P. 2.3 (Griffiths)

Trouvez le champ électrique à une distance z au-dessus d'un des bouts d'un fil droit de longueur L ayant une densité linéique de charge uniforme λ. Vérifiez que votre formule fonctionne dans le cas $z \gg L$.

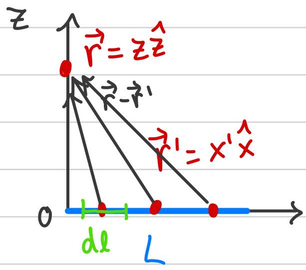
Solution

Pour une densité linéique, la loi de Coulomb s'écrit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{C} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \underbrace{dq'}_{\hookrightarrow\ \lambda\, dl'}$$

le long des charges

On met le fil sur l'axe des x :



l'indice ' indique les charges

$$\vec{E}(z\hat{z}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^L \frac{(z\hat{z} - x'\hat{x})}{(x'^2+z^2)^{3/2}} \lambda\, dx'$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{z^2+(-x')^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{z}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\hat{z}\, z\lambda \int_0^L \frac{1}{(x'^2+z^2)^{3/2}}\, dx' - \hat{x}\,\lambda \int_0^L \frac{x'}{(x'^2+z^2)^{3/2}}\, dx'\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z}{z^2}\cdot \frac{x'}{(x'^2+z^2)^{1/2}}\Bigg|_0^L \hat{z} - \frac{-1}{(x'^2+z^2)^{1/2}}\Bigg|_0^L \hat{x}\right]$$

Voir feuille d'intégrales résolues sur Brightspace (Section DGD)

$$\frac{1}{\sqrt{z^2}} = \frac{1}{|z|}$$

$$\vec{E}(z\hat{z}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{L}{z\sqrt{L^2+z^2}}\hat{z} + \left(\frac{1}{\sqrt{L^2+z^2}} - \frac{1}{|z|}\right)\hat{x}\right]$$

Pour $z \gg L$, $\sqrt{L^2+z^2} = |z|\sqrt{L^2/z^2+1} \simeq |z|$ car $\frac{L}{z} \simeq 0$

$$\Rightarrow \vec{E}(z \gg L) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{L}{z\cdot|z|}}_{\text{vers l'extérieur du fil}}\hat{z} + \underbrace{\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{|z|}\right)}_{0}\hat{x}\right]$$

$$= \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\hat{z}$$

Ce qui fait du sens : loin du fil, ce dernier est équivalent à une charge ponctuelle $q = \lambda L$.

Champ d'une charge ponctuelle (à l'origine) : $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Position où on mesure le champ électrique

DGD #2 - Solutions

PHY2723

18 janvier 2023

Ces problèmes sont tirés du livre *Electromagnetic Field Theory Fundementals* écrit par Bhag Singh Guru et Hüseyin R. Hiziroglu.

Problème 3.9

Solution :

On débute par écrire la définition générale du champ électrique au point $\vec{r}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\mathrm{d}\ell \tag{1}$$

Dans cette situation,

$$\begin{aligned} \lambda &= k\sin\phi \\ \mathrm{d}\ell &= b\mathrm{d}\phi \\ \vec{r}' &= b\cos\phi\hat{x} + b\sin\phi\hat{y} \\ \vec{r} &= h\hat{z} \text{ (au point P)} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= h\hat{z} - b\cos\phi\hat{x} - b\sin\phi\hat{y} \\ |\vec{r} - \vec{r}'|^3 &= \left(h^2 + b^2\right)^{3/2} \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression du champ électrique au point P est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\pi \frac{k\sin\phi(h\hat{z} - b\cos\phi\hat{x} - b\sin\phi\hat{y})}{\left(h^2 + b^2\right)^{3/2}}b\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{kb}{4\pi\epsilon_0\left(h^2 + b^2\right)^{3/2}}\left[\hat{z}\int_0^\pi h\sin\phi\mathrm{d}\phi - \hat{x}\int_0^\pi b\sin\phi\cos\phi\mathrm{d}\phi - \hat{y}\int_0^\pi b\sin^2\phi\mathrm{d}\phi\right] \end{aligned} \tag{2}$$

