Programação em Lógica

Prof. A. G. Silva

18 de agosto 2016

Introdução (I)

- Paradigma de **programação lógico**
- **Linguagens de programação lógica** ou **linguagens declarativas**
  - Programas declarativos em vez de procedurais
  - Especificações dos resultados desejados são expressas (em vez de os procedimentos detalhados para produzi-los)
  - Sintaxe notavelmente diferente da sintaxe das linguagens funcionais e imperativas
  - Expressão de programas em uma forma de **lógica simbólica**
  - Processo de inferência lógico para produzir resultados

Introdução (II)

- A lógica possui uma longa história, de mais de 23 séculos, que remonta aos antigos filósofos gregos, principalmente Aristóteles, que estabeleceu os seus fundamentos de maneira sistemática
- Lógica Booleana – Boole (1847) traz a lógica para o campo da matemática
- Lógica de Predicados – Fregue (1879) – lógica moderna
- A lógica lida com dois conceitos fundamentais
  - Verdade (teoria de modelos)
  - Prova (teoria das provas)

Introdução (III)

- Teoria dos modelos
  - Trata da validade das fórmulas lógicas - é possível que uma dada fórmula apresente o valor de verdade verdadeiro (uma proposição é uma asserção declarativa, ou seja, afirma ou nega um fato, e tem um valor de verdade, que pode ser verdadeiro ou falso.)
    - Tautologia { sempre verdade
    - Formula valida { quando ha pelo menos uma interpretacao que torne a formula verdadeira

Introdução (IV)

- Teoria das provas
  - Dado um conjunto de axiomas e alguma regra de inferência, verificar se uma fórmula pode ser deduzida a partir dos axiomas
  - A sequência de fórmulas geradas constitui uma prova

Cálculo de predicados – Introdução (I)

- Base da programação lógica: **lógica formal**
- Consiste em objetos e seus relacionamentos
- Lógica formal como método para descrever **proposições**
- Proposições formalmente descritas podem ser verificadas em relação a sua validade

Cálculo de predicados – Introdução (II)

- A **lógica simbólica** pode ser usada para as três necessidades básicas da lógica formal:
  - Expressar proposições
  - Expressar os relacionamentos entre proposições
  - Descrever como novas proposições podem ser inferidas a partir de outras proposições tidas como verdadeiras
- Forte relacionamento entre lógica formal e matemática
- Muito da matemática pode ser pensado em termos de lógica

Cálculo de predicados – Introdução (III)

- Os axiomas fundamentais de teoria dos números e dos conjuntos são proposições iniciais, tidos como verdadeiros
- Teoremas são as proposições adicionais que podem ser inferidas
- A forma particular de lógica simbólica na programação lógica é chamada de **cálculo de predicados de primeira ordem** (ou simplesmente cálculo de predicados)

Cálculo de predicados – Proposições (I)

- Os **objetos** em proposições são representados por termos simples, **constantes** ou **variáveis**
- Uma **constante** é um símbolo que representa um objeto
- Uma **variável** é um símbolo capaz de representar objetos diferentes em momentos diferentes
- Uma **proposição atômica** é formada por um símbolo de predicado seguido por uma lista de termos entre parênteses ou termos compostos. Exemplos:

  irmão(ricardo, joão)
  casado(pai(ricardo), mãe(joão))

Cálculo de predicados – Proposições (II)

- Um **termo composto** é um elemento de uma relação matemática (aparência de uma notação de função matemática)
- Um termo composto tem duas partes:
  - Um **functor**, símbolo da função que nomeia a relação
  - Uma lista ordenada de parâmetros
- Um termo composto com um único parâmetro é um 1-tupla, com dois é uma 2-tupla, e assim por diante

Cálculo de predicados – Proposições (III)

- Exemplos de proposições:

  man(jake)
  like(bob, steak)

  que dizem que {jake} é uma 1-tupla na relação man, e que {bob, steak} é uma 2-tupla na relação like.

