

Gbegbe Decaho 300094197  
 Diallo Abdoulaye Djela 7935327  
 Diallo Maimouna 300086774

Université d'Ottawa  
 Faculté de génie  
 Ecole de sciences informatiques et de génie électrique

ELG3555  
 Manuel de Laboratoire

## Prélab 2

### Modélisation du Système au Domaine Temporel

#### 2.1 Objectifs

Au Prélab 1, un modèle du système de moteur a été dérivé dans le domaine Laplacien. Dans ce chapitre-là, le système sera modélisé dans le domaine temporel. Ainsi, l'objectif de ce laboratoire est de trouver un modèle d'état en mode boucle ouverte pour le système de moteur.

#### 2.2 Représentation du modèle d'état

Les systèmes d'asservissement sont généralement étudiés à travers leur représentation de modèles d'état plutôt que les fonctions de transfert. Uns des principaux avantages que présentent les modèles d'état comparés aux fonctions de transfert sont :

- Ils permettent de modéliser les systèmes SISO ainsi que les systèmes MIMO.
- Ils sont convenables pour les systèmes linéaires et non linéaires.
- Ils sont capables de modéliser les systèmes dépendants et indépendants au temps.

##### 2.2.1 Analyse en mode boucle ouverte

Dans cette partie, vous allez étudier le système de moteur en mode boucle ouverte à travers son modèle d'état.

#### Prélab (20 pts)

**P-2.1.** En utilisant la description et les équations du moteur dans la section 1.2, dérivez le modèle d'état du système en boucle ouverte. La sortie du système est la vitesse du moteur  $w_m$  tandis que les entrées externes sont la tension appliquée de l'armature  $v_m$  et le couple de perturbations  $T_d$ . Vous pouvez prendre  $w_m$  et le courant de l'armature du moteur  $i_m$  comme états du système. En d'autres termes, le vecteur d'état sera  $x = [w_m \ i_m]^T$ , et l'entrée  $u = [v_m \ T_d]^T$ .

En utilisant la loi Kirchhoff

$$\text{on sait que : } \frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t).$$

$$\text{on a : } v_m = i_m (R_m + R_n) + L_m \frac{di_m}{dt} + v_{em} \quad \text{avec } v_{em} = K_{em} w_m = -K_{em} r_m w_m$$

$$\Rightarrow \frac{di_m}{dt} = -\left(\frac{R_m + R_n}{L_m}\right) i_m + \frac{(K_{em} r_m)}{L_m} w_m + \frac{v_m}{L_m} \quad (1)$$

En appliquant la 2<sup>nd</sup> loi de Newton

$$J \frac{dw_m}{dt} = T_d + T_f + T_m \quad \text{avec } T_f = -b_f w_m$$

$$T_m = \frac{T_n}{L_m r_m} = K_m \cdot i_m \Rightarrow T_m = -i_m \cdot r_m \cdot L_m$$

$$\Rightarrow \frac{dw_m}{dt} = \frac{T_d}{J} - \frac{b_f w_m}{J} + \frac{K_m r_m L_m i_m}{J} \quad (2)$$

Puisque la sortie du système est une variable d'état, on peut tirer alors l'équation de sortie  $[y = w_m]$ .

Soit  $\{x\} = [\{\dot{w}_m\} \{\dot{i}_m\}]^T$  avec les points désignant la dérivée

$x = [w_m \ i_m]^T$  et  $u = [v_m \ T_d]^T$

en utilisant une matrice  $2 \times 2$  telle que  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} \\ y \end{cases} = \begin{bmatrix} -\frac{bf}{J} & \frac{K_m r_m l_m}{J} \\ \frac{K_m r_m}{L_m} & -\left(\frac{R_m + R_l}{L_m}\right) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & \frac{J}{J} \\ \frac{1}{L_m} & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] x$$

**P-2.2.** A partir du modèle d'état, trouvez la fonction de transfert  $w_m(s)/V_m(s)$  (sans passer par le diagramme de flux du signal et la formule de Mason). Comparez votre solution à celle de la question P-1.5.

En supposant les conditions initiales égales à 0.

