CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL II (MAT1722-A)
EXAMEN FINAL (22 avril 2013)

Max = 100

NOM de famille: ____________________

Prénom: ____________________

Numéro d'étudiant: ____________________

- Durée: 3 heures.
- Aucune note n'est permise.
- Seules les calculatrices de base de type TI 30, TI 34, Casio fx-260 ou Casio fx-300 sont autorisées.
- Les questions 1 à 10 sont à choix multiples et valent chacune 4 points. Encercler la réponse correcte. Les réponses numériques sont arrondies à la dernière décimale indiquée.
- Les questions 11 à 16 sont à développement. Elles requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution.
- Écrire vos solutions dans l'espace prévu. Utiliser le verso des pages comme brouillon si nécessaire. On ne tiendra pas en compte les solutions des questions à choix multiples sauf en cas de soupçon de fraude.
- L'examen est noté sur 100.

1. [**4 points**] Que vaut l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$?

A) 0 B) $4e^{-2}$ C) $3e^{-2}$ D) e^{-1} E) $3e$ F) ∞

The correct answer is D.

$$\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = -\lim_{t\to\infty}\left[e^{-x^2}\right]_1^t = -\lim_{t\to\infty} e^{-t^2} + e^{-1} = e^{-1}.$$

2. [**4 points**] Déterminez le volume du solide à fond plat dont la base est la région bornée du plan délimitée par les courbes $y = x$, $y = x^2$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés.

A) 1/30 B) 1/15 C) 2/3 D) 3/4 E) 5/6 F) 5/4

The correct answer is A.

The volume of each cross-section is $(x - x^2)^2 dx$. So, we have

$$\int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

3. [**4 points**] En appliquant la méthode d'Euler avec pas de $h = 0.1$, estimez $y(0.2)$ où y est la solution du problème de Cauchy $y' = y^2 + x$, $y(0) = 1$.

A) 1.573 B) 2.589 C) 1.231 D) 2.623 E) 3.634 F) 2.653

The correct answer is C.

The formula for the approximations is

$$y_n = y_{n-1} + hf\,(x_{n-1}, y_{n-1})$$

So, we have

$$y_1 = y_0 + (0.1)(y_0^2 + x_0) = 1 + (0.1)(1^2 + 0) = 1 + 0.1 = 1.1$$
$$y_2 = y_1 + (0.1)(y_1^2 + x_1) = 1.1 + (0.1)((1.1)^2 + (0.1)) = 1.231$$

4. [**4 points**] Une population de bactéries compte initialement 1000 individus et grandit à un taux proportionnel à son effectif. Au bout d'une heure, elle est passée à 1500 individus. En combien d'heures aura-t-elle doublé? Choisir la réponse correcte à 2 décimales près.

A) 3.64 B) 1.68 C) 1.72 D) 3.76 E) 1.71 F) 3.84

The correct answer is E.

$$P = P_0 e^{kt} \Rightarrow \quad 1.5 = e^k \Rightarrow k = \ln(1.5).$$
$$2000 = 1000e^{kT} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\ln(1.5)} \approx 1.71.$$

5. [**4 points**] Déterminez $y(1)$ où $y(t)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = 2ty, \quad y(0) = 1.$$

A) $\sqrt{3}$ B) e C) $\sqrt{8}$ D) $\ln(3)$ E) $\ln(5)$ F) $e+1$

The correct answer is B.

$$\frac{dy}{y} = 2tdt \Rightarrow \ln y = t^2 + c \Rightarrow y = Ce^{t^2} \quad \Rightarrow y(0) = C = 1.$$

So the solution of the IVP is $y = e^{t^2}$ and $y(1) = e$.

6. [**4 points**] Déterminez les trois premiers termes non nuls de la série de MacLaurin de $(1-x)e^x$.

A) $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ B) $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3$ C) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$

D) $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2$ E) $1 - \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}x^2$ F) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2$

The correct answer is A.

$$(1-x)e^x = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} = (1-x)(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots-x-x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+\ldots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$$

7. [**4 points**] Find the power series representation for $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}$ and determine the radius of convergence R.

A) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{16^{n+1}}, \quad R=4$ B) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{16^{n+1}}, \quad R=2$ C) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}, \quad R=4$

D) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n}}{16^{n}}, \quad R=1$ E) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{16^{n}}, \quad R=4$ F) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{4^{n+1}}, \quad R=1$

The correct answer is A.

$$f(x) = \frac{x}{16}\frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{16}\right)} = \frac{x}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{16}\right)^n = \frac{x}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{16^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{16^{n+1}}.$$

$$\left|-\frac{x^2}{16}\right| < 1 \Rightarrow x^2 < 16 \Rightarrow R = 4.$$

8. [**4 points**] Le rayon r et la hauteur h d'un cylindre varient en fonction du temps t. Soit $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ sa surface. Sachant qu'au temps $t=2$, on a

$$r = 10 \text{ cm}, \quad h = 30 \text{ cm}, \quad \frac{dr}{dt} = 2 \text{ cm/s} \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dt} = 1 \text{ cm/s},$$

déterminez le taux de variation $\dfrac{dS}{dt}$ de sa surface S du cylindre à ce moment-là.

A) 180π B) 100π C) 80π D) 40π E) 60π F) 120π

The correct answer is C.

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}h + 2\pi r\frac{dh}{dt} + 4\pi r\frac{dr}{dt} = 2\pi(1)(20) + 2\pi(5)(2) + 4\pi(5)(1) = 80\pi$$

9. [**4 points**] Associez chaque fonction à la série qui la représente:

$\dfrac{1}{1+x^3}$ •	• $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$
$\cos(4x)$ •	• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1}$
$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}dt$ •	• $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-16)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n\right)$ •	• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

10. [**4 points**] Déterminer la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y) = 2xy - 3y^2$ au point $(5,5)$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = (4,3)$.

A) 2 B) -6 C) 10 D) 3 E) 9 F) -4

The correct answer is F.

$f_x = 2y, \quad f_y = 2x - 6y$, and $|v| = 5$, so we have

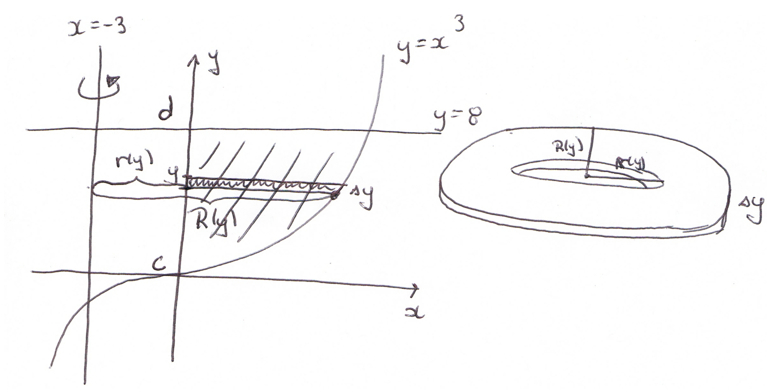
$$D_{\vec{v}}f(5,5) = f_x(5,5)\frac{4}{5} + f_y(5,5)\frac{3}{5} = (10)\frac{4}{5} - (20)\frac{3}{5} = -4.$$

11. [**10 points**] Soit $\mathcal{R}$ la région bornée du plan délimitée par la courbe $y = x^3$ et les droites horizontales $y = 8$ et $y = 0$ (l'axe des x), et soit $\mathcal{S}$ le solide de révolution obtenu par rotation de cette région $\mathcal{R}$ autour de la droite verticale $x = -3$.

Calculez le volume de $\mathcal{S}$ par la méthode des anneaux ou par celle des cylindres, à votre choix. **Dessinez la région $\mathcal{R}$, la coupe du solide dans le plan xy, et un élément de volume (anneau ou cylindre) avec ses dimensions.**

Solution:

1. Using washer method:



- Using the washer method with respect to the y variable :

$$V = \int_c^d \pi(R^2(y) - r^2(y))\, dy$$

- limits:
  - $c : y = (0)^3 = 0$
  - $d : y = 8$
- radii:
  - outer radius: $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

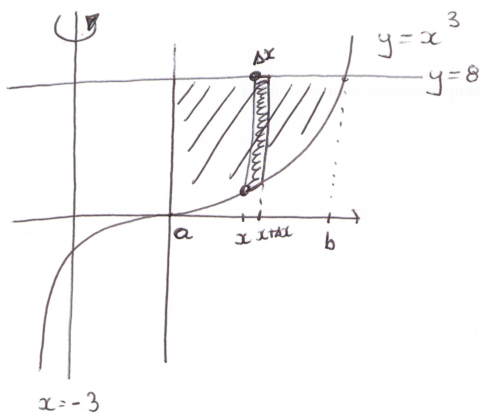
$$R(y) = \sqrt[3]{y} + 3$$

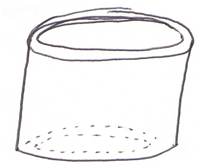
  - inner radius: $r(y) = 3$

- volume:

$$V = \int_0^8 \pi \left((\sqrt[3]{y}+3)^2 - (3)^2 \right)\, dy = \pi \int_0^8 (y^{2/3} + 6y^{1/3} + 9) - 9\, dy$$
$$= \pi \int_0^8 y^{2/3} + 6y^{1/3}\, dy$$
$$= \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3} + 6\left(\frac{3}{4} y^{4/3} \right) \right]_0^8$$
$$= \pi \left(\frac{3(32)}{5} + \frac{6(3)(16)}{4} \right) - 0 = \frac{456\pi}{5}$$

