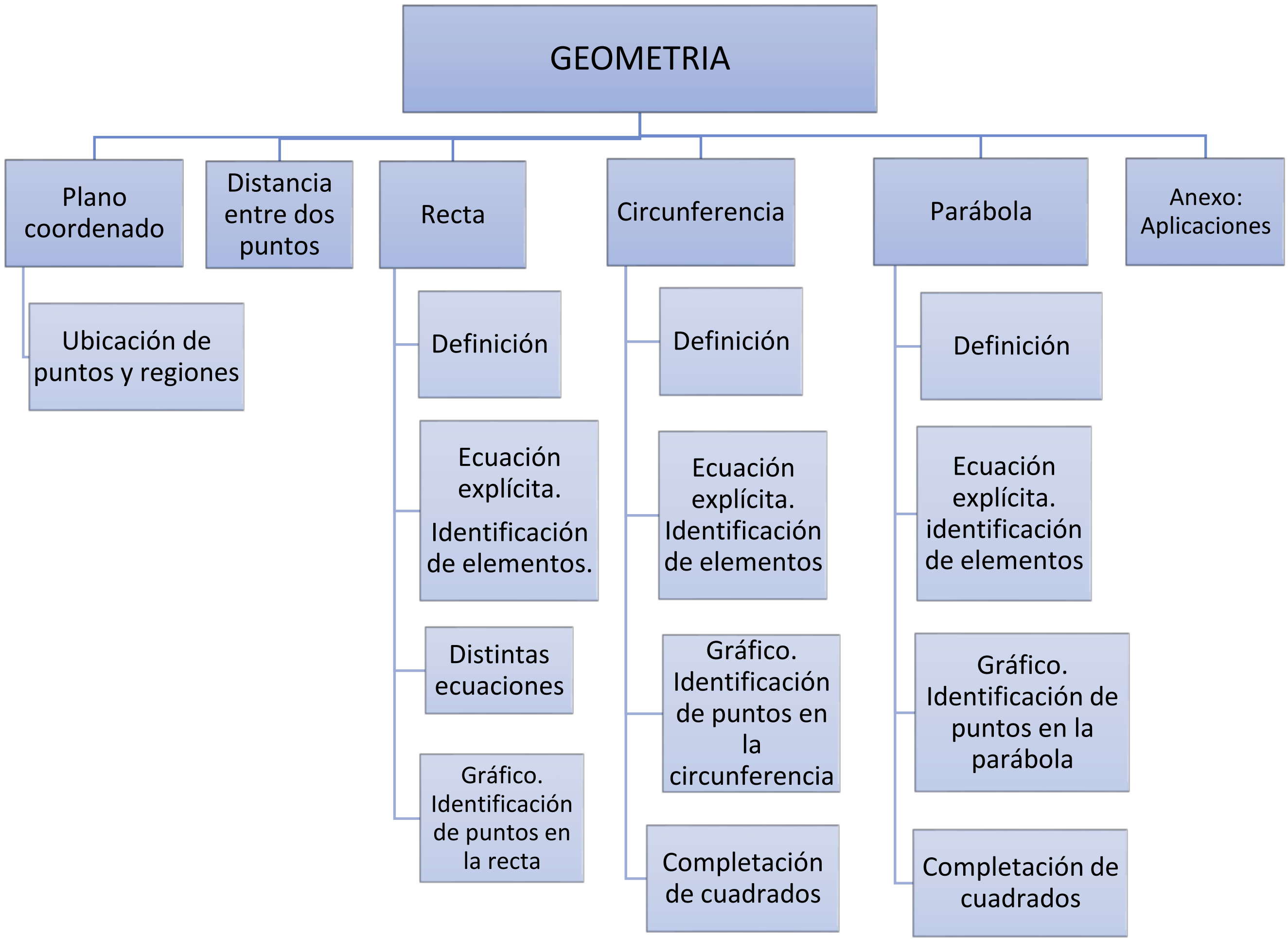
Capítulo 1

GEOMETRÍA

CONTENIDOS:



“Si quieres ser un verdadero buscador de la verdad, es necesario que dudes al menos una vez en tu vida, en la medida de lo posible, de todas las cosas.”

Rene Descartes

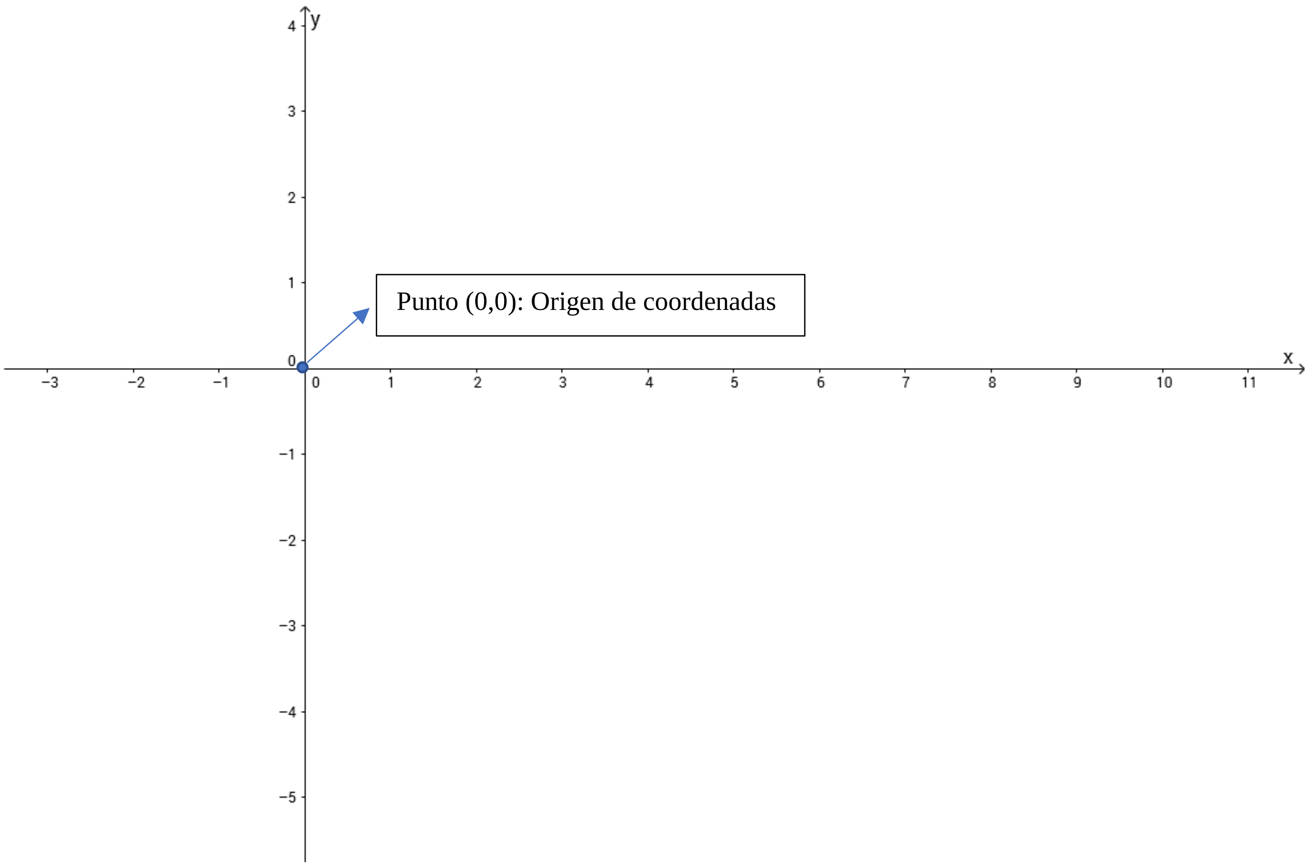
Matemático invitado: René Descartes

El plano cartesiano fue creado por Ratus Cartesius, o mejor conocido como Rene Descartes, famoso matemático francés, quien aporto tan gran descubrimiento en el campo de las matemáticas. Nació el 31 de marzo de 1596 y falleció el 11 de febrero de 1650. Estudio derecho en la Facultad de Portierre, Francia y fue soldado en el ejercito de Nassau.

Cuenta la historia que Rene Descartes observaba una mosca en el techo de su recamara y quería descubrir la ubicación de la misma, en donde se origina el famoso plano cartesiano. Es reconocido como el padre de la Geometría Analítica y su frase más recordada es “Pienso luego existo”.

1. Plano coordenado

Para identificar cada punto del plano con un par ordenado de números, trazamos dos rectas perpendiculares que llamaremos **eje *x*, al eje horizontal** y **eje *y***, **al eje vertical*,*** que se cortan en un punto O llamado **origen de coordenadas.**



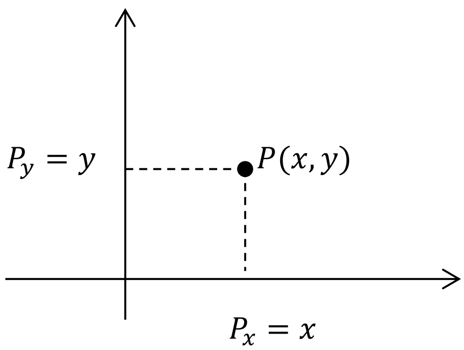
Representamos los números sobre cada eje, eligiendo en ambos ejes la misma unidad, como muestra la figura.

Los ejes dividen al plano en cuatro cuadrantes: llamamos 1er cuadrante a la región donde los valores de x y de y son positivos. 2do cuadrante donde los valores de x son negativos y los de y positivos, 3er cuadrante donde los valores de x y de y son negativos y 4to cuadrante donde los valores de x son positivos y los de y negativos.

Dado un punto P del plano, sea P_x el punto de intersección del eje x con la recta que contiene a P y es paralela al eje y, y sea P_y, el punto de intersección del eje y con la recta que contiene a P y es paralela al eje x. A P_x le corresponde un número x en el eje x y a P_y, le corresponde un número y en el eje y .

Decimos que P tiene coordenadas (x, y) , x es la **abscisa** de P e y es la **ordenada** de P .

El punto P se identifica con sus coordenadas y se escribe $P(x, y)$.



Recíprocamente, dado un par ordenado de números reales (x, y) hay un punto P del plano del cual son las coordenadas. En el gráfico el punto P se encuentra en el 1er cuadrante.

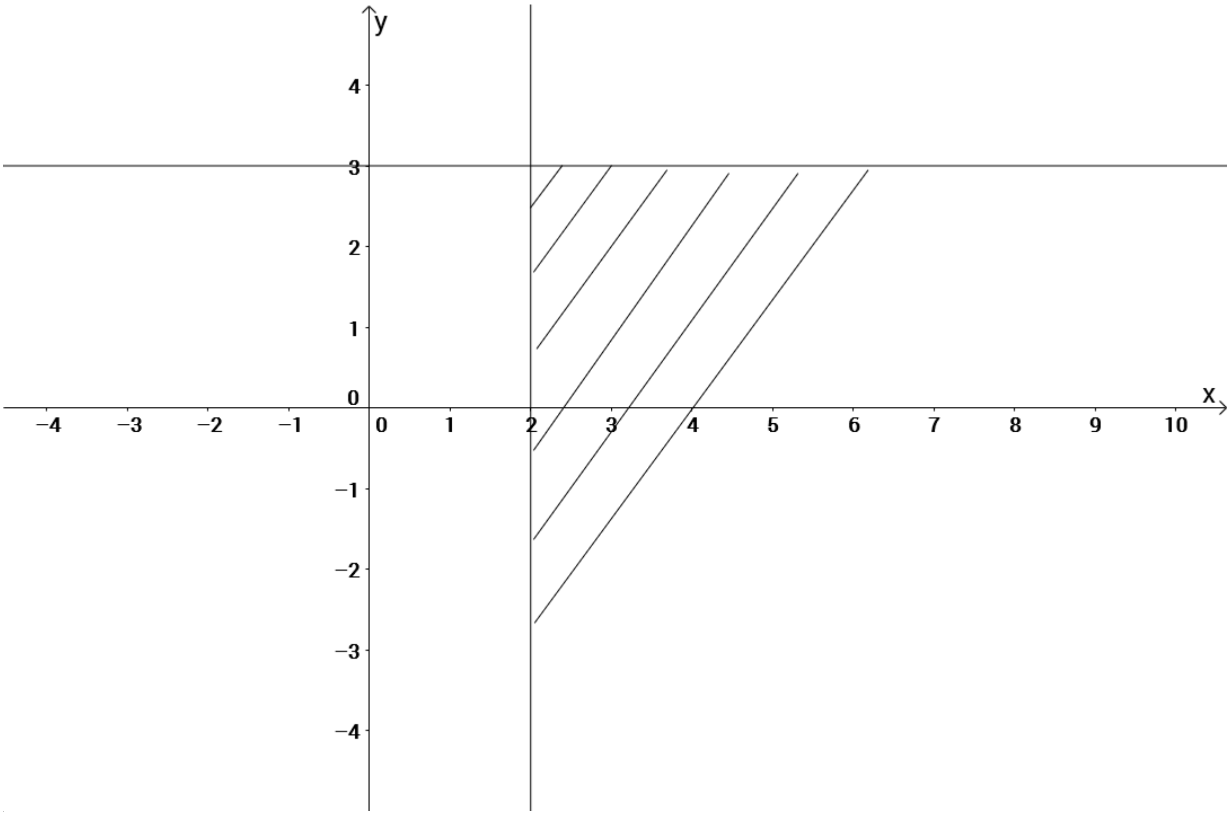
Los puntos que están sobre los ejes no están en ningún cuadrante, por ejemplo el punto (8,0) está sobre el eje x .

> El plano coordenado así definido se llama $\mathbb{R}^2$ y se lee "R dos", es un conjunto y se expresa $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R}\}$ es decir, el conjunto de los pares ordenados donde cada componente es un número real.

También podemos identificar regiones del plano que no sean necesariamente los cuadrantes, sino regiones dadas por alguna condición.

Ejemplo 1.1:

Queremos identificar la región del plano donde los valores de x son mayores o iguales que 2 y los valores de y son menores o iguales que 3:



Esta condición también puede expresarse en notación de conjuntos:

$$A = \{(x, y): (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; y \;\; x \geq 2 \;\; y \;\; y \leq 3\}$$

Esto se lee: el conjunto de los pares ordenados (x, y) tales que (x, y) son puntos de plano $\mathbb{R}^2$, x es mayor o igual que 2 e y es menor o igual que 3.

Ejercicios

1. Representar en el plano los siguientes puntos y decir a qué cuadrante pertenecen:

P(2 ,-1), Q(3 , ½), R(-2 ,-4), S(0 , -2), T(-3 , 0)

2. Representar en el plano los puntos de abscisa negativa y ordenada mayor que 2.

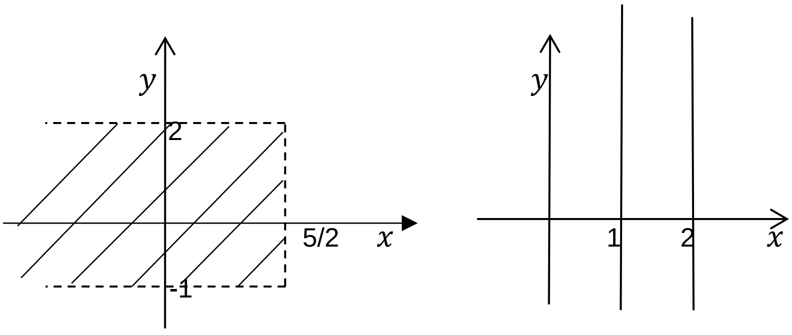
3. Representar en el plano los siguientes conjuntos:

A=$\{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 1 \leq x < 2 \wedge y \geq 0\}$

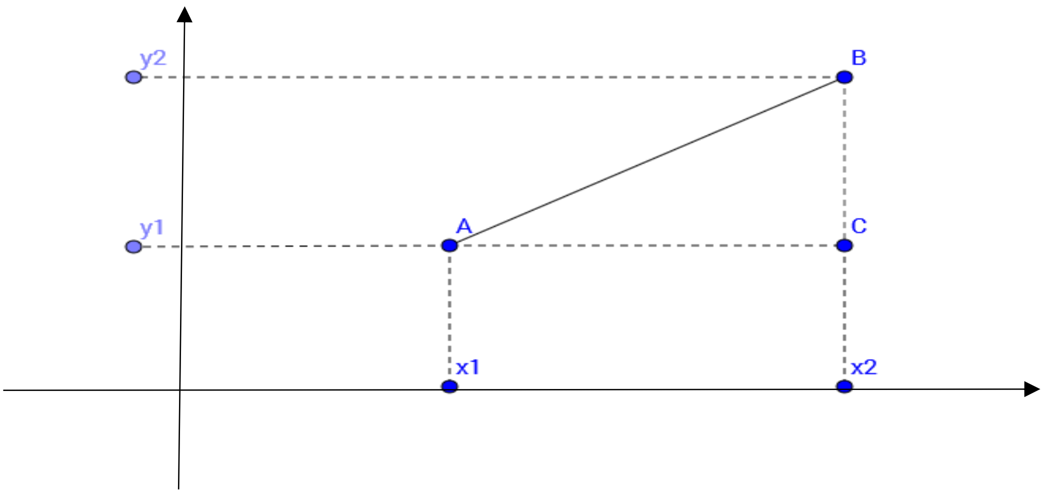
B=$\{(x, y): (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x . y < 0\}$

C= $\{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x = y\}$

4. Definir mediante condiciones los siguientes subconjuntos del plano:

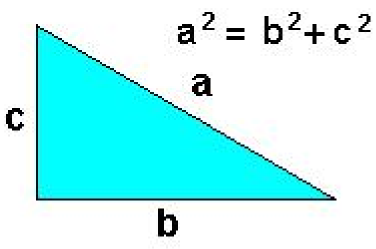


2. Distancia entre dos puntos



La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo que en la figura tiene vértices A, B, C. Para calcularla usamos el Teorema de Pitágoras que podemos enunciar:

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Notar que en la figura el lado $\overline{AC}$ mide $x_2 - x_1$ y el lado $\overline{BC}$ mide $y_2 - y_1$, por lo tanto se tiene que: $\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Como $\overline{AB}$ es la distancia entre los puntos se tiene que:

$$d = d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 2.1: Hallar la distancia entre los puntos P(-2,5) y Q(7,-3).

La distancia está dada por

$$d = \sqrt{(7-(-2))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{9^2 + (-8)^2} = \sqrt{81+64} = \sqrt{145}$$

Notar que es indistinto qué punto tomamos como P_1 y qué punto tomamos como P_2. Por un lado porque claramente la distancia de P a Q debe ser la misma que la distancia de Q a P y por otro porque las diferencias están elevadas al cuadrado. Mostremos la cuenta tomando los puntos en distinto orden:

$$d = \sqrt{(-2-7)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{(-9)^2 + (-8)^2} = \sqrt{81+64} = \sqrt{145}$$

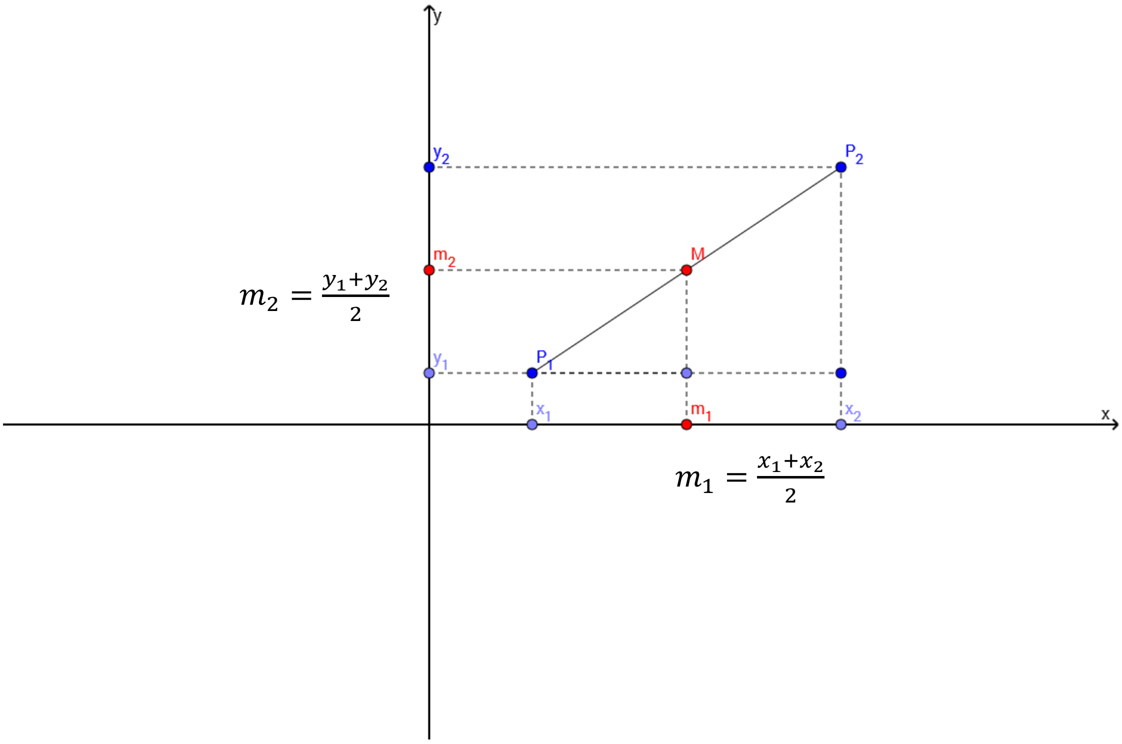
Ejercicios:

5. Calcular la distancia entre $P_1(3,2)$ y $P_2(-1,4)$

6. Representar y hallar el perímetro del triángulo de vértices A(-1,2), B(4,5) y C(5,0)

7. Determinar un punto sobre el eje y que equidiste de (2,5) y (3,3)

8. El punto medio entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dado por el punto M$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ como se muestra en el gráfico:



Determinar las coordenadas del punto medio entre A(-3,8) y B(5, -4)

---

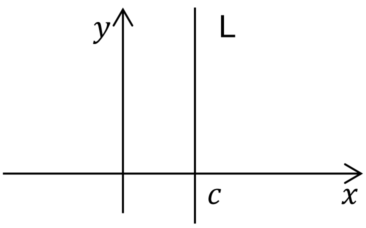
3. Rectas en el plano

Sea L una recta del plano.

i) Si **L** es vertical, **L** tiene una ecuación de la forma $x = c$, ya que todos los puntos que están sobre la recta tienen coordenadas (c, y), el valor de x está fijo en c mientras que y puede tomar cualquier valor real.

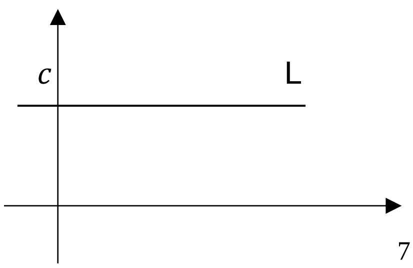
Las rectas también pueden expresarse como un conjunto de puntos del plano:

L = $\{(x, y) : x = c\}$

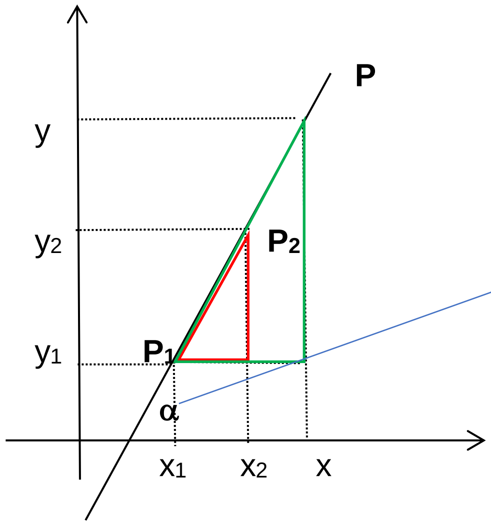


ii) Si **L** es horizontal, L tiene una ecuación de la forma $y = c$, en este caso los puntos sobre la recta son de la forma (x, c) .

Su expresión en notación de conjuntos es: L = $\{(x, y) : y = c\}$



iii) Si L no es horizontal ni vertical y pasa por los puntos **$P_1(x_1 , y_1)$** y **$P_2(x_2 , y_2)$**, podemos trazar las rectas paralelas a los ejes que pasan por ellos y del mismo modo para cualquier otro punto **P** de coordenadas (x, y) que esté en la misma recta.



α es el ángulo que forma la recta con el eje positivo x . Es el que determina la inclinación de la recta.
Recordemos que llamamos tangente del ángulo, que se nota $tg(\alpha) = \frac{b}{a}$ que corresponde a la altura sobre la base de un triángulo rectángulo. Este valor es el mismo en cualquier triángulo con el mismo ángulo, entonces:
$tg(\alpha) = \frac{b}{a} = \boldsymbol{\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$

Así quedan determinados dos triángulos rectángulos que se llaman proporcionales, ya que **el cociente o división de sus lados se mantiene constante**.

En el triángulo con vértices en P_1 y P_2 sus lados miden $y_2 - y_1$ y $x_2 - x_1$, el cociente o división de sus lados es $\boldsymbol{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$.

En el triángulo con vértices en P_1 y P sus lados miden $y - y_1$ y $x - x_1$, el cociente o división de sus lados es $\boldsymbol{\frac{y-y_1}{x-x_1}}$, entonces se debe verificar la siguiente ecuación:

1) $\boldsymbol{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}}$ **Esta es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos**

Notemos que x_1 , x_2 , y_1 , y_2 son números, son las coordenadas de dos puntos dados, en cambio x e y , son las coordenadas de un punto cualquiera en la recta.

Operando en esa ecuación llegaremos a otras formas de la ecuación de la recta, pero todas son **equivalentes**.

Multipliquemos a ambos miembros de la ecuación por $x - x_1$ y por $x_2 - x_1$:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

Aplicando propiedad distributiva tenemos que:

$$x.(y_2 - y_1) - x_1.(y_2 - y_1) = y.(x_2 - x_1) - y_1.(x_2 - x_1)$$

Dejando todo del lado izquierdo de la igualdad:

$$x.(y_2 - y_1) - y.(x_2 - x_1) - x_1.(y_2 - y_1) + y_1.(x_2 - x_1) = 0$$

O equivalentemente:

$$x.\underbrace{(y_2 - y_1)}_{A} + y.\underbrace{(-x_2 + x_1)}_{B} + \underbrace{[-x_1.(y_2 - y_1) + y_1.(x_2 - x_1)]}_{C} = 0 \qquad (*)$$

2) **A x + B y + C = 0** que se llama ***ecuación general de la recta***

Donde A, B y C son números.

Si en la ecuación (*) despejamos la variable y , obtenemos:

$$y.\left(-(x_2 - x_1)\right) = x.\left(-(y_2 - y_1)\right) + x_1.(y_2 - y_1) - y_1.(x_2 - x_1)$$

Entonces: $y = \frac{x.\left(-(y_2-y_1)\right)}{\left(-(x_2-x_1)\right)} + \frac{x_1.(y_2-y_1)-y_1.(x_2-x_1)}{\left(-(x_2-x_1)\right)}$

Simplificando: $y = \frac{x.(\,y_2-y_1)}{x_2-x_1} + \frac{x_1.(y_2-y_1)}{\left(-(x_2-x_1)\right)} + y_1$ (**)

donde $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,se llama ***pendiente*** de la recta **L**, y, como se observa en la figura, es igual a la tangente del ángulo α que es el ***ángulo de inclinación de L***

$b = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1$ es la ***ordenada al origen*** de la recta L (la ordenada del punto de la recta que está sobre el eje y), llegando entonces a:

3) $y = mx + b$ **que es la Ecuación de la recta en forma explícita o estándar**

También observando la ecuación (**) podemos escribirla como:

$$y = x\ \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} - x_1 \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} + y_1$$

Restando y_1 a ambos miembros y sacando factor común $\frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}$ queda:

$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ o también:

4) $y - y_1 = m(x - x_1)$ **que es la Ecuación de la recta con pendiente y un punto**

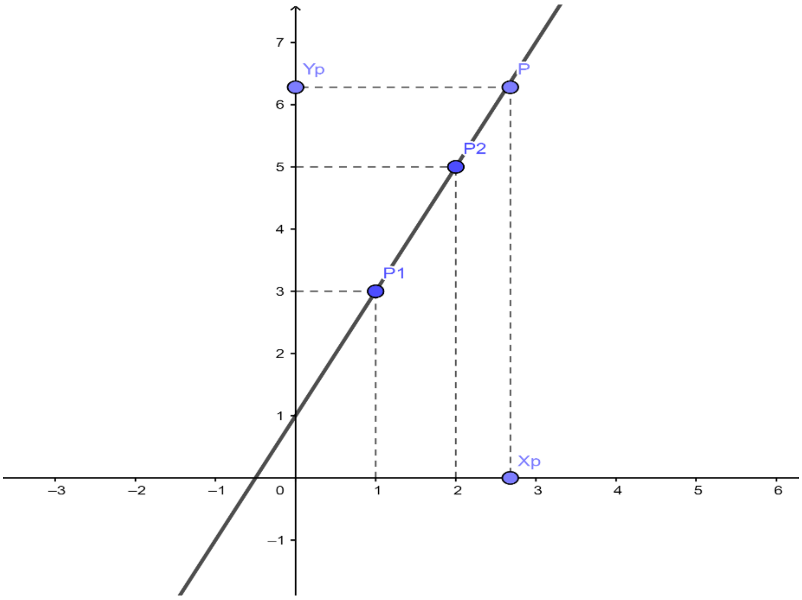
Hemos mostrado entonces 4 ecuaciones de la recta, todas equivalentes ya que todas se obtienen al hacer operaciones sobre otra.

Dada una recta ***L*** del plano es posible entonces encontrar una ecuación lineal *A x + B y + C = 0* que en notación de conjuntos es: *L* = {(x, y): *A x + B y + C = 0* } Recíprocamente, el conjunto de puntos del plano que verifica una ecuación lineal *A x + B y + C = 0* es una recta del plano.

Ejemplo 3.1:

Veamos un ejemplo para obtener las distintas ecuaciones:

Sea L la recta que pasa por $P_1(1,3)$ y $P_2(2,5)$.



Decimos entonces que para cualquier otro punto P de coordenadas (x, y) debe cumplirse que:

1) $\frac{\mathbf{5-3}}{\mathbf{2-1}} = \frac{\boldsymbol{y-3}}{\boldsymbol{x-1}}$ (ecuación de la recta que pasa por dos puntos)

Esta es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, que obtuvimos reemplazando por las coordenadas de los puntos dados.

Operando tenemos $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{y-3}}{\boldsymbol{x-1}}$ y multiplicando a ambos miembros por $x - 1$ tenemos $2(x - 1) = y - 3$ de donde $2x - 2 - y + 3 = 0$, entonces:

2) $2x - y + 1 = 0$ (ecuación general de la recta, donde A=2, B=-1 y C=1)

Si ahora despejamos y, tenemos:

3) $y = 2x + 1$ (ecuación explícita o estándar de la recta, con pendiente 2 y ordenada al origen 1).

Es importante observar que la ordenada al origen que llamamos b, es el valor del punto (0,b) donde la recta corta al eje y.

Si de la ecuación 1) obtenemos $2(x - 1) = y - 3$ también podemos escribirla como:

4) $y - 3 = 2(x - 1)$ (ecuación de la recta con pendiente y un punto)

Nota: Todas son ecuaciones de la recta, no necesitamos hacerlas todas, en el ejercicio estamos mostrando que obteniendo una de ellas cualquiera, las otras se deducen de ahí. En general resultará siempre más cómodo llegar a la forma estándar o explícita para graficar con más facilidad.

Ejemplo 3.2:

Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos (1,2) y (-2,8)

Podemos resolverlo de distintas maneras:

1) Usamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, notando que es indistinto a qué punto llamemos P_1 y a qué punto llamamos P_2.

   Usamos entonces $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$

   Reemplazando queda: $\frac{\mathbf{8-2}}{\mathbf{-2-1}} = \frac{\boldsymbol{y-2}}{\boldsymbol{x-1}}$

   Entonces, multiplicando a ambos miembros por $x-1$: $\frac{6}{-3}(x-1) = y-2$

   Despejando y : $y = -2(x-1)+2$

   Entonces $\boxed{y = -2x+4}$ es la ecuación explícita

   Donde la pendiente es $m = -2$ y la ordenada es $b = 4$

2) Usamos la ecuación explícita de la recta sabiendo que los dos puntos deben satisfacer la ecuación:

   Reemplazamos en la ecuación $y = mx + b$ por los puntos dados:

   $2 = m.1 + b$ y $8 = m(-2) + b$

   De esta forma tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que podemos resolver despejando b de la primera ecuación y reemplazándolo en la segunda:

   $2 - m = b$ entonces $8 = m(-2) + 2 - m$

   De donde $8 = m(-3) + 2$ entonces $\boxed{m = \frac{6}{-3} = -2}$

   Con este valor de m volvemos a la primera ecuación: $2 = (-2).1 + b$

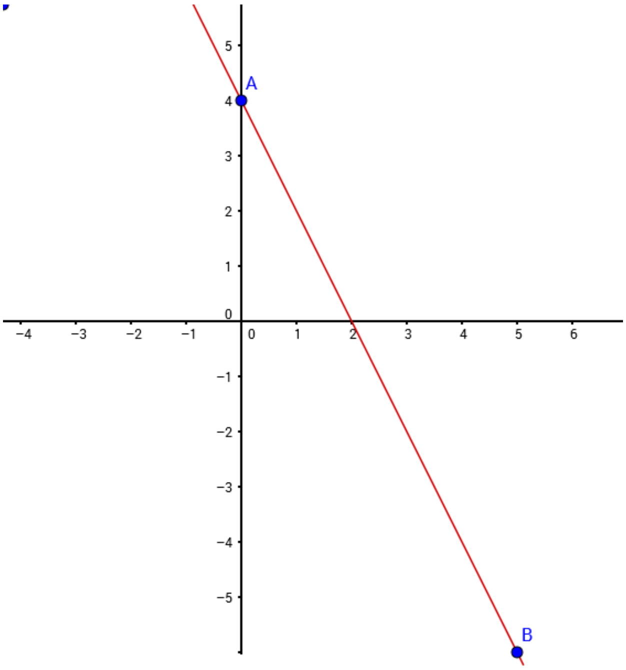
   Obtenemos entonces $\boxed{b = 4}$

   Así nos queda la ecuación explícita: $y = -2x + 4$

Es importante poder representar la recta en el plano coordenado, en este caso tenemos dos puntos de la recta, pero si no nos hubieran dado los puntos y tuviéramos sólo la ecuación, podemos hallar dos puntos para graficar la recta.

Por ejemplo si x toma valor 5, $y = -2.5 + 4 = -6$, es decir que el punto (5,-6) está sobre la recta.

Si x toma valor 0, $y = -2.0 + 4 = 4$, es decir que el punto (0,4) está sobre la recta, cosa que ya sabíamos porque el valor de b es la ordenada al origen, es decir el valor de la ordenada o de la variable y cuando la recta corta al eje y.



Ejercicios:

9. Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos dados:

a) **(2, 5)** y (**4, 3)** b) **(-1, 3)** y **(-2, -3)** c) **(1/2, 0)** y **(-1/2, -2)**

10. Determinar el valor de ***k*** para el cual los puntos **(-1,2)**, **(3, 1)** y **(2, -*k* +1)** están alineados.

11. Hallar la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes rectas y representarlas gráficamente.

a) **L**: $5x + y - 3 = 0$ b) **S**: $4x - 3y = 6$

c) **M:** $3x - 6 = 0$ d) **H:** $y + 2 = 0$

12. Escribir la ecuación explícita de la recta que:

a) tiene pendiente –2 y pasa por el origen de coordenadas.

b) tiene pendiente –2 y pasa por (-2, -3)

Dos rectas L y L’ del plano pueden ser: ***transversales*** (se cortan en un punto), ***paralelas*** *(no se cortan)* o ***coincidentes*** (L = L’)

Cada recta tiene una ecuación lineal: **L:** ***y = mx + b***

L': ***y = m'x + b'***

Los puntos de intersección, si existen, deben verificar ambas ecuaciones, es decir, deben ser solución del sistema lineal:

$$\begin{cases} y = mx + b \\ y = m'x + b' \end{cases}$$

- Las rectas son **transversales** si y sólo si dicho sistema lineal admite una única solución.
- Las rectas son **paralelas** si y sólo si dicho sistema lineal no tiene solución.
- Las rectas son **coincidentes** si y sólo si dicho sistema lineal admite infinitas soluciones (ambas ecuaciones son equivalentes)

(1) Las rectas paralelas pueden ser además coincidentes o ser paralelas y distintas.

L y L' son paralelas si y sólo si *m = m'*

Si además *b ≠ b' son paralelas* y distintas.

Si b = b', L y L' son coincidentes

(2) Las rectas transversales se cortan en un punto, si además se cortan formando un ángulo recto o de 90° son perpendiculares.

L y L' son perpendiculares si y sólo si *m.m'= -1*

Ejemplo 3.3:

Analizar si las siguientes rectas son paralelas, transversales o coincidentes, en caso de ser transversales determinar si son o no perpendiculares y hallar el punto de intersección. Graficar ambas rectas:

$$\begin{cases} 2x + 1 + y = 0 \\ x - 5 - y = 0 \end{cases}$$

Comenzamos llevando las ecuaciones a su forma estándar o explícita:

L: $2x + 1 + y = 0$ entonces L: $y = -2x - 1$

L': $x - 5 - y = 0$ entonces L': $y = x - 5$

Observamos las pendientes: $m = -2$ y $m' = 1$, como son distintas esto nos dice que las rectas no son paralelas ni coincidentes, por lo tanto serán **transversales.**

Para saber si son perpendiculares multiplicamos: $m.m' = -2.1 = -2$, por lo tanto no son perpendiculares.

Para hallar la intersección debemos hallar el valor de x y de y que satisfagan las dos ecuaciones a la vez. Asumimos entonces que el valor de y debe ser el mismo, entonces:

$$-2x - 1 = x - 5$$

Esto es lo que llamamos método de igualación, lo hacemos con la variable y pero lo podríamos haber hecho con x , es indistinto.

Ahora resolvemos la ecuación:

Sumamos a ambos miembros $-x$

$$-2x - x - 1 = -5$$

Sumamos a ambos miembros 1

$$-2x - x = -5 + 1$$

$$-3x = -4$$

$$x = \frac{-4}{-3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Este valor de x lo reemplazamos en cualquiera de las dos rectas para obtener el valor de y, si elegimos por ejemplo la recta L: $y = -2\frac{4}{3} - 1 = -\frac{8}{3} - 1$

Entonces: $y = -\frac{8}{3} - 1 = \frac{-8-3}{3} = -\frac{11}{3}$

Esto nos dice que el punto de intersección es $(\frac{4}{3}, -\frac{11}{3})$

Grafiquemos ahora las rectas:

Para graficarlas podemos buscar dos puntos en cada una, en particular ya sabemos que el punto $(\frac{4}{3}, -\frac{11}{3})$ está en las dos rectas.

También conocemos la ordenada al origen de cada una de ellas.

Para la recta L la ordenada al origen es -1, esto nos dice que el punto (0,-1) pertenece a L.

Para la recta L' la ordenada al origen es -5, esto nos dice que el punto (0,-5) pertenece a L'.

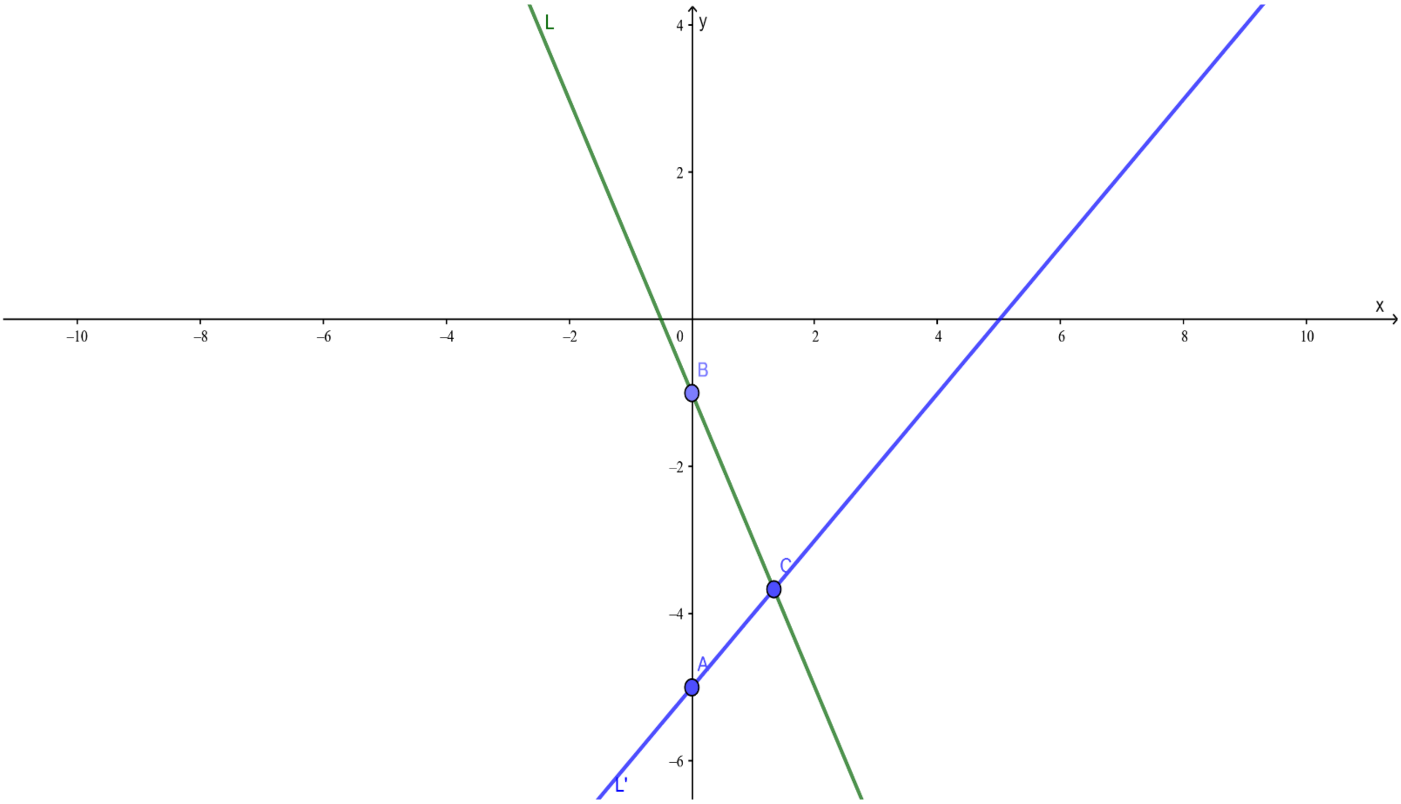
Ya tenemos dos puntos en cada una.

Si no tuviéramos el punto de corte, ¿cómo buscamos otro punto en la recta?

La recta L tiene ecuación: $y = -2x - 1$ podemos entonces darle un valor cualquiera a x , por ejemplo -1 y reemplazarlo : $y = -2(-1) - 1 = 2 - 1 = 1$

Sabemos entonces que el punto (-1,1) también pertenece a L.

Usamos entonces los puntos hallados:



Ejemplo 3.4:

Hallar la ecuación explícita de una recta paralela a la recta $2x + 1 + y = 0$ que pase por el punto (3,4).

Llevamos primero la ecuación de la recta dad a la forma explícita despejando y:

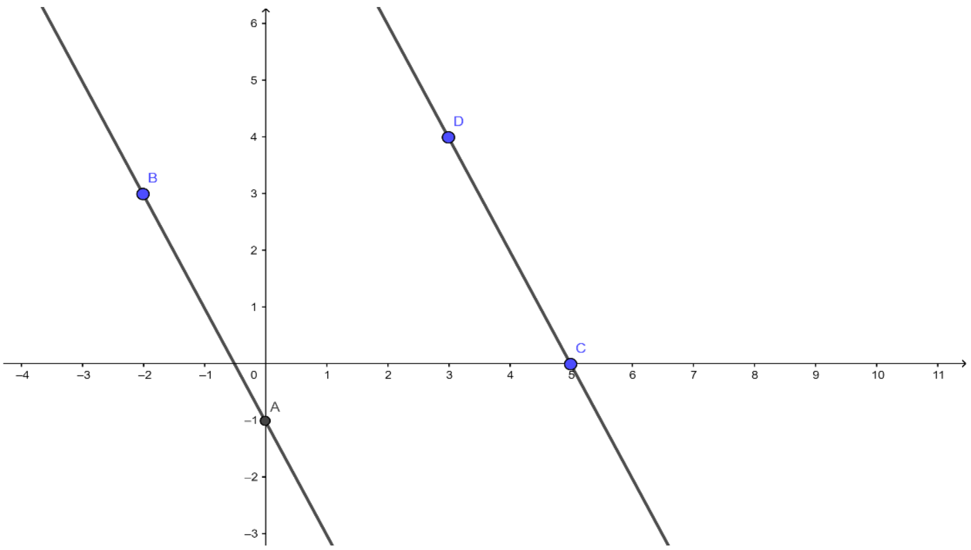
$y = -2x - 1$

Tenemos entonces que la pendiente es -2, entonces la recta que estamos buscando tiene que tener la misma pendiente y tendrá ecuación: $y = -2x + b$

Para hallar b usamos el punto que nos dan. Ese punto debe satisfacer la ecuación, entonces: $4 = -2.3 + b$ entonces $4 + 6 = b$ así tenemos $b = 10$

Entonces la recta es $y = -2x + 10$

Para graficarlas podemos hallar dos puntos en cada una, por ejemplo los puntos A (0,-1) y B (-2,3) están en la recta dada y los puntos C (5,0) y D (3,4) están en la recta hallada.



Ejercicios

13. a) Hallar la ecuación explícita de la recta L que tiene pendiente $\frac{3}{5}$ y pasa por P(12, 5).

b) Hallar una paralela a L que pase por Q (3,12)

c) Hallar una perpendicular a L que pase por T (3,6)

14. a) Hallar la ecuación explícita de la recta L que tiene pendiente $-\frac{5}{12}$ y pasa por P(9, 6)

b) Hallar una paralela a L que pase por Q (-5,1)

c) Hallar una perpendicular a L que pase por T (-8,4)

15. a) Hallar la ecuación explícita de la recta L que pasa por los puntos P (-1, 5) y Q (5,9).

b) Hallar una perpendicular a L que pase por S (-8,5).

c) Hallar una paralela a L que pase por Q (-9,15)

16. a) Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por P(-1, 1/3) y es paralela a la recta de ecuación $-x + 2y - 1 = 0$

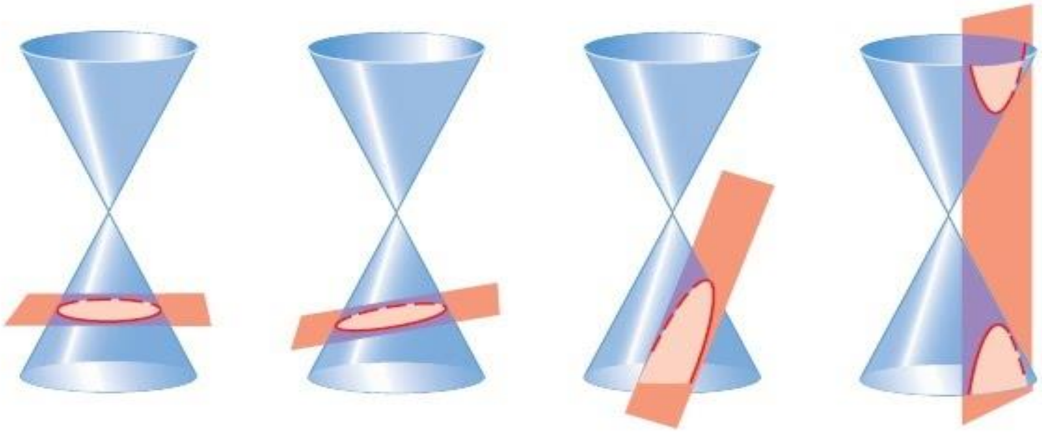
b) Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por P (2, -1/2) y es perpendicular a la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$

17. Hallar las pendientes de las siguientes rectas y expresarlas por sus ecuaciones explícitas. Para cada una de ellas hallar una recta paralela y una perpendicular que pasen por el origen: L : $3x - 2y + 6 = 0$; S: $2x + y = 6$; T : $6y - x - 2 = 0$

18. Decida si los siguientes pares de rectas son transversales, paralelas o coincidentes y determine, cuando corresponda, las coordenadas del punto en el que se cortan.

a) $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -6x + 3y = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 8y = -12 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

Estudiaremos a continuación las ecuaciones de dos **cónicas**: la **circunferencia** y la **parábola**. Se llaman cónicas porque resultan de la intersección de un plano con un cono circular como muestra la figura. Existen también otras cónicas como la elipse y la hipérbola que no estudiaremos en este curso.



Círculo Elipse Parábola Hipérbola

4. Circunferencia

Una **circunferencia** es el conjunto de puntos P(x,y) del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. La distancia entre cualquier punto de la circunferencia y el centro se llama **radio**. Es decir que **todos** los puntos que están sobre la curva que llamamos circunferencia, están a la misma distancia del centro.

Si llamamos C(α,β) al centro, r al radio y P(x,y) a un punto genérico de la circunferencia, por definición debe ser: *d(P,C) = r (distancia del punto P al punto C igual a r)*

Aplicando la fórmula de distancia: $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = r$

Y elevando ambos miembros al cuadrado queda: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

La ecuación $\boldsymbol{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$ es la **ecuación estándar o canónica** de la circunferencia con centro C(α,β) y radio *r*.

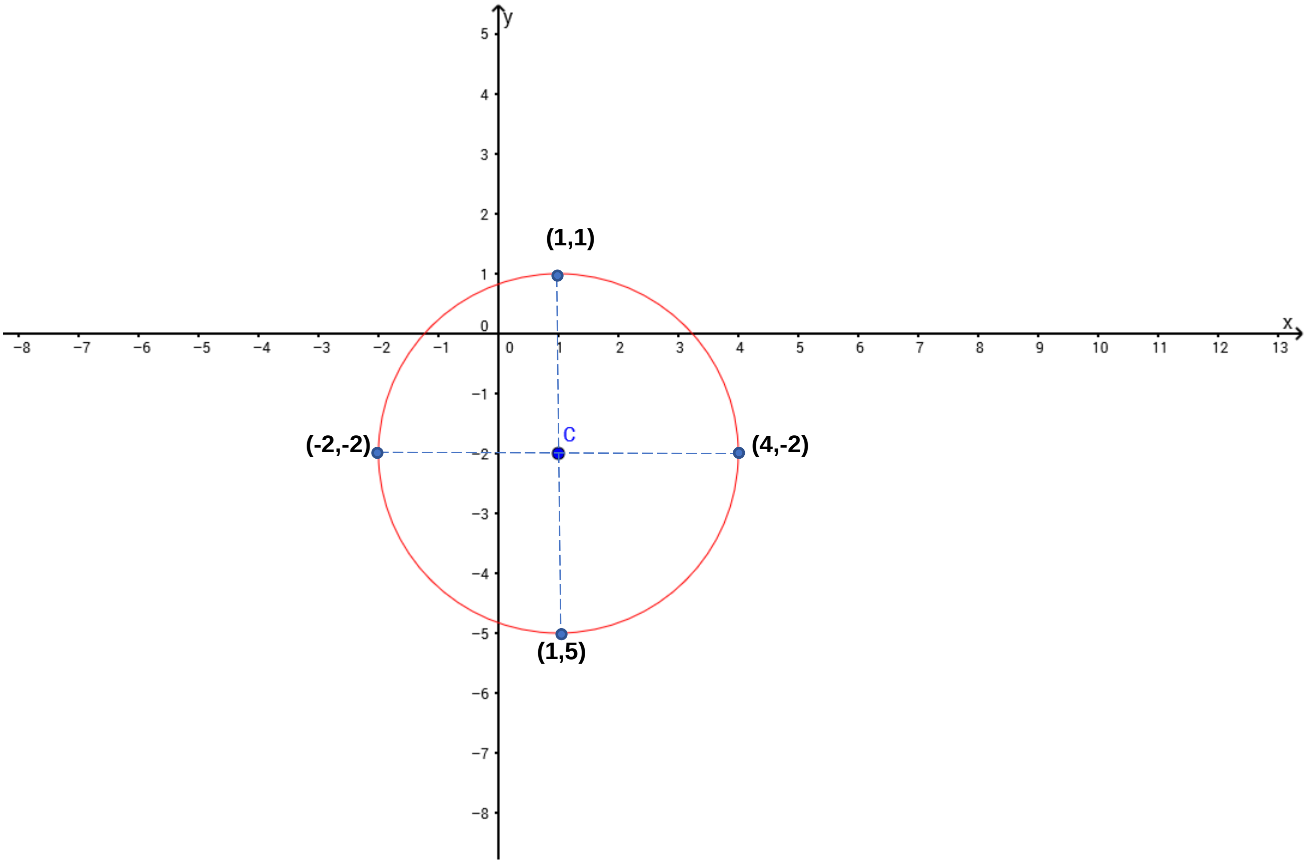
Ejemplo 4.1:

Hallar centro y radio y graficar la circunferencia dada por: $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

El centro de la circunferencia está en (1,-2) y el radio es 3.

Para graficarla podemos darle valores a x o a y y despejar la otra variable, pero al ser una ecuación cuadrática es más fácil hallar los puntos de la circunferencia que están sobre las rectas que pasan por el centro.

En este caso el centro es (1,-2) entonces la recta $y=-2$ pasa por el centro, si nos desplazamos 3 unidades hacia la derecha y 3 a la izquierda hallaremos los puntos de la circunferencia. De igual modo, la recta $x=1$ pasa por el centro, si nos desplazamos 3 unidades hacia arriba y 3 hacia abajo hallaremos puntos de la circunferencia.



Ejemplo 4.2:

Hallar la ecuación explícita de la circunferencia con centro en (1,4) y que pasa por el punto $(2, \sqrt{3}+4)$

Como tenemos el centro, sabemos que la ecuación debe ser: $\boldsymbol{(x-1)^2+(y-4)^2=r^2}$

Nos falta hallar el radio, para eso usaremos el punto dado, ya que debe satisfacer la ecuación de la circunferencia:

$$(2-1)^2+(\sqrt{3}+4-4)^2=r^2$$

Entonces:

$$(1)^2+(\sqrt{3})^2=r^2$$

Elevando al cuadrado tenemos: $1+3=r^2$

Por lo tanto $r^2=4$, entonces el radio es 2.

La ecuación es: $\boldsymbol{(x-1)^2+(y-4)^2=4}$

Completación de cuadrados

Si en la ecuación estándar se desarrollan los cuadrados de ambos binomios: $(x-\alpha)^2$ y $(y-\beta)^2$, y se multiplica todo por un número real no nulo, la ecuación tiene otro aspecto:

Dada: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

Tendríamos: $h(x^2-2x\alpha+\alpha^2+y^2-2y\beta+\beta^2)=hr^2$

$$hx^2-h2x\alpha+h\alpha^2+hy^2-h2y\beta+h\beta^2=hr^2$$

Si $(\alpha,\beta)=(2{,}3)$ y $r=2$, la ecuación explícita sería: $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

Desarrollando y multiplicando por h =3: $3x^2-3.2x2+3.2^2+3y^2-3.2y3+3.3^2=3.4$

Agrupando: $3x^2-12x+3y^2-18y+27=0$

Esta última ecuación es equivalente a la dada, pero acá no están a la vista centro y radio, por eso será importante poder recuperar la información a partir de esta ecuación.

Interesa tanto en la circunferencia como en cualquier cónica, que estén expresadas por su ecuación estándar porque a partir de ella se pueden obtener los elementos (centro y radio en la circunferencia, vértice, foco, eje focal y directriz en la parábola).

Cuando la ecuación no está en forma estándar o canónica el método de completación de cuadrados permite llevarla a esa forma.

Ejemplo 4.3:

Veamos cómo podemos recuperar la ecuación estándar a partir de la ecuación que obtuvimos:

$$3x^2 - 12x + 3y^2 - 18y + 27 = 0$$

Lo primero que vemos es que las variables al cuadrado están multiplicadas por un número que no es 1 y ambas están multiplicadas por 3, entonces comenzamos dividiendo toda la ecuación por 3:

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$$

Ahora completaremos cuadrados.

Para hacerlo la compararemos con la ecuación desarrollada:

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$: $$x^2 \boxed{-\,2x\alpha} + \alpha^2 + y^2 \boxed{-\,2y\beta} + \beta^2 = r^2$$

$x^2 - 4x + y^2 - 6y = -9$: $$x^2 \boxed{-\,4x} + \alpha^2 + y^2 \boxed{-\,6y} + \beta^2 = -9 + \alpha^2 + \beta^2$$

Sumamos a ambos lados de la igualdad para no alterar la ecuación

Si comparamos cada término de la primer ecuación con la segunda, nos faltarían los números α^2 y β^2.

Como el número que acompaña a x en la primera ecuación es -2α, y en la segunda es -4, -2α debe ser igual a -4, de donde $-2\alpha = -4$ entonces $\alpha = 2$.

Esto nos dice que deberíamos sumar 2^2 para que la expresión $x^2 - 4x + 2^2 = (x-2)^2$, pero si sumamos un término de un lado de la igualdad alteraríamos la ecuación, por lo tanto debemos sumar el valor de α^2 a ambos miembros.

Del mismo modo, el número que acompaña a y en la primera ecuación es -2β, y en la segunda es -6, por lo tanto $-2\beta = -6$, entonces $\beta = 3$.

Esto nos dice que deberíamos sumar 3^2 para que la expresión $y^2 - 6y + 3^2 = (y-3)^2$, pero nuevamente, el valor de β^2 debemos sumarlo a ambos miembros.

Tenemos entonces:

$$\underbrace{x^2 - 4x + 2^2}_{\downarrow} + \underbrace{y^2 - 6y + 3^2}_{\downarrow} = \underbrace{-9 + 2^2 + 3^2}_{\downarrow}$$

Que resulta ser: $\quad (x-2)^2 \quad + \quad (y-3)^2 \quad = \quad 4$

Ejemplo 4.4:

Llevar a la forma estándar la siguiente ecuación:

$$2x^2 - 12x + 2y^2 + 20y + 50 = 0$$

Observemos que x^2 e y^2 están multiplicados por un número distinto de 1, por lo tanto comenzamos por dividir toda la ecuación por 2:

$$x^2 - 6x + y^2 + 10y + 25 = 0$$

Compararemos con la ecuación desarrollada:

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$: $\qquad x^2 \boxed{-2x\alpha} + \alpha^2 + y^2 \boxed{-2y\beta} + \beta^2 = r^2$

$x^2 - 6x + y^2 + 10y = -25$: $\qquad x^2 \boxed{-6x} + \alpha^2 + y^2 \boxed{+10y} + \beta^2 = -25 + \alpha^2 + \beta^2$

Como el número que acompaña a x en la primera ecuación es -2α, y en la segunda es -6, -2α debe ser igual a -6, de donde $-2\alpha = -6$ entonces $\alpha = 3$.

Esto nos dice que deberíamos sumar 3^2 a ambos miembros.

Del mismo modo, el número que acompaña a y en la primera ecuación es -2β, y en la segunda es 10, por lo tanto $-2\beta = 10$, entonces $\beta = -5$.

Esto nos dice que deberíamos sumar $(-5)^2$ a ambos miembros.

Tenemos entonces:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 3^2}_{\downarrow} + \underbrace{y^2 + 10y + (-5)^2}_{\downarrow} = \underbrace{-25 + 3^2 + (-5)^2}_{\downarrow}$$

Que resulta ser: $\quad (x-3)^2 \quad + \quad (y+5)^2 \quad = \quad 9$

Ejemplo 4.5:

Hallar la intersección entre la circunferencia $(x-3)^2+(y+1)^2=9$ y la recta

$y-x+1=0$

Si queremos hallar la intersección entre una circunferencia y una recta podemos usar también el método de igualación, porque otra vez se trata de hallar el o los valores de x y de y que satisfagan las dos ecuaciones a la vez.

Observar que en este caso la recta puede cortar en un único punto a la circunferencia, en dos o no cortarla.

Llevando la ecuación de la recta a la forma explícita tenemos: $y=x-1$

Reemplazamos el valor de y en la ecuación de la circunferencia:

$$(x-3)^2+(x-1+1)^2=9$$

Desarrollamos los cuadrados: $x^2-6x+9+x^2=9$

Agrupando y restando 9 a ambos miembros: $2x^2-6x=0$ (1)

Podemos resolver esta ecuación cuadrática aplicando la fórmula de Bahascara:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, entonces $x=\frac{6\pm\sqrt{36-4.2.0}}{2.2}=\frac{6\pm\sqrt{36}}{4}=\frac{6\pm6}{4}$

Tenemos entonces dos valores para x, $x_1=0$ y $x_2=3$

Esto nos dice que habrá dos puntos de corte.

