Exercices : calculs de dérivées

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, préciser le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$:

1. (a) $f(x) = 2x^2 + 3x$
   (b) $f(x) = 4x^3 - 2x^2x + 5x - 7$
   (c) $f(x) = 2x^8 - 3\sqrt{x}$
   (d) $f(x) = \dfrac{2x}{5} - \dfrac{7x^2}{4} - \dfrac{3}{x}$
   (e) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}$
   (f) $f(x) = (2x-1)(3x+2)$

2. (a) $f(x) = (\dfrac{1}{x} - 2)(2x^2 - 5x + 3)$
   (b) $x\sqrt{x}$
   (c) $f(x) = x^2(\sqrt{x} + 2)$

3. (a) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$
   (b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{-2x+1}$
   (c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
   (d) $f(x) = \dfrac{-2x^2+4x}{x^2+x+1}$
   (e) $f(x) = \dfrac{-5}{x^2-x-2}$
   (f) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
   (g) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
   (h) $f(x) = \dfrac{5x^3}{x-1}$
   (i) $f(x) = \dfrac{x}{x^3+8}$

4. (a) $f(x) = \sqrt{16-x}$
   (b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
   (c) $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$
   (d) $f(x) = x\sqrt{x+1}$
   (e) $f(x) = x^2\sqrt{1-2x}$
   (f) $f(x) = (x^2+7)^6$
   (g) $f(x) = (x^5 - 2x^2)^3$
   (h) $f(x) = x^6(2x+1)^3$
   (i) $f(x) = \dfrac{5}{6}(1-x)^3\sqrt{1-x}$

5. (a) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4x-1}}$
   (b) $f(x) = \dfrac{2}{(2x-3)^2}$
   (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+4}}{x-3}$
   (d) $f(x) = 3 + \dfrac{2}{3x+4} - \dfrac{5}{(3x+4)^2} + \dfrac{3}{(3x+4)^3}$

Exercice 2

Dans chacun des cas, déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ et $a = 2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x^2+3}$ et $a = 0$
3. $f(x) = 5(x^2+1)^3$ et $a = -1$
4. $f(x) = \dfrac{x+5}{\sqrt{1-2x}}$ et $a = 0$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

1. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 72x - 2$
2. $f(x) = 2x^6 - 3x^4$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x^2}$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 4x + 6$.

1. Déterminer le sens de variation de g.
2. Calculer $g(-1)$ et en déduire le tableau de signes de g.
3. Démontrer que pour tout x non nul, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. En déduire le tableau de variations de f.