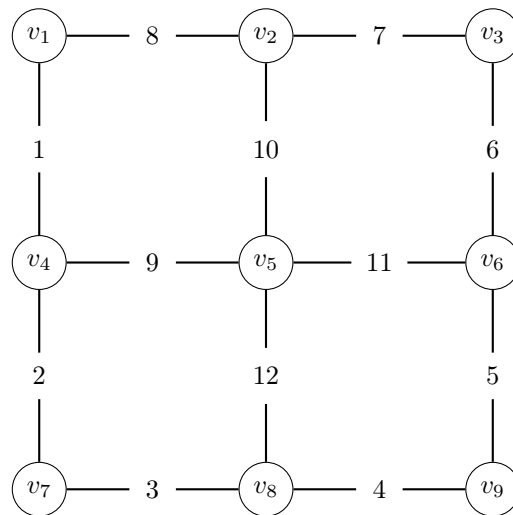


Шестая задача

Векников К. С. – М8О-105Б-23 – 7 вариант

Май, 2024

Дано

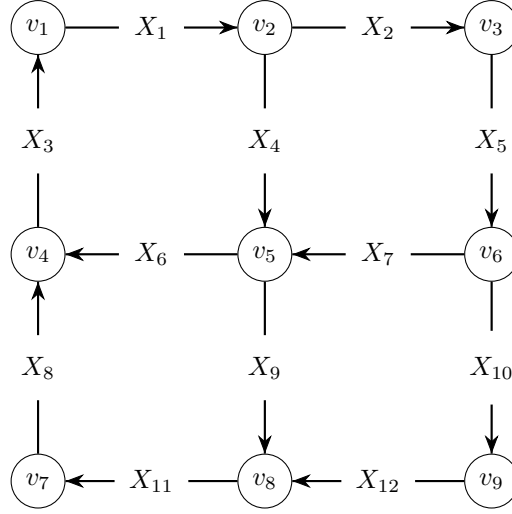


Задание

Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов

Решение

Зададим произвольную ориентацию на графе:

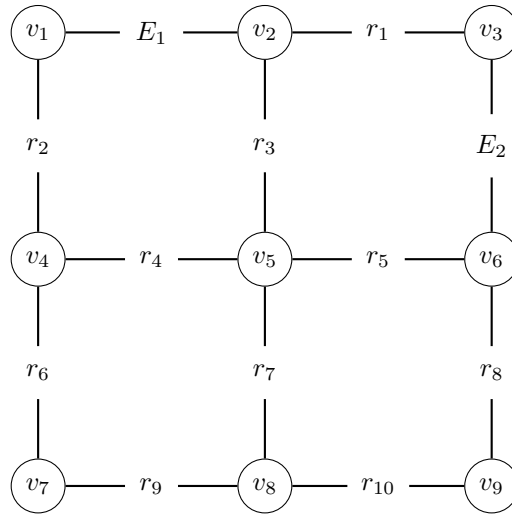


Получаем цикломатическую матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

По закону Кирхгофа для напряжения:

$$C \times U = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 + u_7 = 0 \\ u_1 + u_3 + u_4 + u_6 = 0 \\ u_1 + u_3 + u_4 + u_8 + u_9 + u_{11} = 0 \\ -u_7 - u_9 + u_{10} + u_{12} = 0 \end{cases}$$



Подставим закон Ома:
$$\begin{cases} i_2 r_1 - i_4 r_3 + E_2 + i_7 r_6 = 0 \\ E_1 + i_3 r_2 + i_4 r_3 + i_6 r_4 = 0 \\ E_1 + i_3 r_2 + i_4 r_3 + i_8 r_6 + i_9 r_7 + i_{11} r_9 = 0 \\ -i_7 r_5 - i_9 r_7 + i_{10} r_8 + i_{12} r_{10} = 0 \end{cases}$$

Составим матрицу инцидентности

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Для получения линейно независимой системы нужно исключить одну строку:

$$\begin{cases} -i_1 + i_3 = 0 \\ i_1 - i_2 - i_4 = 0 \\ i_2 - i_5 = 0 \\ -i_3 + i_6 + i_8 = 0 \\ i_5 - i_7 - i_{10} = 0 \\ -i_8 + i_{11} = 0 \\ i_9 - i_{11} + i_{12} = 0 \\ i_{10} - i_{12} = 0 \end{cases}$$

Совместная система имеет вид:

$$\begin{cases} -i_1 + i_3 = 0 \\ i_1 - i_2 - i_4 = 0 \\ i_2 - i_5 = 0 \\ -i_3 + i_6 + i_8 = 0 \\ i_5 - i_7 - i_{10} = 0 \\ -i_8 + i_{11} = 0 \\ i_9 - i_{11} + i_{12} = 0 \\ i_{10} - i_{12} = 0 \\ i_2 r_1 - i_4 r_3 + E_2 + i_7 r_6 = 0 \\ E_1 + i_3 r_2 + i_4 r_3 + i_6 r_4 = 0 \\ E_1 + i_3 r_2 + i_4 r_3 + i_8 r_6 + i_9 r_7 + i_{11} r_9 = 0 \\ -i_7 r_5 - i_9 r_7 + i_{10} r_8 + i_{12} r_{10} = 0 \end{cases}$$

12 уравнений и 12 неизвестных $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}$

ЭДС - E_1, E_2 и сопротивление $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}$ известны.

Ответ

$$\left\{ \begin{array}{l} -i_1 + i_3 = 0 \\ i_1 - i_2 - i_4 = 0 \\ i_2 - i_5 = 0 \\ -i_3 + i_6 + i_8 = 0 \\ i_5 - i_7 - i_{10} = 0 \\ -i_8 + i_{11} = 0 \\ i_9 - i_{11} + i_{12} = 0 \\ i_{10} - i_{12} = 0 \\ i_2 r_1 - i_4 r_3 + E_2 + i_7 r_6 = 0 \\ E_1 + i_3 r_2 + i_4 r_3 + i_6 r_4 = 0 \\ E_1 + i_3 r_2 + i_4 r_3 + i_8 r_6 + i_9 r_7 + i_{11} r_9 = 0 \\ -i_7 r_5 - i_9 r_7 + i_{10} r_8 + i_{12} r_{10} = 0 \end{array} \right.$$