On peut vérifier que $\operatorname{div}\vec{E}=0$ (voir l'exercice 31). Selon l'équation 7, on a donc

$$\iint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\iiint_{E}\operatorname{div}\vec{E}\,dV=\iint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{E}\cdot\vec{n}\,dS.$$

Le point important de ce raisonnement est qu'on peut calculer facilement l'intégrale de surface sur S_1 parce que S_1 est une sphère. Le vecteur normal en $\vec{x}$ est $\vec{x}/\|\vec{x}\|$ et donc

$$\vec{E}\cdot\vec{n}=\frac{\varepsilon Q}{\|\vec{x}\|^3}\vec{x}\cdot\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)=\frac{\varepsilon Q}{\|\vec{x}\|^4}\vec{x}\cdot\vec{x}=\frac{\varepsilon Q}{\|\vec{x}\|^2}=\frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

puisque l'équation de S_1 est $\|\vec{x}\|=a$. Par conséquent,

$$\iint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{E}\cdot\vec{n}\,dS=\frac{\varepsilon Q}{a^2}\iint_{S_1}dS$$
$$=\frac{\varepsilon Q}{a^2}A(S_1)=\frac{\varepsilon Q}{a^2}4\pi a^2=4\pi\varepsilon Q.$$

On a donc montré que le flux électrique de $\vec{E}$ à travers toute surface fermée S_2 qui contient l'origine est égal à $4\pi\varepsilon Q$. C'est un cas particulier de la loi de Gauss (voir l'équation 11 de la section 10.2) pour une seule charge. La relation entre ε et ε_0 est $\varepsilon=1/(4\pi\varepsilon_0)$.

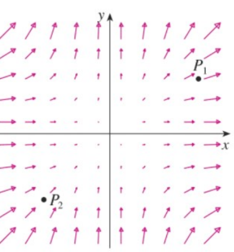
UNE INTERPRÉTATION DE LA DIVERGENCE

On trouve une autre application du théorème de flux-divergence en mécanique des fluides. Soit le champ de vitesses $\vec{v}(x,y,z)$ d'un fluide de densité constante ρ. Alors $\vec{F}=\rho\vec{v}$ est le flux par unité d'aire. Pour un point $P_0(x_0,y_0,z_0)$ du fluide et pour une boule B_a de centre P_0 et de très petit rayon a, $\operatorname{div}\vec{F}(P)\approx\operatorname{div}\vec{F}(P_0)$ pour tout point de B_a puisque $\operatorname{div}\vec{F}$ est continue. On approxime le flux sur la sphère frontière S_a par

$$\iint_{S_a}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint_{B_a}\operatorname{div}\vec{F}\,dV\approx\iiint_{B_a}\operatorname{div}\vec{F}(P_0)\,dV=\operatorname{div}\vec{F}(P_0)V(B_a).$$

Cette approximation s'améliore lorsque $a\to 0$ et suggère que

8 $$\operatorname{div}\vec{F}(P_0)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{V(B_a)}\iint_{S_a}\vec{F}\cdot d\vec{S}.$$



IGURE 5
Le champ vectoriel $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}$.

Selon l'équation 8, $\operatorname{div}\vec{F}(P_0)$ est le flux sortant net par unité de volume en P_0 (d'où le nom «divergence»). Si $\operatorname{div}\vec{F}(P)>0$, le flux net est «sortant» près de P, et ce point est appelé **source**. Si $\operatorname{div}\vec{F}(P)<0$, le flux net est «entrant» près de P, et ce point est appelé **puits**.

