CH. 8. Interpolation et Extrapolation :

§ 8.1. Polynômes d'interpolation de Lagrange :

1 - Introduction :

Dans la pratique et souvent on ne collecte que des points $(x_i, f_i = f(x_i))$, $i = 1$ à n, de données, où f est une fonction qu'on veut savoir à partir de ces points. Comme il y a une infinité de fonctions qui passent par ces points, alors on cherchera quelques unes qui sont "simples" à déterminer à partir de ces points collectés et qui approcheront les valeurs de f en un point x.

$(n+1)$ points $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$.

Définition : Si $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $x \in [x_0, x_n]$, alors approcher $f(x)$ on parle d'interpolation. Si $x \notin [x_0, x_n]$, alors approcher $f(x)$ est dit extrapolation.

2 - Polynômes de Lagrange :

Définition : Soient les $(n+1)$ points $(x_0, f_0 = f(x_0))$, $(x_1, f_1 = f(x_1))$, $\ldots$, $(x_n, f_n = f(x_n))$, où $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

On définit $(n+1)$ polynômes, dits polynômes de la base de Lagrange et notés $L_k(x)$, $0 \leq k \leq n$, par : $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$

$\cancel{(x - x_k)}$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x - x_k)}$$

$(x_k - x_k) = 0$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)} \; ; \; L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)}$$

Propriétés de $L_k(x)$: 1°/ $L_k(x)$ est de degré $\underline{\underline{n}}$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

2°/ On a : $\begin{cases} L_k(x_k) = 1 \\ L_k(x_i) = 0 \quad \text{pour tout } i \neq k. \end{cases}$

Exples : 1°/ Pour $n=1$, on a deux points on a :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \quad ; \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}.$$

2°/ Pour $n=2$, on a :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad ; \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad ;$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

3°/ Pour $n=3$, on a :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}.$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Définition : Pour les points de données (x_i, f_i), $0 \leq i \leq n$, tels que introduits dans la définition précédente, on définit le polynôme d'interpolation de Lagrange (de degré n) de $f(x)$ par

$$\boxed{P_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \cdots + f_n L_n(x)}.$$

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Propriétés de $P_n(x)$: 1°/ $P_n(x)$ est de degré n.

N.B. : $P_n(x_i) = f_i$

2°/ $P_n(x)$ interpole $f(x)$; c'est-à-dire,

pour $x \in [x_0, x_n]$, on a $f(x) \simeq P_n(x)$.

3 - Erreur lors de l'interpolation avec $P_n(x)$:

Règle : Soient les points $(x_i, f_i = f(x_i))$, $i = 0$ à n, tels que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Supposons que f est dérivable $(n+1)$ fois sur un intervalle I contenant $[x_0, x_n]$. Alors on a l'erreur de l'interpolation par $P_n(x)$ est

$$E = \left| f(x) - P_n(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \right|$$

pour un certain $t \in I = [x_0, x_n]$.

En particulier, si $m \leq \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq M$, alors on a :

$$\frac{m}{(n+1)!} \left|(x-x_0)\cdots(x-x_n)\right| \leq E \leq \frac{M}{(n+1)!} \left|(x-x_0)\cdots(x-x_n)\right|$$

On appelle : Erreur minimale : E_{min} — Erreur maximale : E_{max}

Exple : Soient les points (x_i, f_i) suivants : $(\underset{x_0}{1.2}, \underset{f_0}{2.3})$, $(\underset{x_1}{1.9}, \underset{f_1}{3.5})$ et $(\underset{x_2}{2.3}, \underset{f_2}{4.9})$. $f_i = f(x_i)$.

a) Trouvez $P_2(x)$ à 4 décimales près. coefficients

b) Interpolez $f(2)$.

c) Supposez que $\underset{m}{0.5} \leq |f'''(x)| \leq \underset{M}{2}$ sur $[1, 3]$.

Donnez E_{min} et E_{max}.

Solution : a) On a besoin des $L_k(x)$.

Ici : $L_0(x) = \dfrac{(x-1.9)(x-2.3)}{(1.2-1.9)(1.2-2.3)} = 1.2987x^2 - 5.4545x + 5.6753.$

$$L_1(x) = \frac{(x-1.2)(x-2.3)}{(1.9-1.2)(1.9-2.3)} = -3.5714\,x^2 + 12.5000\,x - 9.8571$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1.2)(x-1.9)}{(2.3-1.2)(2.3-1.9)} = 2.2727\,x^2 - 7.0454\,x + 5.1818$$

Donc
$$\boxed{\begin{aligned} P_2(x) &= f_0 \cdot L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) . \\ &= 1.6233\,x^2 - 3.3178\,x + 3.9442. \end{aligned}}$$

b/ On a $f(2) \simeq P_2(2) = \underline{3.8018}$

c/ On a
$$E_{min}^{(2)} = \underbrace{0.5}_{m} \cdot \left| \frac{(2-x_0)(2-x_1)(2-x_2)}{3!} \right|$$
$$= \cancel{0.2417} \quad 2.10^{-3}$$

et
$$E_{max}^{(2)} = \underbrace{2}_{M} \left| \frac{(2-x_0)(2-x_1)(2-x_2)}{3!} \right|$$
$$= \cancel{0.9667} \quad 8.10^{-3}$$

Exercice :
Soit $f(x) = \ln(x)$. On veut interpoler $f(1.8)$ à partir de $(x_0 = 1, f(x_0) = 0)$, $(x_1 = 1.5, f(1.5) = 0.405)$, $(x_2 = 2, f(2) = 0.693)$ à 3 décimales près.

a/ Trouvez $P_2(x)$ et donnez $f(1.8)$ à 3 décimales près.

b/ Donnez Emax et Emin sur $[1,2]$.

Pour l'erreur, bornez $|f'''(x)|$ pour $x \in [1,2]$. $\left(f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3} \right)$

$$\overbrace{\frac{1}{4}}^{m} \leq |f'''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leq \overbrace{2}^{M}.$$