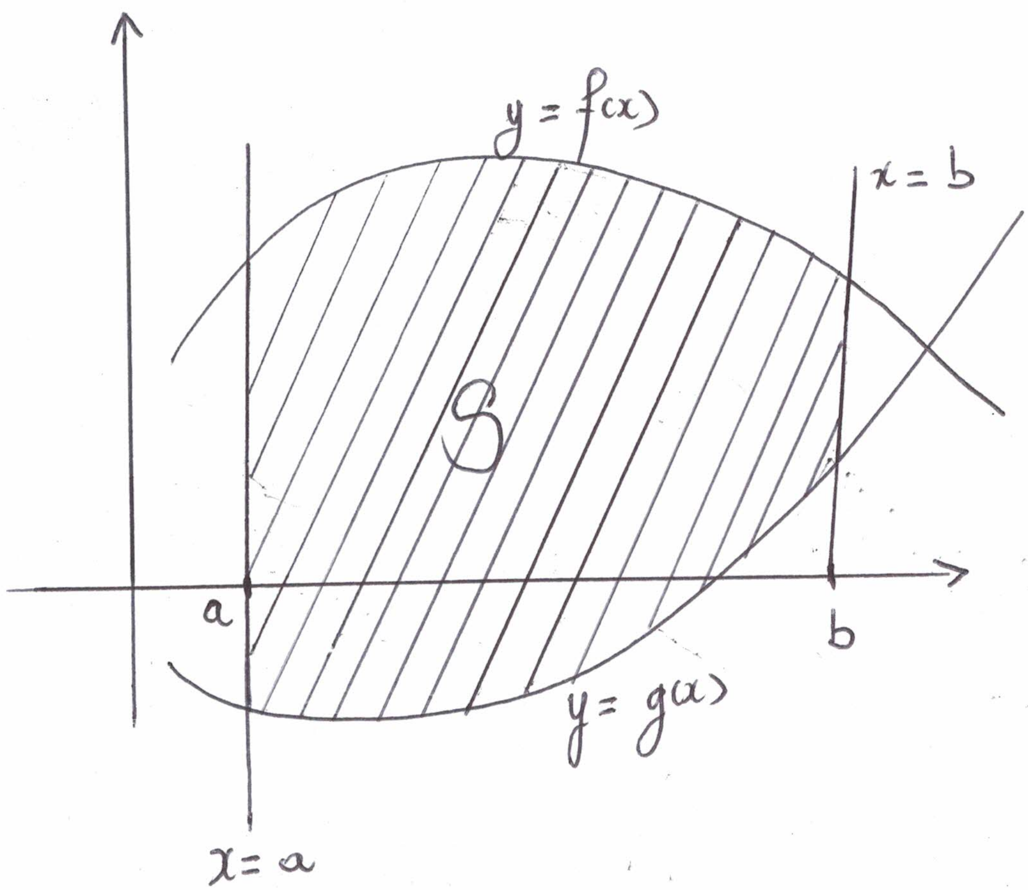
Calcul d'aires

Problème : Supposons $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.
On veut déterminer l'aire de la région délimitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$ et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

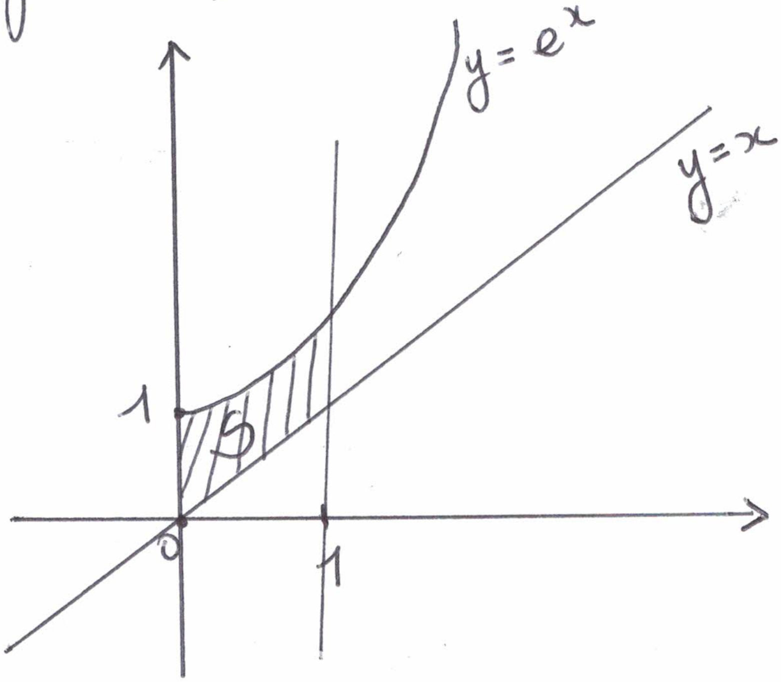


L'aire S est égale à :

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

Exemple

1) Déterminer l'aire de la surface délimitée par $y = e^x$, $y = x$, $x = 0$ et $x = 1$.