Dans le cas du champ vectoriel illustré à la figure 5, les flèches représentant les vecteurs dont l'extrémité est proche de P_1 sont plus courtes que celles dont l'origine est proche de P_1. Le flux net est sortant près de P_1, $\operatorname{div}\vec{F}(P_1)>0$, et P_1 est une source. Proche de P_2, les flèches entrantes sont plus longues que les flèches sortantes. Ici, le flux net est entrant, $\operatorname{div}\vec{F}(P_2)<0$, et P_2 est un puits. L'examen de la formule définissant $\vec{F}$ confirme cette impression. Comme $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}$, on a $\operatorname{div}\vec{F}=2x+2y$, qui est positive lorsque $y>-x$. Les points au-dessus de la droite $y=-x$ sont donc des sources, et les points au-dessous sont des puits.

Exercices 10.5

1-4 Vérifiez que le théorème de flux-divergence est vrai pour le champ vectoriel $\vec{F}$ sur la région E.

1. $\vec{F}(x,y,z)=3x\vec{i}+xy\vec{j}+2xz\vec{k}$, E est le cube borné par les plans $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ et $z=1$.

2. $\vec{F}(x,y,z)=y^2z^3\vec{i}+2yz\vec{j}+4z^2\vec{k}$, E est le solide borné par le paraboloïde $z=x^2+y^2$ et le plan $z=9$.

3. $\vec{F}(x,y,z)=z\vec{i}+y\vec{j}+x\vec{k}$, E est la boule $x^2+y^2+z^2\le 16$.

4. $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}$, E est le cylindre solide $y^2+z^2\le 9$, $0\le x\le 2$.

5-15 Utilisez le théorème de flux-divergence pour calculer l'intégrale de surface $\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}$, c'est-à-dire pour calculer le flux de $\vec{F}$ à travers S.

5. $\vec{F}(x,y,z)=xye^z\vec{i}+xy^2z^3\vec{j}-ye^z\vec{k}$, S est la surface de la boîte formée par les plans de coordonnées et les plans $x=3$, $y=2$ et $z=1$.

6. $\vec{F}(x,y,z)=x^2yz\vec{i}+xy^2z\vec{j}+xyz^2\vec{k}$, S est la surface de la boîte bornée par les plans $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$, où a, b et c sont des nombres positifs.

7. $\vec{F}(x,y,z)=3xy^2\vec{i}+xe^z\vec{j}+z^3\vec{k}$, S est la surface du solide borné par le cylindre $y^2+z^2=1$ et les plans $x=-1$ et $x=2$.

8. $\vec{F}(x,y,z)=(x^3+y^3)\vec{i}+(y^3+z^3)\vec{j}+(z^3+x^3)\vec{k}$, S est la sphère centrée à l'origine, de rayon 2.

9. $\vec{F}(x,y,z)=xe^y\vec{i}+(z-e^y)\vec{j}-xy\vec{k}$, S est l'ellipsoïde $x^2+2y^2+3z^2=4$.

10. $\vec{F}(x,y,z)=z\vec{i}+y\vec{j}+zx\vec{k}$, S est la surface du tétraèdre borné par les plans de coordonnées et le plan

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

où a, b et c sont des nombres positifs.

11. $\vec{F}(x,y,z)=(2x^3+y^3)\vec{i}+(y^3+z^3)\vec{j}+3y^2z\vec{k}$, S est la surface du solide borné par le paraboloïde $z=1-x^2-y^2$ et le plan xy.

12. $\vec{F}(x,y,z)=(xy+2xz)\vec{i}+(x^2+y^2)\vec{j}+(xy-z^2)\vec{k}$, S est la surface du solide borné par le cylindre $x^2+y^2=4$ et les plans $z=y-2$ et $z=0$.

13. $\vec{F}=\vec{r}/\|\vec{r}\|$, où $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, S est constituée de l'hémisphère $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ et du disque $x^2+y^2\le 1$ dans le plan xy.

14. $\vec{F}=|\vec{r}|^2\vec{r}$ où $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, S est la sphère de rayon R centrée à l'origine.

15. $\vec{F}(x,y,z)=(x+\sin(z))\vec{i}+(2y+e^{x^2-z^2})\vec{j}+(1+4z)\vec{k}$, S est une surface délimitant un solide E dont le volume est égal à 27.

