

MAT 2784 A
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
ET MÉTHODES NUMÉRIQUES
Examen de pratique
Professeur: Dr. Abdelkrim El basraoui

Il y aura environ 7 questions.
Voici une composition possible.

CH 1 et 2 pour ÉD
CH 7 (P1) et CH 8 (P1)
M.N.

Temps: 80 minutes pour composer.

⚠ Posez vos stylos/crayons. ((10 minutes + pour scanner et soumettre votre examen .

Où se trouvera-t-il? Section D'œuvres
(Je vais créer un lien dans le contenu.)

Matériel Permis: 1 feuille (recto/verso)
Aucun exple devant. (On 2 pages à 1 face) -
• Calculatrices de base .
à soumettre avec votre examen .

(A)

Question 1 (6 marks) Solve the initial value problems / Résoudre les problèmes aux valeurs initiales:

(a) $e^{2y} y' = 2 \cos x, \quad y(0) = 0$

the DE is separable $e^{2y} dy = 2 \cos x dx$

integrate on both sides $\int e^{2y} dy = \int 2 \cos x dx + C$

to get $\frac{1}{2} e^{2y} = 2 \sin x + C$

or $e^{2y} = 4 \sin x + C$

or $2y = \ln |4 \sin x + C|$

and so $y = \frac{1}{2} \ln |4 \sin x + C|$ (general solution)

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \ln (0+C) \Rightarrow C=1$$

\therefore the unique solution is

$$\boxed{y = \frac{1}{2} \ln |4 \sin x + 1|}$$

(b) $y' + \frac{y}{x} = \frac{2x}{y}, \quad y(1) = 2$

this is a Bernoulli equation with $p(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x$ and $\alpha = -1$

thus we let $u = y^{1-\alpha} = y^2$ and the DE will become

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)g(x) \text{ or } u' + \frac{2}{x}u = 4x$$

the integrating factor is $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2$

$$\text{and then } u = \frac{1}{x^2} \left[\int (x^2)(4x) dx + C \right]$$

$$= x^{-2} \left(\int 4x^3 dx + C \right)$$

$$= x^{-2} (x^4 + C) = x^2 + Cx^{-2}$$

and so $y^2 = x^2 + Cx^{-2}$ (general solution)

let $y(1) = 2 \Rightarrow 2^2 = 1^2 + C(1)^{-2} \Rightarrow C = 3$

\therefore the unique solution is $\boxed{y = \sqrt{x^2 + 3x^{-2}}} \quad (y > 0)$

(A)

Question 2 (6 marks) Solve the initial value problem / Résoudre le problème à valeur initiale:

$$(2e^x y^2 + 6xy + 7y^3) dx + (8e^x y + 9x^2 + 35xy^2) dy = 0, \quad y(0) = 1. \quad (\text{not separable})$$

$$M(x,y) = 2e^x y^2 + 6xy + 7y^3 \Rightarrow M_y = 4e^x y + 6x + 21y^2 \quad \left. \begin{array}{l} M_y \neq N_x \\ N(x,y) = 8e^x y + 9x^2 + 35xy^2 \Rightarrow N_x = 8e^x y + 18x + 35y^2 \end{array} \right\} \text{DE not exact}$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{-4e^x y - 12x - 14y^2}{2e^x y^2 + 6xy + 7y^3} = \frac{-2(2e^x y + 6x + 7y^2)}{y(2e^x y + 6x + 7y^2)} = \frac{-2}{y} \quad (\text{function of } y)$$

integrating factor is $\mu(y) = e^{-\int \frac{-2}{y} dy} = e^{2\ln y} = y^2$ and the DE becomes $(2e^x y^4 + 6xy^3 + 7y^5) dx + (8e^x y^3 + 9x^2 y^2 + 35xy^4) dy = 0$

thus $M^*(x,y) = 2e^x y^4 + 6xy^3 + 7y^5 \Rightarrow M_y^* = 8e^x y^3 + 18x y^2 + 35y^4 \quad \left. \begin{array}{l} M_y^* = N_x \\ N^*(x,y) = 8e^x y^3 + 9x^2 y^2 + 35xy^4 \Rightarrow N_x^* = 8e^x y^3 + 18x y^2 + 35y^4 \end{array} \right\} \text{DE exact}$

$$F(x,y) = \int M^*(x,y) dx + g(y) = \int (2e^x y^4 + 6xy^3 + 7y^5) dx + g(y) \\ = 2e^x y^4 + 3x^2 y^3 + 7xy^5 + g(y)$$

thus $\frac{\partial F}{\partial y} = 8e^x y^3 + 9x^2 y^2 + 35xy^4 + g'(y) = N^*(x,y) = 8e^x y^3 + 9x^2 y^2 + 35xy^4$

and so $g'(y) = 0 \Rightarrow$ we take $g(y) = 0$

thus $F(x,y) = 2e^x y^4 + 3x^2 y^3 + 7xy^5$

and the general solution is $2e^x y^4 + 3x^2 y^3 + 7xy^5 = C$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 2e^0(1)^4 + 3(0)^2(1)^3 + 7(0)(1)^5 = C \Rightarrow C = 2$$

∴ the unique solution is $2e^x y^4 + 3x^2 y^3 + 7xy^5 = 2$

(A)

Question 3 (6 marks) Solve the initial value problems / Résoudre les problèmes aux valeurs initiales:

(a) $y'' + 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

The characteristic equation is $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2 = 0$
 so the roots are $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ and the
 general solution is $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 e^0 + C_2 (0)e^0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y'(x) = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-4x} - 4C_2 x e^{-4x}$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = -4C_1 e^0 + C_2 e^0 - 4C_2 (0)e^0 \Rightarrow C_2 = 2$$

\therefore the unique solution is $y(x) = 2x e^{-4x}$

(b) $y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 8$

The char. eq. is $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$$\text{the roots are } \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(10)}}{2} = 1 \pm 3i$$

The general solution is $y(x) = C_1 e^x \cos(3x) + C_2 e^x \sin(3x)$

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = C_1 e^0 \cos(0) + C_2 e^0 \sin(0) \Rightarrow C_1 = 2$$

$$y'(x) = C_1 e^x \cos(3x) - 3C_1 e^x \sin(3x) + C_2 e^x \sin(3x) + 3C_2 e^x \cos(3x)$$

$$y'(0) = 8 \Rightarrow 8 = C_1 e^0 \cos(0) - 3C_1 e^0 \sin(0) + C_2 e^0 \sin(0) + 3C_2 e^0 \cos(0)$$

$$\Rightarrow C_1 + 3C_2 = 8 \Rightarrow C_2 = 2$$

\therefore the unique solution is $y(x) = 2e^x \cos(3x) + 2e^x \sin(3x)$

Question 4: Résoudre

- $xy' = y + x \sec(y/x)$, $y(1) = \pi/2$.

$$\Leftrightarrow (y + x \sec(y/x)) dx - x dy = 0$$

EX

$$\text{Donc: } M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x, y)$$

\downarrow

$$\text{et } N(\lambda x, \lambda y) = \lambda N(x, y)$$

Donc M et N sont homogènes de degré 1 en x et y .

On pose $y = ux \Rightarrow dy = u dx + x du$ et l'équation devient

$$(ux + x \sec(u)) dx - x u du - x^2 du = 0 \Leftrightarrow x \sec u dx - x^2 du = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sec u} du = \frac{x}{x^2} dx \Leftrightarrow \boxed{\cos u du = \frac{1}{x} dx} \quad \underline{\text{separable}}$$

$$\Rightarrow \sin u = \ln|x| + C \Leftrightarrow u = \frac{y}{x} = \arcsin(\ln|x| + C)$$

Donc la S.G. est: $\boxed{y = x \arcsin(\ln|x| + C)}$

$$\bullet \text{ S. } \underline{U}: y(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \text{S. } \underline{u}: \boxed{y = x \arcsin(\ln|x| + 1)}$$

- $x^2 y'' - xy' + y = 0$.

- C'est une équation d'Euler-Cauchy.
- Équation caractéristique: $m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 = 0$.
- Donc on a la racine double $m_1 = m_2 = 1$.
- Solution générale: $y = C_1 x + C_2 x \ln(x)$.

(A)

Question 5 (6 marks)

(a) Consider $f(x) = x^3 + 6x - 5$. If you were to use Fixed Point Iteration to find the root of this function in the interval $[0, 1]$, what would you use for $g(x)$ and why?

Soit $f(x) = x^3 + 6x - 5$. Si on aimerait trouver la racine de la fonction sur l'intervalle $[0, 1]$ par <<Fixed Point Iteration>>, quelle fonction utiliserait-on pour $g(x)$ et pourquoi?

$$f(x)=0 \Rightarrow x^3 + 6x - 5 = 0 \Rightarrow 6x = 5 - x^3 \Rightarrow x = \frac{5 - x^3}{6}$$

so
$$g(x) = \frac{5 - x^3}{6}$$
 (this will satisfy fixed point condition)

and
$$|g'(x)| = \frac{1}{2}x^2 < 1 \text{ on } [0, 1]$$

so this $g(x)$ will generate a convergent sequence

(b) Use Newton's Method to find the root of this $f(x)$ to 4 decimal places. Start with $x_0 = 1$. Verify your answer.

Utilisez la Méthode de Newton pour trouver la racine de même $f(x)$ à 4 décimales. Commencez avec $x_0 = 1$. Vérifiez la réponse.

$$f(x) = x^3 + 6x - 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6$$

Newton's Method $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 6x_n - 5}{3x_n^2 + 6} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 + 6}$

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{7}{9} = 0.7778, x_2 = 0.7602, x_3 = 0.7601 = x_4 \text{ (stop)}$$

$$f(0.7601) = (0.7601)^3 + 6(0.7601) - 5 \approx -2.5 \times 10^{-4} \text{ okay}$$

∴ the root is 0.7601

(c) If we were going to find the interpolating polynomial $p_n(x)$ for 5 data points, what is the maximum possible degree that the polynomial could have?

Si on aimerait trouver le polynôme d'interpolation $p_n(x)$ pour 5 pointes, quel est le degré maximal que le polynôme puisse avoir?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6 (F) impossible to answer

$$(n+1=5 \Rightarrow n=4)$$

- (d) Considérez les points suivants ((x_j, f_j) collectés lors d'une expérience, où $f_j = f(x_j)$): $(1.2, 2.3)$, $(1.9, 3.5)$ and $(2.3, 4.9)$.
- (i) Trouvez le polynôme de Lagrange $p_2(x)$ (avec coefficients à 4 décimales près).
- (ii) Interpolez la valeur au point $x = 2$.
- (iii) Étant donné que $0.5 \leq |f'''(x)| \leq 2$ sur $[1, 3]$, donnez l'erreur maximale et l'erreur minimal lors de cette interpolation.
- (Voir notes de cours pour la solution.)**