

On considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = ky, \quad y(0) = y_0, \quad k = \text{constante}$$

Cette équation est parfois appelée la loi de croissance naturelle (quand  $k > 0$ ) ou de décroissance naturelle (quand  $k < 0$ ).

C'est une équation à variables séparables et on peut l'intégrer :

$$\frac{dy}{dx} = ky \Rightarrow y dy = k dx$$

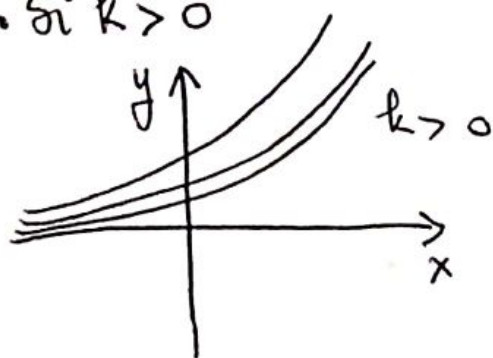
$$\Rightarrow \int y dy = \int k dx$$

$$\Rightarrow y = A e^{kx}$$

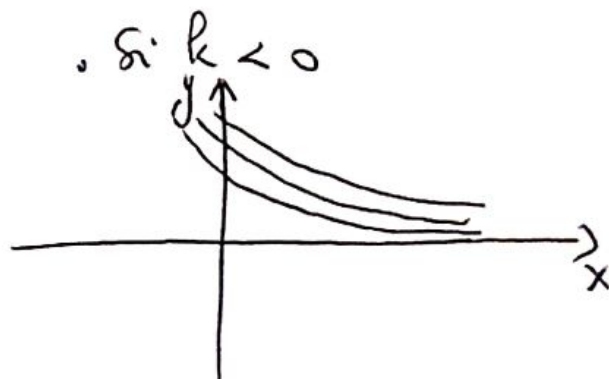
En utilisant la condition initiale  $y(0) = y_0$ , on trouve

$$y(x) = y_0 e^{kx}$$

• Si  $k > 0$



• Si  $k < 0$



Exemple 1 : modèle d'une population sans contraintes

(2)

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad P(0) = P_0$$

On a :  $P(t) = P_0 e^{kt}$

Exemple 2 :

Le Tritium-3 est un isotope de l'hydrogène. Il est radioactif et se décompose spontanément en Hélium-3. On suppose que la décomposition suit la loi exponentielle. Un échantillon de Tritium-3 est réduit à 94.5% de sa masse en 1 an.

a) Quelle est la demi-vie du Tritium-3?

b) Combien de temps faut-il pour qu'il n'en reste que 20%?

Solution

Soient  $t$  = temps en années

$m = m(t)$  = masse du Tritium-3 en mg après  $t$  années

Comme la décomposition suit une loi exponentielle, on a

$$\frac{dm}{dt} = km \Rightarrow m(t) = m_0 e^{kt} \quad \text{ou} \quad m(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

$m_0$  = masse initiale  
 $k$  = constante  
 $\lambda$  = constante

À  $t = 1$  an, on a  $m(1) = \frac{94.5}{100} m_0$  où  $m_0$  = masse initiale

(3)

$$\Rightarrow 0.945 m_0 = m_0 e^k \Rightarrow k = \ln(0.945)$$

D'où

$$y(t) = m_0 e^{\ln(0.945)t} = m_0 (0.945)^t$$

a) La demi-vie correspond au temps auquel la masse initiale est réduite de moitié. On cherche  $t$  tel que

$$m(t) = \frac{m_0}{2} \Rightarrow m_0 (0.945)^t = \frac{m_0}{2}$$

$$\Rightarrow (0.945)^t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(1/2)}{\ln(0.945)}$$

demi-vie  $t \approx 12.25 \text{ ans}$

b) On cherche  $t$  tel que  $m(t) = \frac{20}{100} m_0$

$$\Rightarrow m_0 (0.945)^t = 0.2 m_0$$

$$\Rightarrow (0.945)^t = 0.2$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.945)}$$

$$t \approx 28.45 \text{ ans}$$

On constate que c'est indépendant de la masse initiale.

