Лабораторная работа № 4
Задание №1

1. Создать таблицу значений функции $f(x)$, разбив отрезок $[0, 6]$ на n равных частей точками x_i $(i=\overline{0,n})$. Для полученной таблично заданной в равноотстоящих узлах функции $f(x)$, выполнить следующие действия при $n=6$ и $n=10$:

а) построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $f(x)$ и $L_n(x)$ на одном чертеже);

б) создать таблицу конечных разностей функции $f(x)$ по точкам $(x_i, f(x_i))$, $i=\overline{0,n}$;

в) построить второй интерполяционный многочлен Ньютона $P_n(x)$, проиллюстрировать графически;

г) построить интерполяционный многочлен Ньютона $Np_n(x)$ с помощью функции **InterpolatingPolynomial** пакета **Mathematica**, проиллюстрировать графически;

д) вычислить значения функции $f(x)$ и всех построенных интерполяционных многочленов $L_n(x)$, $P_n(x)$ и $Np_n(x)$ в точке $x=2{,}4316$;

е) построить график погрешности интерполирования многочленом Ньютона $R_n(x)=|f(x)-Np_n(x)|$ на отрезке $[0, 6]$, найти максимум погрешности $R_n(x)$ на отрезке $[0, 6]$ с помощью функции **FindMaximum** пакета **Mathematica**;

ж) исследовать зависимость погрешности интерполирования $R_n(x)$ от числа узлов интерполяции (степени многочлена n).

(для N=6)

Функция:

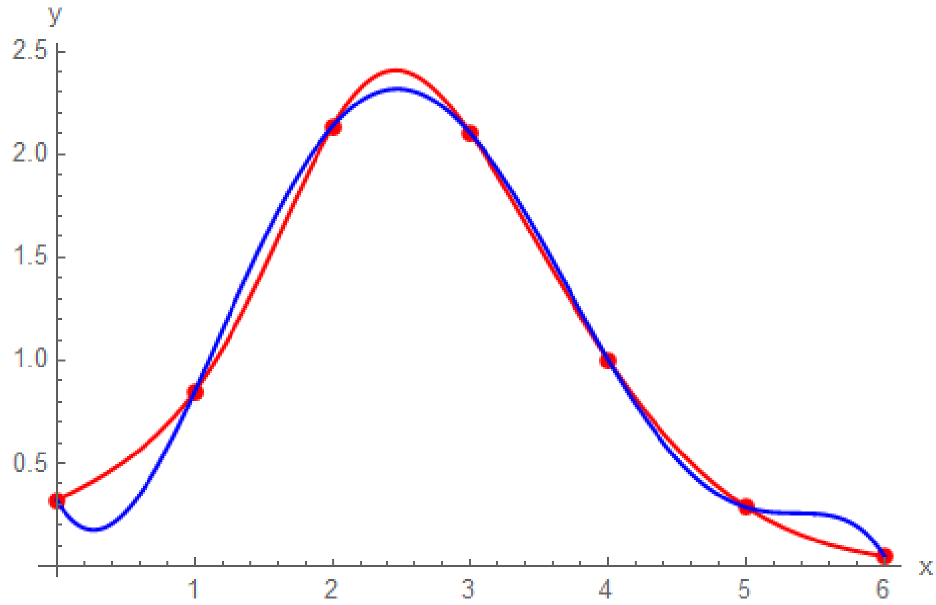
$$f(x)=\exp\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\cdot \operatorname{th}\left(\frac{x^3}{11}+\frac{1}{3}\right).$$

Таблица значений функции f(x) для равностоящих узлов:

0.	0.321513
1.	0.847855
2.	2.13629
3.	2.10102
4.	0.999991
5.	0.286505
6.	0.0497871

А) Интерполяционный многочлен Лагранжа и его график:

$$0.321513 - 1.13038\,x + 2.43962\,x^2 - 0.827529\,x^3 + 0.026763\,x^4 + 0.0198283\,x^5 - 0.00195986\,x^6$$

