

CEG 3555: Systèmes Numériques II  
(Automne 2023)

Prof. Rami Abielmona

Solutions Possibles pour Devoir #4: *Circuits Asynchrones*

21 Novembre, 2023

## Question I

Cette question se concerne avec les technologies de réalisation de circuits numériques.  
Les parties a, b et c sont questions B.38, B.40 et B.46 de votre manuel.

### Partie a

Le circuit est démontré en figure 11. Notez que  $f_1$  et  $f_2$  sont les sorties du PLA, mais seulement  $f_1$  est utilisé.

### Partie b

Le circuit est démontré en figure 12.

### Partie c

La forme SOP de  $f$  est

$$f = x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \quad (1)$$

On peut manipuler la fonction pour obtenir

$$f = x_2 \cdot (x_1 \cdot x_4 + x_3 \cdot \overline{x_4}) + \overline{x_2} \cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{x_3}) \quad (2)$$

et en utilisant la décomposition fonctionnelle, on arrive à

$$f = x_2 \cdot f_1 + \overline{x_2} f_2 \quad (3)$$

où

$$f_1 = x_1 \cdot x_4 + x_3 \cdot \overline{x_4} \quad (4)$$

$$f_2 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \quad (5)$$

Le circuit est démontré en figure 1.

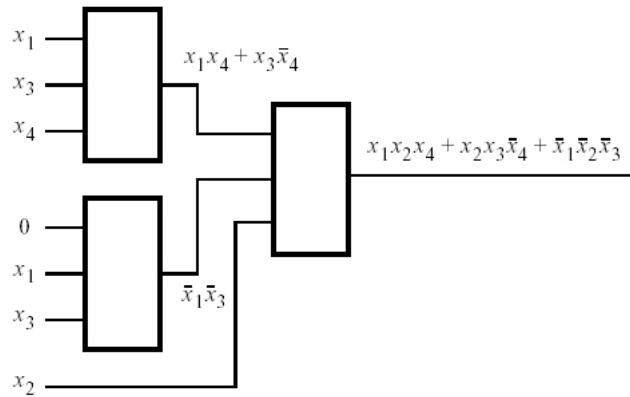


Figure 1: Circuit PLA pour réaliser  $f_1$

## Question II

Cette question se concerne avec la minimisation et attribution de tables d'écoulement.  
La partie a est question 9.5 de votre manuel.

### Partie a

Commençons par refaire la table d'écoulement (table 1).

Présent état	Prochain état				Rendement			
	$w_2 w_1 = 00$	$w_2 w_1 = 01$	$w_2 w_1 = 10$	$w_2 w_1 = 11$	$w_2 w_1 = 00$	$w_2 w_1 = 01$	$w_2 w_1 = 10$	$w_2 w_1 = 11$
A	(1)	3	7	(2)	0	-	1	1
B	5	(3)	(4)	8	0	1	0	0
C	(5)	(6)	4	2	0	1	0	1
D	1	6	(7)	(8)	-	-	1	0

Table 1: Table d'écoulement

Le diagramme de transition originale est démontré en figure 2. Puisqu'on ne peut pas éviter les transitions diagonales, on doit ajouter des états supplémentaires pour garder la distance Hamming à 1. Le nouveau diagramme de transition est démontré en figure 3.

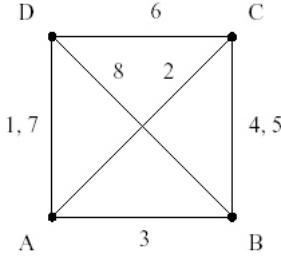


Figure 2: Diagramme de transition originale

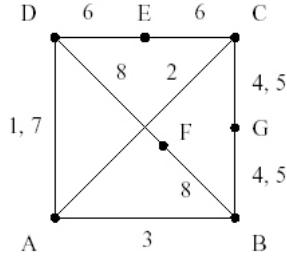


Figure 3: Diagramme de transition modifié

La table d'écoulement devient celle démontré en table 2.

