44. Le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ et le cylindre parabolique $y = x^2$

45. L'hyperboloïde $z = x^2 - y^2$ et le cylindre $x^2 + y^2 = 1$

46. Le demi-ellipsoïde $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $y \geq 0$, et le cylindre $x^2 + z^2 = 1$

47. Essayez de représenter à la main la courbe d'intersection du cylindre circulaire $x^2 + y^2 = 4$ et du cylindre parabolique $z = x^2$. Ensuite, trouvez les équations paramétriques de cette courbe et utilisez-les pour tracer la courbe à l'aide d'un ordinateur.

48. Essayez de tracer à la main la courbe d'intersection du cylindre parabolique $y = x^2$ et de la moitié supérieure de l'ellipsoïde $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Ensuite, trouvez les équations paramétriques de cette courbe et utilisez-les pour tracer la courbe à l'aide d'un ordinateur.

49. Lorsque deux objets se déplacent dans l'espace selon deux trajectoires différentes, il est souvent important de savoir s'ils entreront en collision. (Est-ce qu'un missile atteindra une cible mobile? Est-ce que deux avions entreront en collision?) Les trajectoires pourraient se couper, mais on doit savoir si les objets seront à la même position au même instant. Supposez que les trajectoires de deux particules sont données par les fonctions vectorielles

$$\vec{r}_1(t) = t^2\,\vec{i} + (7t - 12)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$$
$$\vec{r}_2(t) = (4t - 3)\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + (5t - 6)\,\vec{k}$$

pour $t \geq 0$. Les particules entreront-elles en collision?

50. Deux particules se déplacent selon les trajectoires

$$\vec{r}_1(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}, \quad \vec{r}_2(t) = (1+2t)\,\vec{i} + (1+6t)\,\vec{j} + (1+14t)\,\vec{k}.$$

Entreront-elles en collision? Leurs trajectoires se coupent-elles?

51. a) Représentez graphiquement la courbe d'équations paramétriques

$$x = \tfrac{27}{26}\sin 8t - \tfrac{8}{39}\sin 18t$$
$$y = -\tfrac{27}{26}\cos 8t + \tfrac{8}{39}\cos 18t$$
$$z = \tfrac{144}{65}\sin 5t.$$

b) Montrez que la courbe est située sur l'hyperboloïde à une nappe

$$144x^2 + 144y^2 - 25z^2 = 100.$$

52. La représentation à la figure 8 d'un nœud de trèfle est correcte, mais elle ne révèle pas tous les aspects de cette courbe. Utilisez les équations paramétriques

$$x = (2 + \cos 1{,}5t)\cos t$$
$$y = (2 + \cos 1{,}5t)\sin t$$
$$z = \sin 1{,}5t$$

pour esquisser à la main la vue de dessus de la courbe, en laissant des blancs aux endroits où la courbe se chevauche elle-même. Commencez par montrer que la projection de la courbe dans le plan xy a pour coordonnées polaires $r = 2 + \cos 1{,}5t$ et $\theta = t$, de sorte que r varie entre 1 et 3. Ensuite, montrez que z possède un maximum et un minimum lorsque la projection est à mi-chemin entre $r = 1$ et $r = 3$.

Une fois votre esquisse achevée, utilisez un ordinateur pour tracer la vue de dessus de la courbe et comparez ce tracé avec le vôtre. Ensuite, toujours avec un ordinateur, tracez la courbe à partir de plusieurs autres points de vue. Vous aurez une meilleure idée de la courbe si vous représentez un tube de rayon 0,2 autour de la courbe. (Utilisez la commande `tubeplot` de Maple.)

53. Soit deux fonctions vectorielles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ possédant des limites lorsque $t \to a$ et soit une constante c. Démontrez les propriétés suivantes des limites:

a) $\lim\limits_{t\to a}\left[\vec{u}(t) + \vec{v}(t)\right] = \lim\limits_{t\to a}\vec{u}(t) + \lim\limits_{t\to a}\vec{v}(t)$.

b) $\lim\limits_{t\to a} c\vec{u}(t) = c\lim\limits_{t\to a}\vec{u}(t)$.