  - Termos simples – man, jake, like, bob e steak – são constantes
  - Sem semântica intrínseca (pode significar que bob gosta de steak, ou que steak gosta de bob, ou que bob é de alguma forma similar a um steak

Cálculo de predicados – Proposições (IV)

- Dois modos de definição de proposições:
  - Definidas como verdadeiras: **fatos**
  - No qual a verdade é algo que deve ser determinado: **consultas**

- **Proposições compostas** têm duas ou mais proposições atômicas conectadas por conectores lógicos ou operadores:

Nome	*Símbolo*	*Exemplo*	*Significado*
negação	$\neg$	$\neg a$	não a
conjunção	$\wedge$	$a \wedge b$	a e b
disjunção	$\vee$	$a \vee b$	a ou b
equivalência	$\equiv$	$a \equiv b$	a é equivalente a b
implicação	$\rightarrow$	$a \rightarrow b$	a implica em b
	$\leftarrow$	$a \leftarrow b$	b implica em a

Cálculo de predicados – Proposições (V)

Semântica (significado das sentenças)

- Interpretação: associação entre proposições e valores-verdade (V ou F). Uma fórmula contendo n proposições admite 2^n interpretações distintas
- Tabela-verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$
F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V

Cálculo de predicados – Proposições (V)

Semântica (significado das sentenças)

- Interpretação: associação entre proposições e valores-verdade (V ou F). Uma fórmula contendo n proposições admite 2^n interpretações distintas
- Tabela-verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível

a	b	$\neg a$	$a \land b$	$a \lor b$	$a \to b$
F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V

Cálculo de predicados – Proposições (V)

Semântica (significado das sentenças)

- Interpretação: associação entre proposições e valores-verdade (V ou F). Uma fórmula contendo n proposições admite 2^n interpretações distintas
- Tabela-verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$
F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V

Cálculo de predicados – Proposições (V)

Semântica (significado das sentenças)

- Interpretação: associação entre proposições e valores-verdade (V ou F). Uma fórmula contendo n proposições admite 2^n interpretações distintas
- Tabela-verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$
F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V

Cálculo de predicados – Proposições (IX)

- Quantificadores aninhados são usados em proposições (sentenças) complexas compostas

- Exemplos:
  - *Irmãos são parentes*
    $\forall x \forall y.\text{irmão}(x, y) \rightarrow \text{parente}(x, y)$
  - *Parentesco é uma relação simétrica*
    $\forall x \forall y.\text{parente}(x, y) \equiv \text{parente}(y, x)$
  - *Todo mundo ama alguém*
    $\forall x \exists y.\text{ama}(x, y)$
  - *Existe alguém que é amado por todo mundo*
    $\exists y \forall x.\text{ama}(x, y)$

Cálculo de predicados – Proposições (X)

- Quantificadores aninhados por meio de negação
- Exemplos:
  - *Todo mundo detesta cenouras* $\equiv$ *não existe alguém que goste de cenouras*
    $\forall x.\neg \text{gosta}(x, \textit{cenouras}) \quad \equiv \quad \neg\exists x.\text{gosta}(x, \textit{cenouras})$
  - *Todo mundo gosta de sorvete* $\equiv$ *não existe alguém que não goste de sorvete*
    $\forall x.\text{gosta}(x, \textit{sorvete}) \quad \equiv \quad \neg\exists x.\neg\text{gosta}(x, \textit{sorvete})$

Cálculo de predicados – Proposições (XI)

- Exemplos de parentescos:
  - A mãe de alguém é o ancestral feminino de alguém
    $\forall m \forall c.\text{mãe}(c) = m \equiv \text{feminino}(m) \wedge \text{ancestral}(m, c)$
  - O marido de alguém é o cônjuge masculino de alguém
    $\forall w \forall h.\text{marido}(h, w) \equiv \text{masculino}(h) \wedge \text{cônjuge}(h, w)$
  - Masculino e feminino são categorias disjuntas
    $\forall x.\text{masculino}(x) \equiv \neg\text{feminino}(x)$
  - Ancestral e descendente são relações inversas
    $\forall p \forall c.\text{ancestral}(p, c) \equiv \text{descendente}(c, p)$
  - Avô é um pai do pai de alguém
    $\forall g \forall c.\text{avô}(g, c) \equiv \exists p.\text{pai}(g, p) \wedge pai(p, c)$
  - Um parente é outro descendente dos ancestrais de alguém
    $\forall x \forall y.\text{parente}(x, y) \equiv x \neq y \wedge \exists p.\text{ancestral}(p, x) \wedge \text{ancestral}(p, y)$

