Chapitre 6

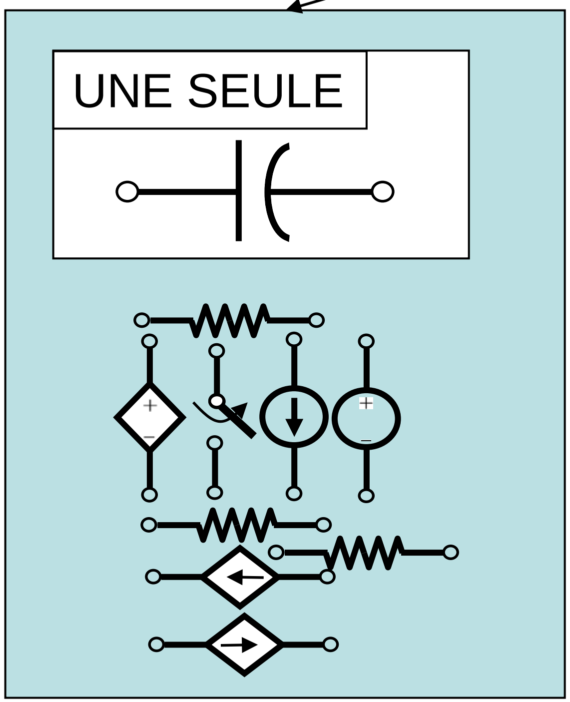
Réponse des circuits RL et RC

Dr. M.C.E. Yagoub

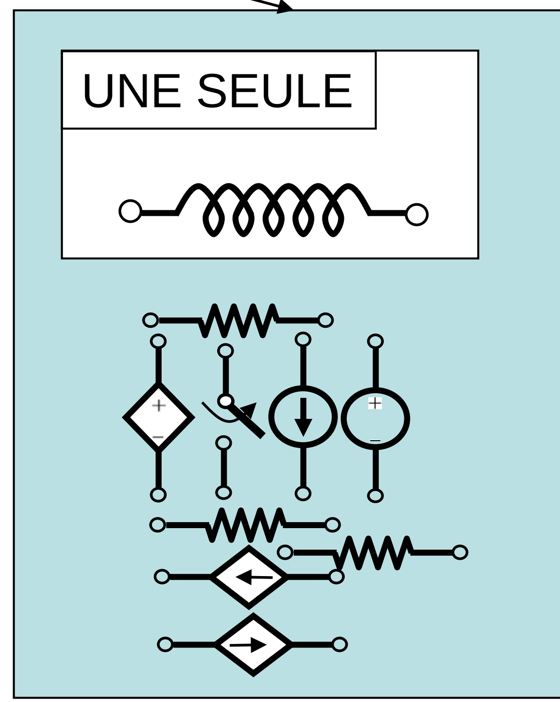
Chapitre 5 : nous avons déterminé v_C et i_L à t^{0-} et t^{0+}

Objectif de ce chapitre : déterminer v_C et i_L pour $t > 0$

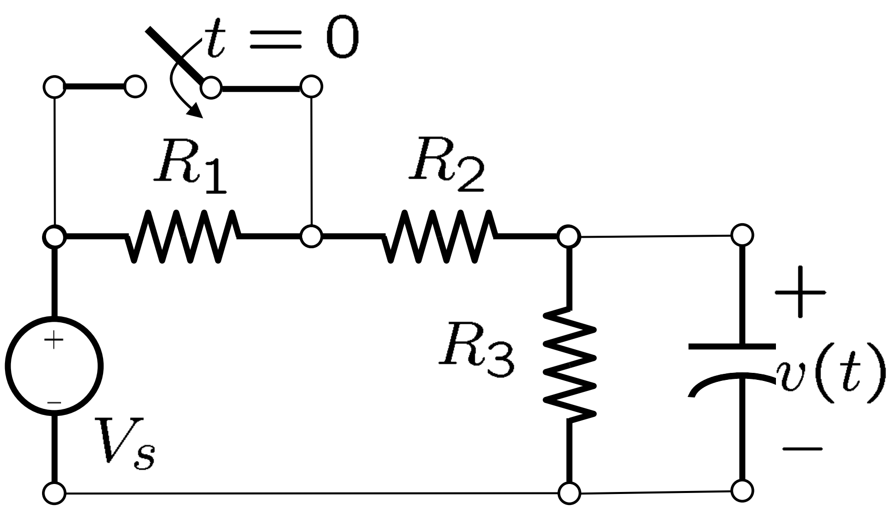
Dans ce chapitre, les circuits auront **UN** seul élément réactif

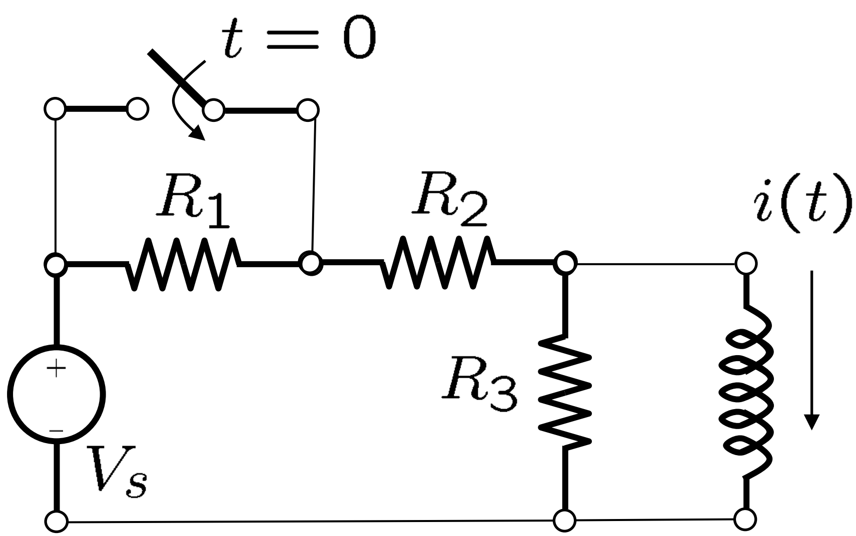


OU



Deux Exemples

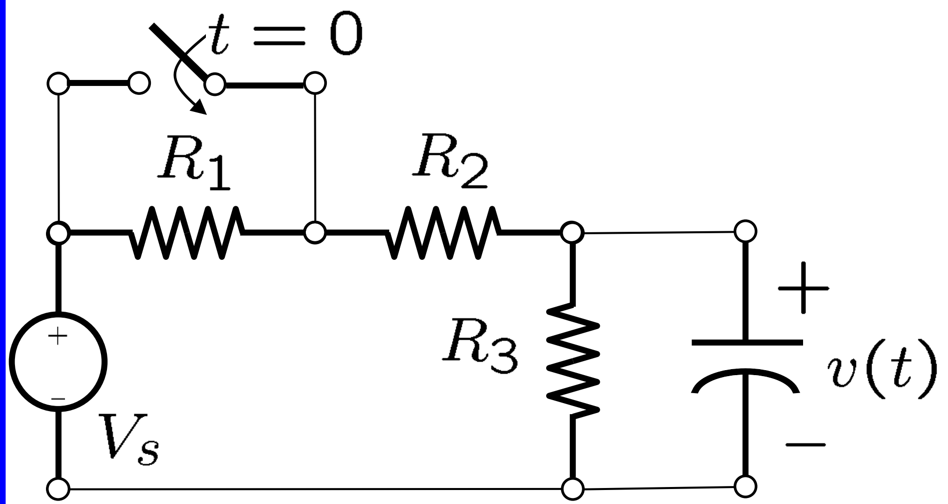


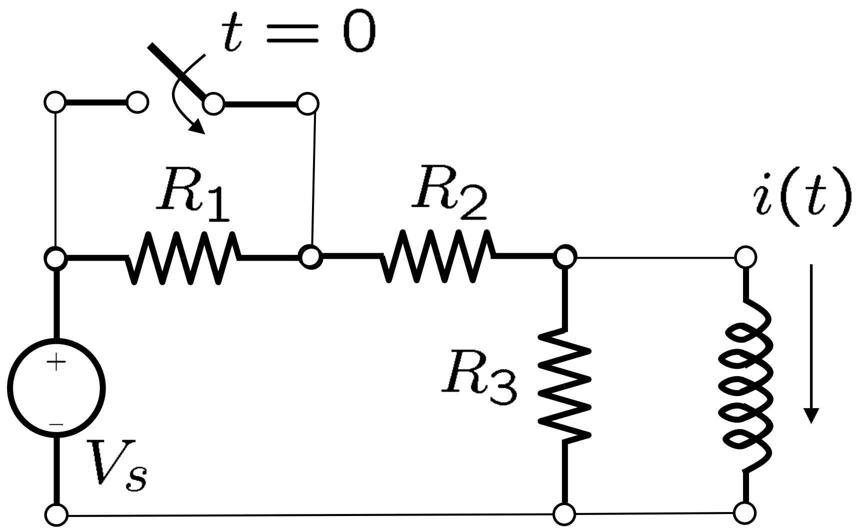


Déterminer $v(t)$ **pour** $\boxed{t > 0}$

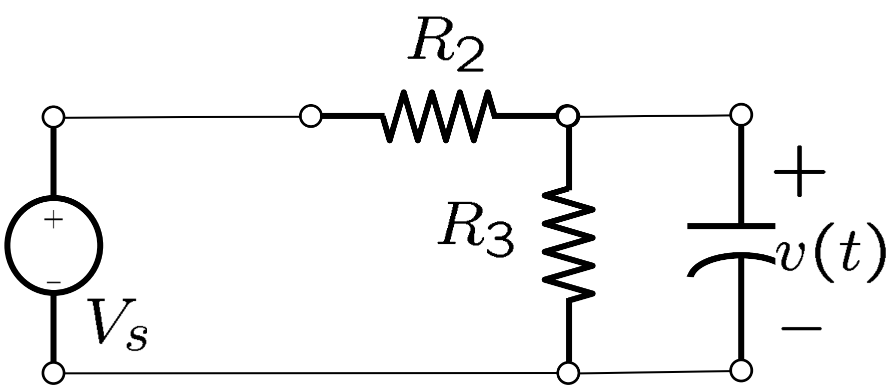
Déterminer $i(t)$ **pour** $\boxed{t > 0}$

Deux Exemples

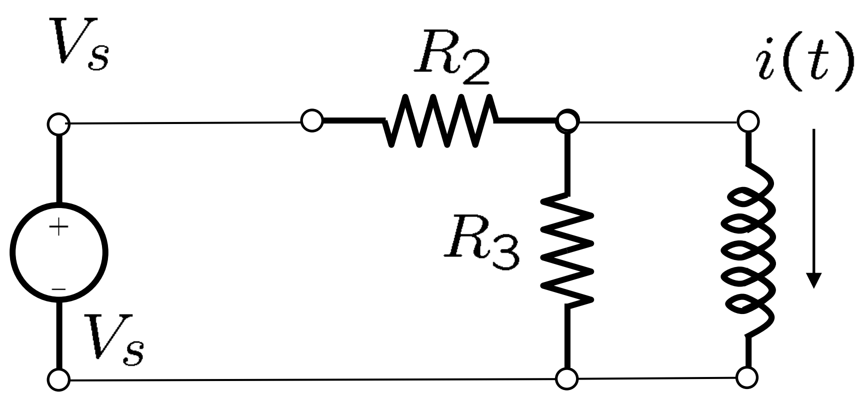




$t > 0$

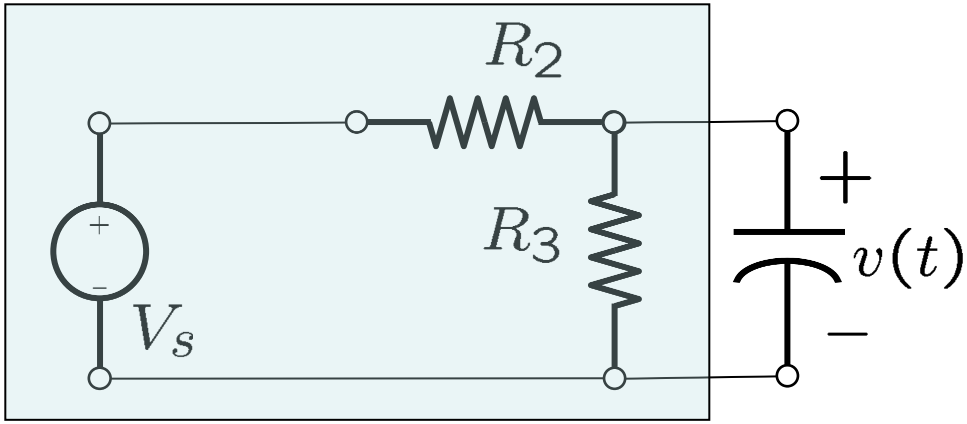


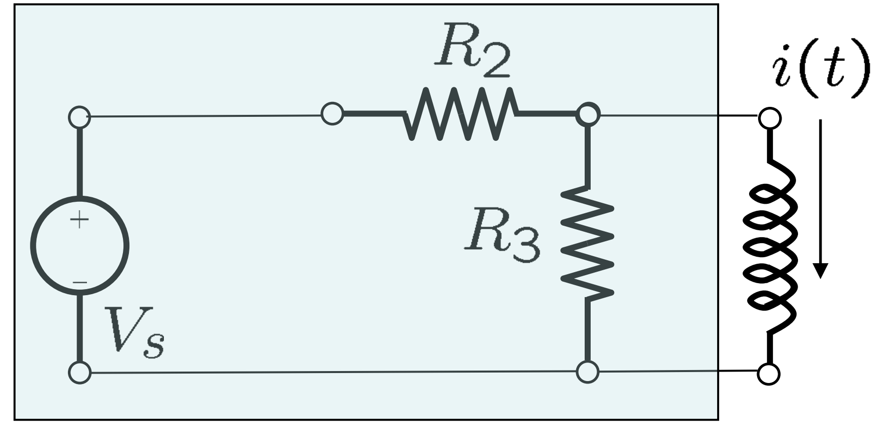
$t > 0$



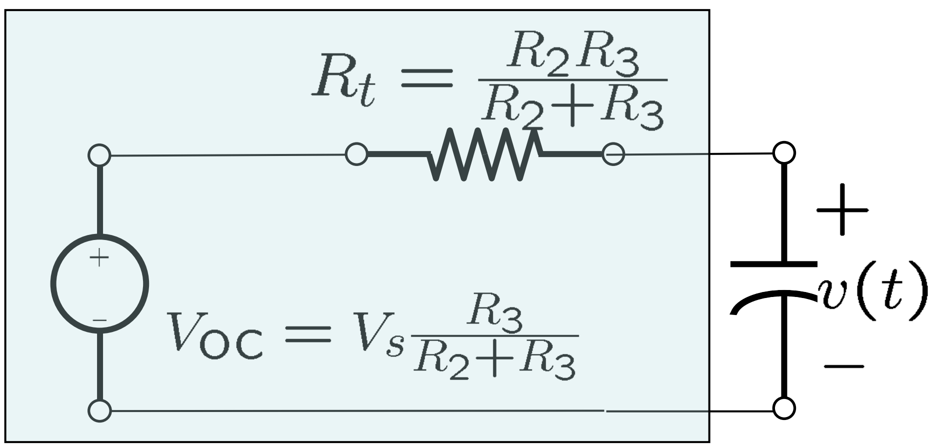
Deux Exemples

$t > 0$

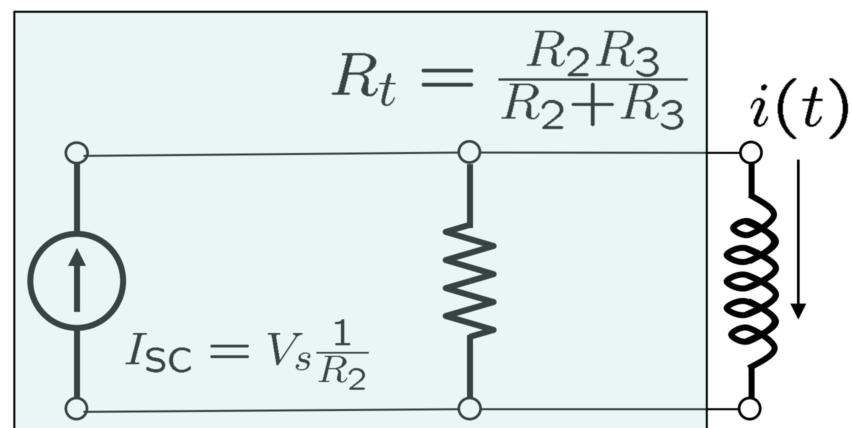




En utilisant les théorèmes de Thévenin et Norton, nous obtenons



Thévenin

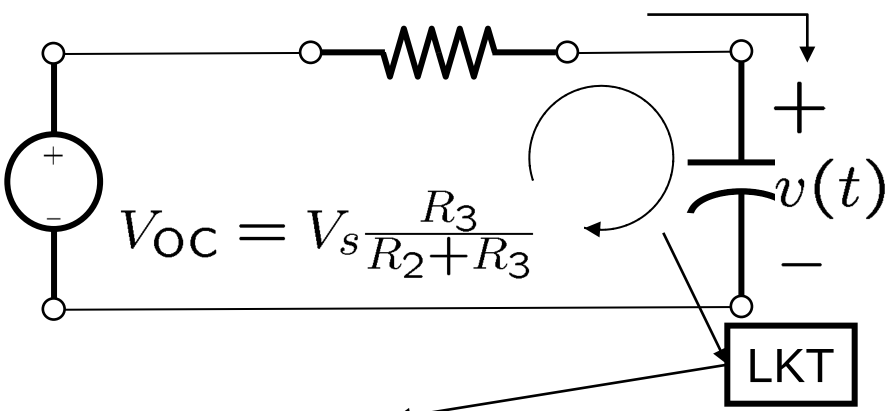


Norton

Deux Exemples

$\boxed{t > 0}$

$$R_t = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



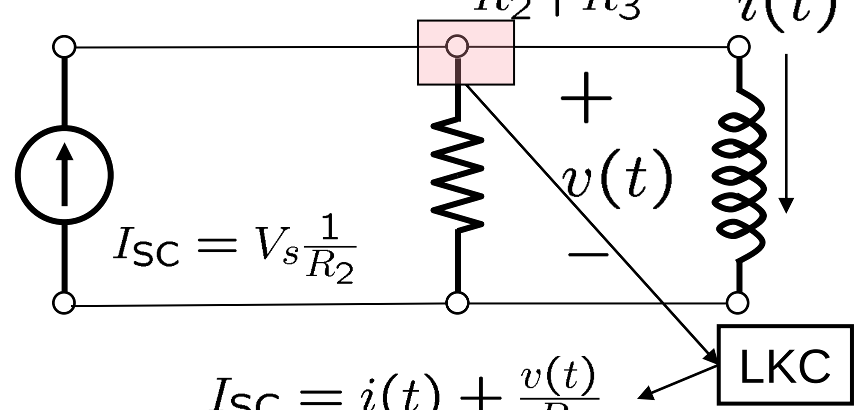
$$V_{OC} = V_s \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$-V_{OC} + i(t) R_t + v(t) = 0$$

$$-V_{OC} + C R_t \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = 0$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R_t C} v(t) = V_{OC} \frac{1}{R_t C}$$

$$R_t = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



$$I_{SC} = V_s \frac{1}{R_2}$$

$$I_{SC} = i(t) + \frac{v(t)}{R_t}$$

$$I_{SC} = i(t) + \frac{L}{R_t} \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{L/R_t} i(t) = I_{SC} \frac{1}{L/R_t}$$