Présent état	Prochain état				Rendement			
	$w_2w_1 = 00$	$w_2w_1 = 01$	$w_2w_1 = 10$	$w_2w_1 = 11$	$w_2w_1 = 00$	$w_2w_1 = 01$	$w_2w_1 = 10$	$w_2w_1 = 11$
A	(A)	B	D	(A)	0	-	1	1
B	G	(B)	(B)	F	0	1	0	0
C	(C)	(C)	G	A	0	1	0	1
D	A	E	(D)	(D)	-	-	1	0
E	-	C	-	-	-	1	-	-
F	-	-	-	D	-	-	-	0
G	C	-	B	-	0	-	0	-

Table 2: Table d'écoulement modifiée

Pour la réalisation à bascules de type D, la table d'excitation est démontrée en table 3, alors que les équations de conception deviennent:

$$Y_3 = \overline{w_2} \cdot y_3 + \overline{w_2} \cdot \overline{w_1} \cdot y_1 + \overline{w_1} \cdot y_3 \cdot y_1$$

Présent état $y_3y_2y_1$	Prochain état				Rendement			
	$w_2w_1 = 00$	$w_2w_1 = 01$	$w_2w_1 = 10$	$w_2w_1 = 11$	$w_2w_1 = 00$	$w_2w_1 = 01$	$w_2w_1 = 10$	$w_2w_1 = 11$
	$Y_3Y_2Y_1$				z			
A $\rightarrow 000$	(000)	001	010	(000)	0	-	1	1
B $\rightarrow 001$	101	(001)	(001)	011	0	1	0	0
C $\rightarrow 100$	(100)	(100)	101	000	0	1	0	1
D $\rightarrow 010$	000	110	(010)	(010)	-	-	1	0
E $\rightarrow 110$	-	100	-	-	-	1	-	-
F $\rightarrow 011$	-	-	-	010	-	-	-	0
G $\rightarrow 101$	100	-	001	-	0	-	0	-

Table 3: Table d'excitation

$$Y_2 = w_2 \cdot \overline{w_1} \cdot \overline{y_3} \cdot \overline{y_1} + w_1 \cdot \overline{y_3} \cdot y_2 \cdot \overline{y_1} + w_2 \cdot \overline{y_3} \cdot y_2 \cdot \overline{y_1} + w_2 \cdot w_1 \cdot \overline{y_3} \cdot \overline{y_2} \cdot y_1$$

$$Y_1 = \overline{y_3} \cdot \overline{y_2} \cdot y_1 + \overline{w_2} \cdot w_1 \cdot \overline{y_3} \cdot \overline{y_2} + w_2 \cdot \overline{w_1} \cdot y_3 \cdot \overline{y_2} + w_2 \cdot \overline{w_1} \cdot \overline{y_2} \cdot y_1$$

$$z = \overline{w_2} \cdot w_1 + w_1 \cdot \overline{y_2} \cdot \overline{y_1} + w_2 \cdot \overline{w_1} \cdot \overline{y_3} \cdot \overline{y_1}$$

### Partie b

Le diagramme de transition est démontré en figure 4. Disons qu'on choisi l'attribution suivante: A  $\rightarrow 00$ , B  $\rightarrow 01$ , D  $\rightarrow 10$  et C  $\rightarrow 11$ .

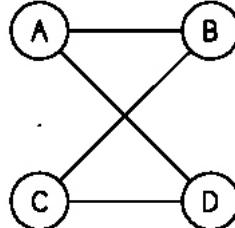


Figure 4: Diagramme de transition

On saute directement à la table d'excitation, qui est montré ci-dessous:

Présent état $y_1y_2$	Prochain état				Rendement			
	$x_1x_2 = 00$	$x_1x_2 = 01$	$x_1x_2 = 10$	$x_1x_2 = 11$	$x_1x_2 = 00$	$x_1x_2 = 01$	$x_1x_2 = 10$	$x_1x_2 = 11$
	$Y_1Y_2$				z			
A $\rightarrow 00$	(00)	(00)	10	(00)	0	0	0	0
B $\rightarrow 01$	(01)	00	11	-	1	-	1	-
C $\rightarrow 11$	01	(11)	(11)	(11)	1	1	1	1
D $\rightarrow 10$	00	-	(10)	11	0	-	0	-

Table 4: Table d'excitation

Pour la réalisation à bascules de type D, la table d'excitation est démontrée en table 4, alors que les équations de conception deviennent:

$$Y_2 = \overline{x_2} \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$$

$$Y_1 = x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot \overline{x_2}$$

$$z = y_2$$

Par contre, la table d'excitation pour la réalisation S-R est montré ci-dessous:

Présent état $Q_1 Q_2$	Prochain état $(S_1 R_1, S_2 R_2)$				Rendement z			
	$x_1 x_2 = 00$	$x_1 x_2 = 01$	$x_1 x_2 = 10$	$x_1 x_2 = 11$	$x_1 x_2 = 00$	$x_1 x_2 = 01$	$x_1 x_2 = 10$	$x_1 x_2 = 11$
A $\rightarrow 00$	0,-,0-	0,-,0-	10,0-	0,-,0-	0	0	0	0
B $\rightarrow 01$	0,-,0	0,-,01	10,-0	-,,-	1	-	1	-
C $\rightarrow 11$	01,-,0	-0,-0	-0,-0	-0,-0	1	1	1	1
D $\rightarrow 10$	01,0-	-, -	-0,0-	-0,10	0	-	0	-

