Séries à termes positifs

Définition

Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est dite à termes positifs si $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

Exemple

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ est à termes positifs car $a_n = \frac{1}{2^n+1} \geq 0$

Estimation de la somme d'une série convergente

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série à termes positifs convergente. On désire trouver une approximation de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

L'erreur commise R_k lorsque s_k est utilisée comme approximation de s est

$$R_k = |s - s_k| = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

Test ou critère de comparaison

Soient $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deux séries à termes positifs

telles que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$.

Alors on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

et

si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ c.à.d convergente alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ c.à.d convergente

si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ c.à.d divergente alors $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ c.à.d divergente

Exemple

1) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ est convergente et majorer son erreur d'approximation par s_{10}.

Solution :

On a :

$$\frac{1}{2^n+1} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}$$

série géométrique de raison $r=\frac{1}{2}$

Donc elle converge et vaut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

D'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ est convergente

$$R_k = |s - s_k| = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

$$R_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} \leq \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{10}}$$

$$R_{10} \leq \frac{1}{2^{10}}.$$

2) Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+4^n}$

Solution :

On a :

$$\frac{3^n}{2^n+4^n} \leq \frac{3^n}{4^n} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+4^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

série géométrique de raison $r = \frac{3}{4} < 1$.

Donc elle converge.

D'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+4^n}$ est convergente.

3°) Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+3}{(2^n+1)^2}$

Solution :

$$\frac{4^n+3}{(2^n+1)^2} = \frac{4^n+3}{4^n+2^{n+1}+1} = \frac{4^n\left(1+\frac{3}{4^n}\right)}{4^n\left(1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4^n}\right)} = \frac{1+\frac{3}{4^n}}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4^n}} \longrightarrow 1 \neq$$

Donc d'après le test de divergence la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+3}{(2^n+1)^2}$ est divergente.

4°) Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2^n}}$.

Solution :

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{n+2^n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2^n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}$$

série géométrique de raison $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc elle converge.

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2^n}}$$ est convergente.

Test de l'intégrale

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[m, +\infty[$. Soit $a_n = f(n)$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si l'intégrale impropre $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ est convergente. Autrement dit :

i) Si $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

ii) Si $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ diverge alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Exemple

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Solution :

On a

$a_n = \frac{1}{n^2} = f(n)$ où $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \left. -\frac{1}{x} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} -\frac{1}{t} + 1 = 1$$

D'après le test de l'intégrale, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Estimation de la somme par le test de l'intégrale

Avec le test de l'intégrale, l'erreur d'approximation R_k de la somme $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ par la somme partielle $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ est

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \leq \int_k^{\infty} f(x)\, dx$$

Exemple

Combien de termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ doit-on additionner pour que l'erreur soit inférieure à 10^{-3} ?

Solution :

On a :

$$R_k \leq \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_k^t \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_k^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

Donc

$$R_k \leq \frac{1}{k} \Rightarrow R_k \leq 10^{-3} \text{ si } \frac{1}{k} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow k \geq 10^{3}$$

Donc il faut additionner les 1000 premiers termes.

Les séries de Riemann

Ce sont les séries de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Théorème

La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est $\begin{cases} \text{convergente si } p > 1 \\ \text{divergente si } p \leq 1. \end{cases}$