COLLEGE EDME
ci-devant
COURS PRIVÉS EDME

Cours Prives Edme

Cours de Physique-Chimie

Année Académique 2022

Classe de Terminale Spécialité: Point Mathématique

Point 2: Vecteurs

Pour pouvoir bien comprendre les vecteurs, il faut d'abord être confortable avec le placement des points dans un repère orthonormal. Un repère est caractérisé par des axes. Un repère orthonormal est constitué d'axe i) **perpendiculaire entre elles en un point d'origine,** et ii) **dont la longueur du vecteur qui caractérise cet axe est 1**. Il est **très** avantageux d'utiliser un repère orthonormal pour représenter les points de l'espace (et par conséquent s'orienter dans l'espace) car toutes les directions de l'espace peuvent être décrites en étant des combinaisons de directions purement horizontale, purement verticale, et une direction de "profondeur" si on considère les trois dimensions. De plus, le fait que les directions soient perpendiculaires, nous permettra d'utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la longueur (également appelé la **norme**) d'un vecteur.

Dans l'espace à deux dimensions, noté $\mathbb{R}^2$

L'espace à deux dimensions est composé de directions purement horizontale et verticale. Pour placer un point dans un repère de cet espace, il faut tracer deux axes perpendiculaires entre elles en un point d'origine O. Il faut spécifier la position (***donner les coordonnées***) de O selon sa position suivant les axes du repère. Comme O est l'origine du repère, ses coordonnées par définition sont (0,0). Si nous souhaitons placer un point A dans notre repère, il faut spécifier sa position par rapport à l'origine sur l'axe horizontale (abscisse ou "axe des x"), et sa position par rapport à l'origine sur l'axe verticale (ordonnée ou "axe des *y*"). *Quand on se déplace à droite de l'origine on se déplace vers des valeurs positives de x, et à gauche vers des valeurs négatives. Quand on se déplace vers le haut de l'origine on va vers des valeurs positives de y, et vers le bas, des valeurs négatives.*

Donc prenons trois cas de figure pour le point A:

Cas 1: Le point $A_1(5,0)$ se lie "le point A_1 d'abscisse 5 et d'ordonné 0". C'est-à-dire sur l'axe horizontale le point A_1 est à 5 unités a1 droite de l'origine, et sur l'axe verticale il est à la même position que l'origine.

Cas 2: Le point $A_2(0,5)$ se lie "le point A_2 d'abscisse 0 et d'ordonné 5". C'est-à-dire sur l'axe horizontale le point A_2 est à la même position que l'origine, mais est à 5 unités de l'origine vers le haut sur l'axe verticale.

Cas 3: Le point $A_3(-2,-6)$ se lie "le point A_3 d'abscisse -2 et d'ordonné -6". C'est-à-dire sur l'axe horizontale le point A_3 est 2 unités à gauche de l'origine, et est à 5 unités de l'origine vers le bas sur l'axe verticale.

Voyons ces trois cas dans le graph ci-contre:

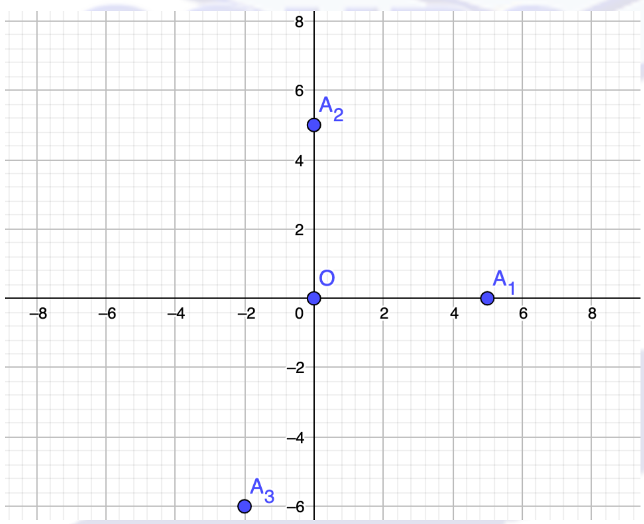

Figure 1: Trois points de coordonnés différents.

Représentations vectorielles dans $\mathbb{R}^2$ (à partir de points)

Rte de Jacquet #15, Jacquet Toto, Delmas 95 * Téls : 509- 3702-4222 * e-mails : cpedmead@yahoo.fr* coursprivesedme@gmail.com

Kedy Edme

Les points placés dans la figure 1 représente la position des positions fixes dans un espace de deux dimensions. Notez qu'une position est toujours définies par rapport à un point de référence (ici l'origine $O(0,0)$).

