Практикум 6. Предел функции

Цель работы – изучение предела функции в точке, односторонних пределов, пределов функции на бесконечности, графических моделей этих пределов, вычисление пределов, построение графиков с помощью функции sp.plot, символическое вычисление пределов.

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета Anaconda.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить **отчёт,** в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить либо в формате интерактивного питон-скрипта (ipynb), либо в виде документа Microsoft Word. Файл следует назвать по следующей схеме **pin_10_Ivanov_P_01_s1** (группа, фамилия, инициалы, номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты python фукнций; выводы.

Краткие теоретические сведения

и практические упражнения

1. Графические модели предела функции в точке и на бесконечности, одностороннего предела

Графики будем строить с помощью функции sym.plot. Функция sp.plot строит график функции $y = f(x)$ по конкретной символьной функции, не требую ввода конкретных значений векторов $(x_1, x_2, ...)$ и $(y_1, y_2, ...)$. В отличие от plt.plot функция sp.plot вычисляет таблицу значений функции самостоятельно.

Базовый формат вызова этой функции включает два аргумента и имеет один из двух видов:

sp.plot(func, (x , -5, -5))

sp.plot(func, (x , -5, -5), adaptive=False, nb_of_points=400)

В обоих случаях первым аргументом является символьная функция (func), а вторым переменная, по которой будет строиться график и её диапазон значений. Во второй форме мы отключаем режим адаптивного подбора точек на интервале и в явном виде указываем сколько их нужно использовать (nb_of_points).

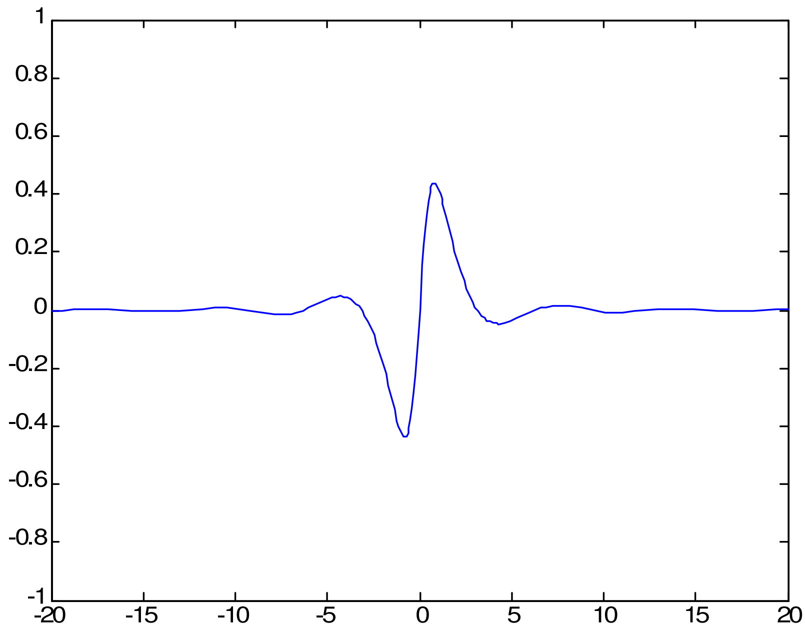
Пример 1.

График функции $y = \cos(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ можно построить, набрав в командном окне одну из команд:

```
import sympy as sp
from sympy.abc import x
sp.plot(sp.cos(x),(x,0,2*sp.pi)) # анонимная функция
y = sp.cos(x) # явное задание функции
sp.plot(y,(x,0,2*sp.pi))
sp.plot(y,(x,0,2*sp.pi),adaptive=False,nb_of_points=10,line_color='r')
```

График функции $y = \dfrac{\sin x}{x^2 + 1}$ на отрезке $[-20, 20]$ можно построить, набрав в командном окне одну из команд (5) – (8) (см. рис. ниже):

```
import sympy as sp
from sympy.abc import x
y = sp.sin(x)/(x**2+1) # явное задание функции
sp.plot(sp.sin(x)/(x**2+1),(x,-20,20))
sp.plot(y,(x,-20,20))
```