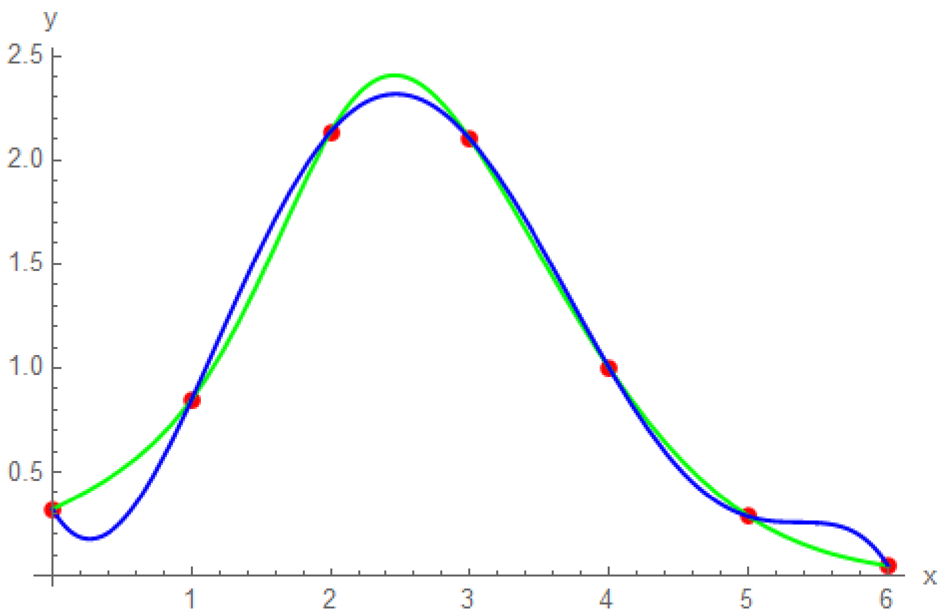


Б) Таблица конечных разностей:

0.32	0.53	0.76	−2.09	2.34	−1.15	−1.41
0.85	1.29	−1.32	0.26	1.20	−2.56	
2.14	−0.04	−1.07	1.45	−1.36		
2.10	−1.10	0.39	0.09			
1.00	−0.71	0.48				
0.29	−0.24					
0.05						

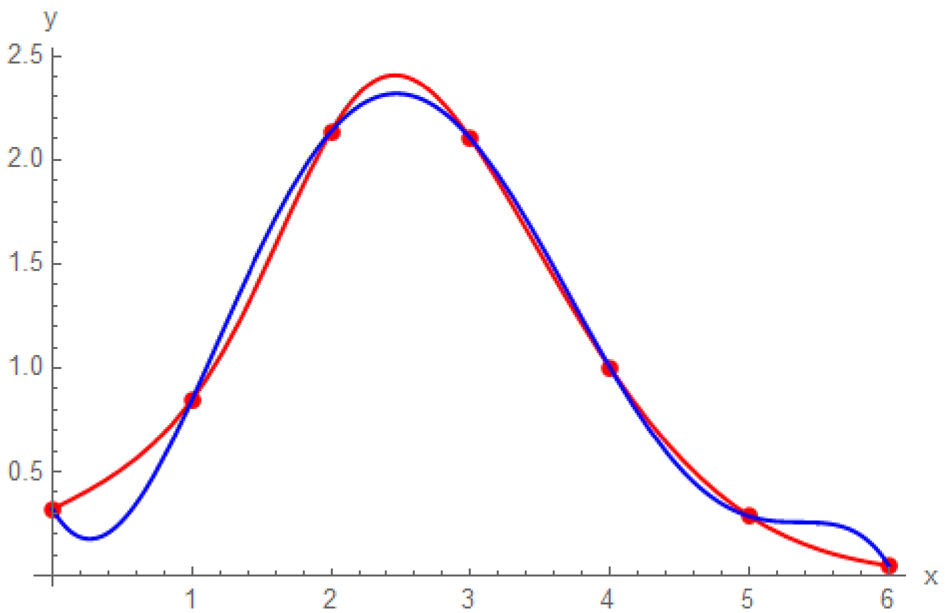
В) Интерполяционный многочлен Ньютона и его график

$$0.321513 - 1.13038\,x + 2.43962\,x^2 - 0.827529\,x^3 + 0.026763\,x^4 + 0.0198283\,x^5 - 0.00195986\,x^6$$



Г) Интерполяционный многочлен Ньютона, построенный с помощью функции InterpolatingPolynomial, и его график

$$0.321513 - 1.13038\,x + 2.43962\,x^2 - 0.827529\,x^3 + 0.026763\,x^4 + 0.0198283\,x^5 - 0.00195986\,x^6$$



Д) Значения функции f(x) и всех построенных многочленов в точке x=2.4316

```
f[2.4316]
Lagrang[2.4316]
NewT[2.4316]
Np[2.4316]
```

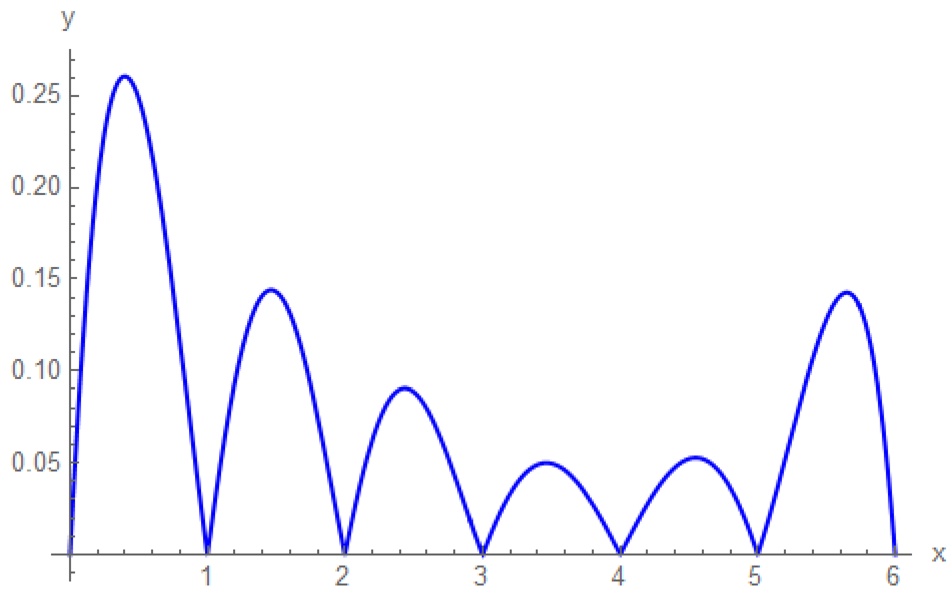
```
2.40655

2.31605

2.31605

2.31605
```

