Cours 6 : Les équations différentielles

(1) Modélisation

Exemple 1 : Population sans constraintes

Le taux de croissance d'une population P est proportionnel à sa taille. Cette hypothèse est acceptable quand il s'agit d'une population placée dans des conditions idéales (espace illimité, nourriture abondante, absence de prédateurs, résistance aux maladies, etc). Les variables de ce modèle sont :

t = temps (la variable indépendante)

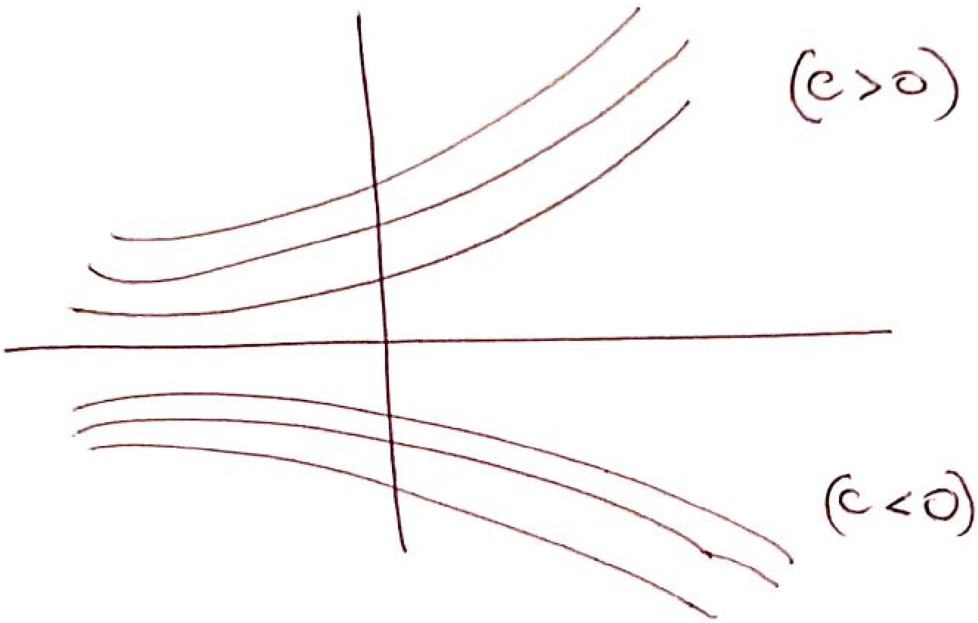
P = le nombre d'individus de la population (variable dépendante)

Le taux de croissance de la population est la dérivée $\frac{dP}{dt}$

L'hypothèse sur la proportionnalité entre ce taux de croissance et l'effectif de la population est traduite par l'équation

$$\frac{dP}{dt} = kP$$ où k est une constante appelée facteur de proportionnalité

- exemples de solutions : $P = ce^{kt}$, c = constante
- forme des solutions pour $k > 0$:



<u>Définition</u>

Une équation différentielle est une équation qui contient une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées.

→ L'<u>ordre</u> d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée présente dans l'équation

→ Une fonction f est appelée <u>solution</u> d'une équation différentielle si l'équation est satisfaite après y avoir remplacé $y = f(x)$ ainsi que ses dérivées.

Exemple 1:

Montrer que chacune des fonctions de la famille

$$y = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$

Solution

$$y = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$$

$$y' = \frac{ce^t(1-ce^t) - (1+ce^t)(-ce^t)}{(1-ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t(1-ce^t+1+ce^t)}{(1-ce^t)^2}$$

$$y' = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}$$

Lorsqu'on remplace y par son expression, le membre de droite devient :

$$\frac{1}{2}(y^2-1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+ce^t}{1-ce^t}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+ce^t)^2-(1-ce^t)^2}{(1-ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{4ce^t}{(1-ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2} = y'$$

Exemple 2 :

Déterminer une solution de l'équation différentielle

$$y' = \frac{1}{2}(y^2-1)$$

qui satisfait à la condition initiale $y(0) = 2$.

Solution

On sait que la famille $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ est une solution

pour $t = 0$ alors $y(0) = 2 \Rightarrow$

$$\frac{1+ce^{(0)}}{1-ce^{(0)}} = 2 \Rightarrow \frac{1+c}{1-c} = 2 \Rightarrow 2-2c = 1+c$$