También podríamos haber sacado factor común en la ecuación (1): $2x(x-3)=0$

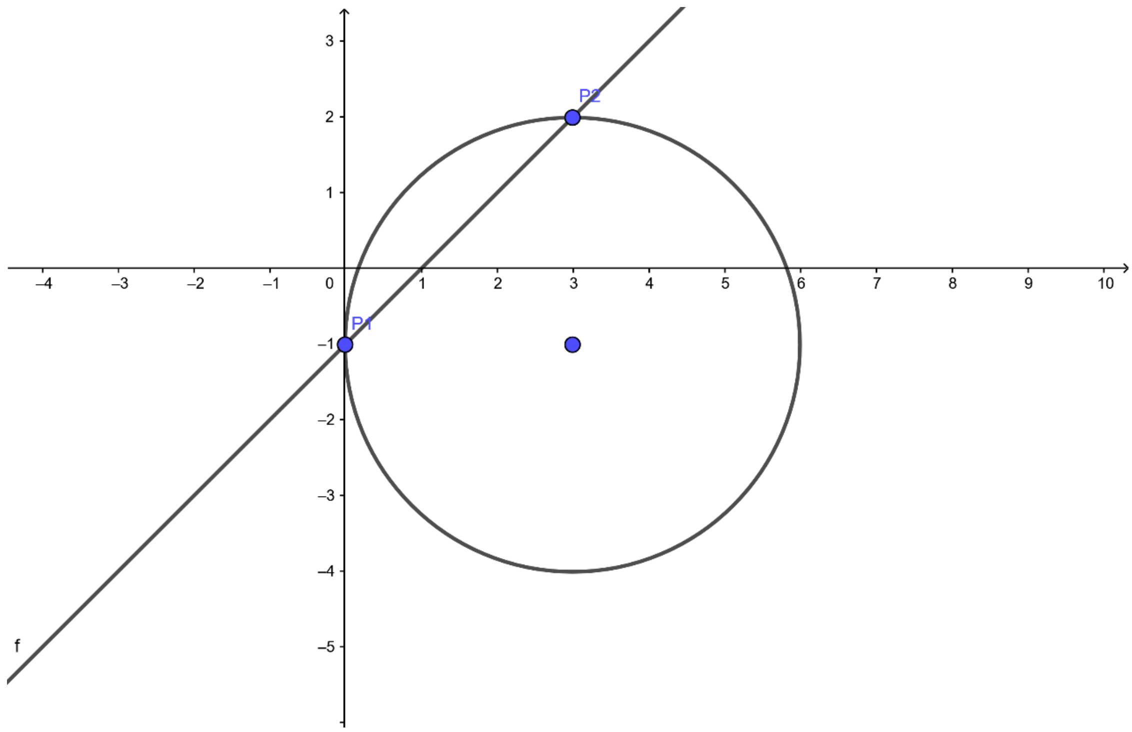
Entonces para que ese producto sea 0: $2x=0$ o $x-3=0$

Tenemos entonces dos valores para x, $x_1=0$ y $x_2=3$, igual que antes.

Reemplazamos estos valores en la ecuación de la recta y tenemos:

$y_1=0-1=-1$ y $y_2=3-1=2$

Por lo tanto los puntos de corte o intersección son: P1(0,-1) y P2(3,2) como se ve en el gráfico:



Ejercicios

19. a) Escribir la ecuación estándar de la circunferencia de centro C(-3, 4) y radio $3^{1/2}$. Graficar.

b) Escribir la ecuación estándar de la circunferencia de centro C(-2, 5) y que pasa por el punto de coordenadas (1,2). Graficar.

20. Hallar las ecuaciones estándar de las siguientes circunferencias con centro P y que pasa por Q, y con centro Q que pasa por P:

a) P(2, 5), Q(4, 3) b) P(-1, 3), Q(-2, -3) c) P(1/2, 0), Q(-1/2, -2)

21. Analizar si las siguientes ecuaciones corresponden o no a una circunferencia indicando, en caso afirmativo, los elementos de la misma y graficar:

a) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x = 1$

c) $3x^2 + 3y^2 + 9x - 3y + 21 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 3x - 5y - \frac{1}{2} = 0$

22. Llevar la ecuación $6x^2 + 6y^2 - 12x + 12y - 6 = 0$ a la forma estándar e indicar sus elementos. Graficar.

23. a) Hallar la intersección de la circunferencia del Ejercicio anterior con el eje x.

b) Hallar la intersección de dicha circunferencia con el eje y.

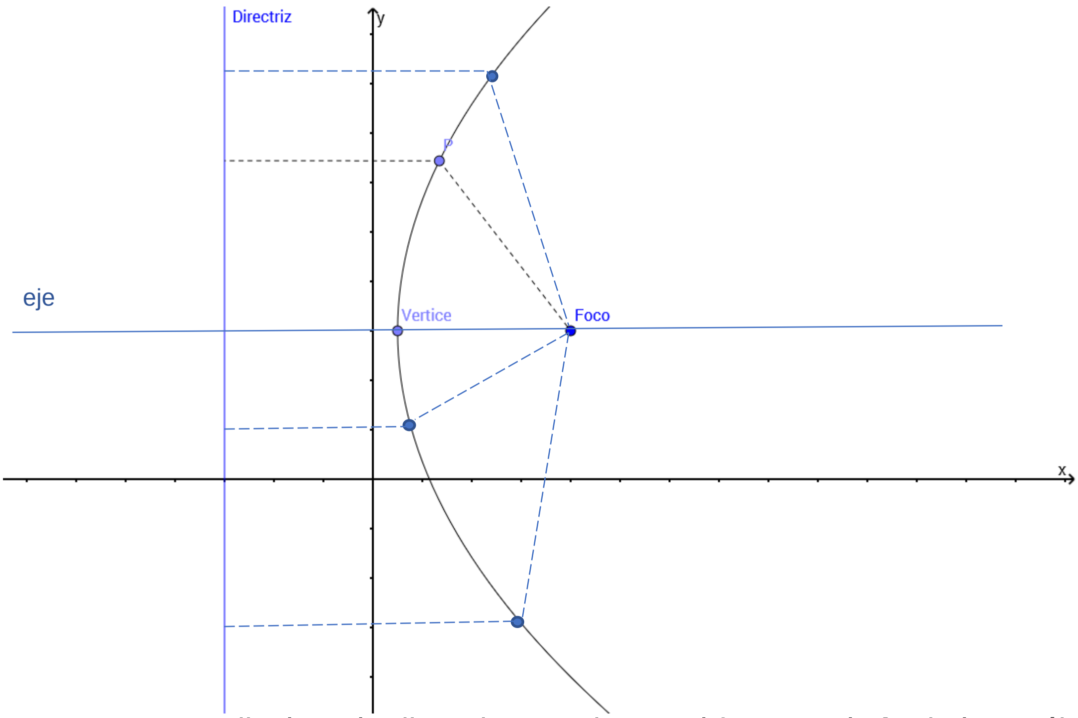
c) Hallar la intersección de dicha circunferencia con la recta de ecuación $y = x - 1$

---

5. Parábola

Una ***parábola*** es el conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado ***foco*** y de una recta fija que no contiene al foco llamada ***directriz*.**

En este curso estudiaremos parábolas cuya directriz es una recta vertical u horizontal.



La recta perpendicular a la directriz trazada por el foco es el **eje** de la parábola.

El ***vértice*** es el punto en el que se cortan la parábola y el eje.

El **vértice** es un punto de la parábola, por lo tanto su distancia al Foco es igual a su distancia a la Directriz.

En el siguiente gráfico elegimos un punto cualquiera al que llamamos **Foco** y una recta vertical a la que llamamos **Directriz**.

El punto medio entre la directriz y el foco es el **vértice** de la parábola.

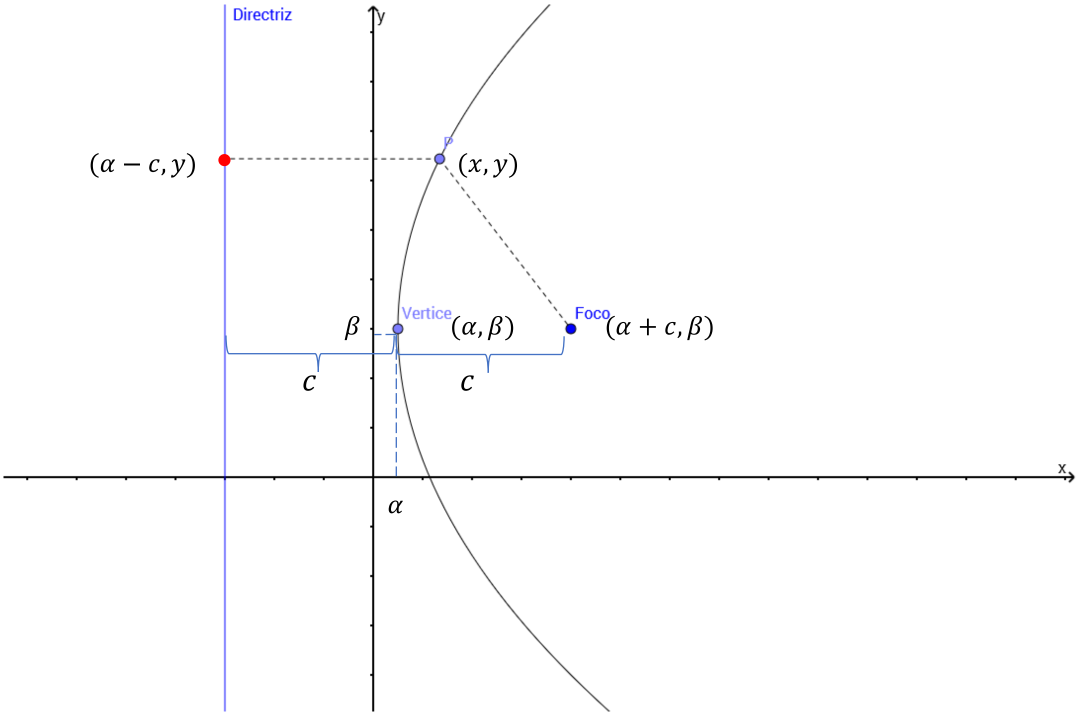
Llamemos c a la distancia del Vértice al Foco y del Vértice a la Directriz.

Llamemos (α, β) a las coordenadas del vértice, entonces el Foco tiene coordenadas

$(\alpha + c, \beta)$.

Así definido la directriz tiene ecuación $x = \alpha - c$

Dado un punto $P(x, y)$ que está en la parábola, el punto que está en la directriz y se encuentra a menor distancia de P es el punto de coordenadas $(\alpha - c, y)$



De esta forma, de acuerdo a la definición, como la distancia de P al foco debe ser igual a la distancia de P a la directriz, tenemos: $d(P, F) = d(P, D)$

Reemplazando por las coordenadas: $d((x, y), (\alpha + c, \beta)) = d((x, y), (\alpha - c, y))$

Aplicando la fórmula de distancia:

$$\sqrt{(x - (\alpha + c))^2 + (y - \beta)^2} = \sqrt{(x - (\alpha - c))^2 + (y - y)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x - (\alpha + c))^2 + (y - \beta)^2 = (x - (\alpha - c))^2$$

Desarrollaremos los cuadrados en los que aparece x:

$$x^2 - 2x(\alpha + c) + (\alpha + c)^2 + (y - \beta)^2 = x^2 - 2x(\alpha - c) + (\alpha - c)^2$$

Cancelamos el término repetido a ambos miembros x^2 , aplicamos propiedad distributiva y volvemos a desarrollar los cuadrados:

$$-2x\alpha - 2xc + \alpha^2 + 2\alpha c + c^2 + (y-\beta)^2 = -2x\alpha + 2xc + \alpha^2 - 2\alpha c + c^2$$

Cancelamos nuevamente los términos repetidos a ambos miembros y con el mismo signo:

$$-2xc + 2\alpha c + (y-\beta)^2 = 2xc - 2\alpha c$$

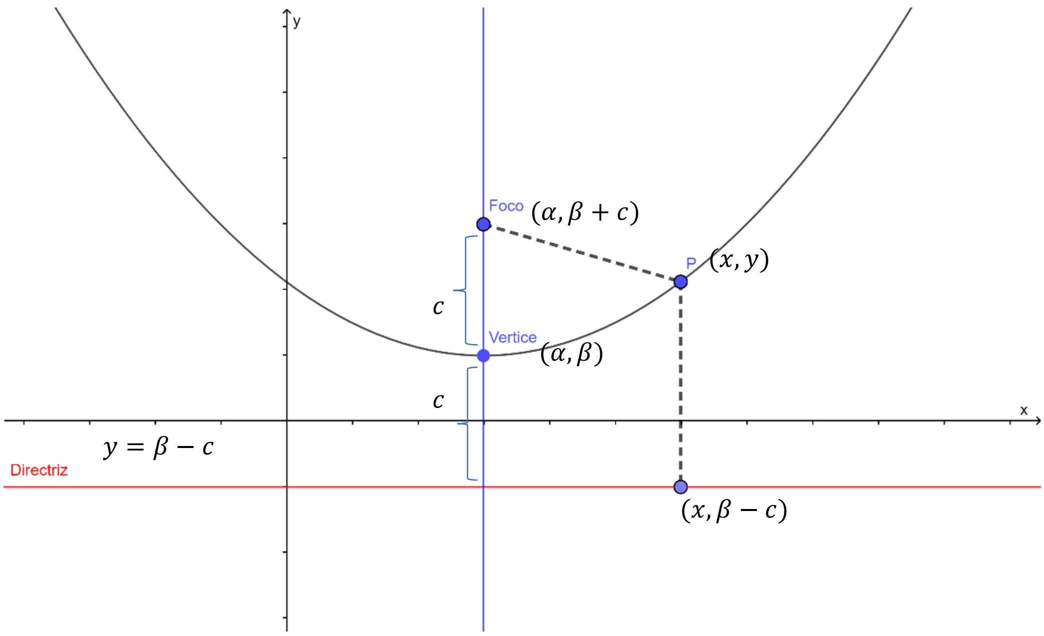
Despejando: $(y-\beta)^2 = 2xc - 2\alpha c + 2xc - 2\alpha c = 4xc - 4\alpha c = 4c(x-\alpha)$

Tenemos entonces la que llamamos

Ecuación explícita o estándar de la parábola con eje focal paralelo al eje x, distancia focal valor absoluto de c y vértice en (α, β):

$$(y-\beta)^2 = 4c(x-\alpha)$$

Si elegimos un punto como foco y en lugar de elegir como directriz una recta vertical eligiéramos una recta horizontal, las coordenadas de los puntos cambian:



Operando como antes, se invierten los papeles de x e y y se tiene:

Ecuación explícita o estándar de la parábola con eje focal paralelo al eje y, distancia focal valor absoluto de c y vértice en (α, β):

$$(x-\alpha)^2 = 4c(y-\beta)$$

Observación: el valor de c podría ser negativo, por eso decimos que la distancia de un punto cualquiera al foco y a la directriz es valor absoluto de c , ya que la distancia es un número positivo.

Si la parábola tiene eje paralelo al eje x y el signo de c es positivo, es cóncava hacia la derecha, si el signo de c es negativo, es cóncava hacia la izquierda.

Si la parábola tiene eje paralelo al eje y y el signo de c es positivo, es cóncava hacia la arriba, si el signo de c es negativo, es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 5.1:

Hallar los elementos y gráfica de $(y-1)^2 = -8\ (x-3)$

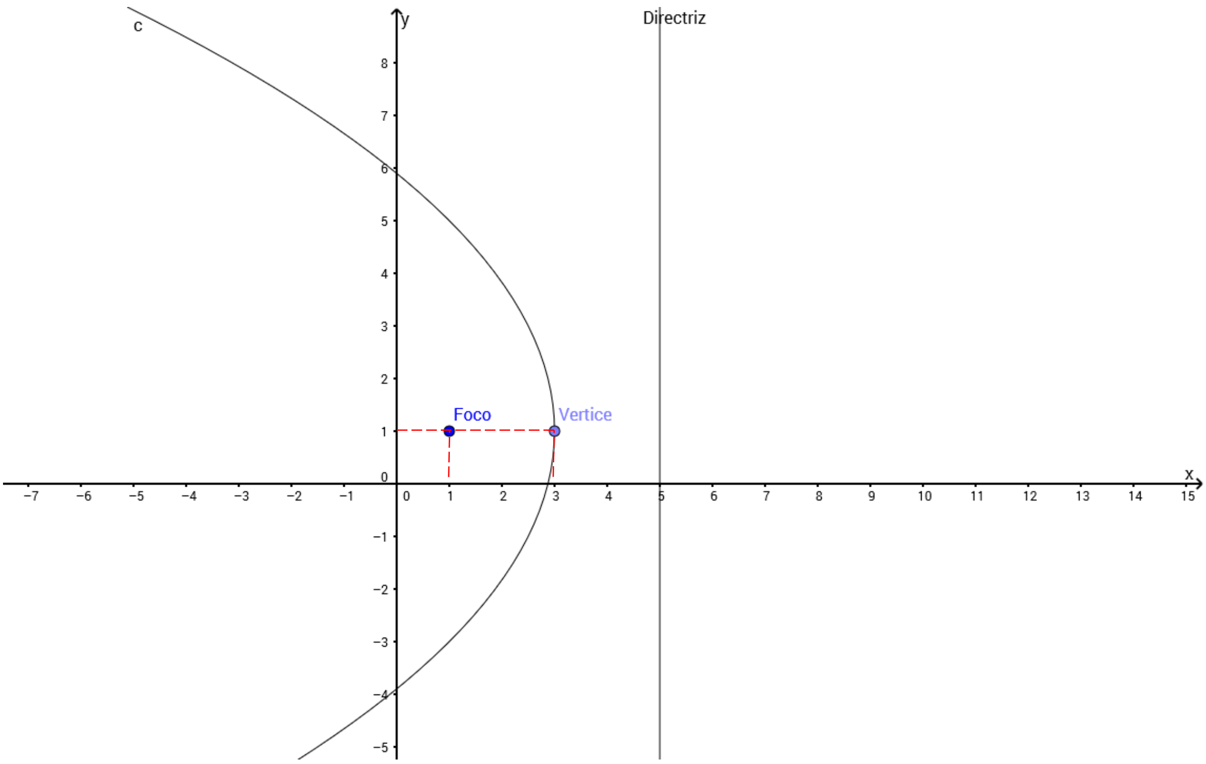
$$(y-\beta)^2 = 4c\ (x-\alpha)$$

Comparando la ecuación con la ecuación estándar, tenemos que el vértice es $(\alpha, \beta) = (3{,}1)$

El valor de $4c = -8$, entonces $c = -2$

Esto nos dice que la distancia focal es 2.

Sabemos también que la parábola tiene eje paralelo al eje x, graficamos para obtener las coordenadas del Foco y la ecuación de la directriz:



Trasladándonos 2 unidades a la izquierda del vértice estará el foco, que tiene coordenadas (1,1) y dos unidades a la derecha estará la directriz, que tiene ecuación x=5.

Ejemplo 5.2:

Hallar la ecuación estándar, elementos y gráfico de la parábola con vértice en (0,-1) y foco en (0,2).

Como el vértice y el foco están sobre la recta x =0, sabemos que es una parábola con eje paralelo al eje y, en este caso es el eje y, por lo tanto la ecuación que debemos usar es:

$$(x-\alpha)^2 = 4c(y-\beta)$$

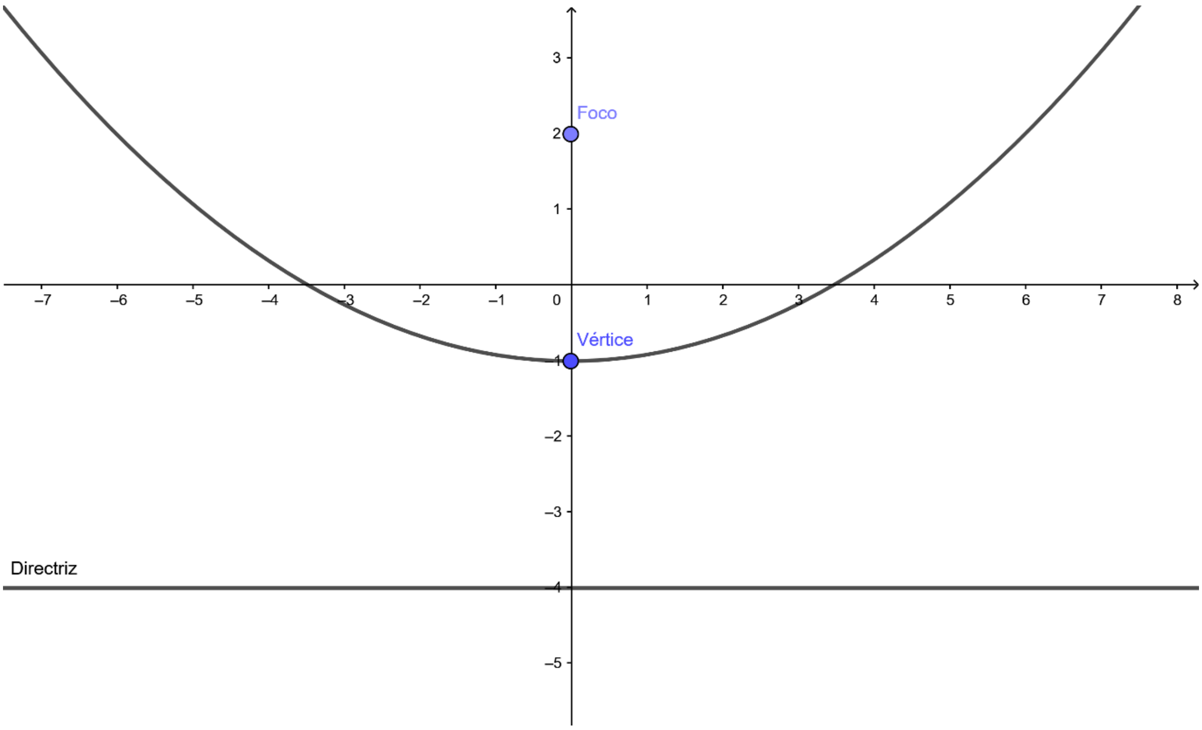
Sabemos las coordenadas del vértice, por lo tanto, reemplazando en la ecuación:

$$x^2 = 4c(y+1)$$

Nos falta hallar c , pero como el foco está en (0,2), está a distancia 3 del vértice, por lo tanto c =3, tenemos entonces la ecuación:

$$x^2 = 12(y+1)$$

Como c =3 , la directriz estará a distancia 3 del vértice y es una recta paralela al eje x, por lo tanto su ecuación es $y=-4$.



Completetación de cuadrados

En el caso de la parábola también podemos observar que si desarrollamos el cuadrado del binomio la ecuación tiene otro aspecto:

$$x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 = 4cy - 4c\beta \quad \text{o}$$

$$y^2 - 2y\beta + \beta^2 = 4cx - 4c\alpha$$

En estos casos tendremos que llevar la ecuación a la forma estándar para poder hallar sus elementos y graficar.

Ejemplo 5.3:

Hallar la forma estándar de la parábola dada por: $y^2 - 4y - 16x + 20 = 0$

Como y es la variable que está elevada al cuadrado, dejamos los términos con y de un lado de la igualdad:

$$y^2 - 4y = 16x - 20$$

Ahora comparamos con la ecuación desarrollada:

$y^2 - 2y\beta + \beta^2 = 4cx - 4c\alpha$: $\qquad y^2 - 2y\beta + \beta^2 = 4cx - 4c\alpha$

$y^2 - 4y = 16x - 20$: $\qquad y^2 - 4y + \beta^2 = 16x - 20 + \beta^2$

Igualamos para despejar β , $-2\beta = -4$ entonces $\beta = 2$

Sumamos a ambos miembros β^2:

$$y^2 - 4y + 2^2 = 16x - 20 + 2^2$$

Tenemos entonces:

$$(y-2)^2 = 16x - 16$$

Sacando factor común:

$$(y-2)^2 = 16(x-1)$$

Que es la ecuación estándar de una parábola de eje paralelo al eje x, con vértice en (1,2) y distancia focal 4.

Ejercicios

24. Escriba la ecuación canónica de las parábolas:

a) con foco F = (0, 6) y directriz $y + 6 = 0$

b) con vértice en el origen y foco en (-4,0)

c) con vértice en (3,2) y foco (5,2)

d) con vértice en (0,0) y que contiene a los puntos (2,-3) y (-2,-3)

25. Graficar y dar los elementos de las parábolas definidas por las siguientes ecuaciones:

a) $3y^2 = 8x$ b) $y^2 = -12x$

c) $x^2 = 4(y + 1)$ d) $(y - 3)^2 = -20(x + 2)$

26. Encontrar la ecuación estándar y los elementos de las parábolas:

a) $2x^2 + 12x + 8y + 10 = 0$

b) $3y^2 + 18y - 24x = 93$

c) $y = x^2 + 6x + 10$

27. a) Hallar la ecuación estándar de la parábola con vértice V(1,3), eje focal paralelo al eje *x* y que pasa por el punto P(6, 13). Graficar y dar los restantes elementos.

b) Hallar una ecuación de una recta vertical que corte a la parábola. Dar el punto de corte.

c) Hallar la ecuación estándar de la parábola con vértice V(-5,1), eje focal paralelo al eje *y* y que pasa por el punto P(1, 0). Graficar y dar los restantes elementos.

d) Hallar una ecuación de una recta horizontal que corte a la parábola. Dar el punto de corte.

28. a) Hallar las ecuaciones estándar de las parábolas con vértice V(3,2) y foco F(7,2), y otra con vértice V(7,2) y foco F(3,2).

b) Hallar las ecuaciones estándar de las parábolas con vértice V(-3,3) y foco F(-3,-1), y otra con vértice V(-3,-1) y foco F(-3,3).

---

6. Anexo: Aplicaciones

La geometría tiene múltiples aplicaciones, sin duda, la idea de un sistema de ejes coordenados como referencia a las mediciones de todo tipo de situaciones en 2 dimensiones es de gran utilidad.

Mencionaremos sólo dos ejemplos de aplicación, pero hay abundante bibliografía al respecto.

1) Programación lineal:

Muchos problemas de negocios y comerciales requieren de soluciones que den la mayor efectividad a menor costo. Cuando expresamos las relaciones de fabricación y costos como ecuaciones lineales y como desigualdades lineales, estamos en presencia de un problema de programación lineal.

Los problemas típicos de programación lineal tienen varias variables y son tan extensos que suelen resolverse en computadora con el algoritmo del llamado Método Simplex. Este método fue desarrollado en la década del 40 por George Dantzing. No vamos a desarrollar este método pero daremos una pequeña introducción de cómo funciona con unos ejemplos.

a) Una empresa fabrica 2 tipos de sillas, de pino y de algarrobo. Cada una lleva un tiempo de armado y un tiempo para hacer las terminaciones.

Las sillas de pino requieren 4 horas de armado y 4 de terminaciones. Las de algarrobo requieren 8 horas de armado y 12 de terminaciones. La empresa puede disponer de a lo sumo 160 horas de trabajo para el armado y de 180 horas de trabajo para las terminaciones, por día. Si la ganancia que obtiene al vender las sillas de pino es de $300 y al vender las de algarrobo es de $540. Sabe además que no puede vender más de 15 sillas de pino por día. ¿Qué cantidad de sillas de cada tipo puede fabricar para tener la mayor ganancia?

Vamos a identificar los datos con variables:

x : cantidad de sillas de pino

y : cantidad de sillas de algarrobo

$300x$: ganancia por vender todas las sillas de pino

$540y$: ganancia por vender todas las sillas de algarrobo

$300x + 540y = G$, G es la ganancia total

La ganancia total depende de varias condiciones llamadas **restricciones:**

La cantidad de sillas no puede ser inferior a 0 : $x \geq 0$ y $y \geq 0$

La cantidad de sillas de pino serán menos de 15: $x \leq 15$

El tiempo de armado total no puede superar las 160 horas: $4x + 8y \leq 160$

El tiempo de terminaciones total no puede superar las 180 horas: $4x + 12y \leq 180$

En conclusión nuestras ecuaciones son:

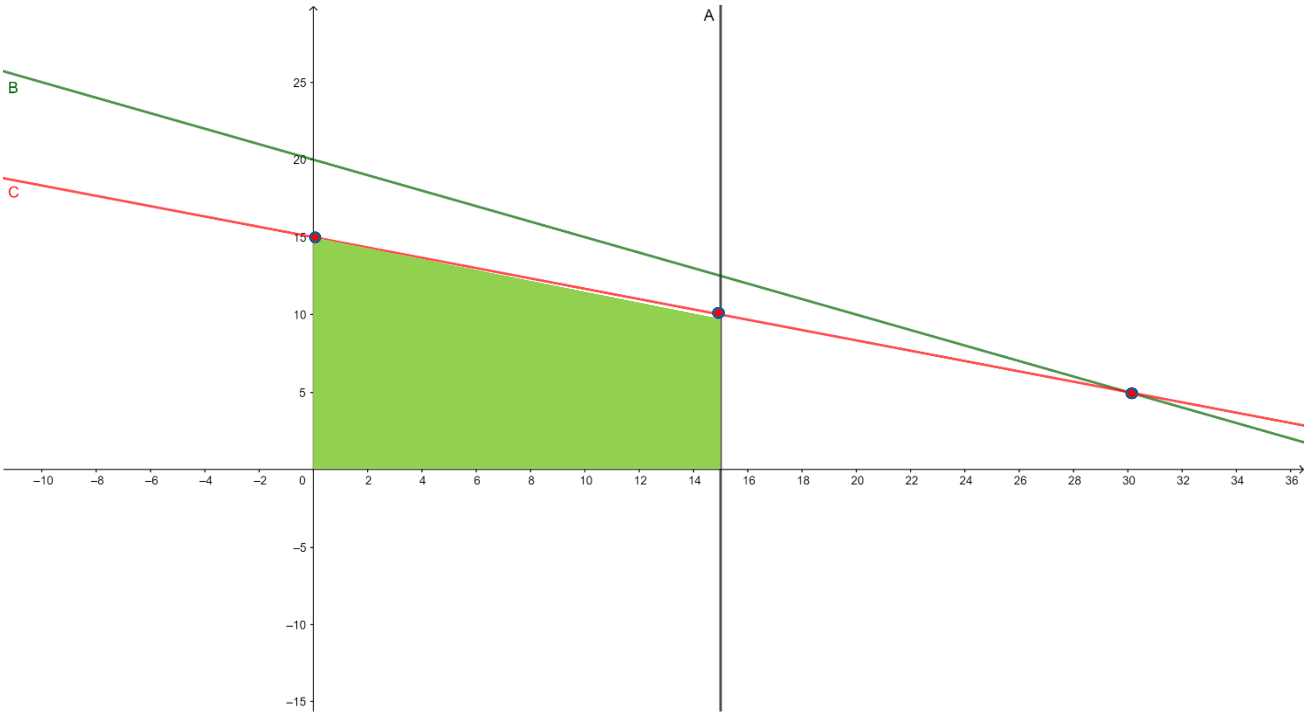
$x \geq 0$ y $y \geq 0$

A: $x \leq 15$

B: $4x + 8y \leq 160$

C: $4x + 12y \leq 180$

Observemos que si reemplazamos los signos mayor o igual o menor o igual por igualdades, son 4 ecuaciones de recta. Cada una de ellas divide al plano en 2 regiones, en una se cumple la desigualdad pedida. Vemos que en la zona sombreada se cumplen las 5 condiciones:



Los vértices de este polígono son los puntos (0,0), (15, 10), (0,15) y (15,0).

Estos vértices no son más que las intersecciones entre las rectas dadas, dos a dos. La intersección entre las rectas llamadas B y C no la tenemos en cuenta pues allí no se cumple la condición $x \leq 15$.

Todos los puntos de la región sombreada incluídos sus bordes cumplen con todas las restricciones. Nuestro problema era saber para qué cantidad de sillas obteníamos la mayor ganancia. son solución de nuestro problema.

Usaremos acá un principio fundamental de la programación lineal que nos asegura que si una ecuación $C = Ax + By$ se evalúa en una región cerrada poligonal, los máximos y mínimos los alcanza en los vértices.

Calculamos entonces $300x + 540y = G$ en los vértices del polígono:

$En\ (0,0)$: $300.0 + 540.0 = 0$

$En\ (0,15)$: $300.0 + 540.15 = 8100$

$En\ (15,10)$: $300.15 + 540.10 = 9900$

$En\ (15,0)$: $300.15 + 540.0 = 4500$

Vemos entonces que el punto que maximiza nuestra ecuación es el punto (15,10), esto nos dice que la mayor ganancia, con las restricciones del problema se obtendrá fabricando 15 sillas de pino y 10 de algarrobo por día.
Problema extraído y adaptado de “A Survey of Mathematics with applications” de Allen Angel y Stuart Porter

b) Material escolar
Con el comienzo del año, varios negocios van a lanzar unas ofertas de material escolar.
Unas librerías quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas; en el primer bloque pondrá 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos; en el segundo, pondrán 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo.
Los precios de cada paquete serán \$300 y \$350, respectivamente.
¿Cuántos paquetes le conviene poner de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Vamos a identificar los datos con variables:

x : cantidad de paquetes de tipo 1

y : cantidad de paquetes de tipo 2

$300x$: ganancia por vender todos los paquetes de tipo 1

$350y$: ganancia por vender todos los paquetes de tipo 2

$300x + 350y = G$, G es la ganancia total

Veamos las restricciones del problema:

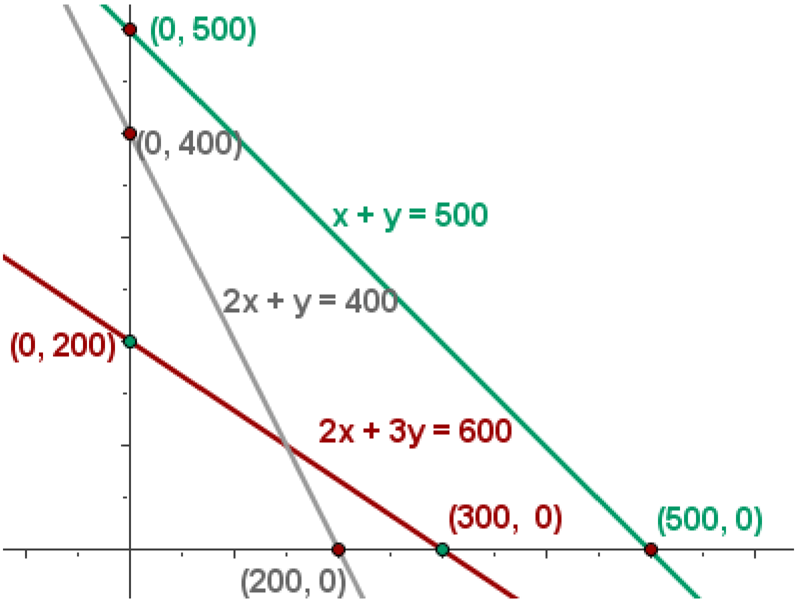
	Paquete 1(x)	Paquete 2 (y)	Disponibles
Cuadernos	2	3	600
Carpetas	1	1	500
Bolígrafos	2	1	400

$2x + 3y \leq 600$

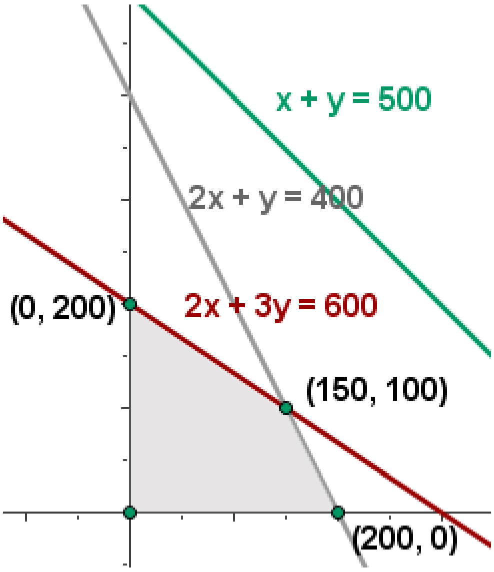
$x + y \leq 500$

$2x + y \leq 400$

$x \geq 0, \quad y \geq 0$



Veamos los vertices del polígono que cumple todas las restricciones:



Calculamos ahora nuestra ecuación en los puntos dados: $300\text{x} + 350\text{y} = \text{G}$

En (200,0): $300.200 + 350.0 = 60\,000$

$\mathrm{En}\ (150{,}100)$: $\quad 300.150 + 350.100 = 80\ 000$

$\mathrm{En}\ (0{,}200)$: $\quad 300.0 + 350.200 = 70\ 000$

Por lo tanto, la ganancia óptima está dada por **150 paquetes de tipo 1** y **100 paquetes de tipo 2** con lo que se obtienen $80 000

Problema extraído de:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/pl/ejercicios-y-problemas-resueltos-de-programacion-lineal.html

2) Otra aplicación importante aparece en el diseño de juegos por computadora donde los objetos no hacen otra cosa que moverse en un plano coordenado, más aún, para el diseño de los juegos 3D tenemos que estudiar geometría en una dimensión más, que no ha sido objeto de este curso, pero que puede estudiarse a partir de las cosas conocidas en 2D.

Por ejemplo, si en juego se lanza algún objeto, su desplazamiento se realiza en forma parabólica, y si se quiere saber si colisiona o no con algún objeto fijo o con una cara de una pirámide por ejemplo, el problema se modeliza con ecuaciones de parábola y recta.

Supongamos que al pie de una pirámide se dispara un cohete que sigue una trayectoria dada por la ecuación $y = -0.016x^2 + 1.6x$. La pirámide tiene una pendiente de $\frac{1}{2}$ y su base mide 80 mts.

a) Chocará el cohete contra la pirámide?
b) A qué distancia de donde fue lanzado aterrizará el cohete?
c) Si hay un objeto en el espacio en el punto (10, 14.4), ¿lo alcanzará el cohete?

Estas preguntas pueden aparecer en un juego y se resuelven con geometría:

Primero debemos encontrar ubicar los ejes coordenados, por comodidad podemos ubicar los ejes en el lugar donde se lanza el cohete.
La recta que es la cara de la pirámide pasa entonces por el punto (0,0) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$, entonces la ecuación de la recta es: $y = \frac{1}{2}x$. Pero para graficar, tenemos que tener en cuenta que la base de la pirámide mide 80 metros, entonces a los 40 metros está el vértice, en realidad graficamos un segmento de recta.

La ecuación de la parábola es: $y = -0.016x^2 + 1.6x$

Para saber si choca con la pirámide hallamos la intersección entre la recta y la parábola:

$y = \frac{1}{2}x$

$y = -0.016x^2 + 1.6x$

Igualamos ambas ecuaciones y tenemos: $\frac{1}{2}x = -0.016x^2 + 1.6x$

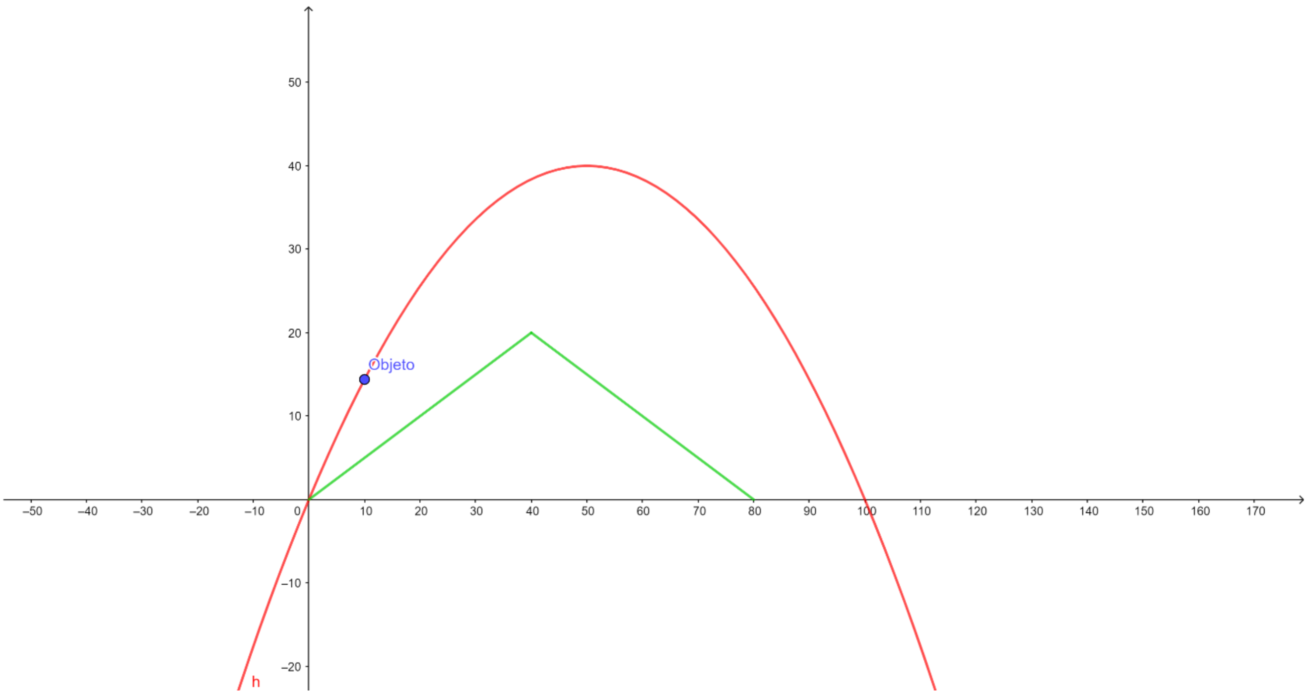
Dejando todo del mismo lado de la igualdad: $0.016x^2 - 1.1x = 0$

Sacando factor común : $x(0.016x - 1.1) = 0$

Entonces: $x = 0$ o $0.016x - 1.1 = 0$ entonces $x = \frac{1.1}{0.016} = 68.75$

Es decir que la recta y la parábola se cortan en (0,0) y en (68.75, 34.375)

Por lo tanto el cohete no choca a la pirámide, ya que el segmento de recta que describe su lado llega hasta el punto (40,20).



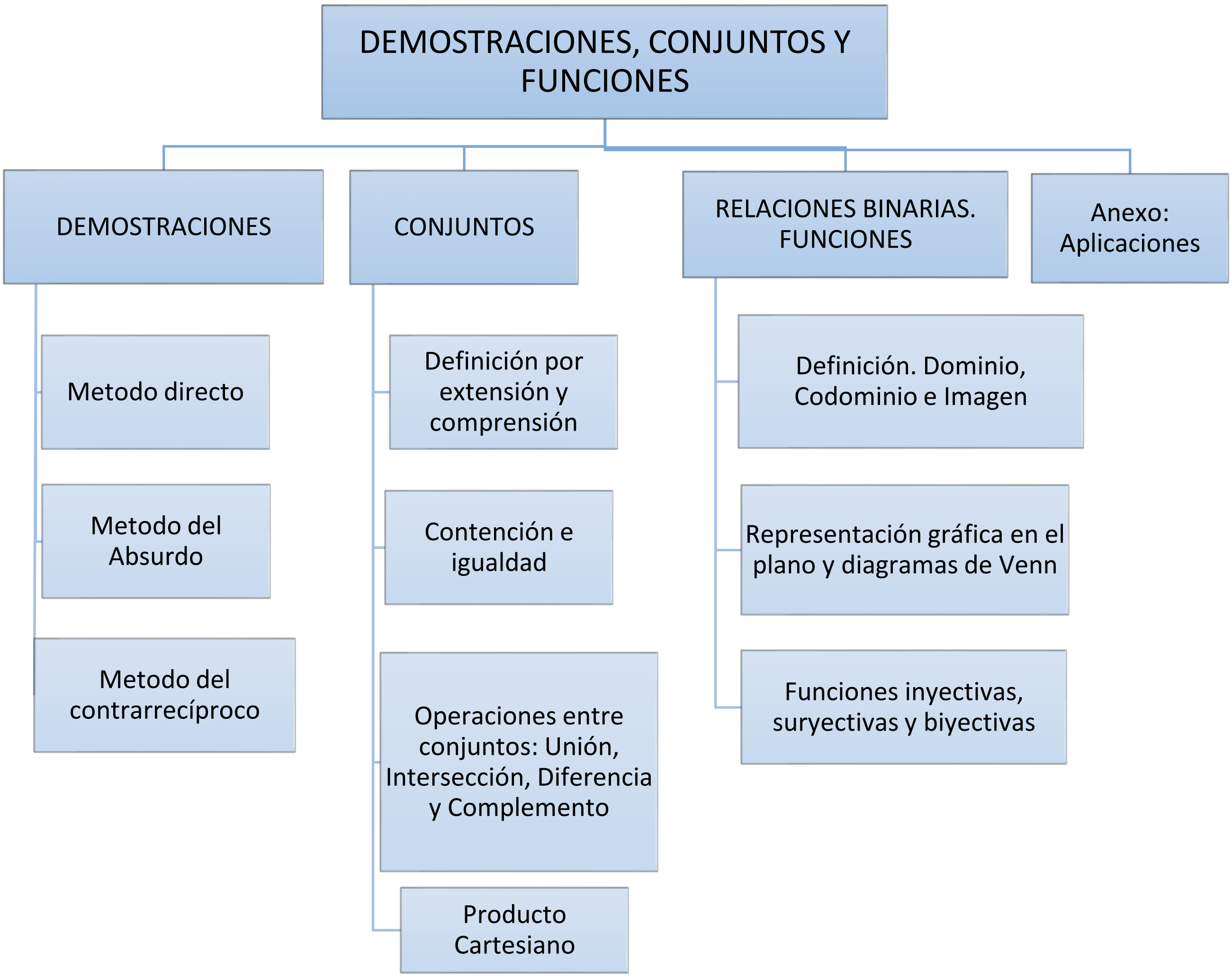
<u>Bibliografía</u>

- Smith et al, Algebra, trigonometría y geometría analítica, Editorial Pearson-Addison Wesley Longman, 1998
- Swokoski, Earl W. y Cole, Jeffery A., Algebra y trigonometría con geometría analítica, 11ma ed., Editorial Thomson, 2006

Capítulo 2

DEMOSTRACIONES, CONJUNTOS Y FUNCIONES

CONTENIDOS:



Matemático invitado: Pierre de Fermat

En matemática las únicas verdades son aquellas afirmaciones que se pueden demostrar, es decir, que partiendo de axiomas y otras afirmaciones ya demostradas podemos llegar, siguiendo un camino lógico a mostrar nuestro enunciado. Los axiomas son enunciados que no se demuestran, enunciados que se aceptan como válidos, por ejemplo los axiomas que usó Peano para definir a los números naturales, aceptamos que los números naturales tienen un primer elemento (el 1 para algunos autores, el 0 para otros. En este curso tomaremos el 1), y que sumando uno a cualquier número natural obtenemos otro natural.

Cuando un enunciado no ha sido demostrado se llama **conjetura**, así permanece hasta que alguien encuentre una demostración, y entonces pasa a ser un **teorema**.

La tarea de demostrar es sumamente difícil, requiere mucha ejercitación y mucha paciencia.

Una de las conjeturas más famosas de la historia de las matemáticas fue la **Conjetura de Fermat,** que hoy conocemos como **el último Teorema de Fermat,** gracias a **Andrew Wiles** que en 1996 lo demostró.

Fermat fue un abogado del que no se sabe con certeza cuando nació, se conserva su fecha de defunción el 12 de enero de 1665 a los 57 años. Si Gauss recibió el nombre del "Príncipe de las matemáticas", a Fermat se le asigna el del "Príncipe de los aficionados", ya que fue un aficionado a las matemáticas, dedicaba su tiempo libre a su estudio.

En el margen de una página del libro "Arítmética" de Diofanto, enuncia su conjetura de inocente apariencia:

> Si n es un número natural mayor a 2, entonces no existen números enteros $x, y\ , z$ distintos de 0 tales que se cumpla la igualdad: $x^n + y^n = z^n$

Esta anotación, contenía una frase adicional que fue el desvelo de grandes matemáticos a lo largo de 300 años: "He descubierto una demostración realmente maravillosa que este margen es demasiado pequeño para contener". Se estima que esto fue escrito en una fecha indeterminada de la década de 1630, tuvieron que pasar casi 300 años para que se encontrara una demostración y finalmente sea un teorema.

Hay otras conjeturas aún sin demostrar de enunciados matemáticos, algunos muy complejos y otro no tanto. Los que se mantienen como conjeturas son aquellos que no han podido ser demostrados pero a los que tampoco se ha podido refutar mediante un contraejemplo, es decir, no se ha encontrado tampoco el caso donde la conjetura falle.

Nuestro homenaje a Pierre de Fermat, quien hizo grandes aportaciones a la matemática y por supuesto a Andrew Wiles, que ya a los 9 años leyó el enunciado del teorema y dedicó después casi toda su vida de matemático a demostrarlo.

Comenzaremos con algunos comentarios generales acerca de las demostraciones de enunciados matemáticos. Se sugiere que repasen y relean el apunte de lógica visto en el ingreso.

1. Las demostraciones

Los resultados válidos en Matemática son aquellos que se pueden demostrar. La manera de hacer demostraciones depende de lo que se quiera demostrar y también de la "forma" del enunciado. Los enunciados son **proposiciones**, se afirma algo de todos o de algunos elementos de un conjunto o de un universo dado.

Si el enunciado a probar es de forma existencial alcanzará en algunos casos con exhibir un individuo con las características que dice el enunciado o una manera de construirlo. Por ejemplo: “Existen números enteros que son primos”

Este enunciado podemos simbolizarlo como: $(\exists x)\, p(x)$, siendo p(x): x es primo y el Universo los números enteros.

En principio debemos conocer la definición de número primo, **un número “a”, “a” distinto de 1 y -1, es primo si y sólo si es divisible por 1,-1, a y –a**. Alcanza entonces con mostrar que el número entero, por ejemplo “7”, es primo ya que sólo es divisible por 1,-1,7 y -7. El enunciado afirma que existen primos, es decir que al menos hay uno, con lo que queda demostrado.

Si el enunciado es de forma universal habrá que probar que cada uno de los elementos del universo cumple con lo afirmado. Si el universo fuera de un número finito de individuos podríamos analizar que cada uno de ellos verifica lo enunciado. Si el universo es infinito, habrá que tomar un elemento arbitrario (**NO un ejemplo**) del universo del que se habla, y probar que tiene la propiedad enunciada.

Por ejemplo: “Si un número entero es par, su cuadrado es par”

Es un enunciado universal porque afirma algo acerca de todos los elementos del conjunto de los números enteros. Observemos que si bien no se menciona la palabra *todos*, al hablar de un número entero sin especificar cuál, se entiende que hablamos de cualquiera y por lo tanto de todos. En este caso el universo es infinito, por lo tanto debemos mostrar que se cumple para un elemento arbitrario del conjunto.

Podemos simbolizarlo como: $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$, siendo p(x): x es par, q(x): x^2 es par y el Universo los números enteros.

Veremos distintos métodos:

Método directo:

Este enunciado tiene la forma de un condicional, es importante identificar antecedente y consecuente o hipótesis y tesis, para saber cuándo será verdadero.

Recordemos que un condicional es falso sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, **partiremos entonces de antecedente verdadero y tratamos de ver que el consecuente tiene que ser verdadero**, es decir que no se da el caso de antecedente verdadero y consecuente falso, por lo tanto la implicación será verdadera y queda probado el enunciado.

En este caso el antecedente es “x es par” y el consecuente “x^2 es par”

Tomamos entonces un entero par *cualquiera,* es decir que podemos tomar un número x tal que **x=2k, siendo k un entero.** A esto nos referimos con tomar un elemento arbitrario, un elemento que cumpla la condición planteada en la hipótesis, pero no uno en particular.

Tenemos que ver que si lo elevamos al cuadrado también es par.

$x^2=(2k)^2$ entonces $x^2=2k.2k$, o equivalentemente **$x^2=2(k2k)$, siendo k2k un número entero**, por ser multiplicación de enteros, por lo tanto **x^2 es par**.

De esta forma queda demostrado.

Método del absurdo:

Esto consiste en suponer que el enunciado es falso y llegar a un absurdo. Cuando el enunciado tiene la forma de un condicional, suponer que es falso, es negar el condicional.

Recordemos que $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$, es decir que negar el condicional **es suponer que tanto el antecedente como la negación del consecuente pueden ser verdaderas.** Al llegar a un absurdo decimos entonces que lo que supusimos era falso y por lo tanto el condicional es verdadero.

Volviendo al ejemplo, demostrar por el método del absurdo sería suponer que:

Existe un entero x que es par y x^2 no es par

Esto implicaría que **x=2k y $x^2=2t+1$** (ya que si no es par, es impar), con k y t números enteros.

Pero entonces **$x^2 = (2k)^2$ y además $x^2 = 2t+1$**, esto implica que **$x^2 = 2(k2k)$ y $x^2 = 2t+1$**, es decir que **x^2 es par e impar, ABSURDO**, pues ningún número es par e impar a la vez.

El absurdo proviene de suponer que el enunciado era falso, por lo tanto la implicación es verdadera.

Método indirecto o contrarrecíproco:

En realidad es hacer el método directo a la proposición contrarrecíproca de lo que se quiere demostrar. Pues ya se ha probado que un condicional y su contrarrecíproca son equivalentes. Es decir que: $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

Sólo se trata de reformular el problema, escribirlo con un enunciado equivalente y demostrarlo.

No siempre las demostraciones pueden hacerse por los 3 métodos. Por eso para mostrar este método pondremos otro ejemplo:

“Si el cuadrado de un número entero es par, entonces el número es par”

Podemos simbolizarlo como: $(\forall x)(p(x) \to q(x))$, siendo p(x): x^2 es par, q(x): x es par y el Universo los números enteros.

Vamos a demostrarlo por el método del contrarrecíproco, reformulando el enunciado en uno equivalente: $(\forall x)(\neg q(x) \to \neg p(x))$

Trataremos de probar entonces que:

”Si un número no es par entonces su cuadrado no es par”.

Ahora planteamos, sea **$x=2h+1$** (x un número impar, h entero) **entonces $x^2 = (2h+1)^2$**

Desarrollando el cuadrado **$x^2 = (2h)^2 + 4h + 1 = 4h^2 + 4h + 1$**

Sacando factor común **$x^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1$**, siendo $2h^2 + 2h$ un número entero por ser suma y producto de enteros.

Por lo tanto x^2 es impar ya que puede escribirse como 2 por un entero más 1.

Por lo tanto partimos de un número impar y llegamos a que su cuadrado también debe ser impar, con lo que queda demostrado.

A estas herramientas haremos referencia cada vez que queramos hacer una demostración.

Observación: no siempre hacemos la simbolización del enunciado antes de demostrarlo, pero en muchos casos ayuda para entender exactamente lo que se quiere demostrar.

Ejercicios:

1. Demostrar que la suma de 3 números enteros consecutivos es un múltiplo de 3. (Un múltiplo de 3 es un número que puede escribirse como 3 por un número entero: si a es múltiplo de 3 entonces $a = 3h,\ h$ entero)

2. Si el cuadrado de un número entero w es par , el cuadrado del anterior a w es impar.

3. La suma de 3 números enteros consecutivos, si el primero es impar, es múltiplo de 6.

4. Recordemos que un número racional o fraccionario es aquel que puede expresarse como cociente de enteros, es decir si $x = \frac{a}{b}$ y $b \neq 0$, decimos que x es un número racional. Un número es irracional si no puede escribirse como cociente de enteros, por ejemplo: $\sqrt{2},\ \pi,\ \sqrt{5}$.

Demostrar que la suma de un número racional y un irracional es un número irracional.

---

2. Conjuntos, elementos, pertenencia.

De manera intuitiva un conjunto es una colección bien definida de objetos que generalmente se representa con una letra mayúscula *A*, *B*, *X*, *W*, etc. Los objetos que integran el conjunto se denominan sus elementos.

El enunciado "*t* pertenece a *A*" o equivalentemente "*t* es un elemento de *A*" se indica ***t*** $\in$ ***A***. Si un elemento *u* no pertenece a *A*, se indica ***u*** $\notin$ ***A*.**

El conjunto que no tiene elementos se llama conjunto vacío, que se indica con el símbolo **Ø**.

Un conjunto está bien definido si se sabe exactamente qué elementos lo integran y cuáles no.

Existen esencialmente dos formas de especificar un determinado conjunto: dando de manera explícita cada uno de sus elementos (**por extensión**) o bien mediante una propiedad que caracterice a cada uno de sus elementos y únicamente a ellos, es decir que todo elemento que cumpla tal propiedad estará en el conjunto y sólo ellos (**por comprensión**).

Es posible definir el conjunto por extensión si el conjunto tiene un número finito y relativamente pequeño de elementos, sin embargo algunos conjuntos infinitos o con muchos elementos se presentan de esa manera cuando se entiende su ley de formación.

Ejemplo 2.1:

Se define el conjunto ***A* por extensión como: *A*= { 1, 3, 5, 7 },** se tiene que: $1 \in A$, $3 \in A$, $5 \in A$ y $7 \in A$, por otra parte por ejemplo $9 \notin A$, $12 \notin A$.

También se puede definir ***A* por comprensión como:**

$$\boldsymbol{A = \{ x: x \text{ es un número entero positivo impar menor que } 9\} =}$$

$$\boldsymbol{= \{ x: x = 2k + 1 \ \wedge \ k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ 0 \leq k \leq 3 \}}$$

Este conjunto se lee: el conjunto de los números x tal que x es igual a 2k+1 , con k entero, entre 0 y 3.

En ambos casos, la propiedad “ser un número entero positivo impar menor que 9”, o equivalentemente “$\boldsymbol{x}$ es un número que cumple $\boldsymbol{x = 2k + 1 \ para \ k \in \mathbb{Z} \ y \ 0 \leq k \leq 3}$" es la que caracteriza a todos los elementos de *A* y únicamente a ellos.

Ejemplo 2.2:

El conjunto de los números naturales (según la definición que se adopte puede tener al 0 o al 1 como primer elemento, en este curso tomaremos los naturales a partir del 1), y el conjunto de los enteros a pesar de ser infinito es usual indicarlos respectivamente:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Con los puntos suspensivos, en estos casos se intuye cuáles son los restantes elementos por la ley de formación y el orden.

Ejemplo 2.3:

Escribir por extensión el conjunto: $A = \{x: x \in \mathbb{Z} \ \wedge x + 8 = 10\}$.

Este conjunto lo forman los números enteros que sumados con 8 dan como resultado 10, por tanto, su forma por extensión es: $A = \{2\}$, ya que el único entero que sumado a 8 da 10 es 2.

Cabe destacar que en un conjunto cualquiera no interesa en qué orden aparecen los elementos, así como tampoco interesa que un elemento aparezca repetido.
El conjunto B= {5, b, 3, d, d, 1, w}= {1, 3, 5, w, w, d, b}= {d, 1, 3, b, 5,w} es el mismo conjunto con 6 elementos en cualquiera de las tres formas en que aparece.
Así como los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ representan los números naturales y enteros respectivamente, los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$ representan los números racionales o fraccionarios, los irracionales y los reales respectivamente.

Ejercicios:

5. Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x \leq 9\}$

b) $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge\ x + 3 = 7\}$

c) $B = \{y: y \in \mathbb{Z} \wedge -2 < y \leq 3\}$

d) $C = \{x: x\ es\ una\ vocal\ de\ la\ palabra\ "número"\}$

e) $D = \{x: x\ es\ un\ dígito\ de\ la\ cifra: 453425\}$

f) $E = \{z: z\ es\ un\ dígito\ primo\ de\ la\ cifra\ 729634\}$

g) $A = \{w: w \in \mathbb{N}\ \wedge w\ es\ divisor\ de\ 50\}$

h) $H = \{w: w \in \mathbb{N}\ \wedge w^2 \leq 9\}$

i) $F = \{a: a \in \mathbb{Z}\ \wedge -4 \leq a + 2 \leq 5\}$

j) $G = \{x: x \in \mathbb{Z}\ \wedge 3 \leq x - 4 \leq 8\}$

k) $W = \{x: x = 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 5\}$

l) $F = \{x: x = 6k + 3 \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq 4\}$

6. Definir por comprensión los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de los números enteros pares mayores que -8 y menores o iguales que 12.

b) El conjunto de las primeras seis potencias naturales de -2.

c) El conjunto de los números naturales pares.

d) El conjunto de los enteros múltiplos de 3.

e) El conjunto de los naturales múltiplos de 5.

f) El conjunto de los enteros múltiplos de 9.

g) El conjunto de los números reales que anulan la ecuación $(x^3 - \frac{1}{4}x).(x^2 - 3).(x+5)$

h) El conjunto de los enteros que son el siguiente de los múltiplos de 3.

i) El conjunto de los enteros que son el resultado de sumarle 2 a los múltiplos de 4.

j) El conjunto de los enteros que son el resultado de sumarle 5 a los múltiplos de 10.

Igualdad de conjuntos

Los conjuntos *A* y *B* son iguales si y sólo si *A* y *B* tienen los mismos elementos. Es decir que todo elemento de *A* es también elemento de *B* y recíprocamente, o sea que se verifica: $(\forall \boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{(x \in A \leftrightarrow x \in B)}$**. Se indica: *A = B*.**

Ejemplo 2.4:

Los conjuntos *A*, *B* y *C* son iguales:

A= {0, 2 }, *B*=$\{x \colon x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 2x = 0\}$ y *C* ={*x : x=2.k* $\wedge$ *(k =0* $\vee$ *k = 1)*}

Notar que todos los elementos de A son elementos de B ya que el 0 y el 2 satisfacen la ecuación $x^2 - 2x = 0$.

Por otro lado los únicos elementos que satisfacen la ecuación $x^2 - 2x = 0$ son el 0 y el 2 ya que $x^2 - 2x = 0$ si y sólo si $x(x-2) = 0$ entonces $x = 0$ o $x = 2$. Por lo tanto todos los elementos de B son elementos de A. Por lo tanto A=B

Resta verificar A=C.

Inclusión, subconjuntos

Puede ocurrir que todo elemento de un conjunto sea elemento de otro conjunto pero no se cumpla la recíproca.

Ejemplo 2.5:

Sean los conjuntos *A*= {0, 2} y *B* = {0, 2, 4, 6, 8,10}

Todo elemento de *A* es elemento de *B*, pero no todo elemento de *B* es elemento de *A*.

