

Поток Риччи и гипотеза Пуанкаре

Джон В. Морган и Ганг Тянь

Содержание

Введение	6
1 Обзор аргументов Перельмана	6
2 Основы геометрии Римана	6
3 Основы потока Риччи	6
4 Достижения Перельмана	6
5 Стандартное решение и процесс хирургии	6
6 Расширение потоков Риччи с хирургией	6
7 Исчезновение за конечное время	6
8 Благодарности	6
9 Список связанных статей	6
Глава 1. Введение в геометрию Римана	7
1 Метрика Римана и связность Леви-Чивиты	7
2 Кривизна Риманового многообразия	7
3 Геодезические и экспоненциальное отображение	7
4 Вычисления в гауссовых нормальных координатах	7
5 Основные результаты сравнения кривизны	7
6 Локальный объем и радиус инъективности	7
Глава 2. Многообразия с неотрицательной кривизной	8
1 Функции Буземана	8
2 Результаты сравнения в случае неотрицательной кривизны	8
3 Теорема о душе	8
4 Концы многообразия	8
5 Теорема расщепления	8
6 ϵ -шейки	8
7 Коэффициенты прямой разницы	8
Глава 3. Основы потока Риччи	9
1 Определение потока Риччи	9
2 Некоторые точные решения потока Риччи	9
3 Локальная существомость и единственность	9
4 Эволюция кривизны	9
5 Эволюция кривизны в развивающейся ортонормальной системе	9
6 Изменение расстояния под действием потока Риччи	9
7 Оценки производных Ric	9
8 Обобщенные потоки Риччи	9
Глава 4. Принцип максимума	10
1 Принцип максимума для скалярной кривизны	10
2 Принцип максимума для тензоров	10
3 Применения принципа максимума	10
4 Сильный принцип максимума для кривизны	10
5 Сужение к положительной кривизне	10

Глава 5. Результаты сходимости для потока Риччи	11
1 Геометрическая сходимость Римановых многообразий	11
2 Геометрическая сходимость потоков Риччи	11
3 Сходимость Громова–Хаусдорфа	11
4 Пределы при увеличении масштаба	11
5 Расщепление пределов на бесконечности	11
Глава 6. Геометрический подход к потоку Риччи через сравнения	12
1 \mathcal{L} -длина и \mathcal{L} -геодезические	12
2 \mathcal{L} -экспоненциальное отображение и его свойства первого порядка	12
3 Минимизирующие \mathcal{L} -геодезические и область инъективности	12
4 Дифференциальные неравенства второго порядка для \tilde{L}^τ и L_x^τ	12
5 Сокращённая длина	12
6 Локальные оценки Липшица для l_x	12
7 Сокращённый объём	12
Глава 7. Полные потоки Риччи с ограниченной кривизной	13
1 Функции L_x и l_x	13
2 Оценка для $\min l_x^\tau$	13
3 Сокращённый объём	13
Глава 8. Результаты о несхлопывающихся многообразиях	14
1 Результат о несхлопывании для обобщённых потоков Риччи	14
2 Применение к компактным потокам Риччи	14
Глава 9. κ-несхлопывающиеся древние решения	15
1 Предварительные замечания	15
2 Асимптотический градиентный сокращающий солитон для κ -решений	15
3 Расщепление пределов на бесконечности	15
4 Классификация градиентных сокращающих солитонов в размерностях 2 и 3	15
5 Универсальный κ	15
6 Асимптотический объём	15
7 Компактность пространства 3-мерных κ -решений	15
8 Качественное описание κ -решений	15
Глава 10. Ограниченная кривизна на ограниченном расстоянии	16
1 Сужение к положительному: определения	16
2 Формулировка теоремы	16
3 Неполный геометрический предел	16
4 Пределы конуса возле конца \mathcal{E} для рескейлингов U_∞	16
5 Сравнение предела Громова–Хаусдорфа и гладкого предела	16
6 Финальное противоречие	16

Глава 11. Основы потока Риччи	17
1 Гладкий предел при увеличении масштаба, определённый для малого времени	17
2 Пределы при долгом времени увеличения масштаба	17
3 Неполные гладкие пределы в сингулярные моменты	17
4 Существование сильных δ -шеек, достаточно глубоких в 2ϵ -горне	17
Глава 12. Стандартное решение	18
1 Существование стандартного потока	18
2 Полнота, положительная кривизна и асимптотическое пове- дение	18
3 Стандартные решения являются вращательно симметричными	18
4 Единственность	18
5 Решение потока гармонических отображений	18
6 Завершение доказательства единственности	18
7 Некоторые следствия	18
Глава 13. Хирургия на δ-шейке	19
1 Нотация и формулировка результата	19
2 Предварительные вычисления	19
3 Доказательство теоремы 13.2	19
4 Другие свойства результата хирургии	19
Глава 14. Поток Риччи с хирургией: определение	20
1 Пространство-время хирургии	20
2 Обобщённое уравнение потока Риччи	20
Глава 15. Контролируемые потоки Риччи с хирургией	21
1 Сшивание развивающихся шеек	21
2 Топологические следствия предположений (1) – (7)	21
3 Дополнительные условия для хирургии	21
4 Процесс хирургии	21
5 Утверждения о существовании потока Риччи с хирургией	21
6 Контурь доказательства теоремы 15.9	21
Глава 16. Доказательство несхлопывания	22
1 Формулировка результата о несхлопывании	22
2 Доказательство несхлопывания при $R(x) = r^{-2}$ с $r \leq r_{i+1}$	22
3 Минимизирующие \mathcal{L} -геодезические существуют, когда $R(x) =$ r_{i+1}^{-2} : формулировка	22
4 Эволюция окрестностей хирургических кап	22
5 Оценка длины	22
6 Завершение доказательства пропозиции 16.1	22
Глава 17. Завершение доказательства теоремы 15.9	23
1 Доказательство сильного предположения о канонических окрест- ностях	23

