DEVOIR 9 - ELG 3555

GBEGBE DECAHO
300094197
UOTTAWA - W24

Question 1 :

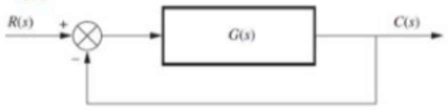
Dessinez le lieu d'Evans du système de rétroaction unitaire avec la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)^3(s+4)}$$

Sur votre diagramme, indiquez clairement ce qui suit:

a) Le nombre et l'emplacement des pôles
b) Directions des branches et le lieu d'Evans
c) Angle(s) d'asymptote(s)
d) Les point(s) de séparation

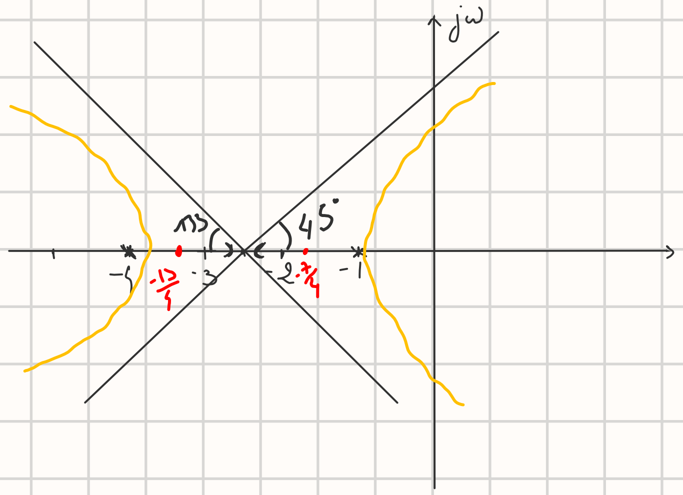
Rappel :



On a $(S+1)^3(S+4)$ au dénominateur, on peut en conclure qu'il y a un pôle triple et un pôle simple.

a) il y a 4 pôles.

$S+4 \to S_4 = -4$ $\quad \begin{cases} (S+1)(s+1)(s+1) \\ S_{1,2,3} = -1 \end{cases}$ $\quad \Big\}$ Zéro : $\infty, \infty, \infty, \infty$.



$$K = \frac{1}{|G(s)||H(s)|} = \frac{1}{|G(s)|} = (S+1)^3(S+4)$$

$$\frac{dK}{dS} = 3(S+1)^2(S+4) + (S+1)^3$$
$$= (S+1)^2[3(S+4) + S+1] = (S+1)^2[4S+13]$$

$$\Rightarrow \quad S = -1 \; ; \; S = -\frac{13}{4}$$

d) Les points de séparation sont $\boxed{\left\{ -\frac{13}{4} \; ; -1 \right\}}$

c) Trouvons les angles d'asymptotes

$$\sigma_a = \frac{\sum f_p - \sum f_z}{\# f_p - \# f_z} = \frac{(-3)(1) - 4}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$\theta_a = \frac{(2K+1)\pi}{\# f_p - \# f_z} = \frac{(2K+1)(180)}{4} \Rightarrow \begin{cases} \theta_a = \frac{(2(0)+1)(180)}{4} = 45^\circ & \text{pour } K=0 \\ \theta_{2a} = \frac{(2(1)+1)180}{4} = 135^\circ & \text{pour } K=1 \\ \theta_{3a} = \frac{(2(-1)+1)180}{4} = -45^\circ & \text{pour } K=-1 \\ \theta_{4a} = \frac{(2(-2)+1)180}{4} = -135 & \text{pour } K=-2 \end{cases}$$

Les angles d'asymptotes sont donc

$$\boxed{\theta = \left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4} ; -\frac{3\pi}{4} \right\}}$$

• Point de rencontre avec $j\omega$

$$1 + G(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{(s+1)^3(s+4)} = 0$$

$$\Rightarrow (s+1)^3(s+4) + K = (s+1)(s+1)^2(s+4) + K$$

$$\Rightarrow (s^2+2s+1)(s^2+5s+4) + K$$

$$\Rightarrow s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 13s + 4 + K = 0$$

en utilisant TR-H

s^4	1	15	$4+K$
s^3	7	13	0
s^2	$92/7$ 92	$7(4+K)$	0
s^1	$\frac{1196-49(4+K)}{92}$	0	0
s^0	$7(4+K)$	0	0

ROZ : $1196 - 49(4+K) = 0 \Rightarrow K = 20.41$

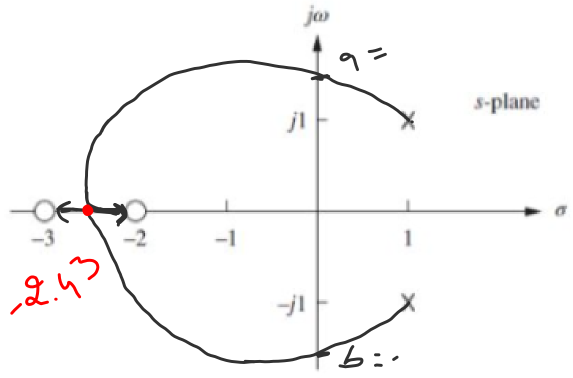
$$P(s) = 92s^2 + 28s + 7K + 28$$

$$\boxed{s = \pm j\, 1.36.}$$

Question 2 :

Considérez le tracé pôle-zéro en boucle ouverte illustré ci-dessous. En utilisant les pôles et les zéros localisés :

a) Dessinez le lieu d'Evans du système
b) Trouvez le point de jonction.
c) Trouvez la valeur du gain K à ce pont.



a) Dessinons le lieu d'Evans.

pôles : $1-j$; $1+j$

Zeros : -2 ; -3

b) Trouvons le point de jonction.

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{(s-(1-j))(s-(1+j))} = \frac{K(s+2)(s+3)}{s^2-2s+2}$$

$$K = \frac{1}{|G(s)||H(s)|} = \frac{s^2-2s+2}{(s+2)(s+3)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dK}{ds} = (2s-2)(s^2+5s+6) - (2s+5)(s^2-2s+2) \\ = 7s^2+8s-22 \end{array} \right.$$

$$\frac{d^2K}{ds^2} = d\left[\frac{7s^2+8s-22}{s^2-2s+2}\right]$$

$$= \frac{(14s+8)(s^2-2s+2)-(2s+2)(7s^2+8s-22)}{s^2-2s+2}$$

$$S_1 = \frac{-4+\sqrt{170}}{7} = 1.29$$

$$S_2 = \frac{-4-\sqrt{170}}{7} = -2.43$$

Le point de jonction se trouve au point $\boxed{-2.43}$

c) Trouvons la valeur du gain (K)

$$K = \frac{-(-2.43)^2-2(-2.43)+2}{(-2.43+2)(-2.43+3)} = \frac{-12.76}{-0.25} = 3.9$$

En boucle fermé, on a :

$$T(s) = \frac{K(s+3)(s+2)}{K(s^2+5s+6)+(s^2-2s+2)} \Rightarrow D(s) = (K+1)s^2 + (5K-2)s + 6K+2$$

En utilisant TR.

s^2	$K+1$	$6K+2$
s^1	$5K-2$	0
s^0	$6K+2$	0

ROZ $\Rightarrow$ $5K-2=0$

$$\boxed{K = \frac{2}{5}}$$

$$AP(s) = (K+1)s^2 + 6K+2$$
$$= \frac{7}{5}s^2 + \frac{22}{5}$$

$$\boxed{s = \pm i\sqrt{\frac{22}{7}}}$$