Représentation décimale périodique d'une fraction irreductible

La période d'un nombre à développement décimal périodique se note avec un trait horizontal placé au dessus de la séquence de chiffres qui se répète.

Exemple

$$\frac{3}{11} = 0,27272727\ldots = 0,\overline{27}$$

$$\frac{2}{13} = 0,153846153846\ldots = 0,\overline{153846}$$

$$\frac{1147}{495} = 2,3171717\ldots = 2,3\overline{17}$$

On peut retrouver la fraction irreductible correspondante au développement décimal périodique d'un nombre.

$$2,3\overline{17} = 2,3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \ldots$$

$$= 2,3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{17}{10^{2n+1}} = \frac{23}{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{17}{10}\left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17/1000}{1-\frac{1}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990}$$

$$= \frac{1147}{495}$$

Séries télescopiques

Définition

Une série télescopique est de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+p}-b_n)$$

où p est un entier fixé.

On peut facilement calculer leurs sommes partielles.

Par exemple pour $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+3}-b_n)$ on a :

$$s_k=\sum_{n=1}^{k}(b_{n+3}-b_n)=\sum_{n=1}^{k}b_{n+3}-\sum_{n=1}^{k}b_n$$

$$=b_4+b_5+\cdots+b_{k+3}-(b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_k)$$

$$=-b_1-b_2-b_3+b_{k+1}+b_{k+2}+b_{k+3}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+3}-b_n)=\lim_{k\to\infty}(b_{k+1}+b_{k+2}+b_{k+3}-b_1-b_2-b_3)$$

Exemples

1) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n+1)-\arctan(n-1))$

Solution

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\arctan(n+1) - \arctan(n-1)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \arctan(n+1) - \sum_{n=1}^{k} \arctan(n-1)$$

$$= \arctan(2) + \arctan(3) + \cdots + \arctan(k+1) - \left(\arctan(0) + \arctan(1) + \cdots + \arctan(k-1)\right)$$

$$= \cancel{\arctan(2)} + \arctan(3) + \cancel{\cdots} + \arctan(k+1) - \arctan(0) - \arctan(1) - \cancel{\cdots} - \cancel{\arctan(k-1)}$$

$$= -\arctan(0) - \arctan(1) + \arctan(k) + \arctan(k+1)$$

$$\lim_{k \to \infty} s_k = \lim_{k \to \infty} \left(-\arctan(0) - \arctan(1) + \arctan(k) + \arctan(k+1)\right)$$

$$= -0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan(n+1) - \arctan(n-1)\right) = \lim_{k \to \infty} s_k = \frac{3\pi}{4}$$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3n + 2}$

Solution

$$\frac{1}{n^2 - 3n + 2} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n+2} = \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$s_k = \sum_{n=4}^{k} \frac{1}{n-2} - \sum_{n=4}^{k} \frac{1}{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k-2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{k-2}} - \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \cdots - \cancel{\frac{1}{k-1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{k-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{k-1} = \frac{1}{2}$$

Donc $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n+2} = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{2}$$

3°) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right)$

On considère les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$.

Donc elle est convergence et on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{n+1}\right)$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \frac{3}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{3}{n+1}$$

$$= \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{3}{k-1} + \frac{3}{k} - \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \cdots + \frac{3}{k} + \frac{3}{k+1}\right)$$

$$= 3 - \frac{3}{k+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} = \lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} 3 - \frac{3}{k+1}$$

$$= 3$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 3 + 1 = 4$$