2.2 交换求和顺序

下面是一个概率论中的例子：Let X and Y be random variables (不一定独立)，那么有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{n\geq 0} nP(X+Y=n) = \sum_{n\geq 0}\sum_{a+b=n} nP(X=a,Y=b) \\
&= \sum_{a,b\geq 0}(a+b)nP(X=a,Y=b) \\
&= \sum_{a\geq 0}\sum_{b\geq 0} aP(X=a,Y=b) + \sum_{a\geq 0}\sum_{b\geq 0} bP(X=a,Y=b) \\
&= \sum_{a\geq 0} aP(X=a) + \sum_{b\geq 0} bP(Y=b) \\
&= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(b)
\end{aligned}
$$

下面我们来看一个在数论中关于整除的求和式子，实际上这个引理我们还会在后面用到。

Let $n \geq 1$ be an Integer, 那么

$$\sum_{d\mid n} \varphi(d) = n \tag{2}$$

注意：其中 φ 满足 $\varphi * 1 = \mathrm{id}$

又一个使用交换求和的例子, 设 n 是一个整数，证明：

$$\sum_{k\geq 1} \varphi(k)\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \frac{1}{2}n(n+1)$$

2.3 Fourier 有限和

一个经典的例子就是计算

$$\sum_{k\geq 1}\binom{1000}{2k}$$

求解思路：注意到 $\dfrac{1^n+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, & n\text{是偶数} \\ 0, & n\text{是奇数} \end{cases}$ 于是我们有：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 1}\binom{1000}{2k} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\binom{1000}{n} + \sum_{n\geq 0}\binom{1000}{n}\times(-1)^n\right) \\
&= (1+1)^{1000} + (1-1)^{1000} \\
&= 2^{999}
\end{aligned}
$$