Sistemas de ecuaciones

Hallar el conjunto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Si despejamos la variable y en ambas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{cases} y = 1 - 2x & (1) \\ x + 4 = y & (2) \end{cases}$$

Ahora, igualamos las ecuaciones (1) y (2):

$$1 - 2x = x + 4$$

$$1 - 4 = x + 2x$$

$$-3 = 3x$$

$$-\frac{3}{3} = x$$

$$-1 = x$$

Si reemplazamos $x = -1$ en la ecuación (1) tenemos:

$$y = 1 - 2(-1)$$

$$y = 1 + 2 = 3$$

Por lo tanto el conjunto solución es $S = \{(-1,3)\}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes

Matriz de incógnitas

Matriz del término independiente

$$A.X = b$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Matriz ampliada

$$(A|b)$$

Hallar el conjunto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y + z = -1 & (1) \\ 3x - y - 3z = 7 & (2) \\ \dfrac{1}{2}x + 2y + 2z = -1 & (3) \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{(2, -1, 0)\}}$$

¿Cómo lo representaríamos en forma matricial?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ \dfrac{1}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una **solución** de un sistema de ecuaciones de la forma $A.X = b$ es una n-upla de números tales que reemplazándolos en las filas de la matriz X, se cumple la igualdad.

Operaciones elementales

Si $AX = b$ es un sistema de ecuaciones y aplicamos operaciones elementales por filas a la matriz ampliada $(A|b)$, se obtiene una matriz equivalente por filas que tiene las mismas soluciones.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{array}\right) (F_1 \leftrightarrow F_2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1)$$

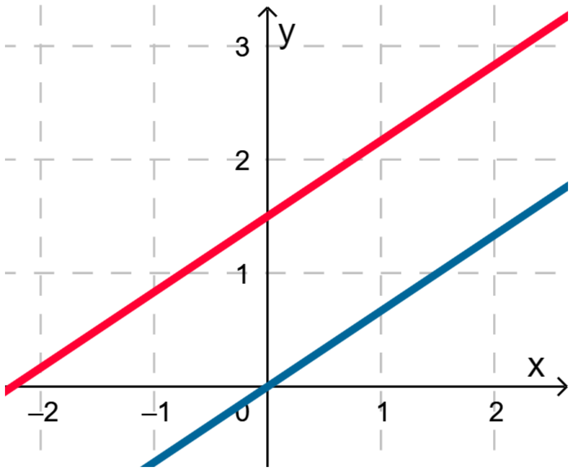
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \left(F_2 \leftarrow \frac{1}{3}.F_2\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \leftarrow F_1 + F_2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el conjunto solución es $S = \{(-1, 3)\}$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$L_1: y = m_1 x + b_1$$
$$L_2: y = m_2 x + b_2$$



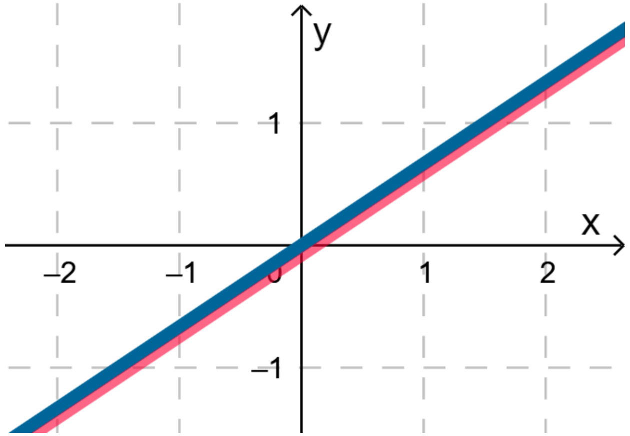
L_1 y L_2 son paralelas

$m_1 = m_2$

$b_1 \neq b_2$

El sistema no tiene soluciones, es **incompatible**

$$S = \emptyset$$



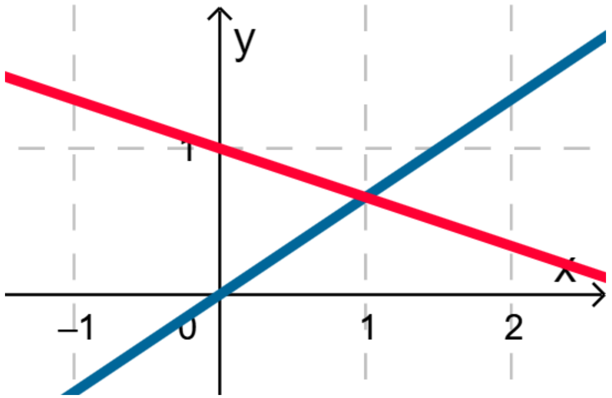
L_1 y L_2 son paralelas y coincidentes

$m_1 = m_2$

$b_1 = b_2$

El sistema tiene infinitas soluciones, es **compatible indeterminado**

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = m_1 x + b_1\}$$



L_1 y L_2 se intersecan en un punto

$m_1 \neq m_2$

El sistema tiene una sola solución, es **compatible determinado**

$$S = \{(a, b)\}$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 - F_2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la solución es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

El sistema tiene solución única, $x = 3$, $y = -1$

Observemos que $R(A) = R(A|b) = 2$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la solución es $\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

El sistema tiene infinitas soluciones $\{(x, y): x = 2 - y, y \in R\}$

Observemos que $R(A) = R(A|b) = 1$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esto es un absurdo, porque quedaría $\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

El sistema no tiene solución

Observemos que $R(A) \neq R(A|b)$

Teorema de Rouché-Frobenius

Si $AX = b$ es un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, entonces tenemos que:

- Si $R(A) = R(A|b) = n$, entonces el sistema es compatible determinado (tiene una solución única)
- Si $R(A) = R(A|b) < n$, entonces el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)
- Si $R(A) \neq R(A|b)$, entonces el sistema es incompatible (no tiene soluciones)

Ejercicio 15. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando operaciones elementales por filas.

1. $\begin{cases} x+z+3w=1 \\ y+2z+w=4 \\ 2x+2y+6z+8w=3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 8 & 3 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible y por lo tanto no tiene solución.

3. $\begin{cases} x+3z=4 \\ y-z=1 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - F_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_3 \leftrightarrow F_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - F_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \leftarrow -1.F_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 - 3F_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto el sistema tiene solución única y el conjunto solución es $S = \{(4,1,0)\}$

4. $\begin{cases} x+3y+w=5 \\ 6x+13y+2z+4w=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - 6F_1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & -30 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & -30 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right)$$

$$\left(F_2 \leftarrow -\frac{1}{5}F_2\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 6 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 + 5F_2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 22 \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 - 3F_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -13 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 22 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow -1.F_3) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -13 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -22 \end{array}\right) \left(F_1 \leftarrow F_1 - \frac{6}{5}F_3\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{67}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -22 \end{array}\right)$$

$$\left(F_2 \leftarrow F_2 + \frac{2}{5}F_3\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{67}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -22 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{5}w = \frac{67}{5} \\ y + \frac{2}{5}w = -\frac{14}{5} \\ z = -22 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{67}{5} + \frac{1}{5}w \\ y = -\frac{14}{5} - \frac{2}{5}w \\ z = -22 \end{cases}$$

Por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones y el conjunto solución es $S = \{\left(\frac{67}{5} + \frac{1}{5}w, -\frac{14}{5} - \frac{2}{5}w, -22, w\right) : w \in \mathbb{R}\}$