1. Sean los puntos $A = (-1, 6)$ y $B = (2, 6)$.

a) Hallar la ecuación estándar de la parábola con vértice en A y foco en B. Grafique el vértice y el foco. Halle y dibuje 2 puntos, además del vértice, que estén en la parábola. Dibuje la parábola.

Como la parábola es horizontal y tiene vértice en $(-1,6)$, tenemos:

$$(y-\beta)^2 = 4c(x-\alpha)$$

$$(y-6)^2 = 4c(x-(-1))$$

Dado que la distancia entre el foco y el vértice es 3, la ecuación queda:

$$(y-6)^2 = 4.3(x+1)$$

$$\boxed{(y-6)^2 = 12(x+1)}$$

Para hallar otros dos puntos, podemos tomar $x = 2$:

$$(y-6)^2 = 12(2+1)$$

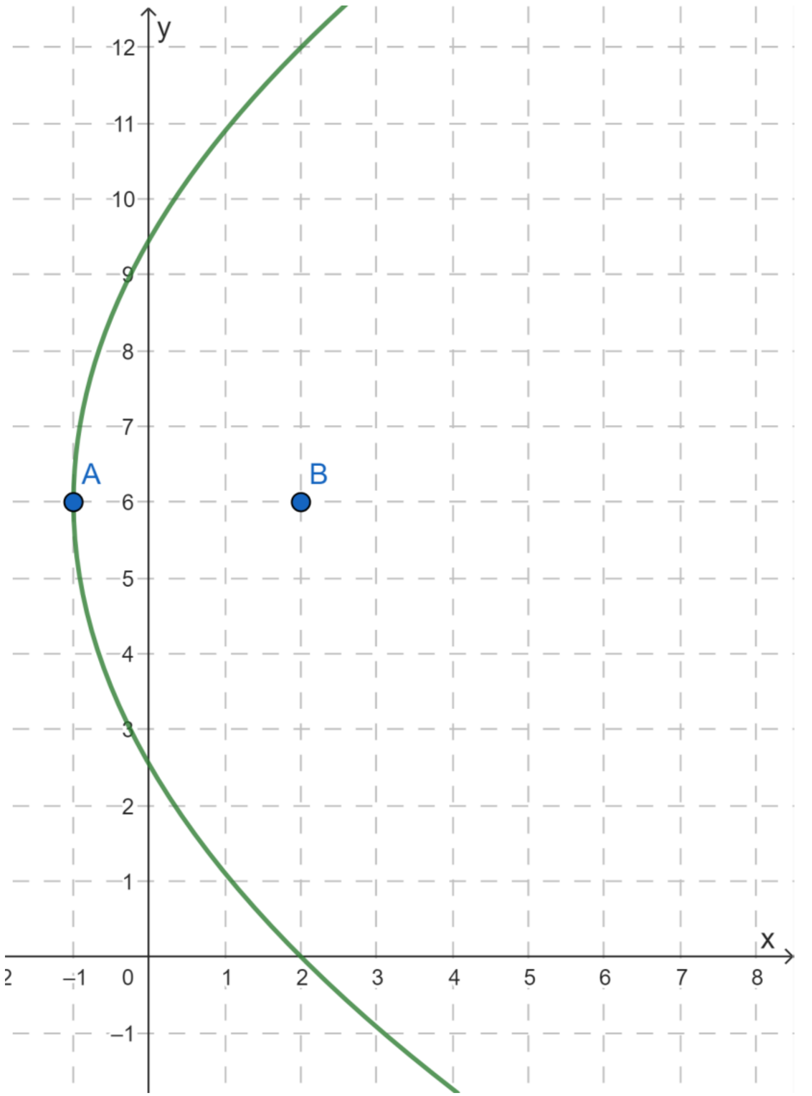
$$(y-6)^2 = 12(3)$$

$$(y-6)^2 = 36$$

$$y-6 = 6 \longrightarrow y = 12$$