Cálculo de predicados – Sintaxe (I)

- Formalmente, uma linguagem lógica de primeira ordem – notada $L(\mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{V})$ – é determinada pela especificação dos seguintes conjuntos de símbolos:
  - Um conjunto **P** de símbolos de predicado
  - Um conjunto **F** de símbolos de função
  - Um conjunto **C** de símbolos de constante
  - Um conjunto **V** de símbolos de variável
- A cada símbolo de predicado e de função é associada uma **aridade**, isto é, o número de argumentos do predicado e da função. Os símbolos de predicado com aridade zero são chamados **símbolos proposicionais**

Cálculo de predicados – Sintaxe (II)

<fórmula> ::= <fórmula-atômica> | $\neg$(<fórmula>) |
(<fórmula>$_1$ $\wedge$ <fórmula>$_2$) |
(<fórmula>$_1$ $\vee$ <fórmula>$_2$) |
(<fórmula>$_1$ $\rightarrow$ <fórmula>$_2$) |
($\forall$<variável>.(<fórmula>)) |
($\exists$<variável>.(<fórmula>)) |

<fórmula-atômica> ::= V | F |
<predicado>(<termo>$_1$,...,<termo>$_n$)

<termo> ::= <variável> | <constante> |
<função>(<termo>$_1$,...,<termo>$_n$)

<constante> ::= a, b, c, d e outras palavras iniciadas por minúsculas
<variável> ::= x, y, z, w com ou sem índices
<função> ::= f, g, h e outras palavras iniciadas por minúsculas
<predicado> ::= P, Q, R e outras palavras iniciadas por maiúsculas

Cálculo de predicados – Sintaxe (III)

- Exemplos:

$$Avo(a, c) \leftarrow Pai(a, b) \wedge Pai(b, c)$$

$$\neg(Ama(brutus, cesar))$$

$$Q(b) \leftarrow \forall x.((P(x) \wedge \neg(P(a)))$$

$$\forall x.\exists y.(Gosta(y, x))$$

$$Ama(amelia, z)$$

$$F$$

Cálculo de predicados – Descrevendo fatos em lógica (I)

- Marcos era um homem

$$Homem(marcos)$$

- Marcos nasceu em Pompéia

$$Pompeano(marcos)$$

- Todos os que nasceram em Pompéia eram romanos

$$Romano(x) \leftarrow \forall x.Pompeano(x)$$

- César era um soberano

$$Soberano(cesar)$$

Cálculo de predicados – Descrevendo fatos em lógica (II)

- Todos os romanos eram leais a César ou então odiavam-no

$$\forall x.Romano(x) \leftarrow LealA(x, cesar) \vee Odeia(x, cesar)$$

- Todo mundo é leal a alguém

$$\forall x.\exists y.LealA(x, y)$$

- As pessoas só tantam assassinar soberanos aos quais não são leais

$$\neg LealA(x, y) \leftarrow \forall x.\forall y.Pessoas(x) \wedge Soberano(y) \wedge TentaAssassinar(x, y)$$

- Marcos tentou assassinar César

$$TentaAssassinar(marcos, cesar)$$

Exercícios

Descreva os seguintes fatos em lógica

1. João gosta de todo o tipo de comida
2. Maças são comida
3. Frango é comida
4. Qualquer coisa que alguém coma e não cause sua morte é comida
5. Paulo come amendoim e ainda está vivo
6. Susana come tudo o que Paulo come
7. Carlos só gosta de cursos fáceis
8. O curso de ciências é difícil
9. Todos os cursos do departamento de prendas domésticas são fáceis
10. BK32 é um curso de prendas domésticas

Cálculo de predicados – Representação de conhecimento (I)

- Conhecimento pode ser representado de duas formas:
  - **explícita:** por meio da formalização de sentenças
  - **implícita:** por meio de consequência lógica (fatos derivados das sentenças)

- Passos para formalização de sentenças
  - Identificamos as palavras da sentença que correspondem a conectivos
  - Identificamos as partes da sentença que correspondem a proposições atômicas e associamos a cada uma delas um símbolo proposicional
  - Escrevemos a fórmula correspondente à sentença, substituindo suas proposições atômicas pelos respectivos símbolos proposicionais e seus conectivos lógicos pelos respectivos símbolos conectivos
  - Exemplo:
    - Esta chovendo.
    - **Se** esta chovendo, **então** a rua esta molhada.
    - **Se** a rua esta molhada, **então** a rua esta escorregadia.

