① Le Travail

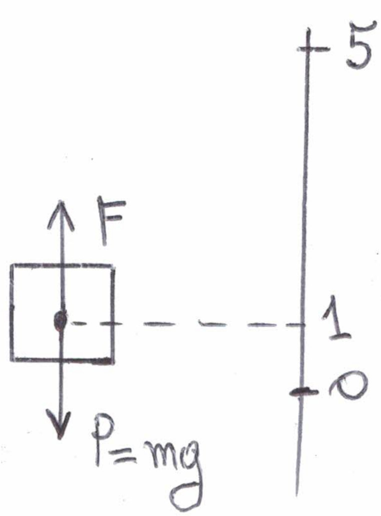
Une force F est appliquée à un objet parallèlement à son déplacement. Si la force F est constante et si la distance parcourue est d alors le travail ~~par~~ effectué par cette force est $W = Fd$ (Travail = force × distance)

Unités dans le système international (SI) :

distance en m (mètre)
masse en Kg (Kilogramme)
temps en s (seconde)
force en $Kg.m/s^2 = N$ (Newton)
Travail en $N.m = J$ (Joule)

Exemple 1

On soulève une masse de 10 Kg de 1m à 5m. Quel est le travail effectué ?



Solution : Il faut exercer une force F égale au poids de la masse

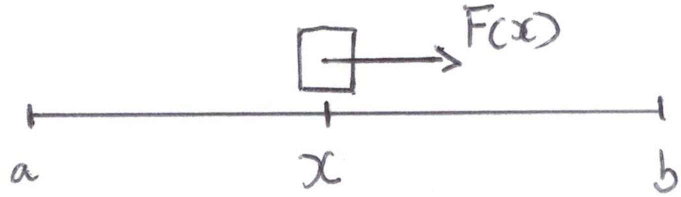
$F = mg \simeq 10 \times 9.8 = 98\, N$

où $g = 9.8 m/s^2$ est l'accélération due à la gravité à la surface de la terre

$\Rightarrow$ travail $W = Fd = 98(5-1) = 98 \times 4 = 392 J$

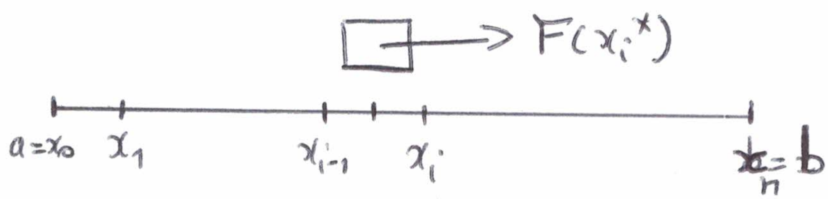
Problème

Soit un objet qui se déplace de $x = a$ à $x = b$. On ~~supposons~~ suppose que la force de déplacement dépende de la position x de l'objet. Calculer le travail effectu



Solution

1°) On choisit une partition de $[a,b]$ en n sous-intervalles $[x_0,x_1], [x_1,x_2], \ldots, [x_{n-1},x_n]$ de même longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$



Alors $W = \sum_{i=1}^{n} W_i$ où W_i = travail effectué entre les points x_{i-1} et x_i

$$W_i \simeq F(x_i^*)\Delta x \text{ où } x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

2°) Lorsqu'on fait tendre $n \to \infty$ alors $\Delta x \to 0$ et on trouve

$$\boxed{W = \int_a^b F(x)\,dx}$$

Exemple

Une force $F(x) = x^2 + 2x$ est appliquée à un objet lorsqu'il se trouve à x mètres (m) de l'origine. Quel est le travail effectué si l'objet se déplace de $x = 1$ à $x = 3$?

