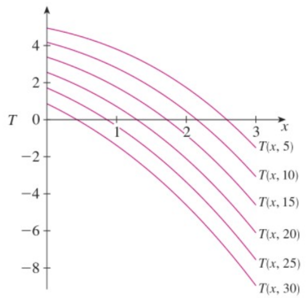
12. Lors d'une étude sur la pénétration du gel, on a mesuré la température T du sol en fonction de la profondeur x (en mètres) et du temps t (en jours). Ces données ont servi à tracer les courbes illustrées.

a) La figure représente-t-elle des courbes de niveau de T, des traces selon x ou des traces selon t ?

b) Utilisez la figure pour estimer $\partial T/\partial x$ lorsque $x = 1$ et $t = 20$. Que signifie concrètement cette dérivée ?

c) Utilisez la figure pour estimer $\partial T/\partial t$ lorsque $x = 1$ et $t = 20$. Que signifie concrètement cette dérivée ?



13. Soit $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$. Calculez $f_x(1, 2)$ et $f_y(1, 2)$, et interprétez ces nombres en les considérant comme des pentes. Représentez graphiquement ces données à la main ou à l'aide d'un ordinateur.

14. Soit $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$. Calculez $f_x(1, 0)$ et $f_y(1, 0)$, et interprétez ces nombres en les considérant comme des pentes. Représentez graphiquement ces données à la main ou à l'aide d'un ordinateur.

15-16 Trouvez f_x et f_y et représentez graphiquement f, f_x et f_y en considérant des domaines et des points de vue qui permettent de voir les relations entre ces fonctions.

15. $f(x, y) = x^2 y^3$

16. $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2 y^2}$

17-44 Trouvez les dérivées partielles de la fonction.

17. $f(x, y) = x^4 + 5xy^3$

18. $f(x, y) = x^2 y - 3y^4$

19. $f(x, t) = t^2 e^{-x}$

20. $f(x, t) = \sqrt{3x + 4t}$

21. $z = \ln(x + t^2)$

22. $z = x \sin(xy)$

23. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

24. $f(x, y) = \dfrac{x}{(x + y)^2}$

25. $f(x, y) = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$

26. $w = \dfrac{e^v}{u + v^2}$

27. $g(u, v) = (u^2 v - v^3)^5$

28. $u(r, \theta) = \sin(r \cos\theta)$

29. $R(p, q) = \tan^{-1}(pq^2)$

30. $f(x, y) = x^y$

31. $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t)\, dt$

32. $F(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1}\, dt$

33. $f(x, y, z) = x^3 y z^2 + 2yz$

34. $f(x, y, z) = xy^2 e^{-xz}$

35. $w = \ln(x + 2y + 3z)$

36. $w = y \tan(x + 2z)$

37. $p = \sqrt{t^4 + u^2 \cos v}$

38. $u = x^{y/z}$

39. $h(x, y, z, t) = x^2 y \cos(z/t)$

40. $\phi(x, y, z, t) = \dfrac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta t^2}$

41. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

42. $u = \sin(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n)$

43. $u = \sum_{k=1}^{n} x_k^k$

44. $u = \dfrac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n}$

45-48 Calculez les dérivées partielles indiquées.

45. $R(s, t) = te^{s/t}$; $R_t(0, 1)$

46. $f(x, y) = y \sin^{-1}(xy)$; $f_y\left(1, \frac{1}{2}\right)$

47. $f(x, y, z) = \ln \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $f_y(1, 2, 2)$

48. $f(x, y, z) = x^{yz}$; $f_z(e, 1, 0)$

49-50 Utilisez la définition 4 des dérivées partielles en termes de limites pour trouver $f_x(x, y)$ et $f_y(x, y)$.

49. $f(x, y) = xy^2 - x^3 y$

50. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

51-54 Utilisez la dérivation implicite pour trouver $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$.

51. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

52. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

53. $e^z = xyz$

54. $yz + x \ln y = z^2$

55-56 Trouvez $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ en fonction des dérivées de f et g.

55. a) $z = f(x) + g(y)$
b) $z = f(x + y)$

56. a) $z = f(x)g(y)$
b) $z = f(xy)$
c) $z = f(x/y)$

57-62 Trouvez toutes les dérivées partielles secondes.

57. $f(x, y) = x^4 y - 2x^3 y^2$

58. $f(x, y) = \ln(ax + by)$

59. $z = \dfrac{y}{2x + 3y}$

60. $T = e^{-2r} \cos\theta$

61. $v = \sin(s^2 - t^2)$

62. $w = \sqrt{1 + uv^2}$

63-66 Vérifiez si la conclusion du théorème de Clairaut est valide, autrement dit déterminez si $u_{xy} = u_{yx}$.

63. $u = x^4 y^3 - y^4$

64. $u = e^{xy} \sin y$

65. $u = \cos(x^2 y)$

66. $u = \ln(x + 2y)$

67-74 Trouvez les dérivées partielles indiquées.

67. $f(x, y) = x^4 y^2 - x^3 y$; f_{xxx}, f_{xyx}

68. $f(x, y) = \sin(2x + 5y)$; f_{yxy}

69. $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$; f_{xyz}

70. $g(r, s, t) = e^r \sin(st)$; g_{rst}

71. $W = \sqrt{u + v^2}$; $\dfrac{\partial^3 W}{\partial u^2 \partial v}$

72. $V = \ln(r + s^2 + t^3)$; $\dfrac{\partial^3 V}{\partial r \partial s \partial t}$

73. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$

74. $u = x^a y^b z^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$

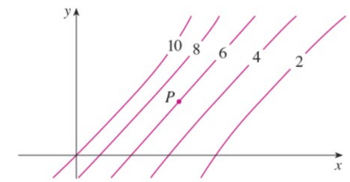
75. Si $f(x, y, z) = xy^2 z^3 + \arcsin(x\sqrt{z})$, trouvez f_{xzy}. (*Suggestion :* Quel ordre de dérivation est le plus facile ?)

76. Si $g(x, y, z) = \sqrt{1 + xz} + \sqrt{1 - xy}$, trouvez g_{xyz}. (*Suggestion :* Utilisez un ordre de dérivation différent pour chaque terme.)

77. Utilisez le tableau des valeurs de $f(x, y)$ pour estimer les valeurs de $f_x(3, 2)$, de $f_x(3; 2,2)$ et de $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

78. La figure ci-dessous représente les courbes de niveau d'une fonction f. Déterminez si les dérivées partielles suivantes sont positives ou négatives au point P.

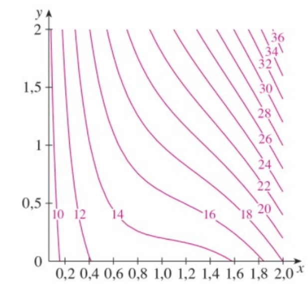


a) f_x b) f_y c) f_{xx}
d) f_{xy} e) f_{yy}

79. Utilisez le diagramme de courbes de niveau de la fonction f ci-dessous pour estimer les dérivées suivantes.

a) $f_x(1, 1)$ et $f_y(1, 1)$

b) $f_{xx}(1, 1)$, $f_{yy}(1, 1)$ et $f_{xy}(1, 1)$



80. Déterminez si chacune des fonctions suivantes est une solution de l'équation de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

a) $u = x^2 + y^2$

b) $u = x^2 - y^2$

c) $u = x^3 + 3xy^2$

d) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

e) $u = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$

f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

81. La température T d'une plaque a été mesurée aux points d'un maillage (voir la figure ci-dessous). Sur cette figure, les points sont désignés par leurs coordonnées.