$$\Rightarrow c = 1/3$$

D'où

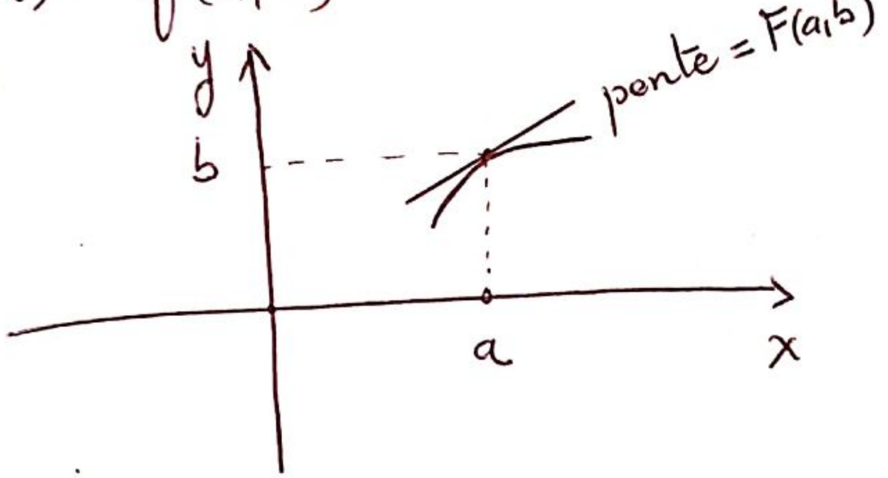
$$y = \frac{1+\frac{1}{3}e^t}{1-\frac{1}{3}e^t} = \frac{3+e^t}{3-e^t}$$

Champs de direction

Problème

On cherche l'allure générale des solutions de l'équation différentielle $y' = F(x, y)$ où f est donnée.

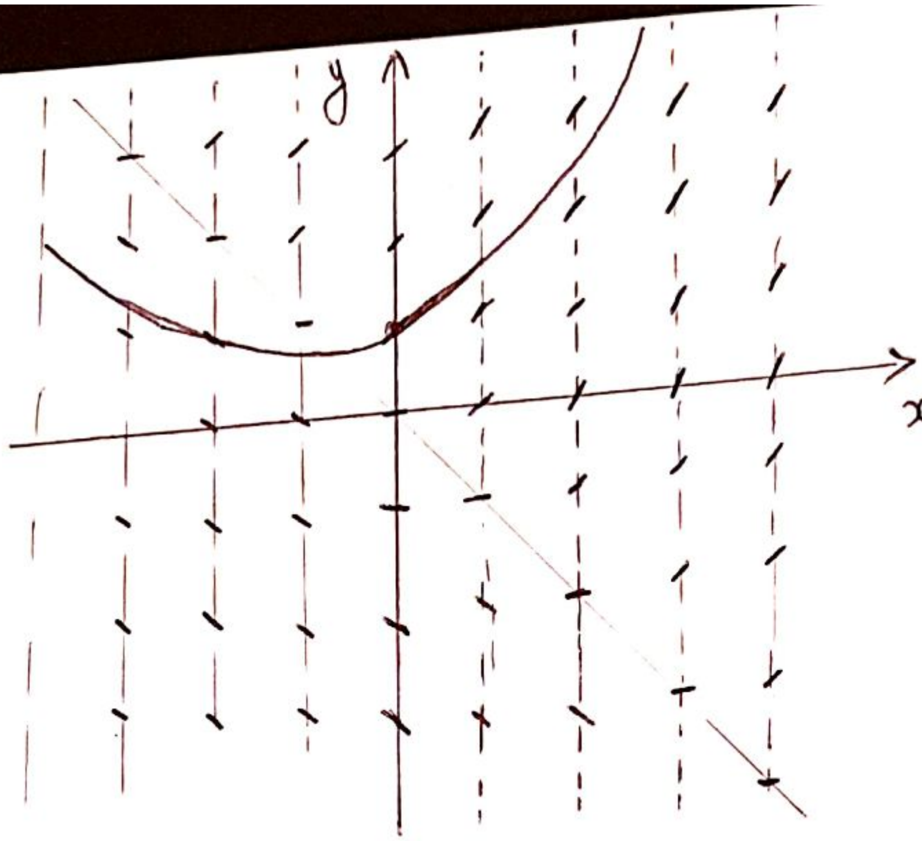
- Si une solution $y = y(x)$ satisfait $y(a) = b$ alors la pente de la tangente à son graphe au point (a, b) est $y'(a) = f(a, b)$



Exemple

$$y' = x + y \quad , \quad y(0) = 1$$

Tracer le champ de direction



Le champ de pente nous permet de visualiser l'allure générale des courbes intégrales car il indique la direction ~~que~~ ces courbes doivent prendre en chaque point.

Nous pouvons maintenant tracer la courbe intégrale qui passe par $(0, 1)$ en suivant la direction du champ

Exemple

a) Tracer le champ de directions de l'équation différentielle

$$y' = x^2 + y^2 - 1$$

b) Utiliser la partie a) pour tracer la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Solution :

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$y' = x^2+y^2-1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4