LCS **16.** À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, représentez le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z)=\sin x\cos^2 y\,\vec{i}+\sin^3 y\cos^4 z\,\vec{j}+\sin^5 z\cos^6 x\,\vec{k}$$

dans le cube découpé dans le premier octant par les plan $x=\pi/2$, $y=\pi/2$ et $z=\pi/2$. Calculez ensuite le flux de $\vec{F}$ à travers la surface du cube.

17. Servez-vous du théorème de flux-divergence pour calcule $\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}$, où

$$\vec{F}(x,y,z)=z^2x\vec{i}+\left(\tfrac{1}{3}y^3+\tan z\right)\vec{j}+(x^2z+y^2)\vec{k}$$

et où S est l'hémisphère supérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=$ orienté vers le haut. (*Suggestion :* Remarquez que S n'es pas une surface fermée. Calculez d'abord les intégrales su S_1 et S_2, où S_1 est le disque $x^2+y^2\le 1$, orienté vers le bas et $S_2=S\cup S_1$.)

18. Soit S la boîte ouverte (sans fond ni couvercle) dont les côté sont définis par $x=0$, $y=0$, $x=3$ et $y=3$, $0\le z\le 4$. Les côté sont orientés par les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $-\vec{i}$, $-\vec{j}$, respectivement Utilisez le théorème de flux-divergence pour évalue l'intégrale $\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}$, où

$$\vec{F}(x,y,z)=\left[x^2+\arctan\left(z(4-z)\right)\right]\vec{i}+x(3-x)z^3\vec{j}+z(z-4)\vec{k}$$

(*Suggestion :* Fermez d'abord la surface.)

19. Soit $\vec{F}(x,y,z)=z\arctan(y^2)\vec{i}+z^3\ln(x^2+1)\vec{j}+z\vec{k}$. Trouve le flux de $\vec{F}$ à travers la partie du paraboloïde $x^2+y^2+z=$ située au-dessus du plan $z=1$ et orientée vers le haut.

20. Soit S la partie du cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$ située sous le plan $z=$ orientée vers l'intérieur. Calculez le flux du champ vectorie

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(2x+\cos(\pi z)\right)\vec{i}+\left(3y-2z\sin(\pi x)\right)\vec{j}+\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)\vec{k}$$

à travers S.

21. Calculez le flux du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z)=\sin(\pi y)\vec{i}-x^2\vec{j}+\cos(\pi y)\vec{k}$$

à travers la partie du cylindre $x^2+z^2=4$ située entre le plans $y=0$ et $y=2$, orientée vers l'extérieur.

22. Soit $S=S_1\cup S_2\cup S_3$ la surface constituée des trois partie suivantes : S_1 est la partie du cylindre parabolique $z=4-y$ située au-dessus du plan $z=0$, S_2 est la partie du pla $x=2$ au-dessus du plan $z=0$ et au-dessous du cylindr S_1, et S_3 est la partie du plan $x=-1$ au-dessus du pla $z=0$ et au-dessous du cylindre S_1. La surface S est orienté aux points $(0,0,4)$, $(2,0,0)$ et $(-1,0,0)$ par les vecteur $\vec{k}$, $\vec{i}$ et $-\vec{i}$, respectivement.

a) Esquissez la surface S en indiquant son orientation.

b) Calculez le flux du champ

$$\vec{F}(x,y,z)=(x^2+ze^{yz})\vec{i}+(xy+3ze^{xz})\vec{j}-x\vec{k}$$

à travers S.

23. Soit S le cylindre $x^2+y^2=h^2$ fermé à ses extrémités par le plans $z=-h$ et $z=2h$ et soit le champ vectoriel

$$\vec{F}=(x^3-y^2)\vec{i}+(y^3-z^2)\vec{j}+\frac{1}{h^2}(x^2-z^4)\vec{k}.$$

Pour quelle valeur de h le flux de $\vec{F}$ à travers S est-i minimal ?