1. De un grupo de 35 alumnos (entre los que están Santi y Juli) se forma un primer grupo de 12 alumnos y luego un segundo grupo de otros 12 alumnos.

a) ¿De cuántas formas puede hacerse si Santi y Juli deben estar en el primer grupo?

$$\underbrace{\binom{33}{10}}_{\text{Grupos en los que están Santi y Juli}} \cdot \underbrace{\binom{23}{12}}_{\text{Formas de armar el 2° grupo}} = \boxed{\frac{33!}{23!\,10!} \cdot \frac{23!}{11!\,12!}}$$

b) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra ENTRENAMIENTO?

Permutaciones de todas las letras

$$\frac{13!}{3!\,3!\,2!}$$

Permutaciones de las E repetidas

Permutaciones de las N repetidas

Permutaciones de las T repetidas

1. De un grupo de 20 alumnos (entre los que están Santi y Juli) quiere elegirse un grupo de 8 de ellos.

a) ¿De cuántas formas puede hacerse si Santi y Juli no pueden estar juntos en el grupo?

$$\binom{18}{7}+\binom{18}{7}+\binom{18}{8} = \boxed{\frac{18!}{11!\,7!}+\frac{18!}{11!\,7!}+\frac{18!}{10!\,8!}}$$

Grupos en los que está Santi

Grupos en los que está Juli

Grupos en los que no están Santi ni Juli

b) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra REPROGRAMABLE?

Permutaciones de todas las letras

$$\frac{13!}{3!\,2!\,2!}$$

Permutaciones de las R repetidas

Permutaciones de las A repetidas

Permutaciones de las E repetidas

2 a) Encontrar la matriz $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{B.X = C}$, siendo $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{30} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 0 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 0 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 0 \\ 3a + 2c = 30 \\ 3b + 2d = 6 \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos que $X = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) Sean $\boldsymbol{A, E, D, T}$ matrices $\boldsymbol{nxn}$ tales que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{T}$ tienen inversa. Probar que si $\boldsymbol{A^{-1}.D.T = A^{-1}.E.T}$ entonces $\boldsymbol{D = E}$.

Si tenemos $A^{-1}.D.T = A^{-1}.E.T$

Multiplico por A a izquierda y por T^{-1} a derecha y obtengo: $A.A^{-1}.D.T.T^{-1} = A.A^{-1}.E.T.T^{-1}$

Es decir, $I.D.I = I.E.I$

Por lo tanto, $D = E$

2 a) Encontrar la matriz $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{B.X = C}$, siendo $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{25} & \mathbf{0} \\ \mathbf{19} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 25 & 0 \\ 19 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 5c & 5d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 25 & 0 \\ 19 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ 5c = 25 \\ 5d = 0 \\ 2a+3c = 19 \\ 2b+3d = 6 \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos que $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

b) Sean $\boldsymbol{M, E, D, T}$ matrices $\boldsymbol{nxn}$ tales que $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{T}$ tienen inversa. Probar que si $\boldsymbol{M.E.T^{-1} = M.D.T^{-1}}$ entonces $\boldsymbol{E = D}$.

Si tenemos $M.E.T^{-1} = M.D.T^{-1}$

Multiplico por M^{-1} a izquierda y por T a derecha y obtengo: $M^{-1}.M.E.T^{-1}.T = M^{-1}.M.D.T^{-1}.T$

Es decir, $I.E.I = I.D.I$

Por lo tanto, $E = D$

3 a) Usando determinantes, encontrar TODOS los valores de $\boldsymbol{k}$ para que la matriz $\boldsymbol{M}$ TENGA inversa.