Les deux équations peuvent s'écrire comme

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = K$$

avec

$$x(t) = v(t) \qquad \tau = R_t C \qquad K = \frac{V_{OC}}{R_t C}$$

avec

$$x(t) = i(t) \qquad \tau = \frac{L}{R_t} \qquad K = \frac{I_{SC}}{L/R_t}$$

Circuits RC et RL : forme d'onde de $v_c\ (t)$ ou de $i_L\ (t)$

Équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = K$$

$x(t)$ **?**

Équation différentielle du premier ordre : Solution

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = K$$

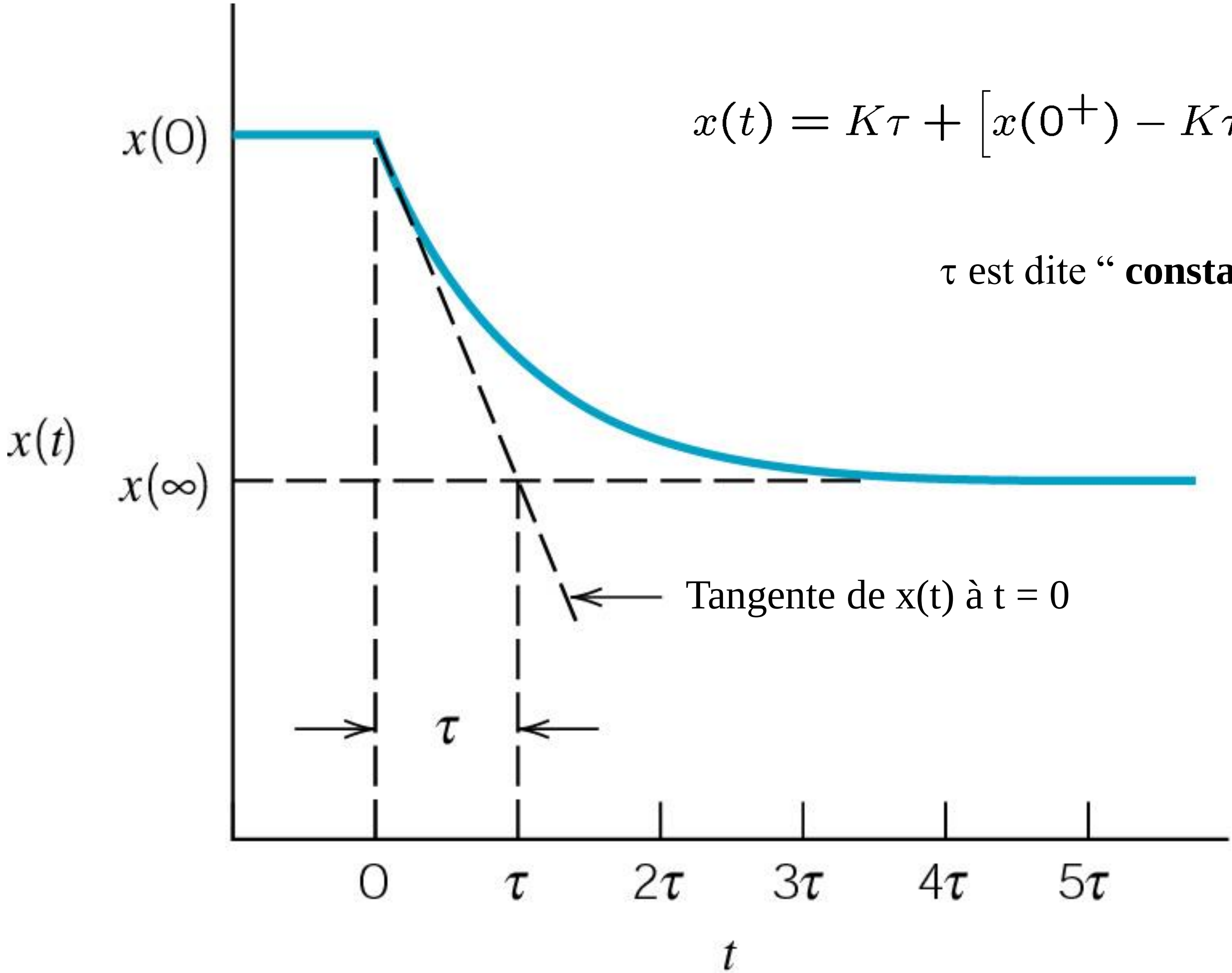
$$x(t) = K\tau + Ae^{-t/\tau}$$

où ***A*** est une constante arbitraire qui doit satisfaire les conditions initiales

$$A = x(0^+) - K\tau$$

$$x(t) = K\tau + \left[x(0^+) - K\tau\right]e^{-t/\tau}$$

Tracer la solution en fonction du temps



$$x(t) = K\tau + \left[x(0^+) - K\tau\right] e^{-t/\tau}$$

τ est dite “ **constante de temps** ” !

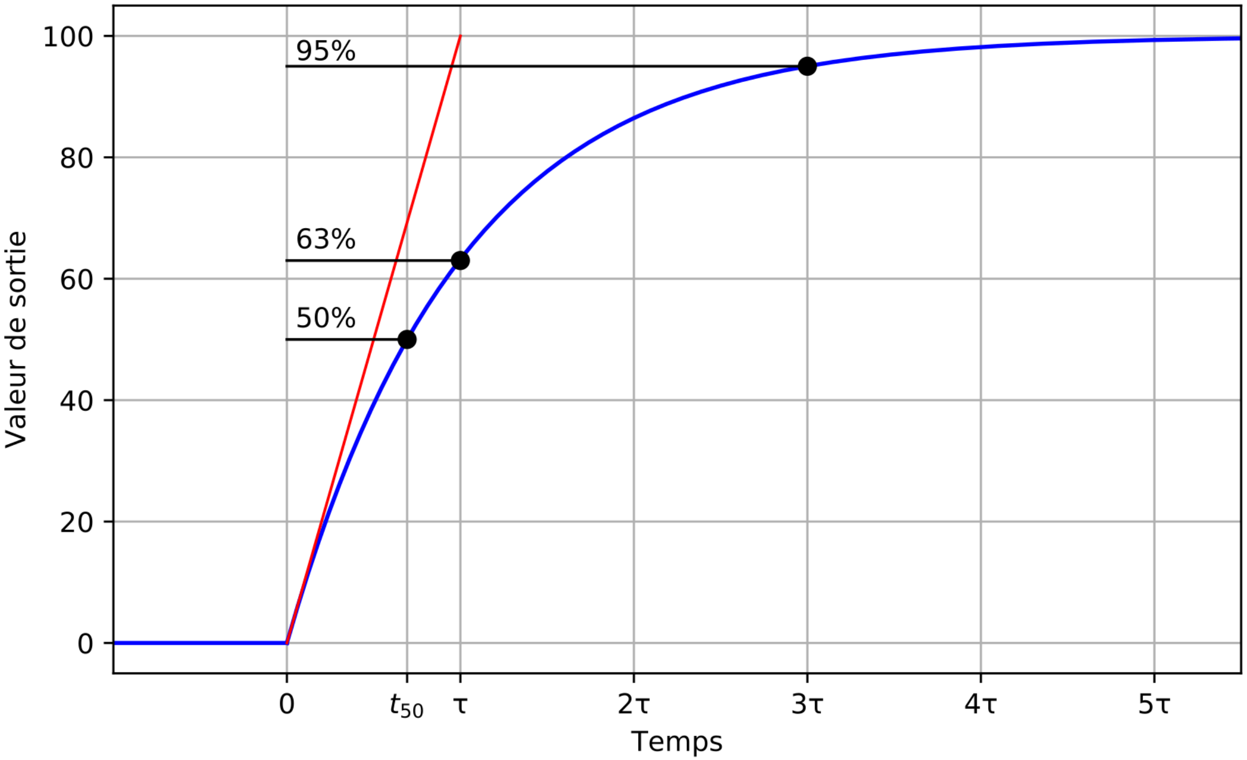
Tracer la solution en fonction du temps

Pour une fonction de la forme $f(t) = B + A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Pour une amplitude A et une valeur B = 0, la sortie atteint l'amplitude : " $1 - e^{(-1)}$ "

au bout du temps τ

soit à 63.2 %.

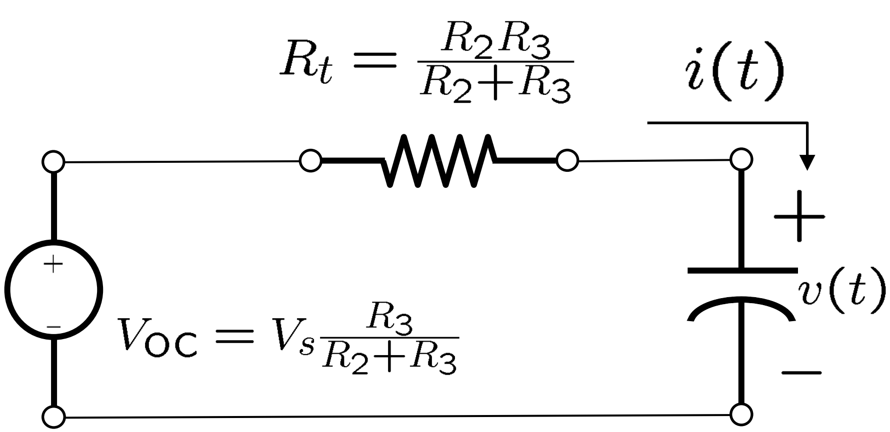


https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_de_temps

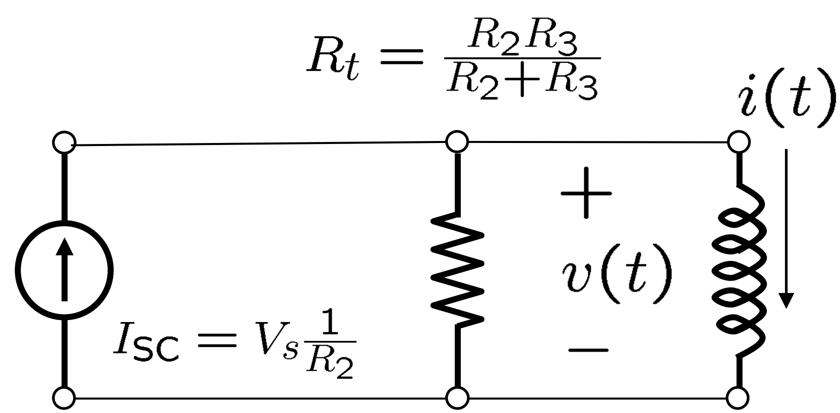
Équation différentielle du premier ordre : Solution

$$x(t) = K\tau + \left[x(0^+) - K\tau\right] e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{x(t) \equiv v(t)}$$



$$\boxed{x(t) \equiv i(t)}$$



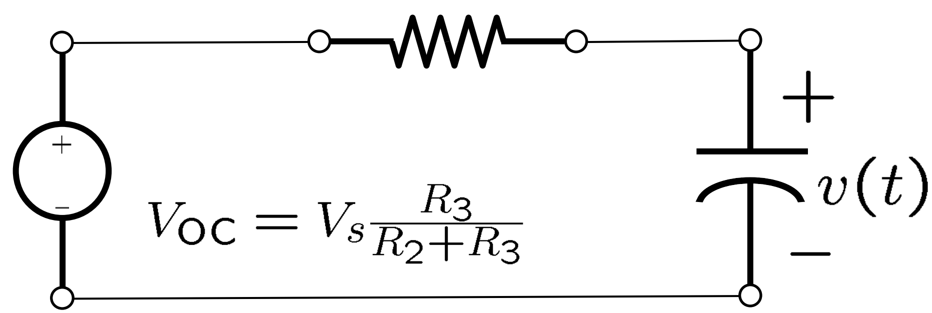
Premier exemple : Solution

$$x(t) \equiv v(t)$$

$$\tau \equiv R_t C$$

$$K \equiv \frac{V_{OC}}{R_t C}$$

$$R_t = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



$$x(t) = K\tau + \left[x(0^+) - K\tau\right] e^{-t/\tau}$$

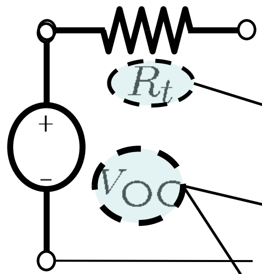
Solution

$$v(t) = V_{OC} + \left[v(0^+) - V_{OC}\right] e^{\frac{-t}{R_t C}}$$

Résumé : Analyser un circuit avec une capacité

Tension aux bornes de la capacité :

1. Circuit équivalent de Thévenin ***sans*** la capacité



$$v(t) = V_{OC} + \left[v(0^+) - V_{OC} \right] e^{\frac{-t}{R_t C}}$$

Résumé : Analyser un circuit avec une capacité

Tension aux bornes de la capacité :

2. Déterminer la ***tension initiale*** aux bornes de la capacité

(voir chapitre 5)

$$v(t) = V_{OC} + \left[v(0^+) - V_{OC}\right] e^{\frac{-t}{R_t C}}$$

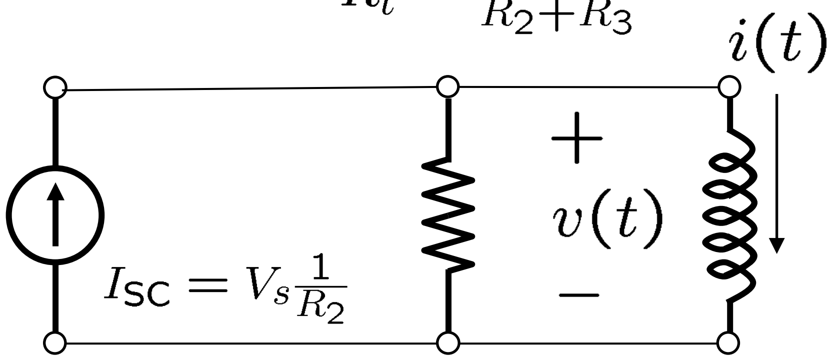
Second exemple : Solution

$$x(t) \equiv i(t)$$

$$\tau \equiv \frac{L}{R_t}$$

$$K \equiv \frac{I_{SC}}{L/R_t}$$

$$R_t = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



$$x(t) = K\tau + \left[x(0^+) - K\tau\right] e^{-t/\tau}$$

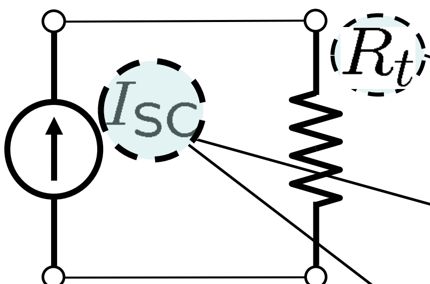
Solution

$$i(t) = I_{SC} + \left[i(0^+) - I_{SC}\right] e^{-\frac{R_t}{L} t}$$

Résumé : Analyser un circuit avec une inductance

Courant parcourant l'inductance :

1. Circuit equivalent de Norton ***sans*** l'inductance



$$i(t) = I_{SC} + \left[i(0^+) - I_{SC}\right] e^{-\frac{R_t}{L}t}$$

Résumé : Analyser un circuit avec une inductance

Courant parcourant l'inductance :

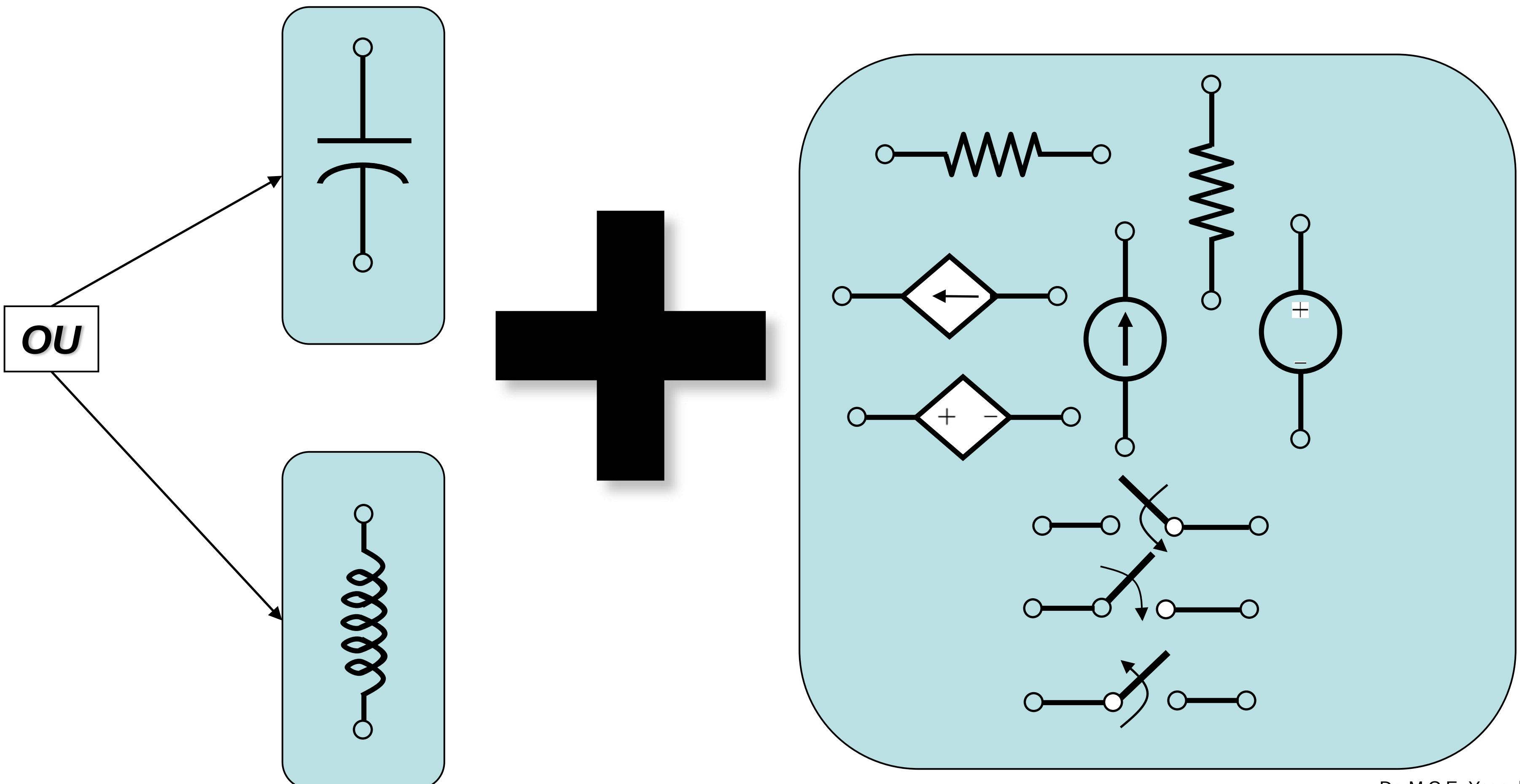
2. Déterminer le ***courant initial*** parcourant l'inductance

$$i(t) = I_{\text{SC}} + \left[i(0^+) - I_{\text{SC}} \right] e^{-\frac{R_t}{L}t}$$

EN CONCLUSION

Nous pouvons analyser maintenant n'importe quel circuit avec :

Un seul élément de stokage ***N'importe le(s)quel(s) de ces éléments***



Circuits RC et RL avec plusieurs interrupteurs

Options :

CAS 1

Le circuit contient

Un ou plusieurs

Interrupteurs qui s'ouvrent (ou se ferment)

au même instant t

CAS 2

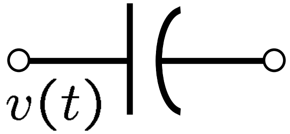
Le circuit contient

Un ou plusieurs

Interrupteurs qui s'ouvrent (ou se ferment)

à différents instants t

Étapes à suivre



1. Trouver la tension de la capacité JUSTE AVANT que l'interrupteur(s) change(nt) d'état

$v(0^+)$

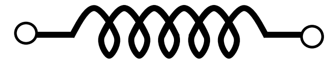
2. Circuit équivalent de Thévenin ***<u>EN EXCLUANT</u>*** La capacité après que l'interrupteur(s) change(nt) d'état.