Solution

$$W = \int_1^3 F(x)\,dx = \int_1^3 (x^2+2x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 \Big]_1^3 = \frac{50}{3}\,J$$

Loi de Hooke

Pour étirer un ressort de x mètres depuis sa position de repos, il faut exercer une force $F = kx$ où k est une constante (appelée la constante du ressort).

a) Position naturelle du ressort   b) Position étirée du ressort

Exemple

Un ressort a une longueur naturelle de 15 cm. Lorsqu'il est soumis à une traction de 30 N, il passe de 15 cm à 30 cm. Calculer le travail requis pour l'étirer de 15 cm à 35 cm.

Solution

On va d'abord chercher la force $F(x)$

Attention !!! : on doit convertir les cm en m

$$F = kx$$

On sait que pour $x = (30-15)\,cm = 15\,cm = 0{,}15\,m$

alors $F = 30$. D'où $k = \dfrac{30}{0{,}15} = 200.$

Donc $F(x) = 200x$

Quand on étire le ressort de 15 cm à 35 cm alors ~~alors~~ x va de 0 jusqu'à $(35-15)\,cm = 20\,cm = 0{,}2$

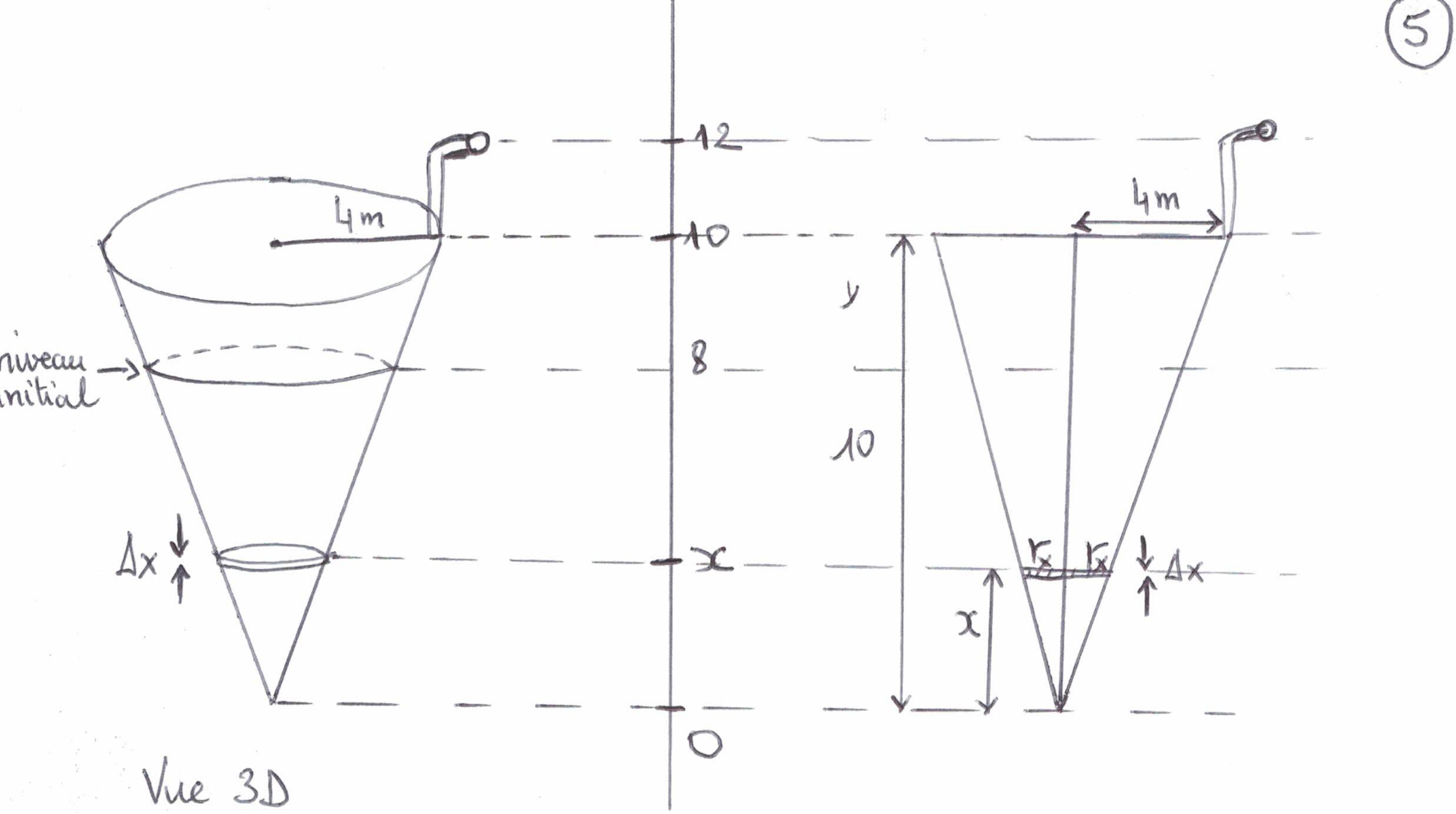
Travail requis est $W = \int_0^{0.2} F(x)\,dx = \int_0^{0.2} 200x\,dx = 4J$

