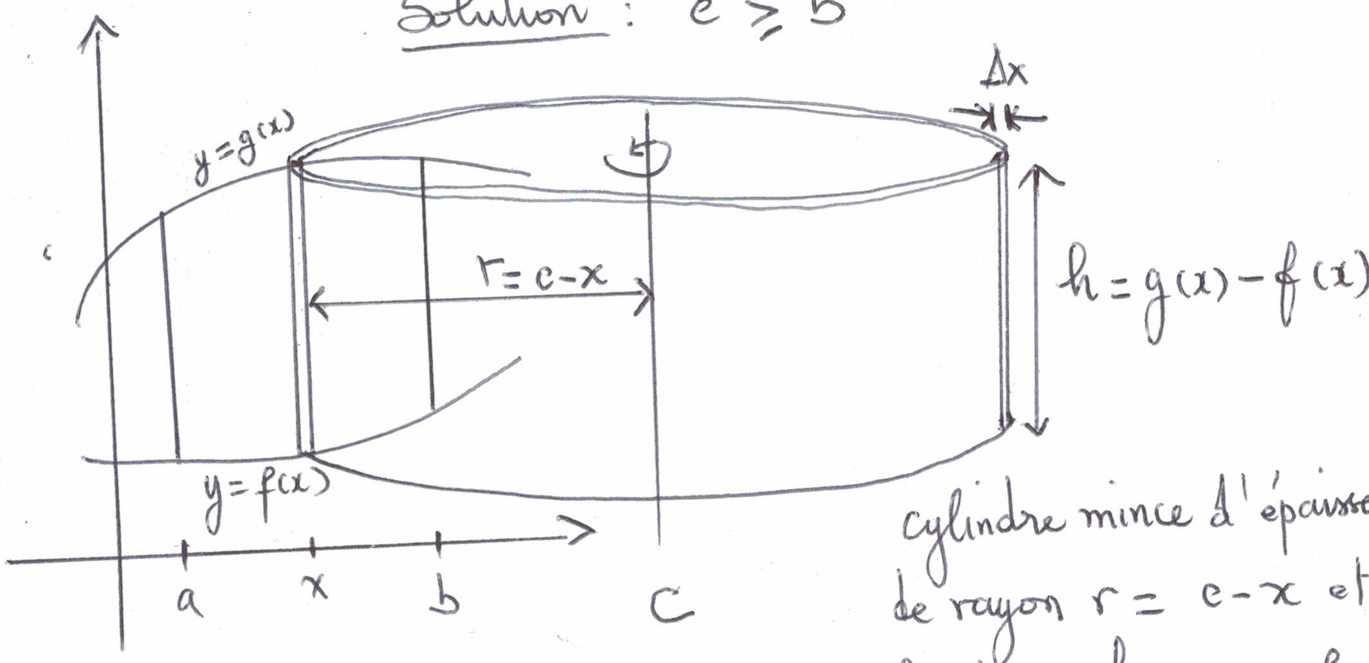


cylindre déroulé = rectangle

Problème

On cherche le volume du solide de révolution obtenu par rotation de la région $\mathcal{R}$: $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq y \leq g(x)$ autour de la droite $x = c$.

Solution : $c \geq b$



cylindre mince d'épaisseur Δx de rayon $r = c-x$ et de hauteur $h = g(x)-f(x)$.