Trouvons la T.L. de (1) pour  $i_m(s)$  afin de retrouver la fonction de transfert  $\frac{w_m(s)}{V_m(s)}$

$$TL = \frac{y(t)}{x(t)} C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$[1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_m} & 0 \end{bmatrix} \left( \frac{Adj(sI - A)}{\det(sI - A)} \right)$$

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{R_m + R_l}{L_m} & -\frac{K_m r_m}{L_m} \\ \frac{e_m r_m K_m}{J} & s + \frac{bf}{J} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^2 + \left(\frac{bf}{J} + \frac{R_m + R_l}{L_m}\right)s + \frac{bf(R_m + R_l) + K_m r_m l_m}{J L_m}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{R_m + R_l}{L_m} & -\frac{K_m r_m}{L_m} \\ \frac{e_m r_m K_m}{J} & s + \frac{bf}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_m r_m K_m}{J^2} & s + \frac{bf}{J} \end{bmatrix}$$

$$\text{La fonction de transfert : } T(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} \frac{e_m r_m K_m}{J^2} & s + \frac{bf}{J} \end{bmatrix}$$

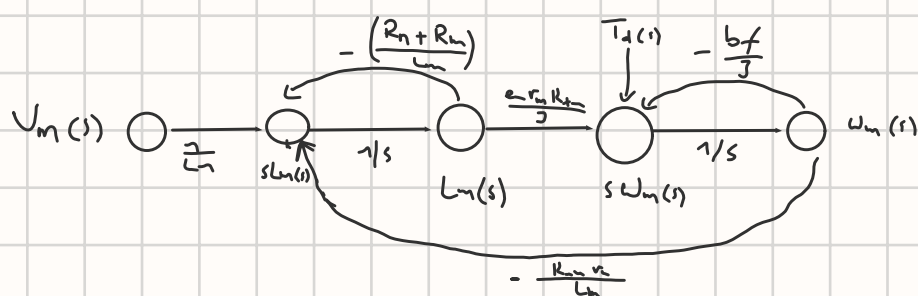
$$\Rightarrow T_1(s) = \frac{\frac{e_m r_m K_m}{J^2}}{\det(sI - A)}, \quad T_2(s) = \frac{s + \frac{bf}{J}}{\det(sI - A)}$$

d'où on peut tirer l'expression de  $\frac{w_m(s)}{V_m(s)}$

$$\frac{w_m(s)}{V_m(s)} = \frac{K_m l_m r_m}{(bf + Js)(R_m + R_l + L_m s) + K_m l_m r_m^2 K_m}$$

### Prélab (10 pts)

**P-2.3.** Utilisez votre modèle d'état afin de tracer un diagramme de flux du système en mode boucle ouverte. Assurez-vous d'y identifier les nœuds qui correspondent aux états et leur dérivée au domaine temporel. Comparez le graphique à votre solution de la Fig. 1.2 au chapitre 1 (prélab 1) Quels sont vos commentaires sur les ressemblances entre les deux ?



### Prélab (10 pts)

**P-2.4. (10 pts)** Maintenant, utilisez le diagramme de flux pour trouver la fonction de transfert  $w_m(s)/V_m(s)$ . Comparez le résultat à votre solution des questions P-2.2 et P-1.5.

$$TF(s) = \sum_{k=1}^n \frac{T_k \Delta_k}{\Delta} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{L_m} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{e_m r_m k_m}{J} = \frac{e_m r_m k_m}{J L_m s^2}$$

$$L_1 L_2 = \frac{(R_n + R_m) b f}{L_m s} \quad L_1 = -\frac{(R_n + R_m)}{L_m s} \quad L_2 = -\frac{b f}{J s} \quad L_3 = -\frac{K_m R_m e_m r_m k_m}{J L_m s^2}$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2 \Rightarrow \Delta_1 = 1$$

La fonction de transfert est donc:

$$T(s) = \frac{W_m(s)}{V_m(s)} = \frac{e_m r_m k_m}{b f (R_n + R_m) + L_m J s^2 + ((R_n + R_m) J + b f L_m) s + K_m e_m r_m k_m}$$

### Prélab (10 pts)

**P-2.5.** Répétez la question précédente pour trouver la fonction de transfert  $w_m(s)/T_d(s)$ . Notez que dans ce cas, vous êtes supposés comparer avec votre solution à la question P-1.6 du prélab 1.