Cálculo de predicados – Representação de conhecimento (II)

- Exemplo:
  - Está chovendo.
  - **Se** está chovendo, **então** a rua está molhada.
  - **Se** a rua está molhada, **então** a rua está escorregadia.

- Vocabulário:
  - a: "está chovendo"
  - b: "a rua está molhada"
  - c: "a rua está escorregadia"

- Formalização (base de conhecimento):
  - $\Delta = \{ a, \quad a \rightarrow b, \quad b \rightarrow c \}$

Exercícios

Formalize as sentenças usando sintaxe da lógica proposicional

1. Se Ana é alta e magra, então ela é elegante.
2. Se Beto é rico, então ele não precisa de empréstimos.
3. Se Caio ama a natureza, então ele ama as plantas e os animais.
4. Se Denis jogar na loteria, então ele ficará rico ou desiludido.
5. Se faz frio ou chove, então Eva fica em casa e vê TV.

Cálculo de predicados – Forma clausal (I)

- Cálculo de predicados é a base para linguagens de programação lógica
- Lógicas são melhores em sua forma simples: redundância deve ser minimizada
- **Problema:** existem muitas maneiras de definir proposições com o mesmo significado (quantidade grande de redundância)
- Ok para lógicos, mas é um problema sério em sistema automatizado
- Uma forma padrão para proposições é desejável
- A **forma clausal**, relativamente simples de proposições, é uma das formas padrão

Cálculo de predicados – Forma clausal (II)

- Sem perda de generalidade, todas as proposições podem ser expressas em forma clausal
- Uma proposição em forma clausal tem a seguinte sintaxe geral:

  $$B_1 \lor B_2 \lor \cdots \lor B_n \;\leftarrow\; A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_m$$

  na qual os As e Bs são termos. O significado é: se todos os As são verdadeiros, então ao menos um B é verdadeiro
- Características:
  - Quantificadores existenciais não são necessários
  - Quantificadores universais são implícitos no uso de variáveis nas proposições atômicas
  - Nenhum operador, além da conjunção (do lado direito) e da disjunção (do lado esquerdo), é necessário

Cálculo de predicados – Forma clausal (III)

- Todas as proposições de cálculo de predicados podem ser algoritmicamente convertidas para a forma clausal
- Nilsson (1971) prova que isso pode ser feito, e mostra um algoritmo de conversão simples
- Lado direito: **antecedente**; Lado esquerdo: **consequente**
- Exemplos:

  likes(bob,trout) $\leftarrow$ likes(bob,fish) $\wedge$ fish(trout)

  father(louis,al) $\vee$ father(louis,violet) $\leftarrow$
  father(al,bob) $\wedge$ mother(violet,bob) $\wedge$ grandfather(louis,bob)

Cálculo de predicados – Construção da base de conhecimento

1. Identificar a tarefa
2. Agregar conhecimento relevante
3. Definir um vocabulário de predicados, funções e constantes
4. Codificar o conhecimento geral sobre o domínio
5. Codificar uma descrição da instância específica do problema
6. Formular consultas ao procedimento de inferência e obter respostas
7. Depurar a base de conhecimento

Programação em Prolog (I)

- O Prolog é uma linguagem de programação baseada em lógica de primeira ordem
- Não é padronizada
- Geralmente é interpretado, mas pode ser compilado
- Algumas implementações: SICStus Prolog, Borland Turbo Prolog, GNU Prolog, **SWI-Prolog**, ...
  - Acessar máquina `alunos.inf.ufsc.br` vias SSH pela rede interna UFSC (ou remotamente via VPN)
  - O usuário é o número de matrícula (8 dígitos para a graduação)

Programação em Prolog (II)

