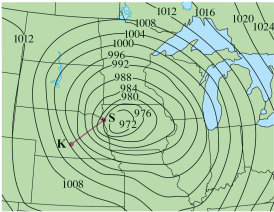
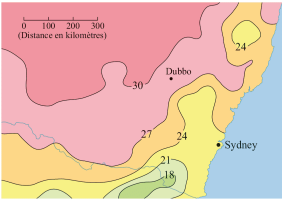


Exercices 4.4

1. La figure ci-dessous montre les courbes de niveau de la pression atmosphérique de l'Iowa, en millibars (mb) à 6 h le 10 novembre 1998. Une dépression de 972 mb se déplace sur le nord-est. La distance le long du segment de droite en rouge de K (Kearney, au Nebraska) à S (Sioux City, en Iowa) est de 300 km. Estimez la valeur de la dérivée de la fonction de pression à Kearney dans la direction de Sioux City. Quelles sont les unités de la dérivée dans cette direction ?



2. Le diagramme de courbes de niveau montre la température maximale moyenne durant le mois de novembre 2004 (en degrés Celsius). Estimez la valeur de la dérivée de cette fonction de température à Dubbo, dans l'Etat de la Nouvelle-Galles du Sud, dans la direction de Sydney. Quelles sont les unités de cette dérivée ?



3. Un tableau de valeurs de l'indice de refroidissement éolien  $E = f(T, v)$  est donné à la question 3 des exercices 4.1 (p. 156). Utilisez ce tableau pour estimer la valeur de  $f_{\vec{u}}(-20, 30)$ , où  $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$ .

4-6 Trouvez la dérivée de  $f$  au point indiqué dans la direction donnée par l'angle  $\theta$ .

- 4.  $f(x, y) = x^2y^3 - y^4$ ,  $(2, 1)$ ,  $\theta = \pi/4$
- 5.  $f(x, y) = ye^{-x}$ ,  $(0, 4)$ ,  $\theta = 2\pi/3$
- 6.  $f(x, y) = x \sin(xy)$ ,  $(2, 0)$ ,  $\theta = \pi/3$

7-10 Trouvez le gradient de  $f$ .

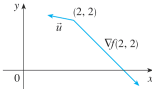
- a) Trouvez le gradient au point  $P$ .
- b) Évaluez le gradient au point  $P$ .
- c) Trouvez le taux de variation de  $f$  en  $P$  dans la direction du vecteur  $\vec{u}$ .

- 7.  $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$ ,  $P(-6, 4)$ ,  $\vec{u} = \frac{1}{5}(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})$
- 8.  $f(x, y) = y^2/x$ ,  $P(1, 2)$ ,  $\vec{u} = \frac{1}{5}(2\vec{i} + \sqrt{5}\vec{j})$
- 9.  $f(x, y, z) = xe^{2y}$ ,  $P(3, 0, 2)$ ,  $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$
- 10.  $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$ ,  $P(1, 3, 1)$ ,  $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

11-17 Trouvez la dérivée de la fonction au point donné dans la direction du vecteur  $\vec{v}$ .

- 11.  $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$ ,  $(3, 4)$ ,  $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$
- 12.  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$
- 13.  $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$ ,  $(2, 1)$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$
- 14.  $g(r, s) = \arctan(rs)$ ,  $(1, 2)$ ,  $\vec{v} = 5\vec{i} + 10\vec{j}$
- 15.  $f(x, y, z) = xe^y + ye^x + ze^x$ ,  $(0, 0, 0)$ ,  $\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
- 16.  $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$ ,  $(3, 2, 6)$ ,  $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$
- 17.  $g(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{3/2}$ ,  $(1, 1, 2)$ ,  $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{k}$

18. Utilisez la figure pour estimer  $f_{\vec{u}}(2, 2)$ .



19. Trouvez la dérivée de  $f(x, y) = \sqrt{xy}$  en  $P(2, 8)$  dans la direction de  $Q(5, 4)$ .

20. Trouvez la dérivée de  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  en  $P(1, -1, 3)$  dans la direction de  $Q(2, 4, 5)$ .

21-26 Trouvez le taux de variation maximal de  $f$  au point donné, puis indiquez dans quelle direction le taux de variation est maximal.

- 21.  $f(x, y) = y^2/x$ ,  $(2, 4)$
- 22.  $f(p, q) = qe^{-p} + pe^{-q}$ ,  $(0, 0)$
- 23.  $f(x, y) = \sin(xy)$ ,  $(1, 0)$
- 24.  $f(x, y, z) = (x + y)z$ ,  $(1, 1, -1)$
- 25.  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $(3, 6, -2)$
- 26.  $f(x, y, z) = \tan(x + 2y + 3z)$ ,  $(-5, 1, 1)$

27. a) Montrez qu'en un point  $\vec{x}$ , une fonction différentiable  $f$  décroît le plus rapidement dans le sens opposé au vecteur gradient, c'est-à-dire dans la direction de  $-\nabla f(\vec{x})$ .

b) Utilisez le résultat dans laquelle la  $f$  plus rapidement a

28. Montrez que  $f_{\vec{u}}(\vec{x}) =$

29. Montrez que si  $f_{\vec{u}}(\vec{x}) =$

30. Trouvez les directions  $f(x, y) = ye^{-x}$  au po

31. Trouvez tous les points maximaux de la fonction  $f$ .

32. Près d'une bouée, coordonnées  $(x, y)$  et  $z$  sont exprimées en mètres. Expliquez votre réponse.

33. La température  $T$  à l'inversement proportionnel à la profondeur, de la b est de  $120^\circ\text{C}$ .

a) Trouvez le taux de direction du point b) Montrez qu'en to l'accroissement  $n$  par un vecteur  $\vec{u}$

34. La température en un point  $(x, y)$

où la température  $T$  est en mètres.

a) Trouvez le taux de  $P(2, -1, 2)$  dans la direction de  $\vec{u}$  b) Dans quelle direction la température change-t-elle le plus rapidement en  $P$ ? c) Calculez le taux de variation de  $T$  en  $P$ .

35. Soit  $V(x, y, z) = 5x^2$  électrique  $V$  dans un point  $(x, y, z)$  dans la direction  $\vec{u}$  b) Dans quelle direction la température change-t-elle le plus rapidement en  $P$ ? c) Calculez le taux de variation de  $V$  en  $P$ .

36. Supposez que vous êtes à l'équateur (60, 40) l'est, et celui des y p a) Si vous marchez par monter ou des