2-53 Trouvez l'aire de la surface, avec quatre décimales exactes, n vous servant d'une calculatrice pour estimer l'intégrale.

2. La partie de la surface $z=\cos(x^2+y^2)$ à l'intérieur du cylindre $x^2+y^2=1$

3. La partie de la surface $z=\ln(x^2+y^2+2)$ située au-dessus du disque $x^2+y^2\le 1$

4. Calculez, avec quatre décimales exactes, l'aire de la partie de la surface $z=(1+x^2)/(1+y^2)$ située au-dessus du carré $|x|+|y|\le 1$. Représentez graphiquement cette partie de la surface.

5. a) Utilisez la règle du point milieu pour les intégrales doubles (voir la section 6.1) avec une partition de six carrés pour approximer l'aire de la surface $z=1/(1+x^2+y^2)$, $0\le x\le 6$, $0\le y\le 4$.

CS b) À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, approximez l'aire de la surface de la partie a) avec quatre décimales exactes. Comparez votre réponse à celle que vous avez obtenue à la partie a).

6. Calculez l'aire, avec quatre décimales exactes, de la surface paramétrée par

$$\vec r(u,v)=\cos^3 u\cos^3 v\,\vec i+\sin^3 u\cos^3 v\,\vec j+\sin^3 v\,\vec k,$$
$$0\le u\le\pi,\ 0\le v\le 2\pi.$$

7. Calculez la valeur exacte de l'aire de la surface

$$z=1+2x+3y+4y^2,\ 1\le x\le 4,\ 0\le y\le 1.$$

8. a) Trouvez, sans la calculer, une intégrale double permettant de calculer l'aire de la surface d'équations paramétriques $x=au\cos v$, $y=bu\sin v$, $z=u^2$, $0\le u\le 2$, $0\le v\le 2\pi$.

b) Éliminez les paramètres pour montrer que la surface est un paraboloïde elliptique et trouvez une autre intégrale double donnant l'aire de la surface.

c) Représentez la surface à l'aide des équations paramétriques de la partie a) en prenant $a=2$ et $b=3$.

CS d) Soit $a=2$ et $b=3$. À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, calculez l'aire de la surface avec quatre décimales exactes.

9. a) Montrez que les équations paramétriques $x=a\sin u\cos v$, $y=b\sin u\sin v$, $z=c\cos u$, $0\le u\le\pi$, $0\le v\le 2\pi$, représentent un ellipsoïde.

b) Utilisez les équations paramétriques de la partie a) pour représenter l'ellipsoïde lorsque $a=1$, $b=2$, $c=3$.

c) Trouvez, sans l'évaluer, une intégrale double permettant de calculer l'aire de l'ellipsoïde de la partie b).

60. a) Montrez que les équations paramétriques

$$x=a\cosh u\cos v,\ y=b\cosh u\sin v,\ z=c\sinh u,$$

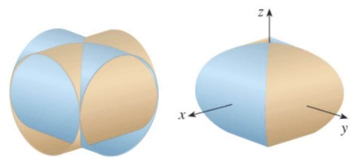
représentent un hyperboloïde à une nappe.

b) À l'aide des équations paramétriques de la partie a), représentez graphiquement l'hyperboloïde pour $a=1$, $b=2$, $c=3$.

c) Trouvez, sans l'évaluer, une intégrale double permettant de calculer l'aire de la portion de l'hyperboloïde de la partie b) comprise entre les plans $z=-3$ et $z=3$.

61. Calculez l'aire de la partie de la sphère $x^2+y^2+z^2=4z$ située au-dessus du paraboloïde $z=x^2+y^2$.

62. La figure montre la surface obtenue lorsque le cylindre $y^2+z^2=1$ coupe le cylindre $x^2+z^2=1$. Calculez l'aire de cette surface.

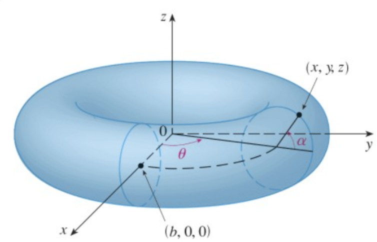


63. Trouvez l'aire de la partie de la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ située à l'intérieur du cylindre $x^2+y^2=ax$.

