selon le théorème de Green. On remarque que l'intégrande de cette intégrale double est la divergence de $\vec{F}$, d'où la deuxième forme vectorielle du théorème de Green :

13
$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{F}(x, y)\, dA.$$

Selon cette version, l'intégrale curviligne de la composante normale de $\vec{F}$ le long de C est égale à l'intégrale double de la divergence de $\vec{F}$ sur la région D bornée par C.

Exercices 10.3

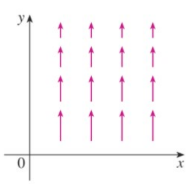
-8 Trouvez : a) le rotationnel et b) la divergence du champ ectoriel.

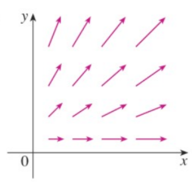
1. $\vec{F}(x, y, z) = xy^2z^2\vec{i} + x^2yz^2\vec{j} + x^2y^2z\vec{k}$
2. $\vec{F}(x, y, z) = x^3yz^2\vec{j} + y^4z^3\vec{k}$
3. $\vec{F}(x, y, z) = xye^z\vec{i} + yze^x\vec{k}$
4. $\vec{F}(x, y, z) = \sin yz\,\vec{i} + \sin zx\,\vec{j} + \sin xy\,\vec{k}$
5. $\vec{F}(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+z}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{y}}{1+x}\vec{j} + \dfrac{\sqrt{z}}{1+y}\vec{k}$
6. $\vec{F}(x, y, z) = \ln(2y+3z)\vec{i} + \ln(x+3z)\vec{j} + \ln(x+2y)\vec{k}$
7. $\vec{F}(x, y, z) = e^x \sin y\vec{i} + e^y \sin z\vec{j} + e^z \sin x\vec{k}$
8. $\vec{F}(x, y, z) = \arctan(xy)\vec{i} + \arctan(yz)\vec{j} + \arctan(zx)\vec{k}$

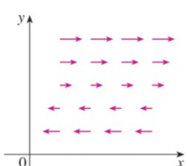
-11 Le champ vectoriel $\vec{F}$ est représenté dans le plan xy et est dentique dans tous les autres plans horizontaux. (Autrement lit, $\vec{F}$ est indépendant de z, et sa composante en z est nulle.)

) Est-ce que div $\vec{F}$ est positive, négative ou nulle ? Expliquez votre réponse.

) Déterminez si $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$. S'il n'est pas nul, dans quelle direction le vecteur rot $\vec{F}$ pointe-t-il ?

9.


10.


1.


12. Soit un champ scalaire f et un champ vectoriel $\vec{F}$. Déterminez si chacune des expressions suivantes a un sens. Si elle n'en a pas, expliquez pourquoi ; dans le cas contraire, déterminez s'il s'agit d'un champ scalaire ou d'un champ vectoriel.

a) $\operatorname{rot} f$ b) $\operatorname{grad} f$
c) $\operatorname{div} \vec{F}$ d) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$
e) $\operatorname{grad} \vec{F}$ f) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F})$
g) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ h) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} f)$
i) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F})$ j) $\operatorname{div}(\operatorname{div} \vec{F})$
k) $(\operatorname{grad} f) \times (\operatorname{div} \vec{F})$ l) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f))$

13-18 Déterminez si le champ vectoriel est conservatif. S'il l'est, trouvez une fonction f telle que $\vec{F} = \nabla f$.

13. $\vec{F}(x, y, z) = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}$
14. $\vec{F}(x, y, z) = xyz^4\vec{i} + x^2z^4\vec{j} + 4x^2yz^3\vec{k}$
15. $\vec{F}(x, y, z) = z\cos y\,\vec{i} + xz\sin y\,\vec{j} + x\cos y\,\vec{k}$
16. $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i} + \sin z\,\vec{j} + y\cos z\,\vec{k}$
17. $\vec{F}(x, y, z) = e^{yz}\vec{i} + xze^{yz}\vec{j} + xye^{yz}\vec{k}$
18. $\vec{F}(x, y, z) = e^x \sin yz\,\vec{i} + ze^x \cos yz\,\vec{j} + ye^x \cos yz\,\vec{k}$

19. Existe-t-il un champ vectoriel $\vec{G}$ sur $\mathbb{R}^3$ tel que
$$\operatorname{rot}\vec{G} = x\sin y\vec{i} + \cos y\vec{j} + (z - xy)\vec{k}\,?$$
Expliquez votre réponse.

20. Existe-t-il un champ vectoriel $\vec{G}$ sur $\mathbb{R}^3$ tel que
$$\operatorname{rot}\vec{G} = xyz\vec{i} - y^2z\vec{j} + yz^2\vec{k}\,?$$
Expliquez votre réponse.

21. Montrez que tout champ vectoriel de la forme
$$\vec{F}(x, y, z) = f(x)\vec{i} + g(y)\vec{j} + h(z)\vec{k},$$
où f, g et h sont des fonctions dérivables, est irrotationnel.

22. Montrez que tout champ vectoriel de la forme
$$\vec{F}(x, y, z) = f(y, z)\vec{i} + g(x, z)\vec{j} + h(x, y)\vec{k}$$
est incompressible.