- Prolog lida com:
  - Objetos sobre os quais queremos raciocinar (não tem o mesmo sentido que em orientação a objetos – não há métodos ou herança)
  - Relações entre objetos
  - Tipo chamado termo que engloba todos os dados e também programas nesta linguagem
- Um programa em Prolog é composto por:
  - Fatos sobre certos objetos
  - Regras de inferência
  - Perguntas sobre os objetos

Programação em Prolog (III)

- Dizemos a Prolog certos fatos e regras
- Em seguida, fazemos perguntas sobre estes fatos e regras
- Exemplo:
  - Podemos informar sobre irmãs e depois perguntar se Maria e Joana são irmãs
  - Prolog responderá sim ou não em função do que lhe dissemos
- Prolog faz muito mais do que responder sim ou não
  - Permite usar o computador como um arcabouço de fatos e regras
  - Proporciona meios de fazer inferências, indo de um fato a outro, e achando os valores das variáveis que podem levar a conclusões lógicas

Fatos

- Eis alguns exemplos de como se informam fatos a Prolog:

```
gosta(pedro, maria).
gosta(maria, pedro).
valioso(ouro).
mulher(jane).
possui(jane, ouro).
pai(pedro, maria).
entrega(romeu, livro, maria).
```

Observações

- Nomes de relações e objetos iniciam-se com letra minúscula
- O nome da relação vem primeiro, depois vem a lista de objetos separados por vírgula e envolvida em parênteses
- O ponto final é obrigatório ao final do fato
- Terminologia
  - Relações são <u>predicados</u> e os objetos a que se referem são <u>argumentos</u>
  - Chamaremos de <u>banco de dados</u> à coleção de fatos e regras que damos a Prolog para resolver um problema

Perguntas (I)

- Uma pergunta em Prolog tem a forma:

```
?- possui(maria,livro).
```

- Prolog tenta unificar o fato da pergunta com os fatos do banco de dados

- Dois fatos se unificam se têm o mesmo predicado e os mesmos argumentos na mesma ordem

- Se Prolog encontrar um fato que unifica com a pergunta, vai responder "sim"; caso contrário, responderá "não"

Perguntas (II)

- A resposta "não" em Prolog não significa necessariamente que o fato não é verdadeiro, mas simplesmente que Prolog não consegue <u>provar</u> o fato a partir de seu banco de dados

- Considere o banco de dados:

```
humano(socrates).
humano(aristoteles).
ateniense(socrates).
```

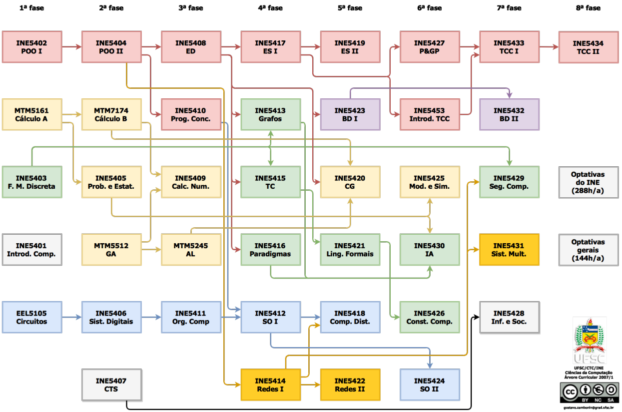
  e a pergunta:

```
?- ateniense(aristoteles).
```

- Embora seja verdade que Aristóteles tenha sido ateniense, não se pode provar isto a partir dos fatos dados.

Trabalho 1 – Parte A (entrega pelo Moodle)

- Crie uma base de conhecimento, em Prolog, para a representação da matriz curricular, por fase, e a cadeia de pré-requisitos de um curso da UFSC (verifique seu curso selecionado no enunciado do Moodle). Exemplo da Ciências da Computação:



Referências

- SEBESTA, Robert W. *Conceitos de Linguagens de Programação*. 5a. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.
- NILSSON, N. J. *Problem Solving Methods in Artificial Intelligence*. McGraw-Hill, Nova York, Estados Unidos, 1971.
- RUSSELL, S. and NORVIG, P. *Artificial Intelligence: a Modern Approach*, 3^{nd} Edition, Prentice-Hall, 2009 (Cap. 8 e 9).
- Notas de aula do Prof. Silvio L. Pereira.