Table 5: Table d'excitation

Pour la réalisation à bascules de type S-R, la table d'excitation est démontrée en table 5, alors que les équations de conception deviennent:

$$S_2 = x_2 \cdot Q_1$$

$$R_2 = x_2 \cdot \overline{Q_1}$$

$$S_1 = x_1 \cdot \overline{x_2}$$

$$R_1 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

$$z = Q_2$$

### Question III

Cette question se concerne avec la méthode FSM pour les circuits séquentiels asynchrones. Elle est question 9.21 de votre manuel.

Le diagramme d'état est fourni en figure 5, et la table d'écoulement correspondante en table 6.

La table d'excitation est fournit en table 7.

Pour la réalisation à bascules de type D, la table d'excitation est démontrée en table 7, alors que les équations de conception deviennent:

$$Y_3 = \overline{w} \cdot y_3 + w \cdot y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot y_3$$

$$Y_2 = w \cdot y_2 + \overline{w} \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3 + y_1 \cdot y_2$$

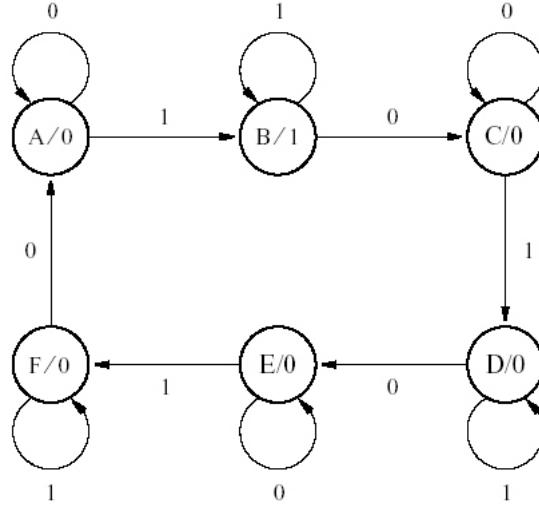


Figure 5: Diagramme d'état de question III

Présent état	Prochain état		Rendement $z$
	$w = 0$	$w = 1$	
A	(A)	B	0
B	C	(B)	1
C	(C)	D	0
D	E	(D)	0
E	(E)	F	0
F	A	(F)	0

Table 6: Table d'écoulement de question III

$$Y_1 = w \cdot \overline{y_2} + w \cdot y_1 + y_1 \cdot \overline{y_3}$$

$$z = y_1 \cdot \overline{y_2}$$

Notez que le dernier terme de produit pour  $Y_2$  et  $Y_3$  est exigé pour éviter un hasard statique.

## Question IV

Cette question se concerne avec les hasards statiques et dynamiques de circuits asynchrones.

### Partie a

Démontré en figure 6 est le circuit logique avec les chemins étiquetés.

Présent état $y_3y_2y_1$	Prochain état		Rendement $z$
	$w = 0$	$w = 1$	
	$Y_3Y_2Y_1$	$Y_3Y_2Y_1$	
A $\rightarrow 000$	(000)	001	0
B $\rightarrow 001$	011	(001)	1
C $\rightarrow 011$	(011)	111	0
D $\rightarrow 111$	110	(111)	0
E $\rightarrow 110$	(110)	010	0
F $\rightarrow 010$	000	(010)	0

Table 7: Table d'excitation de question III

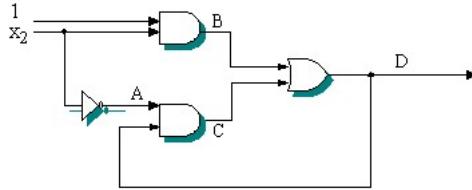


Figure 6: Circuit logique de question IVa

Démontré en figure 7 sont les diagrammes de synchronisation pour  $x_2$  et les sorties des quatres portes logiques quand l'entrée  $x_2$  change de valeur à '0'. On constate de ces diagrammes qu'une oscillation se produit dans le réseau.

