Лабораторная работа № 3

Задание №1

1. Даны матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_i)$, $i=\overline{1,7}$, $j=\overline{1,7}$. Используя средства пакета **Mathematica** (функции **Norm**, **Inverse**, **LinearSolve**):

а) найти число обусловленности матрицы A в норме-максимум $\|\cdot\|_\infty$;

б) решить точную систему линейных уравнений $AX=B$;

в) решить три возмущенные системы вида $AX=B+\Delta B$, увеличив значение правой части последнего уравнения системы $AX=B$ последовательно на 0,01%; 0,1% и на 1%;

г) найти прогнозируемую предельную относительную погрешность решения каждой возмущенной системы;

д) найти относительную погрешность решения каждой возмущенной системы; сделать вывод о зависимости относительной погрешности от величины возмущения и числа обусловленности матрицы A.

Выполнить задание для двух случаев:

1) $a_{ij}=\begin{cases}1, & i>j,\\ i+1, & i=j,\\ 2, & i<j,\end{cases}$ $\quad b_i=2ki-i^2$; $\qquad$ **2)** $a_{ij}=\dfrac{1}{i+j-1}$ $\quad b_i=3i-2k$,

где $i=\overline{1,7}$, $j=\overline{1,7}$, k – номер вашего варианта.

№ 1 (хорошо обусловленная система)

Задание исходных матриц

```
A = Table[If[i > j, 1, If[i == j, i + 1, 2]], {i, 1, 7}, {j, 1, 7}]
    |табл··· |условный о··· |условный оператор
```

```
{{2, 2, 2, 2, 2, 2, 2}, {1, 3, 2, 2, 2, 2, 2}, {1, 1, 4, 2, 2, 2, 2}, {1, 1, 1, 5, 2, 2, 2}, {1, 1, 1, 1, 6, 2, 2}, {1, 1, 1, 1, 1, 7, 2}, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 8}}
```

```
B = Table[2 * 6 * i - i^2, {i, 1, 7}]
    |таблица значений
```

```
{11, 20, 27, 32, 35, 36, 35}
```

Число обусловленности

```
NA = Norm[A, ∞];
     |норма
NAInve = Norm[Inverse[A], ∞];
         |но··· |обратная матрица
ACond = NA * NAInve // N
                       |численное
```

```
25.
```

Решение системы

```
X = N[LinearSolve[A, B]]
    решить линейные ура

{-10.7357, -1.73571, 1.76429, 3.43095, 4.18095, 4.38095, 4.21429}
```

Решение возмущенной системы

```
B1 = B;
B1[[7]] *= 1.0001;
X1 = N[LinearSolve[A, B1]]
     решить линейные уравне

{-10.7358, -1.7358, 1.7642, 3.43087, 4.18087, 4.38087, 4.21479}
```

```
B2 = B;
B2[[7]] *= 1.001;
X2 = N[LinearSolve[A, B2]]
     решить линейные уравне

{-10.7365, -1.73655, 1.76345, 3.43012, 4.18012, 4.38012, 4.21929}
```

```
B3 = B;
B3[[7]] *= 1.01;
X3 = N[LinearSolve[A, B3]]
     решить линейные уравне

{-10.744, -1.74405, 1.75595, 3.42262, 4.17262, 4.37262, 4.26429}
```

Прогнозируемая прогрешность

```
DeltB1N = Norm[B1 - B, ∞] / Norm[B1, ∞];
          норма             норма
DeltX1 = ACond * DeltB1N * 100

0.243056
```

```
DeltB2N = Norm[B2 - B, ∞] / Norm[B2, ∞];
          норма             норма
DeltX2 = ACond * DeltB2N * 100

2.43056
```

```
DeltB3N = Norm[B3 - B, ∞] / Norm[B3, ∞];
          норма             норма
DeltX3 = ACond * DeltB3N * 100

24.3056
```

Практическая погрешность

```
DeltX1N = Norm[X1 - X, ∞] / Norm[X1, ∞] * 100
          |норма             |норма
```

