$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_1 + (k-1)d = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_1 . r^{k-1} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}}$$

$$\sum_{k=1}^{14} 4.3^{k-1} = \frac{4.(1 - 3^{14})}{1 - 3} = \frac{4(1 - 4.782.969)}{-2} = 9.565.936$$

$$\sum_{k=7}^{15} 7.2^{n-1} = \sum_{k=1}^{15} 7.2^{n-1} - \sum_{k=1}^{6} 7.2^{n-1} = \frac{7.(1 - 2^{15})}{1 - 2} - \frac{7.(1 - 2^{6})}{1 - 2} =$$

$$\frac{7(1 - 32768)}{-1} - \frac{7(1 - 64)}{-1} = \frac{7(-32767)}{-1} - \frac{7(-63)}{-1} = 229369 - 441 = 228928$$

La suma de los 41 primeros términos de una sucesión aritmética de diferencia (-3) es igual a (-2050). HALLE EL PRIMER TÉRMINO ESCRIBIENDO TODOS LOS PASOS PARA LLEGAR A LA RESPUESTA.

Como sabemos que las sucesiones aritméticas con diferencia -3 son de la forma $a_n = a_1 + (-3)(n-1)$, para todo $n \geq 1$ y sabemos, además, que su suma hasta el término 41 es:

$$\sum_{n=1}^{41} a_n = \frac{41(a_1 + a_{41})}{2}$$

Tenemos, entonces,

$$\sum_{n=1}^{41} a_n = \frac{41(a_1 + a_1 + (-3).40)}{2}$$

$$-2050 = \frac{41(2a_1 - 120)}{2}$$

$$-2050 = 41(a_1 - 60)$$

$$-\frac{2050}{41} = a_1 - 60$$

$$-50 + 60 = a_1$$

Por lo tanto, $a_1 = 10$

Matemática I – Comisión 2B

Hallar la definición explícita de una sucesión aritmética que cumpla que:

$$a_{81} = 43 \quad y \quad a_{33} = 19$$

Mostrar todos los pasos para llegar a la respuesta

Como la sucesión es aritmética, sabemos que es de la forma: $a_n = a_1 + d(n-1)$

$$\begin{cases} a_{81} = a_1 + d(81-1) \\ a_{33} = a_1 + d(33-1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 43 = a_1 + d.80 \\ 19 = a_1 + d.32 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 43 - 80d = a_1 & (1) \\ 19 - 32d = a_1 & (2) \end{cases}$$

Si igualamos las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$43 - 80d = 19 - 32d$$

$$43 - 19 = 80d - 32d$$

$$24 = 48d$$

$$\frac{1}{2} = \frac{24}{48} = d$$

Si reemplazamos el valor de d hallado en (2) tenemos:

$$19 - 32.\frac{1}{2} = a_1$$

$$19 - 16 = a_1$$

$$3 = a_1$$

Por lo tanto la definición explícita de la sucesión es: $a_n = 3 + \frac{1}{2}(n-1)$

Resolver mostrando todos los pasos para llegar a la respuesta:

Matemática I – Comisión 2B

Hallar los valores de a_2, a_3 y la razón de la sucesión geométrica que cumple: $a_1 = -14$ y $a_4 = \frac{-189}{4}$

Como es una sucesión geométrica, tenemos que $a_n = a_1 . r^{n-1}$. Reemplazando por $n = 4$, tenemos:

$$a_4 = a_1 r^3 \longrightarrow -\frac{189}{4} = -14 . r^3 \longrightarrow -\frac{189}{4} : -14 = r^3 \longrightarrow \frac{27}{8} = r^3 \longrightarrow \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = r \longrightarrow \frac{3}{2} = r$$

$$\boxed{a_n = -14 . \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{14.3}{2} = -21}$$

$$\boxed{a_3 = -\frac{14.9}{4} = -\frac{63}{2}}$$

Indica la expresión correcta en notación sigma para la siguiente suma:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}=$$

- [ ] Opción 1

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$$ ✗

- [ ] Opción 2

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^k}$$ ✗

- [ ] Opción 3

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k$$ ✓

- [ ] Ninguna de las otras opciones

Dada la sucesión $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{6^{n-1}}}$ para $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}, n \geq 1}$. ¿Qué tipo de sucesión es? Hallar los primeros 5 términos.

