

Université d'Ottawa
Faculté de génie

École de science informatique
et de génie électrique



uOttawa

L'Université canadienne
Canada's university
CSI2110/CSI2510

Algorithmes et Structures de données

Examen Final

Durée: 3 heures

Décembre, 2015

Professeur: Robert Laganière

Page 1 of 15

Prénom:

Solution

Nom:

Numéro d'étudiant:

Signature:

Aucune documentation permise

Répondre sur le questionnaire.

Aucun appareil électronique permis,
sauf une simple calculatrice non-programmable.

Page	Nombre de Points
PAGE 2	sur 4
PAGE 3	sur 6
PAGE 4	sur 6
PAGE 5	sur 4
PAGE 6	sur 2
PAGE 7	sur 4
PAGE 8	sur 4
PAGE 9	sur 3
PAGE 10	sur 4
PAGE 11	sur 2
PAGE 12	sur 3
PAGE 13	sur 5
PAGE 14	sur 3
TOTAL	50

Question 1 [2 points] Quelle est la complexité d'exécution des algorithmes décrits ci-dessous en termes de la notation *Grand O*? Toujours donner le meilleur estimé en fonction de n , le nombre de données d'entrées.

Algorithm AlgoI(A)

Soit A un tableau de dimension n

```
for i ← 0 to (n - 1) do
  for j ← 0 to n/2 do
    A[i] ← j*j
  end for
end for
```

- a) $O(n \log n)$ **b) $O(n^2)$** c) $O(n^3)$ d) $O(2^n)$ e) $O(n)$ f) $O(\log n)$

Algorithm AlgoII(A)

Soit A un tableau de dimension n

```
for i ← 0 to (n * n) do
  for j ← 0 to i do
    A[j mod n] ← j + A[j mod n]
  end for
end for
```

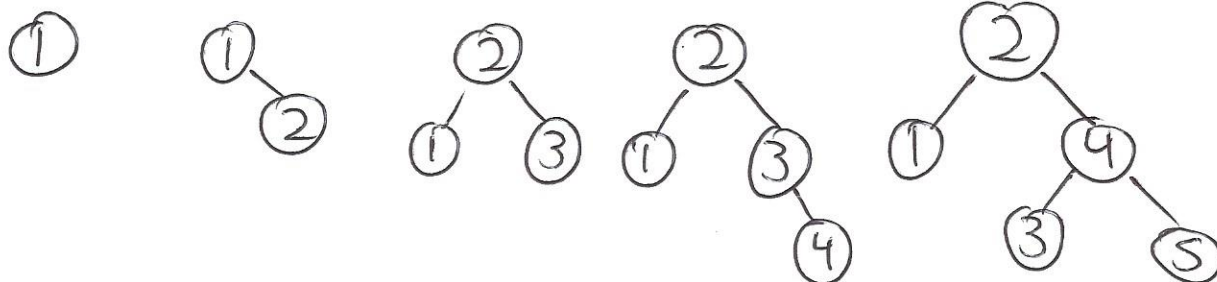
- a) $O(n \log n)$ b) $O(n^2)$ **c) $O(n^4)$** d) $O(2^n)$ e) $O(j \bmod n)$ f) $O(n2^n)$

Question 2 [2 points] Quel est la complexité au pire cas en termes *Grand O* de l'insertion d'un nouvel élément dans la structure de données suivante (en fonction de n le nombre d'éléments dans cette structure):

