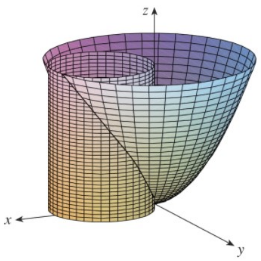


FIGURE 10

$$V=\iint_D (x^2+y^2)\,dA=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,r\,dr\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$=4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=8\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

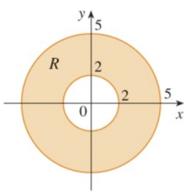
$$=2\int_0^{\pi/2}\left[1+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right]d\theta$$

$$=2\left[\frac{3}{2}\theta+\sin 2\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2}=2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}.$$

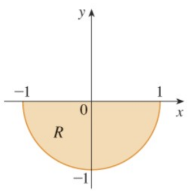
Exercices 6.4

1-4 Une région R est représentée. Après avoir choisi entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes, écrivez $\iint_R f(x,y)\,dA$ sous la forme d'une intégrale itérée, où f est une fonction quelconque continue sur R.

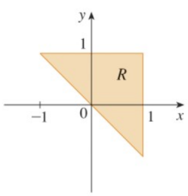
1.



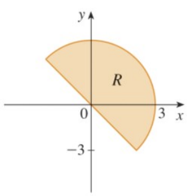
2.



3.



4.



5-6 Esquissez la région dont l'aire est donnée par l'intégrale et calculez celle-ci.

5. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_1^2 r\,dr\,d\theta$ **6.** $\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta$

7-16 Calculez l'intégrale donnée en passant aux coordonnées polaires.

7. $\iint_D x^2 y\,dA$, où D est la partie supérieure d'un disque de rayon 5 centré à l'origine.

8. $\iint_R (2x-y)\,dA$, où R est la région dans le premier quadrant comprise entre le cercle $x^2+y^2=4$ et les droites $x=0$, $y=x$.

9. $\iint_R \sin(x^2+y^2)\,dA$, où R est la région dans le premier quadrant entre deux cercles centrés à l'origine et de rayon 1 et 3.

10. $\iint_R \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\,dA$ où R est la région située entre les cercles $x^2+y^2=a^2$ et $x^2+y^2=b^2$ avec $0<a<b$.

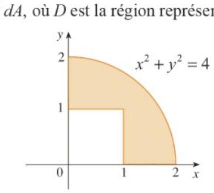
11. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, où D est la région bornée par le demi-cercle $x=\sqrt{4-y^2}$ et l'axe des y.

12. $\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dA$, où D est le disque de rayon 2 centré à l'origine.

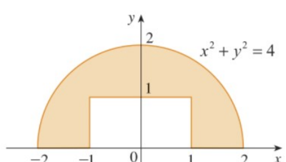
13. $\iint_R \arctan(y/x)\,dA$, où $R=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x\}$.

14. $\iint_D x\,dA$, où D est la région dans le premier quadrant située entre les cercles $x^2+y^2=4$ et $x^2+y^2=2x$.

15. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, où D est la région représentée.



16. $\iint_D y\,dA$, où D est la région représentée.



17-22 Utilisez une intégrale double pour calculer l'aire de la région.

17. Une boucle de la rosace $r=\cos 3\theta$

18. La région bornée par les cardioïdes $r=1+\cos\theta$ et $r=1-\cos\theta$.

19. La région à l'intérieur du cercle $(x-1)^2+y^2=1$ et à l'extérieur du cercle $x^2+y^2=1$

20. La région à l'intérieur de la cardioïde $r=1+\cos\theta$ et à l'extérieur du cercle $r=3\cos\theta$

21. La région à l'extérieur du cercle $r=\frac{1}{2}$ et à l'intérieur de la courbe $r=\sin^2(\theta)$

22. La région à l'intérieur du cercle $x^2+y^2=\sqrt{3}y$ et à l'extérieur de la cardioïde $r=1+\cos(\theta)$

23-31 Utilisez les coordonnées polaires pour calculer le volume du solide donné.

