# Considerazioni

Daniele Zago

## 1 Poisson GICP

1) Consideriamo una carta di controllo $C_t$ di tipo EWMA (o CUSUM o AEWMA) a limite fisso che suona un allarme per
$$C_t \leq -L \quad \text{oppure} \quad C_t \geq L.$$

2) Supponiamo che la stima del parametro sia pari a $\widehat{\theta}$, mentre il vero parametro ha valore $\theta_0$. Allora, la ARL della carta di controllo $C_t$ sarà quella di una carta di controllo con vero valore $\widehat{\theta}$ che osserva uno shift al tempo $\tau = 1$ di ampiezza $\widehat{\theta} - \theta_0$.

Combinando 1) e 2) si può disegnare una procedura GICP, ovvero tale per cui

$$\mathbb{P}(\mathrm{ARL}_0 \leq a) = \beta \tag{1}$$

per la carta di controllo $C_t$ basata sul seguente procedimento:

- Sia $(\widehat{\theta}_{\mathrm{low}}, \widehat{\theta}_{\mathrm{up}})$ un intervallo di confidenza di livello $1 - \beta$ per $\theta$. Se il parametro stimato è $\widehat{\theta}$, per un fissato $L = L_0$ la carta di controllo avrà la minima $\mathrm{ARL}_0$ nell'intervallo di confidenza se il vero valore del parametro è $\widehat{\theta}_{\mathrm{low}}$ oppure $\widehat{\theta}_{\mathrm{up}}$.
- Si applichi una procedura (es. `saControlLimits`) per trovare $L_{\mathrm{low}}$ e $L_{\mathrm{up}}$, ovvero i limiti di controllo che forniscono $\mathrm{ARL}_0 = a$ per la carta con valore stimato $\widehat{\theta}$ quando il vero valore del parametro è, rispettivamente, $\widehat{\theta}_{\mathrm{low}}$ e $\widehat{\theta}_{\mathrm{up}}$.
- Il limite di controllo più conservativo, $L_\beta = \max\{L_{\mathrm{low}}, L_{\mathrm{up}}\}$, rende (1) valida poiché l'intervallo di confidenza ha probabilità $\beta$ di non contenere il vero valore $\theta_0$.

**Nota su saControlLimits.** Siccome ci interessa in particolare che valga la (1), ho fatto una piccola modifica a `saControlLimits`. Dall'equazione (12) di (Capizzi and Masarotto, 2016), usando il parametro di precisione $\gamma$ si ha che con alta probabilità

$$a \cdot (1 - \gamma) \leq \mathrm{ARL} \leq a \cdot (1 + \gamma).$$

Quindi, ottimizzando per $\mathrm{ARL}_0 = a/(1 - \gamma)$ invece di $\mathrm{ARL}_0 = a$ si ha che con alta probabilità

$$a \leq \mathrm{ARL} \leq a \cdot (1 - \gamma)(1 + \gamma),$$

il che è più in accordo con la proprietà (1).

## 2 Cautious Learning

Con la stessa terminologia del paper, si disegna la *cautious region* $\mathcal{S}_{\mathrm{t}} = (-H, H)$ in modo che

$$\mathrm{ATS}_0 = \mathbb{E}[TS|\tau = \infty] = s,$$

per un valore di $s$ specificato, dove $\text{TS} = \inf\{n \geq 1 : C_t \in \mathcal{S}_t\}$ è il *time to first stop* dell'update dei parametri. Per disegnare $\mathcal{S}_t$ basta osservare che $H$ è il limite di controllo di una carta *adaptive estimator* tale per cui $\text{ARL}_0 = \text{ATS}_0$. Per cui, si può semplicemente applicare la procedura `saControlLimits` con *adaptive estimator* per trovare il limite $H$. Una volta fissato $H$, si può applicare la procedura in Sezione 1 per trovare il limite $L_\beta$ che fornisce la proprietà GICP (1).

**Idea.** Volendo, si potrebbe disegnare anche la cautious region $\mathcal{S}_t$ usando la procedura GICP, in modo che $\mathbb{P}(\text{ATS}_0 \leq s) = \beta$.

## References

Capizzi, G. and Masarotto, G. (2016). "Efficient Control Chart Calibration by Simulated Stochastic Approximation". In: *IIE Transactions* 48.1, 57–65.