EXEMPLE 9 Trouvons $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Comparez la solution de l'exemple 9 à celle de l'exemple 5 de la section 4.1.

SOLUTION On pose $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Les équations 7 donnent

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

Exercices 4.3

1-6 Utilisez la règle de dérivation en chaîne pour trouver dz/dt ou dw/dt.

1. $z = xy^3 - x^2y$, $x = t^2 + 1$, $y = t^2 - 1$
2. $z = \frac{x - y}{x + 2y}$, $x = e^{\pi t}$, $y = e^{-\pi t}$
3. $z = \sin x \cos y$, $x = \sqrt{t}$, $y = 1/t$
4. $z = \sqrt{1 + xy}$, $x = \tan t$, $y = \arctan t$
5. $w = xe^{y/z}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$
6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \tan t$

7-12 Utilisez la règle de dérivation en chaîne pour trouver $\partial z/\partial s$ et $\partial z/\partial t$.

7. $z = (x - y)^5$, $x = s^2t$, $y = st^2$
8. $z = \tan^{-1}(x^2 + y^2)$, $x = s \ln t$, $y = te^s$
9. $z = \ln(3x + 2y)$, $x = s \sin t$, $y = t \cos s$
10. $z = \sqrt{x}e^{xy}$, $x = 1 + st$, $y = s^2 - t^2$
11. $z = e^r \cos\theta$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$
12. $z = \tan(u/v)$, $u = 2s + 3t$, $v = 3s - 2t$

13. Soit $p(t) = f\big(g(t), h(t)\big)$ avec f différentiable et les données suivantes.

$$g(2) = 4 \qquad h(2) = 5$$
$$g'(2) = -3 \qquad h'(2) = 6$$
$$f_x(4, 5) = 2 \qquad f_y(4, 5) = 8$$

Calculez $p'(2)$.

14. Soit $R(s, t) = G\big(u(s, t), v(s, t)\big)$ avec G, u et v différentiables et les données suivantes.

$$u(1, 2) = 5 \qquad v(1, 2) = 7$$
$$u_s(1, 2) = 4 \qquad v_s(1, 2) = 2$$
$$u_t(1, 2) = -3 \qquad v_t(1, 2) = 6$$
$$G_u(5, 7) = 9 \qquad G_v(5, 7) = -2$$

Calculez $R_s(1, 2)$ et $R_t(1, 2)$.

15. Supposez que f est une fonction différentiable de x et de y, et que $g(u, v) = f(e^u + \sin v, e^u + \cos v)$. Utilisez le tableau de valeurs pour estimer $g_u(0, 0)$ et $g_v(0,0)$.

	f	y	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Supposez que f est une fonction différentiable de x et de y, et que $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Utilisez le tableau de valeurs de l'exercice 15 pour estimer $g_r(1, 2)$ et $g_s(1, 2)$.

17-20 Utilisez un arbre pour appliquer la règle de dérivation en chaîne aux fonctions données. Supposez que toutes les fonctions sont différentiables.

17. $u = f(x, y)$ avec $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$
18. $w = f(x, y, z)$ avec $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$
19. $T = F(p, q, r)$ avec $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$, $r = r(x, y, z)$
20. $R = F(t, u)$ avec $t = t(w, x, y, z)$, $u = u(w, x, y, z)$

21-26 Trouvez les dérivées partielles indiquées à l'aide de la règle d'enchaînement.

21. $z = x^4 + x^2y$, $x = s + 2t - u$, $y = stu^2$;
$\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ lorsque $s = 4$, $t = 2$, $u = 1$
22. $T = \frac{v}{2u + v}$, $u = pq\sqrt{r}$, $v = p\sqrt{q}\,r$;
$\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial q}$, $\frac{\partial T}{\partial r}$ lorsque $p = 2$, $q = 1$, $r = 4$
23. $w = xy + yz + zx$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r\theta$;
$\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ lorsque $r = 2$, $\theta = \pi/2$
24. $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $u = xe^y$, $v = ye^x$, $w = e^{xy}$;
$\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ lorsque $x = 0$, $y = 2$