§ 8.6. Interpolation par splines du 3ème degré :

Définition : Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et soient les points de données $(x_k, f_k = f(x_k))$, $k = 0$ à n, où $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$.

Un spline d'interpolation $S(x)$ de f est une fonction définie par morceaux en utilisant des polynômes (de degré 3, $S_0(x), S_1(x), \ldots, S_n(x)$) qui satisfont les conditions suivantes :

i/ La restriction de $S(x)$ sur $[x_k, x_{k+1}]$ est un polynôme $S_k(x)$ de degré 3. $S_k(x) = a_k + b_k x + c_k x^2 + d_k x^3$, $k = 0$ à n

ii/ $S(x_k) = f(x_k)$, $k = 0$ à n.

iii/ $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0$ à $n-2$.

iv/ $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0$ à $n-2$

v/ $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0$ à $n-2$.

vi/ $S(x)$ satisfait l'une des deux conditions suivantes :

a/ $S''(x_0) = S''_0(x_0) = 0$, $S''(x_n) = S''_n(x_n) = 0$.
Dans ce cas $S(x)$ est dit spline naturel ou aux frontières libres.

b/ $S'(x_0) = f'(x_0) = S'_0(x_0)$, $S'(x_n) = f'(x_n) = S'_n(x_n)$.
Dans ce cas $S(x)$ est dit spline aux pentes ou limites fixées.

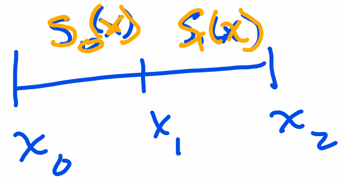
N.B.: • On construit $S(x)$ à partir des conditions i/ à vi/.
• $S(x)$ interpole $f(x)$ sur $[x_0, x_n]$.

Exple: Soient les points $(\underset{x_0}{0}, \underset{f_0}{0})$, $(\underset{x_1}{1}, \underset{f_1}{1})$ et $(\underset{x_2}{2}, \underset{f_2}{4})$. $(n=2)$

a/ Construire $S(x)$, la spline aux frontières libres.

b/ Interpoler $f(0.4)$ par $S(x)$.

a/ On doit avoir:



$$(*)\quad \begin{cases} S_0(x_0) = f_0 \\ S_0(x_1) = S_1(x_1) \\ S_1(x_2) = f_2 \\ S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \\ S_0''(x_1) = S_1''(x_1) \\ S_1(x_1) = f_1 \\ S_0''(x_0) = 0 \\ S_1''(x_2) = 0 \end{cases}$$

Donc si $S_0(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3$ et $S_1(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3$

alors $(*)$ devient: $\left(S_i'(x) = b_i + 2c_i x + 3d_i x^2 \ ; \ S_i''(x) = 2c_i + 6d_i x \right)$

$$\begin{cases} a_0 = 0 & \Longrightarrow \boxed{a_0 = 0} \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1 \\ a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 4 \\ a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 & \Longleftrightarrow b_0 + d_0 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \\ b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 + 2c_1 + 3d_1 & \Longleftrightarrow b_0 + 3d_0 = b_1 + 2c_1 + 3d_1 \\ 2c_0 + 6d_0 = 2c_1 + 6d_1. & \Longleftrightarrow 6d_0 = 2c_1 + 6d_1 \\ 2c_0 = 0 & \Longrightarrow \boxed{c_0 = 0} \\ 2c_1 + 12d_1 = 0 & \Longleftrightarrow c_1 + 6d_1 = 0. \end{cases}$$

On résout ce système linéaire pour b_0, d_0, a_1, b_1, c_1 et d_1.

La Matrice augmentée est:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
b_0 & d_0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \\
\hline
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 & 4 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
1 & 3 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0
\end{array}
\longrightarrow \cdots \longrightarrow
$$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
b_0 & d_0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -5/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2
\end{array}
$$

Donc on a

$$S_0(x) = \frac{x + x^3}{2}$$

et

$$S_1(x) = 1 - \frac{5}{2}x + 3x^2 - \frac{x^3}{2}$$

(Vérification : $S_0(0) = 0$, $S_1(1) = 1$ ✓
$S_0(1) = 1$ ✓)

D'où

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{x + x^3}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{5}{2}x + 3x^2 - \dfrac{x^3}{2}, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \longleftarrow 0.4 = x$$

b/ Donc $\boxed{f(0.4) \simeq S(0.4) = S_0(0.4) = 0.232}$

(Ici $f(x) = x^2 \Rightarrow f(0.4) = 0.16$)

Donc cette spline ne donne pas de bonnes approximations.