Exemple

Un réservoir a la forme d'un cône de 10 m de hauteur et de 4 m de rayon, avec la pointe en bas. Il est rempli d'eau jusqu'à 8 m. Calculer le travail requis pour pomper toute l'eau à 2 m au dessus du réservoir.

~~Solution~~ On donne la densité de l'eau $\rho = 1000\,kg/m^3$ et l'accélération gravitationnelle $g = 9.8\,m/s^2$.

Solution



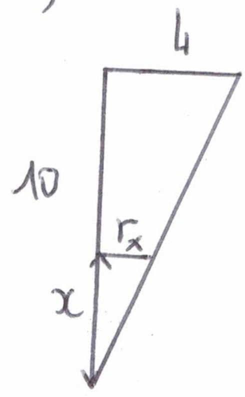
Soit x la hauteur mesurée depuis la pointe du réservoir.
Le volume d'une couche mince d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$ est

$$\Delta V \simeq \text{surface} \times \Delta x$$

$\simeq \pi r_x^2 \Delta x$ où r_x est le rayon du réservoir à la hauteur x

D'après la loi des triangles semblables, on a

$$\frac{r_x}{x} = \frac{4}{10} \Rightarrow r_x = \frac{2x}{5}$$



(triangles semblables)

D'où $\Delta V = \pi\left(\frac{2x}{5}\right)^2 \Delta x = \frac{4\pi x^2}{25}\Delta x$ (6)

Le poids de cette couche d'eau est

$$\Delta P = mg = \Delta V \rho g = \frac{4\pi x^2}{25}\Delta x\,(1000)(9.8)$$

$$= \frac{9800(4\pi)x^2}{25}$$

Le travail requis pour l'élever à 2m au dessus du reservoir est

$$\Delta W = \Delta P \times \text{distance}$$
$$= \frac{9800(4\pi)x^2}{25}\Delta x \cdot (12 - x)$$

