Cours Prives Edme
Cours de Physique-Chimie
Année Académique 2022-2023
Classe de Terminale Spécialité: Point Mathématique

Point 1- Dérivée

Rappel: fonction linéaire et tangente

Supposons que nous ayons une voiture qui circule à une vitesse constante de $v = 3\ m \cdot s^{-1}$ et parcours une trajectoire rectiligne. Nous pouvons exprimer la distance parcourue par cette voiture en fonction du temps. En effet, étant donné le mouvement uniforme, la distance parcourue par la voiture peut être exprimée comme une fonction linéaire du temps:

$$d(t) = a \cdot t \qquad (1)$$

où la notation $d(t)$ (et se lie “d de t”) indique que la variable dépendante d dépend de la variable indépendante t, et a est le coefficient de proportionnalité de la fonction et est égal à 3 dans notre exemple. Donc, la distance est proportionnelle au temps. Nous pouvons représenter cette fonction graphiquement également, en réalisant d’abord que le domaine de cette fonction, c’est-à-dire les valeurs que peut prendre la variable t, sont toutes les valeurs réels positives et zero, étant donné que nous ne pouvons pas avoir de valeur de temps négatifs. Donc le domaine de la fonction est $D_f : \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nous devons aussi nous souvenir que la variable dépendante (d dans ce cas) est toujours en *ordonnée* (l’axe vertical) et que la variable indépendante (t dans ce cas) est toujours en *abscisse* (l’axe horizontal). Nous choisissons et plaçons 4 points, les points: O (0,0), A(1,3), B(2,6) et C (3,9). Notons que nous avons ***choisis*** les abscisses que nous désirons en respectant D_f, c’est-à-dire les valeurs $\{0,1,2,3\}$, et nous avons utilisé l’équation (1) avec $a = 3$ pour calculer les ordonnées correspondant $\{0,3,6,9\}$. Après avoir placé les points sur notre repère, nous relions simplement ces point entre eux pour obtenir la représentation graphique de la fonction $d(t)$.

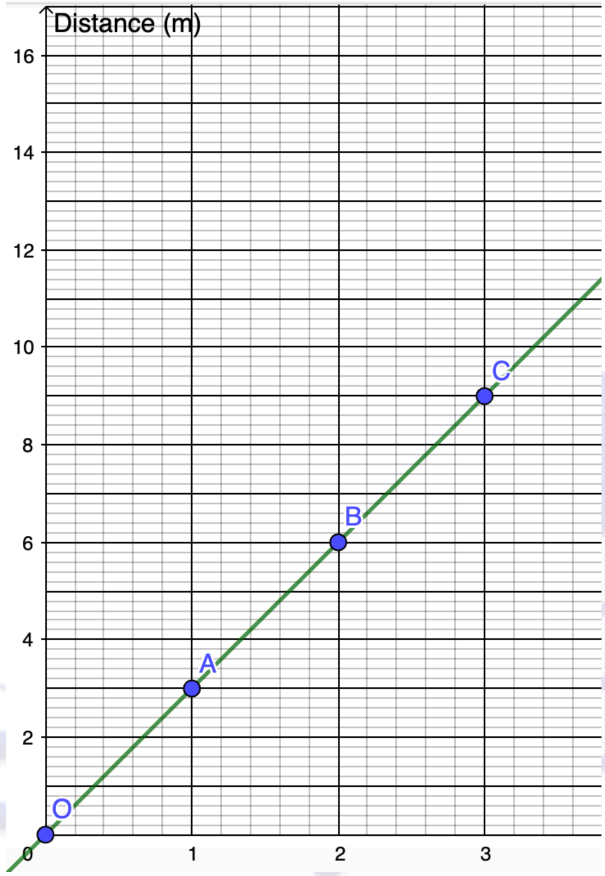


Figure 1: Droite d'équation $d(t) = 3t$. La distance (en mètre) est représentée en ordonnée et le temps (en seconde) en abscisse.

Nous savons que la valeur du coefficient $a = 3$, parce que nous l'avons choisi ainsi. Cependant si nous étions présenté avec le nuage de points, sans connaitre la valeur de a, nous aurions pu facilement déterminer sa valeur. En effet, nous savons que:

$$d(0) = 0$$
$$d(1) = 3$$
$$d(2) = 6$$
$$d(3) = 9$$

Nous aurions pu nous demander alors, quelle valeur de a, permettrait que la valeur de la fonction en zéro soit zéro, et que la valeur de la fonction en 1 soit 3, en 2 soit 6 etc… Armé de ce nuage de point, et sachant que la fonction est linéaire (c'est-à-dire obéit l'équation 1), on sait que:

$$a = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (2)$$

C'est-à-dire, la fonction $d(t)$ évaluée en t_2 moins la fonction $d(t)$évaluée en $t_1$divisé par $t_2 - t_1$.

