Question 1 Séries de Fourier et filtrage **/20**

a) (/15) Considérez le signal suivant en temps continu, périodique de période $T = 2$, décrit sur une période comme étant :

$$x(t) = \begin{matrix} 1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t < 2 \end{matrix}.$$

Le signal est filtré par un système LTI ayant la réponse en fréquence suivante:

$$H(j\omega) = \begin{matrix} 0 & 0 \le |\omega| < 2.5\pi \\ 1 & 2.5\pi \le |\omega| \le 3.5\pi \\ 0 & |\omega| > 3.5\pi \end{matrix}.$$

Trouvez l'expression du signal de sortie $y(t)$.

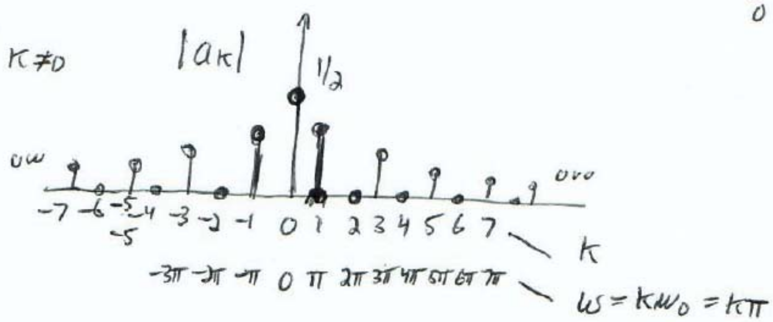
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-jk\pi t}\,dt = \frac{1}{2(-jk\pi)}\left[e^{-jk\pi t}\right]_0^1$$

$$a_k = -\frac{1}{j2k\pi}\left(e^{-jk\pi} - 1\right) = \frac{1-(-1)^k}{j2k\pi} \quad k \neq 0 \qquad k=0:\ a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 1\cdot dt = \frac{1}{2}\left[t\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$|a_k| = \frac{1-(-1)^k}{2k\pi} \quad k \neq 0$$

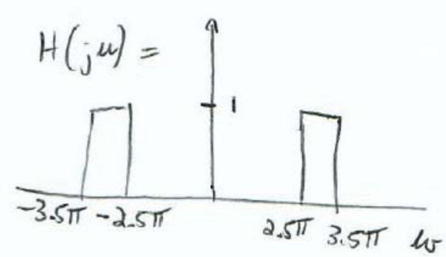
$$|a_k| = \frac{1}{2} \quad k = 0$$



$$a_{k\ OUTPUT} = a_{k\ INPUT} \cdot H(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

$(a_{y,k})$ $(a_{x,k})$

(b_k) (a_k)



a_k OUTPUT : $a_k = \dfrac{1}{j3\pi}$ $k=3$, $a_k = 0$ $k \neq 3, -3$

$a_k = -\dfrac{1}{j3\pi}$ $k = -3$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a_k}_{OUTPUT} e^{jk\pi t} = a_3 e^{j3\pi t} + a_{-3} e^{-j3\pi t} = \frac{1}{j3\pi} e^{j3\pi t} - \frac{1}{j3\pi} e^{-j3\pi t}$$

$$y(t) = \frac{2}{3\pi}\left(\frac{1}{2j} e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j3\pi t}\right) = \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t)$$

b) (/5) Trouvez l'expression des coefficients de la série de Fourier a_k pour le signal en temps discret périodique de période $N = 3$ qui est décrit sur une période par l'expression ci-dessous. Aussi, dessinez l'amplitude $|a_k|$ des coefficients, avec valeurs numériques.

$$x[n] = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ 1 & n=2 \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ 1 & n=2 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{3}x[0] + \frac{1}{3}x[1]\, e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{3}x[2]\, e^{-jk\frac{4\pi}{3}}$$

OR $\frac{1}{3}x[0] + \frac{1}{3}x[1]\, e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{3}x[-1]\, e^{jk\frac{2\pi}{3}}$

$a_k = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{3}e^{-jk\frac{4\pi}{3}}$ OR $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{3}e^{jk\frac{2\pi}{3}}$

$k=0,1,2$ AND PERIODIC $N=3$
(OR $k=-1,0,1$)

$a_0 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ $\quad a_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-j2\pi/3} + \frac{1}{3}e^{+j\frac{2\pi}{3}}$