$$y-6 = -6 \longrightarrow y = 0$$

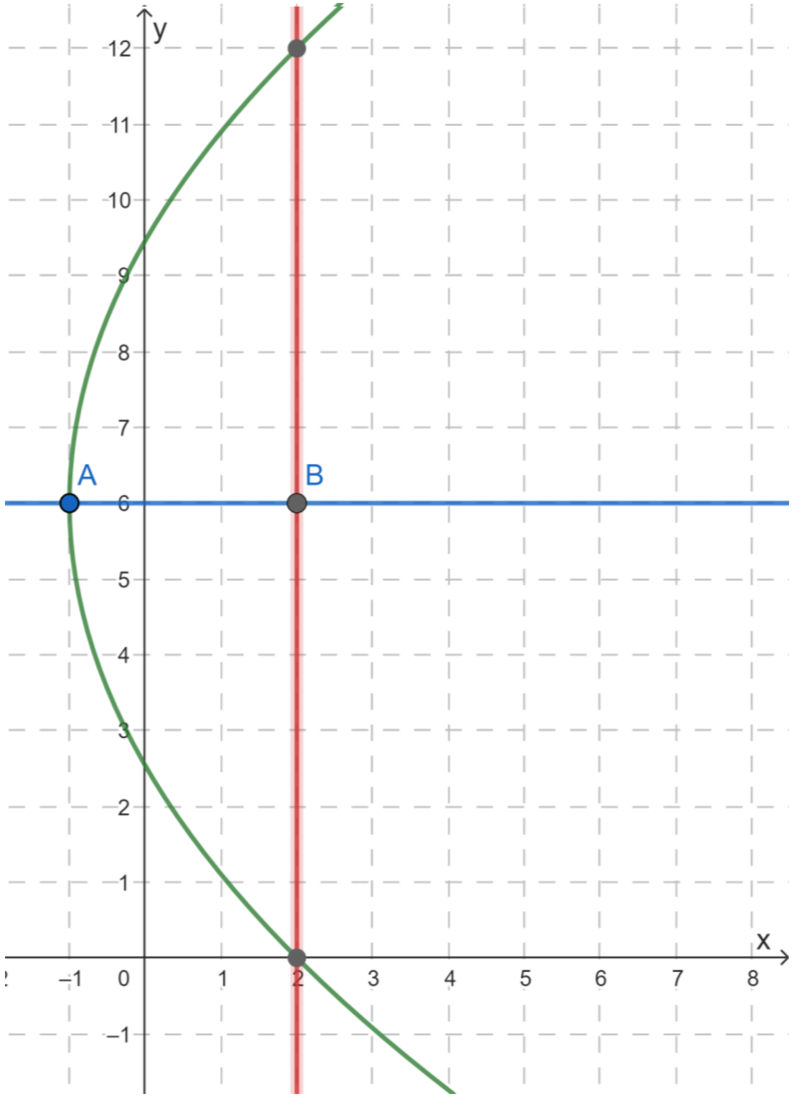
Por lo tanto otros dos puntos de la parábola son:
$P_1 = (2,12)$ y $P_2 = (2,0)$



b) Hallar la ecuación del eje de la parábola determinada en a) y también la ecuación de la recta perpendicular al eje de la parábola que pase por B.

La ecuación del eje de la parábola es $y = 6$

La ecuación de la recta perpendicular al eje de la parábola que pasa por B es $x = 2$.



1. Sean los puntos $A = (-1, 6)$ y $B = (-1, 8)$.

a) Hallar la ecuación estándar de la parábola con vértice en A y foco en B. Grafique el vértice y el foco. Halle y dibuje 2 puntos, además del vértice, que estén en la parábola. Dibuje la parábola.

