Permutaciones

Una permutación de n elementos distintos es un ordenamiento de los elementos. La cantidad de permutaciones es:

$$n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1 = n!$$

Ordenar cierta cantidad de cosas (no todos los lugares son iguales)

Permutaciones con elementos indistinguibles

Si tenemos una sucesión S de n elementos entre los que hay n_1 elementos iguales de tipo 1, n_2 elementos iguales de tipo 2,…, n_k elementos iguales de tipo k, el número de permutaciones distintas de los elementos de S es:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Ordenar cierta cantidad de cosas (no todos los lugares son iguales) donde algunos elementos están repetidos

r-Permutaciones o variaciones

Si $n, r \in \mathbb{N}$ son tales que $1 \leq r \leq n$, una r-permutación de n elementos distintos es un ordenamiento de un subconjunto de r elementos del conjunto.

Al número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos lo denotaremos $P(n,r)$ y se cumple que:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ordenar algunos elementos de un conjunto (no todos los lugares son iguales)

Combinaciones

Si $n, r \in \mathbb{N}$ son tales que $1 \leq r \leq n$ y tenemos un conjunto con n elementos distintos, entonces una combinación de r elementos del conjunto, es un subconjunto con r elementos. El número de r-combinaciones se calcula como:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Armar un subconjunto donde todos los lugares son iguales.

¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 personas en un banco si solamente hay 4 lugares disponibles?

$$10.9.8.7 = \frac{10!}{(10-4)!}$$

Se quieren sentar 5 hombres y 4 mujeres en fila de forma tal que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo?

$$5!\,4!$$

¿Cuántos números de 3 dígitos pueden formarse si deben ser pares?

$$9.10.5$$

¿Cuántos tipos distintos de ensalada puedo preparar con lechuga, tomate, zanahoria, remolacha y apio?

$$\binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{5}{1}$$

Si tengo 6 libros de paleontología, 4 de psicología, 8 de informática y 2 de matemática, ¿de cuántas maneras puedo ordenarlos en un estante?

$$20!$$

¿De cuántas maneras puedo ordenar los libros si los de informática deben estar juntos?

$$13!\,8!$$

¿De cuántas maneras puedo ordenar los libros si los de cada asignatura deben estar juntos?

$$4!\,6!\,4!\,8!\,2!$$

¿De cuántas maneras puedo ordenar los libros si los de matemática deben estar separados?

$$20! - 19!\,2$$

¿De cuántas maneras puedo ordenar los libros si en el estante solamente entran 8 libros y debo poner 2 libros de cada asignatura?

$$\binom{6}{2}.\binom{4}{2}.\binom{8}{2}.\binom{2}{2}.8!$$

¿Cuántos anagramas puedo formar con la palabra FERROCARRIL?

$$\frac{11!}{4!}$$

¿Cuántos de los anagramas comienzan con F y terminan con L?

$$\frac{9!}{4!}$$

¿Cuántos de los anagramas empiezan con RR y terminan con RR?

$$7!$$

¿Cuántos de los anagramas empiezan con RERRR?

$$6!$$

Ejercicio 4. ¿Cuántos anagramas de la palabra FACULTAD pueden formarse? ¿Cuántos de ellos empiezan con la letra A? ¿Cuántos terminan con una vocal?

Como los anagramas son las permutaciones de las letras, pero la letra A se repite, la cantidad de anagramas es $\frac{8!}{2!}$.

Si los anagramas deben comenzar con A, entonces las restantes 7 letras se pueden permutar para obtener los anagramas es decir, que la cantidad es 7!

Para que el anagrama termine en una vocal, entonces debe terminar con A o con U. La cantidad total de anagramas es la suma de ambas posibilidades, es decir, $7! + \frac{7!}{2!}$

Ejercicio 5. En un estante de una biblioteca se encuentran 5 libros de Matemática, 3 de Física y 7 de Biología. ¿De cuántas maneras distintas pueden acomodarse? ¿Y si quiero que los del mismo área queden juntos?

La cantidad de formas de ordenar los libros es la cantidad de permutaciones, es decir, $15!$

Si los libros de la misma área deben estar juntos, entonces puedo tomar las permutaciones dentro de cada área y después multiplicar por la cantidad de formas de ordenar cada grupo de libros: $5!\,3!\,7!\,3!$

Ejercicio 6. Si un exámen tiene 20 preguntas y tengo que elegir sólo 15 para responder. ¿De cuántas maneras puedo hacer la selección?

La forma de elegir, como no importa el orden en que las elijo, porque debo contestar las 15 preguntas, es: $\binom{20}{15} = \frac{20!}{15!5!}$

Ejercicio 7. Un grupo de 13 compañeros de trabajo se reúnen una vez a la semana a jugar al futbol cinco y sólo dos de ellos pueden jugar de arquero. ¿De cuántas maneras pueden armarse los dos equipos?

Como solo dos pueden ser arqueros, hay que elegir primero 4 jugadores entre los 11 que quedan para el primer equipo, y luego 4 jugadores de los 7 restantes para el segundo equipo. Además, hay que multiplicar por 2! que es la posibilidad de que los arqueros jueguen en los dos equipos. Entonces queda: $\binom{11}{4}.\binom{7}{4}2! = \frac{11!}{4!7!}.\frac{7!}{4!3!}.2!$

¿Cuántos números de 4 cifras tienen un 3 en el primer digito o 7 en el tercero?. JUSTIFICA TU RESPUESTA.

La cantidad de números de 4 cifras que tienen un 3 en el primer dígito son 10^3, mientras que la cantidad de números de 4 cifras que tienen un 7 en el 3° dígito son: 9.10^2 (ya que no pueden empezar con 0 para ser de 4 cifras). Si sumamos esas dos cantidades, estaríamos repitiendo los casos de los números que tienen un 3 en el 1° lugar y un 7 en el 3° lugar, por lo que tenemos que restar esa cantidad de casos, que es: 10^2. Es decir, que la cantidad total de números es: $10^3 + 9.10^2 - 10^2$

¿Cuántos números de 5 cifras comienzan con 20 o terminan con 1?. JUSTIFICA TU RESPUESTA.

La cantidad de números de 5 cifras que tienen un 20 en el principio son 10^3, mientras que la cantidad de números de 5 cifras que terminan con 1 son: 9.10^3 (ya que no pueden empezar con 0 para ser de 5 cifras). Si sumamos esas dos cantidades, estaríamos repitiendo los casos de los números que tienen un 20 al principio y un 1 en el 5° lugar, por lo que tenemos que restar esa cantidad de casos, que es: 10^2. Es decir, que la cantidad total de números es: $10^3 + 9.10^3 - 10^2$

Con 30 socios de un club se quiere formar la comisión directiva. Si todos los socios pueden ir en cualquier puesto, ¿De cuántas maneras puede formarse la lista con Presidente, Vice, Secretario y Tesorero? JUSTIFICA TU RESPUESTA

Como cualquiera puede ir a cualquier puesto (pero cada uno puede ocupar un solo puesto), la cantidad de formas en las que se puede armar la comisión directiva es: $\frac{30!}{26!} = 30.29.28.27$

En una competencia de atletismo hay 40 participantes. El podio se forma con el 1ero, 2do y 3er puesto, ¿Cuántos podios puede haber? JUSTIFICA TU RESPUESTA

Como cualquiera puede ir a cualquier puesto (pero cada uno puede ocupar un solo puesto), la cantidad de formas en las que se puede armar el podio es: $\frac{40!}{37!} = 40.39.38$