Observemos que podemos escribir la sucesión como: $a_n = \frac{1}{6^{n-1}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ y de este modo podemos concluir que es una sucesión geométrica.

$$a_1 = \frac{1}{6^{1-1}} = \frac{1}{6^0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{6^{2-1}} = \frac{1}{6^1} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = \frac{1}{6^{3-1}} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$a_4 = \frac{1}{6^{4-1}} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

$$a_5 = \frac{1}{6^{5-1}} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$$

Hallar el término general de la sucesión cuyos primeros términos son: $-\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{7}{27}, \frac{10}{81}, \ldots$

Podemos observar que la sucesión cumple las siguientes reglas:

- Alterna signos (entonces para pasar de un término al otro multiplicamos por -1) $\longrightarrow$ $a_n = (-1)^n \ldots .$
- En el denominador, hay potencias de 3 $\longrightarrow$ $a_n = (-1)^n \frac{?}{3^n}$
- Los numeradores van sumando 3 en cada término $\longrightarrow$ $\boxed{a_n = (-1)^n \frac{1 + 3(n-1)}{3^n}}$

Hallar la forma explícita de la sucesión aritmética b_n que verifica que $b_{11} = \frac{31}{3}$ y $b_{16} = \frac{91}{3}$

Como la sucesión es aritmética sabemos que $b_n = b_1 + d(n-1)$

En particular, para b_{11} y b_{16} tenemos que:

$$\begin{cases} b_{11} = b_1 + d(11-1) \\ b_{16} = b_1 + d(16-1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{31}{3} = b_1 + d.10 \\ \frac{91}{3} = b_1 + d.15 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{31}{3} - 10d = b_1 & (1) \\ \frac{91}{3} - 15d = b_1 & (2) \end{cases}$$

Si igualo las ecuaciones (1) y (2) obtengo:

$$\frac{31}{3} - 10d = \frac{91}{3} - 15d \longrightarrow -10d + 15d = \frac{91}{3} - \frac{31}{3} \longrightarrow 5d = \frac{60}{3} \longrightarrow 5d = 20 \longrightarrow \boxed{d = 4}$$

Si reemplazo ahora en (1) tenemos: $\frac{31}{3} - 10.4 = b_1 \longrightarrow \frac{31}{3} - 40 = b_1 \longrightarrow \boxed{-\frac{89}{3} = b_1}$

La forma explícita de la sucesión es: $b_n = -\frac{89}{3} + 4(n-1)$

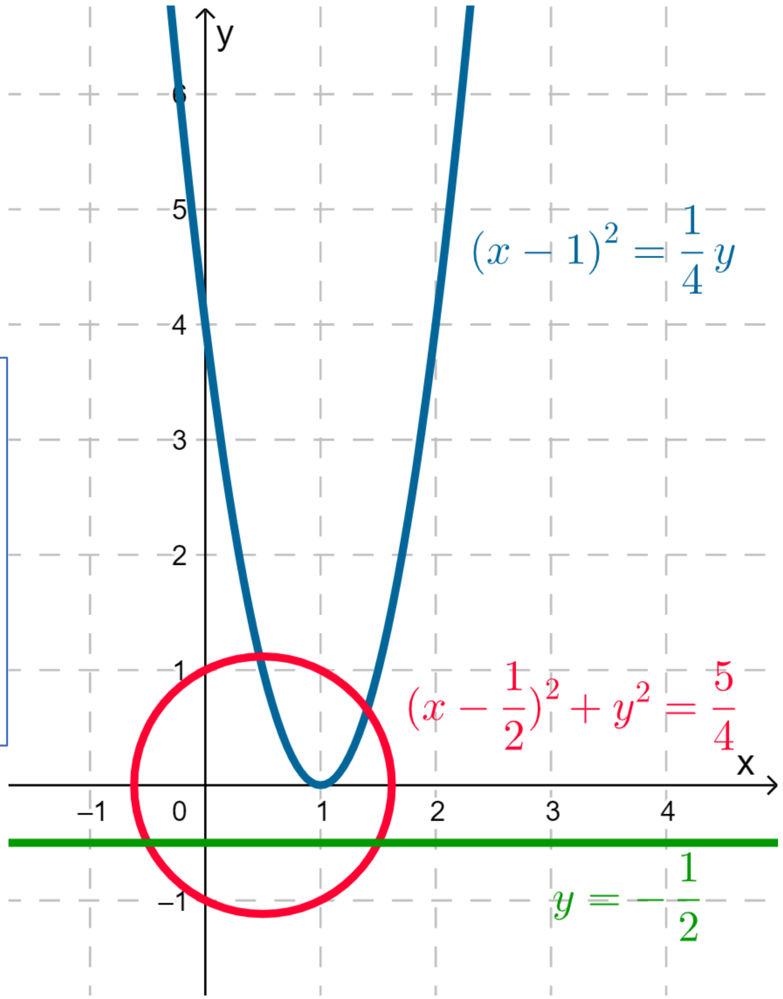
Hallar la ecuación estándar y dar los elementos de las cónicas representadas por las siguientes ecuaciones. Graficar.