Ejemplo 2.6:

Todo elemento de $\mathbb{N}$ es elemento de $\mathbb{Z}$, pero no todo elemento de $\mathbb{Z}$ es elemento de $\mathbb{N}$.

Si dados dos conjuntos *A* y *B*, todo elemento de A es elemento de B, se usará alguna de las siguientes expresiones que son todas equivalentes:

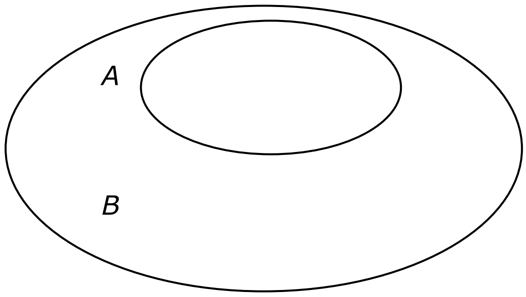
a) *A* es subconjunto de *B*

b) *A* es parte de *B*

c) *A* está incluido en *B*

d) *A* está contenido en *B*

e) *B* contiene a *A*



Decimos entonces: A contenido en B si se verifica que ($\forall$ *x*) (*x* $\in$ *A* $\rightarrow$ *x* $\in$ *B*)

Se utiliza la notación $\boldsymbol{A \subseteq B}$ para indicar esta relación entre conjuntos. También a veces se usa indicarlo con $B \supseteq A$.

Si *A* no es subconjunto de *B*, se indica con $\boldsymbol{A \not\subset B}$**.**

En forma similar a las desigualdades $\leq$, $<$ entre números o expresiones algebraicas, entre los conjuntos $\subset$ indica la inclusión estricta, mientras que $\subseteq$ equivale a "$\subset$ *o* $=$".

Es decir: $A \subset B$ significa que $A \subseteq B$ y $A \neq B$, se dice que *A* está incluido o contenido estrictamente en *B*, o que *A* es parte propia o subconjunto propio de *B*.

Conjunto universal:

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, todos los conjuntos que se consideren serán subconjuntos de un conjunto universal U, si se trata con conjuntos de personas U es el conjunto de todos los seres humanos, en geometría plana U será $\mathbb{R}^2$, en problemas con conjuntos numéricos U será $\mathbb{R}$, o bien $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}, \mathbb{I}$ o $\mathbb{Q}$ de acuerdo con el contexto del problema.

Ejemplo 2.7:

a) Probar que los múltiplos enteros de 12 son múltiplos enteros de 3.

Del enunciado de este problema se infiere que el conjunto universal es $\mathbb{Z}$, se hace referencia a los conjuntos D=$\{x: x = 12k \ \wedge \ k \in \mathbb{Z}\}$ y T=$\{x: x = 3q \ \wedge \ q \in \mathbb{Z}\}$ definidos por comprensión.

Del enunciado también se infiere que **todos los múltiplos de 12 son múltiplos de 3.**

Se quiere probar que D está incluido en T, de acuerdo con la definición de inclusión hay que **probar que todo elemento de D es elemento de T.**

Demostración por el método directo:

Tomaremos un elemento arbitrario x de D y trataremos de probar que es elemento de T.

Sea x $\in$D entonces **x = 12k, donde k es algún entero**.

Entonces **x = 12k = (3.4).k = 3.(4.k) = 3.m** Entonces x $\in$T.

Por propiedad asociativa del producto de enteros

4.k es un entero por ser producto de enteros, llamamos m a ese producto: **4k = m**

Como x es un elemento arbitrario de D, queda probado que para todo x, si x $\in$D entonces x $\in$T, es decir que D $\subseteq$T y **por lo tanto todo múltiplo de 12 es múltiplo de 3.**

b) ¿Es todo múltiplo de 3 múltiplo de 12?

Con la notación usada equivale a la pregunta ¿T$\subseteq$D?

Escribamos algunos de los elementos que están en los conjuntos:

$T = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \dots\}$ $D = \{\dots, -12, 0, 12, 24, 36 \dots.\}$

Vemos que entre 0 y 12 no hay múltiplos de 12, por lo tanto seguro hay elementos de T que no están en D.

Recordando la definición de T$\subseteq$D : **(**$\forall$ ***x*****) (*****x*** $\in$ ***T*** $\rightarrow$ ***x*** $\in$ ***D*****),** vemos que no se cumple, es decir que si este enunciado es falso su negación es verdadera:

$\neg((\forall x)\ (x \in T \rightarrow x \in D))$ ***es equivalente a*** $(\exists x)\ (x \in T \wedge \notin D))$

Para ver que se cumple la proposición existencial es suficiente mostrar un elemento de T que no esté en D, por ejemplo 15=3.5, 15 $\in$ T porque es múltiplo de 3, pero no existe ningún entero k tal que 15 se pueda escribir como 12.k para que sea múltiplo de 12, es decir que 15$\notin$D, **luego T$\not\subset$D.**

Propiedades de la inclusión:

1) Para todo par de conjuntos *A* y *B, A*=*B* si y sólo si *A* $\subseteq$ *B* y *B* $\subseteq$ *A* (antisimetría)

Esta propiedad da un criterio para probar igualdad entre conjuntos. Si se prueba que A es subconjunto de *B* y que *B* es subconjunto de *A*, entonces *A*=*B*.

2) Para todo conjunto *A* se cumple que *A* $\subseteq$ *A* (reflexividad)

3) Dados los conjuntos *A*, *B*, *C*, cualesquiera, si (*A* $\subseteq$ *B* y *B* $\subseteq$ *C*) → *A* $\subseteq$ *C* (transitividad)

4) Para todo conjunto *A* se cumple que Ø $\subseteq$ *A*

Observación: Notar que cuando hablamos de propiedades nos referimos a proposiciones verdaderas para **todo** conjunto o para todo conjunto que cumpla una determinada condición, pero no para un conjunto en particular.

Así en la propiedad 3) se dice que si A, B y C son **cualquier terna de conjuntos** que cumplan *A* $\subseteq$ *B* y *B* $\subseteq$ *C* se cumple que *A* $\subseteq$ *C*.

Por ejemplo:

Si $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2,3,4,5\}$ se cumple que *A* $\subseteq$ *C* porque *A* $\subseteq$ *B* y *B* $\subseteq$ *C*

Pero si $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{1,3,4,5\}$ no tiene porqué cumplirse porque *A* $\nsubseteq$ *B.*

Ejercicios:

7. Indicar si los siguientes pares de conjuntos son iguales, son distintos o alguno está incluído en el otro:

a) $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \; es \; divisor \; de \; 6\}, \quad B = \{1,2,3,6\}$

b) $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \; es \; divisor \; de \; 5\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N}: 2 < x < 5\}$

c) $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x \; es \; divisor \; de \; 12\}, \quad B = \{1,2,3,4\}$

d) $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 4x + 4 = 0\}, \quad B = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x^2 \leq 5\}$

e) $A = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 2x = x\}, \quad B = \{0\}$

8. En cada caso escribir por comprensión los conjuntos que se mencionan.

a) Probar que los múltiplos naturales de 18 son múltiplos de 6.

b) Probar que los múltiplos enteros de 60 son múltiplos de 15.

c) Probar que los múltiplos enteros de 12 son pares.

d) ¿Son todos los múltiplos naturales de 3 múltiplos de 21?

e) ¿Son todos los múltiplos enteros de 13 múltiplos de 39?

f) Probar que los múltiplos enteros de 39 son múltiplos de 13.

g) Sean B el conjunto de los múltiplos enteros de -5 y C el conjunto de los múltiplos enteros de 5, probar que B=C.

9. Sean $A = \{x: x = 10k + 5 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{x: x = 5h \wedge h \in \mathbb{Z}\}$ conjuntos.

a) Probar que $A \subseteq B$

b) ¿El número 40 es un elemento de A ? ¿Y de B ? Justifique su respuesta.

c) ¿Está el conjunto B incluído en A? Justifique su respuesta.

10. Sean $A = \{x: x = 4k + 2 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{x: x = 2h \wedge h \in \mathbb{Z}\}$ conjuntos.

a) Probar que $A \subseteq B$

b) A y B son el mismo conjunto? Justifique su respuesta.

Operaciones entre Conjuntos

Unión: La unión de dos conjuntos *A* y *B*, indicada por *A*∪*B* es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a *A* o a *B*.

$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo 2.8:

a) Sean $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,6\}$ entonces el conjunto unión es $A \cup B = \{1,2,3,6\}$

b) Sean $A = \{1,2,7,9, a\}$, $B = \{1,2,3,6, w, x\}$ entonces el conjunto unión es $A \cup B = \{1,2,3,6,7,9, a, w, x\}$

Propiedades de la Unión:

1) Asociatividad: Sean A, B y C conjuntos cualesquiera, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

2) Conmutatividad: Para todo par de conjuntos A y B, $A \cup B = B \cup A$

3) Para todo par de conjuntos A y B: $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$

Intersección: La intersección de dos conjuntos *A* y *B*, indicada por *A*∩*B* es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a *A* y a *B*.

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

Si *A* y *B* son no vacíos y *A*∩*B*=Ø, *A* y *B* se llaman disjuntos.

Ejemplo 2.9:

a) Sean $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,6\}$ entonces el conjunto intersección es $A \cap B = \{1,2\}$

b) Sean $A = \{1,2,7,9, a, w\}$, $B = \{1,2,3,7, w, x\}$ entonces el conjunto intersección es $A \cap B = \{1,2,7, w\}$

c) Sean $A = \{1,2,7, a, w\}$, $B = \{3, x\}$ entonces el conjunto intersección es $A \cap B = \emptyset$

Propiedades de la Intersección:

1) Asociatividad: Sean A, B y C conjuntos cualesquiera, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

2) Conmutatividad: Para todo par de conjuntos A y B, $A \cap B = B \cap A$

3) Para todo par de conjuntos A y B: $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$

Diferencia: La diferencia de dos conjuntos *A* y *B*, indicada por *A*-*B* es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a *A* y no pertenecen a *B*.

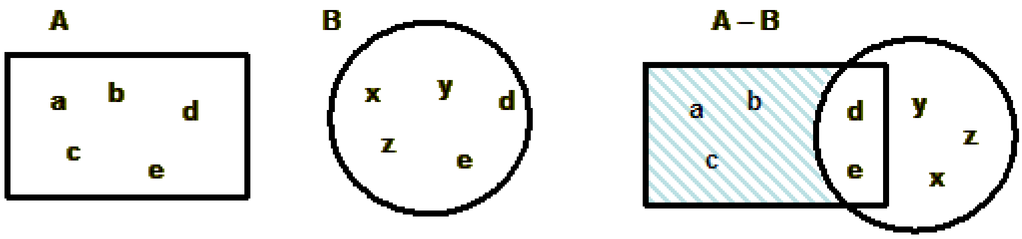
$$A - B = \{x: x \in A \ \wedge x \notin B\}$$

Ejemplo 2.10:

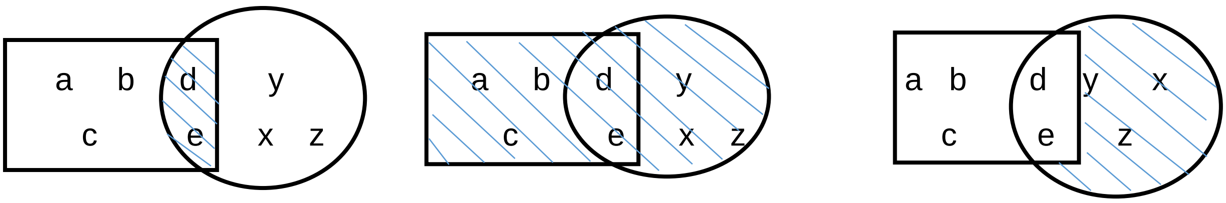
Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{x, y, e, z, d\}$

$A \cap B = \{d, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$, $A - B = \{a, b, c\}$, $B - A = \{x, y, z\}$

Graficando los conjuntos en diagramas de Venn:



$A \cap B$ $A \cup B$ $B - A$



Propiedades de la Diferencia:

1) Para todo A, $A - A = \emptyset$

2) Para todo A, $\emptyset - A = \emptyset$

3) Para todo A, $A - \emptyset = A$

4) Para todo par de conjuntos A y B, si $A - B = B - A$ entonces $A = B$

Complemento: El complemento de un conjunto *A* es el conjunto de todos los elementos (del universo U) que no están en *A*

$$A^c = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$

Ejemplo 2.10:

a) Sean A = {a, b, c, d, e} y U = {a, b, c, d, x, y, e, z} entonces A^c ={x, y, z}

b) Sean B={ -2, -3, 1, 5, 7, 8, 9 } y U ={ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }
Entonces B^c ={ -4, -1, 0, 2, 3, 4, 6 }

Propiedades del Complemento:

1) Para todo A, $(A^C)^c = A$

2) Si U es el universo, $\emptyset^c = U$

3) Si U es el universo, $U^c = \emptyset$

4) Para todo par de conjuntos A y B, $A \subseteq B \leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

Propiedades combinando operaciones:

Leyes Distributivas:
a) Para toda terna de conjuntos A, B y C: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
b) Para toda terna de conjuntos A, B y C: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de De Morgan:
c) Para todo par de conjuntos A y B: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
d) Para todo par de conjuntos A y B: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Ejercicios:

11. Sean $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,6\}$, $C = \{x: x = 2k \wedge k \in \mathbb{N}\}$, $D = \{x: x = 3m \wedge m \in \mathbb{Z}\}$ y $U = \mathbb{Z}$

a) Expresar por comprensión $A \cup \mathbb{Z}$

b) Expresar por comprensión A^c

c) Expresar por extensión $A \cap C$

d) Expresar por extensión $B - (D \cap A)$

e) Expresar por comprensión C^c

f) Expresar por comprensión $D^c \cup B^c$, recuerde que por las propiedades mencionadas puede calcularlo como $(D \cap B)^c$.

g) Expresar por extensión $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, según las propiedades enunciadas, ¿de qué otra forma podría calcularlo?

h) Expresar por comprensión $A^c \cup D^c$

i) Expresar por comprensión $A^c \cap C^c$

12. Sean $A = \{x: x = 5w \wedge w \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x + 2 \leq 7\}$.

a) Hallar por extensión los conjuntos: $A \cap B$ y $B - A$

b) Definir un conjunto H, que cumpla que $H \subseteq B$

13. Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{x: x = 4k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ y $C = \{3,4,5,6,7,8\}$

a) Hallar y expresar por extensión i) $A \cap (B \cup C)$ ii) $C - (A - B)$.

b) Hallar un conjunto D que esté incluido en B.

14. Sean P el conjunto de los enteros pares e I el conjunto de los enteros impares y U= $\mathbb{Z}$

a) Expresar por comprensión: $P \cup I$, $P - I$, $I - P$, P^c, I^c

b) Probar que $P \cap I$=Ø

Indicaciones: probarlo por el absurdo suponiendo que fuera distinto del Ø, es decir que existe un número *m* que es a la vez elemento de P y elemento de I.

15. Si T es el conjunto de enteros múltiplos de 3 y C= $\{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 3k + 1 \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ y $U = \mathbb{Z}$.

a) Hallar $T \cap C$

b) Hallar $(T \cup C)^c$

Producto cartesiano

El producto cartesiano es otra operación entre conjuntos, a diferencia de las anteriores sus elementos son pares ordenados.

Si *A* y *B* son conjuntos cualesquiera **el producto cartesiano *AxB*** es el conjunto de todos los pares ordenados *(a,b)* donde $a\in A$ y $b\in B$, $AxB = \{(a,b): a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplos 2.11:

a) Si $A=\{1,3,5\}$, $B=\{w,1\}$, $AxB = \{(1,w),(3,w),(5,w),(1,1),(3,1),(5,1)\}$

b) En geometría, el plano $\mathbb{R}^2$ es el producto cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$, y en efecto sus elementos, los puntos del plano, son pares ordenados: $\mathbb{R}^2 = \{\ (x,y): x \in\ \mathbb{R}\ \ \wedge y \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicios:

16. Hallar el producto cartesiano *ExF* de los conjuntos *E* = {-2,-1, 0, 1}, *F* ={ 2, 3} y representarlo en $\mathbb{R}^2$ como puntos del plano.

17. Si A = {1,2,3}, B = {-2,-1,6} y C = {6,7}, son conjuntos, hallar $Ax(B \cap C)$ y $(AxB) \cap (AxC)$ y verificar que son iguales.

---

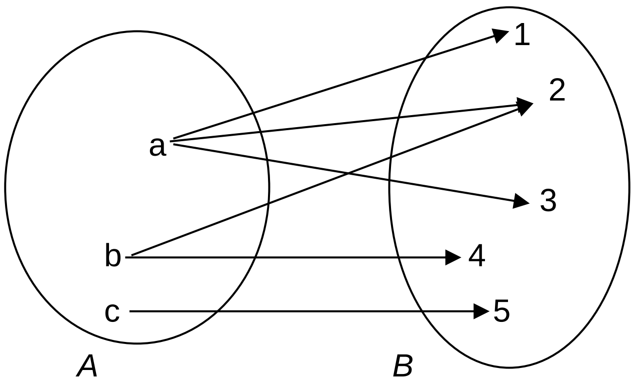
3. Relaciones binarias y Funciones

Una relación binaria o correspondencia de un conjunto *A* en un conjunto *B*, es un subconjunto *R* del producto cartesiano *AxB.* Sus elementos son pares ordenados *(a,b)* donde $a\in A$ y $b\in B$, **no necesariamente todos** tales pares ordenados.

Cuando un par $(a,b)\in R$, también se indica *aRb* o $b\in R(a)$, donde $R(a)=\{x\in B;\ aRx\}$ es decir el conjunto de todos los elementos *x* de *B* relacionados por *R* con un elemento fijo *a* de *A.*

Si *A* y *B* son finitos y tienen pocos elementos es posible representar gráficamente la relación *R* de *A* en *B* mediante un diagrama para *A*, otro para *B* y una flecha con origen en un elemento *a* de *A* y extremo en uno *b* de *B* si y sólo si el par *(a,b)* pertenece a la relación *R*.

Ejemplo 3.1:



En este caso $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ y los pares que están en la relación son:

$R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 4), (c, 5)\}$

Ejemplos 3.2:

a) Si $A=\{1,3,5\}$, $B=\{w,1\}$ se define la relación binaria $T= \{(1,w),(5,w),(1,1),(5,1)\} \subset A\times B$, en este caso $T(5)=\{x\in B: 5Tx\}= \{w,1\}$

b) En el plano $\mathbb{R}^2$ se define por comprensión la relación binaria: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = x^2 - 3\}$, sus elementos son todos los puntos del plano que pertenecen a la parábola $y = x^2 - 3$

c) En el plano $\mathbb{R}^2$ se define la relación binaria $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y^2 = x\}$, sus elementos son todos los puntos del plano que pertenecen a $y^2 = x$ parábola de eje focal x.

Existen distintos tipos de **Relaciones Binarias,** definiremos a continuación una clase especial de relaciones binarias: las **Funciones.**

Funciones

Una relación binaria de *A* en *B* que cumpla que:
a <u>todo</u> elemento *a* $\in$ *A* le asigna <u>un único</u> elemento *b* $\in$ *B* es una función de *A* en *B*

Una función llamada *f*, que relaciona elementos de A con elementos de B se indica con ***f*: *A* $\rightarrow$*B.*** El elemento único de *B* asignado a cada ***a*** $\in$ *A* **se llama la imagen de *a* por *f* y se indica *f(a), que se lee "f de a".***

El conjunto *A* se llama el **dominio** de *f* y se indica con Dom(f).

El conjunto *B* se llama **codominio**.

La **imagen de una función** *f* es el conjunto de todos los $y \in B$ tales que sean imagen por *f* de algún elemento *x* de A, en términos de conjuntos:

$$Im(f) = \{y \in B: (\exists x)(x \in A \wedge y = f(x))\} \qquad Im(f) \subseteq B \ .$$

La imagen es un subconjunto del codominio, en algunos casos pueden coincidir.

En una relación binaria cualquiera de *A* en *B*, el conjunto *R*(*a*), para ***a*** $\in$ *A,* puede ser vacío o tener cualquier número de elementos. En una función, tal conjunto nunca es vacío y tiene exactamente un elemento.

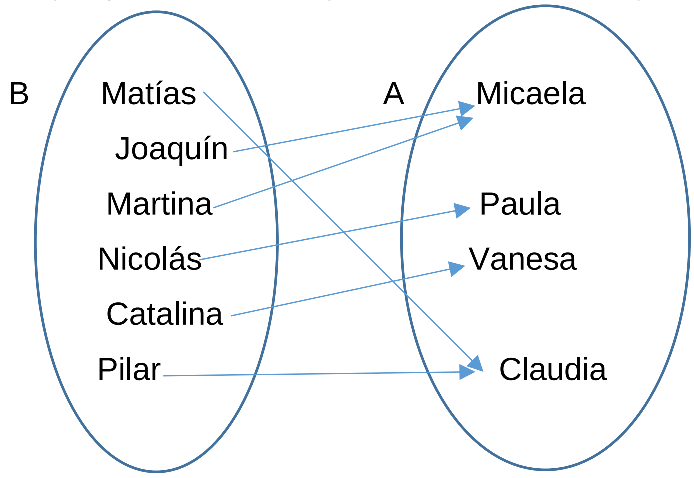
También las funciones podemos definirlas por sus pares ordenados, indicando $(a, f(a))$, siendo a un elemento del dominio y $f(a)$ su imagen.

Ejemplo 3.3:

Si A es el conjunto de las madres de 6 amigos y B es el conjunto de los amigos, definimos:

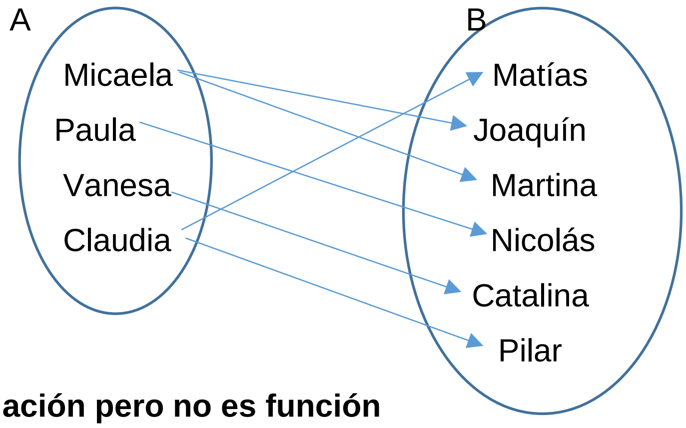
$A = \{Micaela, Paula, Vanesa, Claudia\}$, $B = \{Matías, Joaquín, Martina, Nicolás, Catalina, Pilar\}$

Podemos establecer la **relación** que a cada hijo le asigna su madre, esta relación **es una función**, ya que **todos** los hijos tienen una madre y esta es **única**.



Hemos definido una **función *f*: B $\rightarrow$A,** donde a cada elemento de B se le asigna un único elemento en el conjunto A. En este caso la imagen coincide con el codominio.

Sin embargo si quisiéramos relacionar las madres con sus hijos, podemos definir una relación de A en B que **no es función**, ya que hay elementos en el dominio que tienen más de una imagen, hay elementos en el dominio a quienes se les asigna más de un elemento en el conjunto codominio.



Es una relación pero no es función

Ejemplo 3.4:

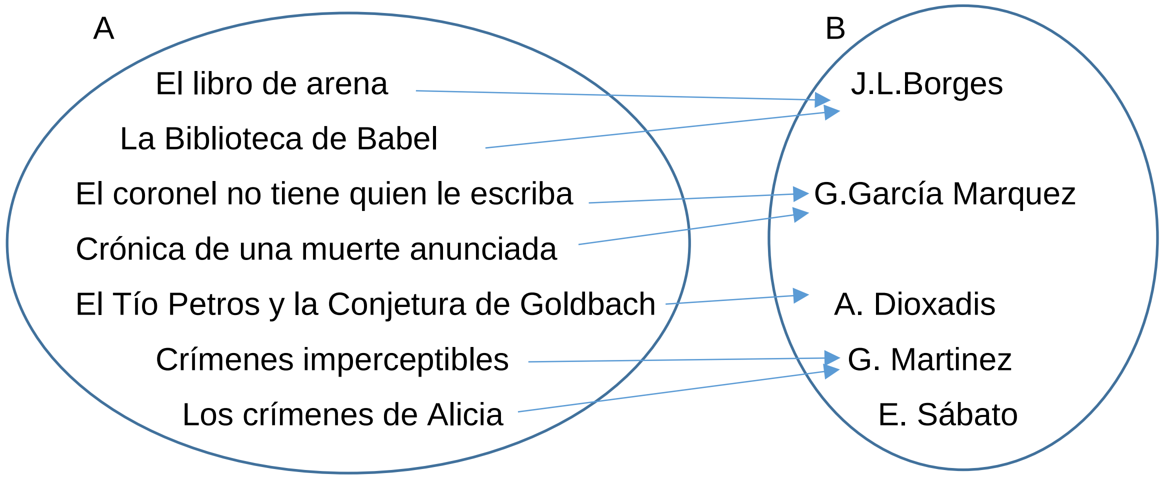
Sea A el conjunto de los libros escritos por algunos escritores latinoamericanos:

A = { El libro de arena, La Biblioteca de Babel, El coronel no tiene quien le escriba, Crónica de una muerte anunciada, El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach, Crímenes imperceptibles, Los crímenes de Alicia}

Sea B el conjunto de algunos escritores:

B = {Jorge Luis Borges, Gabriel García Marquez, Apostolos Dioxadis, Guillermo Martinez, Ernesto Sábato}

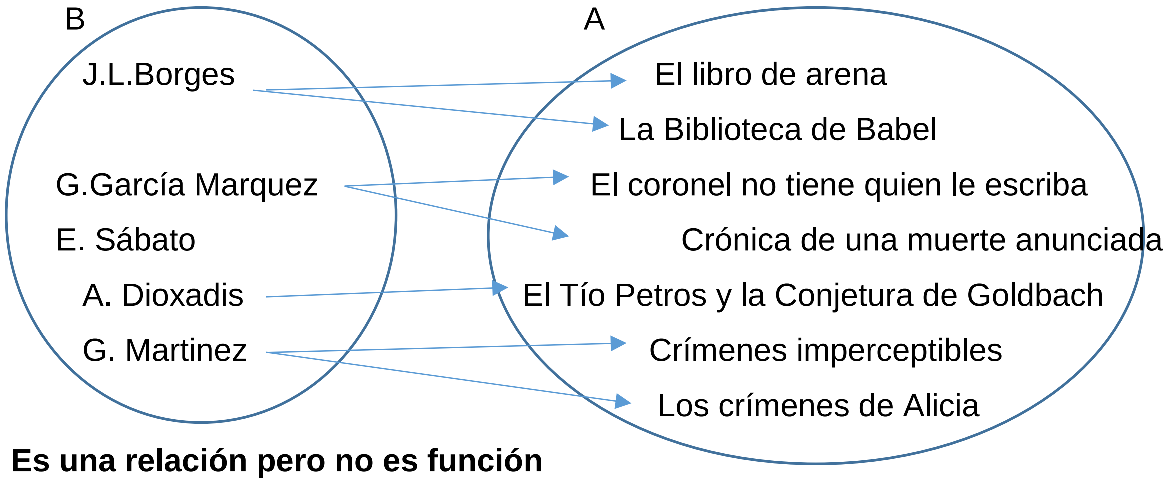
Podemos establecer la **relación** que a cada libro le asigna su autor, esta relación es una función, ya que **todos** los libros tienen un autor y, en este caso, es **único**.



Hemos definido una **función *f*: A $\rightarrow$B,** donde a cada elemento de A se le asigna un único elemento en el conjunto B.

En este caso **la imagen es un subconjunto del codominio**, ya que ningún elemento de A tiene por imagen a E. Sábato. Decimos que Im(f)= {Jorge Luis Borges, Gabriel García Marquez, Apostolos Dioxadis, Guillermo Martinez}

Sin embargo si quisiéramos relacionar las escritores con sus libros, podemos definir una relación de B en A que **no es función**, ya que hay elementos en el dominio que tienen más de una imagen, hay elementos en el dominio a quienes se les asigna más de un elemento en el conjunto codominio, además, en este caso hay un elemento del dominio que no tiene imagen:

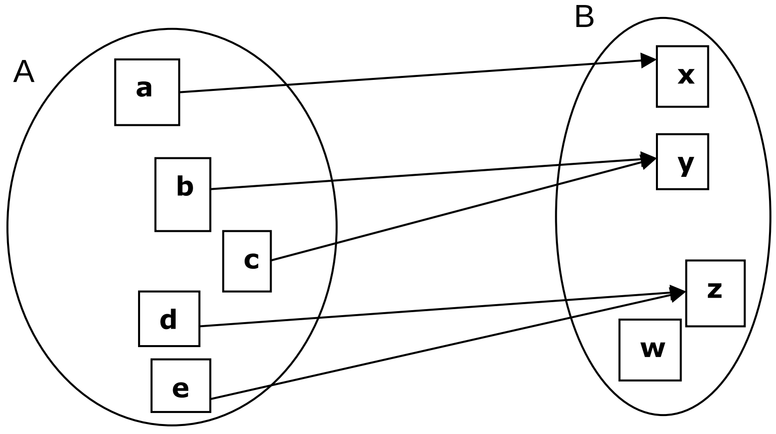


Es una relación pero no es función

Ejemplo 3.5:

El siguiente es el diagrama de la **función** *f* de *A* en *B*, que asigna *f(a)=x*, *f(b)=y*, *f(c)=y*, *f(d)=z*, *f(e)=z*. Podemos escribir también la función a partir de sus pares ordenados, decimos entonces $f = \{(a,x),(b,y),(c,y),(d,z),(e,z)\}$

De cada elemento del dominio *A*=Dom(*f*) debe salir una flecha única. A elementos del codominio *B* puede llegar más de una flecha o ninguna, como en los elementos *y*, *z*, *w* de *B*.



Ejemplo 3.6:

Sea *A* el conjunto de las letras del alfabeto y $\mathbb{R}$ el de los números reales, se define la función:

$g : A \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} -3, & \text{si } x \text{ es consonante} \\ 5, & \text{si } x \text{ es vocal.} \end{cases}$

El codominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los reales, la imagen Im(g)={-3, 5} está contenida estrictamente en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.7:

El área de un rectángulo se calcula como base por altura, si suponemos una base dada, por ejemplo de 10 cm, el área del rectángulo variará **en función** de la altura, decimos que el área depende de la altura, podemos escribir entonces:

$\boldsymbol{f(x) = 10.x,}$ tomando la altura como x, el área es f(x).

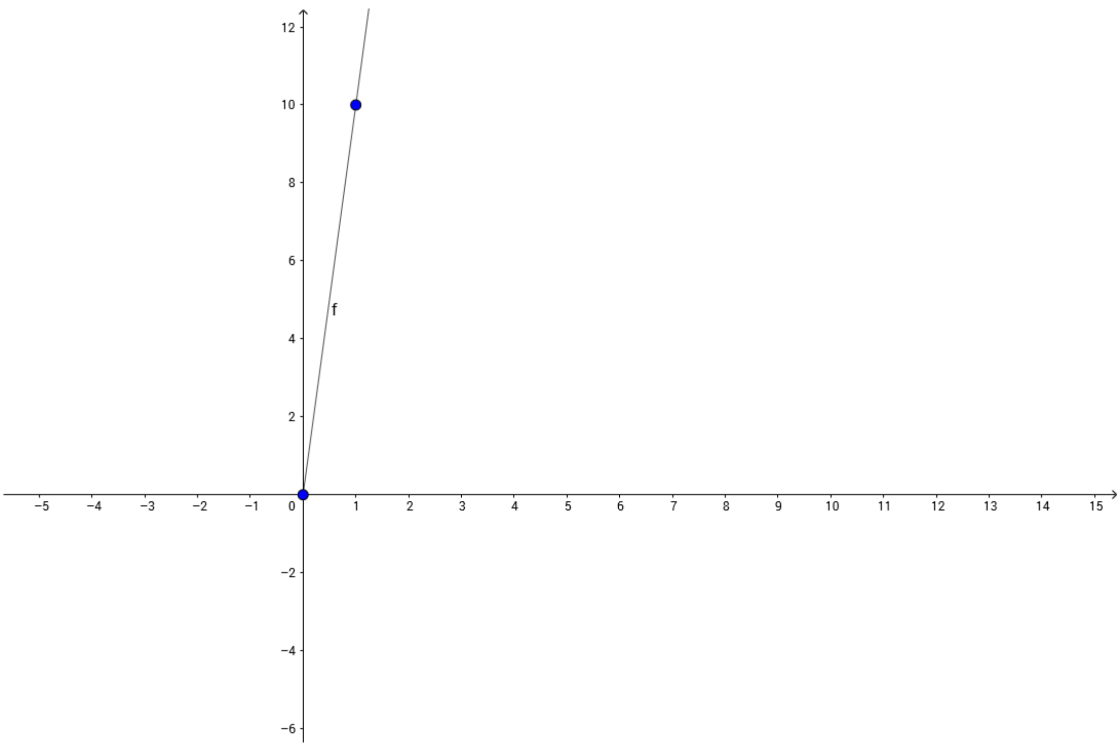
Tomando como dominio y codominio los reales positivos, decimos que a cada valor de x, es decir a cada altura le corresponde un área **distinta y única.**

Por ejemplo si la altura es 5, $f(5) = 10.5 = 50$, el área es 50.

Si la altura es 20, $f(20) = 10.20 = 200$, el área es 200.

Así definida, f es una función que relaciona cada altura de un rectángulo con su área.

Observemos que esta función representa la ecuación de una recta de pendiente 10 y ordenada al origen 0, con la salvedad de que como estamos modelizando un problema con longitudes y distancias tomamos sólo los reales positivos como dominio y codominio, podemos graficarla en el plano cartesiano:



Igualdad de funciones

Dos funciones son iguales si y solo si tienen el mismo dominio y codominio y establecen la misma relación:

$$f = g \iff \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \wedge\ \text{Codom}(f) = \text{Codom}(g) \ \wedge\ (\forall x)(f(x) = g(x))$$

Funciones numéricas

Una función numérica es una función tal que su dominio y su codominio son conjuntos de números, por ejemplo:

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x + \frac{5}{6}$; $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, dada por $g(n) = n - 25$;

$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $k(x) = x^2 + 1$; $j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $\mathrm{j}(x) = 5x + 3$;

Estas funciones pueden definirse también como:

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $y = 3x + \frac{5}{6}$; $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, dada por $y = x - 25$;

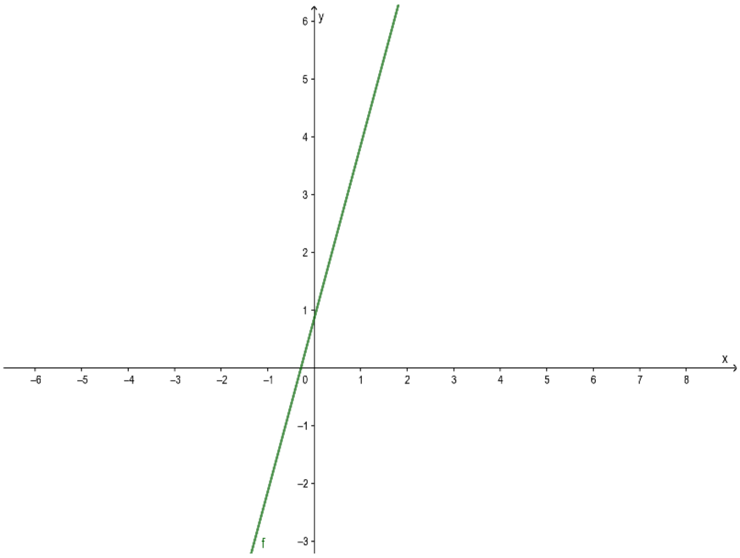
$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $y = x^2 + 1$; $j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $y = 5x + 3$;

Decimos que x es la **variable independiente** y que y, es la **variable dependiente,** ya que el valor de y depende del valor que tome la variable x**.**

Se representan en un sistema de ejes cartesianos, sobre el eje horizontal se representa el dominio y sobre el vertical el codominio.
En estos ejemplos podemos hacer los gráficos ya que representan rectas y parábolas que ya hemos estudiado, o sólo algunos puntos del plano, veremos otros ejemplos donde no es fácil hacer la gráfica, esto será tema de estudio en Matemática 2.

Ejemplo 3.8:

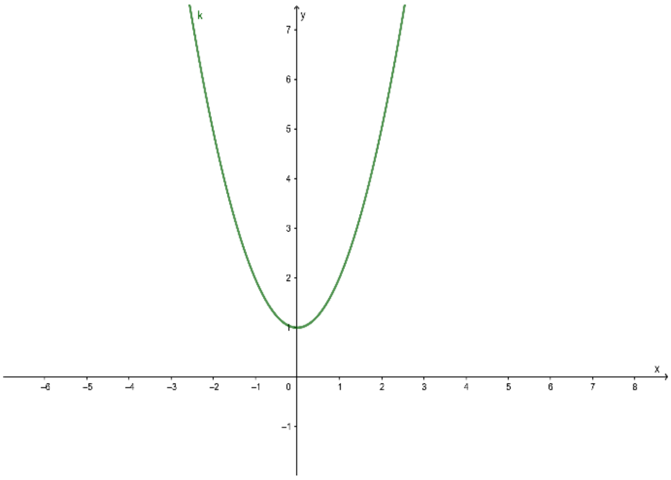
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x + \frac{5}{6}$, decimos que es una función lineal que se corresponde con la ecuación de la recta, ya que como hemos mencionado el valor de $f(x) = y$.
Su representación en el plano es:



Ejemplo 3.9:

Si $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $k(x) = x^2 + 1$, decimos que es una función cuadrática que se corresponde con la ecuación de una parábola de eje paralelo al eje y. En términos de la ecuación canónica de la parábola es $x^2 = y - 1$, con vértice en (0,1) y distancia focal $\frac{1}{4}$.

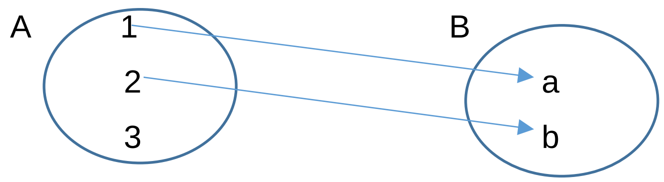
Su representación en el plano es:



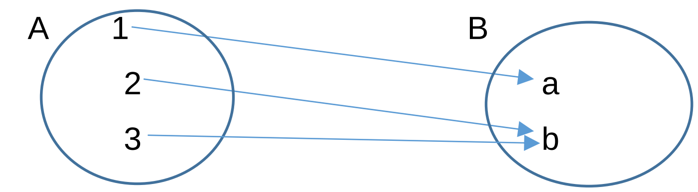
Ejercicios

18. Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones, justificando lo que afirma. En caso de serlo indicar la imagen:

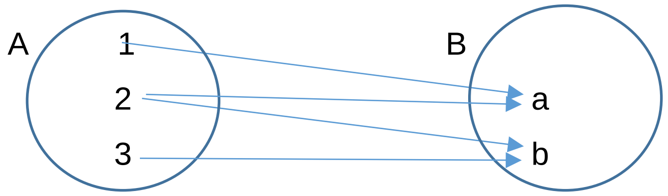
a)



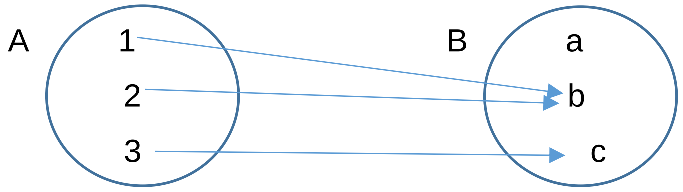
b)



c)



d)



e) Si A={1,2,3} y B={x, y,z} i) $f: A \to B,\ f = \{(1,x),(2,z)\}$

ii) $g: A \to B,\ g = \{(1,y),(2,x),(2,z),(3,y)\}$

iii) $h: A \to B,\ h = \{(1,y),(2,x),(3,y)\}$

19. Sea A el conjunto de los alumnos de Matemática 1. Determine cuál de las siguientes asignaciones define una función sobre A:

a) Asignarle a cada estudiante su edad.

b) Asignarle a cada estudiante su profesor.

c) Asignarle a cada estudiante su hermana mujer.

20. Dada $f: \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3+x}{x-5}$ determinar: a) $f(-1)$; b) $f(0)$; c) $f(2)$; d) $f(3/2)$

21. Dada $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ determinar: a) $g(0)$; b) $g(-\dfrac{3}{4})$; c) $g(3)$

22. Un rectángulo tiene 100cm de perímetro. Expresar el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados. Grafique la función obtenida, utilizando el eje x para indicar la longitud del lado elegido y el eje y para indicar el área. ¿Cuál es el área máxima?

23. Se desea construir un depósito de base cuadrada (sin tapa) y 10 m^3 de capacidad. Exprese la superficie lateral del depósito en función de la longitud del lado de la base.

24. Una lámina metálica rectangular mide 5 m de ancho y 8 m de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. Expresar el volumen de la caja en función de su altura.

25. Estudiar si las siguientes funciones son iguales. Justificar.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x + 2$ y $g: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por: $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

26. Use una fórmula para definir cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

a) f asigna a cada número su cubo

b) g asigna a cada número el 5

c) h asigna a cada número 4 más su cuadrado

d) w asigna a cada número su cubo más el doble del número

27. Se define la función $floor$ o $suelo$: $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, como la función que a cada número real le asigna el mayor entero menor o igual que el número.

Así $suelo(2{,}5) = 2$, $suelo(-3{,}7) = -4$, $suelo(5) = 5$.

Se nota también como $suelo(x) = \lfloor x \rfloor$.

Hallar el valor de: a) $\lfloor \sqrt{5} \rfloor$, b) $\left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor$, c) $\left\lfloor \frac{7}{3} - 9 \right\rfloor$

28. Se define la función $ceiling$ o $techo$: $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, como la función que a cada número real le asigna el menor entero mayor o igual que el número.

Así $techo(2{,}5) = 3$, $techo(-3{,}7) = -3$, $techo(5) = 5$.

Se nota también como $techo(x) = \lceil x \rceil$.

Hallar el valor de: a) $\lfloor \sqrt{11} \rfloor$, b) $\left\lfloor \frac{3}{5} + \sqrt{2} \right\rfloor$, c) $\left\lfloor \frac{5}{3} - 7 \right\rfloor$

29. Se define la función $factorial$: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, como la función que a cada número natural le asigna el producto de todos los naturales desde el número hasta 1, suele escribirse en forma decreciente.

Así $factorial(1) = 1$, $factorial(2) = 2.1$, $factorial(3) = 3.2.1$, $factorial(4) = 4.3.2.1$

La notación habitual es $factorial(n) = n!$

Por definición $0! = 1$

Hallar el valor de: a) $4!$, b) $5!$, b) $6!$

Funciones inyectivas, suryectivas, biyectivas y función inversa

Función inyectiva:

Una función $f(x)$ es **inyectiva si a todo par de elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas en el codominio**.

Es decir: Sea $f: A \to B$, $f(x)$ es inyectiva si:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)) \quad \text{(Universo=A)}$$

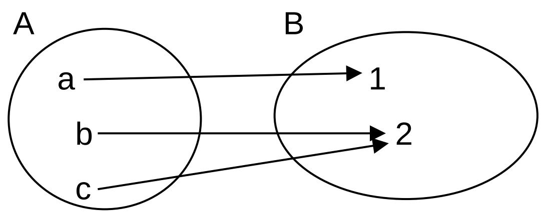
Equivalentemente:

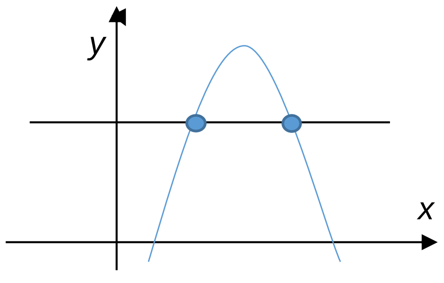
$f(x)$ es inyectiva si: $(\forall x_1)(\forall x_2)(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$.

Ambas expresiones son equivalentes ya que una es la contrarrecíproca de la otra.

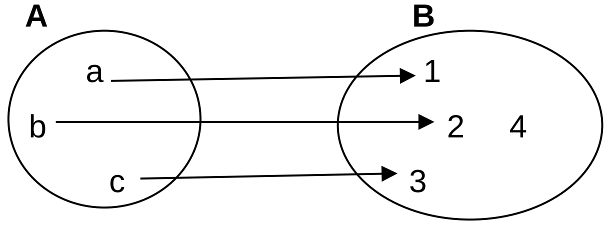
-Si la función admite una representación mediante diagrama de flechas, la misma será inyectiva si a cada elemento del codominio le llega a lo sumo una flecha.

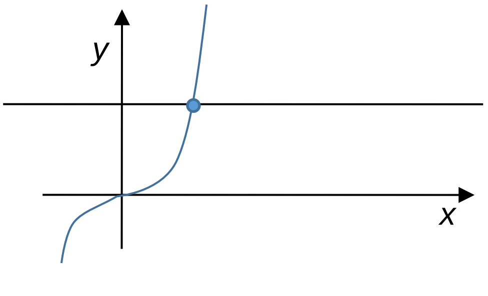
-En una representación en un sistema de coordenadas cartesianas, un criterio para decidir si la función es inyectiva es el siguiente: Toda recta horizontal que corte al eje de las ordenadas en un punto de su codominio debe cortar a su gráfica en a lo sumo un punto.





No es inyectiva **No es inyectiva**





Es inyectiva **Es inyectiva**

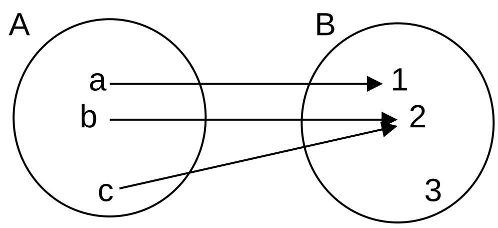
Función suryectiva (o sobreyectiva):

Una función $f(x)$ es **suryectiva** o sobreyectiva si todo elemento del codominio es la imagen de uno o más elementos del dominio. Es decir:
Sea $f: A \to B$, $f(x)$ es suryectiva si: $(\forall y)(y \in B \to (\exists x)(x \in A \wedge y = f(x)))$.

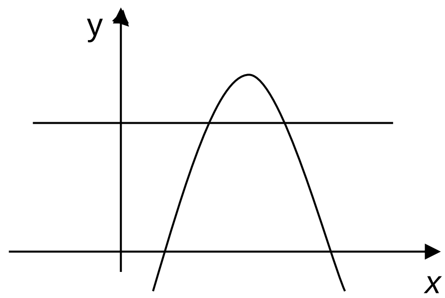
Equivalentemente $f(x)$ es suryectiva si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Codominio}(f)$

-Si la función admite una representación mediante diagrama de flechas, la misma será suryectiva si a cada elemento del codominio le llega al menos una flecha.

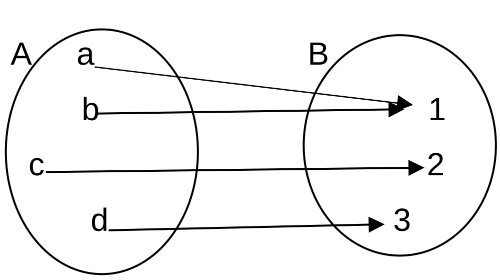
-En una representación en un sistema de coordenadas cartesianas, un criterio para decidir si la función es suryectiva es el siguiente: Toda recta horizontal que corte al eje de las ordenadas en un punto de su codominio debe cortar a su gráfica en al menos un punto.



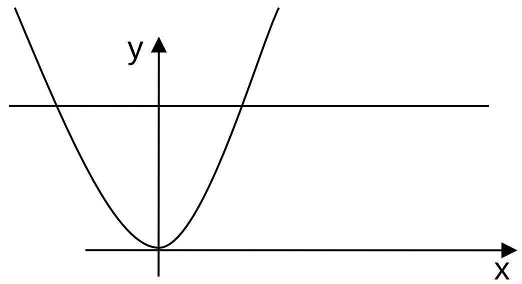
No es suryectiva



Si consideramos $f: A \to \mathbb{R}$, no es suryectiva



Es suryectiva



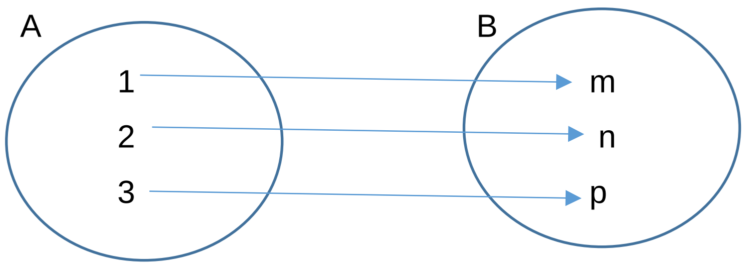
Si consideramos $f: A \to \mathbb{R}_0^+$ es suryectiva

Función biyectiva:

Una función $f(x)$ es biyectiva si es inyectiva y suryectiva. Es decir que todo elemento del codominio es la imagen de uno y sólo un elemento del dominio. Se dice también que hay una correspondencia "uno a uno", o que la correspondencia es biunívoca.

Si una función $f: A \to B$ es biyectiva, por la suryectividad todo elemento $y \in B$ es la imagen ($y = f(x)$) de algún $x \in A$ y, por la inyectividad, ese elemento $x \in A$ es único, es decir que **<u>todo</u> $y \in B$ tiene una <u>única</u> preimagen $x \in A$ que cumple $y = f(x)$.**

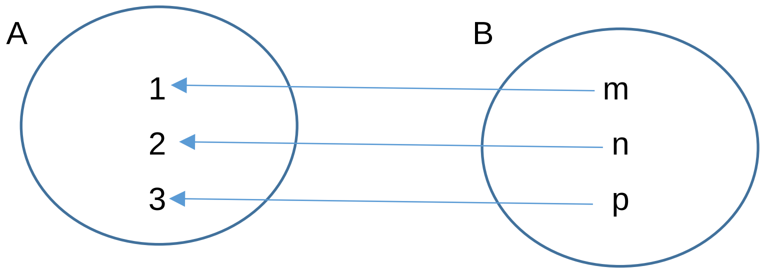
Ejemplo 3.10:



Esta función $\boldsymbol{f}$ con dominio A y codominio B es biyectiva, ya que todo par de elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas y además todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio.

Decimos que 1 es la preimagen de m ya que $\boldsymbol{f(1) = m}$

Como todo elemento del codominio tiene una única preimagen, podemos de manera intuitiva mirar la correspondencia al revés y en ese caso definir una nueva función $\boldsymbol{g: B \to A}$



Esto nueva función introduce la siguiente definición.

Función inversa

Si una función $f: A \to B$ es biyectiva, llamamos **función inversa de** $f(x)$ a la función $g: B \to A$ dada por $g(y) = x \iff y = f(x)$.

A esta función $\boldsymbol{g}$, inversa de f, se la indica con f^{-1}.

Por la observación anterior: Una función f tiene inversa sí y sólo si f *es* biyectiva.

Ejemplo 3.11:

Mirando la función $f: A \to B$ del ejemplo 3.10, definida por:

$\boldsymbol{f(1) = m}$, $\boldsymbol{f(2) = n}$, $\boldsymbol{f(3) = p}$

Decimos que la función $\boldsymbol{g}$, es la inversa de $\boldsymbol{f}$ y está definida por:

$\boldsymbol{f^{-1}(m) = 1}$, $\boldsymbol{f^{-1}(n) = 2}$, $\boldsymbol{f^{-1}(p) = 3}$

Ejercicios:

30. Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{a, b, c\}$ conjuntos. Definir una función con dominio A y codominio B, que sea suryectiva.

31. Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$ conjuntos. Definir una función con dominio A y codominio B, que sea inyectiva.

32. Definir conjuntos finitos A, B, C, D, E y realizar diagramas de flechas para definir una función:

a) $f: B \longrightarrow C$ que sea inyectiva y no suryectiva

b) $g: D \longrightarrow E$ que sea suryectiva y no inyectiva

c) $f: B \longrightarrow A$ que sea biyectiva. Definir la función inversa.

33. Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos justificando lo que afirma:

a) "Una recta horizontal es la gráfica de una función inyectiva"

b) "Una recta vertical es la gráfica de una función"

c) "Una parábola con eje paralelo al eje y es la gráfica de una función inyectiva"

d) “Una parábola con eje paralelo al eje x es la gráfica de una función”

e) “Una circunferencia es la gráfica de una función”

f) “Dos conjuntos finitos entre los que se establece una función biyectiva pueden tener distinta cantidad de elementos.”

34. Para las **funciones** del ejercicio 16 indicar si son inyectivas, suryectivas o biyectivas.

35. Para las **funciones** del ejercicio 17 indicar si son inyectivas. Defina para cada una un codominio de manera que sean suryectivas y otro para que no lo sean.

36. Analice si las funciones $suelo, techo\ \ y\, factorial$ son funciones inyectivas, suryectivas o biyectivas.

---

4. ANEXO: APLICACIONES

Transcribimos un fragmento del libro “Matemáticas para la Computación” de José Murillo que resume de algún modo la importancia de este capítulo:

“La lógica matemática no es de reciente creación, no surgió con el uso de las computadoras, por el contrario se ha consolidado en nuestro tiempo porque es una herramienta fundamental para mejorar el software y hardware que conocemos. La historia de la lógica tiene sus inicios en el siglo III a. C. con la “Teoría silogista” de Aristóteles, quien introdujo los cuantificadores ∀ y ∃, así como reglas de inferencia conocidas como el silogismo hipotético:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ p \rightarrow r \end{array}$$

Esta regla se aplica en matemáticas y programación, algunas veces sin saber que se trata del silogismo hipotético: “Si (X > Y) y (Y > Z) entonces (X > Z).

También se encuentra disfrazada en algunas líneas de código de la siguiente manera:

If X > Y and Y > Z then X > Z .

Aunque en sus inicios se usó principalmente para elaborar demostraciones matemáticas, en su aplicación a la programación el procedimiento de la demostración equivale a desarrollar un algoritmo para resolver un problema, usando para ello las instrucciones válidas (asignación, ciclos, lectura, escritura, declaración, etc.) de un lenguaje formal. Tanto el procedimiento de demostración como el diseño de algoritmos, dependen

exclusivamente de la lógica usada por la persona que los desarrolla. Los caminos en ambas situaciones pueden ser más o menos eficientes, pero lo interesante en ambos casos es que permiten usar la creatividad y reflexión de la persona para lograr el objetivo, ya que no existe una forma única de demostrar un teorema o desarrollar un algoritmo.

En tiempos remotos Crisipo de Sodi (281-206 a. C.) introdujo los operadores lógicos de la conjunción ($\wedge$), la disyunción ($\vee$), la implicación ($\rightarrow$), la disyunción exclusiva ($\oplus$) y la complementación ('), así como los valores de "falso" o "verdadero". Con esos operadores lógicos, muchos siglos después Augustus De Morgan (1806-1871) enunció sus famosas leyes de De Morgan:

$(p \vee q \vee \ldots \vee z)' \equiv p' \wedge q' \wedge \ldots \wedge z'$ y $(p \wedge q \wedge \ldots \wedge z)' \equiv p' \vee q' \vee \ldots \vee z'$

que tienen aplicación no sólo en lógica matemática sino también en teoría de conjuntos.

A partir de esta información George Boole (1815-1864) creó el álgebra booleana, la cual tiene amplias aplicaciones en la construcción de computadoras, robótica y automatización de sistemas eléctricos, mecánicos y electrónicos.

La lógica matemática también proporciona elementos para la creación de nuevos lenguajes de programación, al permitir estructurar sintáctica y semánticamente el lenguaje que se está desarrollando.

Otra aplicación importante de la lógica matemática y de las operaciones entre conjuntos, se encuentra en las bases de datos, en donde se consideran los archivos como **relaciones** que pueden manipularse por medio de operadores lógicos para obtener nuevos reportes de información, dando origen a lo que se conoce como **"álgebra relacional"** en la cual se basan todos los manejadores de bases de datos conocidos. Las redes de computadoras también utilizan el concepto de relación para representar la comunicación entre computadoras, de forma que es posible realizar operaciones lógicas entre matrices booleanas para obtener características necesarias en una red. Por todo lo anterior, se puede decir que la lógica matemática es esencial en la computación ya que permite sentar las bases para el entendimiento formal de prácticamente todas las áreas de ésta (bases de datos, programación, inteligencia artificial, lenguajes formales, sistemas digitales, redes, etcétera)."

Mostraremos algunos ejemplos con ÁLGEBRA RELACIONAL:

El álgebra relacional consiste de algunas simples, pero poderosas herramientas para construir nuevas relaciones a partir de otras. Si pensamos que las relaciones iniciales son los datos almacenados en una base de datos entonces las nuevas relaciones se pueden ver como respuestas a algunas consultas. En adelante llamaremos tablas a las estructuras donde está almacenada la información.

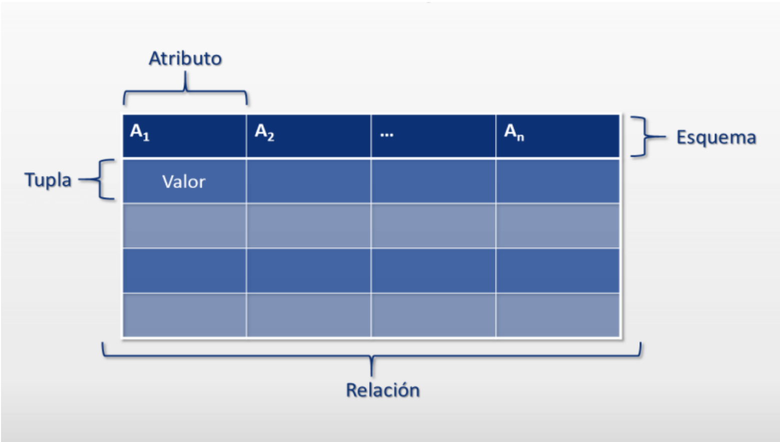
Para realizar estas consultas se utilizan operadores.

Los operadores básicos son: Unión, Diferencia, Producto Cartesiano, Selección, Proyección.

Los operadores derivados son: Intersección, Join, División, Asociación. Se forman combinando los operadores básicos.

En una Tabla identificamos tuplas y atributos.

Una tupla se define como una **función** que asocia unívocamente los nombres de los atributos de una relación con los valores de una instanciación de la misma. Es una fila de una tabla relacional.



Por ejemplo, en la siguiente tabla los nombres de los atributos son **Nro alumno, Apellido, Nombre** y **Año de Ingreso.**

Alumnos de la Facultad de Informática

Nro alumno	**Apellido**	**Nombre**	**Año de ingreso**
57784	Lopez	Esteban	2019
57654	Pizarro	Mariana	2019
57605	Lopez	Nicolás	2018
56232	Navarro	Josefina	2018
55433	Taus	Marisa	2017

Una **tupla** es por ejemplo:

57784	Lopez	Esteban	2019

Una unión es compatible entre dos relaciones R, S, si ellas están definidas sobre el mismo conjunto de atributos, es decir que R y S deben tener esquemas idénticos y el orden de las columnas debe ser el mismo.

La siguiente tabla es unión compatible con la tabla Alumnos de la Facultad de Informática:

Alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas

Nro alumno	**Apellido**	**Nombre**	**Año de ingreso**
77744	Armendariz	Juan Ignacio	2019
76354	Baez	Juliana	2019
76452	Navarro	Josefina	2019
76681	Mendez	Ivan	2018

Las operaciones Básicas:

Cada operador del álgebra acepta una o dos relaciones y retorna una relación como resultado. **σ y Π son operadores unarios**, es decir que se aplican a una relación o tabla, el resto de los operadores son binarios, se aplican a dos relaciones o tablas.

Selecciona (σ): Permite seleccionar un subconjunto de tuplas de una relación (R), todas aquellas que cumplan la(s) condición(es) P, esto se expresa como: $\sigma_P(R)$

Ejemplo: si queremos seleccionar de la tabla Alumnos los que tienen ingreso posterior o igual al año 2018, la operación es: $\boldsymbol{\sigma_{\text{Año de ingreso}\geq 2018}(Alumnos\ de\ la\ F\ de\ I)}$

Nro alumno	**Apellido**	**Nombre**	**Año de ingreso**
57784	Lopez	Esteban	2019
57654	Pizarro	Mariana	2019
57605	Lopez	Nicolás	2018
56232	Navarro	Josefina	2018

Una condición puede ser una combinación, donde se pueden usar operadores como: $\wedge$, $\vee$, combinándolos con operadores $<, >, \leq, \geq, =, \neq$.

Ejemplo: $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{Apellido=Lopez} \wedge \boldsymbol{Año\ de\ ingreso=2019}}(\boldsymbol{Alumnos\ de\ la\ F\ de\ I})$

selecciona todas las tuplas que contengan Lopez como apellido y que contengan a 2019 como año de ingreso en la relación Alumnos.

Nro alumno	Apellido	Nombre	Año de ingreso
57784	Lopez	Esteban	2019

Proyección (Π): Permite extraer columnas (atributos) de una relación, dando como resultado un *subconjunto vertical* de atributos de la relación, esto se expresa como:

$\prod_{A_a, A_2, \ldots, A_n} (R)$ donde $A_1, A_2, \ldots A_n$ son atributos de la relación *R* .

Ejemplo: $\prod_{\boldsymbol{Apellido,Año\ de\ ingreso}}(\boldsymbol{Alumnos})$

Selecciona los atributos Apellido y Año de ingreso de la relación Alumnos, mostrados como un subconjunto de la relación Alumnos.

