## Examen pratique pour MAT 2777 (solutionnaire)

### Questions à réponses courtes

1. Il est possible qu'un bit transmis à travers d'un canal de transmission numérique soit reçu en erreur. Soit $X$ le nombre de bits en erreur parmi les quatre prochains bits. Supposons que $X$ a la loi de probabilité suivante.

$$P(X=x)=\begin{cases} 0,66; & x=0 \\ 0,29; & x=1 \\ 0,04; & x=2 \\ 0,009; & x=3 \\ 0,001; & x=4 \end{cases}$$

(a) Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 1 bit en erreur dans les quatre prochains bits transmis ?
(b) Quel est le nombre espéré de bits en erreur dans les quatre prochains bits transmis ?
(c) Calculer l'écart-type du nombre de bits en erreur dans les quatre prochains bits transmis.
(d) Calculer $P\left(-1,96<\frac{X-E[X]}{\sqrt{V[X]}}<1,96\right)$.

**Solution :** (a) $P(X \leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=0,95.$.

(b) $E[X]=(0)(0,66)+1(0,29)+2(0,04)+3(0,009)+4(0,001)=0,401$

(c) $V[X]=0^2(0,66)+1^2(0,29)+2^2(0,04)+3^2(0,009)+4^2(0,001)-(0,401)^2=0,386199.$ Alors, $\sigma_X=\sqrt{V[X]}=0,62145.$

(d)

$$\begin{aligned} & P\left(-1,96<\frac{X-E[X]}{\sqrt{V[X]}}<1,96\right) \\ = \;& P\left(-1,96<\frac{X-0,401}{0,62145}<1,96\right) \\ = \;& P\left(-1,96(0,62145)+0,401<X<1,96(0,62145)+0,401\right) \\ = \;& P\left(-0,8170<X<1,619\right) \\ = \;& P(X=0)+P(X=1)=0,95 \end{aligned}$$

2. Un fabricant veut tester la durée de vie d'un petit moteur. La durée de vie moyenne devrait être au moins quatre années. On suppose que la durée de vie est normalement distribuée.
(a) Le département de fabrication va faire une enquête approfondie concernant le processus de fabrication, s'il y a des preuves que la durée de vie est trop courte. Formuler une hypothèse nulle et alternative appropriée.
(b) Le directeur général a indiqué que la vente de moteurs qui ne répondent pas aux normes est inacceptable. Alors, le département de fabrication va faire une enquête approfondie, sauf s'il y a des preuves significatives que la durée de vie moyenne est conforme aux exigences. Formuler une hypothèse nulle et alternative appropriée.
(c) On cueille un échantillon aléatoire de 15 moteurs. Dans la situation de la **partie (b)**, et avec un niveau de signification de 5%, donner une règle de décision pour ce test.
(d) Supposons que la moyenne de l'échantillon est 4,13 années et que l'écart type de l'échantillon est 0,35 années. Donner la conclusion du test en fonction de votre règle de décision en (c) ?
**Solution :** Soit $\mu$ la durée moyenne en années.
(a) On veut tester $H_0 : \mu = 4$ contre $H_1 : \mu < 4$.
(b) On veut tester $H_0 : \mu = 4$ contre $H_1 : \mu > 4$.
(c) C'est une alternative à la droite, alors nous rejetons $H_0$ si $t_0 > t_{0,05;14} = 1,761$, où $t_0 = (\overline{x} - 4)/(s/\sqrt{15})$.
(d) Puisque $t_0 = (\overline{x} - 4)/(s/\sqrt{15}) = (4,13 - 4)/(0,35/\sqrt{15}) = 1,438$, alors $t_0 < 1,761$. Les preuves contre $H_0$ ne sont significatives. Nous allons faire une enquête approfondie.

3. Soit $X$ le nombre de défauts de soudure pour une pièce. Sa moyenne est $\mu = 1,2$ défauts et son écart type est $\sigma = 1,6$ défauts. En outre, la probabilité qu'une pièce ait plus que 2 défauts est 0,2.

   (a) Considérons 20 pièces. Quelle est la probabilité qu'au plus une pièce aura plus que 2 défauts ?

   (b) Considérons les pièces une à la fois. Quelle est la probabilité que la sixième pièce est la première pièce avec plus de deux défauts ?

   (c) Chaque défaut prend environ 10 minutes à corriger. Si on a 50 pièces, approximer la probabilité qu'il nous faudra plus que 13,75 heures pour corriger tous les défauts.