$$4(x-1)^2 = y$$

$$\boxed{(x-1)^2 = \frac{1}{4}y}$$

$$(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$$

- Parábola vertical (se abre hacia arriba)
- $4p = \frac{1}{4}$, por lo que $p = \frac{1}{16}$
- Vértice $(1,0)$
- Foco $\left(1.\frac{1}{16}\right)$
- Recta directriz: $y = -\frac{1}{16}$



$$x^2 - x = 1 - y^2$$

$$\underbrace{x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - y^2$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 1 - y^2$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

- Circunferencia con centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$
- Radio $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Hallar la ecuación de una recta que corte solo a una de las cónicas.

La recta $y = -\frac{1}{2}$ corta solamente a la circunferencia.

1. Hallar la ecuación estándar de la parábola de eje focal paralelo al eje x, que tiene como vértice al punto $(-2, 1)$ y contiene al punto $(0, 3)$.

Como tiene eje focal paralelo al eje x, sabemos que la parábola será horizontal y por tener vértice en $(-2,1)$, tendrá una ecuación de la forma:

$$(y-1)^2 = 4p(x+2)$$

Como la parábola pasa por el punto $(0,3)$, tenemos:

$$(3-1)^2 = 4p(0+2)$$
$$4 = 8p$$
$$\frac{1}{2} = p$$

Por lo tanto la parábola tiene como ecuación estándar:

$$\boxed{(y-1)^2 = 4.\frac{1}{2}(x+2)}$$

2. Determinar si la recta de ecuación $x + y = 5$ se interseca con la parábola.

$$\begin{cases} (y-1)^2 = 4.\frac{1}{2}(x+2) \\ x+y=5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 4.\frac{1}{2}(x+2) & (1) \\ y = 5-x & (2) \end{cases}$$

Reemplazo (2) en (1):

$$(5-x-1)^2 = 2(x+2)$$
$$(4-x)^2 = 2(x+2)$$
$$16 - 8x + x^2 = 2x + 4$$
$$x^2 - 10x + 12 = 0$$

Aplico Bhaskara para hallar las soluciones:

$$x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.1.12}}{2.1}$$
$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-48}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{2}$$

$$x_1 = \frac{10+\sqrt{52}}{2}$$
$$x_2 = \frac{10-\sqrt{52}}{2}$$

Si $x = \frac{10+\sqrt{52}}{2}$, entonces por (2), $y = 5 - \frac{10+\sqrt{52}}{2}$

Si $x = \frac{10-\sqrt{52}}{2}$, entonces por (2), $y = 5 - \frac{10-\sqrt{52}}{2}$

Por lo tanto la parábola interseca en dos puntos a la recta.

3. Hallar la ecuación de una recta que sea perpendicular a la recta del ítem anterior y que contenga al foco de la parábola:

La recta anterior dada en forma explícita es: $y = -x + 5$ por lo que podemos ver que tiene pendiente $m_1 = -1$

Para que una recta sea perpendicular debe tener pendiente 1.