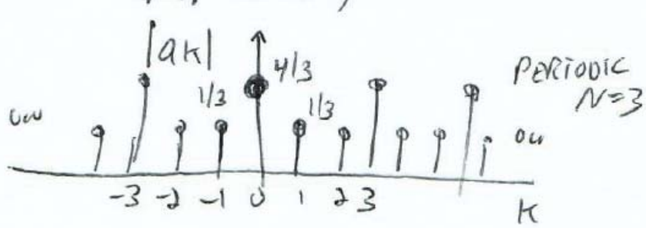
OR $\cancel{a_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-j\frac{4\pi}{3}} + \frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{3}}}$

$a_1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$a_1 = \frac{2}{3} + -\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$a_{-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{3}e^{-j\frac{2\pi}{3}}$
(OR a_2)
$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\underbrace{\cos\frac{2\pi}{3}}_{-1/2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

($|a_k| = a_k$ HERE)



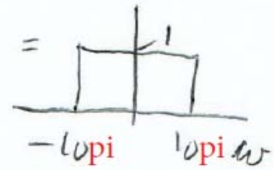
Question 2 Transformée de Fourier en temps continu et modulation d'amplitude /20

a) (/5) Le signal $x(t) = \dfrac{\sin(10\pi t)}{\pi t}$ est modulé par une modulation d'amplitude, en utilisant un signal cosinus (« porteuse », « carrier ») à la fréquence 1000 rad/sec. Dessinez l'amplitude de la transformée de Fourier du signal modulé résultant.

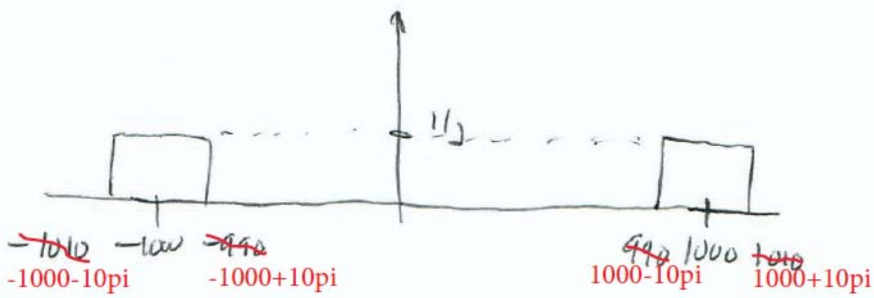
$$x_m(t) = x(t) \cdot c(t) = x(t) \cdot \cos(1000t)$$

$$X_m(j\omega) = \frac{1}{2} X(j(\omega - 1000)) + \frac{1}{2} X(j(\omega + 1000))$$

$X(j\omega) =$



$$|X_m(j\omega)| = X_m(j\omega) \text{ HERE}$$



b) (/5) Trouvez la transformée de Fourier du signal suivant: $x(t) = e^{-t}u(t+2) + \sin(2\pi t)$

$$e^{-t}u(t) \overset{F.T}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega + 1} \quad \Big\} \text{ TABLES}$$

$$e^{-(t+2)}u(t+2) \overset{F.T}{\longleftrightarrow} \frac{e^{j2\omega}}{j\omega + 1}$$

$$(= e^{-2} e^{-t} u(t+2))$$

$$e^{2} e^{-2} e^{-t} u(t+2) \overset{F.T}{\longleftrightarrow} \frac{e^{2} e^{j2\omega}}{j\omega + 1}$$

$$= e^{-t}u(t+2)$$

$$x_1(t) = \sin(2\pi t)$$

PERIODIC $\omega_0 = 2\pi$

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad \Big\} \text{ TABLES}$$

$$X_1(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X_1(j\omega) = 2\pi \left(\frac{1}{2j} \delta(\omega - 2\pi) - \frac{1}{2j} \delta(\omega + 2\pi) \right)$$

$$X_1(j\omega) = \frac{\pi}{j} \delta(\omega - 2\pi) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + 2\pi) \quad \Big\} \text{ ALSO AVAIL. IN TABLES}$$

$$X(j\omega) = \frac{e^{2} e^{j2\omega}}{j\omega + 1} + \frac{\pi}{j} \delta(\omega - 2\pi) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + 2\pi)$$

c) (/10) La sortie d'un système LTI décrit par:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+7\frac{d\ y(t)}{dt}+10y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+7\frac{dx(t)}{dt}+12x(t) \text{ (initialement au repos)}$$

est donnée par:

$$y(t)=e^{-2t}u(t)\ .$$

Trouvez le signal de l'entrée $x(t)$ qui a été appliquée à ce système.