Le travail total requis est donc

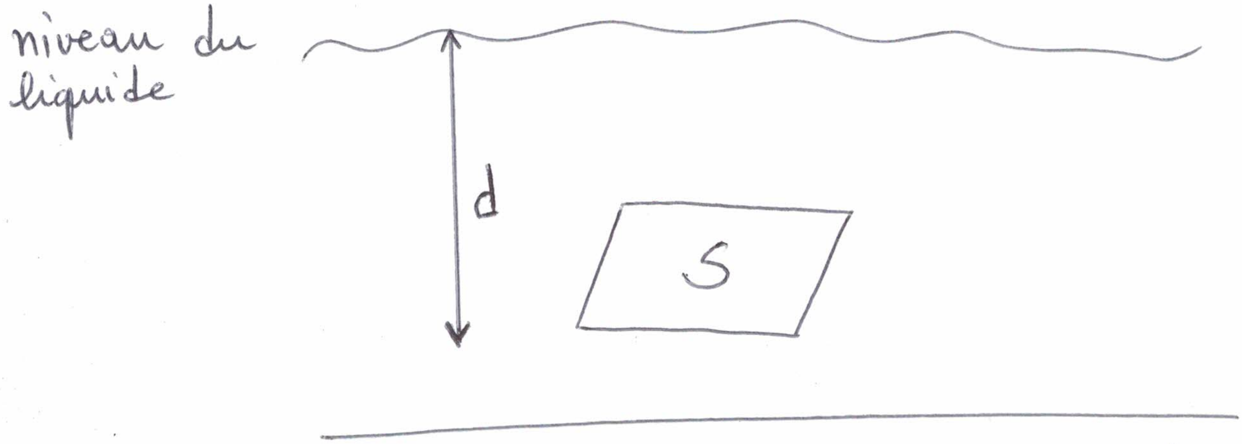
$$W = \int_0^8 \frac{4\times 9800\pi x^2}{25}(12 - x)\,dx$$

$$= \int_0^8 \frac{4\times 9800\pi}{25} x^2(12-x)\,dx = \frac{9800\pi}{25}\int_0^8 (12x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \frac{4\times 9800\pi}{25}\left(4x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big]_0^8 = 5.04\,10^6 \text{ J.}$$

2) Pression et force hydrostatique

- De façon générale, on envisage une fine plaque horizontale de surface S m^2 immergée dans un liquide de densité ρ Kg/m^3 à d m sous la surface



- Le volume de liquide situé au-dessus de la plaque est $V = Sd$ et sa masse est $m = \rho V = \rho S d$

- La force exercée par ce liquide sur la plaque est

$$F = mg = \rho S d g$$

- La pression P sur la plaque est définie comme la force par unité de surface

$$P = \frac{F}{S} = \rho g d$$

• L'unité SI de pression est le Newton par mètre carré
aussi appelé le Pascal (Pa).