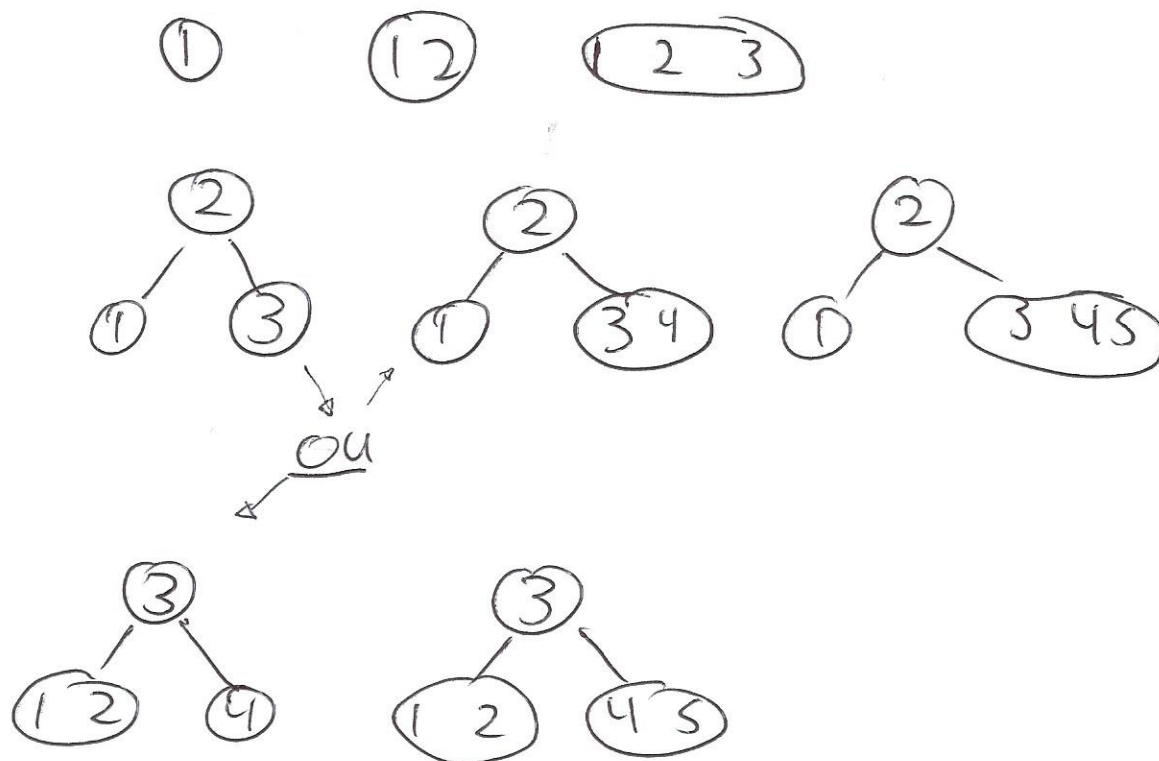
1. Une liste doublement chaine non trié
a) $O(1)$ b) $O(\log n)$ c) $O(n)$ d) $O(n \log n)$
2. Un arbre binaire de recherche AVL
a) $O(1)$ **b) $O(\log n)$** c) $O(n)$ d) $O(n \log n)$
3. Une table de hachage avec sondage linéaire:
a) $O(1)$ b) $O(\log n)$ **c) $O(n)$** d) $O(n \log n)$
4. Un arbre 2-4:
a) $O(1)$ **b) $O(\log n)$** c) $O(n)$ d) $O(n \log n)$

Question 3 [6 points]

1. (3 points) Insérer, dans cet ordre, les clés 1, 2, 3, 4, 5 dans un arbre AVL initialement vide. Dessiner la structure de l'arbre après chaque insertion.



2. (3 points) Insérer, dans cet ordre, les clés 1, 2, 3, 4, 5 dans un arbre 2-4 initialement vide. Dessiner la structure de l'arbre après chaque insertion.

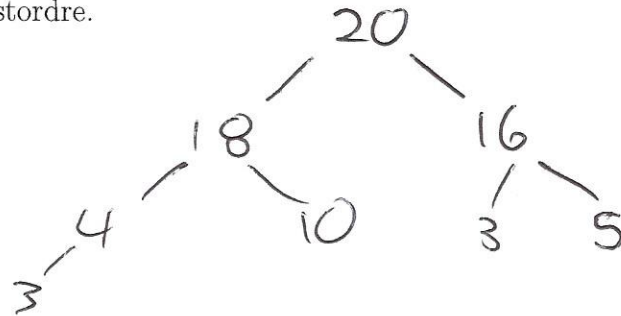


Question 4 [6 points] Soit le tableau A suivant représentant un monceau-max:

Index i :	1	2	3	4	5	6	7	8
$A[i]$:	20	18	16	4	10	3	5	3

1. (2 points) Dessiner la structure de l'arbre binaire correspondant puis donner le parcours préordre, inordre, postordre.

