# Note sul cautious learning a limite fisso con GICP per dati di Poisson

Daniele Zago

## 1 Poisson GICP

1) Consideriamo una carta di controllo $C_t$ per aumenti del parametro di una Poisson,

$$C_t = \max\{0, \tilde{C}_t\},$$

dove $\tilde{C}_t$ è una carta di tipo EWMA (o CUSUM o AEWMA), ad esempio

$$\tilde{C}_t = (1-\lambda)C_t + \lambda \frac{x_t - \mathbb{E}[X_t|\widehat{\theta}_{t-d_t}]}{\sqrt{\mathbb{V}[X_t|\widehat{\theta}_{t-d_t}]}}.$$

Consideriamo il caso del limite di controllo fisso, per cui viene chiamato un allarme se

$$C_t \geq L.$$

Per ora consideriamo generica la strategia di update del parametro $\widehat{\theta}_{t-d_t}$ (può essere adaptive estimator, fixed parameter, cautious learning).

2) Supponiamo che la stima iniziale del parametro sia pari a $\widehat{\theta}_0$, mentre il vero valore del parametro è $\theta_0$. Allora, la CARL (ARL condizionata alla stima $\widehat{\theta}_0$) della carta di controllo $C_t$ sarà quella di una carta di controllo con vero valore $\widehat{\theta}_0$ che osserva uno shift fittizio al tempo $\tau = 1$ di ampiezza $\theta_0 - \widehat{\theta}_0$. In particolare, se la carta unilaterale controlla aumenti del parametro,

   - Se $\widehat{\theta}_0 > \theta_0$, allora lo shift fittizio è $\theta_0 - \widehat{\theta}_0 < 0$ e quindi $\mathrm{CARL}_0 > a$.
   - Se $\widehat{\theta}_0 < \theta_0$, allora lo shift fittizio è $\theta_0 - \widehat{\theta}_0 > 0$ e quindi $\mathrm{CARL}_0 < a$.

Combinando 1) e 2) si può disegnare una procedura GICP per la carta di controllo $C_t$, ovvero tale per cui

$$\mathbb{P}(\mathrm{ARL}_0 \leq a) = \beta, \tag{1}$$

basata sul seguente procedimento:

- Sia $(0, \widehat{\theta}_{\mathrm{up}})$ un intervallo di confidenza unilaterale di livello $1-\beta$ per $\theta$. Se il parametro stimato è $\widehat{\theta}$, allora per un fissato $L = L_0$ la carta di controllo avrà la minima $\mathrm{CARL}_0$ nell'intervallo di confidenza quando il vero valore del parametro è $\widehat{\theta}_{\mathrm{up}}$.
- Si applichi una procedura (es. `saControlLimits`) per trovare $L_{\mathrm{up}}$, ovvero i limite di controllo che fornisce $\mathrm{ARL}_0 = a$ per la carta con valore stimato $\widehat{\theta}$ quando il vero valore del parametro è $\widehat{\theta}_{\mathrm{up}}$.
- Il limite di controllo $L_\beta = L_{\mathrm{up}}$ rende (1) valida poiché l'intervallo di confidenza ha probabilità $\beta$ di non contenere il vero valore $\theta_0$.

**Nota su saControlLimits.** Siccome ci interessa in particolare che valga la (1), ho fatto una piccola modifica a `saControlLimits`. Dall'equazione (12) di Capizzi and Masarotto (2016), usando il parametro di precisione $\gamma$ si ha che con alta probabilità

$$a \cdot (1-\gamma) \leq \mathrm{ARL} \leq a \cdot (1+\gamma).$$

Quindi, ottimizzando per $\mathrm{ARL}_0 = a/(1-\gamma)$ invece di $\mathrm{ARL}_0 = a$ si ha che con alta probabilità

$$a \leq \mathrm{ARL} \leq a \cdot \frac{1+\gamma}{1-\gamma}, \tag{2}$$

il che è più utile se consideriamo la proprietà (1) per la carta. Per $a = 500$ e $\gamma = 0.03$, la (2) diventa

$$500 \leq \mathrm{ARL} \leq 531.$$

## 2 Cautious Learning

Con la stessa terminologia del paper, si disegna la *cautious region* $\mathcal{S}_\mathrm{t} = [0, H)$ in modo che

$$\mathrm{ATS}_0 = \mathbb{E}[\mathrm{TS}|\tau = \infty] = s,$$

per un valore di $s$ specificato, dove $\mathrm{TS} = \inf\{n \geq 1 : C_t \in \mathcal{S}_t\}$ è il *time to first stop* dell'update dei parametri. Per disegnare $\mathcal{S}_t$ basta osservare che $H$ è il limite di controllo di una carta *adaptive estimator* tale per cui $\mathrm{ARL}_0 = \mathrm{ATS}_0$. Per cui, si può semplicemente applicare la procedura `saControlLimits` con *adaptive estimator* per trovare il limite $H$. Una volta fissato $H$, si può applicare la procedura in Sezione 1 per trovare il limite $L_\beta$ che fornisce la proprietà GICP (1).

**Osservazione.** Se $\mathcal{S}_t = \{0\}$, la carta di controllo diventa di tipo *restarting*, ovvero l'update del parametro avviene solo quando $C_t = 0$. Se poi $C_t$ è una CUSUM, allora siamo nel caso della carta CUSUM-restarting.

## References


Capizzi, G. and Masarotto, G. (2016). "Efficient Control Chart Calibration by Simulated Stochastic Approximation". In: *IIE Transactions* 48.1, 57–65.