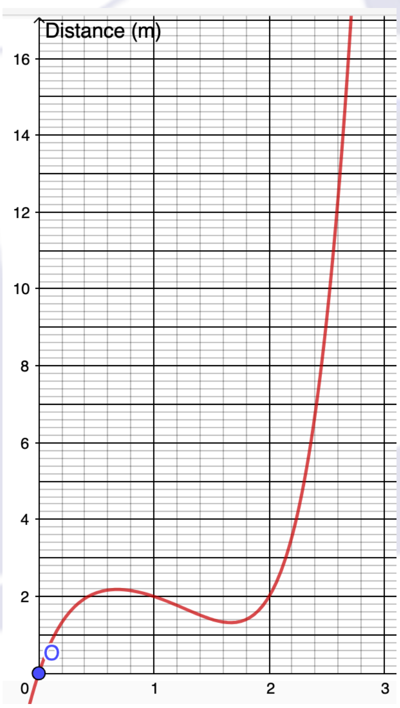
Nous pouvons, alors, déterminer a en choisissant deux des points donnés. Si nous utilisons les points d'abscisses $t_2 = 3\ et\ t_1 = 1$, alors nous aurons pour ordonnées $d(t_2 = 3) = 9$ et $d(t_1 = 1) = 3$. En appliquant l'équation (2) nous obtenons:

$$a = \frac{9-3}{3-1} = \frac{6}{2} \Rightarrow a = 3 \qquad (2')$$

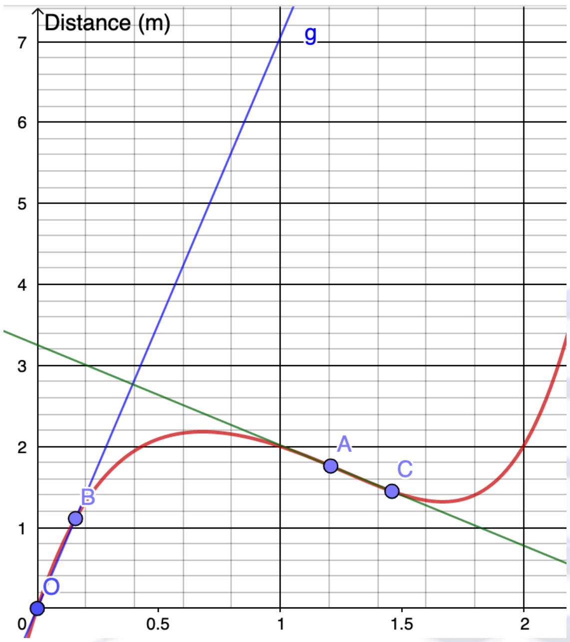
Dans l'équation (2'), nous remarquons que quand on parcours 6 m, 2 secondes ce sont écoulées ou encore, quand on parcours 3 m, 1 seconde s'écoule. Nous aurions trouvé cette même valeurs de a quelques soient les points que nous aurions choisi sur cette droite. **La variation de la fonction linéaire est toujours constante**. Entre deux points, il y aura toujours la même variation. Dans ce cas, cette variation est égale à 3. De plus, notez aussi que nous avons un rapport de distance (dans le numérateur) sur temps (dans le dénominateur). Alors, les unités de a sont des unités de distance/temps, dans ce cas de $m/s\ ou\ m \cdot s^{-1}$. Alors $a = 3\ m \cdot s^{-1}$. Ceci nous permet de voir que a est la vitesse constante établie dans l'énoncé de départ.

