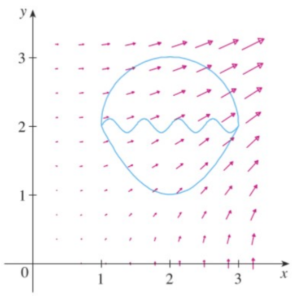
13. La figure montre le champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ et trois courbes qui commencent en (1, 2) et se terminent en (3, 2).

a) Expliquez pourquoi $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a la même valeur pour les trois courbes.

b) Quelle est cette valeur commune ?



14-20 a) Trouvez une fonction f telle que $\vec{F} = \nabla f$. b) Utilisez la partie a) pour calculer $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ le long de la courbe C donnée.

14. $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy^2)\vec{i} + 2x^2y\vec{j}$,
C est l'arc de la parabole $y = 1/x$ allant de (1, 1) à $(4, \frac{1}{4})$.

15. $\vec{F}(x, y) = x^2y^3\vec{i} + x^3y^2\vec{j}$,
$C: \vec{r}(t) = (t^3 - 2t)\vec{i} + (t^3 + 2t)\vec{j}, \quad 0 \le t \le 1$

16. $\vec{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\vec{i} + x^2e^{xy}\vec{j}$,
$C: \vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

17. $\vec{F}(x, y, z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + (xy + 2z)\vec{k}$,
C est le segment de droite allant de (1, 0, –2) à (4, 6, 3).

18. $\vec{F}(x, y, z) = (y^2z + 2xz^2)\vec{i} + 2xyz\,\vec{j} + (xy^2 + 2x^2z)\vec{k}$,
$C: x = \sqrt{t}, \quad y = t + 1, \quad z = t^2, \quad 0 \le t \le 1$

19. $\vec{F}(x, y, z) = yze^{xz}\,\vec{i} + e^{xz}\,\vec{j} + xye^{xz}\,\vec{k}$,
$C: \vec{r}(t) = (t^2 + 1)\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j} + (t^2 - 2t)\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2$

20. $\vec{F}(x, y, z) = \sin y\,\vec{i} + (x\cos y + \cos z)\vec{j} - y\sin z\,\vec{k}$,
$C: \vec{r}(t) = \sin t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}, 0 \le t \le \pi/2$

21-22 Montrez que l'intégrale curviligne est indépendante du chemin et calculez-la.

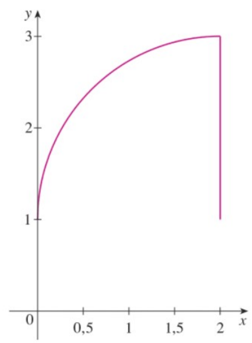
21. $\int_C 2xe^{-y}\,dx + (2y - x^2e^{-y})\,dy$,
C est un chemin allant de (1, 0) à (2, 1).

22. $\int_C \sin y\,dx + (x\cos y - \sin y)\,dy$,
C est un chemin allant de (2, 0) à $(1, \pi)$.

23. Supposez qu'on vous demande de déterminer la courbe qui nécessite le moins de travail pour qu'un champ de forces $\vec{F}$ déplace une particule d'un point à un autre. Vous décidez de commencer par vérifier si $\vec{F}$ est conservatif et vous constatez que c'est le cas. Comment répondriez-vous à cette demande ?

24. Supposez qu'une expérience détermine que la quantité de travail requise pour qu'un champ de forces $\vec{F}$ déplace une particule du point (1, 2) au point (5, –3) le long d'une courbe C_1 est 1,2 J et que le travail effectué par $\vec{F}$ pour déplacer la particule le long d'une autre courbe C_2 entre les deux mêmes points est 1,4 J. Que pouvez-vous dire au sujet de $\vec{F}$? Pourquoi ?

25. Soit C la courbe représentée sur la figure (un quart de cercle suivi d'un segment). Calculez le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = \cos(x)\cos(y)\vec{i} - \sin(x)\sin(y)\vec{j}$ le long de C.



26. Calculez le travail effectué par le champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = -y^2\vec{i} - 3xy^2\vec{j} + 2z\vec{k}$ le long du segment allant du point (1, 0, 0) au point (0, 2, 1).

27. a) Pour quelle valeur de k le champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = (1 + 3xy)\vec{i} + (kx^2 - y^2)\vec{j}$ est-il conservatif ?

b) Pour la valeur de k trouvée en a), évaluez l'intégrale $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où C est un arc de cercle reliant le point (1, 0) au point (1, 2).

28. Soit le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 + yz + 4y^2)\vec{i} + (y^2 + xz + 3kxy)\vec{j} + (xy + z^2)\vec{k}.$$

a) Pour quelle valeur de k le champ $\vec{F}$ est-il conservatif ?

b) Pour la valeur de k trouvée en a), calculez le travail effectué par le champ $\vec{F}$ à partir du point (1, 0, –1) jusqu'au point (0, 1, 2).

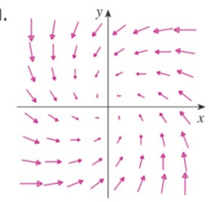
29-30 Calculez le travail effectué par le champ de forces $\vec{F}$ pour déplacer un objet de P à Q.

