P397

32

提取 $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$ 各项系数

$\begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}=720,\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}=1764,\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=1624,\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=735,\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}=175,\begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix}=21,\begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix}=1$

34

容斥原理，钦定有 $k-i$ 个颜色不会被使用，可以得到问题方案数为 $\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}i(i-1)^{n-1}=k\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k-1}{i-1}(-1)^{k-i}(i-1)^{n-1}=k\sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^{k-1-i}i^{n-1}$ 。

观察第二类斯特林数的公式 $\left\{{n \atop k}\right\}k!=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}i^{n}$ 。

则 $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}k!=k\sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^{k-1-i}i^{n-1}$ ，恰与上式相等，证毕。

P420-421

4

即 $[x^{10}]\frac{1}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x}\frac{1-x^6}{1-x}\frac{1-x^8}{1-x}=[x^{10}]\frac{1-x^4-x^6-x^8+x^{10}}{(1-x)^4}=\binom{13}{3}-\binom{9}{3}-\binom{7}{3}-\binom{5}{3}+\binom{3}{3}=158$ 。

5

(1) 简单的容斥原理，$\binom{16}{2}-3\binom{7}{2}=57$

(2) $\binom{13}{2}-3\binom{5}{2}=48$

10

容斥原理。

计算不限制时的方案：$\frac{9!}{3!2!4!}=1260$

a 全相邻方案：$\frac{7!}{2!4!}=105$

b 全相邻方案：$\frac{8!}{3!4!}=280$

c 全相邻方案：$\frac{6!}{3!2!}=60$

a,b 全相邻方案：$\frac{6!}{4!}=30$

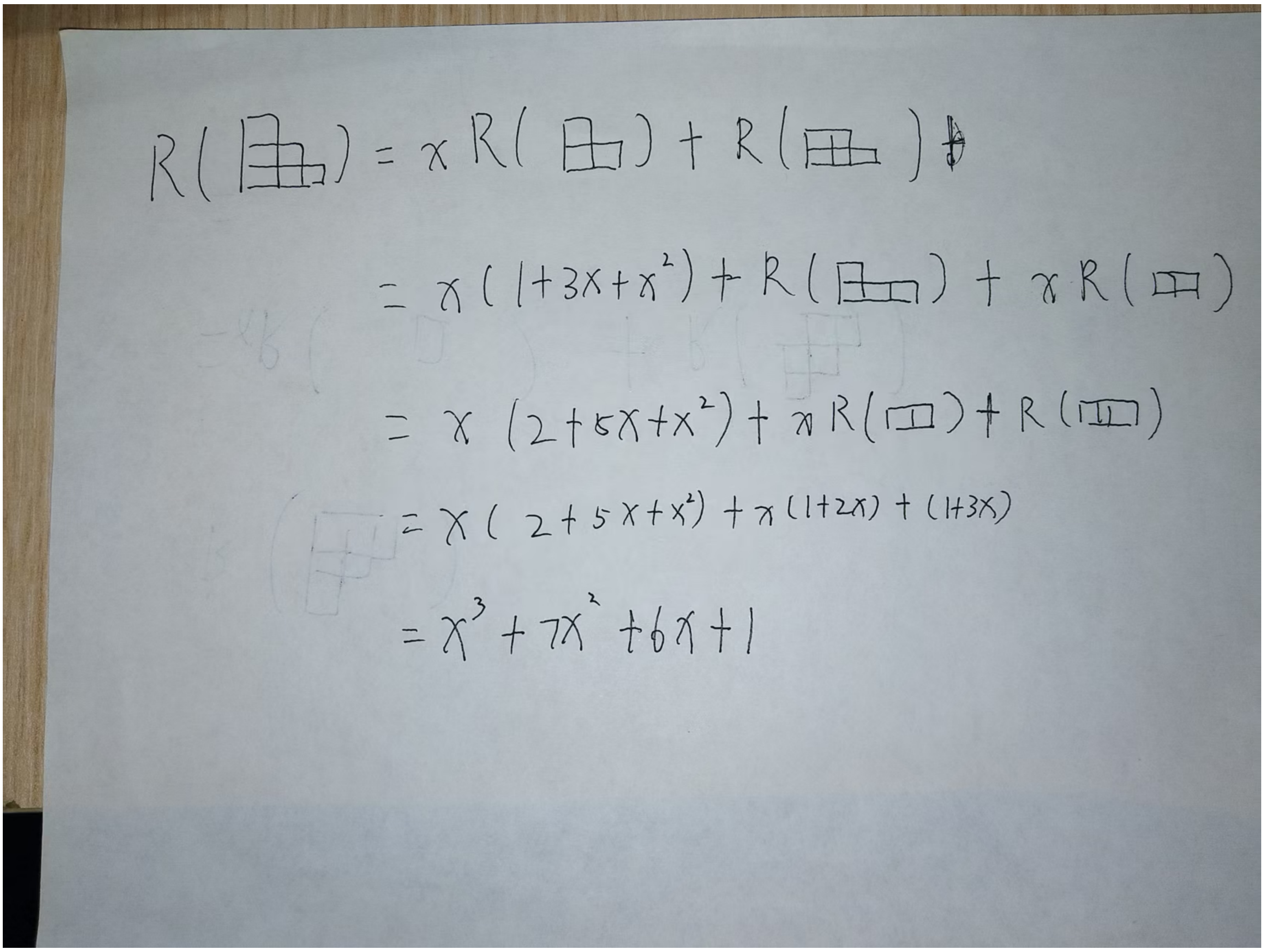
b,c 全相邻方案：$\frac{5!}{3!}=20$

a,c 全相邻方案：$\frac{4!}{2!}=12$

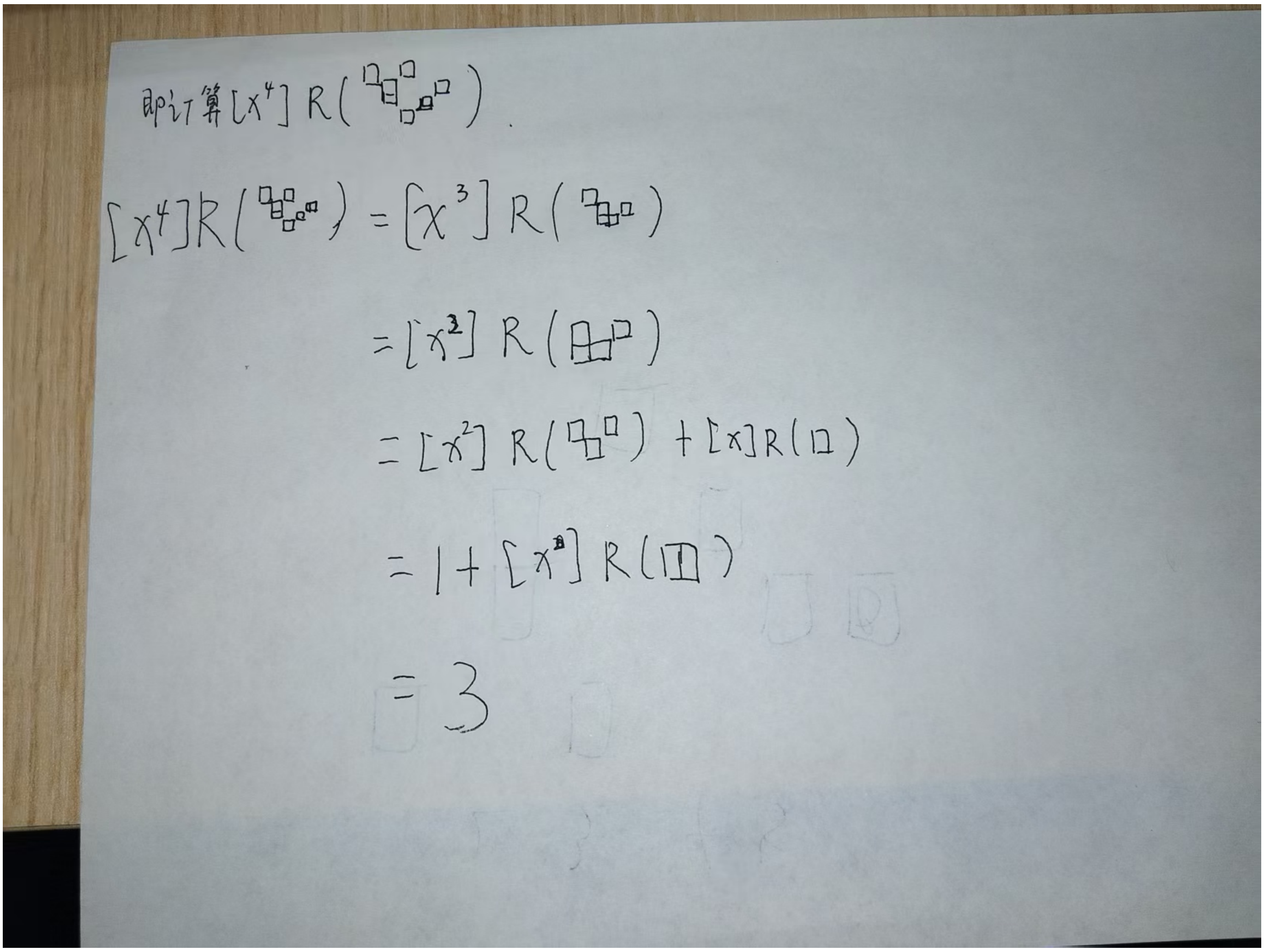
a,b,c 全相邻方案：$3!=6$

$1260-105-280-60+30+20+12-6=871$

14



15



即计算 $[x^4]R(\ )$.

$[x^4]R(\ ) = [x^3]R(\ )$

$= [x^3]R(\ )$

$= [x^2]R(\ ) + [x]R(\ )$

$= 1 + [x^1]R(\ )$

$= 3$

18

(1)

容斥，$\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}(-1)^j(10-j)^6 = 23160$

(2)

$\sum_{i=1}^{6}4^i = 5460$