23. Sous le paraboloïde $z=x^2+y^2$ et au-dessus du disque $x^2+y^2\le 25$

24. Sous le cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$ et au-dessus de l'anneau $1\le x^2+y^2\le 4$

25. Sous le plan $2x+y+z=4$ et au-dessus du disque $x^2+y^2\le 1$

26. À l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=16$ et à l'extérieur du cylindre $x^2+y^2=4$

27. Une sphère de rayon a

28. Borné par le paraboloïde $z=1+2x^2+2y^2$ et le plan $z=7$ dans le premier octant

29. Au-dessus du cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$

30. Borné par les paraboloïdes $z=6-x^2-y^2$ et $z=2x^2+2y^2$

31. À l'intérieur du cylindre $x^2+y^2=4$ et de l'ellipsoïde $4x^2+4y^2+z^2=64$

32. a) On utilise une mèche cylindrique de rayon r_1 pour forer un trou passant par le centre d'une sphère de rayon r_2. Trouvez le volume du solide annulaire résultant.

b) Exprimez le volume de la partie a) en fonction de la hauteur h de l'anneau. Remarquez que le volume ne dépend que de h ; il ne dépend ni de r_1 ni de r_2.

33-36 Calculez l'intégrale itérée en passant aux coordonnées polaires.

33. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx$ **34.** $\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}(2x+y)\,dx\,dy$

35. $\int_0^{1/2}\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\,dx\,dy$ **36.** $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

37-38 Exprimez l'intégrale double comme une seule intégrale par rapport à r. Utilisez ensuite votre calculatrice pour évaluer l'intégrale avec quatre décimales exactes.

37. $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\,dA$, où D est le disque de rayon 1 centré à l'origine.

38. $\iint_D xy\sqrt{1+x^2+y^2}\,dA$, où D est la portion du disque $x^2+y^2\le 1$ qui se trouve dans le premier quadrant.

39. Une piscine circulaire a un diamètre de 12 m. Sa profondeur est constante d'est en ouest et croît linéairement de 60 cm à l'extrémité sud jusqu'à 2 m à l'extrémité nord. Calculez le volume d'eau dans la piscine.

40. Un gicleur agricole distribue de l'eau dans une zone circulaire d'un rayon de 30 m. Il fournit de l'eau jusqu'à une profondeur de e^{-r} m par heure à une distance de r m du gicleur.

a) Si $0<R\le 100$, calculez la quantité totale d'eau distribuée en 1 heure dans la région circulaire de rayon R autour du gicleur.

b) Trouvez l'expression de la quantité moyenne d'eau par heure par mètre carré distribuée dans la région circulaire de rayon R.

41. Trouvez la valeur moyenne de la fonction

$$f(x,y)=1/\sqrt{x^2+y^2}$$

sur l'anneau $a^2\le x^2+y^2\le b^2$, où $0<a<b$.

42. Soit D, le disque de rayon a centré à l'origine. Quelle est la distance moyenne des points de D à l'origine ?

43. Utilisez les coordonnées polaires pour transformer la somme

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^x xy\,dy\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

en une intégrale double, puis calculez-la.

44. a) On définit l'intégrale impropre (sur tout le plan $\mathbb{R}^2$)

$$I=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx=\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA,$$

où D_a est le disque de rayon a centré à l'origine. Montrez que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dA=\pi.$$

b) Une définition équivalente de l'intégrale impropre de la partie a) est

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA=\lim_{a\to\infty}\iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA,$$

où S_a est le carré de sommets $(\pm a,\pm a)$. Utilisez cette relation pour démontrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy=\pi.$$

c) Déduisez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

d) Posez $t=\sqrt{2}\,x$ et montrez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi}.$$

(Ce résultat est fondamental en probabilités et en statistiques.)

45. Utilisez le résultat de la partie c) de l'exercice 44 pour calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ b) $\int_0^{\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$