Trajectoire non-uniforme

Imaginons maintenant que la vitesse n'est pas constante le long du trajet. La fonction de distance en fonction du temps ne sera pas linéaire (donc n'obéit pas à l'équation 1). De plus, sa représentation graphique ne sera pas une droite, mais plutôt une courbe. Dans cette représentation (image gauche), nous réalisons que la distance augmente entre le point O (0,0), atteint un maximum au point (0.6, 2.2), c'est-à-dire quand le temps est 0,6 s en abscisse, la distance est 2,2 m en ordonnée. Ensuite la distance diminue (devient inférieur à 2 m) entre 0,6 $s\ et\ 1{,}8\ s$ et augmente de nouveau à partir de $t = 2\ s$. La question que l'on pourrait se poser est: qu'en est-il de la valeur de la vitesse dans les régions que nous venons d'analyser? Nous avons appris une seule méthode pour calculer une vitesse. C'est la méthode de l'équation (2). Le problème est que, cette méthode était appliquée à une situation ou le mouvement était uniforme (vitesse constante), et notre représentation graphique était une droite. Il était alors facile de calculer le coefficient de cette droite puisqu'elle était exactement la vitesse que l'on recherchait. Ici, nous n'avons pas une fonction linéaire, mais plutôt une fonction variable. Que faire?



Nous pouvons utiliser notre méthode de l'équation (2) pour déterminer la vitesse dans une région spécifique. Pour ce faire, **nous avons besoin d'une droite**. De plus, il faut que cette droite soit une bonne représentation de la région qui nous intéresse (*mathématiquement: Il faut que cette droite soit le plus semblable à une tangente à la région qui nous intéresse. Elle ne sera pas exactement une tangente puisqu'elle touchera plusieurs point de la courbe dans la région qui nous intéresse; une tangente par définition touche un seul point. Mais cela devra suffire pour une approximation.*) Dans l'exemple ci-contre, nous nous sommes intéressés, à la région entre le point O (0,0) et le point B (0.16,1.11) et la région décroissante autour des points A (1.21,1.76) et C (1.46,1.45). Remarquez comment la droite en bleu représente bien la fonction (*cette droite est quasiment superposable à la fonction*) **seulement** entre les points O et B, et la droite verte seulement entre les points A et C. Alors, comme nous avons des droites, nous pouvons maintenant déterminer leurs coefficient en utilisant les coordonnés des points O et B (pour la droite en bleu), ainsi que l'équation (2) pour connaitre la valeur de la vitesse dans cette région de la courbe, et refaire le même calcul en utilisant les points A et C pour connaitre la valeur de la vitesse dans la deuxième région de la courbe. Ce faisant, les vitesses sont $v_{OB} = 6.9\ m \cdot s^{-1}\ et\ v_{AC} = -1.24\ m \cdot s^{-1}$



Analysons: v_{OB} est positif, donc entre 0 seconde et 0.16 seconde, la vitesse passe de zéro à $6.9\ m \cdot s^{-1}$ pour parcourir une distance de 0 m à 1.11 m. Entre 1.21 seconde et 1.76 seconde, la vitesse v_{AC} est négative. N'oublier pas que la vitesse est un vecteur, donc elle possède une intensité ($1.24\ m \cdot s^{-1}$) mais également un sens et une direction (gauche vers droite $= +$ et droite vers gauche $= -$ dans notre exemple). Entre les temps $t_1 = 1.21\ s$ et $t_2 = 1.76\ s$ la voiture fait alors marche arrière, ce qui explique bien que la distance diminue entre les points A et C. Si nous nous intéressons à d'autre région de la trajectoire, nous pouvons appliquer la même démarche: *Déterminer la région de la trajectoire qui nous intéresse, choisir deux points sur la trajectoire suffisamment proche entre elle pour que la droite reliant ces deux points soient presque superposable à la fonction représentant la trajectoire dans cette région spécifique.*

N.B: Les vitesses déterminés dans la fonction linéaire et la fonction avec la trajectoire non-uniforme sont des vitesses moyennes entre deux points (O et B ou A et C). Elles n'indiquent pas les vitesses instantanées! C'est-à-dire une vitesse à un seul point spécifique (en B, en A

ou encore en C). Pour déterminer une vitesse instantané, il va nous falloir utiliser une autre notion mathématique qui est la notion de dérivée.