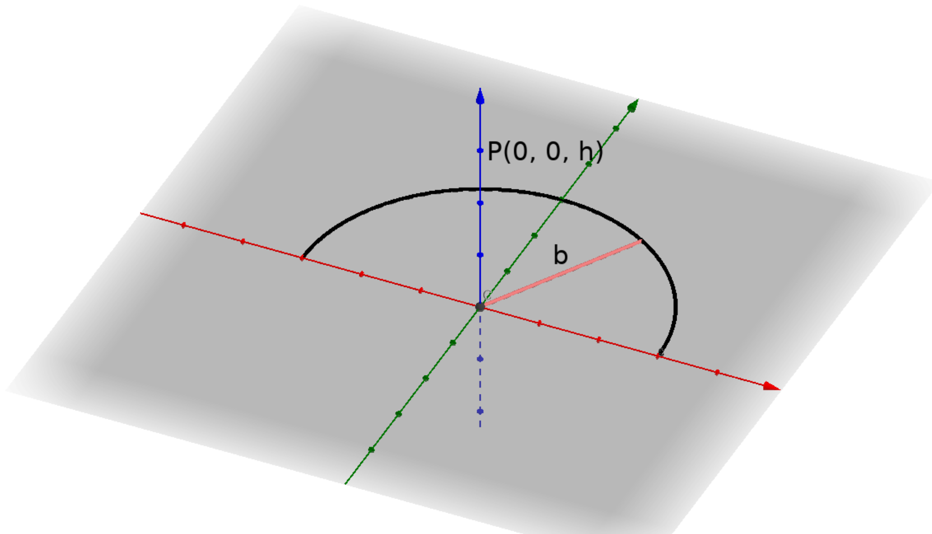


FIGURE 1 – Situation du problème 3.9

Ce qui donne donc trois intégrales à évaluer. Pour celle dans la direction $\hat{z}$, on a

$$\begin{aligned} h\int_0^{\pi} \sin\phi \mathrm{d}\phi &= -h\cos\phi|_0^{\pi} \\ &= -h(\cos\pi - \cos 0) \\ &= -h((-1)-1) \\ &= 2h \end{aligned} \tag{3}$$

Pour celle en $\hat{x}$:

$$\begin{aligned} b\int_0^{\pi} \sin\phi\cos\phi \mathrm{d}\phi &= b\int_0^{0} u\mathrm{d}u \qquad \text{où } u = \sin\phi \text{ donc } \mathrm{d}u = \cos\phi\mathrm{d}\phi \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Enfin, pour celle en $\hat{y}$:

$$\begin{aligned} b\int_0^{\pi} \sin^2\phi \mathrm{d}\phi &= b\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos(2\phi)}{2}\right)\mathrm{d}\phi \\ &= b\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2\phi)\mathrm{d}\phi\right) \\ &= \frac{b\pi}{2} - \left.\frac{\sin(2\phi)}{4}\right|_0^{\pi} \\ &= \frac{b\pi}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\int_0^a \int_0^{\pi/2} \underbrace{K\cos\phi}_{\lambda}\ \underbrace{\rho' d\phi' d\rho'}_{ds'} = K\left(\sin\phi\Big|_0^{\pi/2}\right) \frac{\rho'^2}{2}\Big|_0^a = \frac{Ka^2}{2}$$