R_t V_{OC}

3. La tension de la capacité est

$$v(t) = V_{OC} + \left[v(0^+) - V_{OC}\right] e^{\frac{-t}{R_t C}}$$

4. Connaissant la tension de la capacité ***v(t)*** on peut déterminer n'importe quel autre tension ou courant du circuit



1. Trouver le courant de l'inductance JUSTE AVANT que l'interrupteur(s) change(nt) d'état

$i(0^+)$

2. Circuit équivalent de Norton ***<u>EN EXCLUANT</u>*** L'inductance après que l'interrupteur(s) change(nt) d'état.

R_t I_{SC}

3. Le courant de l'inductance est

$$i(t) = I_{SC} + \left[i(0^+) - I_{SC}\right] e^{-\frac{R_t}{L} t}$$

4. Connaissant le courant de l'inductance ***i(t)*** on peut déterminer n'importe quel autre tension ou courant du circuit

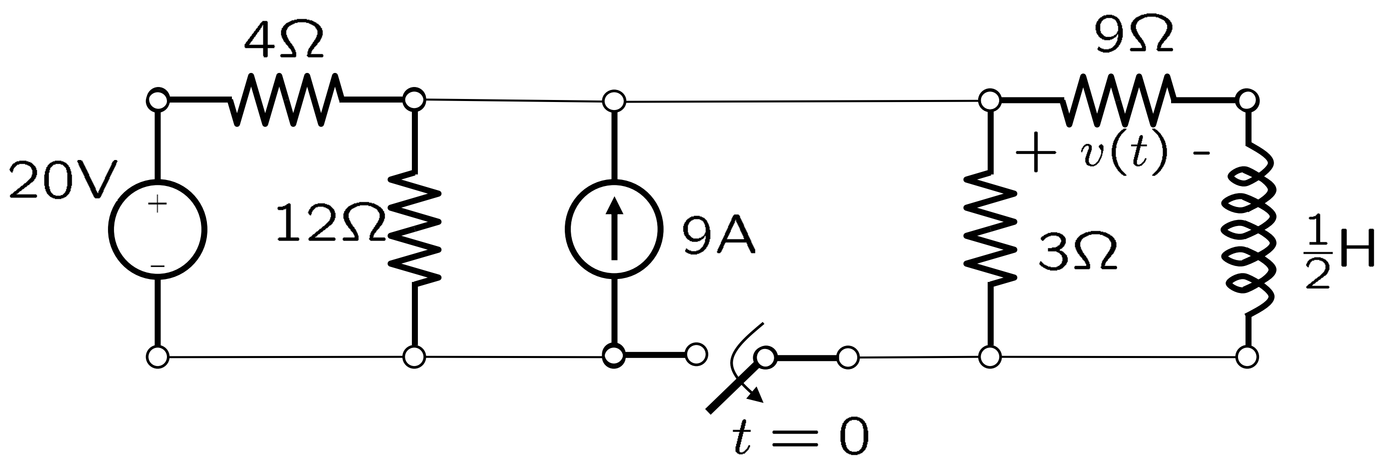
Exemple

Trouver $v(t)$ pour $t > 0$

Supposons que l'interrupteur a été fermé depuis longtemps avant $t = 0$

Pourquoi ?

État/régime permanent (*Steady state*) : dérivée nulle !



Remarque :

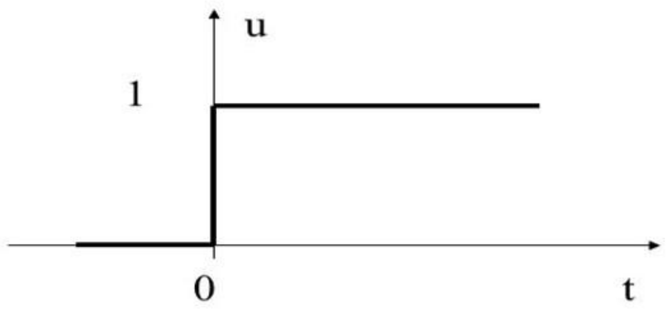
Nous pouvons remplacer l'interrupteur (fermeture mécanique) …

par une fonction électronique :

La fonction échelon unité $u(t)$ (ou fonction de Heaviside).

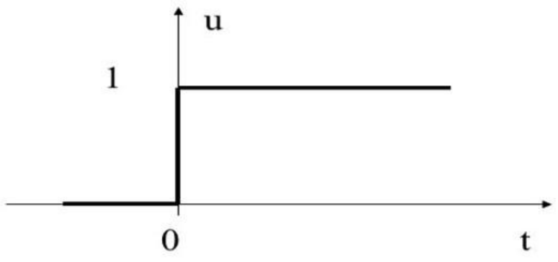
La fonction est utilisée dans le traitement du signal pour représenter un signal obtenu en fermant un interrupteur à un instant donné et en le maintenant fermé indéfiniment.

$$u(t)=\begin{cases}1 & \text{pour } t \geq 0\\ 0 & \text{pour } t < 0\end{cases}$$



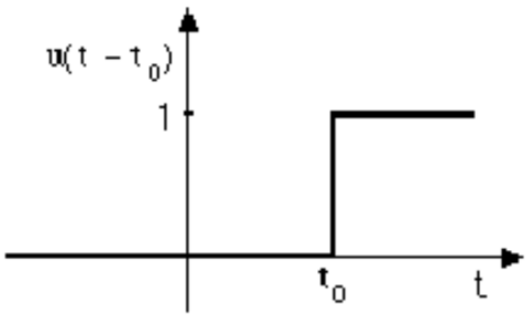
https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Heaviside

$$u(t)=\begin{cases}1 & \text{pour } t \geq 0\\ 0 & \text{pour } t < 0\end{cases}$$



ou plus généralement,

$$u(t-t_o)=\begin{cases}1 & \text{pour } t \geq t_o\\ 0 & \text{pour } t < t_o\end{cases}$$



Exemple: Si une tension vaut : $v_s(t) = 4 - 5\, u(t)$ V

La valeur de la tension est :

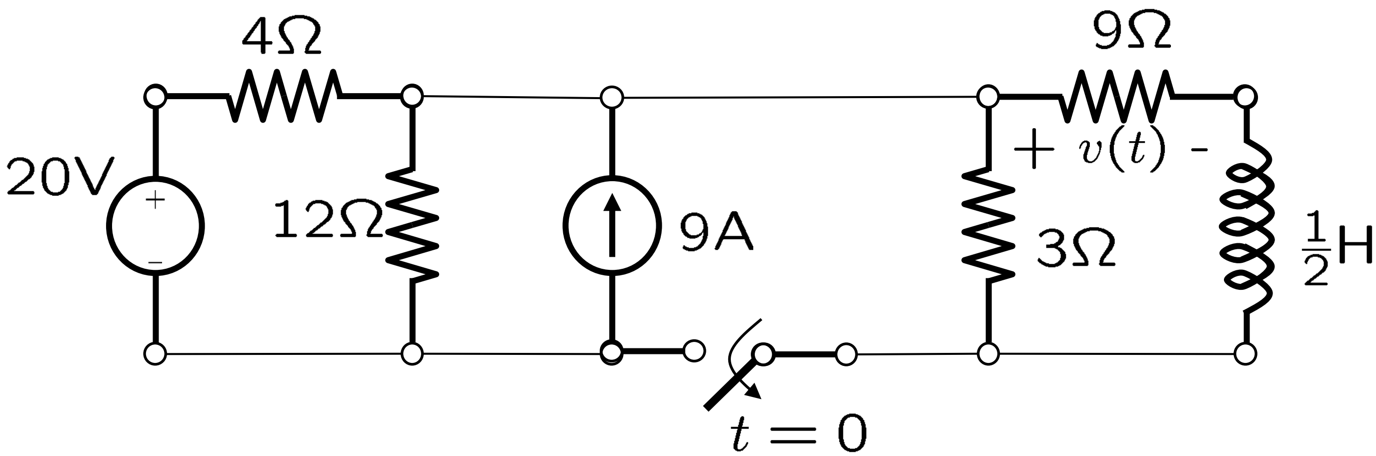
$4 – 5 * 0 = 4V$ avant $t = 0$ ($t \leq 0$)

$4 – 5 * 1 = -1$ V après $t = 0$ ($t > 0$).

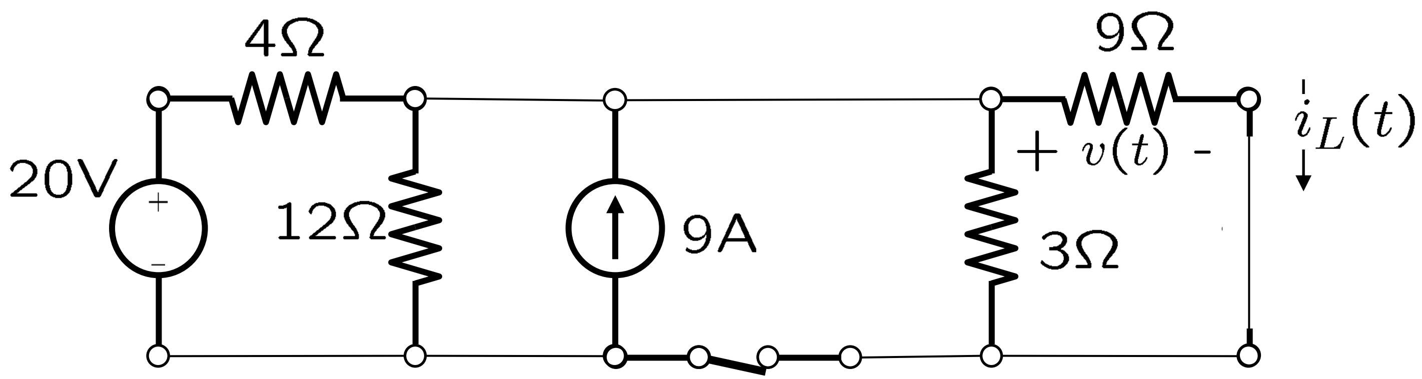
Suivons les étapes :

$t < 0$

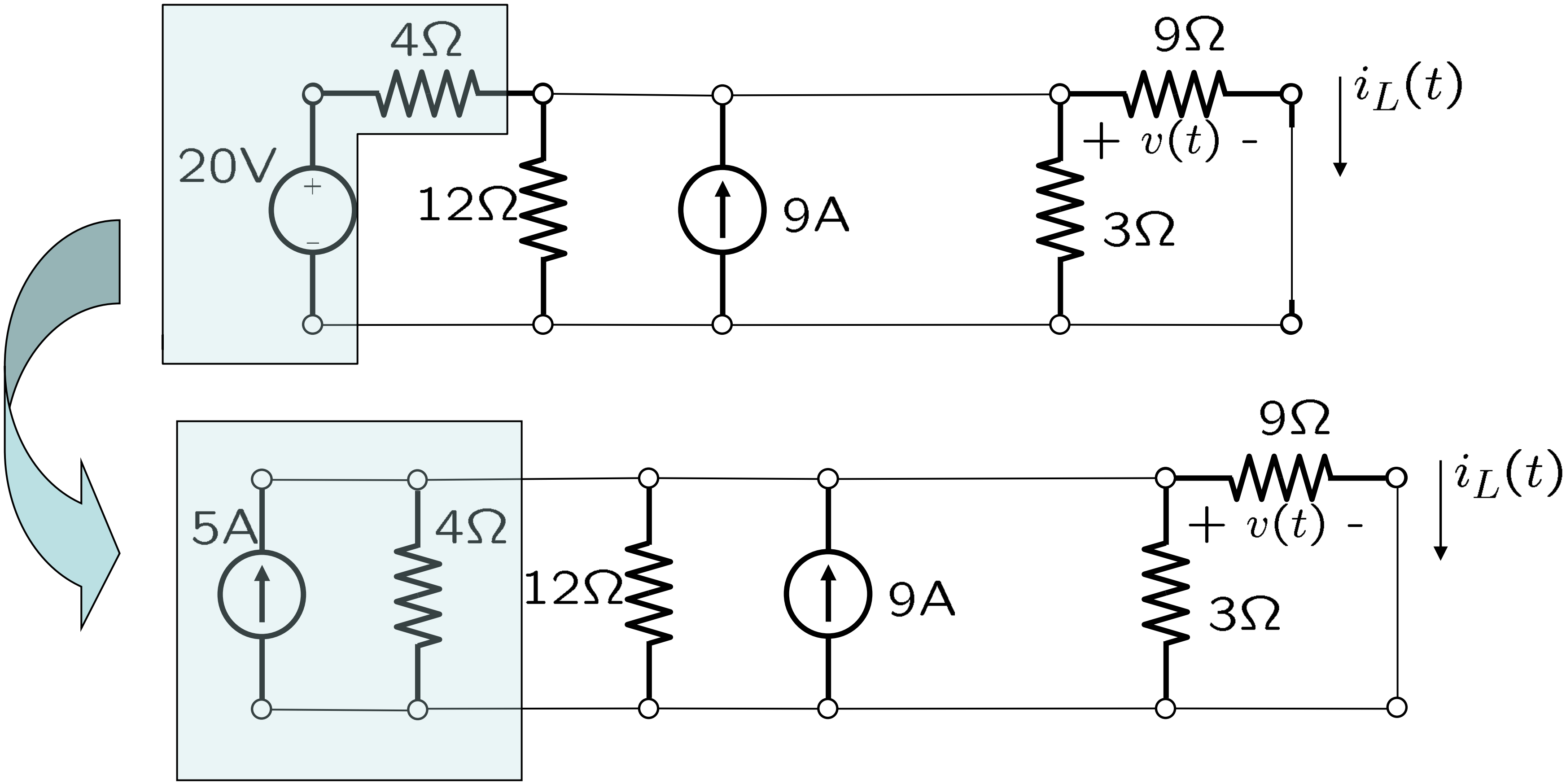
1 Trouver le courant de l'inductance JUSTE AVANT que l'interrupteur change d'état



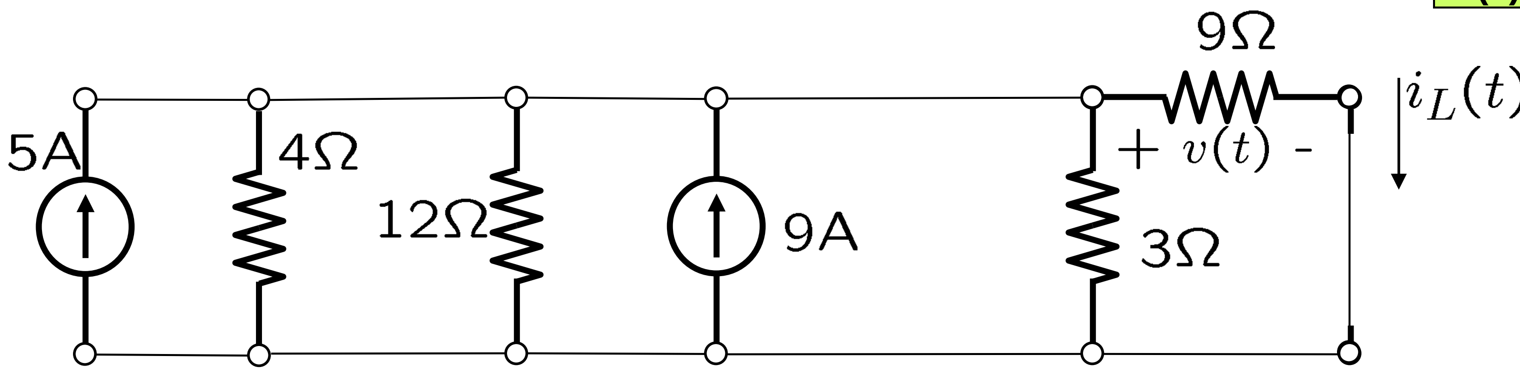
État permanent (*Steady state*) : ***L'inductance*** est ***remplacée*** par un ***court-circuit***



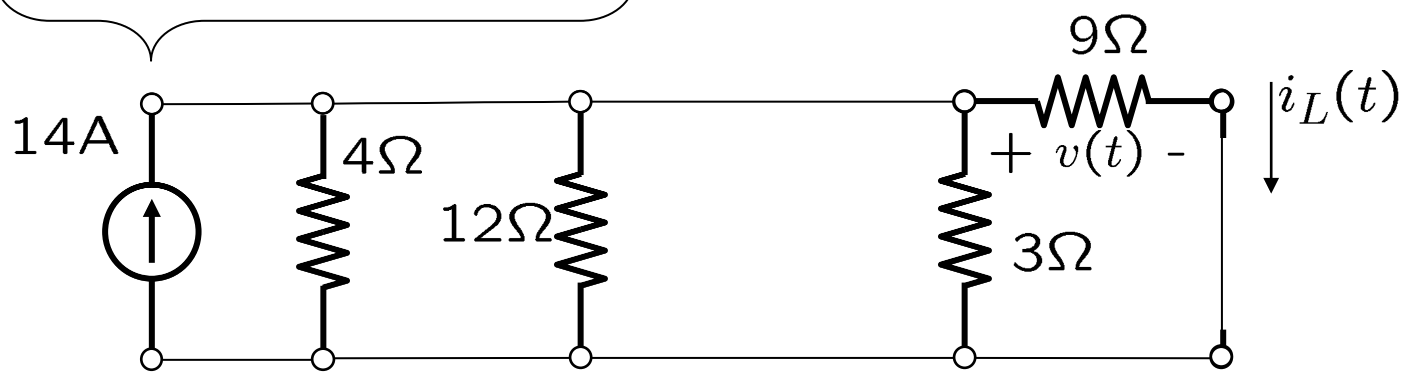
$t < 0$



$t < 0$



Deux sources de
Courant en parallèle



Diviseur de courant

$$i_L(0^-) = 14 \times \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}} = 2\text{A}$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0)$$

