et que c^2 est une constante, la formule 4 du théorème 3 donne

$$0 = \frac{d}{dt}[\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)]$$

$$= \vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)$$

$$= 2\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}(t).$$

Par conséquent, $\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}(t) = 0$, ce qui implique que $\vec{r}\,'(t)$ est orthogonal à $\vec{r}(t)$.

Géométriquement, ce résultat montre que si une courbe est située sur une sphère centrée à l'origine, alors son vecteur tangent $\vec{r}\,'(t)$ est toujours orthogonal à son vecteur position $\vec{r}(t)$.

LES INTÉGRALES

La définition de l'**intégrale définie** d'une fonction vectorielle continue $\vec{r}(t)$ est semblable à celle de l'intégrale définie d'une fonction réelle, à l'exception près que l'intégrande est un vecteur. On peut exprimer l'intégrale de $\vec{r}$ en fonction des intégrales de ses fonctions composantes f, g et h comme suit :

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}(t_i^*)\Delta t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t\right)\vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\Delta t\right)\vec{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} h(t_i^*)\Delta t\right)\vec{k}\right]$$

et donc

$$\boxed{\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\vec{k}.}$$

Cela signifie qu'on peut calculer l'intégrale d'une fonction vectorielle en intégrant chacune de ses composantes.

Il est possible de généraliser le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral aux fonctions vectorielles continues :

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \vec{R}(t)\Big]_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a),$$

où $\vec{R}$ est une primitive de $\vec{r}$, c'est-à-dire une fonction vectorielle telle que $\vec{R}\,'(t) = \vec{r}(t)$. Pour les intégrales indéfinies (primitives), on utilise la notation $\int \vec{r}(t)\,dt$.

EXEMPLE 5 Si $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$, alors

$$\int \vec{r}(t)\,dt = \left(\int 2\cos t\,dt\right)\vec{i} + \left(\int \sin t\,dt\right)\vec{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\vec{k}$$

$$= 2\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + t^2\vec{k} + \vec{C},$$

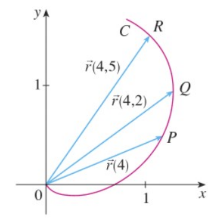
où $\vec{C}$ est un vecteur constant et

$$\int_0^{\pi/2} \vec{r}(t)dt = \left[2\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + t^2\vec{k}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\vec{i} + \vec{j} + \frac{\pi^2}{4}\vec{k}.$$

Exercices 8.2

1. La figure suivante représente une courbe C paramétrée par une fonction vectorielle $\vec{r}(t)$.



a) Tracez les vecteurs $\vec{r}(4,5) - \vec{r}(4)$ et $\vec{r}(4,2) - \vec{r}(4)$.

b) Tracez les vecteurs $\dfrac{\vec{r}(4,5)-\vec{r}(4)}{0,5}$ et $\dfrac{\vec{r}(4,2)-\vec{r}(4)}{0,2}$.

c) Écrivez les expressions de $\vec{r}\,'(4)$ et du vecteur tangent unitaire $\vec{T}(4)$.

d) Tracez le vecteur $\vec{T}(4)$.

2. a) Faites un dessin suffisamment grand de la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j}$, $0 \le t \le 2$, puis tracez les vecteurs $\vec{r}(1)$, $\vec{r}(1,1)$ et $\vec{r}(1,1) - \vec{r}(1)$.

b) Tracez le vecteur $\vec{r}\,'(1)$ avec son point initial en (1, 1), puis comparez-le au vecteur

$$\frac{\vec{r}(1,1)-\vec{r}(1)}{0,1}.$$

Expliquez pourquoi ces vecteurs sont proches l'un de l'autre en norme, en direction et en sens.

3-8

a) Dessinez la courbe plane paramétrée par la fonction vectorielle donnée.

b) Trouvez $\vec{r}\,'(t)$.

c) Tracez le vecteur position $\vec{r}(t)$ et le vecteur tangent $\vec{r}\,'(t)$ pour la valeur de t donnée.

3. $\vec{r}(t) = (t-2)\vec{i} + (t^2+1)\vec{j}$, $t = -1$

4. $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + t^3\,\vec{j}$, $t = 1$

5. $\vec{r}(t) = e^{2t}\vec{i} + e^t\,\vec{j}$, $t = 0$

6. $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + 2t\,\vec{j}$, $t = 0$

7. $\vec{r}(t) = 4\sin t\,\vec{i} - 2\cos t\,\vec{j}$, $t = 3\pi/4$

8. $\vec{r}(t) = (\cos t + 1)\vec{i} + (\sin t - 1)\vec{j}$, $t = -\pi/3$

9-16 Trouvez la dérivée de la fonction vectorielle.

