**27.** $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y + 2y$

**28.** $f(x, y) = y^6 - 2y^4 + x^2 - y^2 + y$

**29.** $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3x^2 + y^2 + x - 2y + 1$

**30.** $f(x, y) = 20e^{-x^2-y^2} \sin 3x \cos 3y, |x| \leq 1, |y| \leq 1$

---

**31-38** Trouvez le maximum absolu et le minimum absolu de $f$ dans le domaine $D$.

**31.** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, $D$ est la région triangulaire fermée de sommets $(2, 0)$, $(0, 2)$ et $(0, -2)$.

**32.** $f(x, y) = x + y - xy$, $D$ est la région triangulaire fermée de sommets $(0, 0)$, $(0, 2)$ et $(4, 0)$.

**33.** $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

**34.** $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6y$, $D = \{(x, y) \mid -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 5\}$

**35.** $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 1$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$

**36.** $f(x, y) = xy^2$, $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$

**37.** $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

**38.** $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, $D$ est le quadrilatère de sommets $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$ et $(-2, -2)$.

---

**39.** Une fonction continue d'une seule variable ne peut avoir deux maximums locaux et aucun minimum local. Cependant, de telles fonctions de deux variables existent. Montrez que la fonction

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

n'a que deux points critiques, mais qu'elle admet un maximum local en chacun. Ensuite, à l'aide d'un ordinateur, tracez un graphe en choisissant soigneusement le domaine et le point de vue pour voir comment cela est possible.

**40.** Si une fonction d'une variable est continue sur un intervalle et n'a qu'un point critique, alors un maximum local est nécessairement un maximum absolu. Toutefois, cet énoncé est faux pour les fonctions de deux variables. Montrez que la fonction

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

a exactement un point critique et que $f$ admet un maximum local qui n'est pas absolu. Ensuite, à l'aide d'un ordinateur, tracez le graphe de $f$ en choisissant soigneusement le domaine et le point de vue pour voir comment cela est possible.

**41.** Calculez la plus petite distance du point $(2, 0, -3)$ au plan $x + y + z = 1$.

**42.** Trouvez le point du plan $x - 2y + 3z = 6$ le plus proche du point $(0, 1, 1)$.

**43.** Trouvez les points du cône $z^2 = x^2 + y^2$ les plus proches du point $(4, 2, 0)$.

**44.** Trouvez les points de la surface $y^2 = 9 + xz$ les plus proches de l'origine.

**45.** Trouvez trois nombres positifs de somme égale à 100 et dont le produit est maximal.

**46.** Trouvez trois nombres positifs de somme égale à 12 et dont la somme des carrés est minimale.

**47.** Trouvez le volume maximal d'une boîte rectangulaire inscrite dans une sphère de rayon $r$.

**48.** Calculez les dimensions d'une boîte dont le volume est de $1000\ \text{cm}^3$ et dont la surface est minimale.

**49.** Calculez le volume de la plus grande boîte rectangulaire située dans le premier octant si trois de ses faces sont dans les plans de coordonnées et un de ses sommets est dans le plan $x + 2y + 3z = 6$.

**50.** Calculez les dimensions de la boîte rectangulaire de volume maximal dont la surface égale $64\ \text{cm}^2$.

**51.** Calculez les dimensions de la boîte rectangulaire de volume maximal si la somme des longueurs de ses 12 arêtes est une constante $c$.

**52.** La base d'un aquarium (ouvert vers le haut) de volume $V$ donné est en ardoise, et les côtés sont en verre. En sachant que par unité d'aire l'ardoise coûte cinq fois plus cher que le verre, calculez les dimensions de l'aquarium qui minimisent le coût des matériaux.

**53.** Le volume d'une boîte en carton, sans couvercle, doit être de $32\,000\ \text{cm}^3$. Calculez les dimensions qui minimisent la quantité de carton utilisée.

**54.** Un immeuble rectangulaire doit être conçu de façon à minimiser la perte de chaleur. Le taux de perte de chaleur des façades est et ouest est de 10 unités/m² par jour, celui des faces nord et sud de 8 unités/m² par jour, celui du plancher, de 1 unité/m² par jour, et celui du toit, de 5 unités/m² par jour. Chaque façade doit avoir une longueur minimale de 30 m et une hauteur minimale de 4 m, et le volume doit être exactement de $4000\ \text{m}^3$.

a) Déterminez et esquissez le domaine de la fonction de perte de chaleur en fonction des longueurs des côtés.

b) Calculez les dimensions qui minimisent la perte de chaleur. (Vérifiez les points critiques et les points sur la frontière du domaine.)

c) Pourriez-vous concevoir un immeuble qui perdrait moins de chaleur si les contraintes sur les longueurs des façades étaient enlevées ?

**55.** La longueur de la diagonale d'une boîte rectangulaire doit être $L$. Calculez son volume maximal.

**56.** Un modèle exprimant le rendement $Y$ d'une culture agricole en fonction du niveau d'azote $N$ et du niveau de phosphore $P$ dans le sol (mesurés en unités appropriées) est

$$Y(N, P) = kNPe^{-N-P}$$