Revision (Test 2) :

· Exples : 1°/ Résoudre le P.V.I. :

$$y'' + 4y = \cos(2x) \quad , \quad y(0) = 1 \; , \; y'(0) = -1$$

l'espace des dérivées de $r(x)$.

Solution : Ici $r(x) = \cos(2x) \Rightarrow$ une base pour D_r est

$$\{\cos(2x), \sin(2x)\}$$

$\left(r'(x) = -2\sin(2x) \, ; \, r''(x) = -4\cos(2x) \right)$

$$r^{(n)}(x) = \begin{cases} k\cos(2x) \\ k\sin(2x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dim D_r = 2 < \infty .$$

M C I

(On applique la méthode des coéfficients indéterminés car

1- L'ÉDO est à coéfficients constants ; et

2- D_r est de dimension finie.)

N.B. : La méthode de variation des paramètres est toujours valide (universelle) !

1. Éq. caract. : $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i = \overline{\lambda_2}$ ($\Rightarrow \lambda_2 = -2i$)
$(\alpha = 0,\ \beta = 2)$

2. S.H. : $\boxed{y_h = C_1 e^{0x}\cos(2x) + C_2 e^{0x}\sin(2x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)}$

(Si on veut utiliser la MVP, alors on prend pour base pour Ker L $\{\cos(2x) = y_1,\ \sin(2x) = y_2\} \Rightarrow W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.)

~~$y_p = a\cos(2x) + b\sin(2x)$~~

3. S.P. : (On utilisera la MCI) Ici une base pour D_r est $\{\cos(2x), \sin(2x)\}$.
Mais $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ sont des solutions de l'EDOH associée. Donc applique le mode en x. On pose alors $\boxed{y_p = a\,x\cos(2x) + b\,x\sin(2x)}$

$$\Rightarrow \quad y'_p = a\cos(2x) - 2ax\sin(2x) + b\sin(2x) + 2bx\cos(2x)$$

$$\text{et } y''_p = -\cancel{2}4a\sin(2x) - 4ax\cos(2x) + 4b\cos(2x) - 4bx\sin(2x)$$

On substitue dans l'EDO et on compare les coéfficients de $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $x\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ pour trouver a et b.

$$\left(-4a\sin(2x) - 4ax\cos(2x) + 4b\cos(2x) - 4bx\sin(2x)\right) + 4\left(ax\cos(2x) + bx\sin(2x)\right) = \cos(2x) + 0\sin(2x)$$

$$\begin{array}{ll} x\cos(2x) & \left\{\begin{array}{l} -4a + 4a = 0 \quad \checkmark \end{array}\right. \\ x\sin(2x) & \quad -4b + 4b = 0 \quad \checkmark \\ \cos(2x) & \quad 4b = 1 \\ \sin(2x) & \quad -4a = 0 \end{array} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1/4 \end{cases}$$

Donc $\boxed{y_p = \frac{1}{4}x\sin(2x)}$

4. S.G. : $\boxed{y_G = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{1}{4}x\sin(2x)}$

5. S.U. Ex :

1- Si $y_p = a\cos(2x) + b\sin(2x) \Rightarrow y_p' = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$

$$y_p'' = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x).$$

$$\Rightarrow y_p'' + 4y_p = \left(\cancel{-4a\cos(2x)} \cancel{-4b\sin(2x)}\right) + 4\left(\cancel{a\cos(2x)} + \cancel{b\sin(2x)}\right)$$

$$= 0 = \cos(2x).$$ Contradiction !

Donc on applique le mode en x.

2- Résoudre : $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{r}(x)$, où $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{r}(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ x-1 \end{bmatrix}$.

- Valeurs propres : On a $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ sont les valeurs propres de A.

• **Vecteurs propres :** Pour $\lambda_1 = 1$: On résoud $\underbrace{(A-(1)I_2)\vec{x}=\vec{0}}$ (x_1, x_2)

On a : $[A - I_2 | \vec{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1-1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\text{ex}\ldots}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ ⟺ $\begin{cases} x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R} \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\quad x_1 \quad x_2 \quad \vec{0}$

Donc $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$. On prend $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

• **Vecteur propre généralisé :** On résoud $(A-(1)I_2)\vec{x} = \vec{v}_1$

$\Rightarrow [A - I_2 | \vec{v}_1] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\ldots}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$. On prend une valeur de x_2 telle que $\vec{x} \neq \vec{0}$. Par exple, pour $x_2 = 0$, on a $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

• S.H : $\boxed{\vec{y}_h = C_1 e^{1x}\vec{v}_1 + C_2 e^{1x}\begin{cases}(x\vec{v}_1+\vec{u}) \\ \cancel{(\vec{v}_1 + x\vec{u})}\end{cases}}$

• S.P. : Ici $\vec{r}(x) = \begin{bmatrix} 2 = r_1(x) \\ (x-1) = r_2(x) \end{bmatrix}$. Donc une base pour $D_{\vec{r}}$ est composée d'une base de D_{r_1} et d'une de D_{r_2} (omettre les répétitions). Ici une base pour D_{r_1} est $\{1\}$ et une base pour D_{r_2} est $\{1, x\}$ et donc une base pour $D_{\vec{r}}$ est $\{1, x\}$.

On pose $\vec{y}_p = \begin{bmatrix} ax + b(1) \\ cx + d(1) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{y}_p\,' = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$. Puis on substitue dans $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{r}(x)$. On a : $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ax+b \\ cx+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ x-1 \end{bmatrix}$ $\left(\vec{y}_p = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+b+2 \\ -(ax+b)+(cx+d)+x-1 \end{bmatrix}$$

et on compare les coéfficients de 1 et x dans chaque composantes.

$$\begin{array}{l} 1 \\ x \\ 1 \\ x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = b+2 \Rightarrow b=-2 \\ \boxed{0 = a} \\ c = -b+d-1 \Rightarrow d=-2 \\ 0 = -a+c+1 \Rightarrow c=-1 \end{array} \right.$$

Donc $\vec{y}_p = \begin{bmatrix} -2 \\ -x-2 \end{bmatrix}$

• S.G : $\boxed{\vec{y}_G = \vec{y}_h + \vec{y}_p}$

Exples de D_f de dimension infinie :

1/ $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{+2}{x^3}, \dots$

$$f^{(n)}(x) = k\, x^{-(n+1)}$$

On ne peut exprimer $f^{(n)}(x)$ en fonction d'une liste finie de fonctions.

2/ $f(x) = \sec(x) \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$

$f^{(n)}(x) \dots$

$\cos(ax)$, $\sin(ax)$, e^{ax}, polynômes, produits et sommes de ces fonctions (xe^{x})