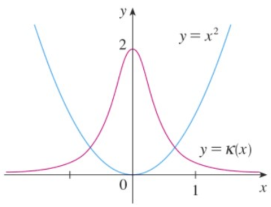

FIGURE 6
La parabole $y = x^2$ et sa fonction de courbure.

On peut interpréter le vecteur normal de manière telle qu'il indique la direction vers laquelle la courbe se replie, ou tourne, en un point donné.

La courbure en (0, 0) est $\kappa(0) = 2$; en (1, 1), elle est égale à $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0{,}18$; en (2, 4) elle vaut $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0{,}03$. On remarque que, selon l'expression de $\kappa(x)$ ou selon le graphe de κ (voir la figure 6), $\kappa(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$. Cela correspond au fait que la parabole s'aplatit de plus en plus quand $x \to \pm\infty$.

LES VECTEURS NORMAL ET BINORMAL

En un point d'une courbe lisse $\vec{r}(t)$ dans l'espace, il existe un nombre infini de vecteurs orthogonaux au vecteur tangent unitaire $\vec{T}(t)$. Puisque $\|\vec{T}(t)\| = 1$ pour tout t, on a $\vec{T}(t)\cdot\vec{T}'(t) = 0$, selon l'exemple 4 de la section 8.2, et donc $\vec{T}'(t)$ est orthogonal à $\vec{T}(t)$. Il faut noter que $\vec{T}'(t)$ n'est pas un vecteur unitaire. Si $\vec{r}'$ est lisse, on définit le **vecteur normal unitaire principal** $\vec{N}(t)$ (ou la **normale unitaire**) par

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}.$$

Le vecteur $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$ est appelé **vecteur binormal**. Ce vecteur est perpendiculaire à $\vec{T}$ et à $\vec{N}$, et $\vec{B}(t)$ est aussi un vecteur unitaire (voir la figure 7).

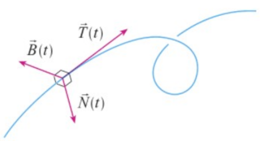

FIGURE 7

La figure 8 illustre l'exemple 7 en montrant les vecteurs $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{B}$ en deux points de l'hélice. En général, les vecteurs $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{B}$ forment un ensemble de vecteurs orthogonaux, appelé « base $\vec{T}\vec{N}\vec{B}$ » ou « repère de Serret-Frenet », qui se déplacent le long de la courbe lorsque t varie. Cette base $\vec{T}\vec{N}\vec{B}$ joue un rôle important dans la branche des mathématiques appelée « géométrie différentielle » et dans ses applications relatives au mouvement des engins spatiaux.

EXEMPLE 7 Trouvons les vecteurs normal unitaire et binormal de l'hélice circulaire

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}.$$

SOLUTION On calcule d'abord les expressions nécessaires au calcul du vecteur normal unitaire :

$$\vec{r}'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}, \quad \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}), \quad \|\vec{T}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}.$$

Cela montre que le vecteur normal en un point de l'hélice est horizontal et qu'il pointe vers l'axe des z. Le vecteur binormal est

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k}).$$

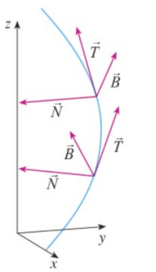

FIGURE 8

Le plan déterminé par le vecteur normal $\vec{N}$ et le vecteur binormal $\vec{B}$ en un point P d'une courbe C est appelé le **plan normal** de C en P. Il est constitué de toutes les droites qui sont orthogonales au vecteur tangent $\vec{T}$. Le plan déterminé par les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ est le **plan osculateur** de C en P. (Ce terme vient du mot latin *osculum*, qui signifie « embrasser ».) C'est le plan qui contient le mieux la courbe près du point P. (Le plan osculateur d'une courbe plane est le plan qui contient la courbe.)

Le cercle qui est dans le plan osculateur de C en P, qui possède la même tangente que C en P, qui est situé du côté concave de C (dans la direction où $\vec{N}$ pointe) et qui a un rayon $\rho = 1/\kappa$ (l'inverse de la courbure) est appelé **cercle osculateur** (ou **cercle de courbure**) de C en P. C'est le cercle qui décrit le mieux le comportement de C près de P ; il a la même tangente, la même normale et la même courbure que C au point P.

La figure 9 montre l'hélice de l'exemple 8 et son plan osculateur.

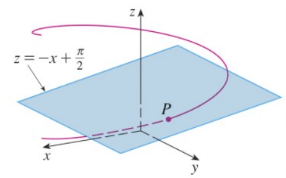

FIGURE 9

EXEMPLE 8 Trouvons les équations du plan normal et du plan osculateur de l'hélice de l'exemple 7 au point $P(0,\ 1,\ \pi/2)$.

SOLUTION En P, le plan normal a pour vecteur normal $\vec{r}'(\pi/2) = -\vec{i} + \vec{k}$. Par conséquent,

$$-1(x-0) + 0(y-1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad z = x + \frac{\pi}{2}$$

est l'équation du plan normal.

Le plan osculateur en P contient les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$, et son vecteur normal est $\vec{T} \times \vec{N} = \vec{B}$. L'exemple 7 donne

$$\vec{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k}) \qquad \vec{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

Un vecteur normal simplifié est $\vec{i} + \vec{k}$. Par conséquent,

$$1(x-0) + 0(y-1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad z = -x + \frac{\pi}{2}$$

est l'équation du plan osculateur.

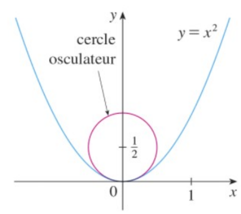

FIGURE 10

EXEMPLE 9 Trouvons et représentons le cercle osculateur de la parabole $y = x^2$ à l'origine.

SOLUTION Selon l'exemple 6, la courbure de la parabole à l'origine est $\kappa(0) = 2$. Le rayon du cercle osculateur à l'origine est donc $1/\kappa = 1/2$, et son centre est $(0,\ 1/2)$. De ce fait, son équation est

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Pour tracer le graphique de la figure 10, on utilise les équations paramétriques de ce cercle :

$$x = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sin t.$$

Voici un résumé des formules pour déterminer les vecteurs tangent unitaire, normal unitaire et binormal, ainsi que la courbure :

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \qquad \vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \qquad \vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

$$\kappa = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.$$

Exercices 8.3

1-6 Calculez la longueur de la courbe.

1. $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} + 3\sin t\,\vec{k},\ -5 \le t \le 5$
2. $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\,\vec{k},\ 0 \le t \le 1$
3. $\vec{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} + e^{-t}\,\vec{k},\ 0 \le t \le 1$
4. $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \ln \cos t\,\vec{k},\ 0 \le t \le \pi/4$
5. $\vec{r}(t) = \vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k},\ 0 \le t \le 1$
6. $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + 9t\,\vec{j} + 4t^{3/2}\,\vec{k},\ 1 \le t \le 4$

7-9 Calculez la longueur de la courbe avec quatre décimales exactes. (Utilisez votre calculatrice pour approximer l'intégrale.)

7. $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + t^3\,\vec{j} + t^4\,\vec{k},\quad 0 \le t \le 2$
8. $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + e^{-t}\,\vec{j} + te^{-t}\,\vec{k},\quad 1 \le t \le 3$
9. $\vec{r}(t) = \cos \pi t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + \sin 2\pi t\,\vec{k},\quad$ de (1, 0, 0) à (1, 4, 0)

10. Représentez la courbe d'équations paramétriques $x = \sin t$, $y = \sin 2t$, $z = \sin 3t$. Calculez sa longueur totale avec quatre décimales exactes.