E) График погрешности интерполирования многочленом Ньютона и максимум погрешности на отрезке [0,6]




```
FindMaximum[{R[x], a <= x <= b}, x]
```
найти максимум

```
{0.260681, {x → 0.398872}}
```

(для N=10)

Функция:

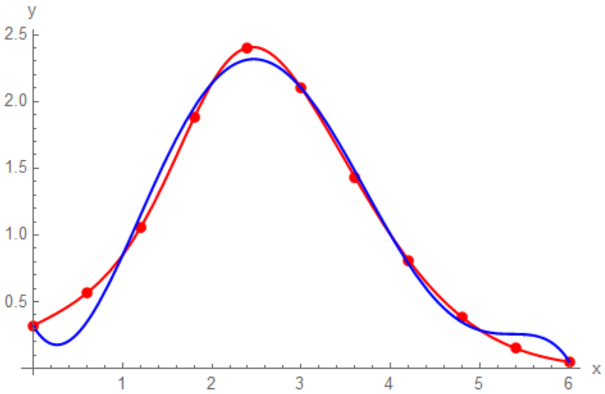
$$f(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{4}\right) \cdot \text{th}\left(\frac{x^3}{11} + \frac{1}{3}\right).$$

Таблица значений функции f(x) для равностоящих узлов:

0.	0.321513
0.6	0.564545
1.2	1.05291
1.8	1.87865
2.4	2.40318
3.	2.10102
3.6	1.43302
4.2	0.810583
4.8	0.382893
5.4	0.151072
6.	0.0497871

А) Интерполяционный многочлен Лагранжа и его график:

$0.321513 - 3.94488\,x + 19.9019\,x^2 - 36.6729\,x^3 + 36.1106\,x^4 - 20.7358\,x^5 + 7.29855\,x^6 - 1.60185\,x^7 + 0.214312\,x^8 - 0.0160188\,x^9 + 0.000513301\,x^{10}$

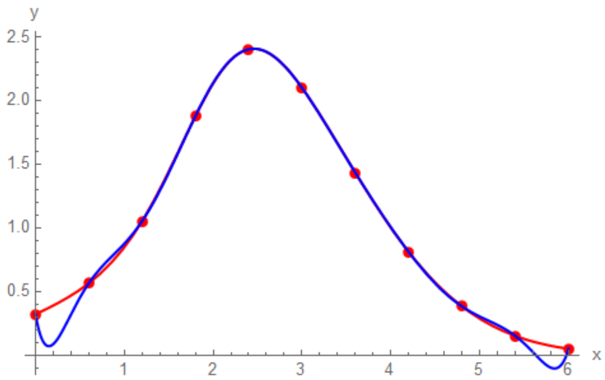


Б) Таблица конечных разностей

0.32	0.24	0.25	0.09	-0.73	0.84	0.03	-1.94	4.67	-7.90	11.26
0.56	0.49	0.34	-0.64	0.11	0.87	-1.91	2.73	-3.23	3.36	
1.05	0.83	-0.30	-0.53	0.99	-1.04	0.82	-0.50	0.14		
1.88	0.52	-0.83	0.46	-0.05	-0.21	0.33	-0.36			
2.40	-0.30	-0.37	0.41	-0.26	0.11	-0.03				
2.10	-0.67	0.05	0.15	-0.15	0.08					
1.43	-0.62	0.19	0.00	-0.07						
0.81	-0.43	0.20	-0.07							
0.38	-0.23	0.13								
0.15	-0.10									
0.05										

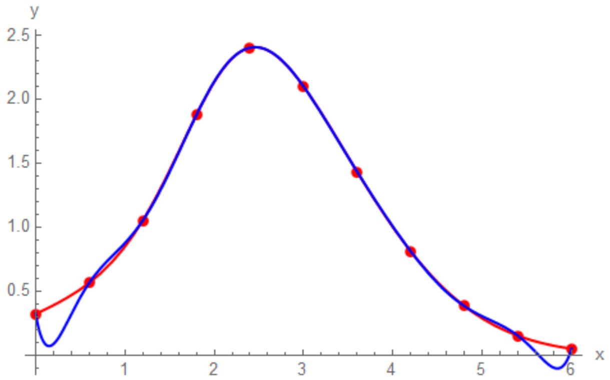
В) Интерполяционный многочлен Ньютона и его график

