Cours 15

Développement en séries entières

Rappel :

La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est une série géométrique de raison $r = x$

Elle converge si $|r| = |x| < 1$ et dans ce cas on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour } |x| < 1.$$

Regardons cette équation comme une expression de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sous la forme d'une série entière.

Exemple :

Exprimer les expressions suivantes sous forme d'une série entière et déterminer l'intervalle de convergence.

1°) $\dfrac{1}{1+x^2}$

2°) $\dfrac{x^3}{x+2}$

Solution :

1) $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ pour $|-x^2| < 1$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ pour $|x| < 1$

L'intervalle de convergence est l'ensemble des x tel que $|x| < 1 \iff -1 < x < 1 \iff x \in]-1, 1[$.

2) $\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}$

$= \frac{x^3}{2} \cdot \frac{1}{1-(\frac{-x}{2})}$

$= \frac{x^3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{x}{2})^n$ pour $|-\frac{x}{2}| < 1$

$= \frac{x^3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$ pour $|x| < 2$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{x^{n+3}}{2^{n+1}}$ pour $|x| < 2$

L'intervalle de convergence est l'ensemble des x tel que $|x| < 2 \iff -2 < x < 2 \iff x \in]-2, 2[$.

Dérivation et intégration des séries entières

Théorème

Si une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ a un rayon de convergence $R>0$, alors la fonction $f :]a-R, a+R[$ donnée par

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ est continue et dérivable sur $]a-R, a+R[$

et on a :

i) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$

ii) $\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$

$$= C + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots$$

Le rayon de convergence de ces deux séries est aussi R mais le domaine de convergence peut changer.

On peut dériver ou intégrer terme à terme c.à.d

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(c_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

Exemple :

1) Exprimer $\frac{1}{(1-x)^2}$ sous la forme d'une série entière.

Solution :

On sait que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{pour } |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \quad \text{pour } |x| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) \quad \text{pour } |x| < 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{pour } |x| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad \text{pour } |x| < 1$$

2°) Exprimer $\ln(1+x)$ sous la forme d'une série entière et donner son rayon de convergence.

Solution :

$$\ln(1+x) = C_1 + \int \frac{1}{1+x}\, dx$$

Scanned with CamScanner

$$= C_1 + \int \frac{1}{1-(-x)}\,dx$$

$$= C_1 + \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right) dx \quad \text{pour } |-x| < 1$$

$$= C_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n\,dx \quad \text{pour } |x| < 1$$

$$= C_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_2 \quad \text{pour } |x| < 1$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{pour } |x| < 1 \text{ avec } C = C_1 + C_2$$

pour $x = 0$, on a $\ln(1+x) = \ln(1) = 0 \Rightarrow$

$$C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(0)^{n+1}}{n+1} = \ln(1) = 0 \Rightarrow C = 0$$

D'où

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{pour } |x| < 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{pour } |x| < 1$$

Le rayon de convergence est $R = 1$

Exercices

1°) Trouver une primitive de $\frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$ et donner sa représentation en série entière

Solution :

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = C_1 - \ln(1-x)$$

D'autre part, on a

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)dx \quad \text{pour } |x|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n\,dx \quad \text{pour } |x|<1$$

$$= C_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x|<1$$

2°) Déterminer une représentation en série entière en $x=0$ de $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$

Solution

$$\operatorname{arctg}(x) = \int \frac{1}{1-x^2}\,dx + C_1$$

$$= \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n\right)dx + C_1, \text{ pour } |-x^2| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-x^2)^n dx + C_1 , \quad |x| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C_1 + C_2 , \quad |x| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C , \quad |x| < 1$$

Pour $x = 0$, on trouve $\operatorname{arctg}(0) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(0)^{2n+1}}{2n+1} + C$

D'où $C = 0$ et on obtient

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} , \quad |x| < 1$$

3°) Ecrire $\int \frac{1}{1+x^7} dx$ comme une série entière en $x = 0$.
En déduire une valeur approchée de $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7} dx$ à 10^{-7} près

Solution :

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n , \quad |-x^7| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} , \quad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{1+x^7} dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} \right) dx , \quad |x| < 1$$

(8)

$$\int \frac{1}{1+x^7}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{7n} dx \quad , \ |x| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1} + C \ , \ |x| < 1$$

D'où

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1} \Big|_0^{0.5}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/2)^{7n+1}}{7n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(0)^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(7n+1)2^{7n+1}}$$ est une série alternée

qui converge d'après le test de Leibniz

On a :

$$R_k \leq b_{k+1} \quad \text{avec } b_k = \frac{1}{(7k+1)2^{7k+1}}$$

- $k = 0 \Rightarrow b_{k+1} = b_1 = \frac{1}{8 \cdot 2^8} > 10^{-7}$
- $k = 1 \Rightarrow b_{k+1} = b_2 = \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} > 10^{-7}$
- $k = 2 \Rightarrow b_{k+1} = b_3 = \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} < 10^{-7}$

Donc il faut additionner les 3 premiers termes

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}dx \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} \simeq 0.499$$