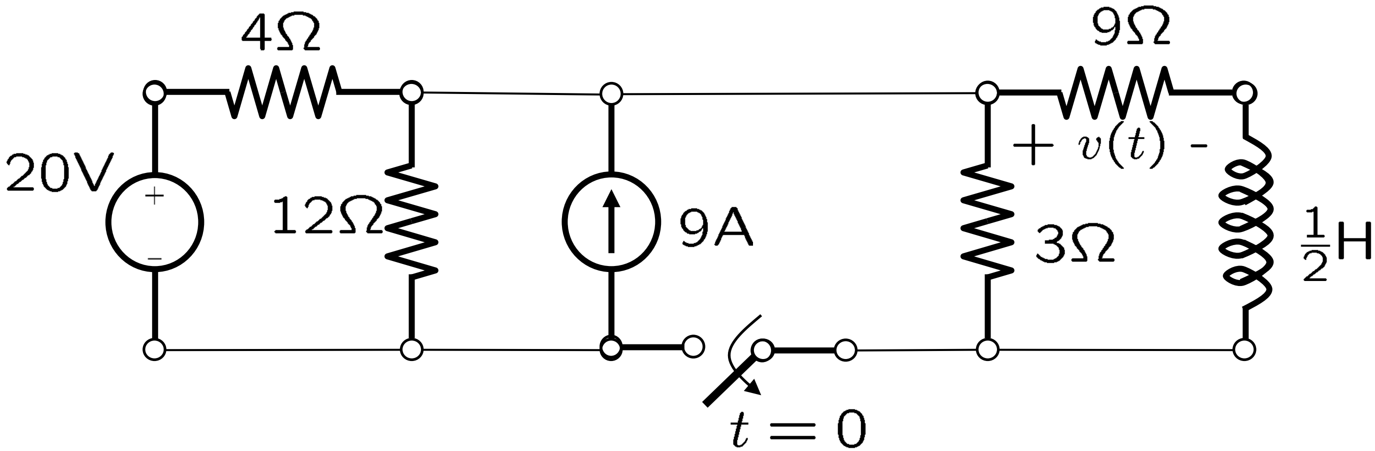
$$i_L(0^+) = 2\text{A}$$

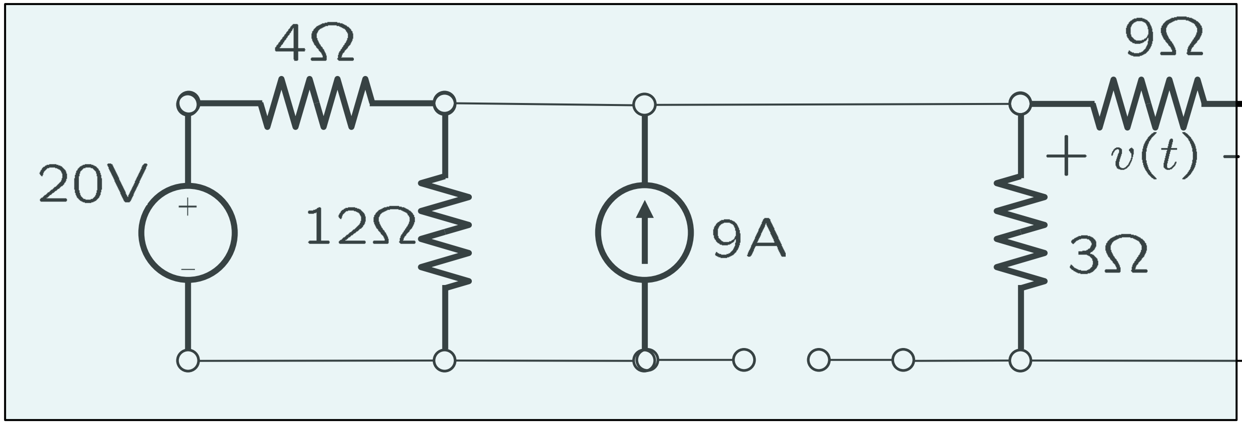
2

Circuit équivalent de Norton
EN EXCLUANT
L'inductance après que l'interrupteur(s) change(nt) d'état

R_t I_{SC}

$t > 0$





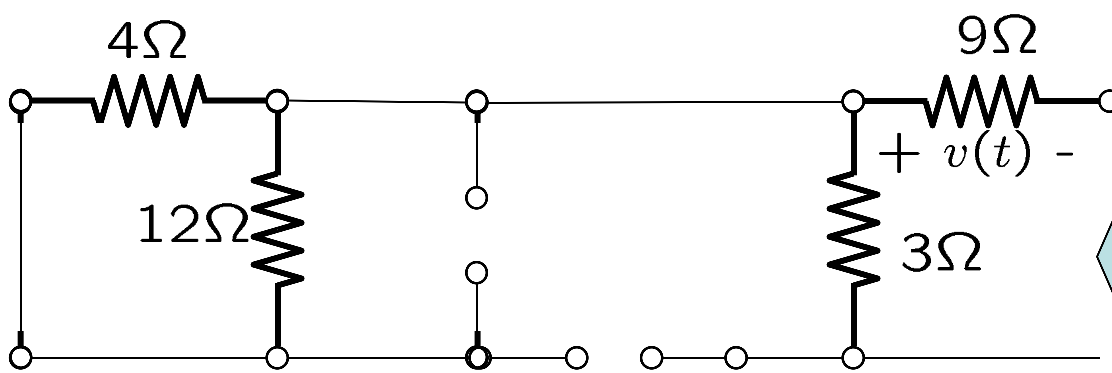
2

Circuit équivalent de Norton
EN EXCLUANT
L'inductance après que l'interrupteur(s) change(nt) d'état

R_t I_{SC}

??

Désactiver les sources indépendantes



Résistance équivalente vue par l'inductance

$$R_{eq} = \{ \underbrace{\underbrace{4 \,//\, 12}_{3} \,//\, 3}_{1.5} \} + 9$$

$$\cancel{R_{eq} = 10.5\ \Omega = R_t}$$

Correct ?

$$R_t = 12\Omega$$

2

Circuit équivalent de Norton

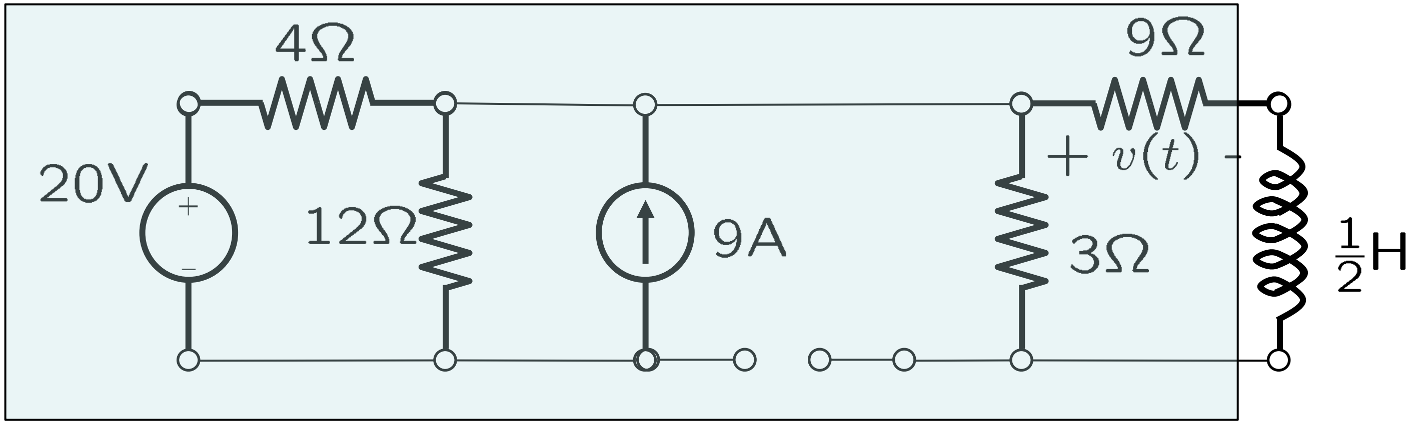
EN EXCLUANT

L'inductance après que l'interrupteur(s) change(nt) d'état

R_t ✓

I_{SC} ??

$t > 0$



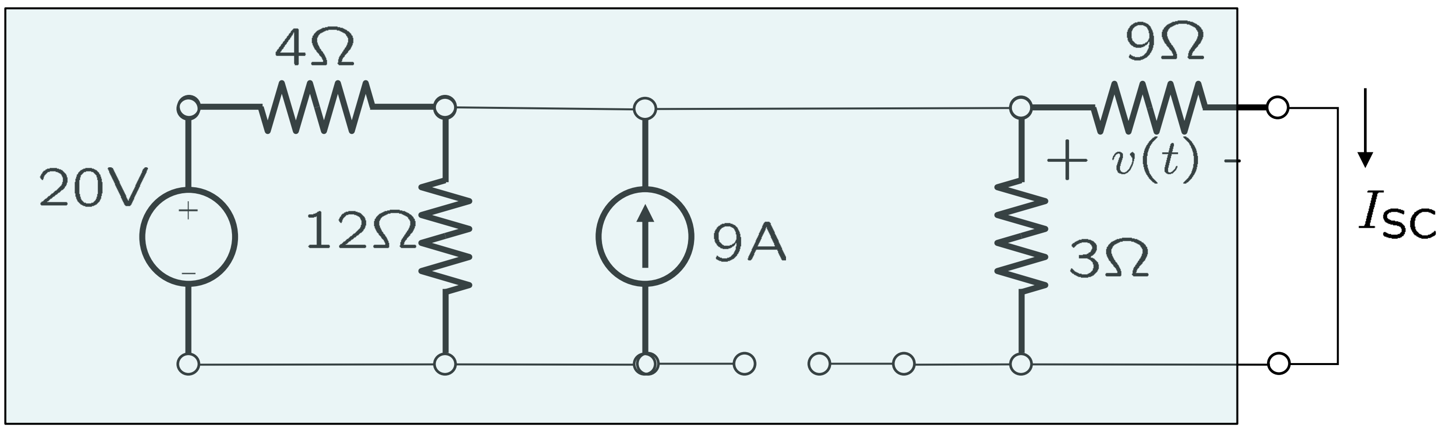
2

Circuit équivalent de Norton
EN EXCLUANT
L'inductance après que l'interrupteur(s) change(nt) d'état

R_t ✓

I_{SC} ??

$t > 0$



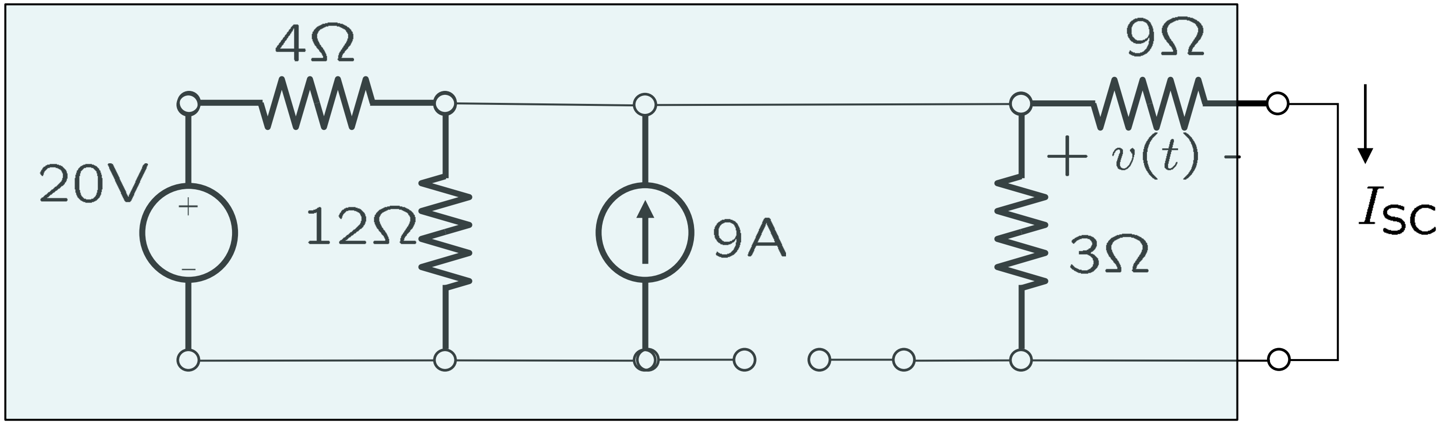
2

Circuit équivalent de Norton
EN EXCLUANT
L'inductance après que l'interrupteur(s) change(nt) d'état

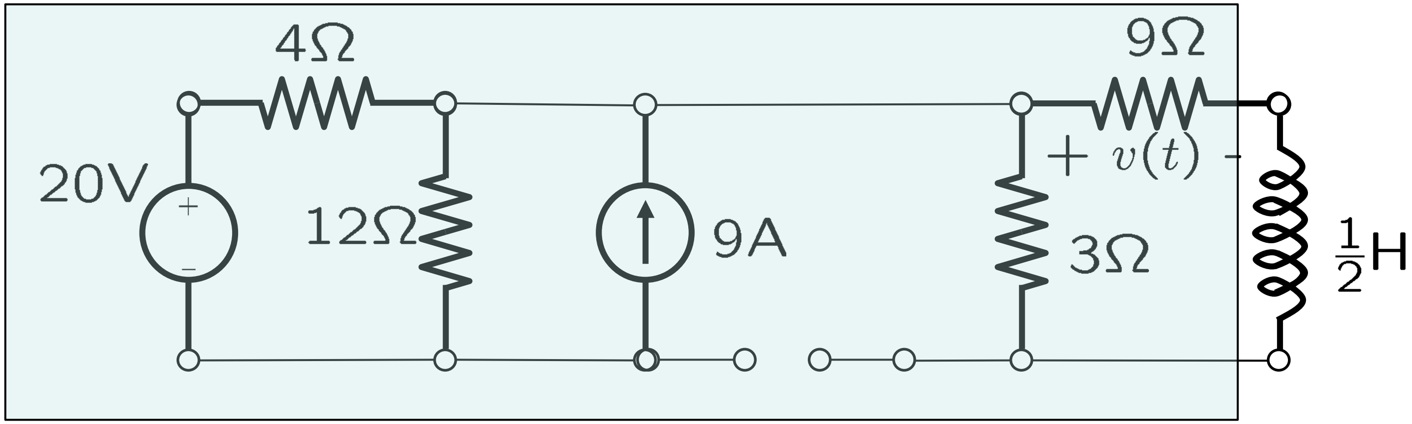
R_t ✓

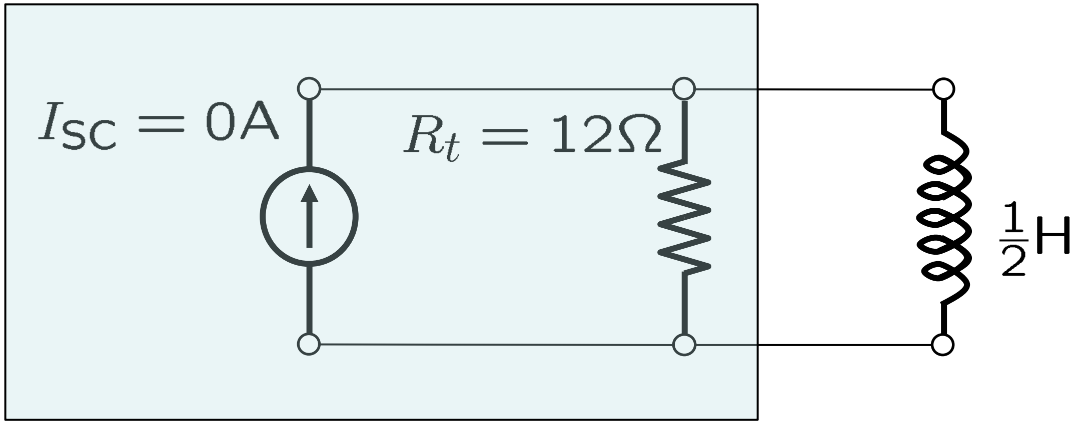
I_{SC} ✓

$t > 0$



$$I_{SC} = 0$$





$$\tau = \frac{L}{R_t} = 1/24 \text{ S}$$

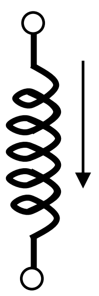
3 Le courant de l'inductance est

$$i(t) = I_{SC} + [i(0) - I_{SC}]\, e^{-\frac{R_t}{L}t}$$

$$i_L(t) = 2e^{-24t}$$

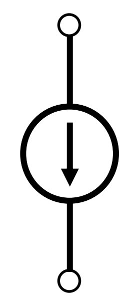
4 Connaissant le courant de l'inductance ***i(t)*** on peut déterminer n'importe quel autre tension ou courant du circuit

COMMENT??



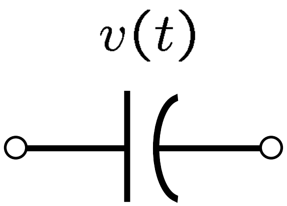
$i_L(t)$

Remplaçons l'inductance par une source de courant indépendante dont la valeur est celle du courant qui la parcoure

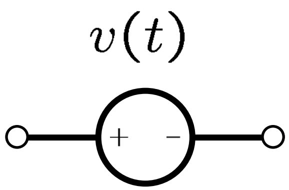


$i_L(t)$

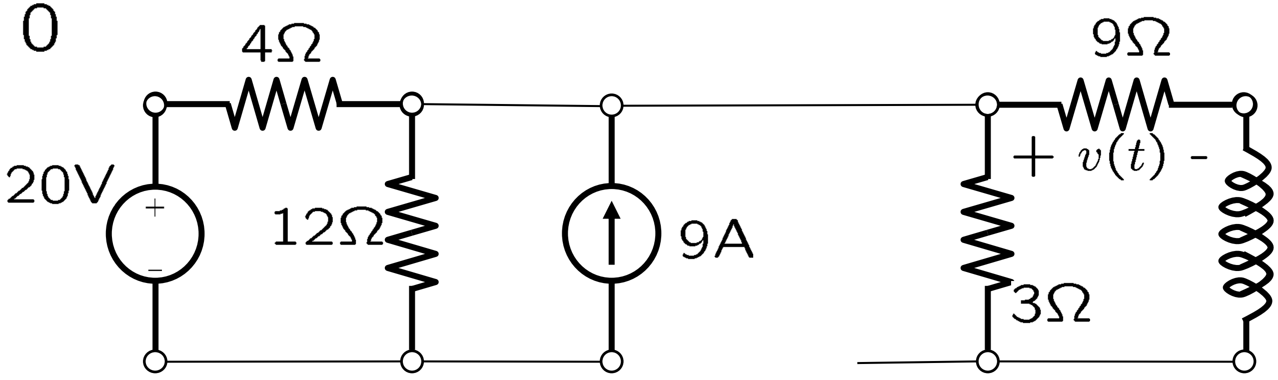
SIMILAIREMENT pour une capacité



Remplaçons la capacité par une source de tension indépendante dont la valeur est celle de la tension à ses bornes