$0.321513 - 3.94488\,x + 19.9019\,x^2 - 36.6729\,x^3 + 36.1106\,x^4 - 20.7358\,x^5 + 7.29855\,x^6 - 1.60185\,x^7 + 0.214312\,x^8 - 0.0160188\,x^9 + 0.000513301\,x^{10}$



Г) Интерполяционный многочлен Ньютона, построенный с помощью функции InterpolatingPolynomial, и его график

$0.321513 - 3.94488\,x + 19.9019\,x^2 - 36.6729\,x^3 + 36.1106\,x^4 - 20.7358\,x^5 + 7.29855\,x^6 - 1.60185\,x^7 + 0.214312\,x^8 - 0.0160188\,x^9 + 0.000513301\,x^{10}$



Д) Значения функции f(x) и всех построенных многочленов в точке x=2.4316

```
f[2.4316]
Lagrang[2.4316]
NewT[2.4316]
Np[2.4316]
```

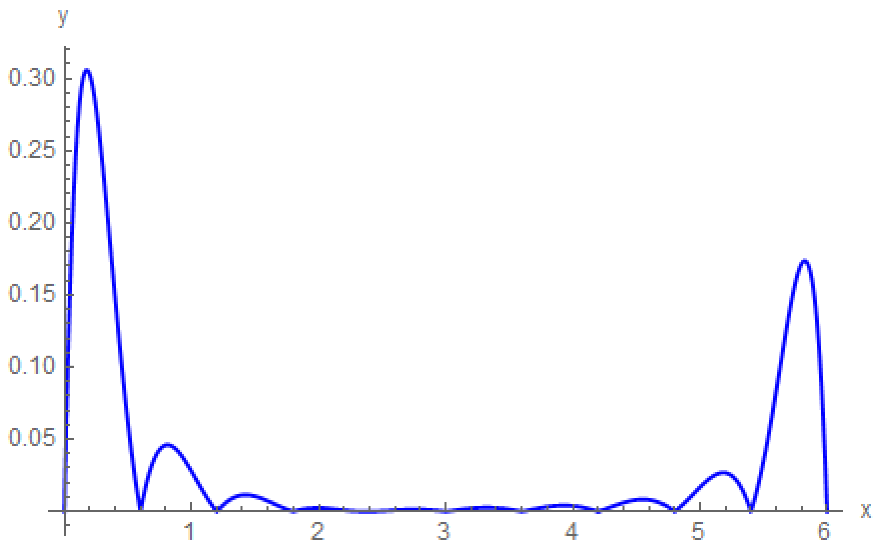
2.40655

2.4066

2.4066

2.4066

Е) График погрешности интерполирования многочленом Ньютона и максимум погрешности на отрезке [0,6]




```
FindMaximum[{R[x], a <= x <= b}, x]
```
найти максимум

```
{0.0461276, {x → 0.812717}}
```

Задание №2

2. Создать таблицу значений функции $f(x)$ (1.1 – 1.16), разбив отрезок $[0,6]$ на n частей неравноотстоящими точками x_i вида $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t_i$, где t_i – корни многочлена Чебышёва $T_{n+1}(t)$ $(i=\overline{0,n})$. Для полученной таблично заданной функции $f(x)$, выполнить следующие действия при $n=6$ и $n=10$:

а) создать таблицу разделенных разностей функции $f(x)$ по точкам $(x_i, f(x_i))$, $i=\overline{0,n}$;

б) построить интерполяционный многочлен Ньютона $Pnr_n(x)$ для неравноотстоящих узлов, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $f(x)$ и $Pnr_n(x)$ на одном чертеже);

в) построить интерполирующую функцию $Intf_n(x)$ с помощью функции **Interpolation** пакета **Mathematica**, проиллюстрировать графически;

г) вычислить значения функции $f(x)$ и построенных интерполяционных многочленов $Pnr_n(x)$ и $Intf_n(x)$ в точке $x = 2{,}4316$;

д) найти максимумы абсолютных погрешностей интерполирования функции $f(x)$ многочленом Ньютона $Pnr_n(x)$ и функцией $Intf_n(x)$ на отрезке $[0,6]$ с помощью функции **FindMaximum** пакета **Mathematica**.