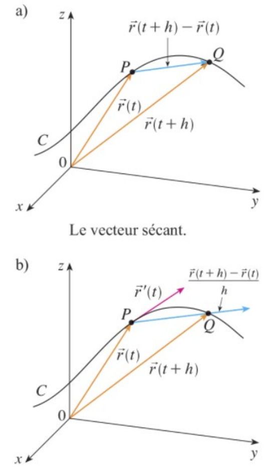
c) $\lim\limits_{t\to a}\left[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)\right] = \lim\limits_{t\to a}\vec{u}(t)\cdot\lim\limits_{t\to a}\vec{v}(t)$.

d) $\lim\limits_{t\to a}\left[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)\right] = \lim\limits_{t\to a}\vec{u}(t)\times\lim\limits_{t\to a}\vec{v}(t)$.

54. Montrez que $\lim_{t\to a}\vec{r}(t) = \vec{b}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ tel que si $0 < |t - a| < \delta$, alors $\|\vec{r}(t) - \vec{b}\| < \varepsilon$.

8.2 LES DÉRIVÉES ET LES INTÉGRALES DES FONCTIONS VECTORIELLES

Plus loin dans ce chapitre, nous utiliserons des fonctions vectorielles pour décrire le mouvement des planètes et d'autres objets dans l'espace. Dans cette section, nous développons les notions de calcul différentiel et intégral des fonctions vectorielles qui nous seront nécessaires.



a) Le vecteur sécant.

b) Le vecteur tangent.

FIGURE 1

LES DÉRIVÉES

On définit la dérivée $\vec{r}\,'$ d'une fonction vectorielle $\vec{r}$ de la même façon que la dérivée d'une fonction réelle:

1
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

si la limite existe. La figure 1 donne une interprétation géométrique de cette définition. Si les vecteurs position des points P et Q sont $\vec{r}(t)$ et $\vec{r}(t+h)$, alors $\overrightarrow{PQ}$ représente le vecteur $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$, qu'on peut alors considérer comme un vecteur sécant. Si $h > 0$, le multiple scalaire $(1/h)(\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t))$ a la même direction et le même sens que $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$. Clairement, lorsque $h \to 0$, ce vecteur tend vers un vecteur situé sur la droite tangente et donc le vecteur $\vec{r}\,'(t)$ est appelé **vecteur tangent** à la courbe définie par $\vec{r}$ au point P, pourvu que $\vec{r}\,'(t)$ existe et que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$. Par définition, la **tangente** à C en P est la droite qui passe par P et qui est parallèle au vecteur tangent $\vec{r}\,'(t)$. On définit le **vecteur tangent unitaire** comme suit:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}.$$

Le théorème suivant donne une méthode de calcul utile de la dérivée d'une fonction vectorielle $\vec{r}$; il suffit de dériver chaque composante de $\vec{r}$.

2 THÉORÈME

Si $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, où f, g et h sont des fonctions dérivables, alors

$$\vec{r}\,'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}.$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\right] \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[f(t+\Delta t)\vec{i} + g(t+\Delta t)\vec{j} + h(t+\Delta t)\vec{k} - f(t)\vec{i} - g(t)\vec{j} - h(t)\vec{k}\right] \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}\vec{k} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}\vec{k} \\
&= f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}.
\end{aligned}$$

EXEMPLE 1

a) Calculons la dérivée de $\vec{r}(t) = (1 + t^3)\vec{i} + te^{-t}\vec{j} + \sin 2t\,\vec{k}$.

b) Trouvons le vecteur tangent unitaire à la courbe paramétrée par $\vec{r}$ au point où $t = 0$.

SOLUTION

a) Conformément au théorème 2, on dérive chaque composante de $\vec{r}$:

$$\vec{r}\,'(t) = 3t^2\,\vec{i} + (1 - t)e^{-t}\,\vec{j} + 2\cos 2t\,\vec{k}.$$