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)^2+7(j\omega)+12}{(j\omega)^2+7(j\omega)+10}=\frac{(j\omega+3)(j\omega+4)}{(j\omega+2)(j\omega+5)}$$

$$Y(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}$$

$$X(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}=\frac{1}{\cancel{j\omega+2}}\cdot\frac{\cancel{(j\omega+2)}(j\omega+5)}{(j\omega+3)(j\omega+4)}=\frac{j\omega+5}{(j\omega+3)(j\omega+4)}$$

$$X(j\omega)=\frac{A}{j\omega+3}+\frac{B}{j\omega+4}\qquad A=\left.\frac{j\omega+5}{j\omega+4}\right|_{j\omega=-3}=\frac{2}{1}=2$$

$$B=\left.\frac{j\omega+5}{j\omega+3}\right|_{j\omega=-4}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$X(j\omega)=2\frac{1}{j\omega+3}-1\frac{1}{j\omega+4}$$

$$x(t)=2e^{-3t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$

Question 3 Transformée de Fourier en temps discret et systèmes LTI **/15**

a) (/10) Une entrée $x[n]$ est appliquée à un système LTI en temps discret, produisant un signal $y[n]$ observé à la sortie. Les expressions pour les signaux $x[n]$ et $y[n]$ sont:

$$x[n]=3\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n-1] \qquad\qquad y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+2\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]\ .$$

Trouvez les caractéristiques suivantes pour ce système LTI:

- la réponse en fréquence $H(e^{j\omega})$
- la réponse impulsionnelle $h[n]$
- l'équation de différences $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$.

$$X(e^{j\omega}) = 3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} - \frac{3}{4}e^{-j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{3-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \qquad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})+2(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} = \frac{3-\frac{5}{4}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{(3-\frac{5}{4}e^{-j\omega})\ (1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})\cdot\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(\text{[redacted]}-\frac{\text{[redacted]}}{4}e^{-j\omega})} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{C}{(\text{[redacted]}-\frac{\text{[redacted]}}{4}e^{-j\omega})^2}$$

$$A = \frac{(3-\frac{5}{4}\cdot 2)(1-\frac{1}{3}\cdot 2)\cdot\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{4}\cdot 2)^2} = \frac{2}{9} \qquad C = \frac{(3-\frac{5}{4}\cdot 4)(1-\frac{1}{3}\cdot 4)\cdot\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{2}\cdot 4)} = -\frac{2}{9}$$

$$A(1-\tfrac{1}{4}e^{-j\omega})^2 + B(1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\tfrac{1}{4}e^{-j\omega}) + C(1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = (3-\tfrac{5}{4}e^{-j\omega})(1-\tfrac{1}{3}e^{-j\omega})\cdot\tfrac{1}{3}$$

CONSTANT TERMS: $A+B+C=1 \rightarrow B = 1-A-C = 1$

$$\underbrace{\frac{(n+2-1)!}{n!(2-1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]}_{(n+1)(\frac{1}{4})^n u[n]} \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}$$

$$h[n] = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{2}{9}(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

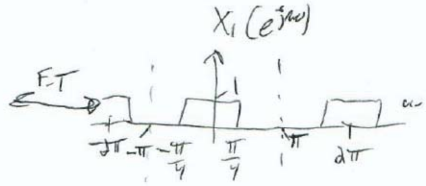
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{5}{36}e^{-j2\omega}}{1-e^{-j\omega}+\frac{5}{16}e^{-j2\omega}-\frac{1}{32}e^{-j3\omega}}$$

DIFF. EQ.: $y[n] - y[n-1] + \frac{5}{16}y[n-2] - \frac{1}{32}y[n-3] = x[n] - \frac{3}{4}x[n-1] + \frac{5}{36}x[n-2]$

b) (/5) Trouvez la transformée de Fourier $X(e^{j\omega})$ du signal en temps discret suivant :