Функция:

$$f(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{4}\right) \cdot \operatorname{th}\left(\frac{x^3}{11} + \frac{1}{3}\right).$$

Таблица значений функции f(x) для равностоящих узлов:

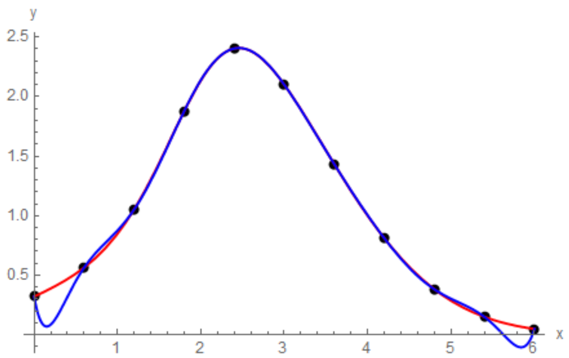
0.031	0.331
0.271	0.416
0.733	0.643
1.378	1.274
2.155	2.287
3.	2.101
3.845	1.16
4.622	0.487
5.267	0.188
5.729	0.084
5.969	0.053

А) Таблица конечных разностей

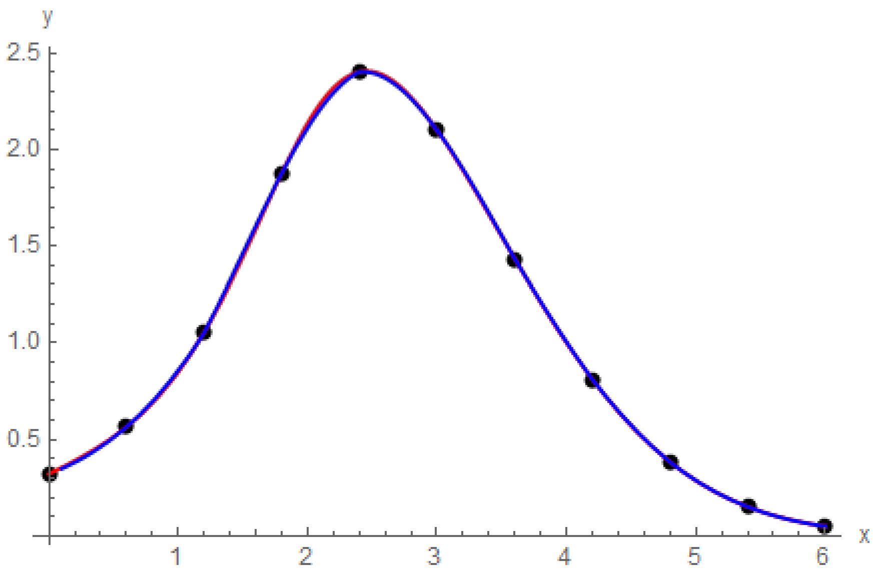
0.32	0.41	0.34	0.07	-0.23	0.09	0.00	-0.01	0.01	-0.00	0.00
0.56	0.81	0.47	-0.49	0.04	0.09	-0.06	0.02	-0.00	0.00	
1.05	1.38	-0.42	-0.41	0.32	-0.11	0.02	-0.00	0.00		
1.88	0.87	-1.15	0.36	-0.02	-0.02	0.01	-0.00			
2.40	-0.50	-0.51	0.32	-0.08	0.01	-0.00				
2.10	-1.11	0.06	0.12	-0.05	0.01					
1.43	-1.04	0.27	0.00	-0.02						
0.81	-0.71	0.27	-0.05							
0.38	-0.39	0.18								
0.15	-0.17									
0.05										

Б) Интерполяционный многочлен Ньютона и его график

$$0.321513 - 3.94488\,x + 19.9019\,x^2 - 36.6729\,x^3 + 36.1106\,x^4 - 20.7358\,x^5 + 7.29855\,x^6 - 1.60185\,x^7 + 0.214312\,x^8 - 0.0160188\,x^9 + 0.000513301\,x^{10}$$



В) График интерполяционной функции IntF(x), построенной с помощью функции Interpolation



Г) Значения функции f(x) и всех построенных многочленов в точке x=2.4316

```
f[2.4316]
Pnr[2.4316]
IntF[2.4316]
```

```
2.40655

2.4066

2.40385
```

Д) Максимумы абсолютных погрешностей интерполирования функции f(x) многочленом Ньютона

```
FindMaximum[R[x], {x, 0, 6}]
найти максимум

{0.305839, {x → 0.176716}}
```

Функцией IntF(x)

```
FindMaximum[R[x], {x, 0, 6}]
найти максимум

{0.00922482, {x → 0.270776}}
```