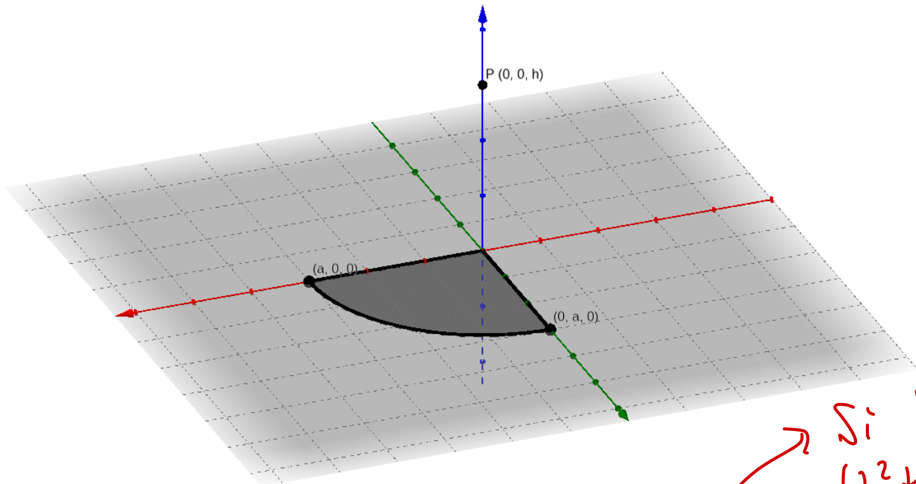


FIGURE 2 – Situation du problème 3.8

Finalement, si on met (3), (4) et (5) dans (2), on trouve

$$\vec{E}(P) = \frac{kb}{4\pi\epsilon_0 \left(h^2 + b^2\right)^{3/2}} \left[2h\hat{z} - \frac{\pi}{2} b\hat{y}\right]$$

Si $h \gg b$,

$(h^2+b^2)^{3/2} \approx h^3$

$2h\hat{z} - \frac{\pi}{2} b\hat{y} = h\left(2\hat{z} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{h}\hat{y}\right)$

$\approx 2h\hat{z}$

$\Rightarrow \vec{E} \approx \frac{2kb}{4\pi\varepsilon_0 h^2}\hat{z}$, $2kb = q$

$q = \int_0^{\pi} k\sin\phi\, \underbrace{b\,d\phi}_{dl} = -kb\cos\phi\Big|_0^{\pi}$

$= -kb\left((-1)-1\right) = 2kb$

Problème 3.8

Solution :

Pour cette situation, on a

$$\begin{aligned} \sigma &= K\cos\phi \text{ C/m}^2 \\ \mathrm{d}s &= \rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\rho \\ \vec{r}\,' &= \rho\cos\phi\hat{x} + \rho\sin\phi\hat{y} \\ \vec{r} &= h\hat{z} \qquad \text{(au point P)} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}\,' &= h\hat{z} - \rho\cos\phi\hat{x} - \rho\sin\phi\hat{y} \\ |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 &= \left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2} \end{aligned} \qquad (6)$$

Le champ électrique au point P est donc donné par l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint_S \frac{\sigma(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{K\cos\phi\,(h\hat{z}-\rho\cos\phi\hat{x}-\rho\sin\phi\hat{y})}{\left(\rho^2+h^2\right)^{3/2}}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{K}{4\pi\epsilon_0}\left[h\hat{z}\int_0^a\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{\cos\phi}{\left(\rho^2+h^2\right)^{3/2}}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho-\hat{x}\int_0^a\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{\rho^2\cos^2\phi}{\left(\rho^2+h^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\right. \\
&\qquad\left.-\hat{y}\int_0^a\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{\rho^2\sin\phi\cos\phi}{\left(\rho^2+h^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\right]
\end{aligned} \tag{7}$$

où $\phi_0 = 0$ et $\phi_1 = \pi/2$ dans cette situation. Cependant, on va faire le calcul pour des angles ϕ_0 et ϕ_1 arbitraires pour sauver du temps dans le problème 3.10.

On se trouve alors encore une fois avec trois intégrales à calculer. Pour l'intégrale en $\hat{z}$ on trouve

$$\begin{aligned}
h\int_0^a\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{\cos\phi\rho}{\left(\rho^2+h^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho &= h\int_{\phi_0}^{\phi_1}\cos\phi\mathrm{d}\phi\int_0^a\frac{\rho}{\left(\rho^2+h^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}\rho \\
&= h(\sin\phi_1-\sin\phi_0)\int_h^{\sqrt{a^2+h^2}}\frac{u}{\left(u^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}u \\
&= h(\sin\phi_1-\sin\phi_0)\left.\frac{u^{-1}}{(-1)}\right|_h^{\sqrt{a^2+h^2}} \\
&= h(\sin\phi_1-\sin\phi_0)\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \\
&= 1-\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} \qquad \text{en remplaçant } \phi_0 = 0 \text{ et } \phi_1 = \pi/2
\end{aligned} \tag{8}$$

où on a posé $u^2 = \rho^2 + h^2$, donc $2u\mathrm{d}u = 2\rho\mathrm{d}\rho$.

