Complément du cours 12

Forme limite du test de comparaison

Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ soient des séries à termes positifs. Si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

où c est un nombre fini et $c > 0$, alors ou les deux séries convergent, ou les deux séries divergent

Exemple

Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

Solution :

On considère $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$ et $b_n = \frac{1}{2^n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est convergente alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ est convergente d'après la forme limite du test de comparaison.