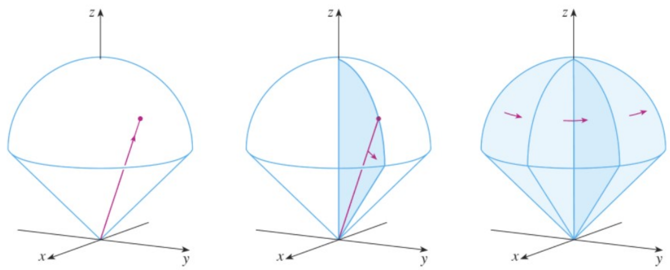
La figure 5 montre de quelle façon E est balayée si on effectue l'intégration d'abord par rapport à ρ, puis par rapport à ϕ et enfin par rapport à θ. Le volume de E est

$$V(E)=\iiint_E dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\phi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi}d\phi$$
$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\sin\phi\cos^3\phi\,d\phi=\frac{2\pi}{3}\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}.$$



ρ varie de 0 à $\cos\phi$ tandis que ϕ et θ sont constants.

ϕ varie de 0 à $\pi/4$ tandis que θ est constant.

θ varie de 0 à 2π.

FIGURE 5

Exercices 7.4

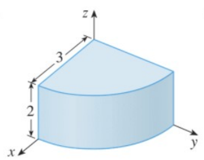
1-2 Esquissez le solide dont le volume est donné par l'intégrale et calculez celle-ci.

1. $\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^{3}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

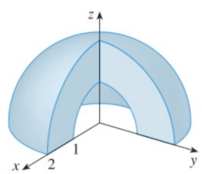
2. $\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sec\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

3-4 Écrivez l'intégrale triple d'une fonction continue arbitraire $f(x, y, z)$ en coordonnées cylindriques ou en coordonnées sphériques sur le solide représenté.

3.



4.



5-20 Utilisez les coordonnées sphériques.

5. Calculez $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^2\,dV$, où B est la boule de rayon 5 centrée à l'origine.

6. Calculez $\iiint_E y^2z^2\,dV$, où E se trouve au-dessus du cône $\phi=\pi/3$ et à l'intérieur de la sphère $\rho=1$.

7. Calculez $\iiint_E (x^2+y^2)\,dV$, où E se trouve entre les sphères $x^2+y^2+z^2=4$ et $x^2+y^2+z^2=9$.

8. Calculez $\iiint_E y^2\,dV$, où E est l'hémisphère solide $x^2+y^2+z^2\le 9$, $y\ge 0$.

9. Calculez $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2}\,dV$, où E est la partie de la boule $x^2+y^2+z^2\le 1$ qui se trouve dans le premier octant.

10. Calculez $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$, où E est situé entre les sphères $x^2+y^2+z^2=1$ et $x^2+y^2+z^2=4$, et au-dessus du cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

11. Calculez le volume de la partie de la boule $\rho\le a$ qui est comprise entre les cônes $\phi=\pi/6$ et $\phi=\pi/3$.

12. Calculez la distance moyenne d'un point d'une boule de rayon a à son centre.

13. Déterminez le centroïde du solide E situé au-dessus du cône $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.

14. Si on coupe une sphère de rayon R avec un plan P parallèle au plan équatorial et situé à une distance h au-dessus de celui-ci, calculez le volume à l'intérieur de la portion de sphère (une «calotte») au-dessus du plan P.

15. a) Calculez le volume du solide au-dessus du cône $\phi=\pi/3$ et à l'intérieur de la sphère $\rho=4\cos\phi$.
b) Trouvez le centroïde du solide de la partie a).

16. Calculez le volume du solide à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=4$, au-dessus du plan xy et au-dessous du cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

17. a) Trouvez le centroïde du solide de l'exemple 4 (la densité est constante et égale à K).
b) Trouvez le moment d'inertie de ce solide par rapport à l'axe des z.

18. Soit H, un hémisphère solide de rayon a dont la densité en tout point est proportionnelle à sa distance au centre de la base.
a) Calculez la masse de H.
b) Trouvez le centre de masse de H.
c) Calculez le moment d'inertie de H par rapport à son axe.