Dessin de l'arbre:



Parcours préordre:

20 18 4 3 10 16 3 5

Parcours inordre:

3 4 18 10 20 3 16 5

Parcours postordre:

3 4 10 18 3 5 16 20

2. (2 points) Quel sera le contenu de A après avoir effectué le retrait de l'élément maximum (**removeMax()**).

Index i :	1	2	3	4	5	6	7
$A[i]$:	18	10	16	4	3	3	5

3. (2 points) Quel sera le contenu de A après avoir effectué l'insertion de la clé **19** sur l'arbre original A tel que montré plus haut.

Index i :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A[i]$:	20	19	16	18	10	3	5	3	4

Question 5 [2 points] Une table de hachage de taille 15 a été construite en utilisant un hachage avec sondage quadratique en appliquant la formule suivante $h_j(k) = (k + j^2) \bmod 15$ où j représente le j ème sondage (débutant à $j = 0$). Insérer la clé 33 et montrer l'état de la table après cette insertion.

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Value	21	16		48	79		36	81		24	10		33	28	44

$$(33) \% 15 = 3$$

$$(33 + 1) \% 15 = 4$$

$$(33 + 4) \% 15 = 7$$

$$(33 + 9) \% 15 = 12$$

Question 6 [2 points] Une table de hachage de taille 13 a été construite en utilisant la fonction de hachage $h(k) = k \bmod 13$ et un sondage linéaire pour la résolution des collisions.

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Value		27	14			31	58	57	34	135			

1. Quel est le facteur de charge de cette table de hachage?

$$\frac{7}{13} = 0.5385$$

2. Selon vous, est-ce que la clé 57 a été insérée avant ou après la clé 58? Justifier votre réponse.

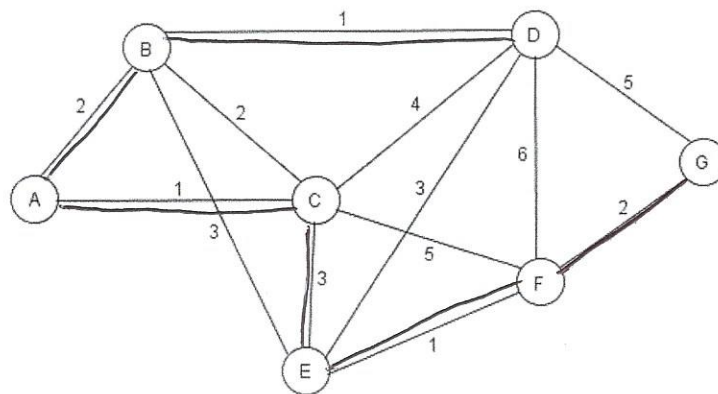
pos 5

pos 6

57 après 58

Question 7 [5 points] Soit le graphe ci-dessous et soit la liste d'adjacence. Considérant l'ordre dans lequel les noeuds apparaissent dans cette liste d'adjacence et en partant du sommet A,

Node	list of adjacent nodes
A	B C
B	A C D E
C	A B D E F
D	B C E F G
E	B C D F
F	C D E G
G	D F



1. (1 point) donner, dans l'ordre, les sommets qui seront visités par une recherche en profondeur;

Re'cursif : A B C D E F G

avec Pib : A C F G D E B

2. (1 point) donner, dans l'ordre, les sommets qui seront visités par une recherche en largeur.

A B C D E F G

3. (4 points) Utiliser l'algorithme de Dijkstra afin de trouver l'arbre des plus courts chemins à partir du noeud A pour le graphe de la page précédente. Remplir le tableau ci-dessous afin de montrer l'évolution des valeurs de distances associées aux noeuds en cours d'exécution. Vous pouvez ajouter des rangées à ce tableau.

New vertex	A	B	C	D	E	F	G	New Edge
A	0	2	1	∞	∞	∞	∞	A - C
C		2		5	4	6	∞	A - B
B				3	4	6	∞	B - D
D					4	6	8	C - E
E						5	8	E - F
F							7	F - G
G								

Question 8 [4 points]

Soit un algorithme qui effectue une Partition des éléments d'une liste S en utilisant une valeur pivot P et produisant trois listes L , E et G pour lesquelles les éléments de L sont les éléments de S strictement plus petits que le pivot P , les éléments de E sont les éléments de S égaux au pivot P , et les éléments de G sont les éléments de S strictement plus grands que le pivot P .

