

Intégrale impropre

Rappel :

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue

1) $\int_a^b |f(x)| dx$ représente l'aire délimitée par le graphe de f et les droites $x = a$ et $x = b$

2) Relation de Chasles :

Pour tout $c \in [a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3) S'il existe une fonction différentiable $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

La fonction F s'appelle une primitive de f .

(2)

Définition: On parle d'intégrale impropre si

- I) l'intervalle d'intégration n'est pas borné (type I)
- II) f est discontinue ou non bornée sur l'intervalle (type II)

Exemple:

1) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale impropre car la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ n'est pas bornée sur $[0, 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

2) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale impropre car l'intervalle $[1, +\infty[$ n'est pas borné.

Intégrale impropre de type I

Définition

a) Si $f: [a, +\infty[$ est continue alors on définit

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

Si $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors on définit ③

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

c) On dit que l'intégrale est convergente (ou converge) si la limite existe et est finie. Au cas contraire, on dit qu'elle est divergente (ou diverge).

Exemple

$$\bullet \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\ln|x| \right]_1^t \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln|t| - 0 = +\infty$$

L'intégrale est divergente.

• Soit $p > 0$ avec $p \neq 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^t \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

(4)

$$= \begin{cases} 0 - \frac{1}{1-p} & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

L'intégrale est convergente si $p > 1$ et divergente si $p \leq 1$

Intégrale impropre de type II

a) Si f est continue sur $[a, b]$ et discontinue en b alors on

définit $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$

b) Si f est continue sur $[a, b]$ et discontinue en a , alors

on définit $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$

L'intégrale impropre $\int_a^b f(x) dx$ est dite convergente si la limite qui la définit existe et divergente dans le cas contraire.

c) Si f a une discontinuité en c , où $a < c < b$, et si à la fois $\int_a^c f(x) dx$ et $\int_c^b f(x) dx$ sont convergentes alors on

définit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Exemple

1) Calculer $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$

Solution

Il faut noter avant tout que cette intégrale est impropre car la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ n'est pas définie au point $x = 2$.

On a une discontinuité au point $x = 2$.

On emploie la partie b) de la définition :

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx &= \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} 2\sqrt{x-2} \Big|_t^5 \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

L'intégrale est convergente.

2) Calculer si possible $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$

Solution

On observe que $x = 1$ est une asymptote verticale de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Puisque cette asymptote se situe à l'intérieur de l'intervalle $[0, 3]$, on doit faire appel à la partie c) de la définition :

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1} \quad \text{où}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} [\ln|x-1|]_0^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|)$$

$$= -\infty \text{ parce que } 1-t \rightarrow 0^+ \text{ lorsque } t \rightarrow 1^-$$

Il en résulte que $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ est divergente et de là que

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} \text{ l'est aussi.}$$

Attention :

A défaut d'avoir remarqué que la droite $x=1$ est une asymptote verticale dans l'exemple précédent, on prendrait l'intégrale proposée comme une intégrale ordinaire et on mènerait alors erronément les calculs comme suit :

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Ce résultat est faux parce que l'intégrale est impropre et doit impérativement être calculée avec des limites.

Test de comparaison pour les intégrales imprégnées

Théorème de comparaison : On suppose que f et g sont des fonctions continues telles que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ et pour $x \geq a$.

a) Si $\int_a^\infty f(x) dx$ est convergente alors $\int_a^\infty g(x) dx$ est convergente

b) Si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ est divergente alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est divergente

Exemple

Démontrer que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ est convergente.

Solution

Il n'est pas possible de calculer cette intégrale directement car la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ n'a pas de primitive élémentaire.

On écrit d'abord

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

$\rightarrow \int_0^1 e^{-x^2} dx$ est une intégrale ordinaire

\rightarrow pour tout $x > 1$, on a

$$x^2 > x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-x}]_1^t = e^{-1}$$

par conséquent

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_1^\infty e^{-x} dx = e^{-1}$$

Montrer que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ est divergente

Solution

On a pour tout $x \geq 1$

$$e^{-x} \geq 0$$

$$1 + e^{-x} \geq 1$$

$$\frac{1+e^{-x}}{x} \geq \frac{1}{x}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\ln|x| \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln|t| = +\infty \end{aligned}$$

et

$$\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x} dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x} dx$$

Donc l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ est divergente.