

Поток Риччи и гипотеза Пуанкаре

Джон В. Морган и Ганг Тянь

Содержание

Введение	6
1 Обзор аргументов Перельмана	7
2 Основы геометрии Римана	8
3 Основы потока Риччи	8
4 Достижения Перельмана	8
5 Стандартное решение и процесс хирургии	8
6 Расширение потоков Риччи с хирургией	8
7 Исчезновение за конечное время	8
8 Благодарности	8
9 Список связанных статей	8
Глава 1. Введение в геометрию Римана	9
1 Метрика Римана и связность Леви-Чивиты	9
2 Кривизна Риманового многообразия	9
3 Геодезические и экспоненциальное отображение	9
4 Вычисления в Гауссовых нормальных координатах	9
5 Основные результаты сравнения кривизны	9
6 Локальный объем и радиус инъективности	9
Глава 2. Многообразия с неотрицательной кривизной	10
1 Функции Буземана	10
2 Результаты сравнения в случае неотрицательной кривизны	10
3 Теорема о душе	10
4 Концы многообразия	10
5 Теорема расщепления	10
6 ϵ -шейки	10
7 Коэффициенты прямой разницы	10
Глава 3. Основы потока Риччи	11
1 Определение потока Риччи	11
2 Некоторые точные решения потока Риччи	11
3 Локальная существомость и единственность	11
4 Эволюция кривизны	11
5 Эволюция кривизны в развивающейся ортонормальной системе	11
6 Изменение расстояния под действием потока Риччи	11
7 Оценки производных Ric	11
8 Обобщенные потоки Риччи	11
Глава 4. Принцип максимума	12
1 Принцип максимума для скалярной кривизны	12
2 Принцип максимума для тензоров	12
3 Применения принципа максимума	12
4 Сильный принцип максимума для кривизны	12
5 Сужение к положительной кривизне	12

Глава 5. Результаты сходимости для потока Риччи	13
1 Геометрическая сходимость Римановых многообразий	13
2 Геометрическая сходимость потоков Риччи	13
3 Сходимость Громова–Хаусдорфа	13
4 Пределы при увеличении масштаба	13
5 Расщепление пределов на бесконечности	13
Глава 6. Геометрический подход к потоку Риччи через сравнения	14
1 \mathcal{L} -длина и \mathcal{L} -геодезические	14
2 \mathcal{L} -экспоненциальное отображение и его свойства первого порядка	14
3 Минимизирующие \mathcal{L} -геодезические и область инъективности	14
4 Дифференциальные неравенства второго порядка для \tilde{L}^{τ} и L_x^{τ}	14
5 Сокращённая длина	14
6 Локальные оценки Липшица для l_x	14
7 Сокращённый объём	14
Глава 7. Полные потоки Риччи с ограниченной кривизной	15
1 Функции L_x и l_x	15
2 Оценка для $\min l_x^{\tau}$	15
3 Сокращённый объём	15
Глава 8. Результаты о несхлопывающихся многообразиях	16
1 Результат о несхлопывании для обобщённых потоков Риччи	16
2 Применение к компактным потокам Риччи	16
Глава 9. κ-несхлопывающиеся древние решения	17
1 Предварительные замечания	17
2 Асимптотический градиентный сокращающий солитон для κ -решений	17
3 Расщепление пределов на бесконечности	17
4 Классификация градиентных сокращающих солитонов в размерностях 2 и 3	17
5 Универсальный κ	17
6 Асимптотический объём	17
7 Компактность пространства 3-мерных κ -решений	17
8 Качественное описание κ -решений	17
Глава 10. Ограниченная кривизна на ограниченном расстоянии	18
1 Сужение к положительному: определения	18
2 Формулировка теоремы	18
3 Неполный геометрический предел	18
4 Пределы конуса возле конца \mathcal{E} для рескейлингов U_{∞}	18
5 Сравнение предела Громова–Хаусдорфа и гладкого предела	18
6 Финальное противоречие	18