Como la parábola es vertical y tiene vértice en $(-1,6)$, tenemos:

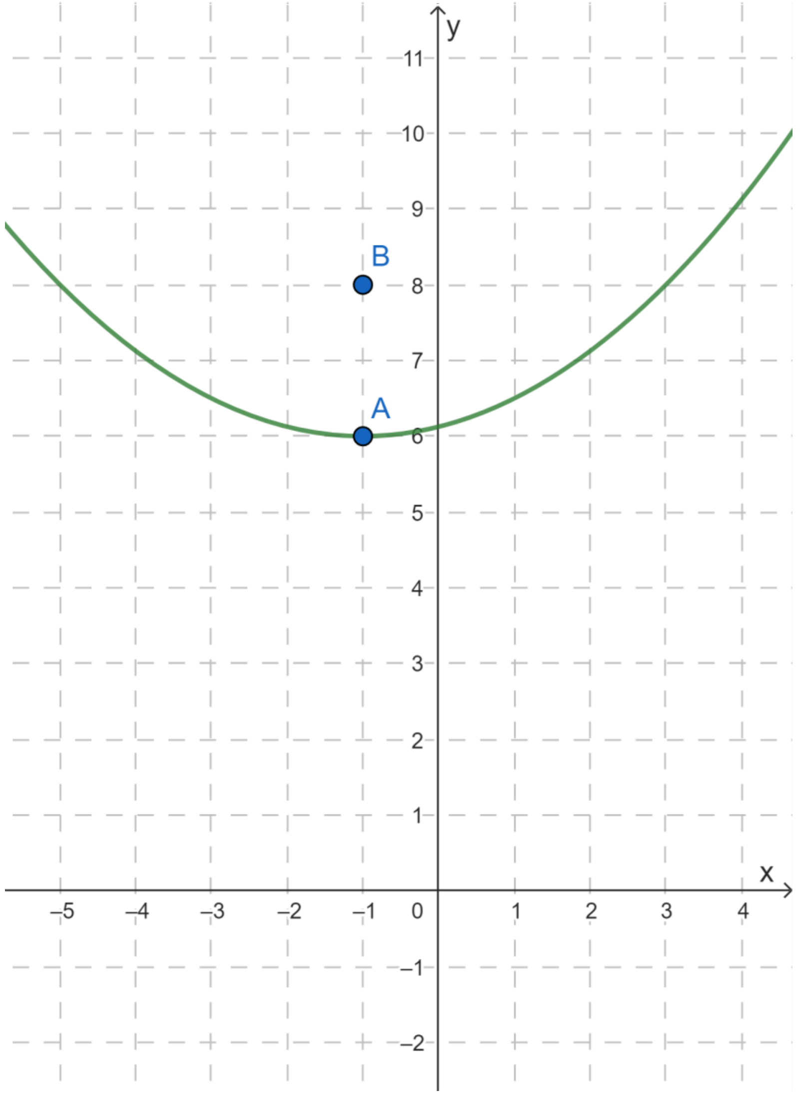
$$(x-\alpha)^2 = 4c(y-\beta)$$

$$(x-(-1))^2 = 4c(y-6)$$

Dado que la distancia entre el foco y el vértice es 2, la ecuación queda:

$$(x+1)^2 = 4.2(y-6)$$

$$\boxed{(x+1)^2 = 8(y-6)}$$



Para hallar otros dos puntos, podemos tomar $y = 8$:

$$(x+1)^2 = 8(8-6)$$

$$(x+1)^2 = 8(2)$$

$$(x+1)^2 = 16$$

$$x+1 = 4 \longrightarrow x = 3$$

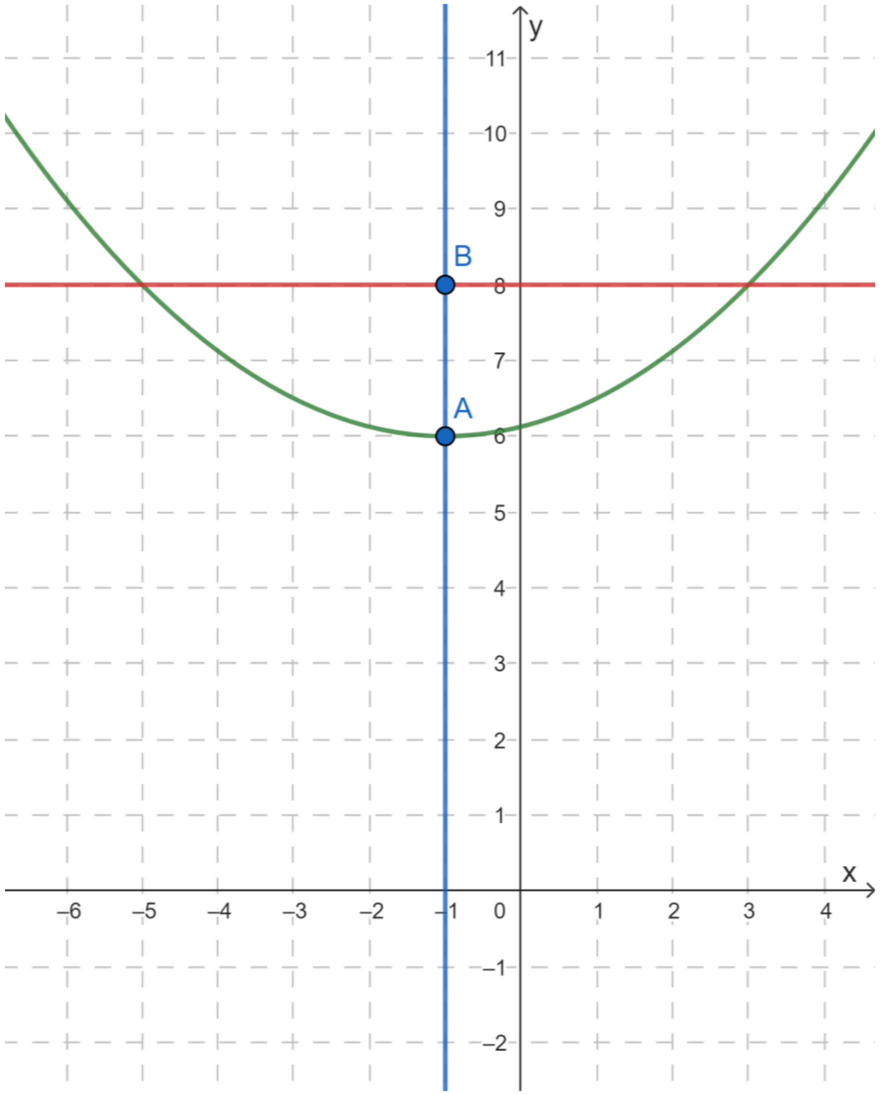
$$x+1 = -4 \longrightarrow x = -5$$

Por lo tanto otros dos puntos de la parábola son:
$P_1 = (3,8)$ y $P_2 = (-5,8)$

b) Hallar la ecuación del eje de la parábola determinada en a) y también la ecuación de la recta perpendicular al eje de la parábola que pase por B.

La ecuación del eje de la parábola es $x = -1$

La ecuación de la recta perpendicular al eje de la parábola que pasa por B es $y = 8$.



2. Dados los conjuntos $\boldsymbol{A = \{3, 1\}, B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 4j + 1 \wedge j \in \mathbb{Z}\}}$:

a) Calcular $\boldsymbol{A \cap B}$

$A = \{3,1\}$ $\quad$ $B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x = 4j + 1 \wedge j \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -11, -7, -3,1,5,9,13,17,21, \dots\}$

Podemos observar que $1 \in A \cap B$, ya que $1 \in A$ y $1 = 4.0 + 1 \in B$

Veamos si $3 \in B$: Si esto ocurriera, entonces existiría un $j \in \mathbb{Z}$ tal que $3 = 4j + 1$.
Pero entonces $j = \frac{1}{2}$, lo cual es absurdo, entonces tenemos que $3 \notin B$.

