MAT 2784A - Automne 2019 - Devoir #2
Dû le 04 Octobre à 10:00 AM

Nom Solution

Prénom

Numéro d'étudiant

- **SVP utilisez le format suivant pour soumettre votre devoir.**
- Vous pouvez utiliser l'endos des page si celle-ci ne vous suffisent pas.

Question 1. [8 points] Résoudre les P.V.I. suivants.

(a) $\overbrace{(4y^3\cos x + 4e^x y - 3y^2)}^{M(x,y)}\,dx + \overbrace{(8e^x - 9xy + 16y^2\sin x + 3y)}^{N(x,y)}\,dy = 0$, $y(0) = -1$.

(b) $\overbrace{(20xy^3 - 12x^3e^y + 12\cos y)}^{M(x,y)}\,dx + \overbrace{(15x^2y^2 - 2x^4e^y - 4x\sin y)}^{N(x,y)}\,dy = 0$, $y(1) = 0$.

(a) • On a

$$M_y - N_x = (12y^2\cos x + 4e^x - 6y) - (8e^x - 9y + 16y^2\cos x)$$
$$= -4y^2\cos x - 4e^x + 3y \neq 0 \quad (\underline{\underline{\text{Donc}}}\ \underline{\text{pas exacte}})!$$
$$= -\frac{1}{y}\,M(x,y).$$

Donc $g(y) = \dfrac{M_y - N_x}{N} = -\dfrac{1}{y}$ et on a : $\mu = \mu(y) = e^{-\int -\frac{dy}{y}} = y$.

• L'EDO $\overbrace{y\,M(x,y)}^{M^*}\,dx + \overbrace{y\,N(x,y)}^{N^*}\,dy = 0$ est maintenant exacte.

<u>Vérification</u> : $M^*_y = 16y^3\cos x + 8e^x y - 9y^2 = N^*_x$. ✓

• Maintenant, on a : $F(x,y) = \int M^*\,dx = 4y^4\sin x + 4e^x y^2 - 3xy^3 + h(y)$

Mais $F_y = N^* \iff \cancel{16y^3\sin x} + 8e^x y - 9xy^2 + h'(y) = 8e^x y - 9xy^2 + 16y^3\sin x + 3y^2$

$\iff h'(y) = 3y^2 \implies h(y) = y^3 + K,\ K \in \mathbb{R}$.

On prend $K = 0$ et alors $F(x,y) = 4y^4\sin x + 4e^x y^2 - 3xy^3 + y^3$

• D'où la S.G. est : $\boxed{4y^4\sin x + 4e^x y^2 - 3xy^3 + y^3 = C}$

• S.U. : $y(0) = -1 \implies C = 3$ et on a : $\boxed{4y^4\sin x + 4e^x y^2 - 3xy^3 + y^3 = 3}$ S.U.

(b) • On a : $M_y - N_x = (60xy^2 - 12x^3e^y - 12\sin y) - (30xy^2 - 8x^3e^y - 4\sin y)$
$$= 30xy^2 - 4x^3e^y - 8\sin y = \frac{2}{x}\,N(x,y).$$

Donc $f(y) = \dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{2}{x}$ et alors $\mu = \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$.

• L'EDO $\underbrace{x^2 M(x,y)}_{M^*}\,dx + \underbrace{x^2 N(x,y)}_{N^*}\,dy = 0$ est exacte.

Vérification : $M^*_y = 60x^3y^2 - 12x^5e^y - 12x^2\sin y = N^*_x$. ✓

- On a : $F(x,y) = \int M^*\,dx = 5x^4y^3 - 2x^6e^y + 4x^3\cos y + h(y)$.

Mais $F_y = N^* \iff 15x^4y^2 - 2x^6e^y - 4x^3\sin y + h'(y) = 15x^4y^2 - 2x^6e^y - 4x^3\sin y$

$\iff h'(y) = 0 \implies h(y) = K,\ K \in \mathbb{R}$. On prend $K = 0$.

Donc $F(x,y) = 5x^4y^3 - 2x^6e^y + 4x^3\cos y$.

- S.G : $$\boxed{5x^4y^3 - 2x^6e^y + 4x^3\cos y = C.}$$

- S.U. : $y(1) = 0 \iff C = 2$ et on a la S.U.

$$\boxed{5x^4y^3 - 2x^6e^y + 4x^3\cos y = 2}$$

Question 2. [9 points] Résoudre les P.V.I. suivants.

