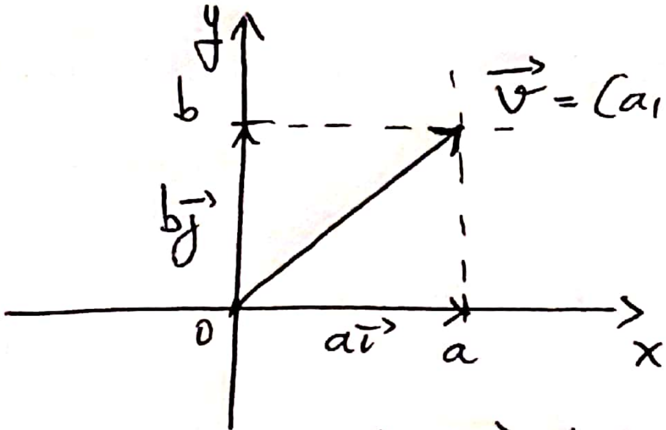
Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient

Rappel

Dans le plan, on définit $\vec{i} = (1,0)$ et $\vec{j} = (0,1)$.
La norme de $\vec{v} = (a,b) = a\vec{i} + b\vec{j}$ est $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2}$.



Le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ est de norme 1 et s'appelle le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{v}$.

Exemple

$\vec{v} = (1,1)$. Alors $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{v} = (1,1)$.

Dans l'espace, on définit $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ et $\vec{k} = (0,0,1)$. La norme de $\vec{v} = (a,b,c)$ est $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ s'appelle le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{v}$.

Exemple

$\vec{v} = (1, 1, 2)$. Alors $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$
$= \vec{i} + \vec{j} + 2k$

$= \frac{1}{\sqrt{1+1+4}}(1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{v}$.

Définition

La dérivée de $f(x,y)$ au point (x_0,y_0) dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u} = (a,b)$ est

$$\frac{d}{dt} f(x_0+ta, y_0+tb)\Big|_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h}$$

= pente de la tangente au graphe de f au point (x_0,y_0) au dessus de la droite qui passe par (x_0,y_0) de vecteur directeur $\vec{u}$.

On la note $f'_{\vec{u}}(x_0, y_0)$.

Remarque

$$f'_{\vec{i}}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = f'_x(x_0,y_0)$$

$$f'_{\vec{j}}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h} = f'_y(x_0,y_0)$$

Proposition

Si $f(x,y)$ est différentiable au point (x_0,y_0) alors sa dérivée dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u} = (a,b)$ est

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)b$$

Définition

Le vecteur $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right)$ s'appelle le gradient de f au point (x,y).

Avec cette notation, on a :

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot (a,b) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{u}$$

produit scalaire

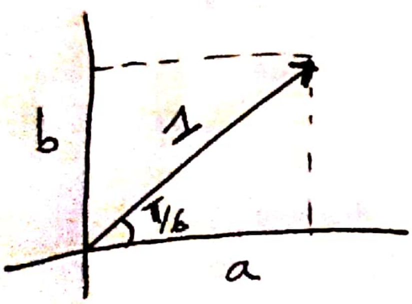
Donc

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{u} \quad \text{si } \|\vec{u}\| = 1$$

Exemple

Déterminer $f'_{\vec{u}}(x,y)$ si $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ et $\vec{u}$ est le vecteur unitaire qui fait un angle de $\pi/6$ avec l'axe des x

Solution :



$u = (a,b)$ avec

$a = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y\,,\ -3x + 8y)$$

$$f'_{\vec{u}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u} = (3x^2 - 3y)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-3x + 8y)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f'_{\vec{u}}(1,3) = \left(3(1)^2 - 3(3)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-3(1) + 8(3)\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -3\sqrt{3} + \frac{21}{2}$$

Fonctions de 3 variables

Définition

La dérivée de $f(x,y,z)$ au point (x_0, y_0, z_0) dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u}\,(a,b,c)$ est

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0,z_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + ta,\ y_0 + tb,\ z_0 + tc)\Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb,\ z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Proposition

Si $f(x,y,z)$ est différentiable au point (x_0, y_0, z_0) alors

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0,z_0) = \nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot \vec{u} \quad \text{où}$$

$\nabla f = (f'_x,\ f'_y,\ f'_z)$ s'appelle le gradient de f.

Exemple

Soit $f(x,y,z) = x\sin(yz)$. Calculer la dérivée de f au point $(1,3,0)$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Solution

$\vec{v} = (1, 2, -1) \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{1+(2)^2+(-1)^2} = \sqrt{6} \neq 1$

$\vec{v}$ n'est pas unitaire

On cherche $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

est le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{v}$.

$$\nabla f(x,y,z) = (\sin(yz), xz\cos(yz), xy\cos(yz))$$

$$\nabla f(1,3,0) = (0, 0, 3)$$

$$f'_{\vec{u}}(1,3,0) = \nabla f(1,3,0)\cdot\vec{u} = (0,0,3)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$
$$= -\frac{3}{\sqrt{6}}$$

Théorème

Si f est différentiable, sa dérivée en un point est maximale dans la direction du gradient ∇f et dans cette direction elle vaut $\|\nabla f\|$

preuve

$$f'_{\vec{u}} = \nabla f\cdot\vec{u} = \|\nabla f\|\|\vec{u}\|\cos(\theta) = \|\nabla f\|\cos(\theta)$$

où θ = angle entre ∇f et $\vec{u}$

Le maximal $\|\nabla f\|$ est atteint lorsque $\cos(\theta) = 1$, c.à.d lorsque $\vec{u}$ est parallèle à ∇f.

Théorème

Soit $f(x,y,z)$ une fonction différentiable. Si $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, alors la surface de niveau $f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)$ admet un plan tangent au point (x_0,y_0,z_0). C'est le plan qui passe par (x_0,y_0,z_0) et qui ~~passe~~ est perpendiculaire à $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.

Exemple

Trouver les équations du plan tangent et de la droite normale à $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ au point $(-2, 1, -3)$

Solution

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{1}{9}z^2$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x,\ 2y,\ \frac{2}{9}z\right) \Rightarrow \nabla f(-2,1,-3) = \left(-1, 2, -\frac{2}{3}\right) \neq 0$$

f est différentiable et on a $\nabla f(-2,1,-3) \neq 0$. Donc l'équation $f(x,y,z) = 3$ admet un plan tangent de vecteur normal $\nabla f(-2,1,-3)$ et qui passe par $(-2,1,-3)$.

$$-x + 2y - \frac{2}{3}z = d$$

$$-(-2) + 2(1) - \frac{2}{3}(-3) = d \Rightarrow d = 6$$

plan : $-x + 2y - \frac{2}{3}z = 6$

droite normale :

$$\begin{cases} x+2 = -t \\ y-1 = 2t \\ z-3 = -\frac{2}{3}t \end{cases}$$