En utilisant comme référence la quest- P-1-6 du prélab 1.

$$T_2 = \frac{1}{J s} \quad \Delta_2 = 1 - L_1$$

La fonction de transfert devient:

$$T(s) = \frac{W_m(s)}{V_m(s)} = \frac{L_m s + R_n + R_m}{(b f L_m + (R_n + R_m) J) s + L_m J s^2 + b f (R_n + R_m) + K_m e_m r_m k_m}$$

### Prélab (10 pts)

**P-2.6.** Utilisez votre modèle d'état pour calculer les pôles du système. Comparez votre résultat avec celui de la question P-1.8. Qu'est-ce que vous concluez ?

$$\text{On a: } L_m J s^2 + (b f L_m + (R_n + R_m) J) s + K_m e_m r_m k_m$$

Tirons ainsi les pôles :

$$s = - \frac{(L_m b f + R_m) \pm \sqrt{(L_m b f + R_m)^2 - 4 (L_m J) ((R_n + R_m) b f + K_m e_m r_m k_m)}}{2 L_m J}$$

### Prélab (5 pts)

**P-2.7.** Utilisez votre modèle d'état pour trouver une expression du courant d'armature au régime permanent (lorsque tous les signaux atteignent leurs valeurs finales) en fonction des paramètres du moteur.

$$i_m(s) = \left( \frac{V_m}{R_m + R_n} \right) \left( \frac{R_m R_n}{R_n + R_m} \right) \omega_m(s)$$

$$\Rightarrow i_m(s) = \frac{b_f}{K_t R_m R_n} - \left( \frac{K_t R_n}{R_n + R_m} \right) \omega_m(s) - \frac{T_d}{K_t R_m R_n} + \frac{V_m}{R_n + R_m}$$

### Prélab (10 pts)

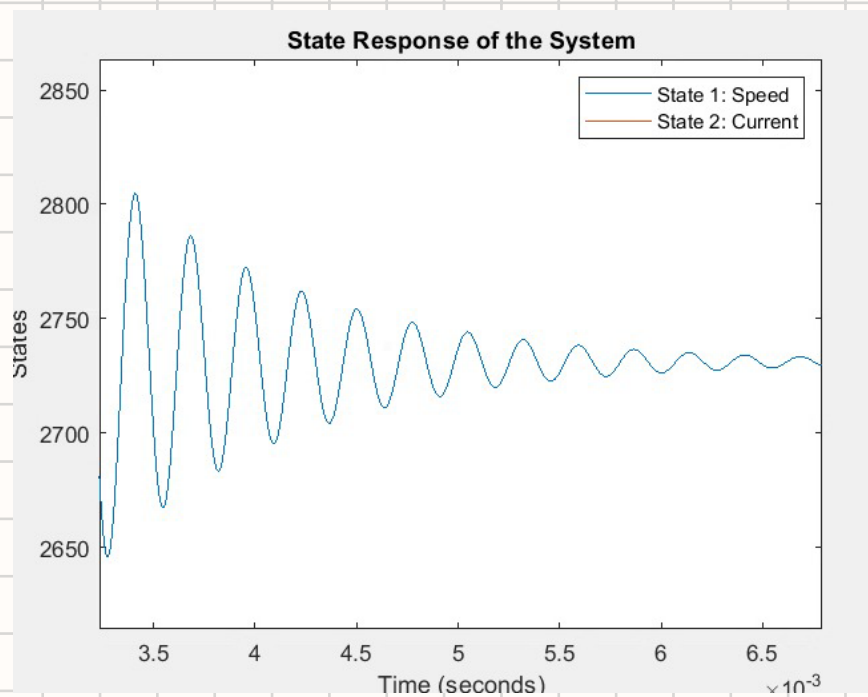
**P-2.8.** Simulez le modèle d'état sur Matlab en utilisant l'instruction `[y, t, x] = lsim(...)`

(<http://www.mathworks.com/help/control/ref/lsim.html>) ou `[y, t, x] = step(...)`