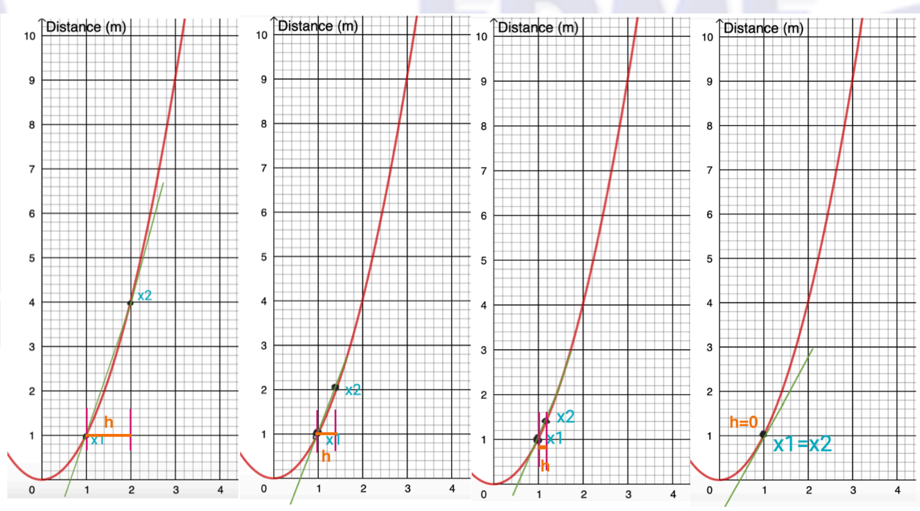
Vitesse Instantanée

Une **vitesse instantanée** est une vitesse à un point spécifique d'une trajectoire. Dans les exemples que nous avons étudiés, les vitesses calculées étaient entre deux points, alors étaient des vitesses moyennes. Afin de déterminer une vitesse instantanée, nous partons de la même méthode déjà étudié:

Premièrement, nous identifions la région qui nous intéresse, deuxièmement, nous plaçons deux points très proches l'un de l'autre dans cette région. Si nous traçons la droite reliant ces deux points, nous serons en mesure de calculer une vitesse moyenne entre les deux, comme nous l'avons fait plus haut. Mais ici, nous cherchons une vitesse instantanée. Alors, cela ne nous aidera pas. Ce que nous voulons vraiment c'est que notre droite soit une **vrai tangente** à un point de la trajectoire. Mais ceci cause problème car, nous avons besoin de deux points sur une droite pour déterminer son coefficient. De plus, ces deux points doivent faire partie de la courbe qui nous intéresse. Hors, si nous traçons une tangente à la courbe, elle touchera la courbe <u>en un seul point</u>, et aucun autre point sur cette tangente ne pourra alors être utilisé pour obtenir la vitesse correspondante à cette courbe.

(Pour l'exemple qui suit, nous allons prendre la fonction $f(x) = x^2$. Cela rendra les manipulations algébriques plus facile)

Notre stratégie sera alors la suivante: On commencera par placer deux points sur la courbe. Notons ces points x_1 et x_2. On tracera la droite reliant x_1 et x_2 et on verra qu'elle n'est pas tangente à la courbe (bien évidemment puisqu'elle touche la courbe en x_1 et x_2). Nous noterons la distance (en abscisse) qui sépare les deux points h. Nous allons ensuite rapprocher le point x_2 du point x_1, et on tracera de nouveau la droite. Nous



réalisons, alors, que h diminue. Supposons que nous pouvions faire se rapprochement entre les deux points jusqu'à ce que $x_1 = x_2$, autrement dit jusqu'à ce que $h = 0$, notre droite deviendrait alors une vrai tangente passant uniquement par le point x_1 (voir le graphe). Cependant, comme il nous faut maintenir deux points pour trouver la tangente, nous ne dirons pas que $x_1 = x_2$ mais plutôt que $x_2 \to x_1$ ("x_2 tends vers x_1"), et que la distance qui les sépares en abscisses "h" n'est pas zéro, mais que $h \to 0$ ("tends vers zéro"). De plus, h peut être aussi proche de zéro qu'on le souhaite, infiniment près de zéro, et dans **la limite** que $h \to 0$, $x_2 \to x_1$. Voyons ce que cela donne algébriquement:

1) Notre fonction est la suivante $f(x) = x^2$ (pour chaque valeur de x, la fonction élève cette valeur au carré: fonction parabolique)
2) Les points qui nous intéresses sont $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$
3) Mais nous voulons que x_2 se rapproche infiniment de x_1 (mathématique que h se rapproche infiniment de zéro)
4) Nous notons que le point $x_2 = x_1 + h$ alors $f(x_2) = f(x_1 + h)$
5) Utilisons maintenant l'équation (2) pour trouver notre coefficient directeur en respectant les conditions 2 à 4.