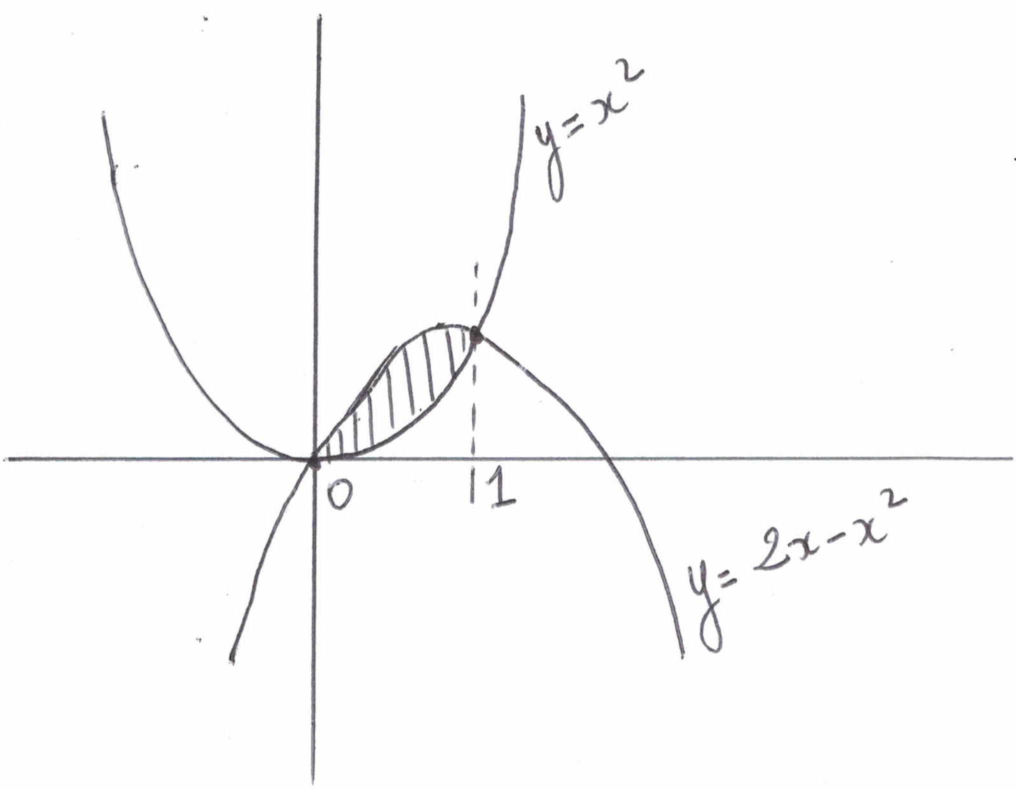
$$S = \int_0^1 (e^x - x)\,dx$$

$$= \left[e^x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= e - \frac{1}{2} - (1 - 0)$$

$$= e - \frac{3}{2}$$

2°) Déterminer l'aire de la région délimitée par $y = x^2$ et $y = 2x - x^2$



1) On cherche d'abord les points d'intersection
On doit résoudre

$$x^2 = 2x - x^2 \iff 2x^2 - 2x = 0$$
$$\iff 2x(x-1) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Les deux points d'intersection sont $(0,0)$ et $(1,1)$