Задание №3

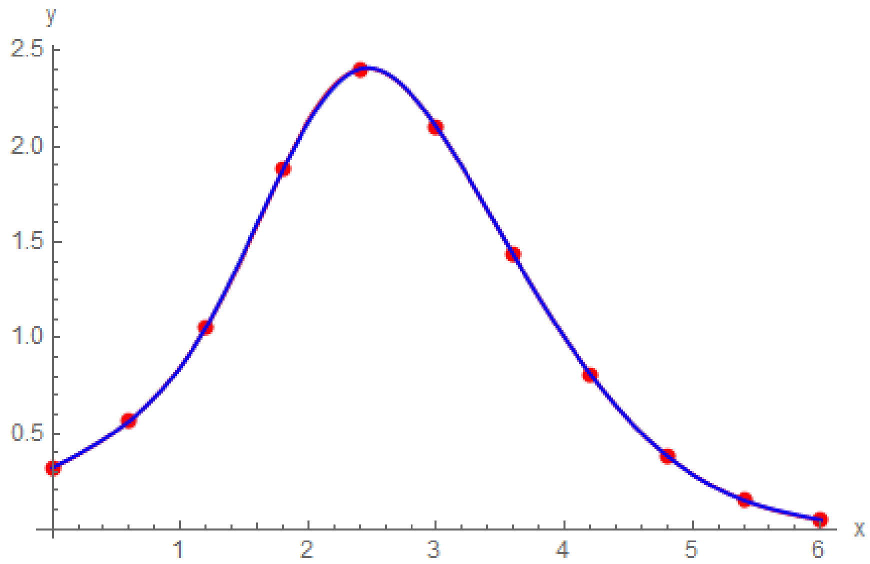
3. Сравнить результаты заданий 1 и 2 для равноотстоящих и неравноотстоящих узлов и сделать выводы о зависимость погрешности интерполирования от числа узлов и их расположения на отрезке.

При построении интерполяционных многочленов на равностоящих точках при увеличении числа узлов абсолютная погрешность может возрасти, в то время как при построении многочленов на неравноотстоящих точках абсолютная погрешность уменьшается.

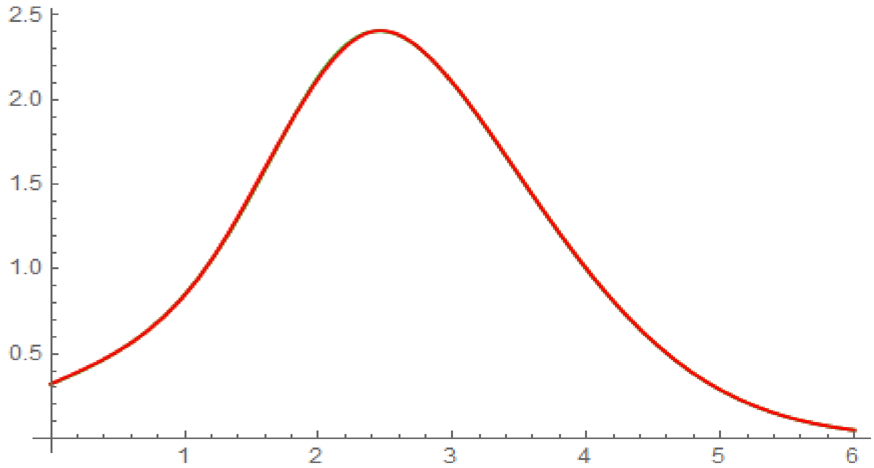
Задание №4

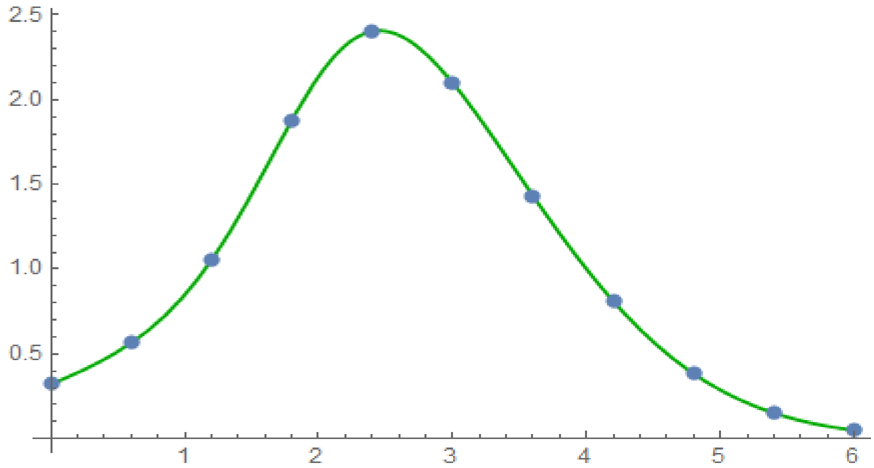
а) построить интерполяционный кубический сплайн дефекта 1 $S_3(x)$ для функции $f(x)$, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $f(x)$ и $S_3(x)$ на одном чертеже);

```
Show[ListPlot[table, PlotStyle → { Red, PointSize[0.02]}], Plot[f[x], {x, 0, 6},
|пока·· |диаграмма разброс··· |стиль графика   |кра··· |размер точки        |график функции
  PlotStyle → Red], Plot[Spl[x], {x, 0, 6}, PlotStyle → Blue], AxesLabel → {"x", "y"}]
  |стиль графика |крас··· |график функции    |стиль графика |синий |обозначения на осях
```



б) выполнить интерполяцию сплайном $Sf(x)$ с помощью функции ***Interpolation***[*data*, ***Method->"Spline"***], проиллюстрировать графически;



