EXEMPLE 6 La température T dans une boule de métal est proportionnelle au carré de la distance au centre de la boule. Calculons le flux thermique à travers une sphère S de rayon a et centrée au centre de la boule.

SOLUTION On prend comme origine le centre de la boule. On a alors

$$T(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2),$$

où C est la constante de proportionnalité. L'écoulement thermique est

$$\vec{F}(x, y, z) = -K\nabla T = -KC(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}),$$

où K est la conductivité du métal. Ici, on n'utilise pas la paramétrisation habituelle de la sphère comme à l'exemple 4, mais on remarque plutôt que le vecteur normal unitaire vers l'extérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ au point (x, y, z) est

$$\vec{n} = \frac{1}{a}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

On a donc
$$\vec{F} \bullet \vec{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Toutefois, sur S, on a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ donc $\vec{F} \bullet \vec{n} = -2aKC$. Par conséquent, le flux thermique à travers S est

$$\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \bullet \vec{n}\, dS = -2aKC \iint_S dS$$
$$= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3.$$

Exercices 10.2

1. Soit S la surface d'une boîte bornée par les plans $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ et $z = \pm 1$. Approximez $\iint_S \cos(x + 2y + 3z)$ en utilisant une somme de Riemann comme dans la définition 1, en prenant pour éléments de surface S_{ij} les rectangles qui sont les faces de la boîte S et pour points P_{ij}^* les centres des rectangles.

2. Soit une surface S constituée du cylindre $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \le z \le 1$, ainsi que des deux disques fermant le cylindre. Supposez que f est une fonction continue telle que

$$f(\pm 1, 0, 0) = 2 \quad f(0, \pm 1, 0) = 3 \quad f(0, 0, \pm 1) = 4.$$

Approximez $\iint_S f(x, y, z)\,dS$ à l'aide d'une somme de Riemann en prenant pour éléments de surface S_{ij} quatre quarts de cylindre et les disques supérieur et inférieur du cylindre.

3. Soit l'hémisphère H :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 50,\ z \ge 0.$$

Supposez que f est une fonction continue telle que $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ et $f(-3, -4, 5) = 12$.

Subdivisez H en quatre éléments de surface et approximez $\iint_H f(x, y, z)\,dS$.

4. Supposez que

$$f(x, y, z) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right),$$

où g est une fonction d'une variable telle que $g(2) = -5$. Calculez $\iint_S f(x, y, z)\,dS$, où S est la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5-20 Calculez l'intégrale de surface.

5. $\iint_S (x + y + z)\,dS$, S est le parallélogramme paramétré par $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1 + 2u + v$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 1$.

6. $\iint_S xyz\,dS$, S est le cône paramétré par $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi/2$.

7. $\iint_S y\,dS$, S est l'hélicoïde paramétré par $\vec{r}(u, v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + v\,\vec{k}$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$.

8. $\iint_S (x^2 + y^2)\,dS$, S est la surface $\vec{r}(u, v) = 2uv\,\vec{i} + (u^2 - v^2)\,\vec{j} + (u^2 + v^2)\,\vec{k}$, $u^2 + v^2 \le 1$.

9. $\iint_S x^2yz\,dS$, S est la partie du plan $z = 1 + 2x + 3y$ au-dessus du rectangle $[0, 3] \times [0, 2]$.

10. $\iint_S xz\,dS$, S est la partie du plan $2x + 2y + z = 4$ située dans le premier octant.

11. $\iint_S x\,dS$, S est la région occupée par le triangle de sommets (1, 0, 0), (0, −2, 0) et (0, 0, 4).

12. $\iint_S y\,dS$, S est la surface $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

13. $\iint_S z^2\,dS$, S est la partie du paraboloïde $x = y^2 + z^2$ paramétrée par $0 \le x \le 1$.

14. $\iint_S y^2z^2\,dS$, S est la partie du cône $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ paramétrée par $0 \le y \le 5$.

15. $\iint_S x\,dS$, S est la surface $y = x^2 + 4z$, $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 1$.

16. $\iint_S y^2\,dS$, S est la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ au-dessus du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

17. $\iint_S (x^2z + y^2z)\,dS$, S est l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$.

18. $\iint_S (x + y + z)\,dS$, S est la partie du demi-cylindre $x^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$ située entre les plans $y = 0$ et $y = 2$.

19. $\iint_S xz\,dS$, S est la frontière de la région bornée par le cylindre $y^2 + z^2 = 9$ et les plans $x = 0$ et $x + y = 5$.

20. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$, S est la partie du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ entre les plans $z = 0$ et $z = 2$, avec les disques supérieur et inférieur.

