45. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x,y)\, dy\, dx$ **46.** $\int_0^1 \int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x,y)\, dy\, dx$

47-52 Calculez l'intégrale en inversant l'ordre d'intégration.

47. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$ **48.** $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y} \sin y\, dy\, dx$

49. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3+1}\, dy\, dx$

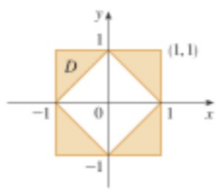
50. $\int_0^2 \int_{y/2}^1 y \cos(x^3-1)\, dx\, dy$

51. $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx\, dy$

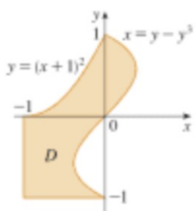
52. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\, dx\, dy$

53-56 Exprimez D comme une union de régions de type I ou de type II et calculez l'intégrale.

53. $\iint_D x^2\, dA$



54. $\iint_D y\, dA$



55. $\iint_D xy\, dA$, où D est le quadrilatère de sommets (0, 0), (2, 2), (4, 1) et (1, −2).

56. $\iint_D x\, dA$, où D est bornée par les courbes $y=-2x$, $y=x-1$ et $y=5-x^2$.

57-58 Estimez l'intégrale à l'aide de la propriété 11.

57. $\iint_S \sqrt{4-x^2y^2}\, dA$, $S=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1, x \ge 0\}$

58. $\iint_T \sin^4(x+y)\, dA$, où T est le triangle borné par les droites $y=0$, $y=2x$ et $x=1$.

59-60 Calculez la valeur moyenne de f sur la région D.

59. $f(x,y)=xy$, D est le triangle de sommets (0, 0), (1, 0) et (1, 3).

60. $f(x,y)=x \sin y$, D est bornée par les courbes $y=0$, $y=x^2$ et $x=1$.

61. Démontrez la propriété 11.

62. En calculant une intégrale double sur une région D, on a obtenu la somme d'intégrales itérées :

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Dessinez la région D et exprimez l'intégrale double sous la forme d'une seule intégrale itérée avec l'ordre d'intégration inversé.

63. Évaluez l'intégrale $\iint_D (y\tan(x^2)+xe^{\cos(y)}+6)\, dA$, où $D=[1,1]\times[2,2]$. *Indice : vérifiez la symétrie du domaine D par rapport aux axes ainsi que la parité des fonctions.*

64. En utilisant la symétrie et la parité des fonctions, évaluez l'intégrale $\iint_D xy\sqrt{x^4+y^4}\, dA$, où D est le carré de sommets $(\pm 10, \pm 10)$.

65. Utilisez la symétrie pour évaluer $\iint_D xe^{y^2}\, dA$, où D est la région du demi-plan supérieur bornée par les courbes $x=y^2-4$, $x=4-y^2$ et $y=0$.

66. Soit D le rectangle $[-2,2]\times[0,2]$. Utilisez la symétrie pour montrer que $\iint_D \sin(x^3y^3)\, dA = 0$.

67. Expliquez pourquoi l'intégrale $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA$, où D est le disque $x^2+y^2 \le 4$, calcule le volume d'un solide. De quel solide s'agit-il ? Quelle est la valeur de cette intégrale ?

LCS **68.** Dessinez le solide borné par le plan $x+y+z=1$ et le paraboloïde $z=4-x^2-y^2$, puis calculez son volume. (À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, tracez les graphes, trouvez les équations des courbes qui bornent la région d'intégration et calculez l'intégrale double.)

6.3 LES COORDONNÉES POLAIRES

Un point dans le plan peut être représenté par un couple de nombres appelés «coordonnées». On utilise habituellement les coordonnées cartésiennes, qui sont les distances algébriques à partir de deux axes perpendiculaires. Dans cette section, nous décrivons un système de coordonnées dont l'invention est attribuée à Newton, appelé **système de coordonnées polaires**, plus pratique dans de nombreuses applications.