

#### 4: Analisi e test su come cambiano le proiezioni al variare dei parametri intrinseci

In questo capitolo studio in modo teorico-sperimentale l'effetto dei soli parametri intrinseci che l'utente può impostare nel software CoordCode: la Focale ( $f$ ), il Principal Point ( $C_x, C_y$ ). Il software, come spiegato ampiamente nel capitolo 3, implementa la proiezione pinhole, secondo le equazioni:

$$u = f \frac{X}{Z} + C_x$$
$$v = f \frac{Y}{Z} + C_y$$

Entrambe con ( $Z > 0$ ), come definito nella funzione *proietta\_punto* del codice.

##### 4.1: Analisi teorica

Sia  $P = (X, Y, Z)$  un punto espresso nel sistema Camera.

Scriviamo il vettore proiettato, rispetto al principal point come:

$$\begin{pmatrix} u - C_x \\ v - C_y \end{pmatrix} = \frac{f}{Z} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Ne discendono le seguenti proprietà, direttamente derivate dall'equazione implementata.

- **Variazione di  $f$  (scala radiale)**

Per un punto fissato:

$$\frac{\partial u}{\partial f} = \frac{X}{Z}$$
$$\frac{\partial v}{\partial f} = \frac{Y}{Z}$$

Un incremento di  $f$  dilata la distanza tra  $\|u - C_x, v - C_y\|$  in modo proporzionale a  $\sqrt{X^2 + Y^2}$  tutto diviso per  $Z$ .

In particolare, per insiemi con  $Z$  costante, la proiezione subisce una omotetia centrata in  $(C_x, C_y)$  di fattore  $\frac{f_{nuovo}}{f_{vecchio}}$ , che è una conseguenza diretta deòòà forma :

$$(u - C_x, v - C_y) = \left(\frac{f}{Z}\right) (X, Y)$$

- **Ambiguità prospettica (perdita della profondità)**

Per ogni  $\lambda > 0$ :

$$(X, Y, Z) \text{ e } (\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) \text{ hanno la stessa proiezione su } (u, v)$$

Tutti i punti allineati sulla stessa semiretta che esce dal centro ottico risultano quindi indistinguibili in 2D.

Questa non iniettività è intrinseca alla proiezione prospettica, come mostrato nel capitolo precedente.

- **Variazione di  $(C_x, C_y)$  (traslazione rigida)**

Si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial C_x} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial C_y} = 1$$

mentre tutte le altre derivate rispetto a  $(C_x, C_y)$  sono nulle.

Qualunque variazione di  $(C_x, C_y)$  produce solo una traslazione di tutto l'insieme  $\{(u, v)\}$  nel piano immagine, senza alterarne scala o forma.

## 4.2: Simulazione pratica

Per la verifica sperimentale uso lo stesso dataset 3D del Capitolo 3 e vario un solo parametro alla volta  $(f, C_x, C_y)$ , mantenendo costanti gli altri.

Nel software creato, le routine che gestiscono input, calcolo e ridisegno sono:  
- *aggiungi\_punto* per il parsing e la chiamata della funzione *proietta\_punto*.

- *ridisegna\_2d* e *ridisegna\_3d* per la visualizzazione assieme all'utilizzo della toolbar per l'ispezione

- **Simulazione 1:** Prendendo il caso della figura dell' Icosaedro, una buona simulazione per la Scala Radiale è quella di fissare  $(C_x, C_y)$  e confrontare tre valori  $f_1 < f < f_2$  con  $f$  valore standard (800 pixel).  
La teoria, prevede un allontanamento progressivo dei punti da  $(C_x, C_y)$  in 2D, con fattore di scala  $\approx \frac{f_i}{f}$  a parità di  $Z$ .