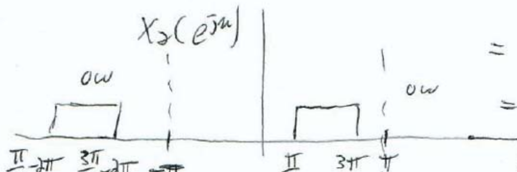
$$x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}(n-4)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-4)\right)}{\pi(n-4)}.$$

$$x_1[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n} \overset{F.T}{\longleftrightarrow}$$



$$X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \pi \\ \text{PERIODIC } 2\pi \end{cases}$$

$$x_2[n] = e^{j\frac{\pi}{2}n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n} \overset{F.T}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega}) = X_1(e^{j(\omega - \frac{\pi}{2})})$$



$$X_2(e^{j\omega}) \begin{cases} = 1 & \frac{\pi}{4} < \omega < \frac{3\pi}{4} \\ = 0 & -\pi < \omega < \frac{\pi}{4} \\ = 0 & \frac{3\pi}{4} < \omega < \pi \\ \text{PERIODIC } 2\pi \end{cases}$$

$$x[n] = x_2[n-4] \overset{F.T}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega} X_2(e^{j\omega})$$

$$= e^{-j4\omega} \quad \frac{\pi}{4} < \omega < \frac{3\pi}{4}$$

$$= 0 \quad -\pi < \omega < \frac{\pi}{4}$$

$$= 0 \quad \frac{3\pi}{4} < \omega < \pi$$

PERIODIC 2π

Question 4 Filtrage, formes standards et diagrammes de Bode **(/15)**

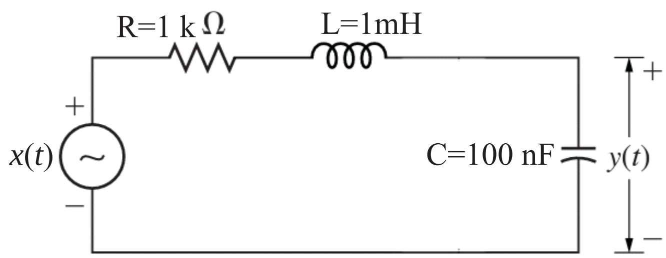
1) Le circuit suivant peut être modélisé par un système LTI d'ordre deux avec la forme passe-bas standard.

a. (**/3**) Écrivez l'équation différentielle qui caractérise ce système (en utilisant les variables *R*, *L*, *C*, sans valeurs numériques)

b. (**/3**) Trouvez la réponse en fréquence du système (en utilisant les variables *R*, *L*, *C*, sans valeurs numériques)

c. (**/2**) Déterminez si le système est sous-amorti, sur-amorti, ou avec amortissement critique. Déterminez si la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce système contient des oscillations ou non.

d. (**/2**) Si la valeur de *R* peut être changée, déterminez quelle est la valeur numérique de *R* requise pour que le système soit à amortissement critique.



Note: $x(t)$ est la tension en entrée (en Volts), et $y(t)$ est la tension en sortie aux bornes du condensateur (en Volts).

1) a) $i(t) = C\dfrac{dy(t)}{dt}$ $\quad v_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$ $\quad x(t) - R\,i(t) - L\dfrac{di(t)}{dt} = y(t)$

$$x(t) = y(t) + RC\frac{dy(t)}{dt} + LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}x(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

b) $$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1/LC}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}(j\omega) + \frac{1}{LC}}$$

c) $\omega_n^2 = \dfrac{1}{LC} = \dfrac{1}{10^{-3}\cdot 100\cdot 10^{-9}} = \dfrac{1}{10^{-10}} = 10^{10}$ $\quad \omega_n = 10^5$ $\quad 2\zeta\omega_n = \dfrac{R}{L}$ $\quad \zeta = \dfrac{R}{2\omega_n L} = \dfrac{10^3}{2\cdot 10^5\cdot 10^{-3}}$

$\zeta = \dfrac{10^{+1}}{2} =$ ~~[illegible]~~ 5

OVER~~[illegible]~~ DAMPED (SUR-~~[illegible]~~-AMORTI)

h(t) HAS NO OSCILLATIONS

d) CRITICAL DAMPING (AMORTISSEMENT CRITIQUE) : $\zeta = 1$

$2\zeta\omega_n = \dfrac{R}{L}$ $\quad R = 2\zeta\omega_n\cdot L = 2\cdot 1\cdot 10^5\cdot 10^{-3} = 2\cdot 10^2 = 200 = 200\,\Omega$