0.00465732

```
DeltX2N = Norm[X2 - X, ∞] / Norm[X2, ∞] * 100
          |норма             |норма
```

0.0465699

```
DeltX3N = Norm[X3 - X, ∞] / Norm[X3, ∞] * 100
          |норма             |норма
```

0.465374

№ 1 (плохо обусловленная система)

Задание системы

```
A = Table[1 / (i + j - 1), {i, 1, 7}, {j, 1, 7}]
    |таблица значений
```

$\left\{\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}\right\}, \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}\right\}, \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}\right\}, \left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}\right\}\right\}$

```
B = Table[3 * i - 2 * 6, {i, 1, 7}]
    |таблица значений
```

{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9}

Число обусловленности

```
NA = Norm[A, ∞];
     |норма
NAInve = Norm[Inverse[A], ∞];
         |но···  |обратная матрица
ACond = NA * NAInve // N
                       |численное
```

9.85195×10^{8}

Решение системы

```
X = N[LinearSolve[A, B], 2]
    |·· |решить линейные уравнени
```

$\{9.5 \times 10^{2}, -4.4 \times 10^{4}, 4.9 \times 10^{5}, -2.1 \times 10^{6}, 4.3 \times 10^{6}, -4.0 \times 10^{6}, 1.4 \times 10^{6}\}$

Решение возмущенной системы

```
B1 = B;
B1[[7]] *= 1.0001;
X1 = N[LinearSolve[A, B1]]
      |·· |решить линейные уравнен
```

$\{955.811, -44806.1, 492161., -2.13496\times10^{6}, 4.296\times10^{6}, -4.02165\times10^{6}, 1.41539\times10^{6}\}$

```
B2 = B;
B2[[7]] *= 1.001;
X2 = N[LinearSolve[A, B2]]
      |·· |решить линейные уравнен
```

$\{1053.11, -48892.5, 533025., -2.29842\times10^{6}, 4.60249\times10^{6}, -4.29136\times10^{6}, 1.5053\times10^{6}\}$

```
B3 = B;
B3[[7]] *= 1.01;
X3 = N[LinearSolve[A, B3]]
      |·· |решить линейные уравнен
```

$\{2026.08, -89757.4, 941674., -3.93301\times10^{6}, 7.66735\times10^{6}, -6.98843\times10^{6}, 2.40432\times10^{6}\}$

Прогнозируемая погрешность

```
DeltB1N = Norm[B * 0.0001, ∞] / Norm[B, ∞];
          |норма                |норма
DeltX1 = ACond * DeltB1N * 100
```

9.85195×10^{6}

```
DeltB2N = Norm[B2 - B, ∞] / Norm[B2, ∞];
          |норма            |норма
DeltX2 = ACond * DeltB2N * 100
```

9.84211×10^{7}

```
DeltB3N = Norm[B3 - B, ∞] / Norm[B3, ∞];
          |норма            |норма
DeltX3 = ACond * DeltB3N * 100
```

9.7544×10^{8}

Практическая погрешность

```
Print[SetPrecision[DeltX1N = Norm[X1 - X, ∞] / Norm[X1, ∞] * 100, 2], "%"]
|печа··· |задать относительную точ··· |норма              |норма
```

0.79%

```
Print[SetPrecision[DeltX2N = Norm[X2 - X, ∞] / Norm[X2, ∞] * 100, 2], "%"]
|печа··· |задать относительную точ··· |норма              |норма
```

7.4%

```
Print[SetPrecision[DeltX3N = Norm[X3 - X, ∞] / Norm[X3, ∞] * 100, 2], "%"]
|печа··· |задать относительную точ··· |норма              |норма
```

44.%

Вывод: число обусловленности отражает изменения решений при небольших изменениях в правой части. При большом числе обусловленности даже небольшие изменения могут сильно изменить решение.

Задание № 2

2. Решить методом прогонки трехдиагональную систему, составить таблицу прогоночных коэффициентов L_i, M_i, $i=\overline{1,5}$.

