Exercices 9.1

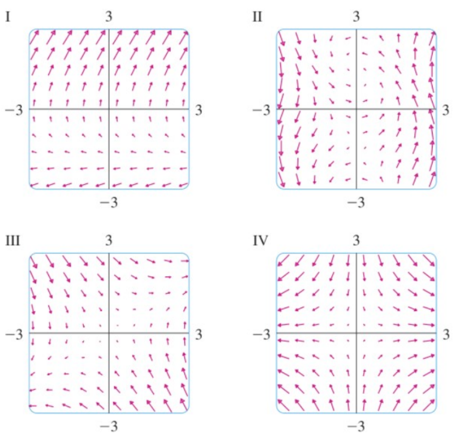
1-10 Représentez le champ vectoriel $\vec F$ en vous inspirant de la figure 5 (p. 391) ou de la figure 9 (p. 392).

1. $\vec F(x,y)=0{,}3\vec i-0{,}4\vec j$
2. $\vec F(x,y)=\frac{1}{2}x\,\vec i+y\,\vec j$
3. $\vec F(x,y)=-\frac{1}{2}\vec i+(y-x)\vec j$
4. $\vec F(x,y)=y\,\vec i+(x+y)\vec j$
5. $\vec F(x,y)=\dfrac{y\vec i+x\vec j}{\sqrt{x^2+y^2}}$
6. $\vec F(x,y)=\dfrac{y\,\vec i-x\,\vec j}{\sqrt{x^2+y^2}}$
7. $\vec F(x,y,z)=\vec i$
8. $\vec F(x,y,z)=z\,\vec i$
9. $\vec F(x,y,z)=-y\,\vec i$
10. $\vec F(x,y,z)=\vec i+\vec k$

11-14 Associez les champs vectoriels $\vec F$ aux représentations I à IV. Justifiez vos associations.

11. $\vec F(x,y)=x\vec i-y\vec j$ **12.** $\vec F(x,y)=y\vec i+(x-y)\vec j$

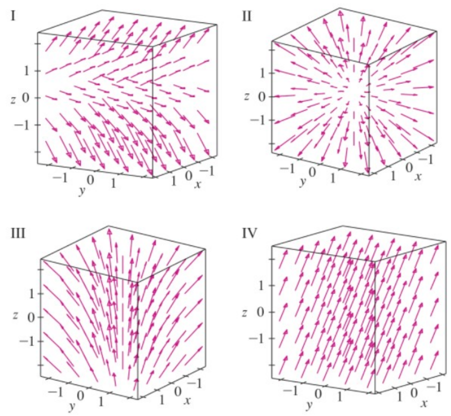
13. $\vec F(x,y)=y\vec i+(y+2)\vec j$ **14.** $\vec F(x,y)=\cos(x+y)\vec i+x\vec j$



15-18 Associez les champs vectoriels $\vec F$ sur $\mathbb{R}^3$ aux représentations I à IV. Justifiez vos associations.

15. $\vec F(x,y,z)=\vec i+2\vec j+3\vec k$ **16.** $\vec F(x,y,z)=\vec i+2\vec j+z\vec k$

17. $\vec F(x,y,z)=x\vec i+y\vec j+3\vec k$ **18.** $\vec F(x,y,z)=x\vec i+y\vec j+z\vec k$



LCS **19.** Si vous disposez d'un logiciel de calcul symbolique qui est capable de représenter les champs vectoriels (dans Maple, la commande est `fieldplot` ; dans Mathematica, `PlotVectorField`), utilisez-le pour représenter

$$\vec F(x,y)=(y^2-2xy)\vec i+(3xy-6x^2)\vec j.$$

Expliquez l'aspect du champ vectoriel en trouvant l'ensemble des points (x, y) tels que $\vec F(x,y)=\vec 0$.

LCS **20.** Soit $\vec F(\vec x)=(r^2-2r)\vec x$, où $\vec x=x\vec i+y\vec j$ et $r=\|\vec x\|$. Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour représenter ce champ vectoriel sur divers domaines jusqu'à ce que vous voyiez clairement ce qui se produit. Décrivez l'aspect du champ vectoriel et expliquez-le en trouvant les points où $\vec F(\vec x)=\vec 0$.

21-24 Trouvez le champ de gradients de f.

21. $f(x,y)=y\sin(xy)$ **22.** $f(x,y)=\sqrt{2x+3y}$

23. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **24.** $f(x,y,z)=x^2ye^{y/z}$

25-26 Trouvez le champ de gradients ∇f de f et représentez-le.

25. $f(x,y)=\frac{1}{2}(x-y)^2$ **26.** $f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$

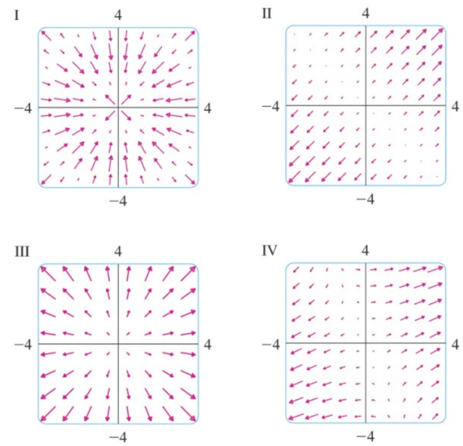
LCS **27-28** Représentez le champ de gradients de f et un diagramme de courbes de niveau de cette fonction. Expliquez la relation entre le champ vectoriel et les courbes de niveau.