29. $\vec{F}(x, y) = x^3\,\vec{i} + y^3\vec{j}$; $P(1, 0), Q(2, 2)$

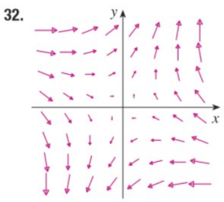
30. $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\vec{i} + x\,\vec{j}$; $P(1, 1), Q(4, 3)$

31-32 Le champ vectoriel représenté dans la figure est-il conservatif ? Expliquez votre réponse.

31.



32.



LCS **33.** Soit $\vec{F}(x, y) = \sin y\,\vec{i} + (1 + x\cos y)\,\vec{j}$. Utilisez un graphique pour décider si $\vec{F}$ est conservatif ou non. Démontrez ensuite que votre choix est correct.

34. Soit $\vec{F} = \nabla f$, où $f(x, y) = \sin(x - 2y)$. Trouvez des courbes C_1 et C_2 non fermées et qui satisfont aux équations.

a) $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ b) $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$

35. Soit le champ vectoriel

$$\vec{F}(x, y) = \left(x^4e^x + \frac{1}{2}x^2y^2\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}x^3 + y^2\sin(y) + \frac{1}{3}x^3y\right)\vec{j}.$$

Écrivez ce champ comme une somme de deux champs vectoriels $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, avec $\int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = 0$ et $\int_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} \neq 0$ où C est une courbe fermée.

36. Soit C_1 l'arc de la parabole $y = x^2$ allant de (0, 0) à (1, 1) et C_2 le segment reliant ces deux mêmes points. Trouvez un champ $\vec{F}$ tel que $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ et $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$.

37. Montrez que si le champ vectoriel $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ est conservatif et si P, Q, R ont des dérivées partielles premières continues, alors

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

38. Utilisez l'exercice 37 pour montrer que l'intégrale curviligne $\int_C y\,dx + x\,dy + xyz\,dz$ n'est pas indépendante du chemin.

39-42 Déterminez si l'ensemble donné est : a) ouvert, b) connexe ou c) simplement connexe.

39. $\{(x, y) \mid 0 < y < 3\}$

40. $\{(x, y) \mid 1 < |x| < 2\}$

41. $\{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}$

42. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (2, 3)\}$

43. Soit $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$.

a) Montrez que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

b) Montrez que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ n'est pas indépendante du chemin. (*Suggestion :* Calculez $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ et $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où C_1 et C_2 sont respectivement la moitié supérieure et la moitié inférieure du cercle $x^2 + y^2 = 1$ allant de (1, 0) à (–1, 0).) Vos réponses contredisent-elles le théorème 6 ?

44. a) Supposez que $\vec{F}$ est un champ de forces inversement proportionnel au carré de la distance, c'est-à-dire que

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{c\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

pour une certaine constante c, où $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Trouvez le travail effectué par $\vec{F}$ pour déplacer un objet d'un point P_1 vers un point P_2 en fonction des distances d_1 et d_2 de ces points à l'origine.

b) Le champ gravitationnel $\vec{F} = -(mMG)\vec{r}/\|\vec{r}\|^3$ vu à l'exemple 4 de la section 9.1 est un champ inversement proportionnel au carré de la distance. Utilisez la partie a) pour trouver le travail effectué par le champ gravitationnel lorsque la Terre se déplace de son aphélie (distance maximale de $1{,}52 \times 10^8$ km du Soleil) à son périhélie (distance minimale de $1{,}47 \times 10^8$ km). (Utilisez les valeurs $m = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².)

c) Le champ électrique $\vec{F} = \varepsilon qQ\vec{r}/\|\vec{r}\|^3$ vu à l'exemple 5 de la section 9.1 est un autre exemple d'un champ inversement proportionnel au carré de la distance. Supposez qu'un électron de charge de $-1{,}6 \times 10^{-19}$ C est situé à l'origine. Une charge unitaire positive est située à une distance de 10^{-12} m de l'électron et se déplace vers le point situé à la moitié de cette distance de l'électron. Utilisez la partie a) pour trouver le travail effectué par le champ électrique ($\varepsilon = 8{,}985 \times 10^9$).

9.4 LE THÉORÈME DE GREEN

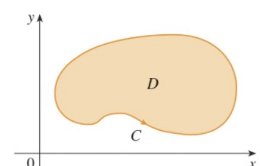


FIGURE 1

Le théorème de Green établit une relation entre une intégrale curviligne autour d'une courbe fermée simple C et une intégrale double sur la région plane D délimitée par C (voir la figure 1). On suppose que D est constituée de tous les points à l'intérieur de C ainsi que de tous les points sur C. Dans l'énoncé du théorème de Green, par convention, l'**orientation positive** d'une courbe fermée simple C est le parcours de C dans le sens antihoraire. Ainsi, si C est paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, alors la région D est toujours à gauche lorsque le point $\vec{r}(t)$ parcourt C (voir la figure 2 à la page suivante).