2	Время хирургии не накапливается	23
Глава 18. Истечение до конечного времени		24
1	Результат	24
2	Исчезновение компонент с нетривиальной π_2	24
3	Истечение	24
4	Поток сжимающихся кривых	24
5	Доказательство пропозиции 18.24	24
6	Доказательство леммы 18.59: кольца с маленькой площадью	24
7	Доказательство первой неравенства в лемме 18.52	24
Глава 19. Приложение: Канонические окрестности		25
1	Укорочение кривых	25
2	Геометрия ϵ -шеек	25
3	Перекрывающиеся ϵ -шейки	25
4	Области, покрытые ϵ -шейками и (C, ϵ) -капами	25
5	Подмножества объединения ядер (C, ϵ) -кап и ϵ -шеек	25
Список литературы		26

Введение

1 Обзор аргументов Перельмана

текст

2 Основы геометрии Римана

и ещё текст

3 Основы потока Риччи

текст

4 Достижения Перельмана

текст

5 Стандартное решение и процесс хирургии

текст

6 Расширение потоков Риччи с хирургией

текст

7 Исчезновение за конечное время

текст

8 Благодарности

текст

9 Список связанных статей

текст

Глава 1. Введение в геометрию Римана

1 Метрика Римана и связность Леви-Чивиты

текст

2 Кривизна Риманового многообразия

текст

3 Геодезические и экспоненциальное отображение

текст

4 Вычисления в гауссовых нормальных координатах

текст

5 Основные результаты сравнения кривизны

текст

6 Локальный объем и радиус инъективности

текст

Глава 2. Многообразия с неотрицательной кривизной

1 Функции Буземана

текст

2 Результаты сравнения в случае неотрицательной кривизны

текст

3 Теорема о душе

текст

4 Концы многообразия

текст

5 Теорема расщепления

текст

6 ϵ -шейки

Текст о ϵ -шейках.

7 Коэффициенты прямой разницы

текст

Глава 3. Основы потока Риччи

1 Определение потока Риччи

текст

2 Некоторые точные решения потока Риччи

текст

3 Локальная существоваемость и единственность

текст

4 Эволюция кривизны

текст

5 Эволюция кривизны в развивающейся ортонормальной системе

текст

6 Изменение расстояния под действием потока Риччи

текст

7 Оценки производных Ψ

текст

8 Обобщенные потоки Риччи

текст

Глава 4. Принцип максимума

1 Принцип максимума для скалярной кривизны

текст

2 Принцип максимума для тензоров

текст

3 Применения принципа максимума

текст

4 Сильный принцип максимума для кривизны

текст

5 Сужение к положительной кривизне

текст

Глава 5. Результаты сходимости для потока Риччи

1 Геометрическая сходимость Римановых многообразий

текст

2 Геометрическая сходимость потоков Риччи

текст

3 Сходимость Громова–Хаусдорфа

текст

4 Пределы при увеличении масштаба

текст

5 Расщепление пределов на бесконечности

текст

Глава 6. Геометрический подход к потоку Риччи через сравнения

1 \mathcal{L} -длина и \mathcal{L} -геодезические

Текст о \mathcal{L} -длинах и \mathcal{L} -геодезических

2 \mathcal{L} -экспоненциальное отображение и его свойства первого порядка

Текст о \mathcal{L} -экспоненциальном отображении и его свойствах первого порядка

3 Минимизирующие \mathcal{L} -геодезические и область инъективности

Текст о минимизирующих \mathcal{L} -геодезических и области инъективности

4 Дифференциальные неравенства второго порядка для $\tilde{L}^{\bar{\tau}}$ и $L_x^{\bar{\tau}}$

Текст о дифференциальных неравенствах второго порядка для $\tilde{L}^{\bar{\tau}}$ и $L_x^{\bar{\tau}}$

