Exercices 7.1

1. Calculez l'intégrale de l'exemple 1 en intégrant successivement par rapport à y, puis par rapport à z et enfin par rapport à x.

2. Calculez l'intégrale $\iiint_E (xy+z^2)\,dV$, où

$$E=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 3\}$$

en utilisant trois ordres d'intégration différents.

3-8 Calculez l'intégrale itérée.

3. $\int_0^2\int_0^{z^2}\int_0^{y-z}(2x-y)\,dx\,dy\,dz$

4. $\int_0^1\int_0^{2y}\int_0^{x+y}6xy\,dz\,dx\,dy$

5. $\int_1^2\int_0^{2z}\int_0^{\ln x}xe^{-y}\,dy\,dx\,dz$

6. $\int_0^1\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\dfrac{z}{y+1}\,dx\,dz\,dy$

7. $\int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}z\sin x\,dy\,dz\,dx$

8. $\int_0^1\int_0^1\int_0^{2-x^2-y^2}xye^z\,dz\,dy\,dx$

9-18 Calculez l'intégrale triple.

9. $\iiint_E y\,dV$, où

$E=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 3,\ 0\le y\le x,\ x-y\le z\le x+y\}$.

10. $\iiint_E e^{z/y}\,dV$, où

$E=\{(x,y,z)\,|\,0\le y\le 1,\ y\le x\le 1,\ 0\le z\le xy\}$.

11. $\iiint_E \dfrac{z}{x^2+z^2}\,dV$, où

$E=\{(x,y,z)\,|\,1\le y\le 4,\ y\le z\le 4,\ 0\le x\le z\}$.

12. $\iiint_E \sin y\,dV$, où E est sous le plan $z=x$ et au-dessus de la région triangulaire dont les sommets sont $(0, 0, 0)$, $(\pi, 0, 0)$ et $(0, \pi, 0)$.

13. $\iiint_E 6xy\,dV$, où E est le solide sous le plan $z=1+x+y$ et au-dessus de la région du plan xy bornée par les courbes $y=\sqrt{x}$, $y=0$ et $x=1$.

14. $\iiint_E xy\,dV$, où E est délimité par les surfaces $z=x^2-1$, $z=1-x^2$, $y=0$ et $y=2$.

15. $\iiint_T y^2\,dV$, où T est le tétraèdre solide de sommets $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, 2)$.

16. $\iiint_T xz\,dV$, où T est le tétraèdre solide de sommets $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ et $(0, 0, 1)$.

17. $\iiint_E x\,dV$, où E est borné par le paraboloïde $x=4y^2+4z^2$ et le plan $x=4$.

18. $\iiint_E z\,dV$, où E est borné par le cylindre $y^2+z^2=9$ et les plans $x=0$, $y=3x$ et $z=0$ dans le premier octant.

19-22 Calculez le volume du solide donné à l'aide d'une intégrale triple.

19. Le tétraèdre borné par les plans des coordonnées et le plan $2x+y+z=4$.

20. Le solide borné par les paraboloïdes $y=x^2+z^2$ et $y=8-x^2+z^2$.

21. Le solide borné par le cylindre $y=x^2$ et les plans $z=0$ et $y+z=1$.

22. Le solide borné par le cylindre $x^2+z^2=4$ et les plans $y=-1$ et $y+z=4$.

23. Soit E, le solide borné par le cylindre $y=1-a^2x^2$ et les plans $y=0$, $z=y$ et $z=2-y$, où $a>0$ est une constante. Pour quelle valeur de a le volume de E est-il égal à 9 ?

24. Si E est le prisme borné par les plans $z=c-cx$, $z=cx+c$, $z=0$, $y=-2$ et $y=2$, où c est une constante positive, pour quelle valeur de c le volume de E est-il égal à 8 ?

25. a) À l'aide d'une intégrale triple, exprimez le volume de la portion du cylindre solide $y^2+z^2\le 1$ découpée par les plans $y=x$ et $x=1$ dans le premier octant.

LCS b) Utilisez la table d'intégrales (voir les pages de référence 6 à 10) ou un logiciel de calcul symbolique pour calculer la valeur exacte de l'intégrale triple de la partie a).

26. a) Dans la **méthode du point milieu pour les intégrales triples**, on utilise une triple somme de Riemann pour approximer une intégrale triple sur un parallélépipède B, en choisissant le centre $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ de la sous-région B_{ijk} comme point échantillon pour évaluer f. Utilisez cette méthode pour estimer $\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$, où B est le cube défini par $0\le x\le 4$, $0\le y\le 4$ et $0\le z\le 4$. Subdivisez B en huit cubes de mêmes dimensions.

LCS b) Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour approximer l'intégrale de la partie a) à l'entier le plus proche. Comparez votre réponse avec celle de la partie a).

27-28 Utilisez la méthode du point milieu (voir l'exercice 26) afin d'estimer la valeur des intégrales triples. Subdivisez B en huit sous-régions de mêmes dimensions.

27. $\iiint_B \cos(xyz)\,dV$, où

$B=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$.

28. $\iiint_B \sqrt{x}e^{xyz}\,dV$, où

$B=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 4,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 2\}$.

29-30 Dessinez le solide dont le volume est donné par l'intégrale itérée.

29. $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-2z}dy\,dz\,dx$

30. $\int_0^2\int_0^{2-y}\int_0^{4-y^2}dx\,dz\,dy$