affirmation est présentée dans des ouvrages plus avancés.) Alors, selon le théorème de Stokes,

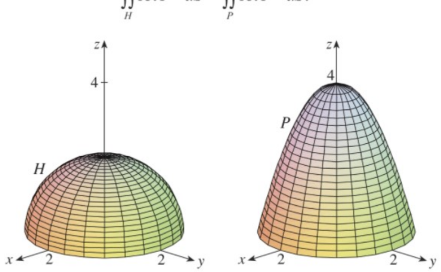
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{0}\cdot d\vec{S} = 0.$$

On peut subdiviser une courbe non simple en plusieurs courbes simples, et les intégrales autour de ces courbes simples sont nulles. L'addition de ces intégrales donne $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ pour toute courbe fermée C. Par conséquent, si $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, alors l'intégrale de $\vec{F}$ autour de toute courbe fermée est nulle, ce qui implique que $\vec{F}$ est conservatif.

Exercices 10.4

1. Un hémisphère H et une partie P d'un paraboloïde sont représentés. Supposez que $\vec{F}$ est un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ dont les composantes ont des dérivées partielles continues. Expliquez pourquoi

$$\iint_H \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_P \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}.$$



-6 Utilisez le théorème de Stokes pour calculer $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$.

2. $\vec{F}(x,y,z) = x^2\sin z\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$, S est la partie du paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$ située sous le plan xy et orientée vers le haut.

3. $\vec{F}(x,y,z) = ze^y\,\vec{i} + x\cos y\,\vec{j} + xz\sin y\,\vec{k}$, S est l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $y \ge 0$, orientée dans la direction de l'axe des y positifs.

4. $\vec{F}(x,y,z) = \arctan(x^2yz^2)\,\vec{i} + x^2y\,\vec{j} + x^2z^2\,\vec{k}$, S est le cône $x = \sqrt{y^2+z^2}$, $0 \le x \le 2$, orienté dans la direction de l'axe des x positifs.

5. $\vec{F}(x,y,z) = xyz\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + x^2yz\,\vec{k}$, S est constituée de la face supérieure et des quatre faces latérales (mais pas de la face inférieure) du cube de sommets $(\pm1, \pm1, \pm1)$, orientée vers l'extérieur. (*Suggestion :* Utilisez l'équation 3.)

6. $\vec{F}(x,y,z) = e^{xy}\cos z\,\vec{i} + x^2z\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$, S est l'hémisphère $x = \sqrt{1-y^2-z^2}$, orientée dans la direction de l'axe des x positifs. (*Suggestion :* Utilisez l'équation 3.)

7-10 Utilisez le théorème de Stokes pour calculer $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Dans chaque cas, C est orientée dans le sens antihoraire lorsqu'on la regarde du dessus.

7. $\vec{F}(x,y,z) = (x+y^2)\,\vec{i} + (y+z^2)\,\vec{j} + (z+x^2)\,\vec{k}$, C est le triangle de sommets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

8. $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i} + (x+yz)\,\vec{j} + (xy - \sqrt{z})\,\vec{k}$, C est la frontière de la partie du plan $3x + 2y + z = 1$ située dans le premier octant.

9. $\vec{F}(x,y,z) = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + zx\,\vec{k}$, C est la frontière de la partie du paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$ située dans le premier octant.

10. $\vec{F}(x,y,z) = 2y\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$, C est la courbe d'intersection du plan $z = y + 2$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

11-13 Calculez le travail effectué par $\vec{F}$ autour de C.

11. $\vec{F}(x,y,z) = -y\,\vec{i} + z^3\,\vec{j} + x^2\,\vec{k}$, C est la courbe d'intersection des cylindres $x^2 + z^2 = 4$ et $y = 4 - z^2$, orientée dans le sens antihoraire lorsqu'on la regarde depuis le point $(0, 10, 0)$.

12. $\vec{F}(x,y,z) = -(x+z)\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + (y+z^2)\,\vec{k}$, C est la courbe d'intersection du paraboloïde $z = x^2 + y^2$ avec le plan $z = 1 - 2y$, orientée dans le sens horaire lorsqu'on la regarde du dessus.

13. a) Utilisez le théorème de Stokes pour calculer $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, où

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2z\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$$

et C est la courbe d'intersection du plan $x + y + z = 1$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 9$, orientée dans le sens antihoraire lorsqu'on la regarde du dessus.

b) Tracez le plan et le cylindre sur un domaine choisi de façon à bien voir la courbe C et la surface utilisées dans la partie a).

c) Trouvez les équations paramétriques de C et utilisez-les pour tracer cette courbe.

14. a) Utilisez le théorème de Stokes pour calculer $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, où $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\,\vec{i} + \frac{1}{3}x^3\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$ et C est la courbe d'intersection du paraboloïde hyperbolique $z = y^2 - x^2$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 1$, orientée dans le sens antihoraire lorsqu'on la regarde du dessus.

b) Représentez le paraboloïde hyperbolique et le cylindre sur un domaine choisi de façon à bien voir la courbe C et la surface utilisées dans la partie a).

c) Trouvez les équations paramétriques de C et utilisez-les pour tracer la courbe.

15-17 Vérifiez que le théorème de Stokes est vrai pour le champ vectoriel $\vec{F}$ et la surface S donnés.

15. $\vec{F}(x,y,z) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$, S est le cône $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$, orienté vers le bas.

