Sucesiones aritméticas

$7,12,17,22,27,32,\ldots \longrightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ a_k = a_{k-1} + 5, para\ k \geq 2 \end{cases} \longrightarrow a_n = 7 + 5(n-1)$

$-3,1,5,9,13,17,\ldots \longrightarrow \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_k = a_{k-1} + 4, para\ k \geq 2 \end{cases} \longrightarrow a_n = -3 + 4(n-1)$

$15,13,11,9,7,5,3,1,-1,\ldots \longrightarrow \begin{cases} a_1 = 15 \\ a_k = a_{k-1} - 2, para\ k \geq 2 \end{cases} \longrightarrow a_n = 15 - 2(n-1)$

Una sucesión es **aritmética** si cada término se obtiene sumando una constante d al término anterior.

Se define recursivamente como $\begin{cases} a_1 \\ a_k = a_{k-1} + d, \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$

Su definición explícita es: $a_n = a_1 + d(n-1)$

Si sabemos que en una sucesión aritmética el primer término es 1 y el término treinta y cinco es 18, ¿cuál es la definición recursiva de la sucesión?

$a_1 = 1 \qquad a_{35} = a_1 + d(35-1)$

$$18 = 1 + d(34)$$

$$18 - 1 = 34d$$

$$17 = 34d$$

$$\frac{17}{34} = d$$

$$\frac{1}{2} = d$$

$$\boxed{\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_k = a_{k-1} + \dfrac{1}{2} \end{cases}}$$

Si sabemos que en una sucesión aritmética $a_5 = 11$ y $a_{21} = -37$, ¿cuál es la definición explícita de la sucesión?

$$a_5 = a_1 + d(5-1) \qquad a_{21} = a_1 + d(21-1)$$

$$a_5 = a_1 + d.4 \qquad a_{21} = a_1 + d.20$$

$$11 = a_1 + d.4 \qquad -37 = a_1 + d.20$$

$$\begin{cases} 11 = a_1 + d.4 \\ -37 = a_1 + d.20 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 11 - 4d = a_1 & (1) \\ -37 - 20d = a_1 & (2) \end{cases}$$

Si igualamos las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$11 - 4d = -37 - 20d$$

$$11 + 37 = -20d + 4d$$

$$48 = -16d$$

$$-\frac{48}{16} = d$$

$$-3 = d$$

Al reemplazar el valor de d obtenido en (1) nos queda:

$$11 - 4(-3) = a_1$$

$$11 + 12 = a_1$$

$$23 = a_1$$

Por lo tanto la definición explícita de la sucesión es $a_n = 23 - 3(n-1)$

Sucesiones geométricas

$2,6,18,54,162,\ldots \longrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_k = 3.a_{k-1}, para\ k \geq 2 \end{cases} \longrightarrow a_n = 2.3^{n-1}$

$3,(-6),12,(-24),48,\ldots \longrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_k = (-2).a_{k-1}\ , para\ k \geq 2 \end{cases} \longrightarrow a_n = 3.(-2)^{n-1}$

$1,2,4,8,16,32,64,\ldots \longrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_k = 2.a_{k-1}, para\ k \geq 2 \end{cases} \longrightarrow a_n = 1.2^{n-1}$

Una sucesión es **geométrica** si cada término se obtiene multiplicando por una constante r al término anterior. Dicha constante se conoce como **razón**.

Se define recursivamente como $\begin{cases} a_1 \\ a_k = r.a_{k-1}, \quad \text{para}\ n \geq 2 \end{cases}$

Su definición explícita es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Hallar el séptimo término de la sucesión geométrica cuyos primeros términos son: $-2, 4, -8, 16, \ldots$

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_k = (-2).\, a_{k-1}, \qquad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

$$a_n = (-2) \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^n$$

$$\boxed{a_7 = (-2)^7 = -128}$$

En una sucesión geométrica el tercer término es $a_3 = \frac{3}{4}$ y el cuarto término es $a_4 = \frac{3}{8}$. Hallar la razón y el primer término de la sucesión.

$$\begin{cases} a_1 \\ a_k = r.\, a_{k-1}, \qquad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

$$a_4 = r.\, a_3$$

$$\frac{3}{8} = r.\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$r = \frac{3}{8} : \frac{3}{4}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{2}}$$

$$a_3 = a_1.\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

$$\frac{3}{4} = a_1.\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{3}{4} = a_1.\frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{3}{4} : \frac{1}{4}$$

$$\boxed{a_1 = 3}$$

$$\boxed{a_n = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

Notación Sigma

$a_n = 2 + 3(n-1), \qquad n \geq 1$

¿Cuánto nos da la suma de los 5 primeros términos?

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2 + 3 = 5 \\ a_3 &= 2 + 3.2 = 8 \\ a_4 &= 2 + 3.3 = 11 \\ a_5 &= 2 + 3.4 = 14 \end{aligned}\right\} \; a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$$

¿Cuánto nos da la suma de los k primeros términos?

