DEVOIR 8 - ELG 3555

GBEGBE DECAHO
300094197
UOTTAWA - W24

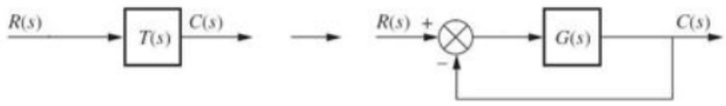
Question 1:

Un système en boucle fermée est décrit par :

$$T(s) = \frac{s^3 + 7s^2 - 21s + 10}{s^6 + s^5 - 6s^4 + 0s^3 - s^2 - s + 6}$$

En utilisant le critère RH, spécifiez le nombre de pôles situés dans chaque partie du plan-*s* (***RHS, LHS***) et sur l'axe imaginaire, $j\omega$.

Rappel : $T(s) = \frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$



Traçons le tableau de Routh - Hurwitz, TR

Le dénominateur étant de degré 6, cela signifie qu'il y aura 6 pôles dans ce système.

s^6	1	−6	−1	6
s^5	1	0	−1	0
s^4	$\frac{(-6)(1)-(1)(0)}{1} = -6$	0	$\frac{(-1)-(0)}{-1} = 6$	0
s^3	0	0	0	0
s^2	0	0	0	0
s^1	0	0	0	0
s^0	0	0	0	0

$\Rightarrow$

s^6	1	−6	−1	6
s^5	1	0	−1	0
s^4	$\frac{(-6)(1)-(1)(0)}{1} = -6$	0	$\frac{(-1)-(0)}{-1} = 6$	0
s^3	$\frac{(-4)(6)-(0)}{1} = -24$	0	0	0
s^2	ε^+	0	0	0
s^1	$\frac{1}{\varepsilon} = +\infty$	0	0	0
s^0	6	0	0	0

PA
RDZ
ZNZ

Vu le cas ZNZ, nous avons modifié le TR en remplaçant 0 par ε.

$P(s) = -s^4 + 1$
$= (1-s^2)(1+s^2)$

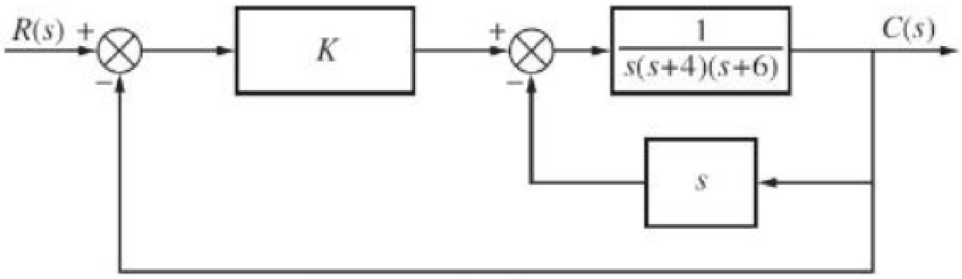
$\frac{dP(s)}{ds} = -4s^3$

Il y a 2 changements de signe avec $\varepsilon \to 0^+$, donc on a

$$\begin{cases} 2 \text{ pôles} \in RHS \\ 2 \text{ pôles} \in LHS \\ 2 \text{ pôles} \in j\omega \text{ (axe imaginaire)} \end{cases}$$

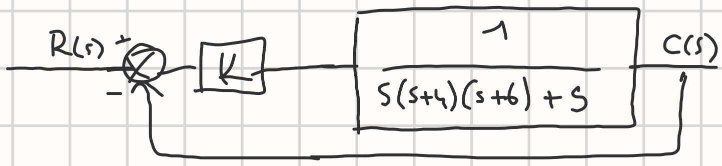
Question 2:

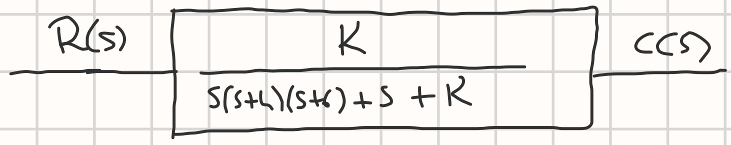
Soit le système suivant :



a) Trouvez la valeur du gain K pour que le système oscille.
b) Trouvez la fréquence d'oscillation.