2) (/**5**) Un système LTI est décrit par la réponse en fréquence suivante :

$$H(j\omega) = \frac{10^{10}(j\omega+100)}{(j\omega+1000)\,((j\omega)^2+9000(j\omega)+10^8)}.$$

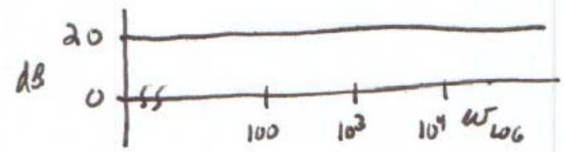
Dessinez le diagramme de Bode pour l'amplitude de $|H(j\omega)|$ (en dB). Utilisez l'approximation par segments linéaires.

STANDARD FORMS: $\frac{1}{1+j\omega\tau}$, $\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$

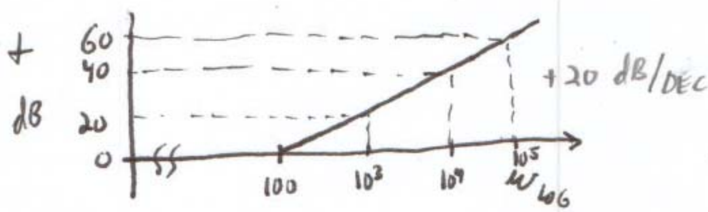
$$H(j\omega) = \underbrace{10}_{H_1(j\omega)} \cdot \underbrace{(1+j\omega/100)}_{H_2(j\omega)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+j\omega/1000}}_{H_3(j\omega)} \cdot \underbrace{\frac{10^8}{(j\omega)^2+9000(j\omega)+10^8}}_{H_4(j\omega)}$$

$H_1(j\omega)$ $\quad H_2(j\omega)\ \frac{1}{\tau} = 100$ $\quad H_3(j\omega)\ \frac{1}{\tau} = 1000$ $\quad H_4(j\omega)\ \ \omega_n = 10^4$

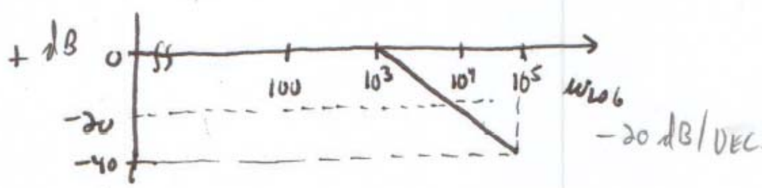
$$|H(j\omega)|_{dB} = |H_1(j\omega)|_{dB} + |H_2(j\omega)|_{dB} + |H_3(j\omega)|_{dB} + |H_4(j\omega)|_{dB}$$