Система

```
A = {{5, -3, 0, 0, 0},
    {3, 19, 4, 0, 0},
    {0, -1, 8, 2, 0},
    {0, 0, 2, -11, -5},
    {0, 0, 0, 2, 9}};
d = {-10, -2, 14, -26, -3};

a = {0, 3, -1, 2, 2};

b = {5, 19, 8, -11, 9};
c = {-3, 4, 2, -5, 0};
```

Подготовка к методу прогонки

```
l = Array[1, n - 1]
    массив

{1[1], 1[2], 1[3], 1[4]}

m = Array[1, n]
    массив

{1[1], 1[2], 1[3], 1[4], 1[5]}
```

Нахождение прогоночных коэффициентов

```
l[[1]] = -c[[1]] / b[[1]];

m[[1]] = d[[1]] / b[[1]];

For[i = 2, i < n, i++,
цикл ДЛЯ
  l[[i]] = -c[[i]] / (b[[i]] + a[[i]] * l[[i - 1]]);
  m[[i]] = (d[[i]] - a[[i]] * m[[i - 1]]) / (b[[i]] + a[[i]] * l[[i - 1]]);
 ];

m[[n]] = (d[[n]] - a[[n]] * m[[n - 1]]) / (a[[n]] * l[[n - 1]] + b[[n]]);

l // N
    численное приближение

{0.6, -0.192308, -0.244131, -0.435227}

m // N
    численное приближение

{-2., 0.192308, 1.73239, 2.56477, -1.}
```

Расчет ответа и его сравнение с решением встроенной функцией

```
X = Array[1, n];
    массив
X[[n]] = m[[n]];
For[i = n - 1, i >= 1, i--,
цикл ДЛЯ
 X[[i]] = l[[i]] * X[[i + 1]] + m[[i]]]

X

{-2, 0, 1, 3, -1}
```

```
A = {{5, -3, 0, 0, 0},
   {3, 19, 4, 0, 0},
   {0, -1, 8, 2, 0},
   {0, 0, 2, -11, -5},
   {0, 0, 0, 2, 9}};
d = {-10, -2, 14, -26, -3};

LinearSolve[A, d]
решить линейные уравнения

{-2, 0, 1, 3, -1}
```

Задание № 3

3. Решить систему n-го порядка $AX = B$ методом Якоби и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ при $n = 10$ и $n = 20$. Сравнить число итераций, необходимых для достижения точности ε этими методами. Здесь $A = (a_{ij})$ – матрица с диагональным преобладанием, $B = (b_i)$ – вектор-столбец,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 2n, & i = j, \end{cases} \qquad b_i = (2n-1)i + \frac{n(n-1)}{2} + (3n-1)(k-1),$$

где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, k – номер вашего варианта.

Результаты при n=10

Задание системы

```
n = 10;
A = Table[If[i ≠ j, 1, 2 * n], {i, 1, n}, {j, 1, n}]
    табл···  условный оператор

{{20, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {1, 20, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {1, 1, 20, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {1, 1, 1, 20, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
 {1, 1, 1, 1, 20, 1, 1, 1, 1, 1}, {1, 1, 1, 1, 1, 20, 1, 1, 1, 1}, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 20, 1, 1, 1}, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 20, 1, 1}, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 20, 1}, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 20}}

B = Table[(2 * n - 1) * i + n * (n + 1) / 2 + (3 * n - 1) * (6 - 1), {i, 1, n}]
    таблица значений

{544, 583, 622, 661, 700, 739, 778, 817, 856, 895, 934, 973, 1012, 1051, 1090, 1129, 1168, 1207, 1246, 1285}
```