1. $y' + \frac{\cos x}{\sin x} y = 3\cos x, \quad 0 < x < \pi, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
2. $y' + y\tan x = y^2, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}$
3. $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

1. C'est une ÉDOL avec $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ et $r(x) = 3\cos x$.

Donc la S.G. est.

$$y = \frac{\int e^{\int f(x)dx} r(x)\, dx}{e^{\int f(x) dx}} = \frac{\int |\sin x|\, 3\cos x\, dx}{|\sin x|}$$

(Mais $0 < x < \pi \Longrightarrow \sin x > 0$) $\Longrightarrow y = \frac{\int 3 \sin x \cos x\, dx}{\sin x}$

$$\boxed{y = \frac{\frac{3}{2}\sin^2 x + C}{\sin x}}.$$

Avec $y(\pi/2) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{C = -\frac{3}{2}}$ et donc la S.U. est:

$$\boxed{y = \frac{3\sin^2 x - 3}{2\sin x}}$$

---

2. C'est une ÉDO de Bernoulli avec $\begin{cases} f(x) = \tan x \\ a = 2 \\ h(x) = 1 \end{cases}$. Donc la substitution $u = y^{1-a}$ donne l'ÉDOL en u :

$$u' + (1-2)\tan x \cdot u = (1-2).$$

Donc la S.G est

$$u = y^{-1} = \frac{\int e^{\int -\tan x\, dx} \cdot (-1)\, dx}{e^{\int -\tan x\, dx}}$$

$$= \frac{\int -|\cos x|\, dx}{|\cos x|}.$$

Mais $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos x > 0 \Longrightarrow y^{-1} = \frac{\int -\cos x\, dx}{\cos x}$

$\Longleftrightarrow \boxed{y = \frac{\cos x}{-\sin x + C}}$ est la S.G. en y.

Avec $y(0)=\frac{1}{2} \iff \boxed{C=2}$ et on a la S.U. :

$$\boxed{y=\frac{\cos x}{-\sin x+2}}$$

3- C'est une ÉDO de Bernoulli avec $a=\frac{1}{2}$, $g(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ et $h(x)=x$.
La substitution $u=y^{1-\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}$ donne l'ÉDO linéaire en u :

$$u'+\frac{x}{1+x^2}\,u=\frac{1}{2}x.$$

La S.G est alors $u=y^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\int e^{\int \frac{x}{1+x^2}dx}\,\frac{1}{2}x\,dx}{e^{\int \frac{x}{1+x^2}dx}}$

$$=\frac{\int \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\,x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y^{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{6}(1+x^2)^{3/2}+C}{\sqrt{1+x^2}} \quad (*)$$

$$\Longrightarrow \boxed{y=\left(\frac{\frac{1}{6}(1+x^2)^{3/2}+C}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}$$

Pour la S.U. on substitue $y(0)=1$ dans $(*)$ pour avoir $\frac{5}{6}=C$

D'où $\boxed{y=\left(\frac{\frac{1}{6}(1+x^2)^{3/2}+\frac{5}{6}}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}$ est la S.U.

Question 3. [8 points] Résoudre les P.V.I. suivants.

1. $y'' + 3y = 0; \quad y(0) = 5; y'(0) = \sqrt{3}.$
2. $y'' - y' - 12y = 0; \quad y(0) = 0; y'(0) = -7.$
3. $y'' - 6y' + 13y = 0; \quad y(0) = -2; y'(0) = 0.$
4. $y'' + 10y' + 25y = 0; \quad y(0) = 3; y'(0) = -1.$

1. • Éq. Caract : $\lambda^2 + 3 = 0 \iff \lambda_1 = i\sqrt{3} = \bar{\lambda}_2 \quad (\alpha = 0, \beta = \sqrt{3})$.

• S.G : $\boxed{y = C_1 e^{0x} \cos(\sqrt{3}x) + C_2 e^{0x} \sin(\sqrt{3}x)}$

• S.U. : $\left(y' = -\sqrt{3} C_1 \sin(\sqrt{3}x) + \sqrt{3} C_2 \cos(\sqrt{3}x)\right)$

$y(0) = 5 \iff C_1 = 5$

$y'(0) = \sqrt{3} \iff C_2\sqrt{3} = \sqrt{3} \iff C_2 = 1$.

D'où la S.U. est $\boxed{y = 5\cos(\sqrt{3}x) + \sin(\sqrt{3}x)}$

---

2. • Éq. caract. : $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \iff \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$.