Глава 11. Основы потока Риччи	19
1 Гладкий предел при увеличении масштаба, определённый для малого времени	19
2 Пределы при долгом времени увеличения масштаба	19
3 Неполные гладкие пределы в сингулярные моменты	19
4 Существование сильных δ -шеек, достаточно глубоких в 2ϵ -горне	19
Глава 12. Стандартное решение	20
1 Существование стандартного потока	20
2 Полнота, положительная кривизна и асимптотическое пове- дение	20
3 Стандартные решения являются вращательно симметричными	20
4 Единственность	20
5 Решение потока гармонических отображений	20
6 Завершение доказательства единственности	20
7 Некоторые следствия	20
Глава 13. Хирургия на δ-шейке	21
1 Нотация и формулировка результата	21
2 Предварительные вычисления	21
3 Доказательство теоремы 13.2	21
4 Другие свойства результата хирургии	21
Глава 14. Поток Риччи с хирургией: определение	22
1 Пространство-время хирургии	22
2 Обобщённое уравнение потока Риччи	22
Глава 15. Контролируемые потоки Риччи с хирургией	23
1 Сшивание развивающихся шеек	23
2 Топологические следствия предположений (1) – (7)	23
3 Дополнительные условия для хирургии	23
4 Процесс хирургии	23
5 Утверждения о существовании потока Риччи с хирургией	23
6 Контурные доказательства теоремы 15.9	23
Глава 16. Доказательство несхлопывания	24
1 Формулировка результата о несхлопывании	24
2 Доказательство несхлопывания при $R(x) = r^{-2}$ с $r \leq r_{i+1}$	24
3 Минимизирующие \mathcal{L} -геодезические существуют, когда $R(x) =$ r_{i+1}^{-2} : формулировка	24
4 Эволюция окрестностей хирургических кап	24
5 Оценка длины	24
6 Завершение доказательства пропозиции 16.1	24
Глава 17. Завершение доказательства теоремы 15.9	25
1 Доказательство сильного предположения о канонических окрест- ностях	25

2	Время хирургии не накапливается	25
Глава 18. Истечение до конечного времени		26
1	Результат	26
2	Исчезновение компонент с нетривиальной π_2	26
3	Истечение	26
4	Поток сжимающихся кривых	26
5	Доказательство пропозиции 18.24	26
6	Доказательство леммы 18.59: кольца с маленькой площадью	26
7	Доказательство первой неравенства в лемме 18.52	26
Глава 19. Приложение: Канонические окрестности		27
1	Укорочение кривых	27
2	Геометрия ϵ -шеек	27
3	Перекрывающиеся ϵ -шейки	27
4	Области, покрытые ϵ -шейками и (C, ϵ) -капами	27
5	Подмножества объединения ядер (C, ϵ) -кап и ϵ -шеек	27
Список литературы		28

Введение

В этой книге представлено полное и детализированное доказательство

**гипотезы Пуанкаре: всякое замкнутое, гладкое
односвязное 3-многообразие диффеоморфно¹ S^3**

Эта гипотеза была сформулирована Анри Пуанкаре [58] в 1904 году и оставалась открытой до недавней работы Перельмана. Аргументы, представленные здесь, являются детализированной версией тех, которые встречаются в трех препринтах Перельмана [53, 55, 54]. Аргументы Перельмана опираются на фундамент, созданный Ричардом Гамильтоном, с его исследованием уравнения потока Риччи для Римановых метрик. На самом деле, Гамильтон считал, что потоки Риччи можно использовать для установления гипотезы Пуанкаре и более общих результатов топологической классификации в размерности 3, и разработал программу для достижения этой цели. Трудность заключалась в том, чтобы справиться с особенностями в потоках Риччи. Прорыв Перельмана заключался в том, чтобы понять качественную природу особенностей достаточно хорошо, чтобы позволить ему доказать гипотезу Пуанкаре (и теорему 0.1 ниже, которая подразумевает гипотезу Пуанкаре). Для подробной истории гипотезы Пуанкаре см. обзорную статью Мильнора [50].