Apellido	Año de ingreso
Lopez	2019
Pizarro	2019
Lopez	2018
Navarro	2018
Taus	2017

Unión (∪): La operación $R \cup S$ retorna el conjunto de tuplas que están en R, o en S, o en ambas. R y S deben ser *uniones compatibles*.

Ejemplo: si disponemos de las tablas mencionadas anteriormente Alumnos de la Facultad de Informática y Alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas, esta operación nos devolverá una tabla con todos los alumnos que estén en alguna o en ambas tablas, sin elementos repetidos. Esta operación es útil ya que, si tuviéramos las tablas de todas las facultades, esta unión nos daría el número de estudiantes de toda la universidad, ya que la suma de los estudiantes de cada Facultad tiene alumnos repetidos.

La operación $\boldsymbol{Alumnos\ de\ la\ F.de\ Inform\acute{a}tica} \cup \boldsymbol{Alumnos\ de\ la\ F.de\ Ciencias\ Exactas}$ **:**

Nro alumno	**Apellido**	**Nombre**	**Año de ingreso**
57784	Lopez	Esteban	2019
57654	Pizarro	Mariana	2019
57605	Lopez	Nicolás	2018
56232	Navarro	Josefina	2018
55433	Taus	Marisa	2017
77744	Armendariz	Juan Ignacio	2019
76354	Baez	Juliana	2019
76681	Mendez	Ivan	2018

Diferencia (-): La operación $R - S$ entrega todas aquellas tuplas que están en R, pero no en S. R y S deben ser *uniones compatibles*.

Con esta operación, si hacemos

$\boldsymbol{Alumnos\ de\ la\ F.de\ Inform\acute{a}tica - Alumnos\ de\ la\ F.de\ Ciencias\ Exactas}$, podemos ver los alumnos que sólo están inscriptos en la Facultad de Informática.

Veamos 2 de las operaciones no básicas:

Intersección **(∩)**: La intersección de dos relaciones se puede especificar en función de otros operadores básicos: $R \cap S = R - (R - S)$

La intersección corresponde al conjunto de todas las **tuplas** que están en R y en S, siendo R y S *uniones compatibles*.

En nuestro ejemplo la operación:

$\boldsymbol{Alumnos\ de\ la\ F.de\ Inform\acute{a}tica} \cap \boldsymbol{Alumnos\ de\ la\ F.de\ Ciencias\ Exactas}$**:**

Nro alumno	**Apellido**	**Nombre**	**Año de ingreso**
56232	Navarro	Josefina	2018

Las siguientes operaciones relacionan tablas que no necesariamente son uniones compatibles, sino que establecemos la relación a través de claves primarias y claves externas.

Producto cartesiano (x): El producto cartesiano de *dos relaciones* **R y S** entrega una relación, cuyo *esquema* corresponde a una combinación de todas las tuplas de **R** con cada una de las tuplas de **S**, y sus atributos corresponden a los de **R** seguidos por los de **S**. Veremos en las pSe escribe como: $R \times S$

Join (⋈) : El resultado es una relación con los atributos de ambas relaciones y se obtiene combinando las tuplas de ambas relaciones que tengan el mismo valor en los atributos comunes. Es una combinación de las proyección, selección y producto cartesiano en una sola operación, donde la condición es la igualdad Clave Primaria = Clave Externa, y la proyección elimina la columna duplicada (clave externa).

Ejemplo: supongamos ahora que tenemos una tabla con las materias de una carrera, con su código y su profesor asignado y otra tabla con las inscripciones, donde cada inscripto tiene su nro de alumno, nombre, y código de materia a la que se inscribió:

Materias

Códigom	NombreP
1	Julián
2	Camila
3	Pilar

Clave Primaria

Inscripciones

NroAlu	NombreA	Códigoi
22344	Romero	1
22344	Romero	2
23521	Díaz	1
23521	Díaz	2
23521	Díaz	3
24213	Lopez	2

Clave Primaria

Clave Externa

$$\boldsymbol{Materias \bowtie Inscripciones_{codigom=codigoi}}$$

Códigom	NombreP	NroAlu	NombreA
1	Julián	22344	Romero
1	Julián	23521	Díaz
2	Camila	22344	Romero
2	Camila	23521	Díaz
2	Camila	24213	Lopez
3	Pilar	23521	Díaz

Bibliografía

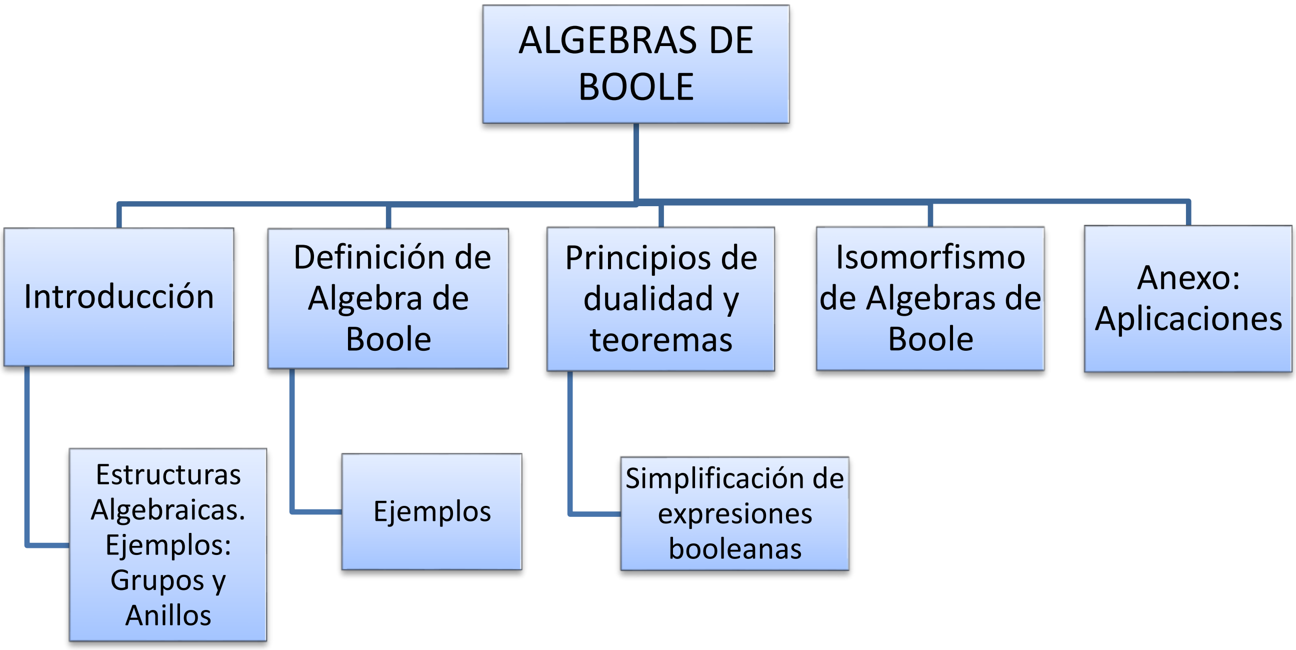
- L. Oubiña, ***Introducción a la Teoría de Conjuntos***, Editorial EUDEBA, Argentina, 1974.
- S. Lipschutz, ***Matemática Finita***, Serie de Compendios Schawm, Ed. Mc Graw- Hill, México.
- S. Lipschutz y M. Lipson, ***2000 problemas resueltos de Matemática discreta**,* Serie de Compendios Schawm, Ed. Mc Graw- Hill, España, 2004.
- R. Espinosa Armenta, ***Matemáticas discretas***, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010

………

Capítulo 3

ALGEBRAS DE BOOLE

CONTENIDOS:



Matemático invitado: George Boole

En el siglo XIX, el matemático George Boole (1815-1864), en sus libros: "*The Mathematical Analysis of Logic*" (1847) y "*An Investigation of The Laws of Thought*" (1854), desarrolló la idea de que las proposiciones lógicas podían ser tratadas mediante herramientas matemáticas siguiendo el comportamiento de reglas algebraicas. Igual que en álgebra tradicional, también se trabaja con letras para denominar variables y formar ecuaciones para obtener el resultado de ciertas operaciones mediante una ecuación o expresión booleana.

Los trabajos de Boole y los de sus discípulos resultaron extraños en su época porque en aquel momento parecían no tener aplicaciones. A mediados del siglo XX el álgebra de Boole resultó de una gran importancia práctica, importancia que se ha ido incrementando hasta nuestros días, en el manejo de información digital. Gracias a ella, Claude Shannon (1916-2001) pudo formular su teoría de la codificación y John Von Neumann (1903-1957) pudo enunciar el modelo de arquitectura que define la estructura interna de las computadoras desde la primera generación.

Por esto, Boole es hoy considerado uno de los fundadores de las Ciencias de la Computación y de la base teórica para la era digital.

1. Introducción

Definiremos en este capítulo las Algebras de Boole como una Estructura Algebraica.

Una **Estructura Algebraica** es un conjunto no vacío con una o más operaciones definidas en él.
Estas operaciones pueden ser **binarias** o **unarias**. Las operaciones binarias se realizan entre dos elementos del conjunto y las operaciones unarias son las que se aplican a un elemento del conjunto.

Formalmente: Dado un conjunto no vacío A,

- **una *operación binaria* en A es una función del producto cartesiano AxA en A, $f: AxA \to A$.**
  Decir que una operación es *binaria* en A es equivalente a decir que la operación es *cerrada* en A. Esto quiere decir que al realizar la operación entre dos elementos cualesquiera de A el resultado es también un elemento de A.
- **una *operación unaria* es una función de A en A, $f: A \to A$**
  Recordemos que, al estar definidas como función, todo par de elementos tiene un único correspondiente en el caso de las operaciones binarias y todo elemento de A tiene un único correspondiente para el caso de las unarias.

Hay distintas Estructuras Algebraicas que ya conocemos, el nombre que recibe cada estructura algebraica depende de las operaciones definidas en el conjunto y de las propiedades que tengan esas operaciones.

Si $\boldsymbol{A}$ es un conjunto con una operación \$, definida en él, que cumple las propiedades:

1) Cerrada o binaria: para cualesquiera a y b elementos de A, se cumple que: $a\$b \in A$

2)Asociativa: para cualesquiera $a,$ b y c elementos de A, se cumple que: $(a\$b)\$c = a\$(b\$c)$

3)Existencia de elemento neutro: existe un elemento n en A tal que para cualquier otro elemento a de A se cumple que $a\$n = n\$a = a$

4)Existencia de elemento opuesto: para cualquier elemento a de A existe un elemento a' en A tal que: $a\$a' = a'\$a = n$

Entonces decimos que A con la operación \$ tiene estructura de GRUPO o equivalentemente que el par (A, \$) es un GRUPO.

Si además cumple la propiedad:

5)Conmutativa: para cualesquiera a y b elementos de A, se cumple que: $a\$b = b\$a$

Tiene estructura de **GRUPO CONMUTATIVO O GRUPO ABELIANO.**

NOTA: la operación en este caso es \$, es sólo un símbolo para nombrar una operación cualquiera, así como A es el nombre de un conjunto que puede ser cualquiera.

En adelante analizaremos estas propiedades para conjuntos y operaciones particulares.

Ejemplo 1.1:

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros con la operación suma, que escribimos: $(\mathbb{Z}, +)$ es un **Grupo Conmutativo**.

La operación suma tiene en este conjunto las siguientes propiedades:

►*Cerrada o binaria*: para cualquier par de números enteros su suma da un número entero:

$$Si\ a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z}\ entonces\ a + b \in \mathbb{Z}$$

►*Asociativa:* para cualquier terna de números enteros el resultado de sumarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos:

$$Si\ a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z}\ y\ c \in \mathbb{Z}\ \ entonces\ (a + b) + c = a + (b + c)$$

►*Existencia de elemento neutro*: ya que existe un **único** número tal que sumado a cualquier otro da como resultado el mismo número. El elemento neutro es el 0 pues existe el 0 en $\mathbb{Z}$ tal que: $si\ a \in \mathbb{Z}\ entonces\ \ a + 0 = 0 + a = a$

►*Existencia de elemento opuesto*: ya que para todo número entero existe otro, **único,** que sumado a él da como resultado el elemento neutro:

$$Si\ a \in \mathbb{Z}\ entonces\ \ a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Por estas propiedades de la suma en $\mathbb{Z}$, decimos que $(\mathbb{Z}, +)$ tiene estructura de **Grupo**.

Además, la operación suma cumple la propiedad:

►*Conmutativa*: para cualquier par de números enteros el resultado de sumarlos da lo mismo en cualquier orden: $Si\ a \in \mathbb{Z}\ y\ b \in \mathbb{Z}\ \ entonces\ a + b = b + a$

Por eso decimos que $(\mathbb{Z}, +)$ tiene estructura de **Grupo conmutativo o Grupo abeliano**.

Ejemplos 1.2:

a) $(\mathbb{R}, +)$, los números reales con la suma son un **Grupo Conmutativo**.

b) $(\mathbb{Z}, .)$, los números enteros con la multiplicación **NO tienen estructura de Grupo.**
   Se cumplen las propiedades: cerrada, asociativa, hay elemento neutro (en este caso es el 1, ya que todo número entero multiplicado por 1 da como resultado el mismo número).
   Sin embargo, la existencia de un número que multiplicado por otro de como resultado el neutro, que en el caso de la operación suma llamamos opuesto y en este caso se llama inverso multiplicativo, **no se cumple**. Para todo número entero, debería existir un número que, multiplicado por él, dé 1, pero esto no se cumple.
   Si a es un entero , distinto de 1 y -1, $a.\frac{1}{a} = 1$, pero $\frac{1}{a}$, no es un número entero.
   Por ejemplo si tomamos $a = 3$, es un entero, pero al buscar un número que multiplicado por él de 1, tenemos que $3.\frac{1}{3} = 1$, pero $\frac{1}{3}$ no es un número entero.

c) $(\mathbb{N}, +)$, los números naturales con la suma **NO tienen estructura de Grupo**, ya que no tienen opuesto, el número $-a$ para cualquier a natural, no es un número natural.
   Por ejemplo si tomamos $a = 4$, es un natural, pero al buscar un número que sumado a él de 0 (neutro de la operación suma), tenemos que $4 + (-4) = 0$, pero -4 no es un número natural.

d) Definimos en el conjunto de los números enteros una operación Δ de la siguiente manera:
   Para todo par de enteros a y b , $a\Delta b = a + b + 2$, donde + es la suma usual en los enteros.
   Entonces $(\mathbb{Z}, \Delta)$ es un **Grupo Conmutativo.**

Demostración: si a, b y c son números enteros:

Δ **es cerrada**: $a\Delta b = a + b + 2$ es un número entero.

Δ **es asociativa**: $(a\Delta b)\Delta c = a\Delta(b\Delta c)$ porque $(a + b + 2) + c + 2 = a + (b + c + 2) + 2$

Δ **tiene neutro**: Buscamos un elemento $n \in \mathbb{Z}$ que cumpla que: $a\Delta n = n\Delta a = a$.

Como $a\Delta n = a + n + 2 = a$ entonces $n = a - a - 2$, $n = -2$.

Con ese valor de n, se cumple que:

$a\Delta(-2) = a + (-2) + 2 = a$ y que $(-2)\Delta a = (-2) + a + 2$

Entonces -2 es elemento neutro de $(\mathbb{Z}, \Delta)$

Δ **es conmutativa**: $a\Delta b = b\Delta a$ porque $a + b + 2 = b + a + 2$

Δ **tiene opuesto**: Para cada $a \in \mathbb{Z}$ buscamos un elemento $a' \in \mathbb{Z}$ que cumple que:

$a\Delta a' = a'\Delta a = -2$, lo igualamos a -2 porque es el elemento neutro para esta operación.

El número $-4 - a$ es opuesto de a en $(\mathbb{Z},*)$, ya que

$a\Delta a' = a + a' + 2 = -2$ entonces $a' = -2 - 2 - a$, entonces $a' = -4 - a$.

Con ese valor de a' se cumple que:

$a\Delta(-4 - a) = a + (-4 - a) + 2 = -2$ y $(-4 - a)\Delta a = (-4 - a) + a + 2 = -2$

El número $-4 - a$ es opuesto de a en $(\mathbb{Z}, \Delta)$

Ejemplo 1.3:

Conjunto de partes.

Dado un conjunto $A = \{a, b, c\}$ podemos enumerar todos los subconjuntos posibles de *A*, o dicho de otro modo todos los conjuntos incluidos en *A.*

Construimos entonces un nuevo conjunto con todos esos conjuntos como elementos, este nuevo conjunto se llama ***conjunto de partes de A*** y se indica:

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Notemos que todos los elementos de *P*(*A*) son conjuntos, por eso se escriben entre llaves, salvo el conjunto vacío, que no tiene elementos y se escribe sin llaves porque es el nombre del conjunto.

Es por eso que escribimos: $\{a, b\}$ “contenido en” *A* , $(\{a, b\} \subseteq A)$, $\{c\}$ “contenido en” *A*, $(\{c\} \subseteq A)$, son subconjuntos de A.

Y cada **uno de esos conjuntos es elemento de *P(A)***, por eso escribimos**:** $\{a, b\}$ *“pertenece a” P(A),* $(\{a, b\} \in P(A))$ *y también* $\{c\}$ *“pertenece a” P(A),* $(\{c\} \in P(A))$*.*

Por lo cual $\{\{a, b\}, \{c\}\}$ *"está contenido en" P(A),* ya que es un conjunto formado por elementos de *P(A) .*

En general:

Dado un conjunto H, se define ***P*(H), el *conjunto de partes de* H,** que tiene como elementos todos los subconjuntos de H. Los *elementos* de *P*(H) son *conjuntos*, todos los que están contenidos en H, el vacío que está contenido en cualquier conjunto y el conjunto total H ($\emptyset \subseteq \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{H}$)

***P*(H) =**$\{\boldsymbol{X}: \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{H}\}$, se lee: " el conjunto de los conjuntos X tales que X está contenido en H"

En palabras: *X* es un elemento de *P*(H) si y sólo si *X* está incluido en H

En símbolos: $X \in P(\mathrm{H}) \Leftrightarrow X \subseteq \mathrm{H}$

Si H es un conjunto finito (o sea tiene un número finito $\boldsymbol{n}$ de elementos), el número de elementos de *P*(H) es 2^n.

El conjunto vacío tiene 0 elementos, entonces si $H = \emptyset$, $P(H)=\{\emptyset\}$, el conjunto de partes del conjunto vacío tiene como único elemento al vacío, es el único subconjunto incluído en el vacío (porque $\emptyset \subseteq \emptyset$), también vale en este caso que tiene 2^0=1 elementos.

En el conjunto $\boldsymbol{P(H)}$, para H no vacío, la operación unión ($\cup$)**cumple las siguientes propiedades para** A, B y C elementos de P(H):

Cerrada: $A \cup B$ es un elemento de P(H) ya que la unión de subconjuntos de un conjunto W es también un subconjunto de W

Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, por la propiedad vista en la Capítulo 2.

Neutro: El $\emptyset$ es elemento de P(H), y para todo *A* en P(H), $A \cup \emptyset = A$ y $\emptyset \cup A = A$, así $\emptyset$ es el elemento neutro de la unión.

Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$, por la propiedad vista en el Capítulo 2.

Pero ($\boldsymbol{P(H)}$,$\cup$) **No es un grupo** ya que no existe el opuesto para cada subconjunto de H, no hay ningún elemento F en $P(H)$ que unido a otro elemento E no vacío de P(H) de como resultado el conjunto vacío (neutro de la unión).

Un **Anillo** es una terna ordenada $(\boldsymbol{A}, +, .)$ **,** donde **A** es un conjunto y **"+"** y **"."** son dos operaciones que cumplen:

1) $(\boldsymbol{A}, +)$ **es un grupo conmutativo**

2) La operación "." es una operación cerrada y asociativa.

Cerrada: para cualesquiera a y b elementos de A, se cumple que: $a.b \in A$

Asociativa: para cualesquiera $a,$ b y c elementos de A, se cumple que: $(a.b).c = a.(b.c)$

3) La operación "." es distributiva con respecto a "+".

Distributiva: para cualesquiera $a,$ b y c elementos de A, se cumple que:

$a.(b+c) = a.b + a.c \quad y \quad (b+c).a = b.a + c.a$

Ejemplo 1.4:

Tomemos el conjunto de los números reales con las operaciones suma y multiplicación, que escribimos: $(\mathbb{R}, +, .)$.

Como mencionamos en los ejemplos anteriores $(\mathbb{R}, +)$ tiene estructura de Grupo conmutativo.

La operación multiplicación tiene en este conjunto las siguientes propiedades:

► *Cerrada o binaria:* ya que para cualquier par de números reales su producto da un número real: $Si\ a \in \mathbb{R}\ y\ b \in \mathbb{R}\ entonces\ a.b \in \mathbb{R}$

► *Asociativa:* el producto es una operación asociativa ya que para cualquier terna de números reales el resultado de multiplicarlos da lo mismo asociando los dos primeros o los dos últimos: $Si\ a \in \mathbb{R}\ y\ b \in \mathbb{R}\ y\ c \in \mathbb{R}\ entonces\ (a.b).c = a.(b.c)$

► *Distributiva del producto con respecto a la suma:* ya que para cualquier terna de números reales el resultado de multiplicar uno de ellos por la suma de los otros dos da el mismo resultado que multiplicar cada uno de ellos y después sumarlos:

$Si\ a \in \mathbb{R}\ y\ b \in \mathbb{R}\ y\ c \in \mathbb{R}\ entonces\ a.(b+c) = a.b + a.c$ y $(b+c).a = b.a + c.a$

Decimos entonces que $(\mathbb{R}, +, .)$, por cumplir todas las propiedades antes mencionadas tiene estructura de **Anillo.**

Ejemplos 1.5:

a) $(\mathbb{Z}, +, .)$ es un **Anillo ya que** $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo conmutativo y la multiplicación en $\mathbb{Z}$ es cerrada, asociativa y distributiva con respecto a la suma.

b) $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales o fraccionarios. Recordemos que los números racionales son aquellos que se escriben como cociente de enteros, es decir que $\mathbb{Q} = \{a: a = \frac{x}{y} \wedge\ x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge y \neq 0\}$. En la terna $(\mathbb{Q}, +, .)$ las operaciones son la suma y el producto usuales, así $(\mathbb{Q}, +, .)$ es un **Anillo ya que** $(\mathbb{Q}, +)$ es un grupo conmutativo y la multiplicación es cerrada, asociativa y distributiva con respecto a la suma.

Ejemplo 1.6:

Tomemos el conjunto de los números racionales o fraccionarios con las operaciones suma y #, que escribimos: $(\mathbb{Q}, +, \#)$. Se define la operación # como: $a\#b = \frac{a.b}{2}$

Como mencionamos en los ejemplos anteriores $(\mathbb{Q}, +)$ tiene estructura de Grupo conmutativo.

La operación # tiene en este conjunto las siguientes propiedades:

► *Cerrada:* ya que para cualquier par de números racionales su producto dividido 2 da un número racional: $Si\ a \in \mathbb{Q}\ y\ b \in \mathbb{Q}\ entonces\ a\#b = \frac{a.b}{2} \in \mathbb{Q}$

Demostración: $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{z}{w}$, $y \neq 0, w \neq 0$, entonces $\frac{a.b}{2} = \frac{x}{y}.\frac{z}{w}.\frac{1}{2} = \frac{x.z}{y.w.2}$, $x.z$ es entero por ser producto de enteros y por la misma razón $y.w.2$ es entero. Además $y.w.2 \neq 0$. Por lo tanto $\frac{a.b}{2} \in \mathbb{Q}$

► *Asociativa:* # es una operación asociativa ya que:

$$Si\ a, b\ y\ c \in \mathbb{Q}\quad entonces\ (a\#b)\#c = a\#(b\#c)$$

Demostración: sean $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{z}{w}$, $c = \frac{u}{m}$, $y \neq 0, w \neq 0, m \neq 0,$ entonces

$$(a\#b)\#c = \left(\frac{x}{y}.\frac{z}{w}.\frac{1}{2}\right)\#c = \frac{x.z}{y.w.2}.\frac{u}{m}.\frac{1}{2} = \frac{x.z.u}{y.w.m.4}$$

$$a\#(b\#c) = a\#\left(\frac{z}{w}.\frac{u}{m}.\frac{1}{2}\right) = \frac{x}{y}.\frac{z.u}{w.m.2}.\frac{1}{2} = \frac{x.z.u}{y.w.m.4}$$

Entonces $(a\#b)\#c = a\#(b\#c)$

► *Distributiva de # con respecto a la suma:* ya que

$$Si\ a, b\ y\ c \in \mathbb{Q}\ entonces\ a\#(b + c) = a\#b + a\#c$$

Demostración: sean $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{z}{w}$, $c = \frac{u}{m}$, $y \neq 0, w \neq 0, m \neq 0,$ entonces

$$a\#(b + c) = a\#\left(\frac{z}{w} + \frac{u}{m}\right) = a\#\left(\frac{zm + uw}{w.m}\right) = \frac{x}{y}.\frac{zm + uw}{w.m}.\frac{1}{2} = \frac{x.z.m + x.u.w}{y.w.m.2}$$

$$a\#b + a\#c = \left(\frac{x}{y}.\frac{z}{w}.\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{x}{y}.\frac{u}{m}.\frac{1}{2}\right) = \frac{xz}{y.w.2} + \frac{xu}{y.m.2} = \frac{x.z.m + x.u.w}{y.w.m.2}$$

Entonces $a\#(b+c) = a\#b + a\#c$. Del mismo modo se muestra que $(b+c)\#a = b\#a + c\#a$

Decimos entonces que $(\mathbb{Q}, +, \#)$, por cumplir todas las propiedades antes mencionadas tiene estructura de **Anillo.**

Ejemplo 1.7:

Tomemos el conjunto de los números enteros con la operación $, definida como:

$$a\#b = b - a + 2$$

Vamos a demostrar que la operación es binaria pero no conmutativa ni asociativa en $\mathbb{Z}$.

Cerrada o binaria: para todo par de números enteros $a\#b = b - a + 2$ es un número entero por ser suma y resta de enteros.

No conmutativa: $a\#b = b - a + 2$ y $b\#a = a - b + 2$

Estas expresiones son aparentemente distintas, sin embargo hay casos donde son iguales, si $a = b$, $a - a + 2 = a - a + 2$.

Entonces debemos dar un contraejemplo para mostrar al menos un caso donde no se cumple:

Si $a = 3$ y $b = 5$ tenemos que: $3\#5 = 5 - 3 + 2 = 4$, y $5\#3 = 3 - 5 + 2 = 0$

Por lo tanto la propiedad conmutativa no se cumple porque mostramos al menos un par de números enteros para los cuales no es cierta la igualdad.

No asociativa: $a\#(b\#c) = a\#(c - b + 2) = c - b + 2 - a + 2$ y

$(a\#b)\#c = (b - a + 2)\#c = c - (b - a + 2) + 2 = c - b + a$

Estas expresiones son aparentemente distintas, sin embargo hay casos donde son iguales, si $a = 2$, $c - b + 2 - 2 + 2 = c - b + 2$.

Entonces debemos dar un contraejemplo para mostrar al menos un caso donde no se cumple:

Si $a = 3$, $b = 5$ y $c = 1$ tenemos que:

$3\#(5\#1) = 1 - 5 + 2 - 3 + 2 = -3$, y $(3\#5)\#1 = 1 - 5 + 2 = -2$

Por lo tanto, la propiedad asociativa no se cumple porque mostramos al menos una terna de números enteros para los cuales no es cierta la igualdad.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: usamos números para mostrar que la propiedad NO SE CUMPLE PARA TODOS LOS NÚMEROS, por eso se llama contraejemplo. Cuando

queremos mostrar que una propiedad sí se cumple, como en los ejemplos anteriores, usamos letras que representan cualquier número o elemento del conjunto.

Estos ejemplos nos muestran que las estructuras algebraicas no son más que una manera de clasificar conjuntos con determinadas operaciones.
Hay muchas más estructuras algebraicas como los Anillos con unidad, los Dominios de Integridad, los Cuerpos, etc. que no son objeto de estudio de este curso. En lo que sigue estudiaremos la estructura algebraica Algebra de Boole.

Ejercicios:
Salvo aclaración en contrario, los símbolos +, - y . se referirán a las operaciones usuales de suma, resta y producto respectivamente, en el conjunto de números que se indique.

1) En $\mathbb{R}$, se define la operación $ como: $a\$b = a - b + a.b$
   Analizar si la operación es cerrada y conmutativa en $\mathbb{R}$.

2) Analizar si $(\mathbb{N},.)$ es grupo conmutativo.

3) Sea H un conjunto y (P(H), ∩) el conjunto de Partes de H con la operación intersección.
   Analizar si (P(H), ∩) es un grupo conmutativo.

4) Demostrar que $(\mathbb{R} - \{0\},.)$ es un grupo conmutativo. Indique por qué $(\mathbb{R},.)$ no es un grupo.

5) Sea $E = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x\ es\ par\}$. Demostrar que (E,+,.) es un anillo.

6) Sea ⊗ , la operación definida sobre los números enteros como: $a \otimes b = 2.a.b$. Demostrar que $(\mathbb{Z}, +, \otimes)$ es un anillo

7) En el conjunto P de los números pares se definen dos operaciones, una de ellas es la suma usual y la otra (#) está definida en la forma: si $x, y \in P$, $x\#y = \frac{x.y}{2}$
Demostrar que (P, +, #) tiene estructura de anillo.

2. Álgebras de Boole

Definición:

Un **Algebra de Boole** es una estructura algebraica formada por un conjunto B, con al menos dos elementos distintos (***primer y último elementos***), designados en forma general con los símbolos 0 y 1, dos *operaciones binarias*: ∨ (denominada *supremo*) y ∧ (denominada *ínfimo*), y una **operación unaria**: ´ (denominada *complemento*), con las siguientes propiedades para elementos cualesquiera $x, y, z \ en\ B$:

$(B1)\ \ x \vee y = y \vee x$ conmutatividad de ∨

$(B2)\ \ x \wedge y = y \wedge x$ conmutatividad de ∧

$(B3)\ \ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ distributividad de ∧ con respecto a ∨

$(B4)\ \ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ distributividad de ∨ con respecto a ∧

$(B5)\ \ x \vee 0 = x$ 0 elemento neutro de la operación ∨

$(B6)\ \ x \wedge 1 = x$ 1 elemento neutro de la operación ∧

$(B7)\ \ x \vee x' = 1$

$(B8)\ \ x \wedge x' = 0$

Un Algebra de Boole también se indica como $\mathcal{B}$ = (B, ∨,∧, ´, 0, 1) cuando sea necesario referirse a las operaciones y al primer y último elemento.

Otra notación: Se utiliza también el símbolo + para indicar el supremo ∨ y el símbolo . para indicar el ínfimo ∧ **, aunque al igual que en la multiplicación usual en $\mathbb{R}$ suele ponerse un elemento al lado del otro omitiendo el punto.** Con esta notación los axiomas se transforman en:

$(B1)\ \ x + y = y + x$ conmutatividad de +

$(B2)\ \ xy = yx$ conmutatividad de .

$(B3)\ \ x(y + z) = (xy) + (xz)$ distributividad de . con respecto a +

$(B4)\ \ x + (yz) = (x + y)(x + z)$ distributividad de + con respecto a .

$(B5)\ \ x + 0 = x$ 0 elemento neutro de la operación +

$(B6)\ \ x1 = x$ 1 elemento neutro de la operación .

$(B7)\ \ x + x' = 1$

$(B8)\ \ xx' = 0$

Usaremos en adelante esta última notación cuando nos estemos refiriendo a elementos de un álgebra de Boole cualquiera.

Observaciones:

1) Los axiomas son válidos para cualesquiera elementos del álgebra, esto quiere decir que por ejemplo: $(xy) + (xy)' = 1$ por el Axioma 7. Lo que dice el axioma es que un elemento supremo su complemento da 1, no importa como se llame el elemento.

Del mismo modo $x + y'$ no tiene por qué dar 1 porque y' no es el complemento de x.

También por Axioma 5 $[(xy') + z] + 0 = [(xy') + z]$, porque lo que dice el axioma es que cualquier elemento supremo el 0 da el mismo elemento.

2) El 0 y el 1 son símbolos para indicar primero y último elementos en la definición de un álgebra de Boole general. En cada ejemplo particular primer y último elementos serán los que correspondan de acuerdo con el tipo de elementos de cada caso, como se verá en los ejemplos siguientes.

3) También son válidas la asociatividad de $+$ y de .:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x(yz) = (xy)z$$

Estas propiedades se presentan como axiomas en algunos textos, pero pueden deducirse de los axiomas dados, demostración que no incluiremos en este curso.

4) El supremo y el ínfimo son operaciones binarias, es decir funciones de B$\times$B en B; el complemento, como operación unaria, es una función de B en B. El hecho de que sean funciones asegura que para todo par *x, y* de elementos de B, *x+y* $\in$ B, *xy* $\in$B y son *únicos* y que el complemento ***x´*** $\in$B y es *único.*

Proposición: Sea $x \in B$, si existe un elemento $a \in B$ que cumple que $xa = 0\ y\ \ x + a = 1$ entonces $a = x'$, es decir que a es el complemento de x.

Esta proposición asegura que el complemento de un elemento es único.

Demostración:

Sea $x \in B$, si existe un elemento $a \in B$ que cumple que $xa = 0\ y\ \ x + a = 1$

Podemos escribir

$$a \underbrace{=}_{Por\ B5} a + 0 \underbrace{=}_{Por\ B8} a + xx' \underbrace{=}_{Por\ B4} (a + x)(a + x') \underbrace{=}_{Por\ B1} (x + a)(a + x')$$

$$\underbrace{=}_{Por\ hipótesis} 1(a+x') \underbrace{=}_{Por\ B6} a+x'$$

$$x' \underbrace{=}_{Por\ B5} x'+0 \underbrace{=}_{Por\ hipótesis} x'+xa \underbrace{=}_{Por\ B4} (x'+x)(x'+a) \underbrace{=}_{Por\ B1} (x+x')(x'+a)$$

$$\underbrace{=}_{Por\ B7} 1(x'+a) \underbrace{=}_{Por\ B6} x'+a \underbrace{=}_{Por\ B1} a+x'$$

Llegamos entonces a que: $a = a + x'$ y $x' = a + x'$ entonces $a = x'$

Esto nos dice que si x∈ B y un elemento a ∈ B cumple B7 y B8 entonces a es el complemento de x.

5) Toda álgebra de Boole *finita* (es decir B es un conjunto finito) admite una representación mediante un diagrama de Hasse y los elementos en el nivel inmediato superior al 0 se denominan ***átomos***.

Un átomo es un elemento $\boldsymbol{a}$ del álgebra tal que para cualquier otro elemento $\boldsymbol{b}$ del álgebra $\boldsymbol{ab = a}$ o $\boldsymbol{ab = 0}$

En general el diagrama de Hasse de un algebra $\mathcal{B}$ se construye ubicando en el nivel inferior al 0 y luego se ordenarán los elementos según las operaciones supremo e ínfimo del algebra correspondiente. El diagrama de Hasse es una representación gráfica de la relación entre elementos de un conjunto que le da un **orden** de acuerdo al criterio con el que se los relaciona.
Lo mostraremos en los ejemplos a continuación.

Ejemplo 2.1

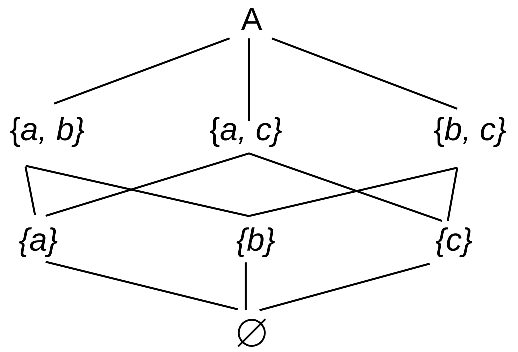
Dado un conjunto H, el conjunto *P(*H) con la ***unión*** como supremo, la ***intersección*** como ínfimo , el ***complemento*** para conjuntos, el vacío $\varnothing$ ***como primer elemento*** y ***H como último elemento***, $\Pi = (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}), \cup, \cap, {}^{\boldsymbol{c}}, \emptyset, \boldsymbol{H})$ **es un álgebra de Boole**, usualmente llamada ***Álgebra de Partes*** de un conjunto.

Si el conjunto H es finito Π admite una representación por un diagrama de Hasse como se muestra en la figura, los conjuntos unitarios (los que tienen sólo un elemento) son sus átomos.

a) Si tomamos el conjunto $A = \{a, b, c\}$ su conjunto de partes es:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Su diagrama de Hasse se representa como sigue:



Algunos ejemplos de construcción:
Como: $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
en el diagrama aparece: $\{a, b\}$ — $\{a\}$ $\{b\}$

Como $\{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\}$
en el diagrama aparece: $\{a, c\}$ $\{b, c\}$ — $\{c\}$

Este diagrama ordena los elementos de *P(A) por inclusión.*

Por ejemplo: como $\{c\} \subseteq \{a, c\}$ entonces en el diagrama aparece:

$$\begin{array}{c} \{a,c\} \\ | \\ \{c\} \end{array}$$

Como $\{c\} \subseteq \{a, c\}$ y $\{a, c\} \subseteq \{\mathrm{a, b, c}\}$ entonces aparece:

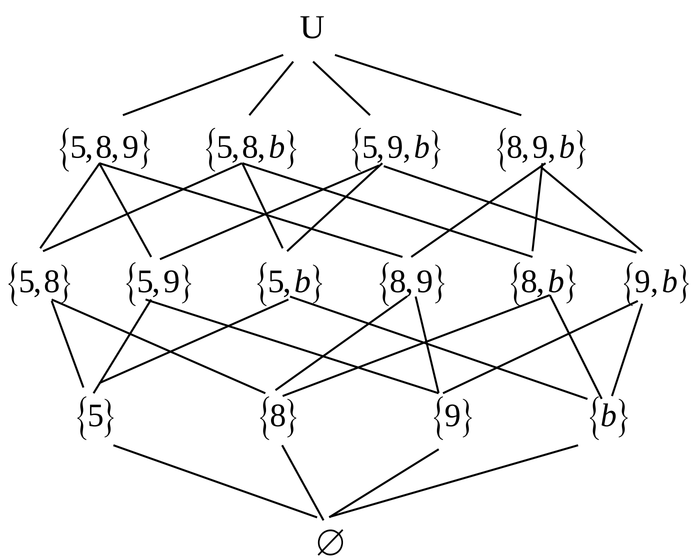
$$\begin{array}{c} \{a,b,c\} \\ | \\ \{a,c\} \\ | \\ \{c\} \end{array}$$

En este caso sus átomos son: *{a}, {b}, {c}*

b) Si tomamos el conjunto $U = \{5,8,9, b\}$, el conjunto *P(U)*, de partes de *U* es:

$$P(U) = \{\emptyset, \{5\}, \{8\}, \{9\}, \{b\}, \{5,8\}, \{5,9\}, \{5, b\}, \{8,9\}, \{8, b\}, \{9, b\}, \{5,8,9\}, \{5,8, b\}, \{5,9, b\}, \{8,9, b\}, U\}$$

Su diagrama de Hasse es:



En ese ejemplo los átomos son $\{5\}$, $\{8\}$, $\{9\}$ **y** $\{b\}$.

En la figura se representan los conjuntos por niveles de acuerdo con el número de elementos.
Las líneas de abajo hacia arriba indican la inclusión al nivel inmediato siguiente, se omiten las líneas por transitividad. También indican las uniones al nivel inmediato superior, por ejemplo $\{\mathbf{8}, \mathbf{9}\} \cup \{\mathbf{8}, \boldsymbol{b}\} \cup \{\mathbf{9}, \boldsymbol{b}\} = \{\mathbf{8}, \mathbf{9}, \boldsymbol{b}\}$**.**
De arriba hacia abajo indican las intersecciones al nivel inmediato inferior como $\{\mathbf{5}, \mathbf{8}, \boldsymbol{b}\} \cap \{\mathbf{5}, \mathbf{9}, \boldsymbol{b}\} = \{\mathbf{5}, \boldsymbol{b}\}$

Esta representación recibe el nombre de ***diagrama de Hasse*** de *P*(U).

Ejemplo 2.2

a) Sea $M = \{[p], [\sim p], \top, \perp\}$, el conjunto formado por:

$[p]$ que representa todas las proposiciones del conjunto M equivalentes con p

$[\sim p]$ que representa todas las proposiciones del conjunto M equivalentes con $\sim p$

$\top$ que representa todas las proposiciones que son tautologías

$\perp$ que representa todas las proposiciones que son contradicciones

Definimos en el conjunto M, las operaciones $\wedge$, conjunción, $\vee$, disyunción y $\sim$, negación.

Esto quiere decir que como $p \equiv p \wedge p$, decimos que $[p] = [p \wedge p]$. En consecuencia, tomar $[p]$, que se lee "la clase de todas las proposiciones equivalentes con p" , nos permite poner signo igual en lugar de equivalente.
Del mismo modo, por ejemplo $\sim p \vee p \equiv p \vee\sim p$, decimos entonces que $[\sim p \vee p] = [p \vee\sim p]$ y podemos notar a todas las tautologías con el símbolo $\top = [\sim p \vee p] = [p \vee\sim p]$

Entonces el conjunto $\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{M}, \vee, \wedge \sim, \perp, \top)$ es un Algebra de Boole, llamada el **Algebra de Boole del cálculo proposicional** de una letra proposicional**.** Donde las operaciones binarias de ínfimo y supremo son la conjunción y la disyunción respectivamente, la operación unaria complemento es la negación y el **0** es la clase de las contradicciones($\perp$) y el **1** es la clase de las tautologías($\top$).

Este conjunto de proposiciones es cerrado bajo los conectivos conjunción, disyunción y negación cumple las propiedades (B1) a (B8).
Notemos que hemos tomado las clases de las proposiciones para poder tener igualdad, ya que por ejemplo $p \wedge q$ y $q \wedge p$ **no** son ***iguales*** sino lógicamente equivalentes.

Para obtener el ***Álgebra de Boole del cálculo proposicional*** se define:

$$[p \vee q] = [p] \vee [q]$$

$$[p \wedge q] = [p] \wedge [q]$$

$$[\sim p] =\sim [p]$$

El diagrama de Hasse de este Algebra correspondiente a la generada por una proposición o en general una letra proposicional es:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1}\ (\top) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ {[p]} \arrow[dr, dash] & & {[\sim p]} \arrow[dl, dash] \\ & \mathbf{0}\ (\bot) & \end{tikzcd}$$

Observemos que, así como en el diagrama del conjunto de partes de un conjunto, las líneas de abajo hacia arriba indican las uniones al nivel inmediato superior, en este caso indican la disyunción entre los elementos del álgebra.
De arriba hacia abajo, en el diagrama del conjunto de partes indican las intersecciones al nivel inmediato inferior, en este caso indican las conjunciones.

Este diagrama ordena los elementos del conjunto de proposiciones *por implicación,* ya que

$[p] \rightarrow ([p] \vee [q])$ es siempre verdadero para cualesquiera $[p]$ y $[q]$.

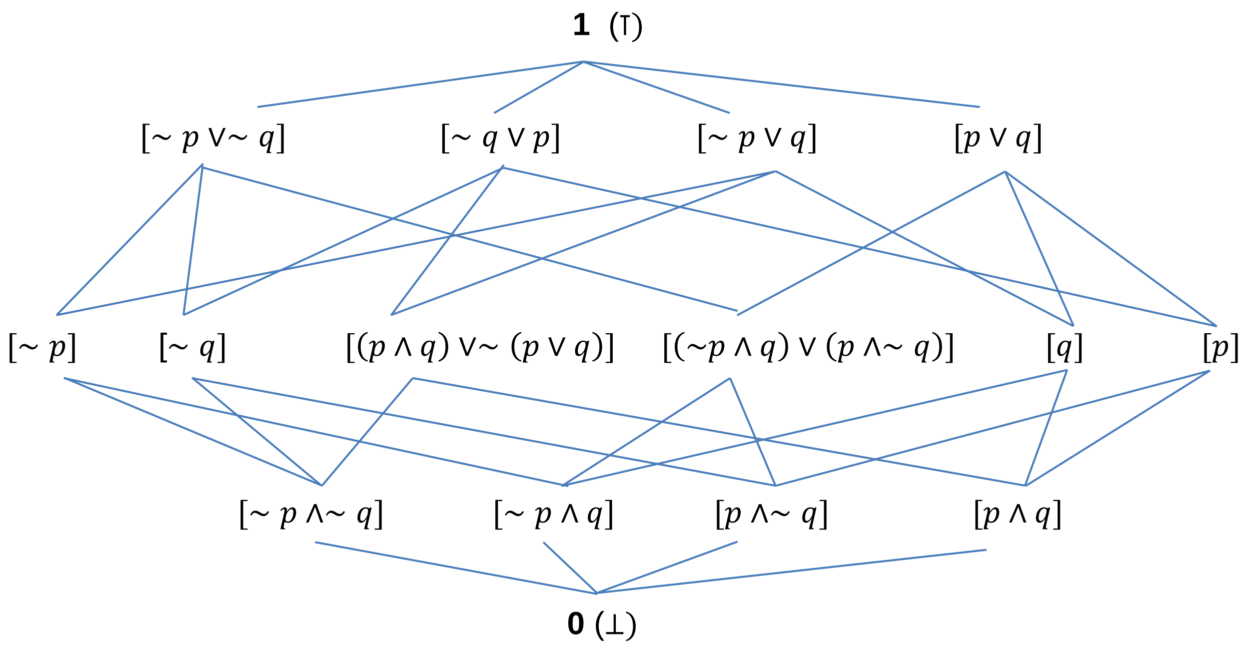
Esto quiere decir que toda vez que para un par de proposiciones w y m si $[w] \rightarrow [m]$ entonces en el diagrama aparece:

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[d, dash] \\ {[w]} \end{tikzcd}$$

b) Sea W el conjunto formado por dos letras proposicionales y todas las proposiciones formadas por sus negaciones, disyunciones y conjunciones: $W = \{[p],\ [q],\ [\sim p],\ [\sim q],\ [p \vee q],\ [p \vee\sim q],\ [\sim p \vee q],\ [\sim p \vee\sim q],\ [p \wedge q],\ [p \wedge\sim q],\ [\sim p \wedge q],\ [\sim p \wedge\sim q],\ [(p \wedge q) \vee\sim (p \vee q)],\ [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge\sim q)],\ \top,\ \bot\}$

Entonces el conjunto $\mathbf{\Delta} = (W,\ \wedge,\ \vee,\ \sim,\ \bot,\ \top)$ es un Algebra de Boole, llamada el **Algebra de Boole del cálculo proposicional** de dos letras proposicionales**.**

El diagrama de Hasse de este Algebra es:



Ejemplo 2.3

El conjunto B=$\{0,1\}$ con las operaciones ∨ ***e*** ∧ dadas por las tablas:

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

Y la operación complemento definida por: 0´=1, 1´= 0, es un álgebra de Boole.

El diagrama de Hasse de este Algebra $\mathcal{B}$ = (B, ∨,∧, ´, 0, 1) es:

Ejemplo 2.4

Sea $B^2 = \{0,1\}^2 = \{(x,y): x \in \{0,1\} \wedge y \in \{0,1\}\}$, es decir que B^2 es el conjunto de los pares ordenados que toman valor 0 o valor 1, es el producto cartesiano BxB.

Se definen las operaciones ∨,∧, ´ :

$$(x,y) \vee (w,z) = (x \vee w, y \vee z)$$ ∨ definido en B=$\{0,1\}$

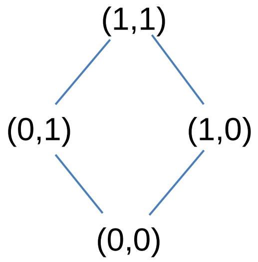
$$(x,y) \wedge (w,z) = (x \wedge w, y \wedge z)$$ ∧ definido en B=$\{0,1\}$

$$(x,y)' = (x', y')$$ $'$ definido en B=$\{0,1\}$

El (0,0) (neutro para ∨) es el 0 y el (1,1) (neutro para ∧) es el 1.

Así definida $\boldsymbol{\Omega} = (B^2, \vee,\ \wedge, ' \ , (0,0), (1,1))$ es un Algebra de Boole.

Su diagrama de Hasse es:



Ejemplo 2.5

En general, el conjunto $B^n = \{0,1\}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0,1\} \wedge 1 \le i \le n \wedge n \in \mathbb{N}\}$, es decir, B^n es el conjunto de las n-uplas, donde cada componente toma valor 0 o valor 1, con las operaciones ∨,∧, ´ :

$$(x_1, x_2, \dots x_n) \vee (y_1, y_2, \dots y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \dots, x_n \vee y_n)$$
$$(x_1, x_2, \dots x_n) \wedge (y_1, y_2, \dots y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \dots, x_n \wedge y_n)$$
$$(x_1, x_2, \dots x_n)' = (x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}')$$

Donde $(0,0,\dots,0)$ es el 0 y $(1,1,\dots,1)$ es el 1, es un Algebra de Boole.

Ejercicios

8) Sean A, B y C elementos de un Algebra de Boole $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{F}, +, ., ', \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ indique si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, señalando los axiomas usados:

a) $A + (AC) = (A + A)(A + C)$

b) $AB + 0 = AB$

c) $CB1 = CB$

d) $(AB)' + AB = 0$

e) $CA(CA)' + B = B$

f) $CA + 0 = 0$

g) $(AB)' + AB + CC' = 1$

9) Sea $H = \{a, b, c, d, e\}$ y sea $\Pi = (P(H), \cup, \cap, \ ^{c}, \emptyset, H)$ el álgebra de Boole de partes de *H.* Los siguientes conjuntos son elementos de *P(H):* $\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}$. Represente la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.

10) Sea W el conjunto formado por las clases de 3 letras proposicionales $[p], [q], [r]$ y sus conjunciones, disyunciones y negaciones. Sea $\Lambda = (W,\ \vee,\ \wedge,\ \sim,\ \bot,\ \top)$ el álgebra de Boole del cálculo proposicional.
Las siguientes proposiciones son elementos de *W:* $[p \wedge q],\ [q \wedge r],\ [p], [q], [r], [q \vee r]$. Represente la parte del diagrama de Hasse donde aparecen esos elementos.

---

3. Principio de Dualidad y teoremas en un álgebra de Boole

Dualidad:

El enunciado ***dual*** de una proposición en un álgebra de Boole $\mathcal{B}$ = (B,+,., ´, 0, 1) es el que se obtiene intercambiando las operaciones + e . y los elementos **0** y **1** en la proposición original. En la definición (B1) y (B2) son duales una de la otra, lo mismo (B3) y (B4), (B5) y (B6), (B7) y (B8). Por la simetría de estos axiomas que definen un álgebra de Boole $\mathcal{B}$ = (B,+,.,, 0, 1) , cualquier proposición en B es verdadera si y sólo si su dual lo es. Este hecho se conoce como ***principio de dualidad***.

Teorema 1. (*Leyes de Idempotencia*). Sea $\mathcal{B}$ = (B,+,., ´, 0, 1) un álgebra de Boole, entonces para cualquier $x \in$ B se cumple que: ***x* + *x* = *x* , *x x* = *x***

Demostración:

Queremos ver que ***x x* = *x*.** Partiremos entonces de la expresión ***x x* :**

$$x\,x \;=\; (x\,x) + 0 \;=\; (x\,x) + (x\,x') \;=\; x\,(x + x') \;=\; x\;1 \;=\; x$$

Por axioma B5: $x + 0 = x$	Por axioma B8: $xx' = 0$	Por axioma B3: $x(y+z) = (xy) + (xz)$	Por axioma B7: $x + x' = 1$	Por axioma B6: $x1 = x$

Y por dualidad vale también ***x* + *x*=*x*.**

Teorema 2. (*Leyes de acotación*). Sea $\mathcal{B}$ = (B,+,., ´, 0, 1) un álgebra de Boole, entonces para cualquier $x \in$ B, se cumple que: ***x* +1 = 1** , ***x* 0 = 0**

Demostración:

Vamos a probar que ***x* 0 = 0**, entonces partimos de la expresión ***x* 0:**

$$x\,0 \;=\; x\,(x\,x') \;=\; (x\,x)\,x' \;=\; x\,x' \;=\; 0$$

Por axioma B8: $xx' = 0$	Por asociatividad: $x(yz) = (xy)z$	Por Teorema 1: $xx = x$	Por axioma B8: $xx' = 0$

Por dualidad también vale: ***x*+1 = 1.**

Teorema 3. (*Leyes de absorción*). Sea $\mathcal{B}$ = (B,+,., ´, 0, 1) un álgebra de Boole, entonces para cualesquiera $x \in$ B, $y \in$ B, se cumple que: ***x* + (*x y*) = *x* ,** ***x* (*x*+*y*) = *x***

Demostración:

Vamos a demostrar ***x* + (*x y*) = *x*.** Partimos de la expresión: ***x* + (*x y*):**

$$x + (x\,y) \;=\; (x\,1) + (x\,y) \;=\; x\,(1 + y) \;=\; x1 \;=\; x$$

Por axioma B6: $x1 = x$	Por axioma B3: $x(y+z) = (xy) + (xz)$	Por teorema 2: $x + 1 = x$	Por axioma B6: $x1 = x$

Por dualidad también es verdadero ***x* (*x*+*y*) = *x* .**

Teorema 4. (*Involución*). Sea $\mathcal{B}$ = (B,+,., ´, 0, 1) un álgebra de Boole, entonces para cualquier $x \in$ B, se cumple que: ***(x')' = x***

Demostración:

El enunciado dice que el complemento de ***x´*** es ***x.***

Es importante notar que el complemento de un elemento del álgebra es único (observación 4), esto quiere decir que si encontramos un elemento a que cumpla los axiomas B7 y B8:

x'+a* = 1 *y* *x' a*= 0** **entonces *a es el complemento de x'.

Sabemos por axioma B7 que un elemento supremo su complemento es 1: ***x* + *x´* = 1**

Sabemos por axioma B8 que un elemento ínfimo su complemento es 0: ***x x´*= 0**

Entonces, por los axiomas B1 y B2 también sabemos que: ***x´* + *x* = 1** , ***x´ x* = 0.**

Entonces ***x*** cumple los axiomas ***B7 y B8,*** es el complemento de ***x'***, y se escribe:

(x ')'= x

Teorema 5. (*Leyes de De Morgan*). Sea $\mathcal{B}$ = (B,+,., ´, 0, 1) un álgebra de Boole, entonces para $x \in$ B , $y \in$ B,

$$(x+y)' = x'y'$$
$$(xy)' = x'+y'$$

Demostración:

Con la misma idea que en la demostración anterior, teniendo en cuenta que el complemento es único, veremos que: **1)** (***x*** +***y)*** + ***(x' y')=1*** *y que* ***2)*** (***x*** +***y)*** ***(x' y')=0.***

Si esto se cumple quiere decir que ***(x' y')*** *es el complemento de* (***x*** +***y)***

1) Veremos que **(*x*** +***y)*** + ***(x' y') = 1***

$$(x+y)+(x'y') \underset{\uparrow}{=} [(x+y)+x'][(x+y)+y'] \underset{\uparrow}{=} [(x+x')+y][x+(y+y')] =$$

Por axioma B4: $x+(yz) = (x+y)(x+z)$

Por asociatividad: $x+(y+z) = (x+y)+z$
y Axioma B1: $x+y = y+x$

$$\underset{\uparrow}{=} (1+y)(x+1) \underset{\uparrow}{=} 1\ 1 \underset{\uparrow}{=} 1$$

Por axioma B7: $x+x' = 1$

Por Teorema 2: $x+1 = 1$

Por Teorema 1: $xx = x$

2) Veremos que $(x+y)\;(x'\;y') = 0$

$$(x+y)\;(x'\;y') \quad = \quad [x(x'y')] + [y(x'y')] \quad = \quad [(x\,x')\;y'] + [x'(y\;y')] \quad =$$

Por axioma B5: $x(y+z) = (xy) + (xz)$

Por asociatividad: $x(yz) = (xy)z$
y Axioma B2: $xy = yx$

$$= \quad (0y') + (x'0) \quad = \quad 0\;\;0 \quad = \quad 0$$

Por axioma B8: $xx' = 0$

Por Teorema 2: $x\,\mathbf{0} = 0$

Por Teorema 1: $xx = x$

Por lo tanto se tiene que $(x'\;y')$ *es el complemento de* $(x+y)$, es decir que:

$(x+y)' = (x'\;y')$.

Y por dualidad también vale que: $(x\;\;y)' = (x' + y')$

Relación entre teoría de conjuntos, lógica matemática y álgebra booleana y sus notaciones

La lógica matemática y el álgebra booleana son herramientas fundamentales de la computación que se apoyan en las leyes de la teoría de conjuntos para explicar teoremas matemáticos o bien para simplificar expresiones booleanas. En la tabla siguiente se presenta una comparación entre las leyes de la teoría de conjuntos, algunas equivalencias lógicas usadas en lógica matemática para la demostración de teoremas y algunas leyes del álgebra booleana que se utilizan en la simplificación de funciones booleanas que veremos a continuación.

		Teoría de Conjuntos A, B y C conjuntos	**Lógica** p, q, r proposiciones	**Algebra de Boole** x, y, z elementos de un álgebra de Boole
OPERACIONES	Igualdad	$A = B$	$p \Leftrightarrow q \;\; o \; p \equiv q$ Entonces $[p] = [q]$	$x = y$
		Unión: $A \cup B$	Disyunción: $p \vee q$	Supremo: $x + y$
		Intersección: $A \cap B$	Conjunción: $p \wedge q$	Infimo: xy
		Complemento: A^c	Negación: $\sim p$	Complemento: x'
AXIOMAS Y PROPIEDADES	Axiomas B1 y B2: Leyes conmutativas	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	$x + y = y + x$ $xy = yx$
	Axiomas B3 y B4: Leyes distributivas	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$x(y + z) = (xy) + (xz)$ $x + (yz) = (x + y)(x + z)$
	Axiomas B5 y B6: Neutros	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	$p \vee \perp \equiv p$ $p \wedge \top \equiv p$	$x + 0 = x$ $x1 = x$
	Axiomas B7 y B8: Complementos	$A \cup A^c = U$ $A \cap A^c = \emptyset$	$p \vee \sim p \equiv \top$ $p \wedge \sim p \equiv \perp$	$x + x' = 1$ $xx' = 0$
	Leyes asociativas	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$
	Teorema 1: Leyes de idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	$x + x = x$ $xx = x$
	Teorema 2: Leyes de acotación	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	$p \vee \top \equiv \top$ $p \wedge \perp \equiv \perp$	$x + 1 = 1$ $x0 = 0$
	Teorema 3: Leyes de absorción	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$x + (xy) = x$ $x(x + y) = x$
	Teorema 4: Involución	$(A^c)^c = A$	$\sim (\sim p) \equiv p$	$(x')' = x$
	Teorema 5: Leyes de Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$(x + y)' = x'y'$ $(xy)' = x' + y'$

En la tabla hay que observar que las leyes de la lógica matemática y el álgebra booleana son formalmente las mismas que las de la teoría de conjuntos, además las operaciones equivalentes se denotan de manera diferente en cada una.

Simplificación de expresiones booleanas mediante teoremas del Algebra de Boole.

Las variables booleanas son variables que toman valores 0 o 1.

Las ***funciones booleanas*** son funciones con dominio en B^n y codominio en B: $f: B^n \to B$.

Es decir que las funciones booleanas también toman valor 0 o 1, dependiendo de los valores de sus variables.

Se llama ***conjunto de verdad*** de una función booleana f al conjunto de elementos del dominio para los cuales la función vale 1: $\boldsymbol{V(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1\}}$

Así, una función booleana puede representarse mediante una tabla de verdad, por ejemplo, para una función de dos variables, tenemos:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{f(x,y)}$
0	0	$\boldsymbol{f(0,0)}$
0	1	$\boldsymbol{f(0,1)}$
1	0	$\boldsymbol{f(1,0)}$
1	1	$\boldsymbol{f(1,1)}$

Esta función puede representarse con una **expresión booleana**, donde aparecen los valores de las variables del conjunto de verdad de $\boldsymbol{f}$, es decir los valores para los cuales $\boldsymbol{f}$ vale 1.

Por ejemplo si tenemos la función booleana dada por la siguiente tabla:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{f(x,y)}$
0	0	$\boldsymbol{0}$
0	1	$\boldsymbol{1}$
1	0	$\boldsymbol{0}$
1	1	$\boldsymbol{1}$

La función puede representarse como $f(x,y) = x'y + xy$. Es decir que la función queda definida por su conjunto de verdad.

Esta expresión a su vez puede simplificarse usando los axiomas y teoremas del algebra de Boole:

$$\boldsymbol{x'y + xy \quad = \quad (x' + x)y \quad = \quad 1y \quad = \quad y}$$

Por axioma B5: $x(y+z) = (xy) + (xz)$

Por axioma B7: $x' + x = 1$

Por axioma B6: $x1 = x$

Ejemplo 3.1:

Una fábrica de refrescos desea que un sistema automático saque de la banda de transportación un refresco que no cumple con los requisitos mínimos de calidad, y para esto se cuenta con cuatro sensores en diferentes puntos del sistema de transportación para revisar aspectos importantes de calidad. Si los sensores son A, B, C y D y el sistema F es el que determina cuando sacará el refresco, tenemos el siguiente grupo de señales:

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

En la tabla anterior se muestran todas las posibles combinaciones de valores 0 o 1, de las variables.

La tabla indica que cuando F=1 es refresco debe ser retirado.