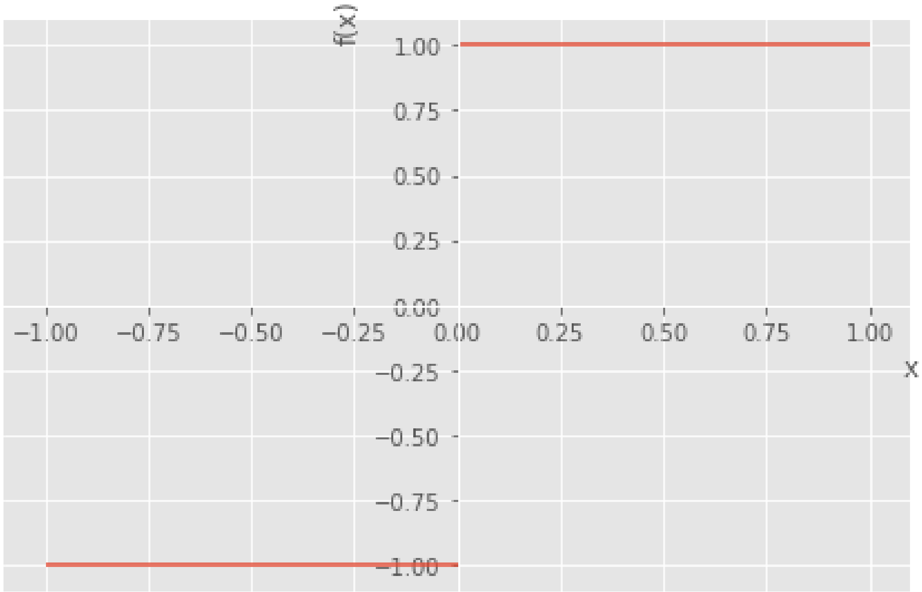


Среди дополнительных параметров функции sp.plot могут находиться строки, управляющие цветом и маркерами.

Если область изменения аргумента функции включает точки, в которых функция не определена, то для получения правдоподобного эскиза имеет смысл не соединять точки линией. Сравните «графики» функции $y = \frac{|x|}{x}$, построенные функцией sp.plot с использованием разных режимов.

Пример 2.

```
import sympy as sp
from matplotlib import style
from sympy.abc import x
style.use('ggplot') # отображение сетки координат по умолчанию
y = sp.Abs(x)/x
sp.plot((y,(x,-1,0)),(y,(x,0,1))) # исключаем точку разрыва
sp.plot(y,(x,-1,1)) # некорректный график без исключения точки
```



Упражнение 1.

Построить графики функций $y_1 = \dfrac{2x-1}{x-1}$, $y_2 = \dfrac{2x-1}{|x-1|}$, на таких промежутках, чтобы можно было судить о поведении этих функции на $+\infty$, $-\infty$, ∞, при $x \to 1+0$, $x \to 1-0$, $x \to 1$, $x \to 2+0$, $x \to 2-0$, $x \to 2$. В отчет вставить построенные графики. Под каждым графиком перечислить те из приведенных ниже утверждений, которые, насколько позволяет судить график, справедливы для рассматриваемой функции.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2+0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2+0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$,

$\lim\limits_{x\to1+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to2+0} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 3$,

$\lim\limits_{x\to2+0} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -3$.

Построив график последовательности или функции, можно попытаться определить её предел.

Пример 3.

Первый замечательный предел.

Чтобы найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, построим график этой функции:

```
import sympy as sp
from sympy.abc import x
y = sp.sin(x)/x
sp.plot(y)
```

По полученному графику можно предположить, что предел равен 1.

Упражнение 2.

Используя графики функций, найдите приближенно пределы (или убедитесь, что они не существуют):

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}}{x\ln(1-x^3)}$.

2. Символическое вычисление пределов

Точное вычисление предела функции в python производится с помощью функции

sp.limit (expr, var, a),

где **expr** – символическое выражение, **var** – переменная, по которой берётся предел, значение **a** – то, к чему эта переменная стремится (допускаются значения sp.oo (бесконечность) и –sp.oo).

Пример 4.

```
import sympy as sp
from sympy.abc import x, a
sp.limit((1+a/x)**x,x,sp.oo)
```

Односторонние пределы вычисляются как **sp.limit(expr, var, a, '-')** (слева) и **sp.limit(expr, var, a, '+')** (справа).

```
import sympy as sp
from sympy.abc import x
sp.limit(1/x**3,x,0,'-')
```

Если предел выражения (в том числе бесконечный) не существует, то python в качестве ответа выдаст диапазон возможных значений для данного выражения:

Пример 5.

```
import sympy as sp
from sympy.abc import x
sp.limit(sp.sin(x),x,sp.oo)
```

Упражнение 3.

Вычислите точные значения пределов из упражнения 2 . Соответствуют ли они полученным приближениям?

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.
2. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение С1.

Построить графики функций, , $y_3 = \left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|$, $y_3 = \dfrac{|3x-6|}{x-2}$ на таких промежутках, чтобы можно было судить о поведении этих функции на $+\infty$, $-\infty$, ∞, при $x \to 1+0$, $x \to 1-0$, $x \to 1$, $x \to 2+0$, $x \to 2-0$, $x \to 2$. В отчет вставить построенные графики. Под каждым графиком перечислить те из приведенных ниже утверждений, которые, насколько позволяет судить график, справедливы для рассматриваемой функции.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2+0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2+0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$,

$\lim\limits_{x\to1+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{x\to2+0} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 3$,

$\lim\limits_{x\to2+0} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -3$.

Упражнение С2.

Используя графики функций, найдите приближенно пределы (или убедитесь, что они не существуют):

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x \sin x$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

Упражнение С3.

Вычислите точные значения пределов из упражнения 2 а) - г). Соответствуют ли они полученным приближениям?

3. Ответить на контрольные вопросы:

Дать определения следующих пределов:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=a$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=a$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=a$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$; 6) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$;

7) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$; 8) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=a$;

9) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a$; 10) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty$;

11) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=-\infty$; 12) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$.