Vous utilisez Partition à l'intérieur de l'algorithme Quicksort (le tri rapide) afin de trier la liste $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$. Le pivot est choisi au hasard pour chaque appel à Partition. En supposant que les appels récursifs à Quicksort s'arrêtent lorsque la liste à trier contient 0 ou 1 élément...

- combien d'appels à Partition seront requis *au pire cas* afin de trier cette liste? Bien justifier votre réponse.
- combien d'appels à Partition seront requis *au meilleur cas* afin de trier cette liste? Bien justifier votre réponse.

Pire Cas:

8

11	22	33	44	55	66	77	88	99	Pivot
11	22	33	44	55	66	77	88		
11	22	33	44	55	66	77			
11	22	33	44	55	66				
11	22	33	44	55					
11	22	33	44						
11	22	33							
11	22								
11									
11									

Meilleur cas

5

11	22	33	44	55	66	77	88	99
11	22	33	44		66	77	88	99
11	22					77	88	99
11							88	99

Question 9 [3 points] Soit le tableau A suivant avec $n = 10$ éléments:

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Clé	2	4	58	10	19	17	22	77	54	67

Ce tableau est trié avec l'algorithme de *tri à bulle* (bubble sort) montré ci-dessous. Montrer l'état du tableau à la fin de chaque tour de la boucle `while`.

```

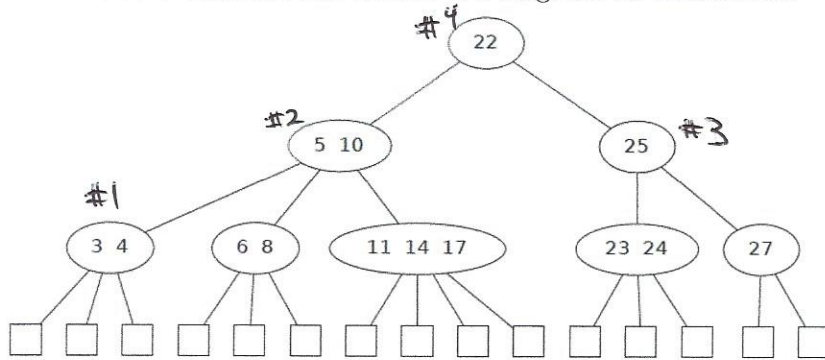
j = 0
swapped = true
while (swapped) {
    swapped = false
    j = j+1
    for i=0 to n-j-1 {
        if A[i].key > A[i+1].key {
            tmp= A[i]
            A[i]= A[i+1]
            A[i+1]= tmp
            swapped = true
        }
    }
}

// ** montrer l'etat du tableau ici
}

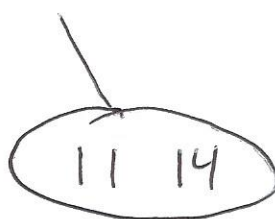
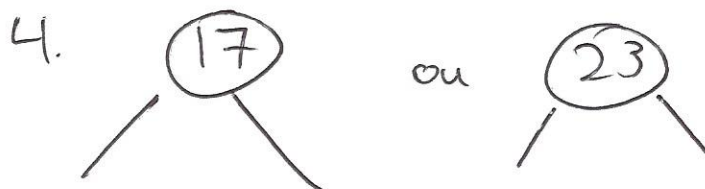
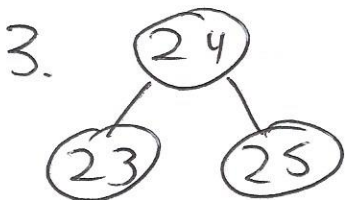
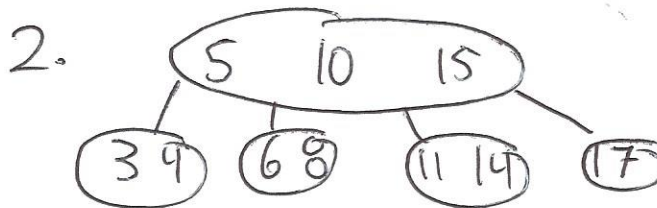
```