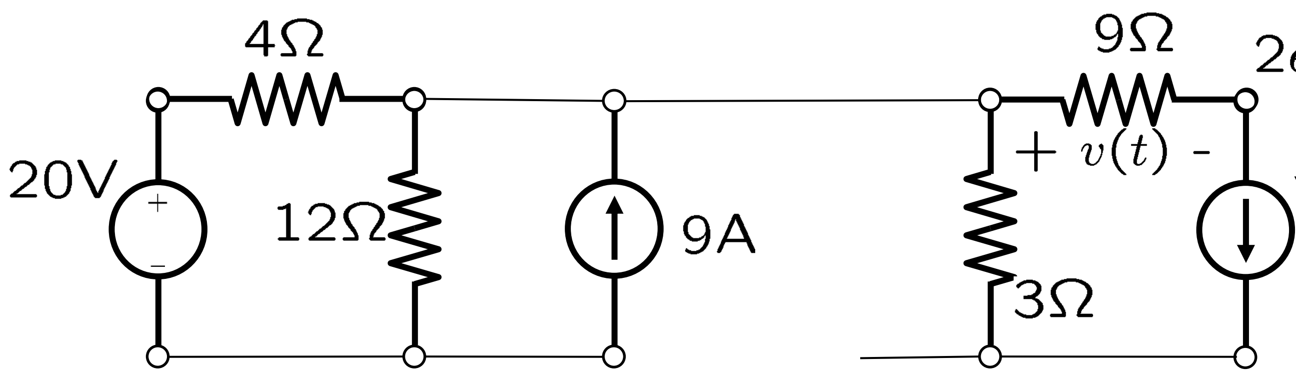
$t > 0$



Nous avons :

$$i_L(t) = 2e^{-24t}$$

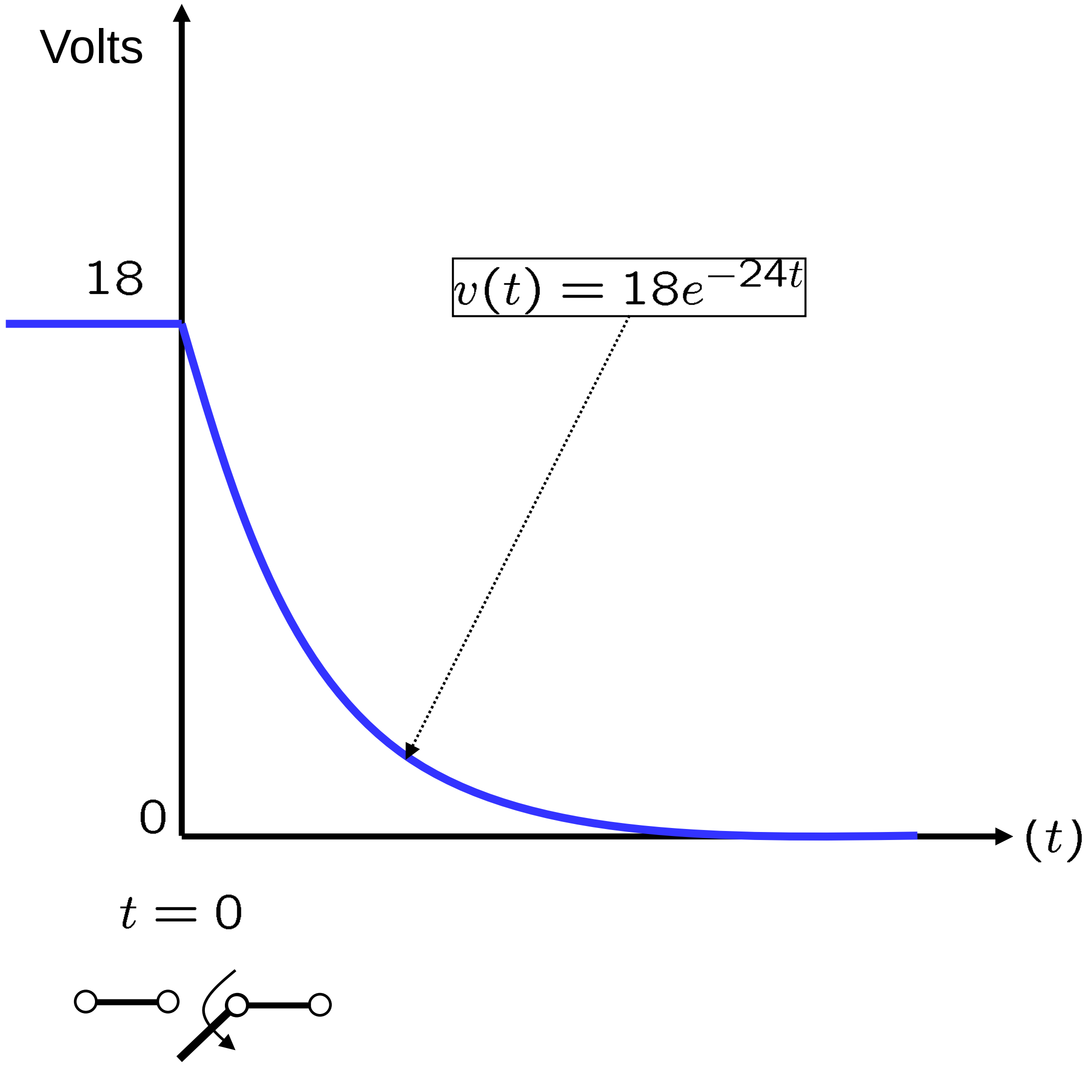
Connaissant ***$i_L(t)$***, on peut remplacer l'inductance par une source de courant de même valeur



Pour trouver ***$v(t)$*** on peut utiliser une des méthodes décrites précédemment

$$v(t) = 9 \times i_L(t) = 18e^{-24t}$$

Tracer la réponse



Options :

CAS 1

Le circuit contient

Un ou plusieurs

Interrupteurs qui s'ouvrent (ou se ferment)

au même instant t

CAS 2

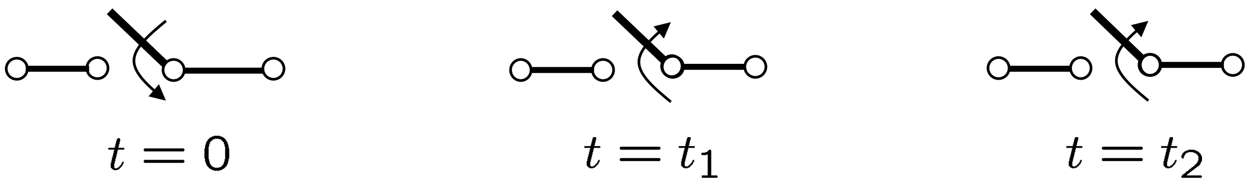
Le circuit contient

Un ou plusieurs

Interrupteurs qui s'ouvrent (ou se ferment)

à différents instants t

Commutations séquentielles

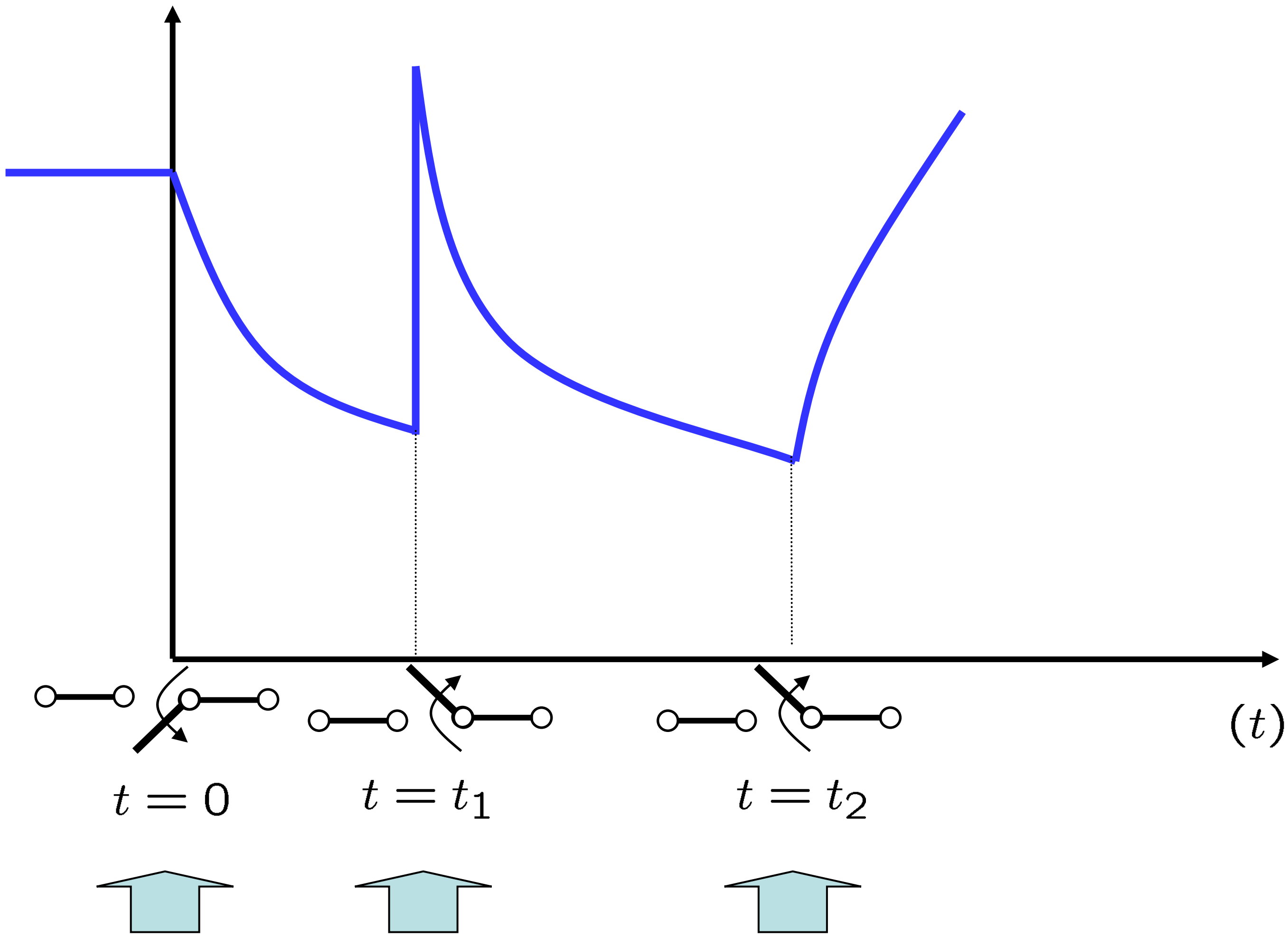


Deux interrupteurs ou plus qui commutent à des instants t_o, t_1, t_2, … différents

Il faut donc analyser le circuit ***<u>avant</u>*** et ***<u>après</u>*** **chaque** changement d'état d'un des interrupteurs. Tout résultat trouvé juste avant un changement ($x(0^-)$) sert juste après le changement en posant :

