SOLUTION Si une telle fonction f existe, alors

11 $$f_x(x, y, z) = y^2$$

12 $$f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$$

13 $$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z}.$$

L'intégration des deux membres de l'équation 11 par rapport à x donne

14 $$f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z),$$

où $g(y, z)$ est une fonction de y et z seulement, indépendante de x. La dérivation de l'équation 14 par rapport à y donne

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

et la comparaison avec l'équation 12 implique que

$$g_y(y, z) = e^{3z}.$$

Par conséquent, $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$, où h est une fonction de z seulement, indépendante de x et y. Selon l'équation 14, on a donc

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z).$$

Finalement, en dérivant cette expression par rapport à z et en comparant avec l'équation 13, on obtient $h'(z) = 0$ et donc $h(z) = K$, une constante. La fonction potentielle cherchée est

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K.$$

On vérifie facilement que $\nabla f = \vec{F}$.

LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

On peut appliquer les idées de cette section à un champ de forces continu $\vec{F}$ qui déplace un objet le long d'un chemin C défini par $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, où $\vec{r}(a) = A$ est le point initial et $\vec{r}(b) = B$ est le point terminal de C. Selon la deuxième loi du mouvement de Newton (voir la section 8.4), la force $\vec{F}(\vec{r}(t))$ en un point sur C est liée à l'accélération $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$ par l'équation

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{r}''(t).$$

Le travail effectué par la force sur l'objet est donc

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt = \int_a^b m\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]\, dt && \text{(théorème 3, section 8.2, formule 4)} \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \|\vec{r}'(t)\|^2\, dt = \frac{m}{2} \left[\|\vec{r}'(t)\|^2 \right]_a^b && \text{(théorème fondamental du calcul)} \\ &= \frac{m}{2} \left(\|\vec{r}'(b)\|^2 - \|\vec{r}'(a)\|^2 \right). \end{aligned}$$

On obtient donc

15 $$W = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}(a)\|^2,$$

où $\vec{v} = \vec{r}'$ est la vitesse.

La quantité $K(t) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(t)\|^2$, la moitié du produit de la masse par le carré de la vitesse scalaire, est appelée **énergie cinétique** de l'objet. On peut donc réécrire l'équation 15 sous la forme

16 $$W = K(B) - K(A).$$

Le travail effectué par le champ de forces le long de C est donc égal à la variation de l'énergie cinétique aux extrémités de C.

De plus, si $\vec{F}$ est un champ de forces conservatif, il existe une fonction f telle que $\vec{F} = \nabla f$. En physique, l'**énergie potentielle** d'un objet au point (x, y, z) est, par définition, $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, donc $\vec{F} = -\nabla P$. Par le théorème 2, on a alors

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\vec{r} = -[P(\vec{r}(b)) - P(\vec{r}(a))] = P(A) - P(B).$$

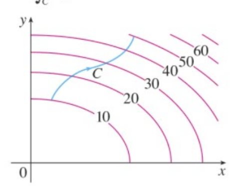
La comparaison de cette équation avec l'équation 16 montre que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B).$$

Selon cette égalité, si un objet se déplace d'un point A à un point B sous l'influence d'un champ de forces conservatif, alors la somme de son énergie potentielle et de son énergie cinétique demeure constante. Ce résultat est appelé **loi de conservation de l'énergie** et justifie pourquoi le champ vectoriel est qualifié de «conservatif».

Exercices 9.3

1. La figure présente une courbe C et un diagramme de courbes de niveau d'une fonction f dont le gradient est continu. Trouvez $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$.



2. Le tableau donne les valeurs d'une fonction f dont le gradient est continu. Trouvez $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$, où C est paramétrée par

$$x = t^2 + 1 \qquad y = t^3 + t \qquad 0 \le t \le 1.$$

x \ y	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3-10 Déterminez si $\vec{F}$ est un champ vectoriel conservatif ou non. Si oui, trouvez une fonction f telle que $\vec{F} = \nabla f$.

3. $\vec{F}(x, y) = (xy + y^2)\vec{i} + (x^2 + 2xy)\vec{j}$

4. $\vec{F}(x, y) = (y^2 - 2x)\vec{i} + 2xy\,\vec{j}$

5. $\vec{F}(x, y) = y^2 e^{xy}\,\vec{i} + (1 + xy)e^{xy}\,\vec{j}$

6. $\vec{F}(x, y) = ye^x\,\vec{i} + (e^x + e^y)\vec{j}$

7. $\vec{F}(x, y) = (ye^x + \sin y)\vec{i} + (e^x + x \cos y)\vec{j}$

8. $\vec{F}(x, y) = (2xy + y^{-2})\vec{i} + (x^2 - 2xy^{-3})\vec{j},\ y > 0$

9. $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$

10. $\vec{F}(x, y, z) = 2xy\,\vec{i} + \left(x^2 + z\cos(yz)\right)\vec{j} + y\cos(yz)\,\vec{k}$

11. Trouvez la fonction potentielle de
$$\vec{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\,\vec{i} + (3x^2y^2 + x/y)\,\vec{j}$$
qui vaut 3 au point (1, 1).

12. Trouvez la fonction potentielle de
$$\vec{F}(x, y) = (xy \cosh xy + \sinh xy)\,\vec{i} + (x^2 \cosh xy)\,\vec{j}$$
qui vaut –2 au point (0, 0).