64. a) Trouvez une représentation paramétrique du tore obtenu par rotation autour de l'axe des z d'un cercle dans le plan xz de centre $(b, 0, 0)$ et de rayon $a<b$. (*Suggestion :* Prenez comme paramètres les angles θ et α montrés sur la figure.)

b) Représentez graphiquement le tore à l'aide des équations paramétriques trouvées à la partie a), pour plusieurs valeurs de a et de b.

c) Servez-vous des équations paramétriques de la partie a) pour trouver l'aire du tore.



10.2 LES INTÉGRALES DE SURFACE

La relation entre les intégrales de surface et l'aire d'une surface ressemble beaucoup à la relation entre les intégrales curvilignes et l'abscisse curviligne. On suppose que f est une fonction de trois variables dont le domaine contient une surface S. On définit l'intégrale de surface de f sur S de telle façon que, lorsque $f(x, y, z)=1$, la valeur de l'intégrale de surface soit égale à l'aire de S. On commence avec des surfaces paramétrées, puis on traite le cas particulier où S est le graphe d'une fonction de deux variables.

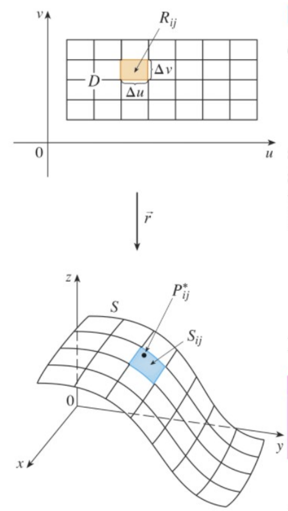


FIGURE 1

LES SURFACES PARAMÉTRÉES

On considère une surface S paramétrée par

$$\vec r(u,v)=x(u,v)\,\vec i+y(u,v)\,\vec j+z(u,v)\,\vec k\qquad (u,v)\in D.$$

On suppose d'abord que le domaine D des paramètres est un rectangle, qu'o subdivise en sous-rectangles R_{ij} de dimensions Δu et Δv. La surface S est alor subdivisée en éléments de surface correspondants S_{ij} (voir la figure 1). On calcule f e un point P_{ij}^* de chaque élément de surface, on multiplie cette valeur par l'aire ΔS_{ij} d l'élément de surface, puis on construit la somme de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}.$$

Enfin, on prend la limite lorsque le nombre d'éléments de surface croît et on défini l'**intégrale de surface de f sur S** par

1
$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}.$$

Il convient de noter l'analogie avec la définition d'une intégrale curvilign (définition 2 de la section 9.2) et avec celle d'une intégrale double (définition 5 de l section 6.1).

Pour calculer l'intégrale de surface de l'équation 1, on approxime l'aire de l'élémen de surface ΔS_{ij} par l'aire d'un parallélogramme situé dans le plan tangent. Lors d l'étude de l'aire d'une surface à la section 10.1, on a fait l'approximation

$$\Delta S_{ij}\approx\|\vec r_u\times\vec r_v\|\,\Delta u\,\Delta v,$$

où
$$\vec r_u=\frac{\partial x}{\partial u}\vec i+\frac{\partial y}{\partial u}\vec j+\frac{\partial z}{\partial u}\vec k\qquad \vec r_v=\frac{\partial x}{\partial v}\vec i+\frac{\partial y}{\partial v}\vec j+\frac{\partial z}{\partial v}\vec k$$

sont les vecteurs tangents en un sommet de S_{ij}. Si les composantes sont continue et si $\vec r_u$ et $\vec r_v$ sont non nuls et non parallèles en tout point de D, on peut déduire de l définition 1, même lorsque D n'est pas un rectangle, que

On suppose que la surface n'est couverte qu'une seule fois lorsque (u, v) balaie D. On peut démontrer que la valeur de l'intégrale de surface est indépendante de la paramétrisation utilisée.

2
$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f\big(\vec r(u,v)\big)\,\|\vec r_u\times\vec r_v\|\,dA.$$

La forme de cette intégrale est semblable à celle de la formule de calcul d'un intégrale curviligne :

$$\int_C f(x,y,z)\,ds=\int_a^b f\big(\vec r(t)\big)\,\|\vec r\,'(t)\|\,dt.$$

On remarque aussi que

$$\iint_S 1\,dS=\iint_D\|\vec r_u\times\vec r_v\|\,dA=A(S).$$

La formule 2 permet de calculer une intégrale de surface en la convertissant en un intégrale double sur le domaine D des paramètres. Quand on utilise cette formule, i faut se rappeler qu'on calcule $f\big(\vec r(u,v)\big)$ en posant $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ et $z=z(u,v$ dans la formule de $f(x, y, z)$.