Nous pouvons également représenter un déplacement. Par exemple, nous pouvons dire qu'un individu se déplace du point d'origine $O(0,0)$ vers le point $A_1(5,0)$. Analysons un peu ce que cela veut dire: L'individu part du point O, marche vers la droite une distance de 5 unités (seulement sur l'axe des x), mais n'a exécuté aucun mouvement en avant ou en arrière (aucun déplacement sur l'axe des y). Alors pour représenter se déplacement, j'utiliserai graphiquement une flèche qui débute en $O(0,0)$ qui s'allonge de 5 unités et qui fini en $A_1(5,0)$. Mathématiquement, nous pouvons déterminer les coordonnés de ce vecteur:

en abscisse l'individu à fait une distance:

point final-point initial

$$A_x - O_x = 5 - 0 = 5 \text{ (\textit{pas étonnant, on se déplace 5 unités sur l'axe x})}$$

en ordonnée l'individu à fait une distance:

point final-point initial

$$A_y - O_y = 0 - 0 = 0 \text{ (\textit{pas étonnant, il n'y eu aucun déplacement sur l'axe y})}$$

Vous comprendrez que cette flèche sera parallèle à l'axe des x car, il n'y a eu aucun déplacement le long de y. Je choisis de nommer ce vecteur $\vec{d}(5,0)$. La flèche au-dessus de la lettre doit être présente pour indiquer que $\vec{d}$ n'est pas un point, mais un vecteur. À partir de notre exemple, nous voyons qu'un vecteur à **un sens (gauche, droite, en haut, en bas, derrière ou devant),** et **une direction (verticale, horizontale, oblique)**. Dans le cas de $\vec{d}$ il est dirigé vers la droite, et est horizontal.

Déterminons le vecteur qui représente le déplacement du point A_3 vers le point A_1. Un individu qui se déplace de A_3 vers A_1 sur l'axe des x doit parcourir une distance de:

$$A_{1x} - A_{3x} = (5 - (-2)) = 7 \text{ unités vers la droite}$$

et cet individu, doit sur l'axe des y parcourir une distance de:

$$A_{1y} - A_{3y} = (0 - (-6)) = 6 \text{ unités vers le haut}$$

Nous appellerons ce vecteurs $\vec{I}$, et nous dirons que les coordonnées de $\vec{I}$ sont $(7,6)$. La représentation des vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{I}$ sont faites ci-dessous (figure 2):

Vous pouvez compter les unités le long des axes pour partir d'un point à l'autre, et vous verrez, qu'effectivement, le calcul de coordonnées est vérifié.

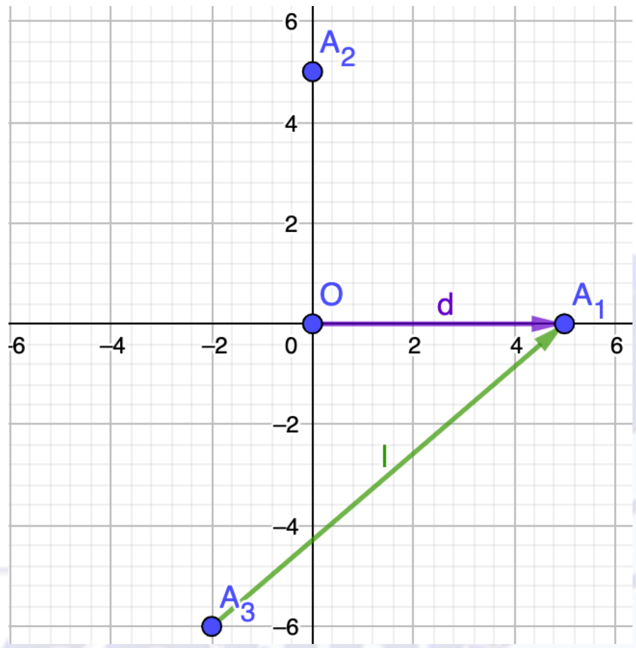

Figure 2: Représentation des vecteurs déplacements d et l

Représentations vectorielles dans $\mathbb{R}^2$ (à partir des vecteurs de base)