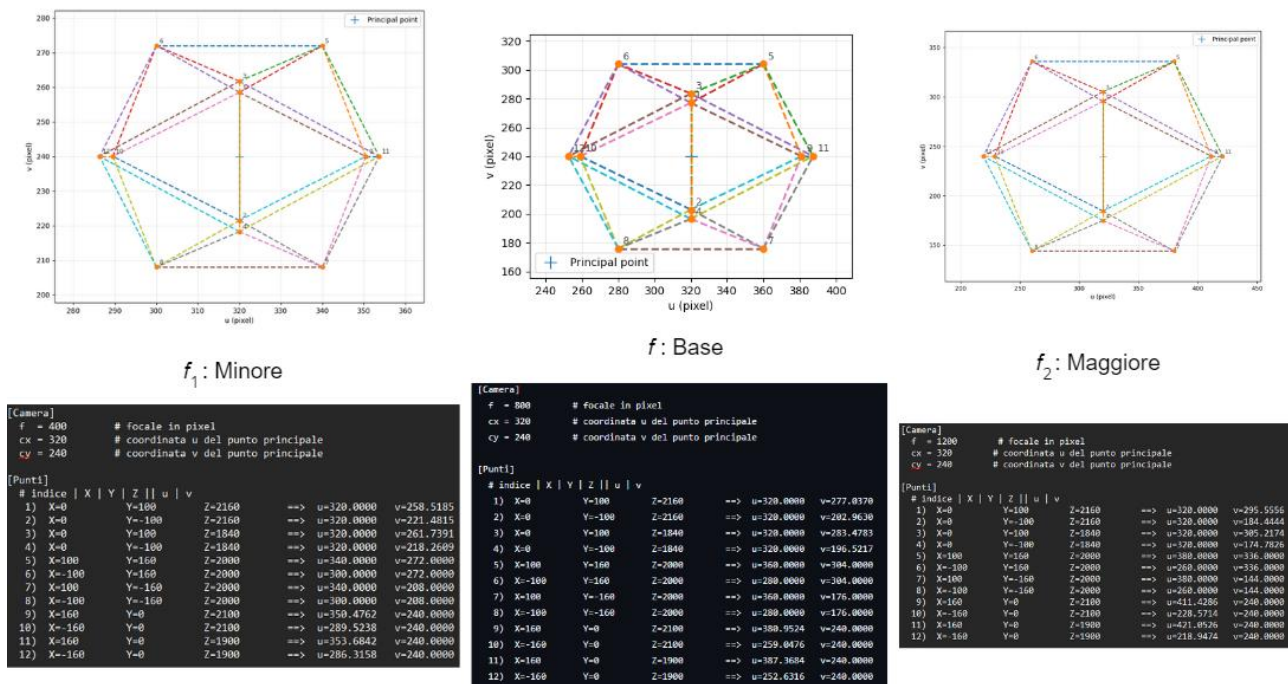
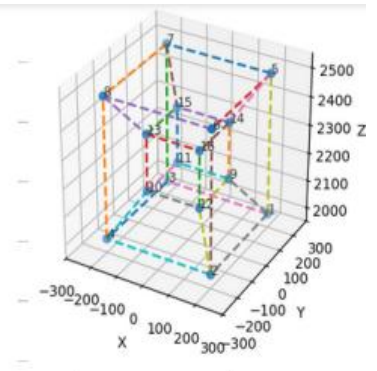
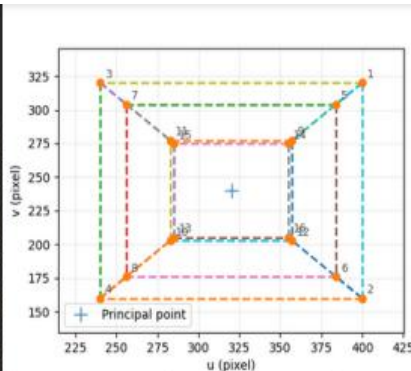


Figura: Effetto della variazione per la focale fissato il centro. Incrementando la focale, le proiezioni di dilatano radialmente attorno al principal point. A parità di  $(X, Y, Z)$ , la distanza  $\|u - C_x, v - C_y\|$ , cresce in proporzione alla focale stessa.

- **Simulazione 2:** Prendendo il caso della figura del Doppio Cubo, si fissa la focale ( $f$ ) e si trasla ( $C_x, C_y$ ), prima aumentando  $C_x$  e invariando  $C_y$  e dopo viceversa, che equivale ad aggiungere un fattore  $+\Delta$  peima a  $u$  ed in seguito a  $v$ . La teoria, prevede lo stesso pattern proiettato per entrambi, ma rigidamente traslato di un vettore  $(\Delta, 0)$  oppure  $(0, \Delta)$ .

