MAT 2784 A Devoir # 3

Dû le vendredi 25 Octobre.

Nom ____________ Solution ____________

Prénom ________________________

Numéro d'étudiant ________________________

- **SVP utilisez le format suivant pour soumettre votre devoir.**
- Vous pouvez utiliser l'endos des page si celle-ci ne vous suffisent pas.

Résoudre les équations différentielles à valeurs initiales suivantes:

1. **[3 points]** $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
2. **[3 points]** $x^2y'' - 3xy' + 8y = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 9$
3. **[3 points]** $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = 10$
4. **[3 points]** $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 24$
5. **[3 points]** $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = -3, \quad y'(1) = -7, \quad y''(1) = -9$

MAT 2784 A Devoir : #3 Solution

Euler-Cauchy

1. $\overbrace{x^2 y'' + 7xy' + 9y = 0}^{\text{Euler-Cauchy}}, \quad x>0, \quad y(1)=1, \; y'(1)=0$

l'éq$^{\underline{n}}$ caract. : $\quad m(m-1)+7m+9=0$

$\iff m^2+6m+9 = (m+3)^2=0 \implies m_1=m_2=-3$

$\therefore$ La s$^{\underline{n}}$ générale : $\quad y(x) = c_1x^{-3} + c_2x^{-3}\ln x$

$y(1)=1 \implies 1 = c_1(1)^{-3} + c_2(1)^{-3}\ln(1) \implies c_1 = 1$

$y'(x) = -3c_1x^{-4} - 3c_2x^{-4}\ln x + c_2x^{-4}$

$y'(1) = 0 \implies 0 = -3c_1(1)^{-4} - 3c_2(1)^{-4}\ln(1) + c_2(1)^{-4} \implies c_2 = 3$

$\therefore$ l'unique solution $\boxed{y(x) = x^{-3} + 3x^{-3}\ln x}$

---

2. $x^2y'' - 3xy' + 8y = 0, \quad x>0, \quad y(1)=3, \; y'(1)=9$

L'éq$^{\underline{n}}$ Carat : $\quad m(m-1) - 3m + 8 = m^2 - 4m + 8 = 0$

$\iff m_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(8)}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = 2 \pm 2i$

$\therefore$ La s$^{\underline{n}}$ générale : $\quad y(x) = c_1x^2\cos(2\ln x) + c_2x^2\sin(2\ln x)$

$y(1) = 3 \implies 3 = c_1(1)^2\cos(2\ln(1)) + c_2(1)^2\sin(2\ln(1)) \implies c_1 = 3$

$y'(x) = 2c_1x\cos(2\ln x) - 2c_1x\sin(2\ln x)$
$\quad + 2c_2x\sin(2\ln x) + 2c_2x\cos(2\ln x)$

$y'(1) = 9 \implies 9 = 2c_1(1)\cos(2\ln(1)) - 2c_1(1)\sin(2\ln(1))$
$\quad + 2c_2(1)\sin(2\ln(1)) + 2c_2(1)\cos(2\ln(1)) \implies c_2 = \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ L'unique solution $\boxed{y(x) = 3x^2\cos(2\ln x) + \tfrac{3}{2}x^2\sin(2\ln(x))}$

---

3. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0, \quad y(0)=1, \; y'(0)=-3, \; y''(0)=10$

L'éq$^{\underline{n}}$ caract. : $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0$

On peut voir que $\lambda=-2$ est une racine puis on trouve les deux autres

$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = (\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+4) = (\lambda+2)^3 = 0$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ et la s$^{\underline{n}}$ générale est :

$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3x^2e^{-2x}$

$y(0)=1 \Rightarrow 1 = c_1 e^0 + c_2(0)e^0 + c_3(0)^2 e^0 \Rightarrow c_1 = 1$

$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} - 2c_2 x e^{-2x} + 2c_3 x e^{-2x} - 2c_3 x^2 e^{-2x}$

$y'(0) = -3 \Rightarrow -3 = -2c_1 e^0 + c_2 e^0 - 2c_2(0)e^0 + 2c_3(0)e^0 - 2c_3(0)^2 e^0$

so $-3 = -2c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -1$

$y''(x) = 4c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-2x} + 4c_2 x e^{-2x} + 2c_3 e^{-2x}$
$- 8c_3 x e^{-2x} + 4c_3 x^2 e^{-2x}$

$y''(0) = 10 \Rightarrow 10 = 4c_1 e^0 - 4c_2 e^0 + 4c_2(0)e^0 + 2c_3 e^0 - 8c_3(0)e^0 + 4c_3(0)^2 e^0$

$\Rightarrow 10 = 4c_1 - 4c_2 + 2c_3 \Rightarrow c_3 = 1$

∴ L'unique solution : $\boxed{y(x) = e^{-2x} - x e^{-2x} + x^2 e^{-2x}}$

---

4. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0, \quad y(0)=1,\ y'(0)=-6,\ y''(0)=-1,\ y'''(0)=24$