### Partie b

En observant la réalisation du circuit, on peut générer la fonction logique  $f$  comme:

$$f = (w + z)(\bar{x} + \bar{z}) + \bar{w} \cdot y$$

$$f = w \cdot \bar{x} + w \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot z + z \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot y$$

En observant la carte de Karnaugh en figure 8, on trouve deux hasards-à-1 statiques:

- $wxyz = 0110 \leftrightarrow 1110$
- $wxyz = 0010 \leftrightarrow 1010$

La fonction devient

$$f = (w + z)(\bar{x} + \bar{z}) + \bar{w} \cdot y$$

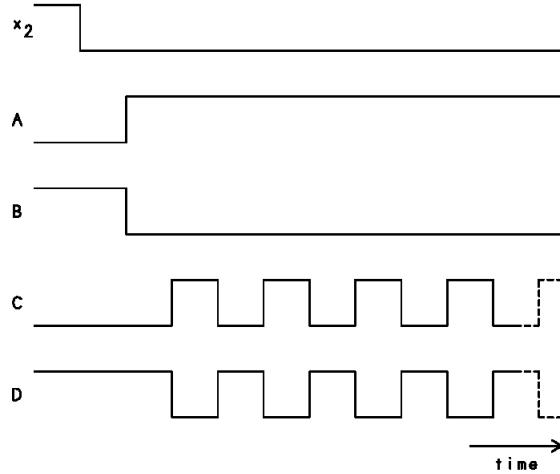


Figure 7: Diagrammes de synchronisation

$$f = (w + z + \bar{w} \cdot y)(\bar{x} + \bar{z} + \bar{w} \cdot y)$$

$$f = (w + \bar{w} + z)(w + y + z)(\bar{w} + \bar{x} + \bar{z})(\bar{x} + y + \bar{z})$$

En observant la carte de Karnaugh en figure 9, on trouve un hasard-à-0 statique:

- $wxyz = 0100 \leftrightarrow 0101$

On regroupe la carte de Karnaugh pour arriver à la figure 10.  
Alors, la réalisation de

$$f = w + \bar{x} + w \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot z + \bar{w} \cdot y + y \cdot \bar{z}$$

résulte en un réseau qui est hasard-libre ayant le même rendement que dans la figure donnée.

### Partie c

On a pas eu du temps pour apprendre la théorie des hasards essentiels, alors cette question a été annulée. Elle n'exige pas de réponse.

## Remerciements

Les réponses et figures liées aux questions du manuel sont tirées du manuel d'accompagnement de l'instructeur pour *Fundamentals of Digital Logic with VHDL Design* par Stephen Brown et Zvonko Vranesic.

Les réponses liées à la quatrième question sont tirées du manuel d'accompagnement de l'instructeur pour *Digital Principles and Design* par Donald D. Givone.