Por lo tanto $A \cap B = \{1\}$.

b) Demostrar que el conjunto $\boldsymbol{B}$ es subconjunto de los números impares.

Sea $x \in B$. Entonces sabemos que existe un $j \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 4j + 1$.

$$x = 4j + 1$$

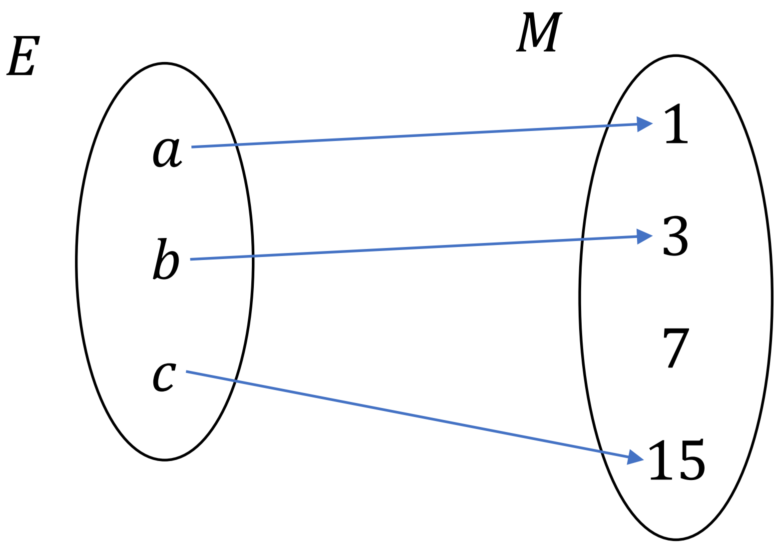
$$x = 2.2j + 1$$

Si llamamos $h = 2j$, tenemos que $h \in \mathbb{Z}$ y, además,

$$x = 2.h + 1$$

Por lo tanto probamos que x es impar y, por lo tanto, B es subconjunto de los números impares.

c) Sean los conjuntos $\boldsymbol{E = \{a, b, c\}}$ y $\boldsymbol{M = \{1, 3, 7, 15\}}$. Definir una función $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{M}$ y tal que $\boldsymbol{f(c) = 15}$. Justifique.



$f(a) = 1$

$f(b) = 3$

$f(c) = 15$

La función propuesta va de E en M y cumple que es función, ya que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio y, además, $f(c) = 15$.

2. Dados los conjuntos $\boldsymbol{A = \{-3, 1\}, B = \{x: x = 3h + 15 \wedge h \in \mathbb{Z}\}}$:

a) Calcular $\boldsymbol{A \cap B}$

$A = \{-3,1\}$ $\quad\quad$ $B = \{x: x = 3h + 15 \wedge h \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, 6,9,12,15,18,21,24, \dots\}$

Podemos observar que $-3 \in A \cap B$, ya que $-3 \in A$ y $-3 = 3.(-6) + 15 \in B$

Veamos si $1 \in B$: Si esto ocurriera, entonces existiría un $h \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = 3h + 15$.
Pero entonces $h = \frac{-14}{3}$, lo cual es absurdo, entonces tenemos que $1 \notin B$.

Por lo tanto $A \cap B = \{-3\}$.

b) Demostrar que el conjunto $\boldsymbol{B}$ es subconjunto de los múltiplos de 3.

