

Soit  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  une suite. On définit les sommes partielles

$$S_1 = \sum_{n=1}^1 a_n = a_1$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^2 a_n = a_1 + a_2$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^3 a_n = a_1 + a_2 + a_3$$

⋮

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$$

Ainsi, à partir de la suite  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , on a créé une suite  $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$  de terme général  $S_k$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ est appelée}$$

la série de terme général  $a_n$

(2)

## Définition

Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s \in \mathbb{R}$  alors on dit que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  est convergente et on écrit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ .

Le nombre  $s$  est appelé somme de la série.

S'il n'existe pas une telle somme finie, on dit que la série est divergente.

## Exemple

La somme partielle des  $k$  premiers termes de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  est  $s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = \frac{7k}{3k+1}$ . Étudier la convergence de cette série.

## Solution

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{7k}{3k+1} = \frac{7}{3} \text{ (valeur finie)}$$

Donc la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{7}{3}$  est convergente et a pour somme  $s = \frac{7}{3}$ .

Théorème: Très important

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  est convergente alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

preuve

la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = l, l \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = l$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = l$$

$$\begin{aligned} s_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k \\ s_{k-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{k-1} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} s_k - s_{k-1} = a_k \end{array} \right\}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k - s_{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$$

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$$

D'où

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0}$$

Remarque:

La réciproque du théorème précédent n'est en général pas vraie  
c'est à dire si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , on ne peut pas conclure que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

## Test de divergence Très important

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  n'existe pas alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  est divergente.

### Exemple

Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5n^2+3}$  diverge

### Solution

$$a_n = \frac{n^2+1}{5n^2+3}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{5n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}{n^2(5 + \frac{3}{n^2})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5} \neq 0$ . Donc d'après le test de divergence, la série est divergente.

Théorème

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sont convergentes alors

$$1^\circ) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$2^\circ) \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Séries géométriquesDéfinition

On appelle série géométrique, toute série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots, \text{ avec } a \neq 0$$

Théorème

La ~~série~~ géométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ est } \begin{cases} \text{convergente si } |r| < 1 \text{ et on a } \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \\ \text{divergente si } |r| \geq 1. \end{cases}$$

Preuve

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k ar^{n-1}$$

$$S_k = \sum_{n=1}^k ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1}$$

Cas 1 :  $r = 1$

Alors  $S_k = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{k \text{ fois}} = ka$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} ka = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Donc  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  diverge

Cas 2 :  $r \neq 1$

$$\begin{aligned} S_k &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1} \\ rS_k &= ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^k \\ &= -a + \underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{k-1}}_{= S_k} + ar^k \end{aligned}$$

$$= -a + S_k + ar^k \Rightarrow$$

$$S_k - rS_k = a - ar^k \Rightarrow S_k = \frac{a(1-r^k)}{1-r}$$

$$\text{Si } |r| < 1 \text{ alors } \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^k)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \quad (7)$$

Si  $r \leq -1$  ou  $r > 1$  alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} r^k$  n'existe pas  $\Rightarrow$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^k)}{1-r}$  n'existe pas  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  diverge.

Exemple

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{1-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (4)^n 3^{1-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 4^{n-1} \cdot 3^{1-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

est une série géométrique divergente

$$\text{car } r = \frac{4}{3} \Rightarrow |r| = \left|\frac{4}{3}\right| > 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

est une série géométrique convergente

$$\text{car } r = \frac{1}{2} \Rightarrow |r| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$