COLLEGE EDME
ci-devant
COURS PRIVÉS EDME

Dérivée (Supplément)

Ce document a pour but de vous donner des exemples de comment déterminer la dérivée de plusieurs types de fonctions. Il est un supplement au document de dérivée envoyer pendant les vacances. Il est donc important de bien lire le document sur les dérivées d'abord et ensuite entamer celui-ci. Le concept de dérivée est central en physique et en chimie-physique, et comme nous aurons à étudier des chapitres de chimie-physique (cinétique: vitesse de réaction) en plus des chapitres de physique, il faut être comfortable avec le concept.

Notez que TOUTES les dérivées peuvent être calculé par la relation $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ vu dans le document précédent. Cependant, cela serait très compliqué d'utiliser cette définition (la vrai définition!) d'une dérivée pour des fonctions plus complexe qu'un polynôme de degré 1 ou 2. Ces pour cela que les méthodes ci-contre sont importantes à maitriser.

N.B: Toutes les dérivées seront notés avec la notation prime $(')$

<u>Calcul de dérivée</u>

Propriété 1: La dérivée d'une somme est la somme des dérivées: $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

Pour prendre la dérivée d'un polynôme, on multiplie le terme en x par son exposant et on réduit son exposant d'une unité.

Polynôme: $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + c + \dots$

dérivée: $f'(x) = n \cdot ax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2}$. Le c est une constante et ne dépends pas de x, alors sa dérivée est zéro. Ceci n'est pas étonnant. Une dérivée est un changement d'une fonction par rapport à une variable, hors une constante ne change pas, donc la dérivée d'une constante sera toujours zéro.

exemple: $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

dérivée: $f'(x) = 15x^2 + 6x + 2$ Remarqué que l'on utilise ici la propriété 1, car chaque terme peut être considéré comme une fonction séparée (exemple: $h(x) = 5x^3$, $g(x) = 3x^2$, $s(x) = 2x$, $t(x) = 1$

alors $h'(x) = 15x^2$, $g'(x) = 6x$, $s'(x) = 2$, $t'(x) = 0$. Alors $f'(x) = h'(x) + g'(x) + s'(x) + t'(x)$

Propriété 2: La dérivée d'un produit est égal au premier facteur, multiplié par la dérivée du second facteur, plus le second facteur multiplié par la dérivée du premier facteur (<u>la règle des produits</u>)

Produit: $\left(f(x) \times g(x)\right)' = f(x) \times g'(x) \ + \ f'(x) \times g(x)$

exemple: $h(x) = \sqrt{x} \times \left(2x^2 + 1\right)$

N.B: Il faut d'abord savoir que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ **est** $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}$

Maintenant on peut appliquer la règle des produits:

$$h'(x) = \sqrt{x} \times (4x) \ + \ \frac{-1}{2\sqrt{x}} \times \left(2x^2 + 1\right) \Rightarrow h'(x) = 4x\sqrt{x} \ - \frac{2x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$$

Propriété 3: La règle des quotients:

A) Soit $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$**, alors sa dérivée est** $h'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$

exemple: $h(x) = \dfrac{1}{4x^3} \Rightarrow h'(x) = -\dfrac{12x^2}{16x^6}$, on peut simplifier cette fonction, alors $h'(x) = -\dfrac{3}{4x^4}$.

B) L'exemple A est un cas particulier (plus simple) du cas plus général que l'on va voir maintenant:

$h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$**, alors sa dérivée est** $h'(x) = \dfrac{g'f - gf'}{f^2}$ **(où j'ai arrêté d'écrire (x) pour les fonctions pour rendre la notation plus simple, mais ces fonctions sont toujours fonction de x!)**

Exemple: $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$

dérivée: $h'(x) = \dfrac{\frac{-x^2}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x}}{x^4}$, on peut simplifier en mettant les termes du haut sous le même dénominateur d'abord:

$$h'(x) = \frac{-2x^2\sqrt{x} + 4x^2}{2x^4\sqrt{x}}.$$

L'élève curieux tentera de prouver que le cas **A** est un cas particulier de **B**. Indice:$g(x) = 1$ dans le cas **A**.

Quelques dérivées à connaitre:

- Nous avons déjà vu que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ est $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ **(cool!)**
- $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$
- $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$ **Faites attentions à ces deux derniers par rapport au signe!**
- $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Règle de la chaine (L'une des règles les plus importantes du calcul différentiel)

Cette règle nous montre comment prendre la dérivée de fonction composée. Par exemple, une fonction:

$f(x) = (3x^3 + 6x + 1)^2$, il faut déterminer quelle fonction sont utilisée pour construire cette fonction composé: $h(x) = x^2$ (la fonction "extérieur") et $g(x) = 3x^3 + 6x + 1$ (la fonction "intérieur")

Donc il faudra la dérivée de $h(x) = x^2$ qui est $h'(x) = 2x$ mais ici l'argument de la fonction n'est pas x mais $g(x) = 3x^3 + 6x + 1$, alors notre première dérivée sera $h'(x) = 2(3x^3 + 6x + 1)$

Et il faut la dérivée de $g(x)$ qui est simplement un polynôme, alors $g'(x) = (9x^2 + 6)$. Alors la dérivée final de $f(x)$ est:

$f'(x) = 2(3x^3 + 6x + 1)(9x^2 + 6)$

EXEMPLE 2:

$f(x) = \sqrt{(2x^2 + 1)}$ est une fonction composé. Car il s'agit d'une fonction $h(x) = \sqrt{x}$ et d'une fonction $g(x) = (2x^2 + 1)$ que l'on a combiné en prenant: $h(g(x)) = \sqrt{(2x^2 + 1)} = f(x)$.

Pour prendre la dérivée d'une telle fonction il faut prendre la dérivée de la fonction "extérieur" ($h(x)$) dans ce cas, multiplié par la dérivée de la fonction "intérieur" ($g(x)$) comme nous l'avons fait dans l'exemple précédant.

Exemple: $f'(x) = \dfrac{-4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}}$ ce qui peut être simplifié en $f'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

Exemple 3: $f(x) = e^{-5x}$. Il y a une fonction $h(x) = e^x$ et sa dérivée est encore $h'(x) = e^x$, mais l'argument de cette fonction n'est pas x mais plutôt $-5x$, alors on droit remplacer x par $-5x$ dans $h'(x)$ (comme nous l'avons fait précédemment) et il y a une fonction $g(x) = -5x$ et sa dérivée est $g'(x) = -5$. Donc la dérivée de $f(x)$ est:

$f'(x) = -5e^{-5x}$

Kedy Edme
Kedy Edme