Volume du cylindre $\simeq$ surface $\times$ epaisseur

$\simeq$ surface $\times$ Δx

$= 2\pi r h (\Delta x)$

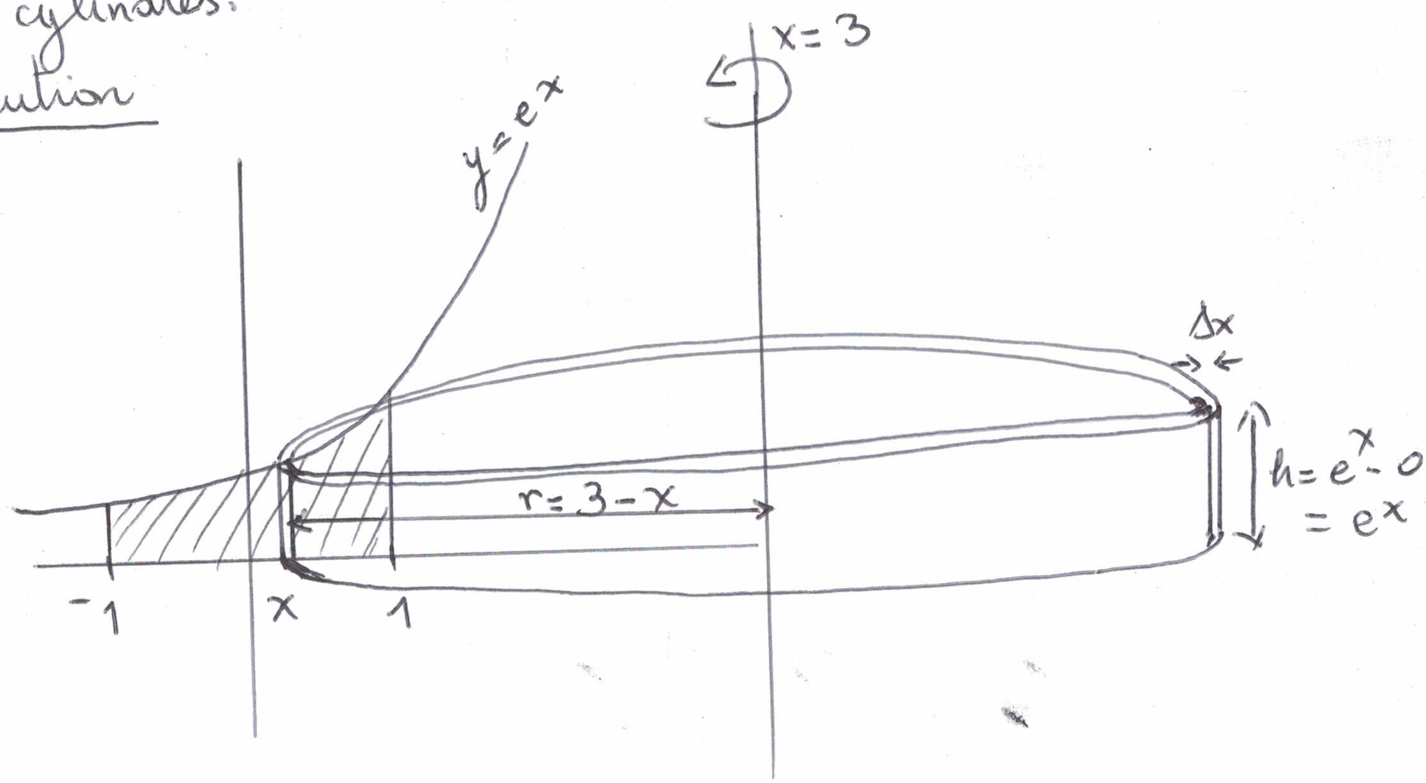
$= 2\pi (c-x)(g(x)-f(x))\Delta x$

Volume du solide $= \displaystyle\int_a^b 2\pi (c-x)(g(x)-f(x))\,dx$

Exemple

La région R est délimitée par $x=-1$, $x=1$, $y=0$ et $y=e^x$
L'axe de rotation est $x=3$
Déterminer le volume du solide de révolution par la méthode des cylindres.

Solution



$$Vol = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx \quad \text{où}$$

$A(x)$ = aire du cylindre de rayon $r = 3-x$ et de hauteur $h = e^x$

$$= 2\pi r h = 2\pi(3-x)e^x$$

$$Vol = \int_{-1}^{1} 2\pi(3-x)e^x\,dx = 2\pi\int_{-1}^{1}(3-x)e^x\,dx$$

Intégration par partie

$$\int (3-x)e^x\,dx$$

$u = 3-x \qquad v' = e^x$

$u' = -1 \qquad v = e^x$

$$\int (3-x)e^x\,dx = \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

$$= (3-x)e^x - \int(-1)e^x\,dx$$

$$= (3-x)e^x + e^x + c$$

$$Vol = 2\pi\int_{-1}^{1}(3-x)e^x\,dx = (3-x)e^x + e^x\Big]_{-1}^{1} = 2\pi(3e - 5e^{-1}) \simeq 39.68$$