19. $\vec{F}(x, y) = xy^2\vec{i} - x^2\vec{j}$, $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t^2\vec{j}$, $0 \le t \le 1$

20. $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2)\vec{i} + xz\vec{j} + (y + z)\vec{k}$, $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} - 2t\vec{k}$, $0 \le t \le 2$

21. $\vec{F}(x, y, z) = \sin x\vec{i} + \cos y\vec{j} + xz\vec{k}$, $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} - t^2\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \le t \le 1$

22. $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k}$, $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$, $0 \le t \le \pi$

23-26 À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul symbolique, calculez l'intégrale curviligne avec quatre décimales exactes.

23. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où $\vec{F}(x, y) = \sqrt{x + y}\,\vec{i} + (y/x)\vec{j}$ et $\vec{r}(t) = \sin^2 t\,\vec{i} + \sin t \cos t\,\vec{j}$, $\pi/6 \le t \le \pi/3$

24. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où $\vec{F}(x, y, z) = yze^x\,\vec{i} + zxe^y\,\vec{j} + xye^x\,\vec{k}$ et $\vec{r}(t) = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \tan t\,\vec{k}$, $0 \le t \le \pi/4$

25. $\int_C xy \arctan z\, ds$, où C a pour équations paramétriques $x = t^2$, $y = t^3$, $z = \sqrt{t}$, $1 \le t \le 2$

26. $\int_C z \ln(x + y)\, ds$, où C a pour équations paramétriques $x = 1 + 3t$, $y = 2 + t^2$, $z = t^4$, $-1 \le t \le 1$

LCS **27-28** Utilisez un graphique du champ vectoriel $\vec{F}$ et de la courbe C pour déterminer si l'intégrale curviligne de $\vec{F}$ sur C est positive, négative ou nulle. Calculez ensuite l'intégrale curviligne.

27. $\vec{F}(x, y) = (x - y)\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$, C est l'arc du cercle $x^2 + y^2 = 4$, parcouru dans le sens antihoraire, entre les points (2, 0) et (0, –2).

28. $\vec{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j}$, C est l'arc de la parabole $y = 1 + x^2$ allant de (–1, 2) à (1, 2).

29. a) Calculez l'intégrale curviligne $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où $\vec{F}(x, y) = e^{x-1}\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$ et C est définie par $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + t^3\,\vec{j}$, $0 \le t \le 1$.

b) À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur, illustrez la partie a). Tracez C et les vecteurs du champ vectoriel correspondant à $t = 0$, $1/\sqrt{2}$ et 1 (comme à la figure 13).

30. a) Calculez l'intégrale curviligne $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$ et C est définie par $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + 3t\,\vec{j} - t^2\,\vec{k}$, $-1 \le t \le 1$.

b) À l'aide d'un ordinateur, illustrez la partie a). Tracez C et les vecteurs du champ vectoriel correspondant à $t = \pm 1$ et $\pm 1/2$ (comme à la figure 13).

31. Trouvez la valeur exacte de $\int_C x^3y^2z\, ds$, où C est la courbe d'équations paramétriques $x = e^{-t}\cos 4t$, $y = e^{-t}\sin 4t$, $z = e^{-t}$, $0 \le t \le 2\pi$.

LCS **32.** a) Calculez le travail effectué par le champ de forces $\vec{F}(x, y) = x^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$ sur une particule qui circule une fois autour du cercle $x^2 + y^2 = 4$ orienté dans le sens antihoraire.

LCS b) À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, représentez le champ de forces et le cercle sur la même figure. Expliquez votre réponse à la partie a) en vous basant sur ce graphique.

33. On courbe un fil mince en forme du demi-cercle $x^2 + y^2 = 4$, $x \ge 0$. La densité linéaire est une constante k. Trouvez la masse et le centre de masse du fil.

34. Un fil mince a la forme de la partie du cercle centré à l'origine et de rayon a située dans le premier quadrant. La fonction de densité est $\rho(x, y) = kxy$. Trouvez la masse et le centre de masse du fil.

35. a) Écrivez des formules semblables aux équations 4 pour le centre de masse $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ d'un fil mince ayant la forme d'une courbe C dans l'espace, si la fonction de densité du fil est $\rho(x, y, z)$.

b) Trouvez le centre de masse d'un fil ayant la forme de l'hélice $x = 2 \sin t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \le t \le 2\pi$, sachant que la densité est une constante k.

36. Trouvez la masse et le centre de masse d'un fil ayant la forme de l'hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, sachant que la densité en tout point est égale au carré de sa distance à l'origine.

37. Si un fil de densité linéaire $\rho(x, y)$ a la forme d'une courbe plane C, ses **moments d'inertie** par rapport aux axes des x et des y sont respectivement définis par

$$I_x = \int_C y^2\rho(x, y)\, ds \qquad I_y = \int_C x^2\rho(x, y)\, ds.$$

Trouvez les moments d'inertie du fil de l'exemple 3.

38. Si un fil de densité linéaire $\rho(x, y, z)$ a la forme d'une courbe C dans l'espace, ses **moments d'inertie** par rapport aux axes des x, des y et des z sont respectivement définis par

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, ds.$$

Trouvez les moments d'inertie du fil de l'exercice 35.

