CH.9 §9.1. Différentiation Numérique :

(9.1.2) Formule à 3 points :

Idée : On exploitera le polynôme d'interpolation de Lagrange pour approcher les valeurs de $f'(x)$.

Soient les points de données $\{(x_0, f_0), (x_1, f_1)$ et (x_2, f_2), où $x_0 < x_1 < x_2$, $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1$ ou 2. On a vu que le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2 .$$

Donc si les points x_0, x_1 et x_2 sont proches, disons que $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 \ (= \Delta x) = h$ avec h assez petit, alors on a $x_2 - x_0 = 2h$ et on peut montrer que

$$P_2(x) = \frac{(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)}{2h^2} f_0 - \frac{(x^2-(x_0+x_2)x+x_0x_2)}{h^2} f_1 + \frac{(x^2-(x_0+x_1)x+x_0x_1)}{2h^2} f_2$$

D'où pour $x \in [x_0, x_2]$ on peut dire que

$$\boxed{f'(x) \simeq P_2'(x) = \frac{(2x-x_1-x_2)}{2h^2} f_0 - \frac{(2x-x_0-x_2)}{h^2} f_1 + \frac{(2x-x_0-x_1)}{2h^2} f_2}$$

$$f'(x_0) \simeq P_2'(x_0) = \frac{(\overbrace{x_0-x_1}^{} + \overbrace{x_0-x_2}^{-2h})}{2h^2} f_0 - \frac{(2x_0-x_0-x_2)}{h^2} f_1 + \frac{(2x_0-x_0-x_1)}{2h^2} f_2$$

$$= -\frac{3h}{2h^2} f_0 + \frac{2h}{h^2} f_1 - \frac{h}{2h^2} f_2 .$$

En particulier, on peut estimer les valeurs de $f'(x)$ en x_0, x_1 et x_2

D'où les formules : $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$.

$$f'_0 = f'(x_0) \simeq P'_2(x_0) = \underbrace{\frac{1}{2h}\left(-3f_0 + 4f_1 - f_2\right)}$$

$$f'_1 = f'(x_1) \simeq P'_2(x_1) = \frac{1}{2h}\left(-f_0 + f_2\right)$$

$$f'_2 = f'(x_2) \simeq P'_2(x_2) = \frac{1}{2h}\left(f_0 - 4f_1 + 3f_2\right)$$

Ce sont les approximation de f'_0, f'_1 et f'_2 avec la formule à 3 points.

Exple : Soient les points (x_i, f_i) suivants : $(\overset{x_0}{9}, \underbrace{2.1972}_{f_0})$, $(\overset{x_1}{9.5}, \underbrace{2.2513}_{f_1})$ et $(\overset{x_2}{10}, \underbrace{2.3026}_{f_2})$. Approchez f'_0, f'_1 et f'_2 en utilisant les formules ci-haut.

Solution : • Ici $h = 0.5 = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$

• Donc

$$f'_0 \simeq \frac{1}{2.(0.5)}\left(-3(2.1972) + 4(2.2513) - 2.3026\right)$$

$$= \boxed{0.1110}.$$

$$f'_1 \simeq \frac{1}{2(0.5)}\left(-(2.1972) + 2.3026\right) = \boxed{0.1054}$$

$$f'_2 \simeq \frac{1}{2(0.5)}\left(2.1972 - 4(2.2513) + 3(2.3026)\right)$$

$$= \boxed{0.0998}$$

<u>Exercice</u> : Donnez les formules semblables pour approcher f_0', f_1', f_2', f_3' si on a 4 points (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3). Ici $h_i = x_i - x_{i-1}$ pour $i = 1, 2, 3$.

$$\Big(P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f_1$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3} f_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f_3 \Big\}$$