

# Intégrale impropre

①

Rappel :

Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue

1°)  $\int_a^b |f(x)| dx$  représente l'aire délimitée par le graphe de  $f$  et les droites  $x = a$  et  $x = b$

2°) Relation de Charles :

Pour tout  $c \in [a, b]$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3°) S'il existe une fonction différentielle  $F(x)$  telle que  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

La fonction  $F$  s'appelle une primitive de  $f$ .

Définition : On parle d'intégrale impropre si

- I) l'intervalle d'intégration n'est pas borné (type I)
- II)  $f$  est discontinue ou non bornée sur l'intervalle (type II)

Exemple :

1)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  est une intégrale impropre car la fonction  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  n'est pas bornée sur  $[0, 1]$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

2)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est une intégrale impropre car l'intervalle  $[1, +\infty[$  n'est pas borné.

Intégrale impropre de type I

Définition

a) Si  $f: [a, +\infty[$  est continue alors on définit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

Si  $f: ]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue alors on définit (3)

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

c) On dit que l'intégrale est convergente (ou converge) si la limite existe et est finie. Au cas contraire, on dit qu'elle est divergente (ou diverge).

Exemple

$$\begin{aligned} \bullet \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln|t| - 0 = +\infty \end{aligned}$$

L'intégrale est divergente.

• Soit  $p > 0$  avec  $p \neq 1$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 - \frac{1}{1-p} & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

(4)

L'intégrale est convergente si  $p > 1$  et divergente si  $p < 1$

## Intégrale impropre de type II

a) Si  $f$  est continue sur  $[a, b[$  et discontinue en  $b$  alors on définit  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$

b) Si  $f$  est continue sur  $]a, b]$  et discontinue en  $a$  alors on définit  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$

L'intégrale impropre  $\int_a^b f(x) dx$  est dite convergente si la limite qui la définit existe et divergente dans le cas contraire.

c) Si  $f$  a une discontinuité en  $c$ , où  $a < c < b$ , et si à la fois  $\int_a^c f(x) dx$  et  $\int_c^b f(x) dx$  sont convergentes alors on

definit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Exemple

1) Calculer  $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$

Solution

Il faut noter avant tout que cette intégrale est impropre car la fonction  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$  n'est pas définie au point  $x = 2$ .

On a une discontinuité au point  $x = 2$ .

On emploie la partie b) de la définition :

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx &= \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} 2\sqrt{x-2} \Big|_t^5 \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

L'intégrale est convergente.

2) Calculer si possible  $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$

(6)

### Solution

On observe que  $x = 1$  est une asymptote verticale de la fonction  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Puisque cette asymptote se situe à l'intérieur de l'intervalle  $[0, 3]$ , on doit faire appel à la partie c) de la définition :

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1} \quad \text{ou}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[ \ln|x-1| \right]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|) \end{aligned}$$

$$= -\infty \quad \text{parce que } 1-t \rightarrow 0^+ \text{ lorsque } t \rightarrow 1^-$$

Il en résulte que  $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$  est divergente et de là que

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} \text{ l'est aussi.}$$

## Attention :

A défaut d'avoir remarqué que la droite  $x=1$  est une asymptote verticale dans l'exemple précédent, on prendrait l'intégrale proposée comme une intégrale ordinaire et on mènerait alors erroneusement les calculs comme suit :

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Ce résultat est faux parce que l'intégrale est impropre et doit impérativement être calculée avec des limites.

## Test de comparaison pour les intégrales impropres

Théorème de comparaison : On suppose que  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues telles que  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  et pour  $x \geq a$ .

- a) Si  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  est convergente alors  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  est convergente
- b) Si  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  est divergente alors  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  est divergente

# Exemple

Démontrer que  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  est convergente.

## Solution

Il n'est pas possible de calculer cette intégrale directement car la fonction  $f(x) = e^{-x^2}$  n'a pas de primitive élémentaire.

On écrit d'abord

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$\rightarrow \int_0^1 e^{-x^2} dx$  est une intégrale ordinaire

$\rightarrow$  pour tout  $x \geq 1$ , on a

$$x^2 \geq x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-x}]_1^t = e^{-1}$$

par conséquent

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$$

Montrer que l'intégrale  $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$  est divergente

⑨

Solution

On a pour tout  $x \geq 1$

$$e^{-x} \geq 0$$

$$1+e^{-x} \geq 1$$

$$\frac{1+e^{-x}}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln|t| = +\infty \end{aligned}$$

et

$$\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

Donc l'intégrale  $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$  est divergente.