16. $\vec{F}(x,y,z) = -2yz\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 3x\,\vec{k}$, S est la partie du paraboloïde $z = 5 - x^2 - y^2$ situé au-dessus du plan $z = 1$, orienté vers le haut.

17. $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + x\,\vec{k}$, S est l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \ge 0$, orienté dans la direction de l'axe des y positifs.

18. Soit T la partie du **tore** paramétré par

$$\vec{r}(u,v) = (2+\cos(v))\cos(u)\,\vec{i} + (2+\cos(v))\sin(u)\,\vec{j} + \sin(v)\,\vec{k}$$

qui est située au-dessus du plan $z = 0$. La surface T est orientée par un vecteur normal qui pointe «vers le haut». À l'aide du théorème de Stokes, calculez $\iint_T \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$ pour le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = ye^z\,\vec{i} - xe^z\,\vec{j} + ze^{xy}\,\vec{k}.$$

19. Soit C la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plan $z = x + 5$. À l'aide d'une méthode semblable à celle de l'exemple 5, calculez la circulation du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + \sin(z^2)\,\vec{k}$ autour de C.

20. Soit une courbe lisse fermée simple C située dans le plan $x + y + z = 1$. Montrez que l'intégrale curviligne

$$\int_C z\,dx - 2x\,dy + 3y\,dz$$

ne dépend que de l'aire de la région bornée par C et non de la forme de C ni de son emplacement dans le plan.

21. Une particule se déplace le long des segments de droites allant de l'origine aux points $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$ et revenant à l'origine sous l'action du champ de forces

$$\vec{F}(x,y,z) = z^2\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + 4y^2\,\vec{k}.$$

Calculez le travail effectué.

22. Calculez

$$\int_C (y + \sin x)\,dx + (z^2 + \cos y)\,dy + x^3\,dz,$$

où C est la courbe $\vec{r}(t) = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \sin 2t\,\vec{k}$, $0 \le t \le 2\pi$. (*Suggestion :* Montrez que C est contenue dans la surface $z = 2xy$.)

23. Calculez $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, où

$$\vec{F}(x,y,z) = [y + \arctan(x)]\,\vec{i} + [z + y^2]\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$$

et C est paramétrée par $\vec{r}(t) = 5\cos(t)\,\vec{i} + 5\sin(t)\,\vec{j} + \cos(2t)\,\vec{k}$ avec $0 \le t \le 2\pi$. (*Suggestion :* Trouvez une surface de l[a] forme $z = f(x, y)$ qui contient la courbe C.)

24. Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = (-2\cos(t) + 6\sin(t))\,\vec{i} + (6\cos(t) + 2\sin(t))\,\vec{j} + (1 + 3\cos(t) - 2\sin(t))\,\vec{k}$$

avec $0 \le t \le 2\pi$. Calculez le travail effectué par le cham[p] vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (z + \cos(x^2) + 5x^2y)\,\vec{i} + (x^3 + 2zy + \sin(y^2))\,\vec{j} + (x + y^2)\,\vec{k}$$

le long de C. (*Suggestion :* Montrez que C est fermée e[t] contenue dans un plan.)

25. Soit le plan $x - y + z = 1$, orienté par le vecteu[r] $\vec{n} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Une courbe fermée C, contenue dans S e[t] orientée dans le sens antihoraire lorsqu'on la regarde d[u] dessus, entoure une région S du plan telle que l'aire de l[a] projection de S sur les plans de coordonnées $x = 0$, $y =$ [0] et $z = 0$, est a, b et c respectivement. Évaluez l'intégrale

$$\oint_C (y^2\,\vec{i} - z^2\,\vec{j} + x^2\,\vec{k})\cdot d\vec{r}.$$

(Votre réponse dépendra de l'une des constantes a, b ou c.)

26. Soit S la surface d'équation $z = (a-x)(a-y)y$ ave[c] $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, où a est une constante strictemen[t] positive et C, la frontière de S, orientée dans le sen[s] antihoraire lorsqu'on la regarde du dessus. Pour quell[e] valeur de a la circulation du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = -y^2\,\vec{i} - xy^2\,\vec{j} + z^4\,\vec{k}$$

autour de C est-elle maximale ?

27. Calculez le flux du rotationnel de

$$\vec{F}(x,y,z) = \sqrt{1+z^2}\,\vec{i} + \left(y^2 + \sqrt{2+z^2}\right)\vec{j} + (2x + 2z)\,\vec{k}$$

à travers la partie de la sphère de rayon 1 centrée à l'origin[e] qui est au-dessus du plan $z = 0$, orientée vers le haut.

28. Calculez $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$, où S est la partie du paraboloïd[e] $z = x^2 + y^2$ située entre les plans $z = 1$ et $z = 2$, orientée ver[s] l'extérieur, et $\vec{F}(x,y,z) = x\sin(\pi z)\,\vec{i} + y\cos(\pi z)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

29. Soit une sphère S et un champ vectoriel $\vec{F}$ satisfaisan[t] aux hypothèses du théorème de Stokes. Montrez qu[e] $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = 0$.

30. On suppose que S et C satisfont aux hypothèses du théorèm[e] de Stokes et que f et g ont des dérivées partielles seconde[s] continues. Utilisez les exercices 26 et 28 de la section 10.[?] pour démontrer les égalités suivantes :

a) $\int_C (f\nabla g)\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g)\cdot d\vec{S}$

b) $\int_C (f\nabla f)\cdot d\vec{r} = 0$

c) $\int_C (f\nabla g + g\nabla f)\cdot d\vec{r} = 0$