23. Le champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i}$, où P est une fonction ayant des dérivées partielles continues, est tel que
$$\vec{F}(0, 0, 0) = \vec{0}$$
$$\operatorname{rot}\vec{F}(x, y, z) = 2\sin(z)\vec{j} - 3x^2\vec{k}$$
$$\operatorname{div}\vec{F} = 6xy.$$
Déterminez explicitement le champ $\vec{F}$ et calculez sa valeur au point $(1, -1, 0)$.

24. Soit le champ vectoriel
$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 + yz + 4y^2)\vec{i} + (y^2 + xz + 3xy)\vec{j} + (xy + z^2)\vec{k}.$$
Décomposez $\vec{F}$ en une somme $\vec{F} = \vec{G} + \vec{H}$, où $\vec{G}$ est irrotationnel et $\vec{H}$ est incompressible. (*Suggestion :* Trouvez d'abord une fonction f telle que $\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}\nabla f$.)

25-31 Démontrez l'identité en supposant que les dérivées partielles appropriées existent et qu'elles sont continues. Si f est un champ scalaire et si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont des champs vectoriels, alors $f\vec{F}$, $\vec{F} \cdot \vec{G}$ et $\vec{F} \times \vec{G}$ sont définis par
$$(f\vec{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\,\vec{F}(x, y, z)$$
$$(\vec{F} \cdot \vec{G})(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{G}(x, y, z)$$
$$(\vec{F} \times \vec{G})(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z) \times \vec{G}(x, y, z).$$

25. $\operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{div}\vec{G}$
26. $\operatorname{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{rot}\vec{G}$
27. $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$
28. $\operatorname{rot}(f\vec{F}) = f\operatorname{rot}\vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F}$
29. $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}\vec{G}$
30. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
31. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$

32-33 Soit $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $r = \|\vec{r}\|$.

32. Vérifiez chacune des identités.
a) $\nabla \cdot \vec{r} = 3$
b) $\nabla \cdot (r\vec{r}) = 4r$
c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

33. Vérifiez chacune des identités.
a) $\nabla r = \vec{r}/r$
b) $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$
c) $\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3$
d) $\nabla \ln r = \vec{r}/r^2$

34. Soit $\vec{F} = \vec{r}/r^p$. Trouvez div $\vec{F}$. Existe-t-il un nombre p pour lequel $\operatorname{div}\vec{F} = 0$?

35. Utilisez la forme du théorème de Green donnée à l'équation 13 pour démontrer la **première identité de Green** :
$$\iint_D f\nabla^2 g\, dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot \vec{n}\, ds - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g\, dA,$$

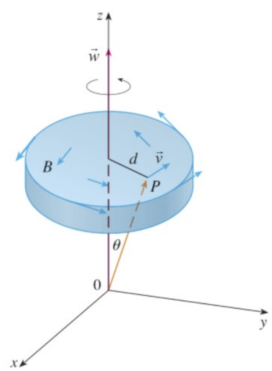
où D et C satisfont aux hypothèses du théorème de Gree et où les dérivées partielles appropriées de f et de g existen et sont continues. (La quantité $\nabla g \cdot \vec{n} = D_{\vec{n}} g$ qui apparaî dans l'intégrale curviligne est la dérivée dans la directio du vecteur normal $\vec{n}$ et est appelée **dérivée normale** de g.)

36. Utilisez la première identité de Green (voir l'exercice 35 pour démontrer la **deuxième identité de Green** :
$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \vec{n}\, ds,$$
où D et C satisfont aux hypothèses du théorème de Green e où les dérivées partielles appropriées de f et de g existen et sont continues.

37. Une fonction g est dite « harmonique » sur D si elle satisfa à l'équation de Laplace, autrement dit si $\nabla^2 g = 0$ sur D Utilisez la première identité de Green (avec les même hypothèses qu'à l'exercice 35) pour démontrer que si est harmonique sur D, alors $\oint_C D_{\vec{n}} g\, ds = 0$. Ici, $D_{\vec{n}} g$ est l dérivée normale de g définie à l'exercice 35.

38. Utilisez la première identité de Green pour démontrer qu si f est harmonique sur D et si $f(x, y) = 0$ sur la courb frontière C, alors $\iint_D \|\nabla f\|^2\, dA = 0$ (avec les mêmes hypo thèses qu'à l'exercice 35).

39. Cet exercice démontre l'existence d'un lien entre le vecteu rotationnel et les rotations. Soit un corps solide B tournan autour de l'axe des z. On peut décrire cette rotation par l vecteur $\vec{w} = \omega\vec{k}$, où ω est la vitesse angulaire de B, c'est-à dire la vitesse tangentielle de tout point P de B divisée pa la distance d à l'axe de rotation. Soit $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, l vecteur position de P.
a) En considérant l'angle θ de la figure, montrez que l champ de vitesses de B est $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$.
b) Montrez que $\vec{v} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$.
c) Montrez que $\operatorname{rot}\vec{v} = 2\vec{w}$.



40. On peut écrire de la façon suivante les équations de Maxwel établissant un lien entre le champ électrique $\vec{E}$ et le cham magnétique $\vec{H}$ lorsque ces derniers varient en fonctio