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2 + 3 = 5 \\ a_3 &= 2 + 3.2 = 8 \\ \\ a_k &= 2 + 3.(k-1) \end{aligned}\right\} \; a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = ??$$

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} 2 + 3(n-1)$$

La suma de los k primeros términos de una sucesión de término general a_n se escribe como:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

$$\sum_{j=1}^{6} 3j = 3.1 + 3.2 + 3.3 + 3.4 + 3.5 + 3.6 = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 = 63$$

$$\sum_{h=1}^{4} 2^h = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

$$\sum_{i=1}^{5} -1 + 2i = (-1 + 2.1) + (-1 + 2.2) + (-1 + 2.3) + (-1 + 2.4) + (-1 + 2.5) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$\sum_{n=1}^{12} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 36$$

$$\sum_{j=1}^{5} 3^j = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 363$$

$$\sum_{i=1}^{6} -2.i = -2.1 - 2.2 - 2.3 - 2.4 - 2.5 - 2.6 = -2 - 4 - 6 - 8 - 10 - 12 = -42$$

Propiedades

$$\sum_{n=1}^{k} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{k} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{k} a_n - b_n = \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{k} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{k} c.a_n = c.\sum_{n=1}^{k} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{k} c = k.c$$

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{n+1}{2} + n = \sum_{n=1}^{4} \frac{n+1}{2} + \sum_{n=1}^{4} n = \frac{1+1}{2} + \frac{2+1}{2} + \frac{3+1}{2} + \frac{4+1}{2} + 1 + 2 + 3 + 4 =$$

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + 1 + 2 + 3 + 4 = 17$$

$$\sum_{n=1}^{5} 3.\frac{n+1}{2} = 3.\sum_{n=1}^{5} \frac{n+1}{2} = 3\left(\frac{1+1}{2} + \frac{2+1}{2} + \frac{3+1}{2} + \frac{4+1}{2} + \frac{5+1}{2}\right) =$$

$$3\left(\frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2}\right) = 3.10 = 30$$

$$\sum_{n=1}^{25} -2 = 25(-2) = -50$$

$$\sum_{h=1}^{100} h = \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100}_{101} = 5050 = 50.101$$

$$\sum_{h=1}^{100} h + \sum_{h=1}^{100} h = + \begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 4 + 3 + 2 + 1 \end{array} = 100.101$$

Si tomamos la mitad, tenemos entonces que $\sum_{h=1}^{100} h = \frac{100}{2}.101$

$$\sum_{n=1}^{50} 1 + 2n = \underbrace{3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 95 + 97 + 99 + 101}_{104} = 25.104 = 2600$$

$$\sum_{n=1}^{50} 1 + 2n + \sum_{n=1}^{50} 1 + 2n = + \begin{array}{c} 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 95 + 97 + 99 + 101 \\ 101 + 99 + 97 + 95 + \cdots + 9 + 7 + 5 + 3 \end{array} = 50.104$$

Si tomamos la mitad, tenemos entonces que $\sum_{n=1}^{50} 1 + 2n = \frac{50}{2}.104$

$$\sum_{k=1}^{n} a_1 + (k-1)d = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (k-3)d) + (a_1 + (k-2)d) + (a_1 + (k-1)d) = ??$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_1 + (k-1)d + \sum_{k=1}^{n} a_1 + (k-1)d = \begin{matrix} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\ (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \end{matrix}$$

$$= n(a_1 + a_1 + (n-1)d) = n(a_1 + a_n)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_1 + (k-1)d = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{30} 2 + 5(k-1) = \frac{30.(2+147)}{2} = 2235$$

$$\sum_{k=1}^{30} 2 + 5(k-1) = \sum_{k=1}^{30} 2 + 5\sum_{k=1}^{30} k - 1 = \sum_{k=1}^{30} 2 + 5\left(\sum_{k=1}^{30} k - \sum_{k=1}^{30} 1\right) = 2.30 + 5\left(\frac{30.31}{2} - 30.1\right) = 60 + 5(465 - 30) = 2235$$

$$\sum_{k=1}^{10} 3.2^{k-1} = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1536 = 3069$$

$$\sum_{k=1}^{10} 3.2^{k-1} - 2.\sum_{k=1}^{10} 3.2^{k-1} = \begin{array}{l} 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1536 \\ - \\ 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1536 + 3072 \end{array} = 3 - 3072 = -3069$$

$$(1-2)\sum_{k=1}^{10} 3.2^{k-1} = -3069 \longrightarrow -\sum_{k=1}^{10} 3.2^{k-1} = -3069 \longrightarrow \sum_{k=1}^{10} 3.2^{k-1} = 3069$$

$$(1-r)\sum_{k=1}^{n} a_1 . r^{k-1} = (a_1 + a_1 r + \cdots + a_1 r^{n-1}) - (a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^n) = a_1 - a_1 r^n = a_1\,(1 - r^n)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_1 . r^{k-1} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}$$

$$\sum_{k=1}^{14} 4.3^{k-1} = \frac{4.(1-3^{14})}{1-3} = \frac{4(1-4.782.969)}{-2} = 9.565.936$$

$$\sum_{k=7}^{15} 7.2^{n-1} = \sum_{k=1}^{15} 7.2^{n-1} - \sum_{k=1}^{6} 7.2^{n-1} = \frac{7.(1-2^{15})}{1-2} - \frac{7.(1-2^{6})}{1-2} =$$

$$\frac{7(1-32768)}{-1} - \frac{7(1-64)}{-1} = \frac{7(-32767)}{-1} - \frac{7(-63)}{-1} = 229369 - 441 = 228928$$