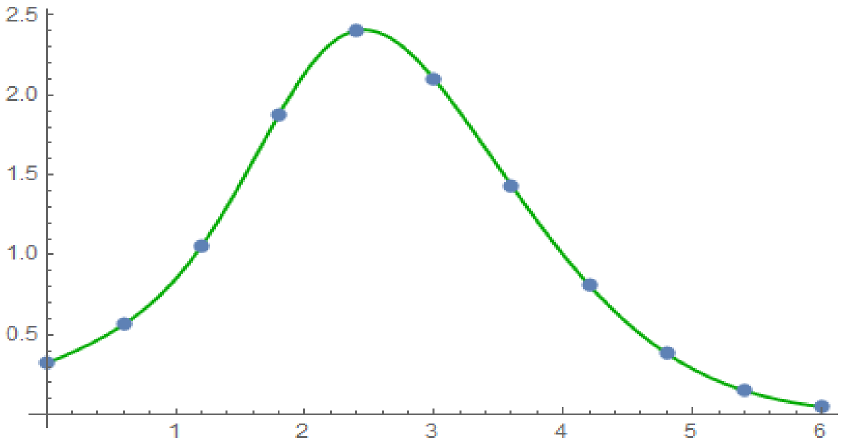


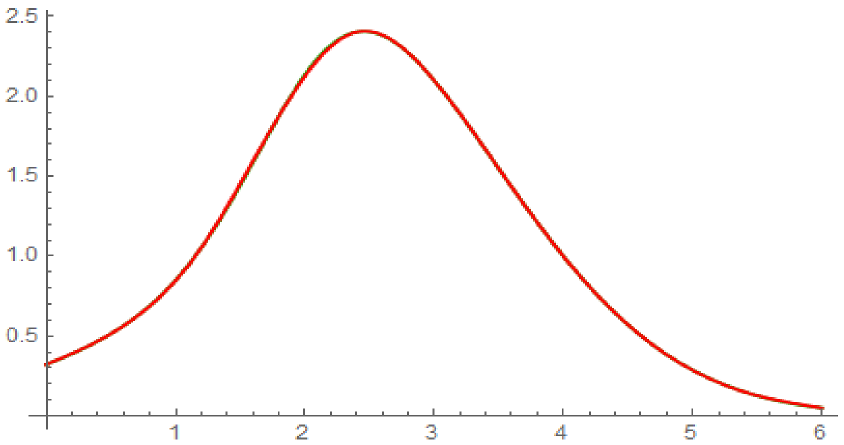
в) построить интерполяционный кубический сплайн Spl с помощью функции SplineFit[data,Cubic] (предварительно загрузить пакет сплайн-интерполяции командой Needs["Splines`"]), проиллюстрировать графически

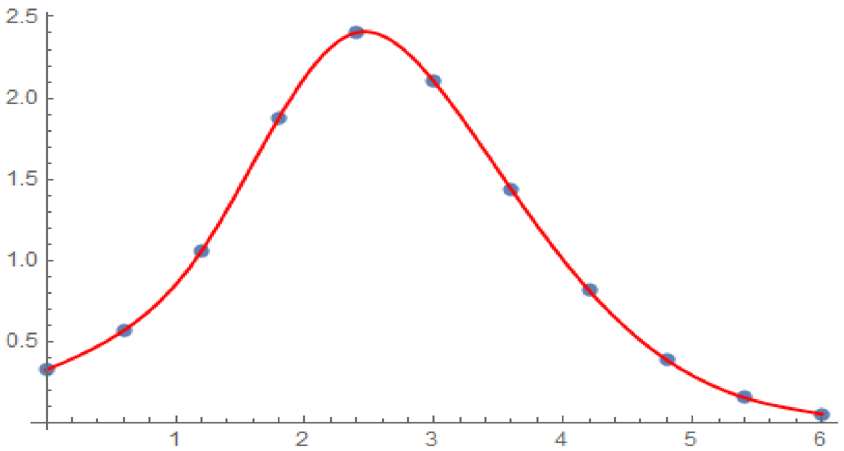
```
Show[gr1, gr2]
```
показать

```
Show[gr1, gr4]
```
показать

```
Show[gr2, gr4]
```
показать