Pour ce qui est de l'intégrale en $\hat{x}$, on va la séparer en deux parties, soit une partie pour ρ et une pour ϕ. Je ne ferai pas la démarche pour la partie en ρ ici. Si vous voulez essayer, libre à vous de le faire, mais elle est plus difficile que les autres que l'on a faites auparavant (indice : il faut poser θ tel que $\rho = h\tan\theta$). Le résultat de cette intégrale est

Vous pouvez utiliser la liste d'intégrales résolues disponible sur Brightspace dans la section DGD

$$\int_0^a\frac{\rho^2}{\left(\rho^2+h^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}\rho = \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right)-\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \tag{9}$$

La partie en ϕ de l'intégrale en $\hat{x}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\int_{\phi_0}^{\phi_1} \cos^2\phi \mathrm{d}\phi &= \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left(\frac{1+\cos(2\phi)}{2}\right) \mathrm{d}\phi \\
&= \left.\frac{\phi + \frac{1}{2}\sin(2\phi)}{2}\right|_{\phi_0}^{\phi_1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\phi_1 - \phi_0 + \frac{1}{2}\sin(2\phi_1) - \frac{1}{2}\sin(2\phi_0)\right) \\
&= \frac{\pi}{4} \qquad \text{en remplaçant } \phi_0 = 0 \text{ et } \phi_1 = \pi/2
\end{aligned} \tag{10}$$

Enfin, pour la partie en $\hat{y}$ de l'expression (7), on la sépare elle aussi en deux parties, soit une pour ρ et une pour ϕ. On remarque alors que la partie en ρ est la même que pour l'intégrale en $\hat{x}$, il suffit alors d'utiliser le résultat donné en (9). Pour la partie en ϕ, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\phi_0}^{\phi_1} \cos\phi\sin\phi \mathrm{d}\phi &= \int_{\sin\phi_0}^{\sin\phi_1} u \mathrm{d}u \qquad \text{où on pose } u = \sin\phi \text{ donc } \mathrm{d}u = \cos\phi \mathrm{d}\phi \\
&= \left.\frac{1}{2}u^2\right|_{\sin\phi_0}^{\sin\phi_1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin^2\phi_1 - \sin^2\phi_0\right) \\
&= \frac{1}{2} \qquad \text{en remplaçant } \phi_0 = 0 \text{ et } \phi_1 = \pi/2
\end{aligned} \tag{11}$$

Finalement, en remplaçant (8), (9), (10) et (11) dans (7), on trouve le champ électrique $\vec{E}(P)$:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(P) = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \Bigg[& h\hat{z}(\sin\phi_1 - \sin\phi_0)\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) - \frac{1}{2}\hat{x}\left(\phi_1 - \phi_0 + \frac{1}{2}\sin(2\phi_1) - \frac{1}{2}\sin(2\phi_0)\right) \\
& -\frac{1}{2}\hat{y}\left(\sin^2\phi_1 - \sin^2\phi_0\right)\left(\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right) - \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\Bigg] \\
= \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \Bigg[& \hat{z}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right)\left(\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right) - \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{12}$$

où on a remplacé $\phi_0 = 0$ et $\phi_1 = \pi/2$ dans la dernière ligne.