Sea $x \in B$. Entonces sabemos que existe un $h \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 3h + 15$.

$$x = 3h + 15$$

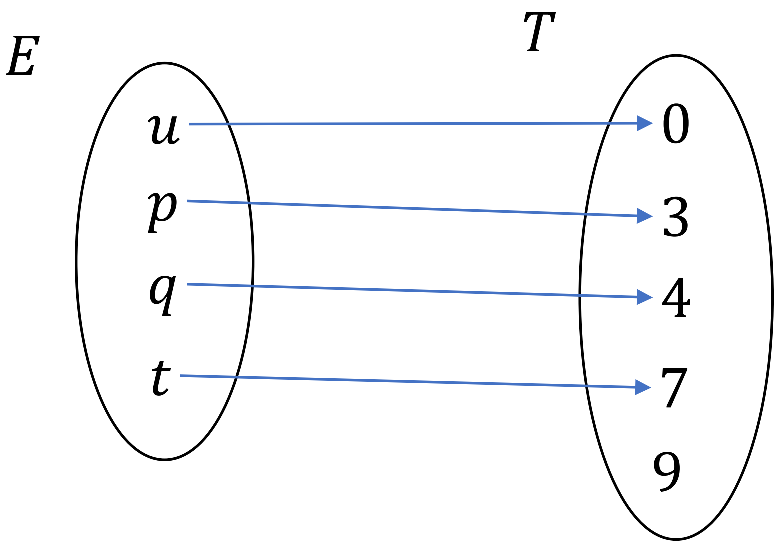
$$x = 3(h + 5)$$

Si llamamos $m = h + 5$, tenemos que $m \in \mathbb{Z}$ y, además,

$$x = 3m$$

Por lo tanto probamos que x múltiplo de 3 y, por lo tanto, B es subconjunto de los múltiplos de 3.

c) Sean los conjuntos $E = \{u, p, q, t\}$ y $T = \{0, 3, 4, 7, 9\}$. Definir una función f de E en T y tal que $f(u) = 0$. Justifique.



$f(u) = 0$

$f(p) = 3$

$f(q) = 4$

$f(t) = 7$

La función propuesta va de E en T y cumple que es función, ya que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio y, además, $f(u) = 0$.

3. a) En $\mathbb{Q}$, para $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ racionales se define la operación $\#$ por: $\boldsymbol{m\#n = 2.m + n}$.
Siendo $+$ y . las operaciones usuales en los racionales. ¿Valen en $(\mathbb{Q}, \#)$ las propiedades conmutativa y asociativa de $\#$? Justifique totalmente lo que afirma.

Propiedad conmutativa: $m\#n = n\#m$

Si tomamos $m = 2, n = 1$, tenemos que: $\left.\begin{array}{l} m\#n = 2\#1 = 2.2 + 1 = 5 \\ n\#m = 1\#2 = 2.1 + 2 = 4 \end{array}\right\}$ Como los resultados son distintos, podemos concluir que la operación # no es conmutativa en $\mathbb{Q}$.

Propiedad asociativa: $(m\#n)\#p = m\#(n\#p)$

Si tomamos $m = n = p = 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} (m\#n)\#p = (1\#1)\#1 = (2.1 + 1)\#1 = 3\#1 = 2.3 + 1 = 7 \\ m\#(n\#p) = 1\#(1\#1) = 1\#(2.1 + 1) = 1\#3 = 2.1 + 3 = 5 \end{array}\right\}$$

Como los resultados son distintos, podemos concluir que la operación # no es asociativa en $\mathbb{Q}$.

b) Si A, B y C son elementos de un álgebra de Boole, use los axiomas y teoremas que simplifican la expresión para demostrar la siguiente igualdad:

$$\mathbf{(0 + 1')'.(A.B.C)' + B = 1}$$

$$(0+1')'.(A.B.C)'+B \underset{1'=0}{=} (0+0)'.(A.B.C)'+B \underset{a+a=a}{=} (0)'.(A.B.C)'+B \underset{0'=1}{=} 1.(A.B.C)'+B \underset{(a.b)'=a'+b'}{=}$$

$$1.(A'+B'+C')+B \underset{1.a=a}{=} A'+B'+C'+B \underset{a+b=b+a}{=} A'+C'+B'+B \underset{a+a'=1}{=} A'+C'+1 \underset{a+1=1}{=} 1$$

3. a) En $\mathbb{Q}$, para $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ racionales se define la operación $\#$ por: $\boldsymbol{m\#n = 3.n + m}$.
Siendo $+$ y . las operaciones usuales en los racionales. ¿Valen en $(\mathbb{Q}, \#)$ las propiedades conmutativa y asociativa de $\#$? Justifique totalmente.

