Séries de Taylor et MacLaurin

Théorème 1

Si f admet une représentation (un développement) en série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, $|x-a| < R$, alors les coefficients c_n sont donnés par la formule :

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

preuve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots \quad , |x-a| < R$$

$$\boxed{f(a) = c_0}$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \quad , |x-a| < R$$

$$\boxed{f'(a) = c_1}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + \cdots \quad , |x-a| < R$$

$$f''(a) = 2c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{f''(a)}{2}}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(a) = n!\, c_n \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Définition

On dit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots$$

est la <u>série de Taylor</u> de $f(x)$ en $x = a$.

<u>Cas particulier</u> : Si $a = 0$, cette série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots$$

et s'appelle alors <u>série de MacLaurin</u> de $f(x)$

Exemple

Déterminer la série de MacLaurin de $f(x) = e^x$ et de son rayon de convergence.

<u>Solution</u> :

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x \quad , \forall n \implies f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \forall n$

La série de MacLaurin de $f(x) = e^x$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Son terme général est $a_n = \frac{x^n}{n!}$

On utilise le test du quotient pour déterminer le rayon de convergence

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

D'après le test du quotient, la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc le rayon de convergence est $R = \infty$.

<u>Note :</u>

Puisque $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0}$$

On va se servir de ce résultat pour la suite.

Dans le cas de la série de Taylor, les sommes partielles sont $T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

On remarque que T_k est un polynome de degré k. Ce polynôme est appelé <u>polynôme de Taylor d'ordre k</u> de f au point a.

Par exemple, pour la fonction $f(x) = e^x$, les polynômes de Taylor au point 0 (polynômes de MacLaurin) avec $k = 1, 2, 3$ sont :

$$T_1(x) = 1 + x \quad , \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad , \quad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Quand est-ce qu'une fonction est égale à sa série de Taylor ?

Théorème 2

Si $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$, où $T_k(x)$ est le polynôme de Taylor d'ordre k de f au point a et si $\lim_{k \to \infty} R_k(x) = 0$ pour $|x-a| < R$, alors la fonction f est égale à sa série de Taylor sur l'intervalle $|x-a| < R$, c.à.d

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad , \quad |x-a| < R$$

Théorème 3 : Inégalité de Taylor

Supposons que $f^{(k+1)}(x)$ existe et soit continue sur $[a-d, a+d]$ et que $\left|f^{(k+1)}(x)\right| \leq M$ pour tout $x \in [a-d, a+d]$.

Alors

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_k(x)} + R_k(x)$$

où l'erreur $R_k(x)$ satisfait $\left|R_k(x)\right| \leq \frac{M}{(k+1)!}\left|x-a\right|^{k+1}$

pour tout $x \in [a-d, a+d]$.

__Exemple__

Montrer que $f(x) = e^x$ est égale à sa série de MacLaurin

__Solution__

$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(k+1)}(x) = e^x$ existe et est continue sur $[-d, d]$.

$$\left|f^{(k+1)}(x)\right| = \left|e^x\right| \leq e^d, \quad \forall x \in [-d, d]$$

car la fonction e^x est croissante.

D'après le théorème 3, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + R_k(x) \quad \text{où}$$

$$\left|R_k(x)\right| \leq \frac{e^d}{(k+1)!}\left|x\right|^{k+1}, \quad \forall x \in [-d, d]$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + R_k(x)$$

$$\left|R_k(x)\right| \leq \frac{e^d}{(k+1)!}\left|x\right|^{k+1} \Rightarrow$$

$$-\frac{e^d}{(k+1)!}\left|x\right|^{k+1} \leq R_k(x) \leq \frac{e^d}{(k+1)!}\left|x\right|^{k+1}$$

D'après le théorème du sandwich, on a

$$\lim_{k\to\infty} R_k = 0$$

D'après le théorème 2, $f(x) = e^x$ est égale à sa série de MacLaurin $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Remarque

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Exercice 1

Quel entier k devrait-on choisir pour que l'erreur d'approximation de $f(x) = e^x$ par son polynôme de Taylor au point $x = 0$ de degré k soit inférieure ou égale à 10^{-2} sur $[-1, 1]$.

Solution

On sait que

$$f(x) = e^x = T_k(x) + R_k(x) \implies$$

$$\left| e^x - T_k(x) \right| = \left| R_k(x) \right| \leq \frac{e}{(k+1)!} |x|^{k+1}, \ \forall x \in [-1, 1]$$

$$\leq \frac{e}{(k+1)!}, \ \forall x \in [-1, 1]$$

Il suffit de choisir k de sorte que

$$|R_k(x)| \leq \frac{e}{(k+1)!} \leq 10^{-2}$$. Donc il faut $k = 5$

Exercice 2

Déterminer la série de MacLaurin de $\sin(x)$ et montrer qu'elle est égale à (ou représente) $\sin(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Solution

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

La suite des dérivées est périodique de période 4

$$f^{(n+4)}(x) = f^{(n)}(x)$$

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x) \Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x) \Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

La série de MacLaurin de $\sin(x)$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On a :

$$f^{(k+1)}(x) = \pm \sin(x) \text{ où } \pm \cos(x)$$

$$\left| f^{(k+1)}(x) \right| \leq 1 \quad , \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left| \sin(x) - T_k(x) \right| = |R_k| \leq \frac{1}{(k+1)!} |x|^{k+1} \quad , \quad \forall \; x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{(k+1)!} |x|^{k+1} = 0$$

Donc

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$$

De la même manière, on montre que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$$