

# Поток Риччи и гипотеза Пуанкаре

Джон В. Морган и Ганг Тянь

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>6</b>
1 Обзор аргументов Перельмана	7
2 Основы геометрии Римана	17
3 Основы потока Риччи	17
4 Достижения Перельмана	17
5 Стандартное решение и процесс хирургии	17
6 Расширение потоков Риччи с хирургией	17
7 Исчезновение за конечное время	17
8 Благодарности	17
9 Список связанных статей	17
<b>Глава 1. Введение в геометрию Римана</b>	<b>18</b>
1 Метрика Римана и связность Леви-Чивиты	18
2 Кривизна Риманового многообразия	18
3 Геодезические и экспоненциальное отображение	18
4 Вычисления в Гауссовых нормальных координатах	18
5 Основные результаты сравнения кривизны	18
6 Локальный объем и радиус инъективности	18
<b>Глава 2. Многообразия с неотрицательной кривизной</b>	<b>19</b>
1 Функции Буземана	19
2 Результаты сравнения в случае неотрицательной кривизны	19
3 Теорема о душе	19
4 Концы многообразия	19
5 Теорема расщепления	19
6 $\epsilon$ -шейки	19
7 Коэффициенты прямой разницы	19
<b>Глава 3. Основы потока Риччи</b>	<b>20</b>
1 Определение потока Риччи	20
2 Некоторые точные решения потока Риччи	20
3 Локальная существомость и единственность	20
4 Эволюция кривизны	20
5 Эволюция кривизны в развивающейся ортонормальной системе	20
6 Изменение расстояния под действием потока Риччи	20
7 Оценки производных $\text{Ric}$	20
8 Обобщенные потоки Риччи	20
<b>Глава 4. Принцип максимума</b>	<b>21</b>
1 Принцип максимума для скалярной кривизны	21
2 Принцип максимума для тензоров	21
3 Применения принципа максимума	21
4 Сильный принцип максимума для кривизны	21
5 Сужение к положительной кривизне	21

<b>Глава 5. Результаты сходимости для потока Риччи</b>	<b>22</b>
1 Геометрическая сходимость Римановых многообразий	22
2 Геометрическая сходимость потоков Риччи	22
3 Сходимость Громова–Хаусдорфа	22
4 Пределы при увеличении масштаба	22
5 Расщепление пределов на бесконечности	22
<b>Глава 6. Геометрический подход к потоку Риччи через сравнения</b>	<b>23</b>
1 $\mathcal{L}$ -длина и $\mathcal{L}$ -геодезические	23
2 $\mathcal{L}$ -экспоненциальное отображение и его свойства первого порядка	23
3 Минимизирующие $\mathcal{L}$ -геодезические и область инъективности	23
4 Дифференциальные неравенства второго порядка для $\tilde{L}^{\tau}$ и $L_x^{\tau}$	23
5 Сокращённая длина	23
6 Локальные оценки Липшица для $l_x$	23
7 Сокращённый объём	23
<b>Глава 7. Полные потоки Риччи с ограниченной кривизной</b>	<b>24</b>
1 Функции $L_x$ и $l_x$	24
2 Оценка для $\min l_x^{\tau}$	24
3 Сокращённый объём	24
<b>Глава 8. Результаты о несхлопывающихся многообразиях</b>	<b>25</b>
1 Результат о несхлопывании для обобщённых потоков Риччи	25
2 Применение к компактным потокам Риччи	25
<b>Глава 9. <math>\kappa</math>-несхлопывающиеся древние решения</b>	<b>26</b>
1 Предварительные замечания	26
2 Асимптотический градиентный сокращающий солитон для $\kappa$ -решений	26
3 Расщепление пределов на бесконечности	26
4 Классификация градиентных сокращающих солитонов в размерностях 2 и 3	26
5 Универсальный $\kappa$	26
6 Асимптотический объём	26
7 Компактность пространства 3-мерных $\kappa$ -решений	26
8 Качественное описание $\kappa$ -решений	26
<b>Глава 10. Ограниченная кривизна на ограниченном расстоянии</b>	<b>27</b>
1 Сужение к положительному: определения	27
2 Формулировка теоремы	27
3 Неполный геометрический предел	27
4 Пределы конуса возле конца $\mathcal{E}$ для рескейлингов $U_{\infty}$	27
5 Сравнение предела Громова–Хаусдорфа и гладкого предела	27
6 Финальное противоречие	27

<b>Глава 11. Основы потока Риччи</b>	<b>28</b>
1 Гладкий предел при увеличении масштаба, определённый для малого времени	28
2 Пределы при долгом времени увеличения масштаба	28
3 Неполные гладкие пределы в сингулярные моменты	28
4 Существование сильных $\delta$ -шеек, достаточно глубоких в $2\epsilon$ -горне	28
<b>Глава 12. Стандартное решение</b>	<b>29</b>
1 Существование стандартного потока	29
2 Полнота, положительная кривизна и асимптотическое пове- дение	29
3 Стандартные решения являются вращательно симметричными	29
4 Единственность	29
5 Решение потока гармонических отображений	29
6 Завершение доказательства единственности	29
7 Некоторые следствия	29
<b>Глава 13. Хирургия на <math>\delta</math>-шейке</b>	<b>30</b>
1 Нотация и формулировка результата	30
2 Предварительные вычисления	30
3 Доказательство теоремы 13.2	30
4 Другие свойства результата хирургии	30
<b>Глава 14. Поток Риччи с хирургией: определение</b>	<b>31</b>
1 Пространство-время хирургии	31
2 Обобщённое уравнение потока Риччи	31
<b>Глава 15. Контролируемые потоки Риччи с хирургией</b>	<b>32</b>
1 Сшивание развивающихся шеек	32
2 Топологические следствия предположений (1) – (7)	32
3 Дополнительные условия для хирургии	32
4 Процесс хирургии	32
5 Утверждения о существовании потока Риччи с хирургией	32
6 Контурные доказательства теоремы 15.9	32
<b>Глава 16. Доказательство несхлопывания</b>	<b>33</b>
1 Формулировка результата о несхлопывании	33
2 Доказательство несхлопывания при $R(x) = r^{-2}$ с $r \leq r_{i+1}$	33
3 Минимизирующие $\mathcal{L}$ -геодезические существуют, когда $R(x) =$ $r_{i+1}^{-2}$ : формулировка	33
4 Эволюция окрестностей хирургических кап	33
5 Оценка длины	33
6 Завершение доказательства пропозиции 16.1	33
<b>Глава 17. Завершение доказательства теоремы 15.9</b>	<b>34</b>
1 Доказательство сильного предположения о канонических окрест- ностях	34

