# MAT 2784 A
# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET MÉTHODES NUMÉRIQUES
## Examen de pratique 2
## Professeur: Dr. Abdelkrim El basraoui

Il y aura environ 6 questions.
Voici une composition possible.

**Question 1:** Résoudre les P.V.I. suivants

(a) $y'' + y = \sec x\,, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$
(voir devoir 4 pour la solution.)

(b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2\,,\ x > 0\,, \qquad y(1) = 2\,, \quad y'(1) = 4.$
(voir devoir 4 pour la solution.)

**Question 2:** Résoudre les systèmes non-homogènes suivants:
$y_1' = 4y_1 - 2y_2 - 2x - 5, \quad y_1(0) = 2$
$y_2' = 3y_1 - y_2 - 2x - 3, \quad y_2(0) = 2$

(voir devoir 4 pour la solution.)

**Question 3:**
(a) Trouvez la Transformé de Laplace des fonctions suivantes:
(i) $3t^4 + 4t^3 - 5t^2 + 7t - 2$
(voir devoir 5 pour la solution.)
(ii) $3e^{-\pi t} + 5\cos(3t) - \sin(2t)$
(voir devoir 5 pour la solution.)

(b) Trouvez la Transformé de Laplace inverse de la fonction suivante:
$\frac{2s}{s^2+9} + \frac{7}{s^2+4}$
(voir devoir 5 pour la solution.)

**Question 4:**
En utilisant la transformée de Laplace résolvez l'équation à valeurs initiales suivantes:
$y'' - 5y' + 6y = 2e^t, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 14$

(voir devoir 5 pour la solution.)

**Question 5:**

(a) Utilisez la méthode de Simpson avec $n = 8$ pour approcher $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ à 6 décimales près.

Comparez cette approximation avec la valeur réèlle en calculant l'erreur

| vraie valeur - valeur approchée |.

(voir devoir 4 pour la solution.)

(b) Utilisez la méthode de Quadrature Gaussienne à 4 points pour approcher $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ à 6 décimales près.

Comparez votre résultat avec la valeur réèlle en calculant | vraie valeur - valeur approchée |.

(voir devoir 4 pour la solution.

N.B. les racines des polynômes de Legendre et leurs poids seront fournis).

# Formules

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\,, \qquad |\epsilon| \leq \frac{1}{24}\,M\,(b-a)\,h^2\,, \qquad M = max_{a\leq x\leq b}\;|f''(x)|$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(f(x_{j-1})+f(x_j)\right), \qquad |\epsilon| \leq \frac{1}{12}\,M\,(b-a)\,h^2\,, \qquad M = max_{a\leq x\leq b}\;|f''(x)|$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\sum_{j=0}^{n-1}\left(f(x_{2j})+4f(x_{2j+1})+f(x_{2j+2})\right), \qquad |\epsilon| \leq \frac{1}{180}\,M\,(b-a)\,h^4\,,$$

$$M = max_{a\leq x\leq b}\;|f^{(4)}(x)|$$

| $f(t)$ | $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ | |
|---|---|---|
| $t^n$ | $n!/s^{n+1}$ | ; $n=0,1,2,\ldots$ and $s>0$ |
| $e^{at}$ | $1/(s-a)$ | ; $s>a$ |
| $\sin(kt)$ | $k/(s^2+k^2)$ | ; $s>0$ |
| $\cos(kt)$ | $s/(s^2+k^2)$ | ; $s>0$ |
| $\sinh(kt)$ | $k/(s^2-k^2)$ | ; $s>k$ |
| $\cosh(kt)$ | $s/(s^2-k^2)$ | ; $s>k$ |
| $\delta(t-a)$ | $e^{-as}$ | ; $s>0$ |
| $u(t-a)$ | $\frac{e^{-as}}{s}$ | ; $s>0$ |

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\
\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} &= F(s-a) \\
\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} &= e^{-as}F(s) \\
\mathcal{L}\{t^n f(t)\} &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s) \\
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} &= \frac{1}{s}F(s) \\
\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} &= \int_s^\infty F(x)dx \\
\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} &= s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0) \\
(f*g)(t) &= \int_0^t f(x)g(t-x)dx \\
\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} &= F(s)\,G(s)
\end{aligned}$$