Класс примеров, тесно связанных с 3-сферой, составляют *3-мерные сферические пространственные формы*, т.е. отношения S^3 по свободным линейным действиям конечных подгрупп ортогональной группы $O(4)$. Существует обобщение гипотезы Пуанкаре, называемое **гипотезой 3-мерных сферических пространственных форм**, которое утверждает, что любое замкнутое 3-мерное многообразие с конечной фундаментальной группой диффеоморфно 3-мерной сферической пространственной форме. Очевидно, что частным случаем гипотезы 3-мерных сферических пространственных форм является гипотеза Пуанкаре.

Как указано в замечании 1.4 в [54], аргументы, представленные здесь, не только доказывают гипотезу Пуанкаре, но и дока-

¹Каждое топологическое 3-мерное многообразие обладает дифференцируемой структурой, и каждый гомеоморфизм между гладкими 3-мерными многообразиями может быть сведён к диффеоморфизму. Таким образом, результаты классификации топологических 3-мерных многообразий до гомеоморфизма и гладких 3-мерных многообразий до диффеоморфизма эквивалентны. В этой книге под «многообразием» подразумевается «гладкое многообразие».

зывают гипотезу 3-мерных пространственных форм. На самом деле, цель этой книги — доказать следующую более общую теорему.

Теорема 0.1. Пусть M — замкнутое, связное 3-мерное многообразие, и пусть фундаментальная группа M является свободным произведением конечных групп и бесконечных циклических групп. Тогда M диффеоморфно связной сумме сферических пространственных форм, копий $S^2 \times S^1$ и копий уникального (до диффеоморфизма) неориентируемого 2-сферического расслоения над S^1 .

Это немедленно означает положительное разрешение гипотезы Пуанкаре и гипотезы 3-мерных сферических пространственных форм.

Следствие 0.2. (a) Замкнутое, просто связное 3-мерное многообразие диффеоморфно S^3 . (b) Замкнутое 3-мерное многообразие с конечной фундаментальной группой диффеоморфно 3-мерной сферической пространственной форме.

Прежде чем перейти к более подробному описанию содержания этой книги, стоит сделать одно замечание относительно стиля изложения. Из-за важности и заметности обсуждаемых результатов, а также из-за множества неверных утверждений о доказательствах этих результатов в прошлом, мы посчитали необходимым представить аргументы с большой детализацией. Наша цель состояла в том, чтобы сделать эти аргументы ясными и убедительными, а также более доступными для широкой аудитории. В результате эксперты могут посчитать некоторые моменты излишне подробно изложенными.

1 Обзор аргументов Перельмана

В размерностях, меньших или равных трём, любая риманова метрика с постоянной кривизной Риччи имеет постоянную секционную кривизну. Классические результаты в римановой геометрии показывают, что универсальное покрытие замкнутого многообразия с постоянной положительной кривизной диффеоморфно сфере, а фундаментальная группа идентифицируется с конечной подгруппой ортогональной группы, которая действует линейно и свободно на универсальном покрытии. Таким обра-

зом, можно подойти к гипотезе Пуанкаре и более общей проблеме 3-мерных сферических пространственных форм, задав следующий вопрос. С учетом соответствующих предположений о фундаментальной группе 3-мерного многообразия M , как установить существование метрики с постоянной кривизной Риччи на M ? Основным элементом для создания такой метрики является уравнение потока Риччи, введённое Ричардом Гамильтоном в [29]:

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t))$$

2 Основы геометрии Римана

и ещё текст

3 Основы потока Риччи

текст

4 Достижения Перельмана

текст

5 Стандартное решение и процесс хирургии

текст

6 Расширение потоков Риччи с хирургией

текст

7 Исчезновение за конечное время

текст

8 Благодарности

текст

9 Список связанных статей

текст

Глава 1. Введение в геометрию Римана

1 Метрика Римана и связность Леви-Чивиты

текст

2 Кривизна Риманового многообразия

текст

3 Геодезические и экспоненциальное отображение

текст

4 Вычисления в Гауссовых нормальных координатах

текст

5 Основные результаты сравнения кривизны

текст

6 Локальный объем и радиус инъективности

текст

Глава 2. Многообразия с неотрицательной кривизной

1 Функции Буземана

текст

2 Результаты сравнения в случае неотрицательной кривизны

текст

3 Теорема о душе

текст

4 Концы многообразия

текст

5 Теорема расщепления

текст

6 ϵ -шейки

Текст о ϵ -шейках.

7 Коэффициенты прямой разницы

текст

Глава 3. Основы потока Риччи

1 Определение потока Риччи

текст

2 Некоторые точные решения потока Риччи

текст

3 Локальная существомость и единственность

текст

4 Эволюция кривизны

текст

5 Эволюция кривизны в развивающейся ортонормальной системе

текст

6 Изменение расстояния под действием потока Риччи

текст

7 Оценки производных Ric

текст

8 Обобщенные потоки Риччи

текст

Глава 4. Принцип максимума

1 Принцип максимума для скалярной кривизны

текст

2 Принцип максимума для тензоров

текст

3 Применения принципа максимума

текст

4 Сильный принцип максимума для кривизны

текст

5 Сужение к положительной кривизне

текст

Глава 5. Результаты сходимости для потока Риччи

1 Геометрическая сходимость Римановых многообразий

текст

2 Геометрическая сходимость потоков Риччи

текст

3 Сходимость Громова–Хаусдорфа

текст

4 Пределы при увеличении масштаба

текст

5 Расщепление пределов на бесконечности

текст

Глава 6. Геометрический подход к потоку Риччи через сравнения

1 \mathcal{L} -длина и \mathcal{L} -геодезические

Текст о \mathcal{L} -длинах и \mathcal{L} -геодезических

2 \mathcal{L} -экспоненциальное отображение и его свойства первого порядка

Текст о \mathcal{L} -экспоненциальном отображении и его свойствах первого порядка

3 Минимизирующие \mathcal{L} -геодезические и область инъективности

Текст о минимизирующих \mathcal{L} -геодезических и области инъективности

4 Дифференциальные неравенства второго порядка для $\tilde{L}^{\bar{\tau}}$ и $L_x^{\bar{\tau}}$

Текст о дифференциальных неравенствах второго порядка для $\tilde{L}^{\bar{\tau}}$ и $L_x^{\bar{\tau}}$