Réduisons le circuit.





$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s+6)+s+K} = \frac{K}{(s^2+4s)(s+6)+s+K} = \frac{K}{s^3+10s^2+25s+K}$$

Nous savons maintenant que nous avons 3 pôles grâce à l'éq caractéristique.
Trouvons le gain grâce au TR.

s^3	1	25	0
s^2	10	K	0
s^1	$\frac{250-K}{10}$	$\frac{(K)(0)-(25)(0)}{K} = 0$	0
s^0	$= K$	0	0

- Dans la 3e ligne, si $\frac{250-K}{10} = 0$, on a une ligne de 0 (RDZ) $\Rightarrow K = 250$
- Dans ce cas, le système oscillatoire $P(s) = 10s^2 + K$
$\Rightarrow \quad = 10s^2 + 250$
$s_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{250}{10}} = \pm 5i$

On a 2 racines imaginaires à gauche.
Le système est donc marginalement stable.
Le système oscille pour une valeur de K = 250
Avec une fréquence d'oscillation de $\omega = 5\ rad/s$.

Question 3:

Soit la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+6)}$$

a) Trouver les valeurs de K pour rendre le système stable, non-stable, et marginalement (critiquement) stable.
b) Trouvez la fréquence d'oscillation.
c) Trouvez l'emplacement exact des pôles du système en boucle fermée lorsque le système est marginalement stable.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+6)}$$
$$= \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+6)+K}$$
$$= \frac{K}{(s^3+3s^2+2s)(s+6)+K}$$
$$G(s) = \frac{K}{s^4+9s^3+20s^2+12s+K}$$

4 pôles.

a)) Trouvons les valeurs de K pour rendre :
Le système stable :
en utilisant le TR :

s^4	1	20	K
s^3	9	12	0
s^2	$\frac{180-12}{9} = \frac{56}{3}$	$\frac{12K-(0)}{12} = K$	0
s^1	$\frac{(\frac{56}{3})(12)-9K}{56/3} = \frac{224-9K}{56/3}$	0	0
s^0	K	0	0

• Si $K > 0$ et $224 - 9K > 0 \Rightarrow K < \frac{224}{9} \Rightarrow 0 \leq K < \frac{9}{224}$

alors le système est stable car il n'y a aucun changement de signe

Ce qui revient à avoir 4 pôles $\in$ LHS

• Si $224 - 9K = 0 \Rightarrow K = \frac{224}{9}$, ce qui donne $P(s) = \frac{56}{3}s^2 + K$

$= \frac{56}{3}s^2 + \frac{224}{3}$

alors le système est marginalement stable avec 2 pôles $\in$ LHS et 2 pôles $\in$ $j\omega$.

$s_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{3K}{56}}$

• Si $224 - 9K < 0 \Rightarrow K > \frac{224}{9}$, on constate alors de la même manière que le système est instable car on a 2 changements de signe.

Ce qui revient à avoir : 2 pôles $\in$ RHS et 2 pôles $\in$ LHS.

b) Trouvons la fréquence d'oxillation.

Soit $K = \frac{224}{9}$, avec $P(s) = \frac{56}{3}s^2 + \frac{224}{9}$ $\Rightarrow s_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3K}{56}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 1.1547$

d'où $\boxed{\omega = 1.1547 \text{ rad/s}}$

C) Trouvons l'emplacement exact des pôles.

Soit $P(s) = 56s^2 + \frac{224}{3}$, $D(s) = s^4 + 9s^3 + 20s^2 + 12s + K$

$$R(s) = \frac{1}{56}s^2 + \frac{9}{56}s + \frac{1}{3}$$

$$PC(s) = P(s) \times R(s)$$
$$= \left(56s^2 + \frac{224}{3}\right)\left(\frac{1}{56}s^2 + \frac{9}{56} + \frac{1}{3}\right) = 0$$
$$= \frac{168x^2 + 224\left(\frac{x^2}{56} + \frac{83}{168}\right)}{3} = \frac{(3x^2+4)(3x^2+83)}{9}$$

L'emplacement est donc : $\boxed{\begin{array}{l} s_{1,2} = \pm 1.1547j \\ s_3 = -3.242 \text{ et } s_4 = -5.758 \end{array}}$