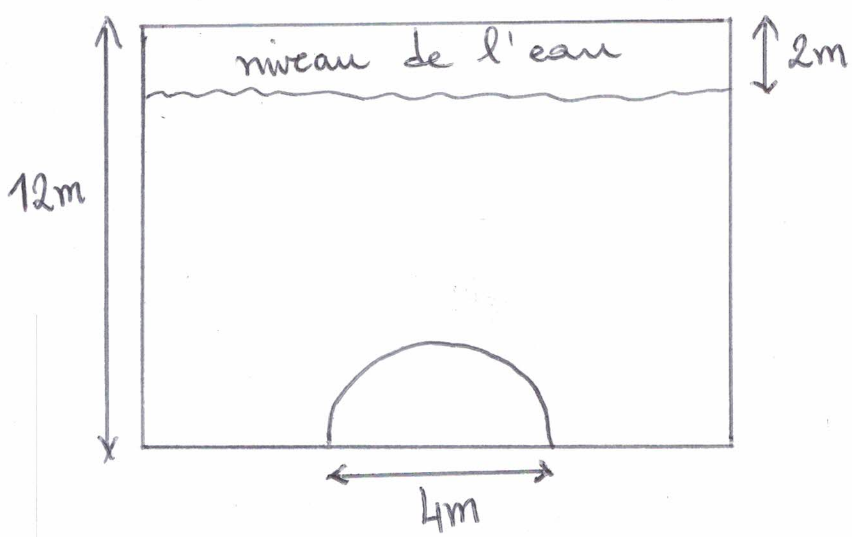
$$Pa = N/m^2$$

Principe

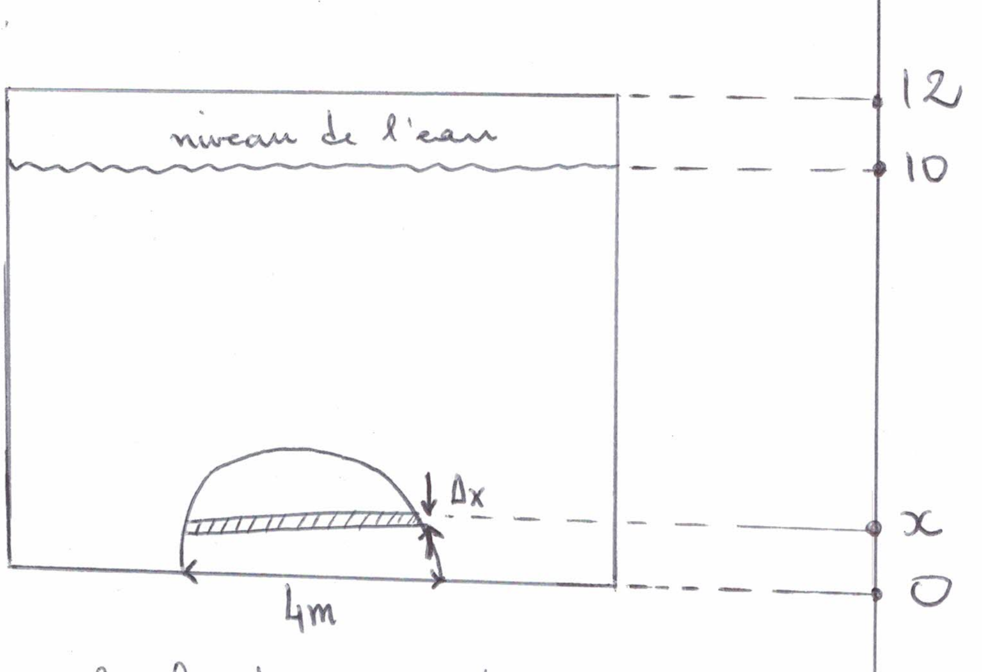
En tout point d'un liquide au repos, la pression est la même dans toutes les directions.

Exemple

Une digue verticale est percée d'une porte semi-circulaire comme le montre la figure. Déterminer la force hydrostatique qui s'exerce contre la porte



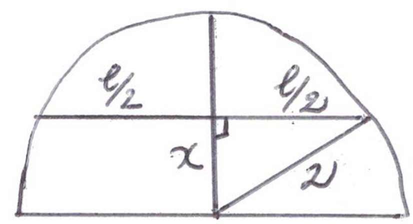
Solution



Soit x la hauteur mesurée à partir de la base de la digue
Soit l la largeur de la porte à la hauteur x. Alors on a

$$(2)^2 = x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$l = 2\sqrt{4-x^2}$$



. La surface de la portion de porte entre les hauteurs x et $x+\Delta x$ est $\Delta S = l\,\Delta x = 2\sqrt{4-x^2}\,\Delta x$

. La force hydrostatique sur cette portion de porte est

$$\Delta F = \rho \Delta S\, d\, g = \rho g \Delta S\, d = 1000(9.8)\, 2\sqrt{4-x^2}\,\Delta x (10-x)$$

. La force totale est

$$\cancel{\int_0^2 F(x)\,dx =}\ F = \int_0^2 \left(1000(9.8)\, 2\sqrt{4-x^2}\,(10-x)\right) dx$$

$$F = \int_0^2 1000\,(9.8)\left(2\sqrt{4-x^2}\,(10-x)\right)dx$$

$$= 10000\,(9.8)\int_0^2 2\sqrt{4-x^2}\,dx - 1000\,(9.8)\int_0^2 2x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 98000\,\underbrace{\int_0^2 2\sqrt{4-x^2}\,dx}_{=\text{ aire du demi-cercle}} - 9800\,\underbrace{\int_0^2 2x\sqrt{4-x^2}\,dx}_{=\int_4^0 -\sqrt{u}\,du}$$

$= \text{aire du demi-cercle}$

$= 2\pi$

$$= \int_4^0 -\sqrt{u}\,du \qquad (u = 4 - x^2)$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\,du = 16/3$$

$$F = 5.63.10^5\ N$$