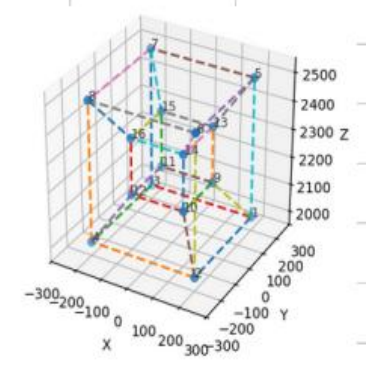
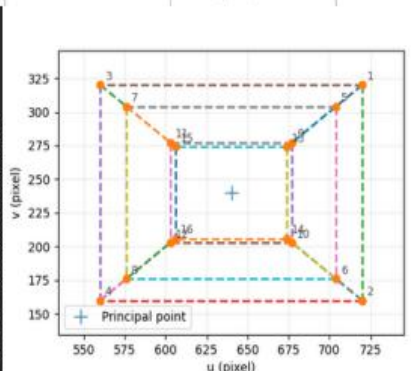
```
[Camera]
f = 800      # focale in pixel
cx = 320     # coordinata u del punto principale
cy = 240     # coordinata v del punto principale

[Punti]
# indice | X | Y | Z | u | v
1) X=200  Y=200  Z=2000  ==> u=400.0000 v=320.0000
2) X=200  Y=-200 Z=2000  ==> u=400.0000 v=160.0000
3) X=-200  Y=200  Z=2000  ==> u=240.0000 v=320.0000
4) X=-200  Y=-200 Z=2000  ==> u=240.0000 v=160.0000
5) X=200  Y=200  Z=2500  ==> u=384.0000 v=384.0000
6) X=200  Y=-200 Z=2500  ==> u=384.0000 v=176.0000
7) X=-200  Y=200  Z=2500  ==> u=256.0000 v=384.0000
8) X=-200  Y=-200 Z=2500  ==> u=256.0000 v=176.0000
9) X=100  Y=100  Z=2150  ==> u=357.2093 v=277.2093
10) X=100  Y=-100 Z=2150  ==> u=282.7907 v=277.2093
11) X=-100 Y=100  Z=2150  ==> u=357.2093 v=282.7907
12) X=-100 Y=-100 Z=2150  ==> u=282.7907 v=282.7907
13) X=100  Y=100  Z=2350  ==> u=285.2174 v=285.2174
14) X=100  Y=-100 Z=2350  ==> u=274.7826 v=274.7826
15) X=-100 Y=100  Z=2350  ==> u=285.2174 v=274.7826
16) X=-100 Y=-100 Z=2350  ==> u=274.7826 v=285.2174
```



```
[Camera]
f = 800      # focale in pixel
cx = 640     # coordinata u del punto principale
cy = 240     # coordinata v del punto principale

[Punti]
# indice | X | Y | Z | u | v
1) X=200  Y=200  Z=2000  ==> u=720.0000 v=320.0000
2) X=200  Y=-200 Z=2000  ==> u=720.0000 v=160.0000
3) X=-200  Y=200  Z=2000  ==> u=560.0000 v=320.0000
4) X=-200  Y=-200 Z=2000  ==> u=560.0000 v=160.0000
5) X=200  Y=200  Z=2500  ==> u=704.0000 v=384.0000
6) X=200  Y=-200 Z=2500  ==> u=704.0000 v=176.0000
7) X=-200  Y=200  Z=2500  ==> u=576.0000 v=384.0000
8) X=-200  Y=-200 Z=2500  ==> u=576.0000 v=176.0000
9) X=100  Y=100  Z=2150  ==> u=677.2093 v=277.2093
10) X=100  Y=-100 Z=2150  ==> u=602.7907 v=277.2093
11) X=-100 Y=100  Z=2150  ==> u=677.2093 v=282.7907
12) X=-100 Y=-100 Z=2150  ==> u=602.7907 v=282.7907
13) X=100  Y=100  Z=2350  ==> u=674.0426 v=274.0426
14) X=100  Y=-100 Z=2350  ==> u=674.0426 v=285.9574
15) X=-100 Y=100  Z=2350  ==> u=605.9574 v=274.0426
16) X=-100 Y=-100 Z=2350  ==> u=605.9574 v=285.9574
```



```
[Camera]
f = 800      # focale in pixel
cx = 320     # coordinata u del punto principale
cy = 480     # coordinata v del punto principale

[Punti]
# indice | X | Y | Z | u | v
1) X=200  Y=200  Z=2000  ==> u=400.0000 v=560.0000
2) X=200  Y=-200 Z=2000  ==> u=400.0000 v=400.0000
3) X=-200  Y=200  Z=2000  ==> u=240.0000 v=560.0000
4) X=-200  Y=-200 Z=2000  ==> u=240.0000 v=400.0000
5) X=200  Y=200  Z=2500  ==> u=384.0000 v=544.0000
6) X=200  Y=-200 Z=2500  ==> u=384.0000 v=416.0000
7) X=-200  Y=200  Z=2500  ==> u=256.0000 v=544.0000
8) X=-200  Y=-200 Z=2500  ==> u=256.0000 v=416.0000
9) X=100  Y=100  Z=2150  ==> u=357.2093 v=517.2093
10) X=100  Y=-100 Z=2150  ==> u=282.7907 v=517.2093
11) X=-100 Y=100  Z=2150  ==> u=357.2093 v=442.7907
12) X=-100 Y=-100 Z=2150  ==> u=282.7907 v=442.7907
13) X=100  Y=100  Z=2350  ==> u=354.0426 v=514.0426
14) X=100  Y=-100 Z=2350  ==> u=354.0426 v=445.9574
15) X=-100 Y=100  Z=2350  ==> u=285.9574 v=514.0426
16) X=-100 Y=-100 Z=2350  ==> u=285.9574 v=445.9574
```