Nous avons dit au début du document qu'un repère orthonormal est constitué i) d'axe perpendiculaire entre elles en un point d'origine, et ii) d**ont la longueur du vecteur qui caractérise cet axe est 1.** En effet, nous pouvons définir des vecteurs unitaires (longueur est exactement 1 unité) perpendiculaire entre eux qui chacun caractérise les axes de notre repère. Par exemple, nous définissons le vecteur $\overrightarrow{i}(1,0)$, qui existe seulement sur l'axe des x et à 1 unité de l'origine vers la droite. Et le vecteur $\overrightarrow{j}(0,1)$ qui existe seulement sur l'axe des y et à 1 unité de l'origine vers le haut. $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont perpendiculaires entre eux. Nous pouvons donc écrire TOUS les vecteurs dans le plan comme étant une combinaison linéaire (somme) de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Prenons les exemples des vecteurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{I}$:

-$\overrightarrow{d}$ a pour coordonnées 5 unites vers la droite et zero unité vers le haut. Alors il est composé de 5 fois $\overrightarrow{i}$ et de zéro fois $\overrightarrow{j}$. Alors: $\overrightarrow{d} = 5\overrightarrow{i}$

-En utilisant la même procédure, le vecteur $\overrightarrow{I} = 7\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont appelés des vecteurs de bases car ils peuvent être utilisés pour écrire tous les autres vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^2$.

N.B: Rappelez-vous que nous pouvons effectuer la translation d'un vecteur. Concrètement, si quelqu'un se déplace de A_3 *vers* A_1*, il y a associer à ce déplacement le vecteur* $\vec{I} = 7\vec{i} + 6\vec{j}$*. Cependant, ce vecteur est un objet mathématique qui peut représenter n'importe quelle déplacement de 7 unités vers la droite et 6 unités vers le haut, indépendamment du point de départ et d'arriver. Regardez le schéma ci-contre afin de mieux comprendre.*

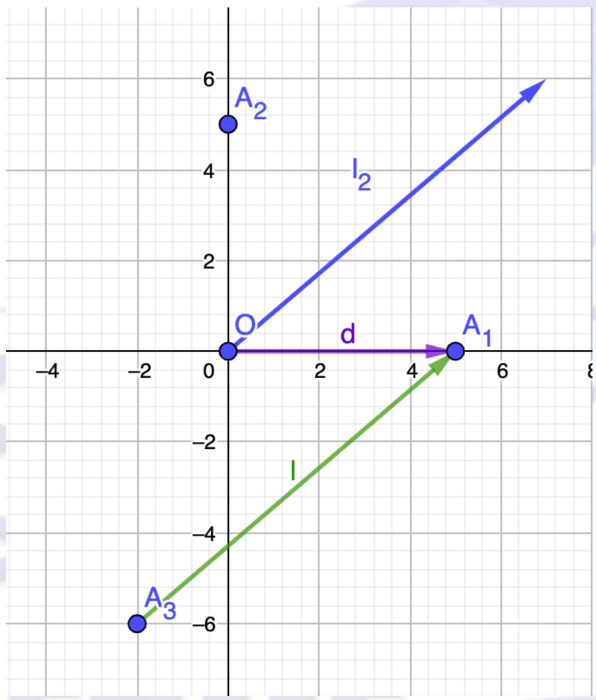

Figure 3: Representations des vecteurs d,I et I2. Les vecteurs I et I2 sont égales.

Les vecteurs I *et* I_2 *représentes le même déplacement (même direction, même sens et même longueur). Il n'y pas moyen de les différencier mathématiquement. Pour générer* I_2*, on a simplement effectué la translation de* I *dans l'espace de sorte que sont point de départ soit l'origine.* ***Ces deux vecteurs sont égaux****! De plus, géométriquement, ils sont parallèles car ils représentent le même déplacement, donc ils ne se rencontrerons jamais dans* $\mathbb{R}^2$*.* ***Deux vecteurs*** $(\vec{I}, \vec{I_2})$ ***de même sens, même direction et même longueur sont égaux et parallèle,*** $\vec{I} = \vec{I_2}$***. Si***

deux vecteurs $(\vec{I}, \vec{I_2})$ ***sont parallèles, de même longueur, mais de sens opposés alors*** $\vec{I} = -\vec{I_2}$.

Addition et soustraction de vecteurs et multiplication d'un vecteur par un scalaire

Pour additionner deux vecteurs, il existe deux méthodes. La première méthode consiste simplement à effectuer la translation d'un des vecteurs afin que son début soit sur le même point que l'extrémité du second vecteur. Ensuite on relie le début du second vecteur à l'extrémité du premier vecteur. Regardez l'exemple ci-contre où on additionne les vecteurs $\vec{d}$ *et* $\vec{I}$ pour produire le vecteur $\vec{u}$. On effectue d'abord la translation de $\vec{I}$ afin comme indiqué, ensuite on relie le point initial de $\vec{d}$ au point final de $\vec{I}$. La résultante est $\vec{u}$. La méthode de Chasles est aussi facile, mais ne sera pas vue dans ce document.

