

Chapitre 8:

⑤ Phénomènes exponentiels

On considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = ky, \quad y(0) = y_0, \quad k = \text{constante}$$

Cette équation est parfois appelée la loi de croissance naturelle (quand $k > 0$) ou de décroissance naturelle (quand $k < 0$).

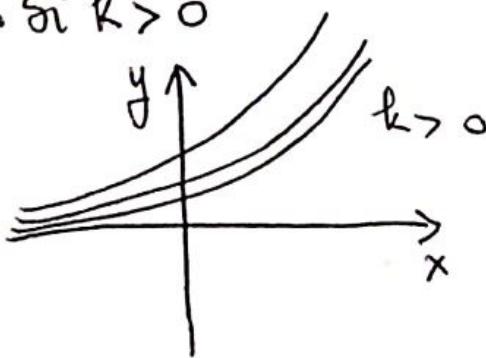
C'est une équation à variables séparables et on peut l'intégrer:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = ky &\Rightarrow y dy = k dx \\ &\Rightarrow \int y dy = \int k dx \\ &\Rightarrow y = A e^{kx} \end{aligned}$$

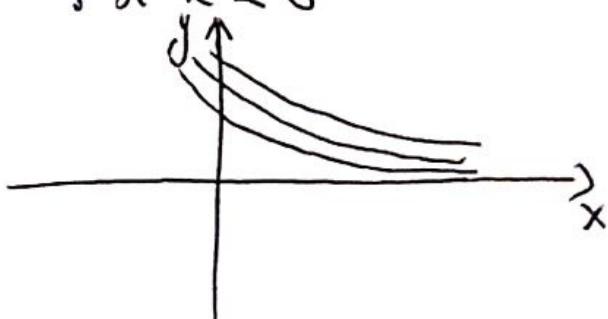
En utilisant la condition initiale $y(0) = y_0$, on trouve

$$y(x) = y_0 e^{kx}$$

• Si $k > 0$



• Si $k < 0$



Exemple 1 : modèle d'une population sans contraintes ②

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad , \quad P(0) = P_0$$

On a : $P(t) = P_0 e^{kt}$

Exemple 2 :

Le Tritium-3 est un isotope de l'hydrogène. Il est radioactif et se décompose spontanément en Hélium-3. On suppose que la décomposition suit la loi exponentielle. Un échantillon de Tritium-3 est réduit à 94.5% de sa masse en 1 an.

a) Quelle est la demi-vie du Tritium-3?

b) Combien de temps faut-il pour qu'il n'en reste que 20% ?

Solution

Soient t = temps en années

$m = m(t)$ = masse du Tritium-3 en mg après t années

Comme la décomposition suit une loi exponentielle, on a

$$\frac{dm}{dt} = km \Rightarrow m(t) = m_0 e^{kt} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} k = \text{constante} \\ m_0 = \text{masse initiale} \\ k = \text{constante} \end{array}$$

À $t = 1$ an, on a $m(1) = \frac{94.5}{100} m_0$ où m_0 = masse initiale

(3)

$$\Rightarrow 0.945 m_0 = m_0 e^k \Rightarrow k = \ln(0.945)$$

D'où

$$y(t) = m_0 e^{\ln(0.945)t} = m_0 (0.945)^t$$

a) La demi-vie correspond au temps auquel la masse initiale est réduite de moitié. On cherche t tel que

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{m_0}{2} \Rightarrow m_0 (0.945)^t = \frac{m_0}{2} \\ &\Rightarrow (0.945)^t = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow t = \frac{\ln(1/2)}{\ln(0.945)} \end{aligned}$$

demi-vie $t \approx 12.25$ ans

b) On cherche t tel que $m(t) = \frac{20}{100} m_0$

$$\Rightarrow m_0 (0.945)^t = 0.2 m_0$$

$$\Rightarrow (0.945)^t = 0.2$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.945)}$$

$t \approx 29.45$ ans

On constate que c'est indépendant de la masse initiale.