39. Trouvez le travail effectué par le champ de forces $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + (y + 2)\vec{j}$ pour déplacer un objet le long d'une arche de la cycloïde $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

40. Calculez le travail effectué par le champ de forces $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + ye^x\vec{j}$ sur une particule qui se déplace le long de la parabole $x = y^2 + 1$ entre les points (1, 0) et (2, 1).

41. Calculez le travail effectué par le champ de forces $\vec{F}(x, y, z) = (x - y^2)\vec{i} + (y - z^2)\vec{j} + (z - x^2)\vec{k}$ sur une particule qui se déplace le long du segment de droite allant de (0, 0, 1) à (2, 1, 0).

42. La force exercée par une charge électrique située à l'origine sur une particule chargée au point (x, y, z), de vecteur position $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, est $\vec{F}(\vec{r}) = K\vec{r}/\|\vec{r}\|^3$, où K est une constante (voir l'exemple 5 de la section 9.1). Calculez le travail effectué par $\vec{F}$ lorsque la particule se déplace sur un segment de droite allant de (2, 0, 0) à (2, 1, 5).

43. La position d'un objet de masse m au temps t est donnée par $\vec{r}(t) = at^2\vec{i} + bt^3\vec{j}$, $0 \le t \le 1$.

a) Quelle est la force agissant sur l'objet au temps t?

b) Quel est le travail effectué par la force durant l'intervalle $0 \le t \le 1$?

44. Un objet de masse m se déplace selon la trajectoire définie par la fonction de position $\vec{r}(t) = a \sin t\,\vec{i} + b \cos t\,\vec{j} + ct\,\vec{k}$, $0 \le t \le \pi/2$. Trouvez le travail effectué sur l'objet durant cette période.

45. Un homme de 72 kg porte un bidon de peinture de 10 kg vers le haut d'un escalier hélicoïdal qui entoure un silo dont le rayon est de 6 m. La hauteur du silo est de 30 m, et l'homme effectue exactement trois tours complets. Calculez le travail qu'effectuera cet homme contre la gravitation pour atteindre le sommet.

46. Supposez que le bidon de peinture de l'exercice 45 est troué et que 4 kg de peinture s'échappent de façon régulière durant la montée. Calculez le travail effectué.

47. a) Montrez qu'un champ de forces constant effectue un travail nul sur une particule qui se déplace selon un mouvement uniforme autour du cercle $x^2 + y^2 = 1$.

b) Est-ce vrai dans le cas d'un champ de forces $\vec{F}(\vec{x}) = k\vec{x}$, où k est une constante et $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$?

48. La base d'une clôture circulaire d'un rayon de 10 m est paramétrée par $x = 10\cos t$, $y = 10\sin t$. La hauteur de la clôture à la position (x, y) est donnée par la fonction $h(x, y) = 4 + 0{,}01(x^2 - y^2)$, de sorte que la hauteur varie de 3 à 5 m. Supposez que 1 L de peinture couvre 100 m². Représentez la clôture et calculez le volume de peinture nécessaire pour peindre les deux faces de la clôture.

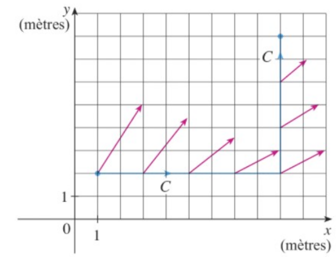
49. Si C est une courbe lisse définie par une fonction vectorielle $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, et $\vec{v}$ est un vecteur constant, montrez que

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \vec{v} \cdot [\vec{r}(b) - \vec{r}(a)].$$

50. Si C est une courbe lisse définie par une fonction vectorielle $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, montrez que

$$\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = \tfrac{1}{2}\left[|\vec{r}(b)|^2 - |\vec{r}(a)|^2\right].$$

51. Un objet se déplace le long de la courbe C représentée sur la figure, du point (1, 2) au point (9, 8). La norme des vecteurs du champ de forces $\vec{F}$ est exprimée en newtons selon les échelles sur les axes. Calculez le travail effectué par $\vec{F}$ sur l'objet.

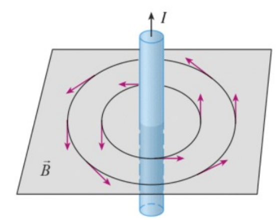


52. Des expériences montrent qu'un courant continu I circulant dans un long fil produit un champ magnétique $\vec{B}$ tangent à tout cercle contenu dans le plan perpendiculaire au fil et dont le centre est l'axe du fil et d'intensité constante sur ce cercle (voir la figure). La **loi d'Ampère**, qui établit le lien entre le courant électrique et ses effets magnétiques, stipule que

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I,$$

où I est le courant total qui traverse toute surface bornée par une courbe fermée C et où μ_0 est une constante appelée «permittivité du vide». Si C est un cercle de rayon r, montrez que l'intensité $B = \|\vec{B}\|$ du champ magnétique à une distance r du centre du fil est

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$



9.3 LE THÉORÈME FONDAMENTAL DES INTÉGRALES CURVILIGNES

Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral affirme que

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

où F' est continue sur $[a, b]$. On peut interpréter ce théorème en disant que l'intégrale du taux de variation de F égale la variation totale de cette fonction.