## Loi du refroidissement de Newton

(4)

Soient  $T = T(t)$  la température d'un objet au temps  $t$  et  $E$  la température extérieure (ambiante). Le taux de variation de la température  $T$  de l'objet est proportionnel à la différence entre la température ambiante et la température de l'objet. Ce qui se traduit par une équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} = k(E - T) \quad \text{où } k = \text{constante}$$

### Exemple

Une dinde rôtie sort du four au moment où le thermomètre de cuisson indique  $85^\circ\text{C}$ . Elle est placée sur une table dans une pièce où il fait  $23^\circ\text{C}$ . Si la température de la dinde est de  $85^\circ\text{C}$  après une demi-heure, à quelle température sera-t-elle après

- i)  $t$  heures ?
- ii)  $\frac{3}{4}$  heure ?
- iii) Quand sera-t-elle à  $37^\circ\text{C}$  ?

Solution

i) On a :

$$\frac{dT}{dt} = k(E - T) = k(23 - T)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{23 - T} = k dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dT}{23 - T} = \int k dt$$

$$\Rightarrow -\ln |23 - T| = kt + C$$

$$\Rightarrow T = 23 + A e^{-kt}$$

$$\text{À } t = 0, \text{ on a } T(0) = 85 \Rightarrow 23 + A e^{-k(0)} = 85$$

$$\Rightarrow A = 62$$

$$T = 23 + 62 e^{-kt}$$

$$\text{À } t = \frac{1}{2} \text{ heure} = 0.5, \text{ on a } T(0.5) = 65 \Rightarrow$$

$$23 + 62 e^{-0.5k} = 65 \Rightarrow k = -2 \ln \left( \frac{42}{62} \right) = 0.7789$$

Donc

$$T(t) = 23 + 62 e^{-0.7789t}$$

$$ii) T\left(\frac{3}{4}\right) = 23 + 62 e^{-0.7789(3/4)} \approx 57.6^\circ\text{C}$$

(6)

iii) On cherche  $t$  tel que  $T(t) = 37$

$$T(t) = 23 + 62 e^{-0.7789t} = 37 \Rightarrow t = 1.91 \text{ h}$$

### Equation logistique

On considère une population dont le taux de croissance relatif diminue lorsque la population  $P$  augmente et devient même négatif lorsque  $P$  dépasse sa capacité maximale  $K$ . (maximum que le milieu est capable de supporter à long terme)

L'expression la plus simple du taux de croissance moyen qui reflète ces suppositions est :

$$\frac{dP}{dt} = k P \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad \text{ou} \quad (*)$$

$t$  = le temps

$P = P(t)$  = la taille de la population au temps  $t$

$K$  = la capacité maximale

$k$  = une constante.

L'équation (\*) est connue sous le nom d'équation logistique (7)

Solution analytique :

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = k dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int k dt \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right) dP = \int k dt \Rightarrow$$

$$\ln|P| - \ln|K-P| = kt + C \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{K-P}{P}\right| = -kt - C \Rightarrow$$

$$\frac{K-P}{P} = Ae^{-kt}, \quad A \text{ constante} \Rightarrow$$

$$P = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}$$

Calcul de A :

$$P(0) = P_0 = \frac{K}{1+A} \Rightarrow P_0 + AP_0 = K \quad \checkmark$$
$$\Rightarrow A = \frac{K - P_0}{P_0}$$

D'où

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} \quad \text{ou} \quad A = \frac{K - P_0}{P_0}$$

Exemple

Ecrire la solution du problème

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P \left(1 - \frac{P}{1000}\right), \quad P(0) = 100$$

~~A~~ Déterminer  $P(40)$ .

À quel moment la taille de la population atteindra t-elle 900?

Solution

On a l'équation logistique avec

$$K = 1000, \quad k = 0.08 \quad \text{et} \quad P_0 = 100$$

Donc

(9)

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-0.08t}} \quad \text{ou} \quad A = \frac{1000 - 100}{100} = 9$$

D'où

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}}$$

$$P(40) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.08(40)}} \approx 731,6$$

On cherche  $t$  tel que  $P(t) = 900 \Rightarrow$

$$\frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}} = 900 \Rightarrow$$

$$1 + 9e^{-0.08t} = \frac{1000}{900} = \frac{10}{9} \Rightarrow$$

$$e^{-0.08t} = \frac{1}{81} \Rightarrow$$

$$-0.08t = \ln(1/81) = -\ln 81$$

$$t = \frac{-\ln 81}{-0.08} \approx 54.9$$