Loi de refroidissement de Newton

(4)

Soient $T = T(t)$ la température d'un objet au temps t et E la température extérieure (ambiente). Le taux de variation de la température T de l'objet est proportionnel à la différence entre la température ambiante et la température de l'objet. Ce qui se traduit par une équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} = k(E - T) \text{ où } k = \text{constante}$$

Exemple

Une dinde rotie sort du four au moment où le thermomètre de cuisson indique 88°C . Elle est placée sur une table dans une pièce où il fait 23°C . Si la température de la dinde est de 85°C après une demi-heure, à quelle température sera-t-elle après

- i) t heures ?
- ii) $\frac{3}{4}$ heure ?
- iii) Quand sera-t-elle à 37°C ?

Solution

(5)

i) On a :

$$\frac{dT}{dt} = k(E-T) = k(23-T)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{23-T} = k dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dT}{23-T} = \int k dt$$

$$\Rightarrow -\ln|23-T| = kt + C$$

$$\Rightarrow T = 23 + A e^{-kt}$$

$$\text{At } t=0, \text{ on a } T(0)=85 \Rightarrow 23 + A e^{-k(0)} = 85 \\ \Rightarrow A = 62$$

$$T = 23 + 62 e^{-kt}$$

$$\text{At } t = \frac{1}{2} \text{ hour} = 0.5, \text{ on a } T(0.5) = 65 \Rightarrow$$

$$23 + 62 e^{-0.5k} = 65 \Rightarrow k = -2 \ln \left(\frac{42}{62} \right) = 0.7789$$

D'où

$$T(t) = 23 + 62 e^{-0.7789t}$$

(6)

ii) $T\left(\frac{3}{4}\right) = 23 + 62 e^{-0.7783 \left(\frac{3}{4}\right)} \approx 57.6^\circ C$

iii) On cherche t tel que $T(t) = 37$

$$T(t) = 23 + 62 e^{-0.7783 t} = 37 \Rightarrow t = 1.91 h$$

Équation logistique

On considère une population dont le taux de croissance relatif diminue lorsque la population P augmente et devient même négatif lorsque P dépasse sa capacité maximale K . (maximum que le milieu est capable de supporter à long terme)

L'expression la plus simple du taux de croissance moyen qui reflète ces suppositions est :

$$\frac{dP}{dt} = k P \left(1 - \frac{P}{K}\right) \text{ où } (*)$$

t = le temps

$P = P(t)$ = la taille de la population au temps t

K = la capacité maximale

k = une constante.

L'équation (*) est connue sous le nom d'équation logistique(†)

Solution analytique :

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = k dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int k dt \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right) dP = \int k dt \Rightarrow$$

$$\ln|P| - \ln|K-P| = kt + C \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{K-P}{P}\right| = -kt - C \Rightarrow$$

$$\frac{K-P}{P} = Ae^{-kt}, A \text{ constante} \Rightarrow$$

$$P = \frac{K}{1+Ae^{-kt}}$$

Calcul de A :

$$P(0) = P_0 = \frac{K}{1+A} \Rightarrow P_0 + AP_0 = K \Rightarrow A = \frac{K-P_0}{P_0}$$

D'où

$$P(t) = \frac{K}{1+AE^{-kt}} \text{ où } A = \frac{K-P_0}{P_0}$$

Exemple

Écrire la solution du problème

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right), P(0) = 100$$

~~Repos~~ Déterminer $P(40)$.

À quel moment la taille de la population atteindra-t-elle 900 ?

Solution

On a l'équation logistique avec
 $K = 1000$, $k = 0.08$ et $P_0 = 100$

Donc

(9)

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-0.08t}} \text{ où } A = \frac{1000 - 100}{100} = 9$$

D'où

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}}$$

$$P(40) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.08(40)}} \approx 731,6$$

On cherche t tel que $P(t) = 900 \Rightarrow$

$$\frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}} = 900 \Rightarrow$$

$$1 + 9e^{-0.08t} = \frac{1000}{900} = \frac{10}{9} \Rightarrow$$

$$e^{-0.08t} = \frac{1}{81} \Rightarrow$$

$$-0.08t = \ln(1/81) = -\ln 81$$

$$t = -\frac{\ln 81}{0.08} \approx 54.9$$