Esto implica que el refresco será extraído de la banda de transportación en cualquiera de los siguientes casos, ya que para cualquiera de ellos se tiene que F = 1:

A = 0 y B = 0 y C = 0 y D = 1, es decir cuando A’ =1 y B’ =1 y C’ =1 y D = 1

A = 0 y B = 0 y C = 1 y D = 1, es decir cuando A’ =1 y B’ =1 y C =1 y D = 1

A = 1 y B = 0 y C = 0 y D = 1, es decir cuando A =1 y B’ =1 y C’ =1 y D = 1

A = 1 y B = 0 y C = 1 y D = 1, es decir cuando A =1 y B’ =1 y C =1 y D = 1

A = 1 y B = 0 y C = 1 y D = 0, es decir cuando A =1 y B’ =1 y C =1 y D’ = 1

La función booleana que equivale a la tabla anterior es:

F = A'B'C'D + A'B'CD + AB'C'D + AB'CD + AB'CD'

La función booleana indica solamente los casos en donde el refresco será extraído, pero existen varios casos más en donde se dejará pasar porque cumple con los requisitos mínimos de calidad.

Observemos que podemos simplificar la expresión booleana para extraer los refrescos usando los axiomas y teoremas del algebra de Boole:

A'B'C'D + A'B'CD + AB'C'D + AB'CD + AB'CD' = A'B'D(C'+C) + AB'D(C'+C) + AB'CD' =

Por axioma B3: $x(y+z) = (xy) + (xz)$

= A'B'D(1) + AB'D(1) + AB'CD' = A'B'D + AB'D + AB'CD' = B'D(A'+A) + AB'CD' =

Por axioma B7: $x + x' = 1$

Por axioma B6: $x1 = x$

Por axioma B3: $x(y+z) = (xy) + (xz)$

= B'D(1) + AB'CD' = B'D + AB'CD'

Por axioma B7: $x + x' = 1$

Por axioma B6: $x1 = x$

De esta forma hemos obtenido una expresión simplificada de la función original

Esto nos dice que: F = A'B'C'D + A'B'CD + AB'C'D + AB'CD + AB'CD' = B'D + AB'CD'

Así podemos decir que el refresco se sacará de la cinta cuando:

B=0 y D=1 o cuando A=1 y B=0 y C=1 y D=0

Ejemplo 3.2:

Simplificar la expresión booleana: A'B+(ABC)'+C(B'+A)

A'B+(ABC)'+C(B'+A) =

Por Leyes de De Morgan: $(xy)' = x' + y'$

A'B+(A'+B'+C')+C(B'+A) =

Por axioma B3: $x(y+z) = xy + xz$

A'B+(A'+B'+C')+CB'+CA=

Por axioma B1: $x + y = y + x$ y
Por leyes asociativas: $x + (y + z) = (x + y) + z$

(A'B+A') + C' + (B'+CB') + CA =	Por axioma B5: $x1 = x$ Aplicado a: (A'B+A')=A'B+A'1 y (B'+CB')=B'1+CB'
A'B+A'1 + C' + B'1+CB' + CA =	Por axioma B3: $x(y+z) = xy + xz$ y Por axioma B1: $x + y = y + x$
A'(B+1) + B'(1+C) + C'+CA =	Por Axioma B6: $x + 1 = 1$ y Por axioma B4: $x + (yz) = (x + y)(x + z)$
A'1 + B'1 + [(C'+C)(C'+A)] =	Por Axioma B5: $x1 = x$ y Por axioma B8: $x + x' = 1$
A' + B' + [1(C' + A)] =	Por Axioma B5: $x1 = x$
A' + B' + (C' + A) =	Por axioma B1: $x + y = y + x$ y Por leyes asociativas: $x + (y + z) = (x + y) + z$
(A' + A) + (B' + C') =	Por axioma B8: $x + x' = 1$
1 + (B' + C') =	Por Axioma B6: $x + 1 = 1$

1

La expresión booleana en su forma más simple es 1, y este resultado indica que si se sustituyen las diferentes combinaciones con los valores binarios 0 o 1 de las variables A, B y C en la expresión inicial, entonces el resultado será siempre igual a 1 (lo que se conoce en lógica matemática como tautología).

En general luego de un proceso de simplificación el resultado no siempre es 1, en cambio lo que se espera es obtener una expresión más simple conformada por menos variables.

Cuando se plantea un problema, la expresión booleana no es necesariamente la óptima, en el sentido de que sea la más sencilla de implementar mediante compuertas lógicas, por eso el proceso de simplificación es muy importante, para implementar circuitos más claros.

El proceso de simplificación siempre se hace usando axiomas y teoremas, existen métodos que los aplican usando algoritmos, en este curso haremos sólo la aplicación directa de los axiomas y teoremas. En general la simplificación se hace para dejar la expresión como una suma de productos o como un producto de sumas, dependiendo de la manera de hacer su implementación posterior.

En este curso entenderemos como expresión simplificada, aquella que esté expresada como suma de productos (los productos entre variables o sus complementos) y que éstos sean el mínimo número posible.

Así, la expresión: **XYZ+X'YZ+WZ** es una suma de productos pero no está simplificada.

Entonces: **XYZ+X'YZ+WZ = (X+X')YZ+WZ = 1YZ+WZ = YZ+WZ** está simplificada.

Por axioma B3: $x(y+z) = xy + xz$	Por axioma B8: $x + x' = 1$	Por Axioma B5: $x1 = x$

Observemos que podríamos escribir **YZ+WZ=(Y+W)Z** pero en este caso no es una suma de productos.

Ejercicios

11) Sean $B = \mathbb{Z},\ +$ la suma usual de enteros, . el producto usual de enteros y para cada $a \in \mathbb{Z}$, se define $a' = -a$. ¿Es $H = (B, +, ., ', 0, 1)$ un álgebra booleana?

12) Demostrar que si 0 y 1 son el primer y último elemento de un Algebra de Boole, entonces $1' = 0$ y $0' = 1$

13) a) Probar la Ley de De Morgan: $(xy)' = x' + y'$

b) Expresar las Leyes de De Morgan en los conjuntos y en el cálculo proposicional, con los símbolos y operaciones que corresponden en cada caso

14) Si x, y, z, w son variables de un Álgebra de Boole, simplificar (hasta su mínima expresión) las siguientes expresiones, indicando las propiedades usadas:

a) $x + xy + x(x + y) =$

b) $x' + [(x\,x')'] =$

c) $x(y + x')' =$

d) $[x(y'y)] + [y(x + x')] =$

e) $y'xy + y'x + ywx' + yww =$

f) $[(x+y)'+z'][z'+(x+(yz)')']=$

15) Si x, y, z son variables de un Álgebra de Boole, demostrar que:

a) $x'y'z+x'yz+xy'z+xyz+xyz' = z+xy$

b) $x+(y+0)'+y'z = x+y'$

c) $x+y'+(xy+0)' = 1$

d) $x+(y+1)'+xy = x$

e) $((zx)'zx)'+xy+xy' = 1$

f) $x((y'+x)'+(y'+y)') = 0$

16) a) Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

b) Simplificar la expresión hallada.

17) a) Definir la expresión booleana que representa la siguiente función:

A	B	C	D	F(A,B,C,D)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

b) Simplificar la expresión hallada.

---

4. Isomorfismo de álgebras de Boole

Definición

Sean $\mathcal{B}_1$ = (B1,+,., ´, 0, 1) y $\mathcal{B}_2$ = (B2,+,., ´, 0, 1) dos álgebras de Boole. Un ***isomorfismo*** entre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ es una función biyectiva $f\colon \mathrm{B}_1 \to \mathrm{B}_2$ que cumple las siguientes propiedades:

Para todo par $x \in B_1, y \in B_1$: i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $f(xy) = f(x)f(y)$

iii) $f(x') = [f(x)]'$

Es decir que la imagen por f del supremo $x+y$ entre x e y es igual al supremo $f(x)+f(y)$ entre $f(x)$ y $f(y)$, la imagen por f del ínfimo xy es el ínfimo $f(x)f(y)$ entre sus imágenes y la imagen por f de x' (el complemento de x) es igual al complemento $[f(x)]'$ de su imagen, siendo x e y elementos de B1 y $f(x)$ y $f(y)$ elementos de B2.

Un isomorfismo es una biyección que conserva las operaciones. Cuando existe tal isomorfismo entre B1 y B2, se dice que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son ***isomorfas.***

$\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ tienen elementos distintos pero tienen *la misma forma*, sus diagramas de Hasse coinciden.

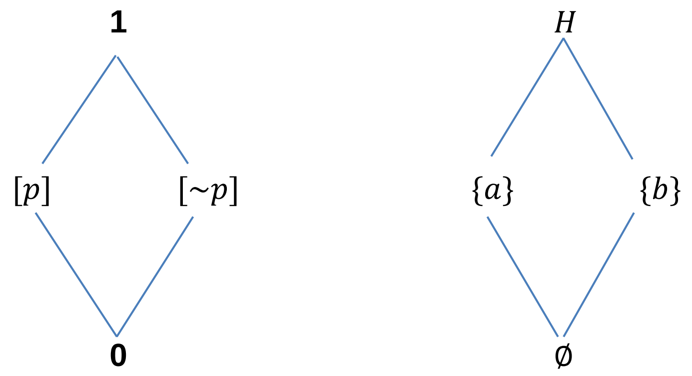
Ejemplo 4.1

Sea $P(H)$ el conjunto de partes de H, siendo $H = \{a, b\}$, entonces $P(H) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, H\}$ y el conjunto B formado por las proposiciones $[p]$, $[\sim p]$, con primer elemento $0 = [p \wedge\sim p]$ y último $1 = [p \vee\sim p]$.

La función $f\colon B \longrightarrow P(H)$ dada por:

$f(0) = \emptyset$, $f([p]) = \{a\}$, $f([\sim p]) = \{b\}$, $f(1) = H$ es un isomorfismo entre las álgebras de Boole $\boldsymbol{\mathcal{B}_1} = (B, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}_2} = (P(H), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, H)$.

Se observa que sus respectivos diagramas de Hasse coinciden:



Nótese que en $P(H)$ el 0 <u>es</u> el conjunto $\emptyset$ y el 1 es el conjunto H, mientras que en B el **0 y el 1** son símbolos que representan una contradicción y una tautología respectivamente.

Teorema 6. Sea $\mathcal{B}$ = (B,+,., ´, 0, 1) un álgebra de Boole, con B finito.
Entonces existe un conjunto U tal que $\mathcal{B}$ = (B,+,., ´, 0, 1) es isomorfa al álgebra de partes $\Pi = (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}), \cup, \cap, \ {}^{c}, \emptyset, \boldsymbol{U})$.

Sin hacer una demostración formal del teorema, podemos ver que:
Llamemos $A_{\mathrm{B}} = \{b_1, b_2, \dots b_n\}$ al conjunto de átomos de $\mathcal{B}$
Tomemos un conjunto $\boldsymbol{U} = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$, con la misma cantidad de elementos que los átomos de $\mathcal{B}$
Entonces el conjunto de los átomos del álgebra $\Pi(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}), \cup, \cap, \ {}^{c}, \emptyset, \boldsymbol{U})$**,** que podemos llamar $A_{\Pi} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots \{x_n\}\}$
Podemos construir la función que a cada átomo b_i de B le asigna el conjunto unitario $\{x_i\}$.
A partir de ahí se construye una biyección $\boldsymbol{f}$ entre B y $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U})$, respetando las propiedades.

Así $\boldsymbol{f}$ resulta ser un isomorfismo entre las álgebras y decimos que $\mathcal{B}$ es isomorfa al álgebra de partes Π.

Teorema 7.(Corolario del Teorema 6).
El número de elementos de un álgebra de Boole finita es una potencia de dos, 2^n con n>0.

Demostración:

Si $\mathcal{B}$ = (B,+,., ´, 0, 1) es un álgebra de Boole y B es finito, por el teorema anterior existe un conjunto U tal que $\mathcal{B}$ es isomorfa al álgebra de partes $\boldsymbol{\Pi} = (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}), \cup, \cap, \ ^{c}, \emptyset, \boldsymbol{U})$**.**

Por existir una función biyectiva $f: B \to P(U)$, B y $P(U)$ tienen la misma cantidad de elementos y como ya vimos que si U tiene *n* elementos, *P*(U) tiene 2^n elementos, se concluye que B también tiene 2^n elementos.

El número *n* debe ser mayor que 0 porque B tiene por lo menos dos elementos: el primero y el último.

Observación.

La condición enunciada en el Teorema 7 es necesaria, por lo que si el número de elementos de un conjunto *no* es una potencia de dos, se puede concluir que tal conjunto *no* es un álgebra de Boole.

La condición ***no*** es suficiente, el hecho de que un conjunto tenga 2^n elementos, con $n \geq 1$, ***no*** asegura que sea un álgebra de Boole.

Ejercicios

18) Sea $f: B_1 \to B_2$ un isomorfismo de algebras booleanas. Si llamamos $0_1 \ y \ 0_2$ al 0 de $B_1 \ y \ B_2$ respectivamente y $1_1 \ y \ 1_2$ al 1 de $B_1 \ y \ B_2$ respectivamente, demostrar que $f(0_1) = 0_2$ y $f(1_1) = 1_2$

19) a) Hallar un isomorfismo entre $\boldsymbol{\Omega} = (B^2, \vee, \wedge, ', (0,0), (1,1))$ y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.

b) Hallar un isomorfismo entre $\boldsymbol{\Omega} = (B^3, \vee, \wedge, ', (0,0,0), (1,1,1))$ y el álgebra de Boole de partes de un conjunto. Hacer los diagramas de Hasse de ambas álgebras.

Anexo

Una aplicación: Los circuitos y las puertas lógicas

Una aplicación del álgebra de Boole es el álgebra de circuitos de conmutación. Un *circuito de conmutación* es una red eléctrica formada por interruptores conectados por cable, con dos estados que son *cerrado* y *abierto*, a los que se les asigna, respectivamente, los valores 1 y 0, y dos terminales ***s*** y *t*.

La corriente eléctrica fluye de ***s*** a ***t*** a través del punto donde está localizado un interruptor si y sólo si éste está cerrado

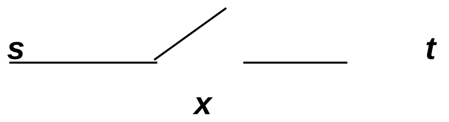


figura 1

En la figura 1 se muestra un circuito con un solo interruptor.

El circuito de la figura 2 está cerrado si y sólo si *x* o *y* están cerrados. Esta combinación de interruptores se indica con $x + y$, y se dice que los interruptores *x*, *y* están *en paralelo*

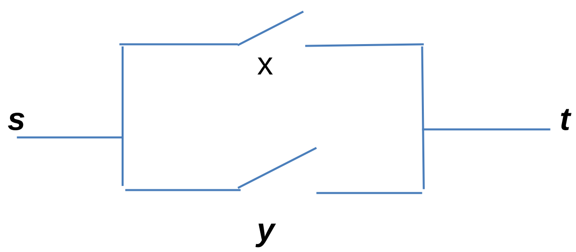


figura 2

Dos interruptores *x* e *y* están *en serie* si están conectados como en la figura 3

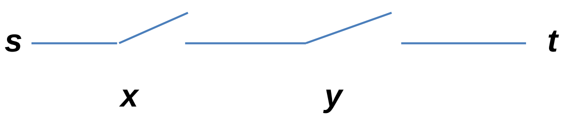


figura 3

En este caso el circuito está cerrado si y sólo si ambos *x* e *y* lo están, esta combinación de interruptores se indica con xy.

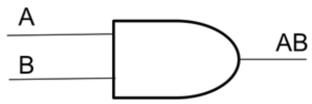
La operación ***supremo*** es la conexión en paralelo y el ***ínfimo*** es la conexión en serie. Los valores que pueden tomar los interruptores son sólo dos: {ON, OFF} o bien {1,0}. Si dos interruptores operan en tal forma que cuando uno está abierto el otro está cerrado, y viceversa entonces se designará uno de ellos con una letra y el otro por su ***complemento***.

Se indica con **0** al circuito que está siempre abierto y con **1** al que está siempre cerrado.

Con estas operaciones el conjunto de circuitos de conmutación es un álgebra de Boole y tiene todas sus propiedades.

En el diseño actual de redes eléctricas los interruptores se reemplazan por otros dispositivos llamados ***puertas lógicas***, que se corresponden con las operaciones booleanas "+", "." y " ' " (complemento).

Las ***puertas lógicas*** que estudian en distintas materias, son dispositivos que desarrollan las expresiones booleanas, por ejemplo, la puerta AND, representa la expresión AB, siendo A y B elementos del álgebra:



Un circuito es un conjunto de puertas lógicas interconectadas, que también admiten una representación gráfica, con tablas de verdad o como una función booleana. Estos circuitos implementan funciones esenciales de una computadora.

Los teoremas que hemos probado se derivan de los axiomas enunciados en la definición de Algebras de Boole y nos permitirán simplificar expresiones booleanas transformándolas en otras más sencillas, que pueden implementarse en circuitos más claros, con menos costo y más eficientes.

Gran cantidad de sistemas de control, también conocidos como digitales, usan señales binarias y éstas son un falso o un verdadero que proviene de sensores que mandan la información al circuito de control, que lleva a cabo la evaluación para obtener un valor que indicará si se lleva a cabo o no una determinada actividad, como encender un foco, arrancar un equipo de ventilación en un cine o ejecutar una operación matemática en una computadora.

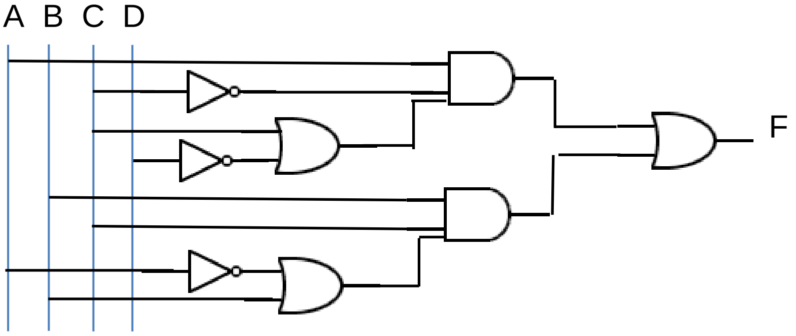
Para resolver un problema práctico en el cual se desea automatizar un proceso, es necesario realizar un análisis detallado de lo que se quiere lograr, así como de los tipos de sensores necesarios para obtener las señales. Una vez que se conoce esto se plantea el funcionamiento del circuito lógico en una expresión matemática, la cual recibe el nombre de función booleana, y cada una de las variables que integran esta función representa un sensor que provee al circuito de una señal de entrada.

Las simplificaciones sirven para diseñar un sistema de puertas lógicas lo más sencillo posible.

Por ejemplo, la función:

F(A,B,C,D)=AC'(C+D')+BC(A'+B)

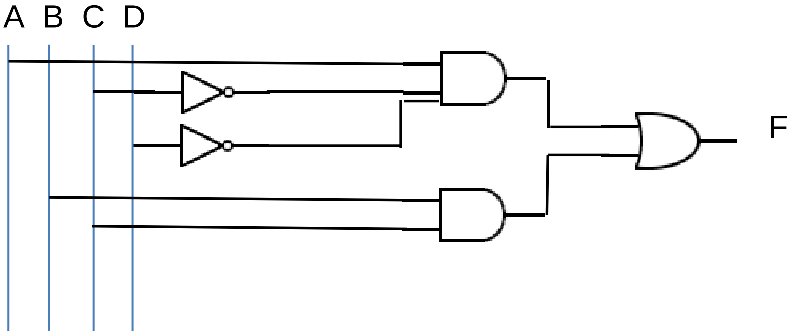
Puede representarse mediante puertas lógicas como sigue:



Si ahora realizamos una simplificación, tendríamos:

AC'(C+D') + BC(A'+B) =	Por axioma B3: $x(y+z) = xy + xz$
AC'C + AC'D' + BCA' + BCB =	Por axioma B7: $xx' = 0$ y Por axioma B2: $xy = yx$
A0 + AC'D' + BCA'+CBB =	Por Teorema 2: $x0 = 0$ y Por Teorema 1: $xx = x$
0 + AC'D' + BCA' + CB =	Por Axioma B5: $x + 0 = x$ y Por axioma B3: $x(y+z) = xy + xz$ y Por axioma B2: $xy = yx$
AC'D' + BC(A'+1) = AC'D' + BC	Por Axioma B6: $x + 1 = 1$ Por Axioma B5: $x1 = x$

Entonces, su representación con puertas lógicas es:



Bibliografía

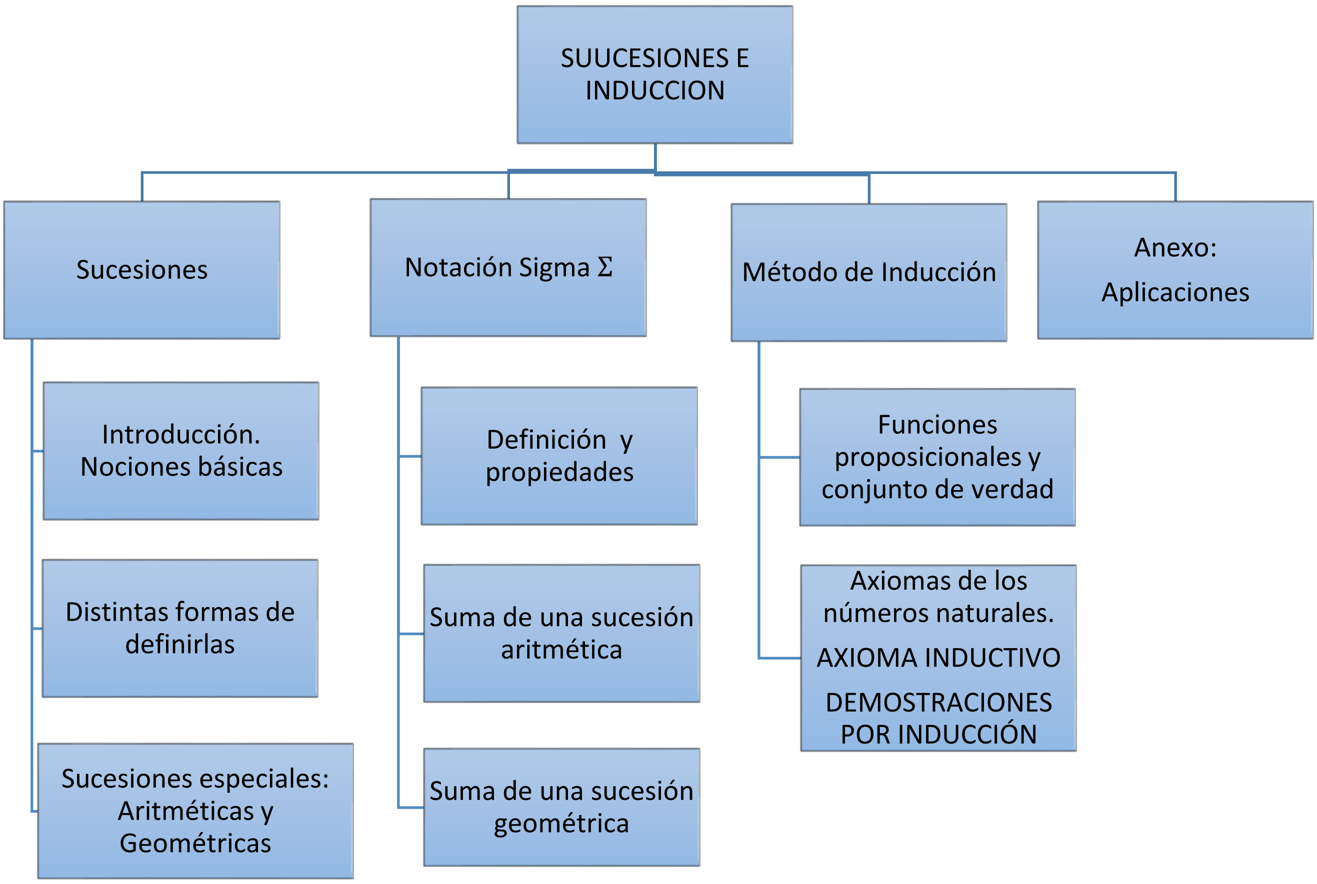
- *Ramón Espinosa Armenta,* ***Matemática Discreta,*** Editorial Alfaomega, Mexico, 2010.
- *Elliott Mendelson,* ***Boolean Algebra and Switching Circuits****, McGraw-Hill.*

MATEMÁTICA I 2023

Capítulo 4

SUCESIONES E INDUCCIÓN

CONTENIDOS:



"No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje,
Y no la posesión, sino el acto de llegar allí,
lo que concede el mayor disfrute"
Carl Friederich Gauss

Matemático invitado: Carl Friederich Gauss

Fue un matemático alemán nacido el 30 de abril de 1777. Contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Publicó en 1801 “Disquisitiones arithmeticae” su mayor aportación a la teoría de números.

Cuenta la historia que cuando tenía 9 años su profesor propuso a sus alumnos que sumaran los números del 1 al 100, con la seguridad de que tardarían lo suficiente para que él se tomara un descanso. Mientras los demás alumnos apenas empezaban a trabajar, en pocos segundos Gauss había dejado su respuesta en el escritorio del maestro: 5050. El maestro se sorprendió y pidió a Gauss que explicara como lo había resuelto, porque de hecho, era la respuesta correcta. Gauss le explica que se había dado cuenta de que el primer número más el último (1+100) sumaban 101, el segundo más el anteúltimo (2+99) también, el tercero más el antepenúltimo (3+98) también, y así tenía 50 parejas de números que sumaban 101 y cuyo producto daba 5050.

Gauss había aplicado sin saberlo, la fórmula de la suma de los términos de una sucesión aritmética.

Se lo conoce como el “Príncipe de las matemáticas” por sus grades aportaciones a muchas ramas de la matemática, muere el 23 de febrero de 1855 a la edad de 77 años.

1. Introducción. Nociones básicas.

a) Considere los siguientes números naturales:
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13...

a1) ¿Los anteriores números tienen un orden especial?
a2) ¿Existe un patrón para crear ese orden? ¿Cuál?
a3) ¿Qué número seguirá después de 13?

Podemos observar que esa lista de números son números impares, que además están en orden creciente, el 1 es el primer impar positivo, el 3 es el segundo, el 5 es el tercero, etc.

Vimos en el capítulo de conjuntos que los números impares podemos generarlos multiplicando por 2 un número natural y restándole 1.
El próximo impar después del 13 es el 15.

b) Considere la siguiente lista de números reales:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$

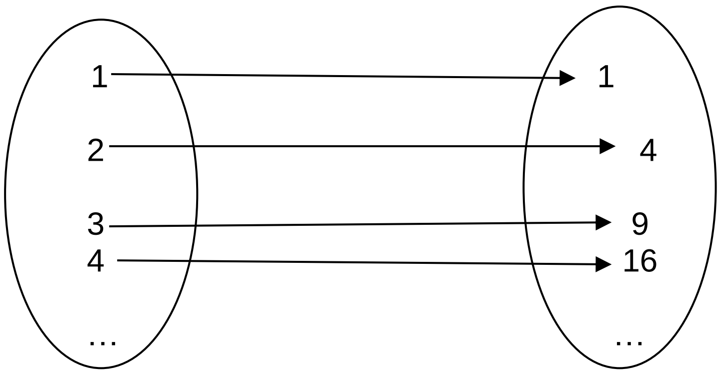
b1) ¿Cuál es el sexto término?

b2) ¿Cuál será el décimo término?

b3) Si n representa cualquier número natural. ¿Qué número será el término n?

Si el primer término es 1, el segundo es $\frac{1}{2}$, el tercero es $\frac{1}{3}$, y así siguiendo, podemos deducir que el sexto término será $\frac{1}{6}$, el décimo será $\frac{1}{10}$.
Si n representa un número natural cualquiera, el término de la posición n será $\frac{1}{n}$.

c) Considere la relación, cuya gráfica es la siguiente:



Los puntos suspensivos en los conjuntos indican que hay más números, podemos considerar que ambos conjuntos, son los conjuntos de números naturales.
Esta relación es una **función**, ya que asigna o hace corresponder, a cada número natural un **único** número natural. Podemos indicar que el correspondiente de 1 es 1, el de 2 es 4, y así sucesivamente.

c1) Escriba como parejas ordenadas la anterior relación, para los números que se muestran en el gráfico.
c2) ¿Qué número corresponderá al número 6?
c3) Si n es cualquier número natural. ¿Cuál será su correspondiente? ¿y del número n+1?

En el gráfico se muestran las parejas (1,1), (2,4), (3,9) y (4,16).
Vemos que a cada número natural le corresponde su cuadrado, entonces al 6 le corresponderá el 36.
Si n es un natural cualquiera le corresponderá n^2, y al natural $n+1$ le corresponderá $(n+1)^2$

A estas listas ordenadas de números, se las llama sucesiones.

Definición:
Una **sucesión** es una **función** con dominio en los números naturales y codominio en un conjunto A cualquiera. Por ser una función a cada natural le corresponde un único elemento del conjunto A.

Si a esta función la llamamos S, la expresamos como $S\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$, y sus elementos como:
$S(1) = a_1$
$S(2) = a_2$
$S(3) = a_3$, …
donde $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son elementos de A

En general si k es un número natural cualquiera diremos que a_k es el **k-ésimo término** de la sucesión, también se lo llama **término general** de la sucesión. Esta descripción de término general es porque k está representando un natural cualquiera.

Notemos que la elección de la letra k es arbitraria, podemos hablar de a_n o a_t y diremos entonces que es el n-ésimo término o el t-ésimo término respectivamente. Del mismo modo llamamos “a” a los elementos de la sucesión pero podemos elegir cualquier otra letra.

En adelante nos referiremos a la sucesión sólo por los elementos de A con el orden dado por los números naturales.

En este curso vamos a trabajar con sucesiones tales que el conjunto A de la definición son los números reales.

Ejemplo 1.1:
Sea S la sucesión de los números impares que vimos al comienzo: 1, 3, 5, 7, 9, ….

Diremos que $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ \ldots$

Basta la enumeración **en orden** de sus elementos para saber a qué natural le corresponde cada número de la sucesión.

Esta sucesión está formada por los números impares, podemos entonces escribir:

$a_1 = 1 = 2.1 - 1$

$a_2 = 3 = 2.2 - 1$

$a_3 = 5 = 2.3 - 1$

Decimos entonces que : $\boxed{a_n = 2.n - 1, \quad n \geq 1}$

Donde a_n es el n-ésimo término o término general de la sucesión.

Ejemplo 1.2:
Sea H la sucesión dada por: 2, 4, 6, 8, 10, ….

Diremos que $a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 6,\ \ldots$

Esta sucesión está formada por los números pares, o múltiplos de 2, podemos entonces escribir:

$a_1 = 2 = 2.1$

$a_2 = 4 = 2.2$

$a_3 = 6 = 2.3$

Decimos entonces que : $\boxed{a_n = 2.n, \quad n \geq 1}$

Encontramos entonces nuevamente el término general.

Diferentes formas de expresar una sucesión.

- **Enumeración de los primeros términos**:

Consiste en escribir los primeros términos de la sucesión.

Ejemplos: 1) 2, 4, 6, 8, ….
2) 3, 9, 27, 81, ….
3) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …
4) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …

- **Forma descriptiva**:

Consiste en describir con palabras la ley de formación de la sucesión, en los ejemplos anteriores podríamos describir:

1) sucesión de los números pares
2) sucesión de las potencias de 3
3) sucesión formada a partir de la suma de los dos términos anteriores. Esta descripción no es tan trivial, a veces no resulta tan fácil advertirla. Esta sucesión se conoce con el nombre de Sucesión de Fibonacci.
4) Sucesión de los números primos.

- **Forma explícita**:

Consiste en dar una fórmula que defina el término general de la sucesión en función del índice, dando información acerca del valor inicial del índice. Permite para un valor de n cualquiera saber cuál es el término correspondiente.

Veamos en los ejemplos dados si es posible encontrarla:

1) $a_n = 2n$, $n \geq 1$

2) $b_n = 3^n$, $n \geq 1$

3) ¿? No es posible por ahora encontrar una fórmula explícita, por lo menos no es posible deducirla a partir de la expresión de sus términos.

4) Imposible, no se ha descubierto aún si hay un patrón para generar los números primos, sólo sabemos que son infinitos pero no hay una fórmula que permita hallar el primo n de esta sucesión.

- **Forma recursiva**:

Consiste en dar los primeros k términos de la sucesión (a estos se los llama condiciones iniciales de la sucesión) y luego establecer cómo se construye el término n-ésimo de la sucesión a partir de términos anteriores.

En los ejemplos dados podríamos definir:

1) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \quad , n \geq 2 \end{cases}$

Observar que la definición incluye al primer término y la parte recursiva, notar que ésta última vale a partir del 2 ya que no tiene sentido para n=1 porque quedaría $a_1 = a_0 + 2$, pero a_0 no ha sido definido.

2) $\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = b_{n-1}3 \quad , n \geq 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \quad , n \geq 3 \end{cases}$

4) Nuevamente es imposible definir esta sucesión en forma recursiva, ya que aún no conocemos una relación entre primos consecutivos.

Vemos entonces que no siempre es tan sencillo encontrar formas de definir sucesiones, los ejemplos 1 y 2 son los “ideales” por llamarlos de alguna manera ya que nos permiten su definición en distintas formas, pero en general esto no ocurre, por eso aparecen distintas formas de definir sucesiones.

La sucesión de Fibonacci.

La sucesión del ejemplo 3 se llama sucesión de Fibonacci

Se define por enumeración como: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Cada número a partir del tercero, se obtiene sumando los dos que le preceden. Por ejemplo, 21 = 13 + 8; el siguiente a 34 será 34 + 21 = 55.

Recibe su nombre del rico comerciante Leonardo de Pisa (1170-1240) quien viajó por el Norte de África y Asia y llevó a Europa algunos de los conocimientos de la cultura árabe e hindú, entre otros la ventaja del sistema de numeración arábigo (el que usamos) frente al romano.

La sucesión de Fibonacci presenta diversas regularidades numéricas. Quizás la más sorprendente sea la siguiente propiedad: dividamos dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor y veamos lo que obtenemos:

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\frac{5}{3} = 1,\hat{6}$$

$$\frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\frac{13}{8} = 1{,}625$$

$$\frac{21}{13} = 1{,}6153846154$$

Si continuamos realizando los cocientes entre los números consecutivos de esta sucesión, veremos que se aproximan al número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que es aproximadamente $1{,}6180339887$, llamado número de oro, ya que está presente en la proporción del cuerpo humano (la relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo, la relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos) y de muchos fenómenos de la naturaleza. La proporción áurea fue usada con posterioridad en numerosas obras de arte, el cuadro de La Gioconda del famoso Leonardo Da Vinci, fue pintado con esta proporción y el mismo maestro renacentista observó que estas medidas daban por resultado la armonía del cuerpo humano y ello es constatable en "El hombre de Vitruvio" (1490).

También, cuando se mira un girasol, automáticamente aparecen espirales que van a favor y en contra de las agujas del reloj, formadas por las semillas. Claramente estas semillas crecen de forma tal de aprovechar al máximo el espacio disponible. El número de las espirales depende del tamaño del girasol. Lo más común es encontrar 34 espirales en un sentido y 55 en el otro, pero se han encontrado y documentado casos con más espirales: 89 y 55, 144 y 89 e incluso 233 y 144. Todos estos números son, por supuesto, números de Fibonacci consecutivos.

Ejemplo 1.3:

Hallar una definición para la sucesión dada por: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

La idea es entonces descubrir la ley de formación de esta sucesión. Como vemos el numerador es siempre 1 y en el denominador aparecen las potencias de 2, enumerando los términos tenemos:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}\ ,\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = \frac{1}{8} \ldots$$

Podemos tratar de escribirla relacionando el valor del término con el subíndice del mismo:

$a_1 = \frac{1}{1^0},\ a_2 = \frac{1}{2^1}\ ,\ a_3 = \frac{1}{2^2},\ a_4 = \frac{1}{2^3} \ldots$ vemos que la potencia a la que aparece el 2 es el número anterior al subíndice, entonces:

$a_1 = \frac{1}{1^{1-1}},\ a_2 = \frac{1}{2^{2-1}}\ ,\ a_3 = \frac{1}{2^{3-1}},\ a_4 = \frac{1}{2^{4-1}} \ldots$, con lo que podemos concluir que:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1}$$

Notar que la indicación $\boldsymbol{n \geq 1,}$ es importante porque nos indica a partir de qué natural comienza la sucesión.

Hemos hallado una forma explícita para la sucesión, también podríamos pensar en otra descripción, analizando que cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por ½.

Esta afirmación nos lleva a dar una definición recursiva, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{a_1 = 1}$$
$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1}\frac{1}{2}, \quad n \geq 2}$$

Destacamos nuevamente en este caso, que la definición de esta sucesión en forma recursiva incluye la definición del primer término (condición inicial) y la definición de un término n-ésimo a partir de n=2. Esto es importante porque si ponemos sólo $\boldsymbol{a_n = a_{n-1}\frac{1}{2}}$ y quisiéramos calcular el primer término, cuando n vale 1, n-1 vale 0 y quedaría: $\boldsymbol{a_1 = a_0\frac{1}{2}}$ pero no sabemos quién es $\boldsymbol{a_0}$**.**

Nota: En este curso estamos tomando sucesiones con subíndice natural, pero también pueden definirse sucesiones con subíndice entero. Hemos tomado además los números naturales a partir del 1, esto es una convención, encontrarán textos donde se toman los naturales a partir del 0.

Ejemplo 1.4:

Hallar los 4 primeros términos de la sucesión: $a_h = (-1)^{h+1}3^h,\ h \geq 1$

$a_1 = (-1)^{1+1}3^1 = 3$

$a_2 = (-1)^{2+1}3^2 = -9$

$a_3 = (-1)^{3+1}3^3 = 27$

$a_4 = (-1)^{4+1}3^4 = -81$

Hallemos ahora los 4 primeros términos de la sucesión: $b_h = (-1)^{h-1}3^h$, $h \geq 1$

$b_1 = (-1)^{1-1}3^1 = 3$
$b_2 = (-1)^{2-1}3^2 = -9$
$b_3 = (-1)^{3-1}3^3 = 27$
$b_4 = (-1)^{4-1}3^4 = -81$

Finalmente veamos los 4 primeros términos de la sucesión: $c_t = -(-3)^t$, $t \geq 1$

$c_1 = -(-3)^1 = 3$
$c_2 = -(-3)^2 = -9$
$c_3 = -(-3)^3 = 27$
$c_4 = -(-3)^4 = -81$

Evidentemente las 3 sucesiones son iguales, es decir que los números generados por la fórmula de la definición son los mismos.
Por lo tanto, podemos concluir que no hay una única fórmula explícita de una sucesión y corresponde hablar de "un término general" en lugar de "el término general".

Ejercicios:

1) Hallar los 4 primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_h = (-1)^h 3^h$, $h \geq 1$

b) $b_j = 2j + 3^j$, $j \geq 1$

c) $c_t = 2^t - 1$, $t \geq 1$

d) $d_h = h^2$, $h \geq 1$

e) $e_1 = 4$, $\quad e_k = -3e_{k-1} + 2$, $k \geq 2$

f) $f_1 = -2$, $\quad f_2 = 1 \quad f_k = 3f_{k-1} - f_{k-2}$, $k \geq 3$

g) $g_h = 4$, $h \geq 1$

h) $x_1 = 3 \quad y \quad x_{k+1} = x_k - \tan x_k$, $k \geq 1$, esta sucesión genera aproximaciones del número π .

2) Hallar una definición, explícita o recursiva para las siguientes sucesiones:

a) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

b) $1, 8, 27, 64, 125, \ldots$

c) $4, 9, 14, 19, 24, 29, \ldots$

d) $-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

f) $2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \ldots$

g) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$

h) $0, 5, 10, 15, 20, \ldots$

3) a) Dada la sucesión $d_h = \dfrac{h^2}{h+1}$ $, h \geq 1$. Encuentre $d_3, \quad d_5, \quad d_j \quad y \quad d_{h+1}$

b) Dada la sucesión $f_1 = -2, \quad f_2 = 1 \quad f_k = 3f_{k-1} - f_{k-2}\ , \ k \geq 3.$

Encuentre $f_t, \quad f_{j+2}, \quad f_{k-3} \quad y \quad f_{h+1}$

4) Dar una definición **explícita** para las siguientes sucesiones:

a) $4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$

b) $5, 15, 25, 35, 45, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}, \ldots$

d) $0, -4, 8, -12, 16, -20, \ldots$

5) Algunas calculadoras utilizan un algoritmo similar al siguiente para calcular $\sqrt{n}$, para un número *n* real positivo:

Sea $x_1 = \dfrac{n}{2}$, encuentra aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$ mediante la siguiente fórmula: $x_k = \dfrac{1}{2}(x_{k-1} + \dfrac{n}{x_{k-1}})$, $k \geq 2$, hasta obtener la precisión deseada.

Utiliza este método para calcular $\sqrt{5}$ y $\sqrt{18}$ con una precisión de 6 cifras decimales.

Sucesiones especiales.

Nos ocuparemos de algunas sucesiones que tienen características particulares, ya que podemos encontrar con facilidad su término general individualizando algunos parámetros y modelizan muchos problemas de la vida cotidiana.

Sucesiones aritméticas

1) Supongamos que nos piden hallar los cuatro primeros términos de la sucesión que se obtiene de acuerdo a las siguientes condiciones y dar una definición recursiva:

a) El primer término es 3.

b) El segundo término se obtiene al sumar 10 al primer término.

c) El tercer término se obtiene al sumar 10 al segundo término.

d) El cuarto término se obtiene al sumar 10 al tercer término.

Tenemos entonces que:

$a_1 = 3$

$a_2 = a_1 + 10$

$a_3 = a_2 + 10$

$a_4 = a_3 + 10$

La definición recursiva es:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 10\,, \quad n \geq 2 \end{array}}$$

2) Si observamos la siguiente sucesión: 1, 4, 7, 10, 13, 16, ...

Notamos que cada término se puede obtener sumándole al anterior un mismo número, el número 3. Tenemos que:

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + 3$

$a_3 = a_2 + 3$

$a_4 = a_3 + 3$

La definición recursiva es:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3\,, \quad n \geq 2 \end{array}}$$

Ambas sucesiones comienzan con un número cualquiera y los restantes términos se van obteniendo sumando un número fijo al término anterior, estas sucesiones se llaman **aritméticas.**

Definición:

Una **sucesión o progresión aritmética** es una sucesión en la cual, definido el primer término, cada término se puede obtener del anterior, sumando un mismo número, llamado diferencia.

También podemos definirla como una sucesión donde la diferencia entre un término cualquiera y su anterior, es constante. Esa constante es la diferencia.

Término general:

En los casos 1 y 2 se ha dado una definición recursiva, ya que como hemos dicho cada término es igual al anterior más un número fijo.

En el caso 1) la sucesión está dada por 3, 13, 23, 33, 43, … que se define recursivamente como:

$$\boldsymbol{a_1 = 3}$$
$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + 10, \ \ n \geq 2}$$

En el caso 2) la sucesión está dada por 1, 4, 7, 10, 13, … que se define recursivamente como:

$$\boldsymbol{a_1 = 1}$$
$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + 3, \ \ n \geq 2}$$

Definición recursiva de una sucesión aritmética:

$$\begin{cases} a_1 \\ a_n = a_{n-1} + d, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y *d* es la diferencia.

Veamos ahora como hallar una definición explícita.

Si llamamos $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, a los *n* primeros términos de una progresión aritmética, siendo *d* la diferencia, el término general de la progresión se puede obtener de acuerdo con el siguiente análisis:

a_1

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_1 + d + d + d + d = a_1 + 4d$

Por consiguiente, el n-ésimo término de la progresión aritmética es: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Definición explicita de una sucesión aritmética:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad n \geq 1$$

Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y *d* es la diferencia.

Ejemplo 1.5:

Hallar el séptimo término de una sucesión aritmética cuyos primeros términos son 3, 6, 9.

Vemos que:

$a_1 = 3$
$a_2 = 6$
$a_3 = 9$

Sabemos que el primer término es 3, para hallar la diferencia, tomamos dos términos consecutivos cualesquiera y hacemos la diferencia d= $a_n - a_{n-1}$, como la progresión es aritmética alcanza con mirar cualquier diferencia y asegurarnos que esa será la diferencia entre dos términos cualesquiera.

Miramos entonces $a_3 - a_2 = 9 - 6 = 3$

La diferencia es 3 y como sabemos que una sucesión aritmética cualquiera tiene término general igual a $a_n = a_1 + (n-1)d$ tenemos que el término general de esta sucesión es: $a_n = 3 + (n-1)3$

En este caso el primer término y la diferencia coinciden pero como hemos visto esto no tiene porqué pasar siempre.

El séptimo término lo hallamos reemplazando n por 7 en el término general:

$a_7 = 3 + 6.3 = 3 + 18 = 21$.

Por lo tanto $a_7 = 21$

Ejemplo 1.6:

Hallar el primer término de una progresión o sucesión aritmética si se sabe que el décimo término es 67 y la diferencia es 7.

Como tenemos una progresión aritmética sabemos que su término general es:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Por lo tanto el décimo término será: $a_{10} = a_1 + 9.7 = 67$

Despejando tenemos que: $a_1 = 67 - 63 = 4$

Así, $a_1 = 4$

Ejemplo 1.7:

Hallar la diferencia de la progresión aritmética cuyo primer término es 1, y el término treinta y cinco es 18.

Nuevamente reemplazando en la fórmula del término general de una sucesión aritmética, tenemos: $a_{35} = 1 + 34.d = 18$

Tenemos entonces que: $34d = 18 - 1$

Al despejar de la fórmula obtenemos: $d = \frac{18-1}{34} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$

Por lo tanto $d = \frac{1}{2}$

Ejemplo 1.8:

Encontrar los valores de a, b, c, d y e de modo que la sucesión 3, a, b, c, d, e, -5 sea una progresión aritmética.

Tenemos el primer término de la sucesión, llamémoslo $b_1 = 3$.

Tenemos también el séptimo término de la sucesión, $b_7 = -5$

Como buscamos una sucesión aritmética, sabemos que $b_7 = b_1 + 6d$

Reemplazando tenemos que $b_7 = 3 + 6d = -5 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{-5-3}{6} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$

Sabemos entonces que la sucesión es $b_n = 3 + (n-1)\left(-\frac{4}{3}\right), \quad n \geq 1$

Para encontrar entonces los términos pedidos sólo resta reemplazar en la fórmula:

$$a = b_2 = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$b = b_3 = 3 + 2(-\frac{4}{3}) = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

$$c = b_4 = 3 + 3(-\frac{4}{3}) = 3 - \frac{12}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$d = b_5 = 3 + 4(-\frac{4}{3}) = 3 - \frac{16}{3} = \frac{-7}{3}$$

$$e = b_6 = 3 + 5(-\frac{4}{3}) = 3 - \frac{20}{3} = \frac{-11}{3}$$

Respuesta:

$$a = \frac{5}{3}$$

$$b = \frac{1}{3}$$

$$c = -1$$

$$d = -\frac{7}{3}$$

$$e = -\frac{11}{3}$$

Sucesiones geométricas

3) Supongamos que nos piden hallar los cuatro primeros términos de la sucesión que se obtiene de acuerdo a las siguientes condiciones y dar una definición recursiva:

a) El primer término es 2.

b) El segundo término se obtiene al multiplicar 3 al primer término.

c) El tercer término se obtiene al multiplicar 3 al segundo término.

d) El cuarto término se obtiene al multiplicar 3 al tercer término.

Tenemos entonces que:

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1.3 = 6$

$a_3 = a_2.3 = 18$

$a_4 = a_3.3 = 54$

La definición recursiva es:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1}.3\,, \quad n \geq 2 \end{array}}$$

4) Observemos la siguiente sucesión: 192, 48, 12, 3, …

Podemos investigar si como en el caso anterior, podemos obtener un término multiplicando el anterior por un número, para eso realizamos los cocientes: $\frac{b_2}{b_1}$, $\frac{b_3}{b_2}$, $\frac{b_4}{b_3}$,

$\frac{b_2}{b_1} = \frac{48}{192} = \frac{1}{4}$ esto nos dice que $b_2 = b_1\frac{1}{4}$

$\frac{b_3}{b_2} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$ esto nos dice que $b_3 = b_2\frac{1}{4}$

$\frac{b_4}{b_3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ esto nos dice que $b_4 = b_3\frac{1}{4}$

Así, el quinto término de la sucesión será: $b_5 = b_4\frac{1}{4}$

Notamos que cada término se puede obtener multiplicando el anterior por un mismo número, el número $\frac{1}{4}$. Y podemos obtener una definición recursiva:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1}.\frac{1}{4}\,, \quad n \geq 2 \end{array}}$$

Ambas sucesiones comienzan con un número cualquiera y los restantes términos se van obteniendo multiplicando por un número fijo al término anterior, estas sucesiones se llaman **geométricas.**

Definición:

Una **progresión o sucesión geométrica** es una sucesión en la cual cada término se puede obtener del anterior, multiplicandolo por un mismo número, llamado razón.
También podemos definirla como una sucesión donde el cociente entre un término cualquiera y su anterior, es constante. Esa constante es la razón.

Término general:

En los casos 3 y 4 se ha dado una definición recursiva, ya que como hemos dicho cada término es igual al anterior multiplicado por una constante.

En el caso 3) la sucesión 2, 6, 18, 54, 162, … se define recursivamente como:

$$\boldsymbol{a_1 = 2}$$
$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1}.3, \ \ n \geq 2}$$

En el caso 4) la sucesión 192, 48, 12, 3,… se define recursivamente como:

$$\boldsymbol{a_1 = 192}$$
$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1}.\frac{1}{4}, \ \ n \geq 2}$$

Definición recursiva de una sucesión geométrica:

$$\begin{cases} a_1 \\ a_n = a_{n-1}.r, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y r es la razón

Veamos ahora como hallar una definición explícita.

Si llamamos $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, a los *n* primeros términos de una progresión geométrica, siendo r la razón, el término general de la progresión se puede obtener de acuerdo con el siguiente análisis:

$a_1 = a_1.r^0$

$a_2 = a_1.r^1$

$a_3 = a_1.r.r = a_1.r^2$

$a_4 = a_1.r.r.r = a_1.r^3$

$a_5 = a_1.r.r.r.r = a_1.r^4$

Por consiguiente, el n-ésimo término de la progresión geométrica es: $a_n = a_1.r^{n-1}$

Definición explícita de una sucesión geométrica:

$$a_n = a_1.r^{n-1}, \qquad n \geq 1$$

Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y r es la razón.

Ejemplo 1.9:

Hallar el quinto término de la sucesión geométrica dada por: - 2, 6, -18, 54...

Para hallar el quinto término es necesario conocer la razón.

La razón es el cociente entre un término y el término precedente, por lo tanto en este caso podemos calcularla tomando:

$\frac{6}{-2} = -3$ o $\frac{-18}{6} = -3$, etc

Como hemos hallado que la razón es -3 y el primer término es -2, aplicamos la fórmula para hallar el término quinto:

$a_5 = a_1.r^{5-1}$, entonces $a_5 = (-2).(-3)^4 = (-2).81 = -162$

Respuesta: $a_5 = -162$

Ejemplo 1.10:

El segundo y tercer término de una progresión geométrica son 30 y 45 respectivamente. Calcular el primer término y la razón.

Como es una sucesión geométrica y sabemos que: $a_2 = 30$ y $a_3 = 45$, el cociente entre $a_3 \ y \ a_2$ debe ser la razón.

Por lo tanto $\frac{a_3}{a_2} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2} = r$

Usando la definición explícita de la sucesión, sabemos que:

$a_2 = a_1.\frac{3}{2}$ y $a_3 = a_1.(\frac{3}{2})^2$

Podemos usar cualquiera de las dos igualdades para hallar a_1, si elegimos la primera, tenemos que: $a_2 = 30 = a_1.\frac{3}{2}$ entonces $a_1 = 30.\frac{2}{3} = 20.$

Respuesta: $a_1 = 20, \quad r = \frac{3}{2}$

La definición explícita de la sucesión es : $a_n = 20.(\frac{3}{2})^{n-1}, \ n \geq 1$

Ejercicios:

6) I) Analizar si las siguientes sucesiones son geométricas o aritméticas. Dar una definición **explícita** en todos los casos.

a) $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

b) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

c) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

d) $4, 5, 6, 7, 8, \ldots$

e) $13, 20, 27, 34, 41, \ldots$

f) $8, \frac{2}{3}, \frac{1}{18}, \frac{1}{216}, \ \ldots$

g) $a_n = 2.n \ , n \geq 1$

h) $a_n = 2^n \ , n \geq 1$

i) $10, \frac{19}{2}, 9, \frac{17}{2}, 8, \frac{15}{2}, \ldots$

j) $300, -30, 3, -0.3, \ldots$

l) Analizar si las siguientes sucesiones son geométricas o aritméticas. Dar el primer término y diferencia o primer término y razón según corresponda.

a) $a_n = 7\left(1 + \frac{3}{7}n\right) + 2,\ \ n \geq 1$

b) $b_n = 5.\,2^{n-2},\ \ n \geq 1$

c) $c_n = 3.\,4^{n+1},\ \ n \geq 1$

d) $d_n = 5\left(\frac{4}{5} - n\right),\ \ n \geq 1$

e) $a_n = 2.\,(\frac{1}{3})^n,\ \ n \geq 1$

7) El tercer término de una sucesión aritmética es 85 y el decimocuarto es 30, hallar el primer término y la diferencia.

8) Encontrar tres números ***f***, ***g*** y ***h*** tales que 320, ***f***, ***g*** , ***h*** , 20 sean los 5 primeros términos de una sucesión geométrica.

9) Hallar el primer término y la diferencia de una sucesión aritmética sabiendo que la suma del tercer término y el octavo da 75 y la diferencia entre el noveno y el segundo es 49.

10) La superficie de un triángulo rectángulo es 54 cm^2 . Hallar la longitud de sus lados sabiendo que están en progresión aritmética. (Idea: plantear la relación pitagórica del triángulo rectángulo y resolver la ecuación cuadrática para a_1 dejando fijo d)

11) Se desea construir una escalera de pared de 16 escalones cuyas longitudes decrecen uniformemente de 50 cm en la base a 30 cm en la parte superior. Encuentra una fórmula para saber cuánto mide el escalón n.

12) Hallar el término especificado de la sucesión aritmética a partir de los términos dados:

a) a_{11} , siendo $a_1 = 2 + \sqrt{2}\ \ y\ \ a_2 = 3$

b) a_1 , siendo $a_8 = 47\ \ y\ \ a_9 = 53$

13) Encontrar la razón de una sucesión geométrica cuyo primer término es 320 y el séptimo es 5.

14) Hallar todos los posibles valores de r para una sucesión geométrica con los términos dados:

a) $a_4 = 3 \ y \quad a_6 = 9$ b) $a_3 = 4 \ y \quad a_7 = \frac{1}{4}$

15) La cantidad de bacterias en cierto cultivo es inicialmente 500 y el cultivo se duplica todos los días.

a) Encuentra la cantidad de bacterias en día 2, día 3 y día 4.

b) Da una fórmula para hallar la población bacteriana en el día n.

16) Habitualmente se agrega cloro al agua de las piscinas para controlar los microorganismos. Si el nivel de cloro es mayor de 3 ppm (partes por millón), los nadadores sentirán ardor en los ojos e incomodidad en la piel; si el nivel baja a menos de 1 ppm, existe la posibilidad de que el agua tome color verde por la presencia de algas. El cloro debe agregarse al agua a intervalos regulares. Si no se agrega cloro a una piscina en un período de 24 hs, alrededor del 20% del cloro existente se disipará en la atmósfera y el 80 % permanecerá en el agua.

a) Determina la sucesión a_n que exprese la cantidad de cloro presente después de n días, si la piscina tiene a_1 ppm de cloro al principio y no vuelve a agregarse. Expresa la sucesión en forma recursiva y en forma explícita.

b) Si al inicio tiene 7 ppm, determina el primer día en que el nivel de cloro baja de 3 ppm

---

2. Notación sigma.

En algunas situaciones puede interesarnos sumar términos de una sucesión.

Por ejemplo si queremos sumar los 6 primeros términos de la sucesión definida por $a_n = 1 + (n-1)3$, escribimos:

1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16

Si quisiéramos sumar los *k* primeros términos de dicha sucesión escribimos:

1 + 4 + 7 + 10 + ... + $(1+(k-1)3)$

Podemos reescribir esta suma de la siguiente manera:

1+(1-1)3 + 1+(2-1)3 + 1+(3-1)3 + ... + $(1+(k-1)3)$

Podemos leer esa suma diciendo:

"Sume los términos de la sucesión $a_n = 1+(n-1)3$, haciendo variar n de uno en uno, desde 1 hasta *k* "

Esta tarea es exactamente la que hace la notación sigma que presentamos a continuación:

La suma de los k primeros términos de una sucesión de término general a_n puede expresarse como:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$$

y se lee: " Sume los términos de la sucesión a_n , con n variando de uno en uno desde 1 hasta k.

Observación: la variable utilizada en esta notación es *muda*, esto es que no importa qué letra usemos, por eso las siguientes expresiones son iguales entre sí e iguales a la suma de arriba:

$$\sum_{h=1}^{k} a_h = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

Entonces la suma de la sucesión anterior de término general $a_n = 1+(n-1)3$, desde el 1ero hasta el k-ésimo es:

$$\sum_{h=1}^{k} (1 + (h-1)3) = (1 + (1-1)3) + (1 + (2-1)3) + (1 + (3-1)3) + \cdots + (1 + (k-1)3)$$

Ejemplo 2.1:

Si queremos expresar la suma de los términos de la sucesión $a_h = 2h$ desde el primero hasta el décimo, escribimos:

$$\sum_{k=1}^{10}(2k) = 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + \cdots + 2.10$$

Ejemplo 2.2:

Queremos expresar la suma de los términos de la sucesión $b_t = 3^t$, desde el primero hasta el k-ésimo, entonces escribimos:

$$\sum_{j=1}^{k}(3^j) = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^k$$

Ejemplo 2.3:

Queremos expresar la suma de los términos de la sucesión $c_k = 3 + 4k$, desde el cuarto hasta el decimoquinto, entonces escribimos:

$$\sum_{j=4}^{15}(3 + 4j) = (3 + 4.4) + (3 + 4.5) + (3 + 4.6) + \cdots + (3 + 4.15)$$

Nota: esta notación para sumar términos puede comenzar en cualquier término siempre que la variable que se usa para el subíndice de la sucesión varíe de uno en uno, es decir que la variable k del ejemplo 1 recorre los naturales a partir del 1 hasta el 10, la variable j del ejemplo 2 recorre los naturales desde el 1 hasta el natural k y la variable j del ejemplo 3 recorre los naturales desde el 4 hasta el 15.

Observemos que no estamos dando el resultado de la suma, sólo expresamos la suma de manera precisa.

Algunas propiedades:

Si $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ y $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ son sucesiones infinitas, entonces para todo natural *n*, se tiene que:

I) Es claro que:

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \cdots + a_n + b_n =$$
$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

Ya que la suma es conmutativa en el conjunto de los números reales. De igual forma podemos proceder en la resta:

$$a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3 + \cdots + a_n - b_n =$$
$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

Expresado en notación sigma tenemos que:

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n}(a_h \pm b_h) = \sum_{h=1}^{n} a_h \pm \sum_{h=1}^{n} b_h}$$

II) Vemos también que:

$$c.a_1 + c.a_2 + c.a_3 + \cdots + c.a_n = c.(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

Haciendo uso solamente de la propiedad de factor común.

Expresado en notación sigma tenemos que:

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n}(c.a_h) = c.(\sum_{h=1}^{n} a_h)}$$

III) Si queremos sumar n veces una constante c, escribimos:

$$\underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n\ veces} = n.c$$

Escrito en notación sigma:

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n} c = n.c}$$

Ejercicios:

17) Desarrollar las siguientes sumas:

$$a)\sum_{k=1}^{7}(2k-4)$$

$$b)\sum_{t=4}^{10}(3^t+t^2)$$

$$c)\sum_{h=5}^{14}(2-\frac{4}{h})$$

18) Completar las siguientes igualdades:

$$a)\sum_{k=1}^{28}(2k-4)=\sum_{k=1}^{7}(2k-4)+\sum_{...}^{...}(2k-4)$$

$$b)\sum_{t=4}^{10}(3^t+t^2)=\sum_{t=1}^{10}(3^t+t^2)-\sum_{...}^{...}(3^t+t^2)$$

$$c)\sum_{h=5}^{14}(2-\frac{4}{h})=\sum_{...}^{...}(2-\frac{4}{h})-\sum_{...}^{...}(2-\frac{4}{h})$$

$$d)\sum_{i=4}^{10}(2^i+i)=(2^4+4)+\sum_{...}^{...}(2^i+i)$$

$$e)\sum_{j=3}^{18}(\frac{1+j}{j})=\sum_{...}^{...}(\frac{1+j}{j})+(\frac{1+18}{18})$$

$$f)\sum_{j=2}^{45}(\frac{4-j}{j+1})=\sum_{j=2}^{44}(\frac{4-j}{j+1})+........$$

$$g)\sum_{n=3}^{h}(\frac{4}{n+1})=\sum_{n=3}^{h-1}(\frac{4}{n+1})+.........$$

$$h)\sum_{t=6}^{k}(\frac{t}{t+2})=\sum_{t=6}^{k-1}(\frac{t}{t+2})+..........$$

19) Escribir las siguientes sumas utilizando la notación sigma:

a) 1 + 4 + 9+ 16+ 25 +…+81

b) 1 -1 + 1 -1 +1 -1+1

c) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 +….+46

d) 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ….+34

e) 13+ 20+ 27+ 34+ 41+….+(13+(n-1).7)

f) 8 + 2/3 + 1/18 + 1/216 +… +8 $(1/12)^{k-1}$

g) 2 + 4 + 6 + 8 + … + 2.t

20) Dar el resultado de las siguientes sumas:

$$a)\sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5 \qquad b)\sum_{j=3}^{6} \frac{(j-1)}{(j-2)}$$

$$c)\sum_{k=3}^{8} k(k-1) \qquad d)\sum_{t=5}^{9} 1+(-1)^t$$

$$e)\sum_{i=1}^{200} 10 \qquad f)\sum_{j=8}^{70} 20$$

Suma de sucesiones aritméticas y geométricas.