5 Сокращённая длина

текст

6 Локальные оценки Липшица для l_x

Текст о локальных оценках Липшица для l_x

7 Сокращённый объём

текст

Глава 7. Полные потоки Риччи с ограниченной кривизной

1 Функции L_x и l_x

Текст о функциях L_x и l_x

2 Оценка для $\min l_x^\tau$

Текст о оценке для $\min l_x^\tau$

3 Сокращённый объём

текст

Глава 8. Результаты о несхлопывающихся многообразиях

1 Результат о несхлопывании для обобщённых потоков Риччи

текст

2 Применение к компактным потокам Риччи

текст

Глава 9. κ -несхлопывающиеся древние решения

1 Предварительные замечания

текст

2 Асимптотический градиентный сокращающий солитон для κ -решений

Асимптотический градиентный сокращающий солитон для κ -решений

3 Расщепление пределов на бесконечности

текст

4 Классификация градиентных сокращающих солитонов в размерностях 2 и 3

текст

5 Универсальный κ

Универсальный κ

6 Асимптотический объём

текст

7 Компактность пространства 3-мерных κ -решений

Компактность пространства 3-мерных κ -решений

8 Качественное описание κ -решений

Качественное описание κ -решений

Глава 10. Ограниченная кривизна на ограниченном расстоянии

1 Сужение к положительному: определения

текст

2 Формулировка теоремы

текст

3 Неполный геометрический предел

текст

4 Пределы конуса возле конца \mathcal{E} для рескейлингов U_∞

Пределы конуса возле конца \mathcal{E} для рескейлингов U_∞

5 Сравнение предела Громова–Хаусдорфа и гладкого предела

текст

6 Финальное противоречие

текст

Глава 11. Основы потока Риччи

1 Гладкий предел при увеличении масштаба, определённый для малого времени

текст

2 Пределы при долгом времени увеличения масштаба

текст

3 Неполные гладкие пределы в сингулярные моменты

текст

4 Существование сильных δ -шеек, достаточно глубоких в 2ϵ -горне

Существование сильных δ -шеек, достаточно глубоких в 2ϵ -горне

Глава 12. Стандартное решение

1 Существование стандартного потока

текст

2 Полнота, положительная кривизна и асимптотическое поведение

текст

3 Стандартные решения являются вращательно симметричными

текст

4 Единственность

текст

5 Решение потока гармонических отображений

текст

6 Завершение доказательства единственности

текст

7 Некоторые следствия

текст

Глава 13. Хирургия на δ -шейке

1 Нотация и формулировка результата

текст

2 Предварительные вычисления

текст

3 Доказательство теоремы 13.2

текст

4 Другие свойства результата хирургии

текст

Глава 14. Поток Риччи с хирургией: определение

1 Пространство-время хирургии

текст

2 Обобщённое уравнение потока Риччи

текст

Глава 15. Контролируемые потоки Риччи с хирургией

1 Сшивание развивающихся шеек

текст

2 Топологические следствия предположений (1) – (7)

текст

3 Дополнительные условия для хирургии

текст

4 Процесс хирургии

текст

5 Утверждения о существовании потока Риччи с хирургией

текст

6 Контуры доказательства теоремы 15.9

текст

Глава 16. Доказательство несхлопывания

1 Формулировка результата о несхлопывании

текст

2 Доказательство несхлопывания при $R(x) = r^{-2}$ с $r \leq r_{i+1}$

Доказательство несхлопывания при $R(x) = r^{-2}$ с $r \leq r_{i+1}$

3 Минимизирующие \mathcal{L} -геодезические существуют, когда $R(x) = r_{i+1}^{-2}$: формулировка

Минимизирующие \mathcal{L} -геодезические существуют, когда $R(x) = r_{i+1}^{-2}$: формулировка

4 Эволюция окрестностей хирургических кап

текст

5 Оценка длины

текст

6 Завершение доказательства пропозиции 16.1

текст

Глава 17. Завершение доказательства теоремы 15.9

1 Доказательство сильного предположения о канонических окрестностях

текст

2 Время хирургии не накапливается

текст

Глава 18. Истечение до конечного времени

1 Результат

текст

2 Исчезновение компонентов с нетривиальной π_2

Исчезновение компонентов с нетривиальной π_2

3 Истечение

текст

4 Поток сжимающихся кривых

текст

5 Доказательство пропозиции 18.24

текст

6 Доказательство леммы 18.59: кольца с маленькой площадью

текст

7 Доказательство первой неравенства в лемме 18.52

текст

Глава 19. Приложение: Канонические окрестности

1 Укорочение кривых

текст

2 Геометрия ϵ -шеек

Геометрия ϵ -шеек

3 Перекрывающиеся ϵ -шейки

Перекрывающиеся ϵ -шейки

4 Области, покрытые ϵ -шейками и (C, ϵ) -капами

Области, покрытые ϵ -шейками и (C, ϵ) -капами

5 Подмножества объединения ядер (C, ϵ) -кап и ϵ -шеек

Подмножества объединения ядер (C, ϵ) -капов и ϵ -шеек

Список литературы

Основной текст списка литературы