33. $f(x, y) = e^{-xy}$, $x^2 + 4y^2 \leq 1$

34. $f(x, y) = xy$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$

35. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $y^2 \geq x$

36. $f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2$, $x + y \geq 1$

37. $f(x, y, z) = xy + z^2$, $x + y + z \leq 2$

38. $f(x, y, z) = ze^{xy}$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

39. $f(x, y, z) = \dfrac{z}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

40. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$,
$x_1^2 + x_2 + x_3 + x_4 \geq -1$

41. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$,
$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 2$

---

42. Considérez le problème de maximisation de la fonction $f(x, y) = 2x + 3y$ sous la contrainte $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.

a) Essayez de résoudre ce problème à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

b) Est-ce que $f(25, 0)$ donne une valeur supérieure à celle de la partie a)?

c) Résolvez ce problème en traçant le graphique de l'équation de contrainte et de plusieurs courbes de niveau de f.

d) Expliquez pourquoi la méthode des multiplicateurs de Lagrange ne permet pas de résoudre ce problème.

e) Comment interprétez-vous la valeur $f(9, 4)$?

43. Considérez le problème de minimisation de la fonction $f(x, y) = x$ sur la courbe $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (une piriforme).

a) Essayez de résoudre ce problème à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

b) Montrez que la valeur minimale est $f(0, 0) = 0$, mais que la condition de Lagrange $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ n'est satisfaite pour aucune valeur de λ.

c) Expliquez pourquoi la méthode des multiplicateurs de Lagrange ne permet pas de trouver le minimum dans ce cas.

LCS **44.** a) Si votre logiciel de calcul symbolique permet de tracer des courbes définies implicitement, utilisez-le pour estimer par des méthodes graphiques le minimum et le maximum de la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sous la contrainte $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

b) Résolvez le problème de la partie a) à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour résoudre numériquement les équations. Comparez vos réponses à celles de la partie a).

45. La production totale P d'un certain produit dépend de la quantité L de main-d'œuvre employée et du montant K du capital investi. Aux sections 3.1 et 4.1, on a vu comment le modèle de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^{1-\alpha}$ découle de certaines hypothèses économiques. Dans ce modèle, b et α sont des constantes positives et $\alpha < 1$. Si le coût de une unité de travail est de m et celui de une unité de capital est de n, et si le budget total des dépenses d'une entreprise est limité à p dollars, alors la maximisation de la production P est soumise à la contrainte $mL + nK = p$. Montrez que la production est maximale lorsque

$$L = \frac{\alpha p}{m} \text{ et } K = \frac{(1-\alpha)p}{n}.$$

46. Reportez-vous à l'exercice 45 et supposez que la production est fixée à $bL^\alpha K^{1-\alpha} = Q$, où Q est une constante. Calculez les valeurs de L et de K qui minimisent la fonction de coût $C(L, K) = mL + nK$.

47. Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour démontrer que le rectangle d'aire maximale et de périmètre p donné est un carré.

48. Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour démontrer que le triangle d'aire maximale et de périmètre donné p est équilatéral. (*Suggestion :* Utilisez la formule de l'aire de Héron :

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

où $s = p/2$ et x, y, z sont les longueurs des côtés.)

49-61 Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour résoudre différemment l'exercice indiqué de la section 5.1.

49. Exercice 41

50. Exercice 42

51. Exercice 43

52. Exercice 44

53. Exercice 45

54. Exercice 46

55. Exercice 47

56. Exercice 48

57. Exercice 49

58. Exercice 50

59. Exercice 51

60. Exercice 52

61. Exercice 55

---

62. Calculez le volume maximal et le volume minimal d'une boîte rectangulaire fermée ayant une aire de 1500 cm² et dont la longueur totale des arêtes est de 200 cm.

63. Calculez le volume maximal d'un cône pour lequel la somme de la hauteur et du diamètre de la base est égale à 30 cm.

64. Trouvez les solutions du système d'équations résultant de la méthode des multiplicateurs de Lagrange à l'exemple 12.