Hemos definido con carácter de sucesiones especiales a las sucesiones aritméticas y geométricas. Parte de esta caracterización es que podemos conocer el resultado de sumar cualquier número finito de términos de estas sucesiones.

Suma aritmética:

Al comienzo del capítulo recordamos al matemático Carl Friederich Gauss, quien en sus años de escuela, dio el resultado de la suma de los 100 primeros números naturales muy rápidamente y sin sumarlos uno a uno. La sucesión de los números naturales es una sucesión aritmética de primer término 1 y diferencia 1.

Veamos su estrategia:

$$\sum_{h=1}^{100} h = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$\boxed{4+97=101}$$

$$\boxed{3+98=101}$$

$$\boxed{2+99=101}$$

$$\boxed{1+100=101}$$

Identificó que todas estas sumas daban 101 y como iba tomando los números de a dos, tenía 50 veces el número 101, así le contestó a su maestro que la suma daba:

$$\frac{100}{2}.101 = 5050$$

Veamos cómo podemos obtener un resultado para cualquier suma aritmética.

Recordemos la definición explícita de una sucesión aritmética: $a_k = a_1 + (k-1)d$

Llamemos S_n al resultado de sumar los n primeros términos de una sucesión aritmética. Podemos desarrollar la suma desde el 1er término hasta el último o también desde el último hasta el primero, ya que la suma es conmutativa. Luego sumamos a ambos miembros:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \underbrace{a_2}_{a_1+d} + \underbrace{a_3}_{a_1+2d} + \dots + \underbrace{a_{n-2}}_{a_n-2d} + \underbrace{a_{n-1}}_{a_n-d} + a_n$$

$+$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + \overbrace{a_{n-1}}^{a_n-d} + \overbrace{a_{n-2}}^{a_n-2d} + \dots + \overbrace{a_3}^{a_1+2d} + \overbrace{a_2}^{a_1+d} + a_1$$

$$2S_n = 2\sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_n) + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{a_1+a_n} + \underbrace{(a_3 + a_{n-2})}_{a_1+a_n} + \cdots + \underbrace{(a_{n-2} + a_3)}_{a_1+a_n} + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{a_1+a_n} + (a_n + a_1)$$

Observemos que:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n$$

….

Es decir todos los paréntesis de la suma resultan ser iguales a $a_1 + a_n$

Por lo tanto podemos escribir:

$$\boxed{2S_n = 2\sum_{k=1}^{n} a_k = n(a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

Entonces, conociendo el primer término y la diferencia de una sucesión aritmética podemos conocer la suma de sus términos.

Ejemplo 2.4:

Sume los términos de la sucesión aritmética de primer término 3 y diferencia -5 desde el 1ero hasta el 25:

$$\sum_{k=1}^{25} a_k = \sum_{k=1}^{25}[3+(k-1)(-5)] = \frac{\overset{\text{Cantidad de términos}}{25}(\overset{a_1}{3}+\overset{a_n}{(-117)})}{2} = \frac{25(-114)}{2} = 25(-57) = -1425$$

Ejemplo 2.5:

Si queremos hacer la suma de los 100 primeros números naturales, consideramos la sucesión de los números naturales como una sucesión aritmética de primer término 1 y diferencia 1, entonces:

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100(1+100)}{2} = \frac{100(101)}{2} = 5050$$

Verificando el cálculo de Gauss.

Así, si queremos calcular la suma de los n primeros naturales tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 2.6:

Calcular la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^{78}(2k-5)$$

Veremos 2 formas de resolverlo.

1) Podemos desarrollar algunos términos de esta suma para identificar la sucesión:

$$\sum_{k=1}^{78}(2k-5) = (2.1-5)+(2.2-5)+(2.3-5)+(2.4-5)+\cdots+(2.78-5) =$$

$$= -3+(-1)+1+3+\cdots+151$$

+2 +2 +2

Es una sucesión aritmética de primer término -3 y diferencia 2, entonces podemos aplicar la expresión general de la suma de una sucesión aritmética:

$$\sum_{k=1}^{78}(2k-5)=\frac{78(-3+151)}{2}=\frac{78(148)}{2}=78.74=5772$$

2) También podemos aplicar las propiedades de la sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{78}(2k-5)=\sum_{k=1}^{78}2k-\sum_{k=1}^{78}5=2\left(\sum_{k=1}^{78}k\right)-\sum_{k=1}^{78}5=2\,\frac{78(78+1)}{2}-5.78=78.79-5.78=78.74=5772$$

Propiedad I) Propiedad II) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ Propiedad III)

Suma geométrica:

Recordemos la fórmula de la sucesión geométrica: $a_k=a_1r^{k-1}$

Llamemos nuevamente S_n al resultado de sumar los n primeros términos de una sucesión geométrica. Desarrollamos esa suma y también la suma multiplicada por r. Luego restamos ambas expresiones:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_1.r+a_1.r^2+\cdots+a_1.r^{n-1}$$

$$-$$

$$r.S_n=r.(\sum_{k=1}^{n}a_k)=a_1.r+a_1.r^2+\cdots+a_1.r^{n-1}+a_1.r^n$$

$$S_n-r.S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-r.(\sum_{k=1}^{n}a_k)=a_1+\underbrace{(a_1.r-a_1.r)}_{0}+\underbrace{(a_1.r^2-a_1.r^2)}_{0}+\cdots+\underbrace{(a_1.r^{n-1}-a_1.r^{n-1})}_{0}-a_1.r^n$$

Sacando factor común S_n:

$$(1-r).S_n=(1-r).\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1-a_1.r^n$$

Dividiendo por (1-r):

$$\boxed{S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a_1-a_1.r^n}{(1-r)}\quad entonces\quad \sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)}}$$

Entonces, conociendo el primer término y la razón de una sucesión geométrica podemos conocer la suma de sus términos.

Ejemplo 2.7:

Sume los términos de la sucesión geométrica de primer término 3 y razón ½ desde el 1ero hasta el 38:

$$\sum_{k=1}^{38} a_k = \sum_{k=1}^{38} 3.\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{\overset{a_1}{3}\left(1-\overset{r}{\left(\frac{1}{2}\right)}^{\overset{\text{Cantidad de términos}}{38}}\right)}{1-\underset{r}{\frac{1}{2}}} = \frac{3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{38}\right)}{\frac{1}{2}} = 2.3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{38}\right) = 6-6\left(\frac{1}{2}\right)^{38}$$

Nota: observar que faltaría resolver la cuenta, pero es sólo una cuenta y no la suma de 38 términos. Observar también que las expresiones del resultado de la suma de una sucesión aritmética o geométrica sólo son válidas sólo si se suman los términos a partir del primero.

Ejemplo 2.8:

Calcular la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^{80} 2.3^k$$

Primero debemos identificar la sucesión, para eso desarrollamos algunos términos:

$$\sum_{k=1}^{80} 2.3^k = 2.3^1 + 2.3^2 + 2.3^3 + 2.3^4 + \cdots + 2.3^{80} =$$

$$= 6 + 6.3 + 6.3^2 + 6.3^3 + \cdots + 6.3^{79}$$

x3 x3 x3

Es una sucesión geométrica de primer término 6 y razón 3, entonces podemos aplicar la expresión general de la suma de una sucesión geométrica:

$$\sum_{k=1}^{80} 2.3^k = \frac{6(1-3^{80})}{1-3} = \frac{6(1-3^{80})}{-2} = -3(1-3^{80}) = 3^{81} - 3$$

Ejemplo 2.9:

Sabiendo que:

$$\sum_{k=1}^{n} 5.2^{k+1} = 20(2^n - 1)$$

Dar el resultado de:

$$\sum_{k=7}^{58} 5.2^{k+1}$$

En este caso tenemos el resultado de la suma de una sucesión desde el 1er término hasta el n-ésimo y nos pide calcular la suma de la misma sucesión, desde el séptimo término hasta el 58.

Para poder usar la expresión de la suma necesitamos que empiece en 1, puede variar donde termina pero no donde empieza, entonces escribimos:

$$\sum_{k=7}^{58} 5.2^{k+1} = 5.2^8 + 5.2^9 + 5.2^{10} + \cdots + 5.2^{58} =$$

Sumamos y restamos los 6 primeros términos:

$$= 5.2^2 + 5.2^3 + \cdots + 5.2^7 + 5.2^8 + 5.2^9 + 5.2^{10} + \cdots + 5.2^{58} - 5.2^2 - 5.2^3 - \cdots - 5.2^7 =$$

$$= \sum_{k=1}^{58} 5.2^{k+1} \quad - \quad \sum_{k=1}^{6} 5.2^{k+1} =$$

$$= 20(2^{58} - 1) - 20(2^6 - 1)$$

Ejercicios:

21) Calcular las siguientes sumas de dos formas diferentes: a) aplicando la suma de una sucesión aritmética, b) aplicando las propiedades vistas de la sumatoria.

$a)\ \sum_{i=1}^{30} (4i + 5)$ $\qquad$ $b)\ \sum_{j=1}^{33} [-3(j - 1) + 2]$

$c)\ \sum_{k=1}^{45} [4 + 5(k - 1)]$ $\qquad$ $d)\ \sum_{t=1}^{h} (3t + 1)$

22)a) Dada la siguiente sucesión, definida en forma recursiva: $c_1 = 3 \quad y \quad c_n = 4 + c_{n-1} \quad si \quad n \geq 2$, calcular $\sum_{k=1}^{m} c_k$

b) Dar el valor de:

$$\sum_{k=10}^{67} c_k$$

23)a) Dada la siguiente sucesión definida por sus primeros términos: $s_1 = -1, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = 9, \quad s_4 = 14, \ldots \quad calcular \quad \sum_{j=1}^{t} s_j$,

b) Dar el valor de:

$$\sum_{j=21}^{100} 2.s_j$$

24) Calcular la suma de los 200 primeros números naturales

25) Calcular la suma de los 100 primeros naturales impares

26) Una pila de troncos tiene 24 troncos en la base, 23 en la 2da hilera, 22 en la tercera, y así siguiendo hasta llegar a la capa superior en la que tiene 10 troncos. Encuentra la cantidad total de troncos en la pila.

27) Sabiendo que la suma de los 10 primeros términos de una sucesión aritmética es 50 y el primer término es -2. Calcular la diferencia de la sucesión.

28) Pablo sumó todos los números enteros positivos de 4 dígitos, pero se salteó uno. La suma de Pablo es igual a 8499 veces el número que se salteó Pablo. Hallar el número que se salteó Pablo.

29) Un ciclista avanza cuesta abajo a razón de 4 pies el primer segundo. En cada segundo sucesivo, avanza 5 pies más que en el segundo anterior. Si el deportista llega a la parte inferior del cerro en 11 segundos, encuentra la distancia total recorrida.

30) Si el primero de octubre ahorro 10 centavos, el 2 de octubre ahorro 20, el 3 de octubre ahorro 30, y así sucesivamente,

a. ¿Cuánto dinero ahorraré el 31 de octubre?

b. ¿Cuánto dinero ahorraré en todo el mes de octubre?

31) Calcular las siguientes sumas:

$a)\sum_{i=1}^{30}(\frac{1}{2})^{i-1}$ $b)\sum_{j=1}^{30}(\frac{1}{2})^{j}$

$c)\sum_{k=1}^{45}(\frac{1}{2})^{k+1}$ $d)\sum_{t=1}^{h}5.2^{t-1}$

$e)\sum_{k=1}^{m}4(\frac{1}{3})^{k-1}$ $d)\sum_{t=1}^{h}2.8^{t}$

$f)\sum_{k=8}^{80}5.2^{k-1}$ $g)\sum_{j=14}^{94}8^{j}$

32) Una pelota de ping pong se lanza desde una altura de 16 mts. En cada rebote se eleva verticalmente ¼ de la altura alcanzada en la caída previa.

a. ¿A qué altura se elevará en el séptimo rebote?

b. ¿Cuál es la distancia total que la pelota recorrió después de ese tiempo?

33) Un mendigo le propuso a un avaro:"… durante este mes le daré a usted un peso el primer día, dos pesos el segundo día, 3 el tercero y así sucesivamente. A cambio usted sólo me dará 0,01 pesos el primer día, 0,02 pesos el segundo día, 0,04 pesos el tercero, 0,08 pesos el cuarto y así sucesivamente.

El avaro aceptó entusiasmado y convinieron en realizar el pago a fin de mes. ¿Cuánto le deberá cada uno al otro al cabo de ese tiempo?

3. Inducción matemática

En lo que sigue *n* representará un número natural.

Ejemplo 3.1:

Consideremos la siguiente expresión: “*n* es par”

¿La expresión anterior es una proposición?

Recordemos que para que lo sea, es necesario poder asignarle de manera inequívoca un valor de verdad: verdadero o falso. ¿Es posible hacerlo? No, puesto que no conocemos qué número natural es *n*.

Ahora bien, si asignamos a *n* un valor concreto, por ejemplo 1064, nuestra expresión queda: “1064 es par”, que es claramente una proposición.

¿Cuál es su valor de verdad?

Lo mismo sucedería si asignamos a *n* cualquier otro número natural. Obtendríamos siempre una proposición, cuyo valor de verdad estará determinado por el número particular utilizado.

Una ***función proposicional*** sobre el conjunto de los números naturales es una expresión *P*(*n*) con la propiedad de que reemplazando *n* por cualquier número natural la expresión obtenida es una proposición.

Ejemplos 3.2:

1. Las siguientes son funciones proposicionales:

- $P(n):\quad n+1>n$
- $Q(n):\quad n$ es un número primo
- $S(n):\quad \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$
- $E(n):\quad n^2-3n+2=0$

2. Las siguientes **no son** funciones proposicionales, ya que aunque asignemos un valor a n, deberíamos resolver una cuenta, que no es ni verdadera ni falsa:
   - $n^2 + 1$
   - $\sum_{k=1}^{n} k$
   - $n^2 - 3n + 2$

Conjunto de verdad:

Si *P*(*n*) es una función proposicional entonces, para cada número natural *k* dado, la expresión *P*(*k*) es una proposición. El conjunto de los naturales *k* para los cuales *P*(*k*) es verdadera se denomina **conjunto de verdad de** *P* y se escribe *V(P)* . Simbólicamente:
$V(P) = \{k \in N : P(k) \text{ es verdadera}\}$

Ejemplo 3.3:

Encontremos el conjunto de verdad para cada una de las funciones proposicionales del ejemplo anterior.

- Es bastante claro que cualquiera sea el número *k* la desigualdad $k + 1 > k$ es verdadera. Por lo tanto, *V(P)*= ℕ
- $V(Q) = \{n \in \mathbb{N}: n \text{ solo es divisible por } 1, -1, n \text{ y } -n\}$.
- Si aplicamos la fórmula de la suma de una sucesión aritmética a la sucesión de los primeros *k* números naturales, tendremos:

  $$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(a_1 + a_k)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

  Por lo tanto, *S*(*k*) es verdadera cualquiera sea el natural *k*, y *V(S)*= ℕ
- Por último, si resolvemos la ecuación $k^2 - 3k + 2 = 0$ obtenemos $V(E) = \{1,2\}$

Ejercicios:

34) Encuentre en cada uno de los siguientes casos el valor de verdad de *P*(*1*), *P*(*2*), *P*(*3*) y establezca si los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad:

a. $P(n): \; 2+6+10+...+(4n-2)=2n^2$
b. $P(n): \; 4+8+12+...+4n=2n(n-1)$
c. $P(n): \; a^5a^n=a^{5+n}$
d. $P(n): \; 9^n-1$ es divisible por 4
e. $P(n): \; 4^n-1$ es divisible por 3

Las funciones proposicionales de las que nos ocuparemos serán aquellas que expresen una propiedad interesante o útil referida a los números naturales. En esos casos nuestra intención será determinar si *P*(*n*) es verdadera independientemente de cuál sea el número *n* o, si por el contrario eso no sucede.

Esto es, nos interesa saber si, para una función proposicional *P*(*n*) dada, se verifica $V(P)=\mathbb{N}$, o bien $V(P)\neq\mathbb{N}$.

Ejemplo 3.4:

a) Hemos visto que para una progresión geométrica de razón *r* y primer término a_1 la suma de los *n* primeros términos es igual a $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$.

Esto quiere decir que para la función proposicional:

P(*n*): "la suma de los primeros *n* términos de una sucesión geométrica de razón *r* primer término a_1 es igual a $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ ", tendremos $V(P)=\mathbb{N}$.

Decimos entonces:

$$(\forall n)\big(P(n)\big) \; es\ verdadera\ en\ el\ universo\ de\ los\ números\ naturales$$

Que también escribimos como:

$$\sum_{k=1}^{n} a_1.r^{k-1}=\frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)} \quad ,\forall n,n\in\mathbb{N}$$

Observación: notar que cuando agregamos el cuantificador a la función proposicional obtenemos una proposición, ya que ahora se afirma que todos los naturales cumplen *V(P),* esto podría ser verdadero o falso pero tiene un valor de verdad a diferencia de la función proposicional que depende del valor que asignemos a n.

b) Consideremos la función proposicional siguiente:

$P(n)$: $n^2 - n + 11$ es un número primo

¿Cómo haríamos para decidir si *V(P)*= $\mathbb{N}$ o *V(P)*$\neq \mathbb{N}$?

Afirmar que *V(P)*= $\mathbb{N}$, es equivalente a decir que *P(n)* es verdadera para todo natural n, ya que es una ***proposición universal***, es decir que cualquiera sea el número natural *n* que consideremos la expresión $n^2 - n + 11$ es un número primo.

Para comprobar *V(P)*$\neq \mathbb{N}$ bastará mostrar un número cualquiera para el cual la expresión nos suministre un número compuesto, ya que es equivalente a negar la proposición universal anterior, transformándose en una ***proposición existencial***.

Lo primero que podríamos hacer es probar con algunos valores. Para ello podemos hacer una tabla como la siguiente:

n	$n^2 - n + 11$		$P(n)$
1	11	primo	verdadero
2	13	primo	verdadero
3	17	primo	verdadero
4	23	primo	verdadero
5	31	primo	verdadero
6	41	primo	verdadero
7	53	primo	verdadero
8	67	primo	verdadero
9	83	primo	verdadero

¿Qué nos informa la tabla anterior acerca de V(*P*)? ¿Podemos concluir que *V(P)* = $\mathbb{N}$?

De ninguna manera, solamente hemos comprobado que $k \in V(P)$ para $k = 1, 2, 3, ..., 9$. Es decir que la proposición $P(k)$ es verdadera para esos nueve valores de *k*. Nada sabemos del resto todavía.

Una proposición $(\forall n)(P(n))$ de la que se desconoce su valor de verdad, es decir, no sabemos si es verdadera para todos los valores de *n*, se llama ***conjetura***.

Hasta este momento entonces, nuestra proposición

$(\forall n)(P(n))$ *, siendo* $P(n)$: $n^2 - n + 11$ es un número primo

es una **conjetura**.
Hemos verificado su validez para algunos valores; esa verificación podría sugerirnos que en realidad *P(n)* es verdadera para todo *n*. Sin embargo, si intentamos un par de valores más:

P(*10*): $10^2 - 10 + 11 = 101$ es un número primo *es verdadero*

P(*11*): $11^2 - 11 + 11 = 121 = 11 \times 11$ es un número primo *es falso*

De esta manera podemos afirmar que $V(P) \neq N$.

Hemos llamado ***conjetura*** a una proposición de la que desconocemos su valor de verdad. Notemos que el estado de conjetura subsiste mientras nosotros desconozcamos si el conjunto verdad es $\mathbb{N}$ o es $\neq \mathbb{N}$.
Demostrando que dicho conjunto es todo $\mathbb{N}$ nuestra conjetura se convertirá en un ***teorema**,* esto es una propiedad válida para todos los números naturales; o bien encontrando un valor de *n* para el cual nuestra función proposicional sea falsa, podemos excluir nuestra conjetura de las propiedades válidas de los números naturales.

Ejercicios:

35) Dé dos ejemplos de funciones proposicionales que sean teoremas sobre los números naturales.

36) Dé dos ejemplos de funciones proposicionales que no sean teoremas.

Axiomas de los números naturales

Giuseppe Peano fue un matemático italiano, que entre otras cosas postuló los siguientes axiomas para definir los números naturales (un axioma es un enunciado que se acepta como definición, no se demuestra):

Axioma 1: $1 \in \mathbb{N}$

Axioma 2: Si $x \in \mathbb{N}$ entonces $x + 1 \in \mathbb{N}$

Axioma 3: $1 \neq x + 1$ para todo $x, x \in \mathbb{N}$

Axioma 4: Si $x + 1 = y + 1$ entonces $x = y$

Axioma 5:

Dado A un subconjunto de $\mathbb{N}$, es decir $A \subseteq \mathbb{N}$, si se cumple que:

a) $1 \in A$ y

b) Cualquiera sea x, si $x \in A$ entonces $x + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$

Este último axioma que hemos destacado, se llama ***Axioma inductivo*** y es el axioma en el que se basa el ***Principio de Inducción***.

El ***Principio de inducción*** afirma que cualquier subconjunto de los naturales que posea esas mismas propiedades es necesariamente igual a $\mathbb{N}$.

Un conjunto con estas propiedades se dice que es un ***Conjunto Inductivo***.

Podemos ahora aplicar el principio de inducción a la demostración de que cierta función proposicional *P(n)* es verdadera para todos los números naturales. Es decir, queremos analizar si el conjunto de verdad de una proposición es el conjunto de los números naturales.

Si *P(n)* es una función proposicional y *V(P)* es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que verifica:

- 1 es un elemento de *V(P)*.
- Si *k* es un elemento de *V(P)* **entonces** *k* + 1 también es un elemento de *V(P)*

entonces *V(P)* = $\mathbb{N}$

Esto es equivalente a escribir:

Si *P(n)* es una función proposicional y se verifica que:

1) *P*(1) es verdadera

***2)* Si para un número *k cualquiera, fijo, P*(*k*) es verdadera entonces *P*(*k*+1) es verdadera.**

Entonces *P(n)* es verdadera para todo natural *n*.

Ejemplo 3.5:

En el ejercicio 4 se pedía formular una conjetura sobre la suma de los primeros *n* números impares, y demostrarla. Eso puede hacerse mediante la fórmula de la suma de una progresión aritmética (cada número impar se obtiene sumando dos al anterior). Hagámoslo ahora usando el principio de inducción:

Conjetura: $P(n):\quad 1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ para todo n, n natural

Vamos a mostrar que el conjunto de verdad de *P(n)* son todos los naturales. Para ello debemos ver dos cosas:

1) *P(1)* es verdadero (esto nos dice que $1 \in V(P)$)

2) Si suponemos *P(k)* verdadero, entonces *P(k+1)* también es verdadero.

1) Escribimos *P(1)*: $1 = 1^2$ es obviamente verdadera.

2) Notemos que debemos demostrar un enunciado condicional.

Para probar el condicional ($p \to q$) usaremos el **método directo.**

Entonces, **asumimos el antecedente verdadero y queremos ver que el consecuente también tiene que ser verdadero**.

Supongamos que para cierto *k*, *P(k)* es verdadera, esto es lo que llamamos hipótesis en una demostración, en este caso debido al principio de inducción la llamaremos **hipótesis inductiva**. Tendremos entonces:

$$P(k):\quad \underbrace{1+3+5+...+(2k-1)=k^2}_{\text{Hipótesis inductiva}}$$ es verdadera

Ahora debemos comprobar que *P(k+1)* también lo es. Escribimos *P(k+1)*:

$$P(k+1):\quad \underbrace{1+3+5+...+(2(k+1)-1)=(k+1)^2}_{\text{Tesis inductiva}}$$

Demostración:

Para probar la igualdad empezamos escribiendo la expresión que está a la izquierda:

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}+(2(k+1)-1)=\underbrace{k^2}+(2(k+1)-1)=$$

Es la hipótesis inductiva

Ahora debemos operar con la expresión de la derecha:

$$=k^2+(2(k+1)-1)=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1$$

Aplicando la fórmula de Bhaskara tenemos que:

$$k=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Esto nos dice que $k^2+2k+1=(k+1)^2$

Hemos probado que:

$P(k)$: $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \ \rightarrow\ P(k+1)$: $1+3+5+\cdots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$

Esto es, que si *P(k)* es verdadera, también lo es *P(k+1)*. Como P(1) también es verdadera, obtenemos que P(n) es verdadera para todo n natural.

Observación: también podríamos haber escrito nuestra proposición utilizando la notación sigma, de esta forma hemos probado que:

$$P(n)\colon \sum_{j=1}^{n}(2j-1)=n^2 \quad es\ verdadera\ para\ todo\ n, n\ natural$$

Hemos probado que la suma de los n primeros números impares es n^2, es decir que si queremos saber cuánto da la suma de los 100 primeros números impares escribimos:

$$\sum_{j=1}^{100}(2j-1)=100^2$$

O si queremos saber cuánto da la suma de los 385 primeros números impares escribimos:

$$\sum_{j=1}^{385}(2j-1)=385^2$$

Y así, con cualquier número natural.

Ejemplo 3.6:

Si quisiéramos ahora saber el resultado de:

$$\sum_{j=15}^{100}(2j-1)=$$

Ya no podemos aplicar el resultado que encontramos porque la suma no comienza en 1. Tenemos entonces que tratar de escribir esa suma como diferencia de dos sumas que comiencen en 1:

$$\sum_{j=15}^{100}(2j-1)=\underbrace{2.15-1+2.16-1+\cdots+2.100-1}=$$

Sumamos y restamos la misma expresión para no cambiar la cuenta

$$=\underbrace{2.1-1+2.2-1+\cdots+2.14-1+\overbrace{2.15-1+\cdots+2.100-1}}-\left[\underbrace{2.1-1+\cdots+2.14-1}\right]=$$

$$\overbrace{\sum_{j=1}^{100}(2j-1)}-\overbrace{\sum_{j=1}^{14}(2j-1)}=100^2-14^2$$

Ahora podemos aplicar el resultado porque ambas sumas empiezan en 1

Ejemplo 3.7:

Consideremos la sucesión: $\frac{1}{1.2},\frac{1}{2.3},\frac{1}{3.4},\cdots,\frac{1}{j(j+1)},\cdots$

Sea $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}$ la suma de sus n primeros términos.

Calculemos esta suma para algunos valores de n:

n=1 $\sum_{j=1}^{1}\frac{1}{j(j+1)}=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$;

n=2 $\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{j(j+1)}=\frac{1}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)}=\frac{2}{3}$;

n=3 $\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{3}{4}$;

Esto nos sugiere que la siguiente conjetura:

P(n): $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{(n+1)}$ *para todo n natural*

Vamos a demostrarlo usando el Principio de Inducción:

1) Queremos probar que *P(1)* es verdadero, es decir que:

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{2}$$

: $\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, por lo tanto P(1) es verdadero

2) Queremos ver que si

P(k): $\underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{k}{(k+1)}}_{\text{Hipótesis inductiva}}$ es verdadera $\rightarrow$ P(k+1): $\underbrace{\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{k+1}{k+2}}_{\text{Tesis inductiva}}$ también lo es.

Suponemos *P(k):* $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{k}{(k+1)}$ verdadera.

Demostración:

Desarrollando la suma

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j(j+1)} = \underbrace{\frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} =$$

Usando la hipótesis inductiva

$$= \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)}\right) + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

En este segundo paso: suponiendo que la igualdad $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{(n+1)}$ es cierta para *n* igual a algún natural *k*, vimos que entonces también es cierta para *n* igual al natural siguiente (*k + 1).*

1) y 2) demuestran que $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{(n+1)}$ se cumple para todos los números naturales.

Probamos que la igualdad se cumple para el 1, entonces, como en el segundo paso probamos que si se cumple para un natural se debe cumplir también para el siguiente, sabemos que se cumple para el 2 (ya que k es un natural cualquiera, en particular puede ser el 1). Como se cumple para el 2, se cumple también para el siguiente del 2. Como se cumple para el 3 . . .

Esto es lo que afirma el principio de inducción.

Ejemplo 3.8:

Utilizaremos el principio de inducción matemática para demostrar que:

$$\sum_{h=1}^{n} 2^{h-1} = 2^n - 1, \qquad para\ todo\ n\ natural$$

Llamemos *P(n)* al enunciado que queremos demostrar.

1) Debemos comprobar que *P(1)* es verdadero

$$\sum_{h=1}^{1} 2^{h-1} = 2^0 = 1 \qquad y \qquad 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Por lo tanto, P(1) es verdadero.

2) Debemos probar que el condicional *P(k)* ⟶ *P(k+1)* es verdadero, cualquiera sea el número natural k, es decir, que *P(k+1)* es verdadero si se supone verdadero *P(k)*).

$$\underbrace{P(k): \sum_{h=1}^{k} 2^{h-1} = 2^k - 1}_{\text{Hipótesis inductiva}} \qquad \longrightarrow \qquad \underbrace{P(k+1): \sum_{h=1}^{k+1} 2^{h-1} = 2^{k+1} - 1}_{\text{Tesis inductiva}}$$

Demostración:

Desarrollando la suma

$$\sum_{h=1}^{k+1} 2^{h-1} = \underbrace{2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{3-1} + \cdots + 2^{k-1}} + 2^{(k+1)-1} =$$

Usando la hipótesis inductiva

$$= \left(\sum_{h=1}^{k} 2^{h-1}\right) + 2^{(k+1)-1} = 2^k - 1 + 2^{(k+1)-1} = 2^k - 1 + 2^k = 2.2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Luego, *P(k+1)* es verdadero.

De 1) y 2) concluimos que *P(n)* es verdadero para todo valor de n.

Observación: hay algunos enunciados que pueden plantearse como válidos para todo natural mayor o igual a 0 o incluso mayor o igual que algún natural mayor a 1, en esos casos utilizamos el principio de inducción para probarlo, usando como primer elemento el 0 o el natural a partir del cual se plantea su validez.

El factorial

La expresión **n!** se lee "**n factorial**" o "**factorial de n**" y está definido para todos los números naturales, en forma recursiva, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \quad si\ n \geq 1 \end{cases}$$

Nota: en este caso incluímos el 0 para dar sentido a otros cálculos que veremos en el siguiente capítulo.

De acuerdo con esta definición es:

1! = 1.0! = 1

$$2! = 2 \, . \, 1! = 2 \, . \, 1 = 2$$

$$3! = 3 \, . \, 2! = 3 \, . \, 2 \, . \, 1 = 6$$

$$4! = 4 \, . \, 3! = 4 \, . \, 3 \, . \, 2 \, . \, 1 = 24$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$n! = n \, (n-1) \, (n-2) \, . \, . \, . \, . \, . 3 \, . \, 2 \, . 1$$

Este número es muy utilizado en la teoría de conteo y probabilidades.

Probaremos a continuación una desigualdad con este número.

Ejemplo 3.9:

Probar por inducción que:

P(n): $n\,! \geq 2^{n-1}$ para todo n natural

1) Queremos probar que P(1) es verdadero: P(1): $1\,! \geq 2^{1-1}$?

En efecto : $1! = 1$ y $2^{1-1} = 2^0 = 1$, por lo tanto P(1) es verdadero

2) Tenemos que demostrar que:

P(k): $k! \geq 2^{k-1}$ es verdadero para algún k, $k \geq 1$ entonces P(k+1): $(k+1)! \geq 2^{k+1-1}$ es verdadero

Hipótesis inductiva

Tesis inductiva

Demostración:

Por definición de factorial

Usando la hipótesis: $k! \geq 2^{k-1}$

Porque $k + 1 \geq 2$ ya que $k \geq 1$

$$(k+1)! = (k+1) \, . \, k! \geq (k+1) \, . \, 2^{k-1} \geq 2 \, . \, 2^{k-1} = 2^{k+1-1}$$

Tenemos entonces: $(k+1)! \geq 2^{k+1-1}$

Por lo tanto P(k+1) es efectivamente verdadero.

Los pasos 1) y 2) demuestran que $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Ejemplo 3.10:

Probar por inducción que:

P(n): $4^n - 1$ es divisible por 3, para todo n natural

Recordemos que decir que un número es divisible por 3 es equivalente a decir que es múltiplo de 3. Entonces podemos reformular nuestro enunciado como:

P(n): $4^n - 1 = 3h$ siendo h un número entero, para todo n natural

1) P(1): $4^1 - 1 = 3h$ siendo h un número entero ?

En efecto: $4^1 - 1 = 3$ que puede expresarse como 3.1 siendo 1 un número entero, por lo tanto P(1) es verdadero

2) Tenemos que demostrar que:

P(k): $4^k - 1 = 3h$, h un número entero $\longrightarrow$ P(k+1): $4^{k+1} - 1 = 3w$, w un número entero

Hipótesis inductiva   Tesis inductiva

Demostración:

Usando la hipótesis: $4^k = 3h + 1$

Sacando factor común

$$4^{k+1} - 1 = 4^k.4 - 1 = (3h+1).4 - 1 = 3h.4 + 4 - 1 = 3h.4 + 3 = 3\left(\underbrace{4h+1}\right) = 3w$$

w es entero por ser suma y producto de enteros

Tenemos entonces: $4^{k+1} - 1 = 3w$, w un número entero

Por lo tanto P(k+1) es efectivamente verdadero.

Los pasos 1) y 2) demuestran que $4^n - 1 = 3h$ siendo h un número entero, para todo $n \geq 1$.

Ejercicios:

37) Utilizando el principio de inducción matemática, demostrar las siguientes afirmaciones.

$a)\ 2+4+6+8+\cdots+2n=n(n+1)\quad para\ todo\ n, n\ natural$

$b)\sum_{h=1}^{n} 3\mathrm{h}=\frac{3}{2}n(n+1),\quad para\ todo\ n, n\ natural$

$c)\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad para\ todo\ n, n\ natural$

$d)\sum_{j=1}^{n} j^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\quad para\ todo\ n, n\ natural$

$e)\ 2n+1<5n,\quad para\ todo\ n, n\ natural$

$f)\ 9^n-1\ \ es\ divisible\ por\ 4,\quad para\ todo\ n, n\ natural$

$g)\ 7^n-1\ \ es\ divisible\ por\ 6,\quad para\ todo\ n, n\ natural$

$h)\sum_{h=1}^{n} \mathrm{h.h!}=(n+1)!-1,\quad para\ todo\ n, n\ natural$

$i)\sum_{i=1}^{n} \mathrm{i(i+1)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3},\quad para\ todo\ n, n\ natural$

$j)\sum_{h=1}^{n} 8.3^{h-1}=4(3^n-1),\quad para\ todo\ n, n\ natural$

$k)\sum_{h=1}^{n} 6\mathrm{h}-5=\mathrm{n(3n-2)},\quad para\ todo\ n, n\ natural$

38) Evaluar sin realizar la suma (no deje de relacionarlo con el ejercicio 37)

$a)\sum_{h=10}^{34} 3\mathrm{h}=$

$$b)\sum_{i=7}^{50} i^2 =$$

$$c)\ \sum_{h=19}^{45} 8.3^{h-1} =$$

$$d)\sum_{h=4}^{20} 12\mathrm{h} - 10 =$$

$$e)\sum_{j=21}^{35} 4.j^3 =$$

---

4. ANEXO: APLICACIONES

Aplicaciones de Notación Sigma, Métodos de conteo e Inducción completa

1) CANTIDAD DE OPERACIONES QUE REALIZA UN ALGORITMO[1]:

El siguiente algoritmo permite ordenar un conjunto de N datos cargados en un vector llamado A, por el **método de la burbuja:**

$i = 1$

$C = N$

Mientras $i > 0$ hacer

Inicio

  $i = 0$

  $C = C - 1$

  $x = 1$

  Mientras $x \leq C$ hacer

  Inicio

    Si $A(x) > A(x + 1)$ entonces

[1] Extraído del libro "Matemáticas para la computación", José A. Jiménez Murillo

Inicio

$T = A(x)$

$A(x) = A(x+1)$

$A(x+1) = T$

$i = i + 1$

fin

$x = x + 1$

fin

fin

En este algoritmo, A es el nombre del vector donde están cargados los datos, cuando se hace referencia a A(x), nos referimos al elemento que está en la posición x del vector A. Este algoritmo se detiene si el vector ya está ordenado, por eso la cantidad de comparaciones es variable.

Si un elemento es más grande que el que está en la siguiente posición, los intercambia, ordenando siempre de menor a mayor.

Observar que la variable $\boldsymbol{i}$ cuenta el número de intercambios realizados en una pasada, por eso, si no hubo intercambios la variable i queda con valor 0 y el algoritmo termina.

Este algoritmo realiza como mínimo $\boldsymbol{n-1}$ comparaciones y como máximo $\frac{\boldsymbol{(n-1).n}}{\boldsymbol{2}}$ comparaciones.

Si el vector está ordenado, el algoritmo compara cada elemento con el siguiente y termina, por lo tanto realiza $\boldsymbol{n-1}$ comparaciones.

Si el vector no está ordenado, puede verse que, en la primera pasada se realizan $\boldsymbol{n-1}$ comparaciones, en la pasada siguiente, realiza $\boldsymbol{n-2}$ comparaciones, ya que el elemento más grande quedó en el lugar $\boldsymbol{n}$ y ya no se vuelve a comparar. Así, en la tercera pasada, se realizan $\boldsymbol{n-3}$ comparaciones, dejando los 2 últimos sin comparar.

Podemos pensar entonces que el número de comparaciones es:

$$\boldsymbol{(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+\cdots+n-(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{(n-1)n}{2}}$$

Esta última igualdad se justifica:

a) por ser la suma de una sucesión aritmética de primer término 1 y diferencia 1

b) probando por Inducción Matemática

3) EXPRESAR EN FUNCION DE N, EL TIEMPO DE EJECUCION DEL SIGUIENTE ALGORITMO:

$n = N$
$c = 0$
for $\boldsymbol{i = 1}$ to $\boldsymbol{i \leq n - 1}$
  for $\boldsymbol{j = i + 1}$ to $\boldsymbol{j \leq n}$
    for $\boldsymbol{k = 1}$ to $\boldsymbol{k \leq j}$
      $operación\ H$
      $k = k + 1$
    end
    $j = j + 1$
  end
  $i = i + 1$
End

Recordar que:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Llamamos $operación\ H$ a una operación cualquiera que se realizará en ese momento.

Tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=1}^{j} H = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} Hj = H\sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j) = H\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}) =$$

$$\frac{H}{2}(\sum_{i=1}^{n-1} n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i) = \frac{H}{2}((n-1)n^2 + (n-1)n - \frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2}) =$$

$$= \frac{H}{2}(n^3 - n^2 + n^2 - n - \frac{(n^2-n)(2n-1)}{6} - \frac{n^2-n}{2}) = \frac{H}{2}(n^3 - n - \frac{2n^3 - 2n^2 - n^2 + n}{6} - \frac{n^2-n}{2}) =$$

$$\frac{H}{2}(\frac{6n^3 - 6n}{6} - (\frac{2n^3 - 2n^2 - n^2 + n}{6}) - (\frac{3n^2 - 3n}{6})) = \frac{H}{2}(\frac{6n^3 - 6n - 2n^3 + 2n^2 + n^2 - n - 3n^2 + 3n}{6}) =$$

$$\frac{H}{2}(\frac{4n^3 - 4n}{6}) = \frac{H4}{12}(n^3 - n) = \frac{H}{3}(n^3 - n)$$

Por lo tanto $T(n)=\frac{H}{3}(n^3-n)$ que puede interpretarse como la cantidad de veces que el algoritmo realiza la operación H.

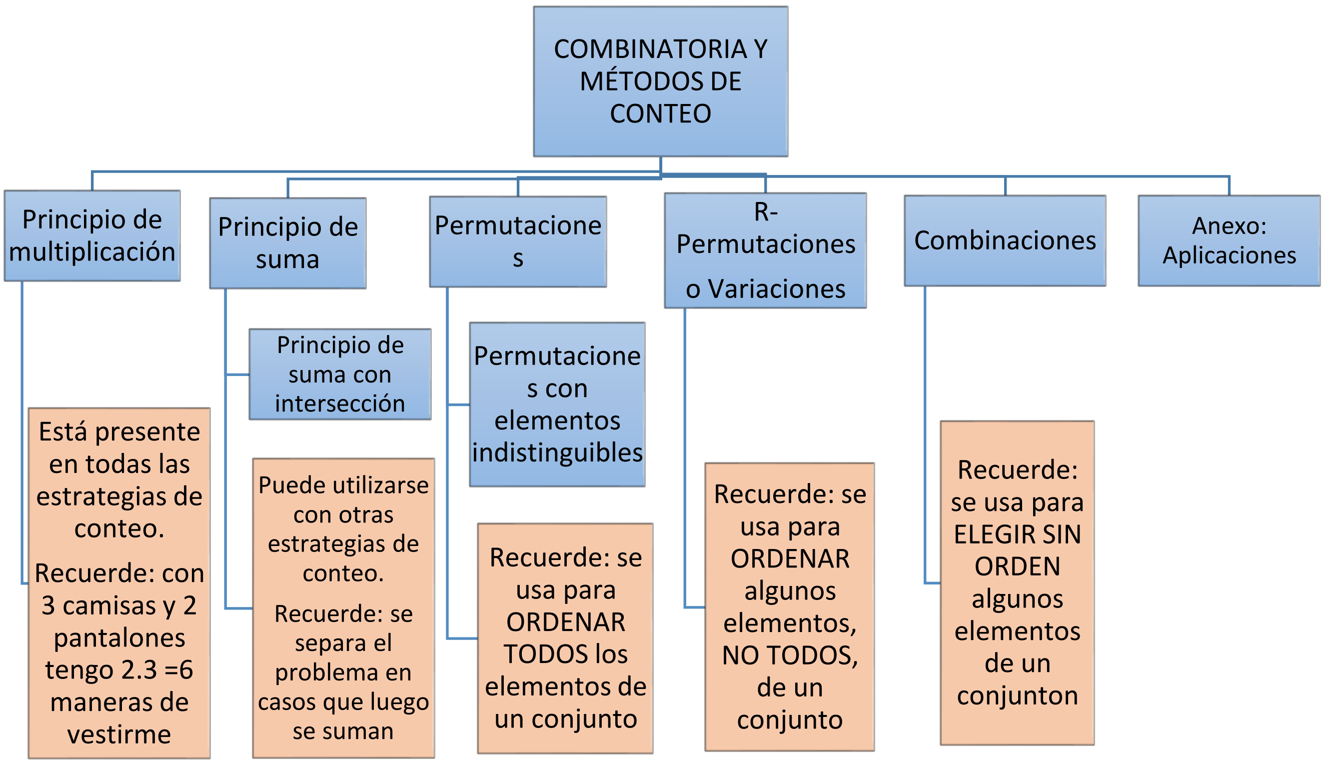
Bibliografía

- R. Espinosa Armenta, **Matemáticas discretas**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010
- Johnsonbaugh, Richard , **Matemáticas discretas**, 4ª ed., Prentice Hall, 1999
- Smith, et al , **Algebra, trigonometría y geometría analítica**, Pearson-Addison Wesley Longman, 1998
- Jimenez Murillo, José A., **Matemáticas para la computación**, Alfaomega grupo editor, México, 2008

Capítulo 5

COMBINATORIA Y METODOS DE CONTEO

CONTENIDOS:



Matemático invitado: Blaise Pascal

La actividad de contar es casi tan antigua como el hombre, es posible contar casi cualquier cosa siempre y cuando se use el método de conteo adecuado y la forma adecuada para distinguir los elementos del conjunto que se quiere contar.

En el área de la computación es necesario usar métodos de conteo para determinar el número de ciclos que tiene un programa, el número de comparaciones que realiza un programa para ordenar un conjunto de datos, el número de palabras diferentes que tiene un lenguaje con determinada gramática. En función de esto diremos que un software es más o menos eficiente que otro para realizar determinado algoritmo. Los métodos de conteo en informática permiten optimizar los recursos de computadora y disminuir el tiempo de ejecución de un proceso.

Los métodos de conteo son también la antesala de la teoría de las probabilidades, que estudia la probabilidad de que un hecho ocurra. En líneas generales esto se calcula dividiendo la cantidad de éxitos, sobre la cantidad total de casos. Por ejemplo la probabilidad de que salga un número que empiece con 1 en un bolillero que tiene números de dos cifras, será 10 dividido 90, ya que hay 10 números que empiezan con 1 y hay 90 de dos cifras.

En el siglo XVII Pierre Fermat y Blaise Pascal tratan de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar y comienzan a desarrollar la teoría de las probabilidades.

En este curso estudiaremos el número combinatorio, definido como:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Este número aparece en el llamado Triángulo de Pascal, donde cada fila del triángulo está formado por los números combinatorios. Se construye de arriba hacia abajo, con 1 en los extremos y el elemento que se escribe entre dos números que están arriba es la suma de esos números:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
&&&&1&&&& \\
&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&& \\
&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&& \\
&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}& \\
\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}
\end{array}$$

……………………

El triángulo tiene varias propiedades, entre ellas, la suma de los elementos de una fila es 2^n, así, sacando el primer 1, la suma de la primer fila es 2^1, la de la segunda es 2^2 , la de la tercera es 2^3, etc.

Blaise Pascal nació en Francia el 19 de junio de 1623 y murió el 19 de agosto de 1662. Fue matemático, físico y filósofo cristiano. Sus contribuciones a la matemática incluyen el diseño y construcción de calculadoras mecánicas, aportes a la teoría de la probabilidad, investigaciones sobre los fluídos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío. Después de una experiencia religiosa profunda en 1654, Pascal se dedicó también a la filosofía y a la teología.

1. Principio de multiplicación.

Comenzaremos con algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1:

Con el menú que aparece a continuación,

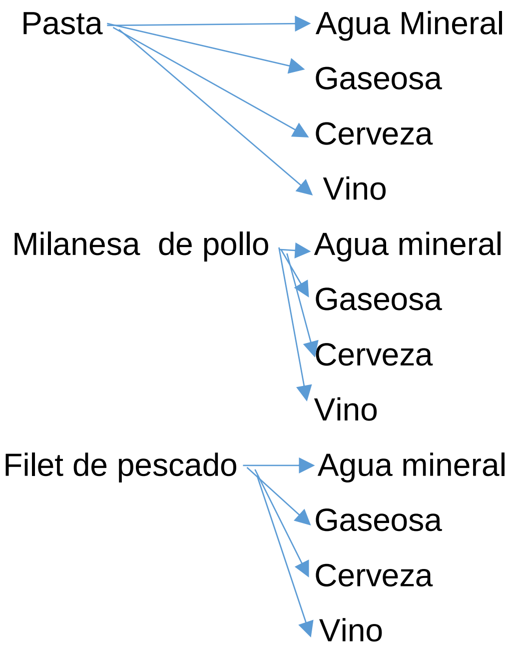
a) ¿Cuántas comidas diferentes que consten de un plato principal y una bebida pueden hacerse?

Entradas
Sopa
Ensalada

Platos principales
Pasta
Milanesa de pollo
Filete de pescado

Bebidas
Agua mineral
Gaseosa
Cerveza
Vino

Enumeremos todas las comidas posibles con un plato principal y una bebida:

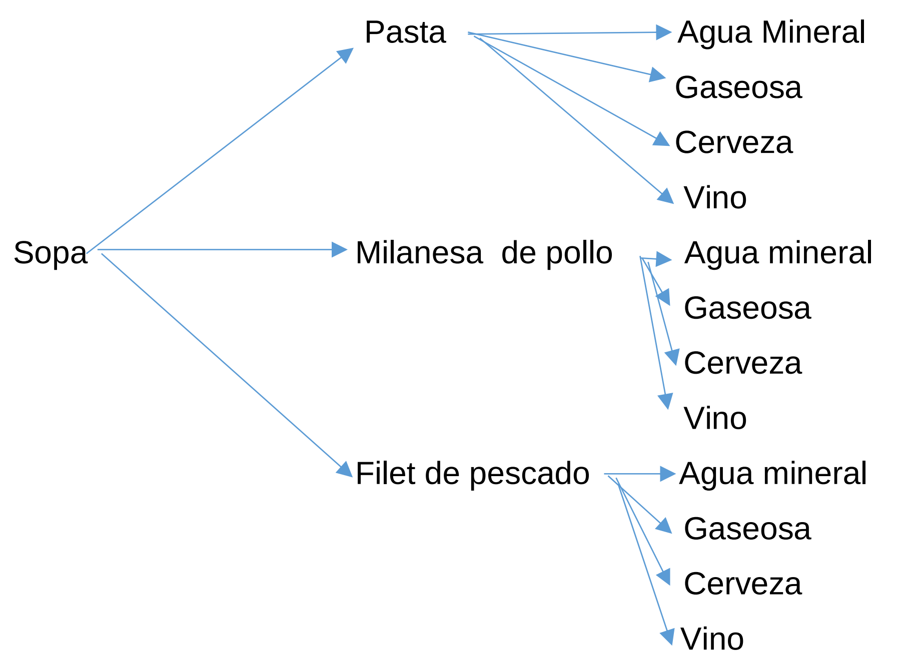


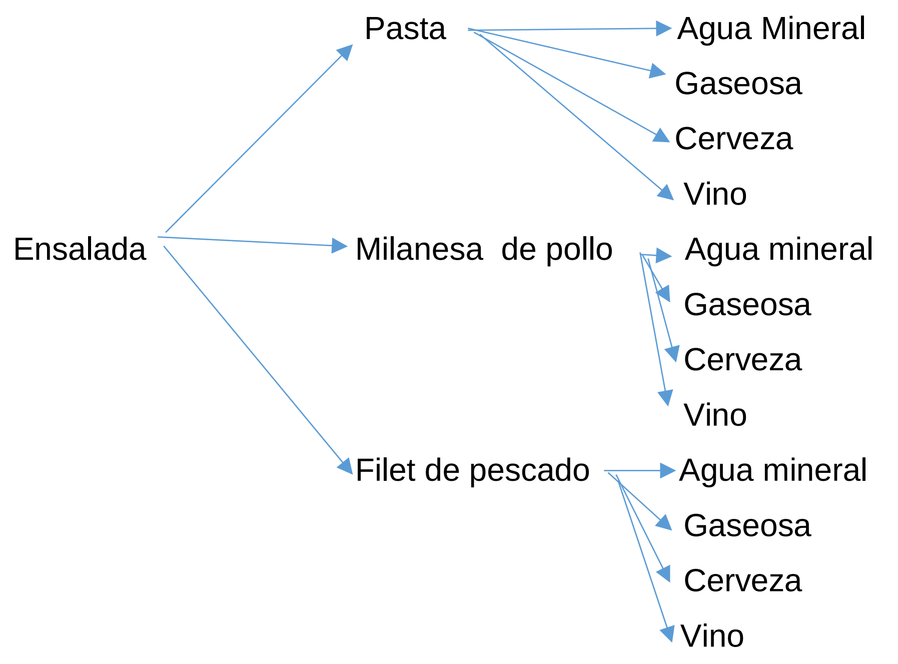
Hay 12 comidas diferentes. La elección del plato principal puede hacerse de tres maneras diferentes (P, M o F) y, para cada una de ellas, hay cuatro maneras distintas de elegir la bebida (A, G, C o V).

b) ¿Cuántas comidas diferentes que consten de una entrada, un plato principal y una bebida pueden hacerse?

La elección de la entrada puede hacerse de dos maneras diferentes.

Por cada una de esas elecciones, hay tres maneras diferentes de elegir el plato principal, habiendo entonces un total de 2 . 3 = 6 comidas diferentes con entrada y plato principal. Para cada una de esas comidas hay cuatro maneras diferentes de elegir la bebida, así que en total tendremos 6 . 4 = 24 comidas diferentes con entrada, plato principal y bebida.





Principio de multiplicación:

Si una actividad consta de t pasos sucesivos y
el paso 1 puede realizarse de n_1 formas,
el paso 2 puede realizarse de n_2 formas, . . . ,
el paso t puede realizarse de n_t formas,

entonces el número de diferentes resultados posibles es $n_1 . n_2 ... n_t$

Ejemplo 1.2:

Si tengo 3 pantalones y 4 remeras, ¿De cuántas maneras puedo vestirme?

Nuevamente tenemos que pensar que teniendo 3 pantalones, por cada elección de pantalón puedo elegir 4 remeras distintas. Siguiendo la definición del principio de multiplicación, tenemos 2 pasos a realizar (elección de pantalón, elección de remera), el primer paso puede hacerse de 3 maneras y el segundo de 4 maneras, por lo tanto la cantidad de formas de vestirme es 3.4=12.

Ejemplo 1.3:

a) ¿Cuántas cadenas de longitud 4 pueden formarse con las letras A B C D E si no se permiten repeticiones?
b) ¿y si las letras pueden repetirse?
c) ¿Cuántas cadenas de la parte a) comienzan con la letra E?
d) ¿Cuántas cadenas de la parte b) comienzan con la letra E?

a) Una cadena de longitud 4 puede construirse en cuatro pasos sucesivos: se elige la primera letra, luego la segunda, luego la tercera y finalmente la cuarta. La primera letra puede elegirse de cinco maneras. Una vez elegida la primera letra, la segunda puede seleccionarse de cuatro formas (pues no queremos que la cadena tenga letras repetidas), una vez elegida la segunda letra, la tercera puede seleccionarse de tres formas. Una vez elegida la tercera letra, la cuarta puede seleccionarse de dos formas.

Tengo que realizar 4 pasos:

Cantidad de letras disponibles: 5 4 3 2

Por el principio de multiplicación, pueden formarse 5.4.3.2 = 120 cadenas diferentes de longitud 4 y sin letras repetidas.

b) Si se permiten repeticiones, la elección de cada letra puede hacerse de cinco maneras diferentes. Por lo tanto, hay 5.5.5.5 = 5^4 cadenas.

c) Si la cadena debe comenzar con la E, la elección de la primera letra puede hacerse de una única manera. Como no permitimos repeticiones, la elección de la segunda letra puede hacerse de cuatro maneras diferentes, la elección de la tercera, de tres maneras y la elección de la cuarta letra puede hacerse de dos maneras diferentes. Entonces 1.4.3.2 = 24 es el número de cadenas de la parte a) que empiezan con la letra E.

Tengo que realizar 4 pasos: 

Cantidad de letras disponibles: E 4 3 2

d) Otra vez, la elección de la primera letra puede hacerse de una única forma, pero ahora la elección de la segunda letra puede hacerse de cinco maneras diferentes, y lo mismo vale para la tercera y la cuarta letra. Así que, en este caso, hay 1. 5. 5. 5 =125 cadenas.

---

2. Principio de suma.

Ejemplo 2.1:

¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 101 o con 111?

Separemos el problema en dos casos:

Caso 1)

Una cadena de ocho bits que comienza con 101 puede construirse en cinco pasos: se elige el cuarto bit, se elige el quinto bit, . . . , se elige el octavo bit. Cada una de esas elecciones puede hacerse de dos maneras (se elige un 1 o un 0). Por el principio de multiplicación, hay 2^5=32 cadenas de ocho bits que comiencen con 101.

Tengo que realizar 5 pasos: 1 0 1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Cantidad disponible: 2(0 o1) 2 2 2 2

Caso 2)

El mismo razonamiento vale para las cadenas que comienzan con 111. Hay también 32 de estas cadenas.

El conjunto de las cadenas que comienzan con 101 y el conjunto de las cadenas que comienzan con 111 son conjuntos disjuntos, es decir que no tienen cadenas en común, así que el número de cadenas de ocho bits que comienzan con 101 o con 111 es 32 + 32 = 64.

Observación: acá el resultado no está dado por la multiplicación de los casos, ya que no es cierto que por cadena que comience con 101 tengo 32 cadenas que comiences con 111.

Si una cadena empieza con 101 no puede empezar con 111, por eso decimos que son casos disjuntos, contamos por separado cada caso y luego sumamos.

Principio de suma:

Si una actividad puede separarse en t casos distintos de manera que no tengan intersección y el caso 1 puede realizarse de n_1 *formas, el caso 2 de* n_2 *formas,… el caso t de* n_t formas, entonces la cantidad de formas de realizar el caso1 o el caso 2 o el caso 3 o … o el caso t ,está dada por:

$n_1 + n_2 + . . . + n_t$

Dicho de otro modo:

Si $X_1, X_2, . . . , X_t$ son conjuntos con $n_1, n_2, . . . , n_t$ elementos respectivamente, y

$X_i \cap X_j = \varnothing$ si $i \neq j$ entonces el número de elementos posibles que pueden elegirse de X_1 *o* X_2 *o. . . o* X_t es $n_1 + n_2 + . . . + n_t$

($X_1 \cup X_2 \cup . . . \cup X_t$ tiene $n_1 + n_2 + . . . + n_t$ elementos)

Ejemplo 2.2:

Un consejo formado por Alicia, Berta, Carlos, Darío, Elena y Francisco debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

a) ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

b) ¿De cuántas formas puede hacerse si debe ser presidente Alicia o Francisco?

c) ¿De cuántas formas puede hacerse si Berta debe tener alguno de los puestos?

d) ¿De cuántas maneras puede hacerse si Berta es presidente o Carlos es secretario?

a) Los ocupantes de los cargos pueden elegirse en tres pasos: 1º) se elige el presidente (esta elección se puede hacer de 6 maneras distintas) 2º) se elige el secretario (quedan para esta elección cinco posibilidades) 3º) se elige el tesorero (4 posibilidades). Por el principio de multiplicación, hay 6 . 5 . 4 = 120 formas diferentes de elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

b) Separamos en dos casos:

Caso 1) Si Alicia es presidente, razonando como en a), concluimos que hay 5. 4 = 20 maneras de seleccionar un secretario y un tesorero entre las cinco personas que quedan.

Caso 2) De la misma manera, si Francisco es presidente, hay 20 maneras de elegir a los demás. El conjunto de ternas que tienen a Alicia como presidente y el de ternas que tienen a Francisco como presidente son disjuntos.

Por el principio de suma, hay 20 + 20 = 40 formas diferentes de elegir presidente, secretario y tesorero, si Alicia o Francisco deben ser presidentes.

c) Separamos en 3 casos:

Caso 1) Si Berta es presidente, razonando como en a) hay 5 . 4 = 20 maneras de elegir secretario y tesorero.

Caso 2) De la misma manera, si Berta es secretario hay 20 maneras de elegir presidente y tesorero.

Caso 3) Si Berta es tesorero, hay 20 maneras de elegir presidente y secretario.

Como las tres situaciones son disjuntas, por el principio de suma hay 20+20+20 = 60 maneras de elegir presidente, secretario y tesorero, si Berta debe ocupar un cargo.

En esta parte también podríamos haber razonado de la siguiente manera: la actividad de elegir presidente, secretario y tesorero entre las seis personas si Berta debe ocupar un cargo, puede realizarse en tres pasos. En el primer paso se asigna a Berta un cargo (hay para esto 3 posibilidades: presidente, secretario o tesorero)). En el segundo paso se ocupa el siguiente cargo más alto (5 posibles elecciones). En el tercer paso se ocupa el otro cargo (4 posibilidades). Por el principio de multiplicación hay 3 . 5 . 4 = 120 formas de elegir un presidente, un secretario y un tesorero si Berta debe ocupar algún cargo.

d) Consideraremos en este curso el "o inclusivo", es decir que aceptamos como caso válido que Berta sea presidente y Carlos Secretario

Separamos en 2 casos:

Caso 1) Si Berta es presidente hay, como ya hemos dicho, 20 maneras de ocupar los otros dos cargos.

Caso 2) También, siendo Carlos secretario hay 20 maneras de ocupar los otros cargos.

Pero en este caso el conjunto de posibilidades en las que Berta es presidente y el conjunto de posibilidades en las que Carlos es secretario no son disjuntos.

Caso 1)	Presidente	Secretario	Tesorero
Tengo que realizar 3 pasos:			
Cantidad de personas disponibles:	Berta	5	4
		(Puede estar Carlos)	

Caso 2)	Presidente	Secretario	Tesorero
Tengo que realizar 3 pasos:			
Cantidad de personas disponibles:	5	Carlos	4
	(Puede estar Berta)		

Es decir que el caso	Presidente	Secretario	Tesorero
	Berta	Carlos	4

Se cuenta en ambos casos.

Las asignaciones de cargos que tienen a Berta como presidente y a Carlos como secretario pertenecen a ambos conjuntos (éstas son 4 posibilidades) Así que el número de maneras de elegir presidente, secretario y tesorero, con Berta como presidente o con Carlos como secretario es: 20 + 20 – 4 = 36.

Principio de suma con intersección.

Si una actividad puede separarse en 2 casos distintos, de manera que el caso 1 puede realizarse de n_1 *formas y el caso 2 de* n_2 *formas,* pero tienen casos en común, es decir que no son disjuntos, y el número de casos en común es k, entonces la cantidad de formas de realizar la actividad está dada por:

$n_1 + n_2 - k$

Dicho de otro modo:

Si X e Y son conjuntos finitos, con n y m elementos respectivamente, y $X \cap Y$ tiene k elementos, la unión de X e Y tiene $n + m - k$ elementos.

Observación:

Transformar un problema de suma con intersección en uno sin intersección.