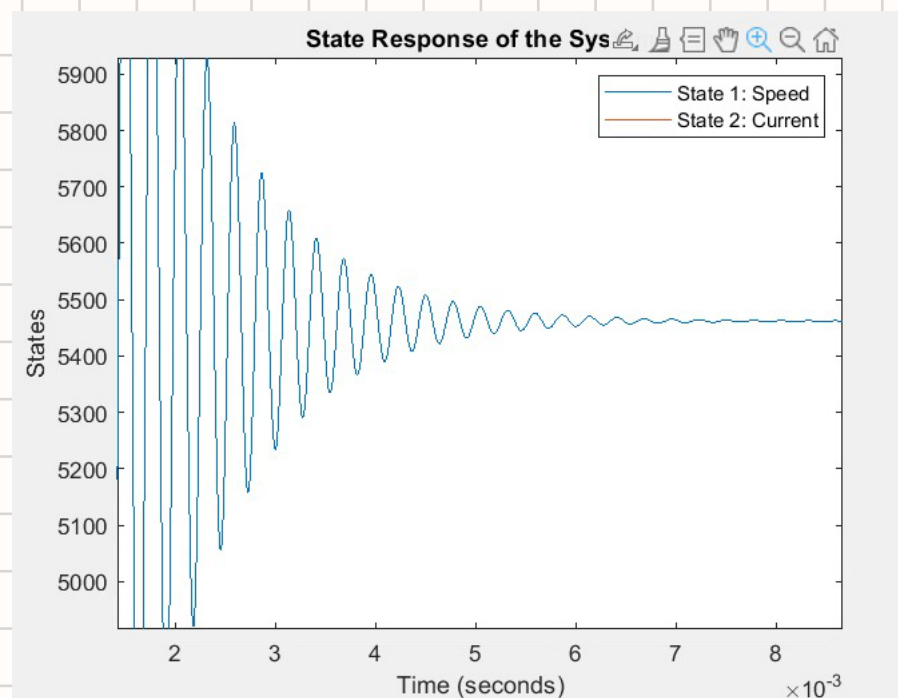
(<http://www.mathworks.com/help/control/ref/step.html>) et tracez les courbes des états (vitesse et courant). Supposez qu'aucunes perturbations n'agissent sur le système. Notez que vous pouvez aussi spécifier une condition initiale si elle n'est pas déjà indiquée comme étant 0. Utilisez les matrices suivantes dans votre simulation :

$$\text{system matrix} = \begin{bmatrix} -0.8315789474 & 1379423.59799655 \\ -385.4271817932 & -2117.6470588235 \end{bmatrix}$$

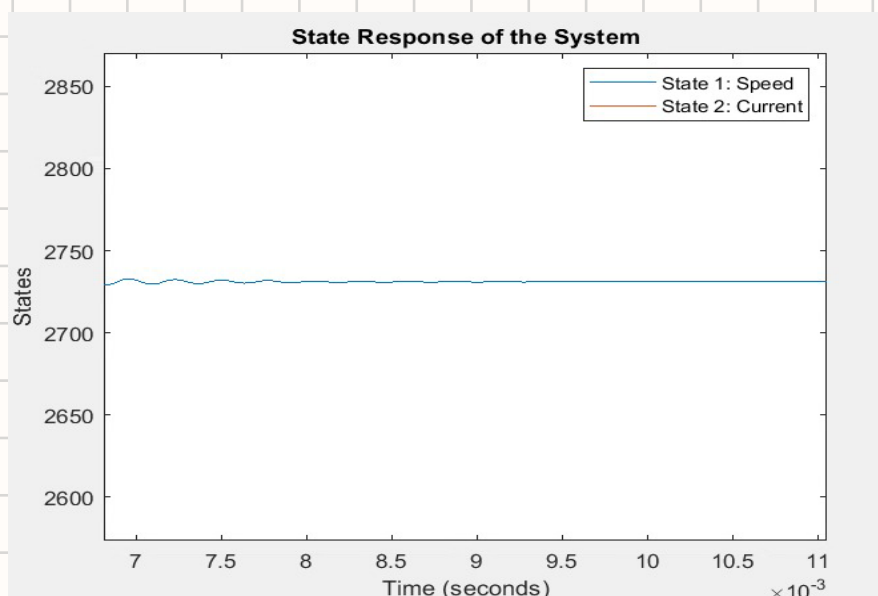
$$\text{input matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1052631.57894737 \\ 294.1176470588 & 0 \end{bmatrix}$$



Plot en x



Plot pour y+x



plot en y

avec une période  
t = 0 : 0.0000001 : 0.1



2.2.2 Analyse en mode boucle fermée

Dans cette section, nous allons utiliser une approximation de la fonction de transfert du moteur en boucle ouverte en un modèle de premier ordre.