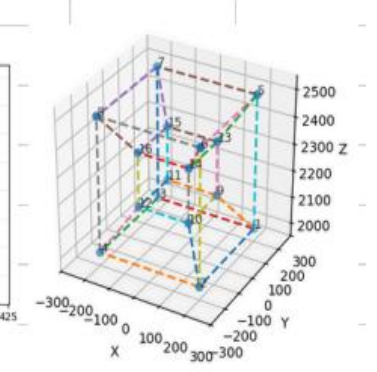
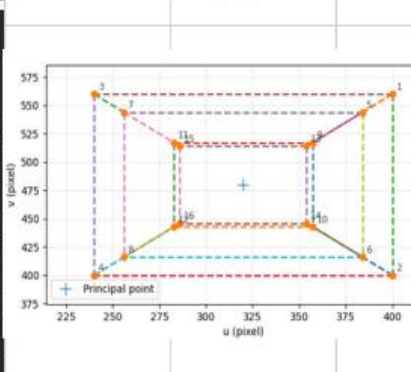


Figura: Abbiamo riportato tre casistiche diverse

- 1) Caso Base: Abbiamo ( $C_x = 320, C_y = 240$ ).
- 2) Caso di  $C_x$  : Aumentata rispetto al caso base, portandolo a 640, lasciando invariata  $C_y$ .
- 3) Caso di  $C_y$  : Aumentata rispetto al caso base, portandolo a 480, lasciando invariata  $C_x$ .

### 4.3: Osservazioni sui risultati

I risultati sperimentali ottenuti con *CoordCode* coincidono con le previsioni analitiche:

- L'aumento di  $f$  realizza una omotetia centrata in  $(C_x, C_y)$  delle proiezioni 2D.
- La modifica di  $(C_x \text{ o } C_y)$ , agisce come traslazione rigida dell'intero insieme  $(u, v)$ .
- Indipendentemente dai valori scelti, la proiezione resta non iniettiva lungo le semirette uscenti dal centro ottico, con sovrapposizione in 2D di punti collineari in 3D.

Queste conclusioni derivano direttamente dall'equazione implementata nel codice e dalla verifica visuale in vista 2D/3D.