Pour soustraire deux vecteurs $\vec{I} - \vec{d}$, on remarque d'abord qu'une soustraction est l'addition de deux entités de signes opposés : $\vec{I} - \vec{d} = \vec{I} + (-\vec{d})$. Alors, nous n'avons qu'a générer le vecteur $-\vec{d}$ ($\vec{d_2}$ sur le schéma), à partir du vecteur $\vec{d}$. On garde la même direction et la même longueur de $\vec{d}$ mais on change son sens. Ensuite, on effectue la translation de $\vec{I}$ comme avant, et ensuite on effectue la liaison des deux extrémités comme avant. Regarder le schéma pour un exemple: $\vec{I} - \vec{d} = \vec{v}$.

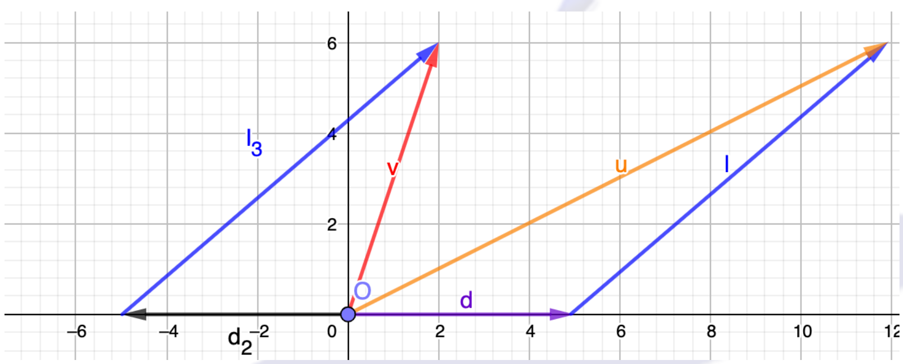

Figure 4: Addition et soustraction de vecteurs

Pour multiplier un vecteur par un scalaire, on multiplie simplement toutes le composantes du vecteurs par ce scalaire. Un scalaire est juste un nombre.

Exemple: Nous avons le vecteur $\vec{d}(5,0)$. Alors la multiplication $5\vec{d} = (5 \times 5,\ 5 \times 0) \Rightarrow 5\vec{d}(25,0)$.

Deuxième exemple: Avec le vecteur $\overrightarrow{I}$ (7,6), la multiplication par le scalaire -1, nous donne le vecteur: $-1\overrightarrow{I} = (-1 \times 7,\ -1 \times 6) \Rightarrow -\overrightarrow{I}(-7, -6)$

<u>Longueur (Norme) d'un vecteur</u>

Pour calculer la longueur d'un vecteur, nous devons d'abord nous souvenir que n'importe quel vecteur dans le plan est une somme de deux vecteurs de bases perpendiculaire ($\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ étudiés plus haut). Ceci est important car il nous permet de voir que tous les vecteurs dans le plan sont des hypothenuses de triangles rectangles, avec les deux côtés perpendiculaires étant **des multiples** de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Regarder l'exemple ci-contre pour bien comprendre:

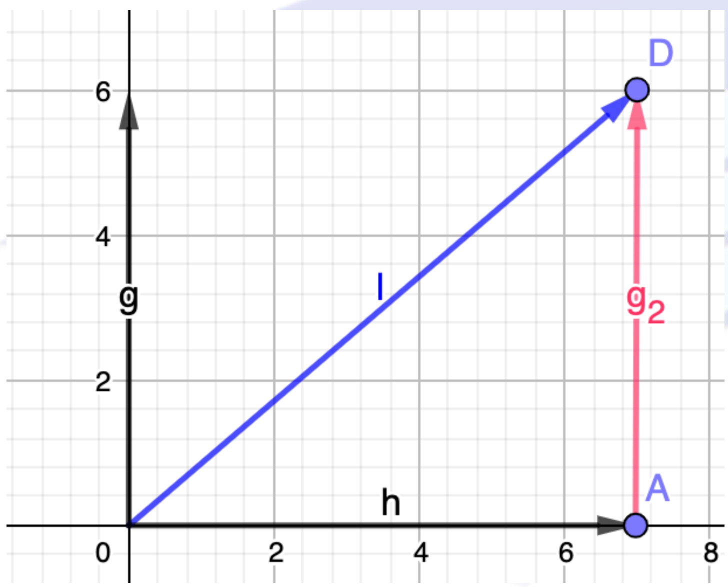

Figure 5: Decomposition d'un vecteur en ses composantes et calcul de norme

Le vecteur $\overrightarrow{I}$ de coordonnées (7,6) peut être décomposé en une somme de deux vecteurs perpendiculaires $7\overrightarrow{i} = \overrightarrow{h}$ et $6\overrightarrow{j} = \overrightarrow{g}$, alors $\overrightarrow{I} = 7\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{I} = \overrightarrow{h} + \overrightarrow{g}$. Maintenant pour construire notre triangle, on effectue la translation du vecteur $\overrightarrow{g}$ au point A. On appelle la résultante de cette translation $\overrightarrow{g_2}$ (n'oublier pas que $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{g_2}$ sont identiques!). Maintenant nous avons un triangle rectangle dont $\overrightarrow{I}$ est l'hypothenuse. Par le théorème de Pythagore, nous avons donc:

$||I||^2 = h^2 + g^2$ ici $||I||$ se lie "*norme de I*" cela veut dire la longueur du vecteur I

$||I||^2 = (7^2 + 6^2)$

$||I||^2 = (49 + 36)$

Rte de Jacquet #15, Jacquet Toto, Delmas 95 * Téls : 509- 3702-4222 * e-mails : cpedmead@yahoo.fr* coursprivesedme@gmail.com

$||I||^2 = 85$
$||I|| = \sqrt{85} \simeq 9{,}2.$

Représentations vectorielles dans $\mathbb{R}^3$

La représentation vectorielle dans 3 dimensions est une extension de ce dont on a déjà vu dans 2 dimensions. À notre repère, il faut ajouter un troisième axe perpendiculaire au deux premières. Comme cela, un axe peut representer un mouvement lateral (exemple: l'axe des x) un mouvement vers l'avant et vers l'arrière (exemple: l'axe des y) et un mouvement de bas en haut (l'axe des z). Les points que nous placerons dans ce repère seront caractérisés par trois nombres au lieu de deux, pour spécifier la position des points par rapport à l'origine sur les trois axes différents. Les vecteurs seront aussi caractérisés par trois nombres (exemple: un individu effectue deux pas à droite, un pas en avant et trois pas vers le haut, alors le vecteur déplacement : $\overrightarrow{d}(2,1,3)$). Les vecteurs peuvent être également décomposés en somme de trois vecteurs perpendiculaires au lieu de deux. Ces vecteurs unitaires sont $\overrightarrow{i}(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}(0,1,0)$ et $\overrightarrow{k}(0,0,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{d}(2,1,3)$ peut être écrit: $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$. Regarder la représentation en 3-D ci-contre:

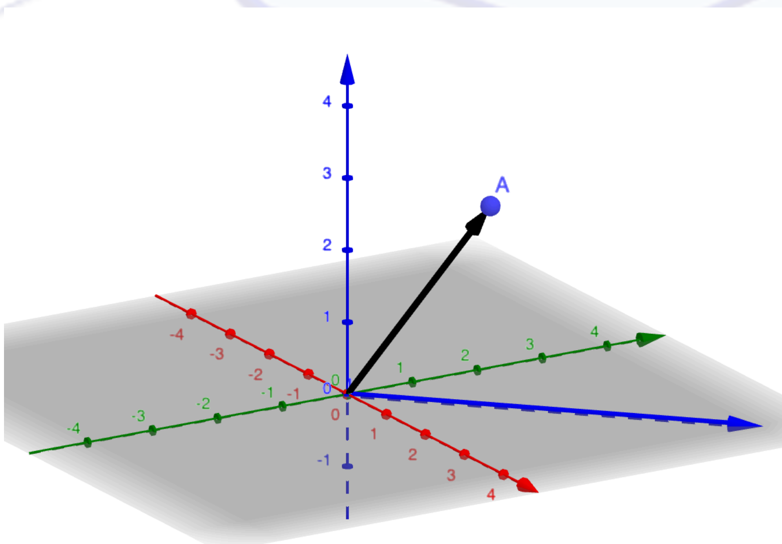

Figure 6: Représentation du point A (2,1,3), du vecteur d(2,1,3) et du vecteur L(4,4,0)

Notez bien maintenant qu'il y a trois axes. Alors le point A doit être spécifié par trois nombres. Le vecteurs $\overrightarrow{d}$ également. Même le vecteur $\overrightarrow{L}$ qui n'a pas d'élévation, doit être spécifié par trois nombres, car il existe aussi dans 3 dimensions ($\mathbb{R}^3$). En effet ses coordonnées sont $\overrightarrow{L}(4,4,0)$.