

Лабораторная работа № 5

Задание №1

1. Найти приближенные значения производных первого и второго порядков функции $f(x)$ в точке x_0 , используя: а) функцию **D** системы **Mathematica**;

б) формулы численного дифференцирования $y'_i \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_i - \frac{1}{2} \Delta^2 y_i + \frac{1}{3} \Delta^3 y_i \right)$

и $y''_i \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_i - \Delta^3 y_i)$ для шага $h_1 = 0,1$ и шага $h_2 = 0,01$. Сравнить полученные значения.

Исходная функция

```
f[x_] = (Log2[3 x + 2]) / (x + 4);  
[двоичный логарифм]  
x0 = 1.13;
```

Расчёт встроенными ф-циями

```
D1 = D[f[x], x] /. x -> x0 // N  
[дифференцировать] [численно]  
D2 = D[f[x], {x, 2}] /. x -> x0 // N  
[дифференцировать] [численно]  
0.0641802  
-0.112142
```

Расчетные формулы

```

h1 = 0.1;
Delta1 = f[x0 + h1] - f[x0];
Delta2 = f[x0 + 2 * h1] - 2 * f[x0 + h1] + f[x0];
Delta3 = f[x0 + 3 * h1] - 3 * f[x0 + 2 * h1] + 3 * f[x0 + h1] - f[x0];
D1 = 1 / h1 * (Delta1 - 1 / 2 * Delta2 + 1 / 3 * Delta3) // N
|численное п

D2 = 1 / h1^2 * (Delta2 - Delta3) // N
|численное приближение

0.0641242

-0.110038

h2 = 0.01;
Delta1 = f[x0 + h2] - f[x0];
Delta2 = f[x0 + 2 * h2] - 2 * f[x0 + h2] + f[x0];
Delta3 = f[x0 + 3 * h2] - 3 * f[x0 + 2 * h2] + 3 * f[x0 + h2] - f[x0];
D1prime = 1 / h2 * (Delta1 - 1 / 2 * Delta2 + 1 / 3 * Delta3) // N
|числе

D2prime = 1 / h2^2 * (Delta2 - Delta3) // N
|численное приближение

0.0641801

-0.112117

```

Задание №2

2. а) Вычислить с помощью формулы *второго порядка точности* и составить таблицу приближенных значений y'_i производной функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 3]$ с шагом $h = 0,2$.
- б) Изобразить на одном чертеже (на отрезке $[-1, 3]$) график функции $f'(x)$, полученной с помощью функции **D** пакета **Mathematica**, и точки

(x_i, y'_i) , соответствующие приближенным значениям производной, найденные в пункте а.

Функция

```

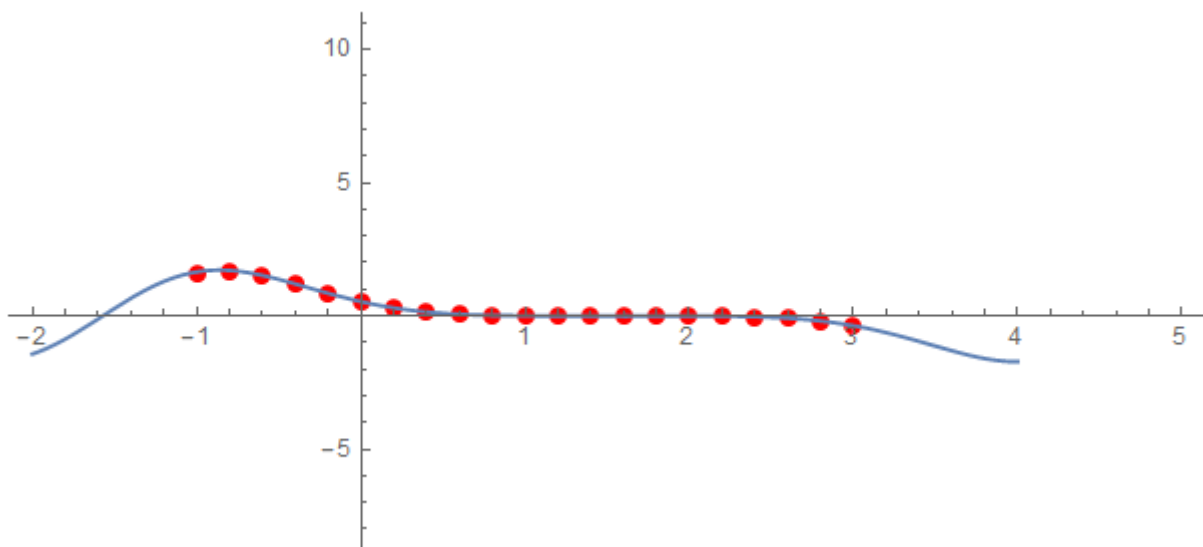
f2[x_] = Sin[x] + Cos[x];
|синус |косинус

```

Таблица значений

-1.	1.59989
-0.8	1.66778
-0.6	1.50228
-0.4	1.19973
-0.2	0.859176
0.	0.553262
0.2	0.318767
0.4	0.16202
0.6	0.0706969
0.8	0.0252397
1.	0.00676944
1.2	0.00116141
1.4	0.0000890113
1.6	-4.14846×10^{-6}
1.8	-0.000213098
2.	-0.00206558
2.2	-0.0103158
2.4	-0.0349532
2.6	-0.0917143
2.8	-0.200258
3.	-0.379028

График



Задание №3

3. Вычислить определенный интеграл: а) по формуле средних прямоугольников; б) по формуле трапеций. В обоих случаях использовать двойной просчет при $n_1 = 8$ и $n_2 = 10$ для уточнения значения интеграла по Ричардсону.