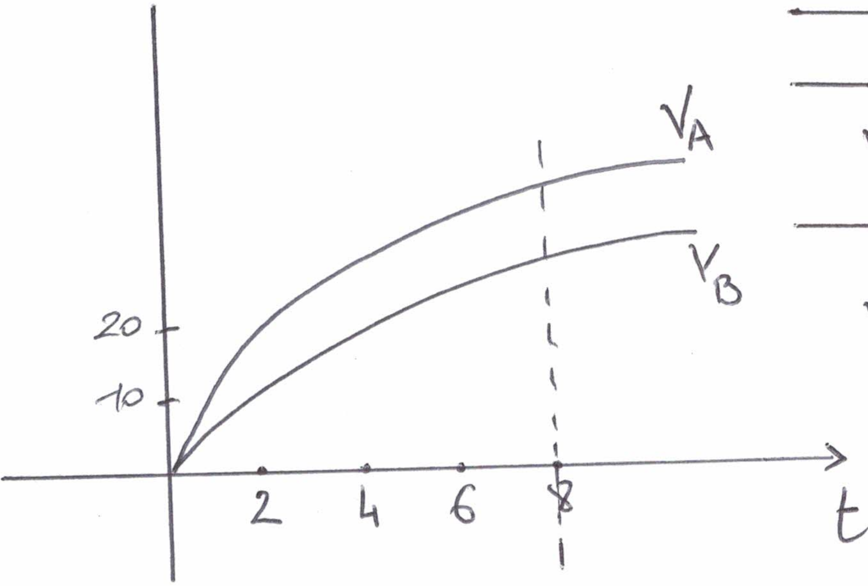
2°) L'aire est donnée par

$$S = \int_0^1 \left((2x - x^2) - x^2\right) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big]_0^1 = (1)^2 - \frac{2}{3}(1)^3 - \left((0)^2 - \frac{2}{3}(0)^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

3) La figure ci-dessous montre les courbes de vitesse de deux voitures parties en même temps du même point sur la même rout
Que représente l'aire entre les deux courbes ?
Calculer-la approximativement à l'aide de la méthode de Simpson



$t\,(s)$	0	2	4	6	8
$V_A\,(m/s)$	0	34	54	67	76
$V_B\,(m/s)$	0	21	34	44	51

Solution :

→ L'aire sous la courbe vitesse A représente la distance parcourue par la voiture A durant les 8 premières secondes

→ L'aire sous la courbe vitesse B représente la distance parcourue par la voiture B pendant le même intervalle de temps.

→ Par conséquent, l'aire entre les deux courbes représente l'écart entre les deux voitures après 8 secondes.

Approximation par la méthode de Simpson :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right], \quad n \text{ pair}$$

$$A = \int_0^8 (v_A(t) - v_B(t))\, dt$$

t	0	2	4	6	8
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25

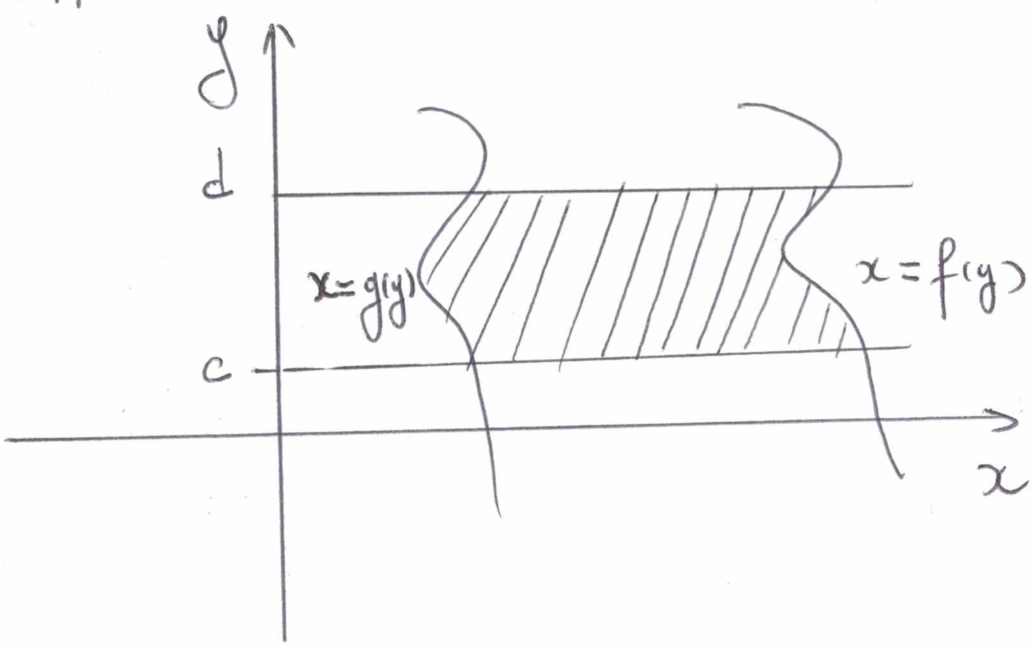
$n = 4, \; \Delta t = 2$

$$A = \int_0^8 (v_A(t) - v_B(t))\, dt = \frac{2}{3}\left(0 + 4(13) + 2(20) + 4(23) + 25\right)$$

$$= 139 \text{ m}$$

Problème 2 :