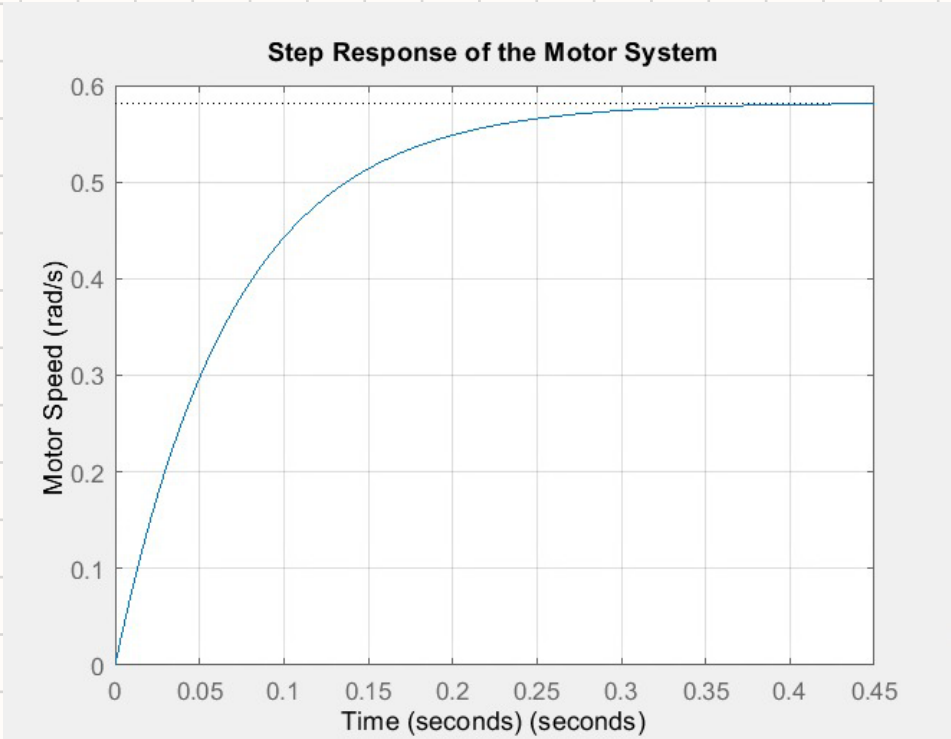
$$G_p(s) = \frac{w_m(s)}{V_m(s)} = \frac{K_m}{\tau_m s}$$

Ceci est souvent une approximation valide des fonctions de transfert pour moteurs DC, tel que montré au chapitre 1.

Attention : Les valeurs du gain DC et constante de temps sont :  $K = 0.582$ ;  $\tau = 0.07$ .

Pré-lab (10 pts)

P-2.9. Simulez la réponse échelon du moteur en boucle ouverte  $G_p(s)$  sur Matlab et incluez la courbe de la réponse transitoire. Le graphique doit clairement montrer les caractéristiques de la réponse transitoire (constante de temps, temps de stabilisation et valeur de la sortie en régime permanent). En pratique, est-ce que vous pensez que c'est facile de changer le modèle du système ? Expliquez votre réponse.



Maintenant, nous sommes intéressés par la possibilité de changer le comportement du système. Une façon de réaliser cela est d'introduire un retour en sortie ce qui va relocaliser le(s) pôle(s) du système.

Soit  $e = v_r - K_w w_m$  et le signal de contrôle (entrée pour le moteur)  $v_m = K_p e$ , où  $K_w$  est le gain du capteur de vitesse (voir le tableau 1.1), agissant comme un gain de retour, et  $K_p$  un gain positif de conception.

Description	Symbol	Value	Unit
Speed sensor's gain	$K_w$	5.0/9.225	V·s/rad
Position sensor's gain	$K_\theta$	5.0/(2π)	V/rad

Tableau 1.1

Le schéma du schéma de retour de vitesse est illustré en Fig. 2.1, où  $H_s(s) = K_w$  et  $G_c(s) = K_p$ .