27. $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+2y^2\right)$ **28.** $f(x,y)=\cos x-2\sin y$

29-32 Associez les fonctions f aux représentations de leurs champs de gradients I à IV. Justifiez vos associations.

29. $f(x,y)=x^2+y^2$ **30.** $f(x,y)=x(x+y)$

31. $f(x,y)=(x+y)^2$ **32.** $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$



33. Une particule se déplace dans un champ de vitesses $\vec V(x,y)=x^2\vec i+(x+y^2)\vec j$. À l'instant $t=3$, elle est à la position (2, 1). Estimez sa position à l'instant $t=3{,}01$.

34. À l'instant $t=1$, une particule est à la position (1, 3). Elle se déplace dans le champ de vitesses

$$\vec F(x,y)=(xy-2)\vec i+(y^2-10)\vec j.$$

Trouvez sa position approximative à l'instant $t=1{,}05$.

35. Soit le champ vectoriel $\vec F(x,y)=x\vec i+y\vec j$.

a) Utilisez une représentation du champ vectoriel $\vec F$ pour tracer quelques lignes de courant. À partir de vos représentations, pouvez-vous déduire les équations paramétriques des lignes de courant ?

b) Trouvez les équations paramétriques des lignes de courant en utilisant la méthode de l'exemple 7.

c) Trouvez l'équation de la ligne de courant qui passe par le point (2, −1).

36. Trouvez les équations paramétriques des lignes de courant du champ vectoriel $\vec F(x,y)=x\vec i-\vec j$.

37. Soit le champ vectoriel $\vec F(x,y)=-x^2\vec i+y^3\vec j$. Trouvez les équations paramétriques de la ligne de courant de $\vec F$ passant par le point (1, 2).

38. En généralisant la méthode de l'exemple 7, trouvez les équations paramétriques des lignes de courant du champ vectoriel en trois dimensions $\vec F(x,y,z)=\sin(x)\vec i+\sin(y)\vec j+z^2\vec k$.

39. a) Représentez le champ vectoriel $\vec F(x,y)=\vec i+x\,\vec j$ et quelques lignes de courant. Quelle forme semblent avoir ces lignes de courant ?

b) Si les équations paramétriques des lignes de courant sont $x=x(t)$, $y=y(t)$, quelles équations différentielles ces fonctions vérifient-elles ? Déduisez que $dy/dx=x$.

c) Une particule part de l'origine et se déplace dans un champ de vitesses donné par $\vec F$. Trouvez l'équation de sa trajectoire.

40. Soit le champ vectoriel $\vec F(x,y)=y^2\vec i+x^2\vec j$.

a) Si les équations paramétriques des lignes de courant sont $x=x(t)$ et $y=y(t)$, montrez que x et y satisfont à l'équation à variables séparables

$$y^2\frac{dy}{dx}=x^2.$$

b) Trouvez les équations paramétriques de la ligne de courant passant par (0, 1).

9.2 LES INTÉGRALES CURVILIGNES

Dans cette section, nous définissons une intégrale semblable à l'intégrale simple ordinaire, à la différence près que le domaine d'intégration est une courbe C plutôt qu'un intervalle $[a, b]$. Ces intégrales, appelées « intégrales curvilignes », ont été créées au début du XIX^e siècle pour résoudre des problèmes impliquant l'écoulement des fluides, les champs de forces, l'électricité et le magnétisme.

Considérons d'abord une courbe plane C définie par les équations paramétriques

1 $$x=x(t) \qquad y=y(t) \qquad a\le t\le b$$

ou, de façon équivalente, par la fonction vectorielle $\vec r(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j$. On suppose que C est une courbe lisse, ce qui signifie que la dérivée $\vec r\,'$ est continue et que $\vec r\,'(t)\neq\vec 0$ (voir la section 8.3). Si on subdivise l'intervalle du paramètre $[a, b]$ en n sous-intervalles $[t_{i-1}, t_i]$ d'égale longueur, et si on pose $x_i=x(t_i)$ et $y_i=y(t_i)$, alors les points correspondants $P_i(x_i, y_i)$ subdivisent C en n sous-arcs de longueurs $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ (voir la figure 1). On choisit un point quelconque $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ sur le i-ième sous-arc. (Cela correspond à un point t_i^* dans $[t_{i-1}, t_i]$.) Si f est une fonction quelconque de deux

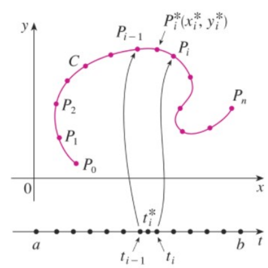


FIGURE 1