9. $\vec{r}(t) = \sqrt{t-2}\,\vec{i} + 3\vec{j} + 1/t^2\vec{k}$ **10.** $\vec{r}(t) = e^{-t}\,\vec{i} + (t-t^3)\vec{j} + \ln t\,\vec{k}$

11. $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + \cos(t^2)\vec{j} + \sin^2 t\,\vec{k}$

12. $\vec{r}(t) = \dfrac{1}{1+t}\vec{i} + \dfrac{t}{1+t}\vec{j} + \dfrac{t^2}{1+t}\vec{k}$

13. $\vec{r}(t) = t\sin t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j} + \sin t\cos t\,\vec{k}$

14. $\vec{r}(t) = \sin^2 at\,\vec{i} + te^{bt}\,\vec{j} + \cos^2 ct\,\vec{k}$

15. $\vec{r}(t) = \vec{a} + t\,\vec{b} + t^2\vec{c}$

16. $\vec{r}(t) = t\,\vec{a}\times(\vec{b} + t\,\vec{c})$

17-20 Trouvez le vecteur tangent unitaire $\vec{T}(t)$ au point correspondant à la valeur donnée du paramètre t.

17. $\vec{r}(t) = (t^2-2t)\vec{i} + (1+3t)\vec{j} + (\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2)\vec{k}$, $t = 2$

18. $\vec{r}(t) = \arctan t\,\vec{i} + 2e^{2t}\,\vec{j} + 8te^t\vec{k}$, $t = 0$

19. $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + 3t\,\vec{j} + 2\sin 2t\,\vec{k}$, $t = 0$

20. $\vec{r}(t) = \sin^2 t\,\vec{i} + \cos^2 t\,\vec{j} + \tan^2 t\,\vec{k}$, $t = \pi/4$

21. Soit $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$. Trouvez $\vec{r}\,'(t)$, $\vec{T}(1)$, $\vec{r}\,''(t)$ et $\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)$.

22. Soit $\vec{r}(t) = e^{2t}\vec{i} + e^{-2t}\vec{j} + te^{2t}\vec{k}$. Trouvez $\vec{T}(0)$, $\vec{r}\,''(0)$ et $\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}\,''(t)$.

23-26 Trouvez les équations paramétriques de la tangente à la courbe paramétrée au point donné.

23. $x = t^2+1$, $y = 4\sqrt{t}$, $z = e^{t^2-t}$; (2, 4, 1)

24. $x = \ln(t+1)$, $y = t\cos 2t$, $z = 2^t$; (0, 0, 1)

25. $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$; (1, 0, 1)

26. $x = \sqrt{t^2+3}$, $y = \ln(t^2+3)$, $z = t$; (2, ln 4, 1)

27. Trouvez une équation vectorielle de la tangente à la courbe d'intersection des cylindres $x^2 + y^2 = 25$ et $y^2 + z^2 = 20$ au point (3, 4, 2).

28. Trouvez le point de la courbe $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + e^t\vec{k}$, $0 \le t \le \pi$, où la tangente est parallèle au plan $\sqrt{3}x + y = 1$.

29-31 Trouvez les équations paramétriques de la tangente à la courbe paramétrée au point donné. Illustrez ce résultat en traçant la courbe et sa tangente sur une même figure.

29. $x = t$, $y = e^{-t}$, $z = 2t - t^2$; (0, 1, 0)

30. $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 4\cos 2t$; $(\sqrt{3}, 1, 2)$

31. $x = t\cos t$, $y = t$, $z = t\sin t$; $(-\pi, \pi, 0)$

32. a) Trouvez le point d'intersection des tangentes à la courbe $\vec{r}(t) = \sin \pi t\,\vec{i} + 2\sin \pi t\,\vec{j} + \cos \pi t\,\vec{k}$ aux points correspondant à $t = 0$ et $t = 0,5$.

b) Illustrez le résultat de la partie a) en traçant la courbe et les tangentes.

33. Les courbes

$$\vec{r}_1(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} \text{ et } \vec{r}_2(t) = \sin t\,\vec{i} + \sin 2t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$$

se coupent à l'origine. Trouvez leur angle d'intersection, arrondi au degré le plus proche.