Determinantes

El determinante de una matriz es un número que se asigna a matrices **cuadradas** $(n\ x\ n)$.

- Si $A = (-3)$ entonces $|A| = -3$
- Si $A = (a_{11})$ entonces $|A| = a_{11}$

El símbolo $|A|$ hace referencia al determinante en este contexto, no al valor absoluto

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $|A| = 1.(-1)^{1+1}.|3| + (-2).(-1)^{1+2}.|-4| = 1.3 - 2.(-4) = 3 + 8 = 11$
- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ entonces $|A| = a_{11}.(-1)^{1+1}.|a_{22}| + (a_{12}).(-1)^{1+2}.|a_{21}| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Si elegimos cualquier fila o columna el resultado es el mismo.

Adjunto (o cofactor)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2 \longrightarrow \alpha_{11} = (-1)^{1+1}.\,det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1.2 - 0.(-2) = 2$$

$$a_{12} = -3 \longrightarrow \alpha_{12} = (-1)^{1+2}.\,det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = -(3.2 - 5.(-2)) = -16$$

$$a_{13} = 0 \longrightarrow \alpha_{13} = (-1)^{1+3}.\,det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 3.0 - 5.1 = -5$$

Con estos datos podemos calcular el determinante de la matriz:

$$\det(A) = |A| = a_{11}.\alpha_{11} + a_{12}.\alpha_{12} + a_{13}.\alpha_{13} = 2.2 + (-3).(-16) + 0.(-5) = 4 + 48 = 52$$

$$a_{13} = 0 \longrightarrow \alpha_{13} = (-1)^{1+3}.\,det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 3.0 - 5.1 = -5$$

$$a_{23} = -2 \longrightarrow \alpha_{23} = (-1)^{2+3}.\,det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = -(2.0 - 5.(-3)) = -15$$

$$a_{33} = 2 \longrightarrow \alpha_{33} = (-1)^{3+3}.\,det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2.1 - 3.(-3) = 2 + 9 = 11$$

$$\det(A) = |A| = a_{13}.\alpha_{13} + a_{23}.\alpha_{23} + a_{33}.\alpha_{33} = 0.(-5) + (-2).(-15) + 2.11 = 30 + 22 = 52$$

$$\det(A) = |A| = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \overbrace{(-1)^{i+k} det(A(i|k))}^{\alpha_{ik}}}_{\text{Determinante calculado por la fila } i} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \overbrace{(-1)^{k+j} det(A(k|j))}^{\alpha_{kj}}}_{\text{Determinante calculado por la columna } j}$$

El valor del determinante no cambia si lo calculamos por cualquier columna o fila

Calcular el determinante de la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Supongamos que decidimos calcularlo por la columna 2:

$$\det(B) = |B| = b_{12}.\beta_{12} + b_{22}.\beta_{22} + b_{32}.\beta_{32} = -1.(-15) + 1.(-11) + 1.20 = 24$$

$$b_{12} = -1 \longrightarrow \beta_{12} = (-1)^{1+2}.det\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -\big(0.(-2) - 3.(-5)\big) = -15$$

$$b_{22} = 1 \longrightarrow \beta_{22} = (-1)^{2+2}.det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 4.(-2) - 3.1 = -11$$

$$b_{32} = 1 \longrightarrow \beta_{32} = (-1)^{3+2}.det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = -(4.(-5) - 0.1) = 20$$

Propiedades del determinante

$\mathbf{det}(\boldsymbol{F_i}(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{A})) = \boldsymbol{c}.\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$ → **Si multiplicamos una fila o una columna de una matriz A por un escalar c entonces el determinante de la matriz es igual a $c.det(A)$**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1) - 1.1 = -2 - 1 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-3) - 3.1 = -6 - 3 = -9$$

$\mathbf{det}(\boldsymbol{c}.\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{n}}.\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$ → **Si multiplicamos una matriz $A \in \mathbb{R}^n$ por un escalar c entonces el determinante de la matriz es igual a $c^n.det(A)$**

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 6.(-3) - 3.3 = -18 - 9 = -27$$

Si una matriz A tiene una fila o una columna donde todos sus coeficientes son 0, entonces $\mathbf{det}(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.0 - 0.1 = 0 - 0 = 0$$

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}) = \mathbf{det}(\boldsymbol{A})\,.\,\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 2.2 - (-3)(-1) = 4 - 3 = 1$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 1.3 - (-1).2 = 3 + 2 = 5$$

$$det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = 3.0 - (-5).1 = 0 + 5 = 5$$

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A_1 A_2} \ldots \boldsymbol{A_n}) = \mathbf{det}(\boldsymbol{A_1})\,.\,\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A_2}) \ldots \boldsymbol{det}(\boldsymbol{A_n})$$

No hay ninguna propiedad para el determinante de una suma de matrices!

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{I_n}) = \mathbf{1}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.(-1)^{1+1}.det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.(-1)^{2+1}.det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.(-1)^{3+1}.det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathbf{det}((\boldsymbol{F_i} \leftarrow \boldsymbol{F_i} + \boldsymbol{cF_k})(\boldsymbol{A})) = \mathbf{det}(\boldsymbol{A})$$

Si sumamos el múltiplo de una fila a otra en una matriz A entonces el determinante no cambia.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} (F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 1.(-1)^{1+1}.det\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + 0.(-1)^{2+1}.det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + 2.(-1)^{3+1}.det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1.(-18 + 6) - 0.(12 + 0) + 2.(6 - 0) = -12 + 12 = 0$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} = 1.(-1)^{1+1}.det\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} + 0.(-1)^{2+1}.det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} + 0.(-1)^{3+1}.det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1.(-18 + 18) - 0.(12 + 0) + 0.(6 - 0) = 0$$

$\mathbf{det}\left((\boldsymbol{F_i} \leftrightarrow \boldsymbol{F_k})(\boldsymbol{A})\right) = -\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$ → **Si permutamos dos filas en una matriz A entonces el determinante cambia de signo.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} (F_3 \leftrightarrow F_1) \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 1.(-1)^{1+1}.\, det \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + 0.(-1)^{2+1}.\, det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + 2.(-1)^{3+1}.\, det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1.(-18+6) - 0.(12+2) + 2.(6+3) = -12 + 18 = 6$$

$$det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.(-1)^{1+1}.\, det \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0.(-1)^{2+1}.\, det \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1.(-1)^{3+1}.\, det \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 2.(-3-6) - 0.(-2-12) + 1.(-6+18) = -18 + 12 = -6$$

Una matriz A tiene inversa si y solamente si $\det(A) \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1.(-1) - 1.(-1) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$\boldsymbol{det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}}$$

$$det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

Un sistema $Ax = b$ solución única si y solamente si A tiene inversa

$$Ax = b \longrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \longrightarrow x = A^{-1}b$$

Determinar si el siguiente sistema tiene solución única:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

Por lo tanto el sistema tiene solución única. Si queremos hallar la solución, podemos calcular la inversa:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) (F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) (F_1 \leftarrow F_1 - F_2) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Multiplicamos ahora por la inversa a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es $x = 3$, $y = -1$.

Determinar si el siguiente sistema tiene solución única:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Por lo tanto, el sistema no tiene solución única (podría no tener solución o tener infinitas soluciones)