   **Solution :**

   (a) Soit $Y$ le nombre de pièces parmi $n = 20$ pièces qui ont plus que 2 défauts. $Y$ suit une loi binomiale avec $n = 20$ et $p = 0,2$. On veut

$$P(Y \leq 1) = \binom{20}{0} p^0 (1-p)^{20} + \binom{20}{1} p^1 (1-p)^{19} = 0,0692.$$

   (b) Soit $T$ le nombre de pièces requises afin d'observer plus que 2 défauts. $T$ suit une loi géométrique avec $p = 0,2$. On veut

$$P(Y = 6) = (1-p)^5\, p = 0,0655.$$

(c) Soit $T_i$ le temps en minutes pour corriger les défauts de la $i$ème pièce. C'est $T_i = 10\,X_i$, où $X_i$ est le nombre de défauts pour la $i$ème pièce. On a

$$\mu = E[T_i] = 10\,E[X_i] = 10(1,2) = 12$$

et

$$\sigma = \sqrt{V[T_i]} = \sqrt{10^2\,V[X_i]} = \sqrt{100\,(1,6)^2} = 16.$$

La probabilité que le temps requis est supérieure à 13,75 heures (c'est-à-dire 825 minutes) pour corriger les défauts pour 50 pièces est

$$\begin{aligned}
& P\left(\sum_{i=1}^{50} T_i > 825\right) \\
= \quad & P\left(\sum_{i=1}^{50} T_i/50 > 825/50\right) \\
= \quad & P\left(\overline{T} > 16,5\right) \\
\approx \quad & 1 - \Phi\left(\frac{16,5 - 12}{16/\sqrt{50}}\right) \qquad \text{(par le théorème central limite)} \\
= \quad & 1 - \Phi(1,99) \\
= \quad & 1 - 0,9767 = 0,0233.
\end{aligned}$$

## Questions à choix multiples

[2] 1. Les cartes de circuits imprimés sont placées dans un test fonctionnel après avoir été rempli avec des puces semi-conductrices. Un lot contient 140 cartes, et 20 sont sélectionnées sans remplacement pour le test fonctionnel. Si six des 140 cartes sont défectueuses, quelle est la probabilité qu'au plus une carte défectueuse apparaîtera dans l'échantillon.

A) $0,4062$ B) $0,7956$ C) $0,01578$ D) $0,9754$ E) $0,2065$

**solution :** Soit $X$ le nombre de cartes défectueuses dans l'échantillon. On veut

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= \frac{\binom{134}{20}\binom{6}{0}}{\binom{140}{20}} + \frac{\binom{134}{19}\binom{6}{1}}{\binom{140}{20}} \\ &= 0{,}7956 \end{aligned}$$

La réponse est B.

[2] 2. Un fabricant de fil veut s'assurer que le rayon moyen d'un modèle est très proche de sa valeur indiquée. Supposons que l'écart type du rayon est connu comme étant $10\mu$m. La moyenne de la population sera estimée par le rayon moyen d'un échantillon aléatoire de fils fabriqués. Combien de fils doivent être cueillis afin d'être 95% confiant que l'erreur dans l'estimation est au plus 3 $\mu$m ?

A) 30 B) 31 C) 42 D) 43 E) 53

**solution :** Résoudre

$$n \geq \left[\frac{z_{0,025}\sigma}{E}\right]^2 = \left[\frac{(1,96)(10)}{3}\right]^2 = 42{,}684.$$

Nous allons cueillir $n = 43$. La réponse est D.

[2] 3. Les appels au support technique se réalisent selon un processus de Poisson avec un taux de 20 appels par minute. Quelle est la probabilité qu'au moins trois appels se réalisent dans une période de 15 secondes ?

A) $0,1246$ B) $0,8753$ C) $0,7350$ D) $0,2650$ E) $0,4405$

**solution :** Nous avons un processus de Poisson avec un taux de $\lambda = 20$ appels par minute. Soit $N(1/4)$ le nombre d'appels en 15 secondes (c'est-à-dire 1/4 d'une minute). $N(1/4)$ suit une loi Poisson de moyenne $c = \lambda t = (20)(1/4) = 5$. On veut

$$P(N(1/4) \geq 3) = 1 - \left[e^{-5}\frac{e^0}{0!} + e^{-5}\frac{e^1}{1!} + e^{-5}\frac{e^2}{2!}\right] = 0{,}8753.$$

La réponse est B.