L'éq. caract. : $\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2+1)(\lambda^2+4) = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i, \quad \lambda_{3,4} = \pm 2i$ et la sln générale est

(S.G): $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x)$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) + c_3\cos(0) + c_4\sin(0) \Rightarrow c_1 + c_3 = 1$ ①

$y'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x - 2c_3 \sin(2x) + 2c_4 \cos(2x)$

$y'(0) = -6 \Rightarrow -6 = -c_1\sin(0) + c_2\cos(0) - 2c_3\sin(0) + 2c_4\cos(0) \Rightarrow c_2 + 2c_4 = -6$ ②

$y''(x) = -c_1\cos x - c_2 \sin x - 4c_3\cos(2x) - 4c_4\sin(2x)$

$y''(0) = -1 \Rightarrow -1 = -c_1\cos(0) - c_2\sin(0) - 4c_3\cos(0) - 4c_4\sin(0) \Rightarrow -c_1 - 4c_3 = -1$ ③

$y'''(x) = c_1\sin x - c_2\cos x + 8c_3\sin(2x) - 8c_4\cos(2x)$

$y'''(0) = 24 \Rightarrow 24 = c_1\sin(0) - c_2\cos(0) + 8c_3\sin(0) - 8c_4\cos(0) \Rightarrow -c_2 - 8c_4 = 24$ ④

① + ③ $\Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = 1$

② + ④ $\Rightarrow -6c_4 = 18 \Rightarrow c_4 = -3 \Rightarrow c_2 = 0$

∴ L'unique solution $\boxed{y(x) = \cos(x) - 3\sin(2x)}$

A19
A3 ③

5. $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, $x > 0$, $y(1) = -3$, $y'(1) = -7$, $y''(1) = -9$

L'éq. caract. : $m(m-1)(m-2) - m(m-1) + 2m - 2 = 0$

$\iff (m-1)[m(m-2) - m + 2] = 0$

$\iff (m-1)(m^2 - 3m + 2) = (m-1)^2(m-2) = 0$

$\implies m_1 = m_2 = 1$ and $m_3 = 2$ et la sol. générale est :

$y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x^2$

$y(1) = -3 \Rightarrow -3 = c_1(1) + c_2(1)\ln(1) + c_3(1)^2 \Rightarrow c_1 + c_3 = -3$ ①

$y'(x) = c_1 + c_2 \ln x + c_2 + 2c_3 x$

$y'(1) = -7 \Rightarrow -7 = c_1 + c_2 \ln(1) + c_2 + 2c_3(1) \Rightarrow c_1 + c_2 + 2c_3 = -7$ ②

$y''(x) = c_2/x + 2c_3$

$y''(1) = -9 \Rightarrow -9 = c_2/1 + 2c_3 \Rightarrow c_2 + 2c_3 = -9$ ③

② − ③ $\Rightarrow c_1 = 2 \Rightarrow c_3 = -5 \Rightarrow c_2 = 1$

∴ L'unique solution $\boxed{y(x) = 2x + x\ln x - 5x^2}$

Résolvez les P.V.I. suivants:

6. **[5 points]** $y'' - 4y = 12e^{-x} + 8x - 16$, $y(0) = 10$, $y'(0) = 1$

7. **[5 points]** $y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x} + 40\cos x$, $y(0) = y'(0) = 10$

\# 6. • Éq. caract : $\lambda^2 - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 2$

• S.H : $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

• S.P. : On a $r(x) = 12e^{-x} + 8x - 16$ et donc une base pour D_r est $\{e^{-x}, x, 1\}$.

Donc on pose $y_p = ae^{-x} + bx + c \Longrightarrow y_p' = -ae^{-x} + b$ et $y_p'' = ae^{-x}$.

On substitue pour avoir : $ae^{-x} - 4(ae^{-x} + bx + c) = 12e^{-x} + 8x - 16$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a - 4a = 12 \\ -4b = 8 \\ -4c = -16 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$$. Donc $\boxed{y_p = -4e^{-x} - 2x - 4}$

• S.G. $\boxed{y_G = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - 4e^{-x} - 2x - 4} \Rightarrow \boxed{y_G' = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x} + 4e^{-x} - 2}$

• S.U : $y_G(0) = 10 \Longleftrightarrow C_1 + C_2 - 4 - 4 = 10$

$y_G'(0) = 10 \Longleftrightarrow -2C_1 + 2C_2 + 4 - 2 = 10$

$\Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 7 \\ C_2 = 11 \end{cases}$

D'où la S.U : $\boxed{y = 7e^{-2x} + 11e^{2x} - 4e^{-x} - 2x - 4}$

7. • Éq° Caract. : $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$

• S.H. : $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

• S.P. : $r(x) = 2e^{2x} + 40\cos x \Longrightarrow$ une base pour D_r est $\{e^{2x}, \cos x, \sin x\}$. Comme e^{2x} est une solution de l'EDOH associée, on utilise le mode en x.

