EXEMPLE 7 Calculons le travail effectué par le champ de forces $\vec{F}(x, y) = x^2\,\vec{i} - xy\,\vec{j}$ pour déplacer une particule le long du quart de cercle $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$, $0 \le t \le \pi/2$.

SOLUTION Puisque $x = \cos t$ et $y = \sin t$, on a

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \cos^2 t\,\vec{i} - \cos t\,\sin t\,\vec{j}$$

et

$$\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}.$$

La figure 12 montre le champ de forces et la courbe de l'exemple 7. Le travail effectué est négatif, car le champ s'oppose au mouvement le long de la courbe.

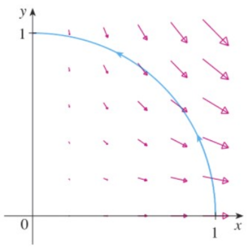


FIGURE 12

Par conséquent, le travail effectué est

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t\,\sin t)\,dt$$

$$= 2\,\frac{\cos^3 t}{3}\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}.$$

NOTE Même si $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ et les intégrales par rapport à l'abscisse curviligne ne changent pas lorsque l'orientation est inversée, il reste vrai que

$$\int_{-C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

car le vecteur tangent unitaire $\vec{T}$ est remplacé par le même vecteur, mais de sens opposé lorsque C est remplacée par $-C$.

La figure 13 illustre la cubique gauche C de l'exemple 8 et quelques vecteurs de force en trois points de C.

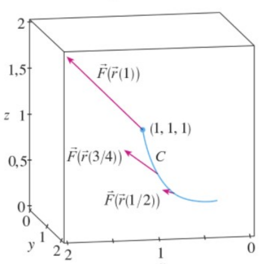


FIGURE 13

EXEMPLE 8 Calculons $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, où $\vec{F}(x, y, z) = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + zx\,\vec{k}$, et C est la cubique gauche définie par

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3 \qquad 0 \le t \le 1.$$

SOLUTION On a

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$$
$$\vec{r}\,'(t) = \vec{i} + 2t\,\vec{j} + 3t^2\,\vec{k}$$
$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = t^3\,\vec{i} + t^5\,\vec{j} + t^4\,\vec{k}.$$

Par conséquent,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\,dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\Big]_0^1 = \frac{27}{28}.$$

On termine cette section en établissant un lien entre les intégrales curvilignes des champs vectoriels et les intégrales curvilignes des champs scalaires. On suppose que le champ vectoriel $\vec{F}$ sur $\mathbb{R}^3$ est défini par $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$. Le calcul de l'intégrale curviligne de $\vec{F}$ le long de C, à l'aide de la définition 13, donne

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b \left(P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}\right)\cdot\left(x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}\right)dt$$
$$= \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\right]dt.$$

Mais cette dernière intégrale est précisément l'intégrale curviligne 10. Par conséquent,

$$\boxed{\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \quad \text{où} \quad \vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}.}$$

Par exemple, on pourrait exprimer $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ de l'exemple 6 sous la forme $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, où

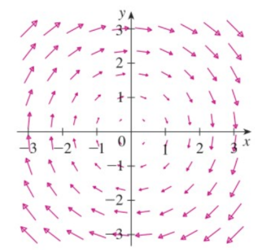
$$\vec{F}(x, y, z) = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + x\,\vec{k}.$$

Exercices 9.2

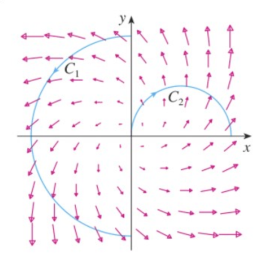
1-16 Calculez l'intégrale curviligne, où C est la courbe donnée.

1. $\int_C y\,ds$, $C: x = t^2$, $y = 2t$, $0 \le t \le 3$
2. $\int_C (x/y)\,ds$, $C: x = t^3$, $y = t^4$, $1 \le t \le 2$
3. $\int_C xy^4\,ds$, C est la moitié droite du cercle $x^2 + y^2 = 16$.
4. $\int_C xe^y\,ds$, C est le segment de droite allant de (2, 0) à (5, 4).
5. $\int_C (x^2 y + \sin x)\,dy$, C est l'arc de la parabole $y = x^2$ allant de (0, 0) à (π, π^2).
6. $\int_C e^x\,dx$, C est l'arc de la courbe $x = y^3$ allant de (–1, –1) à (1, 1).
7. $\int_C (x + 2y)\,dx + x^2\,dy$, C est constituée des segments de droites allant de (0, 0) à (2, 1) et de (2, 1) à (3, 0).
8. $\int_C x^2\,dx + y^2\,dy$, C est constituée de l'arc du cercle $x^2 + y^2 = 4$ entre les points (2, 0) et (0, 2) suivi du segment de droite allant de (0, 2) à (4, 3).
9. $\int_C x^2 y\,ds$, $C: x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le \pi/2$
10. $\int_C y^2 z\,ds$, C est le segment de droite allant de (3, 1, 2) à (1, 2, 5).
11. $\int_C xe^{yz}\,ds$, C est le segment de droite allant de (0, 0, 0) à (1, 2, 3).
12. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\,ds$, $C: x = t$, $y = \cos 2t$, $z = \sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$
13. $\int_C xye^{yz}\,dy$, $C: x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$
14. $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, $C: x = \sqrt{t}$, $y = t$, $z = t^2$, $1 \le t \le 4$
15. $\int_C z^2\,dx + x^2\,dy + y^2\,dz$, C est constituée des segments de droites allant de (1, 0, 0) à (4, 1, 2).
16. $\int_C (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz$, C est constituée des segments de droites allant de (0, 0, 0) à (1, 0, 1) et de (1, 0, 1) à (0, 1, 2).

17. Soit le champ vectoriel $\vec{F}$ représenté sur la figure.
    a) Si C_1 est le segment de droite vertical allant de (–3, –3) à (–3, 3), déterminez si $\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ est positive, négative ou nulle.
    b) Si C_2 est le cercle orienté dans le sens antihoraire, de rayon 3 et centré à l'origine, déterminez si $\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ est positive, négative ou nulle.



18. La figure représente un champ vectoriel $\vec{F}$ et deux courbes C_1 et C_2. Les intégrales curvilignes de $\vec{F}$ le long de C_1 et de C_2 sont-elles positives, négatives ou nulles ? Expliquez votre réponse.



19-22 Calculez l'intégrale curviligne $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, où C est paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$.