4. Voici la fonction masse de probabilité conjointe des variables aléatoires $X$ et $Y$ :

| $x$ | $y$ | $p_{XY}(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/12 |
| 0 | 2 | 3/12 |
| 1 | 1 | 1/12 |
| 1 | 2 | 4/12 |
| 2 | 0 | 2/12 |
| 2 | 2 | 1/12 |

Calculer $P(X+Y \geq 2)$.

A) 2/12 B) 7/12 C) 6/12 D) 9/12 E) 11/12

**solution :**

$$\begin{aligned} P(X+Y\geq 2) &= p_{X,Y}(0,2)+p_{X,Y}(1,1)+p_{X,Y}(1,2)+p_{X,Y}(2,0)+p_{X,Y}(2,2) \\ &= \frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{4}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12} \end{aligned}$$

The answer is E.

**[2]** 5. Supposons que la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue $X$ est

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,25\,(x-2)+0,5, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

Calculer l'espérance suivante : $E[X]$.

A) $1,4142$ B) $0,3333$ C) $1,5333$ D) $2$ E) $1,3333$

**solution :** La densité de probabilité de $X$ est

$$f(x) = F'(x) = 0{,}25, \quad 0 < x < 4.$$

Alors la valeur espérée de $X$ est

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^4 x\,(0,25)\,dx = 0,25\left[\frac{4^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right] = 2.$$

La réponse est D.

**[2]** 6. La force d'un alliage d'acier est normalement distribuée avec une moyenne de 20 gigapascals (GPa) et un écart type de 3,54 GPa. Quelle est la probabilité qu'un spécimen de cet alliage aura une résistance d'au moins 24 GPa ?

A) 0,1151 B) 0,1292 C) 0,3206 D) 0,3409 E) 0,8849

**solution :** On veut

$$P(X \geq 24) = 1 - \Phi\left(\frac{24-20}{3,54}\right) = 1 - \Phi(1,13) = 0,1292.$$

La réponse est B.

**[2]** 7. Chaque échantillon d'eau a une probabilité de 10% de contenir un polluant organique particulier. On suppose que les échantillons sont indépendants en ce qui concerne la présence du polluant. Trouver la probabilité que dans les 16 prochains échantillons, exactement deux contiennent le polluant.

A) 0,3245 B) $< 0,0001$ C) 0,2745 D) 0,0065 E) 0,7892

**Solution :** Soit $X$ le nombre d'échantillons parmi $n = 16$ ayant le polluant. $X$ suit une loi binomiale avec $n = 16$ et $p = 0,1$. On veut

$$P(X = 2) = \binom{16}{2}(0,1)^2(0,9)^{14} = 0,2745.$$

La réponse est C.

**[2]** 8. Un échantillon de 17 boîtes choisis au hasard d'une marque particulière de céréales est cueilli, et chaque boîte est pesé. La moyenne de l'échantillon est calculée à 460 g, et l'écart type de l'échantillon est 23 g. Trouver un nombre $x$ de sorte que nous sommes 90% confiant que la moyenne de la population soit au plus $x$. Supposons que la masse d'une boîte est normalement distribuée.

A) 1,333 B) 452,564 C) 467,140 D) 467,436 E) 467,458

**solution :** On est 90% confiant que

$$\mu < \overline{x} + t_{0,1;16}\frac{s}{\sqrt{n}} = 460 + (1,337)\frac{23}{\sqrt{17}} = 467,458.$$

La réponse est E.

9. Une firme d'ingénierie a une page Facebook. Les visites sur la page se produisent selon un processus de Poisson à un taux de 4 visites par jour. Quelle est la probabilité que nous avons besoin d'attendre plus d'une journée pour observer 4 visites ?

A) 0,0915 B) 0,4335 C) 0,6288 D) 0,0183 E) 0,2381

**solution :** Soit $N(1)$ le nombre de visites par jour. $N(1)$ suit une loi Poisson de moyenne $\lambda t = 4(1) = 4$. On veut

$$P[N(1) \leq 3] = e^{-4}\frac{4^0}{0!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!} + e^{-4}\frac{4^2}{2!} + e^{-4}\frac{4^3}{3!} = 0.4335.$$

**[2]** 10. Soit $X_1, \ldots, X_{20}$ un échantillon aléatoire d'une population normale de moyenne $\mu = 16$ et d'écart type $\sigma = 3$. Soit $\bar{X}$ la moyenne de l'échantillon. Déterminer un nombre $c$ tel que $P(\bar{X} < c) = 0,95$.