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}(\mathbf{5}-\mathbf{2}\boldsymbol{k}) & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & (\boldsymbol{k}+\mathbf{2})\end{pmatrix}$$

Calcularemos el determinante por la fila 1:

$$det(M)=(5-2k)(-1)^{1+1}det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & k+2\end{pmatrix}+0.(-1)^{1+2}det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 6 & k+2\end{pmatrix}+1(-1)^{1+3}det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}$$

$$det(M)=(5-2k)(k+2)+1(6-6)=(5-2k)(k+2)\neq 0$$

Para que la matriz M tenga inversa debemos tener que $k\in\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{2},-2\right\}$

b) Calcular el determinante para $\boldsymbol{k}=\mathbf{2}$.

Para $k=2$ tenemos que $\det(M)=(5-2.2)(2+2)=4$

3 a) Usando determinantes, encontrar TODOS los valores de $\boldsymbol{k}$ para que la matriz $\boldsymbol{M}$ NO TENGA inversa.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} (\mathbf{1}-\mathbf{5}\boldsymbol{k}) & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{12} & \mathbf{2} & (\boldsymbol{k}-\mathbf{1}) \end{pmatrix}$$

Calcularemos el determinante por la fila 1:

$$det(M) = (1-5k)(-1)^{1+1} det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k-1 \end{pmatrix} + 0.(-1)^{1+2} det\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & k-1 \end{pmatrix} + 4(-1)^{1+3} det\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(M) = (1-5k)(k-1) + 1(12-12) = (1-5k)(k-1) \ = 0$$

Para que la matriz M no tenga inversa debemos tener que $k \in \left\{\frac{1}{5}, 1\right\}$

b) Calcular el determinante para $\boldsymbol{k} = -\mathbf{1}$.

Para $k = -1$ tenemos que $\det(M) = (1-5.(-1))(-1-1) = -12$

4 a) Escribir el sistema en forma matricial $AX = B$, resolverlo y expresar su solución indicando qué tipo de solución tiene:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 3z - w = 4} \\ \boldsymbol{y - z + 4w = 2} \\ \boldsymbol{x + 3y + 2z + 3w = 6} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - F_1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - F_2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x = -5z + 9w \\ y = 2 + z - 4w \end{cases}$$

$$S = \{(-5z + 9w, 2 + z - 4w, z, w), z, w \in \mathbb{R}\}$$

b) Dar dos soluciones particulares del sistema.

Si $z = w = 0$, tenemos la solución $(0,2,0,0)$

Si $z = w = 1$, tenemos la solución $(4, -1,1,1)$

4 a) Escribir el sistema en forma matricial $AX = B$, resolverlo y expresar su solución indicando qué tipo de solución tiene:

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 6z + 12w = 0} \\ \mathbf{2y + z + w = 0} \\ \mathbf{6x - 2y + 11z + 23w = 0} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 11 & 23 & 0 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) (F_3 \leftarrow F_3 + F_2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(F_1 \leftarrow \frac{1}{3} F_1\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(F_2 \leftarrow \frac{1}{2} F_2\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x = -2z - 4w \\ y = -\frac{1}{2} z - \frac{1}{2} w \end{cases}$$

$$S = \left\{\left(-2z - 4w, -\frac{1}{2} z - \frac{1}{2} w, z, w\right), z, w \in \mathbb{R}\right\}$$

b) Dar dos soluciones particulares del sistema.

Si $z = w = 0$, tenemos la solución $(0,0,0,0)$

Si $z = w = 1$, tenemos la solución $(-6, -1, 1, 1)$

5 a) Calcular los rangos de la matriz A y de la matriz ampliada del ejercicio anterior.

En base a la matriz reducida escalonada que obtuvimos podemos ver que $r(A) = r(A') = 2$

b) Con los resultados obtenidos en el inciso a), comparar los rangos y clasificar el sistema de acuerdo al teorema de Rouché-Frobenius.

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, como la matriz A y la ampliada tienen en mismo rango, el sistema es compatible. Como el rango es 2, que es menor que la cantidad de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado (lo cual es coherente con los infinitos resultados que obtuvimos en el ejercicio anterior).