5 Сокращённая длина

текст

6 Локальные оценки Липшица для l_x

Текст о локальных оценках Липшица для l_x

7 Сокращённый объём

текст

Глава 7. Полные потоки Риччи с ограниченной кривизной

1 Функции L_x и l_x

Текст о функциях L_x и l_x

2 Оценка для $\min l_x^\tau$

Текст о оценке для $\min l_x^\tau$

3 Сокращённый объём

текст

Глава 8. Результаты о несхлопывающихся многообразиях

1 Результат о несхлопывании для обобщённых потоков Риччи

текст

2 Применение к компактным потокам Риччи

текст

Глава 9. κ -несхлопывающиеся древние решения

1 Предварительные замечания

текст

2 Асимптотический градиентный сокращающий солитон для κ -решений

Асимптотический градиентный сокращающий солитон для κ -решений

3 Расщепление пределов на бесконечности

текст

4 Классификация градиентных сокращающих солитонов в размерностях 2 и 3

текст

5 Универсальный κ

Универсальный κ

6 Асимптотический объём

текст

7 Компактность пространства 3-мерных κ -решений

Компактность пространства 3-мерных κ -решений

8 Качественное описание κ -решений

Качественное описание κ -решений

Глава 10. Ограниченная кривизна на ограниченном расстоянии

1 Сужение к положительному: определения

текст

2 Формулировка теоремы

текст

3 Неполный геометрический предел

текст

4 Пределы конуса возле конца \mathcal{E} для рескейлингов U_∞

Пределы конуса возле конца \mathcal{E} для рескейлингов U_∞

5 Сравнение предела Громова–Хаусдорфа и гладкого предела

текст

6 Финальное противоречие

текст

Глава 11. Основы потока Риччи

1 Гладкий предел при увеличении масштаба, определённый для малого времени

текст

2 Пределы при долгом времени увеличения масштаба

текст

3 Неполные гладкие пределы в сингулярные моменты

текст

4 Существование сильных δ -шеек, достаточно глубоких в 2ϵ -горне

Существование сильных δ -шеек, достаточно глубоких в 2ϵ -горне

Глава 12. Стандартное решение

1 Существование стандартного потока

текст

2 Полнота, положительная кривизна и асимптотическое поведение

текст

3 Стандартные решения являются вращательно симметричными

текст

4 Единственность

текст

5 Решение потока гармонических отображений

текст

6 Завершение доказательства единственности

текст

7 Некоторые следствия

текст

Глава 13. Хирургия на δ -шейке

1 Нотация и формулировка результата

текст

2 Предварительные вычисления

текст

3 Доказательство теоремы 13.2

текст

4 Другие свойства результата хирургии

текст

Глава 14. Поток Риччи с хирургией: определение

1 Пространство-время хирургии

текст

2 Обобщённое уравнение потока Риччи

текст

Глава 15. Контролируемые потоки Риччи с хирургией

1 Сшивание развивающихся шеек

текст

2 Топологические следствия предположений (1) – (7)

текст

3 Дополнительные условия для хирургии

текст

4 Процесс хирургии

текст

5 Утверждения о существовании потока Риччи с хирургией

текст

6 Контуры доказательства теоремы 15.9

текст

Глава 16. Доказательство несхлопывания

1 Формулировка результата о несхлопывании

текст

2 Доказательство несхлопывания при $R(x) = r^{-2}$ с $r \leq r_{i+1}$

Доказательство несхлопывания при $R(x) = r^{-2}$ с $r \leq r_{i+1}$

3 Минимизирующие \mathcal{L} -геодезические существуют, когда $R(x) = r_{i+1}^{-2}$: формулировка

Минимизирующие \mathcal{L} -геодезические существуют, когда $R(x) = r_{i+1}^{-2}$: формулировка

4 Эволюция окрестностей хирургических кап

текст

5 Оценка длины

текст

6 Завершение доказательства пропозиции 16.1

текст

Глава 17. Завершение доказательства теоремы 15.9

1 Доказательство сильного предположения о канонических окрестностях

текст

2 Время хирургии не накапливается

текст

Глава 18. Истечение до конечного времени

1 Результат

текст

2 Исчезновение компонент с нетривиальной π_2

Исчезновение компонент с нетривиальной π_2

3 Истечение

текст

4 Поток сжимающихся кривых

текст

5 Доказательство пропозиции 18.24

текст

6 Доказательство леммы 18.59: кольца с маленькой площадью

текст

7 Доказательство первой неравенства в лемме 18.52

текст

Глава 19. Приложение: Канонические окрестности

1 Укорочение кривых

текст

2 Геометрия ϵ -шеек

Геометрия ϵ -шеек

3 Перекрывающиеся ϵ -шейки

Перекрывающиеся ϵ -шейки

4 Области, покрытые ϵ -шейками и (C, ϵ) -капами

Области, покрытые ϵ -шейками и (C, ϵ) -капами

5 Подмножества объединения ядер (C, ϵ) -кап и ϵ -шеек

Подмножества объединения ядер (C, ϵ) -капов и ϵ -шеек

Список литературы

Основной текст списка литературы