2	Время хирургии не накапливается	34
<b>Глава 18. Истечение до конечного времени</b>		<b>35</b>
1	Результат	35
2	Исчезновение компонент с нетривиальной $\pi_2$	35
3	Истечение	35
4	Поток сжимающихся кривых	35
5	Доказательство пропозиции 18.24	35
6	Доказательство леммы 18.59: кольца с маленькой площадью	35
7	Доказательство первой неравенства в лемме 18.52	35
<b>Глава 19. Приложение: Канонические окрестности</b>		<b>36</b>
1	Укорочение кривых	36
2	Геометрия $\epsilon$ -шеек	36
3	Перекрывающиеся $\epsilon$ -шейки	36
4	Области, покрытые $\epsilon$ -шейками и $(C, \epsilon)$ -капами	36
5	Подмножества объединения ядер $(C, \epsilon)$ -кап и $\epsilon$ -шеек	36
<b>Список литературы</b>		<b>37</b>

## Введение

В этой книге представлено полное и детализированное доказательство

**гипотезы Пуанкаре: всякое замкнутое, гладкое  
односвязное 3-многообразие диффеоморфно<sup>1</sup>  $S^3$**

Эта гипотеза была сформулирована Анри Пуанкаре [58] в 1904 году и оставалась открытой до недавней работы Перельмана. Аргументы, представленные здесь, являются детализированной версией тех, которые встречаются в трех препринтах Перельмана [53, 55, 54]. Аргументы Перельмана опираются на фундамент, созданный Ричардом Гамильтоном, с его исследованием уравнения потока Риччи для Римановых метрик. На самом деле, Гамильтон считал, что потоки Риччи можно использовать для установления гипотезы Пуанкаре и более общих результатов топологической классификации в размерности 3, и разработал программу для достижения этой цели. Трудность заключалась в том, чтобы справиться с особенностями в потоках Риччи. Прорыв Перельмана заключался в том, чтобы понять качественную природу особенностей достаточно хорошо, чтобы позволить ему доказать гипотезу Пуанкаре (и теорему 0.1 ниже, которая подразумевает гипотезу Пуанкаре). Для подробной истории гипотезы Пуанкаре см. обзорную статью Мильнора [50].

Класс примеров, тесно связанных с 3-сферой, составляют *3-мерные сферические пространственные формы*, т.е. отношения  $S^3$  по свободным линейным действиям конечных подгрупп ортогональной группы  $O(4)$ . Существует обобщение гипотезы Пуанкаре, называемое **гипотезой 3-мерных сферических пространственных форм**, которое утверждает, что любое замкнутое 3-мерное многообразие с конечной фундаментальной группой диффеоморфно 3-мерной сферической пространственной форме. Очевидно, что частным случаем гипотезы 3-мерных сферических пространственных форм является гипотеза Пуанкаре.

Как указано в замечании 1.4 в [54], аргументы, представленные здесь, не только доказывают гипотезу Пуанкаре, но и дока-

---

<sup>1</sup>Каждое топологическое 3-мерное многообразие обладает дифференцируемой структурой, и каждый гомеоморфизм между гладкими 3-мерными многообразиями может быть сведён к диффеоморфизму. Таким образом, результаты классификации топологических 3-мерных многообразий до гомеоморфизма и гладких 3-мерных многообразий до диффеоморфизма эквивалентны. В этой книге под «многообразием» подразумевается «гладкое многообразие».

зывают гипотезу 3-мерных пространственных форм. На самом деле, цель этой книги — доказать следующую более общую теорему.

**ТЕОРЕМА 0.1.** *Пусть  $M$  — замкнутое, связное 3-мерное многообразие, и пусть фундаментальная группа  $M$  является свободным произведением конечных групп и бесконечных циклических групп. Тогда  $M$  диффеоморфно связной сумме сферических пространственных форм, копий  $S^2 \times S^1$  и копий уникального (до диффеоморфизма) неориентируемого 2-сферического расслоения над  $S^1$ .*

Это немедленно означает положительное разрешение гипотезы Пуанкаре и гипотезы 3-мерных сферических пространственных форм.

**СЛЕДСТВИЕ 0.2.** *(a) Замкнутое, просто связное 3-мерное многообразие диффеоморфно  $S^3$ . (b) Замкнутое 3-мерное многообразие с конечной фундаментальной группой диффеоморфно 3-мерной сферической пространственной форме.*

Прежде чем перейти к более подробному описанию содержания этой книги, стоит сделать одно замечание относительно стиля изложения. Из-за важности и заметности обсуждаемых результатов, а также из-за множества неверных утверждений о доказательствах этих результатов в прошлом, мы посчитали необходимым представить аргументы с большой детализацией. Наша цель состояла в том, чтобы сделать эти аргументы ясными и убедительными, а также более доступными для широкой аудитории. В результате эксперты могут посчитать некоторые моменты излишне подробно изложенными.

## 1 Обзор аргументов Перельмана

В размерностях, меньших или равных трём, любая риманова метрика с постоянной кривизной Риччи имеет постоянную секционную кривизну. Классические результаты в римановой геометрии показывают, что универсальное покрытие замкнутого многообразия с постоянной положительной кривизной диффеоморфно сфере, а фундаментальная группа идентифицируется с

конечной подгруппой ортогональной группы, которая действует линейно и свободно на универсальном покрытии. Таким образом, можно подойти к гипотезе Пуанкаре и более общей проблеме 3-мерных сферических пространственных форм, задав следующий вопрос. С учетом соответствующих предположений о фундаментальной группе 3-мерного многообразия  $M$ , как установить существование метрики с постоянной кривизной Риччи на  $M$ ? Основным элементом для создания такой метрики является уравнение потока Риччи, введённое Ричардом Гамильтоном в [29]:

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t))$$

Где  $Ric(g(t))$  — это кривизна Риччи метрики  $g(t)$ . Фиксированные точки (с точностью до масштабирования) этого уравнения — римановы метрики с постоянной кривизной Риччи. Для общего введения в тему потоков Риччи см. обзорную статью Гамильтона [34], книгу Чоу и Кнопфа [13] или книгу Чоу, Лу и Ни [14]. Уравнение потока Риччи — это (слабо) параболическое уравнение в частных производных для римановых метрик на гладком многообразии. Следуя Гамильтону, поток Риччи определяется как семейство римановых метрик  $g(t)$  на фиксированном гладком многообразии, параметризованное параметром  $t$  на некотором интервале, которое удовлетворяет этому уравнению. Параметр  $t$  интерпретируется как время, а уравнение рассматривается как задача Коши: начиная с любого риманова многообразия  $(M, g_0)$ , требуется найти поток Риччи с начальной метрикой  $g_0$ ; то есть найти однопараметрическое семейство  $(M, g(t))$  римановых многообразий, где  $g(0) = g_0$ , удовлетворяющее уравнению потока Риччи. Это уравнение справедливо в любых размерностях, однако здесь мы сосредотачиваемся на трёхмерном случае. Вкратце, метод доказательства заключается в том, чтобы начать с любой римановой метрики на заданном гладком 3-мерном многообразии и применить к ней поток Риччи, чтобы получить метрику с постоянной кривизной, которую мы ищем. Есть два примера, где этот метод работает именно так, оба принадлежат Гамильтону.

(i) Если начальная метрика имеет положительную кривизну Риччи, Гамильтон доказал более 20 лет назад ([29]), что при потоке Риччи многообразие сжимается до точки за конечное время, то



есть возникает сингулярность в конечное время, и, по мере приближения к сингулярности, диаметр многообразия стремится к нулю, а кривизна стремится к бесконечности в каждой точке. Гамильтон также показал, что в этом случае скейлинг метрики с помощью зависящей от времени функции, так чтобы диаметр оставался постоянным, приводит к однопараметрическому семейству метрик, которые гладко сходятся к метрике с постоянной положительной кривизной.

(ii) На другом крайнем случае, в работе [36] Гамильтон показал, что если поток Риччи существует для любого времени и если выполняются соответствующие ограничения на кривизну, а также другое геометрическое ограничение, то при  $t \rightarrow \infty$ , после скейлинга для фиксированного диаметра, метрика сходится к метрике с постоянной отрицательной кривизной.

Результаты в общем случае значительно сложнее для формулировки и намного труднее для доказательства. Хотя Гамильтон установил, что уравнение потока Риччи обладает свойствами краткосрочного существования, то есть можно определить  $g(t)$  для  $t$  на интервале  $[0, T)$ , где  $T$  зависит от начальной метрики, оказывается, что если топология многообразия достаточно сложна, например, оно представляет собой нетривиальную связанную сумму, то независимо от начальной метрики неизбежно возникнут сингулярности за конечное время, вызванные топологией. Более того, даже если многообразие имеет простую топологию, начиная с произвольной метрики, можно ожидать (и нельзя исключить возможность) возникновения сингулярностей за конечное время в потоке Риччи. Эти сингулярности, в отличие от случая положительной кривизны Риччи, появляются на правильных подмножествах многообразия, а не на всем многообразии. Таким образом, для вывода топологических последствий, указанных выше, в общем случае недостаточно остановить анализ в момент появления первой сингулярности в потоке Риччи. Это приводит к изучению более общего процесса эволюции, называемого *потоком Риччи с хирургией*, впервые введенного Гамильтоном в контексте четырехмерных многообразий. Этот процесс эволюции также параметризован интервалом времени, так что для каждого  $t$  из интервала определения существует компактное риманово трехмерное многообразие  $M_t$ . Однако существует дискретный набор моментов времени, в ко-

торых многообразия и метрики претерпевают топологические и метрические разрывы (хирургии). В каждом из интервалов между такими моментами эволюция подчиняется обычному потоку Риччи, но из-за хирургии топологический тип многообразия  $M_t$  меняется при переходе из одного интервала в следующий. С аналитической точки зрения хирургии в моменты разрывов вводятся для того, чтобы ‘вырезать’ окрестности сингулярностей по мере их развития и вручную вставить вместо ‘вырезанных’ областей геометрически правильные регионы. Это позволяет продолжить (точнее, перезапустить) поток Риччи с новой метрикой, построенной в момент разрыва. Конечно, процесс хирургии также изменяет топологию. Чтобы можно было сделать полезные топологические выводы о таком процессе, необходимо как иметь результаты о потоке Риччи, так и контролировать топологию и геометрию процесса хирургии в моменты сингулярностей. Например, важно для топологических приложений, чтобы хирургии выполнялись вдоль 2-сфер, а не поверхностей более высокого рода. Хирургия вдоль 2-сфер создает разложение на связанные суммы, которое хорошо изучено в топологии, в то время как, например, операции Дена вдоль торов могут полностью разрушить топологию, превращая любое трехмерное многообразие в любое другое.

Изменение топологии оказывается полностью понятным, и, что удивительно, процессы хирургии создают именно те топологические операции, которые необходимы, чтобы разрезать многообразие на части, где поток Риччи может сформировать метрики, достаточно контролируемые для распознавания топологии.

Основная часть этой книги (главы 1–17 и приложение) посвящена установлению следующего результата о долгосрочном существовании потока Риччи с хирургией.

**ТЕОРЕМА 0.3.** *Пусть  $(M, g_0)$  — замкнутое риманово трехмерное многообразие. Предположим, что в  $M$  нет вложенных, локально разделенных областей<sup>2</sup>  $RP^2$ . Тогда существует поток Риччи с хирургией, определенный для всех  $t \in [0, \infty)$  с начальной метрикой  $(M, g_0)$ . Множество моментов разрывов для этого*

<sup>2</sup>Т.е. в  $M$  нет вложенных  $RP^2$  с тривиальным нормальным расслоением. Очевидно, все ориентируемые многообразия удовлетворяют этому условию.

потока Риччи с хирургией является дискретным подмножеством  $[0, \infty)$ . Топологическое изменение трёхмерного многообразия при прохождении через момент хирургии представляет собой разложение на связанную сумму с удалением связанных компонент, каждая из которых диффеоморфна одному из следующих многообразий:  $S^2 \times S^1$ ,  $RP^3 \# RP^3$ , не-ориентируемое расслоение над  $S^1$  с базой  $S^2$ , или многообразие, допускающее метрику с постоянной положительной кривизной.

Хотя Теорема 0.3 является ключевой для всех приложений потока Риччи к топологии трёхмерных многообразий, доказательство для трёхмерных многообразий, описанных в Теореме 0.1, упрощено и избегает любых ссылок на поведение потока при стремлении времени к бесконечности благодаря следующему результату о конечновременном вырождении.

