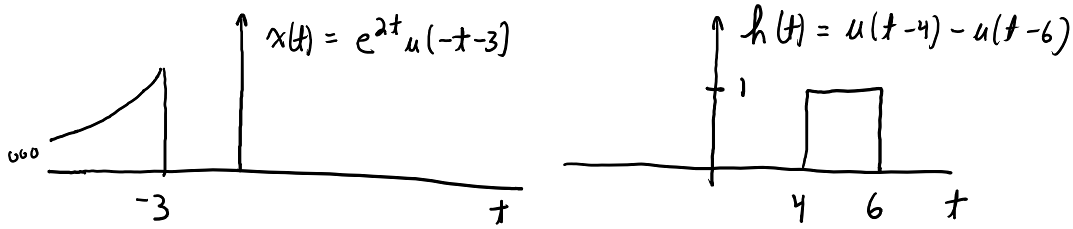
Quiz #2 ELG 3525 Automne 2023

Quelques formules:

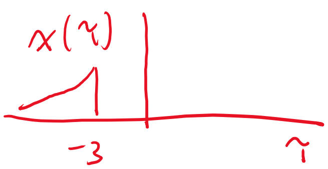
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad\qquad y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

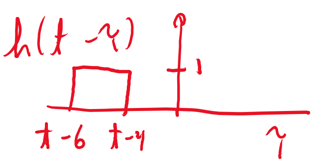
1) Calculez le signal de sortie $y(t)$ à la sortie du système lorsque l'entrée $x(t)$ est appliquée, pour le système LTI dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est décrite ci-dessous.

2) Ce système LTI est-il causal ? Est-il stable ? (explication requise)

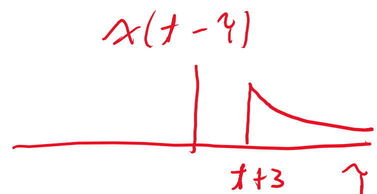


1) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$





ou



$t-4 < -3 \quad (t<1)$:

$$y(t) = \int_{t-6}^{t-4} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}\left[e^{2\tau}\right]_{t-6}^{t-4} = \frac{1}{2}\left(e^{2t-8} - e^{2t-12}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t}\left(e^{-8} - e^{-12}\right)$$

$t-4 > -3$, $t-6 < -3 \quad (1<t<3)$:

$$y(t) = \int_{t-6}^{-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}\left[e^{2\tau}\right]_{t-6}^{-3} = \frac{1}{2}\left(e^{-6} - e^{2t-12}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-6}\left(1 - e^{2t-6}\right)$$

$t-6 > -3 \quad (t>3)$: $\quad y(t) = 0$

$t+3 < 4 \quad (t<1)$:

$$y(t) = \int_4^6 e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} \frac{1}{-2}\left[e^{-2\tau}\right]_4^6$$

$$= -\frac{1}{2} e^{2t}\left(e^{-12} - e^{-8}\right) = \frac{1}{2} e^{2t}\left(e^{-8} - e^{-12}\right)$$

$t+3 > 4$, $t+3 < 6 \quad (1<t<3)$:

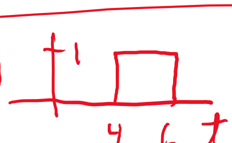
$$y(t) = \int_{t+3}^{6} e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} \cdot \frac{1}{-2}\left[e^{-2\tau}\right]_{t+3}^{6}$$

$$= -\frac{e^{2t}}{2}\left(e^{-12} - e^{-2t-6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-6} - e^{2t}e^{-12}\right) = \frac{1}{2} e^{-6}\left(1 - e^{2t}e^{-6}\right)$$

$t+3 > 6 \quad (t>3)$: $\quad y(t) = 0$

2) $h(t)$



$h(t) = 0$ POUR $t<0$ → CAUSAL

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = \int_4^6 1 \cdot dt = [t]_4^6 = 2 < \infty$ → STABLE

NOTE : RÉPONDRE QUE $h(t)$ EST BORNÉ N'EST PAS UNE BONNE RÉPONSE, EX: $h(t) = \delta(t)$ NON-BORNÉ MAIS STABLE