1 前言

常见的求和符号的出处或者说是形式，主要有如下三个：

- 纯粹的代数求和表达式，形如 $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$，通常在 求和 & 求积中出现，
- 包含组合数的形式出现，常常含有 $\binom{n}{k}$, 通常在组合求和中出现
- 和数论中的乘性函数 φ, μ 等结合出现，形如 $\sum_{d|n}$ 等，通常在乘法数论中出现

尽管在表面上这三个形式不同，但是它们背后有着同样的核心思想: 交换求和

假设有一个二元函数 $f(a,b)$, 那么就有

$$\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} f = \sum_{b\in B}\sum_{a\in A} f \tag{1}$$

这个看似显然的结果在超过一般的情况下都是十分具有创造性的，所以任何情况下你看到双重求和都应该考虑交换求和顺序。如果遇到单重的求和，考虑把它转化成双重求和，比如后面的生成函数。还有一些情况下，你应该考虑改变求和的变量（表达式）比如下面这几个例子:

$$\sum_{a\geq 0}\sum_{b\geq 0} f = \sum_{k\geq 0}\sum_{\substack{a,b \\ a+b=k}} f$$

$$\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} a^2(b+1) = \sum_{a\in A} a^2\left(\sum_{b\in B}(b+1)\right) = \left(\sum_{a\in A} a^2\right)\cdot\left(\sum_{b\in B}(b+1)\right)$$

2 代数求解

2.1 伸缩 & 部分 求和

这个是最没有挑战和难度的求和，只要看到多项式分母（polynomial denominators）就可以考虑。下面是一个 Stanford 考试题目：

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{7n+32}{n(n+2)}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{16}{n}-\frac{9}{n+2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{16}{1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^1+\frac{16}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{16}{n+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-\frac{16}{n+2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} \\ &= \frac{33}{2}\end{aligned}$$