El inciso d) del ejercicio anterior podría resolverse también disjuntando los casos. Esto quiere decir que separamos en casos sin intersección:

Caso1) Berta es presidente y Carlos no es secretario: hay entonces una sola posibilidad para el presidente (Berta), 4 para el secretario (de los 6 hay que descontar a Berta y a Carlos) y 4 posibilidades para el tesorero (descontamos a Berta y a la persona elegida de secretario, quedan 4 porque Carlos sí puede ser tesorero), entonces hay 4.4=16 maneras de ocupar los otros dos cargos.

Caso 2) Carlos es secretario y Berta no es presidente: igual que antes hay 16 maneras de ocupar los cargos.

Caso 3) Berta es presidente y Carlos es secretario: solo queda elegir al tesorero, que puede hacerse de 4 maneras distintas.

En este esquema nuestros casos son disjuntos y la cantidad de formas de elegir los cargos con las restricciones puestas es entonces 16 + 16 + 4=36.

Ejercicios:

1) Un hombre tiene ocho camisas, cuatro pantalones y cinco pares de zapatos. ¿Cuántas combinaciones de ropa puede hacer?

2) ¿Cuántas patentes de auto diferentes pueden construirse?

3) a) ¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 1100?

b) ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen el segundo o el cuarto bit igual a 1?

c) ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen exactamente un 1?

d) ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen al menos un 1?

e) ¿Cuántas cadenas de ocho bits tienen exactamente dos 1?

f) ¿Cuántas cadenas de ocho bits se leen igual en ambas direcciones?

4) Las letras A B C D E se utilizan para formar cadenas de longitud 3.

a) ¿Cuál es el número total de cadenas?

b) ¿Cuántas cadenas hay sin letras repetidas?

c) ¿Cuántas cadenas comienzan con A?

d) ¿Cuántas cadenas comienzan con A y no tienen letras repetidas?

e) ¿Cuántas cadenas comienzan con B o con D?

f) ¿Cuántas cadenas comienzan con B o terminan con D?

5) a) ¿Cuántos enteros entre el 0 y el 200 inclusive son divisibles por 5?

b) ¿Cuántos enteros de 3 cifras tienen dígitos distintos?

c) ¿Cuántos enteros de 3 cifras contienen el dígito 7?

d) ¿Cuántos enteros de 3 cifras no contienen al dígito 0?

6) Con referencia al ejemplo 2.2, ¿de cuántas maneras pueden ocuparse los cargos si Berta es presidente o Carlos tiene un puesto? (Recuerde: consideramos el "o inclusivo", es decir que pueden ocurrir las dos cosas)

7) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{x, y, z, w, t, r, h\}$, ¿Cuántas funciones inyectivas hay con dominio A y codominio B?

---

3. Permutaciones.

Ejemplo 3.1:

¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse los nombres María, Nicolás y Paula en una lista?

El primer nombre puede elegirse de tres maneras diferentes. Una vez elegido el primer nombre, nos quedan 2 y por último sólo uno.

Podemos pensarlo con el principio de multiplicación:

Tengo que realizar 3 pasos:			
Cantidad de personas disponibles:	3	2	1

3.2.1=6 maneras de ordenarlos

Enumeremos esas posibilidades:

María	María	Nicolás	Nicolás	Paula	Paula
Nicolás	Paula	María	Paula	María	Nicolás
Paula	Nicolás	Paula	María	Nicolás	María

Siempre que queremos ***ordenar*** objetos, personas, números, etc. Usamos el principio de multiplicación. Cada uno de los seis ordenamientos se llama ***permutación*.**

Permutaciones

Una **permutación** de n elementos distintos x_1 , x_2 ,. . . , x_n es un ordenamiento de los n elementos x_1 , x_2 ,. . . , x_n .

La cantidad de permutaciones es: n.(n-1).(n-2).(n-3)….3.2.1 = n!

Existen n! permutaciones de n elementos distintos.

La demostración del enunciado anterior es inmediata utilizando el principio de multiplicación. Dados n elementos distintos, una permutación de esos n elementos puede construirse en n pasos: se elige el primer elemento, luego el segundo, . . . y finalmente se elige el último elemento.

El primer elemento puede elegirse de n maneras diferentes, hecho esto, el segundo puede elegirse de n – 1 maneras diferentes, el tercer elemento puede elegirse de n – 2 maneras diferentes y así sucesivamente, hasta el último elemento que puede elegirse de n – (n –1) = 1 maneras diferentes.

Hay entonces $n(n-1)(n-2)...2 . 1 = n!$ permutaciones de n elementos distintos.

Ejercicios:

8) a) ¿Cuántos códigos de cuatro letras se pueden formar con las letras P, D, Q, X sin repeticiones?

b) ¿Cuántos números diferentes pueden formarse utilizando todos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 sin repetirlos?

c) ¿De cuántas maneras pueden estacionar 6 bicicletas en una hilera?

9) a) ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen la subcadena DEF? (nos referimos a las permutaciones de las letras dadas que tienen a las letras D, E y F juntas y en ese orden)

b) ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen las letras D, E y F juntas en cualquier orden?

10) ¿De cuántas formas pueden sentarse seis personas en torno de una mesa circular? Aclaración: Las formas de sentarse obtenidas mediante rotaciones se consideran idénticas.

11) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra MESA? ¿Y las de la palabra SOL?

Ejemplo 3.2:

¿De cuántas maneras diferentes pueden disponerse las seis letras de la palabra BANANA?

Tenemos que contar el número de ordenamientos posibles de 6 objetos que no son todos diferentes: 3 de ellos son iguales entre sí y otros 2 son iguales entre sí, por eso acá a la estrategia de las permutaciones tendremos que modificarla para aplicarla en este caso.

Si rotulamos las A y las N tenemos seis elementos diferentes: $B, A_1, N_1, A_2, N_2, A_3$

El número de permutaciones de esos elementos es $6.5.4.3.2.1= 6! = 720$

Pero, en nuestro caso, hay varias de esas permutaciones que son indistinguibles (por ejemplo $B\ A_1\ N_1\ A_2\ N_2\ A_3$ y $B\ A_1\ N_2\ A_2\ N_1\ A_3$).

Cada permutación tiene otra idéntica que es la que se obtiene dejando fija la B y las A y permutando las N. O sea que podríamos enlistar las 720 permutaciones en pares que resultan iguales. Nos quedan por lo tanto 720 : 2 = 360 permutaciones diferentes.

Razonando de manera similar, vemos que esas 360 permutaciones a su vez tienen repeticiones, para una permutación fija de las letras B y N hay copias que no podemos distinguir:

B A_1 N_1 A_2 N_2 A_3	B A_1 N_1 A_3 N_2 A_2
B A_2 N_1 A_1 N_2 A_3	B A_2 N_1 A_3 N_2 A_1
B A_3 N_1 A_2 N_2 A_1	B A_3 N_1 A_1 N_2 A_2

Hay 3! = 6 que difieren sólo en el orden de las letras A y que son por lo tanto idénticas si las letras A no tienen rótulo.

Hay entonces $\frac{6!}{2!.3!} = \frac{720}{2.6} = \frac{360}{6} = 60$ ordenamientos diferentes.

Permutaciones con elementos indistinguibles.

Dada una sucesión S de n objetos entre los que hay n_1 elementos iguales del tipo 1, n_2 elementos iguales del tipo 2 , . . . , n_k elementos iguales del tipo k, el número de permutaciones distinguibles de los elementos de S es:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Ejercicios:

12) ¿De cuántas maneras pueden izarse en un mástil 7 banderas entre las que hay 3 rojas, 2 verdes y 2 amarillas? (las del mismo color son idénticas)

13) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA?

14) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 5 libros iguales de matemática, 3 libros iguales de computación y 2 iguales de física?

15) a) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 5 libros distintos de matemática, 3 libros distintos de computación y 2 distintos de física?

b) ¿De cuántas maneras puede hacerse si los de la misma materia deben estar juntos entre sí?

c) ¿De cuántas maneras puede hacerse si sólo los de Matemática deben estar juntos entre sí?

4. R-Permutaciones o Variaciones.

Ejemplo 4.1:

Consideremos todas las cadenas diferentes de longitud 2 y sin elementos repetidos que pueden formarse con las letras A, B, C y D.

Podemos pensarlo nuevamente usando el principio de multiplicación:

Tengo que realizar 2 pasos:

Cantidad de letras disponibles: 4 3

4.3 = 12 cadenas

Cada una de estas cadenas es un ordenamiento de dos letras elegidas entre las cuatro letras diferentes dadas.

Notar que ese número puede escribirse como $\frac{4.3.2.1}{2.1} = \frac{4!}{2!}$

Ejemplo 4.2:

Retomemos el ejemplo 2.2, inciso a)

Un consejo formado por Alicia, Berta, Carlos, Darío, Elena y Francisco debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

a) ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

¿Recuerda cómo lo resolvimos?

Usando el principio de multiplicación:

Tengo que realizar 3 pasos:

Cantidad de persona disponibles: 6 5 4

6.5.4 = 120 formas de elegir

Cada uno de los grupos es un ordenamiento de tres personas elegidas entre las seis personas dadas.

Notar que ese número puede escribirse como $\frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1} = \frac{6!}{3!}$

r-Permutaciones o Variaciones

Sean n y r números naturales tales que **1 ≤ r ≤ n.**

Una **r-permutación** de **n** elementos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un ordenamiento de un subconjunto de **r** elementos de un conjunto de n elementos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Al número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos lo denotaremos **P(n,r)**

Calculamos este número usando el principio de multiplicación, queremos realizar **r** pasos y disponemos de n objetos en total que no pueden repetirse:

P(n,r) = n(n –1)(n – 2). . . (n – r + 1)

Observación:

De acuerdo a las definiciones dadas, una **n-permutación de n elementos distintos, es lo que antes hemos llamado una permutación.**

P(n,n) = n(n –1)(n – 2). . . 2.1 = n!

Aceptando como definición que **0! = 1**, podemos escribir:

$$\boldsymbol{P(n,r) = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)\ldots 2.1}{(n-r)\ldots 2.1} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , \quad \text{si} \quad 1 \leq r \leq n.$$

Ejemplo 4.3:

¿Con cuántos podios diferentes puede finalizar una carrera de fórmula 1 en la que participan 19 corredores?

Debemos contar el número de ordenamientos de tres personas elegidas de un grupo de 19, pues cada uno de esos ordenamientos determina un primer puesto, un segundo puesto y un tercer puesto.

La respuesta es entonces $P(19,3) = \dfrac{19!}{(19-3)!} = \dfrac{19!}{16!} = 19.18.17 = 5814$

Ejemplo 4.4:

Hallar el valor de n para que: **P(n,4) = 8. P(n – 1, 3)**

Planteamos la igualdad usando la definición de r-permutaciones $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

$P(n,4) = \frac{n!}{(n-4)!}$ y $P(n-1,3) = \frac{(n-1)!}{((n-1)-3)!}$

Entonces:
$$\frac{n!}{(n-4)!} = 8\,\frac{(n-1)!}{((n-1)-3)!}$$

$$\frac{n.(n-1)!}{(n-4)!} = 8\,\frac{(n-1)!}{(n-4)!}$$

Multiplicando a ambos miembros por: $\frac{(n-4)!}{(n-1)!}$

$$\frac{n.(n-1)!}{(n-4)!}\cdot\frac{(n-4)!}{(n-1)!} = 8\,\frac{(n-1)!}{(n-4)!}\cdot\frac{(n-4)!}{(n-1)!}$$

Simplificando:

$$\frac{n.\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-4)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 8\,\frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-4)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-1)!}}$$

Entonces: $n = 8$

Ejercicios

16) a) ¿Cuántas permutaciones existen de 11 objetos distintos?

b) ¿Cuántas 5-permutaciones existen de 11 objetos distintos?

17) Calcular:

a) P(10,4)   b) P(4,4)   c) P(n, n –1)   d) P(n, n –2)

18) Hallar el valor de n tal que: a) P(n,5) = 7. P(n,4)

b) P(n,5) = 9. P(n – 1, 4)

19) a) ¿Cuántos códigos de 7 letras diferentes pueden formarse con las letras del conjunto $\{$ A, B, C, D, E, F, G$\}$?

b) ¿Cuántos de 5 letras diferentes?

c) ¿cuántos de hasta tres letras diferentes?

---

5. Combinaciones.

Ejemplo 5.1:

¿De cuántas maneras puede seleccionarse una delegación de 3 miembros de un grupo de 5 personas?

Como no hay cargos diferentes, en este problema no importa el orden en que se eligen las tres personas de la delegación.

Podemos pensar primero en elegir con orden y luego considerarlos elementos indistinguibles y dividir por las permutaciones de esos elementos, es decir:

Consideramos ordenar 3 personas de las 5, como vimos antes esto es:

$$5.4.3 = \frac{5!}{2!} = P(5,3)$$

Pero en este caso estamos contando que un grupo, por ejemplo Juan, Pedro, Luis es distinto del grupo Pedro, Juan, Luis.

Para contar los grupos sin orden dividimos por las permutaciones de 3: $\frac{5.4.3}{3!} = \frac{5!}{3!.2!}$

Cada delegación diferente es un subconjunto de tres elementos (no ordenado) del conjunto formado por las cinco personas (lo que llamamos una **combinación de 5 elementos tomados de a 3**)

Combinaciones:

Dado un conjunto con n elementos distintos X = $\{ x_1 , x_2 ,. . . , x_n \}$ y $r \le n$, una **combinación de r elementos de X o una combinación de n elementos tomados de a r** es una selección no ordenada de r elementos de X (es decir, un subconjunto de X con r elementos).

El número de r-combinaciones de un conjunto con n elementos se denota:

$$C(n,r) \quad \text{o también} \quad \binom{n}{r}$$

Las combinaciones de n elementos tomados de a r pueden construirse en dos pasos:

Primero: consideramos orden y construimos una r-permutación haciendo $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Segundo: consideramos que los elementos elegidos son indistinguibles y como en el caso de las permutaciones con elementos indistinguibles, dividimos por el factorial de esos elementos, haciendo $\dfrac{P(n,r)}{r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

A este número lo llamamos combinaciones de n tomados de a r y se nota $C(n,r)$ o también $\binom{n}{r}$

$$\boxed{C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \qquad r \le n}$$

Ejercicios:

20) Interpretar la fórmula anterior para el caso r = 0.

21) Calcular: $a)\binom{7}{4} \quad b)\binom{10}{8} \quad c)\binom{n}{1} \quad d)\binom{n}{n-1} \quad e)\binom{n}{n}$

22) Demostrar que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ cualesquiera sean n y r ≤ n.

23) Hallar el valor de n

$a)\binom{n+1}{3} = 2.\binom{n}{2} \quad b)\binom{n}{n-2} = 6 \quad c)\binom{n}{3} = \binom{n-1}{1}.\binom{n}{1}$

24) ¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen exactamente cuatro unos?

25) ¿De cuantas formas puede elegirse un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres distintas y seis hombres distintos?

26) ¿Cuántos partidos de football se juegan en una liga de 9 equipos si cada uno de ellos debe jugar dos veces contra cada rival?

27) Una baraja de 52 cartas consta de 4 palos con 13 denominaciones cada uno de ellos y una mano de póquer consta de cinco de esas cartas (sin importar el orden)

a) ¿cuántas manos de póquer pueden elegirse?

b) ¿cuántas manos de póquer tienen todas las cartas del mismo palo?

c) ¿cuántas manos de póquer tienen tres cartas de una denominación y otras dos de otra denominación?

28) Demostrar que: $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

29) Si un examen de opción múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 3 opciones de respuesta, ¿de cuántas maneras se puede responder?

30) ¿Cuántas cadenas de 8 bits hay que comiencen con 101 o con 111?

31) Cuántas cadenas de 8 bits hay que comiencen o terminen con 1?

32) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 5 libros de matemática, 4 de Física y 6 de Informática, si los de la misma materia deben estar juntos entre sí?

33) En una fiesta con 20 invitados donde todos se saludan entre sí, ¿cuántos saludos hay?

34) De un grupo de 10 estudiantes de Informática, 5 de Física y 8 de Ingeniería, se quiere formar un grupo de 4 estudiantes.

a)¿De cuántas maneras puede hacerse si debe haber 2 de informática, 1 de Física y 1 de Ingeniería?

b)¿De cuántas maneras puede hacerse si debe haber al menos uno de Ingeniería?

35) Cuántos números impares de 4 cifras hay?

36) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 3 libros de Ciencia Ficción, 5 de Novelas Policiales y 7 de Poesía si los de Ciencia Ficción deben estar juntos entre sí?

37) Con 21 equipos de futbol ¿Cuántos partidos se juegan si deben jugar una vez todos contra todos?

38) En un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una:

a) ¿de cuántas maneras se puede sacar 0?

b) ¿De cuántas maneras se puede sacar 10?

b) Si consideramos que cada pregunta vale 2 puntos, ¿de cuántas maneras se puede sacar 4?

c) ¿De cuántas maneras se puede sacar 4 o más?

39) De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra TELEFONO?

40) En el Quini 6 los apostadores deben elegir 6 números entre el 0 y el 45, ¿cuántos resultados puede haber?

---

6. ANEXO: APLICACIONES

En el campo de la computación es frecuente que se desee contar el número de veces que se ejecuta una instrucción, el número de palabras que se puede obtener con determinada gramática, el número de bits que se requieren para representar una cantidad, etcétera.

Los métodos de conteo son útiles en todas las ramas de las ciencias, y en particular en las ciencias de la computación ya que la cantidad de información que procesa la computadora es extremadamente grande y la exigencia en la velocidad de procesamiento es fundamental. La velocidad de procesamiento depende tanto del hardware como del software, es por ello que cada día salen equipos cada vez más rápidos y también por lo que en forma paralela se busca optimizar el software, proceso en el cual los métodos de conteo tienen una participación destacada para mejorar cada vez más los algoritmos.

1) Potencias de un binomio

Si queremos elevar la suma de dos números reales a una potencia grande el Binomio de Newton es una herramienta muy poderosa.

Analizaremos la forma del desarrollo de $(a + b)^n$, siendo a y b números reales y n un número natural.

Para $n = 2$ y $n = 3$ se tienen las conocidas expresiones:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$

A manera de ejercicio, verifique que:

$(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Observe los desarrollos anteriores y conteste:

- ¿Qué relación hay entre el exponente del binomio y el número de términos el desarrollo?

- En cada término de un desarrollo, ¿cuál es la suma de los exponentes de a y b?

- Los coeficientes de $(a + b)^2$ son números combinatorios: $1 = \binom{2}{0}$, $2 = \binom{2}{1}$, $1 = \binom{2}{2}$, ¿qué puede decir de los coeficientes de $(a + b)^3$ y de $(a + b)^4$?

Consideremos ahora el caso general.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ .\ .\ .\ (a+b)}_{\text{n factores}}$$

Este producto es igual a la suma de todos los productos que se pueden formar tomando como factores un término de cada paréntesis.

Cuando elegimos la letra *a* en todos los paréntesis, tenemos el producto a^n. Cuando elegimos la letra *a* en *n* – 1 paréntesis y la letra *b* en un solo paréntesis, tendremos el producto $a^{n-1}b$. El producto $a^{n-1}b$ aparecerá entonces n veces en el desarrollo de $(a+b)^n$ (tantas como maneras de elegir un paréntesis entre los n dados) . . .

Para cada k= 0, 1, . . . n, el producto $a^{n-k}b^k$ aparecerá tantas veces como maneras hay de elegir k paréntesis (donde se toma la letra *b*) entre los *n* dados, esto es $\binom{n}{k}$ veces.

Se tiene entonces la siguiente fórmula, conocida como **fórmula del binomio de Newton**:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Esta fórmula suele expresarse con la notación sigma como mostramos a continuación

Binomio de Newton

Sean a y b números reales no nulos y n un número natural, entonces:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Y como $a+b=b+a$ podemos intercambiar los lugares en la sumatoria teniendo también:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k\, a^{n-k}$$

Ejemplo a):

Hallar el término de grado 60 en x en el desarrollo de $(x^2+3x)^{54}$

Utilizamos la fórmula del Binomio de Newton y escribimos:

$$(x^2+3x)^{54}=\sum_{k=0}^{54}\binom{54}{k}\,(x^2)^k(3x)^{54-k}=\sum_{k=0}^{54}\binom{54}{k}\,x^{2k}\,3^{54-k}x^{54-k}=\sum_{k=0}^{54}\binom{54}{k}\,x^{2k+54-k}\,3^{54-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{54}\binom{54}{k}\,x^{k+54}\,3^{54-k}$$

Buscamos ahora para qué valores de k el exponente de x vale 60, ya que buscamos el término de grado 60.

$k+54=60$ entonces $k=60-54=6$

Esto nos dice que el término en el que k vale 6, x queda elevado a la 60:

$$\binom{54}{6}x^{6+54}\,3^{54-6}$$

Ejemplo b):

Demostrar que: $2^n=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)$

Observemos que la sumatoria que está del lado derecho contiene números combinatorios, podemos multiplicarla por 1 sin alterar su resultado:

$$\sum_{k=0}^{n}C(n,k).1.1=\sum_{k=0}^{n}C(n,k).1^{n-k}.1^{k}=(\underbrace{1+1})^n=2^n$$

Como 1 elevado a cualquier potencia da 1, puedo reemplazar 1 por 1^{n-k} o también por 1^k

Si $a=1$ y $b=1$

Ejemplo c):

Como mencionamos en la introducción, se conoce como triángulo de Pascal a la siguiente disposición de números, que se construye de arriba hacia abajo, con 1 en los extremos y el elemento que se escribe entre dos números que están arriba es la suma de esos números:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

1
1 1
1 1+1 1
1 1+2 2+1 1
1 1+3 3+3 3+1 1
……………………………

Observemos que en fila n de esta disposición (n=0, 1, . . .), se encuentran sucesivamente los números C(n,r), r = 0, . . ., n

Tomemos por ejemplo la fila que corresponde a n=4, los números que aparecen son:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
C(4,0) & C(4,1) & C(4,2) & C(4,3) & C(4,4) \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\dfrac{4!}{(4-0)!\,0!} & \dfrac{4!}{(4-1)!\,1!} & \dfrac{4!}{(4-2)!\,2!} & \dfrac{4!}{(4-3)!\,3!} & \dfrac{4!}{(4-4)!\,0!}
\end{array}$$

2) Eficiencia de los algoritmos

Se tiene el siguiente algoritmo:

$a = 0$

$x = 4$

Do while $a < 100$

    $a = a + 5$

    $b = 60$

    Do while $b \geq 4$

        $x = 3x$

        $b = b - 2$

    End

End

Queremos ver cuántas veces se ejecuta la sentencia: $x = 3x$

Observemos que a comienza en 0 y va creciendo de 5 en 5. Cuando es mayor o igual que 100 termina el bucle. Los valores que toma a no son otra cosa que los múltiplos de 5, así, debemos pensar cuántos múltiplos de 5 hay entre 0 y 100, múltiplos de 5 que sean de 1 dígito o de 2 dígitos , porque el 100 no está incluído.

Esto es pensar en que queremos llenar 2 casilleros, el primero puede tomar valores de 0 a 9 y el segundo sólo los valores 0 o 5:

10 2

Usando el principio de multiplicación, tenemos que hay 10.2=20 números múltiplos de 5

Por otro lado, cada vez que entramos en este bucle, entramos en otro, con valor inicial de $b = 60$

Este valor va decreciendo de 2 en 2 y se realiza la operación $x = 3x$ mientras $b \geq 4$.

Es decir que b toma los valores pares entre 4 y 60, esa es la cantidad de veces que se realiza la operación en ese bucle.

Debemos pensar entonces cuántos números pares hay entre esos números, separamos entonces el problema en:

1) Si tiene un dígito, la cantidad de pares es 3, ya que sólo puede tomar los valores 4, 6, 8.
2) Si tiene dos dígitos, para el primero tenemos 6 posibilidades (números del 1 al 6) y para el segundo 5 posibilidades (0, 2, 4, 6, 8):

1) $\boxed{}$ 2) $\boxed{}\ \boxed{}$

3 6 5

Usando el principio de suma y el de multiplicación tenemos: 3+6.5=33 veces que se ejecuta la operación en este bucle.

Por lo tanto la operación $x = 3x$ se ejecuta 20.33 = 660 veces.

Bibliografía

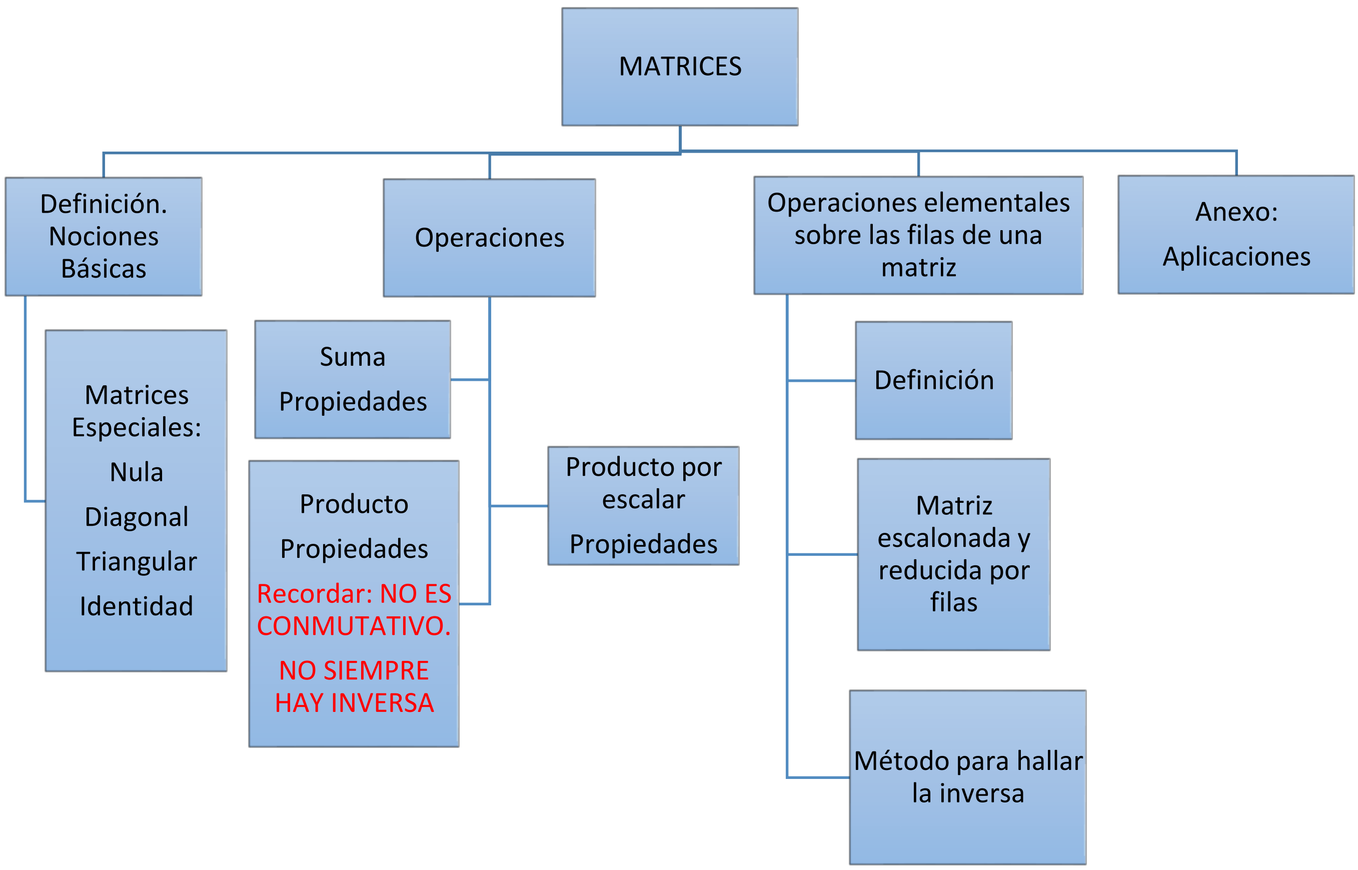
- Espinosa Armenta, R., **Matemáticas discretas**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010
- Jimenez Murillo, José A., **Matemáticas para la computación**, Alfaomega grupo editor, México, 2008
- Johnsonbaugh, Richard , **Matemáticas discretas**, 4ª ed., Prentice Hall, 1999
- Smith, et al , **Algebra, trigonometría y geometría analítica**, Pearson-Addison Wesley Longman, 1998

MATEMÁTICA I 2023

Capítulo 6

MATRICES

CONTENIDOS:



Matemáticos invitados: Arthur Cayley y James Joseph Sylvester

Las matrices como cuadros numéricos han sido usadas desde la antigüedad, fundamentalmente para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

El libro chino *Nueve capítulos sobre el Arte de las matemáticas* (*Jiu Zhang Suan Shu*) que proviene del año 300 a 200 a.c., es el primer ejemplo conocido de uso del método de matrices para resolver sistemas de ecuaciones.

Después del desarrollo de la teoría de determinantes por Seki Kowa y Leibniz para facilitar la resolución de ecuaciones lineales, Carl Friederich Gauss y Wilhelm Jordan desarrollaron la eliminación de Gauss-Jordan, basada en las operaciones elementales, en el siglo XIX.

Fue James Joseph Sylvester quien utilizó por primera vez el término MATRIZ alrededor de 1848.

Cayley introdujo en 1858 la notación matricial, como forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

Ambos nacieron en Inglaterra, Cayley nació en 1821 y fue abogado de profesión, mientras trabajaba en matemáticas en su tiempo libre, más adelante, conoce a Sylvester, que había nacido unos años antes, en 1814, y abandona la abogacía para dedicarse por completo a la matemática. Ambos trabajaron muchos años juntos e hicieron grandes aportes a la teoría de invariantes, campo relacionado con el álgebra lineal.

---

1. Introducción. Nociones básicas.

Una ecuación lineal con coeficientes reales $a_1, a_2, ..., a_n,$ término independiente b e incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ es una expresión de la forma $a_1.x_1 + a_2.x_2 + ... + a_n.x_n = b$, por ejemplo $\frac{2}{5}.x_1 + 5.x_2 - 8.x_3 = -1$.

Si se tienen dos o más ecuaciones lineales en las mismas incógnitas se tiene un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas. El siguiente es un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas (sistema 2x3):

$$S_1: \begin{cases} \frac{2}{5}.x_1 + 5.x_2 - 8.x_3 = -1 \\ x_1 + 6.x_2 - 4.x_3 = 9 \end{cases}.$$

Una ***solución*** del mismo, cuando existe, será una terna ordenada de números (x_1^0, x_2^0, x_3^0) que satisfaga simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.

Si en S_1 se cambian x_1, x_2, x_3 por, respectivamente, x, y, z o bien por u_1, u_2, u_3 el sistema es el mismo. De modo que toda la información del sistema se encuentra en los coeficientes y términos independientes *en el orden* que aparecen dispuestos, es decir en los siguientes "cuadros" de números $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 5 & -8 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, b=$\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ que llamaremos ***matrices.***

A es una matriz **2**x**3** (2 filas por 3 columnas), **b** es una matriz **2**x**1** (2 filas por 1 columna).

Este es uno de los problemas más importantes en los que se aplican las matrices: la resolución de sistemas lineales de ecuaciones.

En general una ***matriz m***x***n*** tendrá la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots.. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots.. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots.. & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \ldots.. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Usamos en general letras mayúsculas de imprenta para nombrar a las matrices y la misma letra en minúscula con dos subíndices para nombrar a sus elementos, así

Para la matriz A, el elemento que está en la fila i columna j se nota a_{ij} .

El primer subíndice i de cada coeficiente indica la fila donde se encuentra dicho coeficiente, el segundo subíndice ***j*** indica en qué columna está, para ***i*** = *1,2,…,m*, ***j* =** *1, 2, …,n*.

El conjunto de todas las matrices ***m*x*n*** con coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$, se indica $\mathbb{R}^{mxn}$, decimos entonces que si:

A es una matriz de m filas y n columnas con números reales $A \in \mathbb{R}^{mxn}$

En el caso particular en que ***m=n*** decimos que las matrices son **cuadradas**, de lo contrario son **rectangulares**.

En una **matriz cuadrada** la ***diagonal principal*** está dada por los elementos que tienen igual número de fila que de columna, es decir: $(a_{11},\ a_{22},\ a_{33},...,\ a_{nn})$.

Por ejemplo $(5,\ \sqrt{3}\ ,\ 9)$ es la diagonal principal de la siguiente matriz 3x3

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ \frac{1}{8} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 35 & 9 \end{pmatrix}$$

Algunas clases especiales de matrices

Matriz nula:

Es una matriz cuadrada o rectangular en la que todos sus coeficientes son ceros.

Si llamamos b_{ij} a los elementos de la matriz nula nxm, definimos:

$\mathbf{O}_{nxm}$ es la matriz tal que $b_{ij} = 0\ \ \forall i, 1 \le i \le n\ \ y\ \forall j, 1 \le j \le m$

Observar que hay una matriz nula para cada dimensión.

Por ejemplo la matriz nula 2x2 es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se escribe con un subíndice para indicar la dimensión: O_{2x2}

La matriz nula 3x2 es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se escribe: O_{3x2}

Matriz *triangular superior* (respectivamente ***inferior***):

Es una matriz cuadrada en la que son ceros todos los coeficientes debajo (respectivamente arriba) de la diagonal principal.

Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es triangular superior entonces $\forall i, \forall j,\ si\ \ i > j\ entonces\ a_{ij} = 0$

Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es triangular inferior entonces $\forall i, \forall j,\ si\ i < j\ entonces\ a_{ij} = 0$

La matriz A es una matriz 4x4, triangular superior y la matriz B es una matriz 4x4 triangular inferior:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 36 & -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Los elementos que están debajo de la diagonal principal cumplen que la fila es mayor o igual que la columna y los que están arriba cumplen que la fila es menor o igual que la columna.

Notar que en la definición no se dice nada del resto de los elementos, es decir que también puede haber 0 en otros lugares como en la matriz B del ejemplo.

Matriz diagonal:

Es una matriz ***n*x*n*** en la que son **0** todos los coeficientes que no están en la diagonal principal.

Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es diagonal entonces $\forall i, \forall j\ \ si\ \ i \neq j\ \ entonces\ \ a_{ij} = 0$

Las siguientes son matrices diagonales:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad:

Es una matriz diagonal, en la que los coeficientes de la diagonal principal son todos 1.

Si llamamos e_{ij} a los elementos de la matriz identidad nxn, definimos:

I_n es la matriz tal que $e_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ \ i \neq j \end{cases}$

Observar que al igual que la matriz nula, hay una matriz identidad para cada dimensión.

Por ejemplo la matriz identidad 2x2 es: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se escribe con un subíndice para indicar la dimensión

La matriz identidad 3x3 es: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

2. Operaciones

Definimos en principio la igualdad de matrices.

Dadas dos matrices de la misma dimensión, $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $B \in \mathbb{R}^{mxn}$ decimos que:

$A = B$ si $a_{ij} = b_{ij}\ \ \forall i, 1 \leq i \leq m, \forall j, 1 \leq j \leq n$

2.1 Suma

Dadas dos matrices de la misma dimensión, $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $B \in \mathbb{R}^{mxn}$ la suma de las matrices se define como una nueva matriz $C \in \mathbb{R}^{mxn}$ donde sus elementos son la suma de los elementos de A y de B en la misma posición:

Ejemplo 2.1:

Dadas $A\ y\ B \in \mathbb{R}^{2x3}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

La matriz $C = A + B$ es el resultado de: $\begin{pmatrix} 0+3 & 1-1 & 2+1 \\ 3-3 & 5+3 & 4+4 \end{pmatrix}$

Suma de matrices

Sean las matrices, $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $B \in \mathbb{R}^{mxn}$ se define la matriz suma $C = A + B$

Donde $C \in \mathbb{R}^{mxn}$ y sus elementos $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ \ \forall i, 1 \leq i \leq m, \forall j, 1 \leq j \leq n$

Propiedades

1) Asociatividad:

Para toda terna de matrices $A, B\ y\ C \in \mathbb{R}^{mxn}$ se cumple que

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

2) Existencia de elemento neutro:

Existe la matriz $0_{mxn} \in \mathbb{R}^{mxn}$, tal que para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ se cumple que:

$$A + 0_{mxn} = 0_{mxn} + A = A \quad .$$

3) Existencia de opuesto:

Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{mxn}$ tal que

$$A + B = B + A = 0_{mxn} \quad .$$

B es la opuesta de A y se indica $-A$

Ejemplo 2.2: dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -30 \\ \sqrt{3} & 4 \\ -1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, su opuesta es $-A = \begin{pmatrix} -2 & 30 \\ -\sqrt{3} & -4 \\ 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Notar que gracias a la existencia del opuesto se define la **resta de matrices**, como la suma de una matriz y la opuesta de otra:

Dadas $C\ y\ D \in \mathbb{R}^{mxn}$ definimos $C - D = C + (-D)$

4) Conmutatividad:

Para todo par de matrices $A\ y\ B \in \mathbb{R}^{mxn}$ se cumple que

$$A + B = B + A$$

Demostración de la propiedad conmutativa:

Queremos ver que: $A + B = B + A$.

Llamemos $C = A + B \quad y \quad D = B + A$, entonces por la igualdad de matrices basta con probar que $c_{ij} = d_{ij} \quad \forall i, 1 \leq i \leq m, \forall j, 1 \leq j \leq n$

En efecto: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \; = b_{ij} + a_{ij} = d_{ij} \qquad \forall i, 1 \le i \le m, \forall j, 1 \le j \le n$

Por definición de Suma de matrices

Por propiedad conmutativa de Los números reales

Por definición de suma de matrices

Hemos probado que C=D y por lo tanto $A + B = B + A$

Observación:

Como hemos visto que la operación $+$ es cerrada, asociativa, tiene neutro, tiene opuesto y es conmutativa, tenemos que $(\mathbb{R}^{mxn}, +)$ es un Grupo Conmutativo.

2.2 Producto de un escalar (número real) por una matriz

Dadas una matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y un número real α la matriz $C = \alpha.A$, $C \in \mathbb{R}^{mxn}$ es la matriz que resulta de multiplicar todos los elementos de A por el número real α .

Ejemplo 2.3:

Dados $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad \alpha = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \alpha.A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz $C = \alpha A$ es el resultado de: $\begin{pmatrix} 3.1 & 3.2 & 3.5 \\ 3.(-2) & 3.1 & 3.0 \end{pmatrix}$

Producto por un escalar

Sea la matriz, $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define la matriz producto por escalar $C = \alpha A$

Donde $C \in \mathbb{R}^{mxn}$ y sus elementos $c_{ij} = \alpha.a_{ij} \quad \forall i, 1 \le i \le m, \forall j, 1 \le j \le n$

Observación: escribimos indistintamente αA o $A\alpha$

Propiedades

1) Para todo par de matrices A y $B \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B \quad \text{y} \quad (A + B).\alpha = A.\alpha + B.\alpha$$

2) Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y α y $\beta \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A \quad \text{y} \quad A.(\alpha + \beta) = A.\alpha + A.\beta$$

3) Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y α y $\beta \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$(\alpha.\beta).A = \alpha.(\beta.A)$$

4) Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ se cumple que:

$$1.A = A$$

La definición de suma y producto por escalar con sus respectivas propiedades le dan a las matrices con esas operaciones la estructura de **Espacio vectorial.** No trabajaremos en este curso con espacios vectoriales pero se verá más adelante como una importante estructura con muchas aplicaciones, entre ellas la detección de errores en la transmisión de datos.

Las propiedades vistas para la suma no difieren de las propiedades de la suma de números reales. Son importantes porque nos permiten operar con matrices en ecuaciones.

Ejemplo 2.4:

Hallar la matriz $X \in \mathbb{R}^{3x2}$ que cumpla:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + X = 3.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que despejar X utilizando las propiedades vistas:

Por la propiedad 1 de producto por escalar y por definición de suma de matrices:

$$3.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3.\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por definición de producto por escalar tenemos entonces que:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 9 & 15 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Entonces por la existencia del opuesto podemos sumar a ambos miembros el opuesto de A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 9 & 15 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por definición de suma de matrices y por la existencia de elemento neutro tenemos:

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 4 & 11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2.3 Producto de matrices

Dadas dos matrices, $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $B \in \mathbb{R}^{nxt}$ el producto de las matrices se define como una nueva matriz $C \in \mathbb{R}^{mxt}$ donde sus elementos son el resultado sumar las multiplicaciones de los elementos de cada fila de A con cada columna de B:

Ejemplo 2.5:

Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x2}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2}$, $A.B = \begin{pmatrix} 4.3+2.1 & 4.5+2.3 \\ 0.3+0.1 & 0.5+0.3 \\ 1.3+6.1 & 1.5+6.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 26 \\ 0 & 0 \\ 9 & 23 \end{pmatrix}$

Una forma práctica de hacer el producto es ubicando las matrices de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4.3+2.1 & 4.5+2.3 \\ 0.3+0.1 & 0.5+0.3 \\ 1.3+6.1 & 1.5+6.3 \end{pmatrix} = C \end{array}$$

El elemento $c_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}$, se recorre la fila 1 de A y la columna 1 de B

El elemento $c_{12} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22}$, se recorre la fila 1 de A y la columna 2 de B

…

El elemento $c_{23} = a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23}$, se recorre la fila 2 de A y la columna 3 de B

Notar que para construir un elemento de C en la posición ij se recorre la fila i de A y la columna j de B, lo que da lugar a la siguiente definición:

Producto de matrices

Sean las matrices, $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $B \in \mathbb{R}^{nxt}$ se define la matriz producto $C = A.B$

Donde $C \in \mathbb{R}^{mxt}$ y sus elementos son:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,.\,b_{kj} \qquad \forall i, 1 \le i \le m, \quad \forall j, 1 \le j \le t$$

Observación:

Las matrices que multiplicamos en el ejemplo NO TIENEN LA MISMA DIMENSION, al multiplicar cada elemento de una fila de A por una columna de B, **deben coincidir el número de columnas de la primer matriz con el número de filas de la segunda.**

Con las matrices del ejemplo, el producto $B.A$ no se puede hacer. Esto dice que el producto no está definido para cualquier par de matrices, solo para las matrices que cumplen esa relación entre columnas y filas.

Esta observación sugiere que EL PRODUCTO NO ES CONMUTATIVO, como veremos a continuación.

Propiedades

1) Asociatividad:

Para toda terna de matrices $A \in \mathbb{R}^{mxn}, B \in \mathbb{R}^{nxt}$ y $C \in \mathbb{R}^{txq}$ se cumple que:

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

Observar que todos los productos se pueden hacer.

2) Existencia de elemento neutro:

Existe la matriz I_n, tal que para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$:

$$A.\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n.A = A$$

La matriz Identidad es el elemento neutro en el producto de matrices cuadradas. Observar que al ser cuadradas pueden realizarse los productos a derecha y a izquierda.

Si A no es cuadrada y $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ decimos que tiene un neutro a derecha y un neutro a izquierda, esto es: $A.\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_m.A = A$

A derecha multiplicamos por la Identidad nxn y a izquierda por la Identidad mxm.

3) Distributividad del producto en la suma:

Para toda terna de matrices A, B y $C \in \mathbb{R}^{nxn}$ se cumple que:

$$A.(B + C) = A.B + A.C \quad \text{y} \quad (B + C).A = B.A + C.A$$

Observar que las matrices al distribuir se mantienen en EL MISMO ORDEN.

4) NO SE CUMPLE la propiedad Conmutativa:

Ejemplo 2.6:

Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, resulta $A.B=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$ y $B.A=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 8 & 21 \end{pmatrix}$

Observación: esto no quiere decir que no haya matrices para las que sí se cumple, pero para hablar de una propiedad debe cumplirse **para todas las matrices** y esto no es cierto.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{c|l} & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = B \\ \hline A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1.3+0.0 & 1.0+0.5 \\ 0.3+2.0 & 0.0+2.5 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}} = C \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A \\ \hline B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} 3.1+0.0 & 3.0+0.2 \\ 0.1+5.0 & 0.0+5.2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}} = C \end{array}$$

5) En los números naturales, enteros, reales se tiene la propiedad: $a.b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$.

En el producto de matrices tampoco es válida esa propiedad:

$A.B=O$ <u>no</u> implica $A=O$ o $B=O$

Ejemplo 2.7:

Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, el producto $A.B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ da la matriz nula, mientras que ni A ni B son nulas

6) La existencia de inversa NO ES una propiedad general de las matrices.

En los números reales, todo número tiene inverso multiplicativo, esto es, dado un número real a se busca otro que multiplicado por él de como resultado el neutro del producto, es decir : $a.a^{-1}=1$, por ejemplo: $2.\frac{1}{2}=1$, $5.\frac{1}{5}=1$, $34.\frac{1}{34}=1$, etc.

En las matrices deberíamos buscar, dada una matriz A otra matriz que multiplicada por ella de como resultado el neutro del producto, es decir I, teniendo en cuenta además que como el producto no es conmutativo, debe poder multiplicarse a derecha y a izquierda y ambos resultados deben dar la identidad. Para esto la única opción es que la matriz sea cuadrada, pero veremos que esto no es suficiente:

Ejemplo 2.8:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tenemos que buscar una matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que multiplicada por A de como resultado la identidad:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Entonces $1.a + 2.c = 1$ y $1.b + 2.d = 0$

$0.a + 0.c = 0$ y $0.b + 0.d = 1$

La última ecuación nos dice $0 = 1$ que es absurdo, es decir que no existen valores de $a, b, c\ y\ d$ que cumplan las ecuaciones, por lo tanto la matriz A no tiene inversa.

Si una matriz no es cuadrada no posee inversa.

Algunas matrices cuadradas tienen inversa y otras no.

Como existen infinitas matrices cuadradas que tienen inversa e interesa conocerlas, será un objetivo identificar aquéllas que tengan inversa y en tal caso calcularla.

Observación:

Vimos que $(\mathbb{R}^{nxn}, +)$ es un Grupo Conmutativo y como la multiplicación en $\mathbb{R}^{nxn}$ es cerrada, asociativa y distributiva con respecto a la suma, decimos que $(\mathbb{R}^{nxn}, +, .)$ **es un Anillo** .

En el parágrafo que sigue se dará la definición de matriz inversa y algunas propiedades, más adelante se tratará el problema de hallar la inversa cuando ésta exista.

Matriz Inversa

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, A tiene inversa (se dice también que es invertible o no singular) si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{nxn}$ tal que: $A.B = I$ y $B.A = I$

Recordar que como la conmutatividad no es una propiedad general del producto de matrices, se piden las dos condiciones.

En caso de que la matriz B de la definición exista, esta matriz se nota A^{-1} .

Observación: en los números reales notamos a la inversa de un número a como a^{-1} y también puede escribirse $\frac{1}{a}$. En el caso de las matrices esta última notación no es válida ya que supondría dividir por una matriz, operación que no está definida en este conjunto.

Proposición 2.1:

Si existe ***B*** en las condiciones de la definición de Matriz Inversa, ésta es única.

Demostración

Lo probaremos por el método del absurdo:

Existe B tal que $A.B = I$ y $B.A = I$ y no es única, es decir que existe otra matriz C tal que $A.C = I$ y $C.A = I$

Si esto pasara entonces multiplicando la igualdad $B.A = I$ por C a ambos miembros a derecha tenemos:

$(B.A).C = I.C = C$ ***(1)***

Y multiplicando la igualdad $A.C = I$ por B a ambos miembros a izquierda tenemos

$B.(A.C) = B.I = B$ ***(2)***

Como el producto de matrices es asociativo de ***(1)*** $(B.A).C = I.C = C$ tenemos que $B.(A.C) = C$ y en ***(2)*** teníamos que $B.(A.C) = B$ Absurdo

Es decir que ***C=B***, por lo tanto la matriz ***B*** que cumple la Definición es única.

Proposición 2.2:

Sean A, B matrices *nxn* inversibles entonces $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

Demostración

Lo demostraremos por el método directo:

Por hipótesis existen A^{-1} y B^{-1}.

Notar que como las matrices son nxn sus inversas y el producto entre ellas también lo son.

De acuerdo a la definición de matriz inversa debe probarse que multiplicando $B^{-1}.A^{-1}$ a izquierda y a derecha de $A.B,$ en ambos casos se obtiene la identidad.

$$(A.B).(B^{-1}.A^{-1}) \underset{\substack{\text{Por propiedad}\\ \text{Asociativa}}}{=} A.(B.B^{-1}).A^{-1} \underset{\substack{\text{Por definición}\\ \text{de inversa}}}{=} A.I.A^{-1} \underset{\substack{\text{Por ser } I \text{ neutro}\\ \text{en las matrices nxn}}}{=} A.A^{-1} = I$$

Además:

$$(B^{-1}.A^{-1}).(A.B) \underset{\substack{\text{Por propiedad}\\ \text{Asociativa}}}{=} B^{-1}.(A^{-1}.A).B \underset{\substack{\text{Por definición}\\ \text{de inversa}}}{=} B^{-1}.I.B \underset{\substack{\text{Por ser } I \text{ neutro}\\ \text{en las matrices nxn}}}{=} B^{-1}.B = I$$

Hemos encontrado entonces una matriz $B^{-1}.A^{-1}$ que multiplicada a izquierda y a derecha por la matriz $A.B$ da la matriz Identidad, entonces $B^{-1}.A^{-1}$ y es la inversa de $A.B$

Esto se nota como $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Corolario

El resultado anterior se generaliza a cualquier número finito de matrices inversibles de un mismo orden *nxn,* esto es*:* $(A_1.A_2 \ldots .A_n)^{-1} = (A_n)^{-1} \ldots .(A_2)^{-1}.(A_1)^{-1}$

Las operaciones vistas con sus propiedades nos permiten resolver ecuaciones con matrices.

Ejemplo 2.9:

Hallar la matriz $X \in \mathbb{R}^{2x3}$ que cumpla $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Resolvemos primero el lado derecho de la ecuación realizando el producto:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tenemos entonces que: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

Sumamos el opuesto de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a ambos miembros:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Como sumar una matriz con su opuesta nos da la matriz nula y ésta es el elemento neutro en la suma de matrices:

$$-X = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Ahora aplicamos la operación de producto por escalar, en este caso -1:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.10:

Dos comercios de venta de tecnología, T1 y T2, reciben mensualmente tablets y celulares, de dos empresas de fabricación distintas (f y g). Se registran esas cantidades y sus precios (expresados en precio en pesos/mil pesos) en las siguientes matrices:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Tablets} & \text{Celulares} \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ g \end{array} & A = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 50 & 40 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \text{Precio T1} & \text{Precio T2} \end{array} & \\ B = \begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 14 & 13 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{Tablets} \\ \text{Celulares} \end{array} \end{array}$$

Si queremos obtener cuál será la ganancia total de cada comercio vendiendo la totalidad de los productos que recibieron, por cada fábrica, realizamos el producto A.B:

$$\begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 50 & 40 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 14 & 13 \end{pmatrix} =$$

Ganancia de T1 vendiendo los productos de f

Ganancia de T2 vendiendo los productos de f

$$= \begin{pmatrix} 20.20 + 30.14 & 20.21 + 30.13 \\ 50.20 + 40.14 & 50.21 + 40.13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 820 & 810 \\ 1560 & 1570 \end{pmatrix}$$

Ganancia de T1 vendiendo los productos de g

Ganancia de T2 vendiendo los productos de g

Ejemplo 2.11:

Si A es una matriz cuadrada que cumple que: $A^3 = -4A - I$, hallar A^{-1}.

Tenemos que encontrar una matriz B que cumpla que: $AB = BA = I$

Observemos que no conocemos a la matriz A, solo conocemos que cumple:

$$A^3 = -4A - I$$

Entonces: $-A^3 - 4A = I$

Podemos sacar factor común A : $A(-A^2 - 4I) = I$

O también: $(-A^2 - 4I)A = I$

Observemos que cuando sacamos como factor común una matriz que está multiplicada por un número, el término dentro del paréntesis es el número multiplicado por la matriz identidad, que es el neutro del producto de matrices

$A(-A^2) = -A^3$ y $(-A^2)A = -A^3$
$A(-4I) = -4A$ y $(-4I)A = -4A$

Esto nos dice que la matriz $(-A^2 - 4I)$ multiplicada a derecha y a izquierda por la matriz A da como resultado la matriz Identidad, por lo tanto $(-A^2 - 4I)$ es la inversa de A.

$$\boxed{A^{-1} = (-A^2 - 4I)}$$

Ejercicios:

1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcular: a) 3A-2B+C

b) A- 3(B-C)

c) Hallar una matriz D de 2x2 que cumpla que: $A - D = B$

d) Hallar una matriz E de 2x2 que cumpla que: $A + B + H$ sea una matriz triangular superior.

e) Hallar una matriz F de 2x2 que sea el opuesto de $C - B + A$

f) Hallar una matriz G de 2x2 que cumpla que: $B - 3G + 4(A + B) = 0_{2x2}$

2) Sean A $\in \mathbb{R}^{4x5}$, B$\in \mathbb{R}^{5x7}$, C $\in \mathbb{R}^{4x5}$, D $\in \mathbb{R}^{7x5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles y, en caso afirmativo, cuál es la cantidad de filas y de columnas de la matriz resultado.

a) A .B b) B.A c) A.C d) C.B e) A.B.D

3) En los casos que sea posible calcular A.B y B.A, ¿Es A.B = B.A ?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = (1 \quad 2 \quad 3)$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

4) Al igual que en los números reales definimos recursivamente la potencia natural de una matriz: $A^n = \begin{cases} I & si\ n = 0 \\ A.\, A^{n-1} & si\ n \geq 1 \end{cases}$, es decir que A^n no es otra cosa que multiplicar n veces A por sí misma.

Dadas $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ calcular: a) A^2 b) B^3 c) A.B d) $2A^2$+ B.A

5) Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ establecer si es cierto que:

a) (A+B)(A - B) = A^2 - B^2

b) $(A+B)^2$ = A^2 + 2 AB + B^2

c) ¿Por qué valen (o no) las igualdades?

6) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular *A.B* y *A.C*.

b) ¿Es válida la propiedad cancelativa en el producto de matrices? (Recordar que la propiedad cancelativa de los números reales dice que: si $a.b = a.c$ entonces $b = c$)

7) Hallar los valores de a y de b para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & 5 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$$

8) Hallar la matriz $X \in \mathbb{R}^{2x3}$ que cumpla $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9) Sea *A* una matriz cuadrada 2x2. Probar que si *A* tiene una fila (o una columna) nula, entonces *A* no tiene inversa.

10) Si $A, B, C, D \in R^{nxn}$ tienen inversa, deducir cuál es $(A.B.C.D)^{-1}$

11) Una empresa que fabrica autos tiene 4 sucursales y fabrica 3 modelos distintos. Tiene guardada en dos matrices, la siguiente información de las ventas del último mes:

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Suc. 1} \\ \text{Suc. 2} \\ \text{Suc. 3} \\ \text{Suc. 4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Mod 1} & \text{Mod 2} & \text{Mod 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 25 & 5 \\ 23 & 20 & 6 \\ 20 & 22 & 4 \\ 15 & 10 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Precio/1000} & \text{Ganancia/1000} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 700 & 100 \\ 900 & 150 \\ 980 & 200 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{Mod. 1} \\ \text{Mod. 2} \\ \text{Mod. 3} \end{array}$$

a) ¿Qué dimensión tiene el producto A.B? ¿Qué información obtiene al realizarlo?

b) Indique qué representa cada fila y cada columna de la matriz producto.

12) Sea A, una matriz cuadrada, que cumple que: $A^2 = 2A - I$. Hallar A^{-1}

13) Sea A, una matriz cuadrada, que cumple que: $A^3 = 0$ (0 es la matriz nula de la misma dimensión que A) . Demostrar que $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

---

3. Operaciones elementales sobre las filas de una matriz

Definimos en primer lugar qué es una matriz escalonada y reducida por filas, ya que las operaciones elementales las haremos sobre las filas de una matriz para transformarla en una escalonada y reducida por filas.

3.1 Matriz escalonada y reducida por filas

Sea $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, A está en forma *escalonada y reducida por filas si:*

1) el primer número distinto de cero de cada fila es 1, ese coeficiente se llama **coeficiente principal**.
2) si el número de ceros que precede al primer coeficiente no nulo va aumentando en las filas sucesivas.
3) en el resto de la columna donde hay coeficiente principal los elementos son 0.
4) si hay filas de 0 están al final.

Ejemplos 3.1:

A y B no son escalonadas y reducidas por filas, sólo C es reducida y escalonada por filas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Operaciones elementales sobre las filas de una matriz.

Existen 3 tipos de ***operaciones elementales*** sobre las filas de una matriz que permiten llevar cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ a una matriz equivalente reducida y escalonada por filas:

1) Multiplicar una fila F_k de A por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ no nulo, $F_k \leftarrow \alpha F_k$
2) Sumar a la fila F_h la fila F_k multiplicada por $\alpha \in \mathbb{R}$ no nulo, $F_h \leftarrow F_h + \alpha F_k$
3) Permutar dos filas $F_h \longleftrightarrow F_k$

Cada operación elemental **e** tiene su inversa **e⁻¹** que es también elemental y del mismo tipo que **e.** Es decir que si realizamos:

1) la operación de permutar la fila i con la fila k, la operación inversa es permutar la fila i con la fila k para volver a la misma matriz.

2) la operación de sumarle a la fila i la fila k multiplicada por α, la operación inversa es sumarle a la fila i la fila k multilicada por ($-\alpha$)

3) la operación de multiplicar la fila j por α, la operación inversa es multiplicar la fila j por $1/\alpha$.

Definición:

Dos matrices A, B se llaman **equivalentes por filas** si de una de ellas se pasa a la otra aplicando un número finito de operaciones elementales de fila.

$$A \approx_f B \quad \text{si} \quad e_k \circ e_{k-1} \circ \ldots \circ e_2 \circ e_1(A) = B$$

(Como cada e_i posee su inversa que también es una operación elemental, de B se puede llegar a A aplicando las inversas respectivas).

Ejemplo 3.2:

Hallar la matriz escalonada y reducida por filas equivalente con $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Importante: Realizaremos operaciones elementales sobre la matriz en un orden determinado, esto es por columnas, primero pondremos el 1 en la posición fila 1 columna 1, luego pondremos 0 en el resto de la columna, después pondremos el 1 en la posición fila 2 columna 2 y buscamos 0 en el resto de la columna. Este orden no es caprichoso, nos garantiza que los 1 y 0 que vayamos obteniendo no cambiarán con ninguna operación.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(F_1 \leftarrow \frac{1}{2}.F_1\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (F_2 \leftarrow F_2 - 2.F_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\left(F_2 \leftarrow -\frac{1}{4}.F_2\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad (F_1 \leftarrow F_1 - 2.F_2)) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = A_R$$

A esta última matriz la llamamos A_R que es la matriz escalonada y reducida por filas equivalente con A, esto se escribe $A \approx_f A_R$ o simplemente $A \approx A_R$

Notar que cada vez que realizamos una operación elemental no ponemos el signo =, sino $\sim$, también puede ponerse $\approx o \rightarrow$, pero no =, ya que las matrices son distintas, veremos que mantienen propiedades importantes.

Ejemplo 3.3:

Hallar la matriz escalonada y reducida por filas equivalente con $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$

Nuevamente realizaremos operaciones elementales sobre la matriz en el mismo orden.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \quad \left(F_1 \leftarrow \frac{1}{3}.F_1\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \quad (F_2 \leftarrow F_2 - 1.F_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(F_3 \leftarrow F_3 - 9.F_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B_R$$

3.3 Rango

Definición

Se llama **rango** de una matriz *A,* indicado con $r(A)$, al número de filas no nulas de la escalonada y reducida por filas A_R equivalente con *A.*

En los ejemplos de arriba, la matriz A tiene rango 2 mientras que la matriz B tiene rango 1.

Existen dos aplicaciones importantes de las operaciones elementales: el cálculo de la inversa de una matriz y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En el caso del cálculo de la inversa recuerde que la matriz debe ser cuadrada, si es cuadrada puede tener o no inversa, pero si no lo es, seguro que no tiene inversa.

3.4 Cálculo de la inversa de una matriz

El procedimiento que seguiremos es: dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, construimos un cuadro con la matriz dada y la matriz Identidad a la derecha, luego realizaremos operaciones elementales para hallar la escalonada y reducida por filas, A_R , equivalente con A. Las operaciones elementales se hacen sobre A y sobre la identidad, como si fuera una matriz de nx2n. Si al llegar a A_R nos quedó la Identidad entonces la matriz identidad que transformamos es la inversa de A, sino, no tiene inversa.