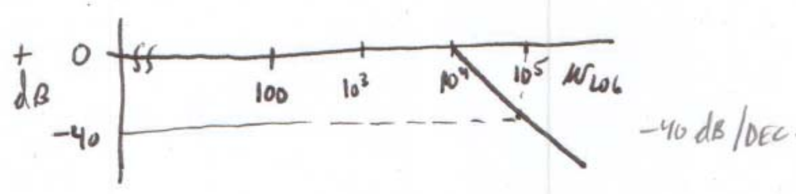
+



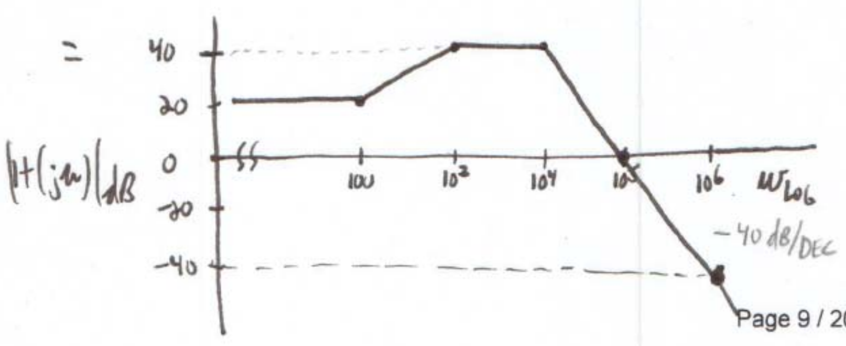
+



+



=



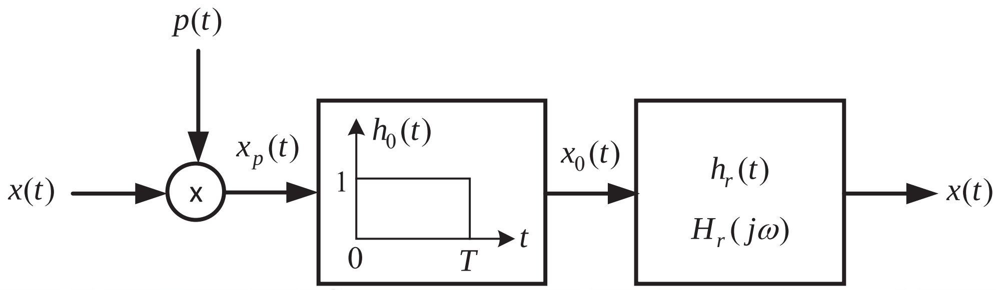
Question 5 Échantillonnage **(/15)**

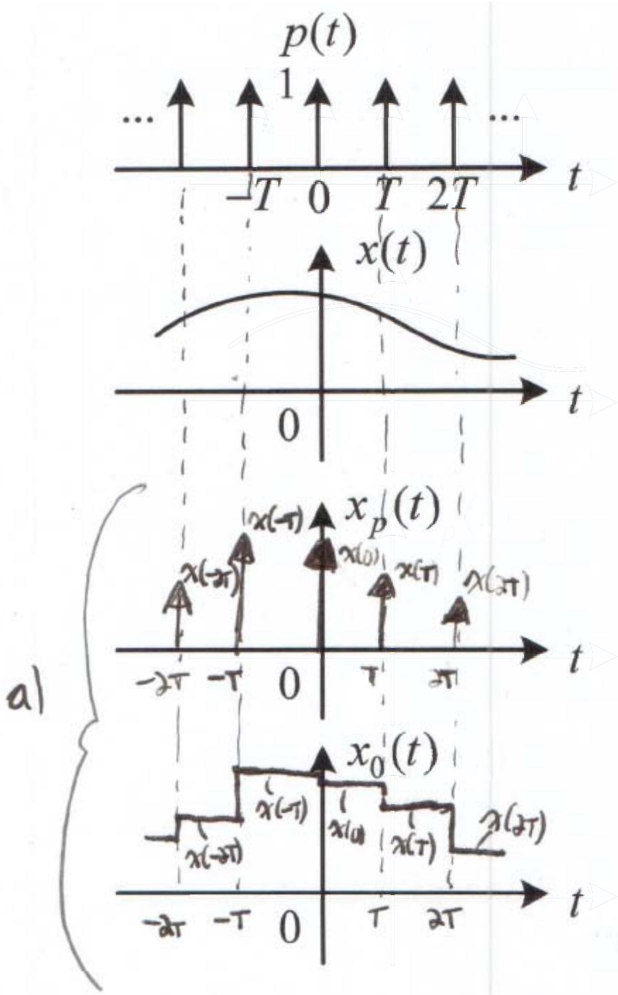
1) Le schéma d'un échantillonneur "bloqueur d'ordre zéro" ("sample and hold") est montré ci-dessous. Du point de vue de l'échantillonnage, le système résultant est équivalent à un convertisseur D/A (ou N/A) avec « sample and hold ».

a. (**/4**) Un train d'impulsions $p(t)$ et un signal d'entrée $x(t)$ sont tracés dans la figure ci-dessous. Tracez les signaux correspondants $x_p(t)$ et $x_0(t)$.

b. (**/3**) Trouvez la réponse en fréquence du système LTI ayant une réponse impulsionnelle $h_0(t)$ telle que montrée.

c. (**/4**) Trouvez l'amplitude de la réponse en fréquences du filtre de reconstruction (interpolation) $H_r(j\omega)$ requis pour obtenir une reconstruction parfaite de $x(t)$.