Supposons que $f(y) \geq g(y)$, $\forall y \in [c, d]$



La région délimitée par $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ et $y = d$

a pour aire $S = \int_c^d (f(y) - g(y))\, dy$

Exemple

Calculer l'aire de la région enfermée entre $y = x - 1$ et $y^2 = 2x + 6$

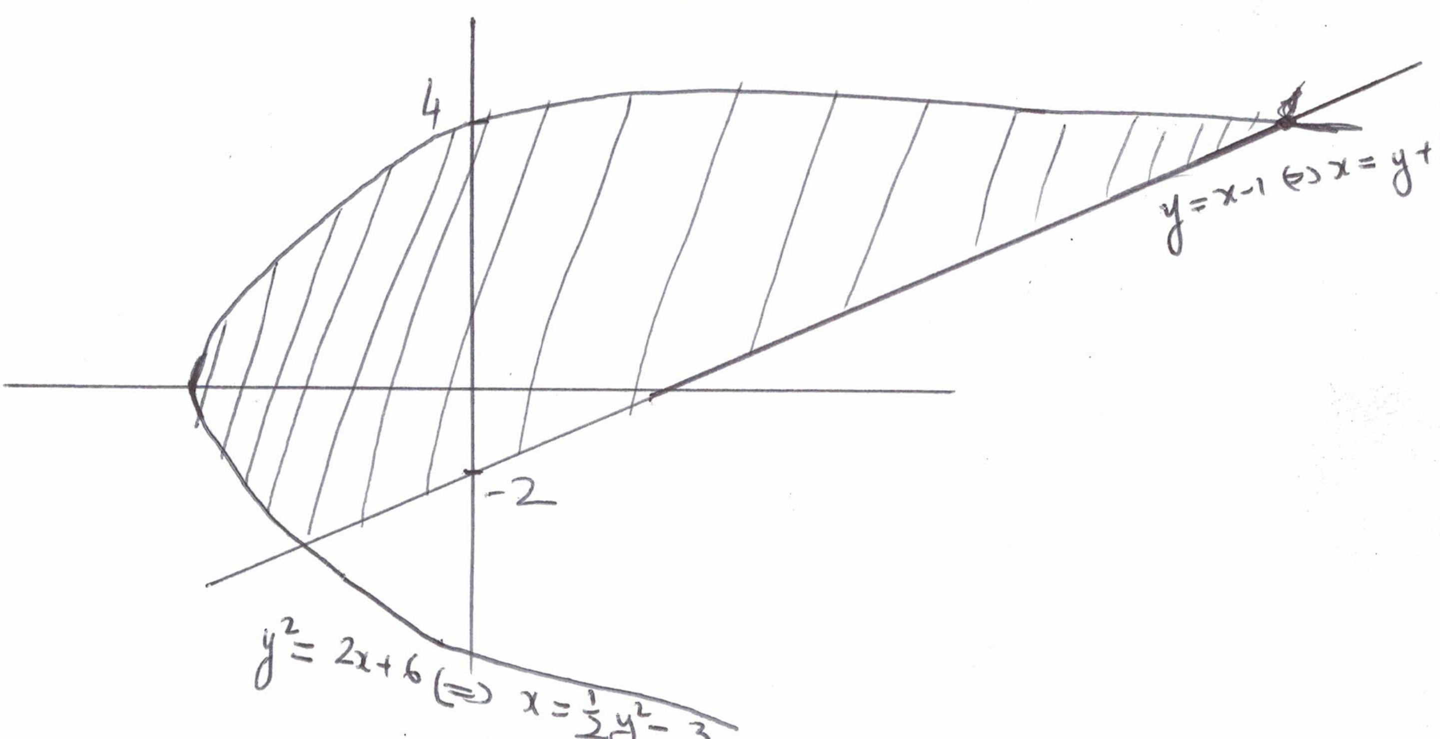
Solution

$y = x - 1 \iff x = y + 1$

$y^2 = 2x + 6 \iff x = \frac{1}{2}y^2 - 3$

1°) Points d'intersection

$$y + 1 = \frac{1}{2}y^2 - 3 \iff \frac{1}{2}y^2 - y - 4 = 0$$
$$\iff y^2 - 2y - 8 = 0$$
$$\iff (y-4)(y+2) = 0$$
$$\iff y = 4 \text{ ou } y = -2$$



$$S = \int_{-2}^{4} \left(y+1-\left(\tfrac{1}{2}y^2-3\right)\right)dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2+y+4\right)dy = -\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{2}y^2+4y\Big]_{-2}^{4}$$

$$= -\tfrac{1}{6}(64)+\tfrac{1}{2}(16)+4(4)-\left(-\tfrac{1}{6}(-2)^3+\tfrac{1}{2}(-2)^2+4(-2)\right)$$

$$= 18$$