2 4 10 19 17 22 58 54 67 77
 2 4 10 17 19 22 54 58 67 77
 2 4 10 17 19 22 54 58 67 77

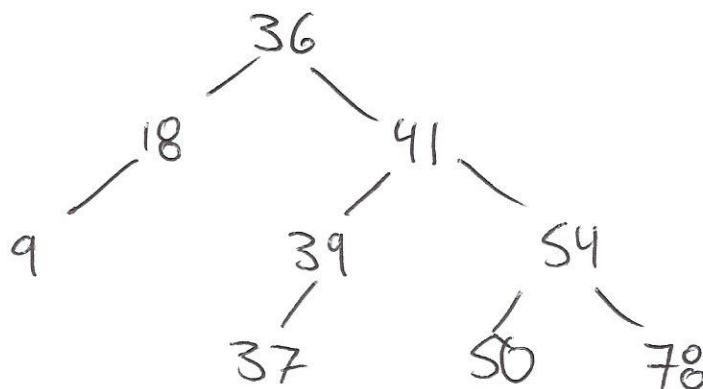
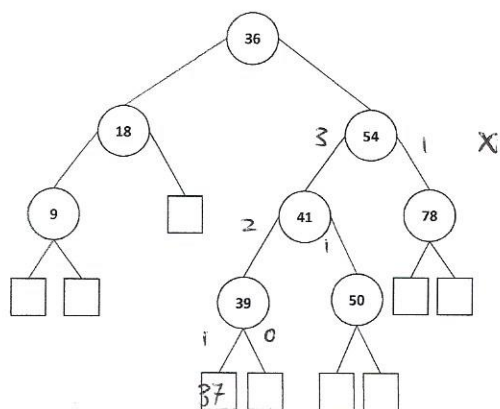
Question 10 [4 points] Les questions qui suivent sont indépendantes; les opérations demandées doivent donc être effectuée sur l'arbre 2-4 original tel montré ici.



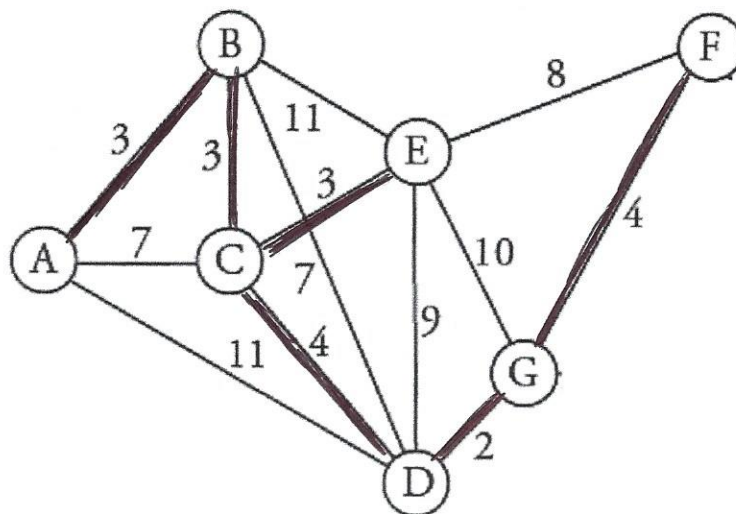
1. (1 point) Insérer 2 dans cet arbre et montrer l'arbre résultant.
2. (1 point) Insérer 15 dans cet arbre et montrer l'arbre résultant.
3. (1 point) Retirer 27 de l'arbre ci-dessus et montrer l'arbre résultant.
4. (1 point) Retirer 22 de l'arbre ci-dessus et montrer l'arbre résultant.



Question 11 [2 points] Insérer la clé 37 dans l'arbre AVL ci-dessous en utilisant l'algorithme montré en classe et montrer l'arbre résultant.



Question 12 [3 points] Pour le graphe ci-dessous, utiliser l'algorithme de Kruskal afin de trouver l'arbre couvrant minimal (voir le rappel sur les algorithmes ACM à la fin de l'examen).



