Ainsi, une erreur de 0,2 cm sur chaque mesure pourrait conduire à une erreur de calcul du volume aussi grande que 1980 cm^3 ! Cela semble être une erreur importante, mais elle n'est en fait que d'environ 1 % du volume de la boîte.

En général, pour une fonction $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables, la linéarisation en $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est

$$L(\vec{x}) = f(\vec{a}) + f_{x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + f_{x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2) + \cdots + f_{x_n}(\vec{a})(x_n - a_n)$$

et la différentielle est

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}dx_n.$$

Le théorème 8 se généralise également aux fonctions de n variables.

Exercices 4.2

1-6 Trouvez l'équation du plan tangent à la surface donnée au point spécifié.

1. $z = 2x^2 + y^2 - 5y$, $(1, 2, -4)$

2. $z = (x + 2)^2 - 2(y - 1)^2 - 5$, $(2, 3, 3)$

3. $z = e^{x-y}$, $(2, 2, 1)$

4. $z = x/y^2$, $(-4, 2, -1)$

5. $z = x\sin(x + y)$, $(-1, 1, 0)$

6. $z = \ln(x - 2y)$, $(3, 1, 0)$

7-8 Tracez le graphe de la fonction et de son plan tangent au point donné. (Choisissez le domaine et le point de vue de manière à avoir une bonne représentation de la surface et du plan tangent.) Zoomez ensuite jusqu'à ce que la surface et le plan tangent deviennent presque confondus.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2$, $(1, 1, 5)$

8. $z = \sqrt{9 + x^2y^2}$, $(2, 2, 5)$

LCS **9-10** Tracez le graphe de f et son plan tangent au point donné. (Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour calculer les dérivées partielles et pour tracer le graphe de la surface et celui de son plan tangent.) Zoomez ensuite jusqu'à ce que la surface et le plan tangent deviennent presque confondus.

9. $f(x, y) = \dfrac{1 + \cos^2(x - y)}{1 + \cos^2(x + y)}$, $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7}{4}\right)$

10. $f(x, y) = e^{-xy/10}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy})$, $(1, 1, 3e^{-0,1})$

11-21 Expliquez pourquoi la fonction est différentiable au point donné. Trouvez la linéarisation $L(x, y)$ de la fonction en ce point.

11. $f(x, y) = 1 + x\ln(xy - 5)$, $(2, 3)$

12. $f(x, y) = \sqrt{xy}$, $(1, 4)$

13. $f(x, y) = x^2e^y$, $(1, 0)$

14. $f(x, y) = \dfrac{1 + y}{1 + x}$, $(1, 3)$

15. $f(x, y) = 4\arctan(xy)$, $(1, 1)$

16. $f(x, y) = y + \sin(x/y)$, $(0, 3)$

17. $f(x, y, z) = x\sin(yz)$, $(1, 1, \pi)$

18. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(1, 1, 1)$

19. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$, $(0, 0, \ldots, 0)$

20. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3$, $(1, 1, \ldots, 1)$

21. $f(x, y) = xy\sin(xy)$, $(1, \pi/2)$

22. On a demandé à un étudiant d'écrire la linéarisation de la fonction $f(x, y) = x^2y^2 - y^3$ au point $(2, 1)$. La réponse de l'étudiant est $L(x, y) = 3 + 2xy^2(x - 2) + (2x^2y - 3y^2)(y - 1)$.

a) Expliquez pourquoi cette réponse est fausse.

b) Donnez la réponse correcte.

23-24 Vérifiez l'approximation linéaire en $(0, 0)$.

23. $e^x\cos(xy) \approx x + 1$

24. $\dfrac{y - 1}{x + 1} \approx x + y - 1$

25. Sachant que f est une fonction différentiable telle que

$$f(2, 5) = 6,\ f_x(2, 5) = 1 \text{ et } f_y(2, 5) = -1$$

utilisez une approximation linéaire pour estimer $f(2,2\,;4,9)$.

26. Trouvez l'approximation linéaire de la fonction

$$f(x, y) = 1 - xy\cos\pi y$$

en $(1, 1)$, puis utilisez-la pour estimer $f(1,02\,;\,0,97)$. Tracez le graphe de f et de son plan tangent.

27. Trouvez l'approximation linéaire de la fonction

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

en $(3, 2, 6)$, puis utilisez-la pour estimer le nombre

$$\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}.$$