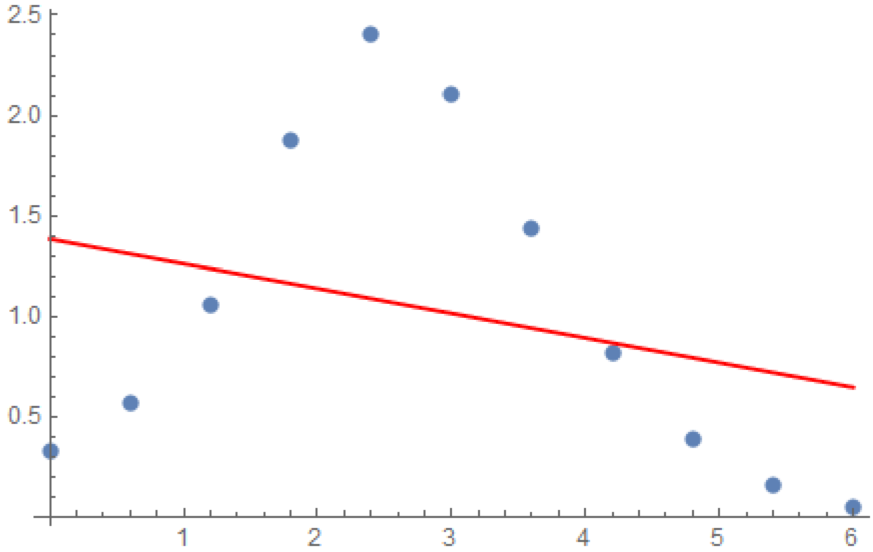
;

Г) Вычислить значения функции f (x) и построенных интерполяционных сплайнов в точке x □ 2,4316

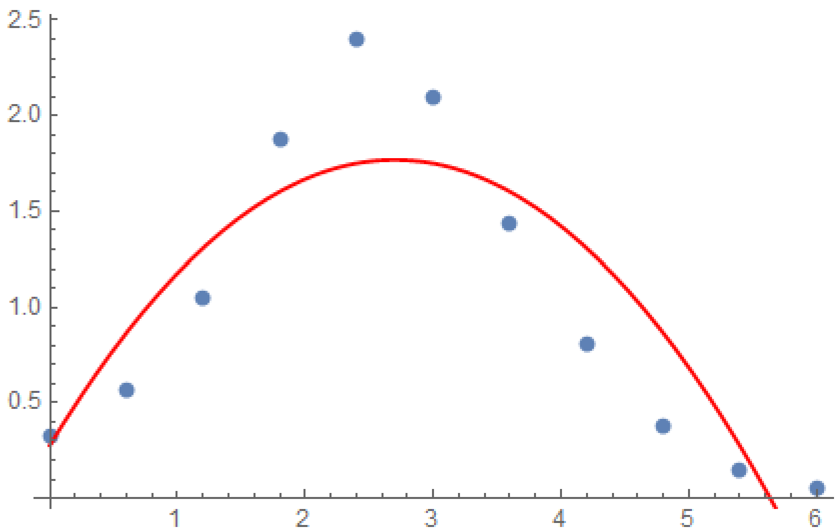
```
{2.40655, 2.40741, 2.40749, 2.407}
```

Задание №5

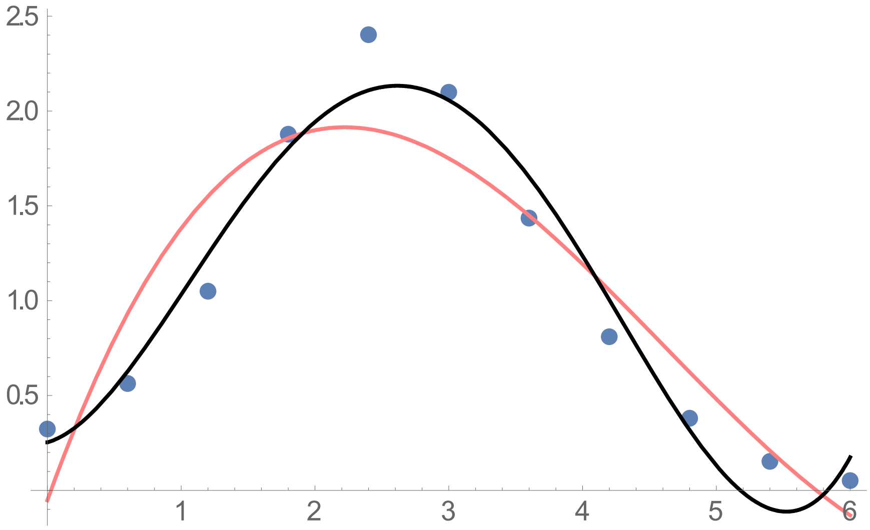
А) Апроксимировать с помощью метода наименьших квадратов функцию f(x) многочленом первой степени Q1(x), проиллюстрировать графически



Б) Апроксимировать с помощью метода наименьших квадратов функцию f(x) многочленом второй степени Q2(x), проиллюстрировать графически



В) Найти многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения третьей и четвертой степеней Q3(x), Q4(x) с помощью функции Fit пакета Mathematica, проиллюстрировать графически



Г) Вычислить значения функции f(x) и построенных многочленов Q1(X), Q2(X), Q3(X), Q4(X) в точке x=2.4316

```
{2.40655, 1.08352, 1.75448, 1.90135, 2.11535}
```

Д) Сравнить результаты, полученные в пунктах а, б и в, изобразив на одном чертеже точки (xi, f(xi)) и график функций Q1(X), Q2(X), Q3(X), Q4(X)