Développement en séries de Taylor et MacLaurin (suite)

A retenir :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ces développements sont valables pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple

Donner un développement en série entière de $\int e^{-x^2} dx$ puis calculer $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ à 10^{-3} près.

Solution

On a : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\int e^{-x^2} dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \right) dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Scanned with CamScanner

$$\int e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}dx \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + C \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \Big|_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!}$$

C'est une série alternée. Donc $R_k \leq b_{k+1}$ avec $b_k = \frac{1}{(2k+1)k!}$

On a pour $k = 4 \Rightarrow b_{k+1} = b_5 = \frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{11 \times 120} < 10^{-3}$

D'où

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \simeq \underbrace{1}_{k=0} - \underbrace{\frac{1}{3}}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{10}}_{k=2} - \underbrace{\frac{1}{42}}_{k=3} + \underbrace{\frac{1}{216}}_{k=4} \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

Multiplication et division de séries entières

On peut multiplier ou diviser les séries entières comme des polynômes. On cherche seulement les premiers termes car les calculs pour les termes ultérieurs deviennent fastidieux.

Exemple

Déterminer les 3 premiers termes non nuls de la série de MacLaurin de $e^x \sin(x)$.

Scanned with CamScanner

Solution

$$e^x \sin(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)x$$
$$+ \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(-\frac{x^3}{6}\right)$$
$$+ \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(\frac{x^5}{5!}\right)$$
$$+ \cdots$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \cdots$$
$$- \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \cdots$$
$$+ \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{5!} + \cdots$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$$e^x \sin(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple

Déterminer les 2 premiers termes non nuls de la série de MacLaurin de $tg(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Solution

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Scanned with CamScanner

$$
\begin{array}{l|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots \\
\cline{2-2}
x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \cdots & x + \frac{x^3}{3} \\
\cline{1-1}
0 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots & \\
\quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \cdots & \\
\cline{1-1}
\quad 0 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots &
\end{array}
$$

Donc $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots$

Séries binomiales

Soit $k \in \mathbb{R}$. On cherche la série de MacLaurin de la fonction $f(x) = (1+x)^k$.

La série est donnée par $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Cherchons $f^{(n)}(0) = ?$

$f(x) = (1+x)^k \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = k(1+x)^{k-1} \Rightarrow f'(0) = k$

$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \Rightarrow f''(0) = k(k-1)$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)\,x^{k-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$

Scanned with CamScanner

D'où la série de MacLaurin de $f(x) = (1+x)^k$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n$$

Etudions sa convergence.

$$a_n = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n)\,x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n)}{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|k-n|\,|x|}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{k}{n}-1\right|}{1+\frac{1}{n}} |x| = |x|$$

Donc la série converge pour $|x| < 1$.

Théorème

Soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n, \text{ pour } |x| < 1 \text{ où}$$

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} \text{ pour } n \geq 1$$

$$\binom{k}{0} = 1$$

Note :

pour k entier positif, on a

$$\binom{k}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > k \\ \dfrac{k!}{n!(k-n)!} & \text{si } 0 \leq n \leq k \end{cases}$$

On retrouve la formule habituelle

$$(1+x)^k = \underbrace{\binom{k}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{k}{1}}_{=k} x + \binom{k}{2} x^2 + \cdots + \underbrace{\binom{k}{k-1}}_{=k} x^{k-1} + \underbrace{\binom{k}{k}}_{=1} x^k$$

pour $k = 2$, on a

$$(1+x)^2 = \binom{2}{0} + \binom{2}{1} x + \binom{2}{2} x^2$$
$$= 1 + 2x + x^2$$

pour $k = 4$, on a

$$(1+x)^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} x + \binom{4}{2} x^2 + \binom{4}{3} x^3 + \binom{4}{4} x^4$$
$$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

pour $k = 3$, on a

$$(1-x)^3 = \binom{3}{0} + \binom{3}{1}(-x) + \binom{3}{2}(-x)^2 + \binom{3}{3}(-x)^3$$
$$= 1 + 3(-x) + 3(-x)^2 + 1(-x)^3$$
$$= 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$

Scanned with CamScanner

<u>Exemple</u>

Développer $\frac{1}{(1+x)^3}$ en série de MacLaurin

<u>solution</u> :

$$\frac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3}. \quad \text{Ici } k=-3$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} x^n, \quad \forall\ |x|<1$$

$$\binom{-3}{n} = \frac{-3(-4)(-5)\cdots(-3-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n 3(4)(5)\cdots(3+n-1)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{3(4)(5)\cdots(n+2)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{3(4)(5)\cdots(n+2)}{2(3)(4)(5)\cdots(n)}$$

$$= (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

D'où

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n, \quad |x|<1$$

<u>Exemple</u>

Déterminer la série de MacLaurin de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ et son rayon de convergence.

<u>Solution</u> .

Scanned with CamScanner

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = (4-x)^{-1/2} = \left(4\left(1-\frac{x}{4}\right)\right)^{-1/2}$$

$$= 4^{-1/2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^{n}, \text{ pour } \left|-\frac{x}{4}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^{n}\frac{x^{n}}{4^{n}}, \text{ pour } |x| < 4$$

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^{n}}{2^{n}}\,\frac{(1).(3).(5).\,\cdots\,(2n-1)}{n!}$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1).(3).(5).\ldots(2n-1)}{8^{n}\,n!}\,x^{n}, \quad |x| < 4$$

Rayon de convergence $R = 4$.

Scanned with CamScanner