Como el foco de la parábola es el punto $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, podemos construir la recta como:

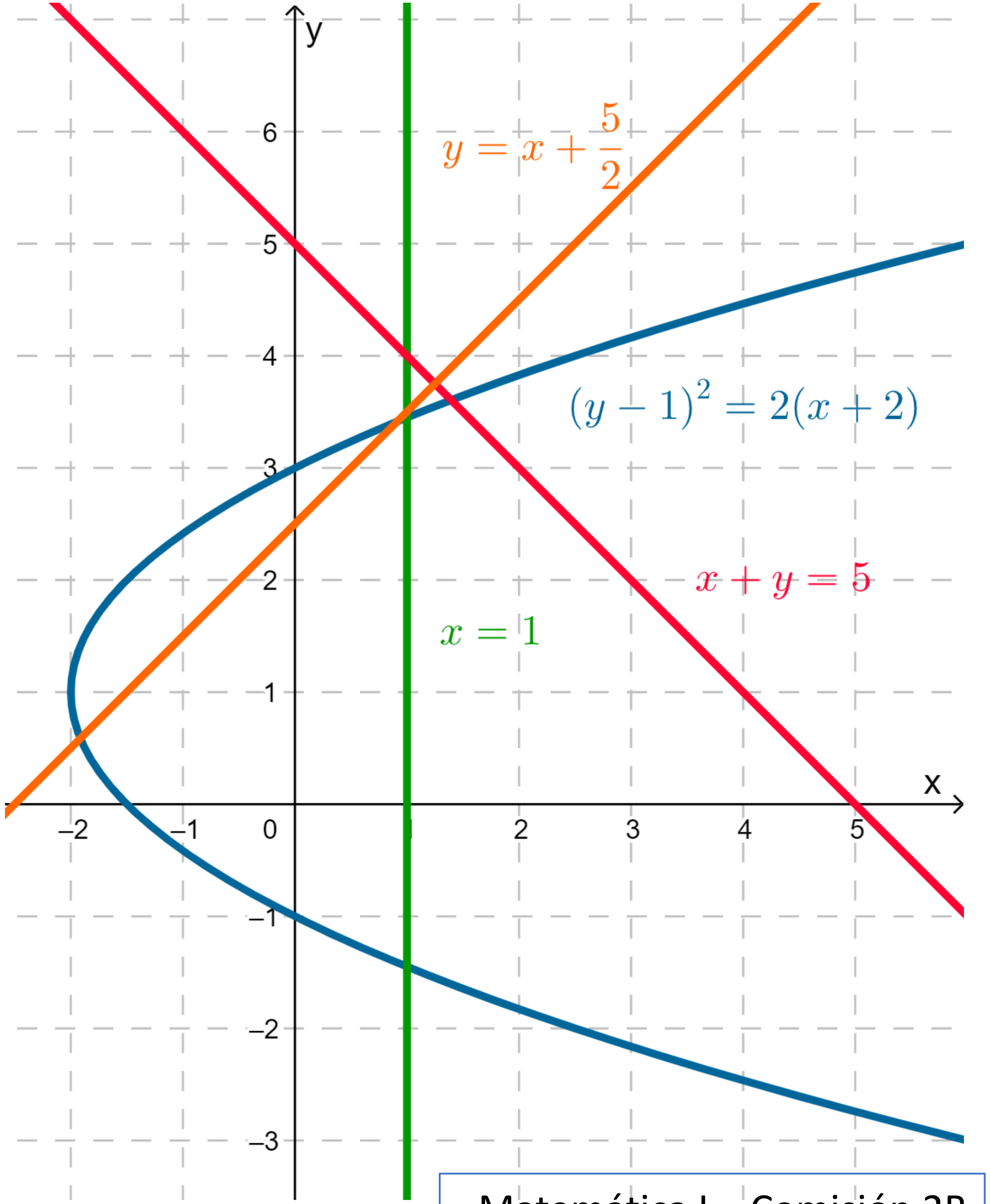
$$\boxed{y - 1 = 1\left(x + \frac{3}{2}\right)}$$

$$y = x + \frac{3}{2} + 1$$

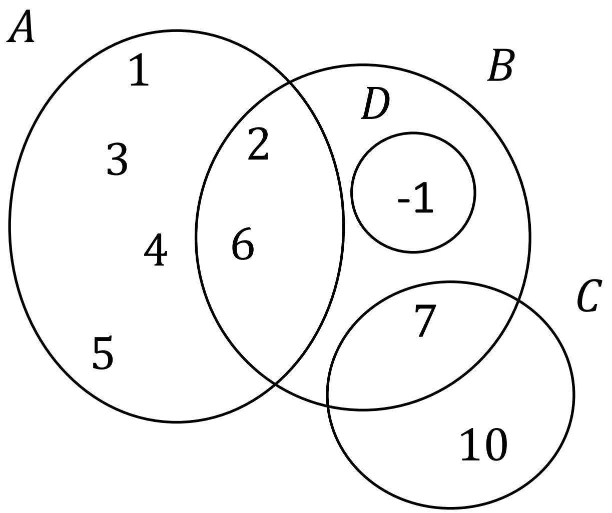
$$\boxed{y = x + \frac{5}{2}}$$

4. Hallar la ecuación de una recta que sea paralela a la directriz de la parábola y que se interseque con ella en dos puntos:

Como la directriz de la parábola es $x = -\frac{5}{2}$, una recta paralela que corte a la parábola en dos puntos es, por ejemplo, $x = 1$.



Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 6\}$ y $B = \{-1, 2, 6, 7\}$,



Hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $B - A$

$A \cap B = \{2,6\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,-1\}$

$A - B = \{1,3,4,5\}$

$B - A = \{-1,7\}$

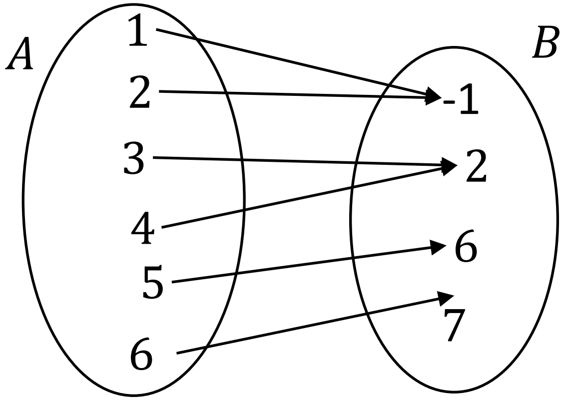
Hallar un conjunto C tal que $C \cap A = \emptyset$. Ese conjunto C, ¿es el único que verifica esa condición?

Podemos tomar $C = \{7,10\}$ y cumple que $C \cap A = \emptyset$. Sin embargo, no es el único conjunto que verifica esa condición.

Hallar un conjunto D tal que $\mathrm{D} \subseteq (B - A)$. Ese conjunto D, ¿es el único que verifica esa condición?

Podemos tomar $D = \{-1\}$ y cumple que $D \subseteq B - A$. Sin embargo, no es el único conjunto que verifica esa condición, también los conjuntos $\{7\}$ y $= \{-1,7\}$ la verifican.

Definir una función $f: A \to B$



Hallar el dominio de la función dada por $h(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x(x^2-9)}$

Para que un valor esté en el dominio de la función, se debe poder evaluar en la misma. Analicemos qué restricciones tiene la función:

Como la raíz cuadrada solo se puede evaluar en valores mayores o iguales que 0, necesitamos tomar valores $x \geq 2$.

$$h(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x(x^2-9)}$$

Si $x = 0$, el denominador se hace 0, entonces debemos evitar este valor.

Si $x = 3$ o $x = -3$ el denominador se hace 0, entonces debemos evitar estos valores.

Por lo tanto, el dominio serán los números reales mayores o iguales que 2, que no sean 0,-3 o 3 (como 0 y -3 ya son menores que 2, no los incluye). Es decir, nos quedan los valores del conjunto $[2,3) \cup (3, \infty)$

Escribir por comprensión el conjunto M_{24} de los múltiplos de 24 y el conjunto M_6 de los múltiplos de 6. Probar que $M_{24} \subseteq M_6$ y que $M_{24} \neq M_6$.

$$M_{24} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 24.m, con\ m \in \mathbb{Z}\}$$

$$M_6 = \{y \in \mathbb{Z} : y = 6.n, con\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Veamos que $M_{24} \subseteq M_6$. Para esto, tomemos un elemento $x \in M_{24}$

Como $x \in M_{24}$, tenemos que $x = 24.m$, para algún $m \in \mathbb{Z}$

$$x = 24.m$$

$$x = 6.4.m$$

Si $n = 4m$, sabemos que como $4, m \in \mathbb{Z}$, entonces $n \in \mathbb{Z}$ y nos queda:

$$x = 6.n$$

Por lo tanto, $x \in M_6$

Sin embargo, $M_{24} \neq M_6$, ya que $12 \in M_6$, pero $12 \notin M_{24}$.