Problème 3.10

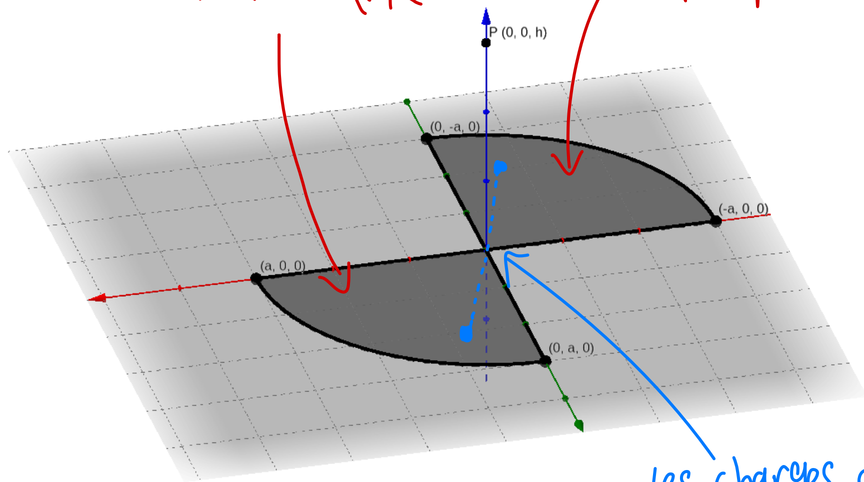
Argument de Symétrie

$\rho_s = A\cos\phi \geq 0$

>0 pour $0 \leq \phi \leq \pi$

$\rho_s = -A\cos\phi \geq 0$

<0 pour $\pi \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}$



$\rightarrow$ Seulement $2 \times E_z$ importe

les charges diamétralement opposées sont identiques et annulent les composantes x-y de $\vec{E}$

FIGURE 3 – Situation du problème 3.10

au long...

Solution :

Comme le champ électrique en un point est une quantité additive, nous pouvons utiliser le résultat obtenu dans le problème 3.8. En effet, le champ total au point P est donné par :

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P)$$

où $\vec{E}_1(P)$ est le champ causé par le quart de disque situé dans le premier quadrant ($\phi_0 = 0$ et $\phi_1 = \pi/2$) alors que $\vec{E}_2(P)$ est celui causé par le quart de disque dans le troisième quadrant ($\phi_0 = \pi$ et $\phi_1 = 3\pi/2$). De plus, la valeur de K dans le problème 3.8 devient $+A$ pour $\vec{E}_1(P)$ et $-A$ pour $\vec{E}_2(P)$ dans ce problème. On a donc

$$\vec{E}_1(P) = \frac{A}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\hat{z} - \left(\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right) - \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\left(\frac{\pi}{4}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right)\right]$$

et

$$\vec{E}_2(P) = \frac{-A}{4\pi\epsilon_0}\left[-\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\hat{z} - \left(\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right) - \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\left(\frac{\pi}{4}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right)\right]$$

Ce qui donne, en additionnant ces champs :

$$\vec{E}(P) = \frac{A}{2\pi\epsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\hat{z} \tag{13}$$

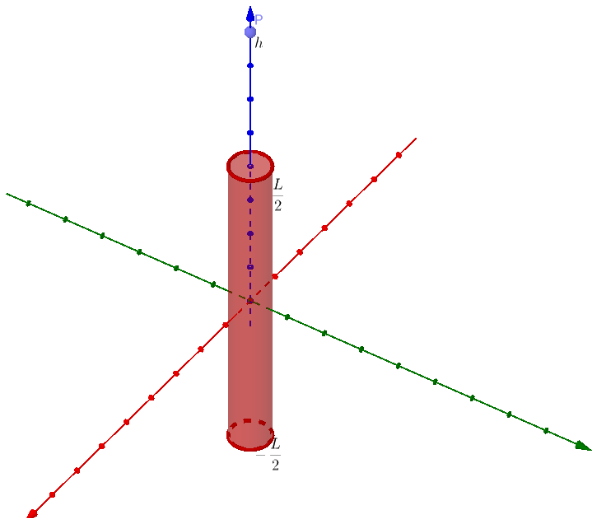


FIGURE 4 – Situation du problème 3.17

Problème 3.17

$q = \pi\sigma b^2 \ll 2\pi b\sigma L$

charge du côté

ces charges sont négligées

Solution :

Comme le cylindre est mince ($b \ll L$), on néglige la contribution de ses extrémités au champ électrique au point P. Le champ électrique est donné par

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{cylindre}} \frac{\sigma(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \mathrm{d}s$$

où $\mathrm{d}s = b\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$, $\vec{r}\,' = b\cos\phi\hat{x} + b\sin\phi\hat{y} + z\hat{z}$ et $\vec{r} = h\hat{z}$. Ainsi,