• S.G. : $\boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x}}$

• S.U. : $\left(y' = -3C_1 e^{-3x} + 4C_2 e^{4x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \iff C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = -7 \iff -3C_1 + 4C_2 = -7 \end{array}\right\} \iff \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

D'où la S.U. : $\boxed{y = e^{-3x} - e^{4x}}$

---

3. • Éq. caract. : $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \iff \lambda_1 = 3 + 2i = \bar{\lambda}_2 \quad (\alpha = 3, \beta = 2)$

• S.G. : $\boxed{y = C_1 e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \sin(2x)}$

• S.U. : $\left(y' = 3C_1 e^{3x} \cos(2x) - 2C_1 e^{3x} \sin(2x) + 3C_2 e^{3x} \sin(2x) + 2C_2 e^{3x} \cos(2x)\right)$

$y(0) = -2 \iff C_1 = -2$

$y'(0) = 0 \iff 3C_1 + 2C_2 = 0 \iff C_2 = 3$.

D'où la S.U. $\boxed{y = -2C_1 e^{3x} \cos(2x) + 3e^{3x} \sin(2x)}$

4. • Éq° Caract. : $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \iff (\lambda+5)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -5$

• S.G. : $\boxed{y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}}$

• S.U. : $\left(y' = -5C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-5x} - 5C_2 x e^{-5x} \right)$

$y(0) = 3 \iff C_1 = 3$

$y'(0) = -1 \iff -5C_1 + C_2 = -1 \iff C_2 = 14.$

d'où la S.U. $\boxed{y = 3e^{-5x} + 14xe^{-5x}}$

Question 4. [5 points] Considérez les points suivants (x_i, f_i), $i = 0, 1, 2, 3$, où $f_i = f(x_i)$ pour une certaine fonction f inconnue:

$$(\underset{x_0}{0.5}, \underset{f_0}{0.1237}), (\underset{x_1}{0.7}, \underset{f_1}{0.3294}), (\underset{x_2}{0.9}, \underset{f_2}{0.6519}), (\underset{x_3}{1.3}, \underset{f_3}{1.2908}).$$

(a) Trouvez le polynôme de Lagrange $p_3(x)$ avec coéfficients estimés à 4 décimales près.

(b) Interpolez la valeur $f(1.0)$.

(c) Étant donné que $\overset{m}{3.7656} \leq |f^{(4)}(x)| \leq \overset{M}{77.5226}$ pour tout x dans $[0.5, 1.3]$, donnez les erreurs maximale et minimale lors de l'interprolation de $f(1.0)$ dans (b).

On a

(a) $\cdot$ $L_0(x) = \dfrac{(x-0.7)(x-0.9)(x-1.3)}{(0.5-0.7)(0.5-0.9)(0.5-1.3)} = -15.6250x^3 + 45.8125x^2 - 42.3438x + 12.7969$

$L_1(x) = \dfrac{(x-0.5)(x-0.9)(x-1.3)}{(0.7-0.5)(0.7-0.9)(0.7-1.3)} = 41.6667x^3 - 112.5000x^2 + 94.5833x - 24.3750$

$L_2(x) = \dfrac{(x-0.5)(x-0.7)(x-1.3)}{(0.9-0.5)(0.9-0.7)(0.9-1.3)} = -31.2500x^3 + 78.1250x^2 - 59.6875x + 14.2188$

$L_3(x) = \dfrac{(x-0.5)(x-0.7)(x-0.9)}{(1.3-0.5)(1.3-0.7)(1.3-0.9)} = 5.2083x^3 - 10.9375x^2 + 7.4479x - 1.6406$

$\cdot$ Donc $p_3(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$.

$$\boxed{p_3(x) = -1.8568x^3 + 5.3592x^2 - 3.3787x + 0.7053}$$

(b) $\boxed{f(1) \simeq p_3(1) = 0.8291}$

(c) On a : $E_3(x) = (x-0.5)(x-0.7)(x-0.9)(x-1.3)\dfrac{f^{(4)}(t)}{4!}$, $0.5 \leq t \leq 1.3$.

Pour $x = 1$, $|E_3(1)| = \left|(1-0.5)(1-0.7)(1-0.9)(1-1.3)\dfrac{f^{(4)}(t)}{4!}\right| = 0.0001875\,|f^{(4)}(t)|$

Donc, comme $m < |f^{(4)}(x)| < M$, $x \in [0.5, 1.3]$ $(m = 3.7656$, $M = 77.5226)$, on a

$E_{min}(1) = (0.0001875) \times (3.7656) = \boxed{0.0007}$

$E_{max}(1) = (0.0001875) \times (77.5226) = \boxed{0.0145}$.