A) 16,56 B) 16,86 C) 17,10 D) 17,16 E) 20,92

**solution :** $Z = (\overline{X} - 16)/(3/\sqrt{20})$ suit une loi normale centrée et réduite. On veut $c$ tel que

$$0,95 = P(\overline{X} < c) = \Phi\left(\frac{c-16}{3/\sqrt{20}}\right).$$

Alors,

$$1,645 = \frac{c-16}{3/\sqrt{20}} \quad \Rightarrow \quad c = (1,645)(3/\sqrt{20}) + 16 = 17,1035 \approx 17,10.$$

La réponse est C.

**[2]** 11. Les ingénieurs d'une flotte doit continuellement vérifier la corrosion à l'intérieur des tuyaux qui font partie des systèmes de refroidissement. L'état intérieur des tuyaux ne peuvent pas être observées directement, mais des tests non destructifs peuvent donner une indication de la corrosion. Le test n'est pas parfait. Le test a une probabilité de 0,7 de détection de la corrosion interne lorsque la corrosion interne est présente mais il a également une probabilité de 0,1 que la corrosion interne soit détecté, quand il n'y a pas de corrosion interne. Supposons que la probabilité que le tuyaux ait de la corrosion interne est 0,15. Étant donné que le test détecte la corrosion interne, quelle est la probabilité qu'il y ait réellement de la corrosion interne ?

A) 0,5526 B) 0,3600 C) 0,1500 D) 0,3425 E) 0,1926

**solution :** Soit $I$ l'événement qu'il y ait de la corrosion interne et $D$ l'événement que le test ait une détection de la corrosion interne. On

$$P(I) = 0,15; \quad P(D|I) = 0,7; \quad P(D|I') = 0,1.$$

On veut

$$\begin{aligned} P(I|D) &= \frac{P(I \cap D)}{P(D)} = \frac{P(I \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(D|I)P(I)}{P(D|I)P(I) + P(D|I')P(I')} \\ &= \frac{(0,7)(0,15)}{(0,7)(0,15) + (0,1)(0,85)} \\ &= 0,5526. \end{aligned}$$

La réponse est A.

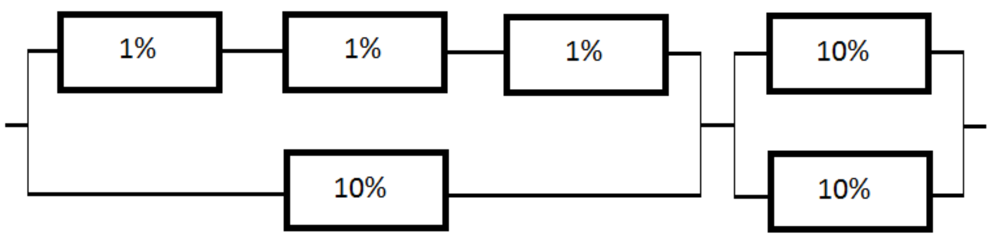
**[2]** 12. Soit un échantillon aléatoire de taille $n = 22$ d'une population normale de moyenne 15. Soit $\overline{X}$ et $S$ la moyenne de l'échantillon et l'écart type de l'échantillon respectivement. Trouver $a$ tel que

$$P\left(\frac{\overline{X}-5}{S/\sqrt{22}} \leq a\right) = 0,01.$$

A) $2,518$ B) $-2,518$ C) $-2,831$ D) $2,508$ E) $-2,508$

**solution :** La variable aléatoire $T = (\overline{X}-5)/(S/\sqrt{22})$ suit une loi $T(21)$. On veut $a = t_{0,99;21} = -t_{0,01;21} = -2,518$. La réponse est B.

**[2]** 13. Le circuit suivant fonctionne si et seulement s'il y a un chemin de dispositifs fonctionnels de gauche à droite. Supposer que les dispositifs échouent indépendamment et que la probabilité que le dispositif ***ne*** *fonctionne* ***pas*** est indiquée. Quelle est la probabilité que le circuit fonctionne ?