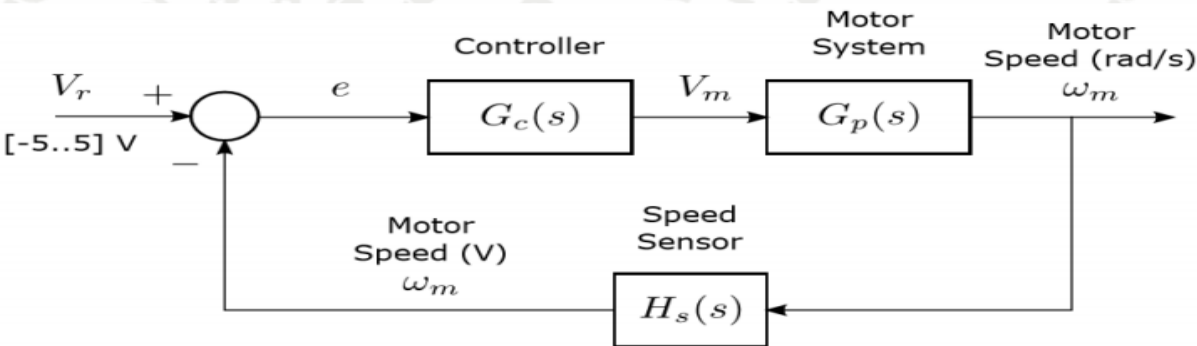
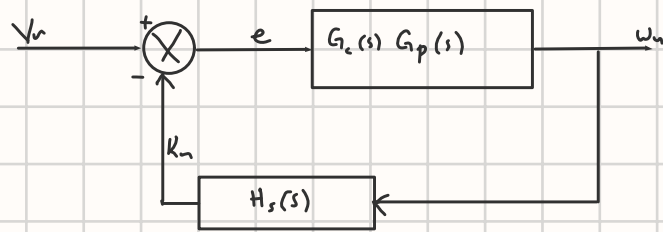


Figure 2.1 : Diagramme-bloc d'un retour de vitesse pour le système de moteur

### Prélab (10 pts)

**P-2.10.** Dérivez le modèle d'état du système en mode boucle fermée. Vous pouvez considérer la vitesse du moteur comme un état.



$$H_s(s) = K_m, \quad G_c(s) = K_p, \quad e = v_r - K_m w_m$$

$$v_r - K_p e = K_p (v_r - K_m w_m)$$

$$G_p(s) = \frac{K_m}{T_m s + 1} \Rightarrow K_m(s) = G_p(s) \cdot v_r$$

$$= \frac{K_m K_p v_r - K_m K_p K_m w_m}{T_m s + 1}$$

$$\Rightarrow (T_m s + 1) w_m(s) = K_m K_p v_r - K_m K_p K_m w_m$$

$$\Rightarrow s w_m(s) = \frac{K_m K_p v_r - (K_m K_p K_m + 1) w_m}{T_m}$$

$$\Rightarrow s w_m(s) = \left[ -\frac{K_m K_p K_m}{T_m} - \frac{1}{T_m} \right] w_m + \left[ \frac{K_p K_m}{T_m} \right] v_r$$

### Prélab (10 pts)

**P-2.11.** Calculez-le(s) pôle(s) en mode boucle fermée. Quel est l'effet de l'augmentation du paramètre libre  $K_p$  sur les pôles et la réponse en boucle fermée ?

### Prélab (10 pts)

Calculons les pôles

$$\frac{v_r}{v_m(s)} = \frac{G_c(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G_p(s) H_s(s)}$$

$$= \frac{K_p \left( \frac{K_m}{T_m s + 1} \right)}{1 + K_p \left( \frac{K_m}{T_m s + 1} \right) K_m}$$

$$= \frac{K_p K_m}{T_m s + 1 + K_p K_m K_m}$$

$$\Rightarrow s = \frac{-1 \pm K_p K_m K_m}{T_m}$$

### Prélab (10 pts)

**P-2.12.** Simulez le modèle d'état sur Matlab pour quatre valeurs positives de  $K_p$ . Incluez les figures de la réponse en échelon dans le rapport du pré-lab. Evitez de prendre des valeurs qui sont très proches les unes des autres et ne choisissez pas des valeurs qui risquent de saturer le signal de commande  $v_m$ . Référez-vous à Fig. I-1.4 pour les limites de saturation. Vos graphiques doivent clairement montrer les caractéristiques de la réponse transitoire du système (constante de temps, temps de stabilisation et valeur de la sortie en régime permanent).