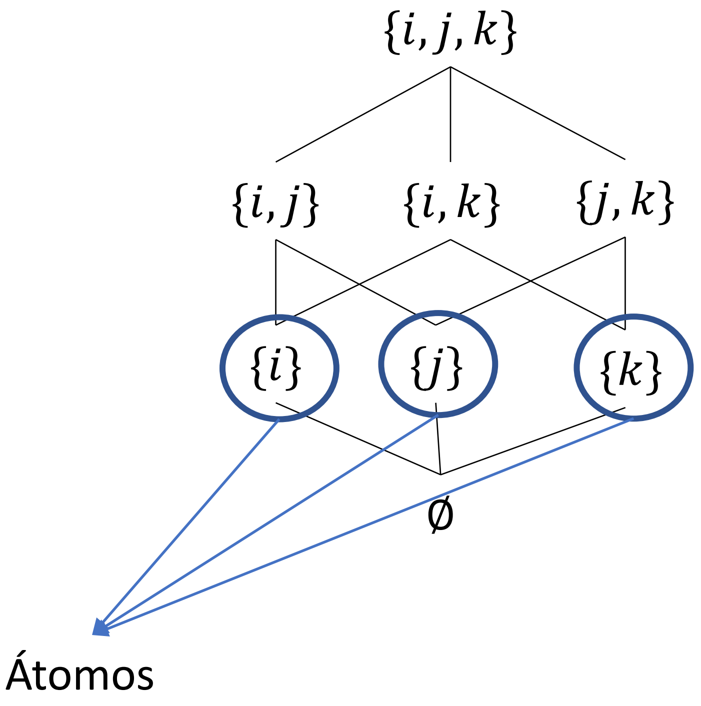
Dado el conjunto $A = \{i, j, k\}$, definir las operaciones ínfimo, supremo y complemento, y los elementos $0, 1$ para que $P(A)$ resulte un álgebra de Boole. Hacer el diagrama de Hasse que lo representa e indicar sus átomos.

Si $A = \{i, j, k\}$, entonces $P(A) = \{\emptyset, \{i\}, \{j\}, \{k\}, \{i, j\}, \{i, k\}, \{j, k\}, \{i, j, k\}\}$

Definiremos como ínfimo a la intersección de conjuntos, como supremo la unión de conjuntos y como complemento el complemento de conjuntos.

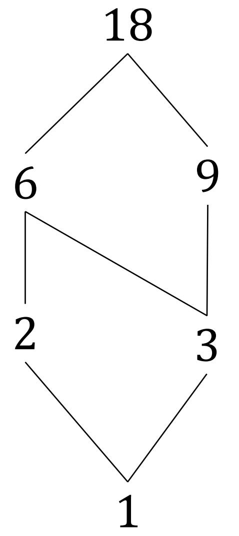
El primer elemento será $\emptyset$ y el último elemento será $\{i, j, k\}$

El diagrama de Hasse es:



Consideremos el conjunto de divisores positivos de 18, con las operaciones mcd y mcm. ¿Es un álgebra de Boole? ¿Por qué?

Divisores positivos de 18: $1,2,3,6,9,18$



No forma un álgebra de Boole, porque el 3 no tiene complemento. Si lo tuviera, tendría que haber un elemento a tal que $mcd(a,3) = 1$ y $mcm(a,3) = 18$, pero eso no ocurre para ningún elemento.

Dados x, y en un álgebra de Boole B, simplificar la expresión $[(x \vee y')'] \vee y'$. Justificar.

Por las reglas de De Morgan, tenemos que $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, es decir,

$$[(x \vee y')'] \vee y' = [x' \wedge (y')'] \vee y'$$

Como sabemos que $(a')' = a$, entonces obtenemos:

$$[(x \vee y')'] \vee y' = [x' \wedge y] \vee y'$$

Dado que la operación $\vee$ distribuye sobre la operación $\wedge$, nos queda:

$$[(x \vee y')'] \vee y' = (x' \vee y') \wedge (y \vee y')$$

Por propiedades del complemento tenemos que $y \vee y' = 1$

$$[(x \vee y')'] \vee y' = (x' \vee y') \wedge 1$$

Y, dado que siempre tenemos que $a \wedge 1 = a$, obtenemos:

$$[(x \vee y')'] \vee y' = x' \vee y'$$

Que es la simplificación de la expresión.