19. a) Trouvez le centroïde d'un hémisphère solide homogène de rayon a.
b) Calculez le moment d'inertie du solide de la partie a) par rapport à un diamètre de sa base.

20. Trouvez la masse et le centre de masse d'un hémisphère solide de rayon a, sachant que la densité en tout point est proportionnelle à sa distance de la base.

21-26 Utilisez les coordonnées cylindriques ou sphériques, selon ce qui vous semble le plus approprié.

21. Trouvez le volume et le centroïde du solide E au-dessus du cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$.

22. Calculez le volume du plus petit des coins découpés dans une sphère de rayon a par deux plans qui se coupent le long d'un diamètre et qui font un angle de $\pi/6$ entre eux.

23. Un cylindre solide de densité constante a une base de rayon a et une hauteur h.
a) Trouvez le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe.
b) Trouvez le moment d'inertie du cylindre par rapport à un diamètre de sa base.

24. Un cône solide circulaire droit de densité constante a une base de rayon a et une hauteur h.
a) Trouvez le moment d'inertie du cône par rapport à son axe.
b) Trouvez le moment d'inertie du cône par rapport à un diamètre de sa base.

LCS **25.** Calculez $\iiint_E z\,dV$, où E est au-dessus du paraboloïde $z=x^2+y^2$ et au-dessous du plan $z=2y$. Utilisez la table d'intégrales (voir les pages de référence 6 à 10) ou un logiciel de calcul symbolique pour calculer l'intégrale.

26. Calculez le volume du solide situé à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+(z-1)^2=16$ et à l'extérieur du cylindre $x^2+y^2=4$.

27. Une charge est distribuée dans une région E de l'espace située à l'intérieur de la surface $x^2+y^2+z^2=4z$ et au-dessus de la surface $3z=x^2+y^2$. La densité de charge en chaque point de E est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe vertical du solide (l'axe des z). De plus, la densité de charge au point (1, 1, 1) est égale à 1. Calculez la charge totale à l'intérieur de la région E.

28. a) Calculez le volume borné par le tore $\rho=\sin\phi$.
b) Dessinez ce tore à l'aide d'un ordinateur.

29-30 Calculez l'intégrale en utilisant les coordonnées sphériques.

29. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$

30. $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}(x^2z+y^2z+z^3)\,dz\,dx\,dy$

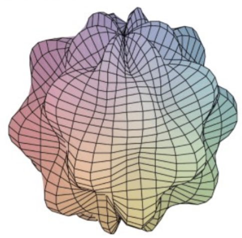
31. À l'aide d'un outil graphique, dessinez un silo constitué d'un cylindre de rayon 3 et de hauteur 10 surmonté d'un hémisphère.

32. Un modèle de la densité δ de l'atmosphère de la Terre près de la surface est donné par

$$\delta=619{,}09-0{,}000\,097\rho$$

où ρ (la distance à partir du centre de la Terre) est mesuré en mètres et δ est mesuré en kilogrammes par mètre cube. Si on considère la surface de la Terre comme une sphère d'un rayon de 6 370 km, alors ce modèle est raisonnable pour $6{,}370\times10^6\le\rho\le6{,}375\times10^6$. Utilisez ce modèle pour estimer la masse de l'atmosphère entre le sol et une altitude de 5 km.

LCS **33.** Les surfaces $\rho=1+\frac{1}{5}\sin m\theta\sin n\phi$ servent à modéliser des tumeurs. La figure représente une «sphère bosselée» avec $m=6$ et $n=5$. Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour calculer son volume.



34. Montrez que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz=2\pi.$$

(Par définition, l'intégrale triple impropre est la limite d'une intégrale triple sur une sphère solide lorsque le rayon de la sphère croît à l'infini.)

35. a) Utilisez les coordonnées cylindriques pour montrer que le volume du solide borné supérieurement par la sphère $r^2+z^2=a^2$ et inférieurement par le cône $z=r\cot\text{an}\,\phi_0$ (ou $\phi=\phi_0$), où $0<\phi_0<\pi/2$, est

$$V=\frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos\phi_0).$$