2. Using cylindrical shells method:





- Using the cylindrical shells method with respect to the x variable :

$$V = \int_a^b 2\pi (\text{shell radius})(\text{shell height})\, dx$$

- limits:
  - $a : x = 0$
  - $b : x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$
- shell info:
  - shell radius $= x + 3$
  - shell height $= 8 - x^3$
- volume:

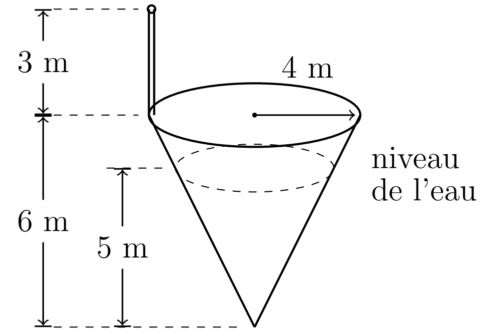
$$V = \int_0^2 2\pi (x+3)(8-x^3)\, dx = 2\pi \int_0^2 -x^4 - 3x^3 + 8x + 24\, dx$$
$$= 2\pi \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + 4x^2 + 24x \right]_0^2$$
$$= 2\pi \left(-\frac{32}{5} - \frac{3(16)}{4} + 16 + 48 \right) - 0 = \frac{456\pi}{5}$$

12. [10 points] Un réservoir a la forme d'un cône droit avec la pointe en bas comme le montre la figure ci-contre.

Sa hauteur est de 6 m et son rayon à la base (c'est-à-dire le dessus du réservoir) est de 4 m. Il est rempli d'eau jusqu'à 5 m.

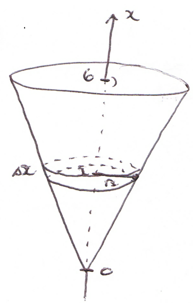
On veut pomper toute son eau à 3 m au-dessus du réservoir.

On note x la hauteur en mètres mesurée **à partir du fond du réservoir**.

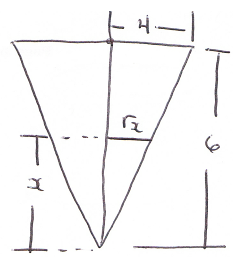


(a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$?

Réponse: $\Delta V \;\cong$



$$\begin{aligned} V &\approx \pi \cdot r_x^2 \cdot \triangle x \\ &= \pi \left(\frac{2}{3}x\right)^2 \triangle x \\ &= \frac{4}{9}\pi x^2 \triangle x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{r_x}{x} &= \frac{4}{6} \\ r_x &= \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 3 m au-dessus du réservoir. On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3, et que $g \cong 9.8 \text{ m/s}^2$.

Réponse: $\Delta W \;\cong$

$$\begin{aligned} \triangle W &\approx g \cdot (1000) \cdot \triangle V \cdot d \\ &= (9.8)(1000) \left(\frac{4}{9}\pi x^2 \triangle x\right)(9 - x) \\ &= \frac{39200\pi}{9}(9x^2 - x^3)\triangle x \end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper les 5 m d'eau du réservoir à 3 m au-dessus du réservoir.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^5 \frac{39200\pi}{9}(9x^2 - x^3)\, dx \\ &= \frac{39200\pi}{9}\left[3x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^5 \\ &= \frac{39200\pi}{9}\left(3(125) - \frac{(625)}{4}\right) \\ &= \frac{8575000\pi}{9} \text{ J} \approx 2993239.67 \text{ J} \end{aligned}$$

13. [**10 points**] Une citerne est remplie initialement de 400 L de saumure contenant 25 kg de sel dissous. Une autre saumure qui contient 0.3 kg/L de sel y est déversée à raison de 4 L/min. La solution est constamment brassée et évacuée au même taux de sorte que son volume total ne change pas. Soit $Q(t)$ la quantité de sel dissous (en kg) dans la citerne au temps t (en minutes).