Функция

$$\frac{1 + \sqrt{2.3 x^2 + 0.2}}{2.4 + \sqrt{1.6 x + 1.7}};$$

Значения встроенной функцией(для проверки)

```
Integrate[fNEW[x], {x, a, b}] // N  
[интегрировать] [численное приближение]  
1.00922
```

а)Метод средних прямоугольников

n = 8

```
Integral1 = 0;  
Do[Integral1 += (fNEW[a + i * h] + fNEW[a + (i - 1) * h]) / 2, {i, 1, n}];  
[оператор цикла]  
Integral1 *= (b - a) / n;  
Integral1  
1.04607
```

n = 10

```
Integral3 = 0;  
Do[Integral3 += (fNEW[a + i * h] + fNEW[a + (i - 1) * h]) / 2, {i, 1, n}];  
[оператор цикла]  
Integral3 *= (b - a) / n;  
Integral3  
1.11856
```

b) Метод трапеций

n = 8

```
Integral2 = 0;  
Do[Integral2 += fNEW[a + i * h], {i, 1, n - 1}];  
[оператор цикла]  
Integral2 += (fNEW[a] + fNEW[b]) / 2;  
Integral2 *= (b - a) / n;  
Integral2  
1.04167
```

n = 10

```
Integral4 = 0;  
Do[Integral4 += fNEW[a + i * h], {i, 1, n - 1}];  
[оператор цикла  
Integral4 += (fNEW[a] + fNEW[b]) / 2;  
Integral4 *= (b - a) / n;  
Integral4
```

1.1082

Уточнение по Ричардсону (значения для методов получились практически одинаковые)

```
Rich1 = Integral3 + 8^2 / (10^2 - 8^2) * (Integral3 - Integral1)
```

1.24744

```
Rich2 = Integral4 + 8^2 / (10^2 - 8^2) * (Integral4 - Integral2)
```

1.22649

Задание №4

4. Вычислить определенный интеграл от таблично заданной функции по формуле Симпсона (парабол) для разбиений отрезка интегрирования на 8 и на 16 частей.

Исходные данные

```

data = {
    {0.5, 1.2506},
    {0.552, 1.2938},
    {0.604, 1.3828},
    {0.656, 1.4115},
    {0.708, 1.4927},
    {0.76, 1.5111},
    {0.812, 1.5877},
    {0.864, 1.5993},
    {0.916, 1.6742},
    {0.968, 1.6819},
    {1.02, 1.7575},
    {1.072, 1.7640},
    {1.124, 1.8428},
    {1.176, 1.8501},
    {1.228, 1.9344},
    {1.28, 1.9446},
    {1.332, 2.0366}

```

Пример расчетной формулы Симпсона

```

Sum1 = 0;
Sum2 = 0;
Do[Sum1 += DataY[[i]], {i, 3, 4 n, 4}];
[оператор цикла]
Do[Sum2 += DataY[[i]], {i, 5, 4 (n - 1), 4}];
[оператор цикла]
h / 3 * (DataY[[4 n + 1]] + DataY[[1]] + 4 * Sum1 + 2 * Sum2)

```

n=8

1.25738

n=16

1.29979

Задание №5

5. Вычислить определенный интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса с n узлами.

Рассчетный алгоритм

```
fNEWNEW[x_] = (Csch[x + 3]) / (5 x + 2);  
|гиперболический косенканс  
  
n = 7;  
a = 1.3;  
b = 2.6;  
LegendreP[n, t];  
|P-функция Лежандра первого рода  
s1 = NSolve[LegendreP[n, t] == 0, t];  
|числен... |P-функция Лежандра первого рода  
tt = t /. s1;  
T = Table[If[i == 1, 1, (tt[[j]])^(i - 1)], {i, n}, {j, n}];  
|табли... |условный оператор  
MatrixForm[T];  
|матричная форма  
B = Table[If[EvenQ[i] == True, 0, 2 / i], {i, n}] // N;  
|табли... |у... |чётное число? |истина |численное приближение  
A = LinearSolve[T, B];  
|решить линейные уравнения  
  
int = (b - a) / 2 *  $\sum_{i=1}^n A[[i]] * fNEWNEW[(b + a) / 2 + (b - a) / 2 * tt[[i]]]$ 
```

Результат

0.00183045

Встроенная функция

```
NIntegrate[fNEWNEW[x], {x, a, b}]  
|квadrатурное интегрирование
```

0.00183045