Matrices escalonadas y reducidas por filas

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ está en forma **escalonada y reducida por filas** si cumple las siguientes condiciones:

- El primer número distinto de cero da cada fila es 1. Ese coeficiente se llama **coeficiente principal**.
- El número de ceros que precede al coeficiente principal de cada fila va aumentando en las filas sucesivas.
- En la columna donde hay un elemento principal, el resto de los elementos son 0.
- Si hay filas de ceros, están al final.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todas las matrices son equivalentes a una matriz escalonada y reducida por filas. Para llevar una matriz a su equivalente de esta forma, utilizamos las operaciones elementales sobre filas.

Operaciones elementales sobre las filas de una matriz

Dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ se dicen **equivalentes** por filas, lo que escribimos $A \approx_f B$, si de una de ellas se pasa a la otra aplicando un número finito de las siguientes operaciones elementales:

- Multiplicar la fila F_k de la matriz por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ no nulo: $F_k \leftarrow \alpha F_k$
- Sumar a la fila F_h la fila F_k multiplicada por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$: $F_h \leftarrow F_h + \alpha F_k$
- Permutar dos filas: $F_h \leftrightarrow F_k$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \left(F_1 \leftarrow \frac{1}{2} F_1\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} (F_2 \leftarrow F_2 - F_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} (F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(F_2 \leftarrow -\frac{1}{3} F_2\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} (F_3 \leftarrow F_3 + 6F_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_R$$

La última matriz la llamamos A_R, porque es la matriz equivalente a A, pero que es escalonada y reducida por filas. Esto lo escribimos como $A \approx_f A_R$ o, simplemente, $A \approx A_R$.

Rango

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, el **rango** de A, $r(A)$ es la cantidad de filas no nulas de la matriz escalonada y reducida por filas A_R equivalente con A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \approx_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_R \longrightarrow$$

En este caso, A tiene rango 2, es decir, $r(A) = 2$.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ admite inversa si y solamente si $r(A) = n$

¡Solo las matrices cuadradas pueden tener inversa!

¿Cómo hallar la matriz inversa?

Mediante operaciones elementales

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(F_1 \leftarrow \frac{1}{2}F_1\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - F_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 - 3F_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(F_3 \leftarrow \frac{1}{5}F_3\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$(F_2 \leftarrow F_2 - 3F_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 + 11F_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -3 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Por lo tanto, tenemos que la inversa de la matriz A es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -3 & \frac{11}{5} \\ \frac{1}{10} & 1 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Ejercicio 9. Determinar si alguna de las siguientes matrices es inversible y en caso de que lo sea, hallar su inversa.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_1 \leftrightarrow F_2) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 + F_1) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(F_2 \leftarrow -\frac{1}{2} F_2\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$(F_1 \leftarrow F_1 + F_2) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Como la matriz A tiene rango 2, sabemos que es inversible. Y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ para a un número real cualquiera fijo.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_1 \leftrightarrow F_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - F_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & 0 & 1 & -1 \\ a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - aF_1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & -a & 1 & 0 & -a \end{array}\right) (F_2 \leftarrow -1. F_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1-a & -a & 1 & 0 & -a \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 - F_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1-a & -a & 1 & 0 & -a \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - (1-a)F_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2+a-1 & 1 & 1-a & -1 \end{array}\right) \left(F_3 \leftarrow \frac{1}{-a^2+a-1} F_3\right)$$

Como la ecuación cuadrática $-a^2 + a - 1$ no es igual a 0 para ningún valor real, entonces la matriz tiene rango igual a 3.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{-a^2+a-1} & \frac{1-a}{-a^2+a-1} & -\frac{1}{-a^2+a-1} \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - (1-a)F_3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-1}{-a^2+a-1} & \frac{a}{-a^2+a-1} & \frac{-a^2-2}{-a^2+a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{-a^2+a-1} & \frac{1-a}{-a^2+a-1} & -\frac{1}{-a^2+a-1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{-a^2+a-1} & \frac{-2a^2-1}{-a^2+a-1} & \frac{a}{-a^2+a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-1}{-a^2+a-1} & \frac{a}{-a^2+a-1} & \frac{-a^2-2}{-a^2+a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{-a^2+a-1} & \frac{1-a}{-a^2+a-1} & -\frac{1}{-a^2+a-1} \end{array}\right)$$

$$(F_1 \leftarrow F_1 - aF_3)$$

Ejercicio 10. Determinar si existe algún valor de k para que las siguientes matrices sean inversibles:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & 2k \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ La matriz A es inversible si $k \neq 0$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & 2k \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \ (F_1 \leftrightarrow F_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k \\ 2 & k & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} (F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k \\ 0 & k-2 & 3-4k \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \ (F_3 \leftrightarrow F_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & k-2 & 3-4k \end{pmatrix}$$

$$\left(F_2 \leftarrow -\frac{1}{2}F_2\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-2 & 3-4k \end{pmatrix} (F_1 \leftarrow F_1 - F_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-2 & 3-4k \end{pmatrix} \ (F_3 \leftarrow F_3 - (k-2)F_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-4k \end{pmatrix}$$

La matriz B es inversible si $k \neq \frac{3}{4}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (F_2 \leftarrow F_2 - F_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (F_2 \leftarrow F_2 + F_3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (F_1 \leftarrow F_1 - F_3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz C es inversible si $k \neq 0$