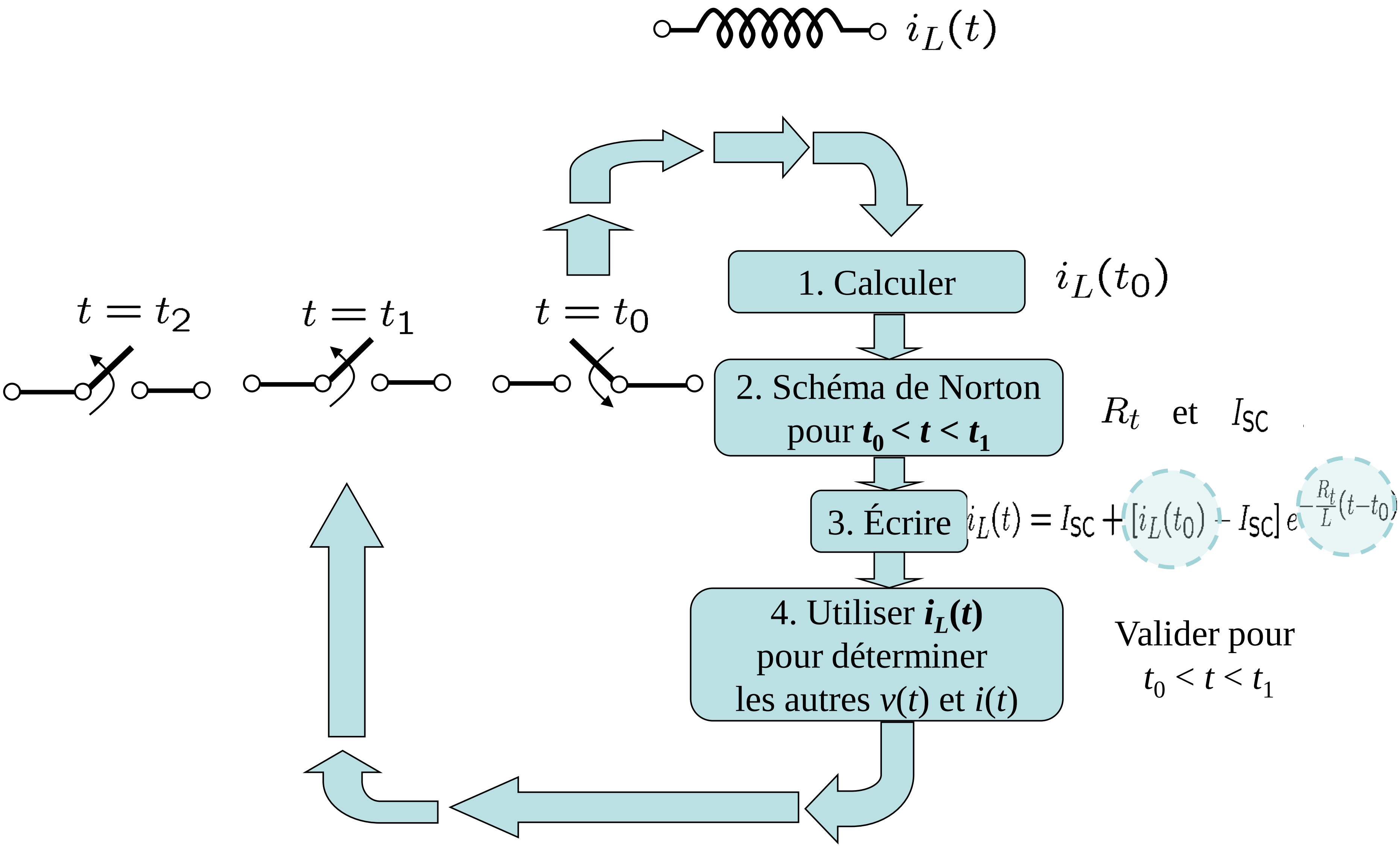
$$x(0^-) = x(0^+)$$

Commutations séquentielles

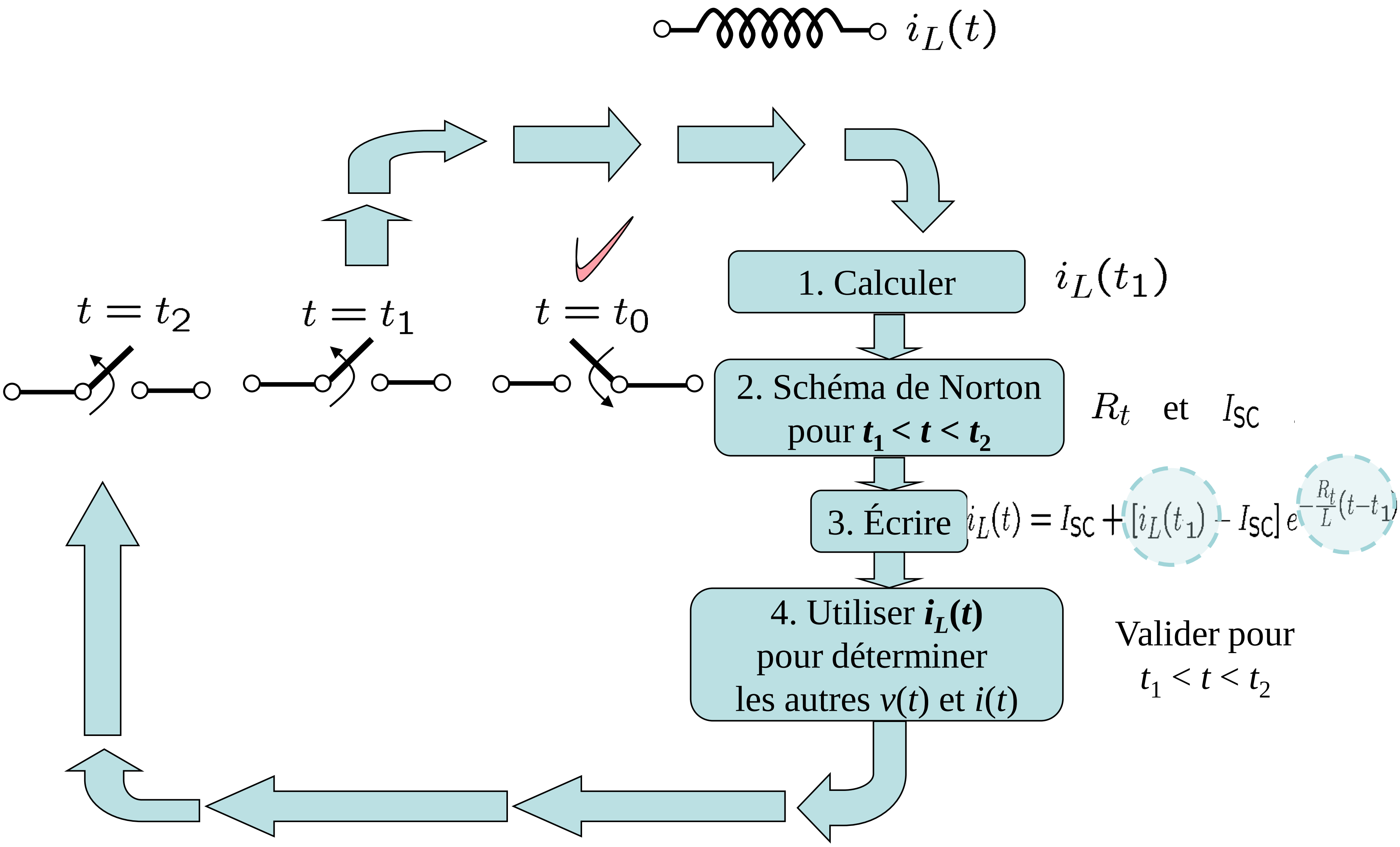


Nous avons plusieurs commutations ayant lieu à des instants différents

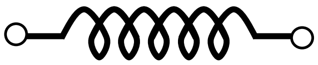
Exemple : Inductance

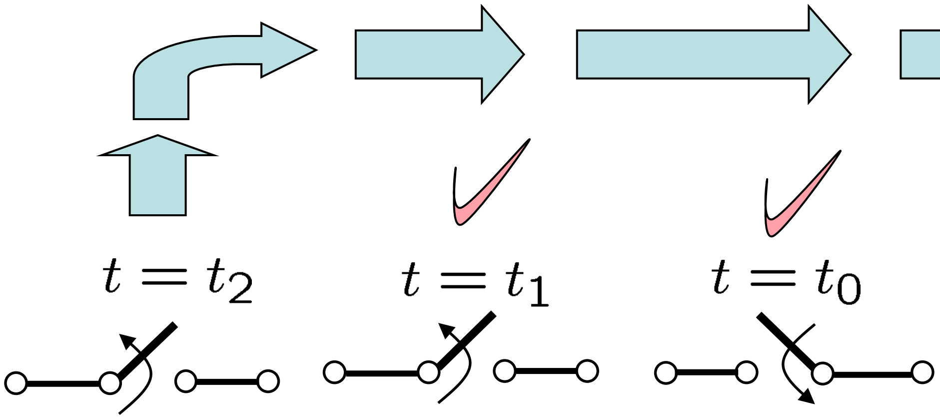


Exemple : Inductance



Exemple : Inductance





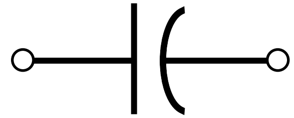
1. Calculer — $i_L(t_2)$

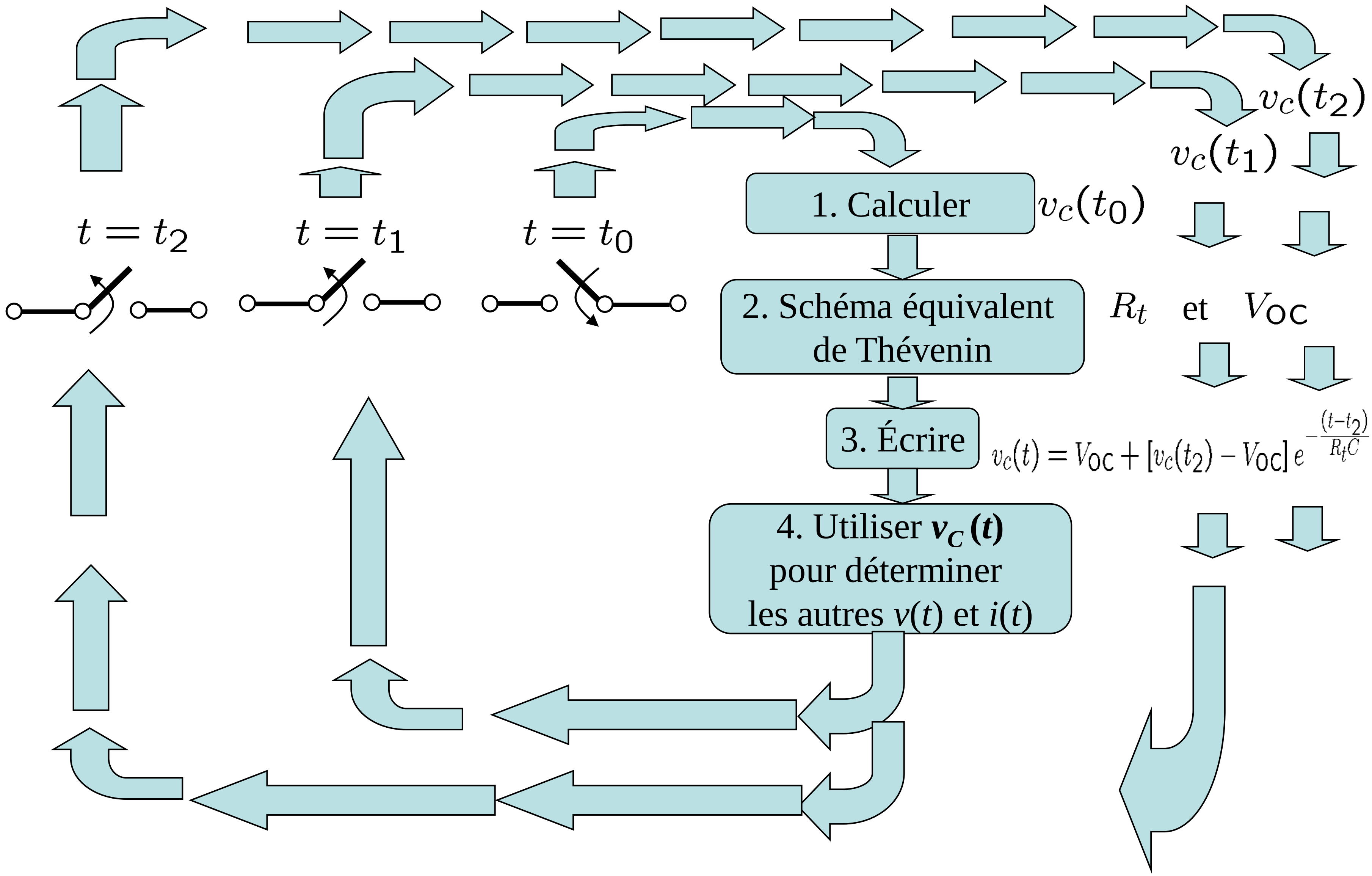
2. Schéma de Norton pour $t_2 < t$ — R_t et I_{SC}

3. Écrire $i_L(t) = I_{SC} + [i_L(t_2) - I_{SC}]\, e^{-\frac{R_t}{L}(t-t_2)}$

4. Utiliser $i_L(t)$ pour déterminer les autres $v(t)$ et $i(t)$ — Valider pour $t_2 < t$

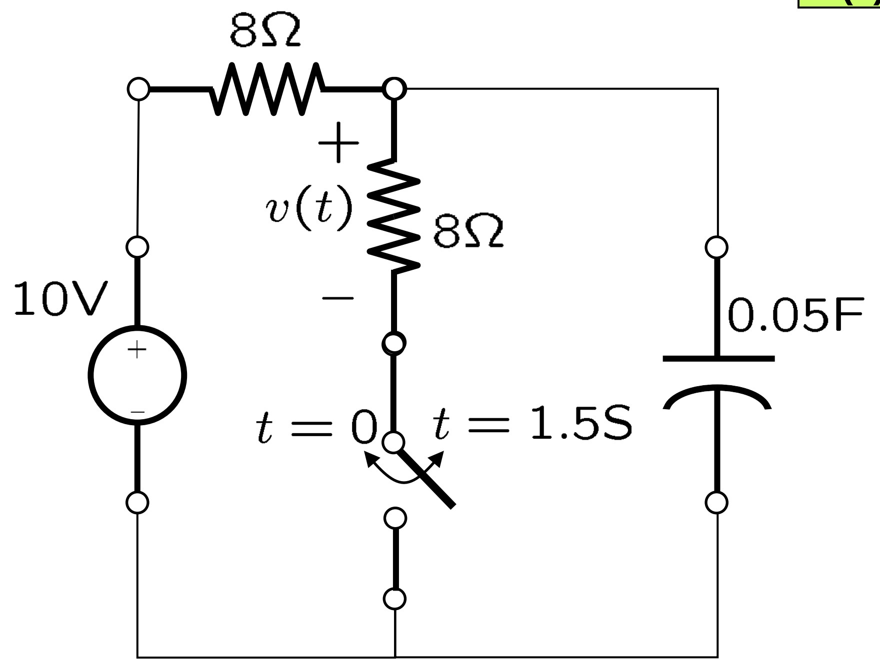
Exemple : Capacité

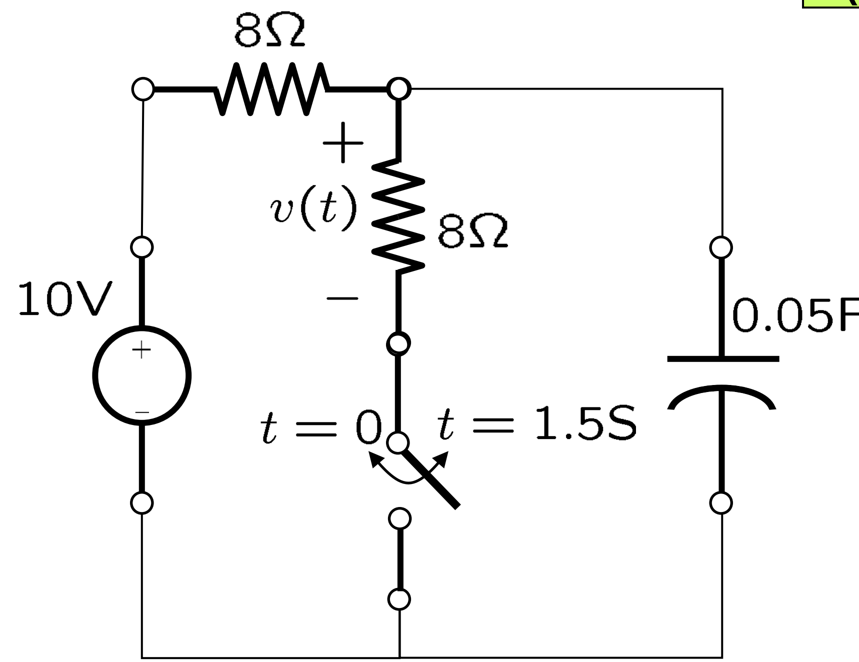




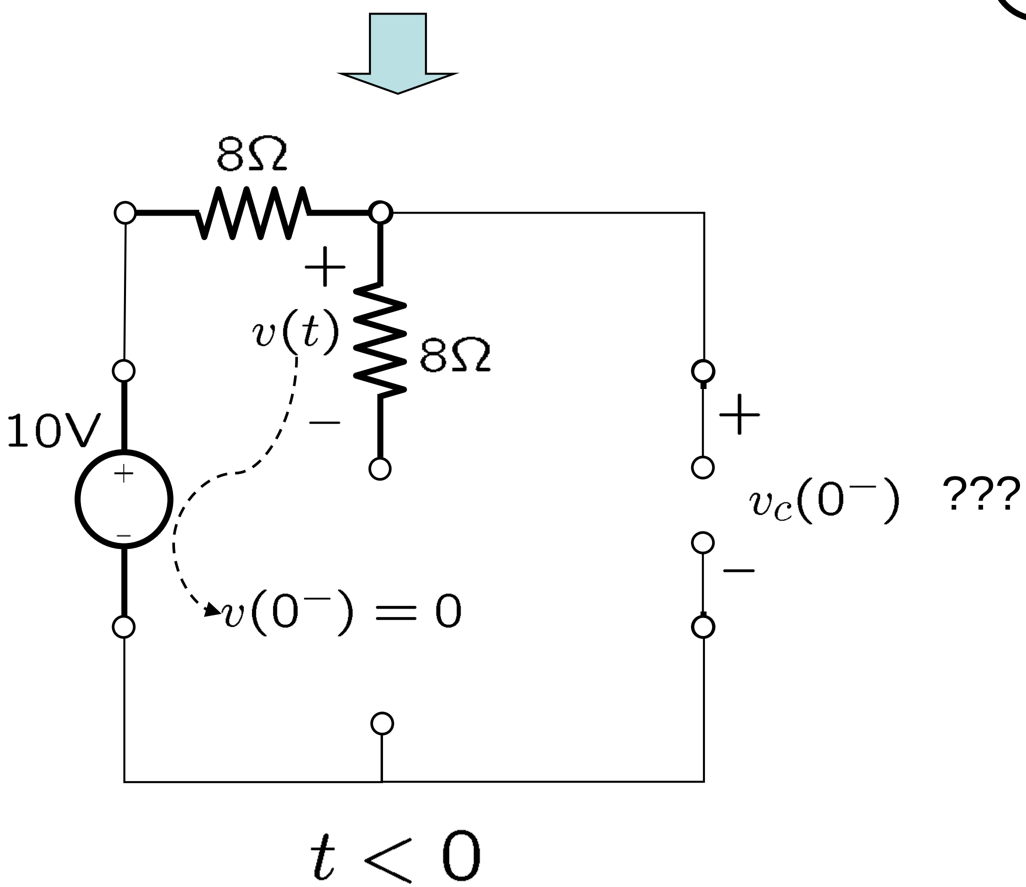
Exemple :

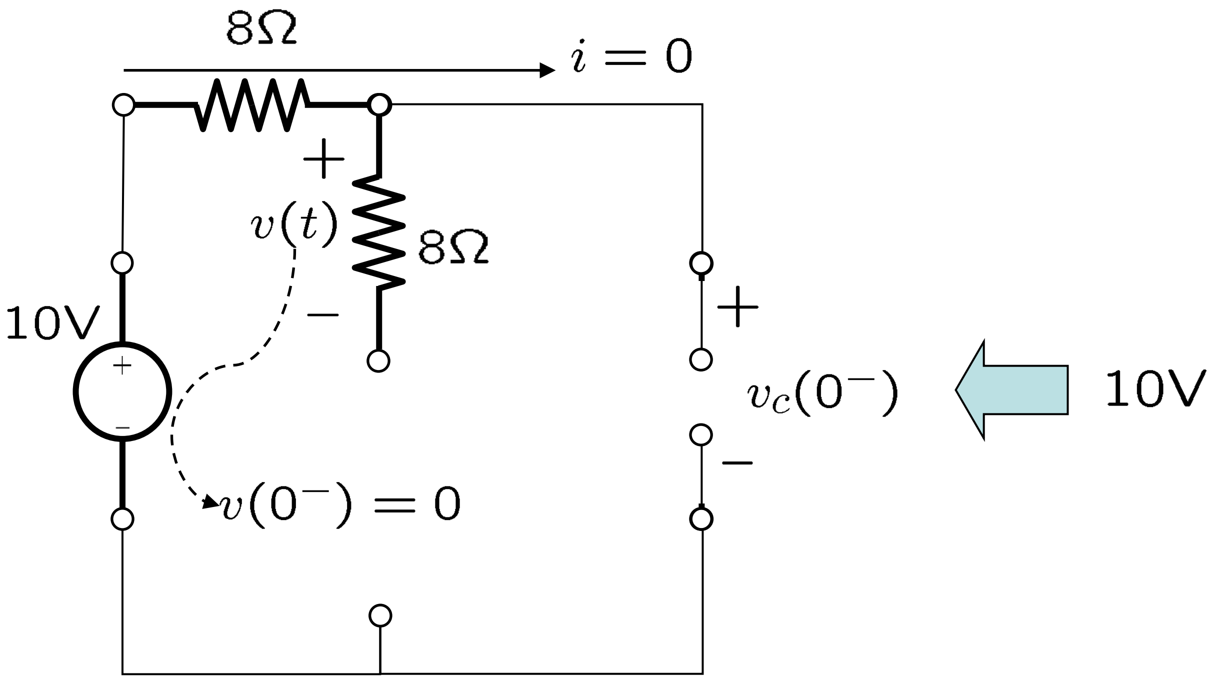
Déterminer ***v(t)*** pour ***t*** > 0





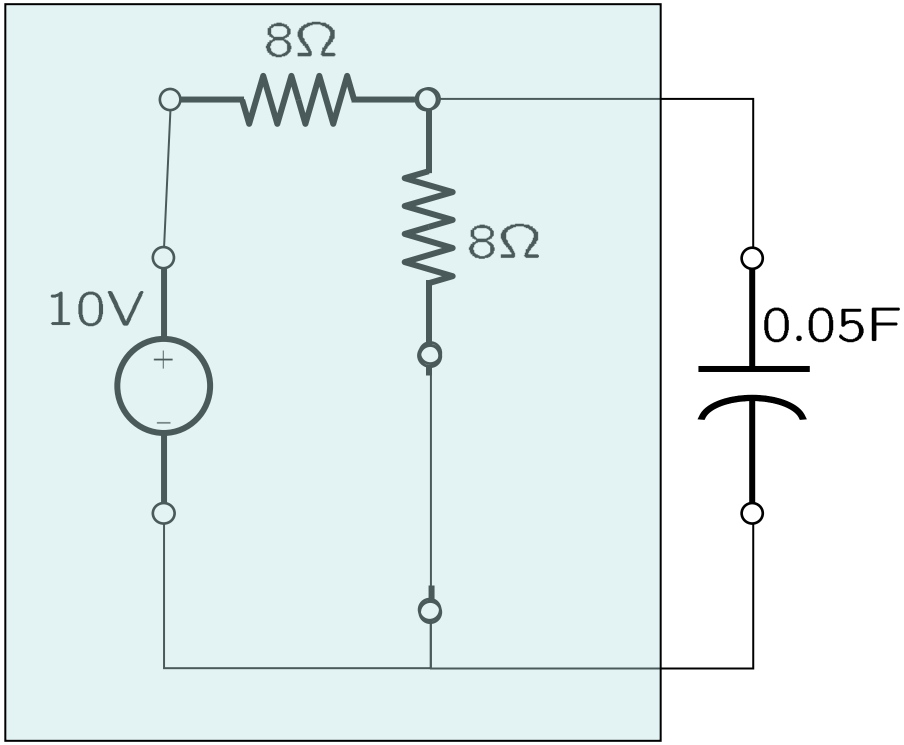
Avant t = 0 (i.e., t < 0), on suppose toujours que le circuit était dans son état permanent (*Steady state*).