Donc on pose $y_p = a x e^{2x} + b\cos x + c \sin x$.

$\Longrightarrow y_p' = a e^{2x} + 2ax e^{2x} - b\sin x + c\cos x$

et $y_p'' = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x} - b\cos x - c\sin x$
$= 4ae^{2x} + 4axe^{2x} - b\cos x - c\sin x.$

Substituez pour avoir

$$(4ae^{2x} + 4axe^{2x} - b\cos x - c\sin x) - 5(ae^{2x} + 2axe^{2x} - b\sin x + c\cos x) + 6(axe^{2x} + b\cos x + c\sin x) = 2e^{2x} + 40\cos x$$

Donc
$$\begin{array}{l|l} xe^{2x} & 4a - 10a + 6a = 0 \checkmark \\ e^{2x} & 4a - 5a = 2 \Longrightarrow \boxed{a = -2} \\ \cos x & -b - 5c + 6b = 40 \\ \sin x & -c + 5b + 6c = 0 \end{array} \Bigg\} \Longrightarrow \boxed{b = 4,\ c = -4}$$

Donc $y_p = -2xe^{2x} + 4\cos x - 4\sin x$

• S.G. : $y_G = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 2xe^{2x} + 4\cos x - 4\sin x.$

• S.U. : $y_G' = +2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} - 2e^{2x} - 4xe^{2x} - 4\sin x - 4\cos x.$

$$\begin{cases} y_G(0) = 10 \\ y_G'(0) = 10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 4 = 10 \\ 2C_1 + 3C_2 - 2 - 4 = 10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 4 \end{cases}$$

D'où la S.U. : $\boxed{y = 2e^{2x} + 4e^{3x} - 2xe^{2x} + 4\cos x - 4\sin x}$

8. **[5 points]** Trouvez les polynmes d'interpolation par splines de degré 3 aux frontières naturelles, $S_0(x)$ et $S_1(x)$, pour les points $\{(0,0),(1,-2),(2,-6)\}$.

$x_0\ f_0\ x_1\ f_1\ x_2\ f_2$

Soient $S_0(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3$ et $S_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3$

Alors on doit avoir. $\left(S_i'(x) = b_i + 2c_i x + 3d_i x^2,\ S_i''(x) = 2c_i + 6d_i x;\ i=0,1 \right)$.

$$\left.\begin{aligned}
&\cdot\ S_0(0) = 0\\
&\cdot\ S_0(1) = -2\\
&\cdot\ S_1(1) = -2\\
&\cdot\ S_1(2) = -6\\
&\cdot\ S_0'(1) = S_1'(1)\\
&\cdot\ S_0''(1) = S_1''(1)\\
&\cdot\ S_0''(0) = 0\\
&\cdot\ S_1''(2) = 0
\end{aligned}\right\}
\iff
\left\{\begin{aligned}
&\boxed{a_0 = 0}\\
&b_0 + c_0 + d_0 = -2\\
&a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = -2\\
&a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = -6\\
&b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 + 2c_1 + 3d_1\\
&2c_0 + 6d_0 = 2c_1 + 6d_1\\
&2c_0 = 0 \iff \boxed{c_0 = 0}\\
&2c_1 + 12d_1 = 0
\end{aligned}\right.
\iff
\left\{\begin{aligned}
&a_0 = c_0 = 0\\
&b_0 + d_0 = -2\\
&a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = -2\\
&a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 =\\
&b_0 + 3d_0 - b_1 - 2c_1 - 3d_1 =\\
&6d_0 - 2c_1 - 6d_1 = 0\\
&2c_1 + 12d_1 = 0
\end{aligned}\right.$$

Résolvez le système pour avoir $b_0 = -\frac{3}{2},\ d_0 = -\frac{1}{2},\ a_1 = -1,\ b_1 = \frac{3}{2},\ c_1 =$ $d_1 = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\begin{aligned}
S_0(x) &= \frac{-3x - x^3}{2}\\
S_1(x) &= -1 + \frac{3}{2}x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3
\end{aligned}}$$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x_0 \ f_0 \quad x_1 \ f_1 \quad x_2 \ f_2$

9. **[5 points]** Utilisez les points $\{(1.5, 4.2), (2.5, 6.6), (3.5, 7.3)\}$ (et les formules vues en classe) pour éstimer les valeurs de la dérivée de la fonction f en un point x.

Ici $h = 1$ ~~Donc~~ $x_0 = 1.5$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 3.5$. Donc

$$f_0' \simeq p_2'(1.5) = \frac{1}{2(1)}\left(-3(4.2) + 4(6.6) - (7.3)\right) = \boxed{3.25}$$

$$f_1' \simeq p_2'(2.5) = \frac{1}{2(1)}\left(-4.2 + 7.3\right) = \boxed{1.55}$$

$$f_2' \simeq p_2'(3.5) = \frac{1}{2(1)}\left(4.2 - 4(6.6) + 3(7.3)\right) = \boxed{-0.15}$$