$= b\hat{\rho} + z\hat{z}$ ← $\hat{\rho}$ change avec ϕ' ⇒ on convertit en coordonnées cartésiennes pour faire l'intégrale!

$$\begin{aligned}
\vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma\,(h\hat{z} - b\cos\phi\hat{x} - b\sin\phi\hat{y} - z\hat{z})}{\left[(h-z)^2 + b^2\right]^{3/2}} b\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \\
&= \frac{b\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\hat{z} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{h-z}{\left[(h-z)^2+b^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi - \hat{x} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{b}{\left[(h-z)^2+b^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \cos\phi\mathrm{d}\phi \right. \\
&\qquad \left. - \hat{y} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{b}{\left[(h-z)^2+b^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \sin\phi\mathrm{d}\phi \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

Les intégrales en $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont nulles, car $\int_0^{2\pi} \sin\phi\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \cos\phi\mathrm{d}\phi = 0$. On peut aussi le voir par la symétrie de la

↳ On peut aussi utiliser un argument de symétrie. Tous les points diamétralement opposés sur le cylindre génèrent le même $|\vec{E}|$, mais dans une direction opposée dans le plan x-y.

situation (invariance sous rotation dans le plan xy). On a donc

avec les tables d'intégrales on doit remplacer x par h−z

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(P) &= \frac{2\pi b\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{h-z}{\left[(h-z)^2+b^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}z\hat{z} = -\frac{b\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{h+\frac{L}{2}}^{h-L/2}\frac{x}{(x^2+b^2)^{3/2}}dx \\
&= -\frac{b\sigma}{2\epsilon_0}\int_{\sqrt{(h+L/2)^2+b^2}}^{\sqrt{(h-L/2)^2+b^2}}\frac{u}{\left(u^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}u\hat{z} \\
&= -\frac{b\sigma}{2\epsilon_0}\int_{\sqrt{(h+L/2)^2+b^2}}^{\sqrt{(h-L/2)^2+b^2}}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u\hat{z}
\end{aligned} \tag{15}
$$

où on a posé $u^2 = (h-z)^2 + b^2$, donc $2u\mathrm{d}u = -2(h-z)\mathrm{d}z$. Enfin, on trouve

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(P) &= -\frac{b\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\left(\frac{-1}{u}\right)\Bigg|_{\sqrt{(h+L/2)^2+b^2}}^{\sqrt{(h-L/2)^2+b^2}} \\
&= \frac{b\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\left(\frac{1}{\sqrt{(h-L/2)^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h+L/2)^2+b^2}}\right)
\end{aligned} \tag{16}
$$

Ainsi, pour $h = 0$, on remarque que $\vec{E}(P) = \vec{0}$. Pour $h = \pm L/2$, on trouve

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(P) &= \frac{b\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\left(\frac{1}{\sqrt{(\pm L/2 - L/2)^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\pm L/2 + L/2)^2+b^2}}\right) \\
&= \pm\frac{b\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{L^2+b^2}}\right) \\
&= \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\left(1 - \frac{b}{L\sqrt{1+\frac{b^2}{L^2}}}\right) \\
&\approx \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} \qquad \text{lorsqu'on fait l'approximation } b \ll L
\end{aligned}
$$

Problème 3.15

Solution :

On commence par résoudre le problème de façon générale, c'est-à-dire qu'on va poser $a = 0.2$ m, h tel que $P(0,0,h)$ et $K = 600$ nC/m tel que $\lambda = K\sin 2\phi$. On écrit l'expression du champ électrique généré par un fil :

$$
\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{fil}}\frac{\lambda(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\mathrm{d}\ell
$$