(i) Établissez un problème à condition initiale pour $Q(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= (4)(0.3) - \left(\frac{Q}{400}\right)(4) \\
\frac{dQ}{dt} &= 1.2 - \frac{Q}{100} \\
\frac{dQ}{dt} &= \frac{120 - Q}{100}
\end{aligned}$$

such that $Q(0) = 25$.

(ii) Résolvez-la. Prenez soin de bien expliquer votre démarche.

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= \frac{120 - Q}{100} \\
\frac{dQ}{120 - Q} &= \frac{dt}{100} \\
-\ln|120 - Q| &= \frac{t}{100} + C \\
|120 - Q| &= Ae^{-t/100} \\
Q &= 120 + Ae^{-t/100}
\end{aligned}$$

Since $Q(0) = 25$,

$$\begin{aligned}
120 + A &= 25 \\
A &= -95
\end{aligned}$$

Therefore,

$$Q(t) = 120 - 95e^{-t/100}$$

(ii) Combien de sel y a-t-il dans la citerne après une heure ?

$$\begin{aligned}
Q(60) &= 120 - 95e^{-60/100} \\
&\approx 67.86 \text{ kg}
\end{aligned}$$

14. (a) [7 points] Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ est absolument convergente, semi-convergente ou divergente.

Solution:

1. Is it absolutely convergent?

   - Consider $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.
   - Since $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ is
     - positive (since $\ln x \geq 0$ when $x \geq 1$)
     - continuous (since $x \geq 1$)
     - eventually decreasing (since $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ is negative when $x \geq e$)

     we use the integral test.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{\ln x}{x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{(\ln b)^2}{2}\right)=\infty
\end{aligned}$$

   - Since the improper integral diverges the series diverges by the Integral Test.

2. Is it semi-convergent?

   - Consider $b_n=\frac{\ln n}{n}$
   - Since
     - b_n are positive
     - $b_n \to 0$
     - b_n is eventually decreasing

     The series converges by the Alternating Series Test.
   - The series is semi-convergent.

(b) [3 points] On veut calculer $s=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$ à $0,1$ près. Quel est le nombre de termes k que l'on devrait additionner pour être certain que l'erreur d'approximation de s par $s_k=\displaystyle\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$ soit $\leq 0,1$?

Solution : We need

$$|b_{n+1}| \leq 0,1$$

which requires

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} \leq 0,1$$

The first value of n for which this inequality is satisfied (by trial and error) is $n = 10$. Hence we must add the first 10 terms of the series in order to achieve the desired precision.

15. [10 points] On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n}$.

Déterminez son rayon de convergence et son intervalle de convergence. Prenez soin de bien justifier la convergence ou la divergence de la série aux extrémités de l'intervalle.

Solution :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{3^{n+1}(x-2)^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{3^n (x-2)^n}\right| \\
&= \left|\frac{3n(x-2)}{n+1}\right| \\
&= \frac{3n}{n+1}|x-2| \\
&\to 3|x-2|
\end{aligned}$$

- We conclude that $3|x-2| < 1$ whenever $|x-2| < \frac{1}{3}$. Thus the radius of convergence $R = \frac{1}{3}$.
- Thus the series converges within the interval $\frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}$ and we now check the endpoints.
- If $x = 5/3$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(-\frac{1}{3})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ which is the alternating harmonic series which converges. Thus we include the endpoint $x = 5/3$.
- If $x = 7/3$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(\frac{1}{3})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ which is the harmonic series which diverges. Thus we do not include the endpoint $x = 7/3$.
- Thus, the interval of convergence is $\left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right[$.

16. [**10 points**] On considère la fonction $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + 4y^2 - 1}$.

(a) Déterminez le domaine et esquissez-le dans le plan Oxy.

(b) Déterminez l'équation du plan tangent à cette surface au point où $(x, y) = (2, 1)$.

(c) Dessinez les courbes de niveau $f(x, y) = C$ pour $C = 1/3, -1, 1/15$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(d) Dans quelle direction f varie-t-elle le plus vite au point où $(x, y) = (2, 1)$? Quelle est cette vitesse de variabtion maximale à ce point ?Consider the function $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + 4y^2 - 1}$.

(a) Determine the domain of the function and skecth it in the xy-plane.

(b) Find the equation of the tangent plane to the surface at the point where $(x, y) = (2, 1)$.

