

32

提取 $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$ 各项系数

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = 720, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = 1764, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = 1624, \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = 735, \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = 175, \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} = 21, \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 1$$

34

容斥原理, 钦定有 $k-i$ 个颜色不会被使用, 可以得到问题方案数为 $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i(i-1)^{n-1} = k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i-1} (-1)^{k-i} (i-1)^{n-1} = k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{k-1-i} i^{n-1}$ 。

观察第二类斯特林数的公式 $\{k\}_n^2 = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i^n$ 。

则 $\{k-1\}_n^2 = k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{k-1-i} i^{n-1}$, 恰与上式相等, 证毕。

P420-421

4

即 $[x^{10}] \frac{1}{1-x} \frac{1-x^4}{1-x} \frac{1-x^6}{1-x} \frac{1-x^8}{1-x} = [x^{10}] \frac{1-x^4-x^6-x^8+x^{10}}{(1-x)^4} = \binom{13}{3} - \binom{9}{3} - \binom{7}{3} - \binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 158$ 。

5

(1) 简单的容斥原理, $\binom{16}{2} - 3\binom{7}{2} = 57$

(2) $\binom{13}{2} - 3\binom{5}{2} = 48$

10

容斥原理。

计算不限制时的方案: $\frac{9!}{3!2!4!} = 1260$

a 全相邻方案: $\frac{7!}{2!4!} = 105$

b 全相邻方案: $\frac{8!}{3!4!} = 280$

c 全相邻方案: $\frac{6!}{3!2!} = 60$

a,b 全相邻方案: $\frac{6!}{4!} = 30$

b,c 全相邻方案: $\frac{5!}{3!} = 20$

a,c 全相邻方案: $\frac{4!}{2!} = 12$

a,b,c 全相邻方案: $3! = 6$

$$1260 - 105 - 280 - 60 + 30 + 20 + 12 - 6 = 871$$

14

$$\begin{aligned}
 R(\text{Diagram 1}) &= x R(\text{Diagram 2}) + R(\text{Diagram 3}) \\
 &= x(1 + 3x + x^2) + R(\text{Diagram 4}) + x R(\text{Diagram 5}) \\
 &= x(2 + 5x + x^2) + x R(\text{Diagram 6}) + R(\text{Diagram 7}) \\
 &= x(2 + 5x + x^2) + x(1 + 2x) + (1 + 3x) \\
 &= x^3 + 7x^2 + 6x + 1
 \end{aligned}$$

15

即计算 $[x^4] R(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})$.

$$[x^4] R(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}) = [x^3] R(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix})$$

$$= [x^3] R(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix})$$

$$= [x^2] R(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}) + [x] R(\square)$$

$$= 1 + [x^2] R(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix})$$

$$= 3$$

18

(1)

容斥, $\sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} (-1)^j (10-j)^6 = 23160$

(2)

$$\sum_{i=1}^6 4^i = 5460$$