Plans tangents et approximations linéaires

Rappel

Soit f une fonction d'une variable. La droite tangente au graphe de f au point x_0 est donnée par

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La fonction linéaire $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est appelée approximation linéaire de f au point x_0.

L'équation générale d'un plan qui passe par (x_0, y_0) est

$$z = c + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

C'est le graphe de la fonction affine (linéaire)

$$L(x,y) = c + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Exemple

Déterminer la fonction linéaire $L(x,y)$ qui ~~passe par~~ satisfait

$$L(2,3) = 1 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x}(2,3) = 4 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial y}(2,3) = -2$$

Solution

$L(x,y)$ passe par $(2,3)$. Donc elle s'écrit comme

$$L(x,y) = c + a(x-2) + b(y-3).$$

On a :

$1 = L(2,3) = c + a(2-2) + b(3-3) = c \Rightarrow \boxed{c = 1}$

$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = a \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x}(2,3) = a = 4$

$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = b \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y}(2,3) = b = -2$

D'où $L(x,y) = 1 + 4(x-2) - 2(y-3)$

Equation du plan tangent

Si $f(x,y)$ possède des dérivées partielles continues, alors l'équation du plan tangent à la surface ~~de~~ $f(x,y)$ au point (x_0,y_0) est

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Exemple

Trouver le plan tangent à la surface $f(x,y) = 2x^2+y^2$ au point $(1,1)$.

Solution :

$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$

$f(1,1) = 2(1)^2 + (1)^2 = 3$

Donc

$$z = 3 + 4(x-1) + 2(y-1)$$
$$= 4x + 2y - 3$$

Théorème

Si $f(x,y)$ admet des dérivées partielles continues au voisinage du point (x_0,y_0) alors f est différentiables au point (x_0,y_0) est que $L(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ est son approximation linéaire.

Exemple

Montrer que la fonction $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy^2)$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, ~~et puis~~ donner son approximation linéaire en $(x,y) = (1,1)$ et approximer $f(1.2, 0.9)$.

Solution

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial_x(xy^2)}{1+(xy^2)^2} = \frac{y^2}{1+x^2y^4} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial_y(xy^2)}{1+(xy^2)^2} = \frac{2xy}{1+x^2y^4} \end{aligned}\right\} \text{sont continues sur } \mathbb{R}^2$$

Donc f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Approximation linéaire ?

$$L(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$f(1,1) = \operatorname{arctg}(1\cdot(1)^2) = \pi/4$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{(1)^2}{1+(1)^2(1)^4} = 1/2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{2(1)(1)}{1+(1)^2(1)^4} = 1$

Donc

$$L(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + (y-1)$$

Approximation de $f(1.2, 0.9)$?

$f(1.2, 0.9) \simeq L(1.2, 0.9) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(1.2-1) + (0.9-1)$
$\simeq 0.785$

La valeur exacte est $\operatorname{arctg}(1.2(0.9)^2) \simeq 0.771$

Différentielles

Si $f(x,y)$ est différentiable alors on définit la différentielle de f par

$$df(x,y) = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy$$

où dx et dy sont appelées différentielles de x et y.

Exemple 1

Soit $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$. Calculer la différentielle df

Solution

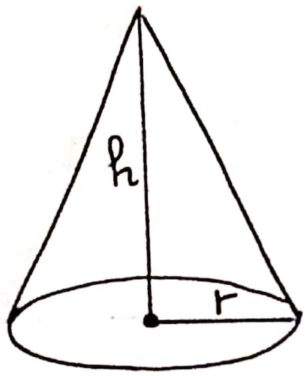
$df = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy$

$$df = (2x+3y)\,dx + (3x-2y)\,dy$$

Exemple 2

La hauteur d'un cône circulaire droit est 25cm ± 0.2cm et le rayon de sa base est 10 cm ± 0.1 cm.
Déterminer son volume et estimer l'erreur

Solution



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Ici $r = 10$ cm avec erreur $|dr| \leq 0.1$

$h = 25$cm avec erreur $|dh| \leq 0.2$

$V = \frac{1}{3}\pi (10)^2 (25) \simeq 2618$ cm^3 avec erreur

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh$$

$$= \frac{2}{3}\pi r h\, dr + \frac{1}{3}\pi r^2 dh$$

$$= \frac{2}{3}\pi (10)(25)\, dr + \frac{1}{3}\pi (10)^2 dh$$

$dV = 523.6\,dr + 104.7\,dh$

Comme $|dr| \leq 0.1$ et $|dh| \leq 0.2$ alors

$|dV| \leq 523.6(0.1) + 104.7(0.2) \simeq 73\,cm^3$

$V = 2618\,cm^3 \pm 73\,cm^3$

<u>Note</u> : Différentielle d'une fonction de 3 variables

Si $f(x,y,z)$ est différentiable alors

$$df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\,dx + f'_y(x,y,z)\,dy + f'_z(x,y,z)\,dz$$