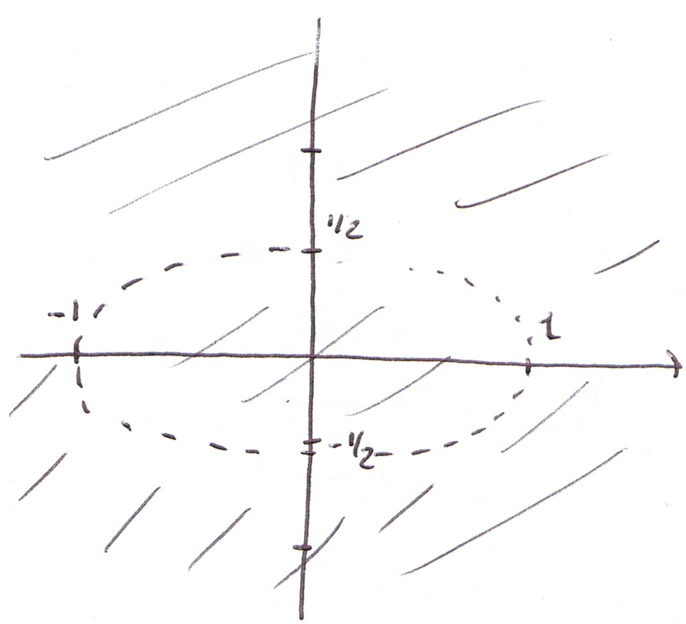
(c) Sketch the level curves $f(x, y) = C$ for $C = 1/3, -1, 1/15$.

(d) In which direction does f change the fastest at the point where $(x, y) = (2, 1)$? What is the maximal rate of change at that point?

Suite ⟶

Solution:

(a) We need that $x^2 + 4y^2 - 1 \neq 0$ which implies that $x^2 + 4y^2 \neq 1$. Which implies that we must not consider the points on the specified ellipse as shown below



(b) The tangent plane is given by the equation

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

We know that $z_0 = f(x_0, y_0) = f(2, 1) = \frac{1}{4+4-1} = \frac{1}{7}$, as well as

$$f'_x(x, y) = \frac{-2x}{(x^2 + 4y^2 - 1)^2} \qquad \text{and } f'_y(x, y) = \frac{-8y}{(x^2 + 4y^2 - 1)^2}$$

$$f'_x(2, 1) = \frac{-4}{49} \qquad \text{and } f'_y(x, y) = \frac{-8}{49}$$

Thus

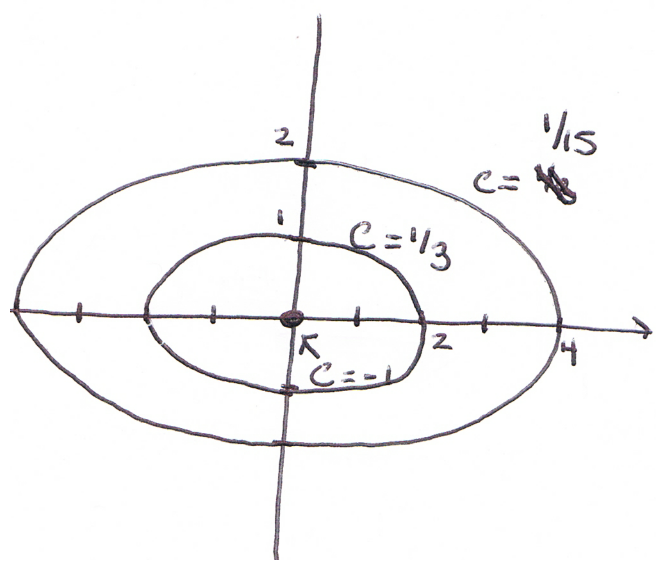
$$z - \frac{1}{7} = -\frac{4}{49}(x - 2) - \frac{8}{49}(y - 1)$$

(c) Since

$$f(x, y) = C \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 4y^2 - 1} = C \Rightarrow 1 + \frac{1}{C} = x^2 + 4y^2$$

The level curves are ellipses.

- If $C = 1/3$: $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$
- If $C = -1$: $x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0$
- If $C = 1/15$: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$



(d) We compute the gradient :

$$\triangle f = \left(f'_x(x, y), f'_y(x, y)\right) = \left(\frac{-2x}{(x^2 + 4y^2 - 1)^2}, \frac{-8y}{(x^2 + 4y^2 - 1)^2}\right)$$

$$\triangle f(2,1) = \left(-\frac{4}{49}, -\frac{8}{49}\right)$$

The maximal change occurs in the direction $\left(-\frac{4}{49}, -\frac{8}{49}\right)$ at its rate is

$$\left\|\left(-\frac{4}{49}, -\frac{8}{49}\right)\right\| = \sqrt{\frac{16}{49^2} + \frac{64}{49^2}} = \frac{\sqrt{80}}{49} \approx 0.1825$$