$t < 0$

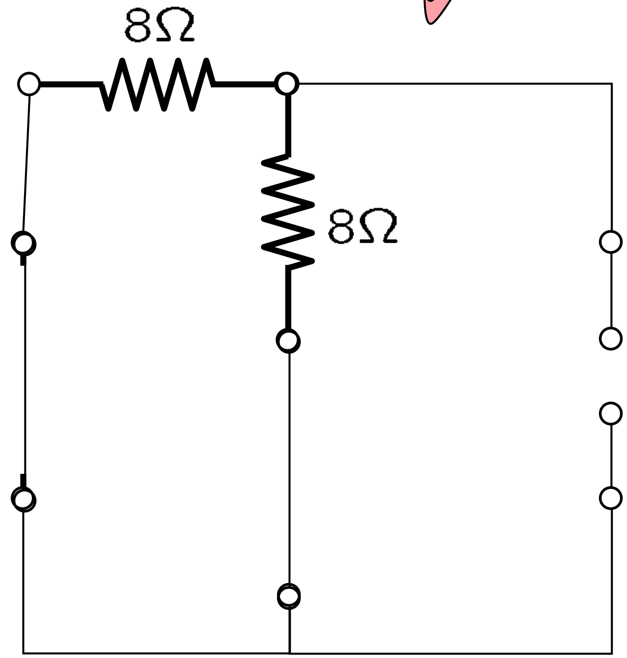
Circuit équivalent de Thévenin



$0 < t < 1.5S$

$\boxed{R_t}$ ✓

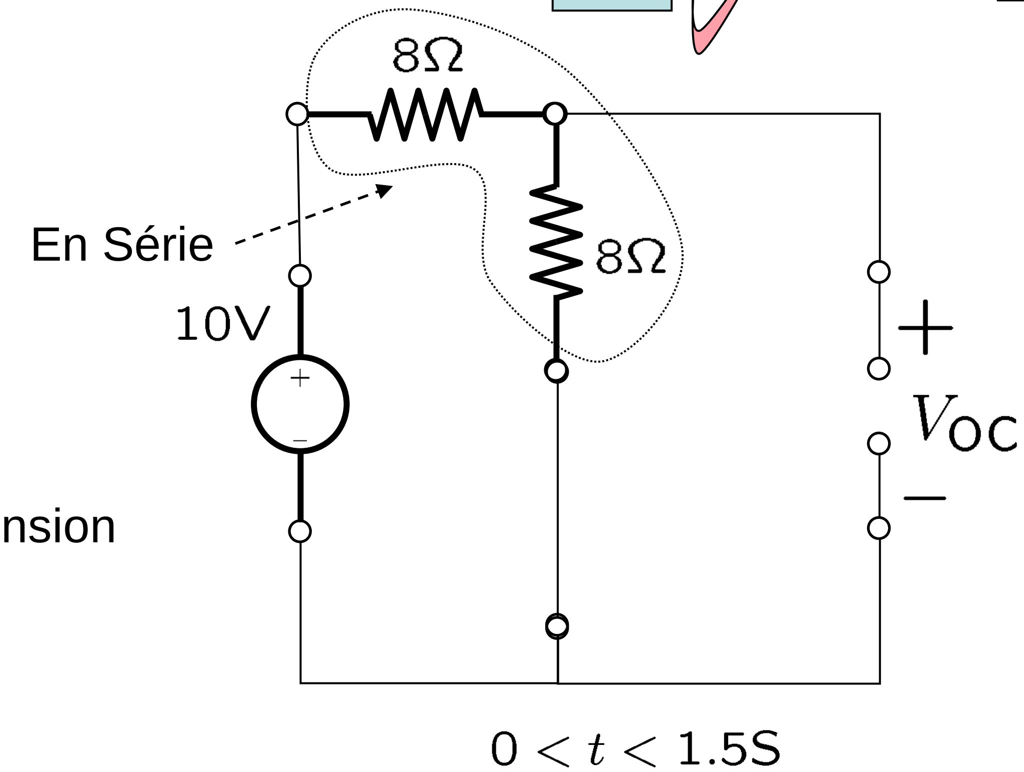
Désactiver
Source



$$R_t = (8||8) = 4\Omega$$

$$0 < t < 1.5\text{S}$$

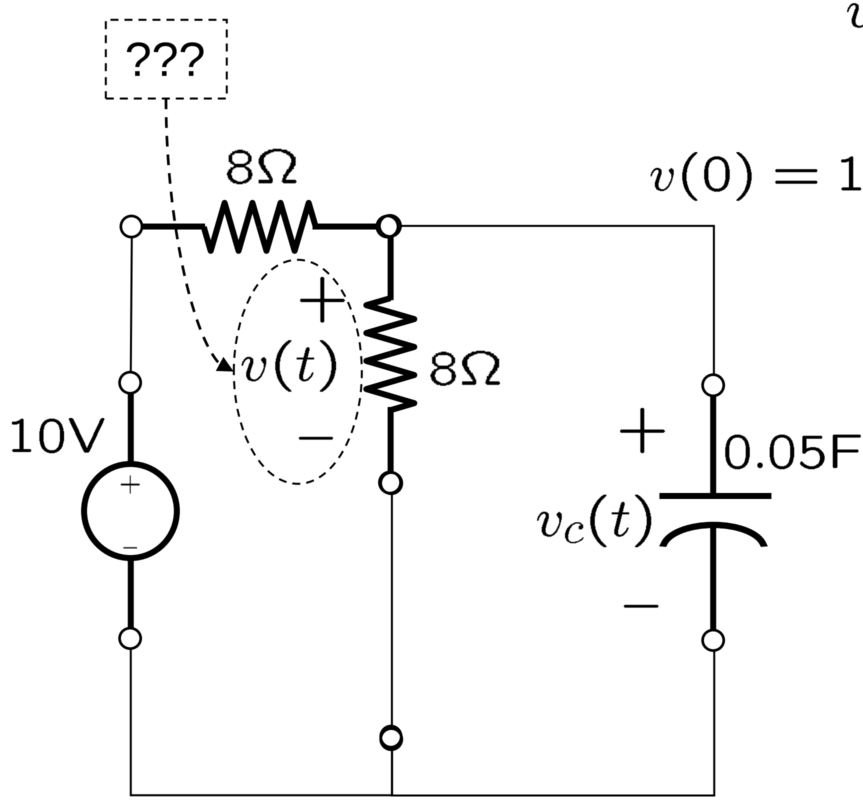
$\boxed{R_t}$ ✓ $\boxed{V_{OC}}$ ✓



Diviseur de tension

$$V_{OC} = 10^{V} \times \frac{8}{8+8} = 5\text{V}$$

$$v_c(t) = V_{OC} + [v(0) - V_{OC}]\, e^{\frac{-t}{R_t C}}$$

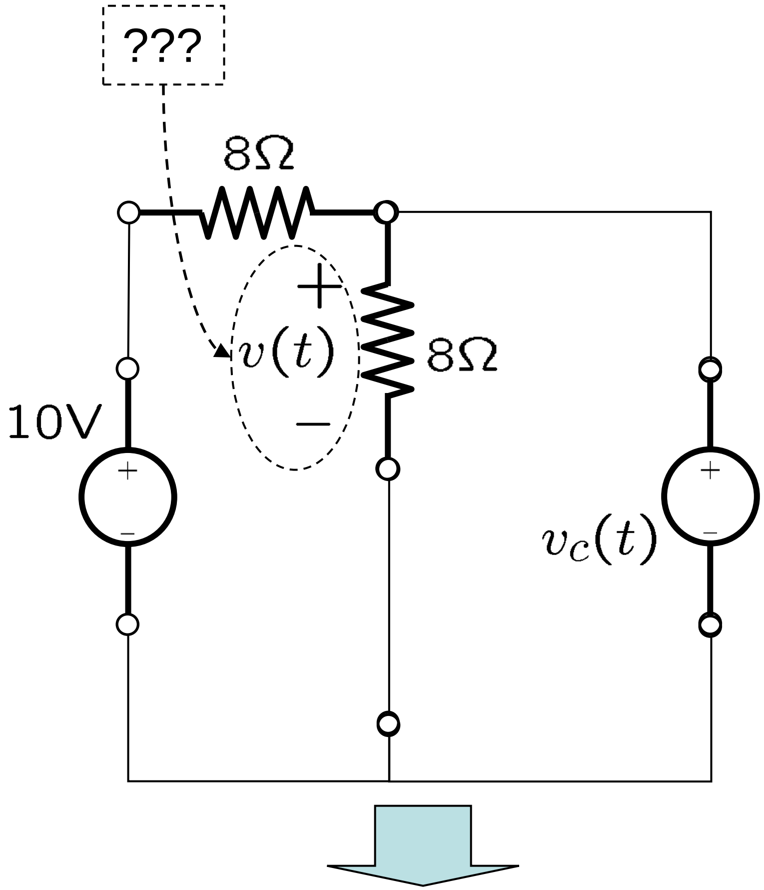


$$0 < t < 1.5\text{S}$$

$$v(0) = 10\text{V} \qquad R_t = 4\Omega \qquad V_{OC} = 5\text{V}$$

$$v_c(t) = 5 + [10 - 5]\, e^{\frac{-t}{4 \times 0.05}}$$

$$v_c(t) = 5 + 5e^{-5t}$$



Connaissant la tension $v_c(t)$ aux bornes de la capacité, on peut la remplacer par une source de tension de valeur $v_c(t)$).

$$v_C(t) = 5 + 5e^{-5t}$$

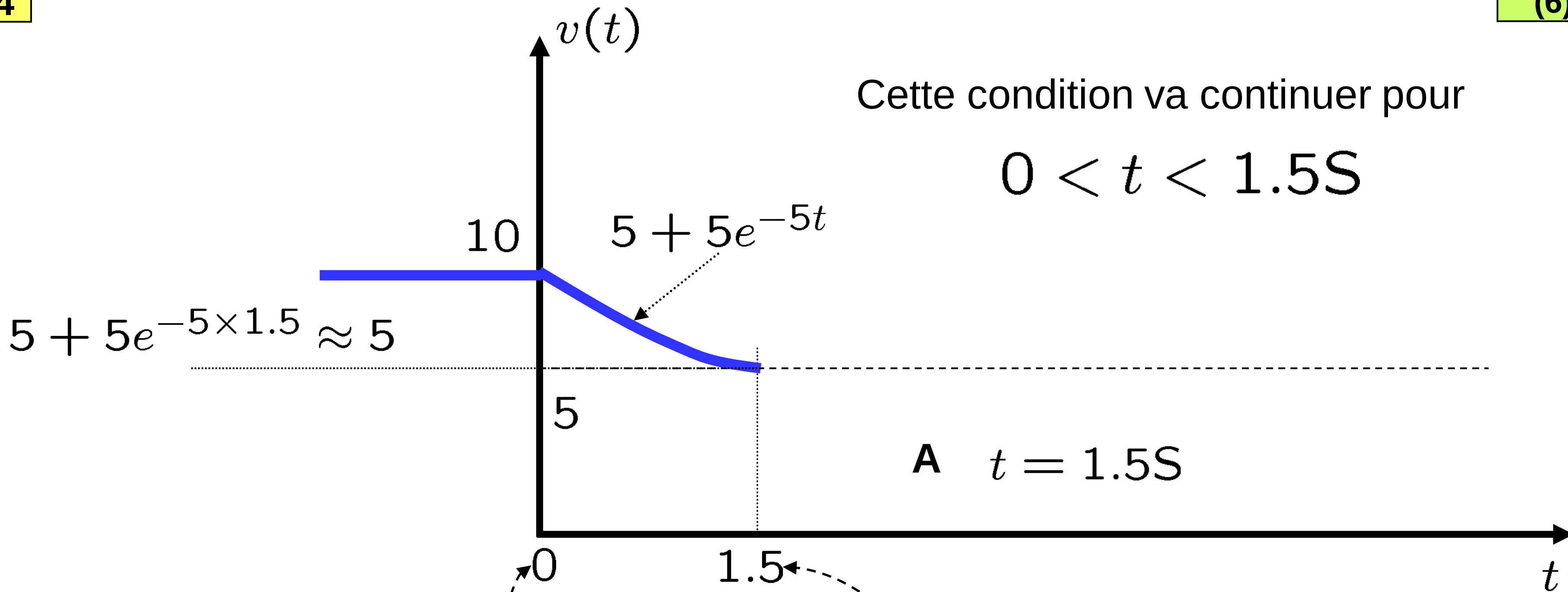
$$v(t) = v_C(t) = 5 + 5e^{-5t}$$

ATTENTION : Ceci n'est valide que pour

$$0 < t < 1.5\text{S}$$

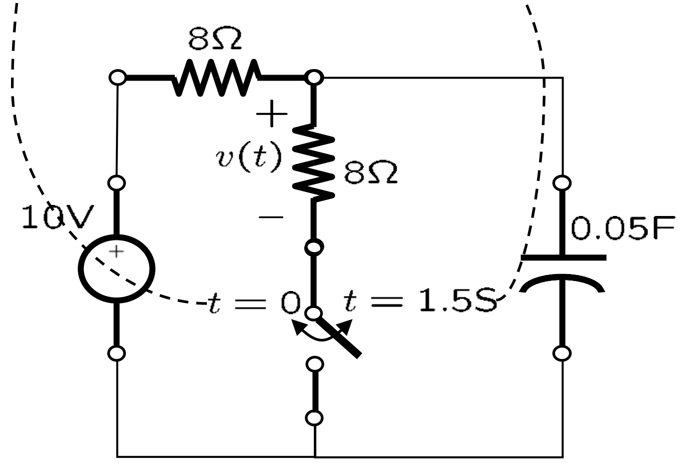
Cette condition va continuer pour

$$0 < t < 1.5\text{S}$$



A $t = 1.5\text{S}$

L'interrupteur s'ouvre encore



Fermeture à t = 0s

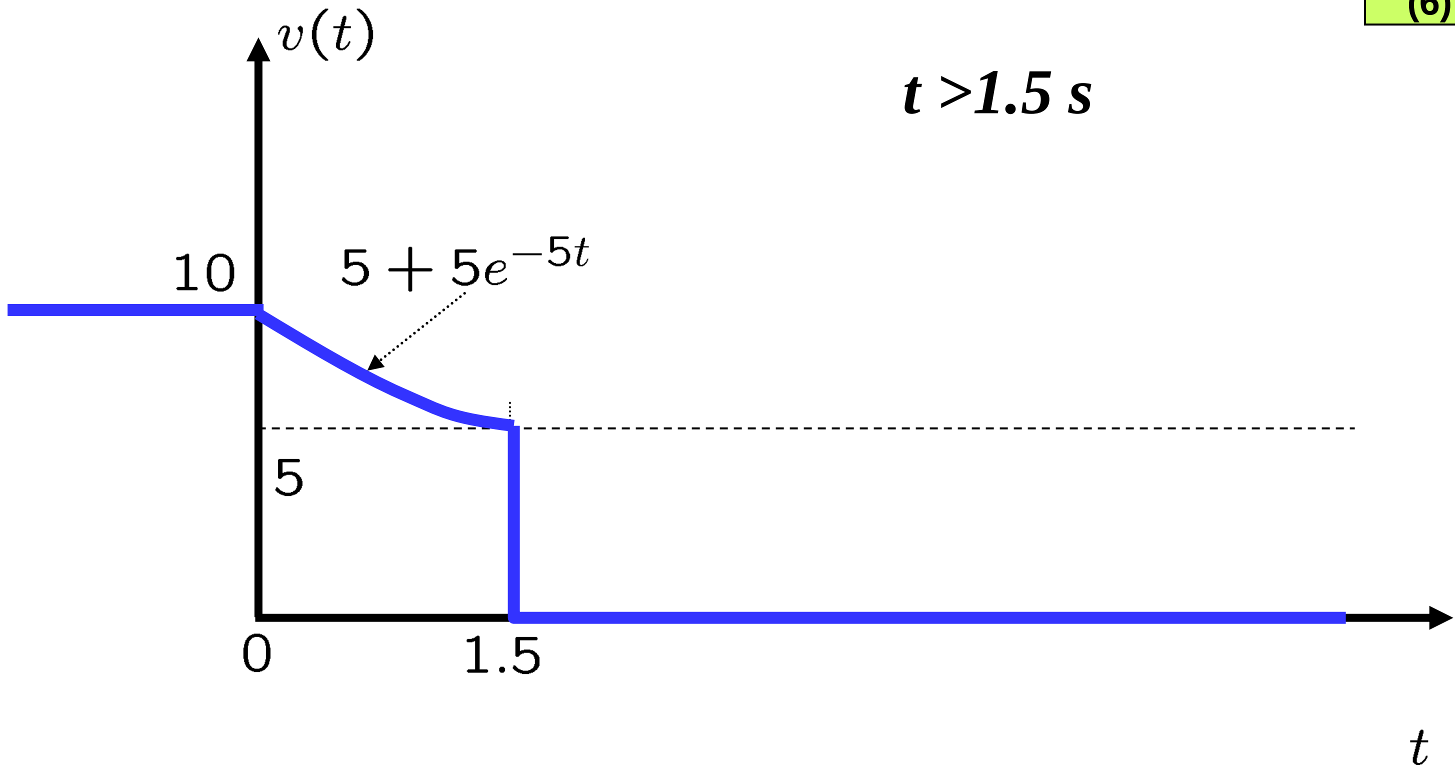
Ouverture à t = 1.5s

Pour continuer **APRÈS**
t = 1.5 s

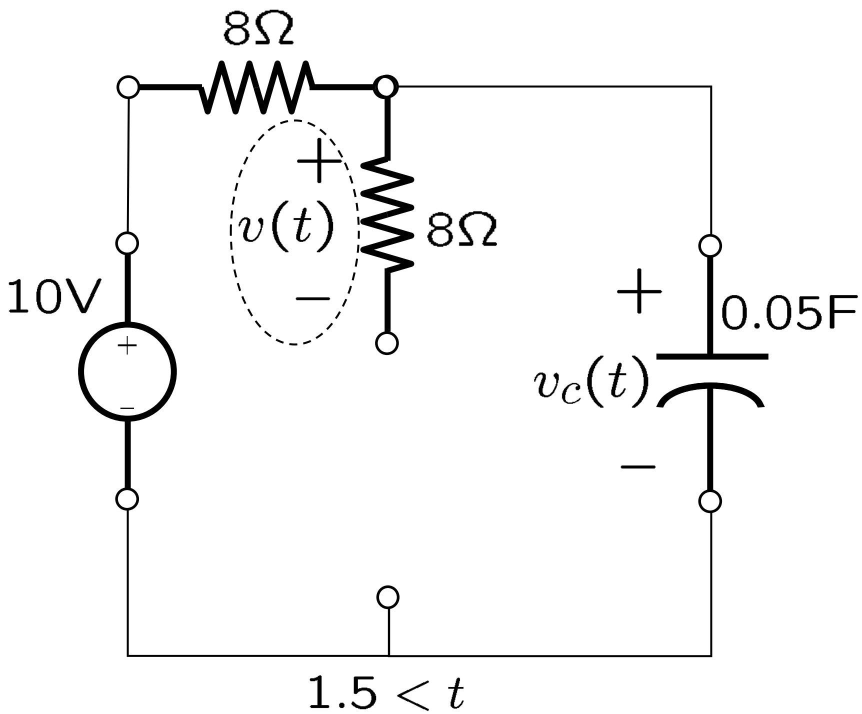
nous avons besoin de

$$\boxed{v_C(t)\big|_{t=1.5S}}$$

$$v_C(1.5) = 5 + 5e^{-5\times 1.5} = 5.0028 \approx 5$$



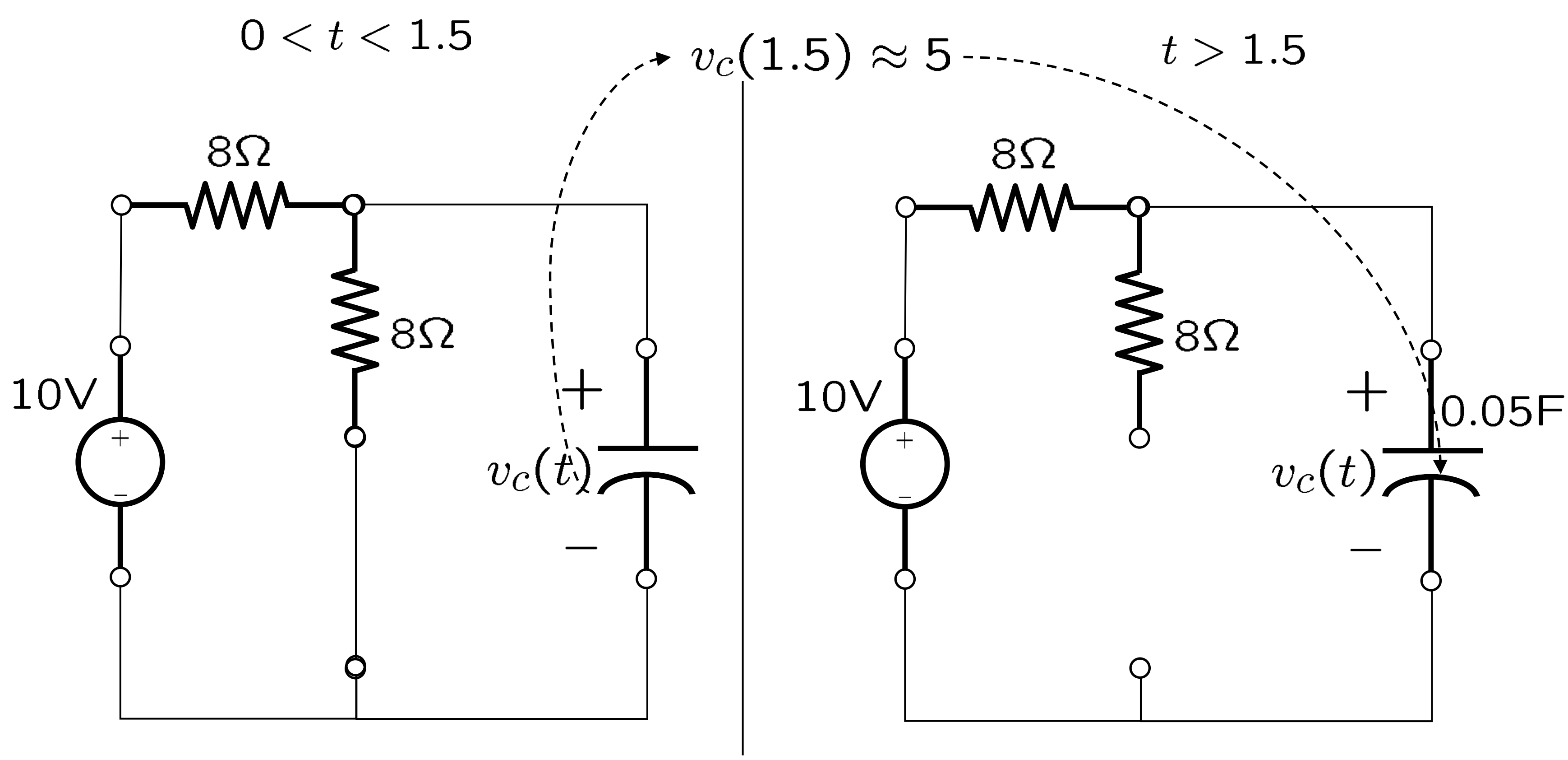
t >1.5 s



L'interrupteur s'ouvre de nouveau et donc pas de courant qui traverse la résistance de 8Ω, forçant ainsi ***v*(*t*)** à être égale à zéro instantanément.