Ejemplo 3.4:

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A \qquad\qquad & \qquad\qquad I_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$F_1.\frac{1}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_2 - F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_3 - 2.F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_1 - 3.F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_3 . \frac{1}{5} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

$$F_1 + 11F_3 \qquad y \quad F_2 - 3F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -3 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

La matriz B= $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -3 & \frac{11}{5} \\ \frac{1}{10} & 1 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ es la inversa de A

Por la definición de equivalencia por filas resulta que**:**

$A \approx_f I$ ya que la Identidad es el resultado de haberle aplicado a A 7 operaciones elementales: $e_7 \mathbf{o}\ e_6 \mathbf{o} \dots \mathbf{o}\ e_2 \mathbf{o}\ e_1(A) = I$, y además

$I \approx_f B$ ya que B es el resultado de haberle aplicado a la Identidad 7 operaciones elementales: $e_7 \mathbf{o}\ e_6 \mathbf{o} \dots \mathbf{o}\ e_2 \mathbf{o}\ e_1(I) = B$, y como

$$e_7 \mathbf{o}\ e_6 \mathbf{o} \dots \mathbf{o}\ e_2 \mathbf{o}\ e_1(A) = e_7 \mathbf{o}\ e_6 \mathbf{o} \dots \mathbf{o}\ e_2 \mathbf{o}\ e_1(I.A) = \underbrace{e_7 \mathbf{o}\ e_6 \mathbf{o} \dots \mathbf{o}\ e_2 \mathbf{o}\ e_1(I)}_{B}\, A = \boxed{B.A = I}$$

Además, como se mencionó, las operaciones elementales tienen inversa, en el sentido de que pueden aplicarse para volver a la matriz anterior, por eso A es el resultado de haberle aplicado a la identidad las inversas de las operaciones elementales:

$A = e_1^{-1} \mathbf{o}\ e_2^{-1} \mathbf{o} \dots \mathbf{o}\ e_6^{-1} \mathbf{o}\ e_7^{-1}(I)$ entonces

$$\underbrace{e_1^{-1} \mathbf{o}\ e_2^{-1} \mathbf{o} \dots \mathbf{o}\ e_6^{-1} \mathbf{o}\ e_7^{-1}}_{}(B) = e_1^{-1} \mathbf{o}\ e_2^{-1} \mathbf{o} \dots \mathbf{o}\ e_6^{-1} \mathbf{o}\ e_7^{-1}(I.B) =$$

$= e_1^{-1}$ **o** e_2^{-1} **o** ... **o** e_6^{-1} **o** e_7^{-1} $(I)B = A.B = I$

A

De lo anterior resulta que $\boxed{B = A^{-1}}$

> **Importante:**
>
> Este procedimiento nos dice que:
>
> $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y su rango es n si y sólo si A tiene inversa
>
> Que es equivalente a decir:
>
> $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y $A \approx I$ si y sólo si A tiene inversa

Ejemplo 3.4:

En el ejemplo 2.7) se mostró que si $A \in \mathbb{R}^{nxn}\ y\ B \in \mathbb{R}^{nxn}$ y $A.B = 0_{nxn}$ eso **no implica** que $A = 0_{nxn}$ o que $B = 0_{nxn}$.

Veremos que si A tiene inversa entonces $B = 0_{nxn}$:

Sea $A.B = 0_{nxn}$

Como A tiene inversa, podemos **multiplicar a ambos miembros, a izquierda**, por A^{-1}:

$$A^{-1}.(A.B) = A^{-1}.0_{nxn}$$

Y por la propiedad asociativa del producto de matrices, podemos escribir:

$$(A^{-1}.A).B = A^{-1}.0_{nxn}$$

Y como $A^{-1}.A = I$, tenemos: $\quad I.B = A^{-1}.0_{nxn}$

Y como $I.B = B$ y $A^{-1}.0_{nxn} = 0_{nxn}$: $\quad \boxed{B = 0_{nxn}}$

Ejercicios:

14) Llevar las siguientes matrices a la forma escalonada y reducida, indicando las operaciones elementales, indicar el rango de cada una.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 10 & 8 & 3 \\ 6 & -6 & 30 & 22 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

15) Hallar la inversa, si existe, de las siguientes matrices, mediante operaciones elementales e indicar el rango de cada una:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -8 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 6 & -15\end{pmatrix}$$

16) Dada $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & k\end{pmatrix}$

a) Hallar k para que sea $A^2 = \mathbf{0}_{2x2}$

b) Hallado k, encontrar el rango de A.

17) Sea A una matriz nxn:

a) Indicar, justificando su respuesta, si es verdadero o falso que: $(A - I_n)(A + I_n) = A^2 - I_n$

b) Si $A^2 = \mathbf{0}_{nxn}$, ¿Cuál es la inversa de $(A + I_n)$?

18) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix}-3 & -9 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 6 & 18 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & -1\\ 5 & b\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}-12 & 9\\ 2 & -2\\ 29 & -8\end{pmatrix}$

a) Encontrar los números a y b tales que se cumpla $A.B = C$

b) Encontrar si es que existe, la inversa de A.

19) a) Dada $D=\begin{pmatrix}1 & k\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ encontrar el valor de k para que sea $D^2 = \mathrm{O}$ (matriz nula)

b) Con el valor ***k*** encontrado, calcular el rango de D.

20) a) Encontrar los números $a,\ b$ tales que $(A+B).C = D$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -4\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & b\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix}9 & 6\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

c) Hallar (si existe) D^{-1}.

21) Demostrar que si $A \in \mathbb{R}^{nxn}\ y\ B \in \mathbb{R}^{nxn}$ y $A.B = 0_{nxn}$ y B tiene inversa entonces $A = 0_{nxn}$

22) Sean las matrices A, B y C de nxn, tales que B tiene inversa. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando su respuesta:

"Si $C.B = A$, entonces $C = B^{-1}.A$ "

23) Demuestre que si una matriz de 2x2 tiene dos filas iguales entonces no tiene inversa.

24) Sean A, B y C matrices cuadradas de la misma dimensión. Demuestre que si A tiene inversa y se cumple que A.B=A.C entonces B=C.

---

4. Anexo: Aplicaciones

Una de las aplicaciones importantes que tienen las matrices es la **criptografía**. La criptografía es el estudio de las formas de transmitir mensajes en forma segura. En la década del 40 cuando se establece el inicio de la criptografía, estaba restringida prácticamente al campo de la estrategia militar. Hoy, la criptografía es de gran utilidad en muchísimas cosas que hacemos a diario: cuando utilizamos la tarjeta de crédito en un cajero automático para realizar una operación bancaria, necesitamos identificarnos con una clave, cuando accedemos a nuestra cuenta de correo electrónico, se nos pide una contraseña, etc.

Si numeramos las letras del abecedario de 1 a 27 y quisiéramos enviar como mensaje la letra J, puede elegirse como código el número 7 y multiplicar 7.10 ya que 10 es el número que le corresponde a la J. El mensaje enviado seria 70.

Si el receptor no conoce que el código es 7 podría pensar que se envió 5.14=70 o 10.7=70 o 7.10=70, y no puede decidir si la letra enviada es N (que correspondería al número 14 y el código sería 5) o G(que correspondería al número 7 y el código sería 10) o J(que corresponde al número 10 y el código sería 7).

El receptor entonces debe conocer el código y multiplicar el mensaje recibido por el inverso de ese número, en el caso de haber elegido código 7 sería: $70.\frac{1}{7} = 10$. Claro que este método para encriptar es muy vulnerable ya que hay un número muy pequeño de posibilidades y del contexto del mensaje podría deducirse la letra. También es cierto que si en lugar de elegir el 7 eligiéramos el 345.678, aumenta significativamente la cantidad de posibilidades.

Este mismo proceso se utiliza para la encriptación con matrices, el código ya no es un número sino una matriz y el mensaje que se envía también se envía en una matriz, de modo que habrá que conocer la inversa de la matriz de código para recuperar el mensaje.

Ejemplo:

Para codificar un mensaje los elementos que se requieren son: un emisor, un receptor, un mensaje y un código.

Cuando hablamos de código, estamos hablando de un método de codificación, es decir algún algoritmo biunívoco (una *función biyectiva*), que asigne a cada carácter del mensaje otro carácter.

Este método hace que el mensaje enviado por el emisor se transforme en una cadena de símbolos ilegibles para el resto de los receptores que no sean legales. Dependiendo de la calidad del método de codificación, el mensaje será más o menos difícil de descifrar si es capturado por receptores ilegales.

Método de encriptación:

1. A las letras del alfabeto se le asignan los números del 1 al 27. Al espacio en blanco se le asigna el número 28, para poder separar palabras. Esta es una posibilidad, también podrían asignarse las letras en orden decreciente o comenzando por el número 3, etc.
2. Cualquier matriz cuyos elementos sean enteros positivos y sea invertible se puede usar como matriz de codificación.
3. Si la matriz de código es de nxn se construye con el mensaje una matriz de n filas y tantas columnas como sean necesarias, escribiendo los números por columna y rellenando al final con espacios en blanco si fuera necesario.
4. Luego se multiplica a izquierda por la matriz de código y el resultado es el mensaje codificado.
5. Para recuperar el mensaje se multiplica la matriz anterior a izquierda por la inversa de la matriz de código.

Mensaje a codificar: **“vuelvo mañana”**

Secuencia que le corresponde: **23 21 5 12 23 16 28 13 1 15 1 14 1**

Para la Matriz de código, se elige cualquiera que sea invertible, debe ser conocida por el emisor y el receptor: $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Construcción de la matriz A (tendrá dos filas): $\begin{pmatrix} 23 & 5 & 23 & 28 & 1 & 1 & 1 \\ 21 & 12 & 16 & 13 & 15 & 14 & 28 \end{pmatrix}$

Multiplicando CA, se obtiene: $B = \begin{pmatrix} 86 & 22 & 62 & 69 & 17 & 16 & 30 \\ 67 & 41 & 71 & 67 & 46 & 43 & 85 \end{pmatrix}$

El receptor es quien recibe esta matriz y debe conocer la inversa de la matriz de código para recuperar el mensaje. En este caso $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ entonces al realizar el producto C^{-1} .B= C^{-1} . C. A= I. A=A y se recupera el mensaje en forma matricial. Es evidente que el receptor debe conocer tanto la primera fase de la codificación, es decir que número le corresponde a cada letra, como la segunda fase, es decir la matriz de código.

Basado en el artículo "Aplicación de las matrices invertibles en criptografía", Juan Carlos Cortés Lopez, Gema Carlo Sanjuán.

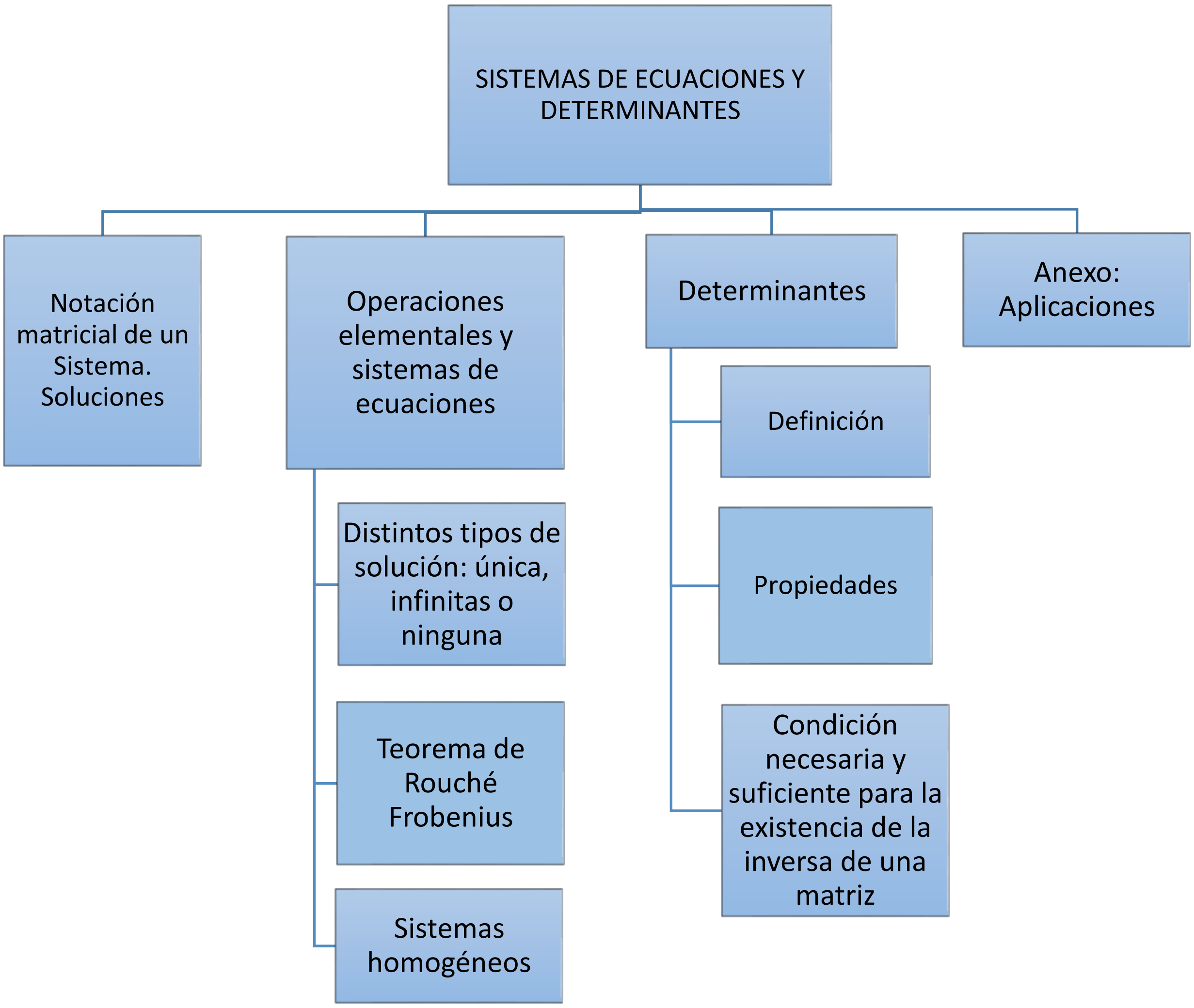
Bibliografía

- R. Espinosa Armenta, **Matemáticas discretas**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010
- Smith, et al , **Algebra, trigonometría y geometría analítica**, Pearson-Addison Wesley Longman, 1998
- Swokoski, Earl W. y Cole, Jeffery A., **Algebra y trigonometría con geometría analítica,** 11ma ed., Editorial Thomson, 2006

Capítulo 7

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DETERMINANTES

CONTENIDOS:



Matemático invitado: Leonardo Pisano

Los sistemas de ecuaciones lineales modelizan muchos problemas de la realidad y la preocupación por resolverlos y por encontrar métodos para su resolución data de muchos años.

Leonardo Pisano, matemático italiano que vivió aproximadamente entre los años 1175 y 1250 d.c, más conocido como Fibonacci, y que se conoce sobre todo por su famosa sucesión, viajaba habitualmente por cuestiones de comercio. Durante sus viajes aprendió la nueva aritmética árabe, que después presentó al occidente en su conocido libro Liber Abaci. Cuenta la leyenda que el Emperador Federico II de Sicilia invitó a Fibonacci y a otros sabios a participar en una especie de torneo de matemáticas, en el que plantearon varios problemas. Uno de ellos era el siguiente:

"Tres hombres poseen una sola pila de monedas, y sus partes son 1/2, 1/3 y 1/6. Cada uno toma algo de dinero de la pila hasta que no queda nada. El primero regresa 1/2 de lo que tomó, el segundo 1/3 y el tercero 1/6. Cuando el total reintegrado se divide por igual entre los tres, se descubre que cada uno posee lo que le corresponde. ¿Cuánto dinero había en la pila original, y cuánto tomó cada uno de esa pila? "

Fibonacci llegó a la solución: la cantidad total era 47 y las cantidades que tomaron cada uno, fueron 33, 13 y 1. (Extraído del libro "Algebra Lineal con Aplicaciones",de Nakos y Joyner, 1999)

El desafío será resolver el problema al final del capítulo y analizar si es correcta la solución de Fibonacci.

1. Notación matricial de un Sistema. Soluciones.

Aplicaremos los contenidos vistos en el capítulo anterior para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 5x - y + 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 4x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$

Sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

Sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

Encontrar soluciones a estos sistemas implica hallar valores de las variables que cumplan todas las ecuaciones a la vez.

Podemos representar los sistemas anteriores, como un producto matricial, con una matriz **A** llamada de los coeficientes, una matriz **X**, llamada matriz de las incógnitas y una matriz **b**, llamada matriz del término independiente:

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$ Expresado también como: AX=b

Si hacemos el producto nos queda: $\begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Que por igualdad de matrices resulta: $2x - y = 4$

$3x + 2y = 1$ que es el sistema original.

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Si hacemos el producto nos queda: $\begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 5x - y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Que por igualdad de matrices resulta: $x - 2y + z = 4$

$5x - y + 3z = 3$ que es el sistema original.

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Si hacemos el producto nos queda: $\begin{pmatrix} x - y + z \\ 4x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Que por igualdad de matrices resulta: $x - y + z = 2$

$4x - 2y + z = 1$

$x + y - 2z = 3$ que es el sistema original.

Esto justifica que podamos tratar los sistemas como matrices, donde es evidente que si cambiamos los nombres de las incógnitas los sistemas son los mismos, es decir que la información de cada sistema está en los números, podemos entonces escribir las matrices que contienen esa información:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$

Veremos en lo que sigue como resolver los sistemas en forma matricial.

En general un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas puede escribirse como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Podemos expresar las matrices del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mxn} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mx1}$$

A es la matriz de coeficientes, X es la matriz de las incógnitas y b la matriz de términos independientes

El sistema lo escribimos entonces en forma equivalente como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ que indicamos en forma breve como: $AX = b$

Llamamos ***matriz ampliada*** del sistema $(A|b)$, a la matriz A de coeficientes a la que se agrega como última columna la matriz b de los términos independientes.

Una **solución** del sistema es una n-upla $(c_1, c_2, ..., c_n)$ de números tales que reemplazando respectivamente x_1 por c_1, x_2 por c_2,....., x_n por c_n en **cada una** de las ecuaciones, se cumple la igualdad en **todas** ellas.

2. Operaciones elementales y sistemas de ecuaciones lineales

Si $AX = b$ es un sistema de ecuaciones, aplicando operaciones elementales de fila a la matriz $(A|b)$ ampliada con la columna ***b*** de términos independientes, se obtiene una matriz equivalente por filas, el sistema de ecuaciones correspondiente tiene las mismas soluciones que el de partida.

Ejemplo 2.1:

Supongamos que queremos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Vamos a resolverlo mostrando que las operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada del sistema no son más que las operaciones que hacemos habitualmente en las ecuaciones. Resolveremos en paralelo con las ecuaciones y como matriz:

Ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Multiplicamos la primer ecuación por $\frac{1}{2}$, a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

A la segunda ecuación le restamos la primera, ya que si tenemos H=M y W=P, también es cierto que W-H=P-M:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - x - y - 2y = 3 - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3y = 2 \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por $-\frac{1}{3}$, a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

A la primera ecuación le restamos la segunda multiplicada por 2:

$$\begin{cases} x + 2y - 2y = 1 - 2(-\frac{2}{3}) \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Hemos encontrado la solución: $\boxed{x = \frac{7}{3},\ y = -\frac{2}{3}}$

Forma matricial

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$F_1 \leftarrow F_1.\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftarrow F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftarrow F_2(-\frac{1}{3})$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A_R} & & \begin{matrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{matrix} \end{array}\right)$$

Llegamos a la escalonada y reducida por filas equivalente con A, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Hemos encontrado la solución: $\boxed{x = \frac{7}{3},\ y = -\frac{2}{3}}$

El ejemplo anterior justifica que podemos resolver un sistema de ecuaciones llevándolo a su forma matricial y realizando operaciones elementales. La siguiente proposición lo enuncia formalmente.

Proposición 2.1: Si $AX = b$ es un sistema de ecuaciones lineales y **e** es una operación elemental de fila, entonces el sistema *e(A). X= e(b)* tiene las mismas soluciones que $AX = b$.

Demostración:

Sea $AX = b$ el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longrightarrow \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Sea **c** = $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ una solución de $AX = b$, esto quiere decir que si reemplazamos las incógnitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por estos números $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, se cumplen las igualdades*:*

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

Caso 1:

Sea **e** la operación que multiplica la fila i de $(A|b)$ por un escalar $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ha_{i1} & ha_{i2} & ha_{i3} & \ldots & \ldots & hb_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Y recuperando las ecuaciones tenemos: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ ha_{i1}x_1 + ha_{i2}x_2 + \cdots + ha_{in}x_n = hb_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Veamos ahora que $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ es solución de este nuevo sistema reemplazando $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ ha_{i1}c_1 + ha_{i2}c_2 + \cdots + ha_{in}c_n = hb_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

Sólo hay que mirar la ecuación i, ya que las otras son iguales a las del sistema original y por lo tanto se cumplen las igualdades.

Ecuación i: $ha_{i1}c_1 + ha_{i2}c_2 + \cdots + ha_{in}c_n =$

$$= h\,\underbrace{(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n)}_{b_i \text{ porque es la ecuación original}} = hb_i$$

Luego $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ es solución del sistema e(A).x = e(b), para este caso.

Caso 2:

Sea **e** la operación que reemplaza la fila i (F_i) por $F_i + hF_j$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+ha_{j1} & a_{i2}+ha_{j2} & a_{i3}+ha_{j3} & \dots & a_{in}+ha_{jn} & b_i + hb_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Y recuperando las ecuaciones tenemos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ (a_{i1}+ha_{j1})x_1 + (a_{i2}+ha_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in}+ha_{jn})x_n = b_i + hb_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Veamos ahora que $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ es solución:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ (a_{i1}+ha_{j1})c_1 + (a_{i2}+ha_{j2})c_2 + \cdots + (a_{in}+ha_{jn})c_n = b_i + hb_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

Sólo hay que mirar la ecuación i, ya que las otras son iguales a las del sistema original y por lo tanto se cumplen las igualdades.

Ecuación i: $(a_{i1}+ha_{j1})c_1 + (a_{i2}+ha_{j2})c_2 + \cdots + (a_{in}+ha_{jn})c_n =$

$$= a_{i1}c_1 + ha_{j1}c_1 + a_{i2}c_2 + ha_{j2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n + ha_{jn}c_n =$$

$$\underbrace{(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n)}_{b_i} + h\,\underbrace{(a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \cdots + a_{jn}c_n)}_{b_j} = b_i + hb_j$$

Luego $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ es solución del sistema e(A).x = e(b), para este caso.

Caso3:

Sea **e** la operación de permutar F_i con F_k . Este caso es inmediato ya que es solamente permutar dos ecuaciones de lugar.

El enunciado quedó probado para cuando se aplica **una** operación elemental de cualquiera de los tres tipos que hay. También vale cuando se aplica, a las matrices A y b del sistema, un número finito de operaciones elementales de fila ya que es consecuencia de la aplicación iterada de este resultado.

En consecuencia, el sistema: e_1(**A**).x = e_1(**b**) tiene las mismas soluciones que **A**.x=**b**, es decir, son sistemas equivalentes.

Si se aplica una segunda operación elemental, resulta:

$e_2 \circ e_1(A)X = e_2 \circ e_1(b)$ equivalente a $e_1(A)X = e_1(b)$, y también equivalente a $AX = b$

Así, si se aplican k operaciones elementales hasta llegar a la escalonada y reducida por filas equivalente con A: $\underbrace{e_k \circ e_{k-1} \circ \dots e_2 \circ e_1(A)}_{A_R} X = \underbrace{e_k \circ e_{k-1} \circ \dots e_2 \circ e_1(b)}_{b^*}$,

el sistema $\boldsymbol{A_R X} = \boldsymbol{b}^*$, tiene las mismas soluciones que $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$**.**

Aplicación a los distintos tipos de Sistemas lineales

El objetivo es encontrar las soluciones (o bien decidir que no hay) del sistema dado $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$. El método de aplicar operaciones elementales a la matriz ampliada $(A|b)$, hasta llegar a $(A_R|b^*)$ se conoce con el nombre de Método de Gauss – Jordan:

1) Llevamos el sistema $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ a su forma matricial, escribiendo la matriz ampliada $(A|b)$
2) Hacemos operaciones elementales por filas en la matriz hasta llegar a $(A_R|b^*)$.
3) A partir de la última matriz recuperamos las ecuaciones haciendo el producto : $A_R . X = b^*$
4) A partir de las nuevas ecuaciones tenemos un sistema equivalente con el original y encontramos la o las soluciones o concluimos que no las tiene.

Observación: un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede pensarse geométricamente como el problema de hallar la intersección entre dos rectas. Recordemos que dos rectas pueden cortarse en un punto, pueden ser coincidentes y en consecuencia tener infinitos puntos en común o pueden ser paralelas y no tener ningún punto en común. Un sistema cualquiera con más ecuaciones y más incógnitas, también presentará sólo estas 3 situaciones.

Mostraremos a continuación 3 sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas en los que veremos los 3 casos posibles: que tenga solución única, que tenga infinitas soluciones o que no tenga solución.

Ejemplo 2.2: Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$

Escribimos la matriz:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$F_1 \leftarrow F_1 - F_2$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A_R} & \underbrace{\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}}_{b^*} \end{array}\right)$$

Entonces:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, hay solución única: $x=3, \quad y=-1$

b) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$

Escribimos la matriz:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{A_R} & \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}}_{b^*} \end{array}\right)$$

Entonces:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$x+y=2$

$0=0$

Por lo tanto, hay infinitas soluciones:

$S\{(x,y): x=2-y, y \in \mathbb{R}\}$

c) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$

Escribimos la matriz:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{A_R} & \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}}_{b^*} \end{array}\right)$$

Entonces:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$x+y=2$

$0=-1$ ABSURDO

Por lo tanto, no hay solución.

El siguiente teorema permite establecer comparando el rango de la matriz de coeficientes con el de la matriz ampliada si el sistema es compatible o incompatible.

Teorema (Rouché, Frobenius):

Sea $AX = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

1) $AX = b$ es compatible si y sólo si $R(A) = R(A|b)$

($R(A)$indica el rango de A y $R(A|b)$ indica el rango de la matriz ampliada del sistema)

2) Además, si $R(A) = R(A|b) = n$ (n = número de incógnitas), entonces la solución es única, (sistema compatible determinado), si $R(A) = R(A|b) < n$, entonces tiene infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado).

Observación: Notemos que este teorema permite clasificar el sistema, no obtener las soluciones en caso que existan.

Si miramos los ejemplos anteriores tenemos:

a) $R(A) = R(A|b) = 2$, los rangos coinciden y además coinciden con el número de incógnitas, por lo tanto hay solución única.
b) $R(A) = R(A|b) = 1$, los rangos coinciden pero el número de incógnitas es mayor, por lo tanto hay infinitas soluciones.}
c) $R(A) \neq R(A|b)$, la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada tienen distinto rango, por lo tanto no hay solución.

Ejemplo 2.3:

Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 4 \\ 2x \ - y \ - z = \ 1 \\ x \ + \ 2y \ \text{-} z = \text{-}3 \end{cases}$

Se forma la matriz ampliada $(A\ \ b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$ y se le aplica una sucesión de operaciones elementales (no necesariamente única) para llevarla a $(A_R|b^*)$, donde A_R es la reducida equivalente con A y b^*, la columna resultante de esa misma sucesión de operaciones elementales.

$(A_R|b^*)$ es **única** cualesquiera sean las operaciones elementales elegidas para reducir ***A.***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \quad \frac{1}{2}F_1 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right),$$

$$\frac{-1}{3}F_2 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right), \quad \begin{array}{c} F_1-F_2 \\ F_3-F_2 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right), \quad \frac{-1}{3}F_3 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

$$F_2-F_3 \to \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{A_R}\middle|\underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 2 \end{array}}_{b^*}\right)$$

La matriz A_R reducida equivalente a ***A*** en este caso es la identidad.

El sistema así obtenido da las soluciones del sistema dado.

El sistema equivalente al de partida con notación usual y con la matricial es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x+0y+0z=1 \\ 0x+y+0z=-1 \\ 0x+0y+z=2 \end{cases}$$

Observemos que $R(A) = R(A|b) = 3$, por lo tanto por el Teorema de Rouché Frobenius hay **solución única.** Esa solución es : $x=1,\ \ y=\text{-}1,\ \ z=2$.

Ejemplo 2.4:

Este es un ejemplo de un sistema con infinitas soluciones (compatible indeterminado), se encontrará el conjunto de sus infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x+y-2z+4t=5 \\ 2x+2y-3z+t=3 \\ 3x+3y-4z-2t=1 \end{cases}$$

Se construye la correspondiente matriz ampliada $(A|b)$ y se le aplican operaciones elementales hasta obtener $(A_R|b^*)$:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 \leftarrow (F_2-2F_1) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow (F_3-3F_1) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{array}\right) F_1 \leftarrow (F_1+2F_2) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow (F_3-2F_2) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A_R|b^*)$$

En este, como en todos los casos, la sucesión de operaciones elementales aplicada **no** es única, no debe necesariamente ser la que se muestra ahí arriba, pero cualesquiera sean las operaciones elementales y el orden en que se apliquen, **la matriz final obtenida** $(\boldsymbol{A_R}|\boldsymbol{b}^*)$ **es siempre la misma, ésa es única.**

Observemos que $R(A)=R(A|b)=2<3$, los rangos coinciden pero es menor al número de incógnitas, por lo tanto ya sabemos que tiene infinitas soluciones, debemos encontrar la expresión de ellas.

La matriz $(A_R|b^*)$ es la matriz ampliada correspondiente a un sistema equivalente (es decir: con las mismas soluciones) que el enunciado. Expresado como producto matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces: $\begin{cases} x + y - 10t = -9 \\ z - 7t = -7 \\ 0 = 0 \end{cases}$ del que se obtiene $\begin{cases} x = -9 - y + 10t \\ z = -7 + 7t \end{cases}$

Las letras y, t son variables libres, pueden adoptar cualquier número real, esto se indica con: $y, t \in \mathbb{R}$. En cambio, x, z son dependientes (dependen de los valores elegidos para y y para t).

El hecho de que haya al menos una variable libre, que recorre todos los números reales, hace que el conjunto de soluciones del sistema sea infinito.

En este ejemplo el **conjunto de infinitas soluciones** del sistema se expresa como:

$$\boxed{S = \{(x, y, z, t):\ x = -9 - y + 10t\ , \quad z = -7 + 7t,\ \ y, t \in \mathbb{R}\}}$$

O bien $\quad S = \{(-9 - y + 10t, y, -7 + 7t, t):,\ \ y, t \in \mathbb{R}\}$

Si se quiere obtener una solución particular, se asignan números determinados a las variables libres (en este ejemplo *y, t)* y con esos valores se obtienen los de *x* y *z.*

Si elegimos $y = 0, t = 1$ obtenemos la solución: $x = 1, y = 0, z = 0, t = 1$.

Si elegimos $y = 2, t = -1$ obtenemos la solución: $x = -21, y = 2, z = -14, t = -1$.

Observación: La palabra "indeterminado" sugiere que las soluciones no pueden conocerse, esto no es así: las infinitas soluciones de un sistema compatible indeterminado siguen todas una misma "ley" (que suele llamarse solución general), a partir de la cual se puede obtener cualquier solución particular, como las que se muestran en el ejemplo anterior.

Ejemplo 2.5:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad F_2 \leftarrow (F_2 - 3F_1) \ \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow (F_3 - 2F_1) \ \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) F_2 \leftarrow (F_2.(-1) \ \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_1 \leftarrow (F_1 - F_2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) F_3 \leftarrow (F_3 + F_2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = (A_R|b^*)$$

En el sistema equivalente que se obtiene, queda la última ecuación $0x+0y+0z=-1$, imposible de resolver, equivale (cualesquiera sean x, y , z) a la igualdad falsa 0 = -1.

Por lo tanto, **el sistema no tiene solución, también decimos que es un sistema incompatible.**

Observemos que $R(A) \neq R(A|b)$, por lo tanto también podemos usar el Teorema de Rouché Frobenius para justificar que el sistema no tiene solución.

Los sistemas de ecuaciones son útiles para representan una gran cantidad de problemas. Veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.6:

Ana tiene el triple de edad que su hijo Jaime. Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Jaime tiene su madre?

Para resolverlo llamamos A a la edad de Ana y J a la edad de Jaime y planteamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} A = 3J & \longrightarrow \boxed{\text{Ana tiene el triple de edad que su hijo Jaime}} \\ A + 15 = 2(J + 15) & \longrightarrow \boxed{\text{Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo}} \end{cases}$$

Reacomodamos las ecuaciones, dejando las incógnitas de un lado de la igualdad y los números del otro:

$$\begin{cases} A - 3J = 0 \\ A - 2J = 15 \end{cases}$$

Ya estamos en condiciones de escribir la matriz ampliada y resolver:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 15 \end{array}\right) \quad F_2 \leftarrow (F_2 - F_1) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right) F_1 \leftarrow (F_1 + 3F_2) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 45 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Hemos llegado a la escalonada y reducida por filas, esto nos dice que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 15 \end{pmatrix}$

Entonces $\begin{pmatrix} A \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 15 \end{pmatrix}$ y por lo tanto el sistema tiene solución única $A = 45,\ \ J = 15$

Esas son las edades actuales de Ana y de su hijo Jaime, por lo tanto Ana tiene 30 años más que su hijo.

Ejemplo 2.7:

Una empresa de transportes gestiona una flota de 60 camiones, entre grandes, medianos y pequeños. Los grandes transportan una media diaria de 15000kg y recorren 400km. Los medianos transportan 10000kg y recorren 300km y los pequeños transportan 5000kg y recorren 100km. Diariamente los camiones transportan 475000kg y recorren 12500km entre todos. ¿Cuántos camiones de cada tipo gestiona la empresa?

Para resolverlo llamamos G a la cantidad de camiones grandes, M a la cantidad de camiones medianos y P a la cantidad de camiones pequeños y planteamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} G + M + P = 60 \\ 15000G + 10000M + 5000P = 475000 \\ 400G + 300M + 100P = 12500 \end{cases}$$

Tenemos entonces un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 15000 & 10000 & 5000 & 475000 \\ 400 & 300 & 100 & 12500 \end{array}\right)$$

$$F_2 \leftarrow (F_2 - 15000F_1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -5000 & -10000 & -425000 \\ 400 & 300 & 100 & 12500 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow (F_3 - 400F_1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -5000 & -10000 & -425000 \\ 0 & -100 & -300 & -11500 \end{array}\right)$$

$$F_2 \leftarrow \left(F_2.(-\frac{1}{5000})\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 2 & 85 \\ 0 & -100 & -300 & -11500 \end{array}\right)$$

$$F_1 \leftarrow (F_1 - F_2) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -25 \\ 0 & 1 & 2 & 85 \\ 0 & -100 & -300 & -11500 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow (F_3 + 100F_2) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -25 \\ 0 & 1 & 2 & 85 \\ 0 & 0 & -100 & -3000 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftarrow \left(F_3 . (-\frac{1}{100}\right) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -25 \\ 0 & 1 & 2 & 85 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

$$F_1 \leftarrow (F_1 + F_3) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 85 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right) \qquad F_2 \leftarrow (F_2 - 2F_3) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

Hemos llegado a la escalonada y reducida por filas, esto nos dice que:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G \\ M \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} G \\ M \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$, el sistema tiene solución única:

La empresa tiene 5 camiones grandes, 25 medianos y 30 pequeños.

Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos los términos independientes son ceros.

Su notación matricial es $AX = O$ donde O indica una matriz columna nula.

Observación:

La importancia de los sistemas homogéneos reside en que son sistemas siempre compatibles.

Por ejemplo, en el sistema $\begin{cases} 3x + 4y - 6z = 0 \\ 2x + y + 10z = 0 \\ 70x - \sqrt{2}y + 4z = 0 \end{cases}$, si reemplazamos las incógnitas por 0, seguro satisfacen las ecuaciones, por lo tanto, en cualquier sistema homogéneo, esa es una solución.

Todo sistema homogéneo es compatible: la solución **trivial** es aquella en la que se reemplazan todas las incógnitas por ceros, esta solución nula la tienen todos los sistemas homogéneos, por esa razón se llama trivial.

Si el sistema homogéneo tiene una única solución debe necesariamente ser la trivial. Si tiene infinitas soluciones, una de ellas debe ser la trivial.
Aplicando el teorema de Rouché Frobenius a un sistema homogéneo los rangos de ambas matrices siempre coinciden debido a que la columna que se agrega para construir la matriz ampliada es nula. Este número puede coincidir con el número n de incógnitas (compatible determinado) o ser menor que n (compatible indeterminado).

Los sistemas homogéneos se resuelven mediante operaciones elementales como los anteriores.

Ejercicios:

1) Representar en el plano los siguientes sistemas, indicar qué tipo de solución hay en cada caso: $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+6y=8 \\ x+3y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 6x-3y=-5 \end{cases}$

2) Verificar que los valores dados son *soluciones* de los sistemas planteados:

a) x=1, y =2 para $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ b) x=1, y=1 para $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \\ 3x-y=2 \end{cases}$

c) {(x,y) ; x = -3y} para $\begin{cases} x+3y=0 \\ -3x-9y=0 \\ 2x+6y=0 \end{cases}$ d) x=15/9, y=8/9, z= -11/9 para $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ y+4z=-4 \\ x-y-z=2 \end{cases}$

e) {(x, y, z) ; x =1+y, z=3y} para $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y=1 \end{cases}$

3) Resolver los siguientes sistemas por operaciones elementales y expresar la o las soluciones en caso de que existan. Clasificarlos por el teorema de Rouché-Frobenius. En los casos que haya infinitas soluciones dar dos soluciones particulares:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 \quad - x_3 = 6 \\ \quad x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ \quad u_2 - u_3 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 3x \quad + 5z = 4 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 2w = 0 \\ 3x - 7y - 2z + 4w = 0 \\ 4x + 3y + 5z + 2w = 0 \end{cases}$

4) Analizar la ***verdad*** o ***falsedad*** de las siguientes afirmaciones. Fundamentar la respuesta

a) Todo sistema homogéneo tiene al menos una solución.

b) Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.

c) Un sistema homogéneo que no tiene una única solución, tiene infinitas soluciones.

d) Si un sistema no homogéneo no tiene solución única, debe tener infinitas soluciones.

e) Si un sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.

f) La ecuación x + y = 0 no tiene solución.

g) Si para cada ecuación del sistema hay alguna solución, entonces el sistema tiene solución.

h) Si un sistema es incompatible, entonces cada ecuación del mismo tampoco tiene solución.

5) Determinar (si existen) los valores de ***b*** para que los siguientes sistemas sean

i) compatible (en tal caso resolverlo, expresar la solución en la forma adecuada)

ii) incompatible

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 \quad + 2x_3 + 7x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 5y - z = 7 \\ 4y + 3z = b \\ -x + 3y + 7z = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z - 3w = 8 \\ -2x + 2y - z + 6w = b \end{cases}$

6) Determinar qué relación debe haber entre *a, b* y *c* para que este sistema sea compatible:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

7) Si la terna $(2,1,-1)$ es <u>**una *solución***</u> de $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 \quad + x_3 = b \\ x_1 + x_2 \quad = c \end{cases}$ hallar todas las soluciones del sistema. (piense dónde debe reemplazar 2, 1 y -1)

8) En cada caso determinar, si existen, los valores de ***k*** tales que el sistema resulte, respectivamente:

i) compatible determinado

ii) compatible indeterminado

iii) incompatible

(a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 + k.x_2 = k + 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + (k-1).x_2 = k \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 + k.x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

9) Resuelve el problema de la Pila de monedas de Fibonacci planteado al principio del capítulo y analiza si la solución hallada por Fibonacci es correcta.

---

3. Determinante de una matriz.

El determinante de una matriz es un número real que se asigna SOLO A MATRICES CUADRADAS. Este número fue primeramente calculado para encontrar condiciones para que un sistema de ecuaciones de 2x2 tuviera solución única, esto motiva el estudio de los determinantes y nos dará una poderosa herramienta para analizar los sistemas de ecuaciones cuya matriz de coeficientes sea cuadrada.

Si A está en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{nxn}}$ el determinante de A, que se nota **det(A)** o $|\boldsymbol{A}|$, es un número real que se puede pensar como una función, con dominio en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{nxn}}$ y codominio en $\mathbb{R}$: det**:** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{nxn}} \to \mathbb{R}$ que a toda matriz A en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{nxn}}$ le asigna el único número **det(A)** $\in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1:

Sea $A = (3)$ una matriz de 1x1, el determinante de A, que se escribe det(A) o $|\boldsymbol{A}|$ es 3. Es decir es el único número que tiene la matriz.

Ejemplo 3.2:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ una matriz de 2x2.

Para calcular el determinante, elegimos cualquier fila o cualquier columna de la matriz, elijamos la fila 1, tenemos entonces:

det(A)= $2.\ (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+1}}\ .\boldsymbol{det}(\mathbf{4})\quad + \quad \mathbf{3}.\ (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+2}}.\boldsymbol{det}(\mathbf{5})$=

a_{11}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila1, columna1	a_{12}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila1, columna2

det(A)= 2.4 – 3.5 = 8-15= - 7

Es decir que de manera práctica podemos calcularlo como el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo 3.3:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$una matriz de 3x3.

Para calcular el determinante, elegimos cualquier fila o cualquier columna de la matriz, elijamos la fila 1, tenemos entonces:

det(A)= $1.\ (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+1}}\ .\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix} + \ \mathbf{3}.\ (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+2}}.\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} + (-\mathbf{1}).\ (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+3}}.\ \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$=

a_{11}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila1, columna1	a_{12}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila1, columna2	a_{13}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila1, columna3

=1.1 . $(\mathbf{0.1} - \mathbf{4.2}) + \ \mathbf{3}.(-\mathbf{1}).(\mathbf{2.1} - \mathbf{1.2}) + (-\mathbf{1}).\mathbf{1}.(\mathbf{2.4} - \mathbf{1.0}) = -\mathbf{8} + \mathbf{0} - \mathbf{8} = -\mathbf{16}$

Si eligiéramos otra fila o cualquier columna el resultado sería el mismo. Desarrollemos el determinante por la columna 2:

$$\det(A)= 3.\ (-\mathbf{1})^{1+2}\ .\,det\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix} + \ \mathbf{0}.\ (-\mathbf{1})^{2+2}\,.\,det\begin{pmatrix}\mathbf{1} & -\mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix} + \mathbf{4}.\ (-\mathbf{1})^{3+2}.\ det\begin{pmatrix}\mathbf{1} & -\mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2}\end{pmatrix}=$$

a_{12}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila1, columna2	a_{22}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila2, columna2	a_{32}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila3, columna2

$$=3.(-1).(\mathbf{2.1-1.2})+\mathbf{0.1}.\big(\mathbf{1.1-1.(-1)}\big)+\mathbf{4}.(-\mathbf{1}).(\mathbf{1.2-2.(-1)}=\mathbf{0+0-16=-16}$$

Se define a continuación, por recurrencia, el determinante de cualquier matriz **cuadrada**:

Definición: Sea A matriz de $\mathbb{R}^{nxn}$,

1) Si *n= 1*, A = (a_{11}), se define **det(A) =** a_{11} **o** $|A|=a_{11}$

2) Si *n es cualquier número natural mayor o igual que 2*, se define, dada cualquier fila $\boldsymbol{i}$**:**

det(A)= $\boldsymbol{a_{i1}}.(-\mathbf{1})^{i+1}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}|\mathbf{1})\big)+\boldsymbol{a_{i2}}.(-\mathbf{1})^{i+2}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}|\mathbf{2})\big)+\cdots+\boldsymbol{a_{in}}.(-\mathbf{1})^{i+n}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}|\boldsymbol{n})\big)$

o también, dada cualquier columna $\boldsymbol{j}$**:**

det(A)= $\boldsymbol{a_{1j}}.(-\mathbf{1})^{1+j}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\mathbf{1}|\boldsymbol{j})\big)+\boldsymbol{a_{2j}}.(-\mathbf{1})^{2+j}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\mathbf{2}|\boldsymbol{j})\big)+\cdots+\boldsymbol{a_{nj}}.(-\mathbf{1})^{n+j}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{j})\big)$

Por comodidad escribimos ambas expresiones con la notación sigma:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a_{ik}}.\overbrace{(-\mathbf{1})^{i+k}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}|\boldsymbol{k})\big)}^{\alpha_{ik}}}_{\text{Está fija la fila i, va variando la columna}}=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a_{kj}}.\overbrace{(-\mathbf{1})^{k+j}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{j})\big)}^{\alpha_{kj}}}_{\text{Está fija la columna j, va variando la fila}}$$

Se llama ***adjunto*** (o ***cofactor***) del coeficiente a_{ij} al valor $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}$.**det** $A(i/j)$**.**

El ***determinante*** de A es la suma de los productos de los coeficientes de una fila (o una columna) <u>cualquiera</u> de A por sus respectivos cofactores, es decir, desarrollado por la fila *i* :

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.\alpha_{ij}=a_{i1}.\alpha_{i1}+a_{i2}.\alpha_{i2}+\ldots+a_{in}.\alpha_{in}$$

Observación: El determinante está bien definido: el valor det(A) es único cualquiera sea la fila o la columna de A que se elija para calcularlo.

Ejemplo 3.4:

Calcular det(A) siendo A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Calcularemos por la fila 2: det(A) = $a_{21}.\ \alpha_{21} + a_{22}.\alpha_{22} + a_{23}.\alpha_{23}$,

calculando primero los cofactores α_{2j} :

α_{21} = $(- 1)^{2+1}$. det A(2/1) = (- 1) $.\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **= -1**

α_{22} = $(-1)^{2+2}$ .det A(2/2) = $\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ = **- 9**

α_{23} = $(- 1)^{2+3}$. det A(2/3) = $(-1).\ \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = **- 3**

Entonces:

det(A) = 2 . (- 1) + (- 1). (- 9) + (- 2) . (- 3) = 13

El mismo valor 13 se obtiene calculando det(A) por cualquier otra fila o por cualquier columna. Tomando por ejemplo la primera columna:

det (A) = $3.(- 1)^{1+1}.\det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ + $2.(-1)^{2+1}.\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **+** 0 = 13

Ejemplo 3.5:

Calcular det (A) siendo A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcularemos por la fila 1:

det (A) = $\underbrace{2.(-1)^{1+1}}_{2}.det\underbrace{\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}}_{A(1/1)} + \underbrace{3.(-1)^{1+2}}_{-3}.det\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}_{A(1/2)} + 0 \;+\; 0 \;=$

$$= 2.\left[\overbrace{\underbrace{2.(-1)^{1+1}}_{2}.det\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}}_{2}+0+0}^{\det(A(1/1))\text{ por fila 1}}\right] - 3\left[\overbrace{\underbrace{1.(-1)^{1+1}}_{1}.det\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}}_{2}+0+0}^{\det(A(1/2))\text{ por fila 1}}\right] =$$

$$2.2.2 - 3.1.2 = 8 - 6 = 2$$

Entonces: **det(A) = 2**

Observemos que siempre nos conviene elegir la fila o la columna que tenga más ceros para hacer menos cuentas. En este ejemplo podríamos haber elegido la columna 4:

A = $\begin{pmatrix}2&3&0&0\\1&2&0&0\\4&-1&1&0\\0&1&0&2\end{pmatrix}$

Calcularemos por la columna 4:

det (A) = $0+0+0+\underbrace{2.(-1)^{4+4}}_{2}.det\underbrace{\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&0\\4&-1&1\end{pmatrix}}_{A(4/4)} \;=$

$$= 2.\left[\overbrace{0+0+\underbrace{1.(-1)^{3+3}}_{1}.det\underbrace{\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}}_{1}}^{\det(A(4/4))\text{ por columna 3}}\right] = 2.1 = 2$$

Entonces: **det(A) = 2**

Algunas propiedades del determinante

A continuación se enuncian algunas propiedades de los determinantes. Existen además otras propiedades no incluidas en los contenidos de esta asignatura. Demostraremos sólo algunas. Por la definición del determinante, en la que hemos mencionado que puede calcularse por fila o por columna, todas las propiedades enunciadas a continuación para las filas vale también para las columnas de la matriz.

Sea $A \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{nxn}}$**:**

Propiedad 1) $\mathbf{det}\big(\boldsymbol{F_i}(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{A})\big) = \boldsymbol{c}.\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$

Si B es la matriz que se obtiene de A luego de aplicar la operación elemental de multiplicar todos los coeficientes de **una** fila (respectivamente una columna) por un escalar *c* entonces el $\det(B) = c.\det(A)$

Demostración:

Llamemos *B* a la matriz que se obtiene multiplicando la fila k de *A* por c, los elementos de *B*, son iguales a los de *A*, salvo los de la fila k, que son los de *A* multiplicados por el número c, entonces : $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \dots & ca_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Calculamos el det(*B)* por la fila k,

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \sum_{\boldsymbol{j}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{b_{kj}}.(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{j})\big)$$

Por la definición de B, $det\big(B(k|j)\big) = det\big(A(k|j)\big)$, porque en ambas se suprime la fila *k* que es la única en la que difieren, y $\boldsymbol{b_{kj}} = \boldsymbol{c}.\boldsymbol{a_{kj}}$**,** entonces se tiene:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \sum_{\boldsymbol{j}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c}.\boldsymbol{a_{kj}}.(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{j})\big) = \boldsymbol{c}.\left(\sum_{\boldsymbol{j}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{kj}}.(-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}}\boldsymbol{det}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{j})\big)\right) = \boldsymbol{c}.\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$$

Corolario de la Propiedad 1 Si consideramos la matriz $c.A$ (producto del escalar *c* por la matriz *A*), entonces: $\det(c.A) = c^n.\det(A)$

Propiedad 2) Si una fila (respectivamente una columna) de *A* tiene todos sus coeficientes iguales a 0 entonces det(*A)* = 0.

Demostración:

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow$ fila k

Desarrollamos el determinante por la fila k de A:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}.(-1)^{k+j} det\big(A(k|j)\big) = \sum_{j=1}^{n} 0.(-1)^{k+j} det\big(A(k|j)\big) = 0$$

Propiedad 3) Sean A y B matrices de $\mathbb{R}^{nxn}$ entonces $\det(A.B) = \det A.\det B$

Observaciones

1) Dado un n fijo, la propiedad 4 se generaliza a cualquier número finito de matrices $n \times n$

Si $M_1, M_2, \ldots, M_k$ son matrices $n \times n$, entonces $\det(M_1.M_2.....M_k) = \det M_1.\det M_2.....\det M_k$.

2) Esta propiedad del determinante es, tal como se indica, para el **producto** de matrices, **no** existe ninguna con relación a la suma de matrices

Propiedad 4) Para la matriz identidad I_n , $\det(I_n) = 1$, cualquiera sea *n*.

Demostración:

Lo demostraremos por inducción sobre el número de filas de la matriz, el enunciado entonces es: P(n): "$\det(I_n) = 1$ " para todo n, natural mayor o igual a 1.

1) Para n=1 es trivial por la definición. Por lo tanto vale P(1).

2) Si $\underbrace{\mathrm{P(k)}: \det(I_k) = 1}_{Hipótesis\ inductiva}$ **entonces** $\underbrace{\mathrm{P(k+1)}: \ \det(I_{k+1}) = 1}_{Tesis\ inductiva}$

Para calcular $\det(I_{k+1})$ lo desarrollamos por la columna 1, entonces:

$$\det(I_{k+1}) = 1.(-1)^{1+1}.\det(I_k) + 0 + 0 + \cdots + 0 = 1.(-1)^{1+1}.\det(I_k)$$

Columna con un solo elemento no nulo $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(I_k) = 1$ por hipótesis

Por lo tanto $\det(I_{k+1}) = 1.(-1)^{1+1}.\det(I_k) = 1.1.1. = 1$

Hemos probado los dos pasos de la inducción, por lo tanto $\det(I_n) = 1$ para todo natural.

Propiedad 5) $\mathbf{det}\big((\boldsymbol{F_i} \leftarrow \boldsymbol{F_i} + \boldsymbol{cF_k})(\boldsymbol{A})\big) = \mathbf{det}(\boldsymbol{A})$

Si B es la matriz que se obtiene de A luego de aplicar la operación elemental de sumarle a la fila i la fila k multiplicada por un escalar *c* , distinto de 0, entonces el $\det(B) = \det(A)$

Propiedad 6) $\mathbf{det}\big((\boldsymbol{F_i} \leftrightarrow \boldsymbol{F_k})(\boldsymbol{A})\big) = -\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$

Si B es la matriz que se obtiene de A luego de aplicar la operación elemental de permutar la fila i con la fila k, entonces $\det(B) = -\det(A)$

Propiedad 7) Condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa:

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, A tiene inversa **si y sólo si** $\det(A) \neq 0$.

El enunciado afirma dos cosas:

1) Si A tiene inversa **entonces** su determinante es distinto de 0.

2) Si el determinante de A es distinto de 0 **entonces** A tiene inversa.

Demostración de 1):

Sabemos que A tiene inversa, entonces existe A^{-1} tal que $A.A^{-1} = I$

Cuando dos matrices son iguales su determinante también lo es, (notar que no es cierto la recíproca, es decir si dos matrices tienen el mismo determinante no tienen por qué ser iguales), por lo tanto:

$\det(A.A^{-1}) = \det(I)$ y por las propiedades 4 y 5 se tiene que $\det(A).\det(A^{-1}) = 1$

Tenemos entonces un producto de números reales igual a 1, por lo tanto ninguno de los dos factores puede ser 0, en particular **determinante de A es distinto de 0**.

Demostración de 2):

Sabemos que el determinante de A es distinto de 0, queremos ver que A es invertible.

Para eso alcanza con probar que A es equivalente por filas con la identidad.

Si le aplicamos un número finito de operaciones elementales a A para llegar a la escalonada y reducida por filas equivalente con A, el $\det(A_R)$ será:

* igual al de A, o

* cambiará de signo con el de A o

* será un número, no nulo, multiplicado por el determinante de A, por las propiedades 1, 5 y 6.

Es decir que si $\det(A) \neq 0$ entonces $\det(A_R) \neq 0$, entonces A_R no puede tener una fila de 0, porque si así fuera su determinante valdría 0, esto quiere decir que $A_R = I$, por lo tanto **A tiene inversa**.

Esta importante propiedad nos garantiza una condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa.

Propiedad 8) Si la matriz A tiene inversa entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Demostración:

Sabemos que A tiene inversa , entonces : $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

Tomemos una igualdad: $A^{-1}.A = I_n$

Aplicamos determinante a ambos lados, ya que si las matrices son iguales sus determinantes también:

$$\underbrace{\det(A^{-1}.A)}_{\boxed{\det(A^{-1}).\det(A) \text{ por propiedad 3}}} = \underbrace{\det(I_n)}_{\boxed{\det(I_n) = 1 \text{ por propiedad 4}}}$$

Entonces:

$$\det(A^{-1}).\underbrace{\det(A)}_{\boxed{\text{Es un número real distinto de 0, por propiedad 7}}} = 1$$

Entonces:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Propiedad 9) Dado un sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas $AX = b$, tiene solución única **si y sólo si** A tiene inversa.

Demostración: 1) $\underbrace{AX = b \text{ tiene solución única}}_{hipótesis}$ entonces $\underbrace{A \text{ tiene inversa}}_{tesis}$

Como $AX = b$ tiene solución única, sabemos por el Teorema de Rouché Frobenius que $R(A) = R(A|b) = n$, es decir que el rango de A es igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.
Como el sistema tiene la misma cantidad de incógnitas que de ecuaciones, si $R(A) = n$ la matriz A_R no tiene filas de ceros, por lo tanto $A_R = I_n$, y por lo tanto $\boldsymbol{A}$ **tiene inversa**.

2) $\underbrace{A\ tiene\ inversa}_{hipótesis}$ entonces $\underbrace{AX = b \text{ tiene solución única}}_{tesis}$

Como A tiene inversa entonces A es equivalente por filas con la identidad.
Entonces $R(A) = n$ y como $(A|b)$ tiene n filas, si A_R no tiene filas nulas $(A_R|b^*)$ tampoco tiene filas nulas y por lo tanto $R(A|b) = n$.
Los rangos coinciden y coinciden con el número de incógnitas por lo tanto, por el Teorema de Rouche Frobenius, **el sistema** $\boldsymbol{AX = b}$ **tiene solución única.**

Ejercicios:

10) Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

11) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tal que det(A)= 5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices, indicando las propiedades usadas:

a) $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2.d & 2.e & 2.f \\ 3.g & 3.h & 3.i \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} a + 2g & b + 2h & c + 2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

d) $3A$ ***e)*** A^2 ***f)*** $\frac{1}{2}(A^{-1})$

12) Sea $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ b & c & 0 & 0\\ d & e & f & 0\\ g & h & i & j\end{pmatrix}$ una matriz triangular inferior. Demostrar que $\det(A)=a.c.f.j$

13) Sean A, B, C matrices *nxn*, tales que C tiene inversa y **A = C.B.C $^{-1}$.**

Probar que det(A) = det(B). Fundamentar cada paso de la prueba.

14) Aplicación importante de la propiedad 5):

Sea $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$

Si queremos calcular su determinante tendremos que calcular 4 determinantes de 3x3. Podemos reducir el problema aplicando la única operación elemental que no cambia el valor del determinante. **La matriz obtenida será distinta, será equivalente por filas con la original, pero su determinante es el mismo.**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{l} F_1\leftarrow(F_1-3F_3)\rightarrow B=\\ F_4\leftarrow(F_4+F_3)\end{array}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -5\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Por las operaciones que hemos aplicado, sabemos que $\det(A)=\det(B)$, calculamos entonces $\det(B)$ por columna 1:

$$\det(B)=0+0+\underbrace{1.(-1)^{1+3}}_{1}.\underbrace{det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{\det(A(1/3))}+0=$$

$$=1.\Big[\overbrace{1.(-1)^{3+1}.det\begin{pmatrix} -1 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0+0}^{\det(A(1/3))\text{ por fila 3}}\Big]=1.1.1(0+5)=5$$

Hemos reducido el cálculo del determinante de una matriz de 4x4 al cálculo de un determinante de una matriz de 3x3.

a) Utilice las propiedades para calcular los siguientes determinantes:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 5\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 5\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}6 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 5 & -7\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

b) Utilice las propiedades para llevar la siguiente matriz a una triangular superior y calcule su determinante: $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$

En el ejercicio 3 probó que si una matriz es triangular inferior su determinante es el producto de los elementos de la diagonal. ¿Si la matriz es triangular superior vale lo mismo? Justifique.

15) Si A es una matriz 5x5 y el det (A) **= k**, hallar y justificar:

i) det (8.A) ii) $(6.A)^9$

16) Si B es una matriz *nxn* y el det B **= 10**, hallar det ($\frac{3}{4}$.B). Justificar.

17) Si *A*, *B*, C son matrices 5x5, det(A)=3, det(*B*)=2 y det(*C*)=6, indicar cuánto valen:

a) $det\left(A.\left(\frac{1}{3}B\right).A^3(5B^{-1})\right)$

b) $det\left(\left(\frac{1}{2}B\right).A^4(B.A)^{-1}\right)$

c) $det\left(\left(\frac{5}{3}(B.C)\right)^3.\left((2.B)A^{-1}\right)^4(C.B.A)^{-1}\right)$

<u>Mencionar todas las propiedades usadas en cada paso. Justificar todas las respuestas.</u>

18) Decidir si las siguientes matrices tienen o no inversa:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ -3 & -6 & -9\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

19) Hallar los valores de *k* para que las siguientes matrices tengan inversa

$$A=\begin{pmatrix}1 & k+2\\ -(k-2) & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}k-5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & k+5\end{pmatrix}$$

20) Sean A, B matrices *nxn*. Decidir por propiedades del determinante si las siguientes afirmaciones son V o F. Justificar.

a) Si A no tiene inversa, entonces A.B no tiene inversa

b) Si A tiene inversa y B no, entonces A.B no tiene inversa.

c) Si A.B no tiene inversa, entonces ni A ni B tienen inversa.

d) Si A.B no tiene inversa, entonces al menos una de las dos, A o B, no tiene inversa.

e) Si det(A)=det(B) entonces A=B

21) Decidir si hay valores de *k* (y encontrarlos) para los que el siguiente sistema sea compatible determinado, justificar la respuesta.

$$\begin{cases} 3(k+5).x_1 + 9.x_2 - x_3 = b_1 \\ \qquad\qquad 6.x_2 + 12.x_3 = b_2 \\ 5.x_1 \quad + (1-k).x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

22) Calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 78 & 45 \\ 0 & 5 & -87 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 230 & 5 & 0 \\ -80 & 32 & 3 \end{pmatrix}$

---

4. ANEXO: APLICACIONES

Un gran número de problemas se representan mediante sistemas de ecuaciones lineales como hemos visto en los ejemplos 2.6 y 2.7.

En los siguientes problemas sólo nos ocuparemos de hallar las ecuaciones que modelizan el problema, su resolución la dejamos como ejercicio:

1) Se tiene un rectángulo cuya altura mide 2cm más que su base y cuyo perímetro es igual a 24cm. Calcular las dimensiones del rectángulo.

Podemos representar gráficamente la situación:

Perímetro=2.altura+2.base

base

Llamando a a la altura y b a la base del rectángulo, tenemos que:

$\begin{cases} a = 2 + b \\ 2a + 2b = 24 \end{cases}$ o equivalentemente $\begin{cases} a - b = 2 \\ 2a + 2b = 24 \end{cases}$

Por lo que queda por resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

2) Una editorial edita 3 calidades de libros: encuadernación rústica, con pasta dura y de lujo. Para los rústicos, la empresa gasta en promedio \$50 en papel, \$20 en ilustraciones y \$30 en las pastas, para los de pasta dura gasta \$100 en papel, \$40 en ilustraciones y \$80 en pastas y para los de lujo, \$200 en papel, \$120 en ilustraciones y \$240 en pastas. Si el presupuesto permite \$2 350 000 en papel, \$1 100 000 en ilustraciones y \$2 050 000 es pastas. ¿Cuántos libros de cada categoría pueden producirse?

Si llamamos R a la cantidad de libros de encuadernación rústica, P a los de pasta dura y L a los de lujo, tenemos que:

$$\begin{cases} 50R + 100P + 200L = 2\,350\,000 \\ 20R + 40P + 120L = 1\,100\,000 \\ 30R + 80P + 240L = 2\,050\,000 \end{cases}$$

Luego, la respuesta se obtiene resolviendo este sistema de ecuaciones.

Este problema fue extraído del libro “Algebra lineal con aplicaciones” de George Nakos y David Joyner.

Bibliografía

- R. Espinosa Armenta, **Matemáticas discretas**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010
- Smith, et al , **Algebra, trigonometría y geometría analítica**, Pearson-Addison Wesley Longman, 1998
- Swokoski, Earl W. y Cole, Jeffery A., **Algebra y trigonometría con geometría analítica,** 11ma ed., Editorial Thomson, 2006