Lógica y proposiciones

Si un número es par entonces su siguiente es impar.

$$p(x):\ x\ es\ par$$

$$q(x):\ x+1\ es\ impar$$

$$(\forall x)(p(x) \to q(x))$$

Si un número es negativo entonces su cuadrado es positivo.

$$p(x):\ x<0$$

$$q(x):\ x^2>0$$

$$(\forall x)(p(x) \to q(x))$$

El número 10 tiene divisores distintos de 1, -1, 10 y -10

$$p(x):\ x \neq 1$$

$$q(x):\ x \neq -1$$

$$r(x):\ x \neq 10$$

$$s(x):\ x \neq -10$$

$$t(x):\ x\ divide\ a\ 10$$

$$(\exists x)(p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x) \wedge t(x))$$

Existe un número que es primo y es par.

$$p(x):\ x\ es\ primo$$

$$q(x):\ x\ es\ par$$

$$(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$$

Si un número es par entonces su triple es múltiplo de 6

$$p(x) = x \text{ } es \text{ } m\acute{u}ltiplo \text{ } de \text{ } 2$$

$$q(x) = 3x \text{ } es \text{ } m\acute{u}ltiplo \text{ } de \text{ } 6$$

$$(\forall x)(p(x) \to q(x))$$

Contrario:

$$(\forall x)(\neg p(x) \to \neg q(x))$$

Si un número no es par entonces su triple no es múltiplo de 6.

Recíproco:

$$(\forall x)(q(x) \to p(x))$$

Si el triple de un número es múltiplo de 6 entonces el número era par.

Contrarrecíproco:

$$(\forall x)(\neg q(x) \to \neg p(x))$$

Si el triple de un número no es múltiplo de 6 entonces el número no era par.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Método directo

p	q	$q \to p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg p \to \neg q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg q \to \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Método indirecto (contrarrecíproco)

p	q	$\neg(p \to q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \wedge \neg q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Método del absurdo

Demostraciones

Método directo:

Si un número es par entonces su triple es múltiplo de 6

$$p(x) = x \text{ } es \text{ } m\text{ú}ltiplo \text{ } de \text{ } 2$$

$$q(x) = 3x \text{ } es \text{ } m\text{ú}ltiplo \text{ } de \text{ } 6$$

$$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$$

Supongamos que x es par. Entonces, existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2.m$

Si calculamos ahora $3x$, tenemos que $3x = 3.(2.m) = 6.m$, es decir, que $3x$ es múltiplo de 6, porque $m \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, probamos el enunciado.

Método indirecto/contrarrecíproco:

$$p(x) = x\ es\ múltiplo\ de\ 2$$

$$q(x) = 3x\ es\ múltiplo\ de\ 6$$

$$(\forall x)(\neg q(x) \rightarrow \neg p(x))$$

Si el triple de un número no es múltiplo de 6 entonces el número no era múltiplo de 2.

Supongamos que el triple del número no es múltiplo de 6, entonces tenemos que

$$3x \neq 6.m$$

Para todos los números $m \in \mathbb{Z}$.

Si dividimos a ambos lados por 3, nos queda que

$$x \neq 2.m$$

Es decir, que x no es par.

Por lo tanto, probamos el enunciado.

Si un número es par entonces su triple es múltiplo de 6

$$p(x) = x \text{ es múltiplo de } 2$$

$$q(x) = 3x \text{ es múltiplo de } 6$$

$$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$$

Al tomar la negación de la proposición anterior tenemos:

$$\neg(\forall x)\big(p(x) \rightarrow q(x)\big) = (\exists x)\big(p(x) \wedge \neg q(x)\big)$$

Si probamos que esto es falso, entonces lo opuesto, es decir, la proposición original, será verdadero.

Método del absurdo:

Si un número es par entonces su triple es múltiplo de 6

$$p(x) = x \text{ es múltiplo de } 2$$

$$q(x) = 3x \text{ es múltiplo de } 6$$

$$(\forall x)\big(p(x) \to q(x)\big)$$

Su negación es:

$$(\exists x)\big(p(x) \wedge \neg q(x)\big)$$

Existe un número que es par y su triple no es múltiplo de 6.

Supongamos que existe un número x que es par y su triple no es múltiplo de 6. Entonces sabemos que:

- Existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2.m$ (1)
- Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $3x \neq 6.n$ (2)

Si multiplicamos la igualdad (1) por 3, obtenemos

$$3.x = 3.(2.m)$$

$$3.x = 6.m$$

Pero esto contradice la afirmación (2), con lo cual es un absurdo y hemos demostrado que la afirmación es falsa.