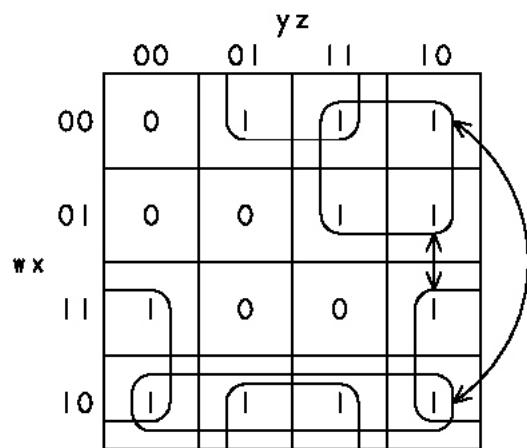


Figure 8: Carte de Karnaugh SOP

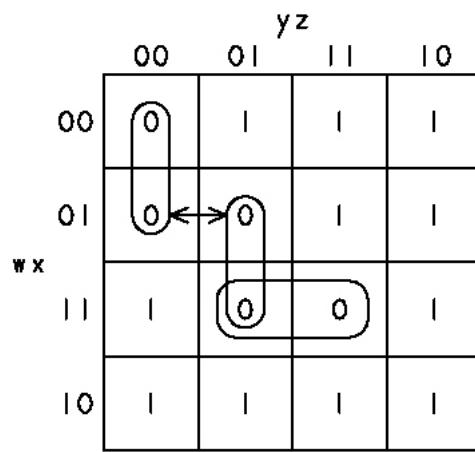


Figure 9: Carte de Karnaugh POS

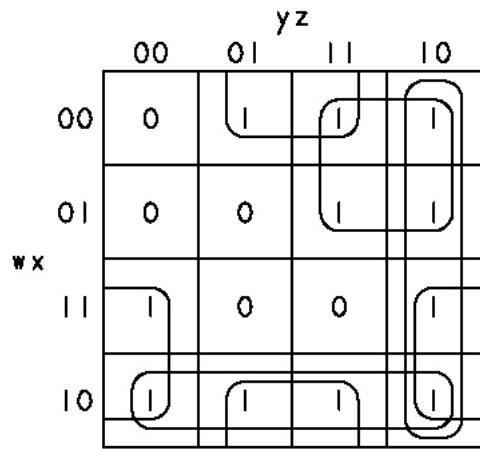


Figure 10: Carte de Karnaugh finale

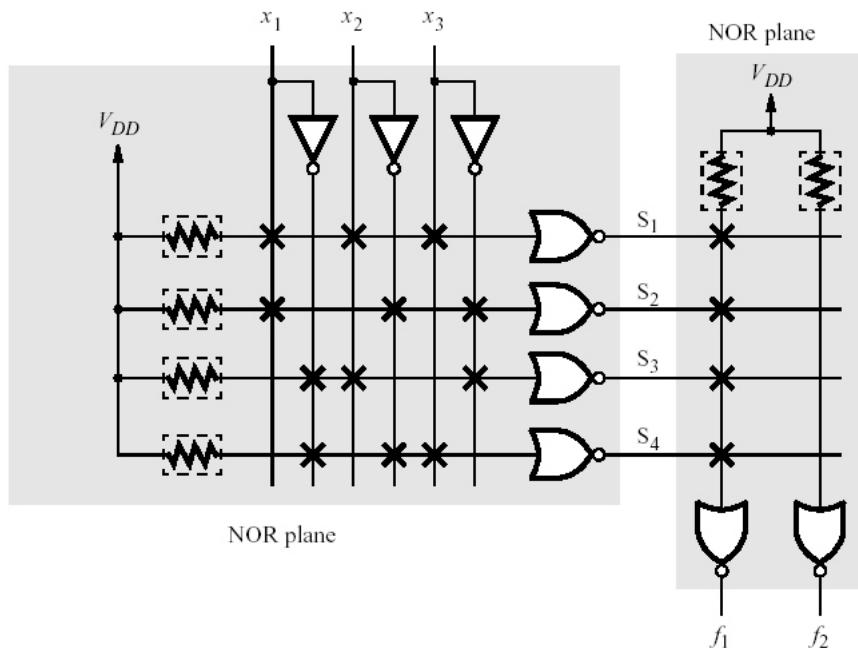


Figure 11: Circuit PLA pour réaliser  $f_1$

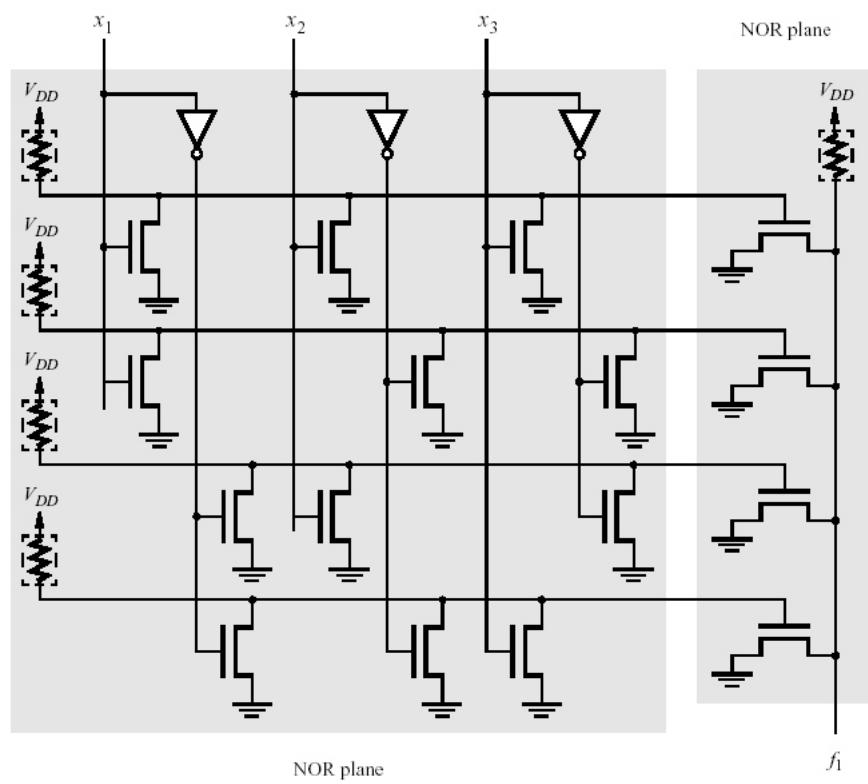


Figure 12: Circuit PLA pour réaliser  $f_1$