Propiedad conmutativa: $m\#n = n\#m$

Si tomamos $m = 2, n = 1$, tenemos que: $\left.\begin{array}{l} m\#n = 2\#1 = 3.1 + 2 = 5 \\ n\#m = 1\#2 = 3.2 + 1 = 7 \end{array}\right\}$ Como los resultados son distintos, podemos concluir que la operación # no es conmutativa en $\mathbb{Q}$.

Propiedad asociativa: $(m\#n)\#p = m\#(n\#p)$

Si tomamos $m = n = p = 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} (m\#n)\#p = (1\#1)\#1 = (3.1 + 1)\#1 = 4\#1 = 3.1 + 4 = 7 \\ m\#(n\#p) = 1\#(1\#1) = 1\#(3.1 + 1) = 1\#4 = 3.4 + 1 = 13 \end{array}\right\}$$

Como los resultados son distintos, podemos concluir que la operación # no es asociativa en $\mathbb{Q}$.

b) Si A, B y C son elementos de un álgebra de Boole, use los axiomas y teoremas que simplifican la expresión para demostrar la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{C.(B+0').C' + (B+B')' + A = A}$$

$$C.(B+0').C' + (B+B')' + A \underset{0'=1}{=} C.(B+1).C' + (B+B')' + A \underset{a+1=1}{=} C.1.C' + (B+B')' + A \underset{1.a=a}{=}$$

$$C.C' + (B+B')' + A \underset{a.a'=0}{=} 0 + (B+B')' + A \underset{0+a=a}{=} (B+B')' + A \underset{a+a'=1}{=} (1)' + A \underset{1'=0}{=} 0 + A \underset{0+a=a}{=} A$$

4. Sean los primeros elementos de una sucesión $-3, 0, 3, 6, 9, \ldots$ que sigue así.
a) ¿Qué tipo de sucesión es? (Aritmética o geométrica). Justifique.

La sucesión es aritmética porque hay una diferencia de 3 entre cada término a_k y a_{k+1}

b) Dar la expresión explícita del término general.

$a_n = a_1 + d(n-1) = -3 + 3(n-1)$ para $n \in \mathbb{N}$

c) Hallar la suma de los 48 primeros términos.

Recordemos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_0 + d(k-1) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{48} -3 + 3(k-1) = \frac{48(-3 + (-3 + 3.47))}{2} = \frac{48(-3 - 3 + 141)}{2} = \frac{48(-6 + 141)}{2}$$

$$= \frac{48(135)}{2} = 3240$$

4. Sean los primeros elementos de una sucesión $-4, 0, 4, 8, 12$, … que sigue así.

a) ¿Qué tipo de sucesión es? (Aritmética o geométrica). Justifique.

La sucesión es aritmética porque hay una diferencia de 4 entre cada término a_k y a_{k+1}

b) Dar la expresión explícita del término general.

$a_n = a_1 + d(n-1) = -4 + 4(n-1)$ para $n \in \mathbb{N}$

c) Hallar la suma de los 56 primeros términos.

Recordemos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_0 + d(k-1) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{56} -4 + 4(k-1) = \frac{56(-4 + (-4 + 4.55))}{2} = \frac{56(-4 - 4 + 220)}{2} = \frac{56(-8 + 220)}{2}$$

$$= \frac{56(212)}{2} = 5936$$