Sistemas homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos sus términos independientes son 0. Se suele escribir en notación matricial como $AX = 0$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Todos los sistemas homogéneos son compatibles

Si un sistema homogéneo es compatible determinado, su solución será aquella en la que todas las variables toman el valor 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) (F_1 \leftrightarrow F_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \leftrightarrow F_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(F_2 \leftarrow -\frac{1}{2} F_2\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 + 5F_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right) \left(F_3 \leftarrow -\frac{1}{9} F_3\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 + 2F_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 - 3F_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{S = \{(0,0,0)\}}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \left(F_1 \leftarrow \frac{1}{2} F_2\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \left(F_2 \leftarrow -\frac{1}{3} F_2\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \leftarrow F_3 - 3F_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 - F_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R(A) = R(A|b) = 2 < \text{cantidad de incógnitas}$$

El sistema es compatible indeterminado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y + z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}}$$

Soluciones particulares: $(0,0,0)$, $(0,1,-1)$, $(0,-5,5)$, $(0,\pi,-\pi)$ …

2. $\begin{cases} x + 2y + z + 4w = 0 \\ y - 3w = 0 \\ 4x + 7y + 4z + 19w = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 4 & 19 & 0 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - 4F_1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 + F_2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + z + 10w = 0 \\ y - 3w = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -z - 10w \\ y = 3w \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{(-z - 10w, 3w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}}$$