Решение методом Якоби

```
While[CurrentEpsil > Epsil,
цикл-пока
  prevX = x;
  x = Table[-1 / A[[i, i]] * (Sum[A[[i, j]] * prevX[[j]], {j, n}] - A[[i, i]] * prevX[[i]] - b[[i]]), {i, n}];
      таблица значений           сумма
  CurrentEpsil = Norm[x - prevX, ∞];
                 норма
  iterations++;
  Print[iterations, ":", N[x]];
  печатать                 численное приближение
 ];
```

```
While[CurrToler > Toler, Iter++;
цикл-пока
  XPrev = X;
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
  цикл ДЛЯ
   X[[i]] = -(Sum[A[[i, j]] * XPrev[[j]], {j, 1, n}] - A[[i, i]] * XPrev[[i]] - B[[i]]) / A[[i, i]]
              сумма
  ];
  CurrToler = Norm[X - XPrev, Infinity];
              норма          бесконечность
  Print["Итерация ", Iter, ": ", SetPrecision[X, 3]]
  печатать                       задать относительную точность
 ];
```

```
Iter
Итерация 1: {11.0, 11.9, 12.9, 13.8, 14.8, 15.7, 16.7, 17.6, 18.6, 19.5}
Итерация 2: {3.89, 4.88, 5.88, 6.88, 7.88, 8.87, 9.87, 10.9, 11.9, 12.9}
Итерация 3: {6.96, 7.96, 8.96, 9.96, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 16.0}
Итерация 4: {5.57, 6.57, 7.57, 8.57, 9.57, 10.6, 11.6, 12.6, 13.6, 14.6}
Итерация 5: {6.19, 7.19, 8.19, 9.19, 10.2, 11.2, 12.2, 13.2, 14.2, 15.2}
Итерация 6: {5.91, 6.91, 7.91, 8.91, 9.91, 10.9, 11.9, 12.9, 13.9, 14.9}
Итерация 7: {6.04, 7.04, 8.04, 9.04, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 8: {5.98, 6.98, 7.98, 8.98, 9.98, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 9: {6.01, 7.01, 8.01, 9.01, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 10: {6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 11: {6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 12: {6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 13: {6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 14: {6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
14
```

Методом Зейделя

```
X = ConstantArray[0, n];
    постоянный массив
XPrev = ConstantArray[0, n];
        постоянный массив
Toler = 10^-6;

Iter = 0;
CurrToler = Infinity;
            бесконечность

While[CurrToler > Toler, XPrev = X;
цикл-пока
 For[i = 1, i ≤ n, i++,
 цикл ДЛЯ
   X[[i]] = (1 / A[[i, i]]) * (B[[i]] - Sum[A[[i, j]] * X[[j]], {j, 1, i - 1}] - Sum[A[[i, j]] * XPrev[[j]], {j, i + 1, n}]);
                                        сумма                                    сумма
  ]
  CurrToler = Norm[X - XPrev, Infinity];
              норма         бесконечность
 Iter++;
 Print["Итерация ", Iter, ": ", SetPrecision[X, 3]]
 печатать                       задать относительную точность
]

Iter
```

```
Итерация 1: {11.0, 11.4, 11.7, 12.1, 12.4, 12.8, 13.1, 13.4, 13.7, 13.9}
Итерация 2: {5.23, 6.48, 7.70, 8.87, 10.0, 11.1, 12.1, 13.1, 14.1, 15.1}
Итерация 3: {6.02, 6.99, 7.98, 8.97, 9.97, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 4: {6.01, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 5: {6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 6: {6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 7: {6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 8: {6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
Итерация 9: {6.00, 7.00, 8.00, 9.00, 10.0, 11.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0}
9
```

Результаты при n=20

Метод Якоби

```
Print[SetPrecision[X, 3]]
печа⋯ задать относительную точность

Iter
```

```
{5.66, 6.66, 7.66, 8.66, 9.66, 10.7, 11.7, 12.7, 13.7, 14.7, 15.7, 16.7, 17.7, 18.7, 19.7, 20.7, 21.7, 22.7, 23.7, 24.7}
15
```

Метод Зейделя

```
Print[SetPrecision[X, 3]]
печа⋯ задать относительную точность
Iter
```

```
{5.66, 6.66, 7.66, 8.66, 9.66, 10.7, 11.7, 12.7, 13.7, 14.7, 15.7, 16.7, 17.7, 18.7, 19.7, 20.7, 21.7, 22.7, 23.7, 24.7}
9
```

Вывод: метод Зейделя сходится заметно быстрее, так как использует уже найденные значения на каждой итерации. В методе Якоби же используются только значения на предыдущей итерации