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - (x_1)} \qquad (3)$$

à gauche nous avons la même formule que dans l'équation (2), et ensuite nous avons utilisés la condition 4) au dessus pour réécrire seulement en terme de x_1. Maintenant nous allons utilisé la condition 1) qui dit que "f de n'importe quoi est se n'importe quoi au carré" en plus de la condition 3) qui veut que h s'approche infiniment de zéro. Nous trouvons alors:

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{(x_1 + h)^2 - (x_1)^2}{(x_1 + h) - (x_1)} \qquad (3')$$

L'équation (3) se lie, "la limite de "$\frac{(x_1 + h)^2 - (x_1)^2}{(x_1 + h) - (x_1)}$" quand $h \to 0$". On développe et réduit l'expression fractionnaire d'abord:

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1 h + h^2 - x_1^2}{x_1 + h - x_1}$$

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{2x_1 h + h^2}{h}$$

maintenant on peut factoriser le h au numérateur, qui va ensuite se simplifier avec le h au dénominateur:

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x_1 + h)}{h}$$
$$a = \lim_{h \to 0} (2x_1 + h)$$
et finalement on “évalue” la limite $h \to 0$ qui n’est rien d’autre d’égaler la valeur de h à zéro:
$$a = 2x_1$$
Et voilà! Nous avons obtenues une expression pour notre coefficient en fonction de x_1. Pour trouver sa valeur, il suffit de remplacer x_1 par sa valeur et le tour est joué. Nous obtiendrons ainsi la valeur de la vitesse instantanée au point x_1 (si bien évidemment notre fonction est une fonction de distance en fonction du temps).
Plus généralement l’expression obtenue $a = 2x$ est la **dérivée** de la fonction $f(x) = x^2$, et elle généralement noté $f'(x)$ (la notation de Newton) ou $\frac{df}{dx}$ (la notation de Leibniz). La notation de Newton sera la plus utilisé dans notre cours (et en général pendant les études classique). Mais la notation de Leibniz est bien meilleur (et supérieur à mon humble avis)! Vous verrez pourquoi dans vos études universitaire.

Revenons au concept de vitesse instantanée: Si la courbe qui traduit la distance d’une voiture en fonction du temps est une courbe parabolique, c’est-à-dire:
$$d(t) = t^2$$
Et on nous demande de trouver la vitesse instantanée de la voiture exactement quand $t = 2\ s$, on évalue d’abord la dérivée de la fonction:
$$d'(t) = 2t$$
et on évalue la dérivée à $t = 2$:
$$d'(2) = 2 \cdot 2 \Rightarrow d'(2) = 4$$
Alors, la vitesse instantanée de la voiture qui suit une trajectoire parabolique à l’instant $t = 2\ s$ est de $4m \cdot s^{-1}$.

Nous pouvons **toujours** trouver la dérivée de n’importe qu’elle fonction en utilisant la limite quand $h \to 0$ de $\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - (x)}$. Cependant, pour des fonctions plus compliqués que le polynôme $f(x) = x^2$, cela prendrait énormément de temps de calcul. Alors, les mathématiciens on pu trouver et résumer la formule des dérivées de fonction usuels et de fonction composées. Vous trouverez ces formules dans ce document. Vous devez savoir bien les utiliser! Le premier tableau à rapport aux fonctions usuels, et le second aux fonctions composées comme $(3x + 3)^2$

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

où on trouve une fonction affine élevé au carré. Les u et v désigne des fonctions composées, et les u' et v' leurs dérivées respectives.

PRIVÉS
EDMÉ

Fonctions ou opérations	Dérivée	Domaine de validité
x	1	$\mathbb{R}$
$k*x$	k	$\mathbb{R}$
$k*u$	$k*u'$	D_u
$u+v$	$u'+v'$	$D_u \cap D_v$
$u*v$	$u'v+uv'$	$D_u \cap D_v$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$D_u \cap D_v \cap v \neq 0$
$\frac{k}{u}$	$\frac{-ku'}{u^2}$	$D_u \cap u \neq 0$
u^n	$nu'*u^{n-1}$	$D_u^{\ n}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (1)	$D_{\sqrt{u}}$
$\cos u$	$-u'\sin u$	D_u
$\sin u$	$u'\cos u$	D_u
e^u	$u'e^u$	D_u
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$D_{\ln u}$

(1) $\sqrt{u}$ peut être dérivée avec u^n sachant que $\sqrt{u} = u^{1/2}$

source pour les tableaux: (https://www.piger-lesmaths.fr/tableau-de-fonctions-derivees-usuelles/ et https://www.letudiant.fr/boite-a-docs/document/derivation-et-variations.html)

Rte de Jacquet #15, Jacquet Toto, Delmas 95 * Téls : 509- 3702-4222 * e-mails : cpedmead@yahoo.fr* coursprivesedme@gmail.com