A) 0,9871 B) 0,9975 C) 0,9725 D) 0,0211 E) 0,7885

Le premier sous-circuit $A$ fonctionne si le circuit du haut $A_1$ fonctionne ou le circuit du bas $A_2$ fonctionne. On a

$$P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1')P(A_2') = 1 - (0,0297)(0,1) = 0,99703,$$

où

$$P(A_1) = 1 - (0,01)^3 = 0,9703 \quad \text{et} \quad P(A_2) = 0,9.$$

Le deuxième sous-circuit $B$ (à la droite) fonctionne si au moins un des deux composants fonctionne, alors $P(B) = 1 - (0,1)^2 = 0,99$. Le circuit fonctionne si $A$ et $B$ fonctionne, alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0,99703)(0,99) = 0,9871.$$

La réponse est A.

**[2]** 14. Soit $X$ la note de cours d'un étudiant en statistique. Supposons que $X$ suit une loi normale. Avec des méthodes traditionnelles d'enseignement, la note moyenne fut $\mu = 60$. Nous voulons déterminer si la note moyenne des étudiants a augmenté avec une nouvelle méthode d'enseignement. Pour tester $H_0 : \mu = 60$ contre $H_1 : \mu > 60$, on utilise un échantillon aléatoire de taille $n = 26$ étudiants. Si on calcul $\overline{x} = 62,5$ et $s = 10$ pour ces 26 étudiants, calculer la valeur $P$ du test.

A) valeur $P > 0{,}10$ B) $0{,}05 <$ valeur $P < 0{,}10$
C) $0{,}025 <$ valeur $P < 0{,}05$ D) $0{,}01 <$ valeur $P < 0{,}025$
E) valeur $P < 0{,}01$

**solution :** La valeur observée de la statistique du test est

$$t_0 = \frac{\overline{x} - 60}{s/\sqrt{26}} = \frac{62,5 - 60}{10/\sqrt{26}} = 1{,}275.$$

Puisque c'est une alternative unilatérale à la droite, alors $P(T > 1{,}275)$, où $T$ suit une loi $T(25)$. On a $t_{0,25;25} = 0{,}684$ et $t_{0,10;25} = 1{,}316$. Alors, $0{,}10 < P < 0{,}25$. Alors, $P > 0{,}10$.

**[2]** 15. C'est difficile de déterminer la résistance au cisaillement des points de soudure, mais simple de mesurer le diamètre des points de soudure. Nous allons décrire la résistance au cisaillement (en ppc) comme une fonction linéaire du diamètre de la soudure (en 0,0001 pouce). Les données sont ci-bas :

| $i$ | résistance au cisaillement $y_i$ (ppc) | diamètre $x_i$ (0,0001 pouce) |
|---|---|---|
| 1 | 370 | 400 |
| 2 | 780 | 800 |
| 3 | 1210 | 1250 |
| 4 | 1560 | 1600 |
| 5 | 1980 | 2000 |
| 6 | 2450 | 2500 |
| 7 | 3070 | 3100 |
| 8 | 3550 | 3600 |
| 9 | 3940 | 4000 |
| 10 | 3950 | 4000 |
| total | 22860 | 23250 |

Avec ces données, nous avons calculé les formes quadratiques suivantes :

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 15\,686\,250; \quad \sum_{i=1}^{10}(y_i - \overline{y})^2 = 15\,461\,440;$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = 15\,573\,000.$$

En supposant que c'est est raisonnable d'utiliser un modèle de régression linéaire simple pour décrire la résistance au cisaillement en fonction du diamètre du point de soudure, prévoir la résistance au cisaillement en (ppc) d'un point de soudure lorsque le diamètre est 0,375 pouce.

A) 3701 B) 3850 C) 3576 D) 3695 E) 3687

La pente est

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = \frac{15\,573\,000}{15\,686\,250} = 0{,}99278$$

et l'ordonnée à l'origine est

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1\,\overline{x} = \frac{22\,860,0}{10} - 0{,}99278\,\left(\frac{23\,250,0}{10}\right) = -22{,}2135.$$

La droite de régression estimée est

$$\hat{y} = -22{,}2135 + 0{,}99278\,x.$$

N.B. Un diamètre de 0,375 pouce est $x = 3750$ (en 0,0001 pouce). La prévision est

$$\hat{y} = -22{,}2135 + 0{,}99278\,(3750) = 3700.712 \approx 3701 \text{ ppc}.$$