b) $h_0(t) = 1 \quad 0 \leq t \leq T$

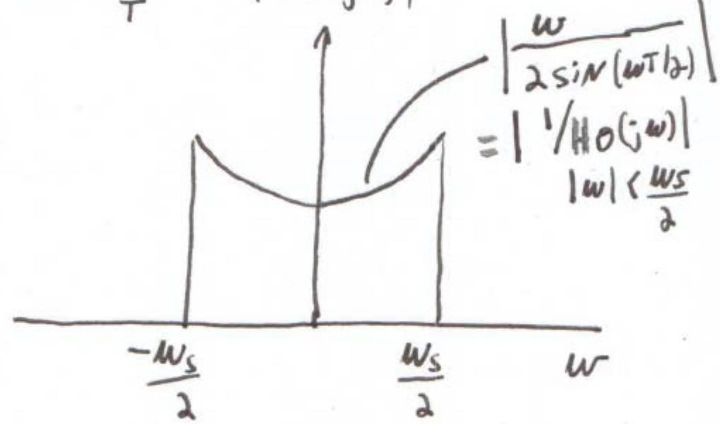
$H_0(j\omega) : \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$ (OR TABLES)

$$H_0(j\omega) = \int_0^T e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_0^T$$

$$H_0(j\omega) = \boxed{\frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega T} - 1\right)} = \frac{e^{-j\omega T/2}}{j\omega}\left(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}\right)$$

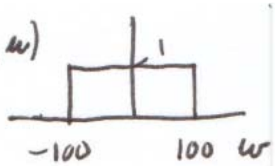
$$H_0(j\omega) = \boxed{\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}\, e^{-j\omega T/2}}$$

c) $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ $|H_r(j\omega)|$



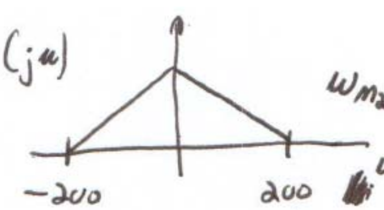
2) (/**4**) Considérez les deux signaux suivants : $x_1(t) = \frac{\sin 100t}{\pi t}$ et $x_2(t) = \left(\frac{\sin 100t}{\pi t}\right)^2$. Pour échantillonner chacun de ces signaux sans repliement spectral ou perte d'information, quelle est la fréquence d'échantillonnage ω_s minimale requise (dans chaque cas)?

$X_1(j\omega)$



$\omega_{m_1} = 100$

$X_2(j\omega)$

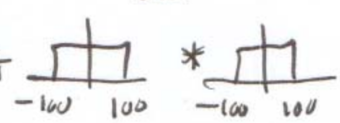


$\omega_{m_2} = 200$

$x_2(t) = x_1(t) \cdot x_1(t)$

$X_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) \underbrace{*}_{\text{conv.}} X_1(j\omega)$

$X_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi}$



↳ RESULT FROM -200 TO 200

$\omega_{m_2} = 200$

$\omega_{s_1} > 2\omega_{m_1} = 200$

$\omega_{s_2} > 2\omega_{m_2} = 400$

Question 6 Transformée de Laplace et systèmes LTI **(/15)**

1) Un système LTI causal en temps continu possède la fonction de transfert suivante:

$$H(s) = \frac{\frac{101}{100}(s + j10)(s - j10)}{s^2 + 2s + 101}.$$

a. (/**2**) Trouvez les pôles et les zéros.
b. (/**2**) Montrez les pôles et les zéros dans le « plan-s ». Indiquez la région de convergence (ROC).
c. (/**2**) Écrivez l'équation différentielle du système.
d. (/**2**) Montrez que le gain du système pour une entrée dc (entrée continue) est unitaire (1.0).
e. (/**2**) Est-ce que le système décrit par $H(s)$ est stable? Expliquez.
f. (/**1**) Pour le système décrit par $H(s)$, est-ce que la transformée de Fourier $H(j\omega)$ existe? Expliquez.