21-32 Calculez l'intégrale de surface $\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{S}$ pour le champ vectoriel $\vec{F}$ et la surface orientée S donnés. Autrement dit, trouvez le flux de $\vec{F}$ à travers S. Pour les surfaces fermées, utilisez l'orientation positive (vers l'extérieur).

21. $\vec{F}(x, y, z) = ze^{xy}\,\vec{i} - 3ze^{xy}\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$, S est le parallélogramme de l'exercice 5 orienté vers le haut.

22. $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$, S est l'hélicoïde de l'exercice 7, orienté vers le haut.

23. $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$, S est la partie du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ située au-dessus du carré $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, et orientée vers le haut.

24. $\vec{F}(x, y, z) = -x\vec{i} - y\vec{j} + z^3\vec{k}$, S est la partie du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre les plans $z = 1$ et $z = 3$, orientée vers le bas.

25. $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$, S est la sphère de rayon 2 centrée à l'origine.

26. $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} - x\vec{j} + 2z\vec{k}$, S est l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$, orienté vers le bas.

27. $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{j} - z\vec{k}$, S est constituée du paraboloïde $y = x^2 + z^2$, $0 \le y \le 1$ et du disque $x^2 + z^2 \le 1$, $y = 1$.

28. $\vec{F}(x, y, z) = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\,\vec{k}$, S est la surface $z = x\sin y$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \pi$ orientée vers le haut.

29. $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$, S est le cube de sommets $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

30. $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 5\vec{k}$, S est la frontière de la région bornée par le cylindre $x^2 + z^2 = 1$ et les plans $y = 0$ et $x + y = 2$.

31. $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, S est la frontière du demi-cylindre solide $0 \le z \le \sqrt{1 - y^2}$, $0 \le x \le 2$.

32. $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + (z - y)\vec{j} + x\vec{k}$, S est la surface du tétraèdr[e] de sommets (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1).

LCS **33.** Calculez $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$ avec quatre décimales exacte[s] où S est la surface $z = xe^y$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

LCS **34.** Calculez la valeur exacte de $\iint_S xyz\,dS$, où S est la surfac[e] $z = x^2y^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

LCS **35.** Calculez $\iint_S x^2y^2z^2\,dS$ avec quatre décimales exactes, où S est la partie du paraboloïde $z = 3 - 2x^2 - y^2$ située au-dessu[s] du plan xy.

LCS **36.** Calculez le flux de

$$\vec{F}(x, y, z) = \sin(xyz)\vec{i} + x^2y\vec{j} + z^2e^{x/5}\vec{k}$$

à travers la partie du cylindre $4y^2 + z^2 = 4$ située au-dessu[s] du plan xy et entre les plans $x = -2$ et $x = 2$, orientée vers l[e] haut. À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, trace[z] le cylindre et le champ vectoriel sur la même figure.

37. Trouvez une formule pour $\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{S}$, semblable à la for[-] mule 10, pour S donnée par $y = h(x, z)$; $\vec{n}$, le vecteur norma[l] unitaire, pointe vers la gauche.

38. Trouvez une formule pour $\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{S}$, semblable à la for[-] mule 10, pour S donnée par $x = k(y, z)$; $\vec{n}$, le vecteur norma[l] unitaire, pointe vers l'avant (c'est-à-dire vers l'observateu[r] lorsque les axes sont tracés de la façon habituelle).

39. Trouvez le centre de masse de l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$, sachant que sa densité est constante.

40. Calculez la masse d'un entonnoir mince de forme coniqu[e] $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \le z \le 4$, sachant que sa fonction de densit[é] est $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

41. a) Exprimez par une intégrale le moment d'inertie I_z pa[r] rapport à l'axe des z d'une plaque mince ayant la form[e] d'une surface S, sachant que la fonction de densité est ρ

b) Trouvez le moment d'inertie par rapport à l'axe des z d[e] l'entonnoir de l'exercice 40.

42. Soit S, la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ située au[-] dessus du plan $z = 4$. Si la densité de S est une constante k trouvez : a) le centre de masse et b) le moment d'inertie pa[r] rapport à l'axe des z.

43. Un fluide d'une densité de 870 kg/m^3 s'écoule à la vitess[e] $\vec{v} = z\vec{i} + y^2\vec{j} + x^2\vec{k}$, où x, y et z sont exprimées en mètre[s] et les composantes de $\vec{v}$, en mètres par seconde. Calcule[z] le flux vers l'extérieur à travers le cylindre $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 1$.

44. De l'eau de mer d'une densité de 1025 kg/m^3 s'écoul[e] selon un champ de vitesses $\vec{v} = y\vec{i} + x\vec{j}$, où x, y et z son[t] exprimées en mètres et les composantes de $\vec{v}$, en mètre[s] par seconde. Trouvez le flux vers l'extérieur à traver[s] l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \ge 0$.