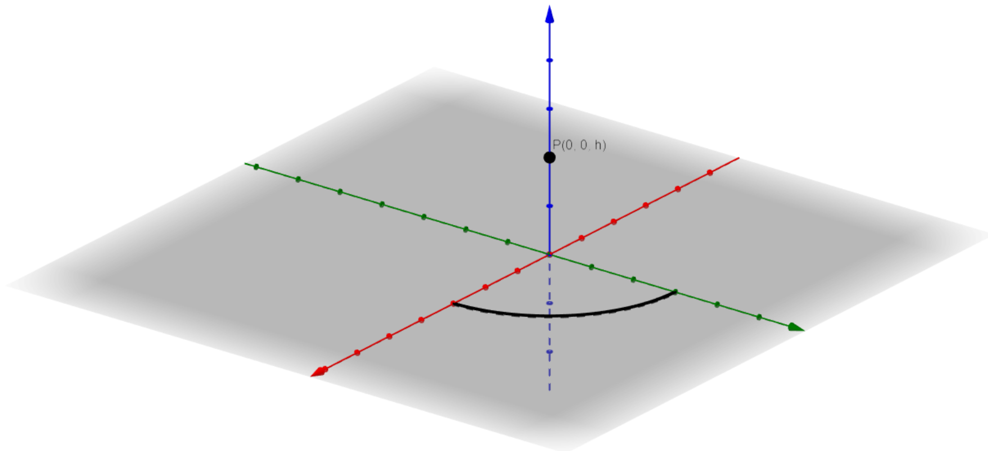


Figure 5 – Situation du problème 3.15

L'élément de longueur infinitésimal est donné par $d\ell = a d\phi$. On trouve donc

$$\begin{aligned}
\vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{K\sin(2\phi)(h\hat{z} - a\cos\phi\hat{x} - a\sin\phi\hat{y})}{\left(h^2+a^2\right)^{3/2}} a d\phi \\
&= \frac{Ka}{4\pi\epsilon_0\left(h^2+a^2\right)^{3/2}}\left[h\hat{z}\int_0^{\pi/2}\sin(2\phi)d\phi - a\hat{x}\int_0^{\pi/2}\sin(2\phi)\cos\phi d\phi - a\hat{y}\int_0^{\pi/2}\sin(2\phi)\sin\phi d\phi\right] \\
&= \frac{Ka}{4\pi\epsilon_0\left(h^2+a^2\right)^{3/2}}\left[h\hat{z}\left.\frac{\cos(2\phi)}{(-2)}\right|_0^{\pi/2} - 2a\hat{x}\int_0^{\pi/2}\sin\phi\cos^2\phi d\phi - 2a\hat{y}\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\cos\phi d\phi\right] \\
&= \frac{Ka}{4\pi\epsilon_0\left(h^2+a^2\right)^{3/2}}\left[h\hat{z} + 2a\hat{x}\int_1^0 u^2 du - 2a\hat{y}\int_0^1 v^2 dv\right] \\
&= \frac{Ka}{4\pi\epsilon_0\left(h^2+a^2\right)^{3/2}}\left[h\hat{z} - 2a(\hat{x}+\hat{y})\left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1\right] \\
&= \frac{Ka}{4\pi\epsilon_0\left(h^2+a^2\right)^{3/2}}\left[h\hat{z} - \frac{2a}{3}(\hat{x}+\hat{y})\right]
\end{aligned} \tag{17}$$

où on a posé $u = \cos\phi$ et $v = \sin\phi$ et où on a utilisé l'identité trigonométrique $\sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$. Il suffit maintenant d'insérer les valeurs de a, h et K dans cette expression pour évaluer le champ électrique à $h = 1$ m et $h = 0$ m.

a)

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(0,0,1) &= \frac{(600\ \text{nC/m})\,(0.2\ \text{m})}{4\pi\epsilon_0\left((1\ \text{m})^2+(0.2\ \text{m})^2\right)^{3/2}}\left[(1\ \text{m})\hat{z}-\frac{2}{3}(0.2\ \text{m})(\hat{x}+\hat{y})\right]\\
&= \frac{\left(30\times 10^{-9}\ \text{C}\right)}{\pi(8.854\times 10^{-12}\ \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2})(1.04\ \text{m})^3}\left[(1\ \text{m})\hat{z}-\left(\frac{2}{15}\ \text{m}\right)(\hat{x}+\hat{y})\right]\\
&= 1016.9\ \text{N/C}\hat{z}-135.6\ \text{N/C}(\hat{x}+\hat{y})
\end{aligned}
$$

b) Similairement, on trouve

$$\vec{E}(0,0,0)\approx -18000\ \text{N/C}(\hat{x}+\hat{y})$$