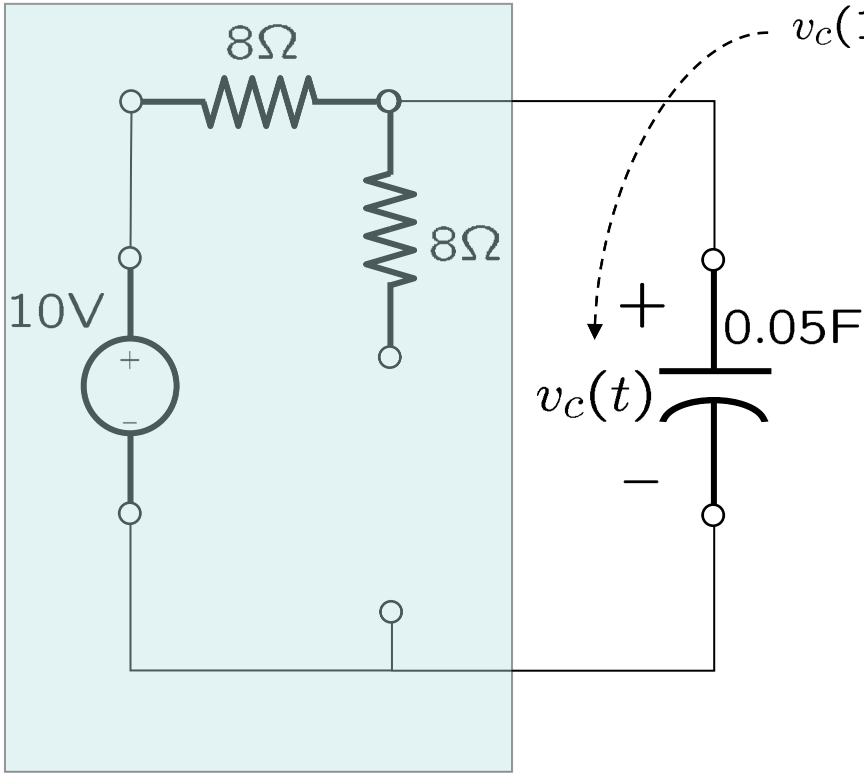
SI

nous devions calculer $\boldsymbol{v_c(t)}$ juste après que t = 1.5s, nous aurions dû procéder comme suit :



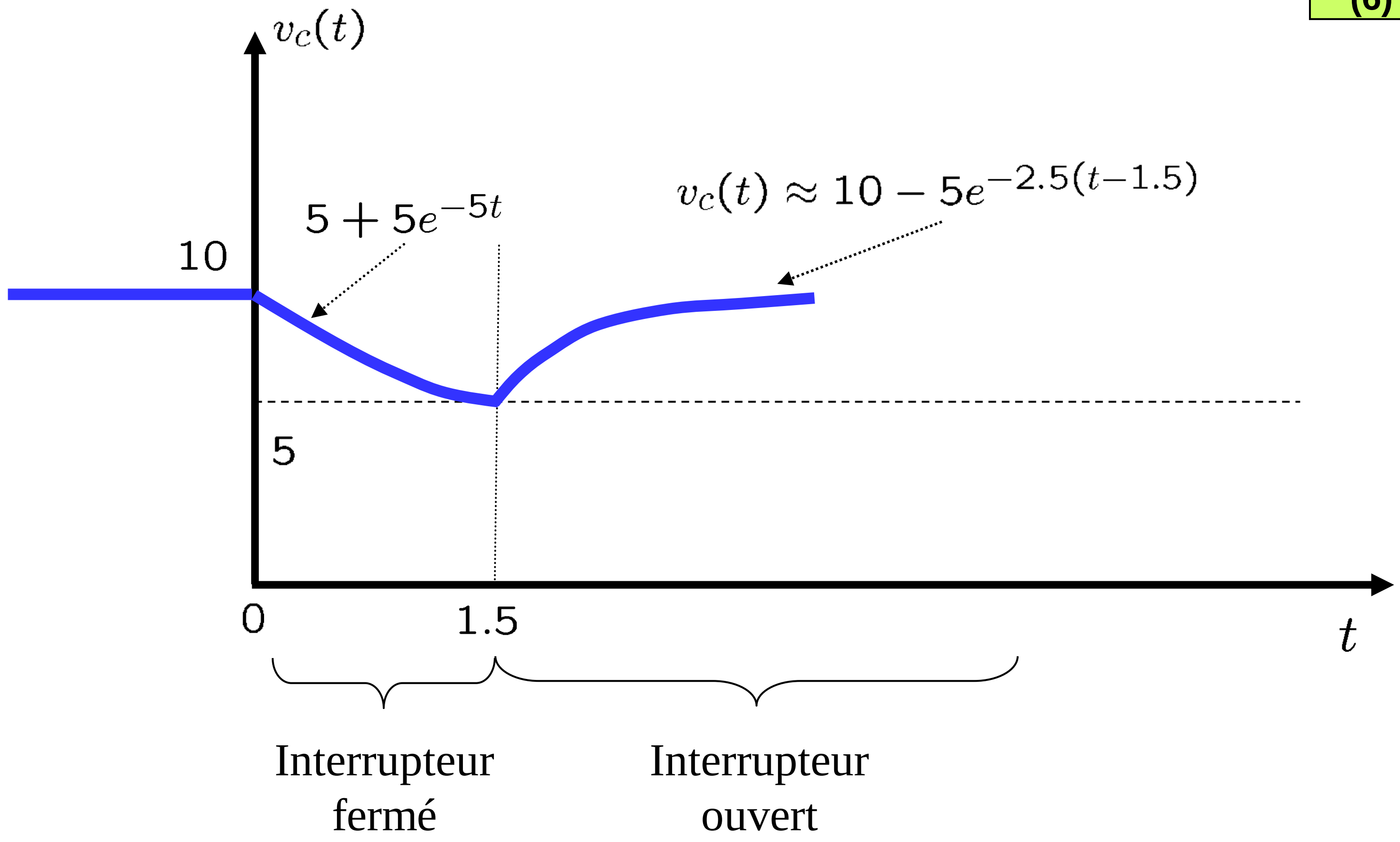
$t > 1.5$

$v_C(1.5) \approx 5$



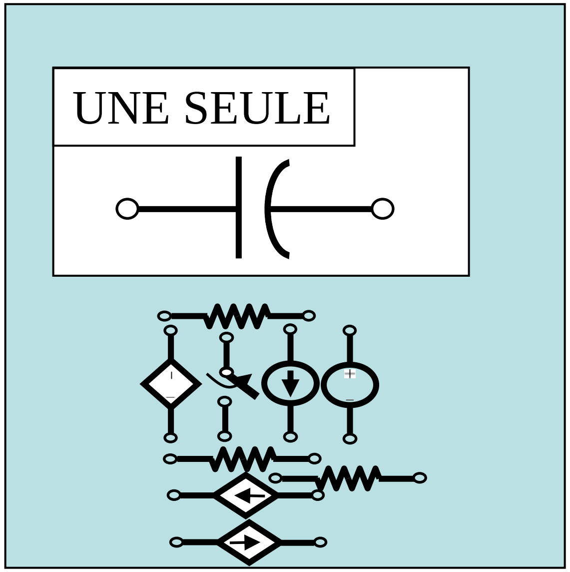
$$v_C(t) = V_{OC} + \left[v_C(1.5) - V_{OC}\right] e^{-\frac{t-1.5}{R_t C}}$$

Thévenin $\begin{cases} R_t = 8\Omega \\ V_{OC} = 10\text{V} \end{cases}$

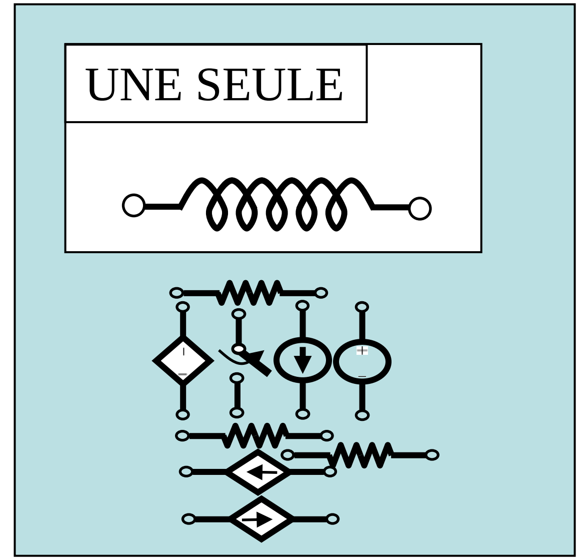

$v_c(t)$
$5+5e^{-5t}$
$v_c(t) \approx 10 - 5e^{-2.5(t-1.5)}$
10
5
0
1.5
t
Interrupteur fermé
Interrupteur ouvert

Circuits RC et RL : stabilité

CIRCUITS ÉTUDIÉS :



OU



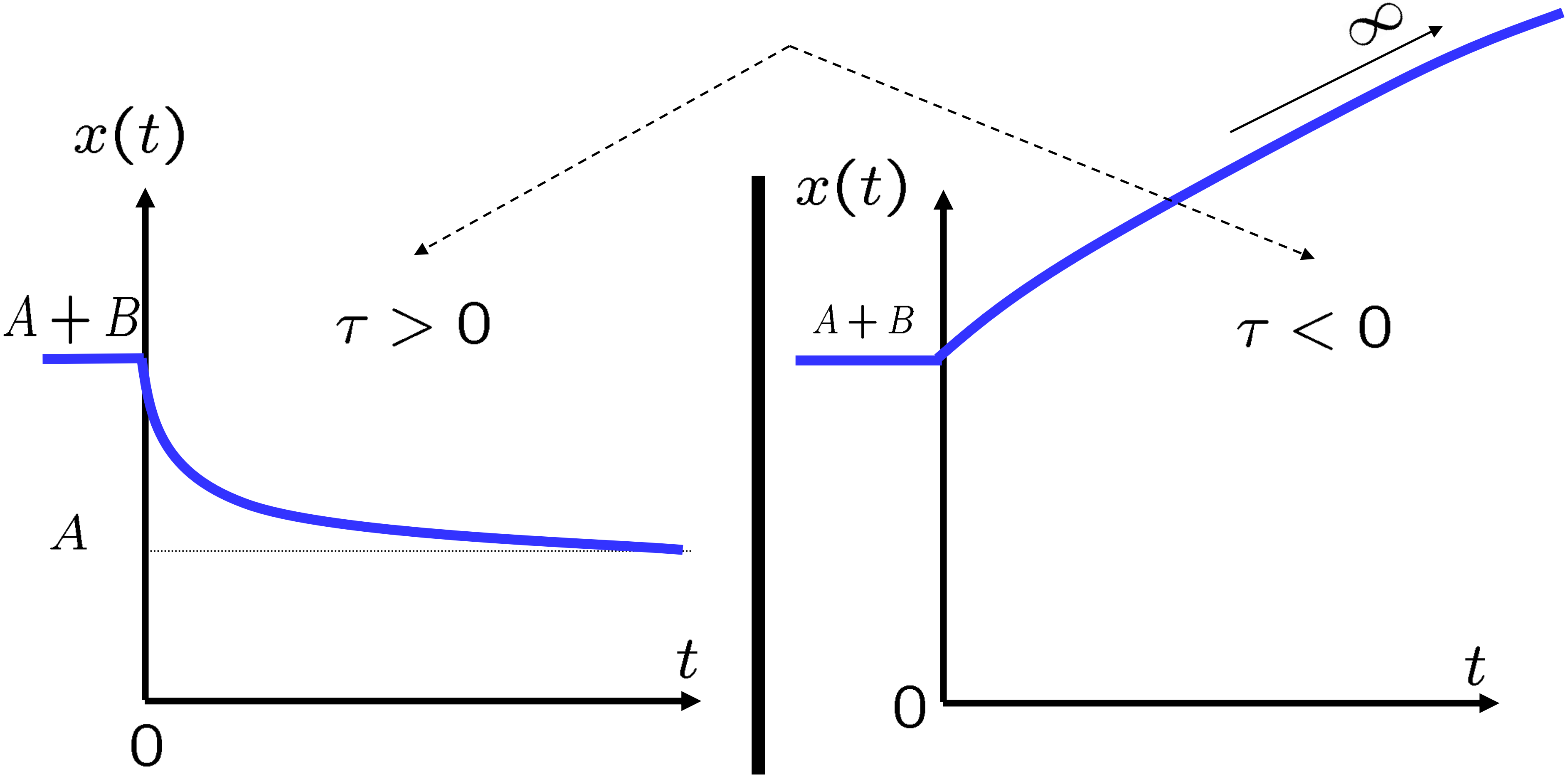
Et la réponse était sous la forme :

$$x(t) = A + Be^{-t/\tau}$$

$$\tau = R_t C$$

$$\tau = \frac{L}{R_t}$$

CIRCUIT STABLE ?



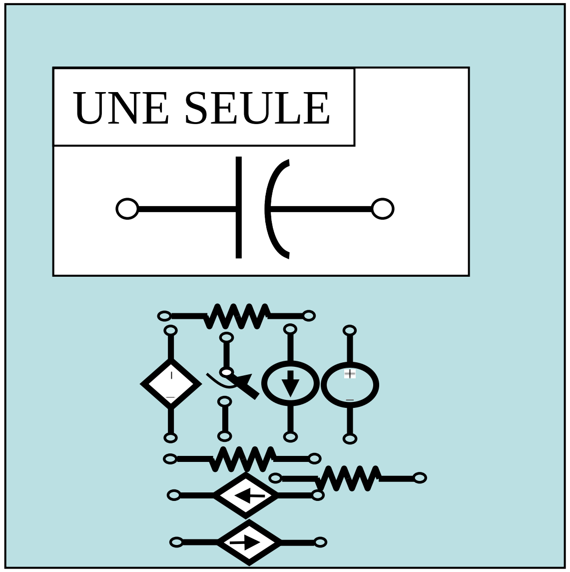
$$\boxed{x(t) = A + Be^{-t/\tau}}$$

Circuit
Stable

Circuit
instable

Comment un circuit peut être instable ?

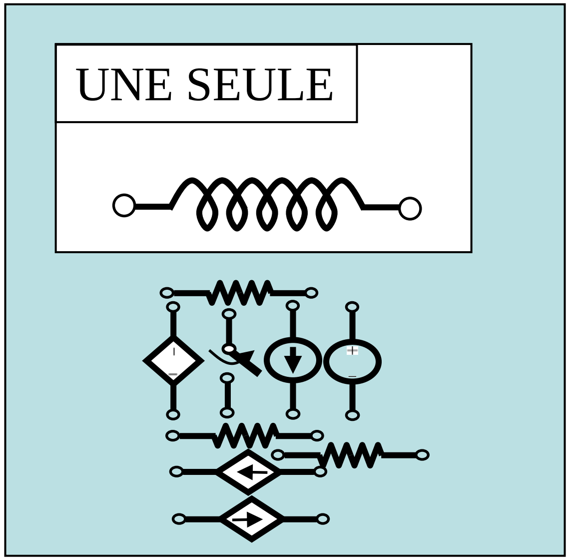
$$\tau = R_t C \qquad \tau < 0 \qquad \tau = L/R_t$$



Comme

$$C > 0$$

$$L > 0$$



Le circuit est instable si sa résistance équivalente de Thévenin (Norton) $\boldsymbol{R_t}$ est négative

SI $R_t < 0$ **Circuit instable**

DONC

pour concevoir un circuit stable du ***premier ordre***

(c.-à-d. contenant un seul élément qui stocke de l’énergie)

La ***résistance*** ***équivalente*** de Thévenin (ou Norton)

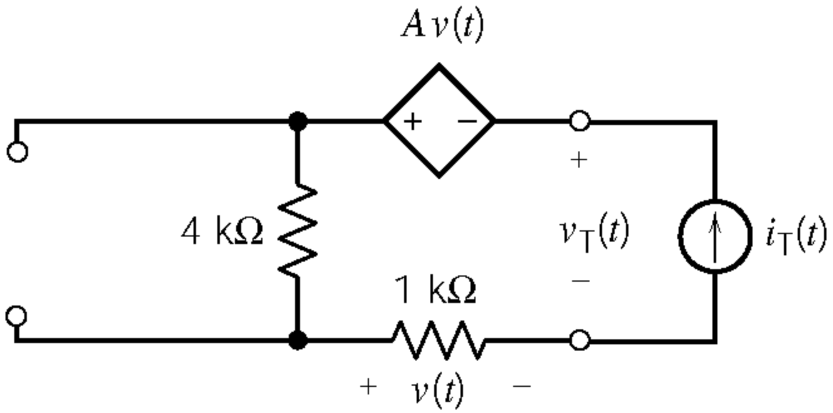
vue par la capacité (ou l’inductance)

doit être ***positive***

Exemple de conception pour assurer la stabilité

Calculer A pour que le circuit soit stable

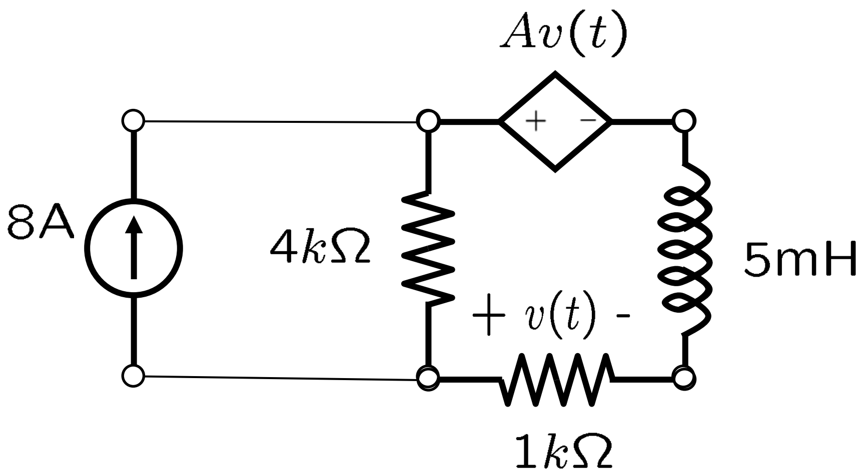
Circuit équivalent de Thévenin :



$$v(t) = 1000\, i_T(t)$$

$$A\,v(t) + v_T(t) - v(t) - 4000\, i_T(t) = 0$$

$$\therefore v_T(t) = (1 - A)\,1000\, i_T(t) + 4000\, i_T(t)$$



$$R_t = \frac{v_T(t)}{i_T(t)} = (5 - A) \times 1000$$

Circuit stable : $A < 5$

Merci de votre attention

Fin du chapitre 6