

MAT 2784 A
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
ET MÉTHODES NUMÉRIQUES
Examen de pratique
Professeur: Dr. Abdelkrim El basraoui

Il y aura environ 7 questions.
Voici une composition possible.

CH 1 et 2 pour ÉDO
CH 7 (P1 et P2) et CH 8 (P1) M.N.

Temps: 80 minutes pour composer.

⚠️ Posez vos stylos / crayons. ((10 minutes pour scanner et soumettre votre examen. +

Où se trouvera-t-il ? Section Devoirs
(Je vais créer un lien dans le contenu.)

Matériel Permis: 1 feuille (recto/verso)
Aucun expte devant. (On 2 pages à 1 face).
• Calculatrices de base.
↳ à soumettre avec votre examen.

Question 1 (6 marks) Solve the initial value problems / Résoudre les problèmes aux valeurs initiales:

(a) $e^{2y} y' = 2 \cos x$, $y(0) = 0$

the DE is separable $e^{2y} dy = 2 \cos x dx$

integrate on both sides $\int e^{2y} dy = \int 2 \cos x dx + C$

to get $\frac{1}{2} e^{2y} = 2 \sin x + C$

or $e^{2y} = 4 \sin x + C$

or $2y = \ln |4 \sin x + C|$

and so $y = \frac{1}{2} \ln |4 \sin x + C|$ (general solution)

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \ln(0 + C) \Rightarrow C = 1$

\therefore the unique solution is $y = \frac{1}{2} \ln |4 \sin x + 1|$

(b) $y' + \frac{y}{x} = \frac{2x}{y}$, $y(1) = 2$

this is a Bernoulli equation with $p(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x$ and a

then we let $u = y^{1-a} = y^2$ and the DE will become

$u' + (1-a)p(x)u = (1-a)g(x)$ or $u' + \frac{2}{x}u = 4x$

the integrating factor is $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2$

and then $u = \frac{1}{x^2} \left[\int (x^2)(4x) dx + C \right]$

$= x^{-2} \left(\int 4x^3 dx + C \right)$

$= x^{-2} (x^4 + C) = x^2 + Cx^{-2}$

and so $y^2 = x^2 + Cx^{-2}$ (general solution)

but $y(1) = 2 \Rightarrow (2)^2 = (1)^2 + C(1)^{-2} \Rightarrow C = 3$

\therefore the unique solution is $y = \sqrt{x^2 + 3x^{-2}}$ ($y > 0$)

Question 2 (6 marks) Solve the initial value problem / Résoudre le problème à valeur initiale:

$$(2e^x y^2 + 6xy + 7y^3) dx + (8e^x y + 9x^2 + 35xy^2) dy = 0, \quad y(0) = 1. \quad (\text{not separable})$$

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 2e^x y^2 + 6xy + 7y^3 \Rightarrow M_y = 4e^x y + 6x + 21y^2 \\ N(x, y) &= 8e^x y + 9x^2 + 35xy^2 \Rightarrow N_x = 8e^x y + 18x + 35y^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} M_y \neq N_x \\ \text{DE not exact} \end{array} \right\}$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{-4e^x y - 12x - 14y^2}{2e^x y^2 + 6xy + 7y^3} = \frac{-2(2e^x y + 6x + 7y^2)}{y(2e^x y + 6x + 7y^2)} = \frac{-2}{y} \quad (\text{function of } y \text{ only})$$

integrating factor is $\mu(y) = e^{-\int \frac{-2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = y^2$ and the

DE becomes $(2e^x y^4 + 6xy^3 + 7y^5) dx + (8e^x y^3 + 9x^2 y^2 + 35xy^4) dy = 0$

$$\begin{aligned} \text{then } M^*(x, y) &= 2e^x y^4 + 6xy^3 + 7y^5 \Rightarrow M_y^* = 8e^x y^3 + 18xy^2 + 35y^4 \\ N^*(x, y) &= 8e^x y^3 + 9x^2 y^2 + 35xy^4 \Rightarrow N_x^* = 8e^x y^3 + 18xy^2 + 35y^4 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} M_y^* = N_x^* \\ \text{DE exact} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int M^*(x, y) dx + g(y) = \int (2e^x y^4 + 6xy^3 + 7y^5) dx + g(y) \\ &= 2e^x y^4 + 3x^2 y^3 + 7xy^5 + g(y) \end{aligned}$$

$$\text{then } \frac{dF}{dy} = 8e^x y^3 + 9x^2 y^2 + 35xy^4 + g'(y) = N^*(x, y) = 8e^x y^3 + 9x^2 y^2 + 35xy^4$$

and so $g'(y) = 0 \Rightarrow$ we take $g(y) = 0$

$$\text{then } F(x, y) = 2e^x y^4 + 3x^2 y^3 + 7xy^5$$

and the general solution is $2e^x y^4 + 3x^2 y^3 + 7xy^5 = C$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 2e^0(1)^4 + 3(0)^2(1)^3 + 7(0)(1)^5 = C \Rightarrow C = 2$$

\therefore the unique solution is $\boxed{2e^x y^4 + 3x^2 y^3 + 7xy^5 = 2}$

Question 3 (6 marks) Solve the initial value problems / Résoudre les problèmes aux valeurs initiales:

(a) $y'' + 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

The characteristic equation is $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2 = 0$
so the roots are $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ and the
general solution is $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 e^0 + C_2(0)e^0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y'(x) = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-4x} - 4C_2 x e^{-4x}$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = -4C_1 e^0 + C_2 e^0 - 4C_2(0)e^0 \Rightarrow C_2 = 2$$

\therefore the unique solution is $y(x) = 2x e^{-4x}$

(b) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$

The char. eq. is $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$$\text{the roots are } \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(10)}}{2} = 1 \pm 3i$$

The general solution is $y(x) = C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \sin(3x)$

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = C_1 e^0 \cos(0) + C_2 e^0 \sin(0) \Rightarrow C_1 = 2$$

$$y'(x) = C_1 e^x \cos(3x) - 3C_1 e^x \sin(3x) + C_2 e^x \sin(3x) + 3C_2 e^x \cos(3x)$$

$$y'(0) = 8 \Rightarrow 8 = C_1 e^0 \cos(0) - 3C_1 e^0 \sin(0) + C_2 e^0 \sin(0) + 3C_2 e^0 \cos(0) \\ \Rightarrow C_1 + 3C_2 = 8 \Rightarrow C_2 = 2$$

\therefore the unique solution is $y(x) = 2e^x \cos(3x) + 2e^x \sin(3x)$

Question 4: Résoudre

$$\bullet xy' = y + x \sec(y/x), \quad y(1) = \pi/2.$$

EX

↓

$$\partial_u a: M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x, y)$$

$$\text{et } N(\lambda x, \lambda y) = \lambda N(x, y).$$

Donc M et N sont homogènes de degré 1 en x et y .

On pose $y = uX \Rightarrow dy = u dx + x du$ et l'éqo devient

$$(uX + x \sec(u)) dx - x u du - x^2 du = 0 \Leftrightarrow x \sec u dx - x^2 du = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sec u} du = \frac{x}{x^2} dx \Leftrightarrow \boxed{\cos u du = \frac{1}{x} dx} \quad \underline{\text{séparable}}.$$

$$\Rightarrow \sin u = \ln|x| + C \Leftrightarrow u = \frac{y}{x} = \arcsin(\ln|x| + C)$$

Donc la S.G. est : $\boxed{y = x \arcsin(\ln|x| + C)}$.

• S.U. : $y(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \underline{\text{S.U.}} : \boxed{y = x \arcsin(\ln|x| + 1)}$

$$\bullet x^2 y'' - xy' + y = 0.$$

- C'est une équation d'Euler-Cauchy.
- Equation caractéristique: $m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 = 0$.
Donc on a la racine double $m_1 = m_2 = 1$.
- Solution générale: $y = C_1 x + C_2 x \ln(x)$.

Question 5 (6 marks)

(a) Consider $f(x) = x^3 + 6x - 5$. If you were to use Fixed Point Iteration to find the root of this function in the interval $[0, 1]$, what would you use for $g(x)$ and why?

Soit $f(x) = x^3 + 6x - 5$. Si on aimerait trouver la racine de la fonction sur l'intervalle $[0, 1]$ par <<Fixed Point Iteration>>, quelle fonction utiliserait-on pour $g(x)$ et pourquoi?

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 6x - 5 = 0 \Rightarrow 6x = 5 - x^3 \Rightarrow x = \frac{5 - x^3}{6}$$

so $g(x) = \frac{5 - x^3}{6}$ (this will satisfy fixed point condition)

and $|g'(x)| = \frac{1}{2}x^2 < 1$ on $[0, 1]$

so this $g(x)$ will generate a convergent sequence

(b) Use Newton's Method to find the root of this $f(x)$ to 4 decimal places. Start with $x_0 = 1$. Verify your answer.

Utilisez la Méthode de Newton pour trouver la racine de même $f(x)$ à 4 décimales. Commencez avec $x_0 = 1$. Vérifiez la réponse.

$$f(x) = x^3 + 6x - 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6$$

$$\text{Newton's Method } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 6x_n - 5}{3x_n^2 + 6} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 + 6}$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{7}{9} = 0.7778, \quad x_2 = 0.7602, \quad x_3 = 0.7601 = x_4$$

$$f(0.7601) = (0.7601)^3 + 6(0.7601) - 5 \approx -2.5 \times 10^{-4} \text{ okay}$$

so the root is 0.7601

(c) If we were going to find the interpolating polynomial $p_n(x)$ for 5 data points, what is the maximum possible degree that the polynomial could have?

Si on aimerait trouver le polynôme d'interpolation $p_n(x)$ pour 5 points, quel est le degré maximal que le polynôme puisse avoir?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6 (F) impossible to answer

$$(n+1 = 5 \Rightarrow n = 4)$$

(d) Considérez les points suivants $((x_j, f_j))$ collectés lors d'une expérience, où $f_j = f(x_j)$: $(1.2, 2.3)$, $(1.9, 3.5)$ and $(2.3, 4.9)$.

(i) Trouvez le polynôme de Lagrange $p_2(x)$ (avec coefficients à 4 décimales près).

(ii) Interpolez la valeur au point $x = 2$.

(iii) Étant donné que $0.5 \leq |f'''(x)| \leq 2$ sur $[1, 3]$, donnez l'erreur maximale et l'erreur minimale lors de cette interpolation.

(Voir notes de cours pour la solution.)