1 a) ZEROS $s = -j10,\ j10$

POLES : $\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 101}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-400}}{2} = \frac{-2 \pm j20}{2} = -1 \pm j10$

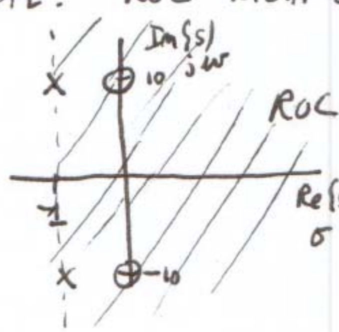
e) H(s) stable, ROC inclus axe jw

e) H(s) STABLE, ROC INCLUDES jw AXIS

f) $H(j\omega)$ EXISTS (CONVERGES) FOR SAME $h(t)$ AS THE ONE REPRESENTED BY $H(s)$, BECAUSE IT IS A STABLE SYSTEM, ROC INCLUDES jw AXIS

f) H(jw) existe (converge) pour le même h(t) représenté par H(s) et son ROC, parce que système est stable, ROC inclus axe jw

b) CAUSAL: ROC RIGHT OF ALL POLES



ROC: $Re\{s\} > -1$

$\sigma > -1$

c) $H(s) = \frac{\frac{101}{100}(s^2 + 100)}{s^2 + 2s + 101} = \frac{\frac{101}{100}s^2 + 101}{s^2 + 2s + 101} = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 101\,y(t) = \frac{101}{100}\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 101\,x(t)$

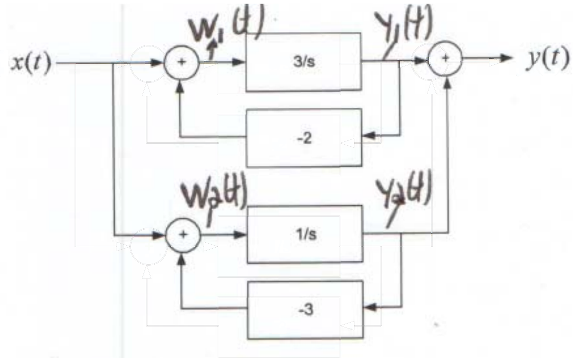
d) $e^{st} \xrightarrow[H(s)]{LTI} e^{st}\underbrace{H(s)}_{\text{"GAIN"}}$ $\quad e^{j\omega t} \xrightarrow[H(j\omega)]{LTI} e^{j\omega t}\underbrace{H(j\omega)}_{\text{"GAIN"}}$ $\quad$ DC: $\omega = 0$ (s=0)

$1 \xrightarrow[H(0)]{LTI} 1 \cdot \underbrace{H(0)}_{\text{DC GAIN}}$

$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$ IF $H(s)$ STABLE

$H(0) = \frac{\frac{101}{100} \cdot 100}{101} = 1 = \text{DC GAIN}$

2) Un système causal LTI est décrit par le schéma-bloc suivant. Déterminez l'équation différentielle décrivant la relation entre l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$ du système. (/**4**)



$$W_1(s) = X(s) - 2Y_1(s)$$
$$Y_1(s) = \frac{3}{s} W_1(s)$$

$$Y_1(s) = \frac{3}{s}\left(X(s) - 2Y_1(s)\right)$$
$$Y_1(s) = \frac{3}{s}X(s) - \frac{6}{s}Y_1(s)$$
$$Y_1(s) + \frac{6}{s}Y_1(s) = \frac{3}{s}X(s)$$
$$Y_1(s)\left(1 + \frac{6}{s}\right) = \frac{3}{s}X(s) \qquad Y_1(s)\left(\frac{s+6}{s}\right) = \frac{3}{s}X(s)$$
$$Y_1(s) = \frac{3}{s+6}X(s)$$

$$W_2(s) = X(s) - 3Y_2(s)$$
$$Y_2(s) = \frac{1}{s}W_2(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s}\left(X(s) - 3Y_2(s)\right)$$
$$Y_2(s) + \frac{3}{s}Y_2(s) = \frac{1}{s}X(s)$$
$$Y_2(s)\left(1 + \frac{3}{s}\right) = \frac{1}{s}X(s) \qquad Y_2(s)\left(\frac{s+3}{s}\right) = \frac{1}{s}X(s)$$
$$Y_2(s) = \frac{1}{s+3}X(s)$$

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \left(\frac{3}{s+6} + \frac{1}{s+3}\right)X(s) = \underbrace{H(s)}_{\text{TRANSFER FUNCTION}}X(s)$$

$$H(s) = \frac{3(s+3) + (s+6)}{(s+6)(s+3)} = \frac{4s+15}{s^2+9s+18} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$4\frac{dx(t)}{dt} + 15x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 9\frac{dy(t)}{dt} + 18y(t)$$