1. Donner la liste des arêtes dans l'ordre où elles seront choisies afin de faire partie de l'arbre couvrant.

DG, AB, BC, CE, CD, GF

2. Quel est le poids total de cet arbre couvrant?

$$3 + 3 + 3 + 4 + 2 + 4 = 19$$

3. Quelle est la complexité de l'algorithme de Kruskal en fonction du nombre de sommets n et du nombre d'arêtes m ?

$$(n+m) \log n$$

Question 13 [5 points]

Vrai ou Faux:

1. L'arbre couvrant d'un graphe connexe G connecte tous les sommets de G .
☒ VRAI ☐ FAUX
2. Un arbre couvrant minimum pour lequel la racine est le sommet u représente le plus court chemin entre u et tous les autres sommets du graphe.
☐ VRAI ☒ FAUX
3. L'algorithme de Kruskal pour trouver une forêt couvrante minimum suppose que le graphe est connexe.
☐ VRAI ☒ FAUX
4. Un graphe régulier constitué de n sommets de degré 4 possède $4n$ arêtes
☐ VRAI ☒ FAUX
5. Dans le parcours en largeur d'un graphe connexe, les sommets et arêtes explorés (i.e. marqués VISITED et EXPLORED) forment un arbre couvrant.
☒ VRAI ☐ FAUX

Question 14 [3 points] On veut utiliser l'algorithme de recherche en profondeur DFS afin de compter le nombre de composantes connexes dans un graphe. Le pseudo-code ci-dessous présente le code d'un algorithme classique de recherche en profondeur. Modifier cet algorithme de façon à ce qu'il retourne le nombre de composantes connectées.

Pseudocode (algorithme à modifier)

Algorithm DFS(G)

 Entre graphe G

 Sortie etiquetage des aretes de G comme aretes decouvertes ou de retour

 Pour tous les sommets u de G

 setLabel(u, UNEXPLORED)

 Pour toutes les aretes e de G

 setLabel(e, UNEXPLORED)

 Pour tous les sommets v de G

 Si getLabel(v) = UNEXPLORED

 DFS(G, v)

Algorithm DFS(G, v)

 Entre graphe G et un sommet de debut v de G

 Sortie etiquetage des aretes de G a partir de v

 setLabel(v, VISITED)

 Pour toutes les aretes e de G.incidentEdges(v)

 Si getLabel(e) = UNEXPLORED {

 w= opposite(v,e)

 Si getLabel(w) = UNEXPLORED {

 setLabel(e, DISCOVERY)

 DFS(G, w)

 } sinon

 setLabel(e, BACK)

 }

Appendice

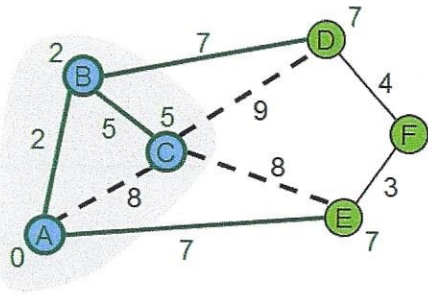


Figure 1: Algorithme de Prim-Jarnik en action

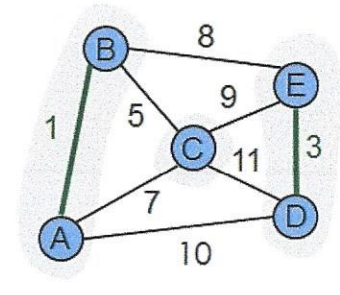


Figure 2: Algorithme de Kruskal en action

Pseudocode pour Dijkstra (pour référence seulement)

Algorithme Dijkstra(G, v): // plus courts chemins

Entree: un graphe pondere G et un sommet v .

Sortie: une etiquette $D[u]$, pour chaque sommet u de G , tel que $D[u]$ est la longueur du plus court chemin de v a u dans G .

$D[v] = 0$ et $D[u] = \text{INFINI}$ pour chaque sommet $u \neq v$

Soit Q une file a priorite utilisant D comme cles.

tant que $!Q.\text{estVide}()$ faire

$u = Q.\text{retireMinElement}()$

 pour chaque sommet z adjacent a u tel que z est dans Q faire

 si $D[u] + w((u, z)) < D[z]$ alors

$D[z] = D[u] + w((u, z))$

 Change la cle de z dans Q pour $D[z]$

retourner les etiquette $D[u]$ de chaque sommet u .