Por lo tanto, su negación, $(\forall x)(p(x) \to q(x))$, es verdadera.

Probar que la suma de cuatro números enteros consecutivos es par.

$$p(x) = x \; es \; entero$$

$$q(x) = x + (x+1) + (x+2) + (x+3) \; es \; par$$

$$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$$

Método directo:

Sea $x \in \mathbb{Z}$. Entonces tenemos que

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 4x + 6 = 2(2x+3)$$

Y este número es par porque $2x + 3$ es un número entero cuando $x \in \mathbb{Z}$.

Probar que la suma de cuatro números enteros consecutivos es par.

$$p(x) = x \; es \; entero$$

$$q(x) = x + (x+1) + (x+2) + (x+3) \; es \; par$$

$$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$$

Método del absurdo:

Supongamos que $x \in \mathbb{Z}$ y que $x + (x+1) + (x+2) + (x+3)$ no es par. Es decir, tenemos que:

- $x \in \mathbb{Z}$
- $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) \neq 2.m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$

Si hacemos la cuenta, tenemos que:

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) \neq 2.m$$

$$4x + 6 \neq 2.m$$

$$2(2x+3) \neq 2.m$$

$$2x + 3 \neq m$$

Y esto es un absurdo, porque $2x + 3 \in \mathbb{Z}$ ya que $x \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, la afirmación es falsa y su negación debe ser verdadera.

Método indirecto/contrarrecíproco:

Supongamos que $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)$ no es par, es decir, que $x+(x+1)+(x+2)+(x+3) \neq 2.m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Si hacemos la cuenta, tenemos que:

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3) \neq 2.m$$

$$4x+6 \neq 2.m$$

$$2(2x+3) \neq 2.m$$

$$2x+3 \neq m$$

$$2x \neq m-3$$

$$x \neq \frac{m-3}{2}$$

Y esto vale para todos los $m \in \mathbb{Z}$. Entonces, esto quiere decir que $x \notin \mathbb{Z}$, ya que si x fuera un número entero, lo podríamos escribir como $x = \frac{(2x+3)-3}{2}$, donde $2x+3$ sería un número entero. Pero vimos que esa igualdad no se cumple. Por lo tanto, probamos la implicación contrarrecíproca.

Conjuntos

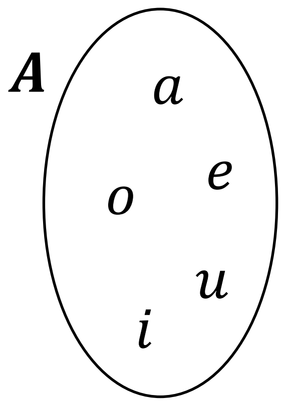
Un **conjunto** es una colección de elementos.

El **conjunto universal** es un conjunto que contiene a todos los subconjuntos con los que estamos trabajando en un problema. Se suele denominar con la letra U.

Extensión → $\boldsymbol{A} = \{a, e, i, o, u\}$

Comprensión → $\boldsymbol{A} = \{x \mathbin{/} x \text{ es una vocal}\}$

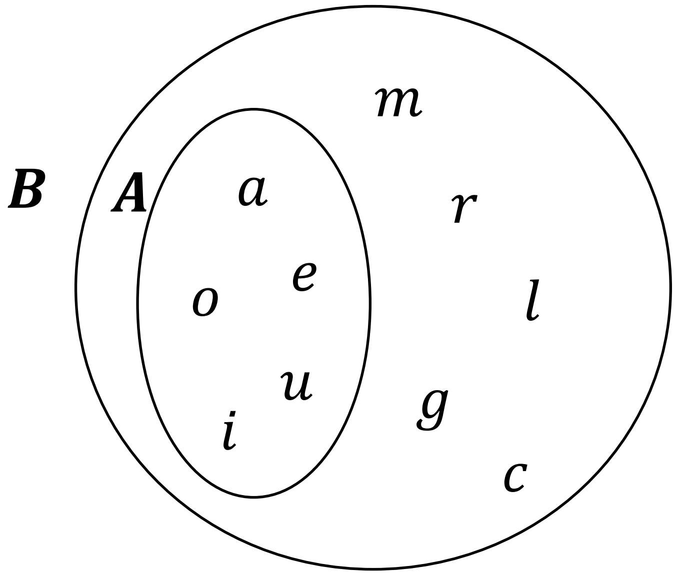
Diagrama de Venn



$a \in \boldsymbol{A}$

$t \notin \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$



$\boldsymbol{B} = \{x \mathbin{/} x \text{ es una letra de la palabra murciélago}\}$

$\boldsymbol{B} = \{m, u, r, c, i, e, l, a, g, o\}$