# Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si una matriz $A$ con coeficientes reales tiene $m$ filas y $n$ columnas entonces escribimos $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

En una matriz $A$ el elemento que está en la fila $i$ y columna $j$ se denota por $a_{ij}$

$$(A)_{ij} = a_{ij} \begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{12} = -1 \\ a_{21} = 3 \\ a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 \\ 4 & \pi \end{pmatrix}$$

$$B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$b_{12} = \frac{1}{2}$$

$$b_{31} = 4$$

$$b_{21} = 0$$

Una matriz $A$ se dice cuadrada si tiene la misma cantidad de filas que de columnas.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

Una matriz $A$ se dice nula si todos sus elementos son 0.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad

Matemática I – Comisión 2B

# Suma

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}$$

Tengo que sumar matrices de la misma dimensión

$$A + B = C \qquad A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

**Propiedades**

- Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Neutro: $A + 0 = 0 + A = A$
- Conmutativa: $A + B = B + A$
- Opuesto: $A + (-A)$ =0

# Resta

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 7 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

# Producto por un escalar

$$3.\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 12 & 3 \\ 6 & 15 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Propiedades**

- $a(B + C) = aB + aC$
- $(a + b)C = aC + bC$
- $(ab)C = a(bC)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 12 & -6 \\ 27 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -12 & 11 \\ -23 & -12 \end{pmatrix}$$

$$-2\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}\right) = -2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -8 & -6 \\ -26 & 0 \end{pmatrix}$$

# Producto de matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$¿A.B?$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 5 & 7 \\ 6 & 12 & 12 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 7 \\ 6 & 12 & 12 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Para multiplicar dos matrices $A$ y $B$ necesito que $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m \times j}$

**Propiedades**

- $A(B.C) = (A.B).C$
- $A.I_n = I_n.A = A$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$

En general, el producto de matrices **no** es conmutativo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

# Matriz inversa

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso decimos que las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ son **inversas**

Diremos que dos matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son **inversas** si se cumple que $A. A^{-1} = I_n$ y $A^{-1}. A = I_n$

- Solo las matrices cuadradas pueden tener inversa.
- No todas las matrices cuadradas tienen inversa.

**Propiedades**

- Si existe una matriz inversa, es única
- $(A. B)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$
- $(A_1. A_2 \dots A_n)^{-1} = A_n{}^{-1} \dots A_2^{-1}. A_1^{-1}$

# Matriz transpuesta

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ entonces su **transpuesta** $A^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es la matriz tal que $a_{ij}^T = a_{ji}$

**Propiedades**

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(c. A)^T = c. A^T$
- $(A. B)^T = B^T. A^T$

# Ejemplo

Hallar la matriz $X \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ que cumpla $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} = X$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} = X}$$

# Ejemplo

Si $A$ es una matriz cuadrada que cumple que $A^3 = -4A - I$, hallar $A^{-1}$

$$A^3 = -4A - I$$

$$I = -4A - A^3$$

$$A^{-1}.I = A^{-1}(-4A - A^3)$$

$$A^{-1} = -4.A^{-1}A - A^{-1}A^3$$

$$\boxed{A^{-1} = -4I - \mathrm{A}^2}$$

**Ejercicio 13.** Sean $A$ y $B$ dos matrices de $3 \times 3$, decir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. JUSTIFICAR!

1. $(A+I)\cdot(A-I) = A^2 - I$.
2. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
3. $AB = AC \Rightarrow B = C$.
4. $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ o $B = 0$.

Es verdadero, pues: $(A+I).(A-I) = A^2 + IA - AI - I^2 = A^2 + A - A - I^2 = A^2 - I$

Es falso, porque el producto no es conmutativo: $(A+B)^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{AB} + \mathrm{BA} + \mathrm{B}^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Es falso, porque $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, pero $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Es falso, porque $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pero los factores no son iguales a la matriz nula.

**Ejercicio 14.** Hallar, en caso de existir, la matriz $X$ que verifique;

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = X$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2c = -1 \\ 3a + 4c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ 3b + 4d = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 2c = -1 & (1) \\ a = -\dfrac{4c}{3} & (2) \\ b = -2d & (3) \\ 3b + 4d = -3 & (4) \end{cases}$$

Si reemplazamos (2) en (1) y (3) en (4), obtenemos:

$$-\frac{4}{3}c + 2c = -1 \qquad\qquad -6d + 4d = -3$$

$$\frac{2}{3}c = -1 \qquad\qquad -2d = -3$$

$$\boxed{c = -\frac{3}{2}} \qquad\qquad \boxed{d = \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{a = 2} \qquad\qquad \boxed{b = -3}$$

$$\boxed{\text{Por lo tanto, } X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = X.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 9c = -2 \\ 2c = -5 \\ 9d = -3 \\ 2d = -6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c = -\dfrac{2}{9} \\ c = -\dfrac{5}{2} \\ d = -\dfrac{1}{3} \\ d = -3 \end{cases}$$

Como los coeficientes de la matriz no pueden tomar dos valores distintos, en este caso esta ecuación matricial no tiene solución.