Exercices 5.1

1. Soit (1, 1), un point critique d'une fonction f ayant des dérivées secondes continues. Que pouvez-vous dire à propos de f dans chaque cas ?

a) $f_{xx}(1, 1) = 4,\ f_{xy}(1, 1) = 1,\ f_{yy}(1, 1) = 2$

b) $f_{xx}(1, 1) = 4,\ f_{xy}(1, 1) = 3,\ f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Soit (0, 2), un point critique d'une fonction g ayant des dérivées secondes continues. Que pouvez-vous dire à propos de g dans chaque cas ?

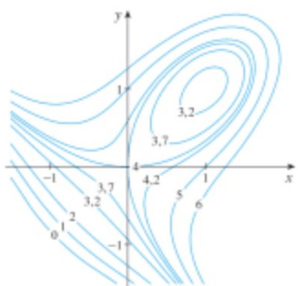
a) $g_{xx}(0, 2) = -1,\ g_{xy}(0, 2) = 6,\ g_{yy}(0, 2) = 1$

b) $g_{xx}(0, 2) = -1,\ g_{xy}(0, 2) = 2,\ g_{yy}(0, 2) = -8$

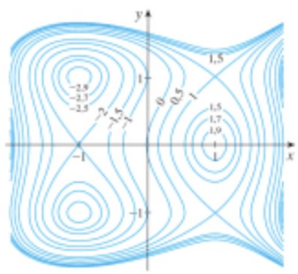
c) $g_{xx}(0, 2) = 4,\ g_{xy}(0, 2) = 6,\ g_{yy}(0, 2) = 9$

3-4 Utilisez les courbes de niveau de la figure pour prédire les emplacements des points critiques de f et déterminer si f admet un point de selle, un maximum local ou un minimum local en chaque point critique. Expliquez votre raisonnement. Ensuite, utilisez le test des dérivées secondes pour confirmer vos prédictions.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5-20 Trouvez les maximums locaux, les minimums locaux et les points de selle de la fonction. Si vous disposez d'un logiciel le permettant, tracez le graphe de la fonction en choisissant un domaine et un point de vue qui révèlent toutes les caractéristiques importantes de la fonction.

5. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$

6. $f(x, y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$

7. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$

8. $f(x, y) = y(e^x - 1)$

9. $f(x, y) = x^2 + y^4 + 2xy$

10. $f(x, y) = 2 - x^4 + 2x^2 - y^2$

11. $f(x, y) = x^3 - 3x + 3xy^2$

12. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$

13. $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = e^x \cos y$

16. $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

17. $f(x, y) = xy + e^{-xy}$

18. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$

19. $f(x, y) = y^2 - 2y\cos x,\ -1 \le x \le 7$

20. $f(x, y) = \sin x \sin y,\ -\pi < x < \pi,\ -\pi < y < \pi$

21. Montrez que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ possède un nombre infini de points critiques et que $\alpha_2 = 0$ en chacun de ces points. Montrez ensuite que f possède un minimum local (et absolu) en chaque point critique.

22. Montrez que $f(x, y) = x^2 ye^{-x^2-y^2}$ possède des maximums en $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ et des minimums en $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Montrez aussi que f a une infinité d'autres points critiques et que $\alpha_2 = 0$ en chacun d'eux. Lesquels donnent lieu à des maximums ? À des minimums ? À des points de selle ?

23-26 Utilisez un graphe et/ou des courbes de niveau pour estimer les maximums locaux, les minimums locaux et les points de selle de la fonction. Utilisez ensuite les outils de cette section pour trouver précisément ces valeurs.

23. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

24. $f(x, y) = (x - y)e^{-x^2-y^2}$

25. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y),\ 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi$

26. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y),\ 0 \le x \le \pi/4,\ 0 \le y \le \pi/4$

27-30 Utilisez un graphe comme à l'exemple 4, p. 207 (ou la méthode de Newton ou encore un logiciel pour trouver les racines) afin de trouver les points critiques de f avec trois décimales exactes. Ensuite, classez les points critiques et trouvez les points les plus et les moins élevés sur le graphe de f.