**ТЕОРЕМА 0.4.** Пусть  $M$  — замкнутое 3-многообразие, фундаментальная группа которого является свободным произведением конечных групп и бесконечных циклических групп<sup>3</sup>. Пусть  $g_0$  — произвольная риманова метрика на  $M$ . Тогда  $M$  не содержит локально разделяющихся  $RP^2$ , так что поток Риччи с хирургией, определённый для любого положительного времени, может быть задан, начиная с метрики  $(M, g_0)$ , как описано в Теореме 0.3. Этот поток Риччи с хирургией завершает своё существование через конечное время  $T < \infty$  в том смысле, что многообразия  $M_t$  пусты для всех  $t \geq T$ .

Этот результат устанавливается в главе 18, следуя доводу, предложенному Перельманом в [54], см. также [15].

Мы можем вывести Теорему 0.1 напрямую из Теорем 0.3 и 0.4 следующим образом: Пусть  $M$  — 3-многообразие, удовлетворяющее гипотезе Теоремы 0.1. Тогда существует конечная последовательность  $M = M_0, M_1, \dots, M_k = \emptyset$ , такая, что для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $M_i$  получается из  $M_{i-1}$  либо с помощью разложения на связную сумму, либо путём удаления компоненты, диффеоморфной одной из следующих:  $S^2 \times S^1$ ,  $RP^3 \# RP^3$ , неориентируемого расслоения с базой  $S^1$  и слоем  $S^2$ , или трёхмерной

<sup>3</sup>В [54] Перельман утверждает результат для 3-многообразий без простых факторов (неделимых многообразий), которые являются ациклическими. Это стандартное упражнение в топологии 3-многообразий — показать, что условие Перельмана эквивалентно гипотезе из теории групп, изложенной здесь; см. Следствие 0.5.

сферической пространственной формы.

Очевидно, по нисходящей индукции по  $i$  следует, что каждая связная компонента  $M_i$  диффеоморфна связной сумме трёхмерных сферических пространственных форм, копий  $S^2 \times S^1$  и копий неориентируемого расслоения с базой  $S^1$  и слоем  $S^2$ . В частности,  $M = M_0$  имеет эту форму. Так как  $M$  предположительно связно, это доказывает теорему. Более того, этот довод доказывает следующее:

**СЛЕДСТВИЕ 0.5.** Пусть  $(M_0, g_0)$  — связное риманово многообразие, не содержащее локально разделяющихся  $RP^2$ . Пусть  $(M, G)$  — поток Риччи с хирургией, определённый для  $0 \leq t < \infty$ , с  $(M_0, g_0)$  в качестве начального многообразия. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

1.  $(M, G)$  прекращает своё существование за конечное время, то есть  $M_T = \emptyset$  для всех достаточно больших  $T$ .
2.  $M_0$  диффеоморфно связной сумме трёхмерных сферических пространственных форм и расслоений  $S^2$  над  $S^1$ .
3. Фундаментальная группа  $M_0$  является свободным произведением конечных групп и бесконечных циклических групп.
4. Ни один простой<sup>4</sup> фактор  $M_0$  не является ациклическим, то есть каждый простой фактор  $M_0$  имеет либо нетривиальную  $\pi_2$ , либо нетривиальную  $\pi_3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Повторное применение Теоремы 0.3 показывает, что (1) влечёт (2). Импликация (2) влечёт (3), что непосредственно следует из теоремы ван Кампена. То, что (3) влечёт (1), доказывается Теоремой 0.4. Таким образом, (1), (2) и (3) эквивалентны. Поскольку трёхмерные сферические пространственные формы и расслоения  $S^2$  над  $S^1$  очевидно являются простыми, (2) влечёт (4). Остаётся показать, что (4) влечёт (3). Рассмотрим многообразие  $M$ , удовлетворяющее (4), простой фактор  $P$  многообразия  $M$ , и его универсальное накрытие  $\tilde{P}$ . Сначала

<sup>4</sup>Трёхмерное многообразие  $P$  называется простым, если любая разделяющая двумерная сфера в  $P$  ограничивает трёхмерный шар в  $P$ . Эквивалентно,  $P$  является простым, если не допускает нетривиального разложения в виде связной суммы. Каждое замкнутое трёхмерное многообразие раскладывается в связную сумму простых факторов, причём это разложение единственно с точностью до диффеоморфизма и порядка факторов.

предположим, что  $\pi_2(P) = \pi_2(\tilde{P})$  тривиальна. Тогда, по гипотезе,  $\pi_3(P) = \pi_3(\tilde{P})$  нетривиальна. По теореме Хуревича это означает, что  $H_3(\tilde{P})$  нетривиальна, а значит,  $\tilde{P}$  является компактным, просто связным трёхмерным многообразием. Следовательно,  $\pi_1(P)$  конечна. Теперь предположим, что  $\pi_2(P)$  нетривиальна. Тогда  $P$  не диффеоморфно  $RP^3$ . Поскольку  $P$  является простым и не содержит локально разделяющихся  $RP^2$ , оно не содержит вложенных  $RP^2$ . По теореме о сферах в  $P$  существует вложенная двумерная сфера, которая гомотопически нетривиальна. Поскольку  $P$  просто, эта сфера не может разделять, поэтому рассечение  $P$  вдоль этой сферы приводит к связному многообразию  $P_0$  с двумя краевыми сферами. Поскольку  $P_0$  является простым, оно диффеоморфно  $S^2 \times I$ , а следовательно,  $P$  диффеоморфно расслоению двумерной сферы над окружностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.6. (i) Использование теоремы о сферах не является необходимым в приведённом выше доказательстве, поскольку мы фактически доказываем, что если каждый простой фактор  $M$  имеет нетривиальную  $\pi_2$  или  $\pi_3$ , то поток Риччи с хирургией, начальным многообразием которого является  $(M, g_0)$ , прекращает своё существование за конечное время. Фактически, теорема о сферах для замкнутых трёхмерных многообразий вытекает из изложенных здесь результатов.

(ii) Если начальное многообразие проще, то и все срезы по времени проще: если  $(M, G)$  — это поток Риччи с хирургией, начальное многообразие которого является простым, то каждый срез по времени представляет собой несвязное объединение компонент, причём все, кроме, возможно, одной, диффеоморфны трёхмерной сфере, а если есть одна, которая не диффеоморфна трёхмерной сфере, то она диффеоморфна начальному многообразию. Если начальное многообразие  $M_0$  является просто связным, то каждая компонента каждого среза по времени  $M_T$  должна быть просто связной, и, следовательно, *апостериори* каждый срез по времени представляет собой несвязное объединение многообразий, диффеоморфных трёхмерной сфере. Аналогично, если начальное многообразие имеет конечную фундаментальную группу, то каждая связная компонента каждого среза по времени либо просто связна, либо имеет ту же фундаментальную груп-

пу, что и начальное многообразие.

(iii) Заключение этого результата является естественным обобщением вывода Гамильтона при анализе потока Риччи на многообразиях с положительной кривизной Риччи в [29]. А именно, при выполнении соответствующих условий в процессе эволюции потока Риччи с хирургией многообразие распадается на компоненты, каждая из которых исчезает за конечное время. Когда компонент исчезает в некоторый конечный момент времени, метрика на этом компоненте достаточно хорошо контролируется, чтобы показать, что исчезающий компонент допускает неплоскую, однородную риманову метрику с неотрицательной секционной кривизной, то есть метрику, локально изометричную либо круглой  $S^3$ , либо произведению круглой  $S^2$  с обычной метрикой на  $R$ . Наличие такой метрики на компоненте сразу даёт топологический вывод из Теоремы 0.1 для этого компонента, а именно, что он диффеоморфен трёхмерной сферической форме пространства,  $S^2 \times S^1$ , неориентируемому расслоению двумерной сферы над  $S^1$  или  $RP^3 \# RP^3$ . Главным отличием между этими двумя результатами является то, что условие Гамильтона является геометрическим (положительная кривизна Риччи), тогда как условие Перельмана относится к теории гомотопий (информация о фундаментальной группе).

(iv) Также стоит отметить, что из Следствия 0.5 вытекает: многообразия, удовлетворяющие четырём эквивалентным условиям из этого следствия, которые именно что замкнутые, связные и трёхмерные, допускающие риманову метрику с положительной скалярной кривизной (см. [62] и [26]).

Можно использовать поток Риччи для более общего исследования трёхмерных многообразий, чем то, которое мы проводим здесь. Существует гипотеза, выдвинутая Тёрстоном, см. [69], известная как Гипотеза Геометризации Тёрстона или просто Гипотеза Геометризации для трёхмерных многообразий. Она предполагает, что каждое 3-многообразие, не содержащее локально разделяющих  $RP^2$  (в частности, каждое ориентируемое 3-многообразие), является связанной суммой простых 3-многообразий, каждое из которых допускает разложение вдоль несжимаемых<sup>5</sup> (не стягиваемых?) торов на части, которые допускают локально

---

<sup>5</sup>То есть, вложенные с помощью отображения, инъективного на  $\pi_1$

однородные геометрии конечного объёма. За исключением вопросов о конечных объёмах решёток в  $SL_2(C)$ , доказательство этой гипотезы приводит к полному классификационному результату для 3-многообразий без локально разделяющих  $RP^2$ , а также к полной классификации всех ориентируемых 3-многообразий. (См. обзорную статью Питера Скотта [63].) Путём перехода к двойному покрытию по ориентации и работы с эквивариантными методами эти результаты могут быть распространены на все 3-многообразия.

Перельман в [55] представил результаты, которые подразумевают положительное разрешение Гипотезы Геометризации Тёрстона. Предложенное Перельманом доказательство Гипотезы Геометризации Тёрстона в существенной степени зависит от Теоремы 0.3, а именно от существования потока Риччи с хирургией для всего положительного времени. Однако оно также включает дальнейший анализ пределов этих потоков Риччи, когда время стремится к бесконечности. Этот дальнейший анализ включает аналитические аргументы, изложенные в Разделах 6 и 7 второго документа Перельмана ([55]), следуя более ранней работе Гамильтона ([36]) в более простом случае ограниченной кривизны. Они также включают результат (Теорема 7.4 из [55]) из теории многообразий с локально ограниченной снизу кривизной, которые коллапсируют, связанный с результатами Шиоя-Ямагучи [67]. Эти результаты Шиоя-Ямагучи в свою очередь опираются на более раннюю неопубликованную работу Перельмана, доказывающую так называемую «Теорему о стабильности». Недавно Капович, [43], опубликовал препринт, в котором представлено доказательство результата о стабильности. Мы исследуем другой подход, предложенный Перельманом в [55], который избегает использования теоремы о стабильности, см. [44] и [51]. Мы считаем, что результаты коллапсирования, необходимые для гипотезы геометризации, уже в наличии, но прежде чем можно будет сделать окончательное заявление о том, что гипотеза геометризации решена, эти аргументы должны быть подвергнуты тому же тщательному анализу, которому подверглись доказательства гипотезы Пуанкаре. Этот процесс в настоящее время продолжается.

В этой книге мы не пытаемся разъяснить какие-либо результаты, помимо Теоремы 0.3, описанных в предыдущем абзаце, ко-

торые необходимы для Гипотезы Геометризации. Вместо этого мы ограничиваемся представлением доказательства Теоремы 0.1 выше, которое, как мы указали, касается начальных римановых многообразий, для которых поток Риччи с хирургией исчезает после конечного времени. В настоящее время мы готовим подробное доказательство, предложенное Перельманом, для дальнейших результатов, которые завершат доказательство Гипотезы Геометризации.

Как должно быть ясно из вышеизложенного обзора, аргумент Перельмана не возник в вакууме. Во-первых, он находится в контексте общей теории римановых многообразий. В частности, различные понятия сходимости последовательностей многообразий играют ключевую роль. Наиболее важной является геометрическая сходимость (гладкая сходимость на компактных подмножествах). Еще более важно, что аргумент Перельмана находится в контексте теории уравнения потока Риччи, введенного Ричардом Гамильтоном и широко изученного им и другими учеными. Перельман использует почти все ранее установленные результаты для трехмерных потоков Риччи. Единственным исключением являются предложенные Гамильтоном результаты классификации для трехмерных сингулярностей. Они были заменены сильным качественным описанием развития сингулярностей для потоков Риччи на компактных трехмерных многообразиях, предложенным Перельманом.

Первые пять глав книги обозривают необходимый фоновый материал из этих двух тем. Главы с 6 по 11 объясняют достижения Перельмана. В главе 12 мы вводим стандартное решение, которое представляет собой многообразие, сконструированное вручную, которое «вставляется» при выполнении хирургии. Главы с 13 по 17 подробно описывают процесс хирургии и доказывают основные аналитические и топологические оценки, которые необходимы для того, чтобы показать, что процесс можно продолжать для всего положительного времени. В конце главы 17 мы установили теорему 0.3. Глава 18 обсуждает результат о исчезновении за конечное время. Глава 19 — это приложение с некоторыми топологическими результатами, которые были необходимы для анализа хирургии в главах 13-17.



## **2 Основы геометрии Римана**

и ещё текст

## **3 Основы потока Риччи**

текст

## **4 Достижения Перельмана**

текст

## **5 Стандартное решение и процесс хирургии**

текст

## **6 Расширение потоков Риччи с хирургией**

текст

## **7 Исчезновение за конечное время**

текст

## **8 Благодарности**

текст

## **9 Список связанных статей**

текст

## **Глава 1. Введение в геометрию Римана**

### **1 Метрика Римана и связность Леви-Чивиты**

текст

### **2 Кривизна Риманового многообразия**

текст

### **3 Геодезические и экспоненциальное отображение**

текст

### **4 Вычисления в Гауссовых нормальных координатах**

текст

### **5 Основные результаты сравнения кривизны**

текст

### **6 Локальный объем и радиус инъективности**

текст

## **Глава 2. Многообразия с неотрицательной кривизной**

### **1 Функции Буземана**

текст

### **2 Результаты сравнения в случае неотрицательной кривизны**

текст

### **3 Теорема о душе**

текст

### **4 Концы многообразия**

текст

### **5 Теорема расщепления**

текст

### **6 $\epsilon$ -шейки**

Текст о  $\epsilon$ -шейках.

### **7 Коэффициенты прямой разницы**

текст

## **Глава 3. Основы потока Риччи**

### **1 Определение потока Риччи**

текст

### **2 Некоторые точные решения потока Риччи**

текст

### **3 Локальная существомость и единственность**

текст

### **4 Эволюция кривизны**

текст

### **5 Эволюция кривизны в развивающейся ортонормальной системе**

текст

### **6 Изменение расстояния под действием потока Риччи**

текст

### **7 Оценки производных $\text{Ш}$**

текст

### **8 Обобщенные потоки Риччи**

текст

## **Глава 4. Принцип максимума**

### **1 Принцип максимума для скалярной кривизны**

текст

### **2 Принцип максимума для тензоров**

текст

### **3 Применения принципа максимума**

текст

### **4 Сильный принцип максимума для кривизны**

текст

### **5 Сужение к положительной кривизне**

текст

## **Глава 5. Результаты сходимости для потока Риччи**

### **1 Геометрическая сходимость Римановых многообразий**

текст

### **2 Геометрическая сходимость потоков Риччи**

текст

### **3 Сходимость Громова–Хаусдорфа**

текст

### **4 Пределы при увеличении масштаба**

текст

### **5 Расщепление пределов на бесконечности**

текст

## **Глава 6. Геометрический подход к потоку Риччи через сравнения**

### **1 $\mathcal{L}$ -длина и $\mathcal{L}$ -геодезические**

Текст о  $\mathcal{L}$ -длинах и  $\mathcal{L}$ -геодезических

### **2 $\mathcal{L}$ -экспоненциальное отображение и его свойства первого порядка**

Текст о  $\mathcal{L}$ -экспоненциальном отображении и его свойствах первого порядка

### **3 Минимизирующие $\mathcal{L}$ -геодезические и область инъективности**

Текст о минимизирующих  $\mathcal{L}$ -геодезических и области инъективности

### **4 Дифференциальные неравенства второго порядка для $\tilde{L}^{\bar{\tau}}$ и $L_x^{\bar{\tau}}$**

Текст о дифференциальных неравенствах второго порядка для  $\tilde{L}^{\bar{\tau}}$  и  $L_x^{\bar{\tau}}$

### **5 Сокращённая длина**

текст

### **6 Локальные оценки Липшица для $l_x$**

Текст о локальных оценках Липшица для  $l_x$

### **7 Сокращённый объём**

текст

## Глава 7. Полные потоки Риччи с ограниченной кривизной

### 1 Функции $L_x$ и $l_x$

Текст о функциях  $L_x$  и  $l_x$

### 2 Оценка для $\min l_x^\tau$

Текст о оценке для  $\min l_x^\tau$

### 3 Сокращённый объём

текст



## **Глава 8. Результаты о несхлопывающихся многообразиях**

### **1 Результат о несхлопывании для обобщённых потоков Риччи**

текст

### **2 Применение к компактным потокам Риччи**

текст

## **Глава 9. $\kappa$ -несхлопывающиеся древние решения**

### **1 Предварительные замечания**

текст

### **2 Асимптотический градиентный сокращающий солитон для $\kappa$ -решений**

Асимптотический градиентный сокращающий солитон для  $\kappa$ -решений

### **3 Расщепление пределов на бесконечности**

текст

### **4 Классификация градиентных сокращающих солитонов в размерностях 2 и 3**

текст

### **5 Универсальный $\kappa$**

Универсальный  $\kappa$

### **6 Асимптотический объём**

текст

### **7 Компактность пространства 3-мерных $\kappa$ -решений**

Компактность пространства 3-мерных  $\kappa$ -решений

### **8 Качественное описание $\kappa$ -решений**

Качественное описание  $\kappa$ -решений

## **Глава 10. Ограниченная кривизна на ограниченном расстоянии**

### **1 Сужение к положительному: определения**

текст

### **2 Формулировка теоремы**

текст

### **3 Неполный геометрический предел**

текст

### **4 Пределы конуса возле конца $\mathcal{E}$ для рескейлингов $U_\infty$**

Пределы конуса возле конца  $\mathcal{E}$  для рескейлингов  $U_\infty$

### **5 Сравнение предела Громова–Хаусдорфа и гладкого предела**

текст

### **6 Финальное противоречие**

текст

## **Глава 11. Основы потока Риччи**

### **1 Гладкий предел при увеличении масштаба, определённый для малого времени**

текст

### **2 Пределы при долгом времени увеличения масштаба**

текст

### **3 Неполные гладкие пределы в сингулярные моменты**

текст

### **4 Существование сильных $\delta$ -шеек, достаточно глубоких в $2\epsilon$ -горне**

Существование сильных  $\delta$ -шеек, достаточно глубоких в  $2\epsilon$ -горне

## **Глава 12. Стандартное решение**

### **1 Существование стандартного потока**

текст

### **2 Полнота, положительная кривизна и асимптотическое поведение**

текст

### **3 Стандартные решения являются вращательно симметричными**

текст

### **4 Единственность**

текст

### **5 Решение потока гармонических отображений**

текст

### **6 Завершение доказательства единственности**

текст

### **7 Некоторые следствия**

текст

## **Глава 13. Хирургия на $\delta$ -шейке**

### **1 Нотация и формулировка результата**

текст

### **2 Предварительные вычисления**

текст

### **3 Доказательство теоремы 13.2**

текст

### **4 Другие свойства результата хирургии**

текст

## **Глава 14. Поток Риччи с хирургией: определение**

### **1 Пространство-время хирургии**

текст

### **2 Обобщённое уравнение потока Риччи**

текст

## **Глава 15. Контролируемые потоки Риччи с хирургией**

### **1 Сшивание развивающихся шеек**

текст

### **2 Топологические следствия предположений (1) – (7)**

текст

### **3 Дополнительные условия для хирургии**

текст

### **4 Процесс хирургии**

текст

### **5 Утверждения о существовании потока Риччи с хирургией**

текст

### **6 Контуры доказательства теоремы 15.9**

текст



## Глава 16. Доказательство несхлопывания

### 1 Формулировка результата о несхлопывании

текст

### 2 Доказательство несхлопывания при $R(x) = r^{-2}$ с $r \leq r_{i+1}$

Доказательство несхлопывания при  $R(x) = r^{-2}$  с  $r \leq r_{i+1}$

### 3 Минимизирующие $\mathcal{L}$ -геодезические существуют, когда $R(x) = r_{i+1}^{-2}$ : формулировка

Минимизирующие  $\mathcal{L}$ -геодезические существуют, когда  $R(x) = r_{i+1}^{-2}$ : формулировка

### 4 Эволюция окрестностей хирургических кап

текст

### 5 Оценка длины

текст

### 6 Завершение доказательства пропозиции 16.1

текст

## **Глава 17. Завершение доказательства теоремы 15.9**

### **1 Доказательство сильного предположения о канонических окрестностях**

текст

### **2 Время хирургии не накапливается**

текст

## **Глава 18. Истечение до конечного времени**

### **1 Результат**

текст

### **2 Исчезновение компонентов с нетривиальной $\pi_2$**

Исчезновение компонентов с нетривиальной  $\pi_2$

### **3 Истечение**

текст

### **4 Поток сжимающихся кривых**

текст

### **5 Доказательство пропозиции 18.24**

текст

### **6 Доказательство леммы 18.59: кольца с маленькой площадью**

текст

### **7 Доказательство первой неравенства в лемме 18.52**

текст

## **Глава 19. Приложение: Канонические окрестности**

### **1 Укорочение кривых**

текст

### **2 Геометрия $\epsilon$ -шеек**

Геометрия  $\epsilon$ -шеек

### **3 Перекрывающиеся $\epsilon$ -шейки**

Перекрывающиеся  $\epsilon$ -шейки

### **4 Области, покрытые $\epsilon$ -шейками и $(C, \epsilon)$ -капами**

Области, покрытые  $\epsilon$ -шейками и  $(C, \epsilon)$ -капами

### **5 Подмножества объединения ядер $(C, \epsilon)$ -кап и $\epsilon$ -шеек**

Подмножества объединения ядер  $(C, \epsilon)$ -капов и  $\epsilon$ -шеек

## Список литературы

- [1] Steven Altschuler. Singularities of the curve shrinking flow for space curves. *J. Differential Geometry*, 34:491–514, 1991.
- [2] Steven Altschuler and Matthew Grayson. Shortening space curves and flow through singularities. *J. Differential Geom.*, 35:283–298, 1992.
- [3] Shigetoshi Bando. Real analyticity of solutions of Hamilton’s equation. *Math. Z.*, 195(1):93–97, 1987.
- [4] Yu. Burago, M. Gromov, and G. Perelman. A. D. Aleksandrov spaces with curvatures bounded below. *Uspekhi Mat. Nauk*, 47(2(284)):3–51, 222, 1992.
- [5] Huai-Dong Cao and Xi-Ping Zhu. A complete proof of the Poincaré and Geometrization conjectures – Application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. *Asian J. of Math*, 10:169–492, 2006.
- [6] Jeff Cheeger. Finiteness theorems for Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 92:61–74, 1970.
- [7] Jeff Cheeger and David Ebin. Comparison theorems in Riemannian geometry. *North-Holland Publishing Co.*, Amsterdam, 1975. North-Holland Mathematical Library, Vol. 9.
- [8] Jeff Cheeger and Detlef Gromoll. The structure of complete manifolds of nonnegative curvature. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74:1147–1150, 1968.
- [9] Jeff Cheeger and Detlef Gromoll. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. *J. Differential Geometry*, 6:119–128, 1971/1972.
- [10] Jeff Cheeger and Detlef Gromoll. On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. *Ann. of Math. (2)*, 96:413–433, 1972.
- [11] Jeff Cheeger, Mikhail Gromov, and Michael Taylor. Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 17(1):15–53, 1982.

- [12] B. L. Chen and X. P. Zhu. Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds. *math.DG/0505447*, 2005.
- [13] Bennett Chow and Dan Knopf. The Ricci flow: an introduction, volume 110 of *Mathematical Surveys and Monographs*. *American Mathematical Society*, Providence, RI, 2004.
- [14] Bennett Chow, Peng Lu, and Li Ni. Hamilton's Ricci flow. to appear, 2006.
- [15] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(3):561–569 (electronic), 2005.
- [16] Dennis M. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *J. Differential Geom.*, 18(1):157–162, 1983.
- [17] Yu Ding. Notes on Perelman's second paper. Available at [www.math.lsa.umich.edu/~lott/ricciflow/perelman.html](http://www.math.lsa.umich.edu/~lott/ricciflow/perelman.html), 2004.
- [18] M. P. do Carmo. Riemannian Geometry. *Birkhäuser*, Boston, 1993.
- [19] Klaus Ecker and Gerhard Huisken. Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature. *Invent. Math.*, 105:547–569, 1991.
- [20] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. Measure theory and fine properties of functions. *Studies in Advanced Mathematics*. *CRC Press*, Boca Raton, FL, 1992.
- [21] M. Gage and R. S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geom.*, 23(1):69–96, 1986.
- [22] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [23] R. E. Greene and H. Wu. Lipschitz convergence of Riemannian manifolds. *Pacific J. Math.*, 131:119–141, 1988.

- [24] Detlef Gromoll and Wolfgang Meyer. On complete open manifolds of positive curvature. *Ann. of Math. (2)*, 90:75–90, 1969.
- [25] Mikhael Gromov. Structures métriques pour les variétés riemanniennes, volume 1 of Textes mathématiques. CEDIC/Fernand Nathan, Paris, France, 1981.
- [26] Mikhael Gromov and H. Blaine Lawson, Jr. Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 58:83–196, 1983.
- [27] Robert Gulliver and Frank David Lesley. On boundary branch points of minimizing surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 52:20–25, 1973.
- [28] Richard S. Hamilton. The inverse function theorem of Nash and Moser. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(1):65–222, 1982.
- [29] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2):255–306, 1982.
- [30] Richard S. Hamilton. Four-manifolds with positive curvature operator. *J. Differential Geom.*, 24(2):153–179, 1986.
- [31] Richard S. Hamilton. The Ricci flow on surfaces. In *Mathematics and general relativity* (Santa Cruz, CA, 1986), volume 71 of Contemp. Math., pages 237–262. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [32] Richard S. Hamilton. The Harnack estimate for the Ricci flow. *J. Differential Geom.*, 37(1):225–243, 1993.
- [33] Richard S. Hamilton. A compactness property for solutions of the Ricci flow. *Amer. J. Math.*, 117(3):545–572, 1995.
- [34] Richard S. Hamilton. The formation of singularities in the Ricci flow. In *Surveys in differential geometry, Vol. II* (Cambridge, MA, 1993), pages 7–136. Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [35] Richard S. Hamilton. Four-manifolds with positive isotropic curvature. *Comm. Anal. Geom.*, 5(1):1–92, 1997.

- [36] Richard S. Hamilton. Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 7(4):695–729, 1999.
- [37] Robert Hardt and Leon Simon. Boundary regularity and embedded solutions for the oriented Plateau problem. *Ann. of Math. (2)*, 110(3):439–486, 1979.
- [38] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [39] John Hempel. *3-Manifolds*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1976. Ann. of Math. Studies, No. 86.
- [40] Stefan Hildebrandt. Boundary behavior of minimal surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 35:47–82, 1969.
- [41] T. Ivey. Ricci solitons on compact three-manifolds. *Diff. Geom. Appl.*, 3:301–307, 1993.
- [42] Jürgen Jost. *Two-dimensional geometric variational problems*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1991. A Wiley-Interscience Publication.
- [43] Vatali Kapovitch. Perelman’s stability theorem. *math.DG/0703002*, 2007.
- [44] Bruce Kleiner and John Lott. Notes on Perelman’s papers. *math.DG/0605667*, 2006.
- [45] O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’ceva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [46] Peter Li and L-F. Tam. The heat equation and harmonic maps of complete manifolds. *Invent. Math.*, 105:305–320, 1991.
- [47] Peter Li and Shing-Tung Yau. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Math.*, 156(3-4):153–201, 1986.
- [48] Peng Lu and Gang Tian. Uniqueness of standard solutions in the work of Perelman. Available at [www.math.lsa.umich.edu/~lott/ricciflow/StanUniqWork2.pdf](http://www.math.lsa.umich.edu/~lott/ricciflow/StanUniqWork2.pdf), 2005.



- [49] John Milnor. Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Notices Amer. Math. Soc.*, 50(10):1226–1233, 2003.
- [50] J. Morgan and G. Tian. Completion of Perelman’s proof of the Geometrization Conjecture. In preparation, 2007.
- [51] C. B. Morrey. The problem of Plateau on a Riemannian manifold. *Ann. Math.*, 49:807–851, 1948.
- [52] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. math.DG/0211159, 2002.
- [53] G. Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. math.DG/0307245, 2003.
- [54] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. math.DG/0303109, 2003.
- [55] S. Peters. Convergence of Riemannian manifolds. *Compositio Math.*, 62:3–16, 1987.
- [56] P. Petersen. *Riemannian geometry, Second Edition*, volume 171 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2006.
- [57] H. Poincaré. Cinquième complément à l’analyse situs. In *Œuvres. Tome VI, Les Grands Classiques Gauthier-Villars*, pages v+541. Editions Jacques Gabay, Sceaux, 1996. Reprint of the 1953 edition.
- [58] J. Sacks and K. Uhlenbeck. The existence of minimal immersions of 2-spheres. *Ann. of Math.*, 113:1–24, 1981.
- [59] T. Sakai. *Riemannian geometry*, volume 149 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Translated from the 1992 Japanese original by the author.
- [60] R. Schoen and S.-T. Yau. *Lectures on differential geometry*. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I. International Press, Cambridge, MA, 1994.

- [61] R. Schoen and S.-T. Yau. The structure of manifolds with positive scalar curvature. In *Directions in partial differential equations (Madison, WI, 1985)*, volume 54 of Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin, pages 235–242. Academic Press, Boston, MA, 1987.
- [62] P. Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15(5):401–487, 1983.
- [63] N. Sesum, G. Tian, and X.-D. Wang. Notes on Perelman’s paper on the entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. preprint, 2003.
- [64] W.-X. Shi. Deforming the metric on complete Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 30(1):223–301, 1989.
- [65] W.-X. Shi. Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 30(2):303–394, 1989.
- [66] T. Shioya and T. Yamaguchi. Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound. *Math. Ann.*, 333(1):131–155, 2005.
- [67] J. Stallings. A topological proof of Grushko’s theorem on free products. *Math. Z.*, 90:1–8, 1965.
- [68] W. P. Thurston. Hyperbolic structures on 3-manifolds. I. Deformation of acylindrical manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 124(2):203–246, 1986.
- [69] V. Toponogov. Spaces with straight lines. *AMS Translations*, 37:287–290, 1964.
- [70] B. White. Classical area minimizing surfaces with real-analytic boundaries. *Acta Math.*, 179(2):295–305, 1997.
- [71] R. Ye. On the  $\ell$  function and the reduced volume of Perelman. Available